81. Band Heft 4
ausgegeben am 6.12.1979

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
W. Benz, P. L. Butzer, W.-D. Geyer

B. G. Teubner Stuttgart 1979

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von
Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen
unter Mitwirkung von
Prof. Dr. W. Benz, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13 – Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen – Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Verlag
B. G. Teubner, Postfach 80 1069, 7000 Stuttgart 80 (Vaihingen) – Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – GW ISSN 0012-0456
Herstellung: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, 6830 Schwetzingen

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte,Ankündigungen von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs, Math. Institut der Universität, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen, zu richten.

Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden die Herausgeber bei den Verlagen anfordern.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten 75, von Buchbesprechungen 2 Sonderdrucke unentgeltlich.

Der 81. Band des Jahresberichtes umfaßt vier Hefte und wird nur geschlossen abgegeben. Der im voraus zahlbare Bezugspreis beträgt DM 74,–. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen. Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichtes im Mitgliedsbeitrag enthalten. Die Bezieher werden gebeten, dem Verlag von Anschriftenänderungen unverzüglich Kenntnis zu geben.

Für den Abdruck vorgesehene Manuskripte sind in einwandfrei leserlicher und völlig druckfertiger Form (Schreibmaschinenschrift) einzureichen. Die Manuskripte müssen nach satztechnischen Richtlinien und Auszeichnungsregeln, die von der Schriftleitung des Jahresberichts zu erhalten sind, gestaltet werden.

Nachträgliche Änderungen bei der Korrektur, die 5% des Satzpreises übersteigen, müssen dem Autor angerechnet werden.

Konten der DMV: Kreissparkasse Tübingen, Girokonto 1626. – Postscheckkonto: DMV in Tübingen, Nr. 18517 – 706 beim Postscheckamt Stuttgart. – DDR: Berliner Stadtkontor, Berlin C 111, Kurstraße, Konto Nr. 20/142007.

Inhalt von Band 81, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jakobs
unter Mitwirkung von
W. Benz, P. L. Butzer, W.-D. Geyer

81. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1979

Verlagsnummern 2894/1, 2894/2, 2894/3, 2894/4 ISSN 0012-0456

Printed in Germany
Gesamtherstellung: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, Schwetzingen

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

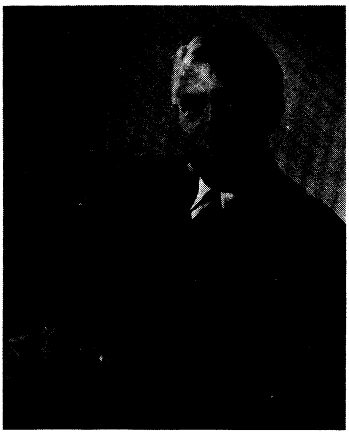
Buchbesprechungen

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
81 (1979) 153–176

Alexander Dinghas

in memoriam

H. Begehr, Berlin



1 Leben und Wirken

Am 19. April 1974 verstarb Alexander Dinghas im Alter von 66 Jahren in Berlin.

Er war am 9. Februar 1908 als Sohn des Volksschullehrers Antonios Dinghas und seiner Ehefrau Erifili, geb. Tsolaoglou in Smyrna (Türkei) geboren und war das zweite von vier Kindern. Seine Familie entstammte dem griechischen Bevölkerungsteil der Stadt, wie auch der Reeder Onassis, der mit dem älteren Bruder von Dinghas die gleiche Schulklasse besuchte. Nach der Zerstörung Smyrnas im Jahre 1922 emigrierte die Familie nach Athen, wo Dinghas das sehr angesehene Gymnasium „Varvakion" für Knaben besuchte und im Juni 1925 die Hochschulreife erlangte. Im Oktober des gleichen Jahres wurde er am „Politechnion" der Technischen Hochschule Athens für die Fachrichtung „Maschinenbau und Elektrotechnik" immatrikuliert. Hier bestand er im Juli 1930 sein Diplom (Diplom-Ingenieur für Maschinenbau) mit Auszeichnung. Wegen seines Fleißes und seiner Begabung, die sein Vater und seine Schullehrer insbesondere in bezug auf Mathematik schon früh erkannt und gefördert hatten, war Dinghas bei seinen Lehrern hoch angesehen. Mit den wärmsten Empfehlungen der Professoren an der TH Athen Dr. I. Doanides und Dr. A. Oekonomon vom Dezember 1929 ausgestattet, ging er 1931 nach Berlin, um weitere Studien zu betreiben.

Hier wandte er sich nicht zur Vervollständigung seiner technischen Kenntnisse an die berühmte Technische Hochschule, sondern er nahm das Studium der Physik, Mathematik und Philosophie an der Friedrich-Wilhelms-Universität, der jetzigen Humboldt Universität auf.

In Berlin hatte er das Glück, an einer traditionsreichen Bildungsstätte für Mathematiker zu einer Blütezeit wissenschaftlichen Schaffens einen Kreis von bedeutenden Lehrern und begabten Kommilitonen anzutreffen. Er besuchte die Vorlesungen der Mathematiker Bieberbach, von Neumann, Erhard Schmidt und Schur, der Physiker von Laue und Schrödinger und der Philosophen Hartmann, Liebmann, Reichenbach und Spranger. In späteren Jahren fand er insbesondere zu Bieberbach, von Laue und Erhard Schmidt enge persönliche Kontakte. Zu seinen Konsemestern gehörten die später so bedeutenden Mathematiker Schiffer, Bernhard Neumann, Wielandt, Rohrbach.

Sein ursprüngliches Ziel, in Berlin bei Schrödinger Physik zu studieren, gab Dinghas unter dem Eindruck der Vorlesungen von Erhard Schmidt zu Gunsten der Mathematik auf. Er hörte zwischen 1931 und 1938 fast jede dieser Vorlesungen. In einer der ersten wurde 1931 und noch einmal 1932 Nevanlinnas Theorie der meromorphen Funktionen, die Wertverteilungslehre behandelt. Bis 1939 beschäftigte er sich ausschließlich und später immer wieder mit dieser Theorie. Der erste nähere Kontakt zu Erhard Schmidt entstand auf Grund eines Briefes von Rolf Nevanlinna. Ende 1932 hatte Dinghas sein erstes Ergebnis (B1) erhalten. Er teilte es brieflich Nevanlinna mit und bat ihn um Rat, ob er das Studium der Mathematik weiterverfolgen solle. Die ermunternde Antwort machte ihn nicht nur bei Schmidt und Schur bekannt, sondern Bestimmte auch nachhaltig sein erstes Forschungsgebiet. Mit Nevanlinna verband ihn später eine enge Freundschaft. Die erste persönliche Begegnung mit Nevanlinna fand während seiner Assistentenzeit bei Schmidt statt, als dieser ihn Nevanlinna vorstellte. Schmidt und Nevanlinna waren für ihn lange die geistigen Führer und die Vorbilder, denen er als Wissenschaftler und als Hochschullehrer zu gleichen stets bestrebt war.

Von Erhard Schmidt übernahm Dinghas die Art, Vorlesungen zu halten. Wie dieser benutzte er niemals ein Manuskript. Die Vorbereitungen wurden zwar nicht beim Spazierengehen, aber doch auch nur unmittelbar vor der Vorlesung durchgeführt. Im allgemeinen begnügte er sich nicht mit einem einzigen Beweis einer Behauptung, die wurde vielmehr mit großem Ideenreichtum von verschiedenen Seiten angegangen. Auf diese Weise entstanden eher für begabte Studenten durchsichtige und sehr instruktive Vorlesungen. Wollte man den gebotenen Stoff in ganzer Fülle wirklich nutzen, mußte man die Vorlesung ein zweites Mal besuchen. Ein äußerliches Merkmal der Vorlesungen von Schmidt und Dinghas war die Art, aus freier Hand wirkliche Kreise an der Tafel zu entwerfen. Sie begnügten sich nicht mit einer mehr oder weniger runden einfach geschlossenen Jordankurve. Sie unternahmen ein, zwei Versuche, besserten einige Stellen aus und ließen erst ab, wenn das Auditorium durch lautes Klopfen das Gelingen des Kunstwerkes bestätigten. Im übrigen kann man solche Kreise ebenso mit der linken Hand zeichnen wie man gelegentlich auch mit links an der Tafel schreibt.

Wie Schmidt (vgl. D9) vergab Dinghas nicht gern Doktorandenthemen. „Ich kann nicht alles für Sie tun. Schließlich müssen Sie sich Ihre Frau auch selbst aussuchen", war seine Begründung. Dagegen gab er seinen Schülern durch seine eigene mathematische Tätigkeit hinreichend Gelegenheit, selbst Themen zu finden. Da er indessen niemanden zur Promotion ermunterte, ist die Zahl seiner Schüler klein geblieben. Nur wenigen und eher den weiblichen Doktoranden hat er direkt ein Problem gestellt. Dazu verleitete ihn sein Hang, Benachteiligungen durch die Natur ausgleichen zu helfen.

Frauen schienen ihm im allgemeinen bezüglich des Intellektes ausgleichsbedürftiger zu sein. Zum Beispiel erzählte er (vgl. D9) von den gut besuchten meisterhaften Vorlesungen von Schur über Algebra, zu denen oft von Dr. Brauer Parallelkurse abgehalten werden mußten, daß sie fast zur Hälfte von Studentinnen besucht waren. Als dann später der Anteil der Studenten wegen des Militärdienstes sank, hätte der Geist keinen Gewinn aus dem erhöhten Anteil von Studentinnen gezogen. Diese Einstellung läßt sich auch aus seiner Äußerung über Feigl entnehmen, dessen sehr übersichtliche Vorlesungen besonders von Studentinnen besucht wurden. Feigl hätte, so die Begründung von Dinghas, auch dem plattesten Idioten Mathematik beizubringen verstanden. Er hätte selbst Ptolemäus erfolgreich Geometrie lehren können, denn dies sei ihm ja auch bei vielen Mädchen gelungen. (Er liebte es, seinen Argumenten durch die Heranziehung von Personen der Geschichte diese besondere Einprägsamkeit und Schlagkraft zu geben.)

Doch zurück zum chronologischen Ablauf. Dinghas hatte kurz vor seiner Abreise nach Berlin im Mai 1931 die Pianistin Fanny Grafiadou geheiratet. Die Ehe wurde viele Jahre nach vollzogener Trennung im Mai 1949 geschieden. Es ist typisch für ihn, daß hierüber, wie über seine persönlichen Angelegenheiten überhaupt, wenig bekannt ist. Er hat Privates und Dienstliches streng auseinandergehalten. Ein Wissenschaftler sollte nach seiner Meinung erst nach der Emeritierung heiraten. Eine Frau hätte im allgemeinen kein Verständnis dafür, daß ein Forscher auch abends arbeiten wolle. Von seiner Mutter sprach er gelegentlich mit großer Achtung.

Seinen ersten Seminarvortrag hielt Dinghas im Wintersemester 1932/33 über die Arbeit von Frithjof Nevanlinna in der Acta Mathematica Band 50 (1927)*)[1]), nicht wie geplant im Seminar von Bieberbach und Schmidt, sondern in dem mathematischen Kolloquium des Instituts. Neben Schmidt war Stefan Bergman einer der Zuhörer. Bei ihm fand er für die kurze Zeit, die dieser noch in Berlin weilen konnte, ideelle sowie materielle Unterstützung. Finanziell ging es Dinghas, der zunächst von einem Stipendium lebte, während seiner Studentenzeit und noch während der ersten Jahre als Dozent an der Friedrich-Wilhelms-Universität sehr schlecht, und er hatte große Entbehrungen auf sich zu nehmen.

Diese wirtschaftlichen, aber auch private Gründe zwangen ihn, im Sommersemester 1934 sein Examen in Angriff zu nehmen. Nach Rücksprache mit Erhard Schmidt wählte er die Verallgemeinerung einiger Ergebnisse aus der Wertverteilungstheorie von Nevanlinna zum Thema. Innerhalb von zwei Wochen war das Material zusammengeschrieben. Während der endgültigen Fassung erkrankte er an einer heftigen Lungenentzündung, die seine Promotion um ein halbes Jahr hinausschob. Drei Tage vor der Ende Juni 1935 angesetzten Prüfung las Erhard Schmidt die ihm bereits im Februar zugestellte Dissertation und entdeckte

*) Die Fußnoten befinden sich am Ende der Arbeit.

eine nicht einzusehende Ungleichung, die sich als falsch erwies, im zweiten und wichtigsten Kapitel. Diese Lücke ließ sich nicht sogleich schließen, und so konnte die Promotion erst ein Jahr später erfolgen. Die Prüfungen in Physik erfolgten durch von Laue, in Philosophie durch Spranger und in Mathematik durch Schmidt und Schur. Seine Dissertation (B6) schätzte er selbst im Vergleich zu seinen späteren Arbeiten als kümmerlich ein (vgl. D9), während er die 1935 angefertigte Note B4, die die Poissonsche Formel für den Halbkreis enthält, als erste brauchbare Leistung empfand.

Die mündliche Prüfung bei Schur erfolgte nicht wie üblich über Galoistheorie und Zahlentheorie, sondern nach einem Gespräch über griechische Namen und Griechenland über Funktionentheorie. Schur hatte Dinghas schon während seiner Studienzeit bestätigt, daß dieser die Algebra nie lernen würde. Tatsächlich hat Dinghas sich niemals mit diesem Gebiet angefreundet.

Längere Zeit prangte an der weißen Tafel seines Dienstzimmers im Hüttenweg, die ihm eher für Notizen von Terminen und Telefonnummern als zur Mathematik diente, Anfang 1974 der Ausspruch „Algebra mogelt alle Schwierigkeiten weg (Simone Weil)“. Wenn er von ihm weniger geschätzte Kollegen mit dem Attribut „ein Algebraiker“ versah, meinte er damit, daß es sich um einen sehr formalistisch denkenden Menschen handele. Und diese Algebraiker gab es zu allen Zeiten nicht nur in der Fakultät. Es lag ihm dabei fern, etwas gegen die mathematische Disziplin der Algebra oder die auf diesem Gebiet tätigen Mathematiker, die keine Algebraiker in seinem Sinne sein mußten, sagen zu wollen. Sein Unbehagen galt den neuzeitlichen abstrakten Tendenzen im mathematischen Denken, die durch die Verwendung komplizierter Symbolik den mathematischen Gehalt ihrer Aussagen unzugänglich machen und verschleiern[2]). Er selbst vermied in seinen analytischen Vorlesungen zum Beispiel die Verwendung logischer Quantoren, die zum formalistischen Denken verleiten, ohne das Verständnis zu erfordern oder zu erleichtern. Er benutzte nur gelegentlich einige als Abkürzungen.

Jede sich bietende Gelegenheit, zu aktuellen Fragen und Problemen Stellung zu nehmen, nutzte er. Ein Beispiel hierzu sind seine Äußerungen zu den Bestrebungen Ende der sechziger Jahre, die klassischen Vorlesungen durch kleine Tutorengruppen zu ersetzen, in denen den Studenten der mathematische Stoff zu kleinen Portionen aufbereitet verabreicht wurde. „Teebeutelmathematik“ sei dies und ähnlich den Streichen der Pippi Langstrumpf, verkündete er in einer Berliner Tageszeitung (vgl. C5). Und in den Erinnerungen an Erhard Schmidt (C4) spricht er von „mathematischen Rollstühlen“. In der Besprechung der gesammelten Werke von Hadamard (E5) liest man: „Außerdem lieferte Hadamard, lange bevor die Didaktik zu einer der größten Errungenschaften und zum Modefach des 20. Jahrhunderts wurde, zahlreiche wichtige Beiträge pädagogischen und unterrichtsmäßigen Inhalts ... Sie wirken nicht vereinfachend, sondern vertiefend“. Sein Rat an die Studenten war, ein Buch zu nehmen, dazu viel Papier, einen Bleistift, einen großen Papierkorb und sehr viel Zeit. So lerne man Mathematik.

Nach seiner Promotion zum Dr. phil. erhielt er 1936 eine Assistentenstelle bei Erhard Schmidt. Im Juni 1939 verlieh ihm die Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität die venia legendi, jedoch bekam er wegen seiner griechischen Staatsangehörigkeit keine planmäßige Dozentur, sondern nur einen ständigen Lehrauftrag, den er bis zum Ende des Krieges behielt. Noch in dieser Zeit hat Dinghas ständig unter wirtschaftlicher Not und Entbehrungen gelitten.

Während die Universität ab Mai 1945 geschlossen war, verbrachte er einige Zeit in einem Lager in Luckenwalde bei Berlin. Hier verfaßte er seine leider unvollendet gebliebenen, lebendig geschilderten Erinnerungen (D9).

Als der Lehrbetrieb der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät neun Tage vor der offiziellen Eröffnung der Universität, die an diesem 29. Januar den Namen „Humboldt Universität" erhielt, wieder aufgenommen wurde, ernannte man ihn zum planmäßigen Extraordinarius und zugleich zum kommissarischen Direktor des Instituts für Angewandte Mathematik. Im Oktober 1947 wurde er zum persönlichen Ordinarius und Direktor des Mathematischen Instituts berufen.

Als sich wegen der politschen Repressalien – äußerer Anlaß war die Relegation von drei Studenten auf Grund ihrer publizistischen Tätigkeit durch den Rektor ohne ordentliches Disziplinarverfahren am 16. April 1948 – Professoren und Studenten zur Gründung einer Freien Universität in den Westsektoren der Stadt entschlossen hatten und deren Gründung (als erste nahm die Philosophische Fakultät am 15. November ihren Vorlesungsbetrieb auf, der Gründungsfestakt fand am 4. Dezember im Titania Palast in Steglitz statt) Ende 1948 in Dahlem vollzogen worden war, nahm Dinghas noch vor dem Jahreswechsel Kontakte mit dem Gründungsausschuß auf und wurde als erster Mathematiker und einer der ersten Naturwissenschaftler im Januar 1949 an die Philosophische Fakultät berufen, wo er von Mai 1949 als Prodekan und später auch als Wahlsenator bis zum September 1950 wirkte.

Für seine Kollegen an der Humboldt Universität kam sein Wechsel überraschend. Vor allem Erhard Schmidt, dessen Wohnung in der Sedanstraße in Steglitz nicht weit von der neugegründeten Universität Dinghas in dieser Zeit als Unterkunft diente, brachte kein Verständnis dafür auf, daß man die von ihm so geliebte Universität in einer so schweren Zeit im Stich lassen konnte. Das Verhältnis zwischen ihm und seinem Schüler Dinghas war seitdem gestört (vgl. C4). Auch die übrigen Kollegen, die sich um den Wiederaufbau eines normalen akademischen Betriebes bemühten, fühlten sich im Stich gelassen. Tatsächlich stand fast die gesamte Professorenschaft der Humboldt Universität wie zum Beispiel auch die Rektorenkonferenz der westlichen Universitäten im Sommer 1948 der Gründung einer Freien Universität ablehnend gegenüber. Sie fürchtete (Erklärung des Senats der Humboldt Universität vom 3. Mai 1948) „die weitere Zerreißung des wissenschaftlichen und damit geistigen Lebens Berlins" und dadurch „ein neues Verhängnis für Deutschland"[3]).

Man kann die Frage nach den Beweggründen von Dinghas zu diesem Wechsel nicht eindeutig beantworten. Gewiß hat die Aussicht auf persönliche Vorteile und neue Wirkungsmöglichkeiten beim Aufbau einer neuen Universität eine Rolle gespielt. Vor allem wird ihn sein politischen Weitblick, den er unbestreitbar gehabt hat, geahnt haben lassen, daß es zu weiteren Einschränkungen der persönlichen Freiheit und der wissenschaftlichen Arbeitsmöglichkeiten kommen würde. Eine vorzeitige Offenbarung seines Vorhabens an die Kollegen hätte zwar einigen von ihnen die Möglichkeit eröffnet, mitzugehen, ihn aber der Gefahr ausgesetzt, wider besseres Wissen zum Bleiben überredet zu werden.

An dem Aufbau der Mathematisch-Naturwissenschaflichen Fakultät der FU, die auf Beschluß der Philosophischen Fakultät vom 25. Oktober 1950 am 1. April 1951 aus ihrer Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Abteilung entstanden war, hat Dinghas maßgebend und intensiv mitgearbeitet. Er war zweimal, 1952 und 1957, ihr Dekan und einer ihrer markantesten Persönlichkeiten. Das von ihm aufgebaute und fast 25 Jahre lang geleitete Mathematische Institut, von dem sich zweimal, 1963 und 1975, ein neues Institut abspaltete, mit der allein von ihm zusammengestellten vorbildlichen Institutsbibliothek bekam einen guten Klang in der mathematischen Welt. Durch seine vielseitigen Verbindungen, die er auch in den Dienst der Berliner Mathematischen Gesellschaft, deren Vorsitzender er dreimal – 1961, 1965 bis 1967 und 1969 bis 1971 – war, und deren Lebendigkeit bis gegen Ende der sechziger Jahre zum großen Teil seiner Initiative zu danken war, gelang es ihm, ein reges mathematisches Kolloquium ins Leben zu rufen, in dem er viele berühmte Mathematiker als Gäste begrüßen konnte. „In solchen Augenblicken", sagte Ernst Mohr, Professor an der Technischen Universität Berlin, am Tage der Beisetzung von Dinghas, „fühlten wir uns alle als Teil eines größeren Ganzen, dessen natürlicher Mittelpunkt Alexander Dinghas war".

Seit 1951 war Dinghas Honorarprofessor an der Technischen Universität Berlin. Hier fanden seine analytischen Vorlesungen und insbesondere seine Tensoranalysis großen Anklang bei Technikern und Physikern. Er hat seinen Berliner Wirkungskreis für längere Zeit nur zweimal verlassen, um in den Jahren 1952/53 an der Columbia University und 1970/71 an der Fordham University in New York Gastprofessuren wahrzunehmen.

Seine enge Verbundenheit mit der Universität und insbesondere mit seinem Institut kam durch den von ihm eingerichteten und über 25 Jahre lang unterhaltenen Institutstee zum Ausdruck. Hier trafen sich jeden Donnerstag um 16.30 Uhr Institutsmitglieder, eingeladene Studenten und auswärtige Gäste. Fand um 18 Uhr kein Vortrag statt, so saß man bis nach 19 Uhr zusammen. Danach ging er mit einem erlesenen Kreis gemeinsam Abendessen. Die Teilnahme am Tee war eine Selbstverständlichkeit für jeden im Institut, der nicht ausdrücklich ausgeladen war, was gelegentlich wegen geringerer oder gröberer Verstöße gegen ungeschriebene Gesetze geschah. Ein sehr lebhafter Professor am Institut wurde mehrere Male aus- und wieder eingeladen. Nahm er am Tee teil, zog er das Gespräch an sich, war er nicht gekommen, so war es manchmal sehr still. Am interessantesten waren die Teestunden, wenn Dinghas geschichtliche Themen ansprach. Er war ein guter Kenner und ein Experte insbesondere der byzantinischen Geschichte. Gelegentlich schnitt er auch religiöse Fragen an, eher um nach Aufschluß über eigene Zweifel zu suchen, als um seine Meinung zu äußern.

Seine Konfession war die griechisch othodoxe. Obwohl von Geburt Grieche – außer seiner Muttersprache und deutsch, sprach er fließend englisch und französisch –, fühlte und dachte er als ein Deutscher. Und er war ein bewußter Berliner. Die Nationalität eines Menschen spielte für ihn keine Rolle, nur der Mensch zählte. Er konnte sehr ungehalten werden, wenn jemand eine Anspielung auf seine eigene Herkunft machte. Er begriff sich selbst als ein deutscher Professor. So lebte und handelte er.

Das Leben am Institut war für lange Zeit das einer großen Familie, deren Oberhaupt Dinghas war. Mit Hilfe des Hausmeisters und einiger Kollegen unternahm er Anfang der sechziger Jahre im Garten des Instituts vergebliche Versuche, Fahrradfahren zu lernen, nachdem er nach vielen, vielen Fahrstunden festgestellt hatte, daß sich aktives Autofahren mit gleichzeitigem Grübeln über mathematische Probleme nicht verträgt. Diese Versuche endeten eines Tages in einem Rosenbeet, und er beschloß, künftig Taxi zu fahren. Dabei entdeckte er, daß Taxifahrer kluge Leute sind, die über ein besseres politisches Gespür verfügen, als alle Kollegen der Fakultät zusammen.

Fand er in der Literatur Analogien zur Gegenwart oder sinnreiche Aussprüche, die sich auf aktuelle Begebenheiten beziehen ließen, klebte er sie, gelegentlich auch mit Randbemerkungen versehen, an den großen Wandspiegel der Eingangshalle des Instituts. Auch an den Anschlägen von Kollegen am Schwarzen Brett gaben viele kleine Fehler genug Möglichkeiten zu Randbemerkungen, die die Umwelt erfreuten.

Das folgende seiner letzten Wandspiegelzitate spricht – unkommentiert – für sich.
Das aktuelle Zitat: Der Weg in die Tyrannei
„Wenn Väter ihre Kinder gewähren lassen und sich vor ihnen geradezu fürchten,
wenn Söhne ohne Erfahrung handeln wollen wie die Väter, sich nichts sagen lassen, um selbständig zu erscheinen,
wenn Lehrer, statt ihre Schüler mit sicherer Hand auf den richtigen Weg zu führen, sich vor ihnen fürchten und staunen, daß ihre Schüler sie verachten,
wenn sich die Unerfahrenen den älteren Erfahrenen gleichstellen und in Wort und Tat gegen sie auftreten, die Alten sich aber unter die Jungen setzen und versuchen, sich ihnen gefällig zu machen, indem sie Ungehörigkeiten übersehen oder gar daran teilnehmen, damit sie nicht als vergreist oder autoritätsgierig erscheinen,
wenn auf diese Weise verführte Jugend aufsässig wird, sofern man ihr auch nur den mindesten Zwang auferlegen will, weil niemand sie lehrte, die Gesetze zu achten, ohne die keine Gemeinschaft leben kann . . .
dann ist Vorsicht geboten:
Dieser Weg droht in die Tyrannei zu führen."
Platon (427–347 v. Chr.) Politeia

Neben politischem Weitblick und einem guten Gespür für sich ankündigende Entwicklungen zeichneten ihn menschliche Wärme und Toleranz aus, die allerdings nur die Menschen zu spüren bekamen, die ihm keine Widersacher waren. Jene aber mußten sich vor seinem Witz und seinem Zorn in acht nehmen.

Sein Wechsel an die FU gab ihm die Möglichkeit, sich für Bieberbach einzusetzen, der aus politischen Gründen nach dem Kriege nicht wieder als Professor eingestellt worden war. Er empfand wie auch Ostrowski die Notwendigkeit, für Bieberbach die Möglichkeit zum wissenschaftlichen Arbeiten zu schaffen. Zusammen mit Dinghas und Levi hat Bieberbach am Institut Seminare abgehalten, und er fand, solange er in Berlin weilte, für seine Belange als Forscher bereitwillige Unterstützung. Dinghas hat manche notleidenden Menschen, insbesondere auch in Not geratene Mathematiker eingedenk seiner selbst erlittenen Entbehrungen, finanziell unterstützt.

Bei der Auswahl und der Festlegung der Höhe der Bezahlung von Hilfsassistenten spielten soziale Aspekte für ihn stets eine wichtige Rolle. Sein Herz gehörte überhaupt den Studenten. Gab es zwischen Assistenten oder Hilfsassistenten und Studenten Meinungsverschiedenheiten wegen der Korrekturen von Übungsaufgaben, stand er stets auf Seiten der Studenten. Umso schwerer traf ihn 1968 die ungerechtfertigte Kritik von Studenten, die ihm kurz vor seinem sechzigsten Geburtstag eine Vorlesungsrezension im FU Spiegel, einer Studentenzeitschrift, und später eine Institutsbesetzung bescherten. Diese Vorfälle, die gegen ihn als einen typischen Vertreter der Ordinarienuniversität (der er allerdings in gutem Sinne tatsächlich war) gerichtet waren und seinen unbeugsamen Willen und seine Standfestigkeit brechen wollten, trafen ihn sehr. Andererseits haben sie seinen Kampfgeist entfacht. Bevor die Studenten ihre Vollversammlung abhielten, um die Institutsbesetzung zu beschließen, hatte er seine wertvolle Privatbibliothek und wichtige Unterlagen zum Lehrstuhl von Professor Mohr an die Technische Universität Berlin verlagert.

Auch das neue Berliner Universitätsgesetz von 1969, in dessen Folge er als Institutsdirektor, ohne von diesem Amt entpflichtet zu werden, abgelöst wurde, hat ihn nicht zur Resignation gebracht. Vielmehr hat er sich auf die neuen Gegebenheiten eingestellt und unter der veränderten Ordnung weiter für seine Ideale und Ziele gekämpft. Er arbeitete in dem neuen Fachbereichsrat mit und ließ sich durch opportunistische Kollegen sowie durch radikale Studenten nicht entmutigen. Am 18. Oktober 1971 schreibt er in einem Brief an Brelot, daß die Entscheidungen nun beim Fachbereichsrat lägen und: „Wir sind teils Zuschauer, teils Redner".

Seine bereits angesprochene Art zu argumentieren, wird an folgendem von ihm am 15. Mai 1973 gestellten, später mit 10 gegen 2 Stimmen bei 3 Enthaltungen angenommenen Antrag deutlich.

Antrag (Dinghas – Einstein)

Der Fachbereich 19 möge in Verbindung mit dem Bekenntnis Einsteins aus dem Jahre 1919 beschließen, daß er die akademische Freiheit sowohl für die Studenten als auch für die Dozenten im Sinne Einsteins bejaht und sie zur Grundlage seines weiteren Handelns und seiner weiteren Beschlüsse macht.

gez. Alexander Dinghas

Als Anlage waren dem Antrag Kopien der Seiten 154 und 155 des Buches „Albert Einstein – Max Born, Briefwechsel 1916–1935"[4]) beigefügt, in dem die folgenden von Einstein vor dem Studentenrat, der sich nach Kriegsende an der Universität Berlin gebildet hatte, geäußerten Worte zu lesen sind:

„Ich habe immer gedacht, das Wertvollste an der Einrichtung der deutschen Universität ist die akademische Freiheit, die dem Dozenten in keiner Weise vorschreibt, was er lehrt, und dem Studenten die Wahl der Vorlesungen überläßt, ohne viel Aufsicht und Kontrolle. Ihre neuen Statuten scheinen das alles aufzuheben und durch genaue Vorschriften zu ersetzen. Mir täte es leid, wenn die alte Freiheit aufhörte."

Zum Verständnis des Antrages sei angemerkt, daß sich 1973 nicht nur die Verschulung des Lehrbetriebes an den Universitäten durch Einführung von Studiengängen und Regelstudienzeiten bereits abzeichneten, sondern folgende FU-spezifische Entwicklungen eingetreten waren: In den vorangegangenen (wie auch in folgenden) Semestern hatte der Fachbereichsrat zu den von Studenten und Tutoren boykottierten Anfängervorlesungen von Hochschullehrern Gegenveranstaltungen unter der Leitung von Assistenten eingesetzt. Außerdem wurden zu der Zeit Überlegungen angestellt, ob man einen Hochschullehrer zwingen könne, eine Anfängervorlesung zu übernehmen, um den gefaßten Beschluß, jedes Semester mit beiden Anfängervorlesungszyklen zu beginnen, durchsetzen zu können.

Trotz harter Gegnerschaft hatte er doch die Sympathie von Studentenvertretern und oft die Lacher auf seiner Seite. Nur die schönen Zeiten der Fakultät waren vorbei. Damals genügte es, einen festen Willen und gute Argumente zu haben und man konnte das gesamte Gremium, in dem oft alle anderer Meinung waren, umstimmen. Im Fachbereichsrat, wo die Entscheidungen jenseits aller Argumente nach vorheriger Absprache gefällt werden, gelingt dies nicht mehr. Aber es macht Spaß, die schwachen Argumente der Gegner in der Öffentlichkeit bloßzustellen und ihre unsachgemäßen Entscheidungen aufzuzeigen, auch wenn sie sich dann in ihrer Überzahl bei den Abstimmungen rächen.

Dinghas hielt sich, wie er bescheiden sagte, nicht für einen großen Mathematiker. Dennoch begriff er sich als ein letztes Glied der Berliner Mathematischen Schule, die mit der Berufung von Dirichlet (1839), Jacobi (1844), Weierstraß (1856), Schwarz (1892), Erhard Schmidt (1917) und Bieberbach (1921) neben Göttingen für eine lange Periode zu einer der Hochburgen mathematischer Forschung mit starkem Einfluß auf die Entwicklung der Funktionentheorie wurde.

Er war ein international anerkannter, geachteter Wissenschaftler. Am 8. Juni 1953 erhielt er vom griechischen König Paul das Goldene Kreuz des Phoenix Ordens für hervorragende wissenschaftliche Leistungen, 1962 die silberne Medaille der Universität Helsinki und 1973 die Medaille der Universität Jyväskylä verliehen. Er war ausländisches Mitglied von „Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs“ (1957) und der Finnischen Akademie der Wissenschaften (1973), korrespondierendes Mitglied der Heidelberger Akademie der Wissenschaften (1964), Mitglied von „Sigma – Xi, Chapter Fordham, Bronx N.Y.“ (1971) und der American Mathematical Society, der London Mathematical Society, der Société Mathématique de France, der Östereichischen Mathematischen Gesellschaft, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

2 Wissenschaftliches Werk

Indem Dinghas sich und sein ganzes Leben der Mathematik widmete, gehörte seine Liebe der Funktionentheorie. Während er sich seinem zweiten Hauptarbeitsgebiet, der Theorie der konvexen Körper, auf das ihn ebenfalls Erhard Schmidt geführt hatte, eine Zeitlang, zwischen 1939 und 1960 intensiv zuwandte, hat er an funktionentheoretischen Problemen ununterbrochen gearbeitet.

Ein schönes und originelles Zeugnis besteht in seinem Funktionentheorie-Lehrbuch A1. Diese systematische Darstellung wesentlicher Entwicklungen der neueren Funktionentheorie, eher für Fortgeschrittene als für Anfänger verfaßt, enthält eine beeindruckende Fülle von knapp gefaßten, mit sehr ausführlichen bibliographischen Angaben versehenen Einzelheiten in den Ergänzungen und Aufgaben zu jedem Kapitel. Zusammen mit den in jedem Kapitel angefügten aufschlußreichen „geschichtlichen Zusammenhängen“ sind sie eine Fundgrube für den jungen Forscher, dem die historischen Zusammenhänge in kaum einem anderen Lehrbuch zur Funktionentheorie so deutlich gemacht werden. Vor allem bei den Ausführungen über die Nevanlinnasche Wertverteilungstheorie im letzten Kapitel kommen die eigenen Ergebnisse und methodischen Ideen zur Geltung, ohne daß darauf immer besonders verwiesen wird. Zum Beispiel gilt dies für die lokale Charakteristik $T(r|r_0, w)$. Dieser von R. Nevanlinna[6]) eingeführte Begriff, der auch in dem Lehrbuch von Bieberbach über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen[7]) auf S. 89 benutzt wird, ist erstmals in B73 konsequent zum Studium des Verhaltens einer analytischen Funktion in der Umgebung einer isolierten Singularität herangezogen worden.

Dinghas war einer der wenigen deutschen Mathematiker der Nachkriegszeit – und neben ihm ist eigentlich nur noch H. Wittich zu nennen –, die die von R. Nevanlinna als Abschluß der Theorie der meromorphen Funktionen begründete Wertverteilungstheorie vertieft, angewandt und verbreitet haben.

Ein sehr bedeutender Beitrag zu dieser Theorie besteht in der Herleitung der integrierten, Nevanlinnaschen Form des zweiten Hauptsatzes aus der unintegrierten, Ahlforsschen Form in B15 für den parabolischen Fall. Dadurch wurde eine von R. Nevanlinna[8]) gestellte Frage beantwortet. Allerdings erhält man auf diese Art ein schlechteres Restglied, nämlich $O(\sqrt{T(r, w)} \log T(r, w))$ anstelle von

O(log (r T(r, w))). Den entsprechenden Beweis für den hyperbolischen Fall hat Dufresnoy [9]) gegeben. Hierzu vergleiche man auch das Lehrbuch von Sario und Noshiro [10]) und deren Note im Weierstraß Gedächtnisband (siehe B99 und B100). Die in diesem Band erschienene Arbeit B99 enthält durch die Einführung einer abgewandelten Metrik auf der Kugel $\hat{\mathbf{C}}$ ($|\overset{+}{a}| := \operatorname{Max}\{1, |a|\}$)

$$\|a, b\| := \frac{1}{2}\frac{|a-b|}{|\overset{+}{a}|\,|\overset{+}{b}|}, \quad \|a, \infty\| := \frac{1}{2|\overset{+}{a}|}, \quad \|\infty, \infty\| := 0 \qquad (a, b \in \mathbf{C})$$

eine Variation der potentialtheoretischen Beweismethode von Ahlfors. In B62 wird nachgewiesen, daß diese Ahlforssche Methode zum Beweis des unintegrierten zweiten Hauptsatzes – wiederum mit schlechterem Restglied – benutzt werden kann, wobei die Theorie der Überlagerungsflächen nicht angewandt wird. Dafür wird aber auch nur der Punktsatz und nicht der allgemeinere Flächensatz erhalten.

Schließlich wird in B84 und B88 eine ganze Klasse von Nevanlinnaschen Hauptsätzen gegeben, in denen die dort auftretenden Funktionen (Anzahlfunktion, Schmiegungsfunktion, Charakteristik) von gewissen glatten reellen Parameterfunktionen abhängen. Analoge Verallgemeinerungen sind später auch von N. Toda [11]) mit speziellen Parameterfunktionen durchgeführt worden. Der Spezialfall

$$T_\alpha(r, w) := \begin{cases} \alpha^{-1}\, T^\alpha(r, w), & 0 < \alpha \leqslant 1 \\ \log T(r, w), & \alpha = 0 \end{cases},$$

$$N_\alpha(r, w) := \int_{r_0}^{r} \frac{n(t, a)}{T^{1-\alpha}(t, w)} \frac{dt}{t} \quad (0 < r_0),$$

$$\delta_\alpha(a) := 1 - \limsup_{r \to R} \frac{N_\alpha(r, a)}{T_\alpha(r, w)}$$

führt zum α-Defekt, einer echten Verallgemeinerung des Nevanlinnaschen Defektbegriffes ($\alpha = 1$). Obwohl nämlich stets

$$\Sigma\, \delta_\alpha(a) \leqslant 2 \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1),$$

gibt es Beispiele von Funktionen, wie H.-W. Rohde [12]) zeigen konnte, für die die allgemein gültige Beziehung[13])

$$\delta(a) \leqslant \delta_\alpha(a)$$

im Fall $\alpha = 0$ und festes a eine echte Ungleichung ist.

In seinen letzten Lebensjahren hat sich Dinghas wieder intensiv der Wertverteilungstheorie zugewandt. Vor Beginn seiner zweiten Gastprofessur in Amerika hatte er ein Manuskript über die Nevanlinnasche Wertverteilungstheorie niedergeschrieben. Bei der Umarbeitung dieses bereits in Maschinenschrift vorliegenden Manuskriptes entstanden die Arbeiten B 115, 117–119, 122. Einerseits war ihm sehr daran gelegen, die Beweise des zweiten Hauptsatzes für den parabolischen und den hyperbolischen Fall in einem einzigen Gedankengang zusammenzufassen (B 88, 115, 118), andererseits lag es ihm sehr am Herzen, der seines Erachtens adäquaten von Ideen von Picard ausgehenden durch F. Nevanlinna gegebenen differentialgeometrischen Herleitung dieses Satzes die ihrer Bedeutung entsprechende Beachtung zu verschaffen (B 118) und sie mit den beiden anderen Beweisen von

R. Nevanlinna und Ahlfors auf einer einheitlichen Grundlage darzustellen (B 117–119, 122). In B 118 gibt Dinghas auch einen eigenen Weg zum Beweis des zweiten Hauptsatzes, der neben der Verwendung einer der Differentialgleichungen

$$\Delta v = [\zeta^{-2}(e^{2\zeta} - 1) + 2(1 - \zeta^{-1})](1 + |z|^2)^{-2}$$

und $$\Delta v = [(1 + \zeta)^2(e^{2\zeta} - 1) + 2\zeta(1 + \zeta)^{-1}](1 + |z|^2)^{-2},$$

wobei ζ den Kehrwert $[z, a]^{-1}$ der sphärischen Entfernung $[z, a]$ von z zum festen Punkt a bezeichnet, auf einer Abschätzung der Form

$$2[y(r) + \log r + \log(1 - rR^{-1}) \leqslant \log \omega(r) + \gamma \log\log \omega(r) + O(1),$$

$$\omega(r) := 1 + \int_{r_0}^{r} \exp[2y(t)]\, t \log \frac{r}{t}\, dt, \qquad 2 < \gamma,$$

außerhalb einer Menge E von Intervallen von $[r_0, R[$ $(R \leqslant +\infty)$ mit

$$\int_E d \log \frac{r}{1 - rR^{-1}} < +\infty$$

beruht.

Als der Tod ihm die Feder aus der Hand nahm, waren die ersten vier Kapitel der Umarbeitung niedergeschrieben, die die gesamte klassische Wertverteilungslehre enthalten. Zum letzten, in der Erstfassung nicht vorgesehenen Kapitel „Wertverteilungsprobleme meromorpher Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten und auf Riemannschen Flächen" waren nur die Vorbereitungen zur Nevanlinna-af Hällströmschen Theorie entworfen. Weder die grundlegende Arbeit von Chern[28]) noch die Entwicklungen von Sario-Noshiro[29]) konnten wie beabsichtigt eingearbeitet werden. Sein Wunsch, daß dieses Buch nach seinem Tode von Rolf Nevanlinna und Cabiria Andreian Cazacu herausgegeben werden soll, wird in naher Zukunft in Erfüllung gehen (siehe unter D5).

Die mit der Nevanlinna-Theorie zusammenhängenden Arbeiten sind mit den Nummern 1, 4, 6, 11, 14 bis 19, 47, 62, 73, 84, 88, 99, 115, 117 bis 119, 122 unter B aufgeführt.

Dinghas hat sich auch in der Funktionentheorie mit sehr unterschiedlichen Fragestellungen einmalig oder auch wiederholt beschäftigt. Im Zusammenhang mit der Bieberbachschen Vermutung hat er für die n-te Ableitung einer im Einheitskreis schlichten Funktion die Abschätzungen (vgl. B78)

$$\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!} \leqslant |w'(z)| \frac{n + |z|}{(1 + |z|)(1 - |z|)^{n-1}}$$

und (vgl. B82)

$$\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!} \leqslant \frac{n + |z|}{(1 - |z|)^{n+2}} \exp\left\{2 \frac{1 + |z|^2}{(1 + |z|)^2} \log \frac{(1 - |z|)^2 |w(z)|}{|z|}\right\}$$

gegeben. In B4 wird für den Halbkreis $H_R := \{z : 0 \leqslant \operatorname{Re} z, |z| \leqslant R\}$ die Poissonsche Formel $(\gamma_R := \partial H_R)$

$$w(z) = i \operatorname{Im} w(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \operatorname{Re} w(\zeta) \left\{\frac{\zeta + z}{\zeta - z} - \frac{R^2 - z\zeta}{R^2 + z\zeta}\right\} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

hergeleitet, wobei das Integral als Cauchysches Hauptwertintegral zu verstehen ist. Mit ihrer Hilfe wird in B 12 im Zusammenhang mit dem Juliaschen Satz und seinen Verallgemeinerungen durch Carathéodory, Landau und andere gezeigt, daß für in der rechten Halbebene H holomorphe Funktionen w mit nichtnegativem Realteil

$$\mu(r) := \frac{2}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{Re} w(re^{i\vartheta}) \cos\vartheta \, d\vartheta$$

eine nicht wachsende Funktion von r ist und mit unbeschränkt wachsendem r einem endlichen Grenzwert zustrebt. Ersetzt man unter Fortlassung der Voraussetzungen an Re w hier Re w durch $\overset{+}{\log}|w|$, so ist μ eine nicht fallende und in r^{-2} konvexe Funktion, die einem positiven Grenzwert zustrebt. Dieses Resultat gilt noch, wenn $\overset{+}{\log}|w|$ durch eine nichtnegative subharmonische Funktion ersetzt wird. Eine Verallgemeinerung für harmonische n-dimensionale Funktionen ist in B29 gegeben.

Die Beweismethode in B12 beruht auf einer Vereinfachung des von Ahlfors[14]) gegebenen Verfahrens und ist von M. Tsuji[15]) verallgemeinert worden. Später (etwa B 70, 94, 97) hat Dinghas Verallgemeinerungen solcher Konvexitätsaussagen für harmonische und subharmonische Funktionen und allgemeiner für Lösungen beziehungsweise Sublösungen (subelliptische Funktionen) von elliptischen Differentialgleichungen gegeben. In B70 wird ein Dreikugelsatz bewiesen, der in B94 noch verallgemeinert wird, und in B97 wird neben anderem das Schwarzsche Lemma für in der Kugel $\|x\| < R$ des $\mathbf{R}^n (2 \leqslant n)$ subharmonische Funktionen u mit $u(0) = -\infty$ und

$$\limsup_{\|x\| \to R} u(x) = M < +\infty$$

in der Form ($n > 2$, $C := \lim\limits_{r \to 0} r^{n-2} \sup\{u(x) : \|x\| = r\} \leqslant 0$)

$$u(x) \leqslant M - C\,[R^{2-n} - \|x\|^{2-n}] \quad (\|x\| < R)$$

angegeben.

Durch Modifikation der Differentialungleichungsmethode von Carleman[16]) wird in B13 für in H nicht beschränkte analytische Funktionen, die in der Nähe der imaginären Achse beschränkt sind, bewiesen, daß mit

$$\omega_\alpha(r) := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\overset{+}{\log}|w(re^{i\alpha})|]^\alpha \, d\vartheta$$

ω_1^2 und ω_2 konvexe Funktionen in r^2 sind und $r^{-2}\omega_1^2(r)$ und $r^{-2}\omega_2(r)$ monoton wachsen. Auch diese Resultate lassen sich für in H subharmonische Funktionen aussprechen. Diesen hat sich Dinghas wiederholt (B 10, 29, 58, 59, 63, 65, 70, 80, 85–87, 90, 95, 96, 104, 105, 108, 120) auch im n-dimensionalen Raum zugewendet und Resultate erzielt, die noch heute zum Teil Jahrzehnte nach ihrer Entwicklung auf Interesse stoßen[17]). Dabei hat er die erwähnte Carlemansche Abschätzungsmethode in B 58, 59, 63, 65, 70, 80, 86 wesentlich vertieft, ausgedehnt und angewandt.

An Hand einer im Spezialfall von Ahlfors verwendeten Integrodifferentialungleichung des Typs

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\left\{h^{-1}\left[\int_{x_0}^{t} q(\tau)f(y(\tau))d\tau\right]\right\} t \log \frac{x}{t} dt \leqslant c\, p(x)y(x)$$

gelingt in B 119 neben Aussagen über die Nichtlösbarkeit bestimmter gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen die Herleitung sowohl der Sätze von Phragmén-Lindelöf und Denjoy-Carleman-Ahlfors als auch der Nevanlinnaschen Hauptsätze und der Abschätzung der sphärischen Länge des Bildes von $|z| = r$ unter w durch die charakteristische Funktion $T(r, w)$, und zwar im hyperbolischen und im parabolischen Fall. Ähnlich werden in B 105 aus Wachstumsaussagen über Quotienten von mit einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zusammenhängenden Funktionen durch Spezialisierung weitgehende Verallgemeinerungen klassischer Sätze der Funktionentheorie, wie die von Phragmén-Lindelöf, Hadamard, Blaschke und Julia-Wolff-Carathéodory, gewonnen. Diese Arbeit gibt einen Überblick über seine früheren Ergebnisse zu diesem Problemkreis.

In einer Reihe von Noten (B 100, 103, 106, 107, 113, 120) hat sich Dinghas mit n-dimensionalen Verallgemeinerungen des Schwarz-Pickschen Verzerrungssatzes beschäftigt. Dabei wird die klassische Ahlforssche Schlußweise[18]) abgewandelt, die die Existenz einer reellen Lösung einer partiellen Differentialgleichung der Form

$$\det u_{z\bar{z}} := \det(u_{z_i \bar{z}_k}) = \exp(n+1)u$$

erfordert. So wird in B100 ein Analogon des erwähnten Verzerrungssatzes für holomorphe Abbildungen w der mit der Poincaré-Kähler-Metrik versehenen komplexen Einheitskugel des $\mathbf{C}^n$ in eine n-dimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit mit der Kähler-Metrik

$$ds^2 = 2\, g_{\alpha\bar{\beta}}(w, \bar{w})\, dw^\alpha dw^{\bar{\beta}} \qquad (w^{\bar{\beta}} = \overline{w^\beta})$$

in der Form

$$|\det(g_{\alpha\bar{\beta}})|\, |\det \frac{d(w_1, \ldots, w_n)}{d(z_1, \ldots, z_n)}|^2 \leqslant (1 - \|z\|^2)^{-n-1}$$

hergeleitet.

Dieses Ergebnis ist zusammen mit seiner Beweismethode angeregt durch einen von Dinghas im März 1966 an der Pennsylvania State University gehaltenen Vortrag später von Hahn und Mitchell[19]) unter Heranziehung der Theorie der Bergmanschen Kernfunktionen auf Abbildungen von beschränkten homogenen Gebieten des $\mathbf{C}^n$ in Kählersche Mannigfaltigkeiten und in B 106 von ihm selbst unter gewissen Voraussetzungen über die Riccischen Krümmungstensoren auf Abbildungen zwischen Kählerschen Mannigfaltigkeiten ausgedehnt worden. Für die inneren Abbildungen der klassischen Fundamentalbereiche des $\mathbf{C}^n$ durch holomorphe Funktionen wird der Verzerrungssatz in B 107, 113 und 120 entwickelt. S. Kobayashi[20]) hat die Voraussetzungen für den Schwarz-Pickschen Satz weitgehend abgeschwächt, indem er Abbildungen von beschränkten symmetrischen Gebieten mit einer invarianten Kählerschen Metrik in eine Hermitesche, nicht notwendigerweise Kählersche Mannigfaltigkeit untersucht.

In seinem zweiten Arbeitsgebiet, dem isoperimetrischen Problem und seinen Verallgemeinerungen, insbesonders dem Satz von Brunn-Minkowski, verfaßte Dinghas über dreißig (B 20–28, 30–38, 40–41, 43–44, 46, 48–55, 67–68, 71–72, 74–76, 96) zum Teil sehr umfangreiche Untersuchungen, die durch seine in dem Memorial (in deutscher Sprache) publizierten Monographie A2 einen Abschluß fanden und dort im wesentlichen zusammengefaßt dargestellt sind.

Der eigentliche Anstoß, sich mit dem Brunn-Minkowskischen Ideenkreis zu beschäftigen, kam von dem Blaschke-Schüler Knothe, der 1936 als Assistent zu Bieberbach gekommen war und nach Dinghas[21]) auch Erhard Schmidt indirekt veranlaßt hatte, sein Interesse vom klassischen isoperimetrischen Problem zu dem Brunn-Minkowskischen Satz zu verlagern. Knothe trug Dinghas damals an Sonntagen bei Aschinger am Zoo aus Blaschkes Buch „Kreis und Kugel“[22]) vor.

In B25 wird die Methode von Brunn und Minkowski erweitert auf beliebige Mengen A und konvexe B und die Klasse der würfelförmigen Körper eingeführt. Der Versuch, die Voraussetzung der Konvexität der Menge B ebenfalls fallen zu lassen, wird auch nicht in der gemeinsam mit E. Schmidt verfaßten Note B38 unternommen. Erst Lusternik[23]) gelingt diese Verallgemeinerung. Weitere Vertiefungen werden in B 71, 74 und 75 erzielt. Dabei werden in B75 auf geschickte Weise die analytischen Methoden aus B38 mit den Ergebnissen von Henstock und Macbeath[24]) verbunden und die Diskussion des Eintretens der Gleichheit in der isoperimetrischen Ungleichung, die Dinghas in entscheidendem Maße mitgeführt hat, zu einem sehr hohen Grad an Allgemeinheit geführt.

In B51 wird ein einfacher Beweis rein geometrischer Natur für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel analog wie im Fall konvexer Körper des gewöhnlichen Raumes gegeben. Auf Grund der Beziehungen

$$|\tilde{A}\tilde{B}| = |A\,B| = |(\widetilde{A-B})(\widetilde{B-A})|, \qquad |(\tilde{A})_h| \leqslant |A_h|,$$

wobei $\tilde{A}$ die durch Steinersche Symmetrisierung gewonnene Bildmenge und A_h die Außenmenge von A im Abstand h bezeichnet, ergibt sich die isoperimetrische Ungleichung in der Form

$$O(S) \leqslant O(K)$$

für die untere Minkowskische Oberfläche

$$O(K) := \liminf_{h\to 0} h^{-1}(|K_h| - |K|)$$

der meßbaren Menge K und der mit K volumengleichen Kugel S, $|S| = |K|$. Das Gleichheitszeichen tritt dabei nur für solche K ein, die sich von S um Mengen mit verschwindendem Minkowskischem Flächenmaß unterscheiden. Weitere Untersuchungen des isoperimetrischen Problems in höherdimensionalen und in nichteuklidischen Räumen entstanden in B 34, 48 und 54.

Methodisch gesehen hat sich zwischen den Arbeiten B25 und B38 und der Note B51 ein bemerkenswerter Wandel vollzogen. In den ersten Arbeiten werden die Probleme mit Hilfe von Funktionen beschrieben, die analytisch untersucht werden, während in B51 nur mengengeometrische Untersuchungen angestellt werden, die im allgemeinen einfacherer Natur und allgemeineren Mengen zugänglich sind. Diese direkte Methode liefert folglich auch tiefere Resultate.

In B67 und 68 wird der Brunn-Minkowkische Satz auf kontinuierliche Kombinationen von Mengen einer einparametrigen stetigen gleichmäßig beschränkten

Familie von Mengen ausgedehnt. Mit Hilfe des Minkowskischen Integralbegriffs in B72 weiter ausgebaut läßt sich der Satz nun in der Form

$$\int |A_\lambda|^{1/n} d\lambda \leqslant |\int A_\lambda d\lambda|^{1/n}$$

schreiben[25]).

In mehreren Arbeiten – B31, 33, 36, 37, 49, 50 – sind die isoperimetrische und Minkowskische Ungleichung auf Eikörper mit Ecken und Kanten übertragen. Entsprechendes ist in B46 für die auf Minkowski zurückgehenden Ungleichungen für Mischvolumina durchgeführt. In B23 und 52 ist eine allgemeine Theorie linearer Ungleichungen für konvexe Rotationskörper im n-dimensionalen Raum entwickelt, die neben einer Reihe von bis dahin bekannten, eine Vielzahl von neuen Ungleichungen einschließt, wie zum Beispiel für die Quermaßintegrale W_k mit $0 \leqslant m \leqslant n - p$

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} W_{m+k}\, a^k \leqslant 0 \qquad (p \in 2\,\mathbf{N}),$$

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \binom{p}{k} W_{m+k}\, a^k \leqslant a^{n-m} \frac{\omega_{n-1}}{n} \int_0^\pi \frac{(1-\sin t)^{p-1}}{1+\sin t} \sin^m t\, dt \qquad (p+1 \in 2\,\mathbf{N}).$$

Die Ungleichungen

$$1 \leqslant W_h^{k-m} W_k^{m-h} W_m^{h-k} \quad (0 \leqslant h < k < m \leqslant n)$$

sind in B 20–22 mehrfach verschärft.

Daß die Ergebnisse von Dinghas die Forschung zu dem hier angesprochenen Themenkreis beeinflußt und ihr neue und konstruktive Impulse verliehen haben, wird jedem klar, der die schönen 1957 bei Springer erschienenen „Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie" von Hadwiger zur Hand nimmt.

Nach dem Erscheinen seiner beiden Monographien A1 und A2 hat Dinghas in den sechziger Jahren weitere Lehrbücher auf den Gebieten Analysis, Vektor- und Tensorrechnung und Funktionentheorie[26]) zu schreiben begonnen. Lediglich die „Einführung in die Cauchy-Weierstraßsche Funktionentheorie" (A3) erschien. In ihm werden die verschiedenen Definitionen der Analytizität, nämlich nach Weierstraß, Goursat, Cauchy-Riemann und Morera, in einem Äquivalenzbeweis zusammengestellt und die Beweise des Satzes von Bolzano-Weierstraß und des Überdeckungssatzes von Heine-Borel-Lebesgue auf einen Hilfssatz über hereditäre Eigenschaften von Mengen zurückgeführt. Beides, methodisch bemerkenswert, ist wie auch die Aufnahme der Darstellung von Häufungsmengen meromorpher Funktionen und der Hebbarkeitsaussagen für kompakte Singularitätenmengen bei einer Einführung in die Funktionentheorie nicht üblich.

Daß die übrigen zum Teil fertigen Buchmanuskripte sowie zahlreiche Manuskripte für mathematische Arbeiten nicht publiziert wurden, obwohl wie zu D4 eine Absprache mit einem Verlag (hier dem Bibliographischen Institut) bestand, mag an seiner besonders ausgeprägten Vorsicht bei der Hergabe von Manuskripten zur Veröffentlichung gelegen haben. Er hat seine Manuskripte mehrmals umgeschrieben[27]) und liebte die modernen photomechanischen Druckverfahren aus dem Grund nicht, als sie ihm die Möglichkeit zu Änderungen bei Korrekturen nahmen, die er oft im größeren Umfang vornahm und deren Kosten er auch bereitwillig trug. Diese besondere Vorsicht zeigte sich auch bei der Durchführung von Korrekturen. In vielen Arbeiten dankt er am Schluß einem Kollegen oder Assistenten für Mithilfe bei den Korrekturarbeiten.

Von drei vorliegenden Fahnen oder Bögen bekam der Assistent ein Exemplar, das er innerhalb kurzer Zeit durchzuarbeiten hatte. Häufig an Wochenenden wurden die Bemerkungen und Druckfehler durchgesprochen und in die zweite Fahne eingetragen. Die Übertragung in das Exemplar für die Druckerei nahm er danach alleine vor, wobei er einerseits große Sorgfalt darauf verwandte, schwierige Typen irgendwo herauszuschneiden und mit Korrekturmarken versehen auf den Rand der Fahne zu kleben, andererseits aber auch vieles nicht übertrug. Für nicht ausgeführte Korrekturen entschuldigte er sich später mit der Nebenbemerkung, daß es allein auf die Idee einer Arbeit ankomme und die gewiß deutlich geworden sei.

„Wenn ich recht sehe", äußert Bieberbach [5]), „hat vielleicht Dinghas keine neuen grundlegenden Fragestellungen oder Methoden entwickelt. Das entsprach nicht seiner Art zu arbeiten. Er war ein gründlicher, sorgfältiger, zuverlässiger Arbeiter, ein gelehrter und gescheiter Mann. Ein Thema, das ihn interessierte, ging er an, durchdrang, durchleuchtete, beleuchtete es von allen Seiten, bis unter seinen Streiflichtern manche Facette aufleuchtete, die ohne ihn verborgen geblieben war. Dabei ergaben sich dann auch Erweiterungen, Vertiefungen, neue Erkenntnisse. Diese sokratische Arbeitsweise feiert einen Triumph auch in seinem Lehrbuch der Funktionentheorie, . . .".

Frau Gerda Schimpf gilt mein Dank dafür, daß sie mir die Einsichtnahme in Dokumente und Manuskripte gestattet und das gegen Ende der fünfziger Jahre aufgenommene Photo von A. Dinghas für diesen Nachruf zur Verfügung gestellt hat. Lediglich das im Besitz der FU befindliche Manuskript über Einstein (D10) ist mir trotz verschiedener Versuche nicht zugänglich gemacht worden. Frau Schimpf sowie manchem ehemaligen Kollegen, Schüler und Mitarbeiter von Professor Dinghas danke ich für viele klärende Gespräche und Hinweise. Herrn Professor P. L. Butzer und Herrn Professor I. S. Louhivaara danke ich besonders für ihre hilfreichen kritischen Bemerkungen.

Der wissenschaftliche Nachlaß von A. Dinghas, dabei bis auf D5 auch die unter D aufgeführten Manuskripte, befinden sich im Archiv der Freien Universität.

Fußnoten

[1]) Über die Anwendung einer Klasse uniformisierender Transzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen.

[2]) Vgl. R. Nevanlinna, Alexander Dinghas in memoriam. Ansprachen und Vorträge des Gedenkkolloquiums für Prof. Dr. phil. habil. Alexander Dinghas am 20. Juni 1975 an der Freien Universität Berlin. Herausgegeben von H. Begehr. FU Berlin, Fachbereich Mathematik, I. Math. Institut, Berlin 1977, 36–39.

[3]) Vgl. Freie Universität Berlin. 1948–1973. Hochschule im Umbruch. Bisher erschienen 4 Teile und Bibliographie. Dokumentation FU Berlin, Nr. 12/73 (1973) – 15/73 (1975) und 19/73 (1974).

[4]) Rowohlt Verlag 1972.

[5]) Alexander Dinghas zum Gedächtnis. Ansprachen und Vorträge des Gedenkkolloquiums für A. Dinghas am 20. Juni 1975. FU Berlin 1977, 40–44.

[6]) Untersuchungen über den Picardschen Satz. Acta Soc. Sci. Fenn. **50**, 6 (1924).

[7]) 1. Aufl. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer Verlag 1953.

[8]) Eindeutige analytische Funktionen. 1. Aufl. Berlin: Verlag von Julius Springer 1936, S. 341.

[9]) Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroide. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **58** (1941) 179–259.

[10]) Value distribution theory. Princeton, N.J.: D. van Nostrand Co. 1966, S. 160ff.

[11]) Tôhoku Math. J. **22** (1970) 635–658.

[12]) Math. Ann. **200** (1973) 141–150.

[13]) Vgl. H. Begehr, Math. Z. **116** (1970) 349–354.

[14]) On Phragmén – Lindelöf's principle. Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937) 1–8.

[15]) On a nonnegative subharmonic function in a half plane. Kōdai Math. Sem. Report **8** (1956) 134–141.

[16]) Sur une inegalité differentielle dans la théorie des fontions analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris **196** (1933) 995–997. Man vgl. B7.

[17]) Vgl. W. K. Hayman, Beiträge von Alexander Dinghas zur Theorie der subharmonischen Funktionen. Ansprachen und Vorträge des Gedenkkolloquiums für Prof. Dr. phil. habil. Alexander Dinghas am 20. Juni 1975. FU Berlin 1977, 9–21.

[18]) Ahlfors, L. V.: An extension of Schwarz's lemma. Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938) 359–364.

[19]) Generalization of Schwarz-Pick lemma to invariant volume in a Kähler manifold. Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967) 668–670 und Trans. Amer. Math. Soc. **128** (1967) 221–231.

[20]) Distance, holomorphic mappings and the Schwarz lemma. J. Math. Soc. Japan **19** (1967) 481–485; vgl. auch denselben Band S. 460–480.

[21]) Vgl. C4, S. 13

[22]) Leipzig: Verlag von Veit Co. 1916.

[23]) Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige meßbare Mengen. C. R. Acad. Sci. URSS N.S. **3** (1935) 55–58.

[24]) On the measure of sum-set I: The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik. Proc. London Math. Soc. (III) **3** (1953) 182–194.

[25]) Vgl. auch A2, 4. Kapitel.

[26]) Vgl. die unter D gegebene Auswahl unveröffentlichter Manuskripte.

[27]) Vgl. H. Begehr, Eröffnungsansprache zum Gedenkkolloquium für A. Dinghas am 20. Juni 1975. FU Berlin 1977, 1–6.

[28]) Complex analytic mappings of Riemann surfaces. I. Amer. J. Math. **82** (1960) 323–337.

[29]) Value distribution theory. Princeton, N.J.: D. van Nostrand Co. 1966.

Verzeichnis der Doktoranden

1. S p r a g u e , Roland:	Über die eindeutige Bestimmbarkeit der Elemente einer endlichen Menge durch zweifache Einteilung (1950), 23 S.
2. M e s c h k o w s k i , Herbert:	Über die konforme Abbildung gewisser Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang auf Vollkreisbereiche (1950), 27 S.
3. H a b e t h a , Klaus:	Über Mittelwerte von Lösungen linearer partieller Differentialungleichungen 2. Ordnung (1959), 84 S.
4. R e i c h e r t , Marianne:	Über die Fixpunkte einer Klasse singulärer Volterrascher Abbildungen (1962), 40 S.
5. R o h d e , Hanns-Walter:	Abschätzung harmonischer Funktionen im R^n (1962), 53 S.
6. T i p p e , Jürgen:	Zur isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemannschen Räumen konstanter positiver Krümmung (1963), 59 S.
7. S t o b e r , Ingrid:	Die Integration der Boltzmann-Gleichung zylindrischer Entladungen unter Berücksichtigung des Eigenmagnetfeldes und eines angelegten longitudinalen Magnetfeldes (1964), 137 S.
8. K r ü g e r , Erika:	Über einige isoperimetrische Probleme in Kreisringen (1964), 43 S.
9. W i n k l e r , Jörg:	Über eine Klasse Borel-monogener Funktionen und deren Anwendung auf die Werteverteilungstheorie (1964), 34 S.
10. K l e m m , Uwe:	Zur Theorie der Impulsgraphen (1964), 38 S.
11. F r i e d r i c h , Fritz-Joachim:	Mathematische Theorie der Transporterscheinungen in zylindrischen Plasmen (1966), 130 S.
12. W i t t s t o c k , Gerd:	Über Majoranten indefiniter Bilinearformen (1965), 57 S.
13. B e g e h r , Heinrich:	Beitrag zum Satz von Picard-Borel-Nevanlinna auf Riemannschen Flächen (1968), 55 S.
14. F r i e d e l , Gerhard:	Zur Theorie der Intervallableitung reeller Funktionen (1968), 60 S.
15. S p i e g e l , Wolfgang:	Verallgemeinerung einer isoperimetrischen Aufgabe von Erhard Schmidt auf Riemannsche Räume konstanter Krümmung (1970), 40 S.
16. W r a s e , Dieter:	Simultane Approximation durch Polynome und holomorphe Funktionen (1970), 38 S.
17. V o l k m a n n , Peter:	Die Äquivalenz zweier Ableitungsbegriffe (1971), 30 S.
18. V o l k m a n n , Lutz:	Beiträge zur Theorie der ganzen Funktionen, deren Ordnung kleiner als Eins ist (1973), 20 S.

Publikationen

A Bücher

1. Vorlesungen über Funktionentheorie. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer Verlag 1961.= Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. 110, XV + 403 S.

2. Minkowskische Summen und Integrale. Superadditive Mengenfunktionale. Paris: Gauthier-Villars 1961. = Isoperimetrische Ungleichungen, Mémorial des Sciences Mathématiques 149, 101 S.
3. Einführung in die Cauchy-Weierstraß'sche Funktionentheorie. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1968. = B. I.-Hochschultaschenbuch Bd. 48*, X + 114 S.

B Arbeiten

1. Einige Sätze und Formeln aus der Theorie der meromorphen und ganzen Funktionen. Math. Ann. **110** (1934/35) 284–311
2. Über einen Satz von Phragmén und Lindelöf. Math. Z. **39** (1935) 455–461
3. Über einen Satz von Milloux. Math. Z. **39** (1935) 590–596
4. Zur Theorie der meromorphen Funktionen in einem Winkelraum. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1935, 576–596
5. Rémarques sur deux théorèmes de la théorie des fonctions. C. R. Acad. Sci. Paris **200** (1935) 40–42
6. Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen. Diss.-Schr. Math. Sem. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin **3** (1936) 67–92
7. Bemerkung zu einer Differentialungleichung von Carleman. Math. Z. **41** (1936) 713–716
8. Sur un théorème de Carleman et sur un théorème des Carlson-Nevanlinna. Bull. Soc. Math. France **64** (1936) 78–86
9. Sur une généralisation du théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors. Bull. Soc. Math. France **64** (1936) 216–219
10. Über das Minimum einer Klasse von subharmonischen Funktionen. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1937, 193–205
11. Bemerkungen zur Ahlforsschen Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen I. Compositio Math. **5** (1938) 107–118
12. Über das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip und den Julia-Carathéodoryschen Satz. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1938, 32–48
13. Über das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip und einige andere verwandte Sätze. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1938, 123–140
14. Über eine Eigenschaft der Charakteristik von meromorphen Funktionen in einer Halbebene. Math. Z. **44** (1939) 354–361
15. Eine Bemerkung zur Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen. Math. Z. **44** (1939) 568–572
16. Eine Verallgemeinerung des Picard-Borelschen Satzes. Math. Z. **44** (1939) 573–579
17. Über Ausnahmegebiete meromorpher Funktionen. Math. Z. **45** (1939) 20–24
18. Zur Invarianz der Shimizu-Ahlforsschen Charakteristik. Math. Z. **45** (1939) 25–28
19. Zur Werteverteilung einer Klasse transzendenter Funktionen. Math. Z. **45** (1939) 507–510
20. Zur Theorie der konvexen Körper im n-dimensionalen Raum. Abh. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1939 Nr. 4, 30 S.
21. Elementarer Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Abh. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1939 Nr. 9, 20 S.
22. Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Abh. Preuß. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1939 Nr. 11, 13 S.
23. Konvexe Rotationskörper im n-dimensionalen Raum. Abh. Preuß. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1939 Nr. 17, 24 S.
24. Über eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung in der Ebene. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien Math.-Natur. Kl. IIa, **149** (1940) 117–132
25. Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel für den n-dimensionalen Raum. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-Natur. Kl. IIa, **149** (1940) 399–432
26. Zur isoperimetrischen Ungleichung für ebene konvexe Kurven. Rev. Math. Union Interbalkan. **3** (1940) 7 S.
27. Verallgemeinerung eines Blaschkeschen Satzes über konvexe Körper konstanter Breite. Rev. Math. Union Interbalkan. **3** (1940) 17–20
28. Geometrische Anwendungen der Kugelfunktionen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. Fachgruppe I (N.F.) **1** (1940) 213–235
29. Über positive harmonische Funktionen in einem Halbraum. Math. Z. **46** (1940) 559–570
30. Neuer Beweis eines Satzes von Wirtinger und Blaschke. Math. Z. **47** (1942) 265–274

31. Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Körper mit Ecken. Math. Z. **47** (1942) 669–675
32. Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung. Math. Z. **47** (1942) 677–737
33. Isoperimetrische Ungleichungen für konvexe Bereiche mit Ecken. Math. Z. **48** (1942/1943) 428–440
34. Zum isoperimetrischen Problem für die nichteuklidischen Geometrien. Math. Ann. **118** (1941/1943) 636–686
35. Über einen geometrischen Satz von Wulff für die Gleichgewichtsform von Kristallen. Z. Kristallogr. (A) **105** (1943) 304–314
36. Über die lineare isoperimetrische Ungleichung für konvexe Polygone und Kurven mit Ecken. Monatsh. Math. Phys. **51** (1943) 35–45
37. Verschärfung der Minkowskischen Ungleichungen für konvexe Körper. Monatsh. Math. Phys. **51** (1943) 46–56, 56a
38. Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum. Abh. Preuß. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1943, Nr. 7 (1944) 18 S. (zusammen mit Erhard Schmidt)
39. Über eine algebraische Identität zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven Zahlen. Math. Z. **49** (1943/1944) 563–564
40. Über eine isoperimetrische Aufgabe von Erhard Schmidt, I. Math. Z. **49** (1943/1944) 734–792
41. Über die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im gewöhnlichen Raum. Monatsh. Math. Phys. **51** (1944) 153–172
42. Verallgemeinerung eines Hilbertschen Satzes über das Verhalten einer mit den Legendreschen Polynomen zusammenhängenden quadratischen Form. Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin. Math.-Natur. Kl. 1948, Nr. 2, 12 S.
43. Bemerkung zu einer Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung durch H. Hadwiger. Math. Nachr. **1** (1948) 284–286
44. Zur Metrik nichteuklidischer Räume. Math. Nachr. **1** (1948) 287–291
45. Some identities between arithmetic means and the other elementary symmetric functions of n numbers. Math. Ann. **120** (1947/1949) 154–157
46. Über eine neue isoperimetrische Ungleichung für konvexe Polyeder. Math. Ann. **120** (1947/1949) 533–538
47. Zur Abschätzung der a-Stellen ganzer transzendenter Funktionen mit Hilfe der Shimizu-Ahlforsschen Charakteristik. Math. Ann. **120** (1947/1949) 581–584
48. Zur isoperimetrischen Ungleichung in Räumen konstanter Krümmung. Math. Z. **51** (1949) 265–277
49. Neuer Beweis einer verschärften Minkowskischen Ungleichung für konvexe Körper. Math. Z. **51** (1949) 306–316
50. Neuer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung von Bol. Math. Z. **51** (1949) 469–473
51. Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im euklidischen Raum von n Dimensionen. Math. Nachr. **2** (1949) 107–113
52. Zur Theorie der konvexen Rotationskörper im n-dimensionalen Raum. Math. Nachr. **2** (1949) 124–140
53. Über einen Satz von Felix Behrend. Math. Nachr. **2** (1949) 141–147
54. Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung. Math. Nachr. **2** (1949) 148–162
55. Isoperimetrische Ungleichungen für konvexe Polygone und Kurven mit Ecken in der Ebene und auf der Kugel. Math. Ann. **122** (1950/1951) 299–320
56. Zur Darstellung einiger Klassen hypergeometrischer Polynome durch Integrale vom Dirichlet-Mehlerschen Typus. Math. Z. **53** (1950/1951) 76–83
57. Über eine Integralgleichung für die Polynome der Potentialtheorie. Norske Vid. Selsk. Skr. (Trondheim) 1950, Nr. 2 (1951) 14 S.
58. Sur quelques théorèmes du type de Phragmén-Lindelöf dans la théorie des fonctions harmoniques de plusieurs variables. C. R. Acad. Sci. Paris **232** (1951) 1394–1395
59. Sur une inégalité concernant la croissance des fonctions harmoniques à plusieurs variables. C. R. Acad. Sci. Paris **233** (1951) 126–127
60. Über einige Identitäten vom Bernsteinschen Typus. Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) 1951 **24** (1952) 96–97

61. Sur un théorème de Schur concernant les racines d'une classe des équations algébriques. Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) 1952 **25** (1953) 17–20
62. Zu Nevanlinna's zweitem Fundamentalsatz in der Theorie der meromorphen Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fenn. AI **151** (1953) 8 S.
63. Sur quelque théorèmes concernant la convexité des moyennes d'une classe des fonctions sousharmoniques. C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953) 594–595
64. Sur quelques inégalités concernant une classe d'intégrales de Dirichlet. C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953) 639–641
65. Sur la croissance de certaines classes de fonctions sousharmoniques bornées sur des multiplicités données. C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953) 690–691
66. Zur Abschätzung arithmetischer Mittel reeller Zahlen durch Differenzenprodukte derselben. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **2** (1953) 177–202
67. Sur une généralisation du théorème de Lusternik concernant des familles continues des ensembles. C. R. Acad. Sci. Paris **239** (1954) 575–576
68. Démonstration du théorème de Brunn-Minkowski pour des familles continues d'ensembles. C. R. Acad. Sci. Paris **239** (1954) 605–607
69. A simple proof of a formula in the theory of functions. Math. Student **22** (1954) 101–102
70. Konvexitätseigenschaften von Mittelwerten harmonischer und verwandter Funktionen. Math. Z. **63** (1955) 109–132
71. Über zwei allgemeine Sätze von Brunn-Minkowski-Lusternikschem Typus. Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) 1955 **28** (1956) 182–185
72. Zum Minkowskischen Integralbegriff abgeschlossener Mengen. Math. Z. **66** (1956/1957) 173–188
73. Zum Verhalten eindeutiger analytischer Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität. Math. Z. **66** (1956/1957) 389–408
74. Über eine Klasse superadditiver Mengenfunktionale von Brunn-Minkowski-Lusternikschem Typus. Math. Z. **68** (1957/1958) 111–125
75. Zur Einzigkeitsfrage der Minkowski-Lusternikschen Ungleichung für die Relativoberfläche. Math. Z. **68** (1957/1958) 299–315
76. Über das Verhalten der Entfernung zweier Punktmengen bei gleichzeitiger Symmetrisierung derselben. Arch. Math. **8** (1957) 46–51
77. Konvexitätseigenschaften von linearen und multilinearen Formen. Arch. Math. **8** (1957) 135–143
78. Verzerrungsschranken bei schlichten Abbildungen des Einheitskreises. Arch. Math. **8** (1957) 413–416
79. Bemerkungen zum Phragmén-Lindelöfschen Prinzip. Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) 1957 **30** (1957) 59–64
80. Wachstumsprobleme harmonischer und verwandter Funktionen in E^n. Ann. Acad. Sci. Fenn. AI **250**/8 (1958) 14 S.
81. Zur Existenz von Fixpunkten bei Abbildungen vom Abel-Liouvilleschen Typus. Math. Z. **70** (1958/1959) 174–189
82. Über einige Monotoniesätze in der Theorie der schlichten Funktionen. Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I. Math. Natur. Kl. 1959, Nr. 1, 18 S.
83. Zur Theorie der Gammafunktion. Math.-Phys. Semesterber. **6** (1958/1959) 245–252
84. Über eine Verallgemeinerung des Nevanlinnaschen Defektbegriffes. Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **34** (1961) 116–123
85. Das Denjoy-Carlemansche Problem für harmonische Funktionen in E^n. Norske Vid. Selsk. Skr. (Trondheim) 1962, Nr. 7, 12 S.
86. Über eine Vertiefung des Phragmén-Lindelöfschen Prinzips. Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **35** (1962) 1–4
87. Über eine Fassung des Phragmen-Lindelöfschen Prinzips. Ann. Acad. Sci. Fenn. AI **319** (1962) 12 S.
88. Über den Picard-Borelschen Satz und die Nevanlinnaschen Ungleichungen. J. Math. Pures Appl. (9) **42** (1963) 223–251
89. Zur Abschätzung von Dirichlet-Normen bei Randwertaufgaben in Riemannschen Räumen. Norsk. Vid. Selsk. Skr. (Trondheim) 1963 Nr. 3, 11 S.
90. Über das Anwachsen einiger Klassen von subharmonischen und verwandten Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fenn. AI **336**/1 (1963) 27 S.
91. Zum Beweis der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n Zahlen. Math.-Phys. Semesterber. **9** (1963) 157–163

92. Zur Abschätzung der Differenz zwischen dem artithmetischen und dem geometrischen Mittel von positiven Zahlen. Norsk. Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **37** (1964), Nr. 6, 22–27
93. Über eine Fassung des Phragmén-Lindelöfschen Prinzips. Sitzungsber. Berlin. Math. Ges. 1961/1964 (1964) 27
94. Über einige Konvexitätsfragen bei partiellen Differentialgleichungen vom Sturmschen Typus. Math. Ann. **155** (1964) 397–421
95. Über den Einfluß von Unendlichkeitsstellen auf das Wachstum subharmonischer Funktionen im E^n. Monatsh. Math. **68** (1964) 289–306
96. Über Minimalabbildungen von Gebieten der komplexen Ebene in einen Hilbert-Raum. Jber. d. Dt. Math.-Verein **67** (1964) 43–48
97. Über einige Konvexitätssätze für die Mittelwerte von subharmonischen Funktionen. J. Math. Pures. Appl. (9) **44** (1965) 223–247
98. Rotationssymmetrische Lösungen der Differentialgleichung $|\Phi_{z_i\bar{z}_k}| = g(\Phi)$. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **68** (1966) 7–12
99. Der Weierstraßsche Satz und die Anfänge der Werteverteilungstheorie. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß 1815–1965. Wissenschaftliche Abhandlung der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen 33, Westdeutscher Verlag Köln-Opladen 1966, 169–181.
100. Ein n-dimensionales Analogon des Schwarz-Pickschen Flächensatzes für holomorphe Abbildungen der komplexen Einheitskugel in eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß 1815–1965. Wissenschaftliche Abhandlung der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen 33, Westdeutscher Verlag Köln-Opladen 1966, 477–494.
101. Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Ann. Acad. Sci. Fenn. AI **375** (1966) 19 S.
102. Über eine Integralidentität und ihre Anwendung auf Fragen der Analysis. Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **39** (1966) Nr. 7, 46–52
103. Über einen allgemeinen Verzerrungssatz für beschränkte Minimalflächen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **69** (1967) 152–160
104. On a class of partial differential equations involving plurisubharmonic functions. Proc. Colloquium on Convexity, Kopenhagen 1965 (1967) 58–60
105. Über einige allgemeine Konvexitätssätze in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Nagoya Math. J. **30** (1967) 181–201
106. Über das Schwarzsche Lemma und verwandte Sätze. Israel J. Math. **5** (1967) 157–169
107. Verzerrungssätze bei holomorphen Abbildungen von Hauptbereichen automorpher Gruppen mehrerer komplexer Veränderlichen in eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1968, Nr. 1, 1–21
108. Zur Charakterisierung harmonischer und subharmonischer Funktionen durch Mittelungsprozesse. Ann. Acad. Sci. Fenn. AI **412** (1968) 24 S.
109. Superadditive Funktionale, Identitäten und Ungleichungen der elementaren Analysis. Math. Ann. **178** (1968) 315–334
110. Eine Verallgemeinerung des Schwarzschen Operators. Arch. Math. **19** (1968) 646–653
111. Zur Peano-Abbildung einer Strecke. Israel J. Math. **7** (1969) 211–216
112. Zur Grundlegung der Cauchy-Weierstraßschen Funktionentheorie einer und mehrerer komplexer Veränderlichen. Math. Ann. **189** (1970) 191–201
113. On distortion theorems in classical domains of several complex variables. An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Sect. Ia Mat. (N.S.) **18** (1972) 29–38
114. On Hua's algebraic identities. An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Sect. Ia Mat. (N.S.) **18** (1972), 39–43
115. Bemerkungen zur Nevanlinnaschen Wertverteilungstheorie. Tensor (N.S.) **26** (1972) 5–22
116. Zur Definition der Gammafunktion durch die Eulersche Funktionalgleichung. An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Sect. Ia Mat. (N.S.) **19** (1973) 31–35
117. Zur begrifflichen Umgrenzung der Nevanlinnaschen charakteristischen Funktion I. An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Sect. Ia Mat. (N.S.) **19** (1973) 37–42
118. Über das gegenseitige Verhältnis der Methoden von F. Nevanlinna und Ahlfors in der Wertverteilungstheorie. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **18** (1973) 1555–1569
119. Über die Anwendung einer Klasse von Integrodifferentialungleichungen auf einige Fragen der Analysis und der Funktionentheorie. Ann. Acad. Sci. Fenn. AI **531** (1973) 37 S.
120. Zur Differentialgeometrie der klassischen Fundamentalbereiche. Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1974, Nr. 2, 21–41.

121. Zur Charakterisierung der Riemannschen Zetafunktion durch Hadamardsche Funktiongleichungen. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **19** (1974) 995–1007
122. Über eine allgemeine Defektrelation vom Nevanlinnaschen Typus. Norske Vid. Selsk. Skr. (Trondheim) **5** (1976) 1–5

C Historische und allgemeine Artikel

1. Zehn Jahre Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Freien Universität Berlin. Studiendank. Studentenwerk der Freien Universität Berlin. Mitteilungen Nr. 3, 1958 (10 Jahre Freie Universität Berlin), 86–89
2. Der Einfluß der Berliner Mathematischen Schule auf die Entwicklung der Funktionentheorie. Studium Berolinense. Gedenkschrift der Westdeutschen Rektorenkonferenz und der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin. Berlin: De Gruyter Verlag 1960, 763–773
3. Die Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät. The Faculty of Mathematics and Natural Sciences. Die Freie Universität Berlin. Herausgegeben im Auftrage des Senats der Freien Universität Berlin von Prof. Dr. Georg Kotowski. Berlin/Basel: Länderdienstverlag 1965, 55–65
4. Erhard Schmidt (Erinnerungen und Werk). Jber. d. Dt. Math.-Verein **72** (1970) 3–17
5. Pippi Langstrumpf und die Mathematik-Reform an der FU. Berliner Morgenpost 22. Februar 1970, 11
6. Nur gemeinsam mit Studenten kann man das „Abrutschen" der FU-Mathematik verhindern. Berliner Morgenpost 18. Juli 1971, 54

D Unveröffentlichte Manuskripte

1. Acht Vorlesungen über das klassische isoperimetrische Problem. Buchmanuskript 1954.
2. Analysis. Buchmanuskript, um 1963, unvollendet.
3. Ungleichungen der Analysis. Buchmanuskript, um 1965, unvollendet.
4. Vektor- und Tensoranalysis. Buchmanuskript, um 1965.
5. Einführung in die Nevanlinnasche Wertverteilungstheorie. Buchmanuskript, 1974, unvollendet. Erscheint demnächst herausgegeben von R. Nevanlinna und C. Andreian Cazacu unter dem Titel „Wertverteilung meromorpher Funktionen in ein- und mehrfach zusammenhängenden Gebieten" in Lecture Notes in Mathematics, Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag.
6. Ungleichungen zwischen Differentialformen bei inneren Abbildungen der komplexen Einheitskugel, 1970.
7. Zur strukturellen Veränderung im Mathematikunterricht, 1970/1971.
8. Remark on an integral identity of S.-S. Chern of real and complex spaces, 1974.
9. Erinnerungen aus den letzten Jahren des Mathematischen Instituts der Universität Berlin. Niedergeschrieben August bis September 1945 zum Teil in einem Lager in Luckenwalde.
10. Vom Kampfe gegen die Relativitätstheorie und gegen Einstein (von 1919) bis zu den Anfängen des Nationalsozialismus. März und April 1947.

E Rezensionen

1. Carathéodory, C.: Funktionentheorie. Basel: Birkhäuser Verlag 1950. Bd. I 288 S., Bd. II 194 S. In: Experientia **8** (1952) 79–81
2. Hadwiger, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer Verlag, 1957. = Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. 93. XIII + 312 S. In: Jber. d. Dt. Math.-Verein. **61** (1959) 2. Abt. S. 40
3. Hurwitz, A.; Courant, R.: Funktionentheorie. Mit einem Anhang von H. Röhrl. 4. Aufl. Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1964. = Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. 3. XIV + 706 S. In: Jber. d. Dt. Math.-Verein. **68** (1966) 2. Abt. S. 5
4. Nevanlinna, R.; Paatero, V.: Einführung in die Funktionentheorie. Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1965, 388 S. In: Jber. d. Dt. Math.-Verein. **69** (1967/1968) 2. Abt. S. 27
5. Hadamard, J.: Oeuvres. Tomes 1–4. Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1968, 2296 S. In: Zent.-Bl. f. Math. **168** (1969) 241–242

6. T u t s c h k e, W.: Grundlagen der Funktionentheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1967 und Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1969, 183 S. In: VDI-Z., Zeitschrift für die gesamte Technik **10** (1970)
7. M i t r i n o w i ć, D. S.: Analytic inequalities. Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1970. = Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. 165. XII + 400 S. In: VDI-Z., Zeitschrift für die gesamte Technik **15** (1971).
8. W a l t e r, W.: Differential and integral inequalities. Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1970. = Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Bd. 55. X + 352 S. In: VDI-Z., Zeitschrift für die gesamte Technik **9** (1972)
9. S a r i o, L.; N a k a i, M.: Classification Theory of Riemann Surfaces. Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1970. = Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. 164. 446 S. In: Jber. d. Dt. Math.-Verein. **74** (1972/1973) 2. Abt. S. 12
10. A g r e s t, M. M.; M a k s i m o w, M. S.: Theory of incomplete cylindrical functions and their applications. Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1971. = Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. 160. X + 330 S. In: VDI-Z., Zeitschrift für die gesamte Technik **1** (1973)
11. D o e t s c h, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1970, 351 S. In: Jber. d. Dt. Math.-Verein. **75** (1973/1974) 2. Abt. S. 47

Prof. Dr. H. Begehr
I. Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Hüttenweg 9
1000 Berlin 33

(*Eingegangen: 6. 3. 1978*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
81 (1979) 177–188

Entscheidbarkeit mathematischer Theorien

A. Prestel, Konstanz

Vorbemerkung Der vorliegende Artikel ist eine geringfügig erweiterte Fassung eines auf der DMV-Tagung in München am 13. Oktober 1976 gehaltenen Vortrages. Er stellt eine Einführung in die Fragestellungen und grundlegenden Begriffe einer Teildisziplin der mathematischen Logik dar. Die Auswahl der zitierten Resultate erfolgte unter didaktischen Gesichtspunkten. Dieser Artikel ist kein Survey über das angesprochene Gebiet. Einen Überblick über alle bis 1969 bekannt gewordenen Resultate gibt der Bericht [6] von Ershov, Lavrov, Taimanov und Taitslin. Als Einführung in das Gebiet der entscheidbaren und unentscheidbaren Theorien empfehlen wir Teil III aus dem Buch [11].

1 Grundsätzliches

Es ist klar, daß die Beziehung $n|m$ im Bereich der natürlichen Zahlen entscheidbar ist – der euklidische Algorithmus liefert ein Verfahren, das es uns erlaubt, bei vorgegebenem Paar (n, m) in endlich vielen Schritten zu entscheiden, ob $n|m$ gilt oder nicht.

Ist allgemein M eine Teilmenge von $\mathbf{N}^r$, so nennt man M *entscheidbar,* falls es ein Verfahren gibt, das es erlaubt, für $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{N}^r$ in endlich vielen Schritten zu entscheiden, ob $(n_1, \ldots n_r) \in M$ ist oder nicht[1]. Ist M nicht entscheidbar, so heißt M *unentscheidbar.*

Eines der berühmtesten Entscheidbarkeitsprobleme war lange Zeit das 10. *Hilbertsche Problem:* Gibt es ein Verfahren zur Entscheidung, ob für gegebenes Polynom $p(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ die diophantische Gleichung

$$p(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

in $\mathbf{Z}$ eine Lösung hat?

Dieses Problem läßt sich leicht in den oben eingeführten Rahmen bringen. Es sei $f(n) = p_n$ eine effektive, bijektive Abzählung aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}$. Dann lautet das 10. Hilbertsche Problem: Ist die Menge $M = \{n | p_n = 0$ ist lösbar in $\mathbf{Z}\}$ entscheidbar? Diese Menge wurde 1973 (siehe [10]) als unentscheidbar nachgewiesen.

Es ist klar, daß zum Nachweis einer Unentscheidbarkeit erst einmal der Begriff des „Verfahrens" präzisiert werden muß.

Solange man Verfahren für konkrete Probleme angibt (z. B. Teilbarkeit, Teilerfremdheit usw.), und man sich grundsätzlich über das Funktionieren eines solchen

---

[1]) Im obigen Beispiel ist $M = \{(n, m) | \; n | m\}$

Verfahrens einig ist, wird keine exakte Abgrenzung dieses Begriffes notwendig. Soll jedoch die Nichtexistenz eines Verfahrens bewiesen werden, so hängt das Gelingen eines solchen Beweises natürlich von der Präzisierung des Begriffes ‚Verfahren' ab.

Alle Versuche, den intuitiven Begriff ‚Verfahren' (oder genauer ‚finites Verfahren') mathematisch zu definieren, haben im Endeffekt zum gleichen Resultat geführt. Fast gleichzeitig wurden 1936 von Church, Turing und Post die ersten derartigen Definitionen vorgeschlagen, deren einer der Begriff der *Turingmaschine* ist; ihn verwenden wir als Präzisierung (vgl. [7]).

Wir wollen nun, ausgehend vom 10. Hilbertschen Problem, einige für das Folgende wichtige Begriffe einführen.

Beim 10. Hilbertschen Problem geht es darum, zu entscheiden, ob eine Aussage dergestalt

$$\exists\, x_1, \ldots, x_m \; p(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

in $\mathbf{Z}$ gilt oder nicht gilt. Hierbei handelt es sich um Aussagen eines spezifischen Typs. In anderem Zusammenhang mag es von Interesse sein, Aussagen anderen Typs zu betrachten.

Ist allgemeiner Φ eine Menge von zahlentheoretischen Aussagen eines bestimmten Typs und etwa $f(n) = \varphi_n$ eine bijektive, effektive Aufzählung aller Aussagen aus Φ, so stellt sich die Frage, ob die Menge

$$M = \{n | \varphi_n \textit{ gilt in } \mathbf{Z}\}$$

entscheidbar ist.

Aus der Formulierung dieser Frage ist klar, daß φ_n dabei selbst als ein Objekt betrachtet wird, nämlich als eine in einer formalen Sprache gebildete Aussage. Es dürfte weiter klar sein, daß diese formale Sprache passend zu den mathematischen Strukturen gewählt werden wird, in denen man die Gültigkeit solcher Aussagen betrachten will.

Wir skizzieren nun kurz die in diesem Zusammenhang üblichen Begriffsbildungen. (Die exakten Definitionen findet man etwa in [4] oder [11].)

Unter einer *mathematischen Struktur* wollen wir hier ein Gebilde der Art

$$\mathscr{A} = \langle A;\; f_1, \ldots, f_r;\; a_1, \ldots, a_s;\; R_1, \ldots, R_t \rangle$$

verstehen. Dabei soll $A \neq \emptyset$ gelten sowie

$$\begin{array}{ll} a_\ell \in A & \text{für } \ell = 1, \ldots, s \\ f_i\colon A^{n_i} \to A & \text{für } i = 1, \ldots, r \\ R_j \subset A^{m_j} & \text{für } j = 1, \ldots, t \end{array}$$

Die Stellenzahlen $n_1, \ldots, n_r$ und $m_1, \ldots, m_t$ sowie die Zahl s bestimmen den *Typ* von $\mathscr{A}$.

Ein Beispiel einer solchen Struktur ist etwa

$$\mathscr{R} = \langle \mathbf{R};\; +, \cdot\,;\; 0,1;\; < \rangle$$

Dabei sind + und · 2-stellige Funktionen von $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ und < eine 2-stellige Relation auf $\mathbf{R}$.

Passend zu einer solchen mathematischen Struktur $\mathscr{A}$ (genauer: passend zum Typ von $\mathscr{A}$) führt man eine formale Sprache ein. In dieser Sprache hat man für jede Funktion f_i, jedes ausgezeichnete Element a_ℓ und für jede Relation R_j ein Zeichen (einen Namen). Aus diesen Grundzeichen baut man in der (in der Mathematik) üblichen Art unter Verwendung der logischen Zeichen

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \forall \quad \exists$$

und Variablen (Unbestimmten) Formeln auf. In den sogenannten Sprachen 1. *Stufe* verwendet man dabei eine Sorte von Variablen $x_0, x_1, \ldots$, deren Variationsbereich in $\mathscr{A}$ immer die Trägermenge A ist (d.h. die Variablen x_i erhalten als Werte Elemente von A).

Es dürfte nun klar sein, was unter der Gültigkeit einer Formel φ in der Struktur $\mathscr{A}$ zu verstehen ist. Es ist natülich ebenso klar, daß diese Gültigkeit von der Festlegung eventueller Parameter (freier Variablen) in φ abhängen kann. Gibt es keine freien Variablen in φ, so nennt man φ eine *Aussage*; φ ist dann in $\mathscr{A}$ entweder wahr oder falsch.

Beispiele sind etwa die oben erwähnten Aussagen

$$\exists x_1, \ldots, x_m \; p(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

Mit Aus bezeichnen wir die Menge aller Aussagen. Die Aussagen unserer formalen Sprache sind insbesondere endliche Zeichenreihen. Man kann leicht eine effektive, bijektive Abbildung f: $\mathbf{N} \to \mathsf{Aus}$ angeben. Nach unserer obigen Definition nennen wir dann eine Teilmenge $\Phi \subset \mathsf{Aus}$ entscheidbar, falls

$$M = \{f^{-1}(\varphi) | \varphi \in \Phi\}$$

eine entscheidbare Teilmenge von $\mathbf{N}$ ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der effektiven Bijektion f.

Es sei nun K eine Klasse von mathematischen Strukturen gleichen Typs (z. B. K = *Klasse aller endlichen Gruppen* oder K = $\{\mathbf{R}\}$). In der nur vom Typ der Strukturen aus K abhängenden formalen Sprache sei Aus_K die Menge der Aussagen. Man bezeichnet dann die Menge

$$Th(K) = \{\varphi \in \mathsf{Aus}_K | \varphi \textit{ gilt in allen } \mathscr{A} \in K\}$$

als die *elementare (oder erst-stufige) Theorie* von K.

Zu den bisher betrachteten Sprachen erster Stufe gibt es einen Kalkül, der es erlaubt, aus einer Menge Σ von Aussagen unter Anwendung von allgemeingültigen logischen Regeln und Axiomen andere Aussagen rein formal zu deduzieren. Es sei

$$Ded(\Sigma) = \{\varphi \in \mathsf{Aus} | \varphi \textit{ aus } \Sigma \textit{ deduzierbar}\}$$

Man bezeichnet Σ dann als ein *Axiomensystem* für die Menge Ded (Σ).

In sehr vielen Fällen ist eine Klasse K (von Strukturen gleichen Typs) folgendermaßen gegeben es gibt $\Sigma \subset \mathsf{Aus}_K$, so daß eine Struktur $\mathscr{A}$ (unseres betrachteten Typs) genau dann zu K gehört, falls $\mathscr{A}$ *Modell* von Σ ist, d. h. wenn alle $\sigma \in \Sigma$ in $\mathscr{A}$ gelten (z. B. Σ = *Gruppenaxiome,* K = *Klasse aller Gruppen*).

In diesem Falle gilt der *Gödelsche Vollständigkeitssatz*

$$Th(K) = Ded(\Sigma).$$

Diese Gleichung ist dann nützlich, wenn man Σ besser kennt als Th(K). Dies ist z. B. der Fall, wenn Σ endlich ist oder wenn Σ entscheidbar ist[1]).

Man nennt Th(K) *axiomatisierbar,* falls es eine entscheidbare Menge $\Sigma \subset \mathsf{Aus}_K$ mit $\mathrm{Th}(K) = \mathrm{Ded}(\Sigma)$ gibt.

In den folgenden beiden Abschnitten wollen wir für einige Klassen K die Entscheidbarkeit ihrer Theorie (d. h. von Th(K)) besprechen. Dabei wird sich ein oft sehr enger Zusammenhang zum Begriff der Axiomatisierbarkeit von Th(K) zeigen.

Man beachte, daß die Einführung und Betrachtung von Th(K) nicht von der Existenz eines Deduktionsbegriffes abhängig ist. In der Tat ist etwa bei den in Abschnitt 5 betrachteten Erweiterungen der Sprache ein solcher zum Teil nicht mehr existent.

2 Einige entscheidbare Theorien

Es sei wieder K eine Klasse von Strukturen gleichen Typs und Aus_K die Menge aller Aussagen in der zum Typ von K passenden formalen Sprache. Nach unserer obigen Definition besteht Th(K) aus allen Aussagen, die in allen Strukturen aus K gelten. Offensichtlich ist die Aussagenmenge $\Sigma = \mathrm{Th}(K)$ deduktiv abgeschlossen, d. h. $\mathrm{Ded}(\Sigma) = \Sigma$. Es gilt also die triviale aber wichtige Folgerung

Th(K) *entscheidbar* $\Rightarrow$ Th(K) *axiomatisierbar*

Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch, wie Beispiele in Abschnitt 3 zeigen werden.

Man nennt eine Teilmenge $M \subset \mathbf{N}$ *erzeugbar* oder *rekursiv aufzählbar,* falls es ein finites Verfahren (eine Turingmaschine) gibt, das genau die Elemente von M produziert. Entsprechend heißt $\Phi \subset \mathsf{Aus}$ erzeugbar, falls die Menge $M = \{f^{-1}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$ erzeugbar ist. Diese Definition ist wieder unabhängig von der Wahl der effektiven Bijektion f.

Ein Beispiel eines solchen Verfahrens ist der Deduktionskalkül für erst-stufige Sprachen. Es gilt die folgende Implikation für $\Sigma \subset \mathsf{Aus}_K$

Σ *entscheidbar* $\Rightarrow$ Ded(Σ) *erzeugbar*

Der folgende Satz ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Feststellung, ob eine Theorie entscheidbar ist.

Satz 1 *Es seien* $T = \mathrm{Th}(K)$ *und* $\overline{T} = \mathsf{Aus}_K \setminus T$. *Dann gilt:*

T *entscheidbar* $\Leftrightarrow$ T *axiomatisierbar und* $\overline{T}$ *erzeugbar*

B e w e i s (S k i z z e). Ist T entscheidbar, so ist T wegen $T = \mathrm{Ded}(T)$ auch axiomatisierbar. Weiter ist $\overline{T}$ erzeugbar, etwa mit dem folgenden Verfahren: Man gehe der Reihe nach alle Elemente φ von Aus_K durch. Dabei entscheide man, ob $\varphi \notin T$ ist. Ist dies der Fall, so nehme man φ als Ergebnis, ist dies nicht der Fall, so

[1]) Endliche Mengen sind immer entscheidbar.

nehme man die Aussage $\exists x\, x \neq x$ als Ergebnis. Insgesamt werden also genau die Elemente von $\overline{T}$ produziert. (Wie betrachten immer nur den Fall $K \neq \emptyset$.)

Seien umgekehrt T axiomatisierbar und $\overline{T}$ erzeugbar. Dann ist auch T erzeugbar (wie oben erwähnt). Man lasse nun Erzeugungsverfahren für T und $\overline{T}$ nebeneinander laufen:

$$
\begin{array}{lcl}
\textit{Erzeugung von } T & & \textit{Erzeugung von } \overline{T} \\
\varphi_0 & & \psi_0 \\
\varphi_1 & & \psi_1 \\
\varphi_2 & & \psi_2 \\
\vdots & & \vdots \\
\varphi_n \longleftarrow & \sigma & \longrightarrow \psi_n \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Ist $\sigma \in \mathsf{Aus}_K$ gegeben, so prüfe man für jedes $n \in \mathbf{N}$, ob $\sigma = \varphi_n$ oder $\sigma = \psi_n$ ist. Wegen $\mathsf{Aus}_K = \{\varphi_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ muß nach endlich vielen Schritten einer dieser Fälle eintreten. Ist $\sigma = \varphi_n$, so ist $\sigma \in T$, ist $\sigma = \psi_n$, so ist $\sigma \notin T$. q.e.d.

Ein besonders interessanter Fall liegt vor, falls

$$\overline{T} = \{\varphi \mid \neg\varphi \in T\} =: \neg T$$

ist. Dann heißt $T = Th(K)$ *vollständig*. Dies ist nicht immer der Fall, i.a. gilt nur $\neg T \subset \overline{T}$. Ist zum Beispiel T die elementare Gruppentheorie (d.h. $T = Ded(\Sigma)$ und Σ = *Menge der Gruppenaxiome*), so gilt etwa

$$(\mathsf{A}\, xy\, (x \cdot y = y \cdot x)) \in \overline{T} \setminus \neg T$$

Man zeigt leicht für $T = Th(K)$:

T *vollständig* $\Leftrightarrow$ $T = Th(\{\mathscr{A}\})$ *für ein Modell* $\mathscr{A}$ *von* T

d.h. wenn Th(K) schon die Theorie einer einzigen Struktur ist.

Ist $T = Th(K)$ vollständig und axiomatisierbar, also $T = Ded(\Sigma)$ und Σ entscheidbar, so ist $\overline{T}$ wegen $\overline{T} = \neg\, T$ auch erzeugbar. (Man erzeuge T und schreibe $\neg$ vor jedes φ aus T). Also erhalten wir aus Satz 1 den

Satz 2 *Ist* $T = Th(\{\mathscr{A}\})$, *so gilt:*

T *entscheidbar* $\Leftrightarrow$ T *axiomatisierbar*

Wir wollen nun einige Klassen K angeben, für die Th(K) entscheidbar ist.

(*a*) $K = \{\langle \mathbf{Z};\ +;\ 0;\ <\rangle\}$ (Presburger 1929, [13])

Hier kann Satz 2 angewandt werden. Als Axiomensystem kann man die Axiome der **Z**-Gruppen verwenden (siehe etwa [4]; Seite 291). Die Entscheidbarkeit von Th(K) wurde von Presburger 1929 bewiesen[1]).

(*b*) $K = \{\langle \mathbf{C};\ +\ \cdot, -\ ;\ 0,\ 1\rangle\}$ (Tarski 1949, [21])

[1]) Der Originalbeweis verwendet nicht Satz 2, sondern gibt direkt ein Entscheidungsverfahren an.

Als Axiomensystem verwendet man die Axiome für algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik 0 (siehe etwa [4], Seite 41). Es sei hier noch auf die folgende nützliche Konsequenz der Vollständigkeit von TH(K) hingewiesen. Ist $\mathscr{F} = \langle F;\ +,\ \cdot,\ -;\ 0,1\rangle$ ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, so gilt $Th(\{\mathscr{F}\}) = Th(\{\langle \mathbf{C};\ +,\ \cdot,\ -;\ 0,1\rangle\})$. Anders ausgedrückt heißt das

$$\varphi \textit{ gilt in } \mathscr{F} \Leftrightarrow \varphi \textit{ gilt in } \langle \mathbf{C};\ +,\ \cdot,\ -;\ 0,1\rangle$$

für alle $\varphi \in \mathrm{Aus}_K$. Dies läßt sich als ein Übertragungsprinzip bezeichnen. In der Tat kann man obiges Übertragungsprinzip als eine Präzisierung des sogenannten *Lefschetz-Prinzipes* verstehen[1]).

(*c*) $K = \{\langle \mathbf{R};\ +,\ \cdot,\ -;\ 0,1\rangle\}$ (T a r s k i 1949, [21])

Als Axiomensystem verwendet man die Axiome für reell abgeschlossene Körper (siehe etwa [4], Seite 41). In diesem Falle erhält man das sogenannte *Tarski-Prinzip:* Ist $\mathscr{F} = \langle F;\ +,\ \cdot,\ -;\ 0,1\rangle$ ein reell abgeschlossener Körper, so gilt für alle $\varphi \in \mathrm{Aus}_K$

$$\varphi \textit{ gilt in } \mathscr{F} \Leftrightarrow \varphi \textit{ gilt in } \langle \mathbf{R};\ +,\ \cdot,\ -;\ 0,1\rangle$$

(*d*) $K = \{\mathbf{Q}_p\}$ (A x - K o c h e n 1965, [1])

Wir wollen hier nicht detailliert darstellen, wie die Struktur $\mathbf{Q}_p$ aufgebaut sein soll. Es sei lediglich erwähnt, daß es sich dabei um einen bewerteten Körper handelt, den bewerteten Körper der p-adischen Zahlen ($p \in \mathbf{N}$, eine Primzahl). Man verwendet hier die Axiome eines bewerteten Henselschen Körpers der Charakteristik 0 mit Restklassenkörper $\mathbf{F}_p$ und einer $\mathbf{Z}$-Gruppe als Wertegruppe (sowie einen Schnitt). Eine ausführliche Darstellung findet man etwa in [4], Abschnitt 5.4 .

(*e*) K = *Klasse der abelschen Gruppen* (S z m i e l e w 1949, [20])

Hier ist offensichtlich Th(K) axiomatisierbar. Nach Satz 1 genügt für die Entscheidbarkeit also der Nachweis der Erzeugbarkeit von $\overline{\mathrm{Th}(K)}$.

(*f*) K = *Klasse der endlichen Körper* (A x 1968, [2])

Hier genügt nach Satz 1 der Nachweis der Axiomatisierbarkeit von T = Th(K). Die folgende Argumentation zeigt nämlich, daß $\overline{T}$ erzeugbar ist.

Ein $\varphi \in \mathrm{Aus}_K$ gehört zu $\overline{T}$, falls es in mindestens einem endlichen Körper F falsch ist, d. h. falls $\neg\, \varphi$ in F wahr ist. Es sei nun F_m eine effektive Abzählung aller endlichen Körper und φ_n eine effektive Abzählung aller Elemente aus Aus_K. Man durchlaufe in der üblichen Abzählung (1. Cantorsches Diagonalisierungs-Verfahren) alle Paare (F_m, φ_n). Gilt $\neg\, \varphi_n$ in F_m, so sei das Ergebnis φ_n, gilt φ_n in F_m, so sei das Ergebnis $\neg\, \varphi_n$. Insgesamt erhält man offenbar $\overline{T} = \neg \bigcup_m \mathrm{Th}(F_m)$.

[1])Weitergehende Übertragungsprinzipien für algebraisch abgeschlossene Körper findet man etwa in [3].

3 Einige unentscheidbare Theorien

Sehr viele Unentscheidbarkeitsbeweise können mit dem folgenden Satz geführt werden. Es sei dabei wie vorher K eine Klasse von Strukturen gleichen Typs und T = Th(K).

Satz 3 *Ist* $\langle \mathbf{N};\ +,\ \cdot \rangle$ *in einem Modell* $\mathscr{A}$ *von* T *definierbar, so ist* T *unentscheidbar*[1]).

Dabei heißt $\langle \mathbf{N};\ +,\ \cdot \rangle$ in $\mathscr{A} = \langle A;\ \ldots \rangle$ *definierbar,* wenn es in der Sprache zu $\mathscr{A}$ (also auch zu K) eine Formel $\varphi(x)$ in einer freien Variablen und zwei Formeln $\psi_1(x, y, z)$ und $\psi_2(x, y, z)$ in drei freien Variablen gibt mit

$$\langle \mathbf{N};\ +,\ \cdot \rangle \simeq \langle \varphi^{\mathscr{A}};\ \psi_1^{\mathscr{A}}, \psi_2^{\mathscr{A}} \rangle,$$

wobei $\varphi^{\mathscr{A}} = \{a \in A \mid a$ *erfüllt* φ *in* $\mathscr{A}\}$ und $\psi_i^{\mathscr{A}} = \{(a, b, c) \in A^3 \mid (a, b, c)$ *erfüllt* ψ_i *in* $\mathscr{A}\}$ ist. Bei dieser Definition wurden + und $\cdot$ als dreistellige Relationen aufgefaßt. (Der Satz behält seine Richtigkeit, wenn in den Formeln φ und ψ_i auch noch Parameter aus A zugelassen werden.)

Der Grund für die Richtigkeit dieses Satzes liegt in der „Ausdruckstärke der Arithmetik". Es ist möglich, jede entscheidbare Menge $M \subset \mathbf{N}$ arithmetisch zu definieren, d. h. es gibt eine Formel $\sigma(x)$ in einer freien Variablen aus der Sprache passend zu $\langle \mathbf{N}; +,\ \cdot \rangle$ mit

$$a \in M \Leftrightarrow a \text{ erfüllt } \sigma \text{ in } \langle \mathbf{N}; +,\ \cdot \rangle$$

Wäre nun T entscheidbar, so gäbe es zu der Menge $f^{-1}(T) = M$ eine solche Formel σ. Damit gewinnt man die Möglichkeit, in einem Modell von T, nämlich in $\mathscr{A}$, über die Theorie T selbst zu „sprechen". Durch einen „Diagonalschluß" läßt sich schließlich damit eine Antinomie konstruieren. Dies zeigt dann, daß T nicht entscheidbar sein kann.

Wir betrachten einige Beispiele von Klassen K, deren Theorie T = Th(K) unentscheidbar ist.

(*a*) $K = \{\langle \mathbf{N}; +,\ \cdot \rangle\}$ (Rosser 1936, [18])

Hier sind die definierenden Formeln trivial, z. B. $\varphi(x)$ ist etwa $x = x$. Dieses Resultat ist der Kern sehr vieler Unentscheidbarkeitsbeweise.

(*b*) $K = \{\langle \mathbf{Q}; +,\ \cdot,\ -;\ 0,1 \rangle\}$ (J. Robinson 1949, [15])

Hier gibt man eine Formel $\varphi(x)$ an, die direkt die Teilmenge $\mathbf{N}$ von $\mathbf{Q}$ definiert, d. h. es gilt:

$$a \in \mathbf{N} \Leftrightarrow a \text{ erfüllt } \varphi \text{ in } \langle \mathbf{Q}; +,\ \cdot, -;\ 0,1 \rangle$$

Für ψ_1 und ψ_2 verwendet man die Addition und Multiplikation von $\langle \mathbf{Q}; \ldots \rangle$.

Die Formel φ ist recht kompliziert. Es werden Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen über $\mathbf{Q}$ verwendet. Da es sich hier um eine einzelne Struktur handelt, ist Th(K) vollständig, also ist nach Satz 2 Th(K) nicht axiomatisierbar.

---

[1]) Einen Beweis findet man etwa in [19], Abschnitt 6.9

Man beachte, daß etwa die Körpertheorie von $\mathbf{R}$ axiomatisierbar ist (siehe 2(c)). Nach Satz 3 ist es also *nicht möglich, in* $\langle \mathbf{R}; +, \cdot, -; 0,1\rangle$ *die natürlichen Zahlen zu definieren.* Spätestens hier wird deutlich, wie stark die Einschränkung ist, daß alle Variablen einer Formel der Sprache zu $\langle \mathbf{R}; +, \cdot, -; 0,1\rangle$ nur über die Elemente von $\mathbf{R}$ variieren dürfen. Bekanntlich läßt sich $\mathbf{N}$ mit einer Formel, in der es auch Variablen für Teilmengen von $\mathbf{R}$ gibt, definieren.

(*c*) $K = \{\langle \mathbf{R}(t); +, \cdot, -; 0,1\rangle\}$ (Malcev, 1960, [8])

Hierbei ist t transzendent über $\mathbf{R}$. Wie vorher definiert man $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}(t)$ direkt (siehe etwa [16]). Wesentlicher Zwischenschritt ist erst einmal die Definition der Teilmenge $\mathbf{R}$. Dies kann etwa durch die Formel

$$\exists y \quad x^3 + 1 = y^3$$

geschehen. Offenbar kann nur eine reelle Zahl diese Formel in $\mathbf{R}(t)$ erfüllen, da sonst der Funktionenkörper $\mathbf{R}(x, y)$ mit $x^3 + 1 = y^3$ als Teilkörper von $\mathbf{R}(t)$ das Geschlecht 0 haben müßte.

(*d*) K = *Klasse aller Graphen* (Rogers 1956, [17])

Hier läßt sich leicht ein Graph angeben, in dem man $\langle \mathbf{N}; +, \cdot\rangle$ definieren kann.

(*e*) K = *Klasse aller Gruppen* (Tarski 1949, [22])

Hier läßt sich $\langle \mathbf{N}; +, \cdot\rangle$ in der Gruppe aller Permutationen von $\mathbf{N}$ definieren.

(*f*) K = *Klasse aller endlichen Gruppen* (Malcev 1961, [9])

In diesem Beispiel kann man aus naheliegenden Gründen Satz 3 schlecht anwenden. Man beachte, daß man wie in 2(f) zeigen kann, daß $\overline{\mathrm{Th}(K)}$ erzeugbar ist. Damit ist also nach Satz 1 Th(K), die elementare Theorie der endlichen Gruppen, auch nicht axiomatisierbar.

Wir bemerken noch, daß Satz 3 seine Richtigkeit behält, falls man die Klasse K durch eine Klasse $K_1 \supset K$ ersetzt, die ebenfalls nur Strukturen vom Typ von K enthält. Damit erhält man etwa die Unentscheidbarkeit der Körpertheorie oder Ringtheorie aus (b). Ebenso folgt die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik.

4 Einschränkungen der Aussagemenge

In den vorangehenden Abschnitten haben wir einige Beispiele für entscheidbare und unentscheidbare Theorien kennengelernt. Dabei war der Begriff ‚Theorie' über eine Klasse K von interessierenden Strukturen gleichen Typs als die Menge Th(K) eingeführt worden. Die Elemente von Th(K) sind Aussagen einer in gewisser Weise willkürlich vorher festgelegten formalen Sprache. Eine Willkür bestand z. B. darin, die Variablen nur über die Elemente der Trägermenge der Strukturen laufen zu lassen. Diese Beschränkung läßt sich allerdings durch den dann zur Verfügung stehenden Deduktionsbegriff rechtfertigen. Trotzdem kann und soll man sich natürlich auch für andere Festlegungen des Aussagenbegriffes interessieren, zumal dann, wenn diese mathematisch motiviert sind.

Wir wollen in diesem und dem nächsten Abschnitt andere Festlegungen betrachten.

Zunächst wollen wir in Fällen, wo Th(K) unentscheidbar ist, zeigen, daß sehr oft eine Einschränkung auf gewisse, vernünftige Teilmengen von Aus_K trotzdem nicht zu einer Entscheidbarkeit führt. Im nächsten Abschnitt geben wir dann einige Beispiele von Klassen K an, wo nicht nur Th(K), sondern auch noch die bei einer passenden Erweiterung des Aussagenbegriffes entsprechend gebildete Theorie entscheidbar ist.

Doch zuerst zu den Einschränkungen. Es bezeichne Aus_K^0 die Menge der Aussagen, die keine Quantoren $\exists$ oder $\forall$ enthalten (z. B. Gleichungen, Ungleichungen). Weiter bezeichne $\mathsf{Aus}_K^\exists$ reine Existenzaussagen, das sind Aussagen der Gestalt

$$\exists x_1, \ldots, x_m \ \psi(x_1, \ldots, x_m),$$

wobei $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ eine Formel ohne Quantoren ist. Analog definiert man $\mathsf{Aus}_K^\forall$. Für eine Klasse K von Strukturen gleichen Typs setzen wir dann $\mathrm{Th}^0(K) = \mathrm{Th}(K) \cap \mathsf{Aus}_K^0$, $\mathrm{Th}^\exists(K) = \mathrm{Th}(K) \cap \mathsf{Aus}_K^\exists$ und $\mathrm{Th}^\forall(K) = \mathrm{Th}(K) \cap \mathsf{Aus}_K^\forall$.

(*a*) 10. *Hilbertsches Problem*

Wir betrachten zuerst $\mathrm{Th}^\exists(\{\langle \mathbf{N}; +, \cdot; 0,1\rangle\})$. Im Jahre 1973 wurde diese Menge nach Vorarbeiten von J. Robinson und M. Davis von Matijasevič als unentscheidbar nachgewiesen (siehe [10]). Die Frage nach der Entscheidbarkeit dieser Menge läßt sich leicht in das in Abschnitt 1 besprochene 10. Hilbertsche Problem übersetzen.

(*b*) *Wortproblem von Gruppen*

Es sei $\langle G; \cdot, {}^{-1}; e\rangle$ eine Gruppe, erzeugt von $a_1, \ldots, a_m$. Die Sprache von $\langle G; \cdot, {}^{-1}; e, a_1, \ldots, a_m\rangle$ enthält dann Namen für $a_1, \ldots, a_m$ (etwa $\underline{a_1}, \ldots \underline{a_m}$). Ein Wort W ist ein Term dieser Sprache (d. h. bis auf Klammerung ein endliches Produkt aus e, $\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_m}, \underline{a_1^{-1}}, \ldots, \underline{a_m^{-1}}$). Es ist klar, daß die Entscheidbarkeit von $\mathrm{Th}^0(\{\langle G; \cdot, {}^{-1}; e, a_1, \ldots, a_m\rangle\})$ äquivalent ist zur Entscheidbarkeit der Menge

$$\{(W_1, W_2) \mid W_1 = W_2 \textit{ gilt in } \langle G, \ldots\rangle\},$$

dem *Wortproblem* der Gruppe $\langle G; \cdot, {}^{-1}; e, a_1, \ldots, a_m\rangle$.

Im Jahre 1955 wurde von Novikov die erste endlich präsentierte Gruppe mit unentscheidbarem Wortproblem angegeben (siehe [12]).

Als Folgerung hieraus erhält man die Unentscheidbarkeit von $\mathrm{Th}^\forall(K)$, wobei K die Klasse aller Gruppen ist. Dieses Resultat geht weit über das von 3(e) hinaus.

5 Erweiterungen der Aussagenmenge

In diesem Abschnitt wollen wir Resultate über die Entscheidbarkeit von zweit-stufigen Theorien besprechen.

Es sei K wieder eine Klasse von Strukturen gleichen Typs. Wir erweitern nun die zu K in Abschnitt 1 beschriebene formale Sprache durch Hinzunahme einer weiteren Sorte von Variablen: $X_0, X_1, X_2, \ldots$ Ist $\mathscr{A} = \langle A, \ldots \rangle$ eine Struktur aus K, so sollen in $\mathscr{A}$ diese Variablen über *Teilmengen* von A variieren[1]). Weiterhin nehmen wir ein Zeichen für die Element-Beziehung mit in die Sprache auf, etwa ϵ.

Ist z. B. K die Klasse der angeordneten Körper, so läßt sich jetzt die Vollständigkeit der Ordnung ausdrücken durch:

$$\forall X_1 X_2 [(\exists x_1 \epsilon X_1)(\exists x_2 \epsilon X_2) \wedge (\forall x_1 \epsilon X_1)(\forall x_2 \epsilon X_2) x_1 \leqslant x_2 \\ \Rightarrow (\mathrm{E} z)(\mathrm{A} x_1 \epsilon X_1)(\forall x_2 \epsilon X_2) x_1 \leqslant z \leqslant x_2]$$

Die so aufgebaute Sprache heißt die *monadische Sprache zweiter Stufe,* da nur über Mengen (1-stellige Relationen) quantifiziert werden kann. Es bezeichne $\mathrm{Aus}_K^{(2)}$ die Aussagen dieser Sprache.

$$\mathrm{Th}^{(2)}(K) = \{\varphi \in \mathrm{Aus}_K^{(2)} \mid \varphi \textit{ gilt in allen } \mathscr{A} \in K\}$$

heißt die *monadische Theorie* (2. *Stufe*) *von* K. Aus der Entscheidbarkeit von $\mathrm{Th}^{(2)}(K)$ folgt direkt die Entscheidbarkeit der Teilmenge Th(K).

Wie die folgende Überlegung zeigt, darf $\mathrm{Th}^{(2)}(K)$ nur in sehr wenigen Fällen als entscheidbar erwartet werden.

Zu jeder Struktur $\mathscr{A} = \langle A; f_1, \ldots, R_m \rangle \in K$ und jedem $R \subset A$ betrachten wir die Struktur $\mathscr{A}_R = \langle A; f_1, \ldots R_m, R \rangle$. Die Klasse K′ bestehe genau aus den so gebildeten Strukturen. Die formale Sprache zu K′ enthält ein einstelliges Relationszeichen mehr als die zu K. Dieses sei etwa P.

Ist nun $\varphi(P) \in \mathrm{Aus}_K$, so ist $\forall X \varphi(X) \in \mathrm{Aus}_K^{(2)}$ und es gilt

$$\varphi(R) \textit{ gilt in allen } \mathscr{A}_R \in K' \Leftrightarrow \forall X \varphi(X) \textit{ gilt in allen } \mathscr{A} \in K$$

Daraus folgt die Implikation:

$$\mathrm{Th}^{(2)}(K) \textit{ entscheidbar} \Rightarrow \mathrm{Th}(K') \textit{ entscheidbar}$$

Geht man unsere Beispiele von entscheidbaren Theorien in Abschnitt 2 durch, so sieht man sofort mit Satz 3, daß Th(K′) in den Beispielen (b), (c) und (d) unentscheidbar ist. (Man nehme in einer beliebigen Struktur $\mathscr{A} \in K$ für die Interpretation von P einfach die Teilmenge **N** von A.) Also ist in diesen Fällen auch $\mathrm{Th}^{(2)}K$ unentscheidbar. Im Falle (a), d. h. $K = \{\langle \mathbf{Z}; +, 0 \rangle\}$ läßt sich zweit-stufig die Multiplikation definieren. Damit wird hier und (da **Z** kommutativ ist) auch in (e) die monadische Theorie $\mathrm{Th}^{(2)}(K)$ unentscheidbar. Dies folgt wieder mit Satz 3, der sich in der 2. Stufe ebenso beweisen läßt. (Es ist dabei unerheblich, daß es in der 2. Stufe keinen adäquaten Deduktionsbegriff gibt!) Es gibt allerdings Klassen K, für die $\mathrm{Th}^{(2)}(K)$ und damit auch Th(K) entscheidbar ist.

Bevor wir einige davon besprechen, sei noch erwähnt, warum die Beschränkung der Quantifikation auf 1-stellige Relationen sinnvoll ist. Erlaubt man nämlich etwa eine Quantifikation über 2-stellige Relationen, so würde eine ähnliche Überle-

---

[1]) Wir erinnern daran, daß die Variablen $x_0, x_1, \ldots$ in $\mathscr{A}$ nur über Elemente von A variieren sollten.

gung wie oben zeigen, daß die Entscheidbarkeit dieser Theorie diejenige von Th(K″) implizieren würde. Dabei besteht K″ aus Strukturen $\mathscr{A}_M = \langle A; f_1, \ldots, R_m, M\rangle$ mit $\langle A; f_1, \ldots, R_m\rangle \in K$ und $M \subset A \times A$. Enthält nun K mindestens eine unendliche Struktur $\mathscr{A}$, so ist nach Satz 3 Th(K″) schon unentscheidbar. Dazu wähle man M als einen Graphen, in dem sich $\langle \mathbf{N}; +, \cdot\rangle$ definieren läßt (vgl. 3(d)).

Nun zu einigen positiven Ergebnissen.

(*a*) *Monadische Theorie des binären Baumes*

Unter dem binären Baum versteht man die Struktur $\mathscr{B} = \langle B; f_1, f_2\rangle$, wobei $f_i: B \to B$ zwei Nachfolgeroperationen sind (linker und rechter Nachfolger). Die Entscheidbarkeit von $Th^{(2)}(\{B\})$ wurde 1969 von Rabin bewiesen (siehe [14]). Dieses Ergebnis ist enorm stark. In den binären Baum lassen sich nämlich zweit-stufig sehr viele andere Klassen K von Strukturen hineininterpretieren. Daraus ergibt sich dann die Entscheidbarkeit ihrer zugehörigen Theorien, wobei jedoch die Quantifikation 2. Stufe sehr oft entfällt oder sich nicht über alle Teilmengen erstreckt, sondern nur über eine ausgezeichnete Klasse von Teilmengen.

Beispiele hierfür sind:

(*b*) K = *Klasse der höchstens abzählbaren linearen Ordnungen*

Hier ist $Th^{(2)}(K)$ entscheidbar. Unter Benutzung des Satzes von Löwenheim und Skolem (siehe etwa [4]) folgt daraus die schon früher von Ehrenfeucht [5] bewiesene Entscheidbarkeit von

Th *(Klasse aller linearen Ordnungen)*

(*c*) K = *Klasse der höchstens abzählbaren Booleschen Algebren*

Hier ist $Th^I(K)$ entscheidbar. Dabei soll I andeuten, daß die Variablen 2. Stufe über die Ideale einer Booleschen Algebra variieren sollen. Wie oben folgt daraus wieder die schon früher von Tarski [21] bewiesene Entscheidbarkeit von

Th *(Klasse aller Booleschen Algebren)*

Literaturverzeichnis

[1] Ax, J.; Kochen, S.: Diophantine problems over local fields I, II. Am. J. Math. **87** (1965) 605–648
[2] Ax, J.: The elementary theory of finite fields. Ann. of Math. **88** (1968) 239–271
[3] Barwise, J., Eklof, P.: Lefschetz's Principle. Jour. of Algebra **13** (1969) 554–570
[4] Chang, C. C.; Keisler, H. J.: Model theory. Amsterdam 1973
[5] Ehrenfeucht, A.: Decidability of the theory of one linear ordering relation. Notices, Amer. Math. Soc. **6** (1959) 268–269
[6] Ershov, Yu. L.; Lavrov, I. A.; Taimanov, A. D.; Taitslin, M. A.: Elementary theories. Russian Math. Survey **20** (1965) 35–105
[7] Hermes, H.: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Berlin 1961
[8] Malcev, A. I.: On the undecidability of the elementary theories of certain fields. Sibirsk. Math. Zh. **1** (1960) 71–77
[9] Malcev, A. I.: Effective inseparability of the sets of identically true and finitely refutable formulae in some elementary theories. Doklady Akad. Nauk SSSR **139** (1961) 802–805

[10] M a t i j a s e v i č, Ju. V.: Enumerable sets are diophantine. Soviet Math. **11** (1970) 354–358
[11] M o n k, J. D.: Mathematical logic. New York 1976
[12] N o v i k o v, P. S.: On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory (Russian). Trudy Matematiches Kogo Institutaimeni V. A. Steklova, **44** (1955)
[13] P r e s b u r g e r, M.: Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. Comptes Rendus du Ier Congrès des Mathématiciens des pays Slaves, Warszawa 1929, 92–101, 395
[14] R a b i n, M.: Decidability of second order theories and automata on infinite trees. Trans. Amer. Math. Soc. **141** (1969) 1–35
[15] R o b i n s o n, J.: Definability and decision problems in arithmetic. Jour. Symb. Logic **14** (1949) 98–114
[16] R o b i n s o n, J.: The decision problem for fields. Symposium on the Theory of Models. Amsterdam 1965
[17] R o g e r s, H.: Certain logical reduction and decision problems. Ann. of Math. **64** (1956) 264–284
[18] R o s s e r, J. B.: Extension of some theorems of Gödel and Church. Jour. Symb. Logic **1** (1936) 87
[19] S h o e n f i e l d, J. R.: Mathematical logic. Reading, Massachusetts 1967
[20] S z m i e l e v, W.: Elementary properties of abelian groups. Fund. Math. **41** (1954) 203–271
[21] T a r s k i, A.: Arithmetical classes and types of mathematical systems, mathematical aspects of arithmetical classes and types, arithmetical classes and types of Bollean algebras, arithmetical classes and types of algebraically closed and real-closed fields. Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949) 63–64
[22] T a r s k i, A.; M o s t o w s k i, A.; R o b i n s o n, R.: Undecidable Theories. Amsterdam 1953

Prof. Dr. A. Prestel
Fachbereich Mathematik
Universität Konstanz
Postfach 5560
D-7750 Konstanz

(Eingegangen: 2. 9. 77)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
81 (1979) 189–198

Simultaneousss Approximation, Interpolation and Norm Preservation (SAIN)

Geetha S. Rao, Madras, Indien

This is a survey article, which aims at presenting all the known results concerning SAIN.

1 Introduction

In [30], Yamabe established the following simultaneous approximation and interpolation (SAI) theorem.

Theorem *Let* M *be a dense convex subset of the real normed linear space* X *and let* $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ *be a finite dimensional subset of* X^*, *the dual of* X. *Then for each* $x \in X$ *and each* $\epsilon > 0$, *there exists an element* $m \in M$ *such that* $\|x - m\| < \epsilon$ *and* $\gamma_i(x) = \gamma_i(m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wolibner [29] proved that Yamabe's theorem could be sharpened for the special case when $X = C[a, b]$, $M = \mathscr{P}$ = the set of all polynomials and $\gamma_i = \delta_{t_i}$ = point evaluation functionals at $\{t_i\}_{i=1}^n \in [a, b]$, i.e. $\delta_{t_i}(f) = f(t_i)$ for $f \in C[a, b]$. He observed that if $f(t_i) \neq f(t_{i+1})$, then the polynominal p which approximates and interpolates to f can be chosen to be *monotone* in each of the subintervals $[t_i, t_{i+1}]$.

Paszkowski [25] omitted the approximation aspect in the theorem of Wolibner and sought a polynomial p such that $f(t_i) = p(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, and $\|f\| = \|p\|$. He concluded that in this case the degree of the interpolating polynomial is *independent* of the function f to which it interpolates and depends only on the points $\{t_i\}_{i=1}^n$. Thus originated the study of simultaneous interpolation and norm preservation (SIN).

Singer [26] extended Yamabe's theorem to a real topological linear space. Deutsch [6] proved Singer's theorem under the hypothesis that M is a dense subspace of (possibly) a complex linear topological space.

Wolibner's result can be restated as follows:

Theorem *Let* $a \leqslant t_1 < t_2 \ldots < t_n \leqslant b$. *Let* $\mathscr{P}$ *be as before. For each* $f \in C[a, b]$ *and each* $\epsilon > 0$, *there exists* $p \in \mathscr{P}$ *such that* $\|f - p\| < \epsilon$, $f(t_i) = p(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *and* $\|f\| = \|p\|$.

This led to the formulation of the definition of SAIN in an abstract setting, by Deutsch and Morris [8, 9, 10], as follows:

Definition *Let* X *be a real normed linear space,* M *a dense subspace of* X *and* Γ *a finite dimensional subset of* X^*. *The triple* (X, M, Γ) *has* property SAIN *if,* *for each* $x \in X$ and each $\epsilon > 0$, *there exists an element* $m \in M$ *such that* $\|x - m\| < \epsilon$, $\gamma(x) = \gamma(m)$ *for every* $\gamma \in \Gamma$ *and* $\|x\| = \|m\|$.

Throughout, X is a real normed linear space, although many of the results can possibly be extended to the complex spaces. Denote by B(X) the closed unit ball in X and let S(X) represent its boundary.

Definition *A* functional $x^* \in X^*$ *is said to* attain *its* norm *on* B(X) *if there is an element* $x \in B(X)$ *such that* $x^*(x) = \|x^*\|$.

In the sequel, we shall analyse necessary and/or sufficient conditions for a given triple to have property SAIN and see what kind of restraints must be imposed on the elements of the triple.

2 The Deutsch-Morris necessary condition for (X, M, Γ) to have SAIN

In [9], the search for conditions which ensure that (X, M, Γ) has property SAIN commences. The following lemma gives a criterion for one functional.

Lemma [9] *Let* M *be a dense subspace of* X. *Suppose that* $x^* \in S(X^*)$ *and let* $x \in S(X)$ *with* $|x^*(x)| < 1$. *Then for each* $\epsilon > 0$, *there exists* $m \in M$ *such that* $\|x - m\| < \epsilon$, $x^*(x) = x^*(m)$ *and* $\|x\| = \|m\|$.

The inequality has to be strict and this lemma cannot be extended so as to be valid for more than one functional having norm one and satisfying such an inequality (see [7]).

Theorem [9] *Let* M *be a dense subspace of* X, $x^* \in X^*$ *and suppose that either* x^* *does not attain its norm on* B(X), *or* x^* *attains its norm on* B(X) *solely at points in* M. *Then* (X, M, $\{x^*\}$) *has* property SAIN.

The converse is false, for it is possible to find triples (X, M, $\{x^*\}$) with property SAIN and such that x^* attains its norm at points in $B(X) \cap M$ as well as at points of $B(X) \setminus M$.

The Deutsch-Morris necessary condition *for* (X, M, Γ) *to have* property SAIN *is that every* $\gamma \in \Gamma$ *attains its norm at points in* $B(X) \cap M$ *or does not attain its norm at all.*

In the case of a Hilbert space or a strictly convex reflexive Banach space with only one interpolating functional, or for a certain subspace M of $L_p(1<p<\infty)$, this condition is also sufficient. In the last mentioned case, M consists of that subset of L_p containing those functions which vanish off a set of finite measure [9]. M can also be chosen to be the set of simple functions, for $X = L_1$, as in [15].

For the case $X = \ell_p$ $(1 < p < \infty)$, if M is the subspace of ℓ_p consisting of those elements having only finitely many nonzero components, then for any finite dimensional subset Γ, the Deutsch-Morris necessary condition is also sufficient [9].

When p = 1 and M consists of those functions of L_1 which vanish off a set of finite measure (respectively, of those elements having only finitely many nonzero components), Deutsch and Morris [9] have shown that for the choice of *one* functional, (L_1, M, $\{x^*\}$) (respectively (ℓ_1, M, $\{x^*\}$)) has property SAIN. Other dense subspaces M may or may not work! For more than one functional, SAIN has been discussed by Lambert [14, 15]. Deutsch and Morris [9] also give a couple of results in this direction, using the notion of "eventually constant" elements. These are provided now.

Definitions [9] 1. *An element* $y \in L_\infty$ *is said to be* eventually constant, *if there exists a set* T_y *such that* $\mu(T_y) < \infty$ *and* $y(t) =$ *constant for* $t \notin T_y$, where μ *is the measure associated with the underlying measure space.*

2. *An element* $(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell_\infty$ *is* eventually constant *if there is an index* N *such that* $\xi_N = \xi_{N+1} = \ldots$.

3. *If* $1 \leqslant p < \infty$ *and* $x^* \in L_p^*$, *the* representer *of* x^* *is that element* $y \in L_q$ *such that* $x^*(x) = \int xy\,d\mu$ *for all* $x \in L_p$ *and* $\|x^*\| = \|y\|_q$.

Theorem [9] *Let* $X = L_1$. M *is the set of functions in* L_1 *which vanish off a set of finite measure and* $\Gamma \subset L_1^*$ *is a finite dimensional subset. If for each* $\gamma \in \Gamma$, *the* representer *for* γ *is eventually constant, then* (L_1, M, Γ) *has* property SAIN.

Corollary [9] *Let* $X = \ell_1$. M *is the set of elements of* ℓ_1 *having only finitely many nonzero components and* $\Gamma \subset \ell_1^*$ *is a finite dimensional subset. If each* $\gamma \in \Gamma$ *is eventually constant, then* (ℓ_1, M, Γ) *has property* SAIN.

Holmes and Lambert [12] provide a geometrical approach to the investigation of SAIN and answer the question of sufficiency of the Deutsch-Morris condition. By restricting one's attention to the case when M is a dense, convex subset of X (rather than a dense subspace) and considering the finite codimensional subspace $\Gamma_\perp = \{x \in X;\ \gamma(x) = 0 \text{ for } \forall\, \gamma \in \Gamma\}$ of X, one can consider the best (rather than dense) approximation problem connected with $\Gamma_\perp$. Observe that in many spaces of interest, $\Gamma_\perp$ is a Chebyshev subspace, i.e., the set of best approximations to every $x \in X$ by means of elements of $\Gamma_\perp$ consists of precisely one element. The following definitions help to describe this geometric approach. (Consult Smatkov [27], for a study of SAI in Banach spaces, from a geometrical point of view).

Definitions 1. *For each* $x \in X$ *and a subset* L *of* X, *the set* $P_L(x)$ *defined by*

$$P_L(x) = \{y \in L;\ \|x - y\| = \operatorname{dist}(x, L)\}$$

is the set of best approximations to x by means of elements of L.

2. x *is* orthogonal *to* L, *written as* $x \perp L$, *if the zero element* Θ *of* X *belongs to* $P_L(x)$.

3. *The* metric complement *of* L *in* X *is given by*

$$L^\Theta = \{x \in X;\ x \perp L\}.$$

4. *For* $x \in X$, $x \neq \Theta$, *the* peak set *of* x *is given by*

$$P(x) = \{x^* \in S(X^*);\ x^*(x) = \|x\|\}.$$

For the sake of simplicity, set $\Gamma_\perp = L$.

R e m a r k. Whenever $x \in L^\Theta$, the sets $x - P_L(x)$ and $\|x\|\,S(X) \cap (x + L)$ are identical and denoted by G_x.

Theorem (Holmes-Lambert [12]) a) (X, M, Γ) *has property* SAIN *if and only if whenever* $x \in L^{\Theta}$, $G_x = \overline{M \cap G_x}$, *where the bar denotes the closure in* X.

b) $L^{\Theta} \subset M$ *implies* (X, M, Γ) *has property* SAIN.

c) (X, M, Γ) *has property* SAIN *implies* $L^{\Theta} = \overline{M \cap L^{\Theta}}$.

d) (X, M, Γ) *has property* SAIN *implies* $S(X) \cap L^{\Theta} = \overline{M \cap S(X) \cap L^{\Theta}}$.

Remark. The reverse implication for c) and d) is true if $\dim \Gamma = 1$. It is an open question whether the condition c) or d) is equivalent to (X, M, Γ) having property SAIN, when the dimension of Γ exceeds one, but is finite.

The next result reveals that for important special classes of subspaces Γ and dense subsets M, a strong form of the Deutsch-Morris condition and the sufficient condition b) of the preceding theorem are each equivalent to (X, M, Γ) having property SAIN.

Definitions 1. L *is an* EF-subspace *of* X, *if for every* $x \in X$, *the set* $P_L(x)$ *is nonempty and finite dimensional.*

2. *M is* affine, *if for* $m_1, m_2 \in M$, $tm_1 + (1-t)m_2 \in M$, for all real t.

Definition 2 gives a generalization of the notion of convexity.

Theorem [12] *If* L *is an* EF-*subspace of* X *and* M *is dense and affine, the following are equivalent:*

a) (X, M, Γ) *has property* SAIN.

b) *Each nonzero* $\gamma \in \Gamma$ *attains its norm on* $B(X) \cap M$ *or not at all.*

c) $L^{\Theta} \subset M$.

Obviously the conditions of this theorem imply that M must be a linear subspace of X, since property SAIN implies $\Theta \in M$, by condition a) of the preceding theorem.

Definition *The* norm duality map J *is the point-to-set map of* X *into the* w*-*compact convex subsets of* X* *given by*

$$J(\Theta) = \Theta$$

$$J(x) = \|x\| P(x), \qquad x \neq \Theta.$$

This has been studied in great detail by Browder [2] and Cudia [4]. It turns out that when X is reflexive, $J(X) = X^*$, and when X is complete, $J(X)$ is dense in X^*.

Definitions 1. *An element* $x \in X$, $x \neq \Theta$, *is a* smooth point of X *if there exists a unique functional* $x^* \in X^*$, *associated with it, such that* $x^*(x) = \|x\|$ *and* $\|x^*\| = 1$. sm(X) *is the* set of smooth points of X.

2. X *is* strictly convex *if for every pair of points* $x_1, x_2 \in X$ *which are distinct,* $\|x_1\| \leq 1$, $\|x_2\| \leq 1$ *implies that* $\|x_1 + x_2\| < 2$.

Remark. When x is a smooth point of X, J(x) is a singleton and when X is strictly convex, $J(x_1) \cap J(x_2) = \emptyset$ for every pair $\{x_1, x_2\}$ of distinct points.

Theorem [12] *Suppose* $\Gamma \subset J(M)$ *and* $S(\Gamma) \subset sm(X^*)$. *Then* (X, M, Γ) *has property* SAIN.

Theorem [12] *Suppose that* X *is reflexive and strictly convex and that* M *is a dense linear subspace of* X. *The Deutsch-Morris necessary condition is always sufficient for* (X, M, Γ) *to have* SAIN *if and only if* J(M) *is a linear subspace of* X^*.

This theorem shows that for a special class of spaces X, the sufficiency is achieved for the Deutsch-Morris necessary condition whenever the subset J(M) is a linear subspace of X^*. The theorem also yields a characterization of Hilbert spaces in terms of property SAIN.

Corollary [12] *If* X *is a Hilbert space, the Deutsch-Morris necessary condition is also sufficient for* (X, M, Γ) *to have property* SAIN.

Conversely, if X is reflexive and strictly convex and the Deutsch-Morris necessary condition is also sufficient for (X, M, Γ) to have property SAIN, then it can be concluded that X is a Hilbert space.

For other applications of the concept of norm duality map and to appreciate the facility which the preceding theorem commands, especially in $L_p(\mu)$ spaces ($1 \leq p < \infty$, μ a positive measure), refer to [12].

3 SAIN in C(T) and C[a, b].

As has already been pointed out, the property of SAIN has been studied for Hilbert spaces [9, 10, 12, 24, 27], strictly convex spaces [9, 12, 24], reflexive spaces [9, 12], L_p spaces [9], ℓ_p spaces [9], both having the restraint that $1 < p < \infty$ and even for L_1 spaces [9, 15] and ℓ_1 spaces [9, 14].

We now turn our attention to C(T), the space of real-valued continuous functions defined on a compact Hausdorff space T and endowed with the supremum norm.

In [9], Deutsch and Morris observed that if M is a dense subalgebra of C(T) or a dense sublattice of C(T) containing the constants and if for a finite set of distinct points $\{t_i\}_{i=1}^n \in T$, Γ consists of the associated point evaluation functionals, then (C(T), M, Γ) has property SAIN. Some examples given by these authors reveal that if M is merely a dense subspace or even a dense subspace containing the constants or if Γ contains arbitrary functionals other than point evaluations, (C(T), M, Γ) may or may not have property SAIN. The conjecture that a necessary condition for (C(T), M, Γ) to have property SAIN is that Γ is contained in the linear span of the finite number of point evaluation functionals is not always true either!

It is rather surprising that of all the subsequent characterizations of SAIN, not one yields this original result in any obvious or natural way! Perhaps this implies that the general characterizations of SAIN are not yet refined enough to give much useful information in C(T). We are thus still a long way from understanding what is going on in C(T).

Lambert [15] gives sufficient conditions on $f \in C(T)$ and M dense in C(T), such that (C(T), M, Γ) has property SAIN. The following definitions are necessary to state his result.

Definitions 1. *A set* E *contained in a set* F *is* F-extremal *if* $tx + (1-t)y \in E$, *with* $0 < t < 1$ *and* $x, y \in F$, *implies that* $x, y \in E$.

2. *A hyperplane* H *is said to* support *a set* K, *if it bounds* K *and intersects* K.

Denote by Q(x), the intersection of all B(X)-supporting hyperplanes at x and by rca(T), the set of regular, countably additive measures defined on T.

Theorem [15] *Let* $f \in S(C(T))$ *and* $Q(f) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\|f\|)$, *where* $\varphi_i \in \text{rca}(T)$. *If* $(C(T), M, \{\varphi_i\}_{i=1}^n)$ *has property* SAIN, *then given any finite collection* $\mu_i \in \text{rca}(T)$ *and* $\epsilon > 0$, *there exists an element* $m \in M$ *such that* $\|f - m\| < \epsilon$, $\int f d\mu_i = \int m d\mu_i$ *and* $\|f\| = \|m\|$.

In particular, if f attains its norm at most a finite number of times, then for any dense subalgebra M of C(T) and any finite collection of functionals $\{\mu_i\}_{i=1}^n \in C(T)^*$, the triple $(C(T), M, \{\mu_i\}_{i=1}^n)$ has property SAIN.

Johnson [13] provides certain characterizations of SAIN in C[a, b], which prove to be the background for the general result of Lambert [16], given in the next section.

Definitions 1. *A linear functional* $x^* \in X^*$ *is a* SAIN functional *if for any dense subset* M *of* X, $(X, M, \{x^*\})$ *has property* SAIN.

2. *A finite sequence* $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ *is a* SAIN sequence *if every* x^* *contained in the linear span of* $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ *is a* SAIN *functional.*

3. *A linear functional* $x^* \in X^*$ *is* purely finitely atomic *if the associated Borel measure is purely atomic and has at most a finite number of atoms.*

4. *If* $x \in X$ *and* $x^* \in X^*$, x^* *is* nonextremal with respect to x *if* $|x^*(x)| < \|x^*\| \; \|x\|$.

5. *A sequence* $\{x_i^*\}_{i=1}^n \in X^*$ *is* nonextremal *if it is nonextremal with respect to every nonzero element in* X.

Remark. A necessary condition for any triple (X, M, Γ) to have property SAIN is that Γ be a SAIN sequence, M being assumed to be a dense subset of X.

Whether this is also a sufficient condition is a natural question, with an affirmative answer when $X = C[a, b]$ and $M = \mathscr{P}$. If M is a dense subalgebra (containing the constants) of $\mathscr{P}$, this is still a sufficient condition. See Johnson's paper, for examples.

The following theorem of Johnson provides sufficient conditions for $(C[a, b], \mathscr{P}, \Gamma)$ to have property SAIN.

Theorem [13] *Suppose* $\Gamma \equiv \{\gamma_i\}_{i=1}^n$ *is a* SAIN *sequence in* C[a, b] *with* γ_1 *purely finitely atomic and* $\{\gamma_i\}_{i=2}^n$ *nonextremal on* $C[a, b] \setminus \mathscr{P}$. *If* $f \in C[a, b]$ *is such that* $|\gamma_1(f)| < \|\gamma_1\|$, *then* $(C[a, b], \mathscr{P}, \Gamma)$ *has property* SAIN.

The examples in [13] are instructive and afford a good insight into the abstract setting of the SAIN problem.

In a recent manuscript [17], Lambert showed that the twice continuously differentiable cubic splines possess property SAIN on C[a, b], where the functionals considered are point evaluations once more! In [3], Chui et al. provide a simple proof for the general case, stated below.

Theorem [3] *If* S^k *denotes the set of splines of order* k *and continuity class* C^{k-2} *with a finite number of knots in* [a, b] *and* Γ *is the linear span of the point evaluation functionals, then* $(C[a, b], S^k, \Gamma)$ *has property* SAIN.

These are the only papers known to deal with splines as the class of approximants.

4 SAIN for an arbitrary triple (X, M, Γ).

It has been observed that the necessary condition of Deutsch and Morris is sufficient for (X, M, Γ) to have property SAIN only under certain restrictions on the entities which constitute the triple. It will be worthwhile to discover characterizations of SAIN for an arbitrary triple. With this aim in mind, McLaughlin and Zaretski [20] considered the case when M is a dense convex *subset* of X (even earlier than [12]), and established a necessary and sufficient condition, for a given triple to have property SAIN.

Definition [20] The interpolatory set *of* $x \in X$ with respect to Γ *is given by*

$$I_{x,\Gamma} = \{y \in X;\ \gamma(y) = \gamma(x) \text{ for } \gamma \in \Gamma\}.$$

An element $y \in I_{x,\Gamma}$ is *minimal* if and only if, for every $z \in I_{x,\Gamma}$, $\|y\| \leqslant \|z\|$. Denote by T_x the set of all minimal elements.

Theorem [20] (X, M, Γ) *has property* SAIN *if and only if* (T_x, M, Γ) *does, for each* $x \in X$.

Thus, the investigation of the usual triple having property SAIN is reduced to the investigation of the new triple having it! However, the problem of characterization of SAIN still remains.

The following corollaries are applications of the theorem to particular normed linear spaces.

Corollary [20] *If* X *is strictly convex,* (X, M, Γ) *has property* SAIN *if and only if* M *contains each minimal element.*

Corollary [20] *If* X *is a Hilbert space and* $\{x_i\}_{i=1}^n$ *denotes the set of Riesz representations of the corresponding elements of* Γ, *then* (X, M, Γ) *has property* SAIN *if and only if* M *contains the linear subspace spanned by* $\{x_i\}_{i=1}^n$.

By employing a theorem of Stafney [24], McLaughlin and Zaretski point out that it is possible for triples to have property SAIN, with neither the dense subset M nor any of its subsets being a dense subspace of X.

Lambert [16] successfully obtained an interesting characterization for an arbitrary triple to have property SAIN. He uses ideas from his earlier paper [15] and from [5], effectively utilizes Johnson's results and provides geometric characterizations of those results.

Denote the set $(x + \Gamma_\perp) \cap S(X)$ by A_x. Let $E(A_x)$ be the minimal B(X)-extremal subset containing A_x. $E(A_x)$ may not be closed. Let $F(A_x)$ therefore represent the minimal closed B(X)-extremal subset containing A_x. The main result of Lambert is:

Theorem [16] *Let* M *be a dense subspace of* X *and let* Γ *be a finite dimensional subspace of* X^*. *The following are equivalent:*

a) (X, M, Γ) *has property* SAIN.
b) $E(A_x) \cap M$ *is dense in* $E(A_x)$, *for all* $x \in S(X) \setminus M$.
c) $F(A_x) \cap M$ *is dense in* $F(A_x)$, *for all* $x \in S(X) \setminus M$.

It will be interesting to check about the nature of the sets A_x, $E(A_x)$ and $F(A_x)$, for various concrete normed linear spaces, so as to grasp the significance of these sets. This is the only known characterization of property SAIN for an arbitrary triple (X, M, Γ).

A subsequent paper of Lambert [18] discusses this characterization at some length and treats the case when $(x + \Gamma_\perp) \cap K(x) \cap M$ is dense in $(x + \Gamma_\perp) \cap K(x)$, where $K(x)$ is a closed convex body containing x. It is also interesting to note that the section on applications of the theory so developed indicates that SAIN, one sided approximation with side conditions (OSAS), and restricted range approximation with side conditions (RRAS) can all be visualised as part of a generalized, dense, constrained approximation process.

For SAIN in $C^n[a, b]$, with function f such that $f^{(n)}$ is strictly piecewise monotone, $n \geq 1$, see Lambert [19].

Definitions 1. *A function* f, *defined on* [a, b], *is said to be* piecewise monotone *if* [a, b] *may be partitioned into a finite number of subintervals, on which* f *is alternately nondecreasing and nonincreasing.*

2. *A function* f, *defined on* [a, b], *is* strictly piecewise monotone, *if it is piecewise monotone, and is nonconstant on any open subinterval of* [a, b].

3. *The functions* f *and* g, *defined on* [a, b], *are* comonotone *on* [a, b], *if they are piecewise monotone and are alternately nondecreasing and nonincreasing on the same subintervals.*

4. *The functions* f *and* g, *defined on* [a, b], *are* copositive, *if they are comonotone and* $f(x)g(x) \geq 0$ *for all* $x \in [a, b]$.

Let $f \in C^k[-1,1]$ and let $\{x_i\}_{i=1}^m$ be any set of prescribed points in $[-1,1]$. Then there exist a constant $d > 0$ and a sequence $\{p_n\}$, where p_n is a polynomial of degree $\leq n$ such that for all sufficiently large n

$$\|f^{(i)} - p_n^{(i)}\| < \frac{d}{n^{k-i}} \omega\left(f^{(i)}, \frac{1}{n}\right) \qquad i = 0, 1, \ldots, k$$

$$p_n^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \qquad j = 1, \ldots, m, \; i = 0, 1, \ldots, k$$

and $$\|f^{(i)}\| = \|p_n^{(i)}\|, \qquad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Proposition [11] *Let* $f \in C[0, 1]$ *be a strictly piecewise, monotone function. Then, given* $\epsilon > 0$ *and* $t_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, k$, *there exists a polynomial* p *comotone with* f, *with* $\|f - p\| < \epsilon$ *and* $p(t_i) = f(t_i)$, $i = 1, \ldots, k$. *If, in addition,* p *interpolates at the zeros and "norm attaining points" of* f, *then* p *is copositive with* f *and* $\|f\| = \|p\|$.

Theorem [19] *Let* $f \in C^n[0, 1]$ *be a strictly piecewise, monotone function. Then, given* $\epsilon > 0$ *and* $T = \{t_{i_j}, i = 0, 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, k_i\}$, *there exists a poly-*

nomial p *such that* $f^{(i)}$ *and* $p^{(i)}$ *are comonotone,* $\| f^{(j)} - p^{(j)} \| < \epsilon$, $f^{(j)}(t_{i_j}) = p^{(i)}(t_{i_j})$ *for* $i = 0, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$. *Further, if* p *and its derivatives interpolate at all zeros and "norm attaining points" of* f *and its derivatives, then* $p^{(i)}$ *is copositive with* $f^{(i)}$ *and* $\| f^{(i)} \| = \| p^{(i)} \|$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Remark. If $f^{(n)}$ is not strictly piecewise monotone, the solution for SAIN may not exist.

5 Concluding Remarks

The concept of relative completion may be of importance in connection with SAIN – for, in fact, it is basic in the case of non-reflexive Banach spaces, thus perhaps for C[0, 1]. This notion was introduced by E. Gagliardo in 1960. See H. Berens [1] and P. L. Butzer and R. J. Nessel [3], for details.

The present author has been interested in the study of SAIN for weighted spaces. The investigation of SAIN for Lindenstrauss spaces, C(T) being a suitable example of such a space, using the notion of norm duality map and certain properties of the unit ball of the associated dual space [7, 20, 22, 23], which, by definition is isometric to an $L_1(\mu)$ space, for some suitable measure μ, is being conducted. These results will constitute the subject matter of a paper to be published elsewhere.

It may be interesting to find other characterisations of SAIN for arbitrary triples and for various known normed linear spaces. The norm preservation condition is fairly stringent and has to be tackled with dexterity!

References

[1] Berens, H.: Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banachräumen. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1968. = Lecture Notes in Mathematics, No. 64

[2] Browder, F.: Multivalued monotone nonlinear mappings and duality mappings in Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **118** (1965) 338–351

[3] Butzer, P. L.; Nessel, R. J.: Fourier Analysis and Approximation. New York: Academic Press 1971, pp. 373–376 and 390

[4] Cudia, D.: The geometry of Banach spaces: Smoothness. Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964) 284–314

[5] Chui, C. K.; Rozema, E. R.; Smith, P. W.; Ward, J. D.: Simultaneous spline approximation and interpolation preserving norms. Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976) 98–100

[6] Deutsch, F.: Simultaneous interpolation and approximation in linear topological spaces. J. SIAM Appl. Math. **14** (1966) 1180–1190

[7] Deutsch, F.; Lindahl, R.: Minimal extremal subsets of the unit sphere. Math. Ann. **197** (1972) 251–278

[8] Deutsch, F.; Morris, P. D.: On simultaneous approximation and interpolation which preserves the norm. Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969) 812–814

[9] Deutsch, F.; Morris, P. D.: On simultaneous approximation and interpolation which preserves the norm. J. Approximation Theory **2** (1969) 355–373

[10] Deutsch, F.; Morris, P. D.: Simultaneous approximation and interpolation with preservation of norm. In: Talbot, A. (Ed.): Approximation Theory. New York: Academic Press 1970, pp. 309–313

[11] Hill, D.; Passow, E.; Raymon, L.: Approximation with interpolatory constraints. Illinois. J. Math. **20** (1976) 65–71

[12] Holmes, R.; Lambert, J. M.: A geometrical approach to property (SAIN). J. Approximation Theory **7** (1973) 132–142
[13] Johson, D. J.: SAIN approximation in C[a, b]. J. Approximation Theory **17** (1976) 14–34
[14] Lambert, J. M.: Simultaneous approximation and interpolation in ℓ_1. Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972) 150–152
[15] Lambert, J. M.: Simultaneous approximation and interpolation in L_1 and C(T). Pacific J. Math. **45** (1973) 293–296
[16] Lambert, J. M.: Conditions for simultaneous approximation and interpolation with norm preservation in C[a, b]. Pacific J. Math. **66** (1976) 173–180
[17] Lambert, J. M.: Simultaneous approximation and interpolation which preserves the norm by cubic splines in C[a, b]. Submitted for publication
[18] Lambert, J. M.: Dense constrained approximation. To appear in J. Approximation Theory.
[19] Lambert, J. M.: Approximation with interpolatory and norm constraints. To appear in Pacific J. Math.
[20] Lau, Ka-Sing: The dual ball of a Lindenstrauss space. Math. Scand. **33** (1973) 323–337
[21] Law, A. G.; Mc Kerrachen, A. L.: Sharpened polynomial approximation. Pacific J. Math. **51** (1974) 491–494
[22] Lazar, A. J.: The unit ball in conjugate L_1-spaces. Duke Math. J. **39** (1972) 1–8
[23] Luna, G.: The dual of a theorem of Bishop and Phelps. Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1975) 711–714
[24] McLaughlin, H. W.; Zaretski, P. M.: Simultaneous approximation and interpolation with norm preservation. J. Approximation Theory **4** (1971) 54–58
[25] Paszkowski, S.: On approximation with nodes. Rozprawy Mathematyezne **14** Warsaw (1957)
[26] Singer, I.: Remarque sur un theorème d'approximation de H. Yamabe, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Math. Natur. **26** (1959) 33–34
[27] Smatkov, V. A.: On simultaneous approximation and interpolation in Banach spaces. Dokl. Akad. Nauk. Armyanskoi SSR, **53** (1971) 65–70 (Russian)
[28] Stafney, J. D.: A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to C[0, 1]. Duke Math. J. **34** (1967) 393–396
[29] Wolibner, W.: Sur un polynome d'interpolation. Colloq. Math. **2** (1951) 136–137
[30] Yamabe, H.: On an extension of the Helly's theorem. Osaka Math. J. **2** (1950) 15–17
[31] Young, B. W.: Piecewise monotone polynomial interpolation. Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967) 642–643

Dr. Geetha S. Rao
Ramanujan Institute
University of Madras
Madras–600 005 Indien

(Eingegangen: 22. 7. 1977;
revidierte Fassung: 8. 8. 1978)
A 261

Buchbesprechungen

Anger, B., Bauer, H., Mehrdimensionale Integration (Sammlung Göschen, Bd. 2121), Berlin-New York: Walter de Gruyter 1976, 188 S., kart., DM 16,80.

Der vorliegende Band der seit einiger Zeit in neuem Gewand erscheinenden Sammlung Göschen mit dem Untertitel „Eine Einführung in die Lebesguesche Theorie" füllt eine Marktlücke. Er liefert eine moderne Darstellung der für die Grundvorlesungen über Analysis wichtigen Integrationstheorie mit dem Ziel einer vollständigen Analyse des Transformationssatzes für Integrale. Der zugrundeliegende Integralbegriff basiert auf der von L. Schwartz angeregten Entwicklung der Theorie der Radon-Maße auf Hausdorffschen topologischen Räumen.

Die Autoren gehen vom Integralbegriff für stetige reelle Funktionen auf einem kompakten Intervall aus, erweitern diesen unter Zuhilfenahme einer speziellen Formulierung des Satzes von Fubini für stetige Funktionen auf kompakten Quadern des $\mathbf{R}^p$ (für beliebiges $p \geqslant 1$) und setzen ihn schließlich mit Hilfe von Ober- und Unterintegral auf stetige Funktionen auf beliebigen kompakten Mengen des $\mathbf{R}^p$ fort. Somit wird für jede kompakte Teilmenge K des $\mathbf{R}^p$ ein Radon-Maß λ_K auf K gewonnen. Die Familie $(\lambda_K)_{K \in \mathscr{K}}$ dieser Radon-Maße, wobei K das System $\mathscr{K}$ der kompakten Teilmengen des $\mathbf{R}^p$ durchläuft, wird Lebesgue-Maß auf dem $\mathbf{R}^p$ genannt. Es ist als „projektive Familie" von Maßen in dem Sinne zu deuten, daß die folgende Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist: Für je zwei Mengen $K, L \in \mathscr{K}$ mit $L \subset K$ induziert λ_K auf L gerade das Maß λ_L.

Dieser zunächst abstrakt erscheinende Zugang zum Begriff des Lebesgue-Integrals besitzt gegenüber früheren beachtliche Vorzüge. Er schafft die Möglichkeit, von Beginn an eine allgemeine Theorie der Radon-Maße (nicht nur des Lebesgue-Maßes) zu entwickeln, läßt Erweiterungen der Theorie für beliebige metrische Räume (anstelle des $\mathbf{R}^p$) zu und legt die Grundlagen für einen Ausbau der Theorie im Hinblick auf die Integration von Differentialformen (auf Mannigfaltigkeiten).

Der so eingeführte Integralbegriff erhält die für das Berechnen von Integralen wichtigen „Integrationsregeln" sowie seine „geometrische Interpretierbarkeit". Darüber hinaus werden durch den gewählten Ansatz eine einheitlichere Beweistechnik und ein unmittelbarer Zugang zu den Anwendungen erreicht.

Die Präsentation des Textes ist äußerst ansprechend. Offenbar waren Meister der mathematischen Darstellung am Werk. Erstaunlich bleiben Prägnanz und Kürze des Gesamttextes – Eigenschaften, welche das Büchlein zum wertvollen „portmanteau" des Mathematikstudenten werden lassen. Als erfreuliche Zugabe bieten die Autoren einen Anhang, welcher eine zeitgemäße Übersicht über die verschiedenen Maßbegriffe und deren Beziehungen zueinander enthält. Die Liste der am Aufbau der Maßtheorie beteiligten Mathematiker von Rang regt an, die historischen Spuren und Leistungen eines so traditionsreichen Gebietes trotz der neuesten Entwicklung im Bewußtsein zu behalten.

Der sichere Erfolg dieses ausgezeichneten Lehrbuches über das Lebesgue-Integral nährt die Vorfreude auf eine Fortsetzung des Werkes unter Einbeziehung der Integration von Differentialformen. Durch diese Abrundung würde die systematische Diskussion des Volumens der p-dimensionalen Einheitskugel um die ihrer Oberfläche in wünschenswerter Weise ergänzt.

Tübingen H. Heyer

Lopez, J. M., Ross, K. A., Sidon Sets (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 13), Maidenhead-New York: Marcel Dekker 1975, 193 S., £ 8.00.

Eine der zahlreichen äquivalenten Charakterisierungen von Sidon-Mengen auf $\mathbf{Z}$ lautet wie folgt: $E \subseteq \mathbf{Z}$ ist eine Sidon-Menge genau dann, wenn für jede beschränkte Funktion ϕ

auf **Z** ein reguläres Borelmaß auf dem Torus existiert, dessen Fourier-Stieltjes Transformierte auf E mit ϕ übereinstimmt. Das Studium von Sidon-Mengen hat sich seit dem Ende der 50er Jahre, ausgehend von früheren Untersuchungen lakunärer Mengen ganzer Zahlen, zu einem eigenständigen Zweig der harmonischen Analyse entwickelt. Vor allem seit dem Jahre 1970 ist eine große Anzahl von Publikationen auf diesem Gebiet erschienen. Ein wichtiger Anstoß zu dieser Entwicklung waren dabei neben einigen anderen sicherlich die Ergebnisse von S. W. Drury und M. Déchamps-Gondim, die auch in diesem Band eine zentrale Stellung einnehmen.

Die Autoren geben in dem vorliegenden Band eine brauchbare Einführung in diese Theorie, und zwar im Rahmen von kompakten, abelschen Gruppen. Zugleich ist es ihnen auch gelungen, durch die Zusammenstellung der wesentlichen, größtenteils relativ neuen Resultate, einen sehr guten Überblick über dieses Gebiet und die verschiedenen Zusammenhänge zu bieten. Durch die Präsentation aller Beweise wird der Leser auch mit den verwendeten Methoden, etwa Riesz-Produktion, vertraut gemacht. Wie groß die Zahl der bei diesen Untersuchungen in Betracht gezogenen Eigenschaften ist, sei durch die folgende Aufzählung von verschiedenen Typen von Mengen, die in diesem Band eine Rolle spielen, illustriert: Hadamard-Mengen (= lakunäre Mengen), Rider-Mengen, Stechkin-Mengen, $\Lambda(q)$-Mengen, unabhängige und dissoziierte Mengen, Mengen mit der Fatou-Zygmund Eigenschaft und andere mehr.

Wien H. G. Feichtinger

Cazacu, C. A., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher (Mathematische Reihe, Bd. 51), Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1975, 360 S., geb., DM 88,–

Seit den sechziger Jahren ist eine Reihe von Lehrbüchern der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen erschienen. So stellt sich bei jeder Neuerscheinung auf diesem Gebiet die Frage, ob sie eine Lücke in der bestehenden Literatur ausfüllt. Das ist bei dem vorliegenden Werk sicher der Fall.

Zunächst sei ein Abriß des Inhalts gegeben. In Kapitel I werden zuerst holomorphe Funktionen auf offenen Teilen Δ von $\mathbf{C}^n$ definiert, und zwar als partiell holomorphe Funktionen; ihre Stetigkeit wird dann bewiesen (Hartogsscher Hauptsatz). Es folgt die Definition der Fréchet-Räume $\mathscr{O}(\Delta)$, die Taylorentwicklung holomorpher Funktionen und eine genaue Beschreibung des Konvergenzgebietes von Potenzreihen. Das Kapitel schließt mit dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz und den daraus sofort folgenden Eigenschaften des Potenzreihenrings $\mathscr{O}_0$.

Das zweite Kapitel stellt topologische Hilfsmittel in ungewöhnlicher Ausführlichkeit bereit. Unter anderem werden folgende Begriffe erklärt: Garben (als unverzweigte Überlagerungen), Garben von Moduln über Garben von Ringen, kohärente Garben, Čechsche Kohomologie mit Werten in einer Garbe, welke, feine, weiche Garben, Faserbündel, Garbe der Schnitte in einem Faserbündel, Vektorraumbündel.

In Kapitel III wird der Hauptgegenstand des Buches eingeführt, die komplexen Mannigfaltigkeiten. Insbesondere wird für unverzweigte Gebiete über $\mathbf{C}^n$ die Existenz einer Holomorphiehülle gezeigt. Die Holomorphiegebiete über $\mathbf{C}^n$ werden einmal nach Cartan-Thullen und zum anderen durch die Holomorphiekonvexität charakterisiert. Schließlich wird die Kohärenz der Strukturgarbe bewiesen und die Garbe der meromorphen Funktionen definiert.

Kapitel IV ist den Cousinschen Problemen gewidmet. Zunächst werden die verschiedenen Formen der Cousin-Probleme und des Poincaré-Problems auf komplexen Mannigfaltigkeiten diskutiert und der Zusammenhang mit Kohomologiegruppen dargestellt. Sodann werden die Cousin-Probleme für den abgeschlossenen Kubus gelöst. Dazu werden folgende Hilfsmittel entwickelt: Die Lösung der inhomogenen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen mittels des Pompeiuschen Integrals $\iint \frac{\alpha(\zeta, \lambda)}{\zeta - \lambda} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$, Grothendiecks Satz über die Trivialität der d''-Kohomologie des Kubus, der Satz von Runge für einfach zusammenhängende Zylindergebiete, holomorphe matrixwertige Funktionen, das Cartansche Verheftungslemma und komplex-analytische Faserbündel.

Im fünften Kapitel werden der Satz von Dolbeault über Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten und Cartans Theoreme A und B für den abgeschlossenen Kubus bewiesen.

Das Kapitel VI bringt schließlich die Theorie der Steinschen Mannigfaltigkeiten. Die Theoreme A und B werden zunächst für holomorph-konvexe kompakte Teile einer Steinschen Mannigfaltigkeit, dann mit Hilfe von Approximationssätzen für die ganze Mannigfaltigkeit, bewiesen. Als Anwendungen werden u. a. gebracht: Sätze über die Cousin-Probleme und das Poincaré-Problem, die Charakterisierung Steinscher Mannigfaltigkeiten durch das Verschwinden der ersten Kohomologie jeder kohärenten Idealgarbe und der Satz von Serre, der besagt, daß jede eigentliche Überlagerung einer Steinschen Mannigfaltigkeit Steinsch ist.

Die deutsche Ausgabe des Buches wurde um einen Anhang „zum Begriff des komplexen Raumes" erweitert. Hier wird zunächst das Kapitel über Garben durch die Begriffe Prägarbe, Bild- und Urbildgarbe ergänzt. Dann werden – teils in Anlehnung an H. Holmann (in Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 2. Aufl., Berlin 1970), aber ausführlicher – die Kategorien der geringten, der k-algebrierten Räume, und der komplexen Räume im Sinne von Grauert eingeführt, sowie deren wichtigste Unterkategorien (die der reduzierten, der normalen und der komplexen Räume im Sinne von Behnke und Stein).

Der Inhalt dieses Buches gehört heute längst zum klassischen Bestand der komplexen Analysis. Die Wissenschaft hat in den letzten zwanzig Jahren mehr das Reich der komplexen Räume durchforscht, auf das hier nur der Anhang hinweist. Vielleicht ist gerade das der Grund, warum vieles vom Inhalt des vorliegenden Buches in neueren Lehrbüchern sonst nicht zu finden ist, so z. B. der Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und die Charakterisierung der Konvergenzgebiete von Potenzreihen. Ich halte das Buch für ein gutes, relativ leicht lesbares Lehrbuch. Die Darstellung ist klar, die Bezeichnungen sind einheitlich, alle Beweise vollständig (bis auf den Anhang) und mit einer Ausführlichkeit durchgeführt, für die heutigen Autoren oft die Geduld fehlt. So nimmt z. B. der Beweis des Weierstraßschen Vorbereitungs- und Divisionssatzes, der nach dem Muster von Hörmander (An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, London 1966) geführt wird, bei Andreian Cazacu mehr als doppelt soviel Platz ein. Daß manche Bezeichnungen von den üblichen abweichen (z. B. steht „Überlagung" für eine beliebige stetige Abbildung), dürfte an der Übersetzung liegen und kaum stören. Größere Fehler habe ich nicht gefunden. Die Hartogs-Figur (Beispiel eines Nicht-Holomorphie-Gebiets, Seite 73) ist für $n \neq 2$ falsch beschrieben. In der Definition des k-algebrierten Raums (Seite 323) fehlt die Bedingung, daß $s_x \mapsto c \cdot s_x$ für jedes $c \in k$ eine stetige Abbildung ist.

Ich möchte hier noch auf einige Themenkreise hinweisen, die Andreian Cazacu in ihrem Buch nicht behandelt hat. Das ist einmal die lokale analytische Geometrie (z. B. alle Fragen, die analytische Mengen betreffen, insbesondere der Rückertsche Nullstellensatz und die Kohärenz der zugehörigen Idealgarbe); weiter die Frage der Holomorphiehüllen von komplexen Mannigfaltigkeiten, die keinem $\mathbf{C}^n$ überlagert sind; Randeigenschaften von Holomorphiegebieten (Levi-Problem), q-Vollständigkeit.

Allgemein gibt es heute wohl kein Lehrbuch, das gründlicher in die Theorie der Holomorphiegebiete, der Holomorphiehüllen von Gebieten über $\mathbf{C}^n$ und in die Theorie der Steinschen Mannigfaltigkeiten einführt. Es ist allen Interessierten zum Studium dieser Gebiete, Dozenten auch als Vorlesungsgrundlage sehr zu empfehlen.

München K. Wolffhardt

Grunsky, H., Lectures on theory of functions in multiply connected domains (Studia Mathematica, Skript 4), Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1978, 253 pp., paper, DM 32,–

Dies ist das erste Buch, das ausschließlich der Abbildungstheorie nicht-einfach zusammenhängender ebener Gebiete gewidmet ist. Auf Gebiete von endlichem Zusammenhang wird besonders eingegangen.

Zuerst werden Abbildungen durch mehrdeutige Funktionen (d. h. Abbildungen der universellen Überlagerungsfläche) auf eine Kreisscheibe untersucht. Im folgenden längsten Kapitel werden schlichte Abbildungen betrachtet, u. a. auf eine große Zahl von verschiedenen Typen von Normalgebieten. Weiter wird eine Lösung des Koeffizientenproblems für schlichte Funktionen gegeben; diese „Grunskyschen Ungleichungen" haben für den einfach zusammenhängenden Fall eine fundamentale Bedeutung gewonnen. Schließlich werden beschränkte Funktionen und Abbildungen auf mehrfach überdeckte Kreisscheiben untersucht.

Im letzten Viertel des Buches wird im Anhang u. a. auf weiterführende Ergebnisse hingewiesen und eine (600 Titel) umfassende Bibliographie (für nicht-einfach zusammenhängende Gebiete) gegeben.

Minneapolis — Ch. Pommerenke

Wermer, J., Banach Algebras and Several Complex Variables (Graduate Texts in Mathematics, vol. 35), Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1976 (2. Auflage), 161 S., cloth, DM 36,20.

Ein hervorragend geschriebenes Buch, bestens geeignet, etwa im Anschluß an eine Vorlesung über Funktionalanalysis, zum Abhalten eines Seminars über „Uniforme Approximation auf kompakten Mengen im $\mathbf{C}^n$". Vorausgesetzt werden nur elementare Kenntnisse aus der Theorie der Banach-Algebren (Gelfand-Transformation) sowie aus der Funktionentheorie (einer Variablen).

Die einzelnen Paragraphen sehen wie folgt aus: In § 1 bis 3 werden die klassischen Approximationssätze in $\mathbf{C}$ besprochen, die folgenden 3 Paragraphen sind der inhomogenen Cauchy-Riemann Gleichung $\bar{\partial}u = f$, f ein Differential aus $\Lambda^{r,s}$, gewidmet. In § 7 wird das Oka-Weil Theorem bewiesen und in § 8 wird der Funktionenkalkül für Banach-Algebren im Falle von n Veränderlichen behandelt. Sodann folgen der Šilovsche Rand (§ 9) sowie der Maximalitätssatz von Wermer und das Theorem von Radó in § 10. In den nächsten 4 Paragraphen befaßt sich der Autor mit der analytischen Struktur des Spektrums einer uniformen Algebra sowie mit der polygonalen Approximation auf Kurven und Polyzylindern in $\mathbf{C}^n$. In § 15 wird die erste Cohomologiegruppe des Spektrums einer kommutativen Banach-Algebra mit 1 berechnet (Arens-Royden-Theorem) und in den folgenden 2 Paragraphen wird das Approximationsproblem auf Mannigfaltigkeiten ohne komplexen Tangenten studiert.

Der zweiten Auflage (die erste erschien 1971 bei Markham Publishing Company) wurden noch folgende 4 Paragraphen beigefügt: § 18 Untermannigfaltigkeiten hoher Dimension, § 19 Erzeugende (für Banach-Algebren), § 20 Fasern über ebenen Gebieten, sowie § 21 Beispiele von (polynomial konvexen) Hüllen.

Im letzten Paragraphen (§ 22) gibt der Autor noch Hinweise, ja zum Teil die vollständige Lösung für die im Text gestellten Aufgaben.

Erlangen — H. Leutwiler

Herold, H., Differentialgleichungen im Komplexen (Studia Mathematica/Skriptenreihe, Bd. 2), Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1975, 192 S., kart., DM 22,–

Das Buch „Differentialgleichungen im Komplexen" von Horst Herold gibt eine Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im Komplexen und ergänzt die vorhandene Literatur in ausgezeichneter Weise. Auf knappem Raum werden dank gelungener Stoffauswahl wichtige und interessante Teile der Theorie entwickelt. Vom Leser werden nur Grundkenntnisse aus der Funktionentheorie gefordert. Die wenigen Tatsachen aus der Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher entwickelt der Verfasser kurz. Für die Existenz- und Einzigkeitssätze und für die Untersuchung der Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangsbedingungen wird die Majorantenmethode von Cauchy gewählt.

Der größte Teil des Buches ist – wie es in der Natur der Sache liegt – der linearen Theorie gewidmet. Die Beiträge zur nichtlinearen Theorie beziehen sich vornehmlich auf Differentialgleichungen erster Ordnung $w' = f(z, w)$, f rational in w. Dabei arbeitet der Verfasser konsequent mit der von L. Bieberbach vorgeschlagenen Definition für „bewegliche" Singularitäten; Kennzeichnung und Eigenschaften der Riccatischen Differentialgleichungen sind eine besonders schöne Anwendung der gewonnenen Ergebnisse über $w' = f(z, w)$. Einige Bemerkungen über algebraische Differentialgleichungen und nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschließen die Ausführungen über nichtlineare Gleichungen. Bei der anschließenden Behandlung linearer Differentialgleichungen beschränkt sich der Verfasser in erster Linie auf Differentialgleichungen der Ordnung 2. Das ist durchaus legitim, da dabei schon die wesentlichen Gesichtspunkte der Fuchsschen Theorie erfaßt werden.

Inhaltsverzeichnis: I. Kapitel. Existenz- und Einzigkeitssätze. II. Kapitel. Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung. III. Kapitel. Lineare Differentialgleichungen. IV. Kapitel. Isolierte Singularitäten bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. V. Kapitel. Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse. VI. Kapitel. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. VII. Kapitel. Nullstellen der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Schwarzsche Ableitung und schlichte Funktionen.

Karlsruhe H. Wittich

Driver, R. D., Ordinary and Delay Differential Equations (Applied Mathematical Sciences, vol. 20), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, IX und 501 pp., soft cover, DM 33,60 / $ 14,80

Der Verfasser präsentiert das hier besprochene Buch als „Textbuch für eine mittlere Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen", welches sich vor entsprechenden anderen Lehrbüchern dadurch auszeichnet, daß es eine grundlegende Einführung in die Theorie der Delay-Differentialgleichungen mit vielen ausgearbeiteten Beispielen sowie Aufgaben mit Hinweisen und Antworten umfaßt.

In Kapitel I werden die grundsätzlichen Begriffsbildungen und Fragestellungen anhand von Beispielen erläutert sowie einige elementar integrierbare skalare Dgln 1. Ordnung (lineare sowie mit getrennten Variablen) behandelt. Kapitel II behandelt die Eindeutigkeitsfrage auf der Basis einer Lipschitz-Bedingung zunächst für skalare Dgln 1. Ordnung und danach für Dgl-Systeme 1. Ordnung im Reellen. Anschließend werden der Fall von Dgl-Systemen höherer Ordnung und der komplexwertige Fall hierauf zurückgeführt. Weiterhin werden einige Hilfsmittel (Gronwall'sches Lemma) bereitgestellt. Kapitel III ist den linearen Dgln n-ter Ordnung gewidmet. Behandelt werden: Struktur der Lösungsgesamtheit, konstante Koeffizienten (homogene Gleichung und spezielle Inhomogenitäten), Variation der Konstanten. Kapitel IV behandelt die entsprechenden Themen für Dgl-Systeme 1. Ordnung. Darüberhinaus wird die Exponentialfunktion für Matrizen im Hinblick auf Dgl-Systeme mit konstanten Koeffizienten eingeführt und ein erster Existenzsatz für lineare Dgl-Systeme mittels sukzessiver Approximation bewiesen. Kapitel V gibt eine erste Einführung in die Theorie der Delay-Dgln: Es werden anhand von einfachen Beispielen die charakteristischen Problemstellungen sowie die Unterschiede zu gewöhnlichen Dgln deutlich gemacht. Kapitel VI behandelt (wieder jeweils auf der Basis einer Liptschitz-Bedingung) die Existenzfrage für das Anfangswertproblem bei gewöhnlichen Dgl-Systemen und danach allgemein für Funktional-Dgln, für die dann auch Eindeutigkeits- und Abhängigkeitsaussagen bewiesen werden. Kapitel VII bringt einige spezielle elementar herleitbare Resultate über lineare Delay-Dgln. Kapitel VIII gibt eine Einführung in die grundsätzlichen Fragestellungen der Stabilitätstheorie gewöhnlicher und Funktional-Dgln. Es werden die verschiedenen Stabilitätsbegriffe diskutiert und mit Hilfe von Lyapunov- und störungstheoretischen Methoden einige fundamentale Resultate gewonnen. Kapitel IX gibt einen kurzen Einblick in die Theorie autonomer Dgl-Systeme. Es werden exemplarisch 2-dimensionale Systeme behandelt und hier das lokale Verhalten im linearen Fall vollständig sowie im nichtlinearen Fall in einer speziellen Situation studiert. Zum Abschluß wird das globale Verhalten bei autonomen Dgln anhand einiger wichtiger Beispiele diskutiert.

Das Buch ist in seinem Aufbau und seiner Stoffauswahl offenbar als Textbuch für einen einführenden Kurs in die Theorie der Gew. Dgln auf dem under-graduate-level, wie er in vielen Universitäten der USA angeboten wird, konzipiert und hierfür sicherlich auch bestens geeignet. Es vermittelt durch geeignete Stoffauswahl und Darstellung sowie anhand einer überwältigenden Anzahl instruktiver Beispiele und Aufgaben einen gründlichen Einblick und elementaren Einstieg in wesentliche Fragestellungen und Methoden der Theorie der Gewöhnlichen und Funktional-Dgln.

Als Textbuch für eine Kursvorlesung über Gewöhnliche Dgln, wie sie an hiesigen Universitäten üblicherweise im Anschluß an die Grundkurse (für Studenten ab etwa 4. Semester) angeboten wird, erscheint mir das vorliegende Buch weniger geeignet zu sein. Da es keine wesentlichen Kenntnisse in Analysis und linearer Algebra voraussetzt, sondern diese nebenher im jeweils erforderlichen (bzw. möglichen) Umfang mitvermittelt, schreitet es nur sehr langsam in der eigentlichen Theorie fort und bewegt sich dementsprechend auch über weite Teile auf relativ elementarem Niveau. Zwar berührt es aufgrund seines beträchtlichen Umfanges ein breites Spektrum an Themen, doch bleiben im einzelnen selbst in fundamentalen Bereichen wesentliche Lücken.

Als Übungsbuch bzw. Zusatzlektüre würde ich das Buch wegen seiner vielen instruktiven Beispiele und Aufgaben jedoch durchaus auch entsprechend fortgeschrittenen Studenten empfehlen.

Essen D. Schmidt

Goering, H., Asymptotische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen, Braunschweig – Wiesbaden: F. Vieweg & Sohn 1977, 152 S., DM 19,80

Das vorliegende kleine Buch beschreibt Näherungsmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen, die zu asymptotischen Prozessen gehören. Typisch sind dies Differentialgleichungen, welche einen Parameter enthalten, der klein gegen alle anderen Bedingungen ist, aber so, daß die Ordnung der Gleichung kleiner wird, wenn man diesen Parameter zu Null setzt.

Ziel des Buches ist es, die Behandlung solcher Probleme exemplarisch zu lehren. Alle beschriebenen Methoden verfolgen das Ziel, eine asymptotische Entwicklung für die Lösung zu finden. Diese Methoden werden durch Beispiele vorgestellt, mit den Worten „erster Schritt – zweiter Schritt – und dritter Schritt", ohne daß wirklich allgemeine Sätze bewiesen oder zitiert werden müssen.

Das Buch setzt nur mathematische Grundkenntnisse voraus, führt aber von diesen aus zu praktisch bedeutsamen Ergebnissen. Für Physiker und Ingenieure ist es gut geeignet. Für einen Mathematiker könnte es Anregung zur Stoffauswahl in Vorlesungen oder für gute Übungen sein.

Erlangen R. Böhme

Carasso, A., Stone, A. P., Improperly posed boundary value problems (Research Notes in Mathematics, series No. 1), London – San Francisco – Melbourne: Pitman 1975, 163 pp., £ 5.60

Das vorliegende Buch ist eine Sammlung von Vorträgen, die unter dem Thema „Improperly posed problems in partial differential equations" im Mai 1974 in Albuquerque gehalten wurden. Die Vorträge überdecken ein außerordentlich breites und vielfältiges Gebiet aktueller Forschung.

Das Buch ist hoch geeignet, ein nicht ungewöhnliches Vorurteil zu widerlegen, daß nämlich nicht korrekte Probleme – anders als korrekt gestellte – in der mathematischen Physik nichts zu suchen haben und ausschließliches Feld für theoretische Spitzfindigkeiten seien. Als Beispiel sei genannt das Problem der Wettervorhersage (hierzu ein Aufsatz von M. Ghil), wo eben die Daten, die für eine deterministische (korrekte) Behandlung erforderlich sind, nicht oder nicht in hinreichender Qualität verfügbar sind, aber andere abhängige Größen besser meßbar sind.

Trotz der Vielfalt der Themen lassen sich die 12 Aufsätze in etwa gruppieren: (1) Diffusionsprobleme, bei denen der Endzustand bekannt, aber der Anfangszustand gesucht ist, (2) sog. Ovcyannikov Methoden, nämlich weitgehend typunabhängige Techniken, die dem Cauchy-Kowalewski Theorem verwandt sind, (3) Probleme mit „falschen" oder zu vielen Randbedingungen, (4) elliptische Probleme in unbeschränkten Gebieten.

Die Aufsätze lassen die Lebendigkeit eines unmittelbaren Vortrags noch spüren und bilden zusammen eine eindrucksvolle Anregung für jeden Interessierten.

Die Sammlung ist Prof. Fritz John gewidmet.

Erlangen R. Böhme

Garnir, H. G. (ed.), Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Liège, Belgium, September 6–17, 1976, University of Liège, Liège, Belgium, Dordrecht – Boston: D. Reidel Publishing Company 1977, XIV und 473 pp., cloth, Dfl 105,–

Der vorliegende Band enthält die Vorträge einer NATO-Tagung (Summer School), die vom 6. bis 17. September 1976 in Lüttich (Belgien) stattfand. Herausgeber ist H. G. Garnir, der die Konferenz leitete. Im Mittelpunkt standen Randwertprobleme bei linearen Evolutionsgleichungen, moderne Behandlungsmethoden sowie Anwendungen in verschiedenen Bereichen der mathematischen Physik. Hervorzuheben sind die sehr ausführlichen Beiträge von G. F. D. Duff (Toronto): Hyperbolic differential equations and waves; J. L. Lions (Paris): Some aspects of the theory of linear evolution equations; E. Magenes (Pavia): Topics in parabolic equations: Some typical free boundary problems; C. H. Wilcox (Salt Lake City): Spectral and asymptotic analysis of acoustic wave propagation; jeder dieser Beiträge hat den Umfang einer Monographie über den behandelten Gegenstand. Die übrigen Referate befassen sich mit verschiedenen Aspekten hyperbolischer Gleichungen, abstrakter Evolutionsgleichungen sowie von Halbgruppen. G. F. D. Duff beginnt mit einer historischen Einführung in die hyperbolischen Gleichungen und das Cauchysche Problem, diskutiert Gleichungen höherer Ordnung und Systeme, elementare Lösungen und ihre Eigenschaften, diesbezügliche Abschätzungen sowie Singularitäten im Zusammenhang mit der Riemannschen Matrix. Ferner betrachtet er Lösungen in einem Halbraum (als Anwendung Erdbebenwellen) sowie gemischte Anfangs-Randwertprobleme bei linearen hyperbolischen Systemen mit konstanten oder variablen Koeffizienten. J. L. Lions erörtert zunächst Existenz- und Eindeutigkeitsfragen bei parabolischen Evolutionsgleichungen und entsprechende funktionalanalytische Hilfsmittel. Anhand verschiedener Beispiele diskutiert er asymptotische Probleme und die Rechtfertigung diesbezüglicher Rechnungen durch die Energiemethode. Des weiteren werden Kontrollprobleme bei Systemen mit verteilten Parametern erläutert, die auf verallgemeinerte Lösungen von Evolutionsgleichungen führen. Abschließend werden singuläre Evolutionsgleichungen untersucht. E. Magenes geht von einigen Beispielen für freie Randwertprobleme bei linearen parabolischen Gleichungen aus und erörtert ihre klassischen Lösungen sowie die aus Variationsproblemen hergeleiteten schwachen Lösungen und entsprechende Existenzsätze. Ein Problem aus der Fluiddynamik (Strömung durch ein poröses Medium) wird eingehend behandelt (Eindeutigkeits- und Existenzfragen, Approximationen). Weitere Betrachtungen gelten der Regularität schwacher Lösungen und der Existenz einer klassischen Lösung. C. H. Wilcox widmet sich einigen typischen Randwertproblemen der Akustik (Wellenausbreitung in Flüssigkeiten und festen Körpern unter Berücksichtigung von Hindernissen). Das Ziel ist die Darlegung einer Methode, mit der man in den betrachteten Spezialfällen die Struktur akustischer Wellen in unbeschränkten Medien bestimmen kann. Eine allgemeine Formulierung dieser Methode wird nicht angestrebt. Der Grundgedanke besteht darin, die Zustände eines akustischen Mediums, das ein räumliches Gebiet erfüllt, durch die Elemente eines geeigneten Hilbertschen Funktionenraumes zu beschreiben. Der Entwicklung einer akustischen Welle entspricht dann eine Abbildung der Zeitskala in den Hilbertraum, $t \mapsto u(t, .)$. Das Entwicklungsgesetz ist durch einen selbstadjungierten positiven Operator A gegeben, der mit der Geometrie des räumlichen Bereiches und den physikalischen Eigenschaften des Mediums zusammenhängt: $d^2u/dt^2 + A\,u = 0$. Es ergibt sich $u(t, h) = \mathrm{Re}\{\exp(-i\,t\,\sqrt{A})\,h\}$, h Anfangszustand. Für A wird eine Entwicklung nach Eigenfunktionen zugrundegelegt, aus der eine asymptotische Darstellung des Spektralintegrals für $u(t, h)$ resultiert. Im Zusammenhang damit treten Konvergenzprobleme auf, die sich unter passenden Zusatzbedingungen hinsichtlich des Mediums und des Anfangszustandes lösen lassen. Eine ausführliche Diskussion erfolgt in den verschiedenen Spezialfällen. In allen Beiträgen des Tagungsberichtes finden sich zahlreiche Literaturhinweise sowie Anmerkungen über den aktuellen Stand der Forschung, die es dem Leser ermöglichen, die z. T. nur angedeuteten Fragen weiterzuverfolgen.

Bochum R. Reißig

Walker, H. F., Fitzgibbon, W. E. (eds.), Nonlinear Diffusion (Research Notes in Mathematics Series, No. 14), London – San Francisco – Melbourne: Pitman, 1977, 244 pp., paper, £ 7.50 / S 14.25

Dieses Buch ist eine Sammlung von Vorträgen, die auf einer Konferenz an der Universität Houston Juni 1976 gehalten wurden. Eine Reihe von zehn Vorlesungen von D. G. Aronson erscheint gesondert in der C. B. M. S. Regional Conference Series in Applied Mathematics, publiziert durch S.I.A.M. Die einzelnen Arbeiten: D. G. Aronson untersucht bei einem System von Integrodifferentialgleichungen (nach Kendall), das die Ausbreitung von Epidemien beschreibt, das Verhalten wellenförmiger Lösungen. Die Ergebnisse entsprechen denen für gewisse Diffusionsgleichungen, die als Approximationen schon früher betrachtet wurden. J. R. Cannon, R. E. Ewing betrachten numerische Methoden für degenerierte parabolische Systeme, wie sie in der Nervenphysiologie auftreten. E. D. Conway und J. A. Smoller untersuchen oekologische Interaktionsmodelle (Volterra-Modell u. a.) mit Diffusion, insbesondere Konvergenz gegen räumlich homogene Verteilungen. J. W. Evans setzt seine Untersuchungen über Nerven-Gleichungen fort. P. C. Fife zeigt für Reaktions-Diffusionsgleichungen die Existenz räumlich periodischer stationärer Lösungen mit Verzweigungsmethoden. D. Henry kündigt eine Arbeit über Gradientenflüsse an, die durch parabolische Gleichungen definiert sind. N. Kopell referiert Ergebnisse über wellenförmige Lösungen bei der Zhabotinsky-Reaktion. R. W. Miura beschreibt asymptotische Methoden zur Berechnung oszillierender Lösungen von Reaktions-Diffusionsgleichungen. P. Nelson gibt einen Beweis des physikalisch plausiblen Satzes, daß bei gewissen Neutronendiffusionsgleichungen die Lösungen subkritisch bleiben, wenn die Vermehrungsrate klein ist. J. Rinzel berechnet Lösungen der Nervengleichungen mit numerischen Methoden, M. E. Schonbek beschäftigt sich mit dem Fitzhugh-Modell der Nervenphysiologie, A. D. Snider und D. L. Akins mit Diffusionsgleichungen aus physikalischen Anwendungen.

Obgleich die einzelnen Beiträge von unterschiedlichem Gewicht sind, kann der Band doch als vorzügliche Einführung in aktuelle Probleme semilinearer Diffusionsgleichungen gelten, wenn auch die Bezüge zu eigentlichen Anwendungen etwas zurücktreten, ebenso die Probleme mit mehreren Raumdimensionen.

Tübingen K. P. Hadeler

Gilbarg, D., Trudinger, N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 224), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, 380 pp., DM 78,–

Das Anliegen der Autoren ist „. . . eine systematische Entwicklung der allgemeinen Theorie der quasilinearen elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung und der hierzu erforderlichen linearen Theorie". Es werden ausschließlich skalare Gleichungen, also keine Systeme betrachtet. Naturgemäß gliedert sich das Buch in zwei Teile, von denen der erste der linearen und der zweite der nichtlinearen Theorie gewidmet ist. Im ersten Teil, der etwa die Hälfte des Buches beansprucht, werden sowohl klassische (Kapitel 2–6) als auch schwache Lösungen (Kapitel 7 und 8) behandelt. Die Autoren beginnen in Kapitel 2 mit harmonischen Funktionen und dem Perron-Verfahren zur Lösung des Dirichlet-Problems. Kapitel 3 ist dem Maximumprinzip bei allgemeinen elliptischen Differentialgleichungen gewidmet, während in Kapitel 4 die Poissonsche Differentialgleichung und das Newtonsche Potential studiert werden. Kapitel 5 ist ein Einschub über die benötigten funktionalanalytischen Prinzipien wie Kontinuitätsmethode, Fredholmsche Alternative etc. In Kapitel 6 wird mit einer ausführlichen Behandlung der Schauderschen Abschätzungen und der daraus resultierenden Existenzsätze ein erster Höhepunkt des Buches erreicht. Das 7. Kapitel vermittelt die wichtigsten Grundtatsachen über Sobolev-Räume und schafft damit die Grundlage der im 8. Kapitel dargestellten Theorie der schwachen Lösungen. Hier finden wir neben der Hilbertraumtheorie des Dirichletproblems und der zugehörigen Regularitätstheorie vor allem die mit der Moserschen Technik erhaltenen scharfen L_∞-Abschätzungen, die Harnacksche Ungleichung, und die daraus folgende Hölder-Abschätzung für schwache Lösungen von Gleichungen mit beschränkten, meßbaren Koeffizienten, die für den zweiten Teil des Buches von grundlegender Bedeutung sind.

Der zweite Teil wird von einem Kapitel über Maximumprinzipien und Vergleichssätze für Lösungen quasilinearer Gleichungen eröffnet. Es schließt sich ein Kapitel über die benötigten Hilfsmittel der nichtlinearen Funktionalanalysis wie Fixpunktsätze an. Diese abstrakten Existenzprinzipien reduzieren den Existenzbeweis für Randwertaufgaben quasilinearer Gleichungen bekanntlich auf das Problem, a-priori-Abschätzungen in der $C^{1,\alpha}$-Norm für deren Lösungen zu finden. In Kapitel 11 wird demonstriert, wie man im Fall von zwei Veränderlichen solche Abschätzungen mit relativ einfachen Mitteln beweisen kann. Im gleichmäßig elliptischen Fall gelingt dies, indem man den Gradienten einer Lösung als quasikonforme Abbildung deutet; der nichtgleichmäßig elliptische Fall wird unter der Annahme einer „Bedingung der beschränkten Steigung" (bounded slope condition) behandelt. Der Rest des Buches ist nun im wesentlichen der Ableitung von $C^{1,\alpha}$-Abschätzungen im allgemeinen Fall und unter verschiedenen Voraussetzungen gewidmet. Kapitel 12 bringt zunächst die Reduktion auf C^1-Abschätzungen, Dieses grundlegende, auf Ladyshenzkaya und Uraltseva zurückgehende Resultat wird hier mit den im 8. Kapitel entwickelten Methoden behandelt. Im 13. Kapitel wird die Struktur der Gleichung mit der Geometrie des Randes des Definitionsgebietes verknüpft um die Gradientenabschätzung auf dem Rand zu erbringen. Prominentestes Anwendungsbeispiel ist die Gleichung für Graphen vorgeschriebener mittlerer Krümmung. Im 14. Kapitel werden verschiedene Strukturbedingungen angegeben unter denen für die ersten Ableitungen einer Lösung ein Maximumprinzip gilt. Zusammen mit den Resultaten des vorangegangenen Kapitels ergibt dies globale Gradientenabschätzungen, die dann sofort zu entsprechenden Existenzsätzen für das Dirichletproblem führen. Das Problem innerer

Gradientenabschätzungen wird hier ebenfalls untersucht. Diesem Problem widmet sich das abschließende 15. Kapitel ausschließlich, und zwar bei der Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung in beliebig vielen Veränderlichen und bei einem allgemeineren Gleichungstyp in zwei Veränderlichen. U. a. zu diesem Fragenkreis hat der zweite der Autoren bekanntlich selbst wesentliche Beiträge geleistet.

Ohne Zweifel ist das vorliegende Buch ein wichtiges Hilfsmittel für alle Lernenden, Lehrenden und Forschenden auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen. Der Leser wird von den elementaren Anfängen der Theorie bis an die aktuelle Forschung herangeführt. Besonders hervorzuheben ist die Tatsache, daß den nichtgleichmäßig elliptischen Gleichungen, insbesondere der Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung, breiter Raum gewidmet wird und viele tiefliegende, erst während der letzten Jahre erzielten Ergebnisse hierüber erstmals im Rahmen einer Monographie vorgelegt werden. Die nicht immer einfache Materie ist didaktisch geschickt aufbereitet, so daß das Buch schon von Studenten in mittleren Semestern gelesen werden kann. Die Beschränkung auf skalare Gleichungen hatte sicher gute Gründe und muß respektiert werden, wenngleich sich der Referent wenigstens einige Hinweise auf die Problematik der elliptischen Systeme gewünscht hätte.

Saarbrücken F. Tomi

Showalter, R. E., Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations (Monographs and Studies in Mathematics Series, No. 1), London – San Francisco – Melbourne: Pitman 1977, 208 pp., £ 14.00

Das Buch stellt eine in sich geschlossene, in manchen Punkten sehr ambitionierte Einführung in die Hilbertraummethoden zur Behandlung partieller Differentialgleichungen dar. Es beschränkt sich auf Gleichungen zweiter Ordnung, behandelt aber alle Typen und geht schließlich auch noch auf Anwendungen und numerische Aspekte ein.

An Vorkenntnissen setzt das Buch eine mathematische Ausbildung im Umfang des Grundstudiums an einer deutschen Universität voraus, wobei Grundkenntnisse über das Lebesguesche Integral zwar nicht unbedingt notwendig, jedoch sehr förderlich sind. Dem eigentlich zu behandelnden Stoff sind zwei einführende Kapitel vorangestellt. Im ersten werden in sich geschlossen die für später benötigten Grundkenntnisse über den Hilbertraum vermittelt, im zweiten Kapitel werden Distributionen (diese in sehr elementarer, origineller Weise) und Sobolevräume eingeführt und deren wichtigste Eigenschaften studiert. Ausgehend von der Greenschen Formel werden im 3. Kapitel die verschiedenen Randwertprobleme für elliptische Gleichungen zweiter Ordnung betrachtet und gelöst sowie die Regularität der Lösungen nachgewiesen. Die Beschränkung auf Gleichungen zweiter Ordnung erweist sich hier als fruchtbar, da sich einerseits bereits alle wesentlichen Ideen und Methoden aufzeigen lassen, die Beweise durchsichtig bleiben und andererseits weitergehende rechentechnische Vorkenntnisse (z. B. Fouriertransformation) entbehrlich sind. Die Kapitel vier bis sechs sind dann Evolutionsgleichungen gewidmet. Insbesondere werden die Wärmeleitungs- und die Wellengleichung behandelt, aber auch implizite Evolutionsgleichungen, Sobolev-Gleichungen und degenerierte Gleichungen. Gerade in diesen Kapiteln findet auch der Kenner der Materie eine Fülle interessanter neuer Aspekte, wobei sich auch hier die Darstellung nicht in detaillierte, technische Einzelfragen verliert. Dabei kommt natürlich zum Tragen, daß es sich hier um das Spezialgebiet des Autors handelt. Das siebente und letzte Kapitel rundet diese Einführung ab und knüpft an Gegenstände der aktuellen Forschung an: Ausgehend vom Dirichletschen Prinzip wird in allgemeinerem Rahmen auf Variationsmethoden eingegangen. Es werden kurz Variationsungleichungen, nichtlineare Gleichungen, freie Randwertprobleme sowie Kontrollprobleme behandelt. Außerdem werden das Ritz-Galerkin-Verfahren und Approximationsmethoden für Evolutionsgleichungen skizziert.

Neben einer geglückten Stoffauswahl, die sowohl auf breiter Basis in die moderne, funktionalanalytische Behandlung partieller Differentialgleichungen einführt, als auch sich nicht in technische Detailfragen verstrickt, besticht an dem Buch die mathematisch präzise, leicht lesbare und ausgereifte Darstellung. Zahlreiche, gut gewählte Übungsaufgaben, die den jeweiligen Kapiteln angehängt sind, machen dieses Buch auch zum Selbststudium sehr geeignet. In einem Anhang gibt der Autor auch noch detaillierte Literaturhinweise für ein vertieftes, weiteres Studium.

Das Buch ist gleichermaßen für Mathematikstudenten als auch für Studierende mit Nebenfach Mathematik geeignet und kann nach Abschluß des Grundstudiums bewältigt werden.

Bayreuth C. G. Simader

Sigillito, V. G., Explicit a priori inequalities with applications to boundary value problems (Research Notes in Mathematics, Series, No. 13), London – San Francisco – Melbourne: Pitman 1977, 122 pp., £ 5.50

Die vorliegende Monographie behandelt explizite a-priori Abschätzungen für elliptische, parabolische und pseudoparabolische Differentialgleichungen. Eine solche Abschätzung besteht 1. darin, die L^2-Norm einer hinreichend glatten Funktion u durch L^2-Integrale von u abzuschätzen, die Daten eines (Anfangs)-Randwertproblems darstellen. Dabei sollen 2. alle auftretenden Konstanten explizit bekannt oder berechenbar sein. Das folgende Beispiel wird in der Einleitung angeführt: Man betrachte das Dirichletproblem $\Delta u = f$ in $B \subset \mathbf{R}^n$, $u = g$ auf ∂B. Eine explizite a-priori Abschätzung im obigen Sinn ist dann

$$\int_B w^2 dx \leqq \alpha_1 \int_B (\Delta w)^2 dx + \alpha_2 \int_{\partial B} w^2 dS$$

für $w \in C^2(B)$ mit Konstanten α_1, α_2. Der Hauptsinn in der Verwendung solcher Ungleichungen liegt darin, approximierende Lösungen zu berechnen. Sei nämlich im obigen Beispiel

$u_a = \sum_{k=1}^{n} a_k U_k$, $U_k \in C^2$, eine approximierende Lösung, die weder eine Differentialgleichung noch Randbedingungen zu erfüllen braucht. Bedeutet u die Lösung, so ist der Fehler durch

$$\int_B (u - u_a)^2 dx \leqq \alpha_1 \int_B \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta U_k\right)^2 dx + \alpha_2 \int_{\partial B} \left(g - \sum_{k=1}^{n} a_k U_k\right)^2 dS$$

abgeschätzt. Die Funktionen f, g, U_k sind bekannt, die Koeffizienten a_k müssen so gewählt werden, daß die rechte Seite der Ungleichung ein Minimum wird. Daneben werden auch punktweise Schranken mit Anwendungen auf Abschätzungen bei Eigenwertproblemen behandelt.

Das Buch enthält 10 Kapitel: 1. Introduction: The „Method of explicit a priori inequalities". A relationship to least squares. Outline of chapters. – 2. Notation and some important identities and inequalities: Notation. Some important identities and inequalities. Additional identities. – 3. Eigenvalue problems: Eigenvalue inequalities. Bounds for the eigenvalues in specific regions. – 4. A priori inequalities I: Second order elliptic applications: An inequality for the Dirichlet problem. An alternative approach. The Neumann problem. The Robin problem. An inequality for a problem in elasticity. – 5. A priori inequalities II: Second order parabolic applications: An inequality for the Dirichlet problem. A semi-linear case. An inequality for the Neumann problem. The Robin problem. – 6. A priori inequalities III: Pseudoparabolic applications: Inequalities for the Dirichlet problem. An inequality for a semilinear problem. Bounds for the Neumann problem. An inequality for a boundary value problem of Milne. – 7. A priori inequalities IV: Fourth order elliptic applications: An inequality for the first biharmonic boundary value problem. Inequalities for other boundary value problems. – 8. Pointwise bounds:

Second order elliptic problems. Fourth order elliptic problems. Second order parabolic problems. – 9. Applications to eigenvalue estimation: An a posteriori inequality. An example – the fixed membrane problem. Other eigenvalue problems. A numerical example. – 10. Numerical examples. An elliptic example. A parabolic example. Some experiments in trial function selection. A biharmonic example. Concluding remarks. Die beiden letzten Kapitel enthalten Tafeln numerischer Ergebnisse, das Literaturverzeichnis führt 48 Titel und in einem ergänzenden Teil 11 nicht im Buch zitierte Titel auf.

Bayreuth W. v. Wahl

Cristescu, R., Ordered Vector Spaces and Linear Operators, Bukarest: Editura Academiei, Tunbridge Wells (Kent): Abacus Press 1976, 339 S., geb., £ 14.85.

Das vorliegende Werk ist eine erweiterte und verbesserte englische Übersetzung von „Spaţii lineare ordonate şi operatori lineari" (Editura Academiei, Bukarest 1970); diese rumänische Ausgabe kann ihrerseits als Neufassung des Cristescuschen Buches über geordnete Vektorräume aus dem Jahre 1959 angesehen werden. Dementsprechend dominiert auch in der neuesten Fassung das Material, vornehmlich über Vektorverbände, das schon vor rund 20 Jahren bekannt war und zum Teil noch aus der Leningrader Schule von Kantorovič stammt, deren Ergebnisse in dem 1967 ins Englische übertragenen Werk „Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces" (Wolters-Noordhoff, Groningen) von B. Z. Vulikh weitgehend ihren Niederschlag gefunden haben. Darüber hinaus haben aber die Arbeiten der späten fünfziger und der sechziger Jahre, in denen topologische geordnete Vektorräume und Vektorverbände ausführlich untersucht wurden, sowie neuere Ergebnisse der Darstellung linearer Operatoren durch Vektormaße Eingang gefunden (Kapitel 6, 7). Bemerkenswert erscheint auch die ordnungstheoretische Diskussion des Zusammenhangs zwischen bilinearen und linearen Abbildungen (Kapitel 5), an deren Ergebnissen der Verfasser erheblichen Anteil hat und die man in vergleichbaren Werken häufig vermißt. (Auf den hierher gehörigen, freilich erst in den frühen 70er Jahren entwickelten Zusammenhang mit geordneten Tensorprodukten wird nicht eingegangen.)

Gemessen am Umfang des Buches und am Stil der Darstellung ist daher der Themenkreis groß. Dies bringt es mit sich, daß die angeschnittenen Einzelthemen oft nicht sehr weit verfolgt werden können; für eine Einführung kann dies natürlich auch erwünscht sein. Das Buch enthält aber zahlreiche Literaturangaben (Stand ca. 1970) und ausführliche historisch-bibliographische Notizen, so daß der interessierte Leser genügend viele Hinweise für ein vertieftes Studium findet.

Tübingen H. H. Schaefer

Scherk, P., Lingenberg, R., Rudiments of Plane Affine Geometry (Mathematical Expositions No. 20), Toronto-Buffalo: University of Toronto Press 1975, XI + 114 S., geb., $ 10.00.

Es handelt sich um eine ausgezeichnete Einführung in die ebene affine Geometrie, die von Studenten auch ohne Geometriekenntnisse zum Selbststudium erfolgreich in die Hand genommen werden kann. In acht Kapiteln wird der Leser mit dem klassischen Stufenaufbau der affinen Ebenen vertraut gemacht. Nach dem einführenden Kapitel mit ersten Beispielen werden als spezielle Kollineationen Homothetien und Achsenaffinitäten eingeführt, eine Vielzahl von Sätzen wird bewiesen. Es fehlt nur eine Bemerkung über das offene Problem der Kommutativität der Translationsgruppe, falls nur Translationen in einer Richtung existieren. Dies dürfte gerade in den angesprochenen Leserkreisen nicht allgemein bekannt sein.

In den folgenden Kapiteln über Translationsebenen, Desarguesschen und Pappusschen Ebenen werden die Zusammenhänge mit den vorher erläuterten Kollineationen aufgezeigt. Als etwas schwieriger wird ein Abschnitt über den Kern einer Translationsebene gekennzeichnet, sein Inhalt wird später nicht vorausgesetzt. Für den Anfänger sehr nützlich ist der ausführliche

Beweis der Implikation des kleinen aus dem großen Satz von Desargues. Die Koordinatisierung Desarguesscher Ebenen wird im sechsten Kapitel behandelt, dem Fundamentalsatz der affinen Geometrie ist hier ein eigener Abschnitt gewidmet, ebenfalls als „schwierig" klassifiziert.

Auf projektive Ebenen gehen die Autoren in den beiden letzten Kapiteln ein. Es werden unter anderem Kollineationen behandelt und in einen Zusammenhang mit affinen Kollineationen gesetzt (Kapitel 7) sowie Desarguessche und Pappussche projektive Ebenen untersucht (Kapitel 8). In einem kurzen Anhang wird an notwendige Hilfsmittel aus der linearen Algebra (Gruppe, Schiefkörper, Vektorraum) erinnert. Jedes der acht Kapitel schließt mit einem Abschnitt mit Übungsaufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades, deren Behandlung besonders dem Neuling auf diesem Gebiet nur empfohlen werden kann. Es bliebe zu erwähnen, daß sich dieses Buch auch als Proseminarlektüre eignet.

Hamburg H.-J. Samaga

Edwards, D. A., Hastings, H. M., Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology (Lecture Notes in Mathematics, vol. 542), Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1976, VII + 296 S., soft cover, DM 28,–.

Das vorliegende Buch ist ein Bericht über den Homotopielimes, so wie er von den Autoren entwickelt worden ist. Die Gelegenheit wird benutzt, eine Reihe anderer Dinge gleichzeitig in Kürze abzuhandeln, teilweise ohne Beweise. Über Čechsche und Steenrodsche Homotopie und die zugehörige Homologie steht, entgegen dem Versprechen des Titels, sehr wenig in dem Bericht. – Hier zunächst einige Bemerkungen über den Homotopielimes: Es gibt zu dem Inklusionsfunktor Ho C → pro Ho C (C eine Kategorie topologischer Räume oder simplizialer Objekte) keinen adjungierten Funktor, wohl aber zu dem Inklusionsfunktor Ho C → Ho pro C. Dieser Funktor ist der Homotopielimes holim: Ho pro C → Ho C. Allerdings muß man nun erklären, was Ho pro C sein soll, also in der pro-Kategorie einen Homotopiebegriff entwickeln. Dieses ruft die „closed model categories" mit all ihren formalen und tatsächlichen Schwierigkeiten und Undurchsichtigkeiten auf den Plan. Für „towers", also inverse Systeme $\{X_n\}$ mit Indexmenge $\mathbf{N}$, ist alles noch erträglich, aber für beliebige Indexmengen J scheint der Schwierigkeitsgrad so anzusteigen, daß man sich fragen muß, ob man nicht besser den Homotopielimes schnell wieder vergißt und statt dessen einen ganz anderen Weg sucht um an die Probleme heranzugehen (was das vorliegende Buch allerdings nicht behandelt). –

Das Buch enthält eine Sammlung von Resultaten der schwachen und starken Shape Theorie sowie von Sätzen über höhere Limites $\lim^s$. Sein Wert als Nachschlagewerk wird weniger durch eine gewisse Beziehungslosigkeit der angehäuften Ergebnisse gestört, als vielmehr durch ein gebrochenes Verhältnis der Autoren zur Geschichte der von ihnen angeschnittenen Fragen. Diese Geschichte ist teilweise lang, bedeutend und angefüllt mit großartigen Ideen, die entweder völlig ignoriert oder dann und wann leicht umformuliert und verfremdet als ganz neue Erkenntnisse (aus noch unpublizierten Arbeiten) angeboten werden. Die Steenrod-Sitnikowsche Homologietheorie steht spätestens seit Beginn der Fünfziger Jahre auch für den Durchschnittsmathematiker mit bescheidenen Grundkenntnissen in Topologie in ausgezeichneten Darstellungen und vielerlei Versionen zur Verfügung. Der Prozeß des Vergessens dieser bedeutenden Homologietheorie sowie ihr neuerliches in verschiedenen Zweigen der Topologie und sogar der Funktionalanalysis gleichzeitiges Auftreten (u. a. die Erkenntnis, daß sie nichts weiter ist als die singuläre Shape-Homologie) legt Zeugnis dafür ab, wie aufregend Mathematik sein kann. Sie ist, gleichrangig mit der singulären-, die wichtigste Homologietheorie, die es gibt. Schon vor vielen Jahrzehnten diente sie zur Formulierung einiger der schönsten Resultate der Dimensionstheorie. Nach all diesen kritischen Aussagen sollte dennoch folgendes vermerkt werden: Die Autoren haben zu einigen in dem Buch behandelten schwierigen Fragen originelle Beiträge geliefert. So ist unstreitig ihre Behandlung des Homotopielimes ein Fortschritt gegenüber dem, was bisher unter diesem Namen gehandelt wurde. Auch an anderen Stellen sind Aspekte ihrer Darstellung beachtenswert. Leider haben sie es verabsäumt, sich nach Fertigstellung des Manuskriptes zu fragen, ob der große Aufwand sich wirklich gelohnt hat und die offenbar angestrebten Zusammenhänge tatsächlich deutlich geworden sind.

Frankfurt (Main) F. W. Bauer

Fortet, R., Elements of Probability Theory, London-New York-Paris: Gordon and Breach Science Publishers 1977, XIX + 524 S., geb., £ 30.00.

Das Buch – englische verbesserte Übersetzung eines 1960 publizierten französischen Textes – wendet sich an Stochastik-Verbraucher, z. B. Ingenieure und an Mathematiker nur insoweit, als sie selbst vor der Aufgabe stehen, Ingenieuren Stochastik beizubringen. Langjährige Erfahrungen mit Anwendern haben den namhaften Verfasser offensichtlich davon überzeugt, daß hier eine ziemlich altmodische Stochastik gewünscht wird. Dies bezeugt das Inhaltsverzeichnis:

Ch. I Combinatory Analysis and its Application to Classical and Quantum Statistics and to the Chromosome Theory of Heredity. – Ch. II The Concept of Probability. Measures or Mass Distributions. Hilbert Spaces. Random Elements and Probability Laws. – Ch. III Distribution Functions. – Ch. IV Random Variables, Axiom of conditional Probability. – Ch. V n-Dimensional Random Vectors and Variables. – Ch. VI Addition of Independent Random Variables; Stochastic Convergence, Laws and Large Numbers, Ergodic Theorems; Convergence to a normal Law, Convergence to a Poisson Law; Generalizations.

Die wesentlichen Definitionen und Sätze der so verstandenen Wahrscheinlichkeitstheorie werden ausführlich motiviert und mit Beispielen aus der Erfahrungswissenschaften erläutert, genau dargelegt und bis zu einem gewissen Grade auch bewiesen. Insbesondere findet sich ein Beweis von Bochners Satz über die Darstellung positiv-definiter Funktionen. Es werden ausführlich Literaturhinweise gegeben. Ein Hauch von Moderne weht in den Abschnitten, wo Gesetze der großen Zahlen mit Ergodensätzen verbunden werden. Das Buch ist im Schreibsatz hergestellt. Die Reproduktion der Formeln ist schlechter als die des Textes. Dies läßt auf ein technisches Verfahren schließen, das verpönt sein sollte.

Erlangen K. Jacobs

Borovkov, A. A., Stochastic Processes in Queueing Theory, New York-Heidelberg-Berlin: Springer Verlag 1976, XI + 280 S., geb., DM 72,80.

Das vorliegende Buch ist eine vom Autor beträchtlich erweiterte Übersetzung des 1972 erschienenen russischen Originals. Es befaßt sich mit klassischen Bedienungsmodellen unter sehr allgemeinen stochastischen Annahmen über die Inputfolgen der Ankunfts- und Bedienungszeiten. In Abhängigkeit von diesen Folgen werden stochastische Prozesse definiert, die die zeitliche Entwicklung eines Systemzustandes beschreiben und durch explizite Formeln gegeben sind. Ein Beispiel ist die bekannte Rekursionsformel $w_{n+1} = \max(0, w_n + \xi_n)$ für – etwa – aufeinanderfolgende Wartezeiten in gewissen Systemen, wobei die Folge (ξ_n) alleine und explizit von den Inputfolgen abhängt. Andere Zustandsbeschreibungen, wie etwa Schlangenlänge, ergeben sich dann über Funktionale jener Prozesse. Mit dieser konsequent durchgeführten Behandlungsweise der einzelnen Modelle erreicht der Verfasser sein Ziel, die mathematische Theorie der Bedienung von einem möglichst einheitlichen Standpunkt aus zu entwickeln.

Die ersten vier Kapitel sind dem einkanaligen Modell gewidmet. Kapitel 1 enthält eine ausführliche Untersuchung der oben genannten Rekursionsformel sowie einer analogen Formel für kontinuierliche Zeit. Unter gewissen Unabhängigkeitsannahmen für die Zufallsvariablen der Inputfolgen beschreiben jene Formeln eindimensionale Irrfahrten mit Randbedingungen. Die Kapitel 2 bis 4 befassen sich mit relevanten Problemen der Theorie solcher Irrfahrten, wobei der Zusammenhang mit der Bedienungstheorie in den Hintergrund tritt. Zentrales Mittel der Analyse sind hier Faktorisierungsidentitäten wie etwa die bekannte Identität von Spitzer. In den Kapiteln 5 bis 7 werden mehrkanalige Systeme mit und ohne Warteraum betrachtet und in einem kurzen letzten Kapitel 8 nochmals das einkanalige System, jetzt unter der Annahme eines Bedienungsschemas mit Unterbrechungen. Es folgen vier Anhänge mit mathematischem Grundlagenmaterial.

Das Buch ist sehr klar geschrieben und wird für Spezialisten der mathematischen Bedienungstheorie unentbehrlich sein.

Calgary R. Schaßberger

Grund, F., Issel, W., Programmiersprache PL/I, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1975, 511 S., Kunstleder, DM 36,–.

Mit der zunehmenden Verbreitung des Einsatzes elektronischer Rechenanlagen wurde es notwendig, den Gebrauch durch Schaffung benutzernaher „höherer" Programmiersprachen zu erleichtern, welche Programme zu schreiben gestatten, die auf Anlagen verschiedenen Types einsetzbar sind und (möglichst) zu gleichen Ergebnissen führen.

Im technisch-wissenschaftlichen hat sich seit Jahren die Programmiersprache FORTRAN IV als international anerkannte Sprache für den Programmaustausch zwischen verschiedenen Maschinentypen und den verschiedenen Arbeitsgruppen durchgesetzt. Daran haben auch akademische Versuche, ausdrucksreichere und stärker strukturierte Sprachen zu verbreiten, nichts mehr zu ändern vermocht; der Fundus vorhandener allgemein verfügbarer FORTRAN-Programme ist dafür heute bereits viel zu groß.

Auf dem kommerziellen Sektor hat die Sprache COBOL lange Zeit eine ähnliche Rolle gespielt wie FORTRAN, jedoch scheint die vorhandene Programmbibliothek nicht an die Fortranbibliothek heranzureichen.

Die Ende der 60er Jahre heftig diskutierten Probleme einer alle Problembereiche abdeckenden Programmiersprache griff die Firma IBM auf, entwickelte für ihre Anlagen die Sprache PL/I und stellte arbeitsfähige Compiler zur Verfügung. Für umfangreiche kommerzielle Probleme mit großem organisatorischen Aufwand hat heute PL/I, nicht zuletzt wegen der Verbreitung von Rechenanalagen mit PL/I-Compilern, einen entscheidenden Platz erobert. Wie das vorliegende in der DDR entstandene Lehrbuch zeigt, ist diese Sprache zusammen mit einem Betriebssystem, vergleichbar denen der IBM-Anlagen, auch auf den in osteuropäischen Ländern produzierten Maschinen des Einheitlichen Systems der Elektronischen Rechenanlagen der Sozialistischen Länder (ESER) implementiert worden.

Das vorliegende Buch gibt in außerordentlich gründlicher Darstellung eine Einführung in die Programmiersprache PL/I. Um auch dem Leser, der beim Lernen keine Möglichkeit hat, praktische Übungen auf einer Anlage durchzuführen, das Studium zu erleichtern, ist eine technische Beschreibung elektronischer Rechenanlagen vorangestellt.

Danach werden die Elemente der Sprache entwickelt, welche zur Aufstellung technisch-wissenschaftlicher Programme erforderlich sind, so daß der Leser rasch in die Lage versetzt wird, einfache lauffähige Programme zu erstellen und Erfahrungen zu sammeln.

Anschließend setzt die Entwicklung der höheren Sprachelemente ein: Blockstruktur, Datenstrukturen, Zeichenkettenverarbeitung, Speicherverwaltung werden in allen Einzelheiten dargestellt. Es folgen die Möglichkeiten der Programmunterbrechung und ihre Bearbeitung durch den Programmierer, Techniken der Verarbeitung größerer Datenmengen, ihre Ein- und Ausgabe.

Die eigentliche Einführung in PL/I schließt mit der Behandlung der für die Parallelverarbeitung notwendigen Sprachelemente und der Programmvorverarbeitung.

In einem abschließenden Kapitel geben die Autoren einen Abriß eines Teiles der Job-Control-Sprache, der zum Einsatz des bereits erwähnten Betriebssystems beim Lauf der (meisten) PL/I-Programme ausreichend ist.

Es ist begrüßenswert, daß hier eine didaktisch gute Darstellung der gesamten PL/I-Definition vorgelegt wird, die sowohl zum Selbststudium geeignet ist, wie auch dem fortgeschrittenen Programmierer willkommen sein wird.

Die vollständigen Tabellen der Standardfunktionen, die Konversionstabellen der arithmetischen Operationen, der umfangreiche Anhang werden dieses Buch auch für den erfahrenen Programmierer zu einem wertvollen Nachschlagwerk machen.

Münster H. Werner

Rosenmüller, J., Extreme Games and Their Solutions (Lecture Notes in Economics and Math. Systems, vol. 145), Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1977, 126 S., DM 18,--

Sei Ω eine endliche Menge („alle Spieler") und $P(\Omega)$ ihre Potenzmenge („alle Koalitionen"). Reelle („Wert-") Funktionen v: $P(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ heißen auch („kooperative") Spiele. Das Spiel v heißt

1. konvex, wenn stets $v(S) + v(T) = v(S \cap T) + v(S \cup T)$,
2. superadditiv, wenn stets $v(S) + v(T) \leqslant v(S \cup T) \; (S \cap T = \emptyset)$,
3. additiv, wenn stets $v(S) + v(T) = v(S \cup T) \; (S \cap T = \emptyset)$

gilt. Sei C der Kegel der konvexen, S der Kegel der superadditiven und A der Kegel der additiven Spiele. Diese Kegel sind konvex und folglich – Kompaktheit versteht sich in diesen endlichdimensionalen Situationen immer von selbst – konvex aus ihren Extremalstrahlen aufgebaut. Zu einem Spiel v gehören stets „Lösungsbegriffe" auf der Basis additiver Mengenfunktionen (Core, Shapley-Wert etc.). Auch hier treten konvexe Mengen auf, d. h., die Frage nach Extremalpunkten stellt sich.

Die Untersuchung von Extremalpunkten in der Spieltheorie hat folgende allgemeine Gründe: 1. Extremalpunkte führen oft zu kombinatorisch-zahlentheoretischen Strukturen, die a) besonders klar sind, b) die Anwendung von endlichen Rechenverfahren ermöglichen.
2. Extremalpunkte stellen oft „extreme" soziale Situationen dar, die durch ihre Drastik einleuchten. – Dies sind natürlich nur Erfahrungssätze der Spieltheorie. Das vorliegende Bändchen ist aus solchen Erfahrungen heraus geschrieben und bestätigt sie. Die Darstellung stützt sich im Einzelnen auf vorangehende Originalabhandlungen von Rosenmüller-Weidner (1973/74) betr. C und Rosenmüller (1974) betr. S, sowie von Delbaen (1974), Griesmer (1959), Gurk (1959), Kannai (1969), Schmeidler (1972), Shapley (1971). Sowohl bei C als auch bei S führen extremale Spiele und extremale Lösungen zu Klassenbildungen in Ω. Das Bändchen besteht aus zwei systematischen Theorie-Kapiteln und einer Sammlung von Beispielen. Besonders lesenswert ist die Einleitung. Dozenten können diesen sauber gearbeiteten Text zum schnellen Eindringen in die kooperative Spieltheorie und zum Abhalten von Seminaren ohne vorbereitende Vorlesungen (lediglich einfache Kenntnisse über Extremalpunkte sind vonnöten, und natürlich ist es gut, sich über die Anlässe der Theorie näher zu informieren) verwenden.

Erlangen K. Jacobs

Claus, V., Einführung in die Informatik, Stuttgart: Teubner Verlag 1975, 256 S., kart., DM 24,80.

„Der zunehmende Einsatz von Rechenanlagen verlangt von jedem Schulabgänger, daß er die Fähigkeit besitzt, einfache Probleme zu analysieren, deren Lösungsabläufe zu entwickeln und diese so zu beschreiben, daß sie schließlich auf einer Rechenanlage ausgeführt werden können. Gegenstand des Informatikunterrichts ist in erster Linie nicht die technische Funktion des Rechners. Vielmehr erscheint es wesentlich, Möglichkeiten der Anwendung des Rechners sowie Auswirkung und Grenzen des Einsatzes von Rechenanlagen zu kennen und zu erkennen."

„Es gilt, die Vorstellung vom Rechner als ‚Elektronengehirn' und die von der ‚Knopfdruckautomatik' abzubauen. Der Schulabgänger soll der Datenverarbeitung nicht hilflos wie einer höheren Gewalt gegenüberstehen, sondern sie rational in sein Umweltverständnis einordnen können."

„Für den Informatikunterricht lassen sich drei interdependente Schwerpunkte definieren: 1. Entwicklung eines Problemverständnisses für die Möglichkeiten der Datenverarbeitung, 2. Einordnen von Informatikkenntnissen in die Erlebniswelt, 3. Erlangen von speziellen Informatikkenntnissen." Zitat aus: Brauer, W., Claus, V., Deussen, P., Eickel, J., Haacke, W., Hosseus, W., Koster, C. H. A., Ollesky, D., Weinhart, K., Zielsetzungen und Inhalte des Informatikunterrichts, Zentralbl. f. Didaktik d. Math. 1976/1.

Es handelt sich hierbei um einen offiziellen Vorschlag der Gesellschaft für Informatik e.V., erarbeitet von einem Unterausschuß ihres Fachausschusses „Ausbildung". Auf der Grundlage dieser Empfehlungen wurden an verschiedenen Stellen Lehrpläne und Lehrerfortbildungskurse entwickelt.

Diese Empfehlungen und Aktivitäten stehen nach Auffassung der Gesellschaft für Informatik nicht im Widerspruch zu der folgenden Bemerkung aus der Denkschrift der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zum Mathematikunterricht an Gymnasien vom Frühjahr 1976 (Seite 5 unten): „Es ist eine Fehlentwicklung, wenn man in der Schule Mathematik auf formales Schließen und exaktes Beweisen reduziert und meint, zur Behandlung von numerischen Verfahren und Algorithmen neue Fächer wie ‚Angewandte Mathematik' oder ‚Informatik' schaffen zu müssen. Solche Verfahren müssen selbstverständlich bei jeder Behandlung konkreter mathematischer Situationen herangezogen werden."

Eine Einführung in die Informatik soll vielmehr gerade als Ergänzung des Mathematikunterrichts dienen und die Möglichkeit schaffen, wesentlich mehr und modernere numerische Methoden, nichtnumerische mathematische Algorithmen und Anwendungen der Mathematik im Unterricht zu behandeln. Andererseits sind die in der Denkschrift geforderten Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten zu einem überwiegenden Teil notwendige Voraussetzungen für das Verständnis und viele Anwendungen der Informatik.

Wenn auch in der Schule der Informatikunterricht nicht an den Mathematikunterricht gekoppelt zu sein braucht, so wird er es doch in naher Zukunft im wesentlichen sein, und es werden vornehmlich die Mathematiklehrer dazu aufgefordert sein, Zusatzkenntnisse in Informatik zu erwerben, um dieses neue Fach mit unterrichten zu können.

Das Buch von V. Claus wendet sich hauptsächlich an Mathematiklehrer an Gymnasien, um ihnen eine Einführung in die Informatik zu geben, die es ihnen ermöglichen soll, in dem oben skizzierten Sinne das Fach zu unterrichten. Der neueren Entwicklung der Informatik entsprechend beginnt das Buch nicht mit der Beschreibung der Technik von Rechenanlagen, sondern mit einer Einführung in den Algorithmenbegriff (ausgehend von Alltagsalgorithmen wie Kochrezepten, Gebrauchsanweisungen etc.). Als nächstes werden dann die nötigen Hilfsmittel entwickelt, um algorithmische Problemlösungen als Programme für Rechenanlagen zu formulieren, d. h., es werden die wesentlichen Sprachelemente von Programmiersprachen systematisch eingeführt. Im dritten Kapitel werden die wichtigsten Datenstrukturen behandelt.

Maschinennahe Programmiersprachen und der Aufbau einfacher Rechenanlagen werden erst im 4. Kapitel, jedoch relativ ausführlich, behandelt.

Das 5. Kapitel bringt Schaltnetze und Schaltwerke und geht auch kurz auf die Mikroprogrammierung ein.

Das 6. Kapitel behandelt die Programmiersprachen BASIC und ALGOL W. Die Sprache

BASIC wurde aus technischen Gründen bisher viel an Schulen benutzt, obwohl sie im Sinne der o.g. Empfehlungen sehr wenig für den Informatikunterricht geeignet ist. Die Sprache ALGOL W ist ein Vorläufer von neueren, unter obigen didaktischen Gesichtspunkten entwickelten und jetzt in Schulen auch einsetzbaren höheren Programmiersprachen (insbesondere PASCAL und ELAN).

Das Buch schließt mit einigen Hinweisen auf mögliche Auswirkungen der Datenverarbeitung auf die Gesellschaft sowie einigen Übungsaufgaben.

Hamburg W. Brauer

GI-3. Fachtagung über Programmiersprachen, hrsg. von B. Schlender und W. Frielinghaus (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1974, VI + 225 S., geheftet, DM 24,80

Der Tagungsband über die 3. Fachtagung der Gesellschaft für Informatik über Programmiersprachen läßt vier wesentliche thematische Schwerpunkte erkennen: Syntax und Semantik von Programmiersprachen, Probleme der Entwicklung und Implementierung von Übersetzern, Dialogsprachen und Sprachen für Prozeßrechner. Darüber hinaus lassen sich mehrere Beiträge von unterschiedlicher Thematik unter dem übergreifenden Aspekt der Anforderungen und Auswirkungen der Strukturierten Programmierung auf Hardware und Software betrachten.

So umfaßt das Spektrum der Arbeiten, die sich mit Fragen der strukturierten Programmierung auseinandersetzen, Untersuchungen zu Problemkreisen wie der Modularität von Programmiersprachen und ihrer Entscheidbarkeit, der Unterstützung strukturierter Programmierung durch geeignete Hardware, der Auswirkungen strukturierter Programmierung auf den Übersetzerbau (Modularisierung von Compilern) sowie der automatischen projektorientierten Programmverwaltung und -dokumentation von modularprogrammierten Systemen.

Im Bereich der Syntax und Semantik von Programmiersprachen sind neben einer Darstellung der auf der Basis von ALGOL 68 entwickelten in SIMULA übersetzbaren Programmiersprache ALSI Arbeiten zu eng begrenzten Teilaspekten dieses Themenkreises vorherrschend. Neben einem Erfahrungsbericht über den Einsatz eines Parser-Generators für allgemeine Chomsky-Grammatiken finden sich dort Untersuchungen über die Zuordnung von Bedeutungen zu Struktureinheiten context-freier Sprachen durch syntax-gesteuerte Übersetzungsschemata sowie über den minimalen Hilfszellenbedarf bei der systematischen Übersetzung von Ausdrücken in Folgen von Dreiadreßbefehlen.

Außer der bereits erwähnten Arbeit über Auswirkungen der strukturierten Programmierung auf den Übersetzerbau befassen sich zwei Beiträge explizit mit Problemen der Entwicklung und Implementierung von Übersetzern. Zum einen werden Untersuchungen zum Problem der Compilierbarkeit von LISP-Programmen bei impliziter Selbstmodifizierung dargestellt, zum anderen wird ein Erfahrungsbericht über die Implementierung eines PASCAL-Compilers auf einem DEC-System 10 gegeben.

Zwei der insgesamt 18 Beiträge sind den Dialogsprachen gewidmet. So wird zum einen ein allgemeines Modell zur Beschreibung der Syntax von Dialogsprachen, zum anderen das Design und die Implementierung des konkreten Dialogsystems KANDIS dargestellt.

Besonders erwähnenswert sind zwei Arbeiten aus dem Themenkreis der Prozeßrechnersprachen, in denen einerseits Anforderungen an Formen und Funktionen prozeßorientierter Programmiersprachen allgemein erörtert und an der Prozeßrechnersprache PEARL exemplifiziert werden, andererseits mit RTL/2 eine spezielle Sprache zur Programmierung von Anwendungen mit Echtzeit-Anforderungen an Datenakquisition und Kontrolle vorgestellt wird.

Münster W. Slaby

B. G. TEUBNER ANNOUNCING A NEW JOURNAL

Mathematical Methods in the Applied Sciences

new

B. G. Teubner Stuttgart

This journal is concerned with those mathematical methods which can be shown to be necessary for the further understanding and thorough analysis of actual problems in the applied sciences.

Papers may be submitted in English, French or German but preferably in English to ensure the widest possible circulation. Manuscripts should be sent to one of the Managing Editors or Advisory Editors.

The journal consists of one volume a year published in four quarterly issues. Subscriptions are possible only per volume. The subscription rate per volume is DM 280.– including postage and handling.

For further information please write to

B. G. Teubner P.O. Box 80 10 69 D-7000 Stuttgart 80