82. Band Heft 2
ausgegeben am 3. 6. 1980

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, W.-D. Geyer

B. G. Teubner Stuttgart 1980

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 82/1 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 74,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 73 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Gesamtherstellung: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, 6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 82, Heft 2

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinenden Arbeiten:

M. Knebusch: Signaturen, reelle Stellen und reduzierte quadratische Formen

L. Gårding: Microlocal Analysis of Distributions

H. Tietz: Fundstellen für biographische und bibliographische Angaben über deutsche Mathematiker, die nach 1933 verstorben sind (Stand 1977)

M. Frewer: Felix Bernstein

H. Amann: Funktionalanalysis und nichtlineare Differentialgleichungen

St. Schottlaender: Zum Gedenken an Wilhelm Quade

J. E. Fensted: Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics

P. L. Butzer et al.: Eduard Helly (1884–1943) – Eine nachträgliche Würdigung

M. Kracht: Maximilian Pinl in memoriam

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 51–62

In Memoriam Wolfgang Krull[1])

H. Schöneborn, Aachen[2])

In einem Bericht, der den Lebensweg von *Wolfgang Krull* in seinen wesentlichen Etappen zu schildern versucht, müßte der fachliche, der mathematische Aspekt also, auch dann im Vordergrund stehen, wenn die Leser nicht vornehmlich Mathematiker sein würden.

Um kreativ sein zu können, muß der Wissenschaftler – und dies ist, wenn schon keine hinreichende, so wahrscheinlich doch eine notwendige Vorbedingung – von dem Gegenstand seiner Forschung fasziniert sein. Die Wissenschaft wird so für ihn zu einem geistigen Gravitationszentrum, unter dessen Einfluß viele Dinge ein anderes Gewicht und Aussehen erhalten als in landläufiger Sicht. – *Krull*s Leben jedenfalls war beispielhaft für diese These. Die Faszination, die die Mathematik bis zuletzt auf ihn ausgeübt hat, war weitgehend bestimmend für sein Denken und Handeln bis in die Kleinigkeiten des Alltags hinein. Sie traf bei *Krull* zusammen mit einer eminenten mathematischen Begabung, ja Genialität, die in wenigen Sätzen zu kennzeichnen nicht möglich ist, die – rein äußerlich – aber schon der junge Student oder Assistent empfand, wenn, etwa bei einem Kolloquiumsvortrag, die anschließenden Fragen *Krull*s ein blitzartiges, intuitives Erfassen auch solcher mathematischer Sachverhalte zeigten, die nicht zu seinem unmittelbaren Arbeitsgebiet gehörten.

Wolfgang Krull wurde am 26. 8. 1899 in Baden-Baden als Sohn eines Zahnarztes geboren. In seinen aktenmäßigen Angaben finden wir nur wenige Informationen über seine Jugend, und obwohl wir von ihm Nahestehenden erfahren, daß er zu seinem Elternhaus ein enges und gutes Verhältnis hatte, möchte es nach den Akten scheinen, als habe sein Leben eigentlich erst mit dem Studium der Mathematik begonnen. Das war 1919 in Freiburg, anschließend ein Semester in Rostock und schließlich 1920 und 1921 in Göttingen. Diese Göttinger Studienzeit war es, die seinen mathematischen Werdegang entscheidend beeinflußt hat.

---

[1]) Am 3. Dezember 1976 fand eine vom *Mathematischen Institut der Universität Bonn* veranstaltete Gedächtnisfeier zu Ehren von Wolfgang Krull statt. Die ersten beiden Vorträge von H. Schöneborn und H.-J. Nastold waren überarbeitete Fassungen der für den „*Jahresbericht*“ angefertigten und hier aufeinanderfolgend wiedergegebenen Manuskripte. – Beide Autoren beziehen sich auf das am Ende des zweiten Beitrags angefügte Verzeichnis der Veröffentlichungen von Wolfgang Krull. Es beruht zu wesentlichen Teilen auf Unterlagen, die freundlicherweise von Herrn P. Ribenboim (Kingston, Ontario) zur Verfügung gestellt wurden.

[2]) Herr F. K. Schmidt † (Heidelberg) hat im Rahmen einer ausführlichen Korrespondenz viele Anregungen und persönliche Erinnerungen zu diesem Bericht beigesteuert. – Herrn P. Ucsnay (Bonn) ist für freundliche Hilfe bei der Beschaffung wichtiger Daten zu danken.

0012–0456/80/02 0051–12 $02.40/0

Damals lebte und wirkte – obwohl bereits emeritiert – in Göttingen noch *Felix Klein.* Im Rahmen des Lebensbildes von *Eduard Study,* welches *Krull* [110] zur 150-Jahrfeier der Universität Bonn beitrug, berichtet er (S. 28):

> „Klein war eine imponierende Persönlichkeit. Der Autor hatte das Glück, ihn als Student noch kennenzulernen, wie er in einem Seminar im kleinen Kreis in seiner Wohnung einen Kommentar zu dem damals im Entstehen begriffenen 2. Band seiner Gesammelten Abhandlungen gab, gewürzt mit vielen Anekdoten über frühere Freunde und Gegner. Der Eindruck war eindeutig: Man hatte es mit einem Herrscher zu tun, der sich vom Regiment zurückgezogen hatte ...".

Krull schreibt aber auch (ibid.)

> „Klein als Mathematiker war gekennzeichnet durch einen genialen Weitblick, der immer wieder neue Zusammenhänge im Großen erfaßte, der aber beeinträchtigt wurde durch eine ausgesprochene Nahblindheit. Man kann überspitzt sagen, daß Klein des Sinnes für einen streng mathematischen Beweis durchaus entbehrte".

Für den jungen *Krull,* der mathematische Impulse von sehr verschiedener Art aufzunehmen verstand, war *Kleins* Art, Mathematik zu „sehen" außerordentlich eindrucksvoll und anregend, und *Krull* nahm in seine späteren Algebravorlesungen gerne Teile der Kleinschen Invariantentheorie, der Diskussion der Gleichung 5. Grades und des Kleinschen Formenproblems auf – aber als Mathematiker entscheidend geprägt wurde er in Göttingen durch *Emmy Noether,* deren Ideen zur Modul-, Ideal- und allgemeinen Ringtheorie grundlegend für den Hauptteil seines späteren Werkes wurden. Jedenfalls blieb *Krull* bis in seine Erlanger Zeit hinein – also die Zeit nach 1928 (E. *Noether* starb 1935) – mit *Emmy Noether* in enger, wissenschaftlicher Verbindung und *F. K. Schmidt*[2]) weiß von einer Szene zu berichten, in welcher gelegentlich eines Besuches von *Emmy Noether* in Erlangen, die beiden – also *Krull* und Frau *Noether* – weltvergessen diskutierend in einer Gaststätte sich um einen Tisch herum nachliefen – zum Erstaunen und zum Gaudium der übrigen Gäste.

Um zur chronologischen Reihenfolge zurückzukehren: Vor Abschluß seines Studiums wechselte *Krull* von Göttingen wieder nach Freiburg, um dort 1921 bei *Alfred Loewy* mit der Dissertation [1] „*Über Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie*" zu promovieren. Bestimmte Gründe für den Wechsel von Göttingen wieder nach Freiburg konnte ich nicht ausfindig machen. Damals war es üblich, ein Studium an verschiedenen Universitäten zu absolvieren und für die Rückkehr nach Freiburg mag die Nähe des Elternhauses gesprochen haben. Nur ein Jahr später, am 1. 10. 1922, im Alter von 23 Jahren, konnte sich *Krull* habilitieren und wurde damit Privatdozent in Freiburg. Die Ernennung zum nichtbeamteten, außerordentlichen Professor – eine Rechtsfigur, für die wir heute kein genau passendes Analogon haben – erfolgte 1926. – Jedenfalls muß man im Auge behalten, daß akademische Ämter und Würden damals ungleich dünner gesät waren als heute und ihre Erlangung entsprechend schwieriger. In seiner Freiburger Zeit konnte *Krull* schon einen Kreis von Schülern und Freunden um sich sammeln. *F. K. Schmidt*[2]) berichtet von *Krulls* winterlichen Skiwanderungen mit diesem Kreis. Freitag nachmittags wanderte man zum verschneiten Feldberg. Übernachtet wurde in kleinen Gasthöfen, wo man den

Abend, versammelt um den Kachelofen, im Gespräch verbrachte. Montags war man wieder in Freiburg zurück. An sich belanglose Begebenheiten, illustrieren sie dennoch die im materiellen anspruchslose, aber geistig fruchtbare Intimität des damaligen akademischen Lebens allgemein und *Krull*s Einstellung dazu im Besonderen. –

Im Jahre 1928 ging *Krull* von Freiburg als ordentlicher Professor nach Erlangen. Zu dieser Zeit, also in seinem 29. Lebensjahr, umfaßte sein Schriftenverzeichnis als Niederschlag seiner Freiburger Tätigkeit über 20 Titel, überwiegend Arbeiten zur Algebra und algebraischen Zahlentheorie. Neben der für die Idealtheorie grundlegenden Arbeit „*Zur Theorie der allgemeinen Zahlenringe*" [18] erwähne ich gesondert drei Arbeiten, die von der allgemeinen Linie von *Krull*s Untersuchungen in dieser Periode etwas abweichen: 2 Arbeiten über von *Krull* so genannte „Verallgemeinerte Abelsche Gruppen", also Moduln mit allgemeinem Operatorenbereich. Die erste dieser beiden Arbeiten [10] – 1925 in der Math. Z. publiziert – liefert den nach einer späteren Verallgemeinerung durch den russischen Gruppentheoretiker *Otto Schmidt* unter dem Namen *Krull-Schmidt-Theorem* bekannten Satz über die direkte Zerlegung abelscher Operatorgruppen. Die zweite Arbeit [12], 1926 in den Heidelberger Sitzungsberichten erschienen, überträgt die Theorie der Kompositionsreihen auf die betrachteten Moduln und bringt Anwendungen auf die Idealtheorie und die Elementarteilertheorie. Schließlich ist aus dieser Schaffensperiode zu erwähnen noch die 1928 in Band 100 der Math. Annalen erschienene Arbeit „*Galois'sche Theorie der unendlich algebraischen Erweiterungen*" [17]. Damit stieß *Krull* die Tür zu zwei neuen Forschungsrichtungen auf: Einerseits eben die Galoistheorie der unendlich algebraischen Erweiterungen, andererseits aber auch die Theorie derjenigen topologischen Gruppen, welche ein aus offenen Untergruppen bestehendes, vollständiges Umgebungssystem der 1 besitzen. Denn eben solche Gruppen treten als Galoisgruppen unendlicher Erweiterungen auf. In ganz anderem Zusammenhang, nämlich bei seinen Untersuchungen über direkte Zerlegungen abelscher Gruppen, war schon *Heinz Prüfer* auf solche, sozusagen algebraisch topologisierten Gruppen gestoßen. Im 1925 erschienenen zweiten Teil seiner Habilitationsschrift[3]) führt *Prüfer* von ihm so genannte Ideale Gruppen ein, wobei er sich an der *Hensel*schen p-adic der algebraischen Zahlentheorie orientierte. Wir würden heute sagen, daß *Prüfer* seine Gruppen in eine topologisch komplette Hülle einbettete, um die Gültigkeit gewisser Zerlegungssätze zu erzwingen. Jedenfalls hat *Krull* den Zusammenhang mit den von ihm gefundenen Galoisgruppen gesehen und – wie häufig auch später – dieses Randproblem seiner eigenen Untersuchungen einem Schüler zur Weiterbearbeitung übergeben. Dies war zu Beginn seiner Erlanger Zeit[4]).

Die von *Krull* ausgegebene und 1931 in den Math. Annalen erschienene Dissertation[5]) enthielt einen von *Krull* selbst zunächst übersehenen und 1934 von *Pontrjagin*[6]) durch ein Gegen-

[3]) P r ü f e r , H.: Theorie der Abelschen Gruppen II. Math. Z. 22 (1925).

[4]) K r u l l s algebraisches Hauptwerk wird in der Abhandlung von N a s t o l d [1]) behandelt. – Verf. geht nachfolgend kurz auf einige gruppentheoretische Beiträge Krulls ein, die in der Arbeit von N a s t o l d keine Berücksichtigung finden konnten.

[5]) P i e t r k o w s k i , St.: Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen. Math. Ann. **104** (1931).

[6]) P o n t r j a g i n L. S.: The theory of topological commutative Groups, Appendix I. Ann. of Math. (2) **35** (1934).

beispiel aufgedeckten Fehler, der die Arbeit keineswegs wertlos machte, aber *Krull* geärgert haben mag. Jedenfalls hat er zu späterer Zeit den topologisch gruppentheoretischen Themenkreis sozusagen wieder auf die Hörner genommen und das Ergebnis war – nach einer vorbereitenden Note [58] – seine große Arbeit „*Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen*“ [61], welche allerdings erst 1942 in Crelles Journal erschien. Die hier untersuchten Gruppen sind abelsch mit p-adischem Operatorenbereich, wir bezeichnen sie heute als nulldimensionale, linear-kompakte Gruppen mit abzählbarer topologischer Basis. Unter diesen Voraussetzungen untersucht *Krull* zunächst die in der erwähnten Schülerarbeit teilweise unzutreffend behandelte Frage der zyklischen direkten Zerlegbarkeit und führt die tatsächlich diffizilen Beweise für die entsprechenden Sätze. Die Schwierigkeiten beruhen darauf, daß die abgeschlossene Hülle der von den Elementen endlicher Ordnung erzeugten Untergruppe nicht notwendigerweise wieder eine Torsionsgruppe ist. Weiterhin sind insbesondere die kompakten Gruppen der betrachteten Art die Galoisgruppen eines durch Adjunktion abzählbarer vieler algebraischer Elemente entstandenen abelschen Körpers. Da ihre Charakterengruppen genau die abzählbaren Torsionsgruppen sind, läßt sich das Invariantensystem des 1933 publizierten Ulmschen Satzes[7]) jetzt auch zur Kennzeichnung solcher unendlichen Körpererweiterungen benutzen. – *Krull* hat auch später gelegentlich gruppentheoretische Untersuchungen der eben erwähnten Art publiziert. Sie bilden bei ihm freilich keine der Hauptarbeitsrichtungen, über die später noch berichtet werden wird[4]), aber gerade deshalb glaubte ich sie hier erwähnen zu sollen:

In diesem Zusammenhang sind – der zeitlichen Reihenfolge vorauseilend – noch anzuführen zwei größere Arbeiten über die „natürliche“ Topologisierung algebraischer Strukturen. Die erste, über „*Charakterentopologie, Isomorphismentopologie, Bewertungstopologie*“ [88] faßt das wissenschaftliche Ergebnis eines Gastaufenthaltes in Spanien zusammen: Unter sehr allgemeinen Gesichtspunkten wird die Einführung einer Topologie zum Zweck der Untersuchung algebraischer Objekte betrachtet. In einer algebraischen Struktur K sei ein System von Unterstrukturen ausgezeichnet, welches K erzeugt. Gegeben sei ferner eine weitere Struktur A und ein System P von Abbildungen von K in A, welches einigen einfachen Forderungen genügt. Die Elemente von P sind die „Charaktere“ von K bezüglich A. In Analogie zu der oben erwähnten ([17]) Definition der unendlichen Galoisgruppen wird das Charaktersystem P topologisiert. Diese Topologie – sie liefert zugleich eine uniforme Struktur – erweist sich als Cauchy-vollständig. Von besonderem Interesse ist wieder der zwischen Vollständigkeit und Kompaktheit liegende Fall, den wir heute nach dem Vorbild der Theorie der Topologischen Vektorräume als „*Lineare Kompaktheit*“ bezeichnen. *Krull* wendet seine allgemeinen Ergebnisse dann auf die Theorie der Körpererweiterungen sowie auf bewertungstheoretische Fragen im Zusammenhang mit der Arithmetik der unendlichen, algebraischen Zahlkörper an und untersucht die Aufgabe, eine der Dedekindschen „ähnliche“, aber nicht auf ganze Größen einer e n d l i c h e n Körpererweiterung beschränkte, multiplikative Idealtheorie zu konstruieren. Er weist auch auf die Grenzen der topologischen Methode hin, die die algebraische „Feinstruktur“ gewisser Objekte nicht zu erfassen vermag. – Zur gleichen Arbeitsrichtung schließlich gehört die später erschienene Arbeit „*Zur Theorie der Gruppen mit Untergruppentopologie*“ [106], deren Gegenstand wieder Gruppen der in [58] untersuchten Art, jetzt aber unter allgemeineren Voraussetzungen – auf Kommutativität und abzählbare, topologische Basis wird verzichtet – sind. Diese Gruppen lassen sich stets als projektive Limites diskreter Gruppen darstellen und dementsprechend werden zunächst „projektive Systeme“ und ihre Eigenschaften, insbesondere wieder Vollständigkeit und Lineare Kompaktheit (bei *Krull* jetzt „strenge Vollständigkeit“ genannt) ausführlich betrachtet. Dieser allgemeine Ansatz wird dann auf verschiedene Kategorien von diskreten Gruppen angewendet, zu denen jeweils die Klasse der zugehörigen Limesgruppen gebildet wird und es wird untersucht, ob und wie sich spezielle Eigenschaften der diskreten Ausgangsgruppen auf die Limesgruppen übertragen. Insbesondere führt die Anwen-

---

[7]) U l m H.: Zur Theorie der abzählbar-unendlichen Abelschen Gruppen. Math. Ann. **107** (1933).

dung der Theorie auf die Kategorie der lokal-endlichen Gruppen zu einer interessanten und weitgehenden Verallgemeinerung des Begriffs der p-Gruppe und der Sylowschen Sätze auf die zugehörigen Limesgruppen. – Zu bemerken ist noch, daß *Krulls* Untersuchungen zur – wir sagen heute – topologischen Algebra in Fragestellung und Methode rein algebraisch ausgerichtet sind. Das Topologische darin erscheint als akzessorisch und die verwendeten topologischen Verfahren werden vorzugsweise aus dem Gedankenkreis der Bewertungstheorie und der Galoistheorie begründet. –

Unter den – wenigen – Arbeiten *Krulls* zur Theorie der endlichen Gruppen scheint mir erwähnenswert seine Note „Über die p-Untergruppen endlicher Gruppen" [101], welche – auf einer Idee von H. *Wielandt*[8]) aufbauend – elegante Beweise zum Komplex der Sylow-Sätze liefert und eine Theorie komplett auf sechs Seiten darstellt, für die manche Lehrbücher ein oder zwei Kapitel benötigen. – Schließlich sei noch auf zwei zusammengehörige, kleinere, aber gleichwohl interessante Arbeiten *Krulls* über „Eudoxische Halbgruppen" [98], [103] hingewiesen. Sie sind die mathematische Frucht eines Seminars über das V. Buch Euklids, in welchem die Proportionen- und Größenlehre des Eudoxos abgehandelt wird. *Krulls* moderne Interpretation und Weiterführung der Gedanken des Eudoxos führt auf die Untersuchung einer Endomorphismengruppe, die auf einer archimedisch-geordneten Semigruppe transitiv operiert. Beide Arbeiten zusammen bilden ein kleines, essayistisches Kabinettstück, welches sowohl vom historischen wie auch vom rein mathematischen Standpunkt von Interesse ist.

Zur Chronik zurückkehrend, finden wir *Krull* also in dem Jahrzehnt von 1928–1938 als Ordinarius in Erlangen. *Krull* ist immer ein in hohem Maße kreativer Mathematiker gewesen, aber vom Standpunkt eines fachlichen Lebensbildes bildet die genannte Zeitspanne einen Höhepunkt seines Schaffens. In seinem Schriftenverzeichnis findet man allein aus diesem Zeitraum etwa 35, zu einem erheblichen Teil relativ umfangreiche Publikationen, darunter die Arbeiten „*Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen*" [19] von 1928 und „*Allgemeine Bewertungstheorie*" [35] von 1932, den Idealbericht [37] von 1935 und die „*Dimensionstheorie in Stellenringen*" [47] von 1938. Zusammen mit den letzten Veröffentlichungen der Freiburger Zeit liegt damit bereits ein Oeuvre vor, welches grundlegend für die heutige Idealtheorie, die Bewertungstheorie und die Theorie der lokalen Ringe ist.

Gegenüber dieser großartigen und permanenten wissenschaftlichen Leistung tritt *Krull* als Person in dieser Zeit für uns zurück. Er hat 1929 geheiratet, wurde auch an der Erlanger Fakultät Dekan – aber im übrigen ist mir aus dieser Zeit nichts bekannt, was im Rahmen eines knappen Lebensbildes vorzutragen wäre. 1938 folgte *Krull* einem Ruf an die Universität Bonn. Besondere Gründe, derentwegen *Krull* Erlangen verlassen haben mochte, habe ich nicht ermitteln können. Er war kein Gegner eines Ortswechsels, und ein Ruf auf ein neues, weiteres Ordinariat war ehrenvoll – jedenfalls wurde *Krull* zum 1. 11. 1938 zum Ordinarius in Bonn ernannt. Hier geht es zunächst weiter wie zuvor, und es erscheint noch eine Anzahl von Arbeiten – darunter zwei Enzyklopädie-Berichte über „*Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie*" [59] sowie über die „*Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie*" [60], aber 1943 brechen seine Beiträge für die Dauer von fünf Jahren ab – natürlich eine Folge des Krieges. Gegen Ende des Krieges wurde *Krull* zum meteorologischen Dienst der Marine einberufen. Mit dem Zusammenbruch geriet er dort in Gefangenschaft und konnte erst 1946 nach Bonn zurückkehren. Die Universität Bonn hatte bereits im Winter 1945 einen – freilich bescheidenen – Vorlesungsbetrieb wieder

[8]) Wielandt, H.: Arch. Math. **10** (1959) 401–402.

aufnehmen können. Im Mathematischen Seminar – bestehend aus einem leihweise überlassenen Raum der Sternwarte – war damals als Professor nur Herr *Peschl* (heute Univ. Bonn), als Assistenten die Herren *Hermes* (heute Univ. Freiburg) und *Lorenzen* (heute Univ. Erlangen-Nürnberg). Im Vorlesungsverzeichnis für das WS 1946/47 – ich glaube, es war das erste, gedruckte Vorlesungsverzeichnis der Universität Bonn nach dem Kriege – findet man dann wieder *Krull* mit Ankündigung der Vorlesungen: Partielle Differentialgleichungen, Tensorrechnung und Höhere Algebra, einem Proseminar über Differentialgleichungen und dem gemeinsam mit Herrn *Peschl* angekündigten Seminar. Der Winter 46/47 war erbärmlich kalt, und die Universität konnte mangels Brennstoff ihre Hörsäle nicht heizen. Damals lernte ich *Krull* kennen und sehe ihn noch, wie er in einem blauen Marinemantel seine Vorlesung hielt, verfroren wie wir alle, aber hochaufgerichtet mit seiner hellen, präzisen Stimme sprechend und erkennbar fest entschlossen – seien die Verhältnisse wie auch immer –, Mathematik zu lehren und zu forschen.

Von 1948 ab tritt *Krull* wieder mit einer großen Anzahl von Publikationen hervor, die im Verlaufe der nun folgenden 20 Jahre sein Schriftenverzeichnis auf insgesamt etwa 120 Titel anwachsen lassen: Überwiegend wieder Arbeiten zur Algebra, darunter auch eine Anzahl gruppentheoretischer Arbeiten[4]). Außerdem finden sich einige Arbeiten über Differenzengleichungen, zur Korrelationstheorie, über Hilberträume und zur Variationsrechnung. – Unbestritten ein Mathematiker von hohem, internationalem Rang, erhielt er trotz seines zurückhaltenden Wesens viele Einladungen und Ehrungen, so die Ehrendoktorwürde der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen am 8. Dezember 1962.

Nachdem die früheren Schüler *Krull*s durch den Krieg verstreut worden waren und während des Krieges kaum Nachfolger gefunden hatten, bildete sich jetzt ein neuer Schülerkreis. An die 30 von *Krull* ausgegebene und betreute Dissertationen sowie mindestens sieben von ihm maßgeblich beeinflußte und vertretene Habilitationen zeugen von der Fruchtbarkeit seines Wirkens als akademischer Lehrer in der Nachkriegsperiode. – Seinen Studenten war *Krull* ein gerecht und billig denkender, auch menschlich interessierter und ansprechbarer Lehrer. In seinen Anforderungen war er streng, aber immer um Angemessenheit bemüht. Prüflinge, deren Ziel lediglich ein Staats- oder Diplomexamen war und die sich etwas schwer taten, behandelte er in der Prüfung mit bewußter Milde und bemühte sich sogar, seine Fragen so zu stellen, daß die richtige Antwort nach seiner Ansicht erraten werden konnte. – Zu seinen Doktoranden und Habilitanden hatte *Krull* stets einen engen menschlichen und fachlichen Kontakt. Allerdings bestand er hier auf dem ihm angemessenen erscheinenden Leistungsniveau und ließ sich davon nichts abhandeln. Ging die Sache nicht so recht voran, so pflegte er ohne zu zögern das auszuüben, was man heute etwas klagend „Leistungsdruck" zu nennen pflegt – übrigens in allen mir bekannten Fällen schlußendlich durchaus zum Wohle des also Gequetschten. – Viele seiner ehemaligen Doktoranden werden sich erinnern, daß sie ihre Dissertation eine ziemlich beträchtliche Anzahl von Malen überarbeiten mußten, bis sie *Krull*s Beifall fand. Dabei legte *Krull* in seinen Anforderungen an seine Schüler keineswegs mechanisch den massiven Maßstab seiner eigenen Begabung an. Vielmehr kennzeichnet es sein Wesen als akademischer Lehrer, daß er seine Schüler forderte, wohl auch hart forderte – aber letztlich niemals überforderte; daß er Aufgaben zu stellen verstand, die strengen, wissenschaftlichen Leistungs- und Effizienzkriterien genügten, die aber mit entsprechendem Einsatz auch lösbar waren und unter seiner Leitung in aller Regel gelöst wurden. – Normalerweise war *Krull* zu seinen Assistenten und Schülern immer ausgeglichen und freundlich. Recht zornig konnte er aber werden, wenn in seinem mathematischen Zuständigkeitsbereich etwas geschah, was seinen Wünschen oder Ansichten nicht entsprach – sei es, daß die Dissertation eines seiner Schüler sich von der gestellten Aufgabe weg in eine von *Krull* nicht für aussichtsreich gehaltene Richtung entwickelte, oder auch einfach, wenn ein Assistent in einer Anfängerübung eigenmächtig vorging und von *Krull* nicht gebilligte Aufgaben stellte. Darüber hinaus hielt sein Zorn niemals vor, und er war nicht nachtragend. Spürbar war immer, daß eine sehr bestimmte Stellungnahme *Krull*s nicht lediglich Ausfluß seiner „Amtsautorität", sondern vor allem seiner tatsächlichen Überlegenheit als Mathematiker war.

In seiner materiellen Lebensführung, soweit sie seinen Schülern erkennbar wurde, war *Krull* recht bescheiden – und dies galt auch für seine Ansprüche an den Staat: Während der Zeit, die ich in seiner Umgebung verbracht habe – es waren die fünfziger Jahre –, bestand der m. W. einzige Luxus, mit welchem er die Staatskasse belastet hat, in der Beschaffung einer großen Holzkiste zur Aufbewahrung seiner zahlreichen Sonderdrucke, für die er in seiner Wohnung keinen Platz hatte und die zu seinem Kummer in dem damals recht engen Mathematischen Seminar herumflogen. – Einmal hatte er für das Finanzministerium ein Gutachten zu schreiben, welches eine Steuerformel betraf. Seine Honorarforderung löste einen verlegenen Anruf aus dem Ministerium aus: Er habe sich wohl um eine Kommastelle zu seinen Ungunsten verschrieben. Zu dieser – sicherlich im Zusammenhang mit seiner eminenten Lebensleistung zu sehenden, gewollten Bedürfnislosigkeit kam bei *Krull* ein über das Normalmaß hinaus ausgeprägter Sinn für Pünktlichkeit und penible Zuverlässigkeit. Sie verlangte er auch von seiner Umgebung. Glaubte er Verstöße hiergegen zu sehen, gab er seinem Unmut rückhaltlos Ausdruck. *Krull* verlangte damals von seinen Assistenten grundsätzlich Anwesenheit bei jeder seiner Vorlesungen, und zwar pünktlich. Er liebte es damals, morgens um sieben Uhr zu lesen, und bei doppelter Sommerzeit hieß das also, um fünf Uhr früh mitteleuropäischer Zeit. –

Obwohl als Mathematiker zum Äußersten engagiert, war *Wolfgang Krull* ein ungewöhnlich vielseitig gebildeter und auch in nichtmathematischen Bereichen belesener Mann. Freilich hatte sein großes Wissen einen eher theoretischen, akademischen Charakter. Der Praxis des Alltages, wie sie den Bereich des Geschäftslebens und der Politik bestimmt, stand er eher naiv, gar verständnislos gegenüber. Er selbst schrieb sich in – sagen wir: „weltlichen" Dingen keine sonderliche Begabung zu und überließ die Führung von Geschäften und Verhandlungen lieber anderen. Hiermit zusammen hing eine Art, sich im außerwissenschaftlichen Bereich zu geben, die nach außen hin als völlige Unbekümmertheit in Erscheinung trat, eine Unbekümmertheit, die ihm manche Freunde verschaffte, gelegentlich aber auch Ärger einbrachte. Als seine Erstberufung nach Erlangen anstand, mußte er nach damaligem Brauch auch Hausbesuche bei den Damen seiner zukünftigen Kollegen machen, und es wird berichtet[2]), daß er dort zufolge seiner völligen Gleichgültigkeit gegenüber solch formal-gesellschaftlichem Tun nicht immer unbedingt reüssiert habe und daß ein wissenschaftlich schwächerer Kanditat, als *Krull* es war, darüber hätte ernsthaft stolpern können.

Etwas von dieser Unbekümmertheit findet sich auch in der Art, wie *Krull* die Mathematik in seinen Vorlesungen und Übungen präsentierte – und hier freilich war sie souverän. In seiner Erlanger Antrittsrede am 11. Januar 1930 – gedruckt in den Erlanger Sitzungsberichten unter dem Titel „*Über die ästhetische Betrachtungsweise in der Mathematik*" [29] – nimmt *Krull* zu der landläufigen Meinung Stellung, das Hauptkennzeichen des Mathematikers sei ein scharfer, unbeirrbarer Verstand, und er sagt dazu (S. 208):

> „Ich hingegen möchte mit aller Schärfe betonen: der wirkliche Mathematiker muß vor allen Dingen Fantasie besitzen, natürlich eine besondere, eine „mathematische" Fantasie und ich glaube mit Bestimmtheit behaupten zu können, daß gerade der Besitz dieser Fantasie unter den Mathematikstudenten den zukünftigen Forscher vor dem begabten Durchschnitt auszeichnet."

Diese mathematische Fantasie wurde erkennbar auch in *Krulls* Vorlesungen. Sie waren in keiner Weise Standard, immer originell, reich an Gedanken und Aspekten, in der – von *Krull* nie überbewerteten – Bezeichnungsweise und Nomenklatur gelegentlich eigenwillig. Das galt auch für die von *Krull* gehaltenen Anfängervorlesungen, die im eigentlichen Sinne „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt" brachten, allerdings beim Hörer eine entsprechende „Antenne" voraussetzten. War sie vorhanden, d. h., war der Hörer mathematisch begabt und fähig, einen mathematischen Sachverhalt intuitiv zu erfassen, so war *Krulls* Vorlesung für ihn eine wahre Quelle von Erkenntnissen und Anregungen. Tatsächlich sind viele Schülerarbeiten, die bei *Krull* angefertigt wurden – bis hinauf zu Habilitationsschriften – durch an sich ganz normale, routinemäßige Vorlesungen *Krulls* inspiriert worden. Andererseits konnte es, vor allem bei Anfängervorlesungen, geschehen, daß Teile der Zuhörerschaft überfordert waren und die Übersicht verloren. Damals waren die Verhältnisse noch so, daß sich dies nach außen kaum oder nur dezent äußerte. Trotzdem merkte *Krull* sehr schnell, daß man ihn nicht verstand, und man sah ihn dann ehrlich bekümmert und ziemlich ratlos, weil er seinerseits nicht verstand, wieso man einen für ihn so klaren Sachverhalt nicht begreifen wollte.

Vor allem äußert sich *Krulls* Originalität und Unbefangenheit natürlich in seinen Arbeiten. Er war kein Demiurg, kein mathematischer Bastler, der an einem bereits vorgefundenen, komplizierten Uhrwerk mit Geduld und Sorgfalt hier ein Schräubchen und dort ein Hebelchen umformt und zu verbessern sucht. Vielmehr war sein mathematisches Denken originär, in dem Sinne, daß er – zunächst ohne viel Beachtung bereits vorhandenen Materials – von einer intuitiven Grundeinsicht ausging und von hier aus bis zu dem erstrebten oder vermuteten Resultat durchdrang. Erst dann folgte der Vergleich und ggf. die Ausnutzung schon vorhandener Ergebnisse. Mir ist kein Fall bekannt, in welchem sich in seinen Arbeiten wesentliche Fehler oder Lücken gefunden hätten, aber der intuitive Charakter ihres Zustandekommens und die von *Krull* gewählte, gelegentlich eigenwillige Bezeichnungsweise lassen *Krulls* Arbeiten häufig als nicht ganz leicht lesbar erscheinen. *Krull* selber konnte es widerfahren, daß er etwa in einem Seminar über ein früher von ihm bearbeitetes Thema einen damals benutzten Schluß vergessen hatte, die entsprechende Arbeit aus der erwähnten Holzkiste zum Nachschlagen heraussuchte und an der entsprechenden Stelle lediglich die aufschlußreichen Worte fand: „*Wie man sofort sieht*...“. Man konnte es dann tatsächlich „sehen“, aber erst, wenn man sich in den betreffenden Gedankengang gründlich vertieft hatte. – Nun wäre es grundfalsch, zu glauben, daß *Krull* es sich mit der Form, die er seinen mündlichen und schriftlichen Darstellungen gab, leicht gemacht habe, weil es ihm nur auf den mathematisch zutreffenden Inhalt angekommen wäre. Das genaue Gegenteil ist richtig. Über *Felix Klein,* auf den ich hier wieder zurückkomme, sagte *Krull* einmal in einer Algebravorlesung, daß zwar manche von *Klein*s Beweisen lückenhaft und einige seiner Behauptungen schlicht falsch seien, daß er – *Krull* – aber trotzdem manche fehlerhafte Arbeit von *Klein* hoch über manche fehlerfreie Behandlung desselben Gegenstandes stelle. Der Grund für diese überraschende Bewertung ist der eigenartige, ästhetische Reiz, der von *Klein*s Arbeiten – korrekt hin, lückenhaft her – ausgeht und eben der überragende Rang, den *Krull* selbst dem Ästhetischen in der Mathematik beimaß.

In der von mir bereits zitierten Erlanger Antrittsrede [29] trägt *Krull* zunächst einiges über die Geometrie der Ornamente, intuitive Zusammenhänge der Mathematik mit den bildenden Künsten vor, und wir lesen dann (S. 211):

> „Es handelt sich für den Mathematiker nicht allein darum, Sätze zu finden und korrekt zu beweisen, sondern er will diese Sätze auch derart anordnen und zusammenstellen, daß sie nicht nur als richtig, sondern als zwingend und selbstverständlich erscheinen. Ein solches Streben aber ist für mein Gefühl ein ästhetisches und kein erkenntnistheoretisches“.

Krull geht dann darauf ein, daß andere Mathematiker hier eine andere Einstellung haben, indem es ihnen – wie z. B. *Hilbert* – vor allem auf die unumstößliche Gewißheit und logische Unantastbarkeit der mathematischen Sätze ankommt – ein Bestreben, welches schließlich zur Grundlagentheorie führt. Um dann zu sagen (S. 213 ff.):

> „Ich will Ihnen hier nur klar machen, daß ich selbst anders denke. – Den mehr ästhetisch eingestellten Mathematiker wird die Grundlagentheorie mit ihren peinlichen und notgedrungen oft verzwickten und unschönen Untersuchungen weniger interessieren. Er wird selbstverständlich unbedingt seine Beweise der seiner Zeit entsprechenden Strenge anpassen, aber er wird sich nicht den Kopf zerbrechen, ob seine Sätze damit auch in einer Form bewiesen sind, die man unter allen Umständen in aller Zukunft als absolut einwandfrei ansehen muß“.

Und weiter:

> „Dafür wird aber für den mathematischen Ästhetiker nicht nur das Finden von neuen Sätzen, sondern auch die befriedigende Darstellung der gewonnenen Ergebnisse zu einem oft qualvollen Problem. Es darf ihm doch nicht vorkommen, daß der Leser seiner Arbeiten nur gleichsam von der Last der Beweise erdrückt, zugeben muß, daß die aufgestellten Behauptungen richtig sein müssen, ohne aber das Gefühl los zu werden, daß sie genau so gut auch hätten falsch sein können. Er muß unter allen Umständen die von Schopenhauer gerügten „Mausefallenbeweise“ vermeiden. Dagegen muß er seinen Stoff so anordnen, daß

zwingend ein Satz aus dem anderen folgt, so daß der Leser, noch bevor er die Beweise im einzelnen durchgeprüft hat, gleichsam auf einen Blick sieht, daß die Ergebnisse gar nicht anders hätten lauten können".

Ich glaubte, dies so ausführlich zitieren zu sollen, denn immerhin haben wir hier eine eindrucksvolle Darstellung von *Krulls* subjektiver Einstellung zur Mathematik, wie keiner sie besser formulieren kann, als *Krull* selber. *Krull* hat in seinen Arbeiten nicht nur mit dem mathematischen Problem selber, sondern auch und vor allem auch mit seiner Darstellung gerungen. Als Leser seiner Arbeiten denkt er sich natürlich einen Mathematiker – hinreichend „hochkarätig", wie sich versteht. Aber er erwartet nicht nur eine gleichsam technische Kontrolle und Zurkenntnisnahme der der Resultate, sondern ihr bildhaftes Erscheinen vor dem geistigen Auge des Lesers, ihr intuitives Erfassen, denn erst dann kann das ästhetische Moment, auf welches *Krull* so großen Wert legte, erkennbar und wirksam werden. Freilich erfordert dies von dem, der nicht völlig in dem jeweiligen Problemkreis heimisch ist, ein vorheriges, meditatives Sichhineinversenken. Und dies ist die Erklärung für manche Besonderheiten in *Krulls* Darstellungsweise, insbesondere auch für das gelegentliche und beim ersten Durchblättern unter Umständen etwas unbequeme „Wie man leicht sieht . . ." – denn unter den von *Krull* vorausgesetzten Bedingungen „sieht" man wirklich.

Stellt nach alledem die Aufnahme von *Krulls* mathematischen Intuitionen gewisse Anforderungen, so könnte es scheinen, als hätte sich *Krull* bewußt in einen mathematischen Elfenbeinturm eingeschlossen und dort wohl gefühlt. Auch dies ist falsch. Tatsächlich empfand *Krull* es immer schmerzlich, die Erkenntnisse und die Schönheiten, die er hatte und sah, nicht vielen oder gar allen mitteilen zu können.

Und nun zitiere ich ihn zum letzten Male ([29], S. 220):

„Je mehr wir selber uns an den Schönheiten der Mathematik begeistern, desto stärker bedauern wir, daß wir so wenige an unserem Genuß teilnehmen lassen können. Vielleicht kommt es doch einmal über kurz oder lang dahin, daß etwa die Schönheiten der höheren Arithmetik . . . jedem Gebildeten zugänglich werden. Dieser Gedanke mag Ihnen wohl als eine Utopie erscheinen und mag vielleicht auch eine sein. Für mich bildet er jedenfalls immer den Haupttrost, sooft ich mit schmerzlichem Bedauern feststellen muß, daß ich vielen meiner besten Freunde keinen genaueren Einblick in die Natur der Reize geben kann, derentwegen ich der Mathematik mit voller Seele verfallen bin".

Wolfgang Krull starb am 12. April 1971 plötzlich an den Folgen eines Kreislaufversagens.

Verzeichnis der Doktoranden von Wolfgang Krull

Unter der Leitung von *Wolfgang Krull* wurden siebenunddreißig Dissertationen angefertigt. Die Namen von *Krulls* Doktoranden und – soweit bekannt[9]) – ihr gegenwärtiger Tätigkeitsbereich sind unten angegeben.

Universität Freiburg (1922–1928)

keine

Universität Erlangen (1928–1938)[10])

1930: Pietrkowski, Stephan; Seel, Fritz. 1932: Zehlein, Friedrich.
1933: Helms, Alfred. 1934: Rusam, Friedrich. 1936: Weißfloch, Albert.
1937: Hensolt, Walter.

Universität Bonn (1938–1971)[11])

1949: Schöneborn, Heinz	Professor, Rhein.-Westf. Technische Hochschule Aachen
1950: Schumacher, Karl Siegfried	n. b.
1951: Hämisch, Werner	(*) Bayer AG, Leverkusen
1952: Bretschneider, Gerhard	(*) Siemens AG, München
1953: Fuhrmann, Arved	(*) AEG-Telefunken AG, Konstanz
Ostermann, Fritz	Studiendirektor, Köln
1955: Endler, Otto	Professor, Universität Bonn
Kretzschmar, Martin	Professor, Universität Mainz
1957: Dombrowski, Peter	Professor, Universität Köln
Lindenberg, Wolfgang	(*) Gesellsch. f. Mathematik u. Datenverarbeitung mbH, Bonn
1958: Breuer, Manfred	Professor, Universität Marburg
1960: Müller, Dietrich	(*) Bayer AG, Leverkusen
Schiffels, Gerhard	Professor, Universität Bielefeld
1963: Reufel, Manfred	Professor, Universität Marburg
Ucsnay, Peter	Professor, Universität Bonn
1965: Beckmann, Friedhelm	Oberstudiendirektor, Detmold
Liesen, Arndt	Abteilungsleiter „Datenverarbeitung" im Bundesamt f. Finanzen, Bonn
Neukirch, Jürgen	Professor, Universität Regensburg
Gerhards, Leonhard	(*) Gesellsch. f. Mathematik u. Datenverarbeitung mbH, Bonn
1966: Brauer, Wilfried	Professor, Universität Hamburg
1967: Altmann, Ekkehard	(*) Gesellsch. f. Mathematik u. Datenverarbeitung mbH, Bonn
Al-Anbari, Abbas	n. b.
Stöhr, Karl-Otto	Professor, Institut f. Reine u. Angew. Mathematik (IMPA), Rio de Janeiro

[9]) Die Angaben zum gegenwärtigen Tätigkeitsbereich sind überwiegend nach Mitgliederverzeichnissen von AMS, DMV, GAMM und dem Lehrstuhlverzeichnis des Oberwolfacher Institutes zusammengestellt. Zwischenzeitlich evtl. eingetretene Änderungen konnten nicht berücksichtigt werden. Keine Angaben zur gegenwärtigen Tätigkeit wurden gemacht bei Doktoranden, deren Promotion mehr als 40 Jahre zurückliegt.

[10]) Die hier angegebenen Jahreszahlen beziehen sich auf das Rigorosum.

[11]) (*) = Tätigkeit an Forschungsinstituten außerhalb des Hochschulbereiches oder in der Industrie.

1968:	L o o s , Cläre	Studiendirektorin, Koblenz
	W e t t e , Eduard	Selbständig, Uckerath (bei Siegburg, Rheinl.)
	L i c h t e n b e r g , Heiner	Regierungsdirektor, Bundesfinanzministerium, Bonn
1969:	V o ß , Klaus	(*) Gesellsch. f. Mathematik u. Datenverarbeitung mbH, Bonn
	J o a c h i m , Egon	Professor, Pädagogische Hochschule, Koblenz
	P e t e r s , Fritz Eduard	wissenschaftl. Beamter, Universität Bonn
1971:	W o l b e c k , Klaus	verstorben

Prof. Dr. H. Schöneborn
Lehrstuhl B für Mathematik der
Technischen Hochschule Aachen
Templergraben 55
5100 Aachen

(*Eingegangen: 22. 4. 77*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 63–76
AMS subject classification: 13-03, 14-03

Wolfgang Krulls Arbeiten zur kommutativen Algebra und ihre Bedeutung für die algebraische Geometrie[1])

H.-J. Nastold, Münster (Westf.)

Das Schriftenverzeichnis von *W. Krull* umfaßt 121 Titel. Etwa zwei Drittel davon sind der kommutativen Algebra gewidmet. Es kann daher im folgenden nur versucht werden, auf diejenigen Arbeiten näher einzugehen, die für die Entwicklung der algebraischen Geometrie wichtig geworden sind. Gleichzeitig soll hier aber auch über geometrische Anwendungen und einige Weiterentwicklungen der Krullschen Untersuchungen berichtet werden.

1 Dimensionstheorie; Grundlagen

Alle Ringe seien im folgenden kommutativ und noethersch vorausgesetzt. Wie üblich sei $\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \subset A \text{ Primideal}\} \supset \operatorname{Max} A = \{\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \subset A \text{ maximales Ideal}\}$. Dann definiert man nach Krull [19][2]), 1928, $\dim A := \operatorname{Max}\{s \mid \exists\, \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_s \in \operatorname{Spec} A\}$, $h\mathfrak{p} := \dim A_\mathfrak{p}$, wobei $A_\mathfrak{p} = S^{-1}A = A[X_s]_{s\in S}/(sX_s - 1)$, $S = A \setminus \mathfrak{p}$, der in $\mathfrak{p}$ lokalisierte Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ und dem Restklassenkörper $K(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ ist. Der Krullsche *Hauptidealsatz* [22] besagt nun: Ist $\mathfrak{p}$ minimal $\supset (a_1, \ldots, a_r)$, so folgt $h\mathfrak{p} \leqslant r$. Es gilt dazu die Umkehrung: Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und $h\mathfrak{p} = r$, so gibt es Elemente $a_1, \ldots, a_r \in A$, so daß $\mathfrak{p}$ *minimal* $\supset (a_1, \ldots, a_r)$ ist.

Für die nun folgende *geometrische Deutung* sei der Einfachheit halber k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Einer endlich erzeugten k-Algebra

$$A = k[t_1, \ldots t_n] \simeq k[T_1, \ldots, T_n]/J \twoheadleftarrow k[T_1, \ldots, T_n] =: P$$

entspricht dann eine *affine algebraische Menge* $X = \operatorname{Spec} A =: V(J) \hookrightarrow \operatorname{Spec} P =: \mathbf{A}^n$ im affinen Raum $\mathbf{A}^n$. Dabei gehört zu $x \in X$ der „*lokale Ring in x*“: $A_x = \{f/g \mid f, g \in A,\ g(x) \neq 0, \text{ d. h. } g \notin x\}$ mit dem maximalen Ideal xA_x und dem Restklassenkörper $K(x) = Q(A/x)$. Es ist x rational genau dann, wenn $K(x) = k$ oder $x \in \operatorname{Max} A$ ist. Versieht man Spec A mit der *Zariski-Topologie,* bei der die abgeschlossenen Mengen $V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$ zu Idealen $\mathfrak{a} \subset A$ sind, so beschreibt A_x Spec A lokal, d. h. in einer Umgebung von x, vollständig. Das algebraische Studium lokaler

[1]) Stark erweiterte Fassung eines anläßlich der Feier zum Gedenken an Wolfgang Krull am 3. Dez. 1976 in Bonn gehaltenen Vortrags.

[2]) Zahlen in eckigen Klammern, die mit dem Namen von Krull verbunden sind, beziehen sich auf das Verzeichnis der Veröffentlichungen von W. Krull, sonstige Zahlen in eckigen Klammern auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Abhandlung.

noetherscher Ringe begann mit Krulls wegweisender Arbeit [51]. Krulls Dimensionsbegriff ist nichts anderes als der geometrische Dimensionsbegriff:
$\dim X = \operatorname{Max}\{s \mid \exists\, X_0 \supsetneq \ldots \supsetneq X_s$ irreduzible abgeschlossene Teilmengen $\subset X\}$.
Für $A = k[t_1, \ldots, t_r]$ Integritätsring stimmt er mit dem van der Waerdenschen Dimensionsbegriff [45] überein: $\dim A =$ *Transzendenzgrad* $(Q(A)/k)$. Der Hauptidealsatz besagt geometrisch: Durch Schnitt von r Hyperflächen erhält man eine algebraische Menge, deren irreduzible Komponenten die Kodimension $\leqslant r$ haben. Umgekehrt ist jede irreduzible algebraische Menge der Kodimension r Komponente eines Schnittes von r Hyperebenen.

Zu den Standardtechniken der kommutativen Algebra gehört seit Krull in der kommutativen Algebra das vorher schon in der Zahlentheorie aufgetretene *Lokal-Global-Prinzip:* „lokale" Eigenschaften gelten für A, also für $X = \operatorname{Spec} A$, wenn sie für alle $x \in \operatorname{Spec} A$ für A_x gelten; oft genügt auch schon: wenn sie für alle $x \in \operatorname{Max} A$ für A_x gelten. Z. B. gilt für A-Moduln M, N und eine A-lineare Abbildung $f\colon M \to N$ mit $M_x := M \otimes_A A_x, N_x = N \otimes_A A_x$: f ist injektiv, surjektiv bzw. bijektiv genau dann, wenn Entsprechendes für $f_x\colon M_x \to N_x$ für alle $x \in \operatorname{Spec} A$ oder auch nur für alle $x \in \operatorname{Max} A$ gilt. So ist für einen Untermodul $M \hookrightarrow N$ $M = N$ genau dann, wenn $M_x = N_x \;\forall\, x \in \operatorname{Max} A$ ist. Folgerung: Für einen Integritätsring A gilt in $Q(A)$: $A = \bigcap\{A_x \mid x \in \operatorname{Max} A\}$. In der garbentheoretischen Auffassung der algebraischen Geometrie seit J. P. S e r r e [38] bedeutet dies, daß man Eigenschaften von Morphismen zwischen Garben auf X nur halmweise zu testen hat.

Im Zusammenhang damit steht der Fragenkreis des *Hilbertschen Nullstellensatzes:* Ist im Polynomring $P = k[T_1, \ldots, T_n]$ für ein Ideal $J \subset P$ $N(J) := V(J) \cap \operatorname{Max} P$ und für eine algebraische Menge $M \subset \operatorname{Max} P \simeq \mathbf{A}^n$ $I(M) := \bigcap\{x \mid x \in M\} = \{f \in P \mid f(x) = 0 \;\forall\, x \in M\}$, so ist $I(N(J)) = \sqrt{J}$, wobei $\sqrt{J} := \{f \in P \mid \exists\, n\; f^n \in J\} = \bigcap\; \{x \mid J \subset x \in \operatorname{Spec} P\}$. Diese Aussage ist äquivalent zur folgenden: Für alle $x \in \operatorname{Spec} P$ gilt $x = \bigcap\{m \mid x \subset m \in \operatorname{Max} P\}$. Dies gilt nicht für alle noetherschen Ringe A anstelle von P. Krull hat 1951 in [73], [74] Ringe mit dieser Eigenschaft, die von ihm so genannten *Jacobson-Ringe,* untersucht. Insbesondere zeigte er, daß mit A auch jede endlich erzeugte A-Algebra $A[t_1, \ldots, t_n]$ Jacobsonsch ist. Ein dem Hilbertschen Nullstellensatz analoger Satz gilt in der lokalen analytischen Geometrie in konvergenten Potenzreihenringen anstelle der Polynomringe und wurde in der von Krull angeregten grundlegenden Dissertation von W. R ü c k e r t [34] bewiesen.

Eine weitere klassische Schlußweise von Krull [51] wird heute als *Lemma von Nakayama* bezeichnet: Ist $J = \operatorname{Jac}(A) := \bigcap\{m \mid m \in \operatorname{Max} A\}$ das Jacobson-Radikal von A und für einen endlich erzeugten A-Modul $M = N + JM$, so folgt $M = N$. Insbesondere hat man für einen lokalen Ring A, m: Aus $M = N + mM$ folgt $M = N$. Die *Minimalzahl von Erzeugenden* des A Moduls $M =: \mu(M)$ läßt sich daher *für lokale Ringe A* als Vektorraumdimension berechnen: $\mu(M) = \dim_k(M/mM)$, $k = A/m$. Nach dem Hauptidealsatz ist für einen lokalen Ring A, m
$\operatorname{em}\dim A := \mu(m) \geqslant hm = \dim A$.

2 Neuere Ergebnisse über minimale Erzeugendenanzahl, vollständige Durchschnitte

Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ sei $h\mathfrak{a} := \operatorname{Min}\{hp \mid p \supset \mathfrak{a}\}$. $\mathfrak{a}$ heißt „*Kurve*", wenn für alle minimalen $p \supset \mathfrak{a}$ $\dim A/p = 1$. Ist $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r)$, $r = h\,\mathfrak{a}$, so heißt $\mathfrak{a}$ vollständiger Durchschnitt; ist $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1, \ldots, a_r)}$, $r = h\mathfrak{a}$, so heißt $\mathfrak{a}$ *mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt.* $\mathfrak{a}$ heißt *lokal vollständiger Durchschnitt,* wenn für alle $x \in \operatorname{Max} A$, $x \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_x \subset A_x$ vollständiger Durchschnitt ist. Ist $\mathfrak{a}$ vollständiger Durchschnitt oder mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt, so gilt nach dem Hauptidealsatz $hp = r$ für alle minimalen $p \supset \mathfrak{a}$, d. h. alle Primkomponenten von $\mathfrak{a}$. Ein vollständiger Durchschnitt ist stets auch mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt sowie lokal vollständiger Durchschnitt, da $h\mathfrak{a} = h(\sqrt{\mathfrak{a}}) \leqslant h(\mathfrak{a}_x) \leqslant \mu(\mathfrak{a}_x) \leqslant \mu(\mathfrak{a})$.

Für Polynomringe $P = k[T_1, \ldots, T_n]$ über einem Körper k, also $\dim P = n$, und Ideale $\mathfrak{a} \subset P$ gilt:

(i) $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1, \ldots, a_n)}$ (Storch [41], Eisenbud-Evans [14], 1972).

(ii) Ist $\mathfrak{a}$ lokal vollständiger Durchschnitt, so ist $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots a_n)$ (Sathaye [36], Mohan Kumar [28], 1976).

Dabei hat man zum Beweis von (i) nur ganz elementare Schlußweisen der kommutativen Algebra anzuwenden. (ii) benutzt dagegen das Resultat von Quillen-Suslin-Vaserstein [32], [40], 1976: Jeder projektive Modul über einem Polynomring ist frei. Dasselbe gilt für folgende Sätze: Ist $\mathfrak{a} \subset P$ eine „Kurve" und ist $\mathfrak{a}$ lokal vollständiger Durchschnitt, so ist $\mathfrak{a}$ mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt, L. Szpiro für $n = 3$ [43], 1975, Mohan-Kumar für beliebiges n [28], 1977. Für Char $k = p > 0$ gilt dies sogar für beliebige Kurven: Cowsik-Nori [10], 1978.

Über beliebigen noetherschen Ringen A hat man nach Forster [16], 1964, für jeden endlich erzeugten A-Modul M die Abschätzung $\mu(M) \leqslant \operatorname{Max}\{\mu(M_p) + \dim A/p \mid p \in \operatorname{Supp}(M)\}$, wo $\operatorname{Supp} M = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid M_p \neq \langle 0 \rangle\}$, mit Verbesserungen von Swan [42], 1967.

3 Reguläre lokale Ringe; Formenringe

Krull hat 1938 in der Arbeit [51] reguläre lokale Ringe definiert (er nannte sie p-Reihenringe): Ein *lokaler Ring* A, m heißt *regulär*, wenn $\operatorname{em}\dim A := \dim_k m/m^2 = \dim A$. Er hat dazu den *Formenring* oder *assoziierten graduierten Ring* $\operatorname{gr}_m(A) := \bigoplus_{k \geqslant 0} m^k/m^{k+1}$ gebildet, eine graduierte $k := A/m = \operatorname{gr}_m(A)_0$ – Algebra, die von $m/m^2 = \operatorname{gr}_m(A)_1$ erzeugt wird. Mit $e = \operatorname{em}\dim A$, $m = (t_1, \ldots, t_e)$ hat man daher einen surjektiven Homomorphismus graduierter Ringe

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Sym}(m/m^2) \simeq k[T_1, \ldots, T_e] & \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} & \operatorname{gr}_m(A) \\ \cup\!\!\!\!\!\;\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\;\shortmid \\ T_i & \longmapsto & t_i + m^2 \in m/m^2 \end{array}$$

Nach Krull [51] gilt $\dim A = \dim \mathrm{gr}_m A$, und somit ist A regulär genau dann, wenn φ ein Isomorphismus ist.

Die geometrische Bedeutung der regulären lokalen Ringe erkannte O. Zariski 1947, [49]: Sei mit den Bezeichnungen von Abschn. 1. $A = A_O$ der lokale Ring im 0-Punkt einer affinen Varietät X mit $0 \in X = V(J) = = \mathrm{Spec}(P/J) \subset \mathbf{A}^n$, d. h. in $P = k[T_1, \ldots, T_n] \supset (T_1 \ldots T_n) = (T) \supset J$, also $P/J \supset (T)/J = m \longleftrightarrow 0 \in X$. Bezeichnet nun für $f = f_r + f_{r+1} + \ldots + f_s \in k[T]$, f_k homogen in T vom Grade k, $f_r \neq 0$, $f^* := f_r$ die *Leitform* von f und $J^* := (f^* \mid f \in J)$ das graduierte *Leitideal* zu J im graduierten Ring $k[T]$, so ist $k[T]/J^* \simeq \mathrm{gr}_m A$ und folglich $\mathrm{Spec}(\mathrm{gr}_m A) = V(J^*) \subset \mathbf{A}^n$ gerade der *Tangentenkegel von* X *in* 0. Andererseits ist mit

$$J^\ell := (f_1 \mid f = f_1 + \ldots + f_s \in J) \subset J^* \qquad k[T]/J^\ell \simeq \mathrm{Sym}\,(m/m^2),$$

da $\quad m/m^2 \simeq (T)/((T)^2 + J) = (T)/((T)^2 + \{f_1 \mid f = f_1 + \ldots \in J\})$,

und somit $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}\, m/m^2) \subset \mathbf{A}^n$ der *Tangentialraum von* X *in* 0, die lineare Hülle des Tangentenkegels. Als linearer Vektorraum ist letzterer $T_{X,0} \simeq \mathrm{Hom}_k(m/m^2, k)$, und der kanonische surjektive Ringhomomorphismus φ oben entspricht der Einbettung des Tangentenkegels in den linearen Tangentialraum. Genau dann ist also $A_O = (P/J)_m$ *regulär lokal,* wenn φ ein Isomorphismus, also 0 *ein einfacher Punkt von* X i.S. der algebraischen Geometrie ist. Da für $J = (f^{(1)}, \ldots, f^{(m)})$, $J^\ell = (f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(m)})$ und $T_{X,0} \subset \mathbf{A}^n$ somit durch die linearen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^{(j)}}{\partial T_i}(0) \cdot T_i = f_1^{(j)} = 0, \; j = 1, \ldots, m,$$

beschrieben wird, erhält man

$$e = \dim T_{X,0} = n - \mathrm{rg}\left(\frac{\partial f^{(j)}}{\partial T_i}(0)\right) \geqslant \dim A_O \quad (*),$$

wobei $\dim A_O = \dim_O X := \mathrm{Max}\,(\dim X_i \mid 0 \in X_i$ *irredizible Komponente von* X), und Gleichheit in (*) ist äquivalent mit A_O regulär (*Jacobikriterium von Zariski*).

Aus $\mathrm{gr}_m(A) \simeq k[T_1, \ldots, T_e]$ für A regulär hat Krull [51] bewiesen, daß ein regulärer lokaler Ring *integer und normal* ist, da dasselbe für $\mathrm{gr}_m(A)$ gilt. Daß ein regulärer lokaler Ring sogar *faktoriell* ist, haben erst Zariski [48] im geometrischen Fall und Auslander-Buchsbaum 1959 [5] allgemein bewiesen. Dasselbe gilt für: Aus A regulär lokal folgt A_p regulär lokal für alle $p \in \mathrm{Spec}\, A$.

Der für beliebige Ideale $\mathfrak{a}$ in einem beliebigen noetherschen Ring A von Samuel [35] eingeführte Ring $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathfrak{a}^k/\mathfrak{a}^{k+1}$, eine graduierte $A/\mathfrak{a}$-Algebra, die von $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)_1 = \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ erzeugt wird, hat steigende Bedeutung erlangt: Mit $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ minimal erzeugt erhält man nämlich wie oben einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon A/\mathfrak{a}[T_1, \ldots, T_m] & \twoheadrightarrow & \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}} A \\ \Psi & & \Psi \\ T_i & \longmapsto & a_i + \mathfrak{a}^2, \end{array}$$

und es gilt (vgl. D a v i s [11]): Genau dann ist $\mathfrak{a}$ vollständiger Durchschnitt, also $h\,\mathfrak{a} = m$, wenn $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ und $\operatorname{Ker} \varphi \subset \sqrt{\mathfrak{a}} \cdot A/\mathfrak{a}\,[T_1, \ldots, T_m]$ ist. Für $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \subsetneqq A$ ist also genau dann $h\,\mathfrak{a} = m$, wenn φ ein Isomorphismus ist. In engem Zusammenhang damit steht der Begriff der *A-regulären Folge* $(a_1, \ldots, a_m)$: Von einer solchen spricht man, wenn $(a_1, \ldots, a_m) \subsetneqq A$ und für $i = 0, \ldots, m-1$ die Sequenzen

$$\begin{array}{l} 0 \to A_i \to A_i \to A_{i+1} \to 0, \quad A_0 = A, \\ \quad\;\; \Psi \quad\;\; \Psi \\ \quad\;\; x \longmapsto a_{i+1}x \end{array}$$

exakt sind.

Es ist die *Tiefe von* A $tA := \operatorname{Max}\{s \mid \exists\,(a_1, \ldots, a_s)$ A-reguläre Folge $\subset A\}$. Dann gilt für die obige Abbildung φ: Aus $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ ist A-reguläre Folge folgt: φ ist Isomorphismus. Ist $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Jac}(A) = \cap\,\{m \mid m \in \operatorname{Max} A\}$, insbesondere also, falls A ein lokaler Ring $\supsetneqq \mathfrak{a}$ ist, so gilt auch die Umkehrung, G r o t h e n - d i e c k [18]. Falls $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_m) = \sqrt{\mathfrak{a}}$, sind also äquivalent: (i) $\mathfrak{a}$ ist vollständiger Durchschnitt mit $\mu(\mathfrak{a}) = m = h(\mathfrak{a})$; (ii) φ ist Isomorphismus; (iii) $(a_1, \ldots, a_m)$ ist A-reguläre Folge. – Insbesondere ist für A regulär lokal, $m = (t_1, \ldots, t_n)$, $n = \dim A$, $(t_1, \ldots, t_n)$ A-reguläre Folge, also $tA = \dim A$. Für beliebige lokale Ringe ist stets $tA \leqslant \dim A$. Falls das Gleichheitszeichen gilt, heißt A *Cohen-Macaulay-Ring* (= CM-*Ring*). Reguläre lokale Ringe sind also CM-Ringe, C o h e n 1946 [9], A u s l a n d e r - B u c h s b a u m [6].

Der Formenring spielt auch eine entscheidende Rolle in der *Multiplizitätstheorie* von S a m u e l [35], 1951, und bei der *Singularitätenauflösung* von H i r o n a k a [22], 1963, wie allgemein beim geometrischen Prozeß der *Aufblasung*. Insbesondere hat auch $\operatorname{gr}_{\mathfrak{a}}(A)_1 = \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ als *Konormalenmodul* geometrische Bedeutung.

4 Ganze Abschließung, Krullringe

Zunächst verdankt man Krull [49] – zumindest für den Spezialfall von Integritätsringen – die heute mit going up und going down beschriebenen Aussagen: Für eine ganze Ringerweiterung $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$, φ injektiv, ist die zugehörige Abbildung $\operatorname{Spec} \varphi$: $\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$ *surjektiv* und *abgeschlossen.* Es ist $\dim B = \dim A$. Sind A und B dazu noch Integritätsringe und ist A *normal,* d. h. ganz abgeschlossen in Q(A), so ist Spec φ auch *offen.*

Für Integritätsringe A findet sich schon bei Krull die *Serresche Charakterisierung:* A ist *normal* genau dann, wenn

(i) für alle $p \in \operatorname{Spec} A$ mit $hp = 1$ A_p regulär und damit ein diskreter Bewertungsring ist, und

(ii) für alle $0 \neq f \in A$ gilt: f besitzt keine „eingebetteten Komponenten“, d. h. für alle zu $A/(f)$ assoziierten Primideale gilt $hp = 1$ oder, äquivalent dazu, $tA_p \geqslant \operatorname{Min}(2, hp)$ für alle $p \in \operatorname{Spec} A$.

Z. B. sieht man so, daß eine isolierte Hyperflächensingularität für $\dim A \geqslant 2$ stets normal ist. – (1) bedeutet geometrisch, daß für eine normale affine Menge $\operatorname{Spec} A = X$ der *singuläre Ort* $S(X) := \{p \in \operatorname{Spec} A \mid A_p \text{ nicht regulär}\}$ in X die $\operatorname{codim} S(X) \geqslant 2$ hat. – (ii) ist äquivalent zu (ii'): In Q(A) ist $A = \cap\{A_p \mid hp = 1, p \in \operatorname{Spec} A\}$.

Krullringe sind nun nicht notwendig noethersche Integritätsringe A mit (i) und (ii') sowie der (für noethersche A stets erfüllten) Endlichkeitsbedingung (iii'): Für alle $0 \neq f \in A$ gilt: f ist nur in endlich vielen $p \in \operatorname{Spec} A$ mit $hp = 1$ enthalten. – Die Bedeutung der Krullringe für die kommutative Algebra besteht darin, daß für einen noetherschen Integritätsring A die ganze Abschließung $\bar{A} \subset Q(A)$ (für $\dim A > 2$) nicht mehr notwendig noethersch, dafür aber stets Krullring ist und man für Krullringe eine *Divisorenklassengruppe* C(A) definieren kann. Für geometrische Anwendungen kann man sich jedoch meist auf noethersche Ringe beschränken, da für die in der Geometrie auftretenden Ringe $\bar{A}$ sogar endlicher A-Modul und damit wieder noethersch ist.

Man definiert für einen Krullring A C(A) als Cokern:

$$\begin{array}{ccl} Q(A)^{\times} & \to & \operatorname{Div}(A) = \bigoplus\limits_{hp=1} \mathbf{Z} \cdot p \to C(A) \to 0 \quad \text{exakt.} \\ \Psi & & \Psi \\ f & \longmapsto & (f) \end{array}$$

A ist faktoriell genau dann, wenn $C(A) = \{1\}$, oder, äquivalent damit, wenn alle $p \in \operatorname{Spec} A$ mit $hp = 1$ Hauptideal $p = (f)$ sind. Geometrisch entspricht für $X = \operatorname{Spec} A$ Div(A) der Gruppe der *Weil-Divisoren* $\operatorname{Div}(X) = \bigoplus\limits_{\operatorname{codim} Y = 1,\, Y \subset X \text{ irreduzibel}} \mathbf{Z} \cdot Y$.

Wichtiger für globale geometrische Fragen sind die *Cartier-Divisoren*, das sind solche Divisoren, die *lokal* Hauptdivisoren (f) sind. Durch Restklassenbildung nach der Untergruppe der (globalen) Hauptdivisoren (f), $f \in Q(A)^{\times}$, erhält man so die Untergruppe $\operatorname{Pic}(X) \hookrightarrow C(X)$. Im allgemeinen ist Pic(X) viel kleiner als C(X), für einen lokalen Ringen A z. B. stets $\operatorname{Pic}(A) = \{1\}$, denn Pic(A) ist auch die Gruppe der Isomorphieklassen endlich erzeugter *projektiver* A-Moduln M mit $M \otimes_A Q(A) = Q(A)$ und C(A) die Gruppe der Isomorphieklassen endlich erzeugter *reflexiver* solcher A-Moduln M (d.h. $M \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M, A), A)$). Wann ist nun $\operatorname{Pic}(X) = C(X)$? Dies gilt genau dann, wenn X *lokal-faktoriell* ist, d. h. wenn für alle $x \in \operatorname{Max} A$ A_x faktoriell ist, speziell also für reguläre A_x. Für lokale normale Ringe A ist C(A) eine wichtige Invariante. Z. B. charakterisiert die Endlichkeit von C(A) für normale A, $\dim A = 2$, gerade die *rationalen Singularitäten*. Vgl. dazu E. Brieskorn [8] und J. Lipman [26] sowie allgemein zu Divisorenklassengruppen Fossum [17].

Eine weitere sehr wichtige Rolle spielt die Normalität in der Geometrie in *Zariskis Main Theorem*. Vgl. dazu die algebraische Fassung von C. Peskine [31]. Ferner kann oft o. E. Normalität vorausgesetzt werden, da man in der Geometrie zur *Normalisierung* (algebraisch = ganzen Abschließung im Quotientenkörper) übergehen kann, da $A \hookrightarrow \bar{A}$ endlich ist, F. K. Schmidt [37].

5 Allgemeine Bewertungen, Stellen

In [35] hat Krull 1932 *allgemeine Bewertungen* eingeführt, das sind Bewertungen eines Körpers K mit beliebiger geordneter abelscher Wertegruppe. Eine Bewertung wird vollständig beschrieben durch ihren Bewertungsring. Die Bewertungsringe $v \subset K$ sind genau die Unterringe $v \subset K$ mit der Eigenschaft für alle $x \in K$ ist x oder $x^{-1} \in v$. v ist dann ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $m = \{x \in v \mid x^{-1} \notin v\}$ und dem Restklassenkörper $\kappa = v/m$. Zu einer Bewertung gehört demnach der kanonische Homomorphismus $\varphi\colon v \to v/m = \kappa$. Setzt man noch $\varphi(x) = \infty$ für $x \notin v$, so erhält man eine „*Stelle*" $\varphi\colon K \to \kappa \cup \{\infty\}$. Dabei kann man κ durch einen größeren Körper, etwa durch einen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper $\Omega \supset \kappa$ ersetzen. Jeder Ringhomomorphismus eines Unterringes $R \subset K$ $\psi\colon R \to \Omega$, Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper, läßt sich nun zu einer Stelle $\varphi\colon K \to \Omega \cup \{\infty\}$ fortsetzen. Da nun van der Waerden [46] den fundamentalen Multiplizitätsbegriff auf den Begriff der Spezialisierung gründete, wobei Spezialisierungen durch Ringhomomorphismen in Körper definiert werden können, haben sich Stellen und damit allgemeine Bewertungen für die Begründung der algebraischen Geometrie in der 40er Jahren in den Händen hauptsächlich von O. Zariski [48], C. Chevalley, A. Weil und S. Abhyankar als wesentliches Hilfsmittel bewährt. Insbesondere die grundlegenden Arbeiten zur Auflösung von Singularitäten im 2- und 3-dimensionalen Fall von O. Zariski [50] und S. Abhyankar [1] benutzen systematisch Bewertungen und Stellen. So haben diese von Krull bereitgestellten rein algebraischen Hilfsmittel zur Entwicklung der algebraischen Geometrie wesentlich beigetragen, wenn sie sich auch heute dort weitgehend als entbehrlich erwiesen haben.

Algebraisch werden die ganzabgeschlossenen Unterringe eines Körpers als die Durchschnitte von Bewertungsringen charakterisiert. Eine zusammenfassende Darstellung verschiedener Aspekte der Bewertungstheorie findet man bei O. Endler [15].

6 Komplettierung lokaler Ringe

In [51] hat Krull für einen noetherschen lokalen Ring A, m gezeigt, daß $\bigcap\{m^k \mid k \geqslant 0\} = (0)$ (*) ist (*Krullscher Durchschnittssatz*) oder, äquivalent damit, daß die durch die Potenzen $\{m^k\}$ als Basis der Nullumgebungen auf A definierte *Krulltopologie* separiert ist. Sodann hat er, dem 1-dimensionalen Vorbild der Zahlentheoretiker (K. Hensel, H. Hasse u. F.K. Schmidt) folgend, für A die *Komplettierung* betrachtet: $\hat{A} = \varprojlim A/m^k$. (*) besagt dann, daß die kanonische Abbildung $A \hookrightarrow \hat{A}$ injektiv ist. Bindeglied zwischen A und $\hat{A}$ ist der Formenring: $\mathrm{gr}_m A \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{\hat{m}} \hat{A}$, da $m^k/m^{k+1} \simeq \hat{m}^k/\hat{m}^{k+1}$. Man erhält so, daß $\hat{A}$ wieder noetherscher lokaler Ring ist, $\dim A = \dim \hat{A}$ und A regulär genau dann, wenn $\hat{A}$ regulär etc.

Der Vorteil, zur Komplettierung überzugehen, besteht zunächst darin, daß man dort in der Krull-Topologie sozusagen Analysis treiben kann, da dort das

Cauchysche Konvergenzkriterium gilt. Noch wichtiger ist, daß man so oft ausgehend vom Restklassenkörper $A/m = k$ vermöge des inversen Systems

$$A/m \twoheadleftarrow A/m^2 \twoheadleftarrow A/m^3 \twoheadleftarrow \ldots \twoheadleftarrow A/m^k \twoheadleftarrow \ldots \twoheadleftarrow \varprojlim A/m^k = \hat{A}$$

Elemente, Morphismen usw. auf $\hat{A}$ „*liften*" kann. Man erhält so das aus der Zahlentheorie vertraute *Henselsche Lemma* (s. Abschn. 8.) sowie analog zum 1-dimensionalen Fall die von Krull 1938 vermuteten und 1946 von I. S. Cohen [9] bewiesenen *Struktursätze:* Ist $\mathrm{Ch}\,\hat{A} = \mathrm{Ch}\,k$, $k = \hat{A}/\hat{m}$, und $\hat{A}$ *regulär,* so ist $\hat{A} = k[[X_1, \ldots, X_n]]$. Für $\mathrm{Ch}\,\hat{A} = 0$, $\mathrm{Ch}\,k = p > 0$ und $\hat{A}$ regulär erhält man eine ähnliche Aussage: $\hat{A} \simeq B[[X_2, \ldots X_n]]$, B ein kompletter diskreter Bewertungsring mit $m_B = (p)$ und $B/m_B \simeq k$, *nur im unverzweigten Fall:* $p \in m^2$. Schwierigkeiten macht oft der verzweigte Fall.

Die Standardmethode der kommutativen Algebra besteht damit in

1. der Reduktion von beliebigen Ringen auf lokale Ringe A, m mittels des lokal-Global-Prinzips,

2. Übergang von A, m zur Komplettierung $\hat{A}, \hat{m}$,

3. Rechnen in $\hat{A}, \hat{m}$, etwa unter Benutzung der Struktursätze (nicht reguläre komplette lokale Ringe sind stets homomorphe Bilder eines regulären kompletten lokalen Ringes, sogar eines unverzweigten!),

4. Abstieg (descent) von $\hat{A}$ zu A.

Es kommt also darauf an, den Übergang von $A \mapsto \hat{A}$ und umgekehrt zu untersuchen. Hierzu hat J.-P. Serre 1955 [39] gezeigt, daß $A \to \hat{A}$ *treuflach* ist, d. h. daß für A-Moduln M der Funktor $M \mapsto M \otimes_A \hat{A}$ treu-exakt ist. Man sieht so z. B., daß M genau dann endlich erzeugt, frei usw. ist, wenn dasselbe für den $\hat{A}$-Modul $M \otimes_A \hat{A}$ gilt. Eine andere *äquivalente* Formulierung der Treuflachheit, wie sie fast schon bei Krull [51] vorkommt, ist die folgende: Ist ein *lineares Gleichungssystem*

$$(*) \qquad \sum_i a_{ij} x_i = b_j, \; a_{ij}, \; b_j \in A$$

lösbar durch $x_i \in \hat{A}$, so folgt:
Es existiert eine Lösung x_i' von $(*) \in A$ und Lösungen $y_{\nu i} \in A$ des zugehörigen homogenen Systems mit $x_i = x_i' + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu' y_{\nu i}$, $a_\nu' \in \hat{A}$.

Folgerung: Eine Lösung $x_i \in \hat{A}$ läßt sich beliebig genau durch Lösungen $x_i' \in A$ approximieren. Zu $a_\nu' \in \hat{A}$ existieren nämlich $a_\nu \in A$ mit $a_\nu' \equiv a_\nu (\hat{m}^s)$. So hat z. B. schon Krull gezeigt, daß für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ $\mathfrak{a}\hat{A} \cap A = \mathfrak{a}$ ist.

Man braucht aber auch, daß sich andere Eigenschaften, *Regularitätseigenschaften,* wie z. B. reduziert, normal usw. beim Auf- und Abstieg gut verhalten. Dies ist für den Abstieg meist der Fall, nicht jedoch für den Aufstieg. Für die lokalen Ringe $A = k[t_1, \ldots, t_n]_p$, k ein Körper, der klassischen algebraischen Geometrie haben Chevalley bzw. Zariski gezeigt, daß aus A reduziert bzw. normal $\hat{A}$ reduziert bzw. normal folgt. Dies gilt nicht für alle noetherschen lokalen Ringe A. M. Nagata (vgl. [29] und die dort zitierten Originalarbeiten) und A. Grot h e n d i e c k [18] haben daher Klassen von Ringen untersucht, die alle gewünschten Eigenschaften haben – G r o t h e n d i e c k nannte sie *exzellent* –, und gezeigt, daß sie z. B. stabil sind gegen Ringerweiterungen von endlichem Typ. Damit sind alle Ringe, die endlich erzeugt über einem Körper oder $\mathbf{Z}$ sind, also die *Ringe der klassischen algebraischen Geometrie, exzellent.* Daß dies auch für die *Ringe der analytischen Geometrie* gilt (für Char $p > 0$ und $[k:k^p] = \infty$), hat R. K i e h l [24] bewiesen. Vgl. dazu auch M a t s u m u r a [27].

Die *geometrische Bedeutung* der Komplettierung besteht nach J.-P. S e r r e [39] darin, daß für $k = \mathbf{C}$ z. B. eine affine algebraische Menge $X = V(J) \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ neben der algebraischen Struktur auch kanonisch eine analytische Struktur X^{an} trägt (da Polynomfunktionen spezielle holomorphe Funktionen sind). Für $A = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]_{(X)}$, den lokalen Ring des $\mathbf{A}^n$ im Nullpunkt 0, ist z. B. der lokale Ring von $(\mathbf{A}^n)^{an}$ in 0 der Ring $\mathbf{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ der konvergenten Potenzreihen, und man hat $A = \mathbf{C}[X]_{(X)} \hookrightarrow A^{an} = \mathbf{C}\{X\} \hookrightarrow \hat{A} = \hat{A}^{an} = \mathbf{C}[[X]]$ (**) als Komplettierung beidesmal den Ring der formalen Potenzreihen. Entsprechendes gilt für beliebige Punkte $x \in \operatorname{Spec} A \subset \mathbf{A}^n$. Die Auf- und Abstiegseigenschaften exzellenter lokaler Ringe liefern dann für viele lokale Eigenschaften (= Eigenschaften der lokalen Ringe) deren Invarianz gegenüber dem Übergang von X zu X^{an}.

7 Étale-Erweiterungen

Das Studium unverzweigter und étaler Ringerweiterungen begann mit Krulls Arbeit [54] 1939. Ihre geometrische Bedeutung haben vor allen S. A b h y a n k a r [2] und A. G r o t h e n d i e c k [18], [19] erkannt und systematisch untersucht. Wir betrachten lokale Ringerweiterungen $A_y \to B_x$ zu einer endlich präsentierbaren Erweiterung folgender Gestalt

(+) $A \xrightarrow{i} B = A[T_1, \dots, T_r]/(f_1, \dots, f_r)$,

oder geometrisch

$$\begin{array}{ccc} X = \operatorname{Spec} A & \xleftarrow{f = \operatorname{Spec} i} & X = \operatorname{Spec} B\,. \\ \Psi & & \Psi \\ y & \longleftarrow\!\dashv & x \end{array}$$

Wie üblich, seien $K(x) = B_x/xB_x \supset K(y) = A_y/yA_y$ die Restklassenkörper. Dann heißt

$A_y \longrightarrow B_x$ bzw. f *in* x *étale,*

wenn eine der drei äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,r} \neq 0$ in $K(x)$ (*Jacobikriterium*)

(2) (i) $B_x/yB_x = B_x \otimes_{A_y} K(y)$ ist Körper und folglich $= K(x)$ und $K(x)$ ist endlich separabel algebraisch über $K(y)$, d. h. $A_y \longrightarrow B_x$ ist *unverzweigt.*
(ii) $A_y \to B_x$ ist flach, also *treuflach.*

(3) Falls $K(y) = K(x)$ ist: $\hat{A}_y \xrightarrow{\sim} \hat{B}_x$.

(1) zeigt, daß $\{x \in X = \operatorname{Spec} B \mid f$ étale in $x\}$ in X offen ist. Mit Zariskis Main-Theorem kann man zeigen, daß eine lokale Ringerweiterung genau dann étale ist, wenn sie äquivalent zu (1) darstellbar ist in der Form

(1) $A_y \to B_x = (A_y[T]/(f))_x$, wobei f ein normiertes Polynom $\in A_y[T]$ (nur 1 Variable!), $x \in \operatorname{Spec}(A_y[T])$, $x \cap A_y = y$, $f \in x$ und $f' \notin x$ ist.

Aus (2) (i), (ii) folgt (ii'): $A_y \to B_x$ ist *injektiv* und (ii"): $\dim A_y = \dim B_x$.

Ist zusätzlich A_y *normal,* so ist unter Voraussetzung von (2)(i) (ii) äquivalent zu (ii'). Es folgt dann: Auch B_x ist normal (Krull [54]). Ist zusätzlich A_y *regulär* und B_x *CM-Ring* (z. B. ebenfalls regulär), so ist unter Voraussetzung von (2)(i) (ii) äquivalent zu (ii").

Für die *Geometrie* wichtig sind Morphismen $f = \operatorname{Spec} i$: $X = \operatorname{Spec} B \to Y = \operatorname{Spec} A$ mit f étale für alle $x \in X$: *Étalemorphismen.* Sie sind nach (2) charakterisiert durch

(i) Für alle $y \in \operatorname{Max} A$ ist die „Faser" $B \otimes_A K(y)$ leer oder endlich und reduziert, d. h. $= \prod_{x \to y} K(y)$ (da nach unserer vereinfachenden Annahme in Abschn. 1 der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen sein sollte, also $K(y) = k$ ist für $y \in \operatorname{Max} A$).

(ii) f ist *flach.*

(ii) impliziert: f ist *offen.* Für Y *reduziert* gilt (unter Voraussetzungen von (i)) auch die Umkehrung

Étaleüberlagerungen sind Étalemorphismen f: $X \to Y$, die *endlich* sind, d. h. B ist vermöge $A \xrightarrow{i} B$ endlicher A-Modul. Für solche endlichen Morphismen mit (i) ist (ii) äquivalent zu $\dim_{K(y)} B \otimes_A K(y) = |f^{-1}(y)|$ ist *lokal konstant.*

Allgemein ist nach dem Main-Theorem von Zariski ein Etalemorphismus f: $X \to Y$ faktorisierbar f: $X \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{g} Y$, wobei j eine *offene Einbettung* und g eine *Étaleüberlagerung* ist.

Die Étaleüberlagerungen bilden die Grundlage für eine algebraische Theorie der Fundamentalgruppe [19], die Étalemorphismen die Grundlage für die von A. Grothendieck [20] eingeführte *Étaletopologie*, die später den Beweis der Weilvermutungen möglich gemacht hat, Deligne [12].

In der Geometrie über dem Grundkörper $k = \mathbf{C}$ ist für $x \in \operatorname{Max} A$, also auch $y \in \operatorname{Max} A$, $K(x) = K(y) = \mathbf{C}$, f: $X \to Y$ *étale in* x für die lokalen Ringe $O_{X^{an},x}$ und $O_{Y^{an},y}$ der zugehörigen komplexen Räume X^{an} und Y^{an} *äquivalent zu*

(4) $O_{Y^{an},y} \xrightarrow{\sim} O_{X^{an},x}$, d. h. zu f^{an}: $X^{an} \to Y^{an}$ *in* x *lokal biholomorph.*

Dies liefert der *Satz über implizite Funktionen:* Wegen (+) oben geht nämlich $A_y \to B_x$ im Analytischen nach einem Variablenwechsel in

$$O_{Y^{an},y} \xrightarrow{\alpha} O_{Y^{an},y}\{T_1, \ldots, T_r\}/(f_1, \ldots, f_r) = O_{X^{an},x}$$

über. Aus $K(y) = K(x) = \mathbf{C}$ erhält man dann $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_r^0) \in \mathbf{C}^r$ mit $f_i^0(x^0) = 0$ (f_i ist $\in O_{Y^{an},y}[T]$, $f_i^0 \in \mathbf{C}[T]$ sei das Polynom, das durch Einsetzen von $y \in \mathbf{C}^n$ in die Koeffizienten $\in O_{Y^{an},y}$ entsteht; algebraisch: Man ersetzt die Koeffizienten durch ihre Restklassen in $O_{Y^{an},y}/m_y = K(y) \simeq \mathbf{C}$), und (1) liefert

$$\det\left(\frac{\partial f_i^0}{\partial T_j}(x^0)\right)_{i,j=1,\dots,r} \neq 0 \text{ in } \mathbf{C}.$$

Nach dem *Satz über implizite Funktionen* (s. etwa K u r k e [25], p. 47) gibt es dann $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_1) \in O^r_{Y^{an},y}$ mit $f_i(\overline{x}) = 0$, $i = 1, \dots, r$ und $\overline{x} \bmod m_y = x^0$. $\overline{x}$ liefert aber mit $T_i \to \overline{x}_i$ einen Ringhomomorphismus β: $O_{X^{an},x} = O_{Y^{an},y}\{T_1, \dots, T_r\}/(f_1, \dots, f_r) \to O_{Y^{an},y}$ mit $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{O_{Y^{an},y}}$, und α ist ein Isomorphismus. Umgekehrt folgt aus (4) sofort obige Bedingung (3), da $\hat{A}_y = \hat{O}_{Y^{an},y}$ und $\hat{B}_x = \hat{O}_{X^{an},x}$.

Der Satz über implizite Funktionen besagt also, daß in der „analytischen Geometrie" eine *Étale-Erweiterung stets* schon ein *lokaler Isomorphismus ist.* Der Satz über implizite Funktionen gilt nicht in der algebraischen Geometrie, genauer nicht in der sehr groben Zariski-Topologie. Durch Einführung der feineren Étaletopologie wird seine Gültigkeit per definitionem erzwungen.

8 Henselsche lokale Ringe

Henselsche lokale Ringe wurden von N a g a t a [30] eingeführt und konstruiert mit Hilfsmitteln der „Galoistheorie oder Hilbertschen Verzweigungstheorie normaler Ringe", die Krull in [35], [46] und [59] entwickelt hat. Wir knüpfen hier an Abschn. 7 an. Die obigen Schlußweisen ergeben: Für einen lokalen Ring A, m mit Restklassenkörper $k = A/m$ sind äquivalent:

(i) *Aus* $f_1, \dots, f_r \in A[T_1, \dots, T_r]$, $x^0 \in k^r$, $f_i^0(x^0) = 0$, $i = 1, \dots, r$,
$\det\left(\frac{\partial f_i^0}{\partial T_j}(x^0)\right) \neq 0$ in k *folgt: Es existiert* $\overline{x} \in A^r$ *mit* $f_i(\overline{x}) = 0$, $i = 1, \dots, r$ *und* $\overline{x} \bmod m = x^0$ (verallgemeinertes Henselsches Lemma *oder* Satz über implizite Funktionen).

(i′) *Aus* $f \in A[T]$, $x^0 \in k$, $f^0(x^0) = 0$, $f'^0(x^0) \neq 0$ *in* k *folgt: Ex existiert* $\overline{x} \in A$ *mit* $f(\overline{x}) = 0$ *und* $\overline{x} \bmod m = x^0$ (Henselsches Lemma).

(ii) *Aus* $A \to B_x$ *lokale Etale-Erweiterung i. S. von Abschn. 7 mit* $k = K(x) = B_x/m_x$ *folgt* $A \xrightarrow{\sim} B_x$.

Lokale Ringe mit diesen Eigenschaften heißen *henselsch.*

Es gilt: Ein kompletter lokaler noetherscher Ring $A = \hat{A}$ ist henselsch, die Ringe konvergenter Potenzreihen $\mathbf{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ und ihre Restklassenringe sind henselsch. – Eine andere äquivalente Charakterisierung henselscher Ringe ist

(iii) *Für jede endliche Ringerweiterung* $A \to B$ *ist* $B \simeq \prod_i B_{m_i}$ *der Lokalisierungen nach seinen maximalen Idealen* m_i.

Die henselschen Ringe sind die Fasern der Strukturgarbe in der Étaletopologie.

Für einen beliebigen lokalen Ring A und seine Komplettierung $A \to \hat{A}$ hat man für jede lokale Étale-Erweiterung $A \to B_x$ mit $k = K(x)$ genau einen injektiven Ringhomomorphismus i

$$\begin{tikzcd} & B_x \arrow[dr, dashed, "i"] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & \hat{A} \end{tikzcd}$$

Dies gilt übrigens für jeden injektiven lokalen Ringhomomorphismus $A \hookrightarrow \bar{A}$ in einen henselschen Ring $\bar{A}$ anstelle von $\hat{A}$. Man erhält so in $\hat{A}$:

$$A \hookrightarrow \tilde{A} := \varinjlim_{A \to B_x \text{ lokal étale},\ k = K(x)} B_x = \cup B_x \hookrightarrow \hat{A}$$

mit $\tilde{A}$ *die Henselisierung von* A. $A \to \tilde{A}$ ist eindeutig durch eine universelle Eigenschaft charakterisiert, es ist die „kleinste" henselsche lokale Ringerweiterung von A. $\tilde{A}$ ist gefilterter $\varinjlim$ von über A *im wesentlichen endlich erzeugten* B_x. Es ist $\tilde{A}, \tilde{m}$ lokal und $\hat{A} \xrightarrow{\sim} \hat{\tilde{A}}$. $A \to \tilde{A}$ ist treuflach und $\tilde{A}$ noethersch, wenn A noethersch ist. Für den Aufstieg $A \mapsto \tilde{A}$ hat man alle gewünschten Permanenzeigenschaften, ohne weitere Voraussetzungen über A bzw. $A \to \hat{A}$.

In der am Ende von Abschn. 6 beschriebenen Situation erhält man

$$A = \mathbf{C}[X]_{(X)} \subset \tilde{A} \subset \mathbf{C}\{X\} \subset \mathbf{C}[[X]] = \hat{A} = \hat{\tilde{A}} = \widehat{\mathbf{C}\{X\}}$$

und $\tilde{A}$ ist gerade der algebraische Abschluß von A in $\mathbf{C}[[X]]$ oder in $\mathbf{C}\{X\}$. Vgl. dazu auch M. Raynaud [33].

9 Der Approximationssatz von M. Artin
(vgl. [3] und die dort zitierten Originalarbeiten)

Es sei A lokal und im wesentlichen endlich erzeugt über einem Körper k oder einem exzellenten Dedekindring k, also $A = k[x_1, \ldots, x_n]_p$, $p \in \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$, oder A eine lokale analytische Algebra und $A \subseteq \tilde{A} \subset \hat{A}$. Ein Gleichungssystem

(∗) $f_i(X) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, $f_i \in A[X_1, \ldots, X_r]$ *habe eine Lösung* $x \in \hat{A}$: $f_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. *Dann existiert zu jedem* s *ein* $x' \in \tilde{A}$ *mit* $f_i(x') = 0$, $i = 1, \ldots, m$, *und* $x' \equiv x\ (\hat{m}^s)$.

Vgl. dazu die Aussage in Abschn. 6 über das dort *lineare* Gleichungssystem (∗). Wegen $\tilde{A} = \varinjlim B_x$ in den ersten beiden Fällen folgt dort sogar: Es existiert eine solche Lösung x' von (∗) in einem B_x, das *im wesentlichen endlich erzeugt über* A *ist.*

Als Folgerungen daraus erhält man (vgl. M. Artin [3], [4]):

1. isolierte irreduzible Singularitäten sind algebraisierbar;
2. globale Existenzsätze in der algebraischen Geometrie;
3. eine algebraische Struktur auf kompakten komplexen Räumen X, sofern der Transzendenzgrad über $\mathbf{C}$ der Körper K_i der meromorphen Funktionen auf den irreduziblen Komponenten X_i von $X = \dim X_i$;
4. ein neues Konstruktionsverfahren von M. Hochster [23] in der kommutativen Algebra: Es wird die Existenz von „großen" Cohen-Macaulay-Moduln zunächst im Falle der Char $p > 0$ im kompletten Fall, worauf man sich beschränken kann, i.w. mit Hilfe des Frobeniushomomorphismus gezeigt. Danach wird die Existenz für den Fall von lokalen Ringen A, die einen Körper der Char 0

enthalten, via Komplettierung, Approximation nach M. Artin und Reduktion modulo p reduziert auf den Fall der Char $p > 0$.

Mit diesem Ausblick auf einige neuere Entwicklungen in der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie, zu denen die Arbeiten von W. Krull in wesentlichen Punkten die Grundlagen geschaffen haben, wollen wir uns hier begnügen. Zur Historie findet man Quellen zur kommutativen Algebra im Anhang A 2, Nagata [29], in N. Bourbakis Historical Notes [7] und bei Kaplansky [23 a], zur algebraischen Geometrie in J. Dieudonné [13] und van der Waerden [44], insbesondere im Anhang, und nicht zuletzt in Krulls Idealbericht [109].

Literatur

[1] Abhyankar, S.: Local uniformization on algebraic surfaces over groundfields of char. $p \neq 0$. Ann. of Math. **63** (1956) 491–526

[2] Abhyankar, S.: Ramification theoretic methods in algebraic geometry. Ann. of Math. Studies No. 43

[3] Artin, M.: Théorèmes de Représentabilité pour les Espaces algébriques. Les presses de l'Université de Montréal 1973

[4] Artin, M.: Algebraic Spaces. Yale Math. Monographs **3** (1971)

[5] Auslander, M.; Buchsbaum, D. A.: Unique factorization in regular local rings. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45** (1959) 733–734

[6] Auslander, M.; Buchsbaum, D. A.: Codimension and Multiplicity. Ann. of Math. **68** (1958) 625–657

[7] Bourbaki, N.: Commutative Algebra. Reading: Addison-Wesley Publ. Comp. 1972

[8] Brieskorn, E.: Rationale Singularitäten komplexer Flächen Invent. Math. **4** (1968) 336–358

[9] Cohen, I. S.: On the structure and ideal theory of complete local rings. Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945) 1–85

[10] Cowsik, R. C.; Nori, M. V.: Curves in Char. p are set theoretic complete intersections. Invent. Math. **45** (1978) 111–114

[11] Davis, E. D.: Ideals of the Principal Class, R-Sequences and a certain Monoidal Transformation. Pac. J. Math. **20** (1967) 197–205

[12] Deligne, P.: La Conjecture de Weil I. Publ. Math. de l'I.H.E.S., no. 43 (1973)

[13] Dieudonne, J.: Cours de géometrie algébrique I. Presses Universitaires de France 1974

[14] Eisenbud, D.; Evans jr., E. G.: Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces. Invent. Math. **19** (1973) 107–112

[15] Endler, O.: Valuation theory. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1972

[16] Forster, O.: Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem noetherschen Ring. Math. Z. **84** (1964) 80–87

[17] Fossum, R. M.: The divisor class group of a Krull domain. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973. = Ergebnisse der Math. Bd. 74

[18] Grothendieck, A.: Eléments de Géométrie algébrique, rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné (abgekürzt EGA); chap. I–IV, Publ. math. de l'I.H.E.S., nos. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1960–1967)

[19] Grothendieck, A.: Seminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–1961 (SGA I), dirigé par A. Grothendieck: Revêtements étales et Groupe fondamental. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1971. = Lect. Notes in Math. Vol. 224

[20] Grothendieck, A.: Seminaire de Geometrie algebrique du Bois-Marie, 1963–1964 (SGA IV), dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier: Théorie des Topos et cohomologie étale des schémas. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1972–1973. = Lect. Notes in Math. Vol. 269, 270, 305

[21] Hasse, H.; Schmidt, F. K.: Die Struktur diskret bewerteter Körper. J. f. d. reine angew. Math. **170** (1933) 4–63

[22] H i r o n a k a , H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann. of Math. **79** (1964) 109–326

[23] H o c h s t e r , M.: Topics in the homological theory of modules over commutative rings, AMS Regional Conference Series in Mathematics, No. 24, 1975

[23a] K a p l a n s k y , I.: Commutative Rings: Conference in Commutative Algebra. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973. = Lect. Notes in Math. Vol. 311

[24] K i e h l , R.: Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. J. f. d. reine angew. Math. **234** (1969) 89–98

[25] K u r k e , H.; P f i s t e r , G.; R o s z e n , M.: Henselsche Ringe und algebraische Geometrie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wiss. 1975

[26] L i p m a n , J.: Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization. Publ. Math. Debrecen **36**, 1969

[27] M a t s u m u r a , H.: Commutative Algebra. New York: W. A. Benjamin 1970

[28] M o h a n K u m a r , N.: On two Conjectures about Polynomial Rings, Inv. math. **46** (1978) 225–236

[29] N a g a t a , M.: Local rings. New York: Interscience Publ. 1962

[30] N a g a t a , M.: On the theory of Henselian rings. Nagoya Math. J. **5** (1953) 45–57

[31] P e s k i n e , C.: Une Généralisation du „Main Theorem" de Zariski. Bull. Sc. math. 2e ser. **90** (1966) 119–127

[32] Q u i l l e n , D.: Projective Modules over Polynomial Rings; Invent. Math. **36** (1976) 167–171

[33] R a y n a u d , M.: Anneaux Locaux Henséliens. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970. = Lect. Notes in Math. Vol. 169

[34] R ü c k e r t , W.: Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale; Math. Ann. **107** (1933) 259–281

[35] S a m u e l , P.: La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique. J. de Math. pures et appl. **30** (1951) 159–274

[36] S a t h a y e , A.: On the Forster-Eisenbud-Evans Conjecture, Inv. math. **46** (1978) 211–244

[37] S c h m i d t , F. K.: Über die Erhaltung der Kettensätze in der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen. Math. Z. **41** (1936) 443–450

[38] S e r r e , J.-P.: Faisceaux algébriques cohérents (abgekürzt FAC). Ann. of Math. **61** (1955) 197–278

[39] S e r r e , J.-P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique (abgekürzt GAGA). Ann. Inst. Fourier **6** (1955) 1–42

[40] S u s l i n , A.: Projektive Moduln über Polynomringen (russ.). Dokl. Akad. Nauk S.S.R. **26** 1976

[41] S t o r c h , U.: Bemerkung zu einem Satz von M. Kneser. Arch. Math. (Basel) **23** (1972) 403–404

[42] S w a n , R.: The Number of Generators of a Module. Math. Z. **102** (1967) 318–322

[43] S z p i r o , L.: Toute courbe localement intersection complete de A^3 est ensemblistement intersection complète. Ms. 1975

[44] V a n d e r W a e r d e n , B. L.: Einführung in die algebraische Geometrie 2. Aufl. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973

[45] V a n d e r W a e r d e n , B. L.: Zur Nullstellentheorie der Polynomideale. Math. Ann. **96** (1926) 183–208

[46] V a n d e r W a e r d e n , B. L.: Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie. Math. Ann. **97** (1927) 756–774

[47] W e i l , A.: Foundations of algebraic geometry. New York: (AMS Coll. Publ. no. 29) 1946

[48] Z a r i s k i , O.: The concept of a simple point of an abstract algebraic variety. Trans Amer. Math. Soc. **62** (1947) 1–52

[49] Z a r i s k i , O.: Foundations of a general theory of birational correspondences. Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943) 490–542

[50] Z a r i s k i , O.: Reduction of singularities of algebraic three dimensional varieties. Ann. of Math. **45** (1944) 472–542

Prof. Dr. H.-J. Nastold
Mathematisches Institut der Universität Münster
Roxeler Str. 64
D-4400 Münster

(*Eingegangen: 6. 9. 1978*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 77–80

Verzeichnis der Veröffentlichungen von Wolfgang Krull

Zusammengestellt von H. Schöneborn, Aachen

[1] Über Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie. Diss. Freiburg 1921. Autographiert
[2] Algebraische Theorie in Ringbereichen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **30** (1921) 102–103
[3] Algebraische Theorie der Ringe, I. Math. Ann. **88** (1922) 80–122
[4] Ein neuer Beweis für die Hauptsätze der allgemeinen Idealtheorie. Math. Ann. **90** (1923) 55–64
[5] Axiomatische Begründung der allgemeinen Idealtheorie. Semesterber. Phys. Med. Soz., Erlangen **56** (1925) 47–63
[6] Algebraische Theorie der Ringe, II. Math. Ann. **91** (1924) 1–46
[7] Algebraische Theorie der zerlegbaren Ringe. Math. Ann. **92** (1924) 183–213
[8] Die verschiedenen Arten der Hauptidealringe. S.-B. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1924, 6. Abh.
[9] Über Multiplikationsringe. S.-B. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1925, 5. Abh.
[10] Über verallgemeinerte endliche abelsche Gruppen. Math. Z. **23** (1925) 161–196
[11] Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **34** (1925) 121–122
[12] Theorie und Anwendungen der verallgemeinerten abelschen Gruppen. S.-B. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1926, 1. Abh.
[13] Idealtheorie der Potenzreihen einer Variablen mit ganzen algebraischen Zahlkoeffizienten. S.-B. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1927, 8. Abh.
[14] Algebraische Erweiterungen kommutativer hyperkomplexer Systeme. Math. Ann. **97** (1927) 473–489
[15] Sur les corps infinis algébriques. Enseignement Math. **26** (1927) 320–321
[16] Über unendliche algebraische Zahlkörper. Jber. d. Dt. Math.-Verein **37** (1928)
[17] Galois'sche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen. Math. Ann. **100** (1928) 687–698
[18] Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe. Math. Ann. **98** (1928) 51–71
[19] Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen. S.-B. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1928, 7. Abh.
[20] Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern, I. Math. Z. **29** (1928) 42–54
[21] Zur Theorie der zweiseitigen Ideale in nichtkommutativen Bereichen. Math. Z. **28** (1928) 481–503
[22] Über einen Hauptsatz der allgemeinen Idealtheorie. S.-B. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1929, 2. Abh.
[23] Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Ann. **101** (1929) 729–744
[24] Über den Aufbau des Nullideals in ganz abgeschlossenen Ringen mit Teilerkettensatz. Math. Ann. **102** (1929) 363–369
[25] Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern, II. Math. Z. **31** (1930) 527–557
[26] Ein Satz über primäre Integritätsbereiche. Math. Ann. **103** (1930) 450–465
[27] Galois'sche Theorie bewerteter Körper. S.-B. Münchener Akad. Wiss. (1930) 225–238
[28] Ein Hauptsatz über umkehrbare Ideale. Math. Z. **31** (1930) 558
[29] Über die ästhetische Betrachtungsweise in der Mathematik. Semesterber. Phys. Med. Soz., Erlangen **61** (1930) 207–220
[30] Ideal- und Bewertungsbegriff in der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche. Verh. Kongr. Zür. **II** (1931) 20–21
[31] Eine Bemerkung über rationalzahlige Potenzreihen. J. f. d. reine angew. Math. **164** (1931) 23–26

0012–0456/80/02 0077–4 $00.80/0

[32] Zur Arithmetik der Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. J. f. d. reine angew. Math. **164** (1931) 12–22
[33] Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen. Math. Ann. **105** (1931) 1–14
[34] Matrizenmoduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen. S.-B. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl., 1932, 2. Abh.
[35] Allgemeine Bewertungstheorie. J. f. d. reine angew. Math. **167** (1932) 160–196
[36] Bemerkungen zur algebraischen Geometrie. S.-B. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1933, 2. Abh.
[37] Idealtheorie. Berlin – Göttingen – Heidelberg: 1935: Springer. = Ergebn. d. Math. u. Grenzgeb. Bd. 46
[38] Hauptidealzerlegung in Polynomringen. Math. Z. **41** (1936) 213–217
[39] Über allgemeine Multiplikationsringe. Tôhoku Math. J. **41** (1936) 320–326
[40] Linearformenmoduln und allgemeine Gleichungssysteme in unendlich vielen Variabeln über einem diskret bewerteten, perfekten Körper. Monatsh. Math. **43** (1936) 463–476
[41] Linearformenmoduln und allgemeine Gleichungssysteme in unendlich vielen Variabeln über einem diskret bewerteten, perfekten Körper, II. Monatsh. Math. **44** (1936) 113–114
[42] Linearformenmoduln und allgemeine Gleichungssysteme in unendlich vielen Variabeln über einem diskret bewerteten, perfekten Körper, III. Monatsh. Math. **44** (1936) 321–325
[43] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, I, Multiplikationsringe, ausgezeichnete Idealsysteme und Kroneckersche Funktionalringe. Math. Z. **41** (1936) 545–577
[44] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, II, v-Ideal und vollständige ganz abgeschlossene Integritätsbereiche. Math. Z. **41** (1936) 665–679
[45] Über die Entwicklung der Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **46** (1936) 153–171
[46] Galois'sche Theorie der ganz abgeschlossenen Stellenringe. Semesterber. Phys. Med. Soz. Erlangen **67/8** (1937) 324–328
[47] Dimensionstheorie in Stellenringen. Semesterber. Phys. Med. Soz. Erlangen **67/8** (1937) 319–323
[48] Über einen Irreduzibilitätssatz von Bertini. J. f. d. reine angew. Math. **177** (1937) 94–104
[49] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, III, Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie. Math. Z. **42** (1937) 735–766
[50] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, IV, Unendliche algebraische Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen. Math. Z. **42** (1937) 767–773
[51] Dimensionstheorie in Stellenringen. J. f. d. reine angew. Math. **179** (1938) 204–226
[52] Beitrage zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, IIIa, Eine Ergänzung von Beitrag III. Math. Z. **43** (1938) 767
[53] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, V. Math. Z. **42** (1937) 768–782
[54] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, VI, Der allgemeine Diskriminantensatz der unverzweigten Ringerweiterung. Math. Z. **45** (1939) 1–19
[55] Funktionaldeterminanten und Diskriminaten bei Polynomen in mehreren Unbestimmten. Monatsh. Math. **48** (1939) 353–368
[56] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, VII, Inseparable Grundkörpererweiterungen. Bemerkung zur Körpertheorie. Math. Z. **45** (1939) 319–334
[57] Elementare Algebra vom höheren Standpunkt. Berlin 1939. = Samml. Göschen, Bd. 930, 142 Seiten.
[58] Über separable, abgeschlossene abelsche Gruppen. J. f. d. reine angew. Math. **182** (1940) 235–241
[59] Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie. Leipzig: Teubner 1939. = Enzyklopädie der Mathem. Wissenschaften, Bd. I, 1. Teil, Heft 5
[60] Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie. Leipzig: Teubner 1939. = Enzyklopädie der Mathem. Wissenschaften, Bd. I, 1. Teil, Heft 5
[61] Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen, mit einer Anwendung auf die Galois'sche Theorie. J. f. d. reine angew. Math. **184** (1942) 19–48
[62] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. Eine Bemerkung zu den Beiträgen VI und VII. Math. Z. **48** (1942) 530–531
[63] Funktionaldeterminanten und Diskriminanten bei Polynomen in mehreren Unbestimmten, II. Monatsh. Math. Phys. **50** (1942) 234–256
[64] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, VIII, Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen. Math. Z. **48** (1943) 533–552

[65] Bemerkung zur Differenzengleichung $g(x + 1) - g(x) = \phi(x)$. Math. Nachr. **1** (1948) 365–376
[66] desgl. II. Math. Nachr. **2** (1949) 251–262
[67] Parameterspezialisierung in Polynomringen, I, II. Arch. Math. (Basel) **1** (1948) 56–64, 129–137
[68] Subdirekte Summendarstellung von Integritätsbereichen. Math. Z. **52** (1950) 810–826
[69] Die Verzweigungsgruppen in der Galois'schen Theorie beliebiger arithmetischer Körper. Math. Ann. **121** (1950) 446–466. (Kurzfassung in Arch. Math. (Basel) **2** (1950) 295–299)
[70] Zur Korrelationstheorie zweidimensionaler Merkmale. Mitt.-Bl. Math. Statist. **3** (1951) 15–29
[71] Korrelationstheorie mehrdimensionaler Merkmale. Mitt.-Bl. Math. Statist. **3** (1951) 185–200
[72] Zur Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen. J. f. d. reine angew. Math. **189** (1951) 118–128
[73] Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie. Math. Z. **54** (1951) 354–387
[74] Jacobsonsches Radikal und Hilbertscher Nullstellensatz. Proc. Int. Congress of Math. Cambridge, Mass. **II** (1952) 56–64
[75] Bemerkungen zur Theorie des Hilbertschen Raumes. Arch. Math. (Basel) **3** (1952) 114–124
[76] Halbgeordnete Gruppen und asymptotische Größenordnung. Arch. Math. (Basel) **3** (1952) 1–7
[77] Elementare und klassische Algebra vom höheren Standpunkt. 2. Aufl. von Nr. [57], Berlin 1952, 136 Seiten
[78] Über geschlossene Bewertungssysteme. J. f. d. reine angew. Math. **190** (1952) 79–92
[79] Über unendliche algebraische Erweiterungen bewerteter Körper. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **1** (1952) 164–169
[80] Zur Theorie der kommutativen Integritätsbereiche. J. f. d. reine angew. Math. **192** (1953) 230–252
[81] Galois'sche Theorie und Eliminationstheorie. Rev. Acad. Ci. Madrid **47** (1953) 469–494
[82] Über eine Verallgemeinerung des Normalkörperbegriffes. J. f. d. reine angew. Math. **191** (1953) 54–63
[83] Über gewisse Homomorphismen von Polynomgruppen. Math. Ann. **126** (1953) 377–380
[84] Zur Galois'schen Theorie der arithmetischen Körper. Math. Ann. **126** (1953) 239–252
[85] Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten, I, II, III. Math. Z. **59** (1953) 57–60 296–298, Math. Z. **60** (1954) 109–111
[86] Zur Variationsrechnung. Arch. Math. (Basel) **5** (1954) 81–91
[87] Über die Hauptreihen gewisser endlicher Gruppen. Acta Salmanticensia: Sec. Mat. **5** (1954) 5–13
[88] Charakterentopologie, Isomorphismentopologie, Bewertungstopologie. Mem. Mat. Inst. „Jorge Juan" n° 16, 1955, i + 74 Seiten
[89] Über geordnete Gruppen von reellen Funktionen. Math. Z. **64** (1956) 10–40
[90] Eine Bemerkung über primäre Integritätsbereiche. Math. Ann. **130** (1956) 394–398
[91] Über reelle Radikalkörper. Math. Z. **65** (1956) 76–90
[92] Zur Theorie der Bewertungen mit nichtarchimedisch geordneter Wertgruppe und der nichtarchimedisch geordneten Körper. Colloque d'algèbre supérieur, tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956, pp. 45–77. Centre Belge de Recherches Mathématiques. Etablissements Ceuterick, Louvain. Paris: Gauthier-Villars, 1957, 293 pp.
[93] Zur Idealtheorie der unendlichen, algebraischen Zahlkörper. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I **21** (1957/58) 79–88
[94] Über eine Verallgemeinerung der Hadamardschen Ungleichung. Arch. Math. (Basel) **9** (1958) 42–45
[95] Über Laskersche Ringe. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **7** (1958) 155–166
[96] Über einen Existenzsatz der Bewertungstheorie. Abh. d. Math. Sem. Univ. Hamburg **23** (1959) 29–35
[97] Elementare und klassische Algebra II. Berlin 1959. = Samml. Göschen, Bd. 933, 132 Seiten
[98] Über die Endomorphismen von total geordneten Archimedischen Abelschen Gruppen. Math. Z. **74** (1960) 81–90

[99] Analytical and Projective Geometry. Report of the Second Conference on Mathematical Education in South Asia, Tata Inst. Fund Research, Bombay 1960

[100] Einbettungsfreie, fast-Noethersche Ringe und ihre Oberringe. Math. Nachr. **21** (1960) 319–338

[101] Über die p-Untergruppen endlicher Gruppen. Arch. Math. (Basel) **12** (1961) 1–6

[102] Ordnungsfunktionen und Bewertungen von Körpern. Math. Z. **77** (1961) 135–148

[103] Automorphismen und Spiegelungen eudoxischer Halbgruppen. Math. Z. **79** (1962) 53–68

[104] Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt, Bd. I. 3., erw. Aufl. von [57]. Berlin 1963, 148 Seiten

[105] Eine Bemerkung zur Bewertungstheorie. An. Acad. Brasil. Ci. **35** (1963) 475–481

[106] Zur Theorie der Gruppen mit Untergruppentopologie. Abh. d. Math. Sem. Univ. Hamburg **28** (1965) 50–97

[107] Über p-Sylowkomplemente. J. of Math. Sci. **1** (1966) 90–93

[108] Über gewisse unendliche algebraische Zahlenkörper. French Summary, Les Tendences Géom. en Algèbre et Théorie des Nombres, pp. 171–182. Paris: Edition du Centre National de la Recherche Scientifique 1966

[109] Idealtheorie. 2. erg. Aufl. von Nr. [37]. Berlin–Heidelberg–New York. Springer 1968, xii + 160 Seiten

[110] (Hrsg.) 150 Jahre Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn 1818–1968, Mathematik und Naturwissenschaften. Darin eigene Beiträge: „Vorwort", „Eduard Study", „Felix Hausdorff"

[111] Endomorphismenringe in der Galois'schen Theorie. Aequationes Math. **2** (1969) 269–273

[112] Arten und Gattungen von Abbildungsgruppen. Ein elementares Beispiel aus der Galois'schen Theorie. Math. Z. **110** (1969) 27–40

[113] Über den Galoisring. Math. Ann. **185** (1970) 25–37

[114] Die $\langle p'_1, \ldots, p'_r \rangle$-Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe $\sigma^{(n)}$. Arch. Math. (Basel) **20** (1969) 453–458

[115] Über gewisse Kategorien von Gruppen mit Untergruppentopologie (German and Spanish texts) (Spanish translation by A. Plans and B. Frontera. Publicaciones de Seminario Matemàtico García Galdeano, 8. Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Facultad de Ciencias de Zaragoza, Zaragoza, 1966, 26 pp.)

[116] Krull, W.; Neukirch, J.: Die Struktur der absoluten Galoisgruppe über dem Körper R(t). Math. Ann. **193** (1971) 197–209

[117] Sur quelques extensions algébriques infinies. Algèbre et Théorie des Nombres, Sem. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et C. Pisot 16 (1962/63), Nr. 26, 21 p. (1967)

[118] Dualitätstheorie in den Moduln über einem Dedekindschen Ring. Algèbre et Théorie des Nombres, Sem. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et C. Pisot 22 (1968/69), Nr. 19, 4 p. (1970)

[119] Zahlen und Größen – Dedekind und Eudoxos. Mitt. d. Math. Sem. Gießen **90** (1971) 29–47

[120] Endlichkeitsbedingungen bei Verbänden, Moduln, Gruppen. Math. Ann. **202** (1973) 173–191

[121] Gruppenketten. Auflösbare und nilpotente Gruppen. Undatierte Autographie, Bonn

Prof. Dr. H. Schöneborn
Lehrstuhl B für Mathematik
der Technischen Hochschule
Templergraben 55
5100 Aachen

(*Eingegangen: 22. 4. 1977*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 81–93
AMS subject classification: 10 C 02

Rationale quadratische Formen*)

J. W. S. Cassels, Cambridge

1 Einleitung

Die Theorie der über dem rationalen Zahlkörper **Q** oder über dem Ring **Z** der ganzen rationalen Zahlen definierten quadratischen Formen ist bei weitem zu groß, um im Rahmen eines einzelnen Vortrags erörtert zu werden. Hauptthema dieses Berichtes sind sog. „lokal-globale" Sätze und ihre Beschränkungen; d. h. die Auskunft, die aus p-adischen Betrachtungen gewonnen werden kann. Einige Ergebnisse lassen sich auf algebraische Zahlkörper oder anderswie erweitern; darauf wollen wir aber nicht eingehen (vgl. O'Meara (1963)).

Notwendigerweise ist viel von dem Stoffe schon in meinem vor kurzem erschienenen Buch (Cassels (1978)) enthalten, wo der Leser Beweise usw. finden kann. Diese Übersicht will aber selbständig sein und bringt ein bißchen neues, insbesondere über ternäre Formen.

Bei einer Primzahl p bezeichnen wir mit $\mathbf{Q}_p$ bzw. $\mathbf{Z}_p$ die p-adischen Zahlen bzw. die ganzen p-adischen Zahlen. Wie gewöhnlich ist $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{Z}_\infty = \mathbf{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Die Variablenanzahl wird mit n bezeichnet. Wir schreiben $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ usw.

2 Benehmen über Körpern

Die Beziehung zwischen dem Benehmen der rationalen quadratischen Formen über **Q** und über $\mathbf{Q}_p$ ist sehr eng und wird vom ursprünglichen lokal-globalen Prinzip von Hasse (1923, 1923a) gegeben:

Satz 2.1 („Das schwache Hassesche Prinzip") *Zwei über* **Q** *definierte quadratische Formen* f (**x**), g (**x**) *sind über* **Q** *genau dann äquivalent, wenn sie über allen* $\mathbf{Q}_p$ (*einschl.* $p = \infty$) *äquivalent sind.*

Satz 2.2 („Das starke Hassesche Prinzip") *Eine über* **Q** *definierte quadratische Form* f (**x**) *stellt die Null nichttrivial über* **Q** *genau dann dar, wenn sie die Null nichttrivial über allen* $\mathbf{Q}_p$ (*einschl.* $p = \infty$) *darstellt.*

Auf $f(\mathbf{x}) - b\,x_{n+1}^2$ angewandt, ergibt Satz 2.2 sofort die

*) Erweiterte Fassung eines Hauptvortrages, gehalten auf der Jahrestagung 1979 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Hamburg.

0012–0456/80/02 0081–13 $02.60/0

Folgerung f (x) *stellt* $b \in \mathbf{Q}$ *über* **Q** *genau dann dar, wenn sie* b *über allen* $\mathbf{Q}_p$ (*einschl.* $p = \infty$) *darstellt.*

Die Eigenschaftswörter „schwach" bzw. „stark" sind üblich, weil Satz 2.1 sich aus Satz 2.2 mit ganz allgemeinen Schlüssen herleiten läßt (Witt (1936)). Es gibt Körper (z. B. **R** (t)) wo ein Analogon von Satz 2.1 gilt, ein Analogon von Satz 2.2 aber fehlt.

Im wesentlichen hatte Minkowski (1890) schon Satz 2.1 ausgesprochen. Er konnte ihn aber nicht so knapp formulieren, weil Hensel die p-adischen Zahlen noch nicht erfunden hatte, obgleich Minkowski gewissermaßen schon p-adisch dachte. Satz 2.2 zeigt auch die Vorteile der p-adischen Sprache, sowohl in Aussagen als in Beweisen. Der Fall n = 3 ist im wesentlichen ein klassischer Satz von Legendre (1798) und Gauss (1801). Der Fall n > 3 wurde von Meyer (1884) behandelt: seine Formulierungen sind aber umständlich und seine Beweise ziemlich kompliziert und wohl nicht ganz richtig (vgl. auch Dickson (1930)). Beiläufig bemerkt bezeugt das Buch von Dickson (1930), wie lange es dauerte, bis die p-adische Denkweise sich durchsetzen konnte. Im Buch (und auch im Referat von Mordell in der *Mathematical Gazette*) sind die Hasseschen Arbeiten nicht erwähnt.

3 Ganzzahlige Äquivalenz

Zwei ganze quadratische Formen, die über allen $\mathbf{Z}_p$ (einschl. ∞) äquivalent sind, brauchen nicht über **Z** äquivalent zu sein. Z. B. sind

$$f_1 = 2x^2 + 41y^2; \qquad f_2 = x^2 + 82y^2 \tag{3.1}$$

über allen $\mathbf{Z}_p$ äquivalent (da 2 bzw. 41 ein Quadrat in $\mathbf{Z}_{41}$ bzw. $\mathbf{Z}_2$ ist): sie können aber nicht über **Z** äquivalent sein, da f_1 die Eins ganzzahlig nicht darstellt. Ein weiteres Beispiel ist:

$$g_1 = 2x^2 - 41y^2; \qquad g_2 = x^2 - 82y^2. \tag{3.2}$$

Dabei liegt die Nichtäquivalenz nicht so unmittelbar auf der Hand. Wir sind hier auf eine logische Eigentümlichkeit der Definition der Äquivalenz gestoßen, nämlich, daß sie ineffektiv ist: d. h. keinen Algorithmus angibt, mit dem wir unfehlbar entscheiden können, ob zwei Formen **Z**-äquivalent sind oder nicht. Und zwar war es lange unbekannt, ob

$$x^2 - 3y^2 - 2yz - 23z^2; \qquad x^2 - 7y^2 - 6yz - 11z^2 \tag{3.3}$$

äquivalent sind (Dickson (1930), S. 147). Wir kommen auf diese Frage der Effektivität wieder zurück.

Die Formen, die untereinander über allen $\mathbf{Z}_p$ (einschl. ∞) äquivalent sind, bilden ein Geschlecht. Sie haben dieselbe Determinante. Ein Geschlecht enthält nur endlich viele **Z**-Äquivalenzklassen. Gehören f,g demselben Geschlecht an, so gibt es bei jeder natürlichen Zahl M eine zu g **Z**-äquivalente Form g* derart, daß

$$g^*(\mathbf{a}) \equiv f(\mathbf{a}) \pmod{M} \tag{3.4}$$

für jeden ganzen Vektor **a** gilt. Man kann also unmöglich die Äquivalenzklassen von f und g mit lokalen Mitteln trennen.

Die Macht des lokal-globalen Paradigmas ist aber bei weitem nicht erschöpft. Definitionsgemäß sind zwei Formen f,g desselben Geschlechtes sicher $\mathbf{Q}_p$-äquivalent für alle p, und folglich Q-äquivalent nach dem schwachen Hasseschen Prinzip (Satz 2.1). Mit anderen Worten gibt es einen Q-Vektorraum V der Dimension n mit einer quadratischen Form ϕ und Elementen $b_1 \ldots, b_n$, $c_1, \ldots c_n$ von V so beschaffen, daß

$$\begin{aligned} &\phi(x_1b_1 + \ldots + x_nb_n) = f(x_1, \ldots, x_n);\\ &\phi(x_1c_1 + \ldots + x_nc_n) = g(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wir können jetzt wieder lokal angreifen, mit der Hoffnung, neue Auskunft über die Äquivalenz oder Nichtäquivalenz von f und g zu bekommen.

4 Gitter

Wir sind also auf die folgende Situation geführt. Es sei V ein n-dimensionaler Q-Vektorraum und ϕ eine (reguläre) quadratische Form auf V. Die orthogonale Gruppe bzw. die eigentliche orthogonale Gruppe bezeichnen wir mit O (V) bzw. O^+ (V). Ein Gitter Λ in V ist ein freier **Z**-Modul vom Rang n (d. h. die Menge der $x_1 b_1 + \ldots + x_nb_n$, wobei $b_1, \ldots, b_n$ linearunabhängig sind und $x_1, \ldots, x_n$ den Ring **Z** durchlaufen). Zwei Gitter Λ,Γ heißen äquivalent, falls $\Gamma = \sigma\Lambda$ mit $\sigma \in O^+(V)$. Auf die am Ende des vorigen Absatzes skizzierte Weise entsprechen den Äquivalenzklassen von Gittern ein-eindeutig die eigentlichen Äquivalenzklassen von Formen (d. h. in bezug auf ganze Transformationen der Determinante +1).

Bei jeder Primzahl p entspricht dem Q-Vektorraum V der „lokalisierte" $\mathbf{Q}_p$-Vektorraum $V_p = V \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p$. Die Erweiterung von ϕ auf V_p bezeichnen wir auch mit ϕ. Ein $\mathbf{Z}_p$-Gitter ist ein freier $\mathbf{Z}_p$-Modul vom Range n in V_p. Insbesondere ist $\Lambda_p = \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ das „Lokalisierte" von Λ. Zwei Gitter Λ,Γ sind im selben Geschlecht, wenn bei jedem p ($\neq \infty$) es ein $\sigma_p \in O^+(V_p)$ gibt derart, daß $\Lambda_p = \sigma_p\Gamma_p$. Den Gittergeschlechtern entsprechen ein-eindeutig die Formengeschlechter, die zu ϕ rationaläquivalent sind.

Bei Lokalisierung benehmen sich die Gitter besonders artig:

Hilfsatz 4.1 a) *Es seien* Λ,Γ *globale Gitter. Dann gilt* $\Lambda_p = \Gamma_p$ *für fast alle* p.
b) *Es sei* Λ *ein globales Gitter und bei jedem* p ($\neq \infty$) *sei* $\Gamma^{(p)}$ *ein* $\mathbf{Z}_p$*-Gitter, wobei* $\Gamma^{(p)} = \Lambda_p$ *für fast alle* p. *Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes globales Gitter* Γ *mit* $\Gamma_p = \Gamma^{(p)}$ *für alle* p.

„Fast alle p" bedeutet „ alle bis auf endlich viele Ausnahmen". Mit Γ_p usw. bezeichnen wir das Lokalisierte eines globalen Gitters Γ: die $\Gamma^{(p)}$ dagegen sind nur lokal gegeben. Die Adele sind die Bildungen $\xi = \{\xi_p\}$, wobei p alle Primzahlen und ∞ durchläuft, und $\xi_p \in O^+(V_p)$ für alle p, $\xi_p \in O^+(\Lambda_p)$ für fast alle p. Dabei bezeichnet $O^+(\Lambda_p)$ die Untergruppe von $O^+(V_p)$, die Λ invariant läßt. Dem Hilfsatz zufolge ist diese Definition von der Wahl des globalen Gitters Λ unabhängig. Die Adele bilden eine Gruppe $O_{\mathbf{A}}^+$ (V), die transitiv auf den Gittern eines Geschlechtes nach der folgenden Vorschrift wirkt: $\Gamma = \xi\Lambda$ bedeutet

$$\Gamma_p = \xi_p \Lambda_p \quad (\text{alle } p \neq \infty). \tag{4.1}$$

Nach dem Hilfsatz ist Γ durch ξ, Λ eindeutig bestimmt. Die Bestimmung der Äquivalenzklassen eines Geschlechtes läßt sich also als eine Frage über die Gruppe $O_A^+(V)$ betrachten.

Ehe wir eine neue Einteilung der Gitter, die Spinorgeschlechter, einführen, müssen wir etwas über die Spingruppe sagen.

5 Die Spingruppe

Die orthogonale Gruppe $O^+(V)$ besitzt eine Doppelüberlagerung Spin = Spin (V), die bei $n \geqslant 3$ einfach zusammenhängend ist. Beim Grundkörper **R** geht dies im wesentlichen auf Hamilton zurück. Er konnte nämlich die eigentliche Orthogonalgruppe des gewöhnlichen 3-dimensionalen euklidischen Raumes mittels seiner Quaternionen beschreiben.

Die Quaternionen sind die Algebra **H** der

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k \tag{5.1}$$

mit den Rechenregeln

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad & jk = -kj = i \\ ij = -ji = k \qquad & ki = -ik = j \end{aligned} \tag{5.2}$$

Für die Involution

$$\mathbf{u}' = u_0 - u_1 i - u_2 j - u_3 k \tag{5.3}$$

gilt

$$(\mathbf{uv})' = -\mathbf{v}'\,\mathbf{u}' \tag{5.4}$$

Die Norm

$$N(\mathbf{u}) = \mathbf{uu}' = \mathbf{u}'\mathbf{u} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \tag{5.5}$$

liefert einen Homomorphismus der multiplikativen Gruppe der Quaternionen in die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen.

Man identifiziert den 3-dimensionalen euklidischen Raum V mit den „reinen" Quaternionen

$$\mathbf{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k; \tag{5.6}$$

die durch

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x} \tag{5.7}$$

gekennzeichnet sind. Die Norm $N(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^2$ ist das Quadrat der Länge von **x**. Es sei jetzt $\mathbf{y} = \mathbf{u}\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}^{-1}$, wobei $\mathbf{x} \in V$ und $\mathbf{u} \neq 0$ ein Quaternion ist. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathbf{y}' = -\mathbf{y}$ d. h. $\mathbf{y} \in V$. Es gilt weiter

$$\mathbf{y}^2 = \mathbf{u}\,\mathbf{x}^2\,\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{x}^2\,\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{x}^2: \tag{5.8}$$

d. h. $T_\mathbf{u}\colon \mathbf{x} \to \mathbf{u}\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}^{-1}$

ist eine orthogonale Transformation von V. Aus Stetigkeitsgründen ist $\det T_\mathbf{u} = +1$, d. h. $T_\mathbf{u} \in O^+(V)$. Bei $\mathbf{z} \in V$ ist $-T_\mathbf{z}\,\mathbf{x}$ die Spiegelung von **x** in der zu **z** senkrechten

Ebene; daraus folgt leicht, daß jedes $\sigma \in O^+(V)$ von der Gestalt $\sigma = T_u$ ist. Endlich ist $T_u = T_v$ genau dann, wenn $v = \lambda u$ mit einem $\lambda \in \mathbf{R}$. Man kann also auf $N(u) = 1$ normieren. Es sei Spin die Gruppe der u mit $N(u) = 1$. Wir haben also einen Epimorphismus Spin $\to O^+(V)$ mit dem Kern ± 1 konstruiert.

Bei einem allgemeinen Grundkörper K anstatt **R** bleibt fast alles erhalten: die Normierung von u in $\sigma = T_u$ ist aber im Allgemeinen nicht mehr möglich. Stattdessen haben wir einen Homomorphismus[1] $O^+(V) \to K^*/(K^*)^2$, der durch $\sigma = T_u \to N(u)(K^*)^2$ gegeben ist, die sog. Spinornorm. Man hat wieder einen Homomorphismus der durch $N(u) = 1$ definierten Gruppe Spin in $O^+(V)$. Der Kern ist wieder ± 1; das Bild ist aber nur die Untergruppe Θ von $O^+(V)$, die aus den σ mit der Spinornorm 1 besteht.

Bei allgemeinen quadratischen Formen läßt sich Ähnliches unter Benutzung der sog. Cliffordschen Algebra beweisen. Man bekommt eine algebraische Gruppe Spin, die bei $n \geqslant 3$ einfach zusammenhängend ist, und Homomorphismen

$$\text{Spin} \to O^+(V) \tag{5.9}$$

$$\theta : O^+(V) \to K^*/(K^*)^2. \tag{5.10}$$

Das Bild $\Theta(V)$ von (5.9) ist der Kern von (5.10) und der Kern von (5.9) besteht aus ± 1.

6 Spinorgeschlechter

Die Gitter Λ, Γ gehören definitionsgemäß demselben Spinorgeschlecht an, wenn es ein globales $\zeta \in O^+(V)$ und lokale $\eta_p \in \Theta(V_p)$ (d. h. $\eta_p \in O^+(V_p)$ mit der Spinornorm 1) gibt derart, daß

$$\Gamma_p = \zeta \eta_p \Lambda_p \quad \text{(alle p)} \tag{6.1}$$

Die Einteilung der Gitter in Spinorgeschlechter ist gröber als die Einteilung in Äquivalenzklassen, aber feiner als die in Geschlechter.

Kehren wir auf die Wirkung der Adelgruppe auf Gitter zurück! Ist $\Gamma = \xi \Lambda$, d. h. $\Gamma_p = \xi_p \Lambda_p$, so bedeutet (6.1), daß

$$\xi_p = \zeta \eta_p \mu_p \tag{6.2}$$

mit einem $\mu_p \in O^+(V_p)$; was wiederum mit

$$\theta_p(\xi_p) = \theta_p(\zeta)\, \theta_p(\mu_p) \tag{6.3}$$

äquivalent ist. Hier ist $\theta_p(.)$ die Spinornorm in $O^+(V_p)$. Das liefert ein effektives Verfahren zu entscheiden, ob zwei Gitter im selben Spinorgeschlecht liegen oder nicht. Die Anzahl der Spinorgeschlechter in einem Geschlecht ist eine Zweierpotenz: in den einfachsten Fällen ist sie gleich Eins.

Der Namen „Spinorgeschlecht" mit einer etwas abweichenden Bedeutung wurde von Eichler (1952a) eingeführt. Die obige Definition, die von Kneser (1956) stammt, hat sich jetzt eingebürgert (vgl. O'Meara (1963)). Andere Definitionen von

---

[1]) K^* ist die multiplikative Gruppe des Körpers K.

einem anderen Standpunkt gaben Jones und Watson (1956), Watson (1956, 1960). (In Cassels (1978), S. 249 wird behauptet, die Knesersche Definition sei mit der in Watson (1960) gegebenen gleichwertig. Das ist aber Quatsch. Sie ist wohl aber mit der zweiten in Watson (1956) gegebenen Definition äquivalent.)

Man kann den Spinorbegriff anders behandeln. Es sei Λ ein Gitter im Q-quadratischen Raum V, ϕ, und es induziere ϕ eine klassisch-ganze quadratische Form der Determinante d auf Λ. Es sei $I = I(\Lambda,\Gamma)$ der Index von $\Lambda \cap \Gamma$ in Λ, wobei Γ ein Gitter vom selben Geschlecht ist. Unter der Annahme, daß I zu 2d teilerfremd ist, hängt das Spinorgeschlecht von Γ nur vom Spinorgeschlecht von Λ und vom Bild von I in der Gruppe $\prod_{p|2d} Q_p^*/(Q_p^*)^2$ ab. Da jedes Gitter Δ des Geschlechtes zu einem Gitter Γ dieser Art äquivalent ist, bekommt man auf diese Weise alle Spinorgeschlechter des Geschlechtes.

Das eben gesagte läßt sich in die Formensprache übersetzen. Es sei f (x) eine klassisch-ganze Form der Determinante d. Man nehme an, die Form

$$g(x) = f(I^{-1}x_1, Ix_2, x_3, \ldots, x_n) \tag{6.4}$$

sei auch ganz, wobei I eine zu 2d teilerfremde ganze Zahl ist. Dann gehört g zum selben Geschlecht. Das Spinorgeschlecht von g hängt nur vom Spinorgeschlecht von f und vom Bild von I in der Gruppe $\prod_{p|2d} Q_p^*/(Q_p^*)^2$ ab.

Wenn f,g ganze Formen desselben Geschlechts sind, so kann man von f bis g durch eine Kette von Transformation gelangen, die entweder Äquivalenzen oder Transformationen der eben beschriebenen Art sind. Wenn f,g im selben Spinorgeschlecht sind, gilt noch mehr. Es sei q eine zu 2d teilerfremde Primzahl. Dann gibt es eine Transformationskette von f zu g, wobei immer I = q ist. Das liefert ein bequemes Mittel, sämtliche Äquivalenzklassen eines Spinorgeschlechtes zu bestimmen (noch allgemeiner bei Kneser (1957)).

7 Klassenzahlen von Spinorgeschlechtern

Bei indefiniten Formen mit $n \geqslant 3$ ist die Klassenzahl eines Spinorgeschlechtes gleich Eins (Kneser (1956)). Diese Tatsache folgt aus einem „starken Approximationsatz“ auf der Spingruppe, der ein Spezialfall eines allgemein für einfach zusammenhängende Gruppen gültigen Satzes ist (Kneser (1966), Platonov (1969)). Somit haben wir ein effektives Verfahren zu entscheiden, ob zwei indefinite Formen mit $n \geqslant 3$ äquivalent sind, oder nicht. (Bei indefiniten Formen mit n = 2 kommt man mit dem klassischen Reduktionsverfahren aus. Bei definiten Formen ist die Frage offensichtlich trivial.)

Eisenstein (1851) hat schon aus seinen Tafeln der Klassen indefiniter ternärer quadratischer Formen die Vermutung ausgesprochen, die Klassenzahl eines schlechtes sei immer Eins. In der Tat enthielten die von ihm behandelten Geschlechter je nur ein Spinorgeschlecht. Die ersten Ergebnisse über Klassenzahlen indefiniter ternärer quadratischer Formen sind in einer sehr schwierigen Aufsatzreihe von A. Meyer (1891, 1893, 1894–96) enthalten (vgl. auch Dickson (1930)).

Bei definiten Formen ist es ganz anders. Nach Magnus (1937) gibt es nur endlich viele Geschlechter mit $n \geqslant 3$ und mit einer Klassenzahl, die unter einer gegebenen Schranke liegt (vgl. auch Watson (1963, 1963 b) und Gersten (1972)). Die Geschlechter der Klassenzahl Eins wurden von Watson (1963 a, 1972, 1974, 1975, 1975 a) bestimmt.

8 Maße von Geschlechtern

Definitionsgemäß ist das Maß einer definiten Form f (oder von deren Äquivalenzklasse) gleich $1/o^+(f)$, wobei $o^+(f)$ die Ordnung der Gruppe der eigentlichen ganzen Automorphismen ist. Das Maß eines Geschlechtes ist die Summe der Maße der in ihm enthaltenen Äquivalenzklassen. Eisenstein bemerkte, daß das Maß die vernünftige Verallgemeinerung der Klassenzahl für $n = 2$ ist. Für $n = 3$ sind Formeln für das Maß von ihm und von H. J. S. Smith gegeben. Eine Formel für $n \geqslant 3$ ist von Minkowski gegeben worden, allerdings mit einer falschen Zweierpotenz.

Bei indefiniten Formen ist das Maß einer Form durch das Maß eines Fundamentalbereiches der reellen Orthogonalgruppe in bezug auf die Gruppe der ganzen Automorphismen definiert. Siegel hat Formeln für das Maß eines Geschlechtes gegeben, sowohl im definiten als im indefiniten Falle. Neuerdings haben diese Formeln die folgende knappe Gestalt bekommen: die Tamagawazahl einer orthogonalen Gruppe ist gleich Zwei. (Vgl. Weil (1961); Kneser (1974) gibt einen Beweis, der im Rahmen der Orthogonalgruppen bleibt.)

9 Darstellungen durch Geschlechter

Eine ganze Zahl b heißt durch die Form f global darstellbar, wenn es ein $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^n$ mit $f(\mathbf{a}) = b$ gibt. Die Darstellung ist primitiv im Falle, daß $a_1, \ldots, a_n$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Entsprechend kann man Darstellbarkeit und primitive Darstellbarkeit über $\mathbf{Z}_p$ definieren (bei $p = \infty$ ist jede Darstellung primitiv). Die Zahl b heißt überall lokal (primitiv) darstellbar, wenn dies über alle $\mathbf{Z}_p$ der Fall ist.

Satz 9.1. *Es sei* b *durch* f *überall lokal primitiv darstellbar. Dann stellt eine Form* f* *desselben Geschlechts die Zahl* b *dar.*

Das Beispiel $f = 2x^2 + 41y^2$, $b = 1$ zeigt, daß f* nicht notwendigerweise mit f äquivalent ist.

Zwei globale Darstellungen $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ von b durch f liegen auf derselben Bahn, wenn $\mathbf{a}_2 = T\mathbf{a}_1$ mit einem eigentlichen ($\det = +1$) ganzen Automorphismus T. Das Maß einer Bahn ist definitionsgemäß das Maß von f.

Man hat Formeln für das Gesamtmaß der Darstellungen einer Zahl b durch ein Geschlecht, die mit den Formeln für die Maße von Geschlechtern eng verbunden sind (z. B. Weil (1962)). Insbesondere läßt sich das Gesamtmaß als ein Produkt über Primzahlen p darstellen, was man (wie schon im wesentlichen bei Minkowski) als ein quantitatives lokal-global Prinzip deuten kann.

Obschon eine gute Theorie der Darstellungen durch Geschlechter vorliegt, ist die Theorie der Darstellung durch einzelne Formen unbefriedigend, insbesondere bei $n = 3$. Im Rest des Vortrags werden die bisher erzielten Ergebnisse besprochen. Wenn $b \in \mathbf{Z}$ durch f zwar überall lokal primitiv darstellbar ist, aber nicht global primitiv, sagen wir, daß b eine Ausnahme für f ist.

10 Darstellungen durch Formen, $n \geqslant 4$

Bei definitiven quadratischen Formen treten im allgemeinen Ausnahmen vor, z. B. stellt

$$3x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 11(x_4^2 + \ldots + x_n^2)$$

die Zahl $b = 1$ nicht dar. (Für definitive quaternäre Formen, die alle natürliche Zahlen darstellen, siehe Ramanujan (1917), Willerding (1948).) Die Anzahl der Ausnahmen ist aber immer endlich, und man kann explizite Schranken angeben. Bei diagonalen Formen hat das schon Kloosterman mit der Hardy-Littlewoodschen Kreismethode gemacht: seine Ergebnisse wurden von Tartakowsky (1929) auf alle definite Formen mit $n \geqslant 4$ erweitert. Man hat diese Aussagen präzisiert, z. B. unter Betrachtung der Verteilung der Datstellungen im Raum (Ross und Pall (1946), Pommerenke (1959), Watson (1960a), Malyšev (1962) Kap 3, Peters (1979)). Man kommt auch ohne analytische Hilfsmittel aus, die Beweise sind aber komplizierter (Hsia, Kitaoka und Kneser (1978); Cassels (1978) Kap. 11, § 9).

Bei indefiniten Formen ($n \geqslant 4$) bewies Siegel (1951) mit seinen tiefliegenden analytischen Methoden, daß Ausnahmen überhaupt nicht vorkommen. Einen einfachen Beweis gab unabhängig Watson (1955). Darüber hinaus zeigte Siegel (1951), daß das Darstellungsmaß einer Zahl b dasselbe für alle Formen eines Geschlechtes ist.

Unter Benutzung der Adelgruppe bewies Kneser (1961) bei $n \geqslant 4$ ziemlich einfach, daß das Gesamtmaß der Darstellungen durch ein Spinorgeschlecht für alle Spinorgeschlechte eines Geschlechtes dasselbe ist. (Das Resultat wird nur für indefinite Formen ausgesprochen, der Beweis gilt auch für definite Formen. Für eine Verallgemeinerung siehe Hsia (1976).) Bei indefiniten Formen, bei denen Spinorgeschlechter und Äquivalenzklassen übereinstimmen (§ 7), geht das Knesersche Ergebnis über das Siegelsche nicht hinaus; bei definiten Formen liefert es aber neue Auskunft.

11 Darstellungen, $n = 2$

Wie man sich leicht überzeugt, läßt sich eine Primzahl q durch höchstens zwei Klassen von Formen einer gegebenen Determinante d darstellen. Da die Klassenzahl eines Geschlechtes beliebig groß sein kann, sind gewissermaßen Ausnahmen die Regel.

12 Darstellungen, $n = 3$

Dies ist der schwierigste Fall. Für analytische Abschätzungen ist die Variablenanzahl zu klein: die gute algebraische Struktur aber fehlt, die man bei $n = 2$ benutzt. Es erweist sich, daß Ausnahmen wirklich vorkommen, aber selten sind.

Man betrachte z. B. die Form (Siegel (1951))

$$f_1 = x^2 - 2y^2 + 64z^2. \tag{12.1}$$

Sie stellt die $b \equiv 1 \pmod 8$ überall lokal primitiv dar. Sie stellt die $b = m^2$, $m \equiv \pm 3 \pmod 8$ aber global primitiv nicht dar. Sonst hätte man nämlich

$$x^2 - 2y^2 = (m + 8z)(m - 8z) \tag{12.2}$$

Eine Primzahl $p \equiv \pm 3 \pmod 8$ teilt $m + 8z$ zu einer ungeraden Potenz; was leicht zu einem Widerspruch führt.

In der Tat besteht das Geschlecht von f_1 aus zwei Spinorgeschlechtern, die je eine Äquivalenzklasse enthalten. Ein Vertreter der anderen Klasse ist

$$f_2 = (2x + z)^2 - 2y^2 + 16z^2. \tag{12.3}$$

Ein ungerades Quadrat $b = m^2$ wird von f_1 bzw. f_2 dargestellt, je nachdem $m \equiv \pm 1 \pmod 8$ bzw. $m \equiv \pm 3 \pmod 8$. Dieses Phänomen ist mit den Überlegungen am Ende von § 6 eng verbunden. Ist f in (6.4) mit f_1 oder f_2 äquivalent, so ist g mit f äquivalent falls $I \equiv \pm 1 \pmod 8$, aber in der anderen Klasse, falls $I \equiv \pm 3 \pmod 8$.

Bei indefiniten ternären Formen zeigten Jones und Watson (1956), daß die Ausnahmen in einer endlichen Anzahl Quadratklassen bc^2 ($c \in \mathbf{Z}$) liegen[2]). Bei definiten sowie indefiniten ternären Formen gilt folgendes: es sei b zwar durch ein Geschlecht, aber nicht durch alle Spinorgeschlechter des Geschlechtes primitiv dargestellt: dann gilt das Gleiche für bq^2 ($q \nmid 2d$ Primzahl, d = Determinante des Geschlechtes); und umgekehrt (Watson (1960) Satz 75 = Cassels (1978) Kap. 11, Lemma 7.1). Der Beweis ist verhältnismäßig einfach. In einem schon erwähnten Aufsatz betrachtete Kneser (1961) die Maße der Darstellungen einer Zahl b durch die Spinorgeschlechter eines Geschlechtes. Nur zwei Fälle kommen vor: (i) die Maße sind alle gleich, (ii) die Spinorgeschlechter verteilen sich in zwei Halbgeschlechter: in einem Halbgeschlecht sind die Maße gleich. Der Fall (ii) kommt nur für die b in einer endlichen Anzahl Quadratklassen vor (vgl. auch Hsia (1976), Estes und Hsia (1979)). Für indefinite Formen ist das Hauptergebnis von Jones und Watson (1956) bis auf einige Einzelheiten darin enthalten.

Watson (1976) hat alle definiten ternären Formenklassen bestimmt, die keine Ausnahmen besitzen (vgl. auch Jones und Pall (1939)). Die von Ramanujan (1917) betrachtete Form $x^2 + y^2 + 10z^2$ scheint genau 18 Ausnahmen zu besitzen, von denen die größte 2719 ist (Gupta (1941, 1973))[3]). Die Anzahl der Ausnahmen kann beliebig groß sein, wie das folgende einfache Beispiel zeigt. Es sei $f_o = qx^2 + ry^2 + sz^2$, wobei $2 < q < r < s$ Primzahlen sind. Die Zahlen $b \equiv q \pmod 8$ $0 < b < q$ sind offensichtlich Ausnahmen. In der Tat ist die Anzahl von Ausnahmen gewöhnlich groß (Watson (1976)).

Man kann Folgendes vermuten

Vermutung 12.1 *Es sei* f *eine definite ternäre quadratische Form. Es gibt nur endlich viele Zahlen* b, *die durch das Spinorgeschlecht von* f *dargestellt werden, nicht aber durch* f *selbst.*

---

[2]) Es wird nicht behauptet, alle Zahlen in den endlich vielen Quadratklassen seien Ausnahmen. Z. B. sind alle ungerade Quadrate Ausnahmen für das durch (12.1), (12.3) bestimmte Geschlecht; $64 = f_1(0,0,1) = f_2(-1,0,2)$ ist dagegen keine Ausnahme. Nach dem unten Gesagten ist die Menge der Ausnahmen genau eine Vereinigung von Mengen der Gestalt $\{b_i c^2\}$ ($(c, 2d) = 1$). Ob die Menge der b_i immer endlich ist, ist meines Wissens nicht bekannt.

[3]) Das Geschlecht von $x^2 + y^2 + 10z^2$ enthält nur ein Spinorgeschlecht, aber zwei Klassen. Ein Vertreter der anderen Klasse ist $2x^2 + 2y^2 + 2yz + 3z^2$.

Die ersten Ergebnisse dieser Art wurden von Linnik (1939, 1940) erzielt. Seine Forschungen wurden von seinem Schüler Malyšev weitergeführt (vgl. Malyšev (1962)). Sie betrachten nur f einer besonderen Beschaffenheit; insbesondere enthält das Geschlecht von f ein einzelnes Spinorgeschlecht. Sie brauchen eine Hilfsprimzahl q, die nur milden Bedingungen unterworfen ist, und betrachten nur die b, die der Bedingung

$$\left(\frac{-db}{q}\right) = 1 \tag{12.4}$$

genügen. Hier ist d die Determinante von f und die linke Seite ist ein Legendresymbol. Sie beweisen, daß es nur endlich viele Ausnahmen gibt, die (12.4) genügen. Der Beweis ist höchst geistreich und kompliziert; das Ergebnis hat aber die folgenden Schönheitsfehler:

(i) Man kann sich von (12.4) nicht befreien.

(ii) Man hat selbst prinzipiell keine Schranke für die Ausnahmen (d. h. das Ergebnis ist nicht effektiv). Sie benutzen nämlich die Siegelsche Abschätzung für die Klassenzahl binärer quadratischer Formen, die bekanntlich nicht effektiv ist.

(iii) Sie betrachten nur die Formen einer besonderen Art.

Unter Annahme der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung (U.A.d.v. R.V.) verschwinden die ersten beiden Schönheitsfehler. Bei gegebenem b kann man nämlich dann eine so kleine der Bedingung (12.4) genügende Primzahl q finden, daß man gleichmäßig abschätzen kann. U.A.d.v.R.V. wird auch die Siegelsche Abschätzung effektiv: das Nötige wurde schon von Hecke gemacht (vgl. Landau (1918)). Ehrlich gestanden habe ich den Linnik-Malyševschen Beweis nicht sorgfältig genug studiert, um mich zu vergewissern, daß weitere Ineffektivitäten nicht darin verborgen stecken.

Neuerdings hat Peters (1978) die Beweismethoden von Linnik und Malyšev mit denen von Kneser (1961) verbunden. Unter Hinzufügung einer Bedingung (12.4) bestätigt er eine schwache Form der Vermutung (12.1) (genaue Formulierung: ebenda S. 70, Zeilen 7–10). U.A.d.v.R.V. fällt die Bedingung weg, und das Ergebnis wird wohl effektiv.

Die Methoden von Linnik und Malyšev geben auch Auskunft über die Verteilung im Raum von der Darstellung von b (Malyšev (1962)). Ähnliche Ergebnisse, die wieder eine Bedingung der Art (12.4) enthalten, sind von Ahrensdorf und Johnson (1979) mit ganz anderen Methoden bewiesen worden.

Literaturverzeichnis

Für weitere Hinweise auf die Literatur, siehe das Buch Cassels (1978) und die Übersichtsberichte O'Meara (1976), Hsia (1979).

Ahrenstorf, R. F.; Johnson, D. (1979): Uniform distribution of integral points on 3-dimensional spheres via moduler forms. J. Number theory **11**, 218–238

Cassels, J. W. S. (1978): Rational quadratic forms. Academic Press, London

Dickson, L. E. (1930): Studies in the theory of numbers. Univ. of Chicago Press

E i c h l e r , M. (1952): Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter. Math. Z. **55**, 216–252

E i c h l e r , M. (1952a): Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Grundlehren d. Math. Wiss. **63**, Springer, Berlin – Göttingen – Heidelberg

E i s e n s t e i n , G. (1851): Tabelle der reducirten positiven quadratischen Formen, nebst den Resultaten neuerer Forschungen. J. reine angew. Math. **41**, 140–190. Anhang: 227–242 (= Math. Werke **2**, 637–702)

E s t e s , D. R.; H s i a , J. S. (1979): Exceptional integers of some ternary quadratic forms. (Preprint)

G a u s s , C. F. (1801): Disquisitiones arithmeticae. Fleischer, Lipsiae (= Leipzig)

G e r s t e n , L. J. (1972): The growth of class numbers of quadratic forms. Amer. J. Math. **94**, 221–236

G u p t a , H. (1941): Some idiosyncratic numbers of Ramanujan. Proc. India Acad. Sci A **13**, 519–520

G u p t a , H. (1977): Ramanujan's ternary quadratic form $x^2 + y^2 + 10z^2$. Res. Bull. Punjab Univ. (N.S) **24** (1973), No 1–2, 57 (1977)

H a s s e , H. (1923a): Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahder rationalen Zahlen. J. reine angew. Math. **152**, 129–148 (= Math. Abh. Bd. 1, 3–22)

H a s s e , H. (1923a): Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen. J. reine angew. Math. **152**, 205–224 (= Math. Abh. Bd. 1, 23–42)

H s i a , J. S. (1976): Representation by spinor genera. Pacific J. Math. **63**, 147–152

H s i a , J. S. (1979): Arithmetic theory of integral quadratic forms. (Erscheint demnächst in den Berichten der Tagung "Recent developments in number theory", Queen's University, Kingston, Ontario

H s i a , J. S.; K i t a o k a , Y.; K n e s e r , M. (1978): Representations of positive definite forms. J. reine angew. Math. **301**, 132–141

J o n e s , B. W.; W a t s o n , G. L. (1956): On indefinite ternary quadratic forms. Canadian J. Math. **8**, 592–608

K l o o s t e r m a n , H. D. (1926): On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. Acta Math. **49**, 407–464

K n e s e r , M. (1956): Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen. Arch. Math. (Basel) **7**, 323–332

K n e s e r , M. (1957): Klassenzahlen definiter quadratischer Formen. Arch. Math. (Basel) **8**, 241–250

K n e s e r , M. (1961): Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen. Math. Z. **77**, 188–194

K n e s e r , M. (1965): Starke Approximation in algebraischen Gruppen I. J. reine angew. Math. **218**, 190–203

K n e s e r, M. (1966): Strong Approximation. Algebraic groups and discontinuous sub-groups. (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo. 1965) pp. 187–196. Amer. Math. Soc.

K n e s e r , M. (1974): Quadratische Formen. Mathematisches Institut, Göttingen. (Vorlesungsausarbeitungen)

L a n d a u , E. (1918): Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper. Nachr. k. Gesell. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. **1918**, 285–295

L e g e n d r e , A. M. (1798): Essai sur la théorie des nombres. Paris

L i n n i k , Ju. V. (1939): Odna obščaja teorema o predstavlenii čisel otdel'nymi ternarnymi formami. Izv. Akad. Nauk SSSR (ser. mat.) **3**, 87–108

L i n n i k , Ju. V. (1940): O predstavlenii bol'ših čisel položitel'nymi ternarnymi formami. Izv. Akad. Nauk SSSR (ser. mat.) **4**, 363–402

M a g n u s , W. (1937): Über die Anzahl der in einem Geschlecht enthaltenen Klassen von positivdefiniten quadratischen Formen. Math. Ann. **114**, 465–475 + **115**, 643–644

M a l y š e v , A. V. (1962): O predstavlenii celyh čisel položitel'nymi kvadratičnymi formami. Trudy Mat. Inst. Steklov **65**, (212 pp.)

M e y e r , A. (1884): Mathematische Mittheilungen
1. Über die Kriterien für die Auflösbarkeit der Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = 0$ in ganzen

Zahlen. 2. Über die Auflösung der Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 + ev^2 = 0$ in ganzen Zahlen. Vierteljahrschrift Naturf. Gesell. Zürich **29**, 209–222

M e y e r , A. (1893): Note zu der Abhandlung über ternäre Formen im 98. Band dieses Journals. J. reine angew. Math. **112**, 87–88

M e y e r , A. (1894–1896): Über indefinite ternäre quadratische Formen. J. reine angew. Math. **113**, 186–206; **114**, 233–254; **115**, 150–182; **116**, 307–325

M i n k o w s k i , H. (1890): Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratischen Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können. J. reine angew. Math. **106**, 5–26 (= Werke I, 219–239)

O ' M e a r a , O. T. (1963): Introduction to quadratic forms. Grundlehren der Math. Wiss. No. 117. Springer, Berlin, Göttingen and Heidelberg

O ' M e a r a , O. T. (1976): Hilbert's eleventh problem. Proc. Symposia Pure Math. (AMS) **28**, 379–400

P e t e r s , M. (1978): Darstellungen durch definite ternäre quadratische Formen. Acta Arith. **34**, 57–80

P e t e r s , M. (1979): Exceptions of integral quadratic forms. J. reine angew. Math. (erscheint demnächst)

P l a t o n o v , V. P. (1969): Problema sil'noĭ approksimacii i gipoteza Knezera-Titsa dlja algebraičeskih grupp. Izvestija Akad. Nauk SSSR (ser. mat.) **33**, 1211–1219 + **34** (1970), 775–777

P o m m e r e n k e , C. (1959): Über die Gleichverteilung von Gitterpunkten auf m-dimensionalen Ellipsoiden. Acta Arith. **5**, 227–257

R a m a n u j a n , S. (1917): On the expression of a number in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2$. Proc. Cambridge Philos. Soc. **19**, 11–21 (= Collected papers (Cambridge University Press 1927), 169–178. Siehe auch Seiten 341–343)

R o s s , A. C.; P a l l , G. (1946): An extension of a problem of Kloosterman. Amer. J. Math. **68**, 59–65

S i e g e l , C. L. (1951): Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I. Math. Ann. **124**, 17–54 (= Ges. Abh. Bd. **3**, 105–142)

T a r t a k o v s k i i , V. (= Tartakowsky) (1929): Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine quadratische Form $F(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ $(s \geq 4)$ darstellbar sind. Izv. Akad. Nauk SSSR **1929**, 111–122, 165–196. (= Bull. Acad. Sci. de l'URSS)

W a t s o n , G. L. (1954): The representation of integers by positive ternary quadratic forms. Mathematika **1**, 104–110

W a t s o n , G. L. (1955): Representation of integers by indefinite quadratic forms. Mathematika **2**, 32–38

W a t s o n , G. L. (1956): The equivalence of quadratic forms. Canad. J. Math. **9**, 526–548

W a t s o n , G. L. (1957): Bounded representations of integers by quadratic forms. Mathematika **2**, 32–38

W a t s o n , G. L. (1960): Integral quadratic forms. Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. No. 51. Cambridge University Press

W a t s o n , G. L. (1960 a): Quadratic diophantine equations. Philos. Trans. Roy. Soc. London **253**, 227–254

W a t s o n , G. L. (1961): Indefinite quadratic diophantine equation. Mathematika **8**, 32–38

W a t s o n , G. L. (1963): The class-number of a positive quadratic form. Proc. London Math. Soc. (3) **13**, 549–576

W a t s o n , G. L. (1963 a): One-class genera of positive quadratic forms. J. London Math. Soc. **38**, 387–392

W a t s o n , G. L. (1936 b): Positive quadratic forms with small class-numbers. Proc. London Math. Soc. (3) **13**, 577–592

W a t s o n , G. L. (1972): One-class genera of positive ternary quadratic forms I. Mathematika **19**, 96–104

W a t s o n , G. L. (1974): One-class genera of positive quaternary quadratic forms. Acta Arithmetica **24**, 461–475

Watson, G. L. (1975): One-class genera of positive quadratic forms in at least 5 variables. Acta Arith. **26**, 309–327

Watson, G. L. (1975 a): One-class genera of positive ternary quadratic forms II. Mathematika **22**, 1–11

Watson, G. L. (1976): Regular positive ternary quadratic forms. J. London Math. Soc. (2), **13**, 97–102

Weil, A. (1961): Adeles and algebraic groups. Vorlesungsausarbeitungen. Institute for Advanced Study, Princeton

Weil, A. (1962): Sur la theorie des formes quadratiques. Colloque sur la theorie des groupes algebriques, Bruxelles, 1962, pp. 9–20. CBRM Librairie Universitaire, Louvain et Gauthier-Villars, Paris. (= Oeuvres Scientifiques II, 471–484)

Witt, E. (1936): Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. J. reine angew. Math. **176**, 31–44

Willerding, M. F. (1948): Determination of all classes of positive quarternary quadratic forms which represent all (positive) integers. Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 334–337

Prof. J. W. S. Cassels
Dept. of Pure Mathematics
and Mathematical Statistics
University of Cambridge
16 Mill Lane
Cambridge CB2 1SB

(Eingegangen: 12. 11. 1979)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 94–107

Hans Richter zum Gedenken

D. Bierlein[1]), Regensburg und V. Mammitzsch[2]), Marburg

I. Einige biographische Daten

Hans Richter wurde am 2. Mai 1912 in Leipzig als Sohn des Buchhandlungsgehilfen Otto Richter und seiner Ehefrau Frieda, geb. Schindler, geboren. Er besuchte in Leipzig vier Jahre die Volksschule, dann sechs Jahre die Ostwald-Schule, eine städtische Realschule, und schließlich drei Jahre die Leibniz-Schule, eine Oberrealschule, an der er am 27. Februar 1931 das Abitur ablegte.

Sein Studium begann Hans Richter im SS 1931 an der Universität seiner Heimatstadt. Der Universität Leipzig blieb er als Student und als angehender Wissenschaftler bis Kriegsende treu. Außer Mathematik – mit den Schwerpunkten Zahlentheorie und Versicherungsmathematik – studierte er insbesondere Physik und Philosophie. Am 7. Juli 1936 bereits promovierte er zum Dr. phil. mit einer Arbeit aus der Zahlentheorie und mit den Fächern Mathematik, Physik und Philosophie, und zwar noch vor der Staatsprüfung für das höhere Lehramt, die er am 11. Dezember 1936 ablegte.

Vom 1. April 1937 bis zum 30. September 1944 war er mathematischer Assistent am Versicherungswissenschaftlichen Institut der Universität Leipzig. In diese Zeit fällt die Gründung seiner Familie: Am 14. Juli 1938 heiratete er Elfriede Wende. Am 9. Oktober 1940, wenige Tage nach der Geburt des älteren seiner beiden Söhne, fand seine Habilitation statt; ein Vierteljahr später, am 24. Januar 1941, folgte die Ernennung zum Dozenten für Mathematik an der Universität Leipzig. Am 1. Oktober 1944 wurde er zum ao. Professor ernannt und mit der Wahrnehmung des planmäßigen Lehrstuhls für Versicherungsmathematik an der Universität Leipzig betraut. Die Jahre zwischen Habilitation und dem Ruf auf diesen Lehrstuhl waren durch für Forschung und Lehre extrem ungünstige Bedingungen gekennzeichnet: Hans Richter wurde am 2. Dezember 1940 eingezogen, war nahezu drei Jahre an der Ostfront eingesetzt, zuletzt im Rang eines Leutnants als vorgeschobener Beobachter einer Nebelwerfereinheit, wurde Mitte 1944 schwer verwundet, war dann im Frühjahr 1945 in der Entwicklung neuer Waffen tätig und geriet schließlich im April 1945 in amerikanische Gefangenschaft, aus der er am 17. August 1945 in die amerikanische Zone entlassen wurde.

---

[1]) Abschnitte I, II
[2]) Abschnitt III

0012–0456/80/02 0094–14 $02.80

Im Herbst 1945 schaffte sich Hans Richter durch einen Dienstvertrag mit einem Forschungsinstitut in St. Louis/Elsaß, der sich auf angewandt-mathematische und theoretisch-physikalische Forschung bezog, eine neue Existenzgrundlage. Daneben lehrte er an der Universität Freiburg, die ihn am 21. August 1950 zum Honorarprofessor ernannte. Vor allem aber entwickelte er in diesen Jahren „nebenher" seine Aufsehen erregende Wahrscheinlichkeits-Axiomatik. Am 1. April 1955 folgte er dem Ruf auf den neu geschaffenen Lehrstuhl für Mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik an der Universität München. Einen Ruf an die Universität Köln im November 1957 lehnte er ab.

Mit der ihm eigenen Kombination von Energie und Konzilianz bemühte er sich seit seiner Berufung nach München darum, das Ansehen der in Deutschland noch so jungen Mathematischen Stochastik zu fördern und wissenschaftlichen Nachwuchs für das Gebiet zu interessieren. Seiner Initiative ist die Etablierung der jährlichen Tagung über Mathematische Statistik in Oberwolfach zu verdanken. Die erste Tagung dieser Reihe findet 1956 unter seiner Leitung mit prominenter internationaler Beteiligung statt. Im gleichen Jahr erscheint im Springer-Verlag seine „Wahrscheinlichkeitstheorie", ein glücklich konzipiertes Lehrbuch, das vielen Mathematikern – Studenten und jungen Wissenschaftlern – einen Zugang zur Stochastik eröffnen wird. Eine beachtliche Zahl von Mathematikern, die ihn als Lehrer im engeren Sinn verehren, ist heute als Hochschullehrer oder als geachtete Männer der Wirtschaft und Industrie im Bundesgebiet und im Ausland tätig. Sie alle schätzen Hans Richter als Wissenschaftler und als Menschen in gleich hohem Maße. An der Gründung der „Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete" 1961 wirkt er als Mitherausgeber aktiv mit. Schon vorher war er in den Stab der Herausgeber der „Metrika" eingetreten. Stets war es sein Anliegen, durch intensive Pflege der Beziehungen sowohl zu den Vertretern der „reinen" Mathematik als auch zu den „Anwendern" die Brückenfunktion der Mathematischen Stochastik zwischen Theorie und Praxis zu demonstrieren. Er fühlte sich nicht nur in der DMV, sondern auch in der GAMM, in der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik und im Institute of Mathematical Statistics zuhause. Die Wertschätzung als Wissenschaftler, die ihm von seinen Kollegen über die engeren Fachgrenzen hinweg entgegengebracht wurde, fand ihre äußerliche Krönung mit seiner Berufung als ordentliches Mitglied in die Bayerische Akademie der Wissenschaften.

Die langjährige Doppelbelastung in der Zeit vor 1955 durch seine mathematische Forschung am bis tief in die Nacht ausgedehnten „Feierabend" nach dem Dienst im Institut in St. Louis forderte ihren Tribut: Im Sommer 1961 wurde offenbar, daß seine Gesundheit stark angegriffen war. Mit großer Zähigkeit arbeitete er weiter, solange es nur irgend ging. Blutenden Herzens schließlich sah er sich gezwungen, von seinem geliebten Lehramt Abschied zu nehmen und zum 1. November 1975 die Versetzung in den Ruhestand zu beantragen.

Am 3. Dezember 1978 entschlief Hans Richter.

II Das wissenschaftliche Werk der Jahre 1936 bis 1957

Hans Richter als Persönlichkeit kann als überzeugender Beleg dafür angeführt werden, daß für eine Klasseneinteilung der Mathematiker die Unterscheidungsmerkmale „rein" und „angewandt" untauglich sind. Bei ihm verbanden sich die Freude an der Entwicklung mathematischer Theorien aus axiomatischen Fundamenten und die Aufgeschlossenheit gegenüber Fragestellungen, die von außen an die Mathematik herangetragen werden, zu einer glücklichen und fruchtbaren Synthese: Einerseits werden die Axiome für eine neue Theorie – erinnert sei besonders an Richters neue Axiomatik der objektiven und der subjektiven Wahrscheinlichkeit – sorgfältig mit Phänomenen der realen Welt begründet; auf der anderen Seite scheute er nie davor zurück, seine Hände mit ganz handfesten quantitativen und qualitativen Problemen der Technik und anderer Anwendungsbereiche „schmutzig" zu machen.

Eine starke Prägung erfuhr Hans Richter durch B. L. van der Waerden, seinen Doktorvater, dem er zeitlebens in hoher Wertschätzung und großem Respekt verbunden blieb. Van der Waerden hatte im Jahresbericht der DMV, Band 43, die Aufgabe gestellt zu untersuchen, welche quadratischen Zahlkörper sich zu zyklischen Körpern 4. Grades erweitern lassen. Die Hilfsmittel aus der Klassenkörpertheorie, die H. Hasse bei der Lösung dieser Aufgabe (Jahresbericht DMV 44) einsetzte, sollte Hans Richter – so die Anregung von van der Waerden – heranziehen, um allgemein zu klären, welche Abelschen Zahlkörper mit gegebener Galois-Gruppe $G_1 = G_2/N$ sich zu Abelschen Zahlkörpern mit der Gruppe G_2 erweitern lassen, wobei G_2 eine gegebene Abelsche Gruppe und N ein Normalteiler von G_2 ist. Van der Waerden gab dabei den Rat zu prüfen, ob für das Einbettungsproblem das „Lokal → Global-Prinzip" gilt, d. h., ob von einer Einbettung im Kleinen auf eine solche im Großen geschlossen werden kann. Nach van der Wardens Urteil hat Hans Richter dieses Problem in seiner Dissertation (Nr. 2 der Publikationsliste) „so vollständig gelöst, wie man nur hoffen konnte". Unter Heranziehung von Arbeiten von R. Brauer und H. Hasse über die Konstruktion von Schiefkörpern und über die Struktur der Brauerschen Algebrenklassengruppe gelingt es H. Richter anschließend, das „Lokal → Global-Prinzip" für eine größere Klasse von Fällen zu beweisen und einige Einbettungsprobleme für nicht-Abelsche Gruppen der Ordnung 8 (Dieder- und Quaternionengruppe) vollständig zu lösen (Nr. 1).

Kurz darauf entstand eine Arbeit über ein Thema der Invariantentheorie. R. Weitzenböck hatte 1923 unter Benutzung der symbolischen Methode und mit Hilfe der Identitäten der Invariantentheorie bewiesen, daß aus zwei bekannten Eigenschaften der Plückerschen Koordinaten die Relationen von Vahlen folgen. Hans Richter gibt 1937 (Nr. 3) einen direkten, nur eine Seite langen Beweis, der lediglich einfache Eigenschaften der Determinanten benutzt und der zugleich erkennen läßt, daß die erwähnten beiden Eigenschaften auch hinreichend dafür sind, daß es sich – von einem trivialen Fall abgesehen – um Plückersche Koordinaten eines $(d-1)$-dimensionalen linearen Teilraumes des $\mathbf{R}^n$ handelt.

Der Dienstantritt als Mathematiker am Versicherungswissenschaftlichen Institut bedeutet für Hans Richter auch die Verlagerung seiner Forschung hin zur Versicherungsmathematik. Im Zentrum des theoretischen Interesses der internationalen Elite der Versicherungsmathematik stand damals das *Erneuerungsproblem*, eine vor allem für Sozialversicherungskassen zentrale Fragestellung, die in den Zwanziger Jahren eine mathematische Formulierung gefunden hatte. Von Chr. Moser, H. Hadwiger, W. Saxer, E. Zwinggi und anderen, meist Schweizer Mathematikern, war in den folgenden Jahren das Erneuerungsproblem für *diskontinuierliche* „Absterbeordnungen" mit äquidistanten Sprüngen positiv geklärt worden: Die „Zugangsfunktion" $\Phi(T)$ läßt sich so bestimmen, daß der Mitgliederbestand konstant bleibt. Für *stetige* Absterbeordnungen blieb insbesondere die Frage offen, ob die Ableitung $\varphi(t)$ der Zugangsfunktion für $t \to \infty$ einen Grenzwert besitzt. Hans Richter zeigt im Aufsatz Nr. 6, daß dieser Grenzwert für Absterbeordnungen mit *endlichem* „Höchstalter" stets existiert. Für Absterbeordnungen mit *unendlichem* Höchstalter war ein Gegenbeispiel von H. Hadwiger bekannt. In seiner Habilitationsschrift (Nr. 8) greift Hans Richter das Problem auf breiter Front an: Ausgehend von einer Integralgleichung für $\varphi(t)$ gewinnt er unter Verwendung der Fourier-Transformation und dank einer geschickten Handhabung der Umkehrformel ein – sehr allgemein gültiges – Kriterium dafür, daß $\varphi(t)$ einen endlichen Grenzwert besitzt. (Eine Teilaussage dieses Kriteriums findet sich bereits in Nr. 7.) Das gewonnene Resultat wird verallgemeinert auf den Fall, daß zur Zeit $t = 0$ nicht nur 0-Jährige der Gemeinschaft angehören, sondern eine beliebige Altersgliederung besteht. Einen wichtigen Fortschritt erzielt Hans Richter in seiner Habilitationsschrift schließlich dadurch, daß er den durch die Integralgleichung beschriebenen *deterministischen* Ansatz, der dem „rechnungsmäßigen Ablauf" entspricht, durch eine *wahrscheinlichkeitstheoretische* Betrachtung des tatsächlichen künftigen Ablaufs ergänzt. Er gibt – schwache – Bedingungen dafür an, daß eine „Stabilisierung" des Bestandes auch in einem naheliegenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne eintritt.

Der Neuanfang nach dem Krieg als Mitarbeiter im Forschungsinstitut in St. Louis bedeutete für Hans Richter eine Rückkehr zu einem Forschungsgegenstand, der ihn 1938 (in Arbeit Nr. 4) schon einmal beschäftigt hatte. Vorgegeben waren konkrete Probleme der *Elastizität* und der *Aerodynamik* im Zusammenhang mit aktuellen technischen Projekten. Auf der Suche nach mathematischen Theorien, die für die Lösung dieser Probleme Erfolg zu versprechen schienen, fand er schnell Anlaß, selbst tätig zu werden, um auch hier in weiße Gebiete auf der Landkarte der mathematischen Literatur vorzustoßen und Unzulänglichkeiten bestehender Theorien zu beheben. In der ersten Arbeit nach 1945 (Nr. 10) zeigt er, daß der Verzerrungsdeviator im Sinn der Definition von R. Moufang eine für *endliche* Formänderungen vernünftigerweise zu fordernde Eigenschaft nicht besitzt, die Invarianz nämlich gegen Ähnlichkeitsstreckungen. Als Alternative entwickelt er (in Nr. 13), von praxisnahen Postulaten für die Definition von Verzerrungstensor, Verzerrungsdeviator und Spannungstensor ausgehend, eine neue Theorie, bei der die Gestalt des allgemeinen Elastizitätsgesetzes invariant gegen Koordinatentransformationen bleibt. Er stützt sich dabei auf die Arbeit Nr. 11, in der er das Elastizitätsgesetz für isotropes Material in einer Gestalt ausdrückt, bei der statt einer *additiven* Aufspaltung die Zerlegung der die Deformation beschreibenden Matrix in das *Produkt* einer hermiteschen Matrix mit positiven Eigenwerten (für die Streckung) und einer unitären Matrix (für die Drehung) sowie die darauf bezogene „logarithmische Streckung" als Hilfsgröße für die Definition des Deviators eine Rolle spielen. Für den beim Auftreffen einer Überschallströmung auf ein keilförmiges Profil auftretenden Verdichtungsstoß lag damals eine Theorie mit zwei Lösungen vor, von denen aber in Experimenten nur die eine, die sog. schwache Lösung beobachtet wurde. In Arbeit Nr. 12 setzt sich Hans Richter kritisch mit den bis dahin gemachten Erklärungsversuchen für dieses Phänomen auseinander und gibt eine neue Erklärung, die später experimentell gestützt wird.

Die eigenen Beiträge zur Elastizitätstheorie endlicher Verformungen und einschlägige Resultate anderer Arbeiten, insbesondere der Lehrbücher von G. Hamel werden in Arbeit Nr. 23 unter einem einheitlichen *geometrischen* Gesichtspunkt zusammengefaßt. In dieser Arbeit findet sich in eleganter Darstellung die Theorie für beliebiges *anisotropes* Material, aus der sich der isotrope Elastizitätssatz als Spezialfall ergibt.

Eine Brücke von der Elastizitätstheorie für endliche Formänderungen isotroper Medien zu aktuellen Problemen der aerodynamischen Technik bildet Arbeit Nr. 22, in der die Fronten von Stoßwellen in festen Körpern statt mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes, wie bis dahin üblich, nun unter Einbeziehung echter Stoßwellen mit Entropiesprung aus dem „isotropen Elastizitätsgesetz" aus Nr. 11 abgeleitet werden. Wie im früher bereits untersuchten „akustischen" Fall ergeben sich wieder zwei Lösungstypen, die reine Kompressionsfront und die Front mit Scherung. Der erzielte Fortschritt in Richtung auf Realitätsnähe läßt sich bereits daran erkennen, daß in die Lösung jetzt – im Vergleich zur alten Theorie – zusätzlich Materialkonstanten eingehen. In den Arbeiten Nr. 20, 25, 28 und 29 werden die in theoretischen Untersuchungen aus verschiedenen idealisierten Ansätzen gewonnenen Lösungen für praktisch interessante Parameterbereiche qualitativ diskutiert und in einzelnen Fällen mit experimentell ermittelten Werten verglichen.

Parallel zu den Untersuchungen über Elastizitätsprobleme entstehen in den Jahren um 1950 mehrere Arbeiten, bei denen *Matrizen,* deren er sich ja bereits in Nr. 11 mit Erfolg bediente, eine auffallende Rolle spielen. Als Werkzeug zur Lösung von Problemen in der Statistik zieht er sie zu dieser Zeit heran in seiner „kleinen Mitteilung" (Nr. 14) zu einer Arbeit von G. Friede und H. Münzner, wo er zeigt, daß die Maximalkorrelation genau dann 1 ist, wenn die Korrelationsmatrix in einem bestimmten Sinn „reduzibel" ist, sowie in einem ZAMM-Hauptaufsatz über die n-dimensionale Gaußverteilung und ihre Genauigkeitshyperfläche im Anschluß an eine Arbeit von K. Stange (Nr. 16). Der vielfältige Einsatz des Matrizenkalküls zur Lösung von Anwendungsproblemen regt ihn an, sich auch mit der theoretischen Weiterentwicklung seines Werkzeuges zu befassen. Es entstehen Arbeiten über komponentenweise stetige bzw. analytische Matrixfunktionen F, die für $|C| \neq 0$ die Bedingung

$$C\,F(A)\,C^{-1} = F(CAC^{-1})$$

erfüllen (Nr. 17), speziell zur Berechnung des Logarithmus einer n-reihigen Matrix mit Hilfe einer Integraldarstellung, wobei nur die Integrale von $n-1$ rationalen Funktionen mit dem charakteristischen Polynom von A als Nenner benötigt werden (Nr. 19) und zur scharfen Abschätzung der Norm der Inversen einer n-reihigen Matrix (Nr. 26). 1959 folgt dann noch eine Arbeit zur Abschätzung der Norm von Matrixprodukten (Nr. 33) .

In dieser Zeit publizierte H. Richter ferner eine Archiv-Note (Nr. 15), in der er zeigt, daß sich der Beweis der Newtonschen und der Waringschen Formel über den Zusammenhang zwischen den symmetrischen Grundfunktionen a_ν und den

Potenzsummen s_ν von n Größen sehr viel schneller und eleganter als üblich führen läßt, wenn man Potenzreihen mit den a_ν bzw. s_ν als Koeffizienten bildet und nach Differentiation und Logarithmierung einen Koeffizientenvergleich vornimmt.

Keinen auch nur mittelbaren Bezug zu seiner damaligen beruflichen Tätigkeit im Forschungsinstitut in St. Louis läßt der dritte Themenkomplex erkennen, dem Hans Richter in der Zeit um 1950 sein Interesse zuwendet. Es handelt sich um die *erkenntnistheoretischen* und *mathematischen Grundlagen* der *Wahrscheinlichkeitstheorie* und der *Mathematischen Statistik.* Seine Untersuchungen auf diesem Gebiet erwiesen sich als wichtiger Beitrag zur Lösung der *Grundlagenkrise* der Wahrscheinlichkeitstheorie und bedeuteten für ihn selbst die entscheidende Weiche für seinen künftigen Weg als Forscher und Hochschullehrer. Die Frage, was denn die „Wahrscheinlichkeit" eigentlich sei, ist ein uraltes, Philosophen und Glückspieler immer wieder faszinierendes Problem. *Laplace* hatte Anfang des 19. Jahrhunderts eine mathematisch einwandfreie, aber leider nur für „Laplace-Experimente" gültige Definition der Wahrscheinlichkeit gegeben; wann aber ist schon die Voraussetzung eines Laplace-Experiments, die Gleichwahrscheinlichkeit aller Ergebnisse, bei einem konkreten Zufallsexperiment, beispielsweise in der Physik, erfüllt? R. von Mises schien Mitte der zwanziger Jahre dieses Jahrhunderts eine Lösung dieses Dilemmas gefunden zu haben, als er die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses *explizit* definierte als Limes der relativen Häufigkeiten, mit denen das Ereignis in einer unendlichen Folge von Realisierungen des betreffenden Experimentes beobachtet wird. Abgesehen davon, daß diese Definition für die Praxis wertlos ist, bestehen gegen den Ansatz von R. von Mises auch theoretische Einwände: zunächst liegt ein logischer Zirkel vor (der Limes existiert nur „mit Wahrscheinlichkeit 1"), und sodann ist die an das Experiment gestellte Forderung der „Regellosigkeit" der Folgen von Beobachtungsergebnissen – in der Misesschen Form – überhaupt unerfüllbar.

Hans Richter war bei statistischen Untersuchungen mit dem logischen Konzept des *Signifikanztestes* (Arbeit Nr. 18) und des *Inklusions-* und *Repräsentationsschlusses* (Nr. 21) in Berührung gekommen. Er erkannte, daß eine Wurzel des logischen Dilemmas der Statistik in der ungeklärten Grundlagensituation der Wahrscheinlichkeitstheorie zu suchen sei. Mit der für ihn typischen Gründlichkeit stellte er sich dem Problem. Das Resultat seiner Untersuchungen publizierte er in einer Serie von 5 Arbeiten in den Mathematischen Annalen (Nr. 24). Er ging aus von einer sorgfältigen Unterscheidung von objektiven und subjektiven Wahrscheinlichkeiten, deren Vermischung in der Vergangenheit häufig Quelle von Mißverständnissen und Fehlschlüssen war, und machte deutlich, daß eine *explizite* Definition hier genauso wenig zum Ziel führen könne wie in der Geometrie und in der theoretischen Physik, wo Punkt, Gerade und Ebene bzw. Naturgrößen wie Masse, Temperatur usw. nicht explizit definiert, sondern *axiomatisch* eingeführt werden.

Die *Additivität* der Wahrscheinlichkeit ergibt sich im Konzept von Hans Richter nicht mehr als Addition*ssatz,* sondern als eine, unter sehr schwachen axiomatischen Annahmen erfüllbare *Normierungs*bedingung an die „W.-Belegung", mit der die „Sicherheit" des Eintretens von Ereignissen bei Realisierung eines Zufallsexperimentes numerisch ausgedrückt wird. Auch der „Multiplikations*satz*" wird in seinem logischen Gehalt neu bestimmt: Die Multiplikativität der Wahrscheinlichkeit in einem „Relaisexperiment" (einer zeitlichen Koppelung zweier Teilexperimente) beruht auf der – vernünftigen – Annahme der „physikalischen Abgeschlossenheit" eines Experiments gegenüber dem Geschehen im Zukunftskegel (im Sinn der Relativitätstheorie) und somit auf einem irreduziblen Begriff. Der axiomatische Weg zur objektiven W.-Belegung ist weitgehend analog zur Mathematisierung des Wärmegefühls zum Temperaturbegriff. Aus sehr allgemeinen Axiomen, die eng an die Anschauung angelehnt sind, gewinnt Hans Richter zunächst einen – im Vergleich zur Struktur eines normierten Maßes – allgemeineren „EK-Kalkül", in dem die Additivität durch eine noch nicht spezialisierte Funktion f und die Multiplikativität durch eine Funktion φ vertreten wird. Es gilt dann der Satz, daß ein diesem EK-Kalkül entsprechendes System von „Erwartungskoeffizienten" (EK) durch eine stetige isotone Funktion in ein System von Wahrscheinlichkeiten übergeführt werden kann, sich also zu einem System von W.-Maßen *normieren* läßt. Der Beweis dieses für die Axiomatik (Nr. 24, Teil II) grundlegenden Transformationssatzes wird in Teil III ausgeführt.

Damals begannen die heftigen Fehden in der angewandten Statistik zwischen den „Objektivisten" und den „Subjektivisten", zwischen den Anhängern des „Konfidenzschlusses" und denen des „Fiduzialschlusses" gerade erst allmählich abzuklingen. Hans Richter lag es am Herzen, eine Brücke zu schlagen, auf der die zerstrittenen Parteien sich die Hände reichen könnten. Er unterstützte auch hier wieder ein Anliegen von van der Waerden, mit dem er zu dieser Zeit einen auch durch die geografische Nähe begünstigten besonders engen Kontakt pflegte. Es gelingt ihm in seiner *„Indirekten Theorie"* (Nr. 24, Teil V), die *subjektive* Wahrscheinlichkeit als „Glaubwürdigkeitsgrad" ganz analog zur Einführung der objektiven Wahrscheinlichkeit in unanfechtbarer Weise axiomatisch zu begründen. Bei seinem Bemühen um eine axiomatische Präzisierung einer – allgemein oder zumindest „multisubjektiv" verbindlichen – Regel, nach der ein Glaubwürdigkeitsgrad auf Grund neuer Beobachtungsergebnisse zu *ändern* ist, entdeckt er, daß die Bayessche Änderungsvorschrift nicht die einzige derartige Regel ist, sondern ein breites Spektrum von Konkurrenten besitzt. Den Extrempositionen in diesem Spektrum entsprechen Individuen, die an einer einmal gefaßten Meinung dogmatisch festhalten, wie auch immer die empirischen Resultate ausfallen, bzw. solche, die mit jeder neuen Beobachtung alles vergessen, was sie an a priori-Wissen besaßen. Sein Versuch, subjektivistische Ansätze wie die Interpretation der Rückschlußwahrscheinlichkeiten" als „W.-Aussagen in die Vergangenheit" und das „praktische Cournotsche Prinzip" in ein allgemeines Konzept einzubeziehen, findet in der Fachwelt nur bescheidene Resonanz, zumal nun die Statistische Entscheidungstheorie wegen der Berücksichtigung der *riskierten Schäden* weithin als das sachgerechtere Konzept eingeschätzt wird.

Angeregt durch die in der praktischen *Versicherungsmathematik* damals aktuellen Frage, wie der Sollwert der Prämienreserve eines Bestandes für laufende Termine zwischen den Bilanzstichtagen aus einfach fortzuschreibenden Daten der einzelnen Policen im Bestand möglichst genau abgeschätzt werden kann, befaßt sich Hans Richter 1956 mit folgender Verallgemeinerung des *Momenten-Problems:* Gegeben seien eine Borelsche Menge A und die auf A definierten Baireschen Funktionen $l_1, \ldots l_n$ und f; auf Grund der Kenntnis der Erwartungswerte

$$\lambda_\nu := E\, l_\nu \quad \text{für } \nu = 1, \ldots n$$

ist E f scharf abzuschätzen, d. h. die Funktion

$$\Phi(\lambda_1, \ldots \lambda_n) := \sup \left\{ \int_A f dp \colon p \mid \mathfrak{B} \text{ mit } p(A) = 1 \text{ und } \int_A l_\nu\, dp = \lambda_\nu \right.$$
$$\left. \text{für } \nu = 1, \ldots n \right\}$$

zu bestimmen. Hans Richter zeigt, daß unter realistischen und leicht zu kontrollierenden Bedingungen folgende Beziehung gilt:

$$\Phi(\lambda_1, \ldots \lambda_n) = \inf \left\{ c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \lambda_\nu \colon (c_0, c_1, \ldots c_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \right.$$
$$\left. \text{mit } c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\, l_\nu(x) \geqslant f(x) \text{ für } x \in A \right\} .$$

Diese Beziehung ermöglicht in für die Anwendung wichtigen Fällen eine verhältnismäßig bequeme Bestimmung scharfer Schranken für E f und ferner Aussagen darüber, wann die Schranke $\Phi(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ von einem Erwartungswert $\int f dp_0$ angenommen wird und mit einem wie kleinen Träger für p_0 man dabei auskommt (Nr. 31 und 32).

III Das wissenschaftliche Werk in der Zeit nach 1957

In den Jahren 1958 bis 1966 gilt Hans Richters Interesse überwiegend der Sequentialanalysis, über die er eine Reihe von Abhandlungen vorlegt. Zuvor allerdings erscheint noch eine letzte Arbeit über Matrizen (Nr. 33), die bereits in Kapitel II erwähnt wurde. Sie enthält scharfe untere und obere Abschätzungen der Spur des Produktes zweier hermitischer Matrizen mit Hilfe ihrer Eigenwerte sowie ebenfalls scharfe Grenzen für die Norm des Produktes zweier beliebiger Matrizen, sofern neben den Normen der einzelnen Matrizen noch ihre (nicht verschwindenden Determinanten bekannt sind, und als Folgerung daraus eine wesentliche Verbesserung der in Nr. 26 angegebenen Abschätzungen für die Norm der Inversen einer Matrix. In diesem Zusammenhang ist auf die erst sehr viel später erscheinende, in ihrer Konzeption aber auf noch frühere Zeit zurückgehende Monographie über die Methode der kleinsten Quadrate hinzuweisen. Hier spielt die Matrizenrechnung eine entscheidende Rolle, und es zeigt sich einmal mehr Richters souveräne Handhabung dieses mathematischen Rüstzeugs. Zugleich ist das Buch ein Paradebeispiel für die Vorgehensweise des „angewandten" Mathematikers Hans Richter: Das in der Praxis nicht mehr wegzudenkende, schon von C. F. Gauß benutzte Verfahren des Ausgleichs zufälliger Beobachtungsfehler wird in seinen verschiedenen Ausprägungen ausgehend von drei einfachen, leicht einsehbaren Axiomen streng mathematisch begründet.

Unter den Publikationen über mehrstufige Tests nimmt die Arbeit Nr. 36 eine zentrale Stelle ein. In ihr wird das Modell eines endlich- oder unendlichstufigen Tests bei endlich vielen Hypothesen in voller Allgemeinheit entwickelt. Die von Beobachtungsstufe zu Beobachtungsstufe wachsende Information des Statistikers wird nicht mehr, wie bisher üblich, durch eine Folge von Zufallsgrößen, die meist noch als unabhängig vorausgesetzt wurden, sondern durch eine aufsteigende Folge von σ-Algebren beschrieben. Anstelle der Menge aller auf einer bestimmten Stufe möglichen Entscheidungen und der dadurch verursachten Schäden sowie der bis dahin angefallenen Beobachtungskosten werden nunmehr die sogen. Schadensbereiche betrachtet, eine Begriffsbildung, die von Richter neu eingeführt wird. Bei dieser Betrachtungsweise darf der durch die jeweilige Entscheidung hervorgerufene Schaden nicht nur von dieser Entscheidung und der Stufe, auf der sie gefällt wurde, sowie der „wahren" Hypothese H_i ($i = 1, \ldots, n$), sondern sogar noch von der Beobachtung selbst explizit abhängen. Unter der Voraussetzung, daß für alle $i = 1, \ldots, n$ das als Hypothese H_i in Frage kommende Wahrscheinlichkeitsmaß atomlos ist, zeigt Richter zunächst die Konvexität des Risikobereichs, d. h. der Menge aller sogen. Risikovektoren, deren i-te Komponente der mittlere Schaden unter der Hypothese H_i ist, $i = 1, \ldots, n$. Wenn außerdem die Schadensbereiche jeder Stufe sämtlich beschränkt und eckenabgeschlossen sind, d. h., alle Extremalpunkte ihrer abgeschlossenen konvexen Hülle enthalten, sowie einer bestimmten, später nach Richter benannten Meßbarkeitsforderung genügen, so wird für die Tests mit fester endlicher Stufenzahl auch noch die Kompaktheit des Risikobereichs gezeigt und eine Charakterisierung der Extremalpunkte des Risikobereichs angegeben, mit deren Hilfe die Bestimmung sogen. Bayeslösungen möglich ist. Beim Beweis stützt sich Richter auf eine Verallgemeinerung eines Satzes von Blackwell, die er in der seinem Lehrer B. L. van der Waerden gewidmeten Schrift Nr. 37 herleitet und die sich in heutiger Sprechweise wie folgt ausdrücken läßt: Sei S eine Richter-meßbare Korrespondenz auf einem mit einem n-dimensionalen vektoriellen beschränkten und atomlosen Maß ausgestatteten Meßraum, deren Werte in einem n-dimensionalen euklidischen Raum enthalten und gleichmäßig beschränkt sowie eckenabgeschlossen sind, dann ist das Integral von S kompakt und konvex.

Ehe Hans Richter den allgemeinen Fall mehrstufiger Tests in Angriff nahm, hatte er in der Arbeit Nr. 34 den Spezialfall abgehandelt, daß die Beobachtungen durch unabhängige Zufallsvektoren beschrieben werden können, deren Verteilungen unter jeder der endlich vielen Hypothesen durch Dichten gegeben sind. Dabei hatte er sich auf endlichstufige Tests beschränkt, unter diesen die Bayeslösungen berechnet und deren Zusammenhang mit den bekannten Waldschen Likelihood-Quotienten-Tests herausgearbeitet, sofern nur zwei Hypothesen zur Auswahl stehen. Diesen letzteren sogen. Alternativtests ist auch die letzte Arbeit zum Problemkreis der Sequentialanalysis gewidmet (Nr. 39), allerdings werden nun auch unendlichstufige Tests zugelassen. Es stellt sich heraus, daß alle statistisch interessanten Punkte, der sogen. vordere Rand C, zum (zweidimensionalen) Risikobereich gehören und durch Waldsche Tests realisiert werden können. Eine Parameterdarstellung von C wird als Lösung von Integralgleichungen gegeben und zugleich ein neuer, ziemlich einfacher Beweis für eine wohlbekannte Optimalitätseigenschaft der Waldschen Tests gefunden.

Parallel zu seinen Untersuchungen über Sequenztests beschäftigt sich Richter mit dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Statistik (Nrn. 35 und 40). Aus der in Nr. 24 V hergeleiteten Änderungsvorschrift für die Glaubwürdigkeitsgrade (= subjektive Vorbewertung) nach der Beobachtung eines statistischen

Experiments (bei nur endlich vielen möglichen Zuständen der Natur) ergibt sich die Bayeslösung unter den Tests als subjektiv optimale Antwort des Statistikers auf die mit denselben Gewichten wie die Glaubwürdigkeitsgrade gebildete gemischte Strategie seines Gegenspielers „Natur". Für ein Kollektiv von Statistikern schlägt Richter als besten Test die sogen. „multisubjektiv-optimale" Lösung vor, die das maximale Bayesrisiko innerhalb des Kollektivs zum Minimum unter allen zur Konkurrenz zugelassenen Tests macht, und zeigt, daß sich bei konvexem, „vorn" abgeschlossenem Risikobereich stets ein multisubjektiv-optimaler Test finden läßt, der zugleich Bayeslösung bezüglich einer passenden Vorbewertung aus der abgeschlossenen konvexen Hülle aller im Kollektiv auftretenden Vorbewertungen ist. Kommen im Kollektiv alle möglichen Vorbewertungen vor, so ergibt sich als multisubjektiv-optimale Lösung der Minimax-Test, der bis dahin stets als „objektiv optimales" Verfahren gegolten hat. Im Übersichtsartikel der ZAMM über einige Prinzipien der Testtheorie (Nr. 40) diskutiert Hans Richter u. a. das Problem der Konvergenz der subjektiven Vorbewertungen im Verlauf einer beliebig langen Folge von unabhängigen Wiederholungen des in Rede stehenden Experiments. Im Fall, daß die (im objektiven Sinn) wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung unter den als möglich angenommenen Hypothesen zu finden ist, läuft dies auf das Problem der Konsistenz der Likelihood-Schätzung hinaus. Ist dagegen die wahre Verteilung nicht vertreten, so kann sich unter Umständen schließlich die Glaubwürdigkeit auf eine bestimmte Menge der Hypothesen konzentrieren, ohne jedoch gegen eine bestimmte Hypothese zu konvergieren, eine Fragestellung, die Hans Richter später wieder aufgreift.

Eine kurze Note Nr. 38 befaßt sich mit der folgenden Aussage: Eine reelle Funktion auf dem $\mathbf{R}^n$, die bezüglich des n-dimensionalen Lebesgue-Maßes L^n integrierbar ist, wird bis auf L^n-Nullmengen eindeutig festgelegt durch die Werte des L^{n-1}-Integrals über die Einschränkungen von f auf sämtliche affinen Hyperebenen. Richter gibt hierfür einen neuen, äußerst eleganten und kurzen Beweis mit Hilfe der Fourier-Transformation.

Zu Beginn der 70er Jahre wendet sich Hans Richter noch einmal den erkenntnistheoretischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie zu. Obwohl selbst erklärter Objektivist geht er im Gegensatz zu seinen früheren Veröffentlichungen (vgl. Nr. 24) vom subjektivistischen Standpunkt aus und entwickelt eine Axiomatik der subjektiven Wahrscheinlichkeit (Nr. 42). Hierbei spielt der Begriff der sogen. bedingten Wette, die darin besteht, daß die für den Eintritt eines Ereignisses E vorher vereinbarte Auszahlung bzw. der Verlust des Einsatzes beim Nicht-Eintreten von E nur dann erfolgt, wenn ein weiteres, vom Wettenden als möglich angesehenes Ereignis A eintritt, eine zentrale Rolle. Es werden Systeme von höchstens abzählbar vielen bedingten Wetten betrachtet, die der Wettende als fair oder unfair akzeptieren kann, ohne sich jedoch in jedem Fall festlegen zu müssen. Wesentlichstes Axiom ist die Forderung, daß es zu jedem möglichen Ereignis A und jedem beliebigen Ereignis E mindestens ein aus einer einzigen bedingten Wette bestehendes faires Wettsystem gibt. Der Quotient von Einsatz und Auszahlung ist – wie üblich – als bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E/A)$ zu deuten; es wird jedoch weder verlangt, daß er zwischen Null und Eins liegt, noch muß er überhaupt eindeutig bestimmt sein. Trotzdem läßt sich folgern, daß $P(\cdot/A)$ für jedes feste mögliche A ein normierter σ-additiver Inhalt auf der zugrundeliegenden Ereignisalgebra ist und der Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten gilt. Die unvollständige Information und theoretische Kenntnis des Subjektivisten kann deshalb nur dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß dieser statt einer einzigen stets eine Menge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_ϑ ($\vartheta \in \Theta$) in Betracht ziehen muß. Auf Θ besitzt der Subjektivist ein bestimmtes normiertes Maß φ, das Credibilität genannt wird und einen bestimmten Informationsstand des Subjektivisten wiederspiegelt. Betrachtet man eine Folge unabhängiger Wiederholungen des Experimentes, so ist nach jeder einzelnen Beobachtung beim Eintreten eines möglichen Ereignisses A die alte Credibilität φ so in eine neue φ_A abzuändern, daß gilt $d\varphi_A = k \cdot P_\vartheta(A)\, d\varphi$ mit einer passenden Normierungskonstanten k, während beim Eintreten eines unmöglichen Ereignisses das ganze Verfahren zusammenbricht und von vorn begonnen werden muß. Man erhält also auf völlig andere und wesentlich einfachere Weise dasselbe Resultat wie in der früheren Arbeit Nr. 24. Schließlich wird noch kurz das Verhalten der bei sukzessiver Anwendung der Änderungsvorschrift entstehenden Folge von Credibilitäten erörtert und insbesondere die Frage untersucht, wann sich die Credibilitäten im Limes auf eine einzige Wahrscheinlichkeitsverteilung konzentrieren, die dann im objektivistischen Sinne als „wahre" Verteilung zu deuten wäre.

In einem öffentlichen Vortrag am 6. 11. 1972 vor der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, der seinen Niederschlag in den Publikationen Nrn. 46, 48 und 49 fand, hat Hans Richter den Begriff der subjektiven Wahrscheinlichkeit erneut behandelt, ihm den objektivistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff gegenübergestellt und den Zusammenhang mit dem Wettbegriff herausgearbeitet sowie die historische Entwicklung aufgezeigt. Hans Richter war, wie er selbst einmal gesagt hat, stolz darauf, daß es ihm gelungen war, die Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung elementar aus sehr einfachen Axiomen herzuleiten. Zugleich hat er nie einen Hehl daraus gemacht, daß ihm dabei wertvolle Anregungen von einem ehemaligen Schüler, der sich selbst in tragischer Weise aus der bürgerlichen Gesellschaft ausgeschlossen hatte und den sein einstiger Lehrer nicht in der Isolation allein lassen wollte, zuteil geworden waren.

Im Verlauf seiner Untersuchungen des Grenzverhaltens der Credibilitäten bei einer Folge unabhängiger Wiederholungen eines Zufallsexperiments stieß Hans Richter auf folgenden Satz von H. F. Finkelstein: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und empirischer Verteilungsfunktion $F_n(\omega, x)$, F sei stetig, und für passende reelle Zahlen a und b gelte $F(a) = 0$ und $F(b) = 1$; dann ist die Folge $((2n \log\log n)^{-1/2}(nF_n(\omega, x) - nF(x))_{n\geqslant 3}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 relativ kompakt in der mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ausgestatteten Menge der reellen Funktionen über dem Intervall $[a, b]$, wobei die Menge der Häufungspunkte nicht von ω abhängt. Diesen Satz verallgemeinert Hans Richter in seiner Arbeit Nr. 43 zunächst auf den Fall beliebiger eindimensionaler Verteilungen, ohne hierfür Annahmen über die Existenz von Momenten o. ä. zu machen. Als Häufungspunkte ergeben sich dabei alle reellen Funktionen u, die sich in der Gestalt

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} v(y)\, dF(y)$$

schreiben lassen, worin v(y) eine Bairesche Funktion ist mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(y)\, dF(y) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(y)\, dF(y) \leqslant 1 .$$

Daraus leitet er dann folgendes Gesetz vom iterierten Logarithmus für das empirische Chi-Quadrat her: Sei $E_1, \ldots, E_k$ mit den strikt positiven Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_k$ eine vollständige Ereignisdisjunktion in einem Zufallsexperiment, das beliebig oft unabhängig wiederholt werde. Bei n Wiederholungen trete E_j genau $H_{n,j}$-mal auf, $j = 1, \ldots, k$; das empirische Chi-Quadrat wird definiert gemäß

$$\chi_k^2 = \sum_{j=1}^{k} (H_{n,j} - np_j)^2/np_j .$$

Dann ist die Folge $(\chi_k^2/2 \log \log n)_{n \geqslant 3}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 relativ kompakt in $\mathbf{R}$ und die Menge der Häufungspunkte ist das Einheitsintervall [0,1]. In einer weiteren Veröffentlichung (Nr. 47) beweist er den Satz vom iterierten Logarithmus für empirische Verteilungsfunktionen im Fall mehrdimensionaler Verteilungen. Das Ergebnis ist völlig analog zu dem aus der Arbeit Nr. 43. Es ermöglicht die Angabe einer exakten Schranke für den oberen Limes der mit dem Faktor $(2 \log \log n/n)^{-1/2}$ normierten maximalen Abweichung der empirischen von der „theoretischen" Verteilungsfunktion, wie sie für den Fall einer stetigen Verteilungsfunktion bereits in einem Lemma von Smirnov, Chung und Kiefer bestimmt worden war, und erlaubt eine Verschärfung des bekannten Satzes von Glivenko-Cantelli. Zum Beweis benötigt man eine ursprünglich auf F. Riesz zurückgehende Aussage über die Darstellbarkeit eines Vektormaßes Q durch ein atomloses Wahrscheinlichkeitsmaß P und eine zugehörige Dichtefunktion mit p-integrablem Betrag. Dieser Satz wird in der Publikation Nr. 45 formuliert und bewiesen; zusätzlich wird dort der Fall eines nicht notwendig atomlosen Maßes P behandelt.

Zum Schluß sei noch auf zwei kleinere Abhandlungen hingewiesen. In der ersten, gemeinsam mit K. Bosch verfaßten Arbeit Nr. 41 wird eine geschlossene Formel für den Erwartungswert der vor der Zeit $t > 0$ angekommenen Kunden bei einer Warteschlange mit unabhängigen und übereinstimmend verteilten Zwischenankunftszeiten hergeleitet. Sind diese Zwischenankunftszeiten im Intervall [0,1] gleichverteilt, so wird der Erwartungswert mit Hilfe einer Differentio-Differentialgleichung sogar explizit angegeben.

Die zweite, vor allem in didaktischer Hinsicht interessante Publikation Nr. 44 besteht aus einem mit äußerst elementaren Hilfsmitteln geführten Beweis einer Variante des starken Gesetzes der großen Zahlen. Die dabei benutzte Schranke für die Konvergenzgeschwindigkeit ist sogar scharf, wenn sie lediglich von Potenzen der Anzahl der Beobachtungen abhängen darf.

IV Die Liste der wissenschaftlichen Publikationen

A Lehrbücher

[1] Wahrscheinlichkeitstheorie. (1. Aufl. 1956, 2. Aufl. 1966) Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag
[2] Methode der kleinsten Quadrate (gemeinsam mit V. Mammitzsch). Stuttgart 1973: Verlag W. Kohlhammer GmbH

B Zeitschriftenartikel

[1] Über die Lösbarkeit einiger nicht-Abelscher Einbettungsprobleme. Math. Ann. **112** (1936) 69–84
[2] Über die Lösbarkeit des Einbettungsproblems für Abelsche Zahlkörper. Math. Ann. **112** (1936) 700–726
[3] Ein Beweis der Relationen von Vahlen. Math. Ann. **113** (1937) 206–207
[4] Berechnung des Stromlinienverlaufs bei elliptischem Tragflügel. DVL 1938 (unveröffentlicht)
[5] Ausbildung von Sachverständigen für Versicherungsnehmer. Deutscher Versicherungsdienst **51** (1940)
[6] Die Konvergenz der Erneuerungsfunktion. Bl. f. Vers.-Math. **5** (1940) 21–35
[7] Eine Bemerkung zum Erneuerungsproblem. Arch. math. Wirtsch. Soz.-Forschung **6** (1940)
[8] Untersuchungen zum Erneuerungsproblem. Math. Ann. **118** (1941) 145–194
[9] Zur Ausgleichung von Beobachtungsreihen. Mh. Math. Phys. **50** (1941) 14–26
[10] Bemerkung zum Moufangschen Verzerrungsdeviator. Z. f. angew. Math. Mech. **28** (1948) 126–127
[11] Das isotrope Elastizitätsgesetz. Z. f. angew. Math. Mech. **28** (1948) 205–209
[12] Die Stabilität des Verdichtungsstoßes in einer konkaven Ecke. Z. f. angew. Math. Mech. **28** (1948) 341–345
[13] Verzerrungstensor, Verzerrungsdeviator und Spannungstensor bei endlichen Formänderungen. Z. f. angew. Math. Mech. **29** (1949) 65–75
[14] Zur Maximalkorrelation. Z. f. angew. Math. Mech. **29** (1949) 127
[15] Ein einfacher Beweis der Newtonschen und der Waringschen Formel für die Potenzsummen. Arch. Math. **2** (1949) 1–4
[16] Zur Gaußschen Verteilung im n-dimensionalen Raume. Z. f. angew. Math. Mech. **29** (1949) 161–164
[17] Über Matrixfunktionen. Math. Ann. **122** (1950) 16–34
[18] Zur Teststärke des Fisherschen Testes. Z. f. angew. Math. Mech. **30** (1950) 197–203
[19] Zum Logarithmus einer Matrix. Arch. Math. **2** (1949/50) 360–363
[20] Die Stoßherzkurve bei allgemeiner Zustandsgleichung. Z. f. angew. Math. Mech. **30** (1950) 269–270
[21] Zur Begründung des Inklusions- und Repräsentationsschlusses der mathematischen Statistik. Mitt.-Bl. Math. Stat. **2** (1950) 83–89
[22] Stoßwellen in isotropen elastischen Medien. Z. f. angew. Math. Mech. **31** (1951) 263–279
[23] Zur Elastizitätstheorie endlicher Verformungen. Math. Nachr. **8** (1952) 65–73
[24] Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie, I. Vergleichende Betrachtung der bestehenden Theorien. Math. Ann. **125** (1952) 129–139; II. Axiomatik der Erwartungskoeffizienten. Math. Ann. **125** (1953) 223–234; III. Die Begründung des Additions- und des Multiplikationssatzes. Math. Ann. **125** (1953) 335–343; IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. **126** (1953) 362–374; V. Indirekte Wahrscheinlichkeitstheorie. Math. Ann. **128** (1954) 305–339
[25] Elastoplastische Reflexion eines Stabes. Z. f. angew. Math. Mech. **33** (1953) 237–249
[26] Bemerkung zur Norm der Inversen einer Matrix. Arch. Math. **5** (1954) 447–448
[27] Zur Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dialectica **8** (1954) 48–77
[28] Zur Tschaplyginschen Hodographenmethode bei Strömungen mit Zirkulation (gemeinsam mit W. Müller). Z. f. angew. Math. Mech. **35** (1955) 1–11
[29] Déformations plastiques dans le cas de sollicitations, répétées dépassant la limite d'élasticité. Bull. Soc. Franc. Mécan. **5** (1955) 23–27

[30] Théorie statistique de la déterminiation expérimentale des fonctions d'autocorrélation. Mém. Art. Franc. 1957, 1017–1052
[31] Zur Abschätzung von Erwartungswerten. Z. f. angew. Math. Mech. **36** (1956)
[32] Parameterfreie Abschätzung und Realisierung von Erwartungswerten. Bl. Dt. Ges. Vers.-Math. **3** (1957) 147–162
[33] Zur Abschätzung von Matrizennormen. Math. Nachr. **18** (1958) 178–187
[34] Über optimale mehrstufige Tests. Trans. of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes (1960) 557–568
[35] Subjektive Wahrscheinlichkeit und multisubjektive Tests. Z. W.-Theorie **1** (1963) 271–277
[36] Endlichstufige Tests mit abhängigen Beobachtungen. Z. W.-Theorie **2** (1963) 22–32
[37] Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Maßtheorie. Math. Ann. **150** (1963) 85–90
[38] Bemerkung zu einem Satz von H. G. Kellerer. Math. Z. **80** (1963) 398–399
[39] Optimale Sequenzwiederholungstests. Z. W.-Theor. **5** (1966) 156–166
[40] Einige Prinzipien der Testtheorie. Z. f. angew. Math. Mech. **46**, Sonderheft 1966
[41] Über den Erwartungswert der bis zur Zeit angekommenen Kunden einer Warteschlange bei gleichverteilten Ankunftszeiten (gemeinsam mit K. Bosch). Metrika **18** (1971) 1–5
[42] Eine einfache Axiomatik der subjektiven Wahrscheinlichkeit. Istituto nazionale di Symposia matematica, Bd. 9 (1972) 59–77
[43] Zum Gesetz vom iterierten Logarithmus für empirische Verteilungsfunktionen und empirisches χ-Quadrat. Manuscripta Math. **9** (1973) 187–199
[44] Bemerkung zur Konvergenzgeschwindigkeit beim starken Gesetz der großen Zahlen. Bl. Dt. Ges. Vers.-Math. **XI**, Heft 1 (1973) 7–9
[45] Zur Verallgemeinerung eines Satzes von F. Riesz (gemeinsam mit V. Mammitzsch). Sitzungsber. Bayer. Akad. d. Wiss., nat.-wiss. Klasse (1973)
[46] Die historische und logische Verbindung zwischen Wettbegriff und Wahrscheinlichkeitsbegriff, Teil I. Bl. Dt. Ges. Vers.-Math. XI, H. 3 (1974) 311–318
[47] Das Gesetz vom iterierten Logarithmus für empirische Verteilungsfunktionen im $\mathbf{R}^k$. Manuscripta math. **11** (1974) 291–303
[48] Die historische und logische Verbindung zwischen Wettbegriff und Wahrscheinlichkeitsbegriff, Teil II. Bl. Dt. Ges. Vers.-Math. **XI** Heft 4 (1974) 481–490
[49] Die historische und logische Verbindung zwischen Wettbegriff und Wahrscheinlichkeitsbegriff, Teil III. Bl. Dt. Ges. Vers.-Math. **XII** Heft 1 (1975) 3–14

Prof. Dr. D. Bierlein
FB Mathematik der Universität
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

Prof. Dr. V. Mammitzsch
FB Mathematik der Universität
Lahnberge
3550 Marburg

(*Eingegangen: 31. 7. 1979*)

Buchbesprechungen

McKennon, K., Robertson, J., Locally Convex Spaces (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series, vol. 14), New York – Basel: Marcel Dekker AG. 1976, 80 pp., SFr. 45,–

Bei diesem Lecture Notes Heft handelt es sich um eine Sammlung von Beispielen und Gegenbeispielen zur Theorie der lokalkonvexen Räume.

In Kapitel I und II findet man Definitionen und Konstruktionsmethoden für die einzelnen Raumtypen und in Kapitel IV sind die Implikationen an Hand von Diagrammen zusammengestellt.

Kapitel III befaßt sich mit den Erhaltungseigenschaften, der in diesem Heft gebrachten Konstruktionsmethoden und Kapitel V ist endlich den Gegenbeispielen gewidmet.

Alles in allem ein Werk, in dem es sich lohnt, zu suchen und nachzuschlagen.

Kiel J. Wloka

Hirsch, M. W., Differential Topology (Graduate Texts in Mathematics, vol. 33), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1976, 221 S., geb. DM 36,20

Der Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten wird dem Studenten schon in den Anfängervorlesungen vorgestellt; der Tangentialraum, Differentialformen und der „Satz von Stokes“ mit seinen klassischen Varianten gehören zum Stoff des Vordiploms. Daß diese Gebiete heute überhaupt zugänglich sind, auch für den Anfänger, der immer auf Verläßlichkeit aller Schritte angewiesen ist, verdankt man vor allem den bekannten kleinen Schriften von J. Milnor (so wohltuend, weil man nie im Beweis unvermutet auf ein Zitat stößt) und auch den rühmenswerten Lehrbüchern von S. Lang.

Wenn man sich einmal über die ersten Begriffe verständigt hat, gehen die Wege nun bald auseinander: Differentialformen und ihre Analysis, Funktionalanalysis der $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen, Dynamische Systeme, Stabilitätstheorie, Differentialgeometrie, Algebraische Topologie, . . . und so mehren sich die Lehrbücher.

Das vorliegende willkommene Buch eines Experten über Differentialtopologie folgt im ganzen dem von Milnor eröffneten Weg. Nach einem Kapitel über die Grundbegriffe folgt gleich (Kap. 2) eines über die Topologie der Räume von $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen und (Kap. 3) über Transversalität. Es wird ein Jet-Transversalitätssatz bewiesen, aus dem der Immersionssatz folgt (nicht aber der Einbettungssatz). Fruchtbarer als die hier versuchte Formalisierung des Übergangs von Lokalen zum Globalen scheinen mir doch die inzwischen weit fortgeschrittenen Ergebnisse über „allgemeine Lage“ (Multijet-Transversalität), die, wenn sie einmal zu befriedigendem Abschluß gebracht sind, wahrscheinlich den eigentlichen Schlüssel zur Differentialtopologie bilden werden. Der Zusammenhang zwischen der Topologie der Mannigfaltigkeiten und der Topologie der Abbildungsräume wird so in dem Buch zu recht herausgestellt.

Es folgt ein Kapitel über Vektorbündel und tubulare Umgebungen, wo auch sehr direkt für Mannigfaltigkeiten die Klassifikation der Vektorbündel durch Homotopieklassen von Abbildungen in Graßmann-Mannigfaltigkeiten erklärt wird.

Danach kommen fünf Kapitel mit wichtigen Anwendungen: Abbildungsgrad, Morse-Theorie, Kobordismentheorie, Isotopie, Klassifikation der Flächen (durch Morse-Theorie).

Wenn im Vorwort gesagt wird, das Buch setze nur einen Standard-Kurs in Analysis und allgemeiner Topologie voraus, so ist das mit Einschränkung zu nehmen: Als erste Einführung möchte ich es nicht empfehlen, eher als Begleitlektüre für eine solide Vorlesung. Der Verfasser beschreibt oft seinen Gegenstand als Experte, dem jederzeit das Ganze und am Anfang schon das Ende zur Verfügung steht; in den Gemütszustand eines Studenten, der noch nichts weiß und

den ein schnell plausibles Argument eher unsicher macht, versetzt er sich nicht. Dazu einige Beispiele:
„Then g can be approximated by, and so is homotopic to . . .“ heißt es Seite 101 in einem Beweis – ein nicht ganz trivialer, wenn auch sehr plausibler Schluß, der erst Seite 124 untermauert wird. Der Beweis des Tubensatzes Seite 110 verweist auf eine Übungsaufgabe Seite 41, deren Behauptung falsch ist; ein Fehler, den man in fast jedem Lehrbuch findet (auch der Referent ist in dieselbe Grube getappt). Der einzig vernünftige und richtige Beweis steht in den Büchern von Lang.
Mit „by Taylors formula“ wird Seite 113 eine Behauptung aufgenommen, die darauf hinausläuft, daß die Koordinatenfunktionen im Ring der differenzierbaren Keime das maximale Ideal erzeugen. Beim Beweis des Lemmas von Morse Seite 146 wird dieser Schluß explizit und genauer begründet. Übrigens ist die Darstellung des Lemmas von Morse sehr gelungen und kann so für Anfängervorlesungen empfohlen werden. Das lokale Verhalten differnzierbarer Funktionen, also eine Diskussion der Taylorschen Formel vom höheren Standpunkt, wäre überhaupt hilfreich, um vielen kleinen Schlüssen mehr Sicherheit zu geben. In der Theorie der Vektorbündel wird manches nur unter der Hand erklärt, so insbesondere hätte der Begriff des Normalbündels eine zusammenhängende Darstellung verdient. Definiert wird es Seite 95; daß die Projektion auf ein Unterbündel (bei gegebener Riemannscher Metrik) differenzierbar ist, ist für einen Anfänger nicht selbstverständlich. Daß bei einer transversalen Abbildung die Faser der Normalbündel isomorph abgebildet wird, erfährt man erst Seite 171, und zwar in der Tat als „A most important fact“. Das Sphärenbündel und das projektive Bündel wird nicht erklärt, die Orientierungsüberlagerung nur zu wenig. Die Tangentialräume werden erklärt wie bei Lang, aber es gibt keine Bezeichnung der Basis in Koordinaten $(\partial/\partial x_i)$ und der Basis (dx_i) des Kotangentialraumes, und man erfährt nicht, wie Tangentialvektoren und Vektorfelder als Derivationen wirken. Das muß sich bei expliziten Rechnungen doch als lästig erweisen. Seite 129 beruft sich ein Beweis kurzerhand auf die Verdoppelung einer berandeten Mannigfaltigkeit, was im hier benutzten differenzierbaren Fall erst Seite 184 zureichend erklärt wird. Seite 178 ist wohl zum ersten Mal im Text und Seite 155 in den Übungen von „a complete Riemannian metric“ die Rede. Was das ist, wird nie erwähnt, ja nicht einmal, was die Bogenlänge einer Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist. Ein Literaturhinweis wäre hilfreich. Daß Isotopie eine Äquivalenzrelation ist (S. 185) ist nicht selbstverständlich, bei der Transitivität muß man an den Nahtstellen etwas für die Differenzierbarkeit tun. Daß die Kleinsche Flasche, definiert als zusammenhängende Summe zweier projektiver Ebenen, auch die Sphäre mit einem unrecht angesetzten Henkel ist (S. 195), hätte zumindest ein begründendes Bild verdient, und überhaupt die Bilder! Da ist manches, was eine Ellipse sein sollte, doch arg linsenförmig geraten (S. 32). Im Appendix „we briefly summarize a few basic facts of analysis and topology“. Hier wäre vor allem eine genaue Formulierung des Satzes über lokale Lösung einer Differentialgleichung (mit Abhängigkeit von den Anfangswerten) wünschenswert. Der Hinweis „locally g satisfies Lipschitz conditions“ (Seite 149) ist nicht hilfreich, und gerade hier verlassen einen viele angesehene Lehrbücher über Differentialgleichungen und sicher auch viele Analysiskurse.

All dies sei nicht als Einwand verstanden. Das Buch ist nichts für Anfänger, aber der Fortgeschrittene kann viel daraus lernen, was man bei einem so ausgezeichneten Experten des Gebiets ja auch erwarten darf. Insbesondere die direkte geometrische Lehre vom Abbildungsgrad ist sehr gelungen und sollte auch den Anfänger der „soft analysis“ gewinnen. Sie kündigt sich schon im Kapitel über Vektorbündel an, durch einen ganz elementaren einfachen Beweis für den Satz, daß eine 1-kodimensionale geschlossene Untermannigfaltigkeit einer einfach zusammenhängenden geschlossenen Mannigfaltigkeit triviales Normalbündel hat und letztere zerlegt. Vielerlei Hinweise finden sich in den Übungen. Die guten historischen Bemerkungen des Buches nehmen wir dankbar an, sie sind nicht leicht zu haben.

Regensburg Th. Bröcker

Beiträge zur Algebra und Geometrie 3, hrsg. von M. Herrmann, O.-H. Keller, A. Kertesz, O. Krötenheerdt, L. Stammler, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1974, 183 S., DM 24,–

Im vorliegenden Heft sind 14 Arbeiten recht verschiedener Art enthalten. Nur 2 davon sind der Geometrie zuzurechnen, die übrigen behandeln Fragen aus der Algebra.

Bei den beiden geometrischen Beiträgen wird in der Arbeit von O. H. Keller über „Normalformen der Flächen 3. Ordnung" erstmals vollständig das seit über 100 Jahren offene Problem gelöst, sämtliche Typen von Flächen 3. Ordnung durch Normalformen ihrer Gleichungen lückenlos zu beschreiben (die Sylvestersche Normalform als Summe von Kuben gilt bekanntlich nur „im allgemeinen").

Von völlig anderem Charakter ist die zweite geometrische Arbeit von O. Krötenheerdt, Mammitsch und Richter über „Flächenkleinste Vierecke, die 2 gegebene von außen berührende Kreise enthalten".

Von den übrigen Arbeiten ist die umfangreichste die von W. Kleinert mit dem Titel „Zur Theorie der perfekten und quasiperfekten Moduln". Der Inhalt derselben ist in dem später erschienenen Buch von B. Renschuch („Elementare und praktische Idealtheorie", Berlin 1976) bereits verarbeitet worden.

Zur kommutativen Algebra gehören dann noch 2 kleinere Arbeiten von W. Vogel und G. Eisenreich, während der Gruppentheorie die Beiträge von H. Mitsch, R. Lidl, L. Teschke, F. Loonstra und R. Fritzsche gewidmet sind.

Die Arbeiten von A. Kertesz und O. Steinfeld, E. T. Schmidt, G. Pfister behandeln nichtkommutative Algebra und Verbandstheorie.

Hamburg W. Burau

Reichardt, H., Gauß und die nicht-euklidische Geometrie, Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976, 116 S, DDR 29,50 M.

Das verdienstvolle Buch, das anläßlich des 200. Jahrestages der Geburt von Gauß entstand, enthält mehr als der Titel andeutet: es schildert ausführlich auch die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie und die Leistungen von J. Bolyai und Lobatschewski. Das Buch ist gut geschrieben und angenehm zu lesen. Wie schwer haben es doch neue Ideen, sich gegen Althergebrachtes durchzusetzen; und wie bedrückend wirkt Gaußens Wortkargheit gegenüber seinen Zeitgenossen und insbesondere gegenüber J. Bolyai!

Erlangen G. Nöbeling

Walter, R., Differentialgeometrie, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1978, 286 pp., kart., DM 28,–

Der Verfasser will mit vorliegendem Buch, das aus einer einsemestrigen Vorlesung entstand, eine Einführung in die neuere Differentialgeometrie geben. Er hat sich hierbei offensichtlich durch Ideen von S.-s. Chern leiten lassen und die Beweise mit Hilfe des durch H. Flanders erweiterten Kalküls der alternierenden Differentialformen geführt. Auf diese Weise findet sich eine deutliche Abgrenzung zu der übrigen deutschsprachigen einschlägigen Lehrbuchliteratur. – Im 1. Kapitel werden grundlegende Tatsachen zur elementaren Differentialgeometrie der Kurven und Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum angeführt. Hierauf folgt im 2. Kapitel eine Darstellung der riemannschen Geometrie unter Zugrundelegung der Grundbegriffe aus der multilinearen Algebra und der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Bemerkenswert ist die Vermeidung von Poisson-Klammern. Im 3. Kapitel werden Hyperflächen im euklidischen Raum behandelt, wobei insbesondere der Kalkül von K. Voss bei globalen Fragestellungen zur Anwendung gelangt. Die Ausführungen des Verf. konzentrieren sich schließlich im 4. Kapitel auf die Herleitung der Formel von Allendoerfer-Weil-Chern für einen kompakten regulären Bereich einer riemannschen Mannigfaltigkeit beliebiger Dimension. – Durch die recht knapp gefaßte und einiges Geschick des Lesers im Rechnen mit Differentialformen erfordernde Darstellung hat erstaunlich viel Stoff samt Beispielen und interessanten Übungsaufgaben in dem Buch Platz gefunden. Alles in allem ein sehr bemerkenswerter Beitrag zur Lehrbuchliteratur über Differentialgeometrie.

Stuttgart K. Leichtweiß

Nitsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 199), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1975, 86 Abb., XIII + 775 pp., geb. DM 196,–

In seiner 1950 erschienenen „Einführung in die Differentialgeometrie“ schrieb Blaschke über die Minimalflächen: „Sie . . . bilden einen Lieblingsgegenstand der Geometer von Lagrange bis heute. So haben sich insbesondere G. Monge, B. Riemann, K. Weierstraß, H. A.Schwarz, E. Beltrami, S. Lie und A. Ribaucour eingehend mit ihnen beschäftigt“. Danach zitierte Blaschke die zusammenfassenden Darstellungen von Beltrami (1868, Opere Bd. 2, S. 1/54), Schwarz, Ribaucour, Darboux, Bianchi und schließlich T. Radó („On the Problem of Plateau“, Ergebnisse der Math. u. Grenzgebiete, 1933) und kam zu folgendem Urteil: „Wenn man die erste und die letzte dieser Darstellungen vergleicht, so kann man die stürmische Jugend einer geometrischen Frage ihrem müden Alter gegenüberstellen“.

Hier irrte Blaschke, wie die von J. C. C. Nitsche vorgelegten „Vorlesungen über Minimalflächen“ zeigen. Dieser Nachweis ist umso überraschender, als der Autor ganz und gar im klassischen Rahmen bleibt und sich nur mit Minimalflächen im dreidimensionalen euklidischen Raum beschäftigt. Er gibt ebensowenig eine Darstellung der Minimalflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, wie eine Beschreibung der großartigen Resultate, die in den letzten zwanzig Jahren im Zusammenhang mit der Entwicklung der „Geometrischen Maßtheorie“ entstanden sind. Der Autor hat sich stattdessen weise auf ein scheinbar enges Gebiet beschränkt, und so ist ein sehr schönes Buch entstanden, das die historischen Aspekte ebenso berücksichtigt wie die neusten Forschungsergebnisse, dem Spezialisten als Handbuch und gleichzeitig einem Studenten mittleren Semesters als Einführung dienen kann in ein faszinierendes Gebiet, in dem die geometrische Intuition genausogut wie die analytische Präzision zu ihrem Recht kommt. Dem Autor ist es gelungen, die vielfältigen Phänomene gut lesbar und übersichtlich darzustellen, ohne auf mathematische Genauigkeit zu verzichten. Die geschickte Gliederung des Stoffes ist dem Leser ebenso behilflich wie die vorzüglichen Abbildungen und das umfangreiche Literaturverzeichnis (66 Seiten). Sehr nützlich ist, daß sich bei jedem Literaturzitat ein Seitenverweis findet, mit dessen Hilfe man sofort nachsehen kann, an welcher Stelle in den „Vorlesungen“ die zitierte Literatur erwähnt und möglicherweise genauer besprochen ist. Besonders glücklich erscheint mir auch der Gedanke, ein Kapitel „Lehrsätze und Aufgaben“ aufzunehmen, welches nicht nur weitere Verbindungen zur Literatur knüpft und sich durch äußerst interessante historische Bemerkungen auszeichnet, sondern auch eine Vielzahl ungelöster Aufgaben darbietet, die den Leser zu eigenen Entdeckungen anregen sollen und deren Lösung in den meisten Fällen eine Publikation wert sein dürfte.

Schließen wir diese Besprechung mit einer kurzen Inhaltsangabe:
Kapitel II beginnt ganz elementar mit einer Diskussion der Begriffe „Kurve“, „Fläche“, „differentialgeometrische Fläche“ und „Minimalfläche“. Danach wird eine Reihe spezieller Minimal-

flächen besprochen, und das Kapitel endet mit einer Diskussion der zweiten Variation des Flächeninhalts.
Kapitel III befaßt sich mit der konformen Abbildung von Minimalflächen. Dies führt sofort auf äußerst interessante mathematische Probleme. Wir erwähnen nur den Bernsteinschen Satz, daß eine auf dem ganzen $\mathbf{R}^2$ definierte Lösung der Minimalflächengleichung notwendigerweise eine Ebene ist, die Theorie der harmonischen Abbildungen, konforme Abbildungen im Großen. Dem schließt sich eine weitere Diskussion spezieller Minimalflächen an, die Geometern wie Analytikern das größte Vergnügen bereiten wird. Es ist schon erstaunlich, welche Fülle von Beispielen der Autor gesammelt hat, die selbst Fachleuten in vielen Fällen unbekannt sein dürften.
Kapitel IV enthält das für die folgenden Abschnitte notwendige analytische Werkzeug: Sobolevräume (vom Autor „Funktionen der Klasse $\mathscr{M}$" genannt) und Einbettungssätze, harmonische Funktionen, Abbildungen mit endlichem Dirichletintegral, Index, lineares Hausdorffmaß, Punktmengen verschwindender logarithmischer Kapazität.
Die folgenden drei Kapitel bilden das Herzstück der „Vorlesungen". Kapitel V behandelt das Plateausche Problem und die hiermit zusammenhängenden Fragen: Existenzbeweise, Randverhalten, Verzweigungspunkte, Ein- und Mehrdeutigkeit, instabile Minimalflächen, nichtparametrische Lösungen, Problem des kleinsten Flächeninhalts.
Kapitel VI enthält eine Diskussion von anderen Randwertaufgaben, die nicht weniger reizvoll als das Plateausche Problem sind: freie Randwertprobleme, mehrere Randkurven (Douglas-Problem), isoperimetrische Ungleichungen.
Kapitel VII gibt eine gründliche Diskussion der (nichtparametrischen) Minimalflächengleichung in zwei Dimensionen. Wir erwähnen insbesondere die verschiedenen Formen des Maximumprinzips, den Hebbarkeitssatz von Bers und seine verschiedenen Verallgemeinerungen, die a priori Abschätzungen von Heinz, Finn, Osserman u. a. und die Behandlung des Dirichletschen Problems.
Kapitel VIII behandelt schließlich die vollständigen Minimalflächen.

Die vorliegenden „Vorlesungen" können jedem mathematisch Interessierten wärmstens empfohlen werden, besonders dann, wenn er nicht bloß an Strukturmathematik Vergnügen hat, sondern Mathematik an Hand von reizvollen wie schwierigen Problemen kennenlernen oder genießen möchte. Zitieren wir Hilbert: „Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft im allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. Solange ein Wissenszweig Überfluß an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der selbständigen Entwicklung. Wie überhaupt jedes menschliche Unternehmen Ziele verfolgt, so braucht die mathematische Forschung Probleme."

Danken wir J. C. C. Nitsche, daß er mit seinem Buch gezeigt hat, wie lebendig die Minimalflächen nach wie vor sind.

Bonn S. Hildebrandt

Lichnerowicz, A., Geometry of groups of transformations. Leyden: Noordhoff International Publishers 1977, XIV + 234 pp., cloth, Dfl 70,–, $ 29.25

Das Buch ist eine von M. Cole (Leyburn) angefertigte Übersetzung des inzwischen als klassisch zu bezeichnenden Werkes Géométrie des groupes de transformations (Dunod: Paris 1958), durch welches der Aufschwung der globalen Differentialgeometrie entscheidend gefördert wurde. Den beiden sachkundigen Besprechungen der französischen Originalausgabe von S. Kobayashi in Math. Rev. 23, # A 1329 (1962) sowie von W. Klingenberg im Zentralblatt für Mathematik, Bd. 96, S. 160–161 ist auch heutzutage inhaltlich nichts hinzuzufügen. Ich möchte nur auf die wichtigsten Bücher hinweisen, die die einzelnen Themen des vorliegenden Werkes äußerst erfolgreich weiterentwickelt haben. Einmal ist es der zweite Band des Standardwerkes über globale

Differentialgeometrie, nämlich S. Kobayashi und K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry (Interscience Publishers: New York 1969), zum anderen das Buch S. Kobayashi: Transformation Groups in Differential Geometry (Ergebnisse der Mathematik Band 40, Springer-Verlag: Berlin – Heidelberg – New York, 1972), in welchem sich insbesondere der neuere Stand der Beziehungen zwischen der Theorie der Lieschen Transformationsgruppen und Differentialgeometrie widerspiegelt. Die im letzten Kapitel des Buches dargestellte Theorie der symmetrischen Räume hat inzwischen ihre volle Entfaltung in den Büchern S. Helgason: Differential Geometry and Symmetric Spaces (Academic Press: New York – London 1962) und O. Loos: Symmetric Spaces I, II (Benjamin: New York – Amsterdam 1969) erfahren. Die französische Originalausgabe ist vorbildlich gesetzt, und die Formeln sind übersichtlich. Die vorliegende englische Übersetzung ist nach einer sorgfältig getippten Druckvorlage auf phototechnischem Wege hergestellt, die Schönheit des gesetzten Originaltextes erreicht sie aber nicht. Daher sollte man beim Lesen dieses Buches, das einen auch heute freundlich in die globale Differentialgeometrie einführt und in der Zwischenzeit nichts von seinem Wert verloren hat, zur französischen Originalausgabe greifen.

Erlangen K. Strambach

GI-NTG-Fachtagung „Struktur und Betrieb von Rechensystemen", hrsg. von H.-O. Leilich (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1974, VI + 340 S., geheftet, DM 26,–

Die Beiträge dieses Tagungsbandes spannen den weiten Bogen zwischen den Aspekten des Hardwareentwurfes und verschiedenen Problemen der Softwareentwicklung für Rechensysteme. Das einführende Hauptreferat umreißt diese Probleme und weist auf die Akzentverschiebung hin, die dadurch entstanden ist, daß die Kosten für die Hardware fallende, für die Programmierung aber steigende Tendenz haben. Was sind Computer und was tun sie, wird zur Schlüsselfrage erhoben, auf die, stark vergröbert, die Antwort gegeben ist, Computer sollen Entscheidungen treffen bzw. Möglichkeiten für Entscheidungen aufgrund von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Zustände schaffen.

In vier größeren Themenkreisen werden die folgenden Fragestellungen behandelt: 1. Rechnerstruktur: Mikroprogrammierung; Parallelprozessoren; assoziativer Arbeitsspeicher. – 2. Schnittstellen und Leistungskriterien: Systemschnittstellen; Pufferspeicher, Befehls-Pipeline, E/A-Prozessoren; Schnittstellen für Betriebssoftware. – 3. Auftragslast, Leistung und Messung: Leistungsmessung in Realzeit- und Dialogsystemen; Beschreibung und Durchführung von Benchmark-Tests. – 4. Betriebsmittelvergabe: Analytische Durchsatzuntersuchungen an Betriebssystem-Modellen; Simulation von Betriebsmittelzuteilungsalgorithmen.

Die den einzelnen Themenkreisen zugeordneten Referategruppen enthalten zumeist zunächst einen historischen Überblick, der es gestattet, aus der Entwicklung heraus die Problemstellung zu erkennen, und gehen dann auf Lösungsansätze der einzelnen Probleme ein bzw. geben Hinweise auf die zu erwartenden und in der Zwischenzeit zum Teil eingetretenen Entwicklungen. Wenn auch die eine oder andere Darstellung mehr exemplarischen Wert hat, so ergibt die Zusammenstellung doch einen guten Überblick über die Aufgaben- und Problemstellungen, die in Verbindung mit Rechensystemen auftreten.

Münster H. Werner

Neuerscheinung

Lehrbuch der Analysis

Von Prof. Dr. rer. nat. H. HEUSER, Universität Karlsruhe

Ziel dieses zweiteiligen Werkes ist es, ausgehend von der axiomatischen Beschreibung der reellen Zahlen den Aussagenbestand der klassischen Analysis möglichst lebendig und faßlich zu entwickeln und von dieser Basis aus weiter vorzudringen bis hin zu den moderneren Begriffen und Sätzen dieser Disziplin, wie z. B. Netzkonvergenz, Banachräume, metrische und topologische Räume, Lebesguesches Integral, die Sätze von Arzelà-Ascoli und Stone-Weierstraß, der Stokessche Satz über die Integration von Differentialformen und die Fixpunktsätze von Banach, Brouwer, Schauder und Kakutani.

Das Buch ist überwiegend „reell". Da aber Naturwissenschaftler und Ingenieure schon sehr frühzeitig komplexe Zahlen benötigen und viele analytische Fragen erst im Komplexen befriedigend geklärt werden können, wurde ein Unterkurs über komplexe Zahlen und Funktionen eingebaut, der bis zu den Cauchyschen Integralsätzen und der Entwickelbarkeit holomorpher Funktionen in Potenzreihen führt. Ein historischer Bericht rundet das Buch ab. Über 1300 Aufgaben sollen dem Leser helfen, die Analysis zum sicheren Besitz (working knowledge) zu machen.

Teil 1: 1980. 644 Seiten mit 128 Bildern und 780 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen. (Mathematische Leitfäden) Kart. DM 48,–

Aus dem Inhalt des ersten Teiles

Mengen, Zahlen und Funktionen: Mengen / Axiomatik der reellen Zahlen / Komplexe Zahlen / Kombinatorik / Metriken / Funktionenräume und -algebren / Lineare Abbildungen / Der Differenzenoperator / Interpolationspolynome / Mengenvergleiche

Zahlenfolgen und unendliche Reihen: Grenzwertbegriff / Prinzipien der Konvergenztheorie / Allgemeine Potenz und Logarithmus / Exponentialprozesse / Häufungswerte / Konvergenz- und Divergenzkriterien

Stetige und differenzierbare Funktionen: Stetige Funktionen / Fixpunkt- und Zwischenwertsätze / Der Umkehrsatz / Grenzwerte von Funktionen / Grenzwerte von Netzen / Doppelreihen / Die Ableitung / Mittelwertsätze / Extremalprobleme / Konvexe Funktionen und Ungleichungen

Taylorscher Satz und Potenzreihen: Mittelwertsatz für höhere Differenzen / Taylorscher Satz und Taylorsche Entwicklung / Reelle und komplexe Potenzreihen / Abelscher Grenzwertsatz / Fundamentalsatz der Algebra / Partialbruchzerlegung / Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Integration: Unbestimmte Integrale / Riemannsches Integral / Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung / Das Cauchysche, Riemannsche und Lebesguesche Integrabilitätskriterium / Integralungleichungen und Mittelwertsätze / Uneigentliche Integrale / Riemann-Stieltjessche Integrale / Funktionen von beschränkter Variation / Die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

Vertauschung von Grenzübergängen: Gleichmäßige Konvergenz / Vertauschung von Grenzübergängen bei Folgen / Gleichstetige Funktionenfamilien und der Satz von Arzelà-Ascoli / Vertauschung von Grenzübergängen bei Netzen / Monotone Konvergenz

Teil 2: 1981. ca. 560 Seiten mit zahlreichen Bildern und Aufgaben. (Mathematische Leitfäden) Kart. ca. DM 48,–

Aus dem Inhalt des zweiten Teiles

Banachräume und Banachalgebren / Lebesguesches Integral und Fourierreihen / Topologische Räume / Differentialrechnung im $\mathbf{R}^p$ */ Wegintegrale / Mehrfache R-Integrale / Differentialformen und Integralsätze / Mehrfache L-Integrale / Die Fixpunktsätze von Brouwer, Schauder und Kakutani / Ein historischer tour d'horizon*

B. G. Teubner Stuttgart