81. Band Heft 3
ausgegeben am 5. 9. 1979

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
W. Benz, P. L. Butzer, W.-D. Geyer

B. G. Teubner Stuttgart 1979

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von
Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen
unter Mitwirkung von
Prof. Dr. W. Benz, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13 – Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen – Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Verlag
B. G. Teubner, Postfach 801069, 7000 Stuttgart 80 (Vaihingen) – Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – GW ISSN 0012-0456
Herstellung: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, 6830 Schwetzingen

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigungen von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs, Math. Institut der Universität, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen, zu richten.

Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden die Herausgeber bei den Verlagen anfordern.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten 75, von Buchbesprechungen 2 Sonderdrucke unentgeltlich.

Der 81. Band des Jahresberichtes umfaßt vier Hefte und wird nur geschlossen abgegeben. Der im voraus zahlbare Bezugspreis beträgt DM 74,–. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen. Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichtes im Mitgliedsbeitrag enthalten. Die Bezieher werden gebeten, dem Verlag von Anschriftenänderungen unverzüglich Kenntnis zu geben.

Für den Abdruck vorgesehene Manuskripte sind in einwandfrei leserlicher und völlig druckfertiger Form (Schreibmaschinenschrift) einzureichen. Die Manuskripte müssen nach satztechnischen Richtlinien und Auszeichnungsregeln, die von der Schriftleitung des Jahresberichts zu erhalten sind, gestaltet werden.

Nachträgliche Änderungen bei der Korrektur, die 5% des Satzpreises übersteigen, müssen dem Autor angerechnet werden.

Konten der DMV: Kreissparkasse Tübingen, Girokonto 1626. – Postscheckkonto: DMV in Tübingen, Nr. 18517 – 706 beim Postscheckamt Stuttgart. – DDR: Berliner Stadtkontor, Berlin C 111, Kurstraße, Konto Nr. 20/142007.

Inhalt von Band 81, Heft 3

1. Abteilung

E. Kunz: Über die Anzahl der Gleichungen, die zur Beschreibung einer algebraischen Varietät nötig sind . . . 97

J. Dorfmeister; M. Koecher: Reguläre Kegel . . . 109

2. Abteilung

Buchbesprechungen . . . *33*

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
81 (1979) 97–108

Über die Anzahl der Gleichungen, die zur Beschreibung einer algebraischen Varietät nötig sind*)

E. Kunz, Regensburg

1 Einleitung

Die Frage, über die im folgenden berichtet werden soll, läßt sich sehr einfach formulieren; bei genauerer Betrachtung erweist sich aber schnell, daß es sehr schwierig ist, eine allgemeine Antwort auf sie zu geben. Gerade deshalb hat sie auf viele Mathematiker eine starke Anziehungskraft ausgeübt. Wie es in einem solchen Fall häufig geschieht, haben sich durch die Beschäftigung mit dem Problem, durch die vielfältigen Lösungsansätze und zur Lösung entwickelten Methoden Erkenntnisse eingestellt, die weit über die Bedeutung der ursprünglichen Fragestellung hinausreichen. So wurde auch hier – wie schon oft – durch ein attraktives Problem die allgemeine Entwicklung eines Gebiets der Mathematik stark gefördert.

Zu den vornehmsten Pflichten des Algebraikers gehört es, sich Gedanken über algebraische Gleichungen und Gleichungssysteme zu machen. Bekanntlich ist die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in n Unbekannten mit Koeffizienten aus einem Körper K entweder leer oder ein affiner Unterraum von $\mathbf{A}^n(K)$ der Dimension $n - r$, wenn r der Rang des Systems ist. Umgekehrt läßt sich jeder affine Unterraum der Dimension d in $\mathbf{A}^n(K)$ auch immer durch $n - d$ lineare Gleichungen beschreiben. Man kann nun fragen: Wie verallgemeinern sich diese Aussagen, wenn man von linearen zu algebraischen Gleichungssystemen

$$(1) \qquad F_i(X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

übergeht, wenn also die F_i beliebige Polynome aus $K[X_1, \ldots, X_n]$ sind.

Die Lösungsmengen solcher Systeme in $\mathbf{A}^n(K)$ nennt man bekanntlich *affine algebraische Varietäten.* Algebraischen Varietäten kann man in natürlicher Weise eine Dimension zuordnen. Es stellt sich dann die Frage nach der Dimension der

*) Hauptvortrag auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Aachen 1978. Diese Tagung wurde durch Zuschüsse des Ministeriums für Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen gefördert.

Lösungsmenge eines Systems (1) und danach, wieviele Gleichungen man zur Beschreibung einer d-dimensionalen Varietät im n-dimensionalen Raum benötigt[1]).

Kronecker [25] hat schon 1882 n + 1 als obere Schranke für diese Zahl angegeben (siehe auch [36]). 1891 veröffentlichte Vahlen [47] ein Beispiel, das zeigen sollte, daß die Kroneckersche Schranke auch wirklich angenommen wird, doch wies Perron [35] rund fünfzig Jahre später nach, daß man in dem Vahlenschen Beispiel mit einer Gleichung weniger auskommen kann, als behauptet. In der Folge entwickelte sich eine lebhafte Auseinandersetzung zwischen Perron und Severi um die richtige Interpretation der Vahlenschen Aussage, die viel zur Schärfung der relevanten Begriffe beigetragen hat, insbesondere des Begriffs der „Schnittmultiplizität" und des „vollständigen Durchschnitts" und durch die das Interesse angeregt wurde, welches das Problem auch heute noch besitzt.

Nachdem sich zunächst Fortschritte nur zögernd einstellten, sind in jüngster Zeit einige bemerkenswerte Resultate über das Kronecker-Perronsche Problem erzielt worden, dank der allgemeinen Weiterentwicklung der kommutativen Algebra, die vor allem durch die Verwendung homologischer Methoden gekennzeichnet ist. Für die hier zu beschreibenden Ergebnisse spielt u. a. *die lokale Kohomologietheorie von Grothendieck* [18] und die *Lösung des Serreschen Problems über projektive Moduln* durch Quillen [37] und Suslin [44] eine entscheidende Rolle.

Herr Geyer hat zu dem Thema dieses Vortrags eine Vorlesungsausarbeitung [17] veröffentlicht, die den Stand des Problems im Jahre 1974 wiedergibt. Ich werde mich daher hauptsächlich auf die späteren Ergebnisse konzentrieren. Auch möchte ich auf den Bericht [34] von Ohm hinweisen, der das Problem vor allem vom Standpunkt der algebraischen Kurven aus betrachtet[2]).

2 Grundbegriffe über algebraische Varietäten

Ich stelle zunächst diejenigen Grundbegriffe zusammen, die zur Formulierung der wichtigsten Sätze benötigt werden. Es soll immer eine Körpererweiterung L/K vorgelegt sein, wobei L algebraisch abgeschlossen ist. Eine Teilmenge V des affinen Raums $\mathbf{A}^n(L)$ oder des projektiven Raums $\mathbf{P}^{n-1}(L)$ heißt eine K-*Varietät,* wenn es ein System (1) gibt, das im projektiven Fall aus lauter homogenen Polynomen bestehen soll, so daß V die Menge aller Lösungen des Systems ist. Die Punkte von V

---

[1]) Für die letzte Frage ist nur der Fall interessant, daß K algebraisch abgeschlossen ist, denn andernfalls ist jede algebraische Varietät in $\mathbf{A}^n(K)$ die Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms (S i l h o l, R.: Géométrie algébrique sur un corps non algébriquement clos. Comm. Alg. **6** (1978) 1131–1155): Ist $p(X) \in K[X]$ ein nichtkonstantes Polynom ohne Nullstelle, so verschwindet seine Homogenisierung $q(X_1, X_2)$ nur in (0, 0). Ist für $m > 2$ ein Polynom $\varphi(X_1, \ldots, X_{m-1})$ schon konstruiert, das nur in $(0, \ldots, 0)$ verschwindet, so setze man $\phi(X_1, \ldots, X_m) := q(\varphi(X_1, \ldots, X_{m-1}), X_m)$. Die Lösungsmenge von (1) ist dann auch die von $\phi(F_1, \ldots, F_m) = 0$.

[2]) Da die hier darzustellenden Resultate von verhältnismäßig elementarem Charakter sind, kann man versuchen, sie zum Gegenstand einer Einführung in die kommutative Algebra zu machen. Dies ist durchgeführt in meinem Buch: Eine Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie (Vieweg 1979).

mit Koordinaten aus K heißen die K-*rationalen* Punkte von V. V heißt *irreduzibel,* wenn V sich nicht als Vereinigung zweier K-Varietäten $\neq$ V schreiben läßt. Man kann zeigen, daß jede K-Varietät V eine eindeutige Zerlegung in endlich viele maximale irreduzible Untervarietäten besitzt, die *irreduziblen Komponenten* von V. Die K-Varietäten in $\mathbf{A}^n(L)$ und $\mathbf{P}^{n-1}(L)$ sind auch die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf diesen Räumen, der *Zariski-Topologie* oder K-*Topologie.* Wenn im folgenden topologische Begriffe verwendet werden, so beziehen sich diese immer auf die Zariski-Topologie.

Das *Ideal* $\mathscr{I}(V)$ *einer* K-*Varietät* in $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist definiert als die Menge *aller* Polynome aus $K[X_1, \ldots, X_n]$, die auf V verschwinden. V ist genau dann irreduzibel, wenn $\mathscr{I}(V)$ ein Primideal ist. Für eine nichtleere irreduzible Varietät sei K(V) der Quotientenkörper des Rings $K[V] := K[X_1, \ldots, X_n]/\mathscr{I}(V)$. Ist t sein Transzendenzgrad über K, so setzt man

$$\dim V = \begin{cases} t & \text{im affinen Fall,} \\ t-1 & \text{im projektiven Fall,} \end{cases} \qquad \dim \emptyset = -1,$$

und definiert für eine beliebige Varietät die Dimension als das Maximum der Dimensionen ihrer irreduziblen Komponenten. Besitzen alle Komponenten die Dimension 1 (bzw. 2), so spricht man von einer *affinen oder projektiven algebraischen Kurve (Fläche).* Eine Varietät, die durch eine einzige Gleichung $F(X_1, \ldots, X_n) = 0$ mit nichtkonstantem (homogenem) $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ gegeben wird, heißt K-*Hyperfläche.* Man kann zeigen, daß die Hyperflächen gerade die Varietäten sind, deren sämtliche irreduziblen Komponenten die Dimension $n-1$ ($n-2$ im Projektiven) besitzen. Der obige Dimensionsbegriff, der sich auch auf viele andere Weisen beschreiben läßt, liefert die übliche Dimension, wenn etwa V (im Fall $L = \mathbf{C}$) eine komplexe Mannigfaltigkeit ist und natürlich auch wenn V ein affiner (oder projektiver) Unterraum von $\mathbf{A}^n(L)$ (oder $\mathbf{P}^{n-1}(L)$) ist.

Der Hilbertsche Nullstellensatz besagt, daß durch die Zuordnung $V \to \mathscr{I}(V)$ eine Bijektion der Menge aller K-Varietäten $V \subset \mathbf{A}^n(L)$ auf die Menge aller Ideale $I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\mathrm{Rad}(I) = I$ gegeben wird (im projektiven Fall auf die Menge aller homogenen Ideale $I \neq K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\mathrm{Rad}(I) = I$). Wenn also (1) ein V definierendes Gleichungssystem ist, so ist $\mathscr{I}(V) = \mathrm{Rad}(F_1, \ldots, F_m)$. Auf dem Hilbertschen Nullstellensatz fußt die Methode der algebraischen Geometrie, geometrische Aussagen in Aussagen der Idealtheorie zu übersetzen.

Jede K-Varietät V läßt sich definitionsgemäß als Durchschnitt von endlich vielen K-Hyperflächen darstellen und unser Problem fragt danach, wieviele Hyperflächen man hierzu benötigt. In idealtheoretischer Formulierung lautet die Frage: Welches ist die kleinste Zahl m, für die es ein Polynomsystem $\{F_1, \ldots, F_m\}$ mit $\mathscr{I}(V) = \mathrm{Rad}(F_1, \ldots, F_m)$ gibt? Bezeichnen wir allgemein für ein Ideal I eines noetherschen Rings R mit $\mu(I)$ die Länge eines kürzesten Erzeugendensystems von I, so ist offensichtlich $m \leqslant \mu(\mathscr{I}(V))$. Unser Problem hängt somit zusammen mit der Frage, wie groß $\mu(\mathscr{I}(V))$ ist und ist daher auch gekoppelt mit dem allgemeineren Problem, *Aussagen über die minimale Erzeugendenzahl von Idealen in noetherschen Ringen herzuleiten.*

3 Obere Abschätzung der Anzahl der notwendigen Gleichungen

Das eingangs erwähnte Ergebnis von Kronecker besagt: Jede affine oder projektive K-Varietät im n-dimensionalen Raum ist Durchschnitt von n + 1 Hyperflächen. M. Kneser [24] zeigte 1960 in einer Perron zum 80. Geburtstag gewidmeten Arbeit, daß man für algebraische Kurven im 3-dimensionalen Raum tatsächlich immer mit 3 Flächen auskommen kann.

Dies erwies sich als Spezialfall eines allgemeineren Satzes von Storch [43] und Eisenbud-Evans [10]:

Satz 1 a) *Jede nichtleere* K-*Varietät in* $\mathbf{A}^n(L)$ *ist Durchschnitt von* n K-*Hyperflächen.*

b) *Eine nichtleere* K-*Varietät in* $\mathbf{P}^n(L)$ *ist Durchschnitt von* n K-*Hyperflächen, sofern sie einen* K-*rationalen Punkt besitzt.*

(Es scheint nicht bekannt zu sein, ob die letzte Bedingung überflüssig ist. Für K = L ist sie natürlich erfüllt.)

Der Beweis dieses Satzes war überraschend elementar. Der wesentliche Gedanke bestand darin, die Satz 1 entsprechende idealtheoretische Aussage zu einem Satz über Ideale im Polynomring R[X] über einem beliebigen noetherschen Ring zu verallgemeinern. Die allgemeinere Aussage ließ sich dann durch einen Induktionsbeweis bestätigen, in dessen Verlauf die geometrisch inspirierte Methode von M. Kneser eine Rolle spielte.

Die durch den Satz gegebene Schranke ist scharf: Im einfachsten Beispiel betrachtet man zwei windschiefe Geraden in $\mathbf{P}^3$. Die hierdurch gegebene algebraische Kurve läßt sich nicht als Durchschnitt zweier algebraischer Flächen darstellen. Wir werden hierauf im nächsten Abschnitt zurückkommen.

Die Frage, ob es auch eine obere Schranke für die (minimale) Erzeugendenzahl des Ideals $\mathcal{J}(V)$ einer Varietät V gibt, wurde schon 1916 durch Macaulay [28] negativ entschieden, der gezeigt hat: In $K[X_1, X_2, X_3]$ gibt es für jedes $r \in \mathbf{N}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$, das eine affine algebraische Kurve definiert und für das $\mu(\mathfrak{p}) \geqslant r$ ist. Eine moderne Behandlung dieses Beispiels wird durch Abhyankar [2] und in der schon erwähnten Vorlesungsausarbeitung von Geyer [17] gegeben.

4 Untere Abschätzung der Zahl der notwendigen Gleichungen

Eine generelle solche Abschätzung ist klassisch: Man kann sie erhalten, wenn man etwa den verallgemeinerten Krullschen Hauptidealsatz für noethersche Ringe auf Polynomringe anwendet und geometrisch interpretiert:

Satz 2 *Ist die Lösungsmenge* V *eines (homogenen) Gleichungssystems* (1) *in* $\mathbf{A}^n(L)$ (*bzw.* $\mathbf{P}^{n-1}(L)$) *nicht leer, so haben alle irreduziblen Komponenten von* V *eine Dimension* $\geqslant n - m$ ($\geqslant n - m - 1$ *im projektiven Fall*). *Zur Beschreibung einer affinen oder projektiven Varietät* V *im* n-*dimensionalen Raum benötigt man mindestens* $n - \delta(V)$ *Gleichungen, wobei* $\delta(V)$ *das Minimum der Dimensionen der irreduziblen Komponenten von* V *ist. Insbesondere läßt sich das Ideal einer solchen Varietät nicht mit weniger als* $n - \delta(V)$ *Elementen erzeugen.*

Von Hartshorne ([19], [20]) stammt die Erkenntnis, daß die hier diskutierte Frage für projektive Varietäten mit den Zusammenhangsverhältnissen auf der betrachteten Varietät zu tun hat und daß zu ihrer Beantwortung die lokale Kohomologietheorie herangezogen werden kann. Die Mayer-Vietoris-Sequenz für die lokale Kohomologie verwendend, hat Rung [38] die folgende Verallgemeinerung eines Resultats von Hartshorne hergeleitet:

Satz 3 $V \subset \mathbf{P}^n(L)$ *sei eine* K-*Varietät*, $W \subset V$ *eine Untervarietät, so daß* $V \setminus W$ *unzusammenhängend in der* K-*Topologie von* $\mathbf{P}^n(L)$ *ist. Dann benötigt man zur Beschreibung von* V *mindestens* $n - \dim W - 1$ *homogene algebraische Gleichungen.*

Beachtet man $\dim \emptyset = -1$, so sieht man hieraus:

Korollar *Zur Beschreibung einer unzusammenhängenden Varietät* $V \subset \mathbf{P}^n(L)$ *benötigt man mindestens* n *homogene algebraische Gleichungen*

(Der Durchschnitt von weniger als n K-Hyperflächen aus $\mathbf{P}^n(L)$ ist stets zusammenhängend.)

Zwei windschiefe Geraden in $\mathbf{P}^3$ lassen sich somit nicht als Durchschnitt von zwei algebraischen Flächen darstellen. Satz 3 zeigt auch, daß eine zusammenhängende Varietät in $\mathbf{P}^n$, die nach Herausnahme eines Punktes unzusammenhängend wird, sich nicht als Durchschnitt von weniger als $n - 1$ Hyperflächen darstellen läßt. Es scheint kein Beispiel für eine zusammenhängende Varietät in $\mathbf{P}^n$ $(n \geqslant 2)$ bekannt zu sein, zu deren Beschreibung man n Gleichungen wirklich benötigt.

Satz 3 läßt sich verallgemeinern, indem man auch die lokalen Zusammenhangsverhältnisse auf V in Betracht zieht (Hartshorne [19], Rung [38]). Allerdings zeigen Beispiele von Schenzel-Vogel [41], daß die durch Satz 3 und seine Verallgemeinerungen gegebenen unteren Schranken nicht immer angenommen werden müssen.

5 Vollständige Durchschnitte

Varietäten, die sich (bei gegebener Dimension) durch die geringst-mögliche Zahl von Gleichungen beschreiben lassen, sind wegen ihrer speziellen geometrischen Eigenschaften von besonderem Interesse.

Definition *Eine* d-*dimensionale* K-*Varietät* V *im* n-*dimensionalen Raum heißt* mengentheoretisch (idealtheoretisch) vollständiger Durchschnitt, *wenn sie als Durchschnitt von* $n - d$ K-*Hyperflächen dargestellt werden kann (wenn ihr Ideal im Polynomring von* $n - d$ *Elementen erzeugt wird).*

Ist V idealtheoretisch vollständiger Durchschnitt, so auch mengentheoretisch, jedoch gilt im allgemeinen nicht die Umkehrung. (Im Rahmen der Theorie der Schnittmultiplizität läßt sich genauer charakterisieren, was es geometrisch bedeutet, wenn eine Varietät idealtheoretisch vollständiger Durchschnitt ist.) Ist V mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt, so ist $\delta(V) = \dim V$ nach Satz 2, d. h., alle irreduziblen Komponenten von V haben dieselbe Dimension. In Satz 3 ist als Spezialfall der Satz von Hartshorne [19] enthalten, daß im Projektiven vollständige

Durchschnitte positiver Dimension stets zusammenhängend sind und sogar zusammenhängend bleiben, wenn man aus ihnen eine Untervarietät W mit $\dim V - \dim W \geqslant 2$ herausnimmt.

Hyperflächen sind idealtheoretisch (und natürlich auch mengentheoretisch) vollständige Durchschnitte. Aus Satz 1 folgt, daß 0-dimensionale Varietäten (das sind endliche Punktmengen) im Affinen stets mengentheoretisch vollständige Durchschnitte sind und im Projektiven jedenfalls dann, wenn sie einen K-rationalen Punkt enthalten. 0-dimensionale affine Varietäten sind auch idealtheoretisch vollständige Durchschnitte, dagegen gibt es im Projektiven zu jeder Zahl $r \in \mathbf{N}$ eine 0-dimensionale Varietät, deren Ideal nicht mit weniger als r Polynomen erzeugt werden kann ([17]).

Unter allen Problemen des Gebiets, über das ich hier berichte, hat die Frage die meiste Beachtung erfahren, ob jede algebraische Kurve im 3-dimensionalen affinen Raum (jede zusammenhängende Kurve in $\mathbf{P}^3$) mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt ist, d. h. Durchschnitt von 2 algebraischen Flächen. Während die Antwort im Projektiven noch in tiefem Dunkel zu liegen scheint, haben sich im Affinen in den letzten Jahren bemerkenswerte Teilergebnisse eingestellt. Über sie wird im übernächsten Abschnitt berichtet.

6 Idealtheoretische Beschreibung lokaler vollständiger Durchschnitte

Es sollen hier nur affine K-Varietäten $V \subset \mathbf{A}^n(L)$ betrachtet werden. Für $x \in V$ sei $\dim_x V$ das Maximum der Dimension derjeniger irreduzibler Komponenten von V, die x enthalten. Ist I das Ideal von V in $R := K[X_1, \dots, X_n]$ und $\mathfrak{p}_x := \{f \in R \mid f(x) = 0\}$, so ist $\mathfrak{p}_x$ ein I umfassendes Primideal. $R_{\mathfrak{p}_x}$ sei der lokale Ring von $\mathfrak{p}_x$, d. h. die Menge aller Quotienten f/g ($f, g \in R$, $g \notin \mathfrak{p}_x$).

Definition V *heißt* lokal vollständiger Durchschnitt in x, *wenn das Ideal* $I_{\mathfrak{p}_x} := \{f/g \mid f \in I, g \notin \mathfrak{p}_x\}$ *in* $R_{\mathfrak{p}_x}$ *von* $n - \dim_x V$ *Elementen erzeugt wird.*

Ist diese Bedingung erfüllt, so läßt sich V jedenfalls in der Umgebung von x durch $n - \dim_x V$ Gleichungen beschreiben.

Zu den Varietäten V, die für alle $x \in V$ lokal vollständige Durchschnitte sind, gehören die singularitätenfreien (glatten) Varietäten. Diese können folgendermaßen definiert werden: $F_1, \dots, F_m$ sei ein Erzeugendensystem des Ideals von V im Polynomring $L[X_1, \dots, X_n]$ und für $x \in V$ sei r_x der Rang der Jacobischen Matrix $\partial(F_1, \dots, F_m)/\partial(X_1, \dots, X_n)$ im Punkte x. Allgemein gilt $r_x \leqslant n - \dim_x V$. Ist $r_x < n - \dim_x V$, so heißt x *Singularität* von V, andernfalls *regulärer Punkt* von V. Beispielsweise ist im Fall $L = \mathbf{C}$ eine Varietät sicher dann singularitätenfrei, wenn sie eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Forster [16] hat 1964 gezeigt, daß das Ideal einer affinen Varietät in $\mathbf{A}^n$, die lokal überall vollständiger Durchschnitt ist, durch n + 1 Polynome erzeugt werden kann. Gleichzeitig äußerte er die Vermutung, daß man mit n Polynomen auskommen kann. Dies wurde für glatte Kurven in $\mathbf{A}^3$ zunächst von Abhyankar [1] bestätigt (siehe auch [3]); später gab Murthy [31] für das analoge Resultat im Fall lokaler vollständiger Durchschnitte einen kurzen homologischen Beweis. Nach Vorarbeiten von Sathaye [40] gelang 1977 Mohan Kumar [29] der Beweis im allgemeinen Fall:

Satz 4 (Forster-Vermutung) *Das Ideal einer Varietät im* $\mathfrak{n}$*-dimensionalen affinen Raum, die lokal überall vollständiger Durchschnitt ist (insbesondere einer singularitätenfreien Varietät), wird (global) von* n *Elementen erzeugt.*

Der Beweis benutzt die Ergebnisse von Quillen und Suslin über projektive Moduln. *Projektive Moduln* sind definiert als direkte Summanden freier Moduln. Ist ein solcher Modul M über einem noetherschen Ring R gegeben und ist er endlich erzeugt, so ist für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R der $R_\mathfrak{p}$ -Modul $M_\mathfrak{p}$ frei, man sagt, M sei *lokal frei.* Ist der Rang von $M_\mathfrak{p}$ konstant = r für alle $\mathfrak{p}$, so sagt man auch M sei vom Rang r.

Serres Problem fragte danach, ob endlich erzeugte projektive Moduln über Polynomringen $K[X_1, \ldots, X_n]$ (K Körper) stets frei sind (oder mit andern Worten: ob ein direkter Summand eines Moduls mit Basis stets ebenfalls eine Basis besitzt). Quillen und Suslin haben diese Frage nicht nur positiv entschieden, sondern eine so elementare Lösung gefunden, daß man sie – wenn auch vielleicht nicht in der linearen Algebra – so doch in einer Einführungsvorlesung über kommutative Algebra vollständig darstellen kann. Die Serresche Frage ist verknüpft mit dem durch Satz 4 gegebenen Problem, da man auf Grund lokaler Daten ein Ideal manchmal als homomorphes Bild eines projektiven Moduls vom wünschenswerten Rang darstellen kann. Ist dieser sogar frei, so wird das Ideal von so viel Elementen erzeugt, wie der Rang beträgt. Mohan Kumars Beweis von Satz 4 benutzt dieses Prinzip, das schon bei Serre [42] im Zusammenhang mit seiner Vermutung über projektive Moduln auftrat. Die geometrischen Konsequenzen, die eine positive Lösung des Problems nach sich ziehen würden, bedeuteten für viele Mathematiker einen starken Ansporn, sich mit der Vermutung zu beschäftigen.

Auch der Beweis des folgenden Satzes von Mohan Kumar benutzt das beschriebene Beweisprinzip:

Satz 5 *Besitzt die Nullstellenmenge des Ideals* $I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ in $\mathbf{A}^n$ *die Dimension* d *und ist* $\mu(I/I^2) \geqslant d + 2$, *so ist*

$$\mu(I) = \mu(I/I^2).$$

Hier wird die Bestimmung der minimalen Erzeugendenzahl von I auf die des „Konormalenmoduls" I/I^2 zurückgeführt.

Die langjährigen Bemühungen zur Lösung der Serreschen Vermutung haben auch unabhängig von den Ergebnissen in dem hier behandelten Fragenkreis in der Algebra reiche Früchte getragen. So ist das Problem ja auch eng verknüpft mit der Entstehung der algebraischen K-Theorie. Einen umfassenden Überblick über die mit dem Problem zusammenhängenden Fragen gibt die Vorlesungsausarbeitung [27] von Lam.

Die hier zitierten Sätze besitzen Analoga in der Theorie der komplexen Räume und komplexen Vektorraumbündel, die ihrerseits mit der topologischen Bündeltheorie eng zusammenhängt. Viele Sätze dieses Gebiets waren zunächst in der komplex-analytischen Geometrie bekannt, erwiesen sich dann aber auch im algebräischen Fall als richtig, wenn auch mit gänzlich anderem Beweis. Die komplexe Analysis erweist sich hier als eine Quelle für mögliche algebraische Sätze. Da dem Algebraiker die starken Werkzeuge des Analytikers nicht zur Verfügung stehen, ist es jedoch i. allg. schwieriger, den Beweis im algebraischen Fall zu finden.

7 Sind affine algebraische Kurven mengentheoretisch vollständige Durchschnitte?

Diese schon seit langem bestehende Frage ist jetzt in ziemlich allgemeinen Fällen positiv entschieden, und es wäre nicht mehr so überraschend, wenn bald der allgemeine Beweis vorliegen würde. Der entscheidende Durchbruch ist 1975 L. Szpiro [46] gelungen, der – eine Idee Ferrands [15] verwendend – gezeigt hat:

Satz 6 *Jede algebraische Kurve in $\mathbf{A}^3$, die lokal vollständiger Durchschnitt ist (speziell jede glatte Kurve), ist mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt.*

Der Beweis soll hier skizziert werden, um anzudeuten, welche Ergebnisse der kommutativen und homologischen Algebra in ihm zum Tragen kommen. (Ohne die Definition zu geben, verwenden wir in dieser Skizze die Moduln $\mathrm{Ext}^i_R(M, N)$ für Moduln M, N über einem Ring R.)

Ein Modul M über einem Ring R heißt *von endlicher projektiver Dimension,* wenn es eine exakte Folge

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$$

mit lauter projektiven R-Moduln P_i gibt. Das Minimum der Längen n solcher Sequenzen heißt dann die *projektive Dimension* von M (geschrieben pd(M)).

Ist eine Kurve in $\mathbf{A}^n$ lokal vollständiger Durchschnitt, so gilt für ihr Ideal I im Polynomring $\mathrm{pd}(I) = n - 2$, speziell $\mathrm{pd}(I) = 1$ für Kurven in $\mathbf{A}^3$. Ausgangspunkt für den Beweis von Satz 6 ist der folgende, im wesentlichen auf Serre [42] zurückgehende

Satz 7 R *sei ein noetherscher Integritätsbereich, über dem alle endlich erzeugten projektiven Moduln frei sind.* M *sei ein endlich erzeugter* R*-Modul mit* $\mathrm{pd}(M) \leqslant 1$, $\dim(Q(R) \otimes_R M) = r$, *wobei* Q(R) *den Quotientenkörper von* R *bedeutet. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) $\mathrm{Ext}^1_R(M, R)$ *wird von* s *Elementen erzeugt.*

b) M *wird von* s + r *Elementen erzeugt.*

Ist I das Ideal in $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ einer Kurve in $\mathbf{A}^n$, so heißt

$$\omega_{R/I} := \mathrm{Ext}^{n-2}_R(I, R) = \mathrm{Ext}^{n-1}_R(R/I, R)$$

der *kanonische (dualisierende) Modul* der Kurve. Über ihn weiß man auf Grund der *lokalen Dualitätstheorie* von Grothendieck gut Bescheid. Beispielsweise ist $\omega_{R/I}$ ein projektiver R/I-Modul vom Rang 1, falls die Kurve lokal vollständiger Durchschnitt ist, was im folgenden immer vorausgesetzt sei. (Im Fall n = 3 wird durch Satz 7 die Bestimmung von $\mu(I)$ auf die von $\mu(\omega_{R/I})$ zurückgeführt. Murthys Beweis von Satz 4 im Fall n = 3 benutzte dieses Prinzip.)

Eine weitere wesentliche Idee im Beweis von Satz 6 beruht auf einer der Deformationstheorie entlehnten Konstruktion: Ist P ein projektiver R/I-Modul vom

Rang 1 und $\pi : I/I^2 \to P$ ein Epimorphismus von R/I-Moduln, so hat man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I/I^2 & \to & R/I^2 & \to & R/I & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & P & \longrightarrow & F & \longrightarrow & R/I & \to & 0 \end{array}$$

wobei F die Fasersumme von P und R/I^2 über I/I^2 ist. Eine einfache Rechnung ergibt

Lemma $F \cong R/J$, *wobei* J *ein Ideal mit* $I^2 \subset J \subset I$ *ist, das lokal an jeder Stelle von ebensoviel Elementen erzeugt wird wie* I.

Da für lokale vollständige Durchschnitte I/I^2 ein projektiver R/I-Modul vom Rang $n - 2$ ist, hat man nach dem *Serreschen Abspaltungssatz* [42] einen Epimorphismus $\pi : I/I^2 \to \omega_{R/I}$. Wendet man das Lemma mit $P = \omega_{R/I}$ an, so erhält man eine exakte Folge

$$0 \to \omega_{R/I} \to R/J \to R/I \to 0.$$

Aus der langen exakten Folge für $\mathrm{Ext}^*_R(-, R)$ ergibt sich dann ein Epimorphismus

$$\omega_{R/J} = \mathrm{Ext}^{n-1}_R(R/J, R) \to \mathrm{Ext}^{n-1}_R(\omega_{R/I}, R).$$

Nun besagt der lokale Dualitätssatz von Grothendieck, daß $\mathrm{Ext}^{n-1}_R(\omega_{R/I}, R) = \mathrm{Ext}^{n-1}_R(\mathrm{Ext}^{n-1}_R(R/I, R), R) \cong R/I$. Man erhält einen Epimorphismus $\omega_{R/J} \to R/I$ und kann leicht folgern, daß $\omega_{R/J}$ von einem Element erzeugt wird. Im Fall $n = 3$ kann man Satz 7 auf $M = J$ anwenden. Man erhält $\mu(J) = 2$. Da J nach dem Lemma die gleiche Nullstellenmenge besitzt wie I, ist gezeigt, daß die betrachtete Kurve in der Tat Durchschnitt von 2 algebraischen Flächen ist.

Mohan Kumar [29] hat das Ergebnis von Szpiro verallgemeinert:

Satz 8 *Jede algebraische Kurve in* $\mathbf{A}^n$ $(n \geqslant 3)$, *die lokal vollständiger Durchschnitt ist, ist auch mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt.*

Der Beweis ergibt sich mit den obigen Methoden aus Satz 5: Für das betrachtete Ideal J gilt nach dem Serreschen Abspaltungssatz $J/J^2 \cong (R/J)^{n-2} \oplus P$ mit einem projektiven R/J-Modul P. Dabei ist $P \cong \Lambda^{n-1} J/J^2$ und nach der Dualitätstheorie $\Lambda^{n-1} J/J^2 \cong \mathrm{Hom}(\omega_{R/J}, R) \cong R/J$. Somit ist J/J^2 frei vom Rang $n - 1$. Wenn $n > 3$ ist, kann Satz 5 angewandt werden und man erhält $\mu(J) = \mu(J/J^2) = n - 1$, was bedeutet, daß die Kurve Durchschnitt von $n - 1$ Hyperflächen ist.

Für Körper von Primzahlcharakteristik haben Cowsik und Nori [4] inzwischen den Beweis im allgemeinen Fall erzielt:

Satz 9 *Ist* K *ein Körper der Charakteristik* $p > 0$, *so ist* jede *Kurve in* $\mathbf{A}^n$ *mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt.*

Es ist eine oft anzutreffende Erscheinung in der Algebra, daß Sätze in Charakteristik $p > 0$ einfacher zu beweisen sind als in Charakteristik 0, da man sich des Frobenius-Homomorphismus bedienen kann, also der Tatsache, daß die p-te

Potenz einer Summe die Summe der p-ten Potenz der Summanden ist. So wird auch Satz 9 durch eine geschickte Verwendung des Frobenius-Homomorphismus auf Satz 8 zurückgeführt.

8 Erzeugung von Idealen in noetherschen Ringen

Dem mit den hier diskutierten Fragen eng verwobenen Problem, allgemeine Aussagen über die minimale Erzeugung von Idealen in noetherschen Ringen herzuleiten, ist eine reichhaltige Literatur gewidmet. Ohne ins Detail zu gehen, sollen zum Schluß einige wichtige Veröffentlichungen mit dieser Zielsetzung aufgezählt werden als weiterer Beleg für die anregenden Wirkungen, die von der ursprünglichen Fragestellung auf die kommutative Algebra ausgegangen sind.

Der *Krullsche Hauptidealsatz* [26] hat Verallgemeinerungen auf Determinantenideale erfahren, das sind Ideale, die von Unterdeterminanten eines festen Formats einer Matrix erzeugt werden (vgl. etwa Eagon-Northcott [9], Eisenbud-Evans [11], Hochster-Eagon [22], Jozéfiak [23]).

Das *Lokal-Global-Prinzip* fragt nach Aussagen über die Erzeugendenzahl eines Ideals, dessen lokale Erzeugendenzahlen bekannt sind. Mit dieser Frage beschäftigen sich z. B. Forster [16], Swan [45], Eisenbud-Evans [12], [13], Mohan Kumar [29], Sathaye [40]).

Ein *Ideal heißt vollständiger Durchschnitt,* wenn es von soviel Elementen erzeugt wird, wie nach dem Krullschen Hauptidealsatz minimal möglich ist. Mit den Eigenschaften solcher Ideale befassen sich viele Publikationen, z. B. Davis [5], [6], [7], Ferrand [14], Heitmann [21], Vasconcelos [48], Mohan Kumar [30].

Die *Erzeugung maximaler Ideale* in noetherschen Ringen wird vor allem in Davis-Geramita [8] und einigen weiteren Arbeiten dieser Autoren untersucht.

Häufig kann man genauere Aussagen machen, wenn man sich auf Ideale *noetherscher Ringe eines speziellen Typs* beschränkt (Reguläre Ringe, Gorensteinringe, Cohen-Macaulay-Ringe, Potenzreihenringe). Eine Zusammenstellung von Resultaten dieser Art und ein reichhaltiges Literaturverzeichnis enthält die Schrift [39] von Judith Sally.

Literatur

[1] Abhyankar, S. S.: Algebraic Space Curves. Sém. Math. Sup. 43, Montréal 1971

[2] Abhyankar, S. S.: On Macaulay's Example. In: Conf. on Comm. Algebra; Lawrence 1972. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973. Lecture Notes in Math. 311, 1–16

[3] Abhyankar, S. S.; Sathaye, A. M.: Geometric Theory of Algebraic Space Curves. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974. Lecture Notes in Math. 423

[4] Cowsik, R. C.; Nori, M. V.: Curves in Characteristic p are Set Theoretic Complete Intersections. Inv. Math. **45** (1978) 111–114

[5] Davis, E. D.: Ideals of the Principal Class, R-Sequences and a Certain Monoidal Transformation. Pac. J. Math. **20** (1967) 197–205

[6] Davis, E. D.: Further Remarks on Ideals of the Principal Class. Pac. J. Math. **27** (1968) 49–51

[7] Davis, E. D.: Prime Elements and Prime Sequences in Polynomial Rings. Proc. AMS **72** (1978) 33–38

[8] Davis, E. D.; Geramita, A. V.: Efficient Generation of Maximal Ideals in Polynomial Rings. Trans. AMS **231** (1977) 497–505

[9] E a g o n, J. A.; N o r t h c o t t, D. G.: Ideals Defined by Matrices and a Certain Complex Associated with them. Proc. Royal Soc. England, A **269** (1962) 188–204

[10] E i s e n b u d, D.; E v a n s, E. G. jr.: Every Algebraic Set in n-Space is the Intersection of n Hypersurfaces. Inv. Math. **19** (1973) 107–112

[11] E i s e n b u d, D.; E v a n s, E. G. jr.: A Generalized Principal Ideal Theorem. Nagoya Math. J. **62** (1976) 41–53

[12] E i s e n b u d, D.; E v a n s, E. G. jr.: Generating Modules Efficiently: Theorems from Algebraic K-Theory. J. Alg. **27** (1973) 278–305

[13] E i s e n b u d, D.; E v a n s, E. G. jr.: Three Conjectures about Modules over Polynomial Rings. Conf. on Comm. Algebra; Lawrence 1972. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973. Lecture Notes in Math. 311, 78–89

[14] F e r r a n d, D.: Suite régulière et intersection complète. C. R. Acad. Sci. Paris **264** (1967) 427–428

[15] F e r r a n d, D.: Courbes gauches et fibré de rang deux. C. R. Acad. Sci. Paris **281** (1975) 345–347

[16] F o r s t e r, O.: Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem noetherschen Ring. Math. Z. **84** (1964) 80–87

[17] G e y e r, W. D.: On the Number of Equations which are Necessary to Describe an Algebraic Set in n-Space. Atas 3ª Escola de Algebra (Brasilia 1974) 183–317

[18] G r o t h e n d i e c k, A.: Local Cohomology. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967. Lecture Notes in Math. 41

[19] H a r t s h o r n e, R.: Complete Intersections and Connectedness. Amer. J. Math. **84** (1962) 497–508

[20] H a r t s h o r n e, R.: Cohomological Dimension of Algebraic Varieties. Ann. of Math. **88** (1968) 403–450

[21] H e i t m a n n, R.: A Negative Answer to the Prime Sequence Question. Prepr.

[22] H o c h s t e r, M.; E a g o n, J. A.: Cohen-Macaulay-Rings, Invariant Theory and the Generic Perfection of Determinantal Loci. Amer. J. Math. **93** (1971) 1020–1058

[23] J o z é f i a k, T.: Ideals Generated by Minors of a Symmetric Matrix. Prepr.

[24] K n e s e r, M.: Über die Darstellung algebraischer Raumkurven als Durchschnitte von Flächen. Arch. Math. **11** (1960) 157–158

[25] K r o n e c k e r, L.: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. J. f. d. reine angew. Math. **92** (1882) 1–123

[26] K r u l l, W.: Über einen Hauptsatz der allgemeinen Ringtheorie. Sitz.-Ber. Heidelb. Akad. Wiss. (1929) 11–16

[27] L a m, T. Y.: Serre's Conjecture. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978. Lecture Notes in Math. 635

[28] M a c a u l a y, F. S.: Algebraic Theory of Modular Systems. Cambr. Tracts **19** (1916)

[29] M o h a n K u m a r, N.: On two Conjectures about Polynomial Rings. Inv. math. **46** (1978) 225–236

[30] M o h a n K u m a r, N.: Complete Intersections. J. Math. Kyoto **17** (1977) 533–538

[31] M u r t h y, M. P.: Generators for Certain Ideals in Regular Rings of Dimension Three. Comm. Math. Helv. **47** (1972) 179–184

[32] M u r t h y, M. P.: Complete Intersections. In: Conf. Comm. Algebra Kingston 1975. Queen's Papers Pure Appl. Math. 42

[33] N o r t h c o t t, D. G.; R e e s, D.: Reduction of Ideals in Local Rings. Proc. Cambr. Phil. Soc. **50** (1954) 145–158

[34] O h m, J.: Space Curves as Ideal-theoretic Complete Intersections. Ms. 1977

[35] P e r r o n, O.: Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker. Math. Z. **47** (1942) 318–324

[36] P e r r o n, O.: Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker. Math. Ann. **118** (1941/43) 441–448

[37] Q u i l l e n, D.: Projective Modules over Polynomial Rings. Inv. math. **36** (1976) 167–171

[38] R u n g, J.: Mengentheoretische Durchschnitte und Zusammenhang. Regensburger Math. Schriften **3** (1978)

[39] S a l l y, J.: Numbers of Generators of Ideals in Local Rings. New York: Dekker 1978. Lecture Notes Pure Appl. Math. Series 35

[40] S a t h a y e, A.: On the Forster-Eisenbud-Evans Conjecture. Inv. math. **46** (1978) 211–224

[41] S c h e n z e l, P.; V o g e l, W.: On Set-Theoretic Intersections. J. Alg. **48** (1977) 401–408

[42] S e r r e, J. P.: Sur les modules projectifs. Sém. Dubreil-Pisot (1960/61)

[43] S t o r c h, U.: Bemerkung zu einem Satz von M. Kneser. Archiv Math. **23** (1972) 403–404
[44] S u s l i n, A.: Projektive Moduln über Polynomringen (russ.) Dokl. Akad. Nauk S.S.R. **26** (1976)
[45] S w a n, R.: The Number of Generators of a Module. Math. Z. **102** (1967) 318–322
[46] S z p i r o, L.: Toute courbe localement intersection complète de $\mathbf{A}^3$ et ensemblistement intersection complète. Ms. 1975.
[47] V a h l e n, K. Th.: Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumkurven. J. f. d. reine angew. Math. **108** (1891) 346–347
[48] V a s c o n c e l o s, W. V.: Ideals Generated by R-sequences. J. Alg. **6** (1967) 309–316

[A 260]

Prof. Dr. E. Kunz
Fachbereich Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
D-8400 Regensburg

(*Eingegangen: 16. 10. 1978*)

Jber d. Dt. Math.-Verein.
81 (1979) 109–151

Reguläre Kegel

J. Dorfmeister und M. Koecher, Münster

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit logarithmisch konvexen Funktionen auf regulären Kegeln in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen.

Es wird versucht, einen Überblick zu geben über diejenigen Untersuchungen, die sich mit solchen Funktionen beschäftigen.

Die Klasse dieser Abbildungen ist wegen ihrer verschiedenen Anwendungen von Interesse. Einerseits erhält man für eine homogene logarithmisch konvexe Abbildung $\eta: K \to \mathbf{R}^+$, die am Rand des Kegels K gegen ∞ konvergiert, und jeden Punkt von K in kanonischer Weise einen Diffeomorphismus von K auf K^*, den dualen Kegel zu K. Andererseits definiert ein solches η eine riemannsche Metrik η'' auf K. Schließlich erhält man eine kommutative Algebra $[V, \eta, e]$ mit Einselement $e \in K$ auf dem K umgebenden Vektorraum V; in manchen Fällen gewinnt man aus dieser Algebra den Kegel K durch eine einfache Konstruktion zurück.

Von besonderem Interesse sind die folgenden beiden Teilklassen logarithmisch konvexer Funktionen auf K:

1. die matrix-positiven Abbildungen, d. h. diejenigen Abbildungen $\eta: K \to \mathbf{R}^+$, für die zu beliebigen $x_1, \dots, x_n \in K$ die Matrix $(\eta(x_i + x_j))$ positiv semidefinit ist,

2. diejenigen logarithmisch konvexen Abbildungen $\eta: K \to \mathbf{R}^+$, für die die Gruppe $\mathrm{Aut}(K, \eta) = \{W; W \in GL\, V, WK = K, \eta(Wx) = \alpha(W)\eta(x), x \in K\}$ transitiv auf K operiert.

Einem Ergebnis von E. A. Nussbaum zufolge stehen die matrix-positiven Abbildungen in eineindeutiger Beziehung zu den positiven Borelmaßen auf $\overline{K^*}$. Man erhält eine Abschätzung von η gegen eine Exponentialfunktion.

Bezeichnet μ_η das zu η gehörige Maß auf $\overline{K^*}$ und ist μ_η absolutstetig in bezug auf das Lebesgue-Maß auf K^* mit Dichte ρ_η, so kann man zeigen, daß η am Rand von K gegen ∞ konvergiert, falls ρ_η nicht zu stark wächst.

Ist dagegen $\eta: K \to \mathbf{R}^+$ eine (beliebige) logarithmisch konvexe Abbildung, für die $\mathrm{Aut}(K, \eta)$ transitiv auf K operiert, so konvergiert η am Rand von K gegen ∞ und $\mathrm{Aut}(K, \eta)$ besteht aus Isometrien des riemannschen Raumes (K, η''). Weiter ist eine geeignete positive Potenz von η matrix-positiv.

Eine detaillierte Untersuchung der Abbildungen vom Typ 2 und der dazugehörigen Kegel und Algebren findet man in [11] und [12].

Bereits in [21] wurde der wichtige Spezialfall einer Funktion vom Typ 2 untersucht, in dem K selbstdual ist. In diesem Fall ist der riemannsche Raum (K, η'')

symmetrisch, und die oben genannten Diffeomorphismen von K auf $K^* \equiv K$ stimmen mit den Symmetrien von (K, η'') überein. Weiter ist die zu η definierte Algebra $[V, \eta, e]$ eine formal-reelle Jordan-Algebra; die Quadrate der Elemente dieser Algebra stimmen mit dem Abschluß von K in V überein. Diese Ergebnisse sind bereits in [21] in übersichtlicher Weise dargestellt und werden daher in dem vorliegenden Artikel nur kurz behandelt.

Prinzipiell werden nur solche Beweise ausgeführt, die neu oder schwer zugänglich sind.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Der erste Paragraph enthält neben einfachen Grundtatsachen über konvexe Mengen Ergebnisse über Minkowski-Funktionale und die Automorphismengruppe von regulären Kegeln. In § 2 werden Halbordnung, ordnungserhaltende Abbildungen und Randkomponenten eines regulären Kegels betrachtet, sowie Summen von Kegeln. Im dritten Abschnitt werden fundamentale Eigenschaften logarithmisch konvexer Funktionen dargestellt. Weiter wird die „Invariante" eines Kegels eingeführt. Ihre wesentlichen Eigenschaften werden in den Lemmata 3.5, 3.7 und 3.8 zusammengefaßt. Die Untersuchung der Konstanzflächen η = konst. und des logarithmischen Gradienten $h_{\eta,\sigma}$ einer strikt logarithmisch konvexen Funktion $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ bildet den Inhalt von § 4. Unter geeigneten Voraussetzungen wird gezeigt, daß $h_{\eta,\sigma}$ ein Diffeomorphismus von K auf den σ-dualen Kegel K^σ ist, der genau einen Fixpunkt besitzt. Im fünften Paragraphen werden die matrix-positiven Abbildungen auf K eingeführt. Von grundlegender Bedeutung ist der Satz 5.1, eine Modifikation eines Satzes von E. A. Nussbaum, der die matrix-positiven Abbildungen $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ in eineindeutige Beziehung setzt zu den positiven Borel-Maßen auf $\overline{K^*}$. In § 6 werden die Algebren $[V, \eta, e]$ definiert. Der siebte Paragraph beschäftigt sich mit Positivitätsbereichen. Nach einigen elementaren Ergebnissen für den allgemeinen Fall wird in 3 und 4 der in [21] ausführlich dargestellte Zusammenhang zwischen homogenen Positivitätsbereichen und formal-reellen Jordan-Algebren erläutert. Der abschließende Abschnitt 5 gibt einige Anwendungen der vorangehenden Ausführungen. Im achten Paragraphen werden fundamentale Größen des riemannschen Raumes (K, η'') in Termen der „Ableitungen" von η berechnet.

In § 9 werden sogenannte SLOT-Funktionen betrachtet. Es wird gezeigt, daß eine geeignete Potenz einer SLOT-Funktion matrix-positiv ist.

Teile des vorliegenden Berichtes stammen aus Vorlesungs-Ausarbeitungen des zweitgenannten Autors aus den Jahren 1963 bis 1969. Die Autoren danken den damaligen Mitarbeitern U. Hirzebruch, O. Loos und K. Meyberg sowie den Herren J. Elstrodt und P. Ressel für hilfreiche Hinweise.

Für eine kritische Durchsicht des Manuskriptes danken wir Herrn E. Neher.

§ 1 Elementare Eigenschaften regulärer Kegel

1. Es sei V ein reeller Vektorraum von positiver endlicher Dimension. Die Endomorphismen-Algebra von V wird mit End V und die allgemeine lineare Gruppe von V mit GL V bezeichnet. Wie üblich sei V^* der Dualraum von V. In der natürlichen Topologie von V wird für Teilmengen A von V mit $\mathring{A}$ der offene Kern und mit $\overline{A}$ die abgeschlossene Hülle von A bezeichnet. Bekanntlich ist jeder Epimorphis-

mus von V auf einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum eine offene Abbildung. Mit V ist auch V* in der natürlichen Topologie ein topologischer Vektorraum.

Es sei K eine nicht-leere Teilmenge von V. Man nennt K einen *Kegel,* wenn für $\alpha > 0$ mit x auch αx zu K gehört. K heißt *konvex,* wenn $\alpha x + (1-\alpha)y \in K$ für $x, y \in K$ und alle α mit $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ gilt. Offenbar ist K dann und nur dann ein *konvexer Kegel,* wenn $\alpha x + \beta y \in K$ für alle $x, y \in K$ und alle positiven α, β erfüllt ist.

Man überlegt sich leicht, daß eine offene oder abgeschlossene Menge K genau dann konvex ist, wenn mit x, y auch $(x + y)/2$ zu K gehört.

Wohlbekannt (siehe etwa [23], § 16) ist das

Lemma 1.1 *Ist* K *eine konvexe Teilmenge von* V *und* a *ein innerer Punkt von* K, *so hat das* „Minkowski-*Funktional*" $\varphi_a \colon V \to \mathbf{R}$,

$$\varphi_a(x) := \inf\{\alpha; \alpha > 0, x \in \alpha(-a + K)\},$$

die folgenden Eigenschaften:

$$\varphi_a(x) \geqslant 0 \textit{ für alle } x \in V,$$

$$\varphi_a(\alpha x) = \alpha\varphi_a(x) \textit{ für alle } \alpha \geqslant 0 \textit{ und alle } x \in V,$$

$$\varphi_a(x + y) \leqslant \varphi_a(x) + \varphi_a(y) \textit{ für alle } x, y \in V.$$

Ferner gilt

$$\mathring{K} = \{x; x \in V, \varphi_a(x - a) < 1\} \subset K \subset \{x; x \in V, \varphi_a(x - a) \leqslant 1\} = \overline{K}.$$

Damit sind $\mathring{K}$ *und* $\overline{K}$ *wieder konvex und mit* $x \in \mathring{K}$ *und* $y \in \overline{K}$ *gehört* $x + \alpha(y - x)$ *für alle* $0 \leqslant \alpha < 1$ *zu* $\mathring{K}$. *Ist* K *offen, so gilt* $K = \mathring{\overline{K}}$.

Man sieht leicht, daß in der Bezeichnung von Lemma 1.1 durch

$$|x|_a := \varphi_a(x) + \varphi_a(-x), \quad x \in V,$$

eine Halbnorm von V definiert wird.

Ähnlich definierte Halbnormen bzw. Normen wurden u. a. von G. Janssen [18] untersucht.

Das nächste Ergebnis ist im wesentlichen ein Spezialfall wohlbekannter Trennungssätze (siehe etwa [23], §§ 17, 20).

Lemma 1.2 *Für eine konvexe Teilmenge* K *von* V *mit inneren Punkten gilt*

a) *Zu jedem* a *aus dem Rand von* K *gibt es eine Stützebene von* K *durch* a.

b) *Zu jedem nicht zu* $\overline{K}$ *gehörigen* b *gibt es eine Stützebene von* K, *die* K *und* b *(strikt) trennt.*

c) *Ist* $\overline{K}$ *kompakt, so gibt es zu jeder Hyperebene* H *von* V *eine zu* H *parallele Stützebene von* K.

2. Ist K ein konvexer Kegel in V mit $\mathring{K} \neq \emptyset$, so ergibt Lemma 1.1 sofort

(1.1) $\mathring{K} + \overline{K} = \mathring{K}$,

(1.2) $\varphi_a(x) = \inf\{\alpha; \alpha > 0, x + \alpha a \in K\}$ und $x + \varphi_a(x)a \in \overline{K}$

für alle $a \in \overset{\circ}{K}$ und $x \in V$, sowie

(1.3) $\bar{K} = \{x; x \in V, \varphi_a(x) = 0\}$ für alle $a \in \overset{\circ}{K}$.

Lemma 1.3 *Ist* K *ein offener konvexer Kegel in* V, *so gilt für alle* $a, b \in K$ *und alle* $x \in V$

a) $\varphi_b(x) \leqslant \varphi_b(-a)\varphi_a(x)$, $\varphi_{\alpha a}(x) = \frac{1}{\alpha}\varphi_a(x)$, *falls* $\alpha > 0$,

b) $\varphi_a(x) > 0$ *für alle* $x \in V \setminus \bar{K}$.

c) $|a|_a = 1$, *falls* $K \neq V$.

d) $|x|_b \leqslant |a|_b\, |x|_a$,

e) $|x|_a^{-1} + |x|_b^{-1} \leqslant |x|_{a+b}^{-1}$, *falls* $x \in \bar{K}$ *und* $-x \notin K$.

B e w e i s. Zum Beweis von Teil a) genügt der Nachweis von $x + \alpha\varphi_b(-a)b \in K$ für alle $\alpha > \varphi_a(x)$. Für $\alpha > \varphi_a(x)$ gilt wegen (1.2) sowohl $x + \alpha a \in K$ als auch $-\alpha a + \alpha\varphi_b(-a)\, b \in \bar{K}$, so daß $x + \alpha a \in K$ aus (1.1) folgt.

Der Teil b) folgt unmittelbar aus (1.3).

Zum Nachweis von c) beachtet man (1.2) und (1.3) und erhält $|a|_a = \varphi_a(-a) \leqslant 1$. Die Voraussetzung $K \neq V$ liefert $\varphi_a(-a) \neq 0$, denn andernfalls ist $-a \in \bar{K}$, also auch $0 \in K$. Dies impliziert aber $K = V$. Mit $\varphi_a(-a) \neq 0$ erhält man aus Teil a) sofort $1 \leqslant \varphi_a(-a)$. Hieraus folgt die Behauptung.

Teil d) folgt direkt aus Teil a).

Zum Beweis von Teil e) gilt $|x|_a = \varphi_a(-x) \neq 0$ nach (1.3), also $-|x|_a^{-1}\, x + a \in \bar{K}$ und $-|x|_b^{-1}\, x + b \in \bar{K}$. Man addiert und erhält die Behauptung.

Korollar 1 *Ist* $K \neq V$ *ein offener konvexer Kegel, so sind die Halbnormen* $|x|_a$, $a \in K$, *paarweise äquivalent.*

Korollar 2 *Ist* $K \neq V$ *ein offener konvexer Kegel in* V *und* $a_n \in K$ *mit* $a_n \to 0$, *so gilt* $|x|_{a_n}^{-1} \to 0$ *für alle* $x \in V$, *mit* $|x|_{a_n} \neq 0$.

Wählt man nämlich $b \in K$ beliebig und $a := a_n$, so folgt diese Behauptung aus Teil d) von Lemma 1.3.

3. Neben K betrachtet man die Teilmenge

$$K^* := \{\lambda; \lambda \in V^*, \lambda(x) > 0 \text{ für alle } x \in \bar{K}, x \neq 0\}$$

von V^*. Ist K^* nicht leer, so ist K^* offenbar ein konvexer Kegel in V. In diesem Fall nennt man K^* den zu K *dualen Kegel*.

B e m e r k u n g. In allgemeinerem Zusammenhang (siehe etwa [23], § 20 bzw. [6], chap. II, § 6. 3) definiert man zu einer konvexen Menge K in V und dem Dualsystem $\langle V, V^*\rangle$ eine *„polare Menge"* K° in V. Man kann leicht zeigen, daß dann K^* mit der polaren Menge zu $-K$ bzw. K übereinstimmt.

Lemma 1.4 *Für einen offenen konvexen Kegel* K *in* V *sind äquivalent:*

a) $\bar{K}$ *enthält keinen eindimensionalen Teilraum, d. h. aus* $x \in \bar{K}$ *und* $-x \in \bar{K}$ *folgt* $x = 0$.

b) K^* *ist nicht leer.*

c) *Für jedes* $a \in K$ *ist* $x \to |x|_a$ *eine Norm von* V.

Ist K ein offener konvexer Kegel in V, der eine und damit jede der Bedingungen von Lemma 1.4 erfüllt, so heißt K ein *regulärer Kegel* in V.

B e w e i s. a) $\Rightarrow$ b): Sei $a \in \overline{K}$, $a \neq 0$. Wegen $-a \notin \overline{K}$ gibt es eine Stützebene an K, die $-a$ und K trennt. Es gibt also ein $\lambda \in V^*$ mit $\lambda(-a) < 0$ und $\lambda(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \overline{K}$. Dann gibt es auch eine Umgebung U von a mit $\lambda(y) > 0$ für alle $y \in U$.

Ist $x \to |x|$ eine Norm von V und $S := \{x; x \in V, |x| = 1\}$, dann gibt es also zu jedem $a \in S \cap \overline{K}$ ein $\lambda_a \in V^*$ und eine Umgebung U_a von a mit

(1) $\lambda_a(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \overline{K}$

(2) $\lambda_a(x) > 0$ für alle $x \in U_a$.

Da $S \cap \overline{K}$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $M \subset S \cap \overline{K}$, so daß die U_a, $a \in M$, bereits $S \cap \overline{K}$ überdecken. Man setzt

$$\lambda := \sum_{a \in M} \lambda_a$$

und erhält $\lambda \in K^*$.

Teil a) folgt trivial aus Teil b). Die Äquivalenz der Teile a) und c) beruht auf der Gleichwertigkeit der Aussage $x \in \overline{K}$, $-x \in \overline{K}$ mit $|x|_a = 0$.

Lemma 1.5 *Sei* K *ein regulärer Kegel in* V *und* $x \to |x|$ *eine Norm von* V. *Dann gibt es zu jedem Kompaktum* C *von* K^* *positive Zahlen* $\rho_1(C)$ *und* $\rho_2(C)$ *mit* $\rho_2(C)\,|x| \geqslant \lambda(x) \geqslant \rho_1(C)\,|x|$ *für alle* $x \in \overline{K}$ *und* $\lambda \in C$.

B e w e i s. Nach Definition von K^* nimmt die stetige Abbildung $V^* \times V \to \mathbf{R}$, $(\lambda, x) \to \lambda(x)$, auf der kompakten Menge $C \times \{x; x \in \overline{K}, |x| = 1\}$ ein positives Minimum $\rho_1(C)$ und ein positives Maximum $\rho_2(C)$ an.

Für $C := \{\lambda\}$, $\lambda \in K^*$, ergibt sich, daß der Schnitt der Hyperebene $\{x; x \in V, \lambda(x) = 1\}$ mit $\overline{K}$ kompakt ist. Dieses Ergebnis wurde zuerst von T. Ochiai [27] mit anderen Hilfsmitteln bewiesen.

4. Zum Nachweis, daß mit K auch K^* ein regulärer Kegel ist, verwendet man das

Lemma 1.6 *Für einen regulären Kegel* K *in* V *gilt*

$$\begin{aligned}\overline{K^*} &= \{\lambda; \lambda \in V^*, \lambda(x) > 0 \text{ für alle } x \in K\} \cup \{0\}\\ &= \{\lambda; \lambda \in V^*, \lambda(x) \geqslant 0 \text{ für alle } x \in K\}\\ &= \{\lambda; \lambda \in V^*, \lambda(x) \geqslant 0 \text{ für alle } x \in \overline{K}\}.\end{aligned}$$

B e w e i s. Man bezeichnet die rechts stehenden Mengen der Reihe nach mit A, B und C. Trivialerweise gilt dann $A \subset B = C$ und $\overline{K^*} \subset C$. Für $\lambda \in B$, $\lambda \neq 0$, ist die Abbildung $\lambda: V \to \mathbf{R}$ surjektiv und daher offen; folglich $\lambda \in A$. Wegen $C + K^* \subset K^*$ folgt auch $C \subset \overline{K^*}$.

Korollar *Ist* $\dim V > 1$, *so sind die Stützebenen an* K *genau die Hyperebenen*

(1.4) $H_\lambda := \{x; x \in V, \lambda(x) = 0\}$

für $\lambda \in \overline{K^*}$, $\lambda \neq 0$.

Lemma 1.7 *Es sei* K *ein regulärer Kegel in* V. *Dann gilt*

a) K^* *ist ein regulärer Kegel in* V^*.

b) $(K^*)^*$ *stimmt mit dem Bild von* K *unter dem kanonischen Isomorphismus* $j: V \to (V^*)^*$ *überein.*

c) *Zu jedem* a *aus dem Rand von* K, $a \neq 0$, *gibt es ein* λ *aus dem Rand von* K^*, $\lambda \neq 0$, *mit* $\lambda(a) = 0$.

Die hierdurch ausgedrückte „Dualität" von K und K^* wird bei der Untersuchung der regulären Kegel ein nützliches Hilfsmittel sein.

Beweis. a) Man sieht, daß K^* ein konvexer Kegel ist, für den wegen Lemma 1.6 die Bedingung a) von Lemma 1.4 erfüllt ist. Man hat also nur noch zu zeigen, daß K^* offen in V^* ist. Dazu wählt man eine Norm $|\cdot|$ auf V und betrachtet $X := \overline{K} \cap \{x; x \in V, |x| = 1\}$. Dann ist V^*, versehen mit der Maximumsnorm, ein Vektorraum reellwertiger Funktionen auf X. K^* ist dabei offenbar gleich der Menge der positiven Funktionen auf X, also offen.

b) Für alle $x \in K$ und alle $\lambda \in K^*$ gilt offensichtlich $j(x)(\lambda) = \lambda(x) \geqslant 0$. Mit Lemma 1.6 folgt also $j(K) \subset \overline{(K^*)^*}$. Da $j(K)$ offen ist, erhält man sogar $j(K) \subset (K^*)^*$. Sei jetzt $j(x) \in (K^*)^*$ und $x \notin \overline{K}$, so gibt es eine Stützebene an K, die x und K trennt, d. h., es gibt ein $\lambda \in V^*$ mit $\lambda(x) < 0$ und $\lambda(y) \geqslant 0$ für alle $y \in \overline{K}$. Dann gilt aber $j(x)(\lambda) = \lambda(x) < 0$ im Widerspruch zu $j(x) \in (K^*)^*$. Damit ist $j(K) \subset (K^*)^* \subset j(\overline{K})$ gezeigt, und die Behauptung folgt aus Stetigkeitsgründen.

c) Sei a aus dem Rand von K, $a \neq 0$. Dann gibt es eine Stützebene H_λ durch a an K. Nach dem Korollar zu Lemma 1.6 kann man dabei $\lambda \in \overline{K^*}$ annehmen. Wegen $\lambda(a) = 0$, $a \neq 0$, ist λ kein Element von K^*.

5. Für einen regulären Kegel K in V und jedes $a \in K$ induziert die Norm $x \to |x|_a$ (vgl. 1 und Teil c) von Lemma 1.4) von V eine Norm $\lambda \to |\lambda|_a$ von V^* vermöge

$$|\lambda|_a := \sup\{|\lambda(x)|; x \in V, |x|_a \leqslant 1\}, \lambda \in V^*.$$

Lemma 1.8 *Für einen regulären Kegel* K *in* V *und alle* $a, b \in K$ *gilt*

a) $|\lambda|_b \leqslant |b|_a\, |\lambda|_a$ *für alle* $\lambda \in V^*$,

b) $|\lambda|_a = \lambda(a)$ *für alle* $\lambda \in \overline{K^*}$

c) $\lambda(b) \leqslant \lambda(a) |b|_a$ *für alle* $\lambda \in \overline{K^*}$,

Beweis. a) Mit Lemma 1.3d) erhält man $|\lambda(x)| \leqslant |\lambda|_a |x|_a \leqslant |\lambda|_a |b|_a |x|_b$, also die Behauptung.

b) Sei $\lambda \in \overline{K^*}$, $x \in V$ und $\alpha > \varphi_a(x)$, dann hat man $x + \alpha a \in K$ und daher $\lambda(x) + \alpha\lambda(a) \geqslant 0$. Hieraus folgt $|x|_a \lambda(a) \geqslant \varphi_a(x)\lambda(a) \geqslant -\lambda(x)$, also $|\lambda(x)| \leqslant \lambda(a)|x|_a$ und daher $|\lambda|_a \leqslant \lambda(a)$. Wegen Lemma 1.3c) folgt jetzt die Behauptung aus der Definition von $|\lambda|_a$.

c) Folgt aus a) und b).

6. Für einen offenen konvexen Kegel K in V betrachtet man die Untergruppe

$$\text{Aut } K := \{W; W \in GL\ V, WK = K\}$$

von GL V. Offenbar gehört $W \in GL\ V$ genau dann zu Aut K, Wenn $W\overline{K} = \overline{K}$. Folglich ist Aut K eine abgeschlossene Untergruppe von GL V. Wie üblich heißt ein regulärer Kegel K *homogen,* wenn Aut K transitiv auf K operiert.

Für $a \in K$ ist die *Fixpunktgruppe*

$$\mathrm{Aut}_a K := \{W; W \in \mathrm{Aut}\ K, Wa = a\}$$

offenbar eine abgeschlossene Untergruppe von Aut K.

Für $a \in K$ betrachtet man jetzt die durch

$$|W|_a := \sup\{|Wx|_a; x \in V, |x|_a \leqslant 1\}, W \in \mathrm{End}\ V,$$

definierte Norm von End V.

Lemma 1.9 *Für einen regulären Kegel* K *in* V, $a \in K$ *und* $W \in \mathrm{Aut}\ K$ *gilt*

a) $|Wx|_a \leqslant |Wa|_a |x|_a$ *für alle* $x \in V$,

b) $|W|_a = |Wa|_a$,

c) $|Wx|_{Wa} = |x|_a$ *für alle* $x \in V$.

B e w e i s. c) Aus $\alpha > \varphi_{Wa}(Wx)$ erhält man $Wx + \alpha Wa \in K$, also $x + \alpha a \in K$ und somit $\alpha > \varphi_a(x)$. Folglich gilt $\varphi_{Wa}(Wx) \geqslant \varphi_a(x)$. Ersetzt man nun a durch $W^{-1}a$ und x durch $W^{-1}x$, so erhält man die Behauptung.

a) In Lemma 1.3 d) ersetzt man b durch a, a durch Wa und x durch Wx und erhält mit c) die Behauptung.

b) Aus a) folgt $|W|_a \leqslant |Wa|_a$ und aus der Definition von $|W|_a$ wegen $|a|_a = 1$ schließlich $|Wa|_a \leqslant |W|_a$.

Aus Teil b) von Lemma 1.9 erhält man

Korollar 1 *Ist $\mathcal{W}$ eine Teilmenge von* Aut K *und gibt es ein* $a \in K$, *so daß* $\{Wa; W \in \mathcal{W}\}$ *beschränkt ist, dann ist $\mathcal{W}$ beschränkt.*

Korollar 2 *Für* $a \in K$ *ist die Fixpunktgruppe* $\mathrm{Aut}_a K$ *kompakt in* GL V.

7. Es ist manchmal zweckmäßig, statt des dualen Kegels einen in V gelegenen Kegel zu betrachten. Sei dazu σ eine symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform von V.

Definiert man dann für einen regulären Kegel K in V

$$K^\sigma := \{x; x \in V, \sigma(x, y) > 0 \text{ für alle } y \in \overline{K}, y \neq 0\},$$

so bildet der durch σ induzierte kanonische Isomorphismus von V^* auf V den dualen Kegel K^* auf K^σ ab. Aus Lemma 1.7 entnimmt man

(1.5) K^σ ist ein regulärer Kegel in V,

(1.6) $(K^\sigma)^\sigma = K$,

(1.7) Zu jedem a aus dem Rand von K, $a \neq 0$, gibt es ein b aus dem Rand von K^σ, $b \neq 0$, mit $\sigma(a, b) = 0$.

Wendet man Lemma 1.5 auf K^σ an Stelle von K an, so erhält man

(1.8) Zu jedem Kompaktum C von K und zu jeder Norm $x \to |x|$ auf V gibt es eine positive Zahl $\rho(C)$ mit $\sigma(a, x) \geqslant \rho(C)|x|$ für alle $x \in K^\sigma$ und alle $a \in C$.

Für Teilmengen W von End V bezeichnet man

$$W^\sigma = \{W^\sigma ; W \in W\},$$

wobei W^σ der zu W bezüglich σ adjungierte Endomorphismus ist.

Aus der Definition von K^σ und (1.6) erhält man sofort

(1.9) $(\mathrm{Aut}\ K)^\sigma = \mathrm{Aut}\ K^\sigma$.

8. Im Korollar 2 zu Lemma 1.9 hatte man gesehen, daß $\mathrm{Aut}_a K$ für $a \in K$ eine kompakte Untergruppe von Aut K ist. Umgekehrt gilt (vgl. auch [38], I, § 6).

Lemma 1.10 *Ist* K *ein regulärer Kegel in* V *und* Γ *eine kompakte Untergruppe von* Aut K, *dann gibt es* $a \in K$ *mit* $\Gamma \subset \mathrm{Aut}_a K$.

B e w e i s. Sei U eine kompakte Teilmenge von K mit $\mathring{U} \neq \emptyset$ und D die Vereinigung der WU, $W \in \Gamma$. Dann ist D als Bild der kompakten Menge $\Gamma \times U$ unter der stetigen Abbildung $(W, x) \to Wx$ selbst kompakt und es gilt $WD = D$ für $W \in \Gamma$.

Nach Wahl einer symmetrischen nicht-ausgearteten Bilinearform σ von V und eines (beliebig normierten) Lebesgue-Maßes dy von V definiere man eine Linearform λ durch

$$\lambda(x) := \int_D \sigma(x, y)\, dy.$$

Die Transformationsformel für Integrale ergibt dann $\lambda(x) = |\det W| \lambda(W^\sigma x)$ für $W \in \Gamma$. Da Γ kompakt ist, folgt $\det W = \pm 1$ für $W \in \Gamma$, also

$$\lambda(W^\sigma x) = \lambda(x) \quad \text{für } x \in V, W \in \Gamma.$$

Der Definition von λ und K^σ sowie Lemma 1.6 entnimmt man

$$\lambda(x) > 0 \quad \text{für } x \in \overline{K^\sigma}, x \neq 0.$$

Schreibt man nun $\lambda(x) = \sigma(a, x)$ mit geeignetem $a \in V$, so folgt

$$\sigma(a, x) > 0 \quad \text{für } x \in \overline{K^\sigma}, x \neq 0,$$

also $a \in (K^\sigma)^\sigma$. Wegen (1.6) gilt also $a \in K$. Mit $\sigma(a, x) = \lambda(x) = \lambda(W^\sigma x) = \sigma(a, W^\sigma x) = \sigma(Wa, x)$ für $W \in \Gamma$ folgt nun $\Gamma \subset \mathrm{Aut}_a K$.

Korollar 1 *Ist* Γ *eine maximal kompakte Untergruppe von* Aut K, *dann gibt es* $a \in K$ *mit* $\Gamma = \mathrm{Aut}_a K$.

Es ist aber *nicht* richtig, daß jede Gruppe $\mathrm{Aut}_a K$, $a \in K$, maximal kompakt ist! Weiter erhält man aus Lemma 1.10 das wohlbekannte

Korollar 2 *Ist* Γ *eine kompakte Untergruppe von* GL V, *so gibt es eine positiv definite symmetrische Bilinearform* σ *von* V *derart, daß* Γ *in der orthogonalen Gruppe* $O(\sigma)$ *enthalten ist.*

B e w e i s. Man wählt eine beliebige positiv definite Bilinearform τ von V und setzt $V' := \{U, U \in \mathrm{End}\ V, U = U^\tau\}$. Weiter definiert man $K' := \{U; U \in V',$

$\tau(Ux, x) > 0$ für alle $x \in V$, $x \neq 0\}$. Schließlich erklärt man eine Abbildung $\theta : GL\, V \to Aut\, K'$ durch $\theta_W(U) := WUW^\tau$, $W \in GL\, V$, $U \in V'$. Nach Voraussetzung ist Γ kompakt, daher ist $\Gamma' := \{\theta_W ; W \in \Gamma\}$ eine kompakte Untergruppe von Aut K'. Nach Lemma 1.10 gibt es somit ein $P \in K'$ derart, daß $WPW^\tau = P$ für alle $W \in \Gamma$ gilt.

Mit $\sigma(x, y) := \tau(P^{-1}x, y)$, $x, y \in V$, verifiziert man jetzt leicht die Behauptung.

Man bemerkt, daß in dem angegebenen Beweis von Korollar 2 von der Existenz eines Haar-Maßes auf Γ kein Gebrauch gemacht wird.

§ 2 Die Halbordnung eines Kegels

1. Jeder reguläre Kegel K in V induziert eine Halbordnung auf V. Für $a, b \in V$ definiert man dazu

$$a \geqslant b :\Longleftrightarrow a - b \in \overline{K}.$$

Lemma 2.1 *Ist* K *ein regulärer Kegel in* V, *so gilt für alle* $a, b \in V$:

a) $a \geqslant a$.

b) *Aus* $a \geqslant b$ *und* $b \geqslant a$ *folgt* $a = b$.

c) *Aus* $a \geqslant b$ *und* $b \geqslant c$ *folgt* $a \geqslant c$.

d) *Aus* $a \geqslant b$ *folgt* $a + x \geqslant b + x$ *und* $\alpha a \geqslant \alpha b$ *für alle* $x \in V$ *und* $\alpha > 0$.

e) *Aus* $a \geqslant b$ *folgt* $\lambda(a) \geqslant \lambda(b)$ *für alle* $\lambda \in \overline{K^*}$.

f) *Aus* $a \geqslant b$ *folgt* $Wa \geqslant Wb$ *für alle* $W \in Aut\, K$.

g) *Zu jedem* $a \in K$ *und* $x \in V$ *gibt es* $\alpha > 0$ *mit* $\alpha a \geqslant x$.

Beweis. Die Teile a) bis f) verifiziert man leicht, wobei man bei b) die Regularität von K zu verwenden hat. Zum Nachweis von Teil g) beachtet man, daß K offen ist; daher gibt es $\alpha > 0$ mit $a - \alpha^{-1}x \in K$. Damit erhält man $\alpha a - x = \alpha(a - \alpha^{-1}x) \in K$.

Bemerkung 1. Nach diesem Lemma induziert ein regulärer Kegel in V eine archimedische Halbordnung, die mit der Vektorraumstruktur von V verträglich ist.

Bemerkung 2. Diese Halbordnung ist beim Lichtkegel K im $\mathbf{R}^4$ von physikalischer Bedeutung. Man ist dort insbesondere interessiert an bijektiven Abbildungen $f : K \to K$, für die sowohl f als auch f^{-1} ordnungshaltend sind.

Das folgende Ergebnis wurde für den Lichtkegel von E. C. Zeemann [40] und im allgemeinen Falle von O. Rothaus [32] bewiesen. Man vergleiche hierzu auch [1] und [2].

Ein Halbstrahl $g = \{\alpha a; \alpha > 0\}$ von $\overline{K}$ heißt *Extremalstrahl* (vgl. [23], § 25), wenn für $x, y \in \overline{K}$ das „offene Intervall" $(x, y) := \lambda x + (1 - \lambda)y$, $0 < \lambda < 1$, einen Punkt von g nur dann enthält, wenn (x, y) in g enthalten ist.

Satz 2.2 *Sei* K *ein regulärer Kegel, der keinen isolierten Extremalstrahl besitzt, und* $f : K \to K$ *eine bijektive Abbildung, für die sowohl* f *als auch* f^{-1} *ordnungshaltend sind, dann ist* f *linear.*

Das Beispiel der positiven Zahlen in **R** zeigt, daß auf die Voraussetzung über die Extremalstrahlen hier nicht verzichtet werden kann.

2. Ist K wieder ein regulärer Kegel in V, so kann man die durch K induzierte Halbordnung von V zur Definition einer Äquivalenzrelation auf $\overline{K}$ verwenden (vgl. [36]). Man nennt dazu zwei Punkte a, b $\in \overline{K}$ *äquivalent*, a $\sim$ b, wenn es positive $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ mit $\alpha a \geqslant b$ und $\beta b \geqslant a$ gibt. Offenbar erhält man dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\overline{K}$. Die Äquivalenzklassen nennt man die *Komponenten* von $\overline{K}$.

Wegen Teil g) von Lemma 2.1 ist K selbst eine Komponente von $\overline{K}$. Dagegen zerfällt der Rand von K im allgemeinen in endlich oder unendlich viele Komponenten, die *Randkomponenten von* $\overline{K}$. Offenbar ist $\{0\}$ stets eine Randkomponente.

Man sieht leicht, daß jede Komponente von $\overline{K}$ ein konvexer Kegel ist.

Für eine nicht leere Teilmenge C von V bezeichne $\langle C\rangle$ den von C erzeugten Untervektorraum von V. Ist C ein konvexer Kegel in V, so hat man offenbar $\langle C\rangle = \{a - b;\, a, b \in C\}$ und man verifiziert

(2.1) $V = \langle C\rangle \Longleftrightarrow \mathring{C} \neq \emptyset$.

(2.2) Der Abschluß von C in $\langle C\rangle$ ist $\overline{C}$.

(2.3) $\langle \overline{C}\rangle = \langle C\rangle$.

Lemma 2.3 *Für einen regulären Kegel* K *in* V *und jede Komponente* C *von* $\overline{K}$ *gilt:*

a) C *ist regulärer Kegel in* $\langle C\rangle$.

b) $\langle C\rangle \cap \overline{K} = \overline{C}$.

c) *Ist* D *eine Komponente von* $\overline{C}$, *so ist* D *auch Komponente von* $\overline{K}$.

Nach Teil b) hat für a, b $\in \langle C\rangle$ daher „$a \geqslant b$" bzw. „$a \sim b$" sowohl für den Kegel K in V als auch für den Kegel C in $\langle C\rangle$ die gleiche Bedeutung.

B e w e i s. a) Man zeigt zunächst

(*) Zu $x, y \in C$ gibt es $\epsilon > 0$ mit $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ für $-\epsilon < \lambda < 1 + \epsilon$.

Seien nämlich positive α, β so gewählt, daß $x \geqslant \alpha y$ und $y \geqslant \beta x$ gilt, dann hat man $(1 + \epsilon - \epsilon\beta)x \geqslant (1 + \epsilon)x - \epsilon y \geqslant \left(1 + \epsilon - \frac{\epsilon}{\alpha}\right)x$ und $\left(-\epsilon + \frac{1+\epsilon}{\alpha}\right)x \geqslant -\epsilon x + (1 + \epsilon)y \geqslant (-\epsilon + (1 + \epsilon)\beta)x$ für alle $\epsilon > 0$. Für hinreichend kleines ϵ sind alle in den Ungleichungen auftretenden Terme in $\overline{K}$ enthalten, so daß es $\epsilon > 0$ gibt mit $(1 + \epsilon)x - \epsilon y \in C$ und $-\epsilon x + (1 + \epsilon)y \in C$. Damit gehört die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte zu C und man erhält (*).

Sei y ein Element des offenen Kernes $\tilde{C}$ von C in $\langle C\rangle$ und $x \in C$ beliebig. Nach (*) ist dann für genügend kleines $\epsilon > 0$ die Verbindungsstrecke von $z := (1 + \epsilon)x - \epsilon y$ und y in C enthalten. Damit ist der offene Kern der konvexen Hülle von z mit $\tilde{C}$ eine offene Umgebung von x in $\langle C\rangle$. Folglich ist C offen in $\langle C\rangle$. Die Regularität von C folgt direkt aus der Regularität von K.

b) Für $x \in \langle C\rangle \cap \overline{K}$ schreibt man $x = a - b$ mit $a, b \in C$ und wählt $\rho > 0$ beliebig. Wegen $x \in \overline{K}$ folgt $x + \rho b \geqslant \rho b$. Andererseits gibt es $\beta > 0$ mit $\beta b \geqslant a$, so daß $(\beta - 1 + \rho)b \geqslant a - (1 - \rho)b = x + \rho b$ folgt. Man erhält $x + \rho b \sim b$, also $x + \rho b \in C$.

Für $\rho \to 0$ folgt $x \in \overline{C}$ und somit $\langle C \rangle \cap \overline{K} \subset \overline{C}$. Die fehlende Inklusion ist trivial.

c) Folgt aus Teil b).

3. Sind $V_1, \ldots, V_r$ Vektorräume über $\mathbf{R}$ von positiver endlicher Dimension und K_i nicht-leere Teilmengen von V_i, $i = 1, \ldots, r$, so setzt man $V := V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ und

$$K := K_1 \oplus \ldots \oplus K_r := \{x_1 \oplus \ldots \oplus x_r; x_1 \in K_1, \ldots, x_r \in K_r\}.$$

Man nennt K die direkte Summe der Mengen $K_1, \ldots, K_r$. Offenbar ist mit allen K_i auch K konvex bzw. offen bzw. ein Kegel. *Die direkte Summe* K *offener konvexer Kegel* K_i *ist genau dann regulär, wenn alle* K_i *regulär sind.* Ein Kegel heißt *irreduzibel,* wenn er sich nicht als direkte Summe von mehr als einem Kegel schreiben läßt.

In unmißverständlicher Schreibweise hat man ferner für reguläre Kegel $K_1, \ldots, K_r$

$$K^* = K_1^* \oplus \ldots \oplus K_r^* \tag{2.4}$$

und

$$\operatorname{Aut} K_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Aut} K_r \subset \operatorname{Aut} K. \tag{2.5}$$

Sind daher alle K_i homogen, so ist auch K homogen. Man wird in Satz 2.6 sehen, daß hiervon auch die Umkehrung gilt.

Ist σ eine symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform von V und sind die Teilräume $V_1, \ldots, V_r$ von V paarweise bezüglich σ orthogonal, so gilt auch

$$K^\sigma = K_1^{\sigma_1} \oplus \ldots \oplus K_r^{\sigma_r} \quad \text{mit } \sigma_i = \sigma|_{V_i \times V_i}. \tag{2.6}$$

4. Es sei wieder K ein regulärer Kegel in V und C eine Komponente von $\overline{K}$ (vgl. 2). Man definiert die Teilmenge C_* von $\overline{K}$ durch

$$C_* := \cup (D; D \text{ Komponente von } \overline{K}, \langle D \rangle \cap \langle C \rangle = \{0\}). \tag{2.7}$$

Offenbar ist C_* ein (im allgemeinen weder offener noch abgeschlossener) Kegel. Es gilt speziell $K_* = \{0\}$ und $\{0\}_* = \overline{K}$. Man nennt C *wesentlich,* wenn C von $\{0\}$ und K verschieden und wenn C_* konvex ist.

Lemma 2.4 *Ist* K *ein regulärer Kegel in* V *und* C *eine wesentliche Komponente, so gilt:*

a) $V = \langle C \rangle \oplus \langle C_* \rangle$.

b) $K = C \oplus \mathring{C}_*$.

B e w e i s. 1. $\langle C \rangle \cap \langle C_* \rangle = \{0\}$: Für $x \in \langle C \rangle \cap \langle C_* \rangle$ gibt es $a_1, a_2 \in C_*$ mit $x = a_1 - a_2$, denn C_* ist konvex. Sei $K_O := \{\alpha a_1 + \beta a_2; \alpha > 0, \beta > 0\}$ und D die Komponente von $a_1 + a_2$. Dann ist K_O regulärer Kegel in $\mathbf{R}a_1 + \mathbf{R}a_2$ und es gilt $K_O \subset D$. Wegen $a_1 + a_2 \in C_*$ folgt $D \subset C_*$. Aus $a_1, a_2 \in \overline{K}_O \subset \overline{D}$ erhält man dann $x \in \langle \overline{D} \rangle = \langle D \rangle$ und $x \in \langle C \rangle$; also $x = 0$ nach (2.7).

2. $\overline{C} + \overline{C}_* = \overline{K}$: Es braucht nur $\overline{K} \subset \overline{C} + \overline{C}_*$ gezeigt werden. Da $\overline{K}$ die konvexe Hülle aller seiner Extremalstrahlen ist, genügt der Nachweis, daß jeder Extremal-

strahl E von $\overline{K}$ in $\overline{C} \cup \overline{C}_*$ enthalten ist. Nun gilt aber trivialerweise entweder $E \subset \overline{C}$ oder $\langle E \rangle \cap \overline{C} = \{0\}$. Da C wesentlich ist, hat man alles gezeigt.

3. Nach 2. folgt $V = \langle C \rangle + \langle C_* \rangle$, so daß Teil a) aus 1. folgt. Teil b) ergibt sich nun aus 2.

Beachtet man wieder Teil c) von Lemma 2.3, so erhält man

Satz 2.5 *Für jeden regulären Kegel* K *in* V *gilt:*

a) K *ist die direkte Summe der minimalen wesentlichen Komponenten von* $\overline{K}$.

b) *Ist* $K = K_1 \oplus \ldots \oplus K_r$ *eine direkte Summe von irreduziblen Kegeln, so sind die* K_i *genau die minimalen wesentlichen Komponenten von* $\overline{K}$. *Diese Zerlegung ist also bis auf die Reihenfolge eindeutig.*

5. Für $x, y \in \overline{K}$ und $W \in \operatorname{Aut} K$ zeigt Teil f) von Lemma 2.1, daß $x \sim y$ und $Wx \sim Wy$ äquivalent sind. Mit C ist daher auch WC eine Komponente bzw. eine wesentliche Komponente bzw. eine minimale wesentliche Komponente.

Zwei Kegel K in V bzw. K′ in V′ nennt man *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $F : V \to V'$ gibt mit $K' = FK$. Offenbar haben äquivalente Kegel konjugierte Automorphismengruppen.

Ein regulärer Kegel K in V heißt ein *Block*, wenn K die direkte Summe irreduzibler, paarweise äquivalenter Kegel ist. Offenbar ist K genau dann ein Block, wenn K zu einem Kegel der Form $C^r := C \oplus \ldots \oplus C$ (r-mal) mit irreduziblem Kegel C äquivalent ist. In diesem Falle ist die Menge Γ_r aller Automorphismen von C^r, die die Summanden von C^r permutieren, eine Untergruppe von Aut C^r und isomorph zur vollen Permutationsgruppe von r Elementen. Aus Satz 2.5 erhält man somit

(2.8) $\operatorname{Aut} C^r = \Gamma_r (\operatorname{Aut} C \oplus \ldots \oplus \operatorname{Aut} C)$.

Nach Satz 2.5 kann man einen beliebigen Kegel K als direkte Summe von Blöcken $B_1, \ldots, B_s$ schreiben und bekommt

(2.9) $\operatorname{Aut}(B_1 \oplus \ldots \oplus B_s) = \operatorname{Aut} B_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Aut} B_s$.

Insbesondere folgt

Satz 2.6 *Ist* K *eine direkte Summe der regulären Kegel* $K_1, \ldots, K_r$, so ist K *genau dann homogen, wenn alle* K_i *homogen sind.*

§ 3 Konvexe Kegel und logarithmisch konvexe Funktionen

1. Seien V und V′ endlich-dimensionale reelle Vektorräume und G eine offene nicht-leere Teilmenge von V. Für eine stetig differenzierbare Abbildung $f: G \to V'$ und für alle $a \in V$ wird die Richtungsableitung

(3.1) $$\Delta_x^u f(x) := \frac{d}{d\tau} f(x + \tau u)|_{\tau = 0}$$

definiert. Dann ist für festes x die Abbildung $u \to \Delta_x^u f(x)$ linear. Unter offensichtlichen Voraussetzungen gelten weiter die folgenden Rechenregeln

(3.2) $\Delta_x^u (f \circ g)(x) = \Delta_y^{v(x)} f(y)|_{y = g(x)}, \qquad v(x) := \Delta_x^u g(x)$, (3.3) $\Delta_x^x f(x) = \kappa f(x)$, falls f homogen vom Grad κ ist.

2. Für einen offenen konvexen Kegel K in V *bezeichne* $C_+^\infty(K)$ *die Menge der positiven, beliebig oft differenzierbaren Abbildungen* $\eta: K \to \mathbf{R}$. Die Menge der homogenen Elemente von $C_+^\infty(K)$ werde mit $C_h^\infty(K)$ bezeichnet. Offenbar gehören für zwei Abbildungen $\eta, \zeta \in C_+^\infty(K)$ bzw. $C_h^\infty(K)$ auch η^α, $\alpha \in \mathbf{R}$, und $\eta\zeta$ zu $C_+^\infty(K)$ bzw. $C_h^\infty(K)$.

Nach Wahl einer symmetrischen nicht-ausgearteten Bilinearform σ von V ordnet man jedem $\eta \in C_+^\infty(K)$ beliebig oft differenzierbare Abbildungen $h_{\eta,\sigma}: K \to V$ und $H_{\eta,\sigma}: K \to \operatorname{End} V$ durch die folgenden Festsetzungen zu

(3.4) $\sigma(h_{\eta,\sigma}(x), u) = -\Delta_x^u \log \eta(x)$ für $x \in K$ und $u \in V$,

(3.5) $\sigma(H_{\eta,\sigma}(x)\, u, v) = \Delta_x^u \Delta_x^v \log \eta(x)$ für $x \in K$ und $u, v \in V$.

Die höheren Ableitungen von $H_{\eta,\sigma}$ werden durch

(3.6) $H_{\eta,\sigma}(x; u_1, \ldots, u_r) := \Delta_x^{u_1} \ldots \Delta_x^{u_r} H_{\eta,\sigma}(x)$

abgekürzt. *Soweit keine Mißverständnisse möglich sind, werden die Indizes* η, σ *in der Bezeichnung weggelassen.*

Bemerkung. Mit den Bezeichnungen von [14], I, § 1, hat man

$$\eta'_x(u) = \sigma(h_{\eta,\sigma}(x), u), \qquad \eta''_x(u, v) = \sigma(H_{\eta,\sigma}(x)\, u, v)$$

und $\quad \eta_x^{(r+2)}(u_1, \ldots, u_r, u, v) = (-1)^{r+2}\, \sigma(H_{\eta,\sigma}(x; u_1, \ldots, u_r)\, u, v).$

Weiter sieht man, daß die in [14], II, § 4 angegebene Definition von $h_{\eta,\sigma}$ für exaktes σ ein Spezialfall von (3.4) ist.

Aus den obigen Definitionen erhält man mit (3.3) sofort

(3.7) $H(x)\, u = -\Delta_x^u h(x)$,

(3.8) $H(x)$ ist für alle $x \in K$ bezüglich σ selbstadjungiert,

(3.9) Für $\eta \in C_h^\infty(K)$ ist h homogen vom Grad -1, H homogen vom Grad -2, und es gilt $h(x) = H(x)\, x$,

(3.10) $H(x; u_1, \ldots, u_r)u_{r+1}$ ist in $u_1, \ldots, u_{r+1} \in V$ symmetrisch und multilinear.

Schließlich erhält man die Taylor-Entwicklung mit Restglied in der Form

(3.11) $\log \eta(x + u) = \log \eta(x) - \sigma(h(x), u) + \dfrac{1}{2}\, \sigma(H(x + \theta u)u, u)$

für $x \in K$, $u \in V$ mit $x + u \in K$ und geeignetem (von x und u abhängigem) θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

3. Vorbereitend für die späteren Untersuchungen werden in diesem Abschnitt einige elementare Eigenschaften konvexer Funktionen zusammengestellt.

Sei also wieder K ein offener konvexer Kegel in V und $\eta: K \to \mathbf{R}^+$ eine stetige Abbildung.

Die Abbildung η heißt *konvex*, wenn

(3.12) $\eta(\tau x + (1 - \tau)y) \leqslant \tau\eta(x) + (1 - \tau)\, \eta(y)$ für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $x, y \in K$

gilt. Man nennt η *strikt konvex*, wenn in (3.12) für $x \neq y$ und $\tau \neq 0, 1$ stets „<" gilt.

Im folgenden werden logarithmisch konvexe und sogenannte „matrix-positive“ Abbildungen von Bedeutung sein.

Eine stetige Abbildung $\eta: K \to \mathbf{R}^+$ heißt (strikt) logarithmisch konvex, wenn $\log \eta$ (strikt) konvex ist.

Die Ungleichung (3.12) für $\log \eta$ überträgt sich in offensichtlicher Weise in eine multiplikative Ungleichung für η.

Eine stetige Abbildung $\eta: K \to \mathbf{R}^+$ heißt *matrix-positiv*, wenn

$$(3.13) \quad \sum_{i,j=1}^{r} \alpha_i \alpha_j \eta(x_i + x_j) \geqslant 0 \quad \text{für jede Wahl von } r \in \mathbf{N}, \alpha_i \in \mathbf{R}, x_i \in K$$

erfüllt ist. Offenbar ist (3.13) gleichwertig damit, daß die Matrix $(\eta(x_i + x_j))$ positiv semidefinit ist.

B e m e r k u n g. Die Abbildungen, die (3.13) erfüllen, werden in der Literatur mit verschiedenen Namen bezeichnet. Die hier gewählte Bezeichnung „matrix-positiv“ soll daran erinnern, daß eine Abbildung genau dann die Eigenschaft (3.13) hat, wenn gewisse Matrizen positiv semidefinit sind. Die matrix-positiven Abbildungen werden in § 5 ausführlich untersucht werden.

4. Zunächst einige Umschreibungen für Konvexität.

Lemma 3.1 *Für eine stetige Abbildung* $\eta: K \to \mathbf{R}^+$ *sind äquivalent*

a) η *ist konvex,*

b) $\eta\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{2}\eta(x) + \frac{1}{2}\eta(y)$ *für alle* $x, y \in K$.

Ist η *aus* $C_+^\infty(K)$, *so ist dies gleichwertig mit*

c) $\Delta_x^u \Delta_x^u \eta(x) \geqslant 0$ *für alle* $x \in K, u \in V$.

η *ist strikt konvex genau dann, wenn die Ungleichung in* b) *bzw.* c) *strikt ist* (für $x \neq y$ bzw. $u \neq 0$). Einen B e w e i s für diese wohlbekannten Aussagen findet man etwa in [29].

Die folgende Beschreibung der logarithmischen Konvexität einer Funktion $\eta(x)$ durch die Konvexität einer anderen Funktion $\tilde{\eta}(\xi, x)$ findet sich für den 1-dimensionalen Fall bereits in [4].

Lemma 3.2 *Sei* $\eta \in C_+^\infty(K)$ *und* $\tilde{\eta}: \mathbf{R} \times K \to \mathbf{R}$ *gegeben durch* $\tilde{\eta}(\xi, x) := e^\xi \eta(x)$. *Dann sind äquivalent*

(a) η *ist (strikt) logarithmisch konvex,*

(b) $\tilde{\eta}$ *ist (strikt) konvex.*

B e w e i s. Für $\tilde{x} := (\xi, x) \in \mathbf{R} \times K$ und $\tilde{u} := (\omega, u) \in \mathbf{R} \times V$ ergibt eine einfache Rechnung

$$\eta(x)\, \Delta_{\tilde{x}}^{\tilde{u}} \Delta_{\tilde{x}}^{\tilde{u}} \tilde{\eta}(\tilde{x}) = e^\xi [(\omega\eta(x) + \Delta_x^u \eta(x))^2 + \eta^2(x) \Delta_x^u \Delta_x^u \log \eta(x)].$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Korollar *Sind* $\eta_1, \eta_2 \in C_+^\infty(K)$ *logarithmisch konvex, so ist auch* $\eta_1 + \eta_2$ *logarithmisch konvex.*

Das nächste Lemma zeigt, wie die Begriffe matrix-positiv, logarithmisch konvex und konvex zusammenhängen.

Lemma 3.3 *Seien $\eta, \hat{\eta}: K \to \mathbf{R}^+$ stetige Abbildungen und sei $\hat{\eta}$ homogen. Dann gilt*

a) *Ist η matrix-positiv, so ist η logarithmisch konvex.*

b) *Ist η (strikt) logarithmisch konvex, so ist η (strikt) konvex.*
Ist $\hat{\eta}$ logarithmisch konvex, so ist der Homogenitätsgrad von $\hat{\eta}$ nicht-positiv.

c) *Ist $\hat{\eta}$ konvex und ist der Homogenitätsgrad von $\hat{\eta}$ nicht-positiv, so gilt* $\hat{\eta}(x + y) \leqslant \hat{\eta}(x)$ *für alle* $x \in K, y \in \overline{K}$.

B e w e i s. a) Aus (3.13) folgt, daß die Matrix $(\eta(x_i + x_j))$ positiv semidefinit ist. Für $r = 2$ erhält man

$$\eta^2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant \eta(x)\eta(y), \ x, y \in K.$$

Bildet man hiervon den Logarithmus, so ergibt sich

$$\log \eta\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{2}\log \eta(x) + \frac{1}{2}\log \eta(y).$$

Mit Lemma 3.1 folgt die Behauptung.

b) Nach Voraussetzung hat man

$$\log \eta\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{2}\log \eta(x) + \frac{1}{2}\log \eta(y).$$

Man bildet das Exponential und erhält

$$\eta\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant [\eta(x)\eta(y)]^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}\eta(x) + \frac{1}{2}\eta(y).$$

Mit Lemma 2.1 folgt, daß η konvex ist. Sei jetzt κ der Homogenitätsgrad von $\hat{\eta}$, dann erhält man für $y = \alpha x$, $\alpha > 0$, nach Voraussetzung

$$\hat{\eta}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\alpha}{2}x\right) \leqslant [\hat{\eta}(x)\hat{\eta}(\alpha x)]^{1/2}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{\kappa} \leqslant \alpha^{\frac{\kappa}{2}}, \alpha > 0.$$

Hieraus folgt $\kappa \leqslant 0$.

c) Sei wieder κ der Homogenitätsgrad von $\hat{\eta}$. Dann gilt $\hat{\eta}(x + y) = \hat{\eta}(\tau(\tau^{-1}x) + (1-\tau)([1-\tau]^{-1}y)) \leqslant \tau\hat{\eta}(\tau^{-1}x) + (1-\tau)\hat{\eta}([1-\tau]^{-1}y) = \tau^{1-\kappa}\hat{\eta}(x) + (1-\tau)^{1-\kappa}\hat{\eta}(y)$ für $0 < \tau < 1$ und $x, y \in K$. Ein Grenzübergang $\tau \to 1$ liefert $\hat{\eta}(x + y) < \hat{\eta}(x)$ für $x, y \in K$. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

Für strikt logarithmisch konvexe $\eta \in C_+^\infty(K)$ läßt sich die Ungleichung von Teil c) des Lemma 3.3 verschärfen. Für solche η hat man nämlich

(3.14) $\sigma(H(x)u, u) > 0 \quad$ für alle $x \in K, u \in V, u \neq 0$.

Unter Verwendung der Taylor-Entwicklung (3.11) erhält man hieraus

(3.15) $\dfrac{\eta(x)}{\eta(x + u)} < e^{\sigma(h(x), u)} \quad$ für alle $x \in K, u \in V, u \neq 0$ mit $x + u \in K$.

Dafür kann man schreiben

(3.16) $\frac{\eta(a)}{\eta(b)} < e^{\sigma(h(a), b-a)}$ für alle $a, b \in K$, $a \neq b$.

Unter Verwendung dieser Ungleichungen zeigt man das folgende

Lemma 3.4 *Sei* $\eta \in C_h^\infty(K)$ *strikt logarithmisch konvex. Dann gilt*

a) $\eta(x+u) < \eta(x)$ *für alle* $x \in K$, $u \in \overline{K}$, $u \neq 0$.

b) $h_{\eta,\sigma}(K) \subset K^\sigma$,

c) *Die Abbildung* $h_{\eta,\sigma} : K \to K^\sigma$ *ist offen und injektiv.*

B e w e i s. Wegen (3.14) ist die Funktionalmatrix von $h_{\eta,\sigma}$ invertierbar, somit ist $h_{\eta,\sigma}$ offen. Sei jetzt $u \in \overline{K}$, $u \neq 0$; dann gilt $x + u \in K$ für alle $x \in K$ und es kann (3.15) angewandt werden. Zusammen mit Lemma 3.3 erhält man $1 < e^{\sigma(h(x),u)}$. Es folgt $\sigma(h(x), u) > 0$ für alle $x \in K$, $u \in \overline{K}$, $u \neq 0$. Dies bedeutet aber gerade $h(K) \subset K^\sigma$. Nun betrachtet man die Funktion $\varphi(\tau) := \log \eta(x + \tau u)$ und erhält $\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau) = -\sigma(h(x+\tau u), u) < 0$. Also ist φ streng monoton fallend, und es folgt $\log \eta(x+u) = \varphi(1) < \varphi(0) = \log \eta(x)$, d. h. $\eta(x+u) < \eta(x)$ für $x \in K$, $u \in \overline{K}$, $u \neq 0$. Damit ist nur noch die Injektivität von h zu zeigen. Seien dazu $a, b \in K$ gegeben mit $h(a) = h(b)$. Für $a \neq b$ folgt dann mit (3.16) aber $\eta(a)/\eta(b) < e^{\sigma(h(a),b-a)} = e^{-\sigma(h(b),a-b)} < \eta(a)/\eta(b)$. Dies ist ein Widerspruch.

Korollar *Es sei* K *ein offener konvexer Kegel und* $\eta \in C_h^\infty(K)$ *strikt logarithmisch konvex. Dann ist* K *ein regulärer Kegel.*

Wegen Teil c) des Lemmas ist nämlich K^σ nicht leer. Aus Lemma 1.4 folgt daher die Behauptung.

5. Im Rest dieses Paragraphen sei stets K ein regulärer Kegel. Zur Untersuchung von Kegeln wurde zuerst von M. Koecher eine spezielle strikt logarithmisch konvexe Abbildung betrachtet, die „Invariante" eines regulären Kegels. Sie ist für homogene Kegel (bis auf positive Vielfache) eindeutig bestimmt.

Sie ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der algebraischen Beschreibung homogener Kegel. Obwohl diese Abbildung sogar matrix-positiv ist, wird sie bereits hier behandelt, da ihre wichtigsten Eigenschaften auch ohne die in § 5 dargestellte Theorie leicht zu sehen sind. Weiter dient sie als Beispiel für die in § 4 betrachtete Situation.

Mit einem Lebesgue-Maß dy von V setzt man

(3.17) $\iota_K(x) := \int_{K^\sigma} e^{-\sigma(x,y)}\, dy, \qquad x \in K.$

Man macht sich mit Lemma 1.5 leicht klar, daß das Integral für alle $x \in K$ endlich ist. Die Abbildung ι_K heißt *Invariante von* K. Ihrer Definition (oder den Ergebnissen von § 5) entnimmt man das

Lemma 3.5 *Sei* K *ein regulärer Kegel in* V. *Dann gilt*

a) $\iota_K : K \to \mathbb{R}^+$ *ist reell-analytisch und homogen.*

b) $\iota_K(x)$ *konvergiert gegen Unendlich, falls* x *gegen den Rand von* K *strebt.*

c) ι_K *ist strikt logarithmisch konvex und matrix-positiv.*

d) $\iota_K(Wx) = |\det W|^{-1}\,\iota_K(x)$ *für alle* $x \in K$, $W \in \mathrm{Aut}\,K$.

Aus der letzten Aussage des Lemmas folgt, daß $\iota_K(x)\,dx$ ein invariantes Maß auf K bezüglich Aut K definiert.

Die folgenden Ergebnisse sind oft nützlich. Sie werden unter Verwendung der Invarianten des Kegels K bewiesen.

Lemma 3.6 *Ist* $\mathcal{W}$ *eine Teilmenge von* Aut K *und gibt es ein* $a \in K$, *so daß der Abschluß der Menge* $\{Wa;\ W \in \mathcal{W}\}$ *in* K *enthalten ist, dann ist der Abschluß von* $\mathcal{W}$ *in* End V *bereits in* Aut K *enthalten.*

Beweis. Sei $W \in \overline{\mathcal{W}}$; dann gibt es eine Folge $W_n \in \mathcal{W}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = W$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} W_n a = Wa$ erhält man nach Voraussetzung $Wa \in K$ und $W_n a \in K$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Damit gilt $\iota_K(Wa) = \lim\limits_{n\to\infty} |\det W_n|^{-1}\,\iota_K(a)$ nach Lemma 3.5. Also konvergiert die Folge $|\det W_n|$ gegen eine positive Zahl und W ist invertierbar. Mit § 1.6 erhält man jetzt sofort $W \in \mathrm{Aut}\,K$.

Lemma 3.7 *Sei* K *ein regulärer Kegel in* V *und* Γ *eine transitive Untergruppe von* Aut K. *Ist dann* $\kappa \in \mathbf{R}$ *und* $\varphi: K \to \mathbf{R}$ *eine positive Abbildung mit*

$$\varphi(Wx) = |\det W|^{\kappa}\varphi(x) \text{ für } W \in \Gamma,\ x \in K,$$

so gibt es ein $\gamma > 0$ *mit* $\varphi(x) = \gamma[\iota_K(x)]^{-\kappa}$ *für alle* $x \in K$.

Beweis. Man setzt $\psi(x) := [\iota_K(x)]^{\kappa}\varphi(x)$ und erhält mit Lemma 3.5 sofort $\psi(Wx) = \psi(x)$ für alle $W \in \Gamma$ und alle $x \in K$. Da Γ transitiv auf K operiert, ist ψ konstant.

6. Wie in [14], I, § 1 bezeichnet $\mathrm{Aut}(K, \eta)$ die Menge aller $W \in \mathrm{Aut}\,K$, für die es ein $\alpha(W) > 0$ gibt, so daß $\eta(Wx) = \alpha(W)\eta(x)$ für alle $x \in K$ gilt. Weiter heißt ein $\eta \in C_+^\infty(K)$ *nicht-ausgeartet*, wenn die Bilinearform $(u, v) \to \Delta_x^u \Delta_x^v \log \eta(x)$ für alle $x \in K$ nicht-ausgeartet ist (vgl. [14], I, § 2).

Für $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$ erhält man $\eta_{Wx}^{(m)}(Wu_1, \ldots, Wu_m) = \eta_x^{(m)}(u_1, \ldots, u_m)$. Mit der Bemerkung aus 2 folgt speziell für alle $x \in K$, $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$ und jede nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform σ von V

(3.18) $h_{\eta,\sigma}(Wx) = W^{\sigma-1} h_{\eta,\sigma}(x), \qquad W^{\sigma-1} := (W^\sigma)^{-1} = (W^{-1})^\sigma$

(3.19) $H_{\eta,\sigma}(Wx) = W^{\sigma-1} H_{\eta,\sigma}(x) W^{-1}$.

Lemma 3.8 *Sei* K *ein regulärer Kegel in* V *und* $\eta \in C_+^\infty(K)$. *Ferner operiere* $\mathrm{Aut}(K, \eta)$ *transitiv auf* K *und* σ *sei eine nicht-ausgeartete Bilinearform von* V. *Dann gilt*

a) $h_{\eta,\sigma}$ *ist rational,*

b) *Es gibt ein* $\gamma_{\eta,\sigma} > 0$ *mit* $|\det H_{\eta,\sigma}(x)| = \gamma_{\eta,\sigma}[\iota_K(x)]^2$, $x \in K$.

c) ι_K^2 *ist rational.*

B e w e i s. Der Teil a) folgt unmittelbar aus [14], II, Satz 4.4. Zum Beweis von Teil b) beachtet man, daß $H_{\eta,\sigma}(Wx) = W^{\sigma-1} H_{\eta,\sigma}(x) W^{-1}$ für alle $x \in K$, $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$ gilt. Nun erhält man die Behauptung aus Lemma 3.7.

B e m e r k u n g. 1) Die Rationalität von ι_K^2 wurde in [22] und [38] mit anderen Methoden bewiesen. Für den Fall eines homogenen Positivitätsbereiches (vgl. § 7) wurde diese Aussage auch in [30] gezeigt.

2) Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.8 sind also ι^2, $\iota = \iota_K$, und $h_{\iota,\sigma}$ rational; weiter strebt $\iota(x)$ gegen Unendlich, wenn x gegen den Rand von K strebt. Nach [14], I, Satz 1.8 ist somit Aut K = Aut(K, ι) eine abgeschlossene Untergruppe einer algebraischen Gruppe Γ und hat endlichen Index in Γ. Insbesondere ist die Lie-Algebra der Lie-Gruppe Aut K algebraisch.

7. In Lemma 3.5 wurde gezeigt, daß es zu jedem regulären Kegel K eine homogene, strikt logarithmisch konvexe Abbildung $\iota_K : K \to \mathbf{R}^+$ gibt. Eine Umkehrung dieser Aussage liefert das folgende Ergebnis von J.-L. Koszul [24].

Satz 3.9 *Sei* G *ein Gebiet in* V *und* $\eta : G \to \mathbf{R}^+$ *eine homogene strikt logarithmisch konvexe Abbildung, für die die Gruppe* $\mathrm{Aut}(G, \eta) := \{W; W \in \mathrm{GL}\, V, WG = G, \eta(Wx) = \alpha(W)\eta(x)$ *für alle* $x \in G\}$ *transitiv auf* G *operiert. Dann ist* G *ein homogener (regulärer) Kegel in* V.

Die folgende B e w e i s s k i z z e spezialisiert die Beweisschritte von [24], 3, 4 auf die hier betrachtete Situation und überträgt sie auf die in diesem Artikel benutzten Bezeichnungen.

a) Man betrachtet G als differenzierbare Mannigfaltigkeit und identifiziert alle Tangentialräume von G mit V. Durch $\eta_x''(u, v) := \Delta_x^u \Delta_x^v \log \eta(x)$, $u, v \in V$, erklärt man eine riemannsche Metrik auf G. Nach Voraussetzung ist die riemannsche Mannigfaltigkeit (G, η'') homogen unter der Gruppe Aut(G, η) von Isometrien. Damit ist (G, η'') vollständig (vgl. § 8).

b) Wörtlich wie im Beweis zu Lemma 8.2 zeigt man jetzt: Seien $a \in G$ und $u \in V$ derart, daß $a + \tau u \in G$ für $0 \leqslant \tau < \tau_0$ und $a + \tau_0 u \notin G$. Dann konvergiert $\eta(a + \tau u)$ gegen $+\infty$, wenn τ gegen τ_0 strebt.

c) G *ist konvex:* Mit $\mathrm{env}(b_1, \ldots, b_p)$ bezeichnet man die konvexe Hülle der Punkte $b_1, \ldots, b_p \in V$. Da G zusammenhängend ist, genügt es für $a, b, c \in G$ zu zeigen, daß aus $\mathrm{env}(a, b) \subset G$ und $\mathrm{env}(a, c) \subset G$ schon $\mathrm{env}(a, b, c) \subset G$ folgt. Dazu setzt man $g(\tau) := \tau a + (1 - \tau)c$, $\tau \in \mathbf{R}$, und bezeichnet mit I die Menge aller $\tau \in \mathbf{R}$, für die $\mathrm{env}(a, b, g(\tau)) \subset G$ gilt. Dann ist I ein offenes Intervall, das 0 enthält. Für $\tau \in I$ ist $\chi := \log \eta$ auf $\mathrm{env}(a, b, g(\tau))$ konvex; somit folgt für alle $e \in \mathrm{env}(a, b, g(\tau))$ sofort $\chi(e) \leqslant \sup\{\chi(a), \chi(b), \chi(g(\tau))\}$. Für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ gilt weiter $g(\tau) \in \mathrm{env}(a, c)$; daher erhält man analog $\chi(g(\tau)) \leqslant \sup\{\chi(a), \chi(c)\}$. Hieraus folgt, daß das obere Intervallende b von I größer 1 ist. Für $b \leqslant 1$ wurde nämlich χ wegen b) bei Annäherung an bestimmte Randpunkte von $\mathrm{env}(a, b, g(b))$ gegen ∞ konvergieren. Wie eben gezeigt ist aber χ auf dieser Menge durch $\sup\{\chi(a), \chi(b), \chi(c)\}$ nach oben beschränkt. Daher gilt also $1 < b$ und somit auch $\mathrm{env}(a, b, c) \subset G$.

d) G *ist ein regulärer Kegel in* V: Zunächst betrachtet man das invariante Vektorfeld $x \to x$ von G und seine Integralkurve $\gamma : \mathbf{R} \to G$ durch $a \in G$. Es gilt also $\dot\gamma(\tau) = \gamma(\tau)$ und $\gamma(0) = a$. Damit folgt $\gamma(\tau) = e^\tau a \in G$ für alle $\tau \in \mathbf{R}$. Daher ist G ein offener konvexer Kegel. Man verwendet nun das Korollar zu Lemma 3.4 und erhält die Behauptung.

§ 4 Über den Gradienten von log η

In diesem Paragraphen wird für strikt logarithmisch konvexe Funktionen der Zusammenhang zwischen einem regulären Kegel K in V und seinem σ-dualen Kegel K^σ (vgl. § 1, 7) untersucht.

1. Für eine gegebene strikt logarithmisch konvexe Funktion $\eta \in C_h^\infty(K)$ werden die *Niveau-Flächen* durch ein $a \in K$,

$$N_a := N_a^\eta := \{x;\, x \in K, \eta(x) = \eta(a)\},$$

und die Teilmengen

$$D_a := D_a^\eta := \{x;\, x \in K, \eta(x) < \eta(a)\}$$

untersucht. Da η stetig ist, erhält man in der Relativtopologie von K abgeschlossene Mengen N_a^η und offene Mengen D_a^η. Aus Lemma 3.4 folgt sofort

$$\{a + x;\, x \in \overline{K}, x \neq 0\} \subset D_a \quad \text{und} \quad a + \overline{K} \subset \overline{D}_a.$$

Ferner ist $N_a = K \cap \text{Rand } D_a$, wobei der Rand von D_a in V zu bilden ist.

Satz 4.1 *Es sei* K *ein regulärer Kegel in* V *und* $\eta \in C_h^\infty(K)$ *sei strikt logarithmisch konvex. Für alle* $a \in K$ *und alle* $b \in N_a^\eta$ *gilt dann:*

a) D_a^η *ist konvex.*

b) *Durch* b *gibt es genau eine Stützebene* H_b *an* D_a^η.

c) $\overline{D_a^\eta} \cap H_b = \{b\}$.

d) H_b *trennt* D_a^η *und den Nullpunkt.*

e) η *hat genau ein Minimum auf* H_b, *nämlich im Punkt* b.

f) *Ist* σ *eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform von* V, *dann gilt* $H_b = \{x;\, x \in V, \sigma(h_{\eta,\sigma}(b), x - b) = 0\}$.

B e w e i s. Nach Wahl von σ definiert man H_b wie in Teil f) und zerlegt den Beweis in die folgenden Schritte:

1. H_b *ist eine Stützebene an* D_a *durch* b, *die* c) *und* d) *erfüllt.* Für $x \in \overline{D_a}$ und $x_n \in K$, $x_n \to x$ ist $\lim_{n\to\infty} \eta(x_n) \leqslant \eta(a) = \eta(b)$, so daß $\sigma(h(b), x - b) > 0$ für $x \neq b$ aus (3.16) folgt. Das ist schon die Behauptung.

2. D_a *ist konvex,* da η logarithmisch konvex, also speziell konvex ist. Zum Beweis der Teile b) und e) kann man ohne Einschränkung a = b annehmen.

3. Zum Beweis von Teil e) nimmt man an, daß es ein $x \neq a$ in K gibt mit $\sigma(h(a), x - a) = 0$ und $\eta(x) \leqslant \eta(a)$. Wieder erhält man mit (3.16) einen Widerspruch.

4. H_a *ist die einzige Stützebene an* D_a *durch* a. Sei dazu $E = \{x, x \in V, \sigma(u, x - a) = 0\}$ eine beliebige Stützebene durch a. Also $u \neq 0$ und ohne Einschränkung $\sigma(u, x - a) \geqslant 0$ für $x \in \overline{D_a}$. Sei jetzt $y \in V$ mit $\sigma(u, y) = 0$ gegeben. Für alle α in einer Umgebung von 0 gehört dann $c := a + \alpha y$ zu $K \cap E$. Da D_a offen ist, gilt

$D_a \cap E = \emptyset$. Weiter gilt $\eta(c) \geqslant \eta(a)$, da für $\eta(c) < \eta(a)$ folgen würde $c \in D_a$. Aus (3.16) erhält man jetzt $1 \leqslant \eta(c)/\eta(a) < e^{\sigma(h(c), a-c)}$, also $\sigma(h(c), a-c) \geqslant 0$. Dies bedeutet

$$\sigma(h(a+\alpha y), y) \leqslant 0 \quad \text{für } \alpha > 0 \quad \text{und} \quad \sigma(h(a+\alpha y), y) \geqslant 0 \text{ für } \alpha < 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen bekommt man daher $\sigma(h(a), y) = 0$. Insgesamt wurde also gezeigt: Aus $\sigma(u, y) = 0$ folgt $\sigma(h(a), y) = 0$. Damit ist u ein skalares Vielfaches von $h(a)$ und somit $E = H_a$.

2. Nach [14], I, § 1, heißt eine Abbildung $\eta \in C^\infty(K)$ *explodierend,* wenn $\eta(x)$ gegen ∞ konvergiert, falls x gegen einen Randpunkt von K strebt. Im folgenden werden explodierende, strikt logarithmisch konvexe Abbildungen untersucht. Man sieht sofort, daß für solche Abbildungen die Menge N_a^η gleich ist dem Rand von D_a^η. Aus Lemma 3.5 entnimmt man, daß die Invariante ι_K von K eine Abbildung des genannten Typs ist.

Satz 4.2 *Sei* K *ein regulärer Kegel in* V, σ *eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform von* V *und* $\eta \in C_h^\infty(K)$ *eine explodierende, strikt logarithmisch konvexe Abbildung. Dann ist die Abbildung* $h_{\eta,\sigma} : K \to K^\sigma$ *topologisch.*

B e w e i s. Wegen Lemma 3.4 bleibt nur noch die Surjektivität von h zu zeigen. Sei also $c \in K^\sigma$ und H die Hyperebene $H = \{x; x \in V, \sigma(c, x) = 1\}$. Sei weiter $a \in H \cap K$. Setzt man dann

$$D' := \{x; x \in \overline{D_a}, \sigma(c, x) \leqslant 1\}, \qquad D'' := \{x; x \in \overline{D_a}, \sigma(c, x) \geqslant 1\},$$

so ist $\overline{D_a} = D' \cup D''$ und D' ist konvex. Aus Lemma 1.5 entnimmt man, daß D' beschränkt und daher kompakt ist. Enthält D' keine inneren Punkte, so ist $D'' = \overline{D_a}$ und H ist eine Stützebene an D_a. Besitzt dagegen D' innere Punkte, so zeigt Lemma 1.2, daß es eine zu $\{x; x \in V, \sigma(c, x) = 0\}$ parallele Stützebene H' an D' gibt, also $H' = \{x; x \in V, \sigma(c, x) = \alpha\}$ mit $0 < \alpha < 1$, welche auf derselben Seite von D' liegt wie 0. Für $x \in D'$ ist also $\sigma(c, x) \geqslant \alpha$ und für $x \in D''$ ist $\sigma(c, x) \geqslant 1 > \alpha$. Folglich ist H' eine Stützebene an D_a.

In beiden Fällen gibt es also eine zu E parallele Stützebene H an D_a. Ist $b \in \overline{D_a} \cap H$, dann ist b ein Randpunkt von D_a, liegt nach der Voraussetzung also in N_a. Aus Satz 4.1 folgt nun $H = H_b$, und c ist ein skalares Vielfaches von $h(b)$; also $c = \gamma h(b)$, $\gamma > 0$. Damit folgt $c = h(\gamma^{-1} b)$, und der Satz ist bewiesen.

Satz 4.3 *Sei* K *ein regulärer Kegel in* V *und* σ *eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform von* V. *Mit* K *ist auch* K^σ *homogen.*

B e w e i s. Zur Invarianten ι von K definiert man $h = h_{\iota,\sigma}$ nach (3.4) und erhält mit Satz 4.2, daß h ein Diffeomorphismus von K auf K^σ ist. Nach (3.18) gilt $h(Wx) = W^{\sigma-1} h(x)$ für alle $W \in \text{Aut } K$, $x \in K$. Aus der Transitivität von Aut K folgt jetzt mit (1.9) die Behauptung.

3. Die Frage nach Fixpunkten der Abbildung $h: K \to K^\sigma$ kann auf zwei Arten gestellt werden, nämlich je nachdem man sie für *gegebenes* σ oder für *geeignetes* σ stellt. Zunächst gilt für *gegebenes* σ der

Satz 4.4 *Sei* K *ein regulärer Kegel in* V, σ *eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf* V *und* $\eta \in C_h^\infty(K)$ *explodierend und strikt logarithmisch konvex. Dann besitzt die Abbildung* $h_{\eta,\sigma}: K \to K^\sigma$ *genau einen Fixpunkt.*

Beweis. Da σ positiv definit ist, erhält man durch $|x| := \sqrt{\sigma(x, x)}$ eine Norm von V. Nun wählt man $a \in K$ beliebig und betrachtet die Funktion $x \to |x|$ auf der Niveaufläche N_a. Es gibt dann ein $b \in N_a$ mit $|b| = \inf\{|x|; x \in N_a\}$, denn das rechts stehende Infimum ist gleich dem Infimum der Norm auf der Menge $C := \{x; x \in N_a, |x| \leqslant |a|\}$. Es ist C in der Topologie von V abgeschlossen, da η explodierend ist. Dann ist C sogar kompakt und die Norm nimmt auf C ihr Infimum an. Damit gibt es ein $\rho \in \mathbf{R}$, so daß für alle $u \in V$ gilt

$$\Delta_x^u[|x| + \rho(\eta(x) - \eta(a))]|_{x=b} = 0.$$

Nun berechnet man $\Delta_x^u |x| = \dfrac{1}{|x|}\sigma(x, u)$ und $\Delta_x^u \eta(x) = -\eta(x)\sigma(h(x), u)$ und erhält $h(b) = \beta b$ mit $\beta \in \mathbf{R}$. Da aber $h(b) \in K^\sigma$ und $b \in K$ folgt $\beta > 0$. Für $c := \sqrt{\beta}b$ rechnet man sofort nach $h(c) = c$. Ist c' ein weiterer Fixpunkt von h, so gibt es $\gamma > 0$ mit $\eta(\gamma c) = \eta(c')$. Ist dabei $\gamma c \neq c'$, so liefert (3.16) jetzt $\sigma(h(c), c' - c) \geqslant 0$ und $\sigma(h(c'), c - c') \geqslant 0$, also $\sigma(c, c' - c) \geqslant 0$ und $\sigma(c', c - c') \geqslant 0$. Man addiert und bekommt $|c - c'|^2 \leqslant 0$, also $c = c'$. Ist $\gamma c = c'$, so erhält man $c' = h(c') = h(\gamma c) = \dfrac{1}{\gamma} c$ also $\gamma = 1$ und wieder $c = c'$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wendet man den Satz 4.4 an auf $\eta = \iota_K$, so erhält man ein Ergebnis, das zuerst von T. Ochiai [27] mit anderen Methoden bewiesen wurde:

Korollar $K \cap K^\sigma \neq \emptyset$.

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.4 hat $h_{\eta,\sigma}(x)$ eine geometrische Interpretation (vgl. [38], I, § 4).

Nach Teil f) von Satz 4.1 ist nämlich $h_{\eta,\sigma}(x)$ der eindeutig bestimmte Vektor, der die Hyperebene H_x an D_x^η in x bestimmt. Für die Invariante ι von K gibt es noch eine weitere Interpretation. Dazu betrachtet man zu $x \in K$ die Menge $M_x := K^\sigma \cap \{u \in V; \sigma(u, x) = 1\}$. Man kann zeigen, daß $h(x)$ gerade der Schwerpunkt der beschränkten Menge M_x ist.

Bemerkung 1. Die meisten der bisherigen Ergebnisse dieses Paragraphen findet man etwa in [22]. Für homogene Kegel bzw. homogene Positivitätsbereiche vergleiche man mit [38] bzw. [21] und [30].

2. Die Eigenschaft $K \cap K^\sigma \neq \emptyset$ wurde für spezielle σ bereits in [14], II, § 4.4 bewiesen.

4. In Satz 4.4 ist sowohl h als auch der Fixpunkt von h abhängig von der gegebenen positiv definiten Bilinearform σ. Zur Untersuchung dieser Abhängigkeit bezeichne $c = c_{\eta,\sigma}$ den gemäß Satz 4.4 eindeutig bestimmten Fixpunkt der Abbildung $h = h_{\eta,\sigma}$. Man betrachte den Vektorraum

$$S(V, \sigma) := \{A; A \in \operatorname{End} V, A^\sigma = A\}$$

und den regulären Kegel $P(V, \sigma)$ in $S(V, \sigma)$, der aus den positiv definiten A aus $S(V, \sigma)$ besteht.

Jedem $A \in P(V, \sigma)$ wird eine symmetrische positiv definite Bilinearform σ_A von V durch $\sigma_A(x, y) := \sigma(Ax, y)$ zugeordnet. Man setzt $h_A := h_{\eta,\sigma_A}$ und bezeichnet mit $g(A) = g_{\eta,\sigma}(A)$, $g(\mathrm{Id}) = c$, den gemäß Satz 4.4 eindeutig bestimmten Fixpunkt von $h_A : K \to K^{\sigma_A}$. Man verifiziert zunächst

$$K^{\sigma_A} = A^{-1}K^{\sigma}, \qquad h_A(x) = A^{-1}h(x) \quad \text{für } x \in K.$$

Lemma 4.5 *Für explodierendes, strikt logarithmisch konvexes* $\eta \in C_h^\infty(K)$ *ist die Abbildung* $g : P(V, \sigma) \to K$ *eine reell-analytische Surjektion mit folgenden Eigenschaften:*

a) $h(g(A)) = A\, g(A)$ *für alle* $A \in P(V, \sigma)$.

b) *Gilt* $h(x) = Ax$ *für ein* $x \in K$ *und* $A \in P(V, \sigma)$ *so ist* $x = g(A)$.

c) *Für* $x \in K$ *ist* $g(A) = x$ *gleichwertig mit* $Ax = h(x)$.

d) $g(H(x)) = x$ *für alle* $x \in K$.

Beweis. Die Teile a) und b) folgen direkt aus der Definition von $g(A)$. Teil c) ergibt sich aus a) und b), während Teil d) wegen (3.9) ebenfalls aus b) folgt. Speziell ist g surjektiv. Ein Potenzreihenansatz in der definierenden Identität a) zeigt, daß g reell-analytisch ist.

5. Für ein explodierendes, strikt logarithmisch konvexes $\eta \in C_h^\infty(K)$ ist $H(x)$ für $x \in K$ wegen (3.14) positiv definit. Nach Wahl eines $c \in K$ erhält man daher durch

$$\sigma_c(u, v) := \Delta_x^u \Delta_x^v \log \eta(x)|_{x=c}$$

eine symmetrische positiv definite Bilinearform von V. Für $h := h_{\eta,\sigma_c}$ und $H := H_{\eta,\sigma_c}$ folgt dann aus (3.5) sofort $H(c) = \mathrm{Id}$ und (3.9) ergibt $h(c) = c$. Damit kann σ so gewählt werden, *daß ein gegebener Punkt aus* K *der einzige Fixpunkt von* h *ist.*

§ 5 Matrix-positive Abbildungen

Es sei wieder K ein regulärer Kegel in V und K^* der duale Kegel in V^*.

1. Eine stetige Abbildung $\eta: K \to \mathbf{R}^+$ nennt man wie in (3.13) *matrix-positiv*, wenn

$$(5.1) \quad \sum_{i,j=1}^{r} \alpha_i \alpha_j \eta(x_i + x_j) \geqslant 0 \quad \text{für } r \in \mathbf{N},\ \alpha_i \in \mathbf{R},\ x_i \in K,$$

Für die Beschreibung solcher Abbildungen ist der folgende Satz 5.1 von entscheidender Bedeutung. Er stellt eine leichte Modifikation und Spezialisierung eines Satzes von A. E. Nussbaum [26] dar.

Ein nicht-triviales positives Maß μ auf einem Kegel $\overline{K}$ heißt *homogen,* wenn es ein $\kappa \in \mathbf{R}$ gibt mit $\mu(\tau B) = \tau^\kappa \mu(B)$ für alle $\tau > 0$ und alle meßbaren Teilmengen B von $\overline{K}$. Ist μ ein positives Maß auf $\overline{K^*}$, so setze man

$$(5.2) \quad \eta_\mu(x) := \int_{\overline{K^*}} e^{-\lambda(x)}\, d\mu(\lambda), \ x \in K,$$

sofern die rechte Seite existiert.

Satz 5.1 a) *Ist* $\eta: \underline{K} \to \mathbf{R}^+$ *homogen stetig und matrix-positiv, dann gibt es ein positives Maß* μ *auf* $\overline{K^*}$ *mit* $\eta = \eta_\mu$.

b) *Ist umgekehrt* μ *ein positives Maß auf* $\overline{K^*}$ *und ist* η_μ *endlich, dann ist* $\eta_\mu: K \to \mathbf{R}^+$ *stetig und matrix-positiv.*

B e w e i s. Der Teil b) ist leicht zu verifizieren. Zum Beweis von Teil a) definiert man für stetige Abbildung $\varphi: K \to \mathbf{R}$ und $a \in K$ eine stetige Abbildung $t_a\varphi: K \to \mathbf{R}$ durch $(t_a\varphi)(x) := \varphi(x + a)$, $x \in K$. Mit M bezeichne man den von den $t_a\eta$, $a \in K$, aufgespannten Vektorraum stetiger Abbildungen von K nach $\mathbf{R}$.

Für $\varphi, \psi \in M$ definiert man

$$(5.3)\quad (\varphi, \psi) := \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j\eta(a_i + b_j), \qquad \text{falls } \varphi = \sum_i \alpha_i t_{a_i}\eta,\ \psi = \sum_j \beta_j t_{b_j}\eta.$$

Man verifiziert zunächst, daß (φ, ψ) wohldefiniert ist. Da η matrix-positiv war, ist (φ, ψ) eine positiv semidefinite Bilinearform von M. Weiter sieht man $\varphi(x) = (\varphi, t_x\eta)$ für alle $\varphi \in M$, $x \in K$. Damit folgt $|\varphi(x)|^2 = |(\varphi, t_x\eta)|^2 \leqslant (\varphi, \varphi)(t_x\eta, t_x\eta)$ für alle $\varphi \in M$, $x \in K$. Für $\varphi \in M$ impliziert also $(\varphi, \varphi) = 0$ schon $\varphi = 0$. Damit ist $(\,.\,,.\,)$ ein Skalarprodukt von M. Der durch Vervollständigung von M entstehende Hilbert-Raum wird mit H bezeichnet. Bekanntlich (vgl. etwa [3], [26]) ist $k: K \times K \to \mathbf{R}^+$, $k(x, y) := \eta(x + y)$, ein reproduzierender Kern von H. Es gilt also

$$(5.4)\quad \varphi(x) = (\varphi, t_x\eta) \quad \text{für } x \in K,\ \varphi \in H.$$

Es gilt ferner die Ungleichung

$$(5.5)\quad (t_a\psi, \psi) \leqslant (\psi, \psi) \quad \text{für } \psi \in H,\ a \in K.$$

Für $\psi \in M$ verwendet man (5.3) und sieht, daß die Ungleichung (5.5) in diesem Fall gleichbedeutend ist mit

$$\sum_{i,j} \beta_i\beta_j\eta(b_i + a + b_j) \leqslant \sum_{i,j} \beta_i\beta_j\eta(b_i + b_j).$$

Zum Nachweis dieser Aussage betrachtet man die durch $x \to \sum_{i,j} \beta_i\beta_j\,\eta(x + b_i + b_j)$ definierte, nicht-negative Abbildung $\hat{\eta}: \overline{K} \to \mathbf{R}$. Mit Lemma 3.3 sieht man, daß $\hat{\eta}$ beschränkt ist. Wie im Beweis zu [5], Lemma 2.4, zeigt man jetzt, daß $\hat{\eta}$ die Ungleichung (5.1) für alle $r \in \mathbf{N}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$ und alle $x_i \in K$ erfüllt. Somit ist $\hat{\eta}$ „positive-definite" im Sinne von [5], Definition 2.1. Aus [5], Lemma 2.2 folgt daher $\hat{\eta}(a) \leqslant \hat{\eta}(0)$. Dies besagt gerade $(t_a\psi, \psi) \leqslant (\psi, \psi)$ für $\psi \in M$ und $a \in K$. Die Ungleichung gilt dann auch in H.

Nach Konstruktion ist t_a, $a \in K$, ein selbstadjungierter Endomorphismus von H. Aus (5.5) folgt jetzt, daß die t_a für alle $a \in K$ eine durch 1 beschränkte Norm haben.

Nun schließt man wie in [26], Theorem 1, daß es ein Spektralmaß $E(\lambda)$ bezüglich der Borel-Mengen von $\overline{K^*}$ gibt, so daß das Integral

$$t_x = \int_{\overline{K^*}} e^{-\lambda(x)}\, dE(\lambda)$$

gleichmäßig in H konvergiert. Für $\varphi \in H$ folgt nach (5.4)

$$\eta(x + 2a) = (t_{x+a}\eta, t_a\eta) = (t_x t_a\eta, t_a\eta) = \int_{\overline{K^*}} e^{-\lambda(x)}\, d\mu_a(\lambda),$$

wobei $\mu_a(\lambda) := (E(\lambda)t_a\eta, t_a\eta)$ gesetzt ist. Damit erhält man auch die Gleichung

$$\int_{\overline{K^*}} e^{-\lambda(x+2a)}\, d\mu_b(\lambda) = \eta(x + 2a + 2b) = \int_{\overline{K^*}} e^{-\lambda(x+2b)}\, d\mu_a(\lambda) \quad \text{für alle } x \in K.$$

Hieraus folgt, daß die beiden Maße $e^{-2\lambda(b)}\, d\mu_a(\lambda)$ und $e^{-2\lambda(a)}\, d\mu_b(\lambda)$ von $\overline{K^*}$ übereinstimmen. Man setzt

$$d\mu(\lambda) := e^{2\lambda(a)}\, d\mu_a(\lambda)$$

und erhält ein reguläres Borel-Maß auf $\overline{K^*}$, das von der Wahl von $a \in K$ unabhängig ist. Wegen

$$\eta(x) = \eta\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x\right) = \int_{\overline{K^*}} d\mu_{\frac{1}{2}x}(\lambda) = \int_{\overline{K^*}} e^{-2\lambda\left(\frac{1}{2}x\right)} d\mu(\lambda)$$

ist der Satz bewiesen.

B e m e r k u n g. Satz 5.1 sowie sein Beweis sind im wesentlichen aus [26], Theorem 2, entnommen. Dort werden statt Kegeln gewisse Halbgruppen S (mit neutralem Element 0) betrachtet. Dann ist $\overline{K^*}$ durch eine Untergruppe der „dualen Halbgruppe" S^* und $e^{-\lambda(x)}$ durch einen reellen Charakter zu ersetzen. Das Maß $d\mu$ ist dann durch $d\mu_0$ gegeben. Wegen $0 \notin K$ war es notwendig, das Maß $d\mu$ ohne Verwendung eines neutralen Elements zu erhalten. Die oben angegebene Definition von $d\mu$ stammt aus dem Beweis von [28], Theorem 1. Die Tatsache, daß man die Voraussetzungen von [26], Theorem 2, in der hier verwendeten Weise abschwächen kann, wurde zuerst in [35], Theorem 3.1.2, bemerkt. Die Hinweise zum Beweis der Aussage unter den schwächeren Voraussetzungen sind dort recht unvollständig.

2. Aus Satz 5.1 sollen jetzt einige Folgerungen gezogen werden. Ist $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ eine homogene stetige und matrix-positive Abbildung, dann wird ein Maß μ auf $\overline{K^*}$, für welches $\eta = \eta_\mu$ gilt, als *Darstellungsmaß von* η bezeichnet.

Dem Satz 5.1 entnimmt man das folgende

Korollar 1 *Ist* η *stetig, homogen und matrix-positiv,* $\eta = \eta_\mu$ *und* $W \in \operatorname{Aut} K$, *so sind äquivalent*

a) $\eta(Wx) = \alpha(W)\eta(x)$ *für alle* $x \in K$,

b) $\mu(W^*B) = \alpha(W)\mu(B)$ *für alle Borel-Mengen* B *von* $\overline{K^*}$.

Insbesondere ist $\eta = \eta_\mu$ *homogen.*

Zum Kegel K betrachtet man das *Tubengebiet* (oder den Halbraum) $T(K) := V + iK$ in der Komplexifizierung $V + iV$ von V. Unter Verwendung von [9], XIII, (13.8.6), erhält man leicht das

Korollar 2 *Ist* $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ *eine homogene stetige und matrix-positive Abbildung und ist* μ *ein Darstellungsmaß von* η, *dann gilt:*

a) *Durch* $z \to \int_{\overline{K^*}} e^{i\lambda(z)}\, d\mu(\lambda)$ *wird eine holomorphe Abbildung* $\eta_{\mathbf{C}} : T(K) \to \mathbf{C}$ *definiert. Es gilt* $\eta_{\mathbf{C}}(ix) = \eta(x)$, $x \in K$.

b) η *ist reell-analytisch und die Ableitungen von* η *können mit dem Integral vertauscht werden. Speziell gilt* $\eta \in C_+^\infty(K)$.

B e m e r k u n g. Setzt man $\kappa_\eta(z, w) := \eta_{\mathbf{C}}(z - \overline{w})$ für $z, w \in T(K)$, so folgt

$$\sum_{k,e} \alpha_k \overline{\alpha}_e \, \kappa_\eta(z_k, z_e) \geqslant 0 \quad \text{für } \alpha_k \in \mathbf{C},\ z_k \in T(K).$$

Damit ist κ_η der reproduzierende Kern eines Hilbert-Raumes auf $T(K)$ holomorpher Funktionen. Diese Hilbert-Räume werden in [35] untersucht.

3. Im folgenden werden strikte Ungleichungen für η in dem Falle hergeleitet, daß der Träger eines Darstellungsmaßes von η nicht zu klein ist.

Lemma 5.2 *Sei $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ eine homogene stetige und matrix-positive Abbildung und μ ein Darstellungsmaß von η. Erzeugt der Träger von μ ganz V^*, so gilt:*

a) *η ist strikt konvex,*

b) *η ist strikt logarithmisch konvex.*

c) $\eta(x + y) < \eta(x)$ *für alle* $x \in K$, $y \in \overline{K}$, $y \neq 0$.

B e w e i s. a) In der Ungleichung $e^{-\lambda(x)/2} e^{-\lambda(y)/2} \leqslant (e^{-\lambda(x)} + e^{-\lambda(y)})/2$ tritt Gleichheit nur für $\lambda(x) = \lambda(y)$ ein. Ist daher η nicht strikt konvex, so gibt es $x, y \in K$, $x \neq y$, mit $\lambda(x) = \lambda(y)$ für alle λ aus dem Träger von μ. Wegen $x \neq y$ kann der Träger von η dann nicht V^* erzeugen.

b) Nach Teil b) des Korollars ist η reell-analytisch. Man verifiziert

$$2[\eta(x)]^2 \, \Delta_x^u \Delta_x^u \log \eta(x) = \int_{\overline{K^*} \times \overline{K^*}} (\lambda(u) - \lambda'(u))^2 \, e^{-(\lambda+\lambda')(x)} \, d(\mu(\lambda) \times \mu(\lambda')).$$

Analog zum Beweis von Teil a) folgt hieraus die Behauptung.

c) Analog.

B e m e r k u n g. Die Voraussetzung von Lemma 5.2 ist insbesondere dann erfüllt, wenn $d\mu(\lambda) = \rho(\lambda)\,d\lambda$ mit einer Abbildung $\rho : \overline{K^*} \to \mathbf{R}^+$ und einem Lebesgue-Maß $d\lambda$ gilt.

4. Ist ein Darstellungsmaß μ von η absolutstetig bezüglich eines Lebesgue-Maßes $d\lambda$ von V^*, dann können genauere Aussagen gemacht werden: Sei also $\rho : K^* \to \mathbf{R}^+$ eine homogene stetige Abbildung vom Homogenitätsgrad κ und $d\mu(\lambda) = \rho(\lambda)\,d\lambda$. Man wählt $e \in K$ und setzt $H := \{\lambda;\ \lambda \in K^*,\ \lambda(e) = 1\}$. Nach § 1.3 ist $\overline{H}$ kompakt. Man bezeichne mit $\omega = \omega_H$ das von μ auf H induzierte Maß und setzt für $\alpha > 0$

$$(5.6) \quad \varphi_{\rho,\alpha}(x) := \int_{\lambda \in H} [\lambda(x)]^{-\alpha} \rho(\lambda)\, d\omega(\lambda),$$

sofern die rechte Seite existiert. Da es für $x, y \in K$ positive α, β gibt mit $\alpha y > x > \beta y$ (vgl. § 2. 1), also $\lambda(x)$ durch $\lambda(y)$ abgeschätzt werden kann, und da $\overline{H}$ kompakt ist, sind äquivalent:

$$(5.7) \quad \begin{array}{lll} \text{(i)} & \varphi_{\rho,\alpha}(x) & \text{ist für ein } x \in K \text{ endlich,} \\ \text{(ii)} & \varphi_{\rho,\alpha}(x) & \text{ist für alle } x \in K \text{ endlich,} \\ \text{(iii)} & \varphi_{\rho,0} & \text{ist endlich.} \end{array}$$

Eine elementare Rechnung gibt nun für $n := \dim V$

(5.8) $\quad \eta_\mu(x) = \Gamma(n + \kappa) \cdot \varphi_{\rho, n+\kappa}(x), \quad$ falls $d\mu(\lambda) = \rho(\lambda)d\lambda$.

Hier steht Γ für die Eulersche Gamma-Funktion.

Damit übertragen sich die äquivalenten Aussagen (5.7) auf η_μ. Speziell folgt

Lemma 5.3 *Ist* $\rho : K^* \to \mathbf{R}^+$ *stetig und homogen vom Homogenitätsgrad* κ, *so sind für* $d\mu(\lambda) = \rho(\lambda)d\lambda$ *äquivalent:*

a) $\eta_\mu(x)$ *ist endlich für alle* $x \in K$.

b) $\int_H \rho(\lambda)d\lambda < \infty$ *und* $\dim V + \kappa > 0$.

B e m e r k u n g. An Beispielen sieht man, daß das Darstellungsmaß einer matrix-positiven Abbildung im Rand von K^* konzentriert sein kann. So ist etwa für den Kegel der symmetrischen positiv definiten reellen n x n Matrizen das Darstellungsmaß der Abbildung $x \to (\det x)^s$ für $s = -(m-1)/2$, $m = 1, \ldots, n$, in der Menge der positiv semidefiniten Matrizen vom Rang $m - 1$ konzentriert (vgl. [35], 4.6).

Sei wieder $\rho : K \to \mathbf{R}^+$ stetig und homogen. Zur Abkürzung nennt man ρ *nach oben* (bzw. *nach unten*) beschränkt, wenn es nach Wahl einer Norm $\lambda \to |\lambda|$ von V^* ein positives α (bzw. β) gibt mit

$$\rho(\lambda) \leqslant \alpha |\lambda|^\kappa \quad (\text{bzw. } \rho(\lambda) \geqslant \beta |\lambda|^\kappa)$$

für alle $\lambda \in K^*$. Hier ist κ natürlich der Homogenitätsgrad von ρ. Es folgt das

Korollar *Sei* $\rho : K^* \to \mathbf{R}^+$ *stetig, homogen vom Grad* κ *und nach oben beschränkt. Ist dann* $\dim V + \kappa > 0$ *und* $d\mu(\lambda) = \rho(\lambda)d\lambda$, *so ist* $\eta_\mu(x)$ *für* $x \in K$ *endlich.*

5. Man nennt $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ *explodierend,* wenn $\eta(x)$ gegen ∞ konvergiert, falls x gegen einen Randpunkt von K strebt (vgl. § 4.2).

Lemma 5.4 *Sei* $\rho : K^* \to \mathbf{R}^+$ *stetig, homogen vom Grad* $\kappa \geqslant 0$ *und sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt. Für* $d\mu(\lambda) = \rho(\lambda)d\lambda$ *ist dann* η_μ *explodierend.*

B e w e i s. Sei $n := \dim V$. Im Falle $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sei also $n > 1$ und a ein Randpunkt von K. Nach Teil c) von Lemma 1.7 gibt es ein $\lambda_0 \in \overline{K^*}$, $\lambda_0 \neq 0$, mit $\lambda_0(a) = 0$. Man wählt eine kompakte Teilmenge C_0 in K^* mit $\lambda(a) < 1/2$ für alle $\lambda \in C_0$, bezeichnet das Volumen von C_0 mit δ und setzt $\epsilon := \max\{|\lambda|; \lambda \in C_0\}$.

Zu gegebenem $\tau > 0$ gibt es dann ein $m \in \mathbf{N}$ mit $m\delta > \tau$. Man wählt nun α_i mit $\alpha_i \geqslant (1+\epsilon)/|\lambda_0|$, so daß die Teilmengen

$$C_i := \alpha_i\lambda_0 + C_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

von K^* disjunkt sind. Dann ist die Vereinigung C der C_i kompakt, und es gilt

(i) $\quad \lambda(a) < 1/2 \quad$ für alle $\lambda \in C$,

(ii) $\quad$ das Volumen von C bzgl. des Lebesgue-Maßes ist größer als τ.

Wegen (i) gibt es eine kompakte Umgebung U von a, so daß gilt

(iii) $\quad \lambda(x) \leqslant 1 \quad$ für alle $\lambda \in C$ und $x \in U$.

Für $\lambda \in C_i$ folgt nun $|\lambda| \geqslant \alpha_i |\lambda_0| - \epsilon \geqslant 1$, also

(iv) $\quad |\lambda| \geqslant 1 \quad$ für alle $\lambda \in C$.

Wegen $\kappa \geqslant 0$ und $\rho(\lambda) \geqslant \beta |\lambda|^\kappa$, $\lambda \in K^*$, erhält man für $x \in U \cap K$

$$\eta_\mu(x) \geqslant \int_C e^{-\lambda(x)} \rho(\lambda) d\lambda \geqslant \frac{\beta}{e} \int_C |\lambda|^\kappa d\lambda \geqslant \frac{\beta}{e} \int_C d\lambda \geqslant \frac{\beta\tau}{e}.$$

Das bedeutet aber $\eta_\mu(x) \to \infty$ für $x \to a$.

Wie man in Lemma 5.4 gesehen hatte, benötigt man spezielle Bedingungen an das Maß μ, um zeigen zu können, daß η_μ am (endlichen) Rand von K divergiert. Das Verhalten von η_μ für große $x \in K$ kann dagegen allgemein abgeschätzt werden:

Lemma 5.5 *Sei* $\eta: K \to \mathbf{R}^+$ *eine homogene stetige und matrix-positive Abbildung und* $x \to |x|$ *eine Norm von* V. *Zu jedem* $\lambda \in K^*$ *gibt es dann positive* ϵ, γ *mit*

$$\eta(x)\, e^{\lambda(x)} \geqslant \gamma\, e^{\epsilon |x|} \quad \textit{für alle } x \in K.$$

B e w e i s. Nach Teil a) von Satz 5.1 gibt es ein Darstellungsmaß μ mit $\eta = \eta_\mu$. Nun überträgt man den Beweis eines Satzes von O. Rothaus [34].

B e m e r k u n g. Für homogene, matrix-positive und explodierende Abbildung $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ kann man die Aussage von Satz 4.2 direkt aus Lemma 5.5 erhalten. Danach hat $\eta(x)\, e^{\lambda(x)}$, $\lambda \in K^*$, in K ein absolutes Minimum in einem Punkt $a \in K$. Es folgt $\Delta_x^u \eta(x) e^{\lambda(x)} |_{x=a} = 0$ für $u \in V$ und damit $\lambda(u) = \sigma(h(a), u)$. Man vergleiche mit [34].

§ 6 Die Algebren $[V; \eta, e]$

1. Unter einer *Algebra* auf einem Vektorraum V versteht man V zusammen mit einer bilinearen Abbildung $(u, v) \to u \cdot v$ von $V \times V$ in V. Man schreibt dann $A := (V; \cdot)$ und kürzt $uv := u \cdot v$ ab. Man beachte, daß das Assoziativ-Gesetz für die Multiplikation *nicht* gefordert wird.

Ist $A = (V; \cdot)$ eine Algebra, so ist $v \to uv$ eine lineare Abbildung von V in sich. Es gibt daher einen Endomorphismus $A(u)$ von V mit $uv = A(u)v$. Ersichtlich ist $u \to A(u)$ eine lineare Abbildung von V in End V. Man nennt A bzw. $A(u)$ *die Links-Multiplikation von A.*

Die Algebra A heißt *kommutativ,* wenn $uv = vu$ für alle $u, v \in V$ gilt. Ein $e \in V$ heißt *Einselement* von A, wenn $eu = ue = u$ für $u \in V$ erfüllt ist. Ist A kommutativ, so ist e genau dann Einselement, wenn $A(e) = \mathrm{Id}$ gilt.

Eine symmetrische Bilinearform $\sigma : V \times V \to \mathbf{R}$ nennt man *assoziative Bilinearform von A,* wenn $\sigma(uv, w) = \sigma(u, vw)$ für $u, v, w \in V$ erfüllt ist. Ist σ nicht-ausgeartet und A kommutativ, so ist σ offenbar *genau dann assoziativ, wenn* $A(u)$ *bezüglich* σ *selbstadjungiert ist.*

2. Zunächst soll ein Verfahren zur Konstruktion von kommutativen Algebren dargelegt werden: Es sei σ eine symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform von V

und $\lambda : V \times V \times V \to \mathbf{R}$ eine symmetrische trilineare Abbildung. Zu u, v $\in$ V gibt es dann ein $u \cdot v \in V$ mit $\sigma(u \cdot v, w) := \lambda(u, v, w)$ für $w \in V$. Ersichtlich ist die Abbildung $(u, v) \to u \cdot v$ von $V \times V$ in V bilinear, so daß man eine Algebra $A_{\sigma,\lambda} = (V; \cdot)$ auf V erhält. Da λ als symmetrisch vorausgesetzt war, ist $A_{\sigma,\lambda}$ *kommutativ, und* σ *ist assoziative Bilinearform von* $A_{\sigma,\lambda}$.

B e m e r k u n g. Das soeben beschriebene Verfahren zur Konstruktion einer kommutativen Algebra wurde in [16] zur Beschreibung kubischer Formen und in [21] zur Beschreibung von Positivitätsbereichen (vgl. § 7) benutzt.

3. Im folgenden sei K ein regulärer Kegel in V, $e \in K$ beliebig gewählt und $\eta \in C_h^\infty(K)$ strikt logarithmisch konvex. Nach Teil c) von Lemma 3.1 ist dann eine symmetrische positiv definite Bilinearform $\sigma = \sigma_{\eta,e}$ von V definiert durch

$$(6.1)\quad \sigma(u, v) := \Delta_x^u \Delta_x^v \log \eta(x)\,|_{x=e}, \qquad u, v \in V.$$

In der Bezeichnung von § 3.2 hat man also (nach Weglassen der Indizes η, σ):

$$(6.2)\quad h(e) = e, \qquad H(e) = \mathrm{Id}.$$

Wie in 2 definiert man für $u, v \in V$ ein $uv \in V$ durch

$$(6.3)\quad \sigma(uv, w) = -\frac{1}{2}\,\Delta_x^u \Delta_x^v \Delta_x^w \log \eta(x)\,|_{x=e}, \qquad w \in V.$$

Die rechte Seite ist in der Tat in u, v, w symmetrisch und trilinear, man kann also die Überlegungen von 2 anwenden. Die Algebra mit Produkt $(u, v) \to uv = A(u)v$ wird mit $[V; \eta, e]$ bezeichnet.

In den Bezeichnungen von § 3.2 hat man offensichtlich

$$(6.4)\quad A(u) = -\frac{1}{2}\,\Delta_x^u H(x)\,|_{x=e} = -\frac{1}{2} H(e; u), \qquad u \in V.$$

Den Definitionen entnimmt man

Lemma 6.1 a) *Die Algebra* $A := [V; \eta, e]$ *ist kommutativ und hat* e *als Einselement.*

b) σ *ist assoziative Bilinearform von* A.

c) *Aus* $u^2 + v^2 = 0$ *folgt* $u = v = 0$.

4. Nun sollen einige Beziehungen zur Gruppe $\mathrm{Aut}(K, \eta)$ (vgl. § 3.5) hergestellt werden.

Für eine Lie-Gruppe Γ *wird im folgenden mit* Lie Γ *stets die Lie-Algebra von* Γ *bezeichnet.* Ist Γ eine abgeschlossene Untergruppe von GL V, so hat man insbesondere

$$(6.5)\quad \mathrm{Lie}\,\Gamma = \{T;\ T \in \mathrm{End}\ V,\ \exp \tau T \in \Gamma \text{ für alle } \tau \in \mathbf{R}\}.$$

Hierbei bezeichnet exp die übliche Exponentialfunktion in End V. Wegen $\eta(Wx) = \alpha(W)\eta(x)$ für $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$ erhält man durch Differentiation nach x für $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$ und $x \in K$ sofort

(6.6) $h(Wx) = W^{\sigma-1} h(x)$,

(6.7) $H(Wx) = W^{\sigma-1} H(x) W^{-1}$,

(6.8) $H(Wx; Wu) = W^{\sigma-1} H(x; u) W^{-1}$.

Differenziert man dagegen für $W := \exp \tau T$, $T \in \operatorname{Lie} \operatorname{Aut}(K, \eta)$, nach τ, so folgt für $x \in K$

(6.9) $\sigma(h(x), Tx) = \sigma(e, Te)$.

Differentiationen liefern hieraus – oder aus (6.4) –

(6.10) $H(x)Tx = T^\sigma h(x)$,

(6.11) $H(x; Tx) + T^\sigma H(x) + H(x)T = 0$,

(6.12) $H(x; Tx, u) + H(x; Tu) + T^\sigma H(x; u) + H(x; u)T = 0, \qquad u \in V$.

Durch Spezialisierung zu $x = e$ folgt

(6.6)′ $h(We) = W^{\sigma-1} e$,

(6.7)′ $H(We) = W^{\sigma-1} W^{-1}$,

(6.10)′ $Te = T^\sigma e$,

(6.11)′ $2\,A(Te) = T + T^\sigma$,

(6.12)′ $\frac{1}{2} H(e; Te, u) = A(Tu) + T^\sigma A(u) + A(u)T$.

5. Aus den soeben abgeleiteten Formeln lassen sich einige erste Folgerungen ziehen. Zunächst beachtet man (6.4) und (6.8) und erhält (siehe auch (8.6)).

Lemma 6.2 a) *Für* $W \in \operatorname{Aut}(K, \eta)$ *ist* $W : [V; \eta, e] \to [V; \eta, We]$ *ein Isomorphismus der Algebren.*

b) *Operiert* $\operatorname{Aut}(K, \eta)$ *transitiv auf* K, *so sind alle Algebren* $[V; \eta, e]$, $e \in K$, *isomorph.*

B e m e r k u n g. 1. In Satz 4.3 wurde aus (6.6)′ für explodierendes η gefolgert, daß Aut (K, η) transitiv auf K operiert genau dann, wenn Aut $(K, \eta)^\sigma$ transitiv auf K^σ operiert.

2. Aus (6.7)′ folgt, daß die Fixpunktgruppe $\operatorname{Aut}_e(K, \eta) = \{W; W \in \operatorname{Aut}(K, \eta), We = e\}$ kompakt ist. Dieses Ergebnis erhält man natürlich auch aus den Aussagen von § 1.6; diese wiederum folgen aus (6.7)′ für $\eta = \iota_K$.

Nimmt man (6.8) und (6.7)′ zusammen so erhält man

Lemma 6.3 *Die Gruppe* $\operatorname{Aut}_e(K, \eta)$ *ist kompakt und in der orthogonalen Gruppe bezüglich* σ *enthalten. Sie besteht aus Automorphismen der Algebra* $[V; \eta, e]$.

Zur Beschreibung der Derivationen $\operatorname{Der}[V; \eta, e]$ von $[V; \eta, e]$ verwendet man (6.11)′ und (6.12)′.

Lemma 6.4 *Für* $T \in \operatorname{Lie} \operatorname{Aut}(K, \eta)$ *sind äquivalent*

(1) $T \in \operatorname{Der}[V; \eta, e]$,

(2) $Te = 0$, (3) $T = -T^\sigma$.

B e m e r k u n g. 1. Die in diesem Paragraphen eingeführte Algebra wurde zuerst in [21] für den Fall untersucht, daß K ein „Positivitätsbereich" ist. Die Ergebnisse darüber werden im nächsten Paragraphen dargestellt.

2. Eine Beschreibung aller homogenen Kegel unter Verwendung der Algebra $[V; \eta, e]$ findet man in [11] und [12].

§ 7 Positivitätsbereiche

Als Verallgemeinerung des Kegels der positiv definiten Matrizen wurde in [19], [21] der Begriff eines Positivitätsbereiches eingeführt. Es stellte sich heraus, daß ein enger Zusammenhang mit Jordan-Algebren besteht.

1. Sei σ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V und K ein regulärer Kegel in V. Man sagt, K ist ein *Positivitätsbereich* (oder *selbstdual*) bezüglich σ, wenn $K = K^\sigma$ gilt.

Der folgende Satz charakterisiert Positivitätsbereiche. Man kann zeigen, daß die drei Bedingungen a), b) und c) voneinander unabhängig sind [19], 2.

Satz 7.1 *Eine Teilmenge* K *von* V *ist dann und nur dann ein Positivitätsbereich bezüglich der nicht-ausgearteten Bilinearform* σ *von* V, *wenn gilt*

a) K *ist offen und nicht leer,*

b) *Für alle* $x, y \in K$ *gilt* $\sigma(x, y) > 0$,

c) *Gilt* $\sigma(x, y) > 0$ *für alle* $y \in \overline{K}$, $y \neq 0$, *so folgt* $x \in K$.

Unter Verwendung dieses Satzes erhält man jetzt leicht eine Übersicht über die Menge derjenigen nicht-ausgearteten Bilinearform von V, bezüglich denen K selbstdual ist.

Lemma 7.2 *Sei* K *ein Positivitätsbereich bezüglich* σ *und sei* τ *eine weitere nicht-ausgeartete Bilinearform von* V. *Dann ist* K *selbstdual bezüglich* τ *genau dann, wenn es ein* $W \in \operatorname{Aut} K$ *gibt mit* $W^\sigma = W$ *und* $\tau(x, y) = \sigma(Wx, y)$, $x, y \in V$.

Den einfachen B e w e i s findet man etwa in [21], I, § 3.

2. Beispiele zeigen, daß es *nicht* zu jedem regulären Kegel eine nicht-ausgeartete Bilinearform σ gibt mit $K^\sigma = K$. Man kann dies aber stets durch eine „Verdoppelung" von K erreichen [31].

Lemma 7.3 *Sei* K *ein regulärer Kegel in* V *und* σ *eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform von* V. *Dann ist die direkte Summe* $\widetilde{K} := K \oplus K^\sigma$ *ein Positivitätsbereich von* $\widetilde{V} := V \oplus V$ *bezüglich der durch* $\widetilde{\sigma}(x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2) := \sigma(x_1, y_2) + \sigma(x_2, y_1)$ *definierten Bilinearform* $\widetilde{\sigma}$.

B e m e r k u n g. 1. Der Kegel $\widetilde{K}$ heißt eine *Verdoppelung* von K.

2. Wie sich später zeigen wird, sind vor allem die für positiv definites σ selbstdualen homogenen Kegel von Interesse. Offenbar ist aber $\widetilde{\sigma}$ niemals positiv definit.

3. In diesem Abschnitt wird ausgeführt, wie man zu einer formal-reellen Jordan-Algebra einen homogenen Positivitätsbereich konstruieren kann. Der nächste Abschnitt gibt ein dazu inverses Verfahren an.

Sei A mit Produkt $(x, y) \to xy$ eine auf V definierte *Jordan-Algebra,* d. h., es gelte

(7.1) A ist kommutativ,

(7.2) $x^2(xy) = x(x^2y)$ für alle $x, y \in A$.

Die Linksmultiplikationen von A werden mit $A(x)$ bezeichnet.

Zu einer Jordan-Algebra A betrachtet man die *Spurform*

(7.3) $\mathrm{Sp}(x, y) := \mathrm{Spur}\, A(xy)$, $x, y \in A$.

Bemerkung. Es ist bekannt (vgl. [21], III, § 2, Lemma 4), daß Sp eine assoziative Linearform von A ist.

Im folgenden interessiert man sich in erster Linie für solche Jordan-Algebren, für die Sp positiv definit ist.

Man hat [8], XI, Satz 3.4.

Lemma 7.4 *Für eine Jordan-Algebra A sind äquivalent*

a) Sp *ist positiv definit.*

b) *Es gibt eine assoziative und positiv-definite Bilinearform von A und A hat ein Einselement.*

c) $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

Eine Jordan-Algebra, die eine der drei Aussagen von Lemma 7.4 *erfüllt, heißt formal-reell.* Insbesondere besitzt eine formal-reelle Jordan-Algebra ein Einselement (das im folgenden stets mit e bezeichnet wird).

Ein wichtiges Hilfsmittel bei allen Untersuchungen in einer Jordan-Algebra A ist die *quadratische Darstellung* $P_A(x)$,

(7.4) $P_A(x) := 2\, A(x)^2 - A(x^2)$, $\quad x \in A$.

Ein Element x *einer Jordan-Algebra A heißt invertierbar, wenn* P(x) *invertierbar ist.*

Man sieht, daß die Menge $\mathrm{Inv}\, A$ der invertierbaren Elemente von A offen ist. Für formal-reelle Jordan-Algebren hat man folgenden Satz, [21], VI, Theorem 13.

Satz 7.5 *In einer formal-reellen Jordan-Algebra sind die folgenden Mengen gleich*

(1) *Die Zusammenhangskomponente* $Y(A)$ *von* $\mathrm{Inv}\, A$, *die* e *enthält,*

(2) *Die Zusammenhangskomponente von* $\{x;\, x \in A,\ P(x)$ *positiv definit*$\}$, *die* e *enthält,*

(3) $\{x;\, A(x)$ *positiv definit*$\}$,

(4) $\{\exp x;\, x \in A\}$,

(5) $\{x^2;\, x \in \mathrm{Inv}\, A\}$.

Das folgende Ergebnis zeigt, wie man zu einer formal-reellen Jordan-Algebra einen homogenen Positivitätsbereich erhält (vgl. [21], VI Theorem 14).

Dabei heißt ein Positivitätsbereich homogen, wenn er als regulärer Kegel homogen ist.

Satz 7.6 *Sei A eine formal-reelle Jordan-Algebra (mit Einselement* e*). Dann gilt*

a) $\mathrm{Y}(A)$ *ist ein homogener Positivitätsbereich bezüglich* Sp, *und für die Invariante* $\iota_{\mathrm{Y}(A)}$ *gilt*

$$\iota_{\mathrm{Y}(A)}(\mathrm{x}) = \gamma[\det \mathrm{P}(\mathrm{x})]^{-1/2}, \qquad \gamma > 0.$$

b) *Bildet man zu* $\mathrm{Y}(A)$, $\iota = \iota_{\mathrm{Y}(A)}$ *und* Sp *die Abbildung* $\mathrm{h}_{\iota,\mathrm{Sp}}$, *so ist* e *der einzige Fixpunkt von* $\mathrm{h}_{\iota,\mathrm{Sp}}$. *Die Bilinearform* $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \to \Delta_{\mathrm{x}}^{\mathrm{u}} \Delta_{\mathrm{x}}^{\mathrm{v}} \log \iota(\mathrm{x}) |_{\mathrm{x}=\mathrm{e}}$ *stimmt mit* Sp *überein, und es gilt* $A = [\mathrm{V}, \iota, \mathrm{e}]$, *wobei mit* V *der A zugrunde liegende Vektorraum bezeichnet wird.*

Bemerkung. Für eine formal-reelle Jordan-Algebra ist $\mathrm{Y}(A)$ nach Teil (3) von Satz 7.5 konvex. Man kann zeigen, daß für eine Jordan-Algebra A, die keine nilpotenten Elemente besitzt, die Menge $\mathrm{Y}(A)$ genau dann konvex ist, wenn A formal-reell ist [8], XI, § 3,6.

4. *Im Rest dieses Paragraphen wird mit σ stets eine positiv definite symmetrische Bilinearform bezeichnet.* Sei jetzt K ein homogener Posivitätsbereich bezüglich σ in V. Wegen Lemma 3.5 und Satz 4.4 besitzt dann die Abbildung $\mathrm{h} = \mathrm{h}_{\iota,\sigma}$, $\iota = \iota_{\mathrm{K}}$, genau einen Fixpunkt. Dieser Fixpunkt wird im folgenden mit e bezeichnet.

Satz 7.7 *Sei* K *ein homogener Positivitätsbereich bezüglich σ und* e *der Fixpunkt von* $\mathrm{h}_{\iota,\sigma}$. *Dann gilt*

a) $[\mathrm{V}, \iota, \mathrm{e}]$ *ist eine formal-reelle Jordan-Algebra mit Einselement* e *und Spurform* $\mathrm{Sp} = \sigma$. *Es gilt*

$$\iota(\mathrm{x}) = \gamma[\det \mathrm{P}_A(\mathrm{x})]^{-1/2}, \gamma > 0.$$

b) *Der zu* $[\mathrm{V}, \iota, \mathrm{e}]$ *gebildete Positivitätsbereich* $\mathrm{Y}([\mathrm{V}, \iota, \mathrm{e}])$ *stimmt mit* K *überein.*

Der Beweis findet sich wieder in [21], VI, Theorem 15.

5. Der enge Zusammenhang zwischen homogenen Positivitätsbereichen und formal-reellen Jordan-Algebren zieht einen engen Zusammenhang von geometrischen und algebraischen Objekten nach sich. Dies soll an einigen Beispielen dargelegt werden.

Zunächst hat man

Satz 7.8 *Sei* K *ein homogener Positivitätsbereich bezüglich σ. Dann entsprechen die irreduziblen Summanden von* K *kanonisch und eindeutig den minimalen Idealen von* $[\mathrm{V}, \iota_{\mathrm{K}}, \mathrm{e}]$.

Beweis. Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß die zu $\oplus \mathrm{K}_i$ gehörige Invariante gleich ist dem Produkt der Invarianten zu den K_i.

In der Theorie der Jordan-Algebren verwendet man häufig die *Strukturgruppe* einer Jordan-Algebra A.

(7.5) $\operatorname{Str} A := \{W;\ W \in \operatorname{GL} A$, es gibt $W^{\#} \in \operatorname{GL} A$ mit $P_A(Wx) = WP_A(x)W^{\#}$ für alle $x \in A\}$.

B e m e r k u n g. Ist A eine formal-reelle Jordan-Algebra, so gilt $W^{\#} = W^{Sp}$.

Es gilt [8], XI, § 4:

Satz 7.8 *Sei* K *ein homogener Positivitätsbereich bezüglich* σ *und* $A = [V, \iota_K, e]$ *die zugeordnete formal-reelle Jordan-Algebra. Dann gilt*

a) $\operatorname{Aut}_e K = \{W;\ W \in \operatorname{Aut} K,\ We = e\}$ *stimmt mit der Gruppe der Automorphismen von* A *überein.*

b) *Jedes* $W \in \operatorname{Aut} K$ *läßt sich eindeutig schreiben in der Form* $W = P_A(v)U$ *mit* $v \in K$ *und* $U \in \operatorname{Aut}_e K$.

c) K *ist genau dann irreduzibel, wenn* A *einfach ist. In diesem Falle gilt*

$\operatorname{Str} A = \{\pm W;\ W \in \operatorname{Aut} K\}$.

B e m e r k u n g. Offenbar stimmen also unter den Voraussetzungen von Satz 7.8 die Lie-Algebren der Lie-Gruppen $\operatorname{Str} A$ und Aut K überein. Als weiteres Beispiel für den Zusammenhang von Geometrie und Algebra sei die Beschreibung des Randes eines Positivitätsbereichs dargestellt. Bei der algebraischen Beschreibung benutzt man *Idempotente* und *Peirce-Zerlegungen.* Die hier verwendeten Begriffe findet man in [8] definiert.

Satz 7.9 *Sei* K *ein homogener Positivitätsbereich bezüglich* σ *und* $A = [V, \iota_K, e]$ *die zugeordnete formal-reelle Jordan-Algebra.*

a) *Für ein Idempotent* $c \in A$, $c \neq e$, *ist* $A_1(c) := \{x;\ x \in A,\ cx = x\}$ *eine formal-reelle Jordan-Algebra und es gilt* $\overline{Y(A_1(c))} = \overline{Y(A)} \cap A_1(c)$, *wobei mit* $\overline{Y(A)}$ *der Abschluß von* $Y(A)$ *in* V *bezeichnet wird.*

b) *Der Rand von* K *ist die disjunkte Vereinigung der* $Y(A_1(c))$, *wobei* c *die Menge der* $x \in A$ *mit* $x^2 = x$ *und* $x \neq e$ *durchläuft.*

B e m e r k u n g. Die Mengen $Y(A_1(c))$, $c^2 = c$, $c \neq e$, sind gerade die Randkomponenten von $Y(A)$ im Sinne von § 2.

6. Der in den Sätzen 7.6 und 7.7 angegebene Zusammenhang zwischen formal-reellen Jordan-Algebren und homogenen Positivitätsbereichen gestattet eine Klassifikation der geometrischen Objekte „homogene Positivitätsbereiche" (bezüglich positiv definiter Bilinearform!) durch die algebraischen Objekte „formal-reelle Jordan-Algebren". Wegen Satz 7.8 kann man sich dabei auf einfache Algebren beschränken. Nach [8], XI, § 5,3 erhält man die folgende Liste paarweise nicht isomorpher, einfacher formal-reller Jordan-Algebren:

(J.1) die Algebra der reellen Zahlen,

(J.2) die Algebren $[X, \mu, e]$; dabei ist X ein $\mathbf{R}$-Vektorraum der Dimension $\geqslant 3$, e ein Punkt von X und μ eine symmetrische Bilinearform von X mit Signatur $(1, n-1)$ und $\mu(e, e) = 1$,

(J.3) die Algebra $H_n(\mathbf{R})$ der symmetrischen n x n-Matrizen, $n \geqslant 3$, mit reellen Koeffizienten,

(J.4) die Algebra $H_n(\mathbf{C})$ der hermiteschen n x n-Matrizen, $n \geqslant 3$, mit komplexen Koeffizienten,

(J.5) die Algebra $H_n(\mathbf{H})$ der hermiteschen n x n-Matrizen, $n \geqslant 3$, mit Koeffizienten aus dem Schiefkörper der Standardquaternionen $\mathbf{H}$ über $\mathbf{R}$,

(J.6) die Algebra $H_3(\mathbf{O})$ der hermiteschen 3 x 3-Matrizen mit Koeffizienten aus der Standard-Cayley-Algebra $\mathbf{O}$ über $\mathbf{R}$.

Das Produkt in (J.1) ist dabei natürlich das übliche Produkt in $\mathbf{R}$. In Algebren vom Typ (J.2) ist das Produkt gegeben durch

$$(x, y) \to \mu(x, e)y + \mu(y, e)x - \mu(x, y)e.$$

Für die Algebren vom Typ (J.3) bis (J.6) ist das Produkt durch $(A, B) \to (AB + BA)/2$ erklärt, wobei AB und BA das übliche Matrizenprodukt bezeichnet.

Nach den Ergebnissen der Abschnitte 3 und 4 sind also die zu den Algebren vom Typ (J.1) bis (J.6) gebildeten Positivitätsbereiche ein Vertretersystem der irreduziblen homogenen Positivitätsbereiche (bezüglich positiv definiter Bilinearform).

Genauer erhält man als Positivitätsbereich der Algebren vom Typ

(J.1) die positiven reellen Zahlen,

(J.2) den *Kreiskegel* $\{x; x \in X, \mu(x, x) > 0, \mu(x, e) > 0\}$,

(J.3) den Kegel der positiv definiten Matrizen in $H_n(\mathbf{R})$,

(J.4) den Kegel der positiv definiten Matrizen in $H_n(\mathbf{C})$.

Für dim X = 4 stimmt der Kreiskegel mit dem *Lichtkegel* überein. Die Positivitätsbereiche der Algebren vom Typ (J.5) lassen sich ebenfalls als positiv definite Matrizen in $H_n(\mathbf{H})$ interpretieren. Eine Präzisierung dieser Aussage findet sich in [20], § 10.

Für den Positivitätsbereich der „Ausnahmealgebra" $H_3(\mathbf{O})$ stehen nur die in Satz 7.5 angegebenen Beschreibungsmöglichkeiten zur Verfügung.

7. Neben der in den vorangehenden Abschnitten erläuterten Charakterisierung homogener Positivitätsbereiche durch formal-reelle Jordan-Algebren gibt es noch weitere äquivalente Beschreibungen dieser Klasse von Kegeln.

Satz 7.10 *Es sei* K *ein homogener Kegel in* V. *Dann sind äquivalent:*

(1) K *ist selbstdual bezüglich einer positiv definiten Bilinearform von* V.

(2) *Es gibt eine positiv definite Bilinearform* σ *von* V *mit* Aut K = $(\text{Aut K})^\sigma$.

(3) Aut K *operiert vollständig reduzibel auf* V.

(4) *Es gibt eine positiv definite Bilinearform* σ *von* V *mit* Lie Aut K = $(\text{Lie Aut K})^\sigma$.

(5) Lie Aut K *operiert vollständig reduzibel auf* V.

(6) Lie Aut K *ist die direkte Summe einer abelschen und einer halbeinfachen Lie-Algebra.*

(7) *Es gibt* $e \in K$ *und eine kommutative Algebra auf* V, *die* e *als Einselement besitzt und deren Linksmultiplikationen Elemente von* Lie Aut K *sind.*

(8) *Es gibt* $e \in K$ *derart, daß die Linksmultiplikationen der Algebra* $[V; \iota_K, e]$ *in* Lie Aut K *liegen.*

B e w e i s. (1) ⇒ (2): Ist K selbstdual bezüglich σ, so hat man Aut K = Aut K^σ. Nach (1.9) gilt Aut $K^\sigma = (\text{Aut K})^\sigma$. Das ist gerade die Aussage von (2).

(2) ⇒ (3) : klar.

(3) ⇒ (4) : Wie in § 3, **6** bemerkt, ist Aut K in einer algebraischen Gruppe Γ enthalten derart, daß Lie Aut K = Lie Γ gilt. Dabei kann Γ als der Zariski-Abschluß von Aut K in GL V gewählt werden. Bezeichnet man mit $\mathfrak{a}$ das Ideal der Polynome in End V, die Aut K annullieren, so gilt also $p(W) = 0$ für alle $W \in \Gamma$, $p \in \mathfrak{a}$. Sei jetzt $U \subset V$ ein unter Γ invarianter Teilraum von V. Dann hat man insbesondere Aut K $U \subset U$. Nach Voraussetzung operiert Aut K vollständig reduzibel auf V. Daher gibt es einen Teilraum Q von V mit $U \oplus Q = V$ und Aut K $Q \subset Q$. Für alle $q \in Q$ und alle Linearformen $\lambda \in V^*$ mit $\lambda(Q) = \{0\}$ ist also das Polynom $W \to \lambda(Wq)$ von End V ein Element von $\mathfrak{a}$. Somit erhält man $\lambda(Wq) = 0$ für alle $W \in \Gamma$. Hieraus folgt $W\,Q \subset Q$ für alle $W \in \Gamma$. Also operiert Γ vollständig reduzibel auf V. Nach [25], Theorem 7.2, gibt es eine positiv definite Bilinearform σ von V mit $\Gamma = \Gamma^\sigma$. Damit gilt auch Lie Aut K = Lie $\Gamma = (\text{Lie }\Gamma)^\sigma = (\text{Lie Aut K})^\sigma$.

(4) ⇒ (5) : klar

(5) ⇒ (6) : vgl. [7], § 6, Proposition 5.

(6) ⇒ (7) : Man schreibt Lie Aut K $= \mathfrak{a} + \mathfrak{h}$ mit einer abelschen Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ und einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{h}$. Nach § 3. **6** ist Lie Aut K algebraisch, daher ist auch $\mathfrak{a}$ algebraisch. Nun schreibt man $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_f \oplus \mathfrak{a}_r$, wobei $\mathfrak{a}_f$ (bzw. $\mathfrak{a}_r$) aus denjenigen Elementen von $\mathfrak{a}$ besteht, die nur rein imaginäre (bzw. nur reelle) Eigenwerte besitzen (vgl. [37], Beweis zu Theorem 1). Dann ist die von $\{\exp T; T \in \mathfrak{a}_f\}$ erzeugte Unter-Lie-Gruppe Ω_f von Aut K kompakt. Nach Lemma 1.10 gibt es also $e \in K$ mit $Te = 0$ für alle $T \in \mathfrak{a}_f = \text{Lie } \Omega_f$. Sei jetzt $v \in V$ und $S \in$ Lie Aut K mit $Se = v$; dann gilt $0 = [T, S]e = T\,Se - S\,Te = Tv$. Also hat man $\mathfrak{a}_f = 0$. Mit [37], Theorem 1, sieht man jetzt leicht, daß für $e \in K$ die Fixpunktalgebra $\mathfrak{k} := \{T; T \in \text{Lie Aut K}, Te = 0\}$ in $\mathfrak{h}$ enthalten ist. Mit Standardargumenten und Korollar 1 zu Lemma 1.10 zeigt man, daß es einen Untervektorraum $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$ gibt mit $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} + \mathfrak{g}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{k}$. Offenbar sind V und $\mathfrak{a} + \mathfrak{g}$ isomorph, und es gilt $\text{Id} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{g}$. Dem Beweis von [14], Lemma 3.2 entnimmt man, daß es eine Bijektion $B : V \to \mathfrak{a} + \mathfrak{g}$ gibt mit $B(e) = \text{Id}$ und $B(v)e = v$ für alle $v \in V$. Für $u, v \in V$ verifiziert man weiter sofort $[B(v), B(u)]e = 0$. Damit ist die durch $u \cdot v := B(u)v$ gegebene Algebra (mit Einselement $e \in K$) kommutativ und ihre Linksmultiplikationen sind Elemente von Lie Aut K.

(7) ⇒ (8) : vgl. [14], I, Satz 4.2.

(8) ⇒ (1) : Man setzt $\sigma(u, v) := \Delta_x^u \Delta_x^v \log \iota_K(x)|_{x=e}$; dann ist σ eine positiv definite Bilinearform von V. Weiter ist die zu $\iota := \iota_K$ und σ definierte Abbildung $h_{\iota,\sigma}$ nach Satz 4.2 ein Diffeomorphismus von K auf K^σ. Man bezeichnet die Linksmulti-

plikationen der Algebra $[V; \iota_K, e]$ mit $A(x)$, $x \in V$, und betrachtet die von $\{\exp A(x); x \in V\}$ erzeugte Lie-Gruppe Φ. Offenbar gilt $\Phi \subset \mathrm{Aut}\, K$, $\Phi^\sigma = \Phi$ und $\Phi e = K$. Aus (6.6) folgt $K = K^\sigma$. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. 1. Wegen Lemma 6.2 sieht man, daß in den Teilen (7) und (8) von Satz 7.10 die Aussage „Es gibt $e \in K \ldots$“ durch „Für alle $e \in K \ldots$“ ersetzt werden kann.

2. Einen ad hoc-Beweis für die Aussage (5) ⇒ (1) von Satz 7.10 findet man in [33], Theorem 1.5.

3. In [13], Theorem 4.7 werden weitere äquivalente Aussagen dafür angegeben, daß K selbstdual ist bezüglich einer positiv definiten Bilinearform.

4. Es gibt eine große Klasse von homogenen Kegeln, für die keine der (äquivalenten) Aussagen von Satz 7.10 zutrifft. Ein erstes Beispiel für einen solchen Kegel wurde von E. B. Vinberg angegeben [38]. In derselben Arbeit finden sich eingehende Untersuchungen über homogene Kegel. Die Lie-Algebra Lie Aut K wurde für homogene Kegel K in [39] untersucht. Die Ergebnisse von [38] werden von S. G. Gindikin [15], § 1, dazu verwendet, ein Verfahren anzugeben, das es gestattet alle homogenen Kegel aus dem Kegel $K = \mathbf{R}^+$ zu konstruieren (siehe auch [33]). Eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens und eine Klassifikation homogener Kegel ist in [11], [12] und [13] enthalten (siehe auch [10]).

5. Teile der in diesem Paragraphen dargestellten Ergebnisse gehen auf Ch. Hertneck zurück [17a].

§ 8 Zur Differentialgeometrie regulärer Kegel

Es sei K wieder ein regulärer Kegel im Vektorraum V, $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ sei beliebig oft differenzierbar, homogen und strikt logarithmisch konvex (vgl. § 3.3) und σ eine symmetrische positiv definite Bilinearform von V.

Mit x wird stets ein beliebiges Element von K und mit u, v werden beliebige Elemente von V bezeichnet.

1. Man betrachtet K als differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren Tangentialräume alle mit V identifiziert werden. Damit sind die Vektorfelder auf K gerade die Elemente von

$$C^\infty(K, V) := \{f; f : K \to V, f \text{ beliebig oft differenzierbar}\}.$$

Definiert man

$$\eta''_x(u, v) := \Delta^u_x \Delta^v_x \log \eta(x), \tag{8.1}$$

so ist η'' wegen Lemma 3.1 eine riemannsche Metrik auf K. Man definiert wie in (3.5) ein $H_{\eta,\sigma} : K \to \mathrm{End}\, V$ durch

$$\eta''_x(u, v) = \sigma(H_{\eta,\sigma}(x)u, v). \tag{8.2}$$

Wie bisher schreibt man zur Abkürzung $H := H_{\eta,\sigma}$.

Für zwei Vektorfelder $f, g \in C^\infty(K, V)$ bildet man die Lie-Klammer $[f, g]$ und erhält

(8.3) $[f, g](x) := \Delta_x^{f(x)} g(x) - \Delta_x^{g(x)} f(x)$.

Im Falle $f(x) = Ax$, $g(x) = Bx$, $A, B \in \mathrm{End}\, V$, folgt

(8.4) $[f, g] = BA - AB$.

In den folgenden Abschnitten werden einige grundlegende differentialgeometrische Größen der riemannschen Mannigfaltigkeit (K, η'') berechnet.

2. Zur Abkürzung der Schreibweise definiert man in Verallgemeinerung der Konstruktion aus § 6.3 zu jedem $x \in K$ eine kommutative Algebra $\mathcal{A}(x)$ mit Produkt $u \underset{x}{\cdot} v = A(x; u)v$ durch die Festsetzung

(8.5) $\eta_x''(u \underset{x}{\cdot} v, w) = -\frac{1}{2} \Delta_x^u \Delta_x^v \Delta_x^w \log \eta(x)$.

Wegen (8.2) erhält man

(8.6) $A(x; u) = -\frac{1}{2} [H(x)]^{-1} H(x; u)$.

Die Eulersche Differentialgleichung zusammen mit (3.9) zeigt, daß x das Einselement von $\mathcal{A}(x)$ ist.

Zu der riemannschen Mannigfaltigkeit (K, η'') betrachtet man zuerst den kanonischen Levi-Civita-Zusammenhang ∇. Unter Verwendung der bekannten definierenden Formel ([17]), I, § 9 (1)) verifiziert man

(8.7) $(\nabla_f g)_x = \nabla_x^{f(x)} g(x) - f(x) \underset{x}{\cdot} g(x)$ für $f, g \in C^\infty(K, V)$

und sieht, daß ∇ torsionsfrei ist. Die Differentialgleichung für die *Geodätischen* von (K, η'') erhält daher die Form

(8.8) $\ddot{x} = \dot{x} \underset{x}{\cdot} \dot{x}$, $x = x(\tau)$.

Zur Berechnung des Krümmungstensors $R(f, g) := \nabla_f \nabla_g - \nabla_g \nabla_f - \nabla_{[f,g]}$, $f, g \in C^\infty(K, V)$ mit Hilfe der Algebra $\mathcal{A}(x)$ beachtet man, daß der Wert von $R(f, g)$ im Punkt x nur von $f(x)$ und $g(x)$ abhängt. Dann verwendet man die konstanten Vektorfelder $f(x) = u$, $g(x) = v$, und berechnet

(8.9) $R_x(u, v) = -A(x; u)A(x; v) + A(x; v)A(x; u)$.

Damit kann man auch die *Schnittkrümmung*

$$K_x(u, v) := -\eta_x''(R_x(u, v)u, v), \quad \text{falls } \eta_x''(u, v) = 0,\ \eta_x''(u, u) = \eta_x''(v, v) = 1$$

gilt, durch $\mathcal{A}(x)$ ausdrücken.

Kürzt man

$$Q_x(v, w) := -\frac{1}{2} [H(x)]^{-1} H(x; v, w) + A(x; v \underset{x}{\cdot} w) + A(x; v)A(x; w) + A(x; w)A(x; v)$$

ab, so ergibt eine längere Rechnung für die kovariante Ableitung von R die Formel

(8.10) $(\nabla_f R)_x(u, v) = 2[Q_x(u, w), A(x; v)] - 2[Q_x(v, w), A(x; u)]$, $\quad w := f(x)$.

In diesem Zusammenhang wäre die Charakterisierung derjenigen Abbildungen $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ von Interesse, für welche die riemannsche Mannigfaltigkeit (K, η'') symmetrisch ist, d. h., für die $\nabla_f R = 0$, $f \in C^\infty(K, V)$, gilt. Es ist bekannt, daß (K, ι''_K) symmetrisch ist, wenn K ein homogener Kegel ist, der selbstdual ist bezüglich einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform.

3. Sei $x = x(\tau)$, $|\tau| < t$, eine Geodätische in (K, η''). Für $\varphi(\tau) := \log \eta(x)$ hat man $\dot\varphi(\tau) = -\sigma(h(x), \dot x)$ und schließlich mit (3.9) und (8.8)

$$\ddot\varphi(\tau) = \sigma(H(x)\dot x, \dot x) - \sigma(h(x), \ddot x) = \eta''_x(\dot x, \dot x) - \eta''_x(x, \ddot x) = 0.$$

Damit folgt

Lemma 8.1 *Ist* $x = x(\tau)$, $|\tau| < t$, $x(0) = a$, $\dot x(0) = u$, *eine Geodätische von* (K, η''), *so gilt*

$$\eta(x(\tau)) = e^{-\tau\sigma(h(a),u)}\eta(a), \quad |\tau| < t.$$

Korollar *Bezeichnet* $\exp : K \to V$ *die Exponentialabbildung von* (K, η'') *im Punkt* $a \in K$, *so gilt* $\eta(\exp u) = e^{-\sigma(h(a),u)}\eta(a)$.

Wie in § 4.2 heißt $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ explodierend, wenn $\eta(x)$ gegen ∞ konvergiert, falls x gegen den Rand von K strebt.

Lemma 8.2 *Ist die riemannsche Mannigfaltigkeit* (K, η'') *vollständig und ist* $h_{\eta,\sigma}$ *rational, so ist* η *explodierend.*

B e w e i s. a) Sei x_0 ein Randpunkt von K und $e \in K$. Dann betrachtet man die Gerade $g(\rho) := e + \rho(x_0 - e)$ durch x_0 und e und setzt

$$L(\tau) := \int_0^\tau \sigma(H(g)\dot g, \dot g)^{1/2}\, d\rho.$$

Wegen $\dot g = x_0 - e$ hat man $L(\tau) = \int_0^\tau \left[-\frac{d}{d\rho}\sigma(h(g), \dot g)\right]^{1/2} d\rho$. Nach Voraussetzung ist (K, η'') vollständig, daher konvergiert $L(\tau)$ gegen ∞, falls τ gegen 1 strebt. Somit hat die rationale Funktion $p(\rho) := \sigma(h(g), \dot g)$ in $\rho = 1$ einen Pol der Ordnung s mit $(s + 1)/2 > 1$, d. h. $s > 1$. Hieraus folgt, daß $\log \eta(g(\tau)) = -\int_0^\tau \sigma(h(g), \dot g)d\rho$ für $\tau \to 1$ gegen ∞ konvergiert.

b) Sei jetzt x_0 ein Randpunkt von K und $x_n \in K$ eine Folge, die gegen x_0 konvergiert. Angenommen, $\eta(x_n)$ konvergiert nicht gegen ∞, so gibt es ein $R > 0$ und eine Teilfolge (y_n) von (x_n) mit $\lim y_n = x_0$ und $\eta(y_n) \leqslant R$, $n \in \mathbf{N}$.

Sei jetzt $e \in K$ mit $\eta(e) = R$ gewählt; dann ist die Folge y_n in der konvexen Menge $\overline{D_e}$, $D_e := \{x; x \in K, \eta(x) < \eta(e)\}$, enthalten.

Wegen $x_0, e \in \overline{D_e}$ ist auch die Verbindungsgerade $g(\rho) := e + \rho(x_0 - e)$ in $\overline{D_e}$ enthalten. Auf g divergiert aber η nach Teil a). Damit ist das Lemma bewiesen.

B e m e r k u n g. a) Dem vorangehenden Beweis entnimmt man, daß eine homogene, strikt logarithmisch konvexe Funktion $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ genau dann explodierend ist, wenn $\eta(e + \tau u)$ bei Annäherung an 1 gegen ∞ konvergiert, falls $e + \tau u \in K$ für $0 \leqslant \tau < 1$ und $e + u \notin K$.

b) Im nächsten Paragraphen wird gezeigt, daß die Voraussetzungen von Lemma 8.2 erfüllt sind, falls $\mathrm{Aut}(K, \eta)$ transitiv auf K operiert.

4. Neben dem Kegel K betrachtet man den Kegel K^σ (vgl. § 1.8). Zur Abbildung $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ ist $h := h_{\eta,\sigma}$ gemäß (3.4) definiert durch

$$\Delta_x^u \log \eta(x) = -\sigma(h(x), u), \qquad u \in V.$$

Man nehme an, daß $h : K \to K^\sigma$ ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $h^{-1} : K^\sigma \to K$ ist.

Man definiert nun zu η eine „duale" Abbildung $\eta_\sigma : K^\sigma \to \mathbf{R}^+$ durch

(8.11) $\eta_\sigma(y) := [\eta(h^{-1}(y))]^{-1} \quad$ für $y \in K^\sigma$.

Definitionsgemäß ist η_σ homogen, und es gilt

(8.11') $\eta(x)\eta_\sigma(h(x)) = 1$.

Zu η_σ kann nun wieder die zugeordnete Abbildung $h_\sigma := h_{\eta_\sigma,\sigma}$ von K^σ nach V gemäß (3.4) gebildet werden. Unter Verwendung der Kettenregel berechnet man

(8.12) $\Delta_y^u h^{-1}(y) = -H_\sigma(y)u \quad$ mit $H_\sigma(y) := H^{-1}(h^{-1}(y))$

und damit

(8.13) $h_\sigma(y) = H_\sigma(y)y$.

Wegen (3.9) folgt $h_\sigma(h(x)) = H^{-1}(x)h(x) = x$, also $h_\sigma = h^{-1}$. Das bedeutet

(8.14) $\Delta_y^u \log \eta_\sigma(y) = -\sigma(h^{-1}(y), u), \qquad y \in K^\sigma$,

und durch Differentiation folgt mit (8.11)

(8.15) $(\eta_\sigma)''_y(u, v) := \Delta_y^u \Delta_y^v \log \eta_\sigma(y) = \sigma(H_\sigma(y)u, v), \qquad y \in K^\sigma$.

Wegen $h^{-1} = h_\sigma$ zeigt (8.12), daß H_σ mit der gemäß (3.5) zu η_σ gebildeten Abbildung $H_{\eta_\sigma,\sigma}$ übereinstimmt.

Lemma 8.3 *Ist* h *ein Diffeomorphismus, so gilt:*

a) η_σ *ist strikt logarithmisch konvex.*

b) $h : (K, \eta'') \to (K^\sigma, \eta''_\sigma)$ *ist eine isometrische Abbildung mit Umkehrabbildung* h_σ.

c) $(\eta_\sigma)_\sigma = \eta$.

B e w e i s. a) Da η nach Voraussetzung strikt logarithmisch konvex ist, zeigt Lemma 3.1, daß $H(x)$, $x \in K$, positiv definit ist. Wegen (8.12) ist dann auch $H_\sigma(y)$, $y \in K^\sigma$, positiv definit. Damit ist η_σ nach (8.15) strikt logarithmisch konvex.

b) Nach a) ist $(K^\sigma, \eta''_\sigma)$ wieder eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit riemannscher Metrik (8.15). Wegen (8.12) gilt

$$H(x)H_\sigma(h(x))H(x) = H(x),$$

so daß $h : K \to K^\sigma$ isometrisch ist. Damit ist Teil b) bewiesen.

c) Zum Beweis bemerkt man zunächst, daß $(\eta_\sigma)_\sigma$ wegen $h_\sigma = h^{-1}$ wohldefiniert ist. Nun folgt die Behauptung aus der Definition (8.11).

B e m e r k u n g. Nach Satz 4.2 ist die Voraussetzung von Lemma 8.3 erfüllt, wenn η explodierend ist.

Korollar 1 *Ist* η *explodierend und* $e \in K$, *so stimmen die Algebren* $[V; \eta, e]$ *und* $[V; \eta_\sigma, e]$ *überein.*

B e w e i s. Nach Konstruktion von $[V; \eta, e]$ in § 6.3 wählt man zu $e \in K$ die Bilinearform $\sigma := \sigma_{\eta,e} = \eta''_e$ und erhält die Linksmultiplikation von $[V; \eta, e]$ gemäß (6.4) als

$$A(u) = -\frac{1}{2} H(e; u).$$

Wegen (6.2) ist $h(e) = e$ und $H(e) = \mathrm{Id}$, also $e \in K^\sigma$ und man erhält $H_\sigma(e) = \mathrm{Id}$ aus (8.12). Wegen (8.15) folgt $\eta''_e = (\eta_\sigma)''_e$. Weiter folgt mit (8.12)

$$\Delta^u_y H_\sigma(y)\,|_{y=e} = \Delta^u_x H(x)\,|_{x=e},$$

so daß die Behauptung folgt.

§ 9 Eine Klasse positiver Abbildungen von homogenen Kegeln

1. Für einen regulären Kegel K und eine Abbildung $\eta : K \to \mathbf{R}^+$ bezeichnet $\mathrm{Aut}(K, \eta)$ die Gruppe der $W \in \mathrm{Aut}\, K$, für die es ein $\alpha(W) > 0$ gibt mit

(9.1) $\eta(Wx) = \alpha(W)\eta(x)$ für $x \in K$

(vgl. § 3.6 und § 6.4). Zur Abkürzung heiße $\eta \in C^\infty_+(K)$ eine SLOT-*Funktion von* K, wenn η homogen und strikt logarithmisch konvex ist und wenn $\mathrm{Aut}\,(K, \eta)$ transitiv auf K operiert.

Ist K homogen, so ist die Invariante $\iota = \iota_K$ von K nach Lemma 3.5 auch eine SLOT-Funktion von K.

Abschließend sollen nun die zentralen Ergebnisse für solche Abbildungen zusammengestellt werden.

2. Sei $\eta \in C^\infty_+(K)$ eine SLOT-Funktion und σ eine symmetrische positiv definite Bilinearform von V. Wie bisher sind dann die Abbildung $h := h_{\eta,\sigma}$ und $H := H_{\eta,\sigma}$ nach (3.4) und (3.5) definiert.

Satz 9.1 *Für eine* SLOT-*Funktion* η *von* K *gilt:*

a) η *ist explodierend.*

b) $h : K \to K^\sigma$ *ist topologisch* und *birational.*

c) *Setzt man* $\eta_\sigma(y) := [\eta(h^{-1}(y))]^{-1}$, $y \in K^\sigma$, *so ist* η_σ *eine* SLOT-*Funktion von* K^σ *mit*

(1) $\mathrm{Aut}(K^\sigma, \eta_\sigma) = [\mathrm{Aut}(K, \eta)]^\sigma$,

(2) *aus* $\eta(Wx) = \alpha(W)\eta(x)$ *folgt* $\eta_\sigma(W^\sigma y) = \alpha(W)\eta_\sigma(y)$ *für* $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$, (*vgl.* § 1.8 *und* 8.4)

d) *Die riemannsche Mannigfaltigkeit* (K, η'') *ist vollständig, und* $\mathrm{Aut}(K, \eta)$ *ist eine Gruppe von Isometrien von* (K, η'').

e) $h : (K, \eta'') \to (K^\sigma, \eta''_\sigma)$ *ist eine Isometrie*

B e w e i s. 1. h ist rational nach Teil a) von Lemma 3.8.

2. Da η strikt logarithmisch konvex ist, wird (K, η'') nach § 8.1 zu einer riemannschen Mannigfaltigkeit. Wegen (3.19) ist jedes $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$ eine Isometrie von (K, η'').

Da weiter $\mathrm{Aut}(K, \eta)$ transitiv operiert, ist (K, η'') bekanntlich vollständig. Wegen 1. und Lemma 8.2 ist daher η explodierend. Damit sind die Teile a) und d) bewiesen.

3. Wegen a) und Satz 4.2 ist h topologisch. Damit läßt sich die Konstruktion von § 8.4 anwenden.

4. Nach Lemma 8.3 ist η_σ strikt logarithmisch konvex. Weiter gilt $h_\sigma = h^{-1}$ und $(\eta_\sigma)_\sigma = \eta$. Ferner erhält man Teil e).

5. Für $W \in \mathrm{Aut}\, K$ gilt $W^\sigma \in \mathrm{Aut}\, K^\sigma$ nach (1.9). Für $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$ folgt $h(Wx) = W^{\sigma-1} h(x)$ nach (3.18), also $h^{-1}(W^\sigma y) = W^{-1} h^{-1}(y)$, $y \in K^\sigma$. Aus der Definition von η_σ folgt nun $\eta_\sigma(W^\sigma y) = \alpha(W)\eta_\sigma(y)$. Damit wird $W^\sigma \in \mathrm{Aut}(K^\sigma, \eta_\sigma)$, also $[\mathrm{Aut}(K, \eta)]^\sigma \subset \mathrm{Aut}(K^\sigma, \eta_\sigma)$. Wendet man die Konstruktion von § 8.4 auf η_σ und h_σ an Stelle von η und h an, so erhält man wegen $K = (K^\sigma)^\sigma$ und $(\eta_\sigma)_\sigma = \eta$ auch die umgekehrte Inklusion. Damit sind (1) und (2) bewiesen.

6. Teil c) erhält man sofort aus (1) und 4.

7. Wendet man Lemma 3.8 auf K^σ und η_σ an, so folgt, daß h_σ rational ist. Mit 1., 3. und 4. folgt jetzt Teil b). Damit ist der Satz bewiesen.

3. Wie in § 3.5 bezeichne $\iota := \iota_K$ die Invariante von K. Mit einem Lebesgue-Maß dx von K setzt man

$$d\mu(x) := \iota(x)\,dx$$

und entnimmt Lemma 3.5, daß μ ein bei Aut K invariantes Maß von K ist.

Satz 9.2 *Ist η eine* SLOT-*Funktion von* K *vom Homogenitätsgrad κ, dann gibt es positive α, $\gamma(s)$ mit*

$$\int_K e^{-\sigma(x,y)}[\eta(x)]^{-s} d\mu(x) = \gamma(s)[\eta_\sigma(y)]^s$$

für alle $s > \alpha$ *und alle* $y \in K^\sigma$.

Man beachte, daß κ wegen Lemma 3.3 negativ ist.

B e w e i s. 1. *Es gibt $\alpha > 0$, so daß $\eta^s\iota^{-1}$ für $s > \alpha$ eine* SLOT-*Funktion von* K *ist.* Wegen $\mathrm{Aut}(K, \eta) \subset \mathrm{Aut}\, K = \mathrm{Aut}(K, \iota)$ (vgl. Lemma 3.5) muß nur nachgewiesen werden, daß $\zeta_s := \eta^s\iota^{-1}$ für alle hinreichend großen s strikt logarithmisch konvex ist. Man setzt $J := H_{\iota,\sigma}$, wählt $e \in K$ und bestimmt $\alpha > 0$ so, daß $sH(e) - J(e)$ für $s > \alpha$ positiv definit wird. Zu $x \in K$ wählt man nun $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$ mit $x = We$ und erhält mit (3.19)

$$s\,H(x) - J(x) = W^{\sigma-1}(s\,H(e) - J(e))W^{-1}.$$

Nach Wahl von α ist daher $s\,H(x) - J(x)$, $s > \alpha$, positiv definit, und wegen

$$\Delta_x^u \Delta_x^u \log \zeta_s(x) = \sigma([s\,H(x) - J(x)]u, u)$$

ist ζ_s strikt logarithmisch konvex.

2. *$\eta^{-s}\iota$ ist für $s > \alpha$ nach oben beschränkt im Sinne von* § 5.4. Denn nach Teil a) von Satz 9.1 und 1. ist $\eta^s\iota^{-1}$ explodierend. Daher kann $\eta^{-s}\iota$ mit Randwerten Null stetig auf $\bar{K}$ ergänzt werden. Ist nun $x \to |x|$ eine Norm von V, so ist $\eta^{-s}\iota$ auf der kompakten Menge $\{x; x \in \bar{K}, |x| = 1\}$ beschränkt. Da $\eta^{-s}\iota$ homogen ist, folgt die Behauptung.

3. *Das Integral ist endlich für alle* $y \in K^\sigma$. Wegen 2. kann das Korollar zu Lemma 5.3 auf K anstelle von K* angewendet werden.

4. *Beweis des Satzes.* Bezeichnet $\varphi_s(y)$ das angegebene Integral, so folgt aus $\eta(Wx) = \alpha(W)\eta(x)$ für $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$ sofort $\varphi_s(W^\sigma y) = [\alpha(W)]^s\varphi(y)$ für $W \in \mathrm{Aut}(K, \eta)$. Nach Satz 9.1, Teil c), haben also φ_s und $(\eta_\sigma)^s$ das gleiche Transformationsverhalten unter der transitiven Gruppe $[\mathrm{Aut}(K, \eta)]^\sigma$. Damit folgt

$$\varphi_s(y) = \gamma(s)[\eta_\sigma(y)]^s \quad \text{für } s > \alpha$$

mit einer positiven Konstante $\gamma(s)$.

Wegen Satz 9.1 kann man Satz 9.2 auch auf η_σ anstelle von η anwenden. Beachtet man dabei Teil c) von Lemma 8.3, so erhält man das überraschende

Korollar *Ist η eine* SLOT*-Funktion von* K, *dann ist eine Potenz von η matrix-positiv.*

Bemerkung. Unter Verwendung detaillierter Ergebnisse über homogene Kegel wurde Satz 9.2 von S. G. Gindikin bewiesen, [15], Proposition 2.3. Ferner zeigt sich, daß die Abbildung $\gamma(s)$ – abgesehen von einer Konstanten – ein Produkt von Funktionen des Typs $\Gamma(-s\rho_i - \beta_i)$, $i = 1, \ldots, r$, ist; hierbei hängen r und die β_i nur von K ab, während die ρ_i durch η bestimmt werden, [15], Theorem 2.1.

Die im Satz auftretende Konstante α kann als $\inf\{s; s > 0, -s\rho_i - \beta_i > 0$ für $i = 1, \ldots, r\}$ gewählt werden.

Literaturverzeichnis

[1] Alexandrov, A. D.: A contribution to chronogeometry. Can. J. Math. **19** (1967) 1119–1128

[2] Alexandrov, A. D.; Ovchimikova, V. V.: Notes on the foundations of relativity theory. Vestn. Leningr. Univ. 11, 1953

[3] Aronszain, N.: Theory of reproducing kernels. Trans. of the Amer. Math. Soc. **68** (1950) 337–404

[4] Artin, E.: Einführung in die Theorie der Gammafunktion. Leipzig: Teubner 1931

[5] Berg, Ch.; Christensen, J.; Ressel, P.: Positive Definite Functions on Abelian Semigroups. Math. Ann. **23** (1976) 253–274

[6] Bourbaki, N.: Espaces vectorielles topologiques. Paris: Hermann 1966

[7] Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, chap. I. Paris: Hermann 1971

[8] Braun, H.; Koecher, M.: Jordan-Algebren. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966

[9] Dieudonné, J.: Treatise on Analysis II. New York-London: Academic Press 1970

[10] Dorfmeister, J.: Eine Theorie der homogenen, regulären Kegel. Diss. Univ. Münster 1974

[11] Dorfmeister, J.: Zur Konstruktion homogener Kegel. Math. Ann. **216** (1975) 79–96

[12] Dorfmeister, J.: Algebraic Description of Homogeneous Cones. Erscheint in Trans. of the Amer. Math. Soc.

[13] Dorfmeister, J.: Inductive Construction of Homogeneous Cones. Erscheint in Trans. of the Amer. Math. Soc.

[14] Dorfmeister, J.; Koecher, M.: Relative Invarianten und nicht-assoziative Algebren. Math. Ann. **228** (1977) 147–186
[15] Gindikin, S. G.: Analysis in homogeneous domains. Russ. Math. Surv. **19** (1964) 1–89
[16] Harrison, D. K.: Commutative nonassociative algebras and cubic forms. J. Algebra **32** (1974) 518–528
[17] Helgason, S.: Differential Geometry and Symmetric Spaces. New York-London: Academic Press 1962
[17a] Hertneck, Ch.: Positivitätsbereiche und Jordan-Strukturen. Math. Ann. **146** (1962) 433–455
[18] Janssen, G.: Formal-reelle Jordan-Algebren unendlicher Dimension und verallgemeinerte Positivitätsbereiche. J. f. d. reine angew. Math. **249** (1971) 173–200
[19] Koecher, M.: Positivitätsbereiche im $\mathbf{R}^n$. Amer. J. Math. **79** (1957) 575–596
[20] Koecher, M.: Beiträge zu einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen I. Math. Ann. **141** (1960) 384–432
[21] Koecher, M.: Jordan Algebras and their Applications. Lecture Notes. Univ. Minnesota 1962
[22] Koecher, M.: Konvexe Kegel. Vorles.-Ausarbeit. Univ. München 1969
[23] Köthe, G.: Topologische Lineare Räume I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
[24] Koszul, J.-L.: Domaines Bornés Homogènes et Orbites de Groupes de Transformations Affines. Bull. Soc. math. France **89** (1961) 515–533
[25] Mostow, G. D.: Self-Adjoint Groups. Ann. of Math. **62** (1955) 44–55
[26] Nussbaum, A. E.: The Hausdorff-Bernstein-Widder Theorem for Semi-Groups in Locally Compact Abelian Groups. Duke Math. J. **22** (1955) 573–582
[27] Ochiai, T.: A lemma on open convex cones. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **12** (1966) 231–234
[28] Ressel, P.: Positive Definite Functions on Abelian Semigroups Without Zero. Erscheint in Advances of Math.
[29] Rockafellar, R. T.: Convex Analysis. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press 1970
[30] Rothaus, O.: Domains of positivity. Abh. d. Math. Semin. Univ. Hamburg **24** (1960) 189–235
[31] Rothaus, O.: The Construction of Homogeneous Cones. Bull. of the Amer. Math. Soc. **69** (1963) 248–250
[32] Rothaus, O.: Order Isomorphisms of Cones. Proc. of the Amer. Math. Soc. **17** (1966) 1284–1288
[33] Rothaus, O.: The construction of homogeneous convex cones. Ann. of Math. **83** (1966) 358–376
[34] Rothaus, O.: Some Properties of Laplace Transforms of Measures. Trans. of the Amer. Math. Soc. **131** (1968) 163–169
[35] Rossi, H.; Vergne, M.: Analytic Continuation of the Holomorphic Discrete Series of a Semi-Simple Lie Group. Acta Math. **136** (1976) 1–59
[36] Thompson, A. C.: On certain contraction mappings in a partially ordered vectorspace, Proc. of the Amer. Math. Soc. **14** (1963) 438–443
[37] Vinberg, E. B.: The Morozov-Borel theorem for real Lie-groups. Soviet Math. Dokl. **2** (1961) 1416–1419
[38] Vinberg, E. B.: The theory of convex homogeneous cones. Trans. of the Moscow Math. Soc. **12** (1963) 340–403
[39] Vinberg, E. B.: The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone. Trans. of the Moscow Math. Soc. **13** (1965) 63–93
[40] Zeemann, E. C.: Causality implies the Lorentz group. J. Math. Phys. **5** (1964) 490–493

[A 259]

Dr. J. Dorfmeister
Prof. Dr. M. Koecher
Fachbereich 15 Mathematik
Roxeler Str. 64
D-4400 Münster

(*Eingegangen: 13. 6. 1978*)

Buchbesprechungen

Kasch, F., Moduln und Ringe (Mathematische Leitfäden), Stuttgart: Teubner Verlag 1977, 328 S., kart., DM 52,–

Bereits in den Anfängervorlesungen zur (Linearen) Algebra wird heute weitgehend berücksichtigt, daß der Begriff des Vektorraums nicht tragfähig genug ist, um darauf eine algebraische Grundausbildung zu bauen. Der Modulbegriff tritt an seine Stelle. Schon die abelschen Gruppen als Moduln über dem Ring **Z** der ganzen Zahlen liefern (keineswegs triviale) Beispiele für Moduln, die i. allg. keine Vektorräume sind. Kaum eine Darstellungstheorie kommt ohne Moduln aus. In allen Zweigen der Geometrie ist es unumgänglich, Moduln über Funktionenringen (im allgemeinsten Sinn verstanden) zu betrachten . . . Andererseits ist es so, daß die Theorie der Vektorräume wegen der Existenz der Basen besonders „einfach" und übersichtlich ist. Man wird daher zunächst – wenigstens als Hilfsmittel – Moduln untersuchen, die einzelne wichtige Eigenschaften der Vektorräume besitzen, und Ringe charakterisieren und studieren, deren Modultheorie insgesamt noch wesentliche Aspekte der Vektorraumtheorie zeigt.

Diesem Gedanken folgt das vorliegende Buch, das damit grundlegende Methoden der abstrakten Modultheorie beschreibt. Die Kategorienlehre, in die kurz eingeführt wird, liefert den sprachlichen Rahmen. Es werden ausführlich und gründlich injektive, projektive und flache Moduln und Moduln mit Kettenbedingungen (noethersche und artinsche Moduln) behandelt. In den letzten Kapiteln, in denen zum Teil neueste Ergebnisse verarbeitet sind, werden dann einige Ringtypen unter dem oben erwähnten allgemeinen Gesichtspunkt vorgestellt, etwa die Ringe, für die alle Moduln projektiv bzw. injektiv sind (halbeinfache Ringe), für die alle Moduln flach sind (reguläre Ringe), für die alle flachen Moduln projektiv sind (perfekte Ringe), und besonders weitgehend die Ringe, für die die Dualitätstheorie der der Vektorräume ähnlich ist (Ringe mit vollkommener Dualität, Quasi-Frobeniusringe). Auf diese Gegenstände, die eine große Rolle vor allem in der Theorie der nichtkommutativen Ringe spielen, steuert das Buch geradlinig zu. Dabei konnte auf die Entwicklung weiterführender Methoden der homologischen Algebra verzichtet werden. In diesem Sinn ist das Buch „elementar" und kann jedem empfohlen werden, der einen ersten Überblick über die allgemeine Modultheorie, insbesondere für nichtkommutative Ringe gewinnen will. An Vorkenntnissen wird wenig vorausgesetzt. Ein gewisses mathematisches Training, wie es etwa einem drei- bis viersemestrigen Studium entspricht, sollte der Leser aber hinter sich haben. Besonders erwähnt seien die anregenden Übungen, die den einzelnen Kapiteln beigefügt sind.

Nachbemerkung: An der Darstellung des Stoffes stört mich mitunter der allzu extensive Gebrauch mathematischer Symbole und logischer Kürzel. Im Kolleg kann man damit leichter manipulieren. Dies gilt auch für einige sprachliche Abkürzungen. „Additionskomplement" und „Durchschnittskomplement" sind sicherlich lange Wörter, aber „Adko" und „Duko" klingen doch sehr technisch. [B 1463]

Osnabrück U. Storch

Meyberg, K., Algebra II, München: Carl Hanser Verlag 1976, 182 S., Alkorphaneinband, DM 36,–

Diese Fortsetzung der Meybergschen Algebra führt über die Körpertheorie zum Hauptsatz der Galoistheorie mit seinen Anwendungen. Zwei weitere Kapitel informieren über artinsche Ringe und geben eine Einführung in die Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Im letzten Kapitel wird der Leser mit kategoriellen Begriffsbildungen und Methoden vertraut gemacht.

Die durch die Qualität des 1. Bandes (Besprechung: Bd. 79, S. *10* dieser Berichte) gesetzten Erwartungen werden vom 2. Band voll erfüllt. Ich werde das Meybergsche Werk allen

Studenten empfehlen, die die Algebra im Selbststudium lernen wollen oder eine anständige Begleitlektüre zur Vorlesung suchen. Nach meinem Dafürhalten ist es das dazu geeignetste deutschsprachige Lehrbuch. [B 1401]

München W. Heise

Kurke, H., Pfister, G., Roczen, M., Henselsche Ringe und algebraische Geometrie (Mathematische Monographien, Band 11), Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1975. 223 S., DM 65,–

Sind $f_1(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m), \dots, f_m(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m)$ analytische Funktionen in einer Umgebung des Punktes $(a, b) \in \mathbf{C}^{n+m}$, so daß $f_1(a, b) = \dots = f_m(a, b) = 0$ und $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(a, b)\right) \neq 0$ ist, so gibt es analytische Funktionen $g_1(z_1, \dots, z_n), \dots, g_m(z_1, \dots, z_n)$ in einer Umgebung von $a \in \mathbf{C}^n$, die durch $g_i(a) = b_i$ und $f_i(z_1, \dots, z_n, g_1(z), \dots, g_m(z)) = 0$ für $i = 1, \dots, m$ in einer Umgebung von a bestimmt sind. Dieser Satz über implizite Funktionen gilt nicht nur für analytische Funktionen, sondern ebenso für reell-differenzierbare Funktionen, formale Potenzreihen und in entsprechend variierter Fassung für die Lösung polynomialer Gleichungssysteme über dem von Hensel eingeführten Ring $\hat{\mathbf{Z}}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen. Dagegen werden mit den f_i die g_i gewöhnlich keine Polynome sein, d. h. in der klassischen algebraischen Geometrie gibt es keinen Satz über implizite Funktionen, insbesondere ist der Begriff „analytischer lokaler Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten" algebraisch ohne Sinn.

Als algebraisches Analogon hierzu haben Grothendieck und Artin die etalen Morphismen und die Etaltopologie eingeführt. Die Lokalisierungen im Sinne dieser Topologie führen zu den lokalen henselschen Ringen, unter denen die Ringe konvergenter oder formaler Potenzreihen oder der p-adischen Zahlen prominente Beispiele sind. Aber auch die algebraischen Zahlen in $\hat{\mathbf{Z}}_p$ bilden bereits einen henselschen Ring, der für viele Zwecke der algebraischen Zahlentheorie genau so fruchtbar ist wie die volle Komplettierung $\hat{\mathbf{Z}}_p$. Eine elementare, gut lesbare, nur Grundzüge der kommutativen Algebra voraussetzende Einführung in die lokalen henselschen Ringe bieten die Springer Lecture Notes LN 169 von Raynaud.

Das vorliegende Buch globalisiert diese Lecture Notes, indem es sie in die kategorielle Sprache der geometrischen Räume inkorporiert und zugleich mit vielem weiteren Material, u. a. aus der Habilitationsschrift bzw. den Dissertationen der Verfasser anreichert. So ist eine breit angelegte Monographie entstanden, die mit einem Minimum an Vorkenntnissen und einem Maximum an Allgemeinheit die Theorie der henselschen Ringe und zahlreicher Anwendungen einheitlich darstellt. Die Etalkohomologie, in Delignes SGA 4 1/2 (LN 569) inzwischen auch für Nichtexperten zugänglich aufgeschrieben, ist dabei ausgeklammert.

Zum Inhalt: Das I. Kapitel entwickelt bzw. referiert die benötigten Grundlagen: Kommutative Algebra und geometrische Räume, Garben auf Situs, treuflacher Descent. Das II. Kapitel kennzeichnet die henselschen Ringe auf mancherlei Art, untersucht erste Eigenschaften und Konsequenzen für Einbettungsprobleme in der komplexen Analysis und betrachtet henselsche Abschließungen (das algebraische Analogon zur Komplettierung, henselsche und algebroide Zweige algebraischer Mannigfaltigkeiten stimmen überein). Kapitel III betrachtet die Struktur der quasiendlichen Morphismen durch Zariskis Hauptsatz mit diversen Anwendungen wie Weierstraßschem Vorbereitungssatz, Satz über implizite Funktionen und Newtonschem Lemma bei algebraischen Potenzreihen. Die Untersuchung unverzweigter und etaler Morphismen schließt sich an, der Zusammenhang zur Henselschen Abschließung wird hergestellt. Den etalen Überlagerungen und der Fundamentalgruppe ist Kapitel IV gewidmet, wobei der Zusammenhang mit der klassischen topologischen Fundamentalgruppe, der Riemannsche Existenzsatz (nach Grauert-Remmert-Grothendieck), nur zitiert werden kann. Das V. Kapitel entwickelt ein wichtiges Motiv für das Studium henselscher Ringe und henselscher Abschließungen, nämlich Artins Untersuchungen über die Approximation formaler Strukturen, z. B.: Hat ein analytisches Gleichungssystem eine formale Potenzreihenlösung, so auch eine konvergente, die die formale beliebig gut approximiert. Ähnlich kommt man von einer formalen Lösung eines polynomialen Gleichungssystems zu einer Lösung durch algebraische Potenzreihen (ein derart enger Zusammenhang von formalen und gewünschten Lösungen besteht bei Differential- und anderen Funktionalgleichungen i. a. nicht). Angewandt werden diese Approximationssätze auf die Algebraisierung formaler Deformationen. Das VI. Kapitel führt ein in die Theorie der algebraischen Räume, mit denen Artin die Kategorie der Schemata verallgemeinert hat, um Quotientenbildungen, die bei Klassifikationsproblemen der algebraischen Geometrie auftraten, durchführen und Modifikationen analytischer Räume nachbilden zu können. Im letzten,VII. Kapitel wird in Analogie zu den formalen Schemata die Theorie der henselschen Schemata bzw. henselschen algebraischen Räume dargestellt, die bei der Untersuchung von Einbettungen und bei lokalen Modulproblemen auftreten.

Das reichhaltige Buch ist (trotz mancher Druckfehler) sorgfältig und flüssig geschrieben. Das Bemühen der Autoren um Motivation wird immer wieder deutlich, doch hätten noch mehr konkrete Beispiele, Fragen und Probleme als Pendant zu den theoretischen Entwicklungen nicht geschadet. Als eine wichtige Einführung in das neubelebte Gebiet der „henselschen Methoden" ist diese Monographie nicht nur in der deutschsprachigen Literatur konkurrenzlos; den Autoren ist zu danken. [B 1398]

Erlangen W.-D. Geyer

Springer, T. A., Invariant Theory (Lecture Notes in Mathematics, Bd. 585), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, 112 pp., soft cover, DM 18,–

Die Invariantentheorie, deren Wurzeln bis ins 18. Jahrhundert zurückreichen, erlebte ihre Blütezeit in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, vor allem durch die Arbeiten von Cayley, Sylvester, Hermite, Clebsch, Gordan, Aronhold, Capelli und Hilbert. Durch die berühmten Untersuchungen von Hilbert um 1890 waren allerdings mit einem Schlage die wichtigsten Probleme gelöst, und die Mathematiker verloren nach und nach ihr Interesse an diesem Gebiet. Ein neuer, allerdings recht kurzer Aufschwung kam durch die Darstellungstheorie der halbeinfachen Gruppen und die damit zusammenhängenden Resultate von I. Schur, H. Weyl und E. Cartan um 1935. Doch erst durch die Arbeiten von Mumford zu den Moduli-Problemen, allen voran die „Geometric Invariant Theory" von 1965, erwachte die Invariantentheorie zu neuem Leben und hat bis heute nicht an Interesse verloren.

Die vorliegenden Lecture Notes entstanden aus einer Vorlesung des Autors im Wintersemester 1975/76. Sie sind ohne Zweifel eine sehr gelungene Einführung in die Invariantentheorie, welche nicht nur für den Anfänger sehr geeignet ist, sondern auch für den Spezialisten viele Anregungen und interessante Details enthält. Aufbauend auf elementaren Grundkenntnissen wird trotz des geringen Umfanges eine Fülle von Material verarbeitet, darunter viele klassische Resultate aus dem 19. Jahrhundert. Zudem ist jedes der vier Kapitel mit einem Anhang mit historischen Bemerkungen und auch einigen neueren Resultaten und Literaturhinweisen ergänzt.

Im einzelnen ist der Text folgendermaßen aufgebaut. Das erste Kapitel enthält die notwendigen Grundbegriffe aus der (affinen) algebraischen Geometrie und diskutiert einige Beispiele (Invarianten der symmetrischen Gruppe und der Konjugationsklassen von Matrizen). Im zweiten Kapitel wird der Endlichkeitssatz für geometrisch reduktive Gruppen bewiesen. Im weiteren enthält dieses Kapitel auch einige bekannte Resultate über graduierte Algebren und Poincaré-Reihen.

Das dritte Kapitel behandelt $SL_2(\mathbf{C})$ und die Invariantentheorie der binären Formen. Eine Reihe klassischer Resultate werden entwickelt, unter anderem die Formel von Clebsch-Gordan, der Abzählkalkül von Cayley-Sylvester für die Dimensionen der Invariantenräume und Hilbert's asymptotische Formel für diese Dimensionen. Als Anwendung werden für kleine Grade die vollen Kovarianten- und Invariantensysteme angegeben. Im weiteren enthält dieses Kapitel einen Beweis der geometrischen Reduktivität von SL_2 in beliebiger Charakteristik (Seshadri 1968); der Autor folgt dabei den Argumenten von W. J. Haboush, welcher 1975 die geometrische Reduktivität der halbeinfachen algebraischen Gruppen bewiesen hat.

Das letzte Kapitel ist den endlichen Gruppen und ihrer Invariantentheorie gewidmet. Es beginnt mit den endlichen Spiegelungsgruppen und deren Charakterisierung durch den Invariantenring (Theorem von Chevalley), sowie einigen Resultaten über Semiinvarianten. Der Hauptteil enthält die Untersuchung und Klassifikation der binären Polyedergruppen (das sind die endlichen Untergruppen von $SL_2(\mathbf{C})$) und das Studium ihrer Invarianten (nach F. Klein). Zum Schluß werden noch zwei klassische Beispiele von endlichen Spiegelungsgruppen in $SL_3(\mathbf{C})$ diskutiert.

[B 1451]

Bonn H. Kraft

Golan, J. S., Localization of Noncommutative Rings, New York: Marcel Dekker 1975, 346 S., geb., DM 22.75

In den letzten zehn Jahren ist in der Algebra eine neue Theorie entstanden, deren suggestivste Bezeichnung „Torsionstheorie“, deren anspruchsvollste „Lokalisierung“ ist. Genauer gesagt handelt es sich um eine neue Methode zur Untersuchung von Moduln und Ringen. Nach dem Vorbild in der Untersuchung der abelschen Gruppen wird jeder Modul über einem festen Ring R exakt zerlegt:

$$0 \to \tau(M) \to M \to M/\tau(M) \to 0$$

in einen Torsionsmodul $\tau(M)$ und einen torsionsfreien Modul $M/\tau(M)$ derart, daß die Klasse der Torsionsmoduln abgeschlossen ist unter Faktormoduln, direkten Summen und Untermoduln, dagegen die der torsionsfreien Moduln unter direkten Produkten, injektiven Hüllen und Untermoduln. Man kann eine Torsionstheorie τ auch – wie der Autor – definieren als Äquivalenzklasse injektiver Moduln nach der Relation: $E \sim E'$, wenn E und E' sich gegenseitig ko-erzeugen. Diese Definition zeigt, daß homologische Algebra und Kategorien Pate gestanden haben, obwohl: sie „are used as little as a possible“. Der Leser sollte etwa auf dem Niveau von Lambek's „Lectures on rings and modules“ vorgebildet sein. Kap. I gibt in knapp 50 Seiten die Grundzüge der Theorie bis zum „Lokalisierungsfunktor“ Q_τ. Kap. II untersucht die Verbandsstruktur von R-tors. In Kap. III werden spezielle Torsionstheorien vorgestellt: treu, stabil, halbeinfach, saturiert, exakt, perfekt. Herzstück des Buches ist Kap. IV und der Begriff der primen Torsionstheorie. Die Ringe $Q_\tau(R)$ mit $\tau \in$ R-spec entsprechen also den kommutativen Lokalisierungen. Tatsächlich sind diese Ringe für perfekte τ lokal (S. 201), wenn man den Begriff geeignet definiert (S. 115). Wichtiger als dieser Begriff aber ist die Methode, einen Modul oder Ring R an jeder „Stelle“ $\tau \in$ R-spec durch Anwendung des Funktors Q_τ zu untersuchen. In Kap. VI führt der Autor vor, wie man Schlüsse vom „Lokalen“ zum „Globalen“ ziehen kann. Kap. V ist den Jansian- oder TTF-Theorien gewidmet. Eine Sammlung von 36 Beispielen der unterschiedlichsten Art ist im letzten Kapitel des Buches zusammengestellt. Das Buch ist in einem durchgehend gut lesbaren Stil geschrieben und dürfte eine Zeitlang seinen Platz als beste Einführung in diesen interessanten rasch anwachsenden Zweig der Algebra behaupten. [B 1396]

Bochum S. Elliger

Ehrig, H., et al., Universal Theory of Automata (Teubner Studienbücher Informatik), Stuttgart: Teubner Verlag 1974, 240 pp., paper, DM 24,80

Die Automatentheorie entstand erst in den 40er Jahren als Hilfsmittel zur Beschreibung von abstrakten Modellen von Nervennetzen sowie von Schaltwerken für Digitalrechner. Bald jedoch zeigte sich, daß der Begriff des Automaten einerseits in vielen anderen Bereichen ein sehr nützliches Konzept zur Beschreibung von Systemen und Prozessen ist und andererseits zu interessanten mathematischen Fragestellungen führt. Die Automatentheorie hat sich deshalb sehr schnell zur einem sehr umfangreichen Gebiet entwickelt, das für Informatiker und Mathematiker gleichermaßen von Interesse ist. Teile der Automatentheorie haben sich ganz zu einer mathematischen Spezialdisziplin entwickelt. Das von H. Ehrig zusammen mit H.-D. Kiermeier, H.-J. Kreowski und W. Kühnel verfaßte Buch, das stark auf Arbeiten der Verfasser beruht, gibt eine Einführung in einen Teil der algebraischen Theorie der Automaten. Ziel des Buches ist es vor allem, eine einheitliche Darstellung einer Vielzahl verschiedener Automatentypen zu geben und daraus neue Anwendungen und Ergebnisse herzuleiten. Die Grundlage für diese einheitliche Darstellung bildet die Kategorientheorie, speziell die universellen Konstruktionen in monoidalen Kategorien. Die Vereinheitlichung wird vorgenommen im Hinblick auf eine spezielle Klasse von Problemen der Automatentheorie, nämlich den Problemen der Äquivalenz, Reduktion, Minimisierung und Realisierung.

Das Buch beginnt mit einer kurzen Darstellung der verschiedenen zu behandelnden Automatentypen und der monoidalen Kategorien sowie der zu untersuchenden Probleme (Kapitel 1 bis 3). Zunächst werden dann deterministische Automaten in abgeschlossenen Kategorien behandelt und gezeigt, wie eine einheitliche Konstruktion für alle betrachteten Automatenklassen zur Darstellung des Verhaltens eines Automaten gewonnen werden kann (Kapitel 4). Darauf aufbauend wird die Reduktion und Minimisierung von Automaten in abgeschlossenen Kategorien behandelt (Kapitel 5). Um auch nichtdeterministische Automaten behandeln zu können, werden pseudo-abgeschlossene Kategorien verwendet (Kapitel 6 und 7). In Kapitel 8 wird die klassische Potenz-Automatenkonstruktion auf Automaten in pseudo-abgeschlossenen Kategorien verallgemeinert. Kapitel 9 und 10 bringen die Erweiterung der bis dahin entwickelten Theorie auf Automaten mit einem Anfangszustand. Die Strukturtheorie von Automaten (Konstruktion und Charakterisierung von Isomorphismen zwischen Automaten etc.) wird in § 11 für Automaten in monoidalen Kategorien kurz dargestellt. In einem Anhang werden die grundlegenden Begriffe der Kategorientheorie, die in dem Buch benutzt werden, dargestellt.

Das Buch müßte für einen Mathematiker, der auch nur etwas mit Kategorientheorie vertraut ist, gut lesbar sein, denn Voraussetzungen aus der Informatik werden praktisch nicht gemacht, obwohl zur Motivation einige Kenntnisse aus der klassischen Automatentheorie ganz hilfreich sind – entsprechende Literaturhinweise finden sich im Buch. [B 1439]

Hamburg W. Brauer

Petrich, M., Lectures in Semigroups, London – New York – Sydney – Toronto: John Wiley & Sons, 1977, VIII und 168 pp., $ 13.30

This book may well be considered as a sequel to "Introduction to Semigroups" by Mario Petrich (Columbus, Ohio, Charles E. Merrill Publ. Co. 1973). While in this previous book semigroups are studied via semilattice decompositions, the book under review considers more involved types of band decompositions of semigroups.

The book consists of five chapters. In Chapter I the author gives some basic definitions and results necessary for understanding the main body of the book. In fact, this chapter is a very short summary of the previous book. Chapter II is devoted to arbitrary bands, i.e. idempotent semigroups. In particular, the author considers all varieties of bands defined by identities in no more than three variables and all quasi-varieties of bands defined by quasi-identities (= universal Horn sentences) in no more than two variables. Chapters III and IV treat some special band decompositions of semigroups. First the author considers matrix (= rectangular) decompositions, then normal band decompositions. Chapter V differs from the preceding chapters in its character.

It is devoted to lattices of subsemigroups of semigroups. Bibliography contains about 150 works on semigroups, list of symbols and subject index follow.

The exposition of the material in this book is masterly, it is very clear and lucid. Each chapter is subdivided into sections. Each section of each chapter except Chapter I is endowed with exercises, a lot of new facts are included in these exercises. All sections but one in Chapters II–V are endowed with references to the papers from which the author took his material. However, a lot of material (not speaking of the manner of its presentation) is new.

The world literature on algebraic semigroups has several thousand papers by now. The first monographs on algebraic semigroups ("Semigroups", by E. S. Ljapin, published in Russian in Moscow by Fizmatgiz in 1960, three editions of an English translation were published in Providence, R. I. by the American Mathematical Society in 1963, 1968 and 1974, the 4th edition is in preparation, the English translation beginning from 1968 contains material not available in the original Russian edition; the other monograph is "The Algebraic Theory of Semigroups" by A. H. Clifford and G. B. Preston, published in two volumes in 1961 and 1967 in Providence, R. I. by the American Mathematical Society, there is a Russian translation published in Moscow by "Mir" Publishers in 1972) were encyclopedias of algebraic semigroups. However, at present it is not possible to encompass all wealth of material on algebraic semigroups in one book, each author has to choose the material he wishes to cover. M. Petrich included few directions of semigroup theory in his book, however, those directions he did include are presented in all details and completeness.

This book is a necessary acquisition for every specialist in semigroups. However I can hardly recommend it as a textbook for beginners. Perhaps the best initiation to semigroups is "An Introduction to Semigroup Theory" by J. M. Howie (London, Academic Press, 1976). Nevertheless, as a reference and as a treatise on the topics covered, the monograph of M. Petrich is irreplaceable.

This book has another very valuable asset which it shares in full with no other semigroup monograph except the Ljapin one. (However, since the Ljapin book was written twenty years ago, the book of Petrich is beyond comparison in this respect.) Namely, the book presents the world-wide picture of certain facets of semigroup theory rather than is merely an account of Western research in the fields covered. Indeed, the main semigroup languages are English, and Russian. There are also lots of papers in French, quite a few in German and Slovakian. However, while everybody can read papers in English, this is not the case with Russian. And if one compares the availability of materials published in these languages, the difference becomes far more drastic. More than 1 500 semigroup papers published in Russian remain hidden from the Western reader as if they have appeared on the other side of the moon. Meanwhile these papers contain a lot of interesting and significant results, quite a few fruitful ideas. It is a great pity that, while some authors just cannot write books containing all material covered in the world literature (which is perhaps due to our linguistically divided world), the others may not do that. In this respect the book of Petrich is above any blame, and the picture it gives mirrors the existing wealth of material without any significant distortions.

All in all, this and the preceding books of Professor M. Petrich are really useful and beautiful ones. They form a valuable addition to the world mathematical literature. [B 1459]

Saratow/UdSSR B. M. Schein

Lyndon, R., Schupp, P., Combinatorial Group Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 89), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, XIV und 339 pp., cloth, DM 72,–

Nach dem Buch gleichen Titels von Magnus-Karrass-Solitar aus dem Jahre 1966 liegt hier die zweite der kombinatorischen Gruppentheorie gewidmete Monographie vor. Seit Erscheinen des ersten hat eine starke Entwicklung dieser Theorie und benachbarter Gebiete eingesetzt, und es ist klar, daß sich nicht alle dabei auftretenden Strömungen in einem Buch fassen lassen. Hier wird der Akzent auf die „lineare" Kürzungsmethode von Nielsen und die „geometrische" Kürzungsmethode von Dehn gesetzt, zu deren Entwicklung die beiden Verfasser ja wesentliche Beiträge geliefert haben.

Es werden freie Gruppen, freie Produkte von Gruppen (mit Amalgamation), HNN-Erweiterungen, Gruppenbeschreibungen, Gruppen mit einer definierenden Relation und die bekannten Untergruppensätze besprochen, die auch schon eine ausführliche Behandlung im Magnus-Karrass-Solitar gefunden haben. Die klassischen Resultate werden ergänzt durch neuere Ergebnisse, welche zum großen Teil mit Beweisen, zum Teil allerdings nur durch Verweise gegeben werden. Größeren Raum nehmen die folgenden Ergänzungen ein: Die Nielsensche Kürzungsmethode wird nicht nur wie üblich für freie Gruppen und freie Produkte benutzt, sondern es wird auch die von dem Referenten gewonnene Erweiterung auf freie Produkte mit Amalgam behandelt und für neue Beweise der Untergruppensätze verwendet. Zum anderen findet sich eine zusammenhängende ausführliche Behandlung der „small cancellation" Theorie von Greendlinger, Lyndon und Schupp, die eine Lösung von Wortproblemen spezieller Gruppen ermöglicht. Ein Kapitel ist den geometrischen Methoden der kombinatorischen Gruppentheorie gewidmet. Unter anderem wird hier auch die kombinatorisch-gruppentheoretische Theorie der Fuchsschen und nichteuklidisch kristallographischen (NEC) Gruppen behandelt, was auch zur Einführung in die „small cancellation" Theorie dienen kann. In einem anderen Abschnitt werden einige Entscheidungsprobleme der Gruppentheorie besprochen.

Wie im Vorwort vermerkt, ist das Buch nicht in einer einheitlichen Form geschrieben. So werden einige Dinge einfacher Art ausführlich behandelt, ohne auf Vorkenntnisse aufzubauen; bei anderen wird schon Geläufigkeit mit den Methoden und Begriffen der kombinatorischen Gruppentheorie vorausgesetzt. Zu einigen Ergebnissen werden nur Beweisverweise gegeben, andere werden mehrfach, mit verschiedenen Methoden, bewiesen. So ist dieses Buch kein Lehrbuch, das einen Einstieg in die kombinatorische Gruppentheorie ermöglicht. Aufbauend auf dem Buch von Magnus-Karrass-Solitar jedoch wird der Text eine große Hilfe für die weitere Arbeit sein, nicht zuletzt wegen seiner hervorragenden großen Bibliographie von 37 eng bedruckten Seiten.

Mir erscheint das Buch von großem Wert für ein vertiefendes Studium der kombinatorischen Gruppentheorie sowie als Referenz für die wissenschaftliche Arbeit. [B 1469]

Bochum H. Zieschang

Lang, S., $SL_2(\mathbf{R})$, Reading, MA: Addison-Wesley/W. A. Benjamin 1975, XVI und 428 pp., cloth, \$ 19.50

Das vorliegende Buch ist eine systematische und reichhaltige Einführung in die Darstellungstheorie der Gruppe $G = SL_2(\mathbf{R})$.

Im ersten Teil werden die unitären und die nichtunitären Darstellungen beschrieben. Im zweiten Teil wird für eine diskrete Untergruppe $\Gamma < G$ mit vol $(\Gamma\backslash G) < \infty$ die Zerlegungstheorie des Raumes $L^2(\Gamma\backslash G)$ behandelt. Für den Laplace-Operator auf $\Gamma\backslash H$, $H = K\backslash G$, K maximalkompakte Untergruppe von G, wird die Spektraltheorie beschrieben.

Diese kurze Inhaltsangabe beschreibt bei weitem nicht den Inhalt des Buches. Die einzelnen Themenkreise erfordern einen umfangreichen Apparat, der zum großen Teil innerhalb des Buches bereitgestellt wird. Nicht behandelt wird der gesamte Bereich der Selbergschen Spurformel.

An den Leser stellt das Buch sehr hohe Anforderungen. Bisweilen wird der Leser das Bedürfnis haben, einige Stationen der Seilbahn zu überschlagen und zu Fuß die Wunder der Bergwelt zu erleben. Für solche Fußwanderungen gibt der Autor in der Regel genügend viele Hinweise.

Nach der Publikation des Buches ist wichtige weitere Literatur erschienen. In den Berichten der Corvallis Conference on Representation Theory 1976 findet der Leser einige Übersichtsartikel, die er als sehr hilfreich empfinden wird. [B 1453]

Bielefeld J. Mennicke

Mikusiński, J., The Bochner Integral, Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1978, XII und 233 pp., DM 74,–

Inhalt und Zielsetzung des Buches werden auf dem Buchumschlag wie folgt beschrieben: „The Lebesgue and Bochner integrals are introduced in a new and rapid way that avoids auxiliary concepts like measure or convergence almost everywhere. This approach is understandable for students of the first undergraduate course as well as for physicists and engineers. It is simple enough to eliminate the less useful Riemann integration theory from regular mathematics courses. The development of the theory relies on a few basic properties of the integral so that the theory applies also to the Daniell and more general integrals. Several new questions are considered so that the book is of interest also for specialists in integration."

In der Tat wird das Lebesguesche Integral bereits auf Seite 3 wie folgt definiert: Eine Funktion $f\colon \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}$ heißt Lebesgue-integrierbar, wenn eine Folge achsenparalleler, halboffener Quader Q_n in $\mathbf{R}^q$ vom Volumen μ_n und eine Folge reeller Zahlen λ_n derart existieren, daß $\Sigma |\lambda_n| \mu_n < +\infty$ und $f(x) = \Sigma \lambda_n 1_{Q_n}(x)$ in allen Punkten $x \in \mathbf{R}^q$ gilt, in welchen die letzte Reihe absolut konvergiert. Die Zahl $\Sigma \lambda_n \mu_n$ heißt dann das Lebesgue-Integral von f. Ersetzt man die Folge (λ_n) durch eine Folge von Vektoren eines Banach-Raumes, so erhält man analog die Definition des Bochner-Integrals. Ausgehend von diesen Definitionen wird die Theorie des Lebesgue- und des Bochner-Integrals bis hin zum Transformationssatz und zu den Lebesgueschen Sätzen über den Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration entwickelt. Abschließend wird noch das Faltungsprodukt von Funktionen eingeführt und der Satz von Titchmarsh mittels des Beweises des Autors aus dem Jahre 1959 bewiesen.

Würde sich das Buch auf diesen reduzierten Inhalt beschränken, so würde dem Leser ein rascher, wenn auch vielleicht nicht ganz leicht zu durchschauender Zugang zur Lebesgueschen Theorie geboten. Dann könnte wohl auch der einleitend angesprochene Student der Darstellung folgen, zumal elementare Begriffe wie Vektorraum, Stetigkeit, Offenheit etc. erklärt oder wiederholt werden. Die Lektüre des Buches wird aber wesentlich dadurch erschwert, daß nach Herleitung der elementarsten Eigenschaften des Integrals, nämlich Linearität und Modul-Eigenschaft, d. h. $|\int f| \leqslant \int |f|$, diese Eigenschaften zu Axiomen erhoben werden. Der weitere Aufbau der Theorie erfolgt dann aufbauend auf diese und Zusatzaxiome (z. B. Positivität, Stonesches Axiom, σ-Endlichkeit) mit der Absicht, zugleich eine weitgehend vollständige Maß- und Integrationstheorie für Banach-wertige Funktionen zu entwickeln. Erschwerend kommt hinzu, daß dem Leser keine überzeugenden weiteren Beispiele zur Rechtfertigung des axiomatischen Aufbaus vorgestellt werden.

So ist dieses Buch wohl doch kein Lehrbuch, sondern eine Studie zur Integrationstheorie, allerdings mit vielen elementaren Einschüben. Ein schlimmer Druckfehler auf Seite 23 dürfte den unerfahrenen Leser vor unüberwindbare Schwierigkeiten stellen: Die Formulierung der entscheidenden Modul-Eigenschaft bricht nach den Worten „If $f \in U$, then" unvermittelt ab. Das Fehlen eines Sachverzeichnisses erschwert die Lektüre zusätzlich. Das Literaturverzeichnis begnügt sich mit Hinweisen auf die klassischen Originalarbeiten (darunter die von K. Gödel über die Konsistenz des Auswahlaxioms). [B 1435]

Erlangen H. Bauer