83. Band Heft 1
ausgegeben am 15. 1. 1981

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1981

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 82/1 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 74,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 73 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Gesamtherstellung: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 83, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

J. Elstrodt: Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen

M. Frewer: Felix Bernstein

E. Härtter: Alfred Stöhr 1916–1973

E. Hölder: Lichtensteins wissenschaftliche Wirksamkeit – Zum 100. Geburtstag von Leon Lichtenstein

M. Kracht: Maximilian Pinl in memoriam

O. Krafft: Dual Optimization Problem in Stochastics

E. Kunz; H.-J. Nastoldt: In Memoriam Friedrich Karl Schmidt

H. Rohrbach: Richard Brauer zum Gedächtnis

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des ,,Jahresberichts der Deutschen Mathematiker – Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint. Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N. Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
83 (1981) 1–31
AMS subject classification: 53-02, 53-B20, 53-C20

Konvexität in riemannschen Mannigfaltigkeiten*)

R. Walter, Dortmund

Zu Beginn dieses Jahrhunderts hat Hermann Minkowski [1900] auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Aachen einen Vortrag gehalten mit dem Titel „Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen". Minkowski hat darin auf eine neuartige Weise die Oberfläche konvexer Körper eingeführt und sie zu dem Begriff verallgemeinert, der heute als „gemischter Inhalt" bezeichnet wird. Diese Überlegungen mündeten später in das Herzstück der klassischen Konvexgeometrie, die Brunn-Minkowskische Theorie. Im weiteren Verlauf hat die Konvexität in wachsendem Maße Eingang in die Analysis gefunden und dabei teilgenommen an der allgemeinen Entwicklungstendenz vom Anschauungsraum über n-dimensionale Räume und Funktionenräume hin zu topologischen Vektorräumen. Auf allen diesen Ebenen brachte die Konvexität immer wieder fruchtbare und anschauliche Elemente ein. Zur Orientierung über diese Entwicklung sei z. B. verwiesen auf die Bücher von Bonnesen/Fenchel [1934], Valentine [1968] und Alfsen [1971] sowie die Berichte von Šaškin [1973] und Schneider [1979].

Hier geht es um eine andere Verallgemeinerung der Konvexität, nämlich um den Schritt vom Linearen zum Nichtlinearen im Rahmen der riemannschen Mannigfaltigkeiten. Diese *geodätische Konvexität* hat sich in den letzten Jahren zu einem wichtigen Instrument der Differentialgeometrie entwickelt. Seit den grundlegenden Arbeiten von Bishop/O'Neill [1969] für den Fall nichtpositiver Krümmung und von Gromoll/Meyer [1969] und Cheeger/Gromoll [1972] für den Fall nichtnegativer Krümmung haben Konvexitätsüberlegungen entscheidend zur Lösung interessanter Probleme beigetragen und zwar hauptsächlich bei vollständigen, *nichtkompakten* Räumen, z. B. zu minimalen Untermannigfaltigkeiten (Ii [1972]), zum Satz von Gauß/Bonnet/Chern (Walter [1975.b]), zur Strukturtheorie solcher Räume (Burago [1976], Greene/Wu [1976], [1979], Wu [1979]), zur Analysis subharmonischer Funktionen (Greene/Wu [1974]) und zum globalen Verhalten von Geodätischen (Thorbergsson [1977], [1978], Bangert [1980.a], [1980.c], [1980.d]).

Solche Anwendungen legten es nahe, konvexe Mengen und Funktionen in riemannschen Mannigfaltigkeiten als eigenständige Objekte unter möglichst allgemeinen Bedingungen zu untersuchen. Insbesondere sollte die Tragweite der Resultate nicht durch zusätzliche Regularitätsannahmen eingeschränkt werden. Diese bereits im Euklidischen wesentliche Forderung ist hier ganz entscheidend, da im riemannschen Falle fundamentale Approximationsfragen noch ungelöst sind.

*) Hervorgegangen aus dem Hauptvortrag auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Aachen 1978.

0012–0456/81/01 0001–31 $06.20/0

Der vorliegende Bericht befaßt sich mit dem bislang erfolgten Aufbau einer geodätischen Konvexitätstheorie und einigen wichtigen Anwendungen, entsprechend den Tendenzen, die durch die Arbeiten von Karcher [1968], Bishop/O'Neill [1969], Cheeger/Gromoll [1972], Greene/Wu [1973] und Walter [1974], [1976] angeregt wurden. Auch einige offene Fragen werden erwähnt. Natürlich besitzt man zur Zeit noch kein volles Äquivalent zu der ausgedehnten Konvexitätslehre der reellen Vektorräume. Das ist kein Wunder; denn schon einfache Erscheinungen können sich gänzlich anders darbieten, und manche natürliche Frage hat sich als äußerst hartnäkkig erwiesen (für einige überraschende Phänomene sei auf Abschnitt 2 verwiesen). Andererseits lassen sich gewisse Teile in großer Analogie auf den riemannschen Fall übertragen, wenn auch die Beweise subtiler ausfallen.

Unser Hauptinteresse gilt allgemeinen konvexen Objekten in endlich dimensionalen, randlosen riemannschen Mannigfaltigkeiten unter dem Gesichtspunkt ihrer reellen Struktur. Komplex-analytische Aspekte, obwohl von erheblicher Bedeutung, mußten aus Raumgründen ausgeklammert bleiben. Dasselbe gilt von speziellen Konvexitätsfragen bei konstanter Krümmung und von möglichen Erweiterungen auf allgemeinere als riemannsche Strukturen. Zur Konvexitätstheorie in metrischen Räumen sei auf die Werke von Busemann [1955] und Rinow [1961] hingewiesen.

Die Arbeit ist in folgende Abschnitte eingeteilt:

Den Herren V. Bangert (Freiburg) und N. Kleinjohann (Dortmund) möchte ich für ihre Hilfe und Ratschläge beim Abschluß des Manuskriptes danken.

1 Grundbegriffe

In der ganzen Arbeit bezeichnet $(M, \langle , \rangle)$ eine *riemannsche Mannigfaltigkeit* ohne Rand der Dimension $m \geqslant 2$, die von der Differentiationsklasse $\mathscr{C}^\infty$ sowie Hausdorffsch, zusammenhängend und parakompakt angenommen sei. Statt $\mathscr{C}^\infty$ wird synonym das Wort *glatt* gebraucht. Vollständigkeit von M wird nicht generell vorausgesetzt. Im folgenden wird an einige weitere Grundbegriffe der riemannschen Geometrie erinnert; für Einzelheiten sei auf Gromoll/Klingenberg/Meyer [1975] verwiesen.

Die Bezeichnungen für den *Tangentialraum* von M in $p \in M$, das *Tangentenbündel* und das *Einheitstangentenbündel* seien T_pM, TM und T^1M. Eine *Kurve* in M wird als stetige, stückweise stetig differenzierbare Abbildung c eines Intervalles $I \subseteqq \mathbf{R}$ in M aufgefaßt; ist $I = [a, b]$ kompakt, so heißt c eine *Kurve von* c(a) *nach* c(b). Die *Distanz* d(p, q) zweier Punkte $p, q \in M$ ist das Infimum der Bogenlängen aller Kurven von p nach q; sie macht M zu einem metrischen Raum. Eine *Geodätische* $c: I \to M$ wird hier stets als *normal* angenommen, d. h. nach der Bogenlänge parametrisiert; ist $I = [a, b]$ kompakt, so heißt c auch *geodätisches Segment.* Eine Geodätische $c: I \to M$ wird *Kürzeste* genannt, wenn für alle Teilintervalle $[\alpha, \beta] \subseteqq I$ gilt $d(c(\alpha), c(\beta)) = \beta - \alpha$; ist in diesem Fall $I = [0, \infty[$ bzw. $I = \mathbf{R}$, so heißt c *geodätischer Strahl* bzw. *geodätische Linie.* Gibt es genau eine Kürzeste von p nach q, so wird ihre (als orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand aufzufassende) Bildmenge durch $[pq]$ bezeichnet (ferner sei $[pq[\, := [pq] \setminus \{q\}$, usw.). In diesem Fall bezeichnet $\Phi(p, q)$ den Anfangsvektor der Kürzesten von p nach q in p der Länge $d(p, q)$. Die Symbole ∇ und exp bezeichnen den *Levi-Civita-Zusammenhang* und die zugehörige *Exponentialabbildung* von M. Für eine glatte Funktion $f: M \to \mathbf{R}$ ist grad f das *Gradientenvektorfeld* und $\nabla^2 f$ die *Hesseform.* Mit K wird die *Schnittkrümmung* von M bezeichnet.

Für eine Teilmenge A von M haben die Symbole $\mathring{A}$, $\overline{A}$, ∂A die übliche Bedeutung des *Inneren,* der *abgeschlossenen Hülle* und des *Randes* im Sinne der mengentheoretischen Topologie. Mit $\subseteqq$ ($\subset$) wird die (*echte*) *Inklusion* von Mengen bezeichnet. Die (*äußere*) *Distanzfunktion* $\rho^A: M \to \mathbf{R}$ der Menge $A \neq \emptyset$ ist definiert durch $\rho^A(q) := \inf\{d(p, q) \mid p \in A\}$. Für $q \notin A$ gilt $\rho^A(q) = \rho^{\partial A}(q)$. Gibt es zu einem $q \in M$ einen Punkt $q^* \in \overline{A}$ mit $d(q, q^*) = \rho^A(q)$, so heißt q^* ein *Fußpunkt* von q in $\overline{A}$ und jede Kürzeste von q^* nach q ein *Lot* von q auf $\overline{A}$ (oder von $\overline{A}$ in q^*). Die in allen Punkten $q \in M$ mit eindeutig existierendem Fußpunkt q^* definierte Abbildung $q \mapsto q^*$ wird die *metrische Projektion* von A genannt und im folgenden durch ξ^A bezeichnet. Für $A \neq M$ spielt auch die *innere Distanzfunktion* $\rho_A := \rho^{M \setminus A}$ eine Rolle; für $p \in A$ gilt $\rho_A(p) = \rho^{\partial A}(p)$. Die beiden Distanzfunktionen lassen sich zu der *signierten Distanzfunktion* $\rho^*_A := \rho^A - \rho_A$ zusammenfügen. Für jedes $r \geqslant 0$ besteht die *äußere* (bzw. *innere*) *Parallelmenge* A^r (bzw. A_r) von A aus allen $q \in M$ mit $\rho^A(q) \leqslant r$ [bzw. $\rho_A(q) \geqslant r$]. Da ρ^A lipschitzstetig (mit der Konstante 1) ist, folgt nach einem Satz von Rademacher (vgl. Federer [1969], p. 216), daß ρ^A fast überall in M differenzierbar ist. Ist M vollständig, so gilt (Kleinjohann [1979], [1980.a]): Zu jedem Differenzierbarkeitspunkt $q \in M \setminus \overline{A}$ von ρ^A (also fast überall in $M \setminus \overline{A}$) existiert genau ein Fußpunkt q^* und genau ein Lot $[q^* q]$ von q auf $\overline{A}$, und es ist:

(1.1) $(\operatorname{grad} \rho^A)_q = -\Phi(q, \xi^A(q))/\rho^A(q)$.

Bei der Definition der konvexen Grundbegriffe in M treten die Geodätischen an die Stelle der Geraden. Eine *Funktion* $f: M \to \mathbf{R}$ heißt (*geodätisch*) *konvex,* falls für jede Geodätische $c: I \to M$ die Funktion $f \circ c: I \to \mathbf{R}$ gewöhnlich konvex ist. Ist $-f$ konvex, so heißt f selbst *konkav.* Bei *Mengen* spaltet die Konvexität in mehrere Begriffe auf, da Verbindungsgeodätische i. a. weder eindeutig bestimmt noch Kürzeste sind. Eine Teilmenge $C \subseteqq M$ heißt *schwach konvex,* wenn für alle $p, q \in C$ eine Kürzeste von p nach q existiert, die ganz in C liegt. Wenn darüberhinaus eine solche Kürzeste stets eindeutig *in* C ist, so heißt C *konvex.* Die Menge C ist *stark konvex,* wenn für alle $p, q \in C$ genau eine Kürzeste von p nach q existiert und diese in C liegt. Die Menge C ist *total konvex,* wenn jede Geodätische $c: [a, b] \to M$, deren Endpunkte $c(a)$, $c(b)$ in C liegen, ganz in C enthalten ist. Schließlich nennt man C *lokal konvex,* wenn zu jedem $p \in \overline{C}$ eine Umgebung U von p existiert, so daß $C \cap U$ stark konvex ist. Mit C ist auch $\overline{C}$ lokal konvex. Ist C kompakt und zusammenhängend, so sprechen wir von einem *Körper* (mit dem entsprechenden Zusatz,

z. B. *lokal konvex*). Es sei **K** die Menge aller lokal konvexen Körper C mit $\emptyset \subset \mathring{C} \subset M$ und $\mathbf{K}_0 := \{C \in \mathbf{K} \mid \mathring{C} \neq \emptyset\}$.

Besonders wichtig in dieser Begriffsskala sind die total konvexen Teilmengen, da sie häufig den globalen Typ von M widerspiegeln, sowie die lokal konvexen Mengen, da diese am wenigsten eingeschränkt sind. Man sieht leicht, daß das folgende Implikationsschema besteht (ausgezogene Pfeile):

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{stark konvex} \Rightarrow \text{konvex} \Rightarrow & \text{schwach konvex} & \searrow & \\ (1.2) & & \Uparrow & & \text{lokal konvex.} \\ & & \text{total konvex} & \nearrow & \end{array}$$

Weitere Relationen gibt es i. a. nicht, wie einfache Beispiele zeigen. Ist M vollständig, so impliziert die totale Konvexität die schwache Konvexität (gestrichelter Pfeil). Ist M vollständig und existiert zwischen je zwei Punkten von M genau eine Geodätische, so fallen die ersten vier und für abgeschlossene und zusammenhängende Mengen $C \subseteq M$ sogar alle fünf Konvexitätsbegriffe zusammen, so daß gegebenenfalls die Zusätze zum Wort „konvex" entfallen können. Die zuletzt genannten Voraussetzungen an M sind z. B. erfüllt, wenn M eine *Hadamard-Mannigfaltigkeit* ist, d. h. eine vollständige, einfach zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K \leqslant 0$ (einfachstes Beispiel: $\mathbf{R}^m$).

Eine Menge $A \subseteq M$ heiße *lokal konkav*, wenn $M \setminus A$ lokal konvex ist. Einen *relativen* Konvexitätsbegriff werden wir in folgender Form verwenden: Sei C abgeschlossen und D eine weitere Teilmenge von M mit $C \subseteq \mathring{D}$. Dann heißt C *total konvex in* D, wenn jede Geodätische $c\colon [a, b] \to D$ mit Endpunkten $c(a), c(b) \in C$ ganz in C enthalten ist. Wiederum ist dann C lokal konvex.

Die Bezeichnung für die *offenen* und *abgeschlossenen metrischen Bälle* mit *Zentrum* $p \in M$ und *Radius* $r \geqslant 0$ wird so gewählt: $B(p, r) := \{q \in M \mid d(p, q) < r\}$, $\bar{B}(p, r) := \{q \in M \mid d(p, q) \leqslant r\}$. Normen von euklidischen Räumen (auch von den Tangentialräumen von M) werden durch $|\ |$ bezeichnet, ihre Sphären durch $\mathbf{S}^m(r) := \{u \mid |u| = r\}$, $r > 0$, bzw. durch $\mathbf{S}^m$ für $r = 1$. Wird $\mathbf{S}^m(r)$ als riemannsche Mannigfaltigkeit aufgefaßt, so stets in der kanonischen Weise mit der konstanten Schnittkrümmung $K = r^{-2}$.

Zu jedem $p \in M$ gibt es eine größte Zahl $r(p) > 0$, den *Konvexitätsradius*, so daß für $0 < r \leqslant r(p)$ jeder offene Ball in $B(p, r)$ stark konvex und jede Geodätische in $B(p, r)$ Kürzeste ist. Historisch gesehen, stellten solche Konvexitätseigenschaften kleiner metrischer Bälle die ersten Beiträge zur geodätischen Konvexität dar (Whitehead [1932]). Weitere Verschärfungen hat Nijenhuis [1959] angegeben.

2 Einige Phänomene

Eine konvexe Funktion $f\colon M \to \mathbf{R}$ ist notwendig stetig. Weitergehende Differenzierbarkeitseigenschaften von f, die allein aus der Konvexität folgen, werden bei (5.8) besprochen. Da die Menge der Nichtdifferenzierbarkeitspunkte von f dicht in M sein kann, ist es für viele Zwecke erwünscht, f durch konvexe Funktionen mit besseren Regularitätseigenschaften zu approximieren, insbesondere durch konvexe $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen. Die Möglichkeit hierzu ist im euklidischen Raum $M = \mathbf{R}^m$ wohlbekannt und im riemannschen Falle lokal gegeben. Dagegen ist das folgende globale Approximationsproblem eine der großen offenen Fragen:

(2.1) **Problem** *Gibt es zu jeder konvexen Funktion* $f: M \to \mathbf{R}$ *eine Folge konvexer* $\mathscr{C}^\infty$*-Funktionen* $f_n: M \to \mathbf{R}$*, die lokal gleichmäßig gegen* f *konvergiert?*

Für Teilantworten und das ebenfalls ungeklärte Approximationsproblem bei konvexen Mengen sei auf Abschnitt 4 verwiesen.

Im folgenden schildern wir einige Erscheinungen, bei denen die Abweichung vom Euklidischen sich nicht nur als ein offenes Problem darstellt, sondern drastisch sichtbar wird.

Ist $f: M \to \mathbf{R}$ eine konvexe Funktion, so folgt leicht, daß jede *Subniveaumenge* $S_f(\alpha) := f^{-1}(\,]-\infty, \alpha])$, $\alpha \in \mathbf{R}$, abgeschlossen und total konvex ist. Im Euklidischen kann umgekehrt jede abgeschlossene konvexe Menge C als Subniveaumenge von kanonisch bestimmten konvexen Funktionen aufgefaßt werden; eine solche Funktion ist etwa die äußere Distanzfunktion ρ^C. Konvexe Funktionen und konvexe Mengen des euklidischen Raumes sind also im wesentlichen die gleichen Objekte. Im riemannschen Falle braucht die Distanzfunktion ρ^C nicht einmal in einer Umgebung von C konvex zu sein, wie man an geodätischen Dreiecken auf $\mathbf{S}^2$ erkennt.

In manchen vollständigen Mannigfaltigkeiten gibt es sogar total konvexe Körper, die auf keine Weise als Subniveaumenge einer konvexen Funktion auftreten. Es sei z. B. M die Rotationsfläche, die durch Drehung der Profilkurve L von Figur (2.4) um die y-Achse entsteht. Für eine Teilmenge I der y-Achse bezeichne M_I den Teil von M mit den y-Koordinaten aus I. Dann ist die punktierte Menge $C := M_{[0,a]}$ total konvex: Aus der Differentialgleichung der Geodätischen (Satz von Clairaut) kann man leicht ablesen, daß jede Geodätische, die aus der Menge C heraustritt, diese auf immer verläßt. Wäre C Subniveaumenge einer konvexen Funktion $f: M \to \mathbf{R}$, so könnten wir das *Mittel* von f über die Gruppe G der Drehungen D_θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, von M um die y-Achse bilden:

$$\text{(2.2)} \quad \tilde{f}(p) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(D_\theta p)\, d\theta.$$

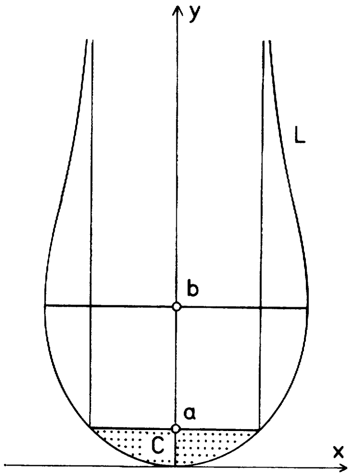
Die Funktion $\tilde{f}: M \to \mathbf{R}$ ist dann wieder konvex. Weiter strebt $\tilde{f}$ auf jedem Meridian außerhalb C streng monoton wachsend gegen ∞, und mit $\tilde{f}$ sind auch die Subniveaumengen von $\tilde{f}$ unter G invariant. Also gibt es unter diesen Subniveaumengen solche, deren oberer Rand ein Breitenkreis oberhalb der dicksten Stelle b ist. Diese Mengen sind aber längs dem Breitenkreis nicht lokal konvex, sondern konkav*). Total konvexe, abgeschlossene Mengen sind also im riemannschen Falle allgemeinere Objekte als die Subniveaumengen konvexer Funktionen. Lokal ist diese Frage offen:

(2.3) **Problem** *Sei* $C = \overline{C}$ *lokal konvex und zusammenhängend mit* $\mathring{C} \neq \emptyset$*. Gibt es zu jedem* $p \in \partial C$ *eine offene Umgebung* U *von* p *und eine konvexe Funktion* $f: U \to \mathbf{R}$*, so daß* $C \cap U = \{q \in U | f(q) \leqslant 0\}$*?*

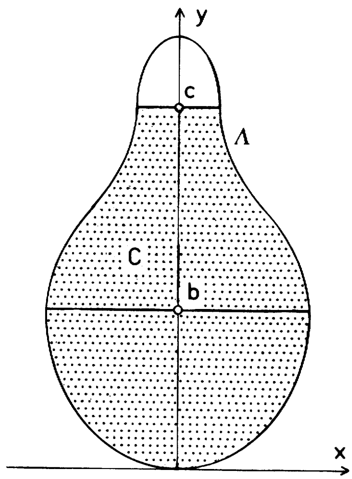
Die Überraschungen gehen noch weiter: Die bei Figur (2.4) betrachtete Rotationsfläche M enthält zwar einen total konvexen Körper C, kann aber nicht durch

*) Ist die Profilkurve durch $x = h(y)$ (h glatt) gegeben, so ist $M_{[\alpha,\beta]}$ längs $M_{\{\alpha\}}$ genau dann lokal konvex, wenn $h'(\alpha) \leqslant 0$.

solche Körper ausgeschöpft werden. Tatsächlich existiert hier eine *maximale lokal konvexe* und zusammenhängende Menge $D \subset M$, nämlich $D := M_{[0,b]}$ d. h. jede lokal konvexe und zusammenhängende Menge C' mit $D \subseteqq C' \subset M$ stimmt mit D überein. Man kann dies mittels der Randstruktur (Abschnitt 3) einsehen: Ohne Einschränkung kann C' abgeschlossen vorausgesetzt werden. Wir betrachten dann eine Stelle $q \in \partial C'$ mit minimaler y-Koordinate $\eta \geqslant b$. Es gilt $M_{[0,\eta]} \subseteqq C'$, und folglich ist der Stüztkegel C'_q die untere Halbebene zur Gerade $T_q M_{\{\eta\}}$ in $T_q M$. Daher existiert



(2.4) Figur



(2.5) Figur

eine Umgebung U von q in M, so daß $U \cap C' = U \cap M_{[0,\eta]}$. Da $U \cap M_{[0,\eta]}$ längs $U \cap M_{\{\eta\}}$ nur lokal konvex ist, wenn $\eta = b$ gilt, ist der Durchschnitt $M_{\{b\}} \cap \partial C'$ nicht leer und offen in $M_{\{b\}}$. Da er andererseits abgeschlossen in $M_{\{b\}}$ ist, folgt $M_{\{b\}} \subseteqq \partial C'$ und damit wegen des Zusammenhanges von C' schließlich $C' = D$. Insbesondere braucht es in einer vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit M keine beliebig großen lokal konvexen Körper zu geben, selbst wenn M diffeomorph zum $\mathbf{R}^m$ ist und die Krümmung im Unendlichen gegen Null konvergiert.

Als generelle Tatsachen über die Nichtexistenz konvexer Objekte seien hier bereits erwähnt:

(2.6) Satz *Auf einer vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit* M *mit endlichem Volumen existiert keine nicht konstante konvexe Funktion.*

(2.7) Satz *In einer kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit* M *existiert kein total konvexer Körper, der von* M *und* $\emptyset$ *verschieden ist.*

Satz (2.6) wurde von Yau [1974] mittels dem geodätischen Fluß auf $T^1 M$ bewiesen. Satz (2.7) folgt aus der Homotopieäquivalenz total konvexer Körper mit M (Bangert [1977], [1979.b]); vgl. (6.3).

Ist C ein konvexer Körper des euklidischen Raumes, so gibt es in beliebiger Nähe von C weitere von C verschiedene konvexe Körper, z. B. Parallelmengen. Die Nähe ist dabei im Sinne der Hausdorff-Metrik zu verstehen [Details hierzu in (4.6)].

Demgegenüber existieren im riemannschen Falle *isolierte* lokal konvexe Körper. Ein einfaches Beispiel kann auf folgende Weise konstruiert werden: Es sei M die kompakte Rotationsfläche, die durch Drehung der Kurve Λ von Figur (2.5) um die y-Achse entsteht. Die punktierte Menge $C := M_{[0,c]}$ ist ein lokal konvexer Körper, der in folgendem Sinne isoliert ist: Ist C' ein lokal konvexer Körper mit $M_{[0,b]} \subset C' \subset M$, so folgt $C' = C$. Der Nachweis kann mit den gleichen Argumenten wie bei Figur (2.4) geführt werden. Hieran sieht man auch, daß weder die innere Distanzfunktion ρ_C in $\mathring{C}$ konkav noch die äußere Distanzfunktion ρ^C in $M \setminus \overline{C}$ konvex zu sein braucht, entgegen der euklidischen Situation. Allerdings verbessert sich dieses Verhalten beim Übergang zu anderen Krümmungsverhältnissen; vgl. die Sätze (5.9) und (7.2).

Eine der ersten Beobachtungen Minkowskis war die *Monotonie der Oberfläche:* Sind C, D konvexe Körper des euklidischen Raumes mit $C \subseteqq D$, so gilt für ihre Randvolumina $\nu(C) \leqslant \nu(D)$. Für lokal konvexe Körper in riemannschen Mannigfaltigkeiten wird dies selbst in sehr einfachen Situationen falsch: Es sei D eine (drehsymmetrische) Schale um den Scheitel eines Rotationsparaboloides und C eine Hälfte von D, ausgeschnitten durch eine Meridianparabel. Dann gilt $C \subset D$, aber bei genügend großer Höhe von D wird wegen des hinzukommenden Parabelbogens $\nu(C) > \nu(D)$. Die Suche nach geeigneten Bedingungen für die Monotonie stellte sich als überraschend schwierig heraus. Neuerdings gab Bangert [1979.b] eine interessante Lösung (vgl. Abschnitt 6).

Schließlich sei auf den Satz von Helly (vgl. Valentine [1968], Satz 6.1) aus der kombinatorischen Konvexitätstheorie hingewiesen: Im euklidischen $\mathbf{R}^m$ besagt dieser, daß der Durchschnitt einer Familie konvexer Körper, von denen je $m + 1$ einen nichtleeren Durchschnitt besitzen, nichtleer ist. Selbst für stark konvexe Körper auf der Sphäre $\mathbf{S}^m$ ist dieser Satz falsch, wie man an den $m + 2$ Kugelkappen sieht, die aus $\mathbf{S}^m$ von den Seiten eines $\mathbf{S}^m$ einbeschriebenen regulären Simplexes ausgeschnitten werden. In diesem Zusammenhang spielt allerdings die Sphäre unter den möglichen topologischen Typen eine Ausnahmerolle (vgl. Debrunner [1970] und Kleinjohann [1979], [1980.c]).

3 Fundamentale Eigenschaften und Charakterisierungen

Konvexe Objekte besitzen zunächst Verbindbarkeits- und Stützeigenschaften, durch die sie sich umgekehrt kennzeichnen lassen. Allerdings entfällt im riemannschen Falle alles, was lineare Stützgebilde in der Mannigfaltigkeit M selbst erfordert, da i. a. weder „Hyperebenen“ noch „lineare Funktionale“ existieren. An ihre Stelle treten lineare Objekte in den Tangentialräumen oder nichtlineare Objekte in M.

Wir besprechen zunächst einige Eigenschaften einer lokal konvexen Menge C in M, die als *zusammenhängend* vorausgesetzt wird. Das *relative Innere* int (C) von C ist definiert als die Vereinigung aller in C enthaltenen Untermannigfaltigkeiten von M maximaler Dimension, und der *Relativrand* von C ist $\mathrm{bd}\,(C) := \overline{C} \setminus \mathrm{int}\,(C)$. Das relative Innere ist eine zusammenhängende *total geodätische* (insbesondere glatte) Untermannigfaltigkeit von M, deren Dimension die *Dimension* von C genannt und mit dim C bezeichnet wird. Es gilt $\mathrm{int}\,(C) = \mathrm{int}\,(\overline{C})$ und $\overline{C} = \overline{\mathrm{int}\,(C)}$. Ist der Relativrand bd (C) nicht leer, so ist er eine (i. a. unzusammenhängende) topologische Untermannigfaltigkeit von M der Dimension dim C − 1. Bezüglich feinerer Eigenschaften von bd (C) sei auf (5.7) verwiesen. Für $p \in \overline{C}$ ist der *Konvexitätsradius* $r_C(p)$ von C in p definiert als das Supremum aller $\epsilon \in]0, r(p)[$, für die $C \cap \overline{B}(p, \epsilon)$ stark konvex ist. Wie beim gewöhnlichen Konvexitätsradius beweist man die Stetigkeit von r_C als Abbildung von $\overline{C}$ in $\mathbf{R} \cup \infty$. Es gilt $r_{\overline{C}}(p) \geqslant r_C(p)$. Der *Stützkegel* C_p von C in p besteht aus den Anfangsvektoren aller Kürzesten [pq] mit $p \neq q \in \operatorname{int}(C) \cap B(p, r_C(p))$ und ihren positiven Vielfachen; er ändert sich nicht beim Übergang von C zu $\overline{C}$. Bezeichnet T_pC für $p \in \operatorname{int}(C)$ den Tangentialraum von int (C), so gilt $T_pC = C_p \cup 0$, und man kann die Zuordnung $p \mapsto T_pC$ stetig auf bd (C) fortsetzen, indem man T_qC für $q \in \operatorname{bd}(C)$ als die lineare Hülle von C_q definiert. Dann ist C_q offen und gewöhnlich konvex in T_qC. Eine Stützebene von C_q im Nullpunkt von T_qC heißt *Stützebene* von C in $q \in \operatorname{bd}(C)$. Die Menge aller Stützebenen von C in allen Punkten von bd (C) ist abgeschlossen im Bündelraum aller Ebenen der Dimension dim C − 1 über M. Zu $p \in C$ ist der *äußere Normalenkegel* C_p^* von C in p definiert als Dualkegel zu C_p, d. h. $C_p^* = \{u \in T_pM \mid \langle u, v\rangle \leqslant 0$ für all $v \in C_p\}$. Die Elemente $u \neq 0$ von C_p^* sind die *äußeren Normalenvektoren* von C in p. Genau für $p \in \partial C$ ist $C_p^* \neq 0$. Die meisten dieser Tatsachen sind bei Cheeger/Gromoll [1972] bewiesen.

Ist bd (C) $\neq \emptyset$, so kann C mittels Projektion von innen über jeden Punkt von bd (C) hinaus lokal fortgesetzt werden (Walter [1976]), und Bangert [1977] hat gezeigt, wie solche lokalen Fortsetzungen global zu einer Untermannigfaltigkeit N der Dimension dim C verschmolzen werden können, die $\overline{C}$ enthält und zusammenhängend, aber außerhalb von int (C) i. a. nicht totalgeodätisch ist. Da C auch in N lokal konvex ist, erlaubt diese Aussage häufig eine Beschränkung auf den Fall dim C = m; in diesem gilt int (C) = $\overset{\circ}{C}$ und bd (C) = ∂ C.

Nun sei A eine beliebige Teilmenge von M und $p \in \partial A$. Eine Hyperebene $H \subseteqq T_pM$ heißt *Stützelement* von A in p, wenn ein ϵ mit $0 < \epsilon < r(p)$ existiert, so daß die Anfangsvektoren aller Kürzesten [pq] mit $p \neq q \in A \cap B(p, \epsilon)$ in einem der durch H gegebenen *abgeschlossenen* Halbräume von T_pM liegen. Das Supremum dieser ϵ heißt dann der *Radius* des Stützelementes. Ist C lokal konvex in M, so ist jede Stützebene von C in einem Stützelement von C enthalten, im Falle dim C = m fallen die beiden Begriffe zusammen. Eine mögliche Charakterisierung der lokalen Konvexität lautet:

(3.1) Satz *Eine offene und zusammenhängende Teilmenge* U *von* M *ist dann und nur dann lokal konvex, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *In allen Punkten* $q \in \partial U$ *existiert ein Stützelement von* U.

(ii) *Zu jedem* $q \in \partial U$ *existiert ein* ζ *mit* $0 < \zeta < r(q)$, *so daß* $U \cap B(q, \zeta)$ *zusammenhängend ist.*

Im euklidischen Fall kann der Teil (ii) weggelassen werden, und die Aussage geht dann in den Satz von Tietze über, vgl. Valentine [1968], Satz 4.10. Allgemein ist Teil (ii) nicht entbehrlich; das sieht man am Beispiel eines geodätischen Dreiecks auf einem Zylinder mit einer Doppelspitze. Die Notwendigkeit von (i) und (ii) ist nach dem Voranstehenden klar. Zum Beweis des Hinreichens überlegt man, daß der Durchschnitt $U \cap B(q, \zeta)$ in jedem seiner Randpunkte ein Stützelement besitzt und leitet daraus ab, daß die Punkte dieses Durchschnitts, deren Verbindungskürzeste mit einem festen Punkt diesen Durchschnitt nicht verlassen, einen zugleich offenen und abgeschlossenen Teil bilden. Wird $U \cap B(q, \zeta)$ nicht als zusammenhängend vorausgesetzt, so folgt aus (i) immer noch die starke Konvexität jeder Zusammenhangskomponente von $U \cap B(q, \zeta)$ und damit ihre Struktur als Mannigfaltigkeit mit Rand (5.7). Daraus folgt (Alexander [1978]), daß die obige Kennzeichnung richtig bleibt, wenn anstelle von (ii) gefordert wird, daß ∂U eine *topologische* Hyperfläche von M ist. Wird statt U eine abgeschlossene, zusammenhängende Teilmenge A mit $\mathring{A} \neq \emptyset$ betrachtet, so kann die Bedingung (ii) ersetzt werden durch die Forderung, daß die Radien der nach (i) existierenden Stützelemente lokal von Null weg beschränkt sind (Bangert [1977], [1978.b]). Weitere lokale Kennzeichnungen durch Stützeigenschaften sind von Burago/Zalgaller [1974] aufgestellt worden. Im vollständigen Falle lassen sich die obigen Argumente für die Konvexität von $U \cap B(q, \zeta)$ globalisieren (Karcher [1968]). Auf diesem Wege erhält man:

(3.2) **Satz** *Eine offene und zusammenhängende Teilmenge* U *einer vollständigen Mannigfaltigkeit* M *ist dann und nur dann konvex, wenn in allen Randpunkten von* U *ein Stützelement von* U *existiert und* U *seinen Schnittort nicht trifft.*

Eine solche Menge U liegt samt ihrem Rand ∂U ganz im Definitionsgebiet eines geodätischen Polarkoordinatensystems um einem beliebigen Innenpunkt von U, und ist der Abschluß $\bar{U}$ kompakt, so erweist er sich in naheliegender Weise als homöomorph zum m-dimensionalen abgeschlossenen Einheitsball. Analoge Untersuchungen für schwach und stark konvexe Mengen wurden von Alexander [1978] durchgeführt.

Die Konvexität einer Funktion $f: M \to \mathbf{R}$ läßt sich auch im riemannschen Falle leicht auf die Konvexität von Mengen zurückführen. Dazu betrachtet man den *Epigraph* $E_f := \{(p, t) \in M \times \mathbf{R} \mid f(p) \leqslant t\}$. Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn der Epigraph E_f total konvex im riemannschen Produkt $M \times \mathbf{R}$ ist (Udriste [1977]).

An die Stelle des Satzes von Bruckner (vgl. Valentine [1968], Satz 10.4), der gewöhnlich konvexe Funktionen durch lineare Stützfunktionale charakterisiert, kann folgende Aussage treten:

(3.3) **Satz** *Eine Funktion* $f: M \to \mathbf{R}$ *ist konvex genau dann, wenn* f *stetig ist und wenn zu jedem* $p \in M$ *eine offene Umgebung* U *von* p *und eine* $\mathscr{C}^\infty$*-Funktion* $h: U \to \mathbf{R}$ *existieren, so daß gilt:*

(a) $h(q) \leqslant f(q)$ *für alle* $q \in U$;
(b) $h(p) = f(p)$;
(c) $(\nabla^2 h)_p \geqslant 0$.

Die Bedingung (c) drückt die positive Semidefinitheit der Hesseform von h im festen Punkt p aus. Im linearen Fall kann (c) durch die Linearität von h ersetzt werden. Den Nachweis von (3.3) überlegt man etwa so: Ist f konvex vorausgesetzt, so ist f von selbst stetig (expliziter Beweis bei Bangert [1977], [1979.a]), und die Existenz von U und h folgt aus der Existenz eines Stützelementes des Epigraphs E_f im Punkt $(p, f(p))$, da dieses bijektiv auf T_pM projizierbar ist. Wird umgekehrt die Stetigkeit von f und die Existenz von U und h vorausgesetzt, so kann die Konvexität von f aus dem entsprechenden Satz für gewöhnlich konvexe Funktionen einer Veränderlichen geschlossen werden.

Eine abgeschlossene und zusammenhängende lokal konvexe Menge C des euklidischen Raumes ist nach Tietze und Nakajima konvex; vgl. Valentine [1968], Satz 4.4. Im riemannschen Falle braucht eine solche Menge C keine der anderen Konvexitätseigenschaften von Abschnitt 1 zu besitzen. Jedoch kann man zu je zwei Punkten p, q von C mit dem Verfahren der Minimalfolge eine Geodätische von p nach q in C konstruieren, vorausgesetzt M ist vollständig oder C ist kompakt. Die Länge dieser Geodätischen ist dann gleich dem Wert der *inneren Metrik* $d_C(p, q)$, der definiert ist als Infinum der Bogenlängen aller Kurven *in* C von p nach q. Genauso kann man in jeder Homotopieklasse von Kurven in C von p nach q eine Geodätische aussondern. Solche Verfahren wurden von Thorbergsson [1977], [1978] benutzt, um auf jeder nichtzusammenziehbaren vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit mit $K \geqslant 0$ außerhalb einer kompakten Teilmenge eine geschlossene Geodätische nachzuweisen. Umgekehr ist die Existenz „relativer" Kürzester allein noch nicht hinreichend für die lokale Konvexität. Insgesamt ergibt sich (Bangert [1977], [1978.b]):

(3.4) Satz *Eine abgeschlossene und zusammenhängende Teilmenge* A *einer vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit* M *ist dann und nur dann lokal konvex, wenn sie lokal zusammenhänged ist und zu je zwei Punkten* $p, q \in A$ *eine Geodätische von* M *in* A *von* p *nach* q *der Länge* $d_A(p, q)$ *existiert.*

Der Rand einer lokal konvexen Menge $C \neq M$ mit $\dim C = m$ ist eine abgeschlossene Hyperfläche, die für sich genommen ebenfalls Stützelemente besitzt, nämlich dieselben wie C. Eine wichtige Frage ist: Gegeben eine abgeschlossene Hyperfläche P von M, aus welchen Eigenschaften von P *allein* folgt, daß P Rand einer lokal konvexen Menge ist? Für $M = \mathbf{R}^m$ hat Hadamard hierauf im Jahre 1897 eine erste Antwort gegeben; vgl. Wu [1974] für historische Kommentare über solche *Hadamard-Sätze* im euklidischen Fall. Der folgende Hadamard-Satz für Hadamard-Mannigfaltigkeiten wurde von Alexander [1977] aufgestellt:

(3.5) Satz *Sei* M *eine Hadamard-Mannigfaltigkeit (vollständig, einfach zusammenhängend und* $K \leqslant 0$*), und sei* $x: Q \to M$ *eine glatte Hyperflächenimmersion einer kompakten zusammenhängenden orientierbaren Mannigfaltigkeit* Q *der Dimension* $m - 1 \geqslant 2$ *und* N *ein stetiges Normaleneinheitsvektorfeld längs* x. *Kann* N *so gewählt werden, daß die zweite Fundamentalform* Z *von* x *bezüglich* N *positiv semidefinit wird, dann ist* x *eine Einbettung auf den Rand eines konvexen Körpers der Dimension* m *in* M.

Eine lokale Variante dieses Satzes für Hyperflächen $P \subset M$ der Klasse $\mathscr{C}^4$ ohne Krümmungsannahmen über M wurde von Bishop [1974] angegeben. Aber selbst die lokale Situation ist heikel; bislang ist es nicht gelungen, die Regularitätsannahmen deutlich abzuschwächen. Die Hauptschwierigkeit bei Satz (3.5) ist die Injektivität von x. Ihr Nachweis beruht auf der Konstruktion einer „Gaußabbildung γ auf einen endlichen Himmel": Es sei B ein metrischer Ball in M, der $x(Q)$ enthält, und zu jedem $q \in Q$ sei $\gamma(q)$ der Schnittpunkt des Strahles $t \mapsto \exp t\,N(q)$ mit ∂B. Dann ist γ wegen des Fehlens konjugierter Punkte in M ein lokaler und wegen der

Diffeomorphie von ∂B und $\mathbf{S}^{m-1}$ ein globaler Diffeomorphismus. Wäre x nicht injektiv, so führte die Betrachtung derjenigen Stellen $q \in M$, für welche die genannten Strahlen das Bild x(Q) in *maximaler* Entfernung schneiden, zu einem Widerspruch zur Injektivität von γ. Dabei hat man o. g. lokale Variante einzubringen. Der Jordan/Brouwersche Trennungssatz liefert schließlich den gewünschten konvexen Körper.

Der Satz (3.5) gilt in dieser Form nicht bei beliebigem Krümmungsvorzeichen. Wie man ihn geeignet abändern kann, scheint offen zu sein. Im Hinblick auf die weitergehenden Resultate des euklidischen Falles wären solche Verallgemeinerungen sehr interessant.

Eine große Rolle in der Theorie der reellen normierten Vektorräume spielt der Zusammenhang zwischen konvexen Mengen und den sog. *Tschebyscheff-Mengen*; das sind Mengen, für die die metrische Projektion überall definiert ist. Im euklidischen Fall koinzidieren die beiden Mengenklassen (Satz von Bunt und Motzkin). Bereits der Hilbertraumfall und erst recht der Banachraumfall ist offenes Terrain mit erheblicher Bedeutung für die Approximationstheorie; vgl. den zusammenfassenden Artikel von Vlasov [1973]. Im riemannschen Falle ist neben der Eindeutigkeit der Fußpunkte auch die der Lote von Bedeutung: Eine Tschebyscheff-Menge $A \subseteqq M$ sei *einfach* genannt, wenn zu jedem Punkt $q \in M$ genau eine Kürzeste vom Fußpunkt $\xi^A(q)$ nach q existiert. Es besteht hier eine starke Abhängigkeit vom Krümmungsvorzeichen. Bishop/O'Neill [1969] zeigen einerseits:

(3.6) Satz *Eine total konvexe abgeschlossene Teilmenge* A *einer vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit* M *mit* $K \leqslant 0$ *ist stets einfache Tschebyscheff-Menge.*

Andererseits hat Kleinjohann [1979], [1980.b] mit Hilfe der Grundkonstruktion von Cheeger/Gromoll (7.3) den folgenden Satz erhalten:

(3.7) Satz *Eine abgeschlossene einfache Tschebyscheff-Menge* A *einer vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit* M *mit* $K \geqslant 0$ *ist stets total konvex.*

Eine kompakte Mannigfaltigkeit kann keine abgeschlossene einfache Tschebyscheff-Menge $A \neq M$ enthalten, wie man aus dem Verhalten der Distanzfunktion ρ^A in $M \setminus A$ schließen kann. Daher ist der Satz (3.7) nur für nicht kompaktes M von Bedeutung. Seine Voraussetzungen an die abgeschlossene Menge $A \subset M$ sind genau dann erfüllt, wenn ρ^A in $M \setminus A$ überall differenzierbar ist (Kleinjohann [1980.b]). Satz (3.7) wird falsch, wenn man zu $K < 0$ übergeht: Die Grenzkreise (Horozykeln) der Poincaréschen Halbebene sind einfache Tschebyscheff-Mengen, die nicht einmal lokal konvex sind.

4 Konvexe Approximation

Die glatte Approximierbarkeit einer stetigen (und konvexen) Funktion $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ ergibt sich z. B. aus dem Regularisierungsverfahren mittels Faltung (vgl. Whitney [1957], p. 373): Man wählt eine glatte *Höckerfunktion* $\beta: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften: $\beta \geqslant 0$, supp $\beta \subseteqq [-1,1]$, β konstant in einer Umgebung von 0 sowie

$$(4.1) \quad \int_{\mathbf{R}^m} \beta(|v|)\, d\mu = 1$$

und setzt für jedes $\epsilon > 0$:

(4.2) $$f_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^m} \int_{\mathbf{R}^m} f(x+v)\beta\left(\frac{|v|}{\epsilon}\right) d\mu.$$

Dann sind alle f_ϵ glatt (und konvex), und es gilt $\lim f_\epsilon(x) = f(x)$ für $\epsilon \downarrow 0$, gleichmäßig auf jedem Kompaktum.

Dieses Verfahren kann zwar auf geodätisch konvexe Funktionen übertragen werden, es liefert jedoch i. a. keine konvexen Approximationen, sondern nur solche, deren Hesseform eventuell negative (betragsmäßig kleine) Eigenwerte besitzt. Genauer haben Greene/Wu [1973] auf diesem Wege gezeigt:

(4.3) Satz *Ist* $f: M \to \mathbf{R}$ *konvex und* L *eine kompakte Teilmenge von* M, *so existiert eine offene Umgebung* U *von* L, *eine positive Zahl* ϵ_0 *und eine Familie von* $\mathscr{C}^\infty$-*Funktionen* $f_\epsilon: U \to \mathbf{R}$, $0 < \epsilon < \epsilon_0$, *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Auf* L *gilt gleichmäßig* $\lim f_\epsilon(p) = f(p)$ *für* $\epsilon \downarrow 0$.

(ii) *Ist* k_ϵ *das Infimum aller Eigenwerte von* $\nabla^2 f_\epsilon$ *auf* L, *so gilt* $\liminf k_\epsilon \geqslant 0$ *für* $\epsilon \downarrow 0$.

Günstiger ist die Situation, wenn die Ausgangsfunktion f *strikt konvex* ist; dies bedeutet, daß f stetig ist und zu jedem Kompaktum $L \subseteq M$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jedes geodätische Segment $c: [-\lambda, \lambda] \to M$ mit $c(0) \in L$ und $0 < \lambda < \delta$ gilt $f(c(\lambda)) - 2f(c(0)) + f(c(-\lambda)) > \delta\lambda^2$. (Ist $-f$ strikt konvex so heißt f selbst *strikt konkav.*) Das Regularisierungsverfahren, angewandt auf eine *strikt* konvexe Funktion liefert strikt konvexe $\mathscr{C}^\infty$-Approximationen, und in diesem Falle kann man sogar globalisieren. Das Resultat ist der folgende Approximationssatz (Greene/Wu [1976]):

(4.4) Satz *Zu jeder strikt konvexen Funktion* $f: M \to \mathbf{R}$ *und zu jedem* $\epsilon > 0$ *existiert eine strikt konvexe* $\mathscr{C}^\infty$-*Funktion* $f_0: M \to \mathbf{R}$ *mit* $|f - f_0| < \epsilon$.

Da das Quadrat der Distanz von einem festen Punkt $p_0 \in M$ in einer Umgebung U_0 von p_0 strikt konvex und beschränkt ist, folgt leicht, daß jede bloß konvexe Funktion f in U_0 gleichmäßig durch strikt konvexe $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen approximiert werden kann. Für eine Einordnung solcher Approximationsaussagen in allgemeine Prinzipien und viele verwandte Resultate sei auf Greene/Wu [1979] hingewiesen. Das allgemeine Approximationsproblem (2.1) ist aber nach wie vor offen.

Als Maß für die Annäherung von Mengen bietet sich der *Hausdorff-Abstand* an, der für beliebige, nichtleere Kompakta $L_1, L_2 \subseteq M$ so definiert ist:

(4.5) $$\rho_0(L_1, L_2) := \inf\{\epsilon \geqslant 0 \mid L_1 \subseteq (L_2)^\epsilon \text{ und } L_2 \subseteq (L_1)^\epsilon\}.$$

Allerdings kontrolliert ρ_0 selbst bei lokal konvexen Mengen nicht die Konvergenz der Ränder, wie man am Beispiel geeignet abgeschnittener Zylinderbänder einsehen kann. Deshalb verwendet man besser den folgenden *modifizierten Hausdorff-Abstand* ρ_1 für Kompakta mit nichtleerem Rand:

(4.6) $$\rho_1(L_1, L_2) := \rho_0(L_1, L_2) + \rho_0(\partial L_1, \partial L_2).$$

Wie ρ_0 hat auch ρ_1 die Eigenschaften einer Metrik.

Eine Menge $C \in \mathbf{K}$ heißt *glatt approximierbar,* wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $C' \in \mathbf{K}$ mit $\mathscr{C}^\infty$-Relativrand bd (C') existiert, so daß gilt $\rho_1(C, C') < \epsilon$. Auch das

$\mathscr{C}^\infty$-Approximationsproblem für Mengen ist in voller Allgemeinheit ungelöst. Die folgenden hinreichenden Striktheitsbedingungen sind von Bangert [1977], [1978.c] aufgestellt worden. Ein $C \in \mathbf{K}_0$ heißt *strikt konvex berandet,* wenn ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jeden Punkt $p \in \partial C$ und jeden äußeren Normaleneinheitsvektor $N \in C_p^*$ gilt: Es existiert eine zu N orthogonale $\mathscr{C}^\infty$-Hyperfläche $H \subset M$ mit $H \cap C = \{p\}$, deren zweite Fundamentalform in p bezüglich N nur Eigenwerte $\geqslant \delta$ besitzt.

(4.7) **Satz** *Ein lokal konvexer Körper* $C \in \mathbf{K}_0$ *ist glatt approximierbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) C *ist strikt konvex berandet.*
(b) M *hat längs* C *positive Schnittkrümmung.*
(c) M *hat längs* C *negative Schnittkrümmung.*

Das Resultat (a) folgt durch Anwendung des Approximationssatzes (4.4) auf eine geeignete Funktion der äußeren Distanzfunktion ρ^C. Die strikt konvexe Berandung von C impliziert die Konvexität von ρ^C und die strikte Konvexität von z. B. $\sigma := \rho^C + (\rho^C)^2$. Das folgt aus einem Vergleich mit den entsprechenden Funktionen für die Hyperflächen H aus der obigen Definition mittels der Jacobi-Felder von Warner [1966]. Die Subniveaumengen glatter konvexer Approximationen von σ liefern die gewünschten Approximationsmengen für C. Die Fälle (b) und (c) kann man auf (a) zurückführen, da für $K > 0$ die inneren und für $K < 0$ die äußeren Parallelmengen, die hinreichend nahe bei C liegen, strikt konvex berandet sind. Ein verwandter Approximationssatz, der eine strikte Konvexitätsbedingung an die innere Distanzfunktion voraussetzt, ist von Šarafutdinov [1973] ohne Beweis angegeben worden.

Es gibt total konvexe Körper $C \in \mathbf{K}_0$, die sich nicht durch strikt konvex berandete Körper $C' \in \mathbf{K}_0$ (also erst recht nicht durch glatte solche Körper) approximieren lassen. Ein Körper C′ dieser Art, auf dem $K \geqslant 0$ gilt, ist nämlich homöomorph zu einem abgeschlossenen euklidischen Ball (Cheeger/Gromoll [1972]), und dasselbe gilt dann nach (6.1) für C selbst, wenn nur $\rho_1(C, C')$ hinreichend klein ist. Zum Beispiel ist aber ein kompaktes Zylinderband total konvex, jedoch nicht homöomorph zur Einheitskreisscheibe. Allgemeiner enthält jede nichtzusammenziehbare vollständige und nichtkompakte Mannigfaltigkeit M mit $K \geqslant 0$ außerhalb einer kompakten Teilmenge total konvexe und nichtzusammenziehbare Körper; vgl. (6.3) und (7.4). Daß es im Raume $\mathbf{K}_0$ isolierte Punkte gibt (vgl. das Beispiel bei Figur (2.5)), ist ein Indiz für die folgende

(4.8) **Vermutung** *Das $\mathscr{C}^\infty$-Approximationsproblem für lokal konvexe Körper aus* $\mathbf{K}_0$ *ist für* $m \geqslant 3$ *nicht allgemein lösbar.*

Im Falle m = 2 erhält man natürlich stets lokal konvexe $\mathscr{C}^\infty$-Approximationen durch Ausglätten stückweise geodätischer Approximationen von innen.

5 Feinstruktur

Im Hinblick auf die Schwierigkeiten des Approximationsproblems ist es von großer Bedeutung, direkte Methoden zu entwickeln, also allgemeine konvexe Objekte so zu behandeln, wie sie von Natur aus sind. Das erfordert weitergehende Hilfsmittel der Analysis, insbesondere der Maßtheorie. In diesem Abschnitt wird diese Entwicklungslinie geschildert. Dazu gehört die Untersuchung der Differenzierbarkeit „fast überall" und weiterer Fragen der analytischen und geometrischen Feinstruktur. Von großer Bedeutung ist hier die Kategorie der *Lipschitz-Mannigfaltigkeiten,* die für die vorliegenden Zwecke von Walter [1976] eingeführt wurde. Bei manchen Problemen, z. B. in der Gauß/Bonnet-Theorie, sind diese Resultate die einzigen derzeit verfügbaren Hilfsmittel.

Im ganzen Abschnitt bezeichnet C *eine lokal konvexe Teilmenge mit* $\emptyset \subset C \subset M$, *die abgeschlossen und zusammenhängend sei.* Soweit C festgehalten wird, bezeichnen wir die metrische Projektion ξ^C bzw. die *äußere* Distanzfunktion ρ^C durch ξ bzw. ρ.

Die metrische Projektion ξ spielt hier eine zentrale Rolle. Grundlegend ist der folgende Satz (Walter [1974]):

(5.1) Satz *Es gibt eine offene Umgebung* U *von* C *mit folgenden Eigenschaften:*
(i) *Die metrische Projektion* ξ *ist in* U *definiert und lokal Lipschitz-stetig, also fast überall in* U *differenzierbar.*
(ii) *Zu jedem Punkt* $q \in U$ *existiert genau ein Lot von* q *auf* C *und dieses liegt in* U.

Die lokale Lipschitzeigenschaft von ξ in U bedeutet, daß zu jedem Punkt $q \in U$ eine Umgebung $U_0 \subseteqq U$ von q und eine Lipschitz-Konstante λ_0 existieren, so daß $d(\xi(q_1), \xi(q_2)) \leqslant \lambda_0 \cdot d(q_1, q_2)$ für alle $q_1, q_2 \in U_0$ gilt. Äquivalent hiermit ist die von der Metrik d unabhängige Forderung, daß ξ stetig ist und die Koordinatendarstellungen von ξ lokal Lipschitz-stetig im euklidischen Sinn sind. Der Beweis von (5.1) verwendet eine Abschätzung für Vierecke aus geodätischen Segmenten, die mit einem Vergleichssatz aus der entsprechenden Situation auf der Sphäre gewonnen wird.

Die Umgebung U wird für die folgenden Konstruktionen noch weiter einzuschränken sein. Ist C kompakt, so ist U als Inneres einer äußeren Parallelmenge C^r wählbar.

An allen Differenzierbarkeitsstellen $q \in U \setminus C$ von ρ besteht der in (1.1) ausgedrückte Zusammenhang zwischen den lokal Lipschitz-stetigen Abbildungen ρ und ξ. Da Φ bei geeigneter Wahl von U an allen in Frage kommenden Stellen von $M \times M$ glatt ist, also die rechte Seite der Gleichung (1.1) in $U \setminus C$ stetig wird, folgt deren Gültigkeit in *ganz* $U \setminus C$ wegen der lokal absoluten Stetigkeit von ρ. Man kann dies auch direkt nachweisen (Šarafutdinov [1974], Poor [1974]). Aus (1.1) und (5.1) ergibt sich dann weiter die lokale Lipschitz-Stetigkeit von grad ρ, so daß erneut der Satz von Rademacher anwendbar wird. Man erhält:

(5.2) Satz *Die Umgebung* U *von* C *aus Satz* (5.1) *kann so gewählt werden, daß die äußere Distanzfunktion* ρ *in* $U \setminus C$ *von der Klasse* $\mathscr{C}^1$ *und* grad ρ *in* $U \setminus C$ *Lipschitz-stetig, also* ρ *in* $U \setminus C$ *fast überall zweimal differenzierbar ist.*

Weitere Informationen erhält man aus den *Dilatationen mit Zentrum* C; das sind die Abbildungen $h_t: U \to U$, $t \in [0,1]$, definiert durch $h_t(q) \in [q\ \xi(q)]$ und $d(\xi(q), h_t(q)) = t \cdot d(\xi(q), q)$. Bei geeigneter Wahl von U definiert diese Schar eine starke Deformationsretraktion $h: U \times [0,1] \to U$ von U auf C, die lokal Lipschitz-stetig ist. Die Bahnen von h sind die Lote in U, was eine Art Homogenität in der Differenzierbarkeit von ξ impliziert: Enthält ein Lot in U einen Differenzierbarkeitspunkt von ξ, so ist ξ in jedem Punkt dieses Lotes differenzierbar. Daraus folgt weiter, daß ξ auf *jeder äußeren Parallelhyperfläche* $U \cap \partial C^r = \{q \in U \mid \rho(q) = r\}$, $r > 0$, $(m-1)$ – fast überall differenzierbar ist. Jede solche Parallelhyperfläche ist von der Klasse $\mathscr{C}^1$ und fast überall auf sich selbst zweimal differenzierbar.

Eng verknüpft mit den Loten sind die äußeren Normalenvektoren, also die Elemente $\neq 0$ der Kegel C_p^* für $p \in \partial C$. Wir führen das (verallgemeinerte) *äußere Einheitsnormalenbündel* $\mathscr{N}^C = \mathscr{N} =: \{v \in T^1M \mid v \in C_p^* \text{ für ein } p \in \partial C\}$ von C längs ∂C ein (das gegebenenfalls zusammen mit der restringierten Projektion $T^1M \to M$ betrachtet wird). Beim Auftreten von Ecken, Kanten usw. in ∂C machen die Fasern C_p^* von $\mathscr{N}$ „Sprünge", d. h. $\mathscr{N}$ ist kein Faserbündel im üblichen Sinne. Trotzdem besitzt $\mathscr{N}$ als Teilmenge des Raumes T^1M noch eine Mannigfaltigkeitsstruktur (Walter [1976]):

(5.3) **Satz** *Das Einheitsnormalenbündel* $\mathscr{N}$ *von* C *längs* ∂C *ist eine* $(m-1)$*-dimensionale abgeschlossene starke Lipschitz-Untermannigfaltigkeit von* T^1M.

Dabei heißt eine Teilmenge S einer n-dimensionalen $\mathscr{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit P eine *starke Lipschitz-Untermannigfaltigkeit* der Dimension s, wenn S lokal Graph einer Lipschitz-Abbildung von $\mathbf{R}^s$ in $\mathbf{R}^{n-s}$ ist, d. h. wenn zu jedem $p \in S$ eine Karte $\varphi: U^\varphi \to A^\varphi \subsetneqq \mathbf{R}^n$ von P um p existiert, so daß für eine offene Menge $V \subsetneqq \mathbf{R}^s$ und eine Lipschitz-Abbildung $\Psi: V \to \mathbf{R}^{n-s}$ gilt: $\varphi(U^\varphi \cap S) = \{(x, \Psi(x)) \mid x \in V\}$. Anhand solcher Paare (φ, Ψ) lassen sich dann (auswahlunabhängig) folgende Begriffe einführen: Differenzierbarkeit von S an fast allen Stellen $q \in S$, zugehörige Tangentialräume $T_qS \subsetneqq T_qM$, Differenzierbarkeit einer lokal Lipschitz-stetigen Abbildung h von S in eine $\mathscr{C}^1$-Mannigfaltigkeit Q fast überall auf S und zugehörige tangentiale Abbildungen $h_{*q}: T_qS \to T_{h(q)}Q$.

Eine wesentliche Rolle spielt hier eine Abbildung $F^C = F$, die an den Stellen $q \in M \setminus C$ definiert ist, für die genau ein Fußpunkt $\xi(q)$ *und* genau ein Lot $[\xi(q)q]$ existiert: $F(q)$ sei der Anfangsvektor der Länge 1 dieses Lotes in $\xi(q)$. Die Abbildung F ist somit ein Vektorfeld längs ξ (definiert im Durchschnitt der beiden Definitionsbereiche). Das Bild von F ist genau das Einheitsnormalbündel $\mathscr{N}$, und F ist wie ξ auf den Loten konstant. Man kann F als eine Art „Gaußabbildung" von ∂C betrachten; diese ist allerdings nicht auf ∂C definiert, wie im differenzierbaren Fall, sondern zumindest auf einem geeigneten äußeren „Saum" $U \setminus C$. Werden ξ und F auf $U \setminus C$ eingeschränkt, so bleiben die zuletzt genannten Eigenschaften erhalten, und es gilt dort $F(q) = \Phi(\xi(q), q) / \rho(q)$. Deswegen ist mit ξ auch F in $U \setminus C$ lokal Lipschitz-stetig und an den gleichen Stellen differenzierbar, allerdings ist F i. a. nicht injektiv. Man erhält lokal injektive Parametrisierungen von $\mathscr{N}$, indem man F weiter auf die Parallelhyperflächen $U \cap \partial C^r$ einschränkt. Aus der Tatsache, daß eine solche Einschränkung durch die Exponentialabbildung $u \mapsto \exp(ru)$ linksinvertiert wird, ergibt sich mit einem Umkehrsatz in der Lipschitz-Kategorie die lokale Diffeomorphie von $\mathscr{N}$ zu einem Lipschitz-Graph, also die Aussage (5.3).

Das Einheitsnormalenbündel $\mathscr{N}$ und die Abbildung F spiegeln die relative Krümmungsstruktur, insbesondere auch das Kantenverhalten von ∂C wider. Zum Beispiel kann ein Punkt $p \in \partial C$ *Ecke* von ∂C genannt werden, wenn C_p^* die Dimension m besitzt. Da ein solches C_p^* eine offene Teilmenge aus $\mathcal{N}$ ausschneidet und je zwei Normalenkegel C_p^*, C_q^* für $p \neq q$ disjunkt sind, kann ∂C wie im Euklidischen nur abzählbar viele Ecken haben.

Eine wichtige Anwendung der Abbildung F ist die verallgemeinerte zweite Fundamentalform, die nur im glatten Fall auf ∂C selbst definierbar ist, sonst aber als Objekt auf $\mathcal{N}$ aufgefaßt werden muß. Bezeichnet π die Projektion von $\mathcal{N}$ in M und I die Inklusion von $\mathcal{N}$ in TM, so ist I ein Vektorfeld längs π, das mit π zusammen fast überall auf $\mathcal{N}$ differenzierbar ist. Die *(verallgemeinerte) zweite Fundamentalform* $\widetilde{\mathrm{II}}^C = \widetilde{\mathrm{II}}$ von ∂C *auf* $\mathcal{N}$ ist dann fast überall auf $\mathcal{N}$ definiert durch

$$(5.4)\qquad \widetilde{\mathrm{II}} := \langle d\pi \otimes DI \rangle,$$

wobei $d\pi = \pi_*$ die tangentiale Abbildung und D das kovariante Differential bezeichnen. An dieser Stelle ist die Lipschitz-Struktur von $\mathcal{N}$ wesentlich. Für technische Zwecke ist es nützlich, die zweite Fundamentalform durch ξ und F auszudrücken. Dazu betrachtet man auf einem geeigneten äußeren Saum $U \setminus C$ die Form $\mathrm{II} := \langle d\xi \otimes DF \rangle$, die fast überall auf $U \setminus C$ definiert ist. Die Abbildung F ist genau dann in $q \in U \setminus C$ differenzierbar, wenn $\mathcal{N}$ in F(q) differenzierbar ist, und F_{*q} bildet dann den Untervektorraum $T_q(U \cap \partial C^{\rho(q)})$ von T_qM regulär auf $T_{F(q)}$ ab. An allen diesen Stellen gilt:

$$(5.5)\qquad F^*\widetilde{\mathrm{II}} = \mathrm{II} = \langle d\xi \otimes DF \rangle.$$

[Bei glatt berandetem C der Dimension m wird der Zusammenhang mit der gewöhnlichen zweiten Fundamentalform $Z = \langle di \otimes DN \rangle$ ($i: \partial C \to M$ Inklusion, $N: \partial C \to T^1M$ äußeres Normaleneinheitsvektorfeld) durch $Z = N^*\widetilde{\mathrm{II}}$ hergestellt.] Obwohl über die zweimalige Differenzierbarkeit von ξ und F nichts ausgesagt werden kann, liefern geeignete Grenzübergänge über die äußeren Parallelhyperflächen (Walter [1976]):

(5.6) Satz *Die zweite Fundamentalform* $\widetilde{\mathrm{II}}$ *von* ∂C *auf* $\mathcal{N}$ *ist fast überall auf* $\mathcal{N}$ *definiert und dort symmetrisch und positiv semidefinit.*

Die bisher genannten Begriffe und Resultate dieses Abschnittes sind den Arbeiten von Walter [1974], [1976] entnommen. Es ist zu erwarten, daß das Normalbündel $\mathcal{N}$ und die Abbildung F eine fundamentale Rolle in der relativen Krümmungstheorie allgemeiner lokal konvexer Mengen spielen, wie sich das in der Gauß/Bonnet-Theorie bereits gezeigt hat; vgl. (6.11).

Über den Relativrand bd (C) weiß man im Euklidischen, daß er lokal affin äquivalent zum Graph einer gewöhnlich konvexen Funktion ist. Durch lokale Zentralprojektionen von innen hat Walter [1976] gezeigt, daß bd (C) (falls $\neq \emptyset$) im riemannschen Falle lokal diffeomorph zum Graph einer Lipschitz-Abbildung, also eine starke Lipschitz-Untermannigfaltigkeit der Dimension dim C − 1 ist. Darüberhinaus erzielte Bangert [1977], [1978.b] durch geeignete Abänderung normaler Karten:

(5.7) Satz *Ist* dim C = s, *so gibt es zu jedem Punkt* $p \in$ bd (C) *eine offene Umgebung* U *von* p *in* M, *so daß* $U \cap C$ *diffeomorph ist zum Epigraph einer gewöhnlich konvexen Funktion* $f: V \to \mathbf{R}$ (V *offen in* $\mathbf{R}^{s-1}$), *wobei sich die Relativränder entsprechen.*

Insbesondere ist jede lokal konvexe Menge von M lokal diffeomorph zu einer gleichdimensionalen euklidisch konvexen Menge. Deswegen kann man lokale Eigenschaften euklidisch konvexer Mengen, die sich diffeomorph-invariant formulieren lassen, generell auf geodätisch konvexe Mengen übertragen. So erhält man z. B. die Gültigkeit des Satzes über singuläre Randpunkte von Anderson/Klee (vgl. Schneider [1979], Theorem (1.1)) für lokal konvexes $C \subset M$. Auch für Funktionen besteht ein solches Übertragungsprinzip:

(5.8) **Satz** *Eine geodätisch konvexe Funktion* $f: M \to \mathbf{R}$ *besitzt folgende Eigenschaft: Zu jedem* $p \in M$ *existiert eine Karte* $\varphi: U^\varphi \to A^\varphi$ *von* M *um* p *und eine* $\mathscr{C}^\infty$-*Funktion* $f_0: U^\varphi \to \mathbf{R}$, *so daß* $(f + f_0) \circ \varphi^{-1}$ *gewöhnlich konvex ist.*

Die Beweisidee ist einfach: Es genügt, zu f ein genügend großes Vielfaches des Abstandquadrates von p_0 zu addieren. Als Folgerung ergibt sich, daß der Satz von Aleksandrov [1939] über die zweimalige Differenzierbarkeit fast überall auch für geodätisch konvexe Funktionen richtig bleibt. Der Satz (5.8) und ein neuer Beweis des Satzes von Aleksandrov mittels der metrischen Projektion und einer Variante des Sardschen Lemmas für Lipschitz-Abbildungen sind von Bangert [1977], [1979.a] angegeben worden. In diesem Zusammenhang wird dort für jedes M (auch ohne riemannsche Metrik) die neue Funktionenklasse $\mathscr{F}(M)$ eingeführt, die aus allen Funktionen $f: M \to \mathbf{R}$ mit der in Satz (5.8) genannten Eigenschaft besteht. Naturgemäß lassen sich viele für konvexe Funktionen sinnvolle Eigenschaften gleich für die Elemente dieser *Bangertklasse* $\mathscr{F}(M)$ aufstellen. Hierzu gehört ein spezieller Begriff der zweimaligen Differenzierbarkeit von $f \in \mathscr{F}(M)$, der über Subdifferentiale auch für nicht differenzierbares f definiert werden kann und fast überall in M zu einer symmetrischen Hesseform von f führt. Die konvexen Funktionen in $\mathscr{F}(M)$ lassen sich durch die positive Semidefinitheit dieser Hesseform charakterisieren. Andere Kennzeichnungen in der Klasse aller stetigen Funktionen, die auf dem zweiten Differenzenquotienten längs Geodätischen basieren, sind von Wu [1979] formuliert worden. Wahrscheinlich werden gewisse, mit konvexen Objekten verbundene Funktionen, die im Euklidischen selbst konvex sind, im riemannschen Falle wenigstens einer Klasse $\mathscr{F}(U)$ angehören. Bewiesen ist dies für die signierte Distanzfunktion ρ_C^* eines lokal konvexen Körpers $C \in \mathbf{K}_0$ in einer Umgebung von C (Bangert [1977], [1978.c]); im Euklidischen ist ρ_C^* gewöhnlich konvex.

Ein Trugschluß wäre es zu glauben, mit Sätzen wie (5.7) und (5.8) sei eine einfache Reduzierung auf die gewöhnliche Konvexität geleistet. Tatsächlich läßt sich z. B. die Approximationsfrage für geodätisch konvexe Mengen nicht einmal lokal auf den euklidischen Fall zurückführen.

Zur globalen Struktur einer einzelnen lokal konvexen Menge C existiert eine eingehende Theorie bei nichtnegativer Krümmung. Eine fundamentale Idee von Cheeger/Gromoll [1972] besteht in der Betrachtung der inneren Parallelmengen, besonders solcher mit maximaler innerer Distanz. Die Konvexitätseigenschaften dieser Parallelmengen beruhen auf dem folgenden Satz über die *innere* Distanzfunktion ρ_C, dessen zweiter Teil später von Bangert [1977], [1978.c] aufgestellt wurde:

(5.9) **Satz** *Sei* $C \subset M$ *ein lokal konvexer Körper mit* $\mathring{C} \neq \emptyset$. *Gilt* $K \geqslant 0$ *auf* C, *so ist* ρ_C *in* $\mathring{C}$ *konkav; gilt* $K > 0$ *auf* C, *so ist* $\rho_C + \ln \rho_C$ *in* $\mathring{C}$ *strikt konkav.*

Der Beweis verwendet die zweite Variation der Bogenlänge. Ist M vollständig, so kann auf die Kompaktheit von C verzichtet werden. Von der Voraussetzung $\mathring{C} \neq \emptyset$ kann man sich hier und im folgenden durch Einschränkung auf int (C) befreien. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich, daß jede innere Parallelmenge $C_r \neq \emptyset$ wiederum lokal konvex (sowie abgeschlossen und zusammenhängend) ist.

Nun sei zunächst C *kompakt* und $\mathring{C} \neq \emptyset$. Ist a_0 das Maximum von ρ_C auf C, so kann man speziell die *minimale* innere Parallelmenge C_{a_0} bilden, die echt kleinere Dimension als C besitzt. Im Falle bd $(C_{a_0}) \neq \emptyset$ kann dieser Prozeß mit C_{a_0} anstelle von C fortgesetzt werden. Wegen der sinkenden Dimensionen erhält man iterativ eine endliche *Flagge*

(5.10) $C =: C(0) \supset C(1) \supset \ldots \supset C(k) =: S$

kompakter lokal konvexer und zusammenhängender Mengen, wobei jede von ihnen die minimale innere Parallelmenge der vorangehenden ist und C(k) erstmalig keinen Relativrand besitzt, also eine totalgeodätische, kompakte Untermannigfaltigkeit von M ist. Dieses C(k) ist der Ausgangsmenge C durch den obigen Prozeß kanonisch zugeordnet und heißt die *Seele* S von C. Gestützt auf die Flagge (5.10) und die dazwischenliegenden, jeweils konstant dimensionalen inneren Parallelmengen kann man das folgende *Seelentheorem* beweisen:

(5.11) Satz *Sei* $C \subset M$ *ein lokal konvexer Körper mit* bd (C) $\neq \emptyset$, $K \geqslant 0$ *auf* C *und* $S \subset$ int (C) *die Seele von* C. *Dann ist* C *homöomorph zu einer Tubenumgebung von* S *im Normalenbündel von* S *in* int (C). ♦

Die Seele S ist ein Punkt und damit C homöomorph zu einem euklidischen Ball, wenn C strikt konvex berandet ist oder wenn $K > 0$ auf C gilt. Mit der Ausgestaltung dieser Konstruktion und zusätzlichen Glättungen befaßten sich nach den Initiatoren Cheeger/Gromoll [1972] die Arbeiten von Poor [1974] und Šarafutdinov [1974].

Nun sei C *nichtkompakt* und M vollständig. Dann wird die Flaggenkonstruktion entweder unterbrochen, falls wie oben eine randlose minimale innere Parallelmenge (Seele) auftritt, oder wenn die innere Distanzfunktion einer bereits konstruierten minimalen inneren Parallelmenge auf dieser kein Maximum besitzt. Nach Burago/Zalgaller [1977] nennt man C im ersten Fall *kondensiert*, im zweiten Fall *expandiert*. Basierend auf dieser Fallunterscheidung entwickelten diese Autoren das folgende Gegenstück zu (5.11):

(5.12) Satz *Sei* C *lokal konvex und nichtkompakt in der vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit* M *mit* $K \geqslant 0$ *sowie* bd (C) $\neq \emptyset$. *Dann gilt:*

(a) *Ist* C *kondensiert mit der Seele* S, *so ist* S *eine total geodätische, nichtkompakte Untermannigfaltigkeit in* int (C), *und* C *ist homöomorph zu einer Tubenumgebung von* S *im Normalenbündel von* S *in* int (C).

(b) *Ist* C *expandiert, so ist* C *homöomorph zum Produkt* bd (C) $\times$ $[0, \infty[$.

Der Beweis erfolgt wie im kompakten Fall über Integralkurven von geeigneten Vektorfeldern, die jetzt aber nicht nur an die inneren Parallelmengen, sondern auch an gewisse Horosphären angepaßt werden. Die Durchführung ist z. T. sehr verwickelt. In (5.11) und (5.12) ist insbesondere enthalten, daß bd (C) stets höchstens zwei Komponenten besitzt. Weitere Hauptresultate der Strukturtheorie von Burago/ Zalgaller [1977] sind die folgenden *Splittingsätze:*

(5.13) Satz *Sei* C *lokal konvex in der vollständigen nichtkompakten riemannschen Mannigfaltigkeit* M *mit* $K \geqslant 0$. *Dann gilt:*

(a) *Besitzt* bd (C) *zwei Komponenten, so ist* C *(bezüglich* d_C*) isometrisch zu einem Produkt* $(\mathrm{bd}(C))_1 \times [0, a]$, *wobei der erste Faktor eine Komponente von* bd (C) *ist.*

(b) *Besitzt* bd(C) *genau eine Komponente, und ist diese kompakt, aber* C *nichtkompakt, so ist* C *(bezüglich* d_C*) isometrisch zu* $\mathrm{bd}(C) \times [0, \infty[$.

6 Räume von konvexen Mengen und geometrische Funktionale

Wir untersuchen hier die Räume **K** und $\mathbf{K}_0$ lokal konvexer Körper in M mit dem modifizierten Hausdorffabstand ρ_1 (4.6) als Metrik. $\mathbf{K}_0$ ist offen in **K**.

Der Raum **K** besitzt nicht die aus dem Euklidischen bekannten lokalen Kompaktheitseigenschaften, d. h. der Auswahlsatz von Blaschke (vgl. Valentine [1968], Satz 3.8) gilt nicht allgemein (Gegenbeispiel: geodätische Schleife). Er bleibt jedoch richtig unter einer Zusatzvoraussetzung an den Konvexitätsradius, die bei total konvexen Körpern von selbst erfüllt ist; allerdings werden die Grenzmengen i. a. nur lokal konvex sein (Bangert [1977], [1978.b]).

Eine wichtige Frage ist die nach der topologischen Gestalt lokal konvexer Körper. Der Homöomorphietyp ist entgegen den euklidischen Verhältnissen in $\mathbf{K}_0$ zwar nicht global konstant, wie einfache Beispiele auf einem Zylinder zeigen, er besitzt jedoch die folgende lokale Konstantheitseigenschaft (Bangert [1977], [1978.b]):

(6.1) Satz *Zu jedem lokal konvexen Körper* $C \in \mathbf{K}_0$ *existiert ein* $\delta > 0$, *so daß gilt: Ist* $C' \in \mathbf{K}$ *und* $\rho_1(C', C) < \delta$, *so sind* C' *und* C *homöomorph. Insbesondere ist der Homöomorphietyp in jeder Zusammenhangskomponente von* $\mathbf{K}_0$ *konstant.*

Der Beweis beruht auf einer speziellen *Kragenumgebung* von ∂C, die auch sonst von großer Bedeutung ist. Der Kragen wird erzeugt durch ein stetiges Vektorfeld $N: \partial C \to T^1M$, das aus der metrischen Projektion von ∂C auf eine nahe bei C gelegene innere Parallelmenge C_a gewonnen wird. Im Falle $K \geqslant 0$ geht diese Idee auf Cheeger/Gromoll [1972] zurück. Der allgemeine Fall ist technisch sehr kompliziert; eine der Schwierigkeiten besteht darin, daß C_a i. a. nicht konvex ist. Als Korollar aus (6.1) ergibt sich die Homöomorphie von je zwei m-dimensionalen, *total konvexen* Körpern, die als Subniveaumengen konvexer Funktionen auf einer vollständigen Mannigfaltigkeit M vorkommen. Generell besteht das folgende

(6.2) Problem *Unter welchen Bedingungen sind je zwei (lokal, total) konvexe Körper aus* $\mathbf{K}_0$ *homöomorph?*

Hinsichtlich der Homotopie gilt (auch ohne Kompaktheitsvoraussetzungen) die folgende interessante Aussage:

(6.3) Satz *Seien* C, D *nichtleere abgeschlossene und zusammenhängende Teil-*

mengen der vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit M, *und sei* C *total konvex in* D *und* D *lokal konvex. Dann ist die Inklusion* $C \hookrightarrow D$ *eine Homotopieäquivalenz.*

In Spezialfällen ist dieser Satz von Gromoll/Meyer [1969] ausgesprochen und von Cheeger/Gromoll [1972] mittels Morse-Theorie bewiesen worden. Die obige Fassung findet sich bei Bangert [1979.b] (bzw. für kompaktes C bei Bangert [1977]). In seinem Beweis wird der Wegeraum der Lipschitz-stetigen Kurven in D verwendet, was hier besonders angemessen ist, da C und D Umgebungen U und V besitzen, die sich auf lokal Lipschitz-stetige Weise auf C und D retrahieren lassen (Walter [1974]). Als Folgerung ergibt sich Satz (2.7).

Wir gehen nun zu quantitativen Fragen über, indem wir *geometrische Funktionale* wie Volumen, Oberfläche und Gesamtkrümmung auf **K** studieren.

Für $C \in \mathbf{K}_0$ ist das *Volumen* $\mu(C)$ im Sinne des von der riemannschen Metrik induzierten Lebesguemaßes wohldefiniert. Für die *Oberfläche* $\nu(C)$ kann auch hier die Definition von Minkowski [1900] verwendet werden:

$$(6.4)\quad \nu(C) := \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mu(C^r) - \mu(C)}{r}.$$

Die Existenz des Grenzwertes und der nachfolgende Satz findet sich bei Bangert [1977], [1978.b]. Für allgemeinere Mengenklassen in M wurde die Minkowskische Definition von Kneser [1951] untersucht.

(6.5) Satz *Das Volumenfunktional* μ *und das Oberflächenfunktional* ν *sind stetig auf* $\mathbf{K}_0$.

Auf die Problematik der *Monotonie der Oberfläche* war bereits in Abschnitt 2 hingewiesen worden. Lange Zeit war im riemannschen Falle nur wenig bekannt (vgl. Karcher [1968] für $m = 2$). Ist M eine Hadamard-Mannigfaltigkeit und $C \in \mathbf{K}_0$ ein konvexer Körper in M, so ist die metrische Projektion ξ^C mit der Konstante 1 Lipschitz-stetig (Bishop/O'Neill [1969]). Daraus folgt für jeden konvexen Körper D, der C umfaßt: $\nu(D) \geqslant \nu(C)$, da $\xi^C(\partial D) = \partial C$. Die Übertragung auf allgemeinere riemannsche Situationen ist überraschend schwierig; die lokale Konvexität reicht mit Sicherheit nicht aus. Neuerdings erzielte Bangert [1979.b] nach Teilergebnissen in [1977] die folgenden Resultate (6.6) und (6.7), die das globale Monotonieproblem weitgehend lösen. Hierbei sind Konvexitätseigenschaften der umfassenden Menge D meistens unwesentlich, es kommt eher darauf an, über einen geeigneten Oberflächenbegriff für D zu verfügen. Folgende Eigenschaft erweist sich als zweckmäßig: Eine abgeschlossene Teilmenge $D \neq \emptyset$ der riemannschen Mannigfaltigkeit M besitzt einen *starken Lipschitz-Rand* ∂D, wenn $D = \overline{\mathring{D}}$ gilt und ∂D eine starke Lipschitz-Hyperfläche ist. Das *Randvolumen* (die *Oberfläche*) $\nu(D)$ ist dann wie im glatten Fall über Integrale lokaler Parameterdarstellungen von ∂D erklärbar. Diese Definition fällt zusammen mit dem $(m-1)$-dimensionalen riemannschen Hausdorff-Maß von ∂D, ist aber analytisch zugänglicher als dieses. Für $D \in \mathbf{K}_0$ herrscht Übereinstimmung mit der Definition (6.4).

(6.6) Satz *Seien* C, D *nichtleere abgeschlossene und zusammenhängende Teilmengen der vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit* M. *Ist* C *total konvex in* D, *besitzt* D *einen starken Lipschitz-Rand* ∂D *und ist* $D \setminus \mathring{C}$ *kompakt, so gilt* $\nu(C) \leqslant \nu(D)$.

Der interessante Beweis stützt sich auf die Deutung des Randvolumens als Durchfluß des geodätischen Sprays durch die in T^1M liegende Menge der inneren Normaleneinheitsvektoren (in den Differenzierbarkeitspunkten von ∂C) und auf ein allgemeines Existenzlemma für volumtreue Flüsse. Mit dieser Methode läßt sich auch das Gleichheitszeichen diskutieren, wobei sich u. a. die folgenden *Splittingsätze* ergeben:

(6.7) Satz *Unter den Voraussetzungen von* Satz (6.6) *sei außerdem* D *lokal konvex,* $\mathring{C} \neq \emptyset$ *und* $\nu(C) = \nu(D) > 0$. *Dann sind die Komponenten von* $D \setminus \mathring{C}$ *isometrisch zu Produkten reeller Intervalle mit Randkomponenten von* C, *wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) *Es gilt* $K \geqslant 0$ *auf* $D \setminus \mathring{C}$.

(b) *Es gilt* $K \leqslant 0$ *auf* M.

Wir gehen über zum Funktional der Gesamtkrümmung, das im Euklidischen kein Gegenstück besitzt. Dabei ist M stets *orientiert.* Im Falle m = 2 ist die Gesamtkrümmung das Integral über das $(1/2\pi)$-fache der Gauß-Krümmung K, für $m > 2$ tritt an die Stelle von K die Chern-Krümmung $\mathscr{K}$, deren Definition zweckmäßig im Cartanschen Kalkül erfolgt (vgl. etwa Walter [1978]): In einem positiv orientierten, orthonormalen lokalen Basisfeld $X_1, \ldots, X_m$ von M mit dualem Cobasisfeld $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ gelten für die Zusammenhangsformen ω_{ij}, die Krümmungsformen Ω_{ij} und die Komponenten $R_{ijk\ell}$ des riemannschen Krümmungstensors die Grundgleichungen (alle Indizes von 1 bis m):

$$
(6.8)\qquad
\begin{aligned}
DX_i &= \sum_j \omega_{ji} X_j,\\
\Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} R_{ijk\ell}\, \sigma_k \wedge \sigma_\ell = d\omega_{ij} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.
\end{aligned}
$$

Das Volumelement von M ist $d\mu = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_m$, der *Krümmungsoperator* ist die bivektorwertige Differentialform $\mathscr{R}$ der Stufe 2, definiert durch

$$
(6.9)\qquad \mathscr{R} := \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Omega_{ij}\, X_i \wedge X_j.
$$

Im Falle m = 2n ist die *Chern-Krümmung* $\mathscr{K}: M \to \mathbf{R}$ gegeben durch

$$
(6.10)\qquad
\begin{aligned}
\mathscr{K}\, d\mu &= \frac{1}{(2\pi)^n n!}\, [\mathscr{R}^n]\\
&= \frac{1}{(4\pi)^n n!} \sum_{i_1, \ldots, i_m} \epsilon_{i_1 \ldots i_m}\, \Omega_{i_1 i_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{m-1} i_m}.
\end{aligned}
$$

Hier ist die Potenzbildung die des Dachproduktes multivektorwertiger alternierender Formen, und die eckige Klammer bezeichnet den kanonischen Isomorphismus m-vektorwertiger Formen dieser Art auf die skalaren Formen derselben Stufe. Im Falle $m = 2n - 1$ ist $\mathscr{K} := 0$. Das Funktional der *Gesamtkrümmung* ist auf den kompakten Teilmengen $L \subseteq M$ definiert durch $L \mapsto \int_L \mathscr{K}\, d\mu$. Ist L glatt berandete Untermannigfaltigkeit der Dimension m, so gilt hierfür der Satz von Gauß/Bonnet in der von Allendoerfer/Weil und Chern verallgemeinerten Form. Bereits beim Auftreten milder Randsingularitäten kompliziert sich das Randintegral erheblich. Jedoch konnte Walter [1975.b] im konvexen Fall den *Satz von Gauß/Bonnet/Chern* folgendermaßen verallgemeinern:

(6.11) Satz *Für jeden lokal konvexen Körper* C *in* M *gilt:*

$$\int_C \mathscr{K} d\mu = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{\mathscr{N}} [\widetilde{\mathscr{R}}^k \wedge I \wedge (DI)^{m-2k-1}] + \chi(C).$$

Hier bezeichnet χ die Euler-Charakteristik. Die a_k sind dieselben positiven universellen Konstanten wie im glatten Fall. Das übliche Randintegral ist hiernach zu ersetzen durch ein Integral über das Einheitsnormalenbündel $\mathscr{N}$ von C längs ∂C; $\widetilde{\mathscr{R}}$ ist der Lift von $\mathscr{R}$ nach TM, I die Inklusion von T^1M in TM. In den Randintegranden gehen der Krümmungstensor von M auf ∂C und die verallgemeinerte zweite Fundamentalform $\widetilde{II}$ von ∂C wesentlich ein. Die Symmetrie- und Definitheitseigenschaften von $\widetilde{II}$(5.6) können ausgenützt werden, um das Integral über $\mathscr{N}$ abzuschätzen. Allerdings sind dazu Positivitätsannahmen an die Krümmung von M erforderlich. Dies führt auf die folgenden *Gauß/Bonnet/Chern-Ungleichungen* von Walter [1975.b].

(6.12) Satz *Sei C ein lokal konvexer Körper in* M. *Dann gilt*

$$\int_C \mathscr{K} d\mu \leqslant \chi(C)$$

in jedem der folgenden Fälle:

(i) $m = 2$ [*hier ist* $\mathscr{K} = (2\pi)^{-1}$ K].

(ii) $3 \leqslant m \leqslant 6$, *und die Schnittkrümmung* K *ist nichtnegativ über allen Punkten von* ∂C.

(iii) $m \geqslant 7$, *und der Krümmungsoperator* $\mathscr{R}$ *ist positiv semidefinit über allen Punkten von* ∂C.

Daß bei $m \geqslant 7$ die schärfere Voraussetzung an den Krümmungsoperator zu machen ist, hängt mit der Unrichtigkeit der algebraischen Hopf-Vermutung für $m \geqslant 6$ zusammen; vgl. Geroch [1976].

Die Beweise von (6.11) und (6.12) stützen sich auf wesentliche Teile der in Abschnitt 5 beschriebenen Feinstruktur über das Einheitsnormalenbündel $\mathscr{N}$ und die Abbildung F. Ein anderer Beweisvorschlag von Poor [1974] enthält einen Fehler, der anscheinend nicht zu beseitigen ist, und der zeigt, daß das Regularisierungsverfahren von (4.2) dazu neigt, die Feinstruktur zu verwischen. Demgegenüber läßt sich die Beweismethode von Walter [1975.b] fast wörtlich auf Kompakta mit lokal eindeutiger metrischer Projektion übertragen, sobald erkannt ist, daß deren metrische Projektion lokal Lipschitz-stetig ist. Das wurde neuerdings von Kleinjohann [1979], [1980.a] durchgeführt, so daß Satz (6.11) nunmehr auch für diese Mengenklasse zur Verfügung steht.

7 Existenzfragen und Anwendungen

Wichtige Anwendungen findet die Konvexität bei der Untersuchung vollständiger *nicht kompakter* Mannigfaltigkeiten. Grenzübergänge in solchen Räumen stützen sich häufig auf eine Ausschöpfung durch geeignete Kompakta, die man am bequemsten als Subniveaumengen reeller Funktionen erhält.

Eine stetige Funktion $f: M \to \mathbf{R}$ heißt *Ausschöpfungsfunktion*, falls ihre Subniveaumengen $S_f(c) \neq \emptyset$ alle kompakt sind. Ist f konvex, so sind die Subniveaumengen total konvex, spiegeln also zumindest den Homotopietyp von M wieder (6.3), und ihr analytisches Verhalten kann nach dem Vorhergehenden noch gut kontrolliert werden. Optimal ist es natürlich, wenn f überdies glatt ist. Daß dies in wichtigen Fällen nicht erreicht werden kann, ist einer der Gründe, von vornherein allgemeine konvexe Objekte zu behandeln.

Wir beschäftigen uns hier mit der Existenz von konvexen Funktionen auf einer *vollständigen, nicht kompakten* riemannschen Mannigfaltigkeit M und mit einigen Anwendungen, die zum großen Teil damit in Zusammenhang stehen.

Die meisten Erzeugungsweisen konvexer Funktionen verwenden in irgend einer Form die Distanz. Neben der Distanzfunktion von einem festen Punkt oder einer festen Menge (etwa bei (5.9)) kommen vor allem die sog. Busemann-Funktionen in Betracht. Zu ihrer Definition sei ein geodätischer Strahl $c: [0, \infty[\to M$ vorgegeben. Für $p \in M$ und $t > 0$ sei $\eta_t(p) := d(c(0), c(t)) - d(p, c(t)) = t - d(p, c(t))$ gesetzt. Die Funktion $t \mapsto \eta_t(p)$ ist nach der Dreiecksungleichung monoton wachsend und durch $d(p, c(0))$ nach oben beschränkt, also existiert der Grenzwert $\beta_c(p) := \lim_{t \to \infty} \eta_t(p)$ und ist eine stetige Funktion von p, die *Busemann-Funktion* $\beta_c: M \to \mathbf{R}$ (*zum Strahl* c). Zu jedem α aus dem Bild von β_c ist der (offene) *Horoball* $N(c, \alpha) := \{p \in M \mid \beta_c(p) > \alpha\}$ und die ihn berandende *Horosphäre* $L(c, \alpha) := \{p \in M \mid \beta_c(p) = \alpha\}$ definiert. $N(c, \alpha)$ ist auch die Vereinigung aller Bälle $B(c(t), t - \alpha)$ mit $t > \alpha$, $t \geqslant 0$. Im euklidischen Fall $M = \mathbf{R}^m$ sind die Busemann-Funktionen affin, und die Horosphären bzw. Horobälle sind die Hyperebenen bzw. die offenen Halbräume.

Im allgemeinen hängt das Konvexitätsverhalten dieser Funktionen stark vom Krümmungsvorzeichen ab. Wir behandeln die Fälle $K \leqslant 0$ und $K \geqslant 0$ zunächst getrennt. Vollständige Mannigfaltigkeiten mit diesen Krümmungsvorzeichen bildeten in neuerer Zeit den eigentlichen Anlaß für die geodätische Konvexität. Es sei vor allem auf die fundamentalen Arbeiten von Bishop/O'Neill [1969] und Cheeger/Gromoll [1972] hingewiesen, die über das hier Besprochene hinaus viele weitere Informationen enthalten (vgl. auch das Buch von Cheeger/Ebin [1975] sowie Karcher [1975]).

(7.1) **Satz** *Für eine Hadamard-Mannigfaltigkeit* M *(vollständig, einfach zusammenhängend,* $K \leqslant 0$*) gilt:*

(i) *Die Distanz von einem festen Punkt* $p_0 \in M$ *ist eine konvexe Ausschöpfungsfunktion (mit glattem, strikt konvexem Quadrat).*

(ii) *Jede Busemann-Funktion* $\beta_c: M \to \mathbf{R}$ *ist konkav (jedoch hat weder* β_c *noch* $-\beta_c$ *kompakte Subniveaumengen).*

Teil (i) geht auf Bishop/O'Neill [1969] zurück, Teil (ii) folgt leicht aus (i). Für weitere Eigenschaften von β_c sei auf Eberlein [1973] verwiesen. Über die Regularität von β_c bestehen seit längerem Vermutungen in Richtung $\mathscr{C}^\infty$. Von P. Eberlein stammt ein (unpublizierter) Beweis für $\mathscr{C}^2$, eine andere Begründung hierfür wurde von Heintze/Im Hof [1977] gegeben. Hadamard-Mannigfaltigkeiten, auf die sich diese Ergebnisse beziehen, verdienen auch sonst wegen ihrer topologischen und geometrischen Übersichtlichkeit besonderes Interesse als Testobjekte. Unter allen riemannschen Mannigfaltigkeiten verhalten sie sich noch am ehesten wie die euklidischen Räume; andererseits ist ihre Krümmung kompliziert genug, um die Abweichung der Analysis gegenüber dem flachen Fall deutlich werden zu lassen. In diesem Zusammenhang sei auf die Arbeit von Wissner [1978] hingewiesen, in der u. a. gewisse Tendenzen der konvexen Analysis der Vektorräume auf Hadamard-Mannigfaltigkeiten übertragen werden, z. B. Trennungssätze (vom Mazur/Orlicz- und Tietze/Urysohn-Typ), die hauptsächlich auf dem folgenden Satz (7.2) beruhen, Schwerpunktabbildungen (nach dem Vorbild von H. Bauer und H. Cartan, vgl. Alfsen [1971]) sowie Extremalpunktkonstruktionen (Satz von Krein/Milman). Vgl. auch Satz (3.5).

Probleme auf einer beliebigen vollständigen Mannigfaltigkeit M mit $K \leqslant 0$ können sehr häufig durch universelle Überlagerung auf Hadamard-Mannigfaltigkeiten reduziert werden. Solche Überlagerungsmethoden wurden z. B. von Bishop/O'Neill [1969], Eberlein [1973] und Bangert [1977], [1978.b], [1980.a] benutzt, um die metrische Projektion auch global zu untersuchen, den Zusammenhang konvexer Funktionen mit der Deckgruppe zu studieren und Homöomorphiefragen konvexer Mengen zu klären. Generell ist hier die Existenz einer konvexen Ausschöpfungsfunktion äquivalent mit der Existenz eines einzigen totalkonvexen Körpers; denn es gilt (Bishop/O'Neill [1969]):

(7.2) **Satz** *Sei* M *eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $K \leqslant 0$ *und* C *total konvex und abgeschlossen in* M. *Dann ist die äußere Distanzfunktion* $\rho^C : M \to \mathbf{R}$ *konvex.*

Allerdings gibt es nicht auf jeder solchen Mannigfaltigkeit eine konvexe Ausschöpfungsfunktion. Das sieht man etwa an der durch Rotation der Kurve $y = x^{-1}$, $x > 0$, um die y-Achse entstehenden Fläche. Diese gestattet zwar eine nicht konstante konvexe Funktion (eine geeignete Funktion von y), jedoch keine konvexe Ausschöpfungsfunktion. Das kann man ähnlich wie bei Figur (2.4) mit Hilfe der Drehmittelung erkennen.

(7.3) **Satz** *Für eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $K \geqslant 0$ *gilt: Jede Busemann-Funktion* $\beta_c : M \to \mathbf{R}$ *ist konvex.*

Dies ist ein grundlegendes Resultat, das als wesentlichen Kern die totale Konvexität der Komplemente der Horobälle $H(c, \alpha) := M \setminus N(c, \alpha) = S_{\beta_c}(\alpha)$ enthält. (*Grundkonstruktion* von Cheeger/Gromoll [1972]). Allerdings können diese Mengen sowohl unbeschränkt als auch kompakt ausfallen, und Shiohama [1979] hat im Falle $m = 2$ Bedingungen an die Totalkrümmung angegeben, die hierüber eine Entscheidung liefern. Im allgemeinen kann also β_c nicht zur Ausschöpfung dienen. Andererseits brauchen hier die Distanzfunktionen von festen Punkten nicht konvex zu sein. Ein weiterer entscheidender Schritt von Cheeger/Gromoll [1972] läuft nun darauf hinaus, zum Supremum $\beta := \sup \beta_c$ überzugehen, das über alle von einem festen Punkt $c(0) = p_0$ ausgehenden Strahlen c zu bilden ist. Tatsächlich erweist sich β als eine konvexe Ausschöpfungsfunktion. (Bei einer Hadamard-Mannigfaltigkeit ist dieses Supremum identisch mit der Distanzfunktion von p_0.) Später haben Greene/Wu [1974] diese Konstruktion für den Fall einer beliebig gekrümmten Ausnahmemenge modifiziert, so daß das Ergebnis von Cheeger/Gromoll nun in folgender Form zur Verfügung steht:

(7.4) Satz *Sei* M *eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $K \geqslant 0$ *außerhalb einer kompakten Teilmenge von* M. *Dann existiert eine konvexe Ausschöpfungsfunktion* $f: M \to \mathbf{R}$.

Im Falle $K \leqslant 0$ ist eine Ausnahmemenge im Sinne dieses Satzes selbst bei einfachem Zusammenhang nicht zulässig, wie das Beispiel bei Figur (2.4) zeigt. Bei $K \geqslant 0$ ist die Existenz einer glatten konvexen Ausschöpfungsfunktion ebenso offen wie das Approximationsproblem (2.1). Jedoch gilt:

(7.5) Satz *Sei* M *eine vollständige nichtkompakte riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $K \geqslant 0$, *und sei* $K > 0$ *außerhalb einer kompakten Teilmenge von* M. *Dann existiert eine strikt konvexe* $\mathscr{C}^\infty$*-Ausschöpfungsfunktion* $f: M \to \mathbf{R}$ [*und* M *ist nach* (7.6) *diffeomorph zu* $\mathbf{R}^m$].

Dieses bisher allgemeinste Resultat in dieser Richtung ist der Arbeit Wu [1979] entnommen. Dort wird auch die Busemann-Funktion auf eine interessante Weise verallgemeinert, und es werden im Zusammenhang damit Vereinfachungen und neue Ergebnisse bei nichtnegativer Krümmung erzielt. Generell zieht die Existenz einer konvexen Funktion f Einschränkungen der Geometrie der betreffenden Definitionsmenge nach sich. Für nicht notwendig global definiertes f hat Gordon [1970], [1972], [1974] solche Folgerungen gezogen und auf gewisse Fragen der Mechanik angewandt. Man vergleiche hierzu auch die Arbeit von Alexander/Bishop [1974]. (In dieser wird im glatten Fall eine Bedingung dafür aufgestellt, daß eine stetige Familie von Teilmengen durch eine konvexe Funktion erzeugt wird.) Strukturkonsequenzen für M bei globaler Definitionsmenge von f wurden von Bishop/O'Neill [1969] für $K \leqslant 0$ und glattes f und von Greene/Wu [1976] für strikt konvexes f aufgestellt. Man vergleiche auch den Satz (2.6) von Yau. Später hat sich Bangert [1977], [1978.a] unter weniger einschränkenden Voraussetzungen mit diesem Fragenkreis beschäftigt. Es bezeichne $\alpha_0 \in [-\infty, \infty[$ das Infimum und $\Gamma := \{p \in M \mid f(p) = \alpha_0\}$ die Minimalmenge von $f: M \to \mathbf{R}$. Ist f zunächst $\mathscr{C}^\infty$-konvex, so liegt es nahe, wie in der Differentialtopologie üblich, das Vektorfeld $X = \operatorname{grad} f / |\operatorname{grad} f|^2$ zu betrachten, das in $M \setminus \Gamma$ definiert ist. Ist $\alpha > \alpha_0$, so liefert der Fluß von X einen Diffeomorphismus $\Psi: M \setminus \Gamma \to f^{-1}(\alpha) \times]\alpha_0, \infty[$, dessen zweite Komponente mit $f \mid M \setminus \Gamma$ übereinstimmt. Die Niveaumengen $f^{-1}(\alpha)$ für $\alpha > \alpha_0$ sind also untereinander diffeomorphe Hyperflächen von M. Ist f überdies strikt konvexe Ausschöpfungsfunktion, also Γ einpunktig, so sind die Subniveaumengen $S_f(\alpha)$ für nahe bei α_0 gelegene α diffeomorph zu abgeschlossenen Bällen, und eine geeignete Verklebung mit Ψ liefert einen Diffeomorphismus von M auf $\mathbf{R}^m$. Auf diesem Wege haben Greene/Wu [1976] in Verbindung mit ihrem Approximationssatz (4.4) gezeigt:

(7.6) Satz *Eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit* M, *auf der eine strikt konvexe Ausschöpfungsfunktion* $f: M \to \mathbf{R}$ *existiert, ist diffeomorph zum* $\mathbf{R}^m$.

Insbesondere ist eine vollständige nichtkompakte riemannsche Mannigfaltigkeit M mit $K \geqslant 0$ diffeomorph zum $\mathbf{R}^m$, wenn außerhalb einer kompakten Teilmenge $K > 0$ gilt (7.5). Im Falle m = 3 genügt es, statt der letzten Bedingung zu fordern, daß alle Schnittkrümmungen in einem *festen* Punkt positiv sind. Das hat Burago [1976] unter wesentlicher Verwendung der verallgemeinerten Gauß/Bonnet/Chern Gleichung (6.11) gezeigt. Für m = 2 ist dies ebenfalls richtig (Cohn-Vossen [1935]), während die entsprechende Frage für $m \geqslant 4$ offen ist. Yau [1977] hat den Diffeomorphiesatz (7.6) mit Hilfe der Integralmittelung der Art (2.2) auf den equivarianten Fall einer kompakten Isometriegruppe erweitert. Für $K > 0$ auf ganz M ist die Diffeomorphie von M mit $\mathbf{R}^m$ ein Hauptergebnis von Gromoll/Meyer [1969].

Der Fall einer bloß stetigen konvexen Funktion ist schwieriger. Hierzu hat Bangert [1978.a] unter Verwendung der direkten Methoden der geodätischen Konvexität gezeigt:

(7.7) **Satz** *Die konvexe Funktion* $f: M \to \mathbf{R}$ *auf der vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit* M *besitze wenigstens eine kompakte nichtleere Niveaumenge. Für jedes* $\alpha > \alpha_0$ *existiert dann ein Homöomorphismus* $\Psi: M \setminus \Gamma \to f^{-1}(\alpha) \times]\alpha_0, \infty[$, *dessen zweite Komponente mit* $f \mid M \setminus \Gamma$ *übereinstimmt. Insbesondere sind alle Niveaumengen* $f^{-1}(\alpha)$ *für* $\alpha > \alpha_0$ *untereinander homöomorph. Besitzt* f *kein Minimum, so sind die Niveaumengen zusammenhängend.*

In diesem Zusammenhang wäre es wünschenswert, diejenigen vollständigen riemannschen Metriken auf Produkten $L \times \mathbf{R}$ anzugeben, für die die zweite Projektion eine konvexe Funktion ist.

Im Falle $K \geqslant 0$ auf ganz M existiert nach (7.4) eine konvexe Ausschöpfungsfunktion $f: M \to \mathbf{R}$, auf die die Homöomorphieaussage (7.7) angewendet werden kann. Ferner ist nach (5.11) jedes Subniveau $S_f(\alpha) \neq \emptyset$ homöomorph zu einer Tubenumgebung seiner Seele im Normalenbündel von int $(S_f(\alpha))$. Cheeger/Gromoll [1972] haben Homöomorphismen dieser beiden Arten in geeigneter Weise verbunden und dadurch den Grundstein für das folgende *Seelentheorem* gelegt, das den eigentlichen Durchbruch in der Strukturtheorie dieser Mannigfaltigkeiten darstellte; die Glättungen wurden später von Poor [1974] und Šarafutdinov [1974] durchgeführt.

(7.8) **Satz** *Eine vollständige nichtkompakte riemannsche Mannigfaltigkeit* M *mit* $K \geqslant 0$ *ist diffeomorph zum Normalenbündel einer kompakten totalgeodätischen Untermannigfaltigkeit* S *von* M *ohne Rand mit* $\dim S < m$.

Wichtige Anwendungen konvexer Ausschöpfungsfunktionen beziehen sich auf Wachstumseigenschaften geometrischer Funktionale auf nicht kompakten Mannigfaltigkeiten.

In Verallgemeinerung von (2.6) läßt sich die Wachstumsrate des Volumens abschätzen, wenn eine Ausschöpfungsfunktion mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften vorgegeben ist. Hiermit und mit Anwendungen auf die Analysis subharmonischer Funktionen haben sich Greene/Wu [1974] ausführlich beschäftigt.

Geometrisch interessant ist das Verhalten der Gesamtkrümmung bei nichtkompakten Mannigfaltigkeiten. Für vollständige Flächen besagt ein klassischer Satz von Cohn-Vossen [1935]

$$(7.9) \quad \frac{1}{2\pi} \int_M K \, d\mu \leqslant \chi(M),$$

vorausgesetzt die linke Seite existiert als erweiterte reelle Zahl (vgl. auch Huber [1957] und Bangert [1980.b]). In höheren Dimensionen ist die entsprechende Abschätzung nicht generell richtig (Portnoy [1971]). Ist $f: M \to \mathbf{R}$ eine konvexe Ausschöpfungsfunktion, so besitzen die Subniveaumengen $S_f(\alpha) \neq \emptyset$ nach (6.3) den schöpfungsfunktion, so besitzen die Subniveaumengen $S_f(\alpha) \neq \emptyset$ nach (6.3) den gleichen Homotopietyp wie M selbst; damit folgt für die Euler-Charakteristiken: $\chi(S_f(\alpha)) = \chi(M)$. Nun kann man die Gauß/Bonnet/Chern-Ungleichungen für $S_f(\alpha)$ ausnutzen, wenn die entsprechenden Krümmungsannahmen für genügend große α erfüllt sind. Der Grenzübergang $\alpha \to \infty$ führt dann unter Beachtung von Satz (7.4) zu den folgenden *Verallgemeinerungen der Cohn-Vossen-Ungleichung* (7.9):

(7.10) Satz *Sei* M *eine vollständige, nichtkompakte orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit. Für* $m \leqslant 5$ *sei die Schnittkrümmung* K *außerhalb einer kompakten Teilmenge von* M *nichtnegativ; für* $m \geqslant 6$ *sei der Krümmungsoperator* $\mathscr{R}$ *außerhalb einer kompakten Teilmenge von* M *positiv semidefinit. Dann gilt*

$$\int_M \mathscr{K} \, d\mu \leqslant \chi(M),$$

einschließlich der endlichen Existenz dieser Größen.

Das uneigentliche Integral über M ist zu verstehen im Sinne der Moore/Smith-Konvergenz bezüglich der durch die Inklusion gerichteten Familie aller Teilkompakta von M.

Mit Satz (7.10) wird eine von Gromoll/Meyer [1969] gestellte Frage teilweise beantwortet. Ohne Ausnahmemenge ist dieser Satz von Walter [1975.b] aufgestellt worden. Ein Beweis der obigen Fassung für m = 4 wurde von Greene/Wu [1976] skizziert; bei der Durchführung stößt man allerdings auf die nach (6.12) genannten Schwierigkeiten. Jedoch kann die Beweismethode von Walter [1975.b] direkt für die Situation von (7.10) übernommen werden.

Zum Abschluß seien einige Themenkreise erwähnt, bei denen die geodätische Konvexität mehr oder weniger stark hineinspielt, die jedoch aus räumlichen oder zeitlichen Gründen nicht mehr systematisch eingeordnet werden konnten: Šarafutdinov [1976] stellte für vollständige, nichtkompakte Mannigfaltigkeiten M, die der Pinching-Bedingung $0 \leqslant K \leqslant 1$ genügen, die Ungleichung $r(M) \geqslant \min\{\pi, r(S)\}$ zwischen den Injektivitätsradien von M und einer Seele S auf. Eberlein [1973], [1978] und Eberlein/O'Neill [1976] untersuchten ausführlich negativ gekrümmte Räume z. T. mit einem Visibilitätsaxiom, wobei Konvexitätseigenschaften der Busemann-Funktion und (für m = 2) konvexe Zerschneidungen von Flächen eine Rolle spielen. Tribuzy [1978] gab eine Kennzeichnung euklidischer Räume durch genügend viele gleichschenklige Dreiecke. Wissner [1978] untersuchte kovariante Differentialgleichungen und gewann damit zusammenhängende Splitting-Aussagen. Neuerdings lieferten Greene/Shiohama [1980] die Verallgemeinerung des Satzes (7.7) über Mannigfaltigkeiten, die eine nicht lokal konstante, konvexe Funktion tragen, ohne Kompaktheitsannahmen an die Niveaumengen. Schließlich sei hingewiesen auf die Arbeiten von Walter [1975.a] und Greene/Wu [1975], die einige der o. g. Resultate zu einem früheren Zeitpunkt ankündigten.

Literatur

Die Abkürzungen FdM, Zbl und MR verweisen auf die Referatenorgane Fortschritte der Mathematik, Zentralblatt der Mathematik und Mathematical Reviews, wobei hinter der Bandzahl die Seite bzw., falls vorhanden, die Ordnungsnummer der Besprechung angegeben ist. Die Zahlen in eckigen Klammern am Ende bezeichnen jeweils die Abschnitte der vorliegenden Arbeit, in denen der Artikel zitiert wird.

Aleksandrov, A. D. [1939]: Über das fast überall existierende Differential einer konvexen Funktion und gewisse damit zusammenhängende Eigenschaften konvexer Flächen (Russ.) Leningrad. Gos. Univ. Učen. Zap., Math. Ser. **6** (1939) 3–35 (Dt. Übers.: Univ. Bibl. TU Hannover u. Techn. Inf. bibl., Ostsprachenabteilung-Übersetzungsstelle (800/4630)); MR 2.155. [5]

Alexander, S. [1977]: Locally convex hypersurfaces of negatively curved spaces. Proc. Amer. Math. Soc. **64** (1977) 321–326; MR 56.6571; Zbl 398.53028. [3]

Alexander, S. [1978]: Local and global convexity in complete riemannian manifolds. Pacific J. Math. **76** (1978) 283–289; Zbl 384.52003. [3]

Alexander, S.; Bishop, R. L. [1974]: Convex supporting domains on spheres. Illinois J. Math. **18** (1974) 37–47; MR 48.7158; Zbl 272.53026. [7]

Alfsen, E. M. [1971]: Compact convex sets and boundary integrals. New York – Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag 1971. = Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 57, x + 210 pp.; MR 56.3615; Zbl 209.426. [0, 7]

Bangert, V. [1977]: Konvexität in riemannschen Mannigfaltigkeiten. Diss. Univ. Dortmund, Febr. 1977, 138 S. [2–7]

Bangert, V. [1978.a]: Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nichtkonstanter konvexer Funktion. Arch. Math. (Basel) **31** (1978) 163–170; Zbl 372.53021 u. 383.53017. [7]

Bangert, V. [1978.b]: Konvexe Mengen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **162** (1978) 263–286; Zbl 369.52006 u. 383.52006. [3, 5, 6, 7]

Bangert, V. [1978.c]: Über die Approximation von lokal konvexen Mengen. Manuscripta Math. **25** (1978) 397–420; Zbl 392.53027. [4, 5]

Bangert, V. [1979.a]: Analytische Eigenschaften konvexer Funktionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. J. f. d. Reine Angew. Math. **307/308** (1979) 309–324; Zbl 396.52007. [3, 5]

Bangert, V. [1979.b]: Totally convex sets in complete riemannian manifolds. J. Differential Geom. (erscheint) [2, 6]

Bangert, V. [1980.a]: Closed geodesics on complete surfaces. Math. Ann. **251** (1980) 83–96 [0, 7]

Bangert, V. [1980.b]: Total curvature and the topology of complete surfaces. Compositio Math. **41** (1980) 95–105; Zbl 403.53023. [7]

Bangert, V. [1980.c]: On the existence of escaping geodesics. Prepr. [0]

Bangert, V. [1980.d]: Geodesics and totally convex sets on surfaces. Prepr. [0]

Bishop, R. L. [1974]: Infinitesimal convexity implies local convexity. Indiana Univ. Math. J. **24** (1974) 169–172; MR 50.3154; Zbl 268.53011 u. 289.53026. [3]

Bishop, R. L.; O'Neill, B. [1969]: Manifolds of negative curvature. Trans. Amer. Math. Soc. **145** (1969) 1–49; MR 40.4891; Zbl 191.520. [0, 3, 6, 7]

Bonnesen, T.; Fenchel, W. [1934]: Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer-Verlag, 1934. = Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 3, vii + 164 S. FdM 60.673; Zbl 8.77. [0]

Burago, J. D. [1976]: Three-dimensional open riemannian spaces of nonnegative curvature (Russ., English summary) Studies in topology, II. Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. **66** (1976) 103–113, 207. English transl.: J. Soviet Math. **12** (1979) 65–72; MR 56.3768; Zbl 364.53016. [0, 7]

Burago, J. D.; Zalgaller, V. A. [1974]: Sufficient criteria of convexity (Russ.) Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. **45** (1974) 3–52. English transl.: J. Soviet. Math. **8** (1978) 395–435; MR 51.13862; Zbl 348.52003 u. 389.52001. [3]

Burago, J. D.; Zalgaller, V. A. [1977]: Convex sets in riemannian spaces of non-negative curvature (Russ.) Uspehi Mat. Nauk **32** (1977) 3–55. English transl.: Russian Math. Surveys **32** (1977) 1–57; MR 57.4054; Zbl 397.53031. [5]

B u s e m a n n, H. [1955]: The geometry of geodesics. New York: Academic Press. Inc. 1955, x + 422 pp.; MR 17.779; Zbl 112.370. [0]
C h e e g e r, J.; E b i n, D. G. [1975]: Comparison theorems in riemannian geometry. North-Holland Mathematical Library, Vol. 9. Amsterdam-Oxford: North-Holland Publishing Co.; New York: American Elsevier Publishing Co., Inc., 1975, viii + 174 pp.; MR 56.16538; Zbl 309.53035. [7]
C h e e g e r, J.; G r o m o l l, D. [1972]: On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. Ann. of Math. (2) **96** (1972) 413–443; MR 46.8121; Zbl 246.53049. [0, 3–7]
C o h n - V o s s e n, St. [1935]: Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen. Compositio Math. **2** (1935) 69–133; FdM 61.789; Zbl 11.225. [7]
D e b r u n n e r, H. E. [1970]: Helly type theorems derived from basic singular homology. Amer. Math. Monthly **77** (1970) 375–380; MR 41.6056; Zbl 191.549. [2]
E b e r l e i n, P. [1973]: Geodesic flows on negatively curved manifolds II. Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973) 57–82; MR 47.2636; Zbl 264.53027. [7]
E b e r l e i n, P. [1978]: Goedesics and ends in certain surfaces without conjugate points. Mem. Amer. Math. Soc. **199** (1978), 111 pp.; Zbl 379.53017. [7]
E b e r l e i n, P.; O ' N e i l l, B. [1973]: Visibility manifolds. Pacific J. Math. **46** (1973) 45–109; MR 49.1421; Zbl 264.53026. [7]
F e d e r e r, H. [1969]: Geometric measure theory. New York – Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag 1969. = Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 153, xiv + 676 pp.; MR 41.1976; Zbl 176.8. [1]
G e r o c h, R. [1976]: Positive sectional curvature does not imply positive Gauss-Bonnet integrand. Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976) 267–270; MR 52.11784; Zbl 325.53042. [6]
G o r d o n, W. B. [1970]: Convex functions, harmonic maps, and the stability of Hamiltonian systems. Mathematics Research Center, Report 70-8. NRL Report 7143. Naval Research Laboratory, Washington, D. C., 1970, 10 pp.; MR 43.8090. [7]
G o r d o n, W. B. [1972]: Convex functions and harmonic maps. Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972) 433–437; MR 45.1075; Zbl 216.428 u. 234.49026. [7]
G o r d o n, W. B. [1974]: The existence of geodesics joining two given points. J. Differential Geom. **9** (1974) 443–450; MR 49.4032; Zbl 281.53035. [7]
G r e e n e, R. E.; W u, H. [1973]: On the subharmonicity and plurisubharmonicity of geodesically convex functions. Indiana Univ. Math. J. **22** (1973), 641–653; MR 54.10672; Zbl 235.53039. [0, 4]
G r e e n e, R. E.; W u, H. [1974]: Integrals of subharmonic functions on manifolds of nonnegative curvature. Invent. Math. **27** (1974) 265–298; MR 52.3605; Zbl 342.31003. [0, 7]
G r e e n e, R. E.; W u, H. [1975]: Approximation theorems, C^∞-convex exhaustions and manifolds of positive curvature. Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975) 101–104; MR 50.14579; Zbl 307.53026. [7]
G r e e n e, R. E.; W u, H. [1976]: C^∞-convex functions and manifolds of positive curvature. Acta Math. **137** (1976) 209–245; MR 56.16539; Zbl 372.53019. [4, 7]
G r e e n e, R. E.; W u, H [1979]: C^∞-approximations of convex, subharmonic and plurisubharmonic functions. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979) 47–84. [0, 4]
G r e e n e, R. E.; S h i o h a m a, K. [1980]: Convex functions on complete noncompact manifolds: Topological Structure. Prepr. [7]
G r o m o l l, D.; M e y e r, W. [1969]: On complete open manifolds of positive curvature. Ann. of Math. (2) **90** (1969) 75–90; MR 40.854; Zbl 191.199. [0, 6, 7]
G r o m o l l, D; K l i n g e n b e r g, W.; M e y e r, W. [1975]: Riemannsche Geometrie im Großen. 2. Aufl. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1975. = Lecture Notes in Mathematics, Vol. 55, vi + 287 pp. (1. Aufl. 1968); MR 37.4751 u. 51.1651; Zbl 155.307 u. 293.53001. [0]
H e i n t z e, E.; I m H o f, H. C. [1977]: Geometry of horospheres. J. Differential Geom. **12** (1977) 481–491. [7]
H u b e r, A. [1957]: On Subharmonic functions and differential geometry in the large. Comment. Math. Helv. **32** (1957) 13–72; MR 20.970; Zbl 80.150. [7]
I i, K. [1972]: Minimal submanifolds and convex functions. Tôhoku Math. J. (2) **24** (1972) 571–579; MR 48.7176; Zbl 248.53034. [0]
K a r c h e r, H. [1968]: Schnittort und konvexe Mengen in vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **177** (1968) 105–121; MR 37.2131; Zbl 157.288. [0, 3, 6]
K a r c h e r, H. [1975]: Globale Riemannsche Geometrie. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **77** (1975) 66–77; MR 58.7411; Zbl 311.53051. [7]

Kleinjohann, N. [1979]: Eindeutige metrische Projizierbarkeit und Konvexität in riemannschen Mannigfaltigkeiten. Diss. Univ. Dortmund, Sept. 1979, 91 S. [1, 2, 3, 6]

Kleinjohann, N. [1980.a]: Nächste Punkte in der Riemannschen Geometrie. Math. Z. (erscheint) [1, 6]

Kleinjohann, N. [1980.b]: Convexity and the unique footpoint property in riemannian Geometry. Arch. Math. (Basel) (erscheint) [3]

Kleinjohann, N. [1980.c]: Remark on the Helly number for strongly convex sets on riemannian manifolds. Prepr. [2]

Kneser, M. [1951]: Über den Rand von Parallelkörpern. Math. Nachr. **5** (1951) 241–251; MR 13.154; Zbl 42.408. [6]

Minkowski, H. [1900]: Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **9** (1900) 115–121; FdM 32.300. [0, 6]

Nijenhuis, A. [1959]: A note on hyperconvexity in riemannian manifolds. Canad. J. Math. **11** (1959) 576–582; MR 22.214; Zbl 196.544. [1]

Poor, W. A., Jr. [1974]: Some results on nonnegatively curved manifolds. J. Differential Geom. **9** (1974), 583–600 (= Abstract of the author's dissertation, State University of New York at Stony Brock, 1973); MR 51.11351; Zbl 292.53037. [5, 6, 7]

Portnoy, E. [1971]: Toward a generalized Gauss-Bonnet formula for complete open manifolds. Comment. Math. Helv. **46** (1971) 324–344; MR 45.4319; Zbl 223.53041. [7]

Rinow, W. [1961]: Die innere Geometrie der metrischen Räume. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer Verlag 1961. = Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 105, xv + 520 pp.; MR 23.1290; Zbl 96.163. [0]

Šarafutdinov, V. A. [1973]: Convex sets in riemannian manifolds (Russ.) Sibirsk Mat. Ž. **14** (1973) 1153–1155. English transl.: Siberian Math. J. **14** (1973) 807–809; MR 49.1429; Zbl 277.53026. [4]

Šarafutdinov, V. A. [1974]: Complete open manifolds of nonnegative curvature (Russ.) Sibirsk Mat. Ž. **15** (1974) 177–191. English transl.: Siberian Math. J. **15** (1974) 126–136; MR 49.7952; Zbl 277.53027. [5, 7]

Šarafutdinov, V. A. [1976]: The radius of injectivity of a complete open manifold of nonnegative curvature. (Russ.) Dokl. Akad. Nauk SSSR **231** (1976) 46–48. English transl.: Soviet Math. Dokl. **17** (1976) 1531–1533; MR 56.9459; Zbl 358.53028. [7]

Šaškin, J. A. [1973]: Convex sets, extreme points, and simplexes (Russ.) Itogi Nauki i Tekhniki (Mat. Analiz) **11** (1973) 5–50. English transl.: J. Soviet Math. **4** (1975) 625–655; Zbl 273.46002. [0]

Schneider, R. [1979]: Boundary structure and curvature of convex bodies. Contributions to Geometry. Proceedings of the Geometry Symposium in Siegen 1978. Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1979, 13–59. [0, 5]

Shiohama, K. [1979]: Busemann functions and total curvature. Invent. Math. **53** (1979) 281–297. [7]

Thorbergsson, G. [1977]: Geschlossene Geodätische auf nichtkompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Diss. Univ. Bonn, Juni 1977. Bonner math. Schr., Nr. 101 (1977) 51 S.; Zbl 383.58005. [0, 3]

Thorbergsson, G. [1978]: Closed geodesics on noncompact Riemannian manifolds. Math. Z. **159** (1978) 249–258; Zbl 369.53045. [0, 3]

Tribuzy, I. [1978]: A characterization of $\mathbf{R}^n$. Arch. Math. (Basel) **31** (1978) 517–519; Zbl 399.53010. [7]

Udriste, C. [1976]: Convex functions on Riemannian manifolds (Romanian, English summary) Stud. Cerc. Mat. **28** (1976) 735–745; MR 55.8995; Zbl 372.53017.

Udriste, C. [1977]: Continuity of convex functions on riemannian manifolds. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N. S.) **21 (69)** (1977) 215–218; MR 57.13803; Zbl 372.53018. [3]

Valentine, F. A. [1968]: Konvexe Mengen. Mannheim: Bibliographisches Institut 1968. = BI-Hochschultaschenbücher, Bd. 402/402a, 247 pp. (dt. Übers. d. engl. Originals: Convex sets. New York – Toronto – London: McGraw-Hill 1964. = McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, ix + 238 pp.; MR 30.503 u. 37.2084; Zbl 129.372 u. 157.525. [0, 2, 3, 6]

Vlasov, L. P. [1973]: Approximate properties of sets in linear normed spaces (Russ.) Uspehi Mat. Nauk **28** (1973) 3–66. English transl.: Russian Math. Surveys **28** (1973) 1–66; MR 53.8761; Zbl 291.41028 u. 293.41031. [3]

Walter, R. [1974]: On the metric projection onto convex sets in Riemannian spaces. Arch. Math. (Basel) **25** (1974) 91–98; MR 53.1490; Zbl 311.53054. [0, 5, 6]

W a l t e r, R. [1975.a]: Local and global properties of convex sets in riemannian spaces. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 27, Part. 1. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1975, 109–110; MR 51.6863; Zbl 313.53024. [7]

W a l t e r, R. [1975.b]: A generalized Allendoerfer-Weil formula and an inequality of the Cohn-Vossen type. J. Differential Geom. **10** (1975) 167–180; MR 53.9111; Zbl 308.53042. [0, 6, 7]

W a l t e r, R. [1976]: Some analytical properties of geodesically convex sets. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **45** (1976) 263–282; MR 54.6029; Zbl 332.53026. [0, 3, 5]

W a l t e r, R. [1978]: Differentialgeometrie. Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1978, iii + 278 pp.; MR 58.7412; Zbl 369.53001. [6]

W a r n e r, F. W. [1966]: Extension of the Rauch comparison theorem to submanifolds. Trans. Amer. Math. Soc. **122** (1966) 341–356; MR 34.759; Zbl 139.156. [4]

W h i t n e y, H. [1957]: Geometric integration theory. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1957, xv + 387 pp.; MR 19.309; Zbl 83.282. [4]

W h i t e h e a d, J. H. C. [1932]: Convex regions in the geometry of paths. Quart. J. Math. Oxford **3** (1932) 33–42; FdM 58.763; Zbl 4.131. [1]

W i s s n e r, H. W. [1978]: Geodätische Konvexität in riemannschen Mannigfaltigkeiten. Diss. Univ. Erlangen – Nürnberg, 1978. [7]

W u, H. [1974]: The spherical images of convex hyperfaces. J. Differential Geom. **9** (1974) 279–290; MR 50.1182; Zbl 282.53040. [3]

W u, H. [1979]: An elementary method in the study of nonnegative curvature. Acta Math. **142** (1979) 57–78; Zbl 403.53022. [0, 5, 7]

Y a u, S. T. [1974]: Non-existence of continuous convex functions on certain Riemannian manifolds. Math. Ann. **207** (1974) 269–270; MR 49.3771; Zbl 261.53036. [2]

Y a u, S. T. [1977]: Remarks on the groups of isometries of a riemannian manifold. Topology **16** (1977) 239–247; MR 56.6686; Zbl 372.53020. [7]

Zusatz bei der Korrektur (10. 10. 1980): Auf die folgenden, nachträglich bekanntgewordenen Arbeiten sei hingewiesen. Von Bangert [1980.e] werden die im Titel genannten Mengen durch Funktionen der Klasse $\mathscr{F}$ charakterisiert. Bujalo [1976] und [1978] verfolgt einige Begriffe der A. D. Aleksandrovschen Krümmungslehre im Riemannschen und stellt eine geometrische Ungleichung für die mittlere Krümmung eines konvexen Körpers in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M mit $K \geqslant 0$ auf. Das Problem (2.3) wurde inzwischen von Kleinjohann [1980.d] in positivem Sinne gelöst. Kleinjohann [1980.b] bringt nunmehr eine vollständige Kennzeichnung der lokalen Konvexität durch die positive Semidefinitheit der verallgemeinerten zweiten Fundamentalform, wodurch der nach (3.5) genannte Satz von Bishop [1974] erheblich verbessert wird.

B a n g e r t, V. [1980.e]: Sets with positive reach. Prepr.

B u j a l o, S. V. [1976]: Shortest paths on convex hypersurfaces of riemannian spaces (Russ.) Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov **66** (1976) 114–132. English transl.: J. Soviet. Math. **12** (1979) 73–85; Zbl 364.53024 u. 405.53041

B u j a l o, S. V. [1978]: Some analytic properties of convex sets in riemannian spaces (Russ.) Mat. Sbornik. n. Ser. **107(149)** (1978) 37–55. English transl.: Math. USSR Sbornik **35** (1979) 333–350; Zbl 393.52004

K l e i n j o h a n n, N. [1980.d]: Convex sets and sublevels of convex functions in riemannian geometry. Resultate d. Math. (erscheint).

Prof. Dr. R. Walter
Institut für Mathematik
Universität Dortmund
Postfach 500500
D-4600 Dortmund 50

(*Eingegangen: 7. 7. 1980*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
83 (1981) 32–44

Microlocal Analysis of Distributions

L. Gårding, Lund

1 Introduction

Heisenberg's uncertainty principle says that one cannot simultaneously localize functions in physical space and their Fourier transforms in momentum space, but microlocal analysis of distributions does almost that. It localizes modulo smooth functions in physical space and at infinity in momentum space and it grew out of the geometrical optics approximation of solutions of partial differential equations describing wave propagation. This lecture is elementary with very few proofs but, introducing the singular spectrum and the singularity function of a distribution right from the beginning, it takes the subject by its horns. At the end there is a review of some applications and a bibliography.

As the title indicates, we are dealing with distributions. There is a microlocal theory also for Sato's hyperfunctions. It is more algebraic and uses homological algebra in an essential way (see the bibliography).

2 The singularity function and the singular spectrum of a distribution

Until 30 years ago, the analysis of singularities of solutions of partial differential equations was a painful matter, especially for non-elliptic ones. A real understanding first became possible within the framework of Schwartz's distributions defined as continuous linear forms $f \to u(f)$ from spaces $\mathscr{D}(X) = C_0^\infty(X)$ of C^∞ functions f with compact supports in open sets X of $\mathbf{R}^n$, conveniently topologized. Putting $u(f) = \int u(x)f(x)dx$, a locally integrable function u gives rise to a distribution. A distribution u has a support and a singular support defined as the complement of the largest open set where, respectively, u vanishes or is (represented by) a C^∞ function.

The action of a differential operator $P(x,\partial) = \Sigma\, a_\alpha(x)\partial^\alpha$ with C^∞ coefficients a_α on a distribution u, defined by $Pu(f) = u(P'f)$ where $P'(x,\partial) = \Sigma(-\partial)^\alpha a_\alpha(x)$ is the adjoint of P, reduces by integrations by parts to the action of P on smooth functions. If we agree to write u(f) as $\int u(x)f(x)dx$ also when u is a distribution, the classical formulas of differential calculus get new life. For instance, there is a one line definition of a Green's function or fundamental solution of P: a distribution E(x,y) such that $P(x,\partial_x)E(x,y) = \delta(x-y)$ where δ is the Dirac distribution, $\int \delta(x-y)f(y)dy = f(x)$. The usefulness of these simple ideas is apparent also in Schwartz's kernel theo-

0012–0456/81/01 0032–13 $02.60/0

rem: a linear continuous map A of $\mathscr{D}(Y)$ to $\mathscr{D}'(X)$ has a unique kernel, a distribution $A(x,y)$ on $X \times Y$, such that

$$(Au)(x) = \int A(x,y)u(y)dy$$

for all u in $\mathscr{D}(Y)$.

Let $\mathscr{S}$ be the space of complex C^∞ functions on $\mathbf{R}^n$ all whose derivatives are $O(|x|^{-N})$ for $x \to \infty$ and all N and let $\mathscr{S}$ carry the corresponding topology. The dual $\mathscr{S}'$ of $\mathscr{S}$ is called the space of tempered distributions. The Fourier transform

$$f \to \hat{f} = \mathscr{F}f(\xi) = \int e^{-ix\xi}f(x)dx$$

is an isomorphism $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$ with inverse $(2\pi)^{-n}\mathscr{F}$ and induces a corresponding isomorphism of $\mathscr{S}'$.

The Fourier transform $\hat{u}$ of a distribution u with compact support is an entire analytic function whose growth at infinity reflects the singularities of u. In particular, that $u \in C_0^\infty$ means that $\hat{u}$ is of fast decrease, i. e. $O(|\xi|^{-N})$ for all N. More generally, for every such u there is a maximal open cone in ξ-space where this estimate holds locally uniformly for every N. The complement $\Sigma(u)$ of this cone will be called the high frequency set of u. It is easy to verify that $\Sigma(fu) \subset \Sigma(u)$ for every f in C_0^∞ and this opens the way to a localization in x-space. We define the high frequency set $S_x(u)$ of any distribution u to be the intersection of all $\Sigma(fu)$ when $f(x) \neq 0$. It is also the limit of $\Sigma(fu)$ as the support of f tends to x and $f(x) \neq 0$. Intuitively, $S_x(u)$ is the set of high frequencies that enter into the Fourier decomposition of u at x. It is the fiber over x in the *singularity spectrum* $S(u)$ of u defined to be the set of x,ξ such that $\xi \in S_x(u)$. Other names are wave front set $WF(u)$ and microsupport. The projection of $S(u)$ on x-space is precisely the singular support of u.

More detailed information about the singularities of a distribution u modulo C^∞ functions is given by its *singularity function* $s_u(x,\xi)$ defined as follows. The number $s_u(x,\xi)$, ($+\infty$ allowed) is the least upper bound of numbers s such that $|\eta|^s\widehat{fu}(\eta)$ is square integrable in some open cone around ξ and for some $f \in C_0^\infty$ such that $f(x) \neq 0$. One comes close to the bound simply by taking the support of f small and outside $S(u)$, the bound $+\infty$ is attained by such f. The function $x,\xi \to s_u(x,\xi)$ is continuous from above and homogeneous of degree zero in ξ and $S(u)$ is the closure of the set $s_u < \infty$. Intuitively, $s_u(x,\xi)$ is the number of square integrable derivatives of u at x after filtering away the high frequencies off ξ. This interpretation is supported by the inequality $s_{Pu}(x,\xi) \geqslant s_u(x,\xi) - m$ where P is a differential operator with C^∞ coefficients of order at most m close to x. It suffices to prove this when $P = \partial_1$ in which case it results by taking the Fourier transform of the identity $f\partial_1 u = \partial_1(fu) - (\partial_1 f)u$.

Here are the simplest examples: when n = 1, the Fourier transforms of $\delta(x)$, $(x + i0)^{-1}$, $(x - i0)^{-1}$ are $1, -2\pi iH(\xi), 2\pi iH(-\xi)$ where H is the Heaviside function. For all of them, the singular support is the origin and the fibers there are $(1, -1)$, (1), (-1) where 1 refers to the positive and -1 to the negative axis. In fact, multiplication by a C_0^∞ function f for which $f(0) \neq 0$ preserves the asymptotic behaviour of the Fourier transforms above. The reader should also convince himself that in all these examples the singularity function is $-1/2$ when not infinite.

It is clear that if u does not depend on a coordinate x_1, then its singularity function s_u is also independent of x_1. More precisely, we can prove the following microlocal version of the fundamental theorem of calculus: outside $S(\partial_1 u)$, s_u is locally independent of x_1 and infinite when $\xi_1 \neq 0$. In fact, put $x_t = (x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)$ and let (x_0, ξ_0) be outside $S(\partial_1 u)$. Let f denote C_0^∞ functions with support close to x_0 and consider

$$f(x)u(x_t) - f(x)u(x) = \int_0^t f(x)\partial_1 u(x_s)ds$$

when t is small and x is close to x_0. The Fourier transform of the right side is of fast decrease conically close to ξ_0 and since the Fourier transforms of $f(x)u(u_t)$ and $f(x_{-t})u(x)$ have the same absolute value, this means that the Fourier transforms of $f(x)u(x)$ and $f(x_{-t})u(x)$ differ by a function of fast decrease conically close to ξ_0. Hence, close to (x_0, ξ_0), s_u is independent of x_1. Further, for all $m > 0$ one has $\partial_1^m(fu) = (\partial_1^m f)u + \ldots$ where the terms not written out have Fourier transforms of fast decrease conically close to ξ_0. Hence the Fourier transform of fu is $O(|\xi|^N |\xi_1|^{-m})$ for some fixed N and all $m > 0$ so that $s_u = \infty$ when $\xi_1 \neq 0$.

The singularity spectrum and the singularity function of a distribution behave very simply under smooth changes of variable $x = x(y)$ with inverse $y = y(x)$, in fact so that

$$(2.1) \quad s_u(x, \xi) = s_v(y, \eta), \qquad S_y(v) = {}^t x'(y) S_x(u)$$

where $u(x) = v(y)$ and $\xi\, dx = \eta\, dy$ identically. In other words, this singularity function $s_u(x, \xi)$ of a distribution u on a manifold X is a function of homogeneity zero in ξ on $T^*(X)\backslash 0$, the cotangent bundle of X minus its zero section, and $S(u)$ is a closed conical part of it. To make (1) plausible, consider

$$\widehat{fv}(\eta) = \int e^{-iy\eta} f(y)u(x(y))dy = \int e^{-iy(x)\eta} g(x)u(x)dx$$

where $g(x) = f(y)|\det y'(x)|$ and f is a C^∞ function with support close to $y_0 = y(x_0)$. On that support, $y(x)\eta$ is close to $y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)\eta = y_0\eta + (x - x_0)\xi$ so that the last integral ought to be close to $e^{-iy_0\eta + ix_0\xi}$ times $\widehat{gu}(\xi)$.

The concept of the singularity spectrum has an immediate application to products of distributions. If $n = 1$ and the Fourier transforms $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ of two distributions with compact supports $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ are both of fast decrease for large arguments of the same sign, their convolution $u_1 * u_2$ is well defined and with it the product $u_1 u_2$. A partition of unity then shows that two distributions have a well defined product unless the fibers of their singularity spectra contain opposite half-axes or, in other words, when $S_x(u_1) + S_x(u_2)$ does not contain 0 for any x. In this formulation, the statement holds in all dimensions. Further,

$$S_x(u_1 u_2) \subset (S_x(u_1) + S_x(u_2)) \cup S_x(u_1) \cup S_x(u_2)$$

for all x.

3 Oscillatory integrals and Fourier integral operators

Let X be an open part of $\mathbf{R}^n$ and consider oscillatory integrals

(3.1) $F(x) = \int e^{is(x,\theta)}a(x,\theta)d\theta$

with x in X and θ in $\mathbf{R}^N$ for some N. Here the phase function $s(x,\theta)$ is supposed to be real, infinitely differentiable when $\theta \neq 0$ and homogeneous of degree 1 in θ. The amplitude function $a(x,\theta)$ shall be infinitely differentiable with an asymptotic expansion $a \sim a_m + a_{m-1} + \ldots$ for large θ. Here m, the degree of a, is any real number and a_{m-k} is homogeneous of degree $m-k$ in θ and infinitely differentiable when $\theta \neq 0$. The asymptotic expansion means that, for all k and all derivatives and large θ,

$$\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta (a - a_m - \ldots - a_{m-k+1}) = O(|\theta|^{m-k-|\beta|})$$

locally uniformly in x. The class of these functions will be denoted by S^m.

The following result is basic.

Proposition *If*

(3.2) $s_x(x,\theta) \neq 0$ *(when* $\theta \neq 0$*)*

then (1) *defines a distribution* F *in* X *whose singularity spectrum* S(F) *consists of points* (x,ξ) *such that* $\xi = s_x(x,\theta)$, $s_\theta(x,\theta) = 0$ *for some* θ.

To prove this, let $v \in C_0^\infty(X)$ and consider

(3.3) $\int F(x)v(x)dx = \int\int e^{is(x,\theta)}v(x)a(x,\theta)d\theta\, dx.$

This is a true formula when $m < -N$ in which case the integral (1) converges absolutely and F is continuous. Since $F \in C^\infty$ when a is of fast decrease in θ, we may assume that $a(x,\theta) = 0$ when θ is small. Then the differential operator

$$L_x = i^{-1}(s_x^2)^{-1}s_x\partial_x$$

is well defined and reproduces the exponential. The coefficients of its adjoint M_x are $O(|\theta|^{-1})$ so that M_x lowers the degree of $v(x)a(x,\theta)$ by one step. Hence, applying a high power of M_x to this product in (3) does not change the value of the integral when $m < -N$ and defines F as a distribution for any m. Next, consider

(3.3′) $\int F(x)v(x)e^{-i\xi x}dx = \int\int e^{i(s(x,\theta)-x\xi)}v(x)a(x,\theta)dxd\theta$

with real ξ and repeat the argument above with L_x replaced by the operator

$$L_{x,\xi} = i^{-1}((s_x - \xi)^2)^{-1}(s_x - \xi)\partial_x$$

which reproduces the second exponential of (3′). If $s_x(x_0,\theta) - \xi_0 \neq 0$ for some x_0, ξ_0 and all θ, the coefficients of its adjoint are $O((|\xi| + |\theta|)^{-1})$ when ξ is conically close to ξ_0 and x close to x_0. Introducing high powers ot the adjoint as before and choosing the support of v close to x_0, we see that the left side of (3′) is a fast decrease conically close to ξ_0. Hence S(F) consists of points (x,ξ) with $\xi = s_x(x,\theta)$ for some θ. Next, return to (1) and use the differential operator $L_\theta = i^{-1}(s_\theta^2)^{-1}s_\theta\partial_\theta$ which, when defined, reproduces the exponential and whose adjoint lowers the degree of $a(x,\theta)$ by 1. Hence, retaining $a(x,\theta)$ in a θ-conical neighborhood of the set where s_θ vanishes and making it rapidly decreasing in θ outside, just changes F by a

C^∞ function. This means that, above, we can disregard all θ with $s_x(x, \theta) \neq 0$ and this finishes the proof.

Let X and Y be open parts of $\mathbf{R}^n$. We shall consider operators A from the space $\mathscr{E}'(Y)$ of compactly supported distributions in Y to distributions in X defined by oscillating integrals

(3.4) $Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{is(x,\eta)} a(x, \eta)\hat{u}(\eta) d\eta$

with phase s and amplitude a depending on n variables η. When $s(x, \eta) = x\eta$ and all $\eta \to a(x, \eta)$ are polynominals, the Fourier inversion formula reduces (4) to

$$Au(x) = a(x, D)u(x)$$

where $a(x, D)$, $D = \partial/i$, is a differential operator whose characteristic polynomial is $a(x, \xi)$. When $s(x, \xi) = x\xi$ and $a(x, \xi)$ is an arbitrary amplitude function, A is said to be a pseudodifferential operator. In the general case, A is said to be a Fourier integral operator. We shall now study its properties.

In the first place, when $u \in C_0^\infty(Y)$, $\hat{u}(\eta)$ is rapidly decreasing so that $Au \in C^\infty(X)$. Next we shall see that $A: C_0^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ extends by continuity to a map $A: \mathscr{E}'(Y) \to \mathscr{D}'(X)$ provided (2) holds, i. e. $s_x(x, \eta) = 0 \Rightarrow \eta = 0$. In fact, using this condition, we just have to repeat the proof that F as defined by (1) is a distribution to see that Au is a distribution and that the required continuity of the extension holds.

To see what A does to the singularity spectrum $S(u)$ of u, note that (4) and the proposition show that $S(Au)$ consists of points (x, ξ) for which $\xi = s_x(x, \eta)$ for some η. Here we may of course discard all η outside of the high frequency set $\Sigma(u)$ of u simply by making $\eta \to a(x, \eta)$ rapidly decreasing there. Now, making the Fourier transform of u explicit we have $Au(x) = \int A(x, y)u(y)dy$ where

(3.5) $A(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(s(x,\eta) - y\eta)} a(x, \eta) d\eta$

is the kernel of A. According to the proposition, this a C^∞ function of x, y when $s_\eta(x, \eta) - y \neq 0$ where $\eta \to a(x, \eta)$ is not rapidly decreasing. If this happens close to some x_0, y_0, putting $u = 0$ close to y_0 but retaining u elsewhere changes Au by a C^∞ function. Hence we may also discard those η for which $s_x(x, \eta)$ is not in the singular support of u. These remarks and a partition of unity of y, η-space, a bit too long to be given here, when properly carried out prove that

(3.5) $S(Au) \subset ((x, \xi); \xi = s_x(x, \eta) \text{ and } (s_\eta(x, \eta), \eta) \in S(u))$.

Here we can also restrict η to $S_x(a)$, the fiber over x in the singularity spectrum $S(a)$ of $a(x, \eta)$, defined as the complement of the maximal open cone where $\eta \to a(x', \eta)$ is of fast decrease for x' sufficiently close to x.

If we let χ be the relation of pairs (y, η) and (x, ξ) for which $\xi = s_x$, $y = s_\eta$, (5) takes the simpler form

(3.6) $S(Au) \subset \chi \circ S(u)$.

The relation χ is canonical in the sense of classical mechanics, i. e. one has $d(\xi dx - \eta dy) = d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy = 0$. We shall come back to this after a brief review of pseudodifferential operators. For them, $s(x, \eta) = x\eta$ so that χ is the identity.

Limited space prevents us at this point to go into the global definition of Fourier integral operators from a manifold Y to another one X of the same dimension n. It presupposes a homogeneous canonical relation C in $T^*(Y)\backslash 0 \times T^*(X)\backslash 0$ which is a manifold of dimension 2n and it uses locally defined kernels

$$A(x, y) = \int e^{is(x,y,\theta)} a(x, y, \theta) d\theta$$

with phase functions s such that (y, s_y), (x, s_x) generates C locally when $s_\theta = 0$.

4 Pseudodifferential operators

Taking $s(x, \eta) = x\eta$ and $X = Y$ in (2.1) we get a pseudodifferential operators A,

$$(4.1) \quad Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

mapping $C_0^\infty(X)$ into $C^\infty(X)$ and $\mathscr{E}'(X)$ into $\mathscr{D}'(X)$. Such operators do not increase singular spectra. In fact, (3.5) shows that

$$S_x(Au) \subset S_x(a) \cap S_x(u).$$

In particular, A does not increase singular supports and its kernel

$$A(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)} a(x, \xi) d\xi$$

is a C^∞ function when $x \neq y$. The operator is said to be properly supported when the support of its kernel is so close to the diagonal $x = y$ that the distributions $y \to A(x, y)$ and $y \to \acute{A}(x, y)$ have compact supports for all x and y respectively. Such operators map the spaces $\mathscr{D}(X)$, $C^\infty(X)$, $\mathscr{E}'(X)$, $\mathscr{D}'(X)$ into themselves. It is easy to see that any pseudodifferential operators is the sum of a properly supported one and a C^∞ operator, i. e. one with a C^∞ kernel.

The amplitude function $a(x, \xi)$ is called the symbol of A and A is also written as $a(x, D)$. When $a \in S^m$, A and a are said to be of order m and the principal part a_m of a is called the principal symbol of A provided it does not vanish. The symbol a is in $S^{-\infty} = \bigcap S^m$ if and only if A is a C^∞ operator, i. e. maps C^∞ functions to C^∞ functions. Provided we compute modulo C^∞ operators, the pseudodifferential operators form an algebra under composition, invariant under the taking of adjoints and covariant under C^∞ changes of variables. Under these operations, the symbols and principal symbols behave like the characteristic polynomials of partial differential operators and their principal parts. In fact, letting σ_A be the principal symbol of A, the principal symbols of ${}^tA$, $C = AB$ and $A^* = a(x(y), D_{x(y)})$ are, respectively, $\sigma_A(x, -\xi)$, $\sigma_A \sigma_B$ and $\sigma_A(x(y), {}^tx'(y)\eta)$ and the complete symbol of $C = AB$, for instance, is

$$c(x, \xi) = \sum a^{(\alpha)}(x, \xi) D_x^\alpha b(x, \xi)/\alpha!$$

where $a^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)$ and the right side has to be taken as an asymptotic series for large ξ. It follows that pseudodifferential operators can be defined in a C^∞ manifold X and that their principal symbols are functions on $T^*(X)\backslash 0$, the cotangent bundle of X minus its zero section. All this is easy to prove.

Let $H_{(s)}$ be the local Sobolev space of distributions u such that $|\xi|^s \widehat{fu}(\xi)$ is square integrable when $f \in C_0^\infty$. A main point of the theory of pseudodifferential operators is that the map $A: H_{(s)} \to H_{(s-m)}$ is continuous when A has order m and that $Au \in H_{(s-m)} \Rightarrow u \in H_s$ when A is elliptic of order m, i. e. its principal symbol does not vanish. Both properties can be microlocalized as follows.

We say that a distribution u is of class $H_{(s)}$ at a point (x, ξ) if $|\eta|^s \widehat{fu}(\eta)$ is square integrable in an open cone around ξ when $f(x) \neq 0$ and the support of f is close enough to x. A pseudodifferential operator A with symbol $a(x, \xi)$ is said to be or order at most m at (x, ξ) if $a(y, \eta) = O(|\eta|^m)$ when y is close to x and η conically close to ξ. If u and A have these properties, Au is in $H_{(s-m)}$ at (x, ξ) and if A is elliptic at (x, ξ) of order m, i. e. $a(y, \eta) \sim |\eta|^m$ when y is close to x and η conically close to ξ, then u is in $H_{(s)}$ close to (x, ξ) if Au is in $H_{(s-m)}$ close to (x, ξ). These facts are illustrated by the following inequality between singularity functions

(4.2) $\quad s_{Au}(x, \xi) \geqslant s_u(x, \xi) - m_a(x, \xi)$

where $m_a(x, \xi)$ is the greatest lower bound of the order bounds of A at (x, ξ) just defined. When A is elliptic at (x, ξ), there is equality.

Pseudodifferential operators play an important part in the topology of manifolds. When A is such an operator on a compact manifold X and Y is elliptic everywhere, it is easy to see that the kernel of A has finite dimension and that the dimension of its cokernel is also finite. Moreover, the index of A, ind A = dim ker A – dim coker A, depends only on the deformation class of the principal symbol of A respecting the ellipticity. For elliptic operators on a compact manifold whose symbols are square matrices, the index is an important topological invariant which has been analyzed in detail in a series of papers by M. F. Atiyah and collaborators. This application actually played an important part in the development of the theory of pseudodifferential operators. When $a(x, D)$ operates on $L^2(\mathbf{R}^n)$ and the symbols $a(x, \xi)$ and $a(x, \xi)^{-1}$ are bounded and independent of ξ for large ξ, the index is given by an explicit integral

$$\operatorname{ind} a = c_n \int_b \operatorname{tr}(a^{-1} da \wedge \ldots \wedge a^{-1} da)$$

where c_n depends only on n, b is a large sphere in (x, ξ)-space and there are $2n - 1$ factors in the integral making it a closed form. This formula, originally proved by topological methods also has an analytic proof.

What has been described above is the first generation pseudodifferential operaters. There are successive refinements of the theory by modifications of the classes S^m of amplitude functions and by making (1) symmetric in x and y, putting

$$A^w(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi} a((x+y)/2, \xi) d\xi$$

and letting $a^w(x, D)$ be the corresponding operator. This formula is closely connected to one proposed by H. Weyl to quantize general Hamiltonians H(p, q) in a way invariant under linear canonical transformations. The resulting calcules, the Weyl calculus of pseudodifferential operators, actually has this invariance (Hörmander [1]).

5 Conjugation by Fourier integral operators

Let

$$Fv(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{is(x,\eta)} a(x, \eta)\hat{v}(\eta)d\eta$$

be a Fourier integral operator from $\mathscr{E}'(Y)$ to $\mathscr{D}'(X)$. We know that $S(Fv) \subset \chi \circ S(v)$ where χ is the associated canonical relation consisting of pairs (x, ξ), (y, η) for which $\xi = s_x$, $y = s_\eta$. When $s_{x\eta}$ has maximal rank $n - 1$ at a point (x_0, η_0), the phase function s is said to be regular there. When this is the case, χ is a bijection from a neighborhood $Y^* \subset T^*(Y)\backslash 0$ of (y_0, η_0) to a neighborhood $X^* \subset T^*(X)\backslash 0$ of (x_0, ξ_0), homogeneous in the second variable and regular in the sense that $d\chi$ is invertible. Further, the Legendre transform $s'(y, \xi) = xs_x + \eta s_\eta - s$ of s is a phase function corresponding to χ^{-1} in $X^* \times Y^*$. Extend s' to a phase function on $T^*(X)$ and let F' denote corresponding Fourier integral operators. Then it is possible to chose the amplitudes F and F' in such a way that $F'Fv \equiv v$ modulo C^∞ functions when $S(v) \subset Y^*$. More generally, if P is a pseudodifferential operator on X, there is a pseudodifferential operator Q on Y such that $p(x, \xi) = q(y, \eta)$ and

(5.1) $PFv \equiv FQv$

where p, q are the principal symbols and $(x, \xi) \in X^*$, $(y, \eta) \in Y^*$. We say that P and Q are conjugated by F.

The important inequality (4.2) extends to Fourier integral operators,

$$s_{Fv}(x, \xi) \geqslant s_v(y, \eta) - m_a(x, \eta),$$

provided the phase function is regular at the point in question. There is equality when the principal symbol of a does not vanish at (x, η). In particular, with F as in (1) of order zero and with $u = Fv$ we have

(5.2) $s_u(x, \xi) = s_v(y, \eta), \qquad s_{Pu}(x, \xi) = s_{Qv}(y, \eta).$

The statements just made illustrate the fact that the symbolic calculus of pseudodifferential operators extends to Fourier integral operators in such a way that composition of operators corresponds to composition of the corresponding canonical relations and multiplication of suitably defined principal symbols. The details of this, including changes of phase functions and the theory of the Maslov index are, however, too much for a short article.

6 Propagation of singularities

Let P be a differential operator or, more generally, a properly supported differential operator on a manifold X and consider solutions u och $Pu = 0$. In analogy with the equations of classical physics, we may think of u as describing the state of some elastic medium left to itself with the only outside influences coming from the boundary. If, for instance, P is the wave operator $D_1^2 + \ldots + D_{n-1}^2 - c^{-2}D_n^2$ where x_n is time and the rest space variables, the singularities of u move with the velocity c in all directions. This vague statement is made microlocally precise in the following theorem by Hörmander ([4], II, p. 196). Let P be a pseudodifferential operator whose principal symbol $p(x, \xi)$ is real and such that $p(x, \xi) = 0 \Rightarrow dp(x, \xi) \neq 0$ and the vector field $H_p = p_x \partial_\xi - p_\xi \partial_x$ is nowhere proportional to the radial field $\xi \partial_\xi$. Let u be a distribution in X. Then, outside the singularity spectrum S(Pu) of Pu, the singularity function $s_u(x, \xi)$ of u is constant along the bicharacteristics $t \to (x(t), \xi(t))$ of P, solutions of the Hamiltonian system of H_p, $x_t = p_\xi(x, \xi)$, $\xi_t = -p_x(x, \xi)$ with t in an open interval and $p = 0$ at one and hence all points of the interval. In particular, outside S(Pu), S(u) is a union of bicharacteristics.

When P is the wave operator, the bicharacteristics project into x-space as rectilinear movements with velocity c. When $P = D_1$, the bicharacteristics are straight lines parallel to the x_1-axis and in this case we have actually proved the theorem. In the general case it can be proved by conjugating P, without restriction assumed to be order 1, to $Q = \partial / i \partial y_1$ by means of a Fourier integral operator. Since, by classical mechanics, the corresponding canonical map χ maps the bicharacteristics of P to those of Q, the theorem now follows from (5.2). The proof in the special case also shows that if P has order m and $s_{Pu} \geqslant s + m - 1$ along a bicharacteristic, then $s_u \geqslant s$ there if this happens at one point.

It follows from the Hahn-Banach theorem that if P: $\mathscr{D}(X) \to \mathscr{D}(X)$ has a continuous inverse, then its transpose ${}^tP$: $\mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X)$ is surjective. With P as above we are close to this situation provided we stay in a compact set K with the property that no bicharacteristic of P stays over K. In fact, our propagation of singularities result shows that if u and Pu are distributions with support in K and Pu is a C^∞ function, so is u. It is then easy to see that $P: C_0^\infty(K) \to C_0^\infty(K)$ has a finite dimensional kernel N and that for $u \in C_0^\infty(K)$ vanishing on N, the map $Pu \to u$ is continuous. Hence, by the Hahn-Banach theorem, if f in $\mathscr{D}'(X)$ vanishes on N, there is a distribution u such that ${}^tPu = f$ in the interior of K. More precisely, if $f \in H_{(s)}$ we can choose u in $H_{(s+m-1)}$.

When P has a complex principal symbol p, the scene changes completely. The general case here is extremely complicated but the prototype operators $P = D_1 + i x_1{}^k D_2$ with principal symbols $p = \xi_1 + i x_1{}^k \xi_2$ and characteristic variety $p = 0$, i. e. $\xi_1 = x_1 = 0$ are well understood. When k is odd they are microlocally bad at characteristic points with $\xi_2 < 0$ in the sense that there are solutions w of $Pw = 0$ whose singularity function s_w is as large negative as we please at one ray $x = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 < 0$ and infinity outside. Hence the map $Pv \to v$ with v of compact support close to 0 is not continuous from $H_{(\infty)}$ to any $H_{(s)}$ so that ${}^tP$ is not surjective from $\mathscr{D}'$ to $\mathscr{D}$ close to $x = 0$. On the other hand, at the other characteristic points or if k is even, the situation is good in the sense that if $f \in H_{(s)}$ at (x, ξ) there is a u in $H_{(s+k(k+1)^{-1})}$ such that $Pu = f$ at (x, ξ). We also have $s_u \geqslant s_{Pu} + 1 - k(k+1)^{-1}$ everywhere and for all u. There are some nearly complete results of the same nature for pseudodifferential operators of principal type, i. e. such that $p = 0 \Rightarrow dp \neq 0$, (Hörmander [5]), but they are too complicated to be stated here. Let us just mention that where $d\,\mathrm{Re}\, p$ and $d\,\mathrm{Im}\, p$ are linearly independent corresponding to the normal form $D_1 + iD_2$, then the characteristic variety $p = 0$ has a natural foliation by two-dimensional leaves carrying a complex structure. Outside S(Pu), the singularity function is superharmonic on such leaves.

Propagation of singularities under reflections has also been analyzed microlocally. Consider for instance the wave operator $P = D_1^2 + \ldots + D_{n-1}^2 - D_n^2, n > 2$, in a region $X: f(x) > 0$ where $f \in C^\infty$ and $f = 0 \Rightarrow p(f_x) > 0$ where $p(\xi) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 - \xi_n^2$ is the characteristic polynomial. In particular we can take f independent of the time x_n. Physically, solutions u of $Pu = 0$ represent sound waves or light waves in X. Prescribing for instance that $u = 0$ at the boundary $Y: f = 0$, we have reflection. Let us first describe it geometrically. A simple reflection at a point y of Y i described by a broken bicharacteristic $x = y + t\xi^{(1)}$ when $t \leqslant 0$, $x = y + t\xi^{(2)}$ when $t \geqslant 0$ where $p(\xi^{(1)}) = p(\xi^{(2)}) = 0$ and $\xi^{(1)}$ and $\xi^{(2)}$ have the same projection η on $T_y^*(Y) = T_y^*(X)$ modulo multiples of $f_x(y)$. This means that $\xi^{(k)} = \eta + s_k f_x(y)$ where s_1, s_2 are separate real zeros of the polynomial $s \to p(\eta + sf_x(y))$. Then the point (y, η) is said to be hyperbolic. It is said to be elliptic when the two zeros are complex and glancing (or parabolic) when they coincide. The glancing points may be further divided into diffractive and gliding points where, respectively, $H_p{}^2 f$ is positive or negative at (y, η). Through a glancing point (y, η) there passes a bicharacteristic which is tangent to Y. In the diffractive case its projection on x-space lies inside X-close to y, in the other case outside. When $T^*(Y)$ has only diffractive and gliding points, Melrose and Sjöstrand [6] has shown that all local limits of the broken bicharacteristics are either bicharacteristics tangent to Y at a diffractive point or a bicharacteristic of the restriction of p to Y through gliding points, a gliding bicharacteristic. Further, with a suitable definition of singular spectrum at Y, the propagation of singularities theorem extends to the wave equation with boundary condition of $u = 0$ as follows: the singular spectrum is a union of generalized bicharacteristics, limits of the broken ones. The same result holds all finite orders of tangency while infinite order of tangency still presents some problems.

7 Some applications

Perhaps the first substantial application of what is now called Fourier integral operators was made by Peter Lax [2]. He constructed a parametrix for the solution F of the Cauchy problem

$$(7.1)\quad P(t, x, D_t, D_x)F(t, x, y) = 0, \qquad D_t{}^k F(t, x, y) = \delta_{k,m-1}\delta(x - y)$$

where $0 \leqslant k < m$, $\delta_{jk} = 1$ when $j = k$ and 0 otherwise and $P = D_t{}^m + \ldots$ is a differential operator of order m, defined for small t and $x = (x_1, \ldots, x_n)$ which is strongly hyperbolic with respect to the time variable t in the sense that its principal symbol factors as

$$(7.2)\quad p(t, x, \tau, \zeta) = \prod_1^m (\tau - p_k(t, x, \zeta))$$

where the p_k are real and separate for $\zeta \neq 0$ and real. The existence and uniqueness of F is a fact of hyperbolic theory. Note that if $H(t)$ is the Heaviside function, $H(t)F(t, x, y)$ is a fundamental solution of P with pole at y. The parametrix has the form

$$(7.3)\quad G(t, x, y) = \sum_1^m \int a_k(t, x, y, \zeta) e^{is_k(t,x,y,\zeta)} d\zeta$$

where the phase functions s_k are solutions of $s_{kt} - p_k(t, x, s_{kx}) = 0$ such that $s_k = (x - y)\zeta$ when $t = 0$. It is then possible to choose amplitude functions a_k in such a way that G solves (1) modulo C^∞ functions. The k^{th} term G_k on the right of (3) then solves the pseudodifferential equation

$$(D_t - p_k(t, x, D_x))G_k = 0$$

modulo C^∞ functions.

Dropping the index k, let us consider pseudodifferential operators $D_t - P(t, x, D_x)$ where P has a real principal symbol $p(t, x, \xi)$ of order one and oscillating integrals

$$(7.4)\quad E(t, x, y) = \int e^{is(t,x,y,\zeta)} a(t, x, y, \zeta) d\zeta,$$

solutions of $(D_t - P)E = 0$ modulo C^∞ functions, where the phase function s satisfies the Hamilton-Jacobi equation

$$(7.5)\quad s_t - p(t, x, s_x) = 0$$

with $s = (x - y)\zeta$ when $t = 0$. In all this, t, x, y are supposed to be small. Since solutions of (5) in general exist only locally, we have to make such a restriction even if P is defined for all t and x.

Consider curves $x = y(t, y, \zeta)$ implicitly defined by $s_\zeta = 0$. We shall see that they are bicharacteristics of $D_t - p(t, x, D_x)$ taken as orbits of the Hamilton vector field $H_p = p_\xi \partial_x - p_x \partial_\xi$ of p. In fact, since t is small and $s_{x\zeta}$ is the identitiy matrix when $t = 0$, we may assume that $s_{x\zeta}$ is nonsingular. Then, differentiating $s_\zeta = 0$ with respect to t and (5) with respect to ζ, one finds that $dx/dt = -p_\xi(t, x, s_x)$. Differentiating (5) with respect to x and y then gives $ds_x/dt = p_x$, $ds_y/dt = 0$. In other words, $t \to (x, \xi)$ with $\xi = s_x$ is a bicharacteristic which when $t = 0$ passes through (y, η) with $\eta = -s_y$. Let C(y) be the union of these curves when ζ and t vary. Its projection $C^*(y)$ on t, x-space is a sheet of n dimensions issuing from y whose tangent cone at y has the equation $x = y - tp_\zeta(0, y, \zeta)$.

For small t, s_x and s_y do not vanish so that $x \to E(t, x, y)$ and $y \to E(t, x, y)$ are distributions. As in section 3 one sees from (4) that the singularity spectrum of $t, x \to E(t, x, y)$ consists of pairs (t, τ), (x, ξ) for which $\tau = s_t = p$, $\xi = s_x$ and $s_\zeta = 0$. Hence its projection on t, x, ξ-space is contained in the set C(y) above and its projection of t, x-space in the sheet $C_k^*(y)$. In particular, for every factor of (2) one gets a set $C_k(y)$ and a sheet $C_k^*(y)$ and in this case their unions are, respectively, the singularity spectrum and the singular support of the distribution $t, x \to E(t, x, y)$. This gives the classical picture of wave propagation determined by a hyperbolic operator of order m and a point disturbance at $x = y$, $t = 0$, namely m wave fronts spreading with different velocities from the center of disturbance.

Let us now return to (4). So far we have assumed that t, x, y are small, but the set C(y) and the bicharacteristics of $D_t - P$ extends via the Hamilton flow of $p(t, x, \xi)$ to all t, x, y provided P is everywhere defined which we now assume. In the fundamental paper [4] by Hörmander and Duistermaat it is proved that, modulo smooth functions, E(t, x, y) extends uniquely to all t, x, y as a solution of $(D_t - P)E = 0$. By the propagation of singularities theorem, its singularity spectrum is then a union of bicharacteristics of $D_t - P$. More precisely, any point (t_0, x_0, y_0) has a neighborhood N where E(t, x, y) is a finite sum of oscillatory integrals E' like (4), perhaps with other auxiliary variables $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ replacing ζ, and a phase function $s'(t, x, y, \theta)$ such that the curve $t \to (x, s'_x)$, $s'_\theta = 0$, is part of a bicharacteristic issuing from $(y, -s'_y)$ when $t = 0$. When the projection of N on x, y-space has a part M in common with the diagonal $x = y$, integrals

$$t \to \int E'(t, x, x,)f(x)dx = \int \int e^{is'(t,x,x,\theta)} a'(t, x, x, \theta)f(x)dx d\theta$$

with f in $C_0^\infty(M)$ are well defined. By the proposition of section 3, their singular spectra consist of pairs (t, τ) such that $\tau = p(t, x, s'_x)$ with $s'_x + s'_y = 0$, $s'_\theta = 0$. This requires a bicharacteristic from some y to come back to y at time t.

In particular, let $P = P(x, D_x)$ be independent of t, elliptic and selfadjoint with respect to $H = L^2(X)$ where now X is a compact manifold with a smooth positive density dx. Then $t \to e^{itP}$ is a one parameter group of unitary operators $H \to H$ with a kernel $E(t, x, y)$ such that $(D_t - P)E = 0$, $E(0, x, y) = \delta(x - y)$ and with the trace

$$(7.6) \quad t \to \int E(t, x, x)dx = \sum e^{it\lambda_k}$$

where $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ are the eigenvalues of P. The remark above then shows that the singularity spectrum of the trace consists of pairs (t, τ) such that t is a period of closed bicharacteristic and τ is the corresponding value of p (Chazarain [7]). This result generalizes the essential features of Poisson's summation formula

$$\sum_k \delta(t - k) = \sum_k e^{i2\pi kt}$$

where k runs over the integers $\mathbf{Z}$. In this case $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ and $P = D_x$.

The asymptotics of the eigenvalues of P can be read off from the behavior of the trace (6) for small t. This was first done by Hörmander. He was able to choose phase and amplitude functions of a parametrix in such a way that he could prove that the number of eigenvalues at most equal to λ is

$$(2\pi)^{-n}\lambda^n \int_X \int_{p<1} dx d\xi + O(\lambda^{n-1})$$

when $p \geqslant 0$. Here the error term is best possible.

When all the closed bicharacteristics of $D_t - P$ have the same least period, say 2π, there are very precise results. The eigenvalues cluster in smaller and smaller intervals $I_1, \ldots, I_k, \ldots$ whose centers form an arithmetic progression with difference 1 and, for large k, the number of them in I_k is a polynomial in k (Colin de Verdière [8]).

My review must end here. Further information is available in the bibliography, in particular on Fourier integral operators with complex phase functions with applications to Toeplitz operators and the Bergmann kernel.

Bibliography

There is a large literature on pseudodifferential operators. One recent reference is

[1] Hörmander, L: The Weyl calculus of pseudodifferential operators. Comm. Pure Appl. Math. **32** (1979) 359–443

This article also has a short historical introduction, a large bibliography and an analytic proof of the index formula in $\mathbf{R}^n$. The basic reference to index theory is

Atiyah, M. F. and collaborators: The index of elliptic operators. Ann. of Math. **87**, 3 (1968) 484–604 and **98**, 1 (1971) 119–149

A review of hyperfunctions is given by

Kashiwara, M.; Kawai, T.; Sato, M.: Microfunctions and pseudodifferential equations. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973. – Lecture notes in mathematics 287

More recent articles are quoted in Kashiwara's lecture at the International congress of mathematicians in Helsinki 1978 (forthcoming).

Fourier integrals are used implicitly in

[2] Lax, P.: Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960) 473–506

[3] Hörmander, L.: The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. **121** (1968) 193–218

Maslov, V. P.: Theory of perturbations and asymptotic methods. Moscow state univ., Moscow 1965. Translated as: Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. Paris 1972, Dunod.

The basic reference to microlocal calculus of distributions is

[4] Hörmander, L.: Fourier integral operators I. Acta Math. **127** (1971) 79–180

Duistermaat, J. J.; Hörmander, L.: Fourier integral operators II. Acta Math. **128** (1972) 183–269

More recent material can be found in

Fourier integrals and Partial Differential equations. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975. – Lecture notes in mathematics 459

It contains work by Melin and Sjöstrand on Fourier integral operators with complex-valued phase functions. This applied, for instance, in

Boutet de Monvel, L.; Sjöstrand, J.: Sur la singularité des noyaux de Bergmann et Szegö, Astérisque **34–35** (1976) 123–164

The microlocal structure of Toeplitz operators is studied in

Boutet de Monvel, L.: On the index of Toeplitz operators of several complex variables. Inv. Math. **50** (1979) 249–272

For recent work on microlocal analysis see

Hörmander, L. (ed.): Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations. Ann. of Math. Studies. Princeton 1979

The last word so far on propagation without reflections of singularities is

[5] Hörmander, L.: Propagation of singularities and semi-global existence theorems for (pseudo-)differential operators of principal type. Ann. of Math. **108** (1978) 569–609

For propagation with reflection see

[6] Melrose, R. B.; Sjöstrand, J.: Singularities of boundary value problems I. Comm. Pure and Appl. Math. **31** (1978) 519–617 and II, in preparation

The connection between spectrum and closed bicharacteristics is the subject of

[7] Chazarain, J.: Formule de Poisson pour les variétés Riemanniennes. Inv. Math. **24** (1974) 65–82

[8] Colin de Verdière, Y.: Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicharacteristiques periodiques. Com. Math. Helv., forthcoming

This last paper also has a list of references to papers by Duistermaat, Guillemein and Weinstein on the subject.

Prof. Lars Gårding
Lunds Universitets
Matematiska Institution
Box 725
S-22007 Lund

(*Eingegangen: 19. 12. 1979*)

Buchbesprechungen

Siegel, C. L., Gesammelte Abhandlungen, Teil 4, Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1979, 1 Portrait, 350 S., geb., DM 74,–

Bei meiner Besprechung der ersten drei Bände dieser Gesammelten Abhandlungen im Jber. d. Dt. Math.-Verein. 73 (1971), H. 1 gab ich meiner Hoffnung Ausdruck, daß das wissenschaftliche Werk C. L. Siegels damit noch nicht abgeschlossen sei. Diese Erwartung hat sich in reicher Fülle bestätigt, wie der nun vorliegende vierte Band zeigt. Er umfaßt in den Nummern 83–99 die Veröffentlichungen aus der Zeit von 1968–75. Am Ende befinden sich ein Verzeichnis sämtlicher Publikationen, Berichtigungen und Bemerkungen zu den ersten drei Bänden sowie eine nützliche Liste aller Bücher und Vorlesungsausarbeitungen Siegels.

Die Thematik der Arbeiten ist weit gestreut: Zwei Abhandlungen (94) und (98) betreffen Fragen der Himmelsmechanik; die Arbeiten (86) und (93) handeln von Modulfunktionen zu paramodularen Gruppen, von denen die berühmten Modulfunktionen n-ten Grades nur ein Spezialfall sind. Es gibt vier Publikationen (84), (89), (90) und (99) über Werte von Zetafunktionen und L-Reihen, die einen wichtigen Schritt zur Entstehung der Theorie der p-adischen Modulformen durch J.-P. Serre u. a. darstellten. – Verschiedene Veröffentlichungen entstanden durch Siegels intensive Auseinandersetzung mit zentralen Neuentdeckungen anderer Mathematiker. Hier ist vor allem die Abhandlung (85) über den Starkschen Satz, daß genau neun imaginär-quadratische Zahlkörper der Klassenzahl 1 existieren, zu nennen; es wird der Zusammenhang mit elliptischen Modulformen und den früheren Untersuchungen von Heegner hergestellt. Unter diesen Gesichtspunkt lassen sich ferner einordnen die Arbeit (88) über „Abschätzung von Einheiten", die im Zusammenhang mit Bakers Untersuchungen über diophantische Approximationen steht, sowie der Artikel (83) zum Weierstraßschen Vorbereitungssatz. – Eine andere Gruppe von Arbeiten zeugt von dem Wert, den Siegel der Frage der Konstruktivität von Lösungen beimißt. Dies gilt zum Beispiel für die Untersuchung (96) über quadratische Formen oder auch die Abhandlung (97). – Der Artikel (91) mit dem Titel „Einige Erläuterungen zu Thues Untersuchungen über Annäherungswerte algebraischer Zahlen und diophantische Gleichungen" bekundet schließlich das mathematisch-historische Interesse Siegels und schlägt die Brücke zu seiner berühmten Dissertation. Dazwischen liegt über ein halbes Jahrhundert äußerst fruchtbaren mathematisch-wissenschaftlichen Wirkens, von dem diese Gesammelten Abhandlungen in beeindruckender Weise Zeugnis ablegen. Die in meinem Referat über die ersten drei Bände ausgesprochene Würdigung gilt in gleichem Maße auch für diesen letzten Band.

Freiburg i. Br. H. Klingen

Menger, K., Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, and Economics (Vienna Circle Collection 10), Dordrecht: D. Reidel Publ. Comp. 1979, xii + 341 p., Cloth Dfl Dfl 110,–, paper Dfl. 55,–

Bei diesem Buch handelt es sich um Band 10 der „Vienna Circle Collection", die einer der bedeutendsten philosophischen Bewegungen des 20. Jahrhunderts – man mag zu ihren Lehren stehen wie man will – gewidmet ist. Der Wiener Kreis erfreute sich von Anfang an eines regen Interesses von Mathematikern. Hans Hahn (1879–1934) und Karl Menger (∗1902) gehörten zu seinen aktiven Mitgliedern. Der vorliegende Band enthält eine Auswahl von praktisch allgemein verständlichen Artikeln von Karl Menger, gelegentlich etwas gekürzt und stets sorgsam kommentiert. Ein Teil der Beiträge stammt aus Mengers Wiener Zeit, andere sind später in den USA entstanden. Der Themenkreis ist weit gespannt: Logik, Philosophie, Grundlagenfragen der Mathematik, Geometrie, Didaktik, Ökonomie. Der Leser empfängt einen deutlichen Eindruck von einer über die Grenzen der Mathematik hinaus wirkenden Mathematikerpersönlichkeit. Die Freude des Autors an der Selbstdarstellung ist unverkennbar, wird aber keinen interessierten Leser stören. Einer der Beiträge ist offenbar eigens für diesen Band geschrieben worden und faßt die Erinnerungen von Menger an L. E. J. Brouwer (1881–1966) aus den zwanziger Jahren zusammen. Als Anlaß nennt Menger die Diskussion seiner Auseinandersetzungen mit Brouwer in der von Heyting und Freudenthal besorgten Brouwer-Ausgabe (L. E. J. Brouwer, Collected Works, 2 Bde. Amsterdam 1975/76). Er bezeichnet diese Diskussion als „wanton". Das ist ein schwer zu übersetzendes Wort, es kann u. a. „leichtsinnig", „mutwillig", „boshaft" bedeuten. Sicher wird man mit einem derartigen Wort der Herausgeberleistung von Freudenthal, gerade in diesem Punkte, nicht gerecht. Andererseits hat dieser Anlaß uns in Gestalt von Mengers Aufsatz zahlreiche, wenn auch persönlich gefärbte, Details über die Persönlichkeit Brouwers beschert, die man in der Brouwer-Ausgabe von Heyting und Freudenthal vermißte. Den mathematisch-historisch interessierten Leser wird die Geschichte der Verwandlung eines anfänglich intensiven Verhältnisses zwischen einem reifen und einem heranwachsenden Mathematiker zu einer bedauerlichen Entfremdung zweier bedeutender Persönlichkeiten fesseln, aus welcher Distanz er das Berichtete auch immer betrachten mag.

Der Band ist für jeden Mathematiker als Dokument bedeutender Vorgänge lesenswert.

Erlangen K. Jacobs

Davis, M., Applied Nonstandard Analysis (Pure and Applied Mathematics Series), Chichester: John Wiley & Sons 1977, 196 p., £ 12.50.

Es handelt sich um die „nonstandard" Analysis im Sinne von Abraham Robinson. Diese unterscheidet sich von der heute weitgehend üblichen „standard" Analysis dadurch, daß infinitesimale Zahlen, also unendlich kleine und unendlich große Zahlen in den Kreis der Betrachtung einbezogen werden. Das ist natürlich keine Neuerung, sondern es bedeutet ein Anknüpfen an die historischen Quellen, z.B. bei Leibniz oder bei Euler. Denn die Analysis, wie wir sie heute kennen, ist ja ursprünglich entstanden als Infinitesimalkalkül, in der Erkenntnis, daß man mit infinitesimalen Zahlen in derselben Weise rechnen kann wie mit den gewöhnlichen, endlichen, Zahlen. Dieses Permanenzprinzip, bei Leibniz ganz deutlich formuliert, hatte fast zwei Jahrhunderte lang als Grundlage für den Infinitesimalkalkül gedient. Erst später, bei der Suche nach einer strengen Begründung der Analysis, wurde der Gebrauch der Infinitesimalen als „unstreng" eingestuft, weil sich bei einer naiven Anwendung des Permanenzprinzips Widersprüche ergaben, die zunächst nicht aufgeklärt werden konnten. So lernen heute unsere Schüler und Studenten, daß die Leibnizsche Notation $\frac{dy}{dx}$ für die Ableitung lediglich symbolisch zu verstehen sei; es handle sich bei diesem Differentialquotienten keineswegs um den Quotienten zweier Differentiale. Ebenso sei das Integral $\int f(x)\,dx$ nicht etwa die Summe von unendlich vielen, infinitesimalen Rechtecksinhalten; es handle sich lediglich um eine anschauliche Bezeichnungsweise die keinen unmittelbaren Sinn, sondern lediglich heuristischen Wert habe. Dieser anschaulich-heuristische Wert des Leibnizschen Infinitesimalkalküls blieb jedoch stets unbestritten.

Im Jahre 1960 entdeckte Abraham Robinson, daß die Begriffe und Methoden der mathematischen Logik einen geeigneten Rahmen liefern können für den Infinitesimalkalkül im wörtlichen, nicht nur im symbolischen Sinne: nämlich unter tatsächlicher Heranziehung infinitesimaler Zahlen. Er nannte seine Theorie „nonstandard" Analysis, weil sie nämlich in engem Zusammenhang steht mit den sogenannten „nonstandard" Modellen der Arithmetik, deren Existenz zuerst von Skolem gezeigt wurde. Diese Bezeichnung „nonstandard", obwohl als Fachwort im Sinne der Logik gemeint, hat doch in der mathematischen Öffentlichkeit gelegentlich zu Mißverständnissen Anlaß gegeben. Es handelt sich eben nicht um eine neuartige, ungewöhnliche oder auf unüblichen Voraussetzungen aufgebaute Theorie, sondern wie gesagt um die gewöhnliche, klassische Analysis, mit dem einzigen Zusatz, daß auch Infinitesimale zugelassen sind, nicht nur als Hilfsmittel der Anschauung, sondern auch zur Bereicherung und Vereinfachung der Beweise. Vielleicht sollte man die Bezeichnung „nonstandard" in diesem Zusammenhang ganz vermeiden und stattdessen von „Infinitesimalkalkül" sprechen, so wie das z.B. in dem kürzlich erschienenen Buch von D. Laugwitz [1] getan wird. (Dieses schöne Buch ist jedem zu empfehlen, der sich über die Grundlagen und die Entwicklung des Infinitesimalkalküls in historischer Sicht informieren möchte).

Nonstandard Analysis wurde einem größeren Kreis von Mathematikern zuerst bekannt durch die Lecture Notes von W. A. J. Luxemburg [2] im Jahre 1962. Einige Jahre später erschien das Buch von Abraham Robinson [3], welches nach Konzept, Inhalt und Form wohl zu den klassischen mathematischen Werken dieses Jahrhunderts zu zählen ist. Jeder, der sich mit nonstandard Analysis eingehender befassen möchte, muß wohl schließlich auf das Robinsonsche Buch zurückgreifen. Aber das Buch von Robinson war nur ein Anfang, es zeigte den Weg und öffnete neue Perspektiven. Die Ideen Robinsons breiteten sich in der Folge schnell aus und die Literatur über nonstandard Analysis ist heute schon ziemlich umfangreich. (Eine Bibliographie wurde angefertigt von D. R. Johnson [4]).

Es ist nicht verwunderlich, daß die nonstandard Analysis wegen ihrer anschaulichen Verwendung von Infinitesimalen besonderes Interesse gefunden hat einerseits im akademischen Unterricht, als auch andererseits im Hinblick auf die Anwendungen der Mathematik, z.B. Physik, Statistik oder Wirtschaftswissenschaften. Was den akademischen Unterricht betrifft, so sei verwiesen auf das ausgezeichnete Lehrbuch von Keisler [5], das zwar für undergraduates bestimmt ist, dessen manual for instructors [6] jedoch auch für den Unterricht an unseren Hochschulen interessant sein dürfte. Ganz kürzlich ist übrigens noch ein weiteres elementares Lehrbuch erschienen [7]. Für die angewandte Mathematik liegt, soweit mir bekannt ist, zur Zeit kein Lehrbuch oder Monographie vor. Ein solches Buch, das die Verwendbarkeit der Robinsonschen Ideen in Anwendungsbereichen der Mathematik demonstriert, wäre sehr notwendig und erwünscht.

Leider behandelt das vorliegende Buch, obwohl es die Bezeichnung „applied" im Titel trägt, die angewandte Analysis überhaupt nicht. Der Verfasser erläutert in seinem Vorwort, daß es sich um Anwendungen der nonstandard Methoden *auf* die klassische Analysis handle, nicht etwa um nonstandard Methoden bei der angewandten Analysis. Diese Verwendung des Wortes „applied" hat offenbar nicht nur beim Berichterstatter eine gewisse Verwunderung hervorgerufen. Was darf ein Leser erwarten, z.B. von einem Buch mit dem Titel „applied linear algebra" oder „applied complex analysis" etc.? Weshalb möchte der Autor durch Wahl seines Titels „applied nonstandard analysis" Erwartungen beim Leser hervorrufen, die er nicht erfüllt?

Abgesehen vom Titel fand ich das vorliegende Buch jedoch durchaus beachtenswert. Es nimmt unter den bekannten Darstellungen des Infinitesimalkalküls einen Platz ein etwa zwischen Keisler [5] und Stroyan-Luxemburg [8], was das Niveau des angesprochenen Lesers betrifft. Es wendet sich an Studenten mittlerer Semester, ohne größere Vorkenntnisse in Logik. In der Tat sehe ich ein Hauptverdienst dieses Buches darin, daß die *logischen Grundlagen* des Infinitesimalkalküls kurz, vollständig und elegant dargestellt werden, jedoch stets anschaulich und überzeugend motiviert. (Die Darstellung beruht auf Robinson-Zakon [9]). Der Mathematiker, der sich schnell die notwendigen Grundlagenkenntnisse aneignen will, der sich aber mit der didaktisch motivierten elementaren Darstellung bei Keisler [5] nicht zufrieden gibt, findet in Kapitel 1 des vorliegenden Buches wohl die kürzeste und am leichtesten zugängliche Darstellung, verglichen mit den anderen existierenden Lehrbüchern oder Monographien. Nach Lektüre von Kapitel 1 wird man ohne Schwierigkeiten andere Monographien oder Originalarbeiten über nonstandard Analysis lesen können, auch wenn jene (wie z.B. Robinson [3]) eine etwas andere Konstruktion der nonstandard Erweiterungsstruktur zugrundelegen.

Was nun die behandelten Sätze aus der Analysis betrifft, so wird keine systematische Entwicklung gegeben, sondern es handelt sich um ausgewählte Kapitel aus verschiedenen Teilgebieten der Analysis. Offenbar ist die Auswahl so getroffen worden, daß sich daran die Anwendbarkeit der infinitesimalen Methoden besonders gut demonstrieren läßt; ein anderes Auswahlprinzip für die sonst ziemlich unzusammenhängenden Sätze vermag der Berichterstatter nicht zu erkennen. Es fehlt hier der Raum, um alle behandelten Themen aufzuführen, teilweise sind diese auch in den anderen genannten Büchern diskutiert, teils jedoch nur in der Originalliteratur zu finden. Erwähnt sei hier lediglich der Existenzbeweis für das Haarsche Maß auf lokal kompakten Gruppen (Kap. 3, § 3); der Satz von Bernstein-Robinson über die Existenz invarianter Teilräume für polynomial kompakte Operatoren im Hilbertschen Raum (Kap. 5, § 3) sowie der Spektralsatz für Hermitesche Operatoren (Kap. 5, § 4/5). Der Integralkalkül wird entwickelt für reelle Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum und der Differentialkalkül wird ebenfalls dargestellt für Abbildungen von Banach-Räumen (Kap. 4, § 3/4).

Das vorliegende Buch stellt eine interessante Bereicherung der Literatur über nonstandard Analysis dar.

Zitierte Literatur

[1] Laugwitz, D.: Infinitesimalkalkül, B.I. Mannheim 1978
[2] Luxemburg, W. A. J.: Nonstandard Analysis, Lecture Notes Caltech, Pasadena 1962
[3] Robinson, A : Nonstandard Analysis, North Holland 1966
[4] Johnson, D. R. : Bibliography of Nonstandard Analysis, Lecture Notes vol. 3, Univ. of Pittsburgh, 1975
[5] Keisler, H. J.: Elementary Calculus, Prindle, Weber und Schmidt Boston 1976
[6] Keisler, H. J.: Foundations of Infinitesimal Calculus Boston 1976
[7] Henle, M., Kleinberg, M.: Infinitesimal Calculus, MIT-Press Cambridge 1979
[8] Stroyan, K. D., Luxemburg, W. A. J.: Introduction to the Theory of Infinitesimals, Academic Press 1976
[9] Robinson, A., Zakon, E.: A set-theoretical characterization of enlargements; in: Applications of Model theory to Algebra, Analysis and Probability Theory, ed. W. A. J. Luxemburg, Proceed. Int. Sympos. Nonstandard Analysis 1969
[10] Stroyan, K. D. : Infinitesimal analysis of curves and surfaces; in: Handbook of Mathematical Logic, ed. J. Barwise, North Holland 1977

Heidelberg P. Roquette

Laugwitz, D., Infinitesimalkalkül, Kontinuum und Zahlen, Eine elementare Einführung i. d. Nichtstandard Analysis, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1978, 187 S., pb., DM 24,–

Die Nonstandard-Analysis wurde 1960 von Abraham Robinson entwickelt. In ihr wird der Körper **R** der reellen Zahlen um sogenannte nonstandard reelle Zahlen zu einem geordneten Körper ***R** erweitert. In ***R** gibt es sowohl unendlich kleine positive (in Bezug auf alle positiven Zahlen aus **R**) als auch unendlich große Zahlen. Was ***R** gegenüber einem beliebigen nichtarchimedisch geordneten Oberkörper von **R** auszeichnet, ist die Tatsache, daß die Eigenschaften von ***R** „fast" die gleichen wie die von **R** sind. Dies äußert sich in einem „Übertragungsprinzip" für Eigenschaften von **R** nach ***R** (und umgekehrt). Für eine Präzisierung dieses Prinzips ist es notwendig, die Eigenschaften, für die eine Übertragung möglich ist, genau zu beschreiben. Bei Robinson geschieht dies im Rahmen einer formalen Sprache. Beweise, die dieses Übertragungsprinzip benützen, müssen besonders sorgfältig formuliert, ja manchmal sogar formalisiert werden. Dies ist der Preis, der gezahlt werden muß, will man mit infinitesimalen Größen so rechnen „als wären sie reelle Zahlen". (Man vergleiche hierzu auch die Ausführungen von P. Roquette in der vorstehenden Besprechung des Buches „Applied Nonstandard Analysis" von M. Davis).

Zwei Jahre vor Robinson, im Jahre 1958, publizierten Curt Schmieden und Detlef Laugwitz (der Verfasser des zu besprechenden Buches) eine Arbeit (Math. Z. **69** (1958) 1–39), in der sie **R** zu einem partiell geordneten Ring (mit Nullteilern) erweitern, in dem ebenfalls mit unendlich kleinen bzw. großen „Zahlen" gerechnet werden kann.

Vereinfacht lassen sich die beiden Erweiterungen etwa so beschreiben: Wir betrachten zuerst den Ring R der abzählbaren Folgen reeller (oder auch rationaler) Zahlen. Schmieden und Laugwitz nennen zwei Folgen dann äquivalent, wenn sie bis auf endlich viele Stellen übereinstimmen, Robinson nennt sie äquivalent, wenn die Menge der Stellen der Übereinstimmung in einem vorgegebenen freien Ultrafilter liegt. In beiden Fällen wird durch die entsprechende Äquivalenzrelation faktorisiert. Im ersten Fall entsteht ein reduziertes Produkt, im zweiten ein Ultraprodukt. Algebraisch bedeutet das im Falle Schmieden-Laugwitz Division durch das Ideal A der fast überall verschwindenden Folgen, in Robinsons Fall Division durch ein maximales Ideal M über A.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Modellen liegt in denjenigen Eigenschaften, die sich von **R** auf das jeweilige Modell übertragen lassen. Während es sich bei Robinson dabei um eine sehr große Klasse von Eigenschaften handelt, lassen sich bei Schmieden-Laugwitz nur Eigenschaften eines ganz speziellen Typus übertragen. So einfache Eigenschaften wie Nullteilerfreiheit und Linearität sind nicht von diesem Typus.

In dem vorliegenden Buch werden beide Zugänge zur „Infinitesimalrechnung" dargestellt. In Kapitel I findet man das Schmieden-Laugwitz-Modell sowie einfache Sätze der Analysis, die unter Benutzung dieses Modelles bewiesen werden. In Kapitel II wird Robinsons Modell dargestellt und in Kapitel III werden dann mit seiner Hilfe weitergehende Sätze der Analysis bewiesen.

Es darf nicht überraschen, daß der Autor die Vorzüge seines Zuganges hervorzuheben sucht. So wird z. B. auf S. 102 gesagt: „Ferner ist die Ultraprodukt-Methode hochgradig nichtkonstruktiv, . . .". Dies kann sich nur auf die Verwendung des Auswahlaxioms beim Beweis der Existenz eines maximalen Ideals M über A beziehen. Die Verwendung dieses Axioms ist jedoch in der Mathematik alltäglich, der Autor verwendet es laufend selbst, z. B. in den Beweisen 1.4.3 und 1.4.8. In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß der Beweis von 2.1.5 (c), einer Charakterisierung von Ultrafiltern, einen Fehlschluß enthält.

Auf S. 103 wird gesagt: „Auch ist – abgesehen vom Ästhetischen – der praktische Nutzen von Nullteilerfreiheit und linearer Ordnung nicht groß". Es ist jedoch nicht nur das Fehlen der Linearität (diese wird übrigens in manchen Beweisen in Kapitel I versehentlich verwendet, z. B. in Zeile 22 auf S. 35 und in Zeile 9 auf S. 36), was das Schmieden-Laugwitz-Modell schwerfälliger macht, sondern das Fehlen eines so starken Übertragungsprinzips, wie es in Robinsons Modell vorliegt. Ein Vergleich der Beweise 1.4.4(a) und 3.1.4 der gleichmäßigen Stetigkeit stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen in beiden Modellen zeigt dies sehr deutlich.

Leider werden in den Beweisen der weitergehenden Sätze in Kapitel III, bei denen dann Robinsons Modell Verwendung findet, die Stellen, an denen das Übertragungsprinzip entscheidend eingeht, übergangen. Dies trifft z. B. auf den Beweis der Integrierbarkeit monotoner Funktionen (3.3.8) und den Beweis des Fundamentalsatzes (3.3.10) der Differential- und Integralrechnung zu. In beiden Fällen werden wichtige Argumente dem Leser ohne irgend einen Hinweis auf das Übertragungsprinzip überlassen. (Der interessierte Leser vergleiche etwa zu 3.3.10 den Originalbeweis von Robinson in seinem Buch „Nonstandard Analysis" auf S. 74).

Die Darstellung des Prinzips selbst in § 2.5 kommt ebenfalls zu kurz. Die Definitionen des § 2.5 (z. B. einer Aussage) lassen die in diesem Zusammenhang notwendige Strenge vermissen. Auch wird der Beweis des Satzes 2.5.1, der im wesentlichen das Übertragungsprinzip beinhaltet, nur angedeutet. Eine exakte Durchführung hätte höchstens eine halbe Seite mehr in Anspruch genommen.

Aufgrund dieser Mängel, zu denen sich weitere hinzufügen ließen, halte ich dieses Buch trotz seiner zahlreichen und interessanten historischen Vergleiche nicht für empfehlenswert. Es weckt Hoffnungen, die es nicht erfüllt; wer glaubt, in ihm ein solides Fundament für den Umgang mit infinitesimalen Größen zu finden, wird es bald enttäuscht aus der Hand legen.

Konstanz A. Prestel

Iyanaga, S. (editor), The Theory of Numbers (North-Holland Mathematical Library, vol 8.), Amsterdam: North-Holland 1975, xii + 542 p., Dfl. 150,–

Dieses interessante Buch sollte treffender den Titel Klassenkörpertheorie tragen; genauer geht es darin um Klassenkörpertheorie auf kohomologischer und bewertungstheoretischer Grundlage. Die Kapiteleinteilung ist klar und schlüssig: I. Kohomologie von Gruppen, II. Bewertungstheorie, III. Adele-Ringe und Idele-Gruppen, IV. Die Hauptsätze der Klassenkörpertheorie, V. Beweise der Hauptsätze. Die Trennung von IV und V hat einen Vorgänger in den Teilen I und Ia des Zahlberichts von Hasse (1926/1927). Die Entstehungsgeschichte des vorliegenden Buches ist bemerkenswert und in der Vorrede ausführlich dargelegt. So fand im Haus von Iyanaga ein sonntägliches Seminar mit wechselnder Besetzung statt. Der behandelte Stoff wurde dann hauptsächlich von Tannaka, Tamagawa, Satake, Hattori, Shimizu, Fujisaki und Iyanaga niedergeschrieben und liegt uns erfreulicherweise in diesem schönen und homogenen Buch vor. Wie in der Vorrede gesagt wird, werden an mathematischer Vorbildung lediglich Galois-Theorie und ein Grundwissen über lokalkompakte Gruppen vorausgesetzt; was unter letzterem zu verstehen ist, ist am Beginn von Kapitel III zusammengestellt. Das Buch ist klar geschrieben, und die Beweise werden mit der erforderlichen Ausführlichkeit geführt. Ausgehend vom Reziprozitätsgesetz für quadratische Reste, gewöhnlichen Gauss-Summen und dem Normenrestsymbol von Hilbert und inspiriert durch Chevalley (Class field theory, Nagoya University 1953/1954), gipfelt das Buch in Hauptsätzen A, B, C (S. 312–314) und dem Reziprozitätsgesetz (Kap. V, § 5). Nach dem Vorbild von E. Artin und Tate (Class field theory, New York – Amsterdam 1967) endet der Text mit Weil-Gruppen.

Mit dem Kapitel über Kohomologie ist für den Leser gleich am Anfang eine relative hohe Hürde aufgebaut. Man kann sich natürlich an den schönen Diagrammen und vielen Isomorphismen erfreuen. Möchte man aber nicht zuerst einmal wissen, wozu dieser Aufwand betrieben wird? Für das Einführen von Diskriminante (S. 162) oder für das Formulieren des Einheitensatzes von Dirichlet (S. 249) ist er nicht erforderlich. Erst S. 28 könnte es dem Leser dämmern, wo von einer handfesten mathematischen Aufgabe (Erweiterung von Gruppen) die Rede ist, und ein wichtiger Satz (von Schreier) folgt bald. Gerade für die Einstimmung in dieses Kapitel sollte der Leser noch andere Quellen zu Rate ziehen wie etwa Kurosch (Gruppentheorie, Berlin 1955, § 28), Hall (The theory of groups, New York 1959, Kap. 15) oder Zassenhaus (The theory of groups, New York 1949, Kap. III, § 6). Im vorliegenden Buch wird viel mit Bewertungen und Divisoren gearbeitet. Erfreulicherweise wird mittels Appendix 1 (Idealtheorie) eine Konzession an den anderweitig vorgebildeten Leser gemacht. Sehr wertvoll für den Leser ist Appendix 2 (S. 479–518) über die Geschichte der Klassenkörpertheorie; leider finden sich zu wenig Rückverweise auf den Stoff des Buches. So ist S. 491 vom Hauptidealsatz die Rede; durch die Tatsache, daß sich im Index kein weiterer Hinweis darauf findet, wird man indirekt darauf geführt, daß im Buch auf einen Beweis verzichtet wurde. Übrigens vermisse ich S. 517 den Namen Heegner. In der Bibliographie finden sich zu meiner Überraschung keine Eintragungen unter Kummer und Frobenius.

Ich halte dieses vorzüglich ausgestattete Buch für sehr lesenswert und empfehle es mit Nachdruck. Allerdings sollte man beim Lesen auch noch andere Bücher wie etwa Cassels und Fröhlich (Algebraic number theory, Washington, D. C. 1967) oder Neukirch (Klassenkörpertheorie, Mannheim – Wien – Zürich 1969) griffbereit haben. The Theory of Numbers ist eine wichtige Bereicherung der Literatur.

Hannover G. J. Rieger

Kaplansky, I., Commutative Rings (revised edition), Chicago: The University of Chicago Press 1974, 192 p., Cloth, $ 9.75

Ein Buch, das gelesen werden soll, darf weder zu dick noch zu schwierig sein; vor allem aber muß sich der Leser Seite für Seite motiviert fühlen, weiterzulesen. Sind diese Bedingungen zu erfüllen bei einem so komplexen und anspruchsvollen Thema? Der Autor beweist es, auf 182 Seiten, mit einem Minimum an Voraussetzungen (Grundbegriffe der Algebra wie Ring, Ideal), ausgehend von der Definition eines Primideals und dem Ganzheitsbegriff (Kap. 1) über noethersche Ringe (Kap. 2) zu Macaulay-Ringen und regulären Ringen (Kap. 3) und schließlich dem Satz von Auslander und Buchsbaum (jeder reguläre lokale Ring ist faktoriell) und der Theorie der Gorenstein-Ringe (Kap. 4). (In dem letzten Kapitel wird etwas Homologietheorie vorausgesetzt bzw. von des Autors Buch: Fields and Rings, Chicago 1969, übernommen).

Natürlich trifft der Autor eine Auswahl aus der immensen Stoffülle; aber sie ist repräsentativ und – darin zeigt sich die Meisterschaft – bildet ein geschlossenes Ganzes.

Das Buch enthält eine große Zahl von Aufgaben mit gelegentlichen Literaturhinweisen und Lösungsanleitungen. Die zweite Ausgabe unterscheidet sich von der ersten im wesentlichen durch Änderungen in den Übungen und einen Zusatz (von zwei Seiten) mit Bemerkungen.

Jeder Mathematiker sollte dieses Buch in seinem Regal stehen haben, und zwar mit der Breitseite nach vorne, um sich an den zehn kommunizierenden und kommutierenden Ringen des Designers ergötzen zu können.

Bochum S. Elliger

Adian, S. I., The Burnside Problem and Identities in Groups (translated from Russian by J. Lennox and J. Wiegold) (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Bd. 95), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1979, xi + 322 p, Cloth DM 78,–

This is a translation of Adian's book [1]. The translators, Lennox and Wiegold, have done a good job and the translation has been approved by the author. This beautifully printed Springer volume is a marked improvement on the somewhat scruffy original.

I shall resist the temptation to end this review here; thus what follows will be in effect a review of the Russian original.

A group has *exponent* n, where $n > 0$, if the n-th power of each of its elements is the identity element. Clearly a finite group has an exponent (namely its order) and also has a finite number of generators. The *Burnside Problem*, which dates from 1902 (cf. Burnside [3]), asks conversely if every finitely generated group with an exponent is finite. It has been known for many years that such a group is finite if the exponent is 1, 2, 3, 4 or 6 but the cases of exponent 5, 7, 8 and 9 for example are still unsolved.

It is rather trivial to show that there is a largest group $B(m,n)$ among the set of all groups with m generators and exponent n, in the sense that each of these groups is a homomorphic image of $B(m,n)$.

In 1968, Novikov and Adian [5] gave the first proof that there exists a number A such that if $m \geqslant 2$, n is odd and $n \geqslant A$ then the Burnside group $B(m,n)$ is infinite. This settled the Burnside Problem.

The main purpose of the work under review is to give another proof of this result. In [5] the value $A = 4381$ is given but here the improved value $A = 665$ is given.

The proof occupies 245 pages and is very hard to read. Consequently this is not a textbook but rather a research paper put into book form. Although all group-theorists should read this book, in view of the importance of the result, I fear that few will be willing to invest the energy to read it.

It is perhaps surprising that the proof requires very little background knowledge in group theory or indeed in mathematics. The proof is carefully and accurately written with all steps being given. So what makes it hard? Well, besides being a lengthy proof, it is completely lacking in motivation. The main part of the proof (235 pages) is an induction on 'rank'. The basis of the induction, rank 0, is trivial; so trivial that it gives no insight whatever into the meaning of the concepts in the general step and their properties. Although logically unnecessary, the rank 1 step would have been more informative if it had been included.

Incidentally, the reason why the exponent must be odd first appears in rank 2. A similar phenomenon occurs in [2].

After competing the induction, one has a certain finitely generated infinite group. The remainder of the proof is to show of course that this group has an exponent. This too is hard, but at least by now the reader is dealing with concepts which have some meaning.

Is this a correct proof? My judgement is that it is. In fact the author's methodical style and his meticulous attention to detail give the reader confidence in its accuracy right from the start.

The leading open problem in the field is: do there exist infinite f.g. groups with an exponent of the form 2^k? In 1959 Novikov [4] claimed an affirmative answer by announcing that, for $m \geqslant 2$ and $n \geqslant 72$, $B(m,n)$ is infinite, but a proof never appeared. At the 1966 International Congress Novikov and Adian continued to conjecture an affirmative answer. There is no conjecture stated in this book but the author says "It is to be expected that the method set out in this book will be useful for a solution of Burnside's Problem for such exponents. But there are formidable difficulties in the way".

Having worked on the Burnside problem myself (cf. [2]) my feeling is that the answer is negative.

The remaining 60 pages of the book contain some interesting and important results as corollaries; these depend on the details of the main proof. The results appear under the headings "Systems of defining relations for a free group of finite exponent", "Subgroups of a free group of finite exponent", "Non abelian groups in which every pair of cyclic subgroups intersect non-trivially" and "Infinite independent systems of group identities".

In my view this is a profound book which reflects great credit on the author.

[1] Adian, S. I.: The Burnside Problem and Identities in Groups. (Russian) Moscow: Nauka 1975
[2] Britton, J. L.: The existence of Infinite Burnside Groups. Word Problems. Amsterdam – London: North Holland 1973, 67–348
[3] Burnside, W.: On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. Quart. J. Pure and Applied Math. **33** (1902) 230–238
[4] Novikov, P. S.: On periodic groups. (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR **127** No. 4 (1959) 749–752
[5] Novikov, P. S., Adian, S. I.: Infinite Periodic Groups. (Russian), I, II, III Izv. Akad. Nauk SSSR Ser Mat **32** Nos. 1, 2, 3 (1968) 212–244, 251–524, 709–731

London (Q. E. C.) J. L. Britton

Kargapolov, M. I., Merzljakov, Ju. I., Fundamentals of the Theory of Groups (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 62), New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1979, xvii + 203, cloth DM 35,–

Dies Buch ist entstanden aus Vorlesungen an der Universität Novosibirsk. Es soll dem Studenten, der in der Gruppentheorie arbeiten will, schnell in den Stand setzen, zu Originalliteratur vorzustoßen.

Inhaltsübersicht: Nach den Gruppenaxiomen behandelt Kapitel 1 die Begriffe Untergruppe, Erzeugendensystem, Nebenklasse, Konjugiertenklasse, Zentrum, Kommutatorgruppe. Kapitel 2 („Homomorphismen") schließt mit vollständigen Gruppen und den Erweiterungsbildungen Holomorph und Kranzprodukt. Abelsche Gruppen sind Gegenstand von Kapitel 3, wobei an freie, endlich erzeugte, teilbare und periodische Gruppen gedacht ist. Die Sylowsätze stehen in Kapitel 4 („endliche Gruppen"), ebenso die Familien A_n und PSL(n, k) als Beispiele endlicher einfacher Gruppen und Grundtatsachen über Permutationsgruppen. Kapitel 5 behandelt freie Gruppen und Varietäten. Nilpotente Gruppen und Verallgemeinerungen (Kapitel 6) und auflösbare Gruppen und Verallgemeinerungen (Kapitel 7) schließen das eigentliche Buch ab. Im Anhang werden „Hilfsresultate aus Algebra, Logik und Zahlentheorie" (nilpotente Algebren, lokale Sätze aus der Logik, algebraisch ganze Zahlen) aufgeführt.

Die Ausprägung dieses Buches ist auf die nilpotenten und auflösbaren Gruppen gerichtet, wobei die jeweiligen Unterklassen von endlichen Gruppen nur kurz behandelt werden. Im Unterabschnitt über endliche auflösbare Gruppen werden so die Sätze von Hall und von Carter behandelt und der dazugehörige inzwischen bekannte allgemeine Rahmen der gesättigten Formationen nicht erwähnt. Die Verwendung linearer Darstellungen ist auf das Notwendigste beschränkt (zum Beispiel zum Beweis des Satzes von Schur) außer wenn es um die Einbettung in lineare Gruppen geht. Eine allgemeine Aussage in dieser Richtung ist das Ergebnis von Merzljakov, daß sich das Holomorph einer polyzyklischen Gruppe einbetten läßt in $GL_n(\mathbf{Z})$ für genügend großes n.

Die von Kurosch und Černikov definierten Klassen verallgemeinerter auflösbarer Gruppen werden eingeführt, ebenso finden die Klassen verallgemeinerter nilpotenter Gruppen Beachtung.

Der Vorrat an Beispielen ist von den Verfassern bewußt klein gehalten, beim Durcharbeiten des Buches sind die Aufgaben häufig von zentraler Bedeutung. Sie helfen dem Leser, sich neben Grundwissen auch ein gewisses Handwerkszeug zu verschaffen.

Das Buch ist eine gute Hilfe für den Studenten höheren Semesters als Einführung vor der Lektüre von Originalliteratur über unendliche Gruppen. Forscher aus benachbarten Gebieten können es auch als Übersicht verwenden.

Würzburg H. Heineken

Forster, O., Riemannsche Flächen (Heidelberger Taschenbücher, Bd. 184) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, 223 S., DM 26,80

Die Einführung Riemannscher Flächen bildete den krönenden Abschluß langer Bestrebungen, den durch Potenzreihen definierten Funktionen zu ihrem natürlichen Definitionsbereich zu verhelfen. Die Ausführungen Riemanns bedurften mancher Präzisierung, vor allem was die topologischen Fragen anging. Eine erste zusammenfassende Darstellung gab Hermann Weyl in seinem 1913 erschienenen Meisterwerk „Die Idee der Riemannschen Fläche". Seither hat sich die Mathematik stürmisch weiterentwickelt. Topologische Begriffe wie Mannigfaltigkeiten und Überlagerungen haben neben der Funktionentheorie auch in anderen Zweigen der Mathematik Eingang gefunden.

Fragen, die für die komplexe Analysis typisch sind, treten beim Übergang vom Lokalen zum Globalen auf. Ein elementares Beispiel ist die analytische Fortsetzung eines Funktionskeimes; schwierigere Hilfsmittel sind nötig, um die verallgemeinerten Sätze von Weierstraß bzw. Mittag-Leffler zu beweisen, bei denen meromorphe Funktionen zu vorgegebenen lokalen Null- und Polstellenordnungen bzw. Hauptteilen konstruiert werden. Bei der Beschäftigung mit analogen Problemen der mehrdimensionalen Funktionentheorie wurde in den fünfziger Jahren ein geniales topologisches Hilfsmittel entwickelt: die Garbentheorie mit einer zugehörigen Cohomologietheorie. Damit erschienen altbekannte Ergebnisse der Analysis in einem völlig neuen Licht. Serre hat 1959 in seinem Buch „Corps de classes et groupes algébriques" den klassischen Satz von Riemann-Roch aus dieser Sicht dargestellt. Mit der gleichen Blickrichtung – aber völlig im Rahmen der eindimensionalen Funktionentheorie – ist das vorliegende Buch geschrieben.

Im ersten Kapitel wird die Riemannsche Fläche eines Funktionskeimes, der einer algebraischen Gleichung genügt, konstruiert. Vorbereitend werden, soweit wie nötig, Hilfsmittel über Garben und Überlagerungen von Mannigfaltigkeiten entwickelt; zum Beweis der Hauptsätze bleibt dann kaum noch etwas zu tun. Dies mag einem erfahrenen Funktionentheoretiker unbehaglicher sein, als einem unbelasteten Studenten, dem zwar die naiven Vorüberlegungen, die zu den abstrakten Hilfsmitteln geführt haben, fremd sind, der sich aber an diesen unbefriedigenden Zustand im Lauf seines Studiums gewöhnt hat. An elementaren Beispielen für kompakte Riemannsche Flächen werden im Anschluß an die Definition nur die Riemannsche Zahlenkugel und Tori gegeben. Ein Hinweis auf Flächen höheren Geschlechts und eventuell die Zusammenhänge mit der Topologie zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten wäre sicher nützlich.

Das zentrale Ergebnis des zweiten Kapitels ist der Satz von Riemann-Roch für eine kompakte Riemannsche Fläche X. Wesentlich dafür ist, daß $H^1(X,\mathcal{O})$, die erste Cohomologiegruppe von X mit Werten in der Strukturgarbe $\mathcal{O}$, ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum ist. Hierfür wird ein sehr eleganter neuer Beweis gegeben, der verglichen mit früheren Beweisen kaum noch Funktionalanalysis enthält (anstelle des oft verwendeten Satzes von Laurent Schwartz über kompakte Operatoren in Frechet-Räumen genügt der Satz von Banach zusammen mit elementaren Überlegungen in Hilbert-Räumen). Die Dimension von $H^1(X,\mathcal{O})$ nennt man das Geschlecht von X. Der Rest des Beweises ist ein Kinderspiel. Dafür kostet es einige Mühe, sich unter dem so definierten Geschlecht die Zahl der Henkel von X vorzustellen. Bewiesen wird dieser Zusammenhang mit Hilfe harmonischer Differentialformen.

Das dritte und letzte Kapitel handelt von der Uniformisierung nicht-kompakter Riemannscher Flächen. Dazu wird das Dirichletsche Randwertproblem nach der Methode von Perron gelöst. Durch diese Methode kann der Beweis des Abbildungssatzes für einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen freigehalten werden von gewagten Schlüssen der kombinatorischen Topologie, wie man sie gelegentlich antrifft. Die Beziehungen zur Theorie der Differentialgleichungen werden weiter verfolgt durch die Lösung des Riemann-Hilbertschen Problems, wie sie Helmut Röhrl 1957 durchgeführt hat.

Das Buch kann all denen empfohlen werden, die mit den Grundlagen der Funktionentheorie in der komplexen Ebene vertraut sind, und sehen möchten, welche Querverbindungen zu reeller Analysis, Topologie, Funktionalanalysis und auch Algebra sich heute durch weitergehende Studien der komplexen Analysis auftun. Sie können sich freuen, einen auch in Einzelheiten zuverlässigen Text vorzufinden. Allerdings ist das Buch nicht mehr im einschmeichelnden Legato von Hermann Weyl geschrieben, sondern im knorrigen Staccato von „Definition, Satz, Beweis, Corollar". Daher ist das Buch besonders geeignet, als knapper Begleittext zu einer an Erläuterungen reichen Vorlesung zu dienen. Schließlich sei den „klassischen" eindimensionalen Funktionentheoretikern ans Herz gelegt, all den scheinbaren Fremdkörpern wie Garben, Bündeln oder Cozyklen sine ira et studio näherzutreten.

Düsseldorf G. Fischer

Tanabe, H., Equations of Evolution (Monographs and Studies in Mathematics, No. 6), London-San Francisco-Melbourne: Pitman 1979, 256 p., £ 20.00

In diesem Buch wird der Zugang zu gewöhnlichen Differentialgleichungen im Banachraum vermöge Halbgruppen beschränkter Operatoren behandelt. Nach funktionanalytischen Vorbereitungen entwickelt der Autor den für diesen Zugang wichtigen Begriff der gebrochenen Potenz eines Operators einschließlich des Sonderfalls der gebrochenen Potenzen eines positiven selbstadjungierten Operators, in dem die entscheidenden Beiträge auf E. Heinz („Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung", Math. Ann. 123, 415–438 (1951)) zurückgehen. Anschließend werden stetige und analytische Halbgruppen diskutiert. Als Anwendung der stetigen Halbgruppen dienen dem Autor symmetrische hyperbolische Systeme, als Anwendung analytischer Halbgruppen parabolische Gleichungen; außerdem werden dissipative Operatoren daraufhin untersucht, ob sie Halbgruppen erzeugen.

Wie es natürlich ist, schließt sich hieran die Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen $u' + A(t)u = f$ an, d. h. solcher, bei denen der Evolutions- oder Greensche Operator nicht mehr wie bei Gleichungen $u' + Au = f$ einfach durch die von A erzeugte Halbgruppe geliefert wird, sondern aus den $A(t)$ in mehr oder weniger komplizierter Weise konstruiert wird. Zunächst wird der sogenannte hyperbolische Fall behandelt, d. h. jedes $A(t)$ erzeugt eine stetige Halbgruppe.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen hinsichtlich der Regularität der $A(t)$ in t und der Definitionsbereiche $D(A(t))$, die jedoch nicht zeitunabhängig zu sein brauchen, wird gemäß dem Vorgehen von T. Kato der Greensche Operator konstruiert. Als Anwendung dienen dem Autor wieder symmetrische hyperbolische Systeme und – zusätzlich – Wellengleichungen. Danach wird der parabolische Fall, d. h. jedes $A(t)$ erzeugt eine analytische Halbgruppe, entsprechend der grundlegenden Arbeit des Autors behandelt. Zunächst ist $D(A(t)) = D(A(O))$, später wird der Fall diskutiert, daß die Definitionsbereiche $D(A(t))$ zeitabhängig sind. Innerhalb des funktionalanalytischen Rahmens werden das Verhalten der Lösungen von $u' + A(t)u = f$ für $t \to \infty$ und die Regularität (insbesondere Analytizität) behandelt. Endlich untersucht der Autor den Fall: $A(t)$ accretiv bzw. dissipativ. Als Anwendungen bieten sich natürlich Rand-Anfangswertprobleme für parabolische Gleichungen an.

Das folgende Kapitel ist nichtlinearen Gleichungen gewidmet. Mit Hilfe der Theorie der stetigen Halbgruppen werden zunächst nichtlineare Wellengleichungen wie sie durch K. Jörgens und F. E. Browder bekannt sind, vermöge einer Transformation auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Orndung behandelt und gelöst. Danach betrachtet der Verfasser monotone Operatoren, und zwar sowohl semilineare Gleichungen $u' + A(t)u + f(t,u) = 0$ mit monotoner Nichtlinearität als auch abstrakte Gleichungen, die Anwendungen auf quasilineare parabolische Gleichungen gestatten. Das letzte Kapitel gibt eine kurze Einführung in „optimal control" von Evolutionsgleichungen.

Es ist das Verdienst des Autors, den gesamten halbgruppentheoretischen Zugang zu Evolutionsgleichungen, dessen verschiedene Aspekte sich verstreut in den Lehrbüchern finden, übersichtlich und vollständig dargestellt zu haben. „Vollständig" bezieht sich ausdrücklich auch auf die überzeugenden Anwendungen einschließlich nichtlinearer Probleme. Das Literaturverzeichnis mit 187 Titeln, davon 18 Lehrbücher, kann natürlich nur eine Auswahl aus der enormen Anzahl der Publikationen über dieses Gebiet darstellen.

Bayreuth W. von Wahl

Szmydt, Z., Fourier Transformation and Linear Differential Equations, a. d. Polnischen übersetzt von Marcin E. E. Kuczma, Warschau: Polish Scientific Publishers, 1977, 503 S., cloth, Dfl 90

Das vorliegende Buch ist eine Übersetzung und Erweiterung der polnischen Ausgabe, erschienen 1972 in Warschau. Es behandelt im Rahmen der Schwartzschen Distributionen vor allem Fundamentallösungen und die einfachsten Anfangswertprobleme der wichtigsten partiellen Differentialgleichungen mit konstantanten Koeffizienten der Physik – Wellengleichung, Diffusionsgleichung, Schrödinger-Gleichung, Laplace- und Helmholtz-Gleichung. Dabei beschränkt sich die

Autorin im wesentlichen auf diejenigen Probleme, die einer direkten Behandlung mit den Mitteln der Fourier-Transformation zugänglich sind, wie z.B. Anfangswertprobleme bei Vorgabe von Daten auf einem Hyperteilraum.

Die Einleitung sowie die Kapitel I und II haben vorbereitenden Charakter, behandeln die Sätze von Banach-Steinhaus und Hahn-Banach und geben eine Einführung in die Theorie der Schwartzschen Distributionen sowie die Fourier-Transformation temperierter Distributionen.

In Kapitel III werden die Methoden vorgestellt, die in den folgenden Kapiteln IV bis VI zur Lösung der genannten Gleichungen benutzt werden. Hier sind vor allem die Methode der partiellen Fourier-Transformation zur Gewinnung von Fundamentallösungen sowie die Methode der distributionenwertigen Funktionen zur Bestimmung und Behandlung von Anfangswertproblemen im Halbraum zu nennen. Das Buch verzichtet auf die Darstellung allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen. Vielmehr werden in den Kapiteln IV bis VI die Wellenoperatoren $\Box_1, \Box_2, \Box_3$, der Diffusionsoperator $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_n$, der Schrödinger-Operator $\frac{\partial}{\partial t} - ib\Delta_n$, der Laplace-Operator und der Helmholtz-Operator $\Delta_n + k^2$ explizit behandelt. Dabei vergißt die Autorin nicht, aus den Sätzen über schwache Lösungen Sätze über klassische Lösungen herzuleiten. Kapitel VI enthält auch eine Behandlung des Dirichlet-Problems, und in einem Anhang untersucht die Autorin zusammen mit B. Ziemian den Wellenoperator mit mehr als drei Raumkoordinaten.

Es ist der Hauptgesichtspunkt des Buches, mit modernen Methoden zu expliziten Ergebnissen zu gelangen – in diesem Sinne ergänzt es die umfangreiche Literatur auf diesem Gebiet. Es verzichtet dabei auf Allgemeinheit; Begriffe wie Hyperbolizität, Parabolizität, Elliptizität oder Hypoelliptizität werden nur gestreift. Es ist nicht für den Spezialisten geschrieben, eignet sich aber wegen seiner zahlreichen Beispiele, Gegenbeispiele und Übungen und wegen seiner bis ins Detail ausgeführten Beweise gut für Studenten der Mathematik und Physik ab dem Vorexamen.

Erlangen G. Ritter

Wendland, W. L., Elliptic Systems in the Plane (Monographs and Studies in Mathematics, vol. 3.) London – San Francisco – Melbourne: Pitman Publishing Limited 1979, XI und 404 pp., cloth, £ 16.00

Die Geschichte der Randwertprobleme für Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung in zwei Variablen ist annähernd so alt wie die Geschichte der Funktionentheorie. In der Tat, das System der beiden Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen dürfte wohl der einfachste und prominenteste Vertreter in dieser Kategorie sein. Fast zwangsläufig ergibt sich, daß der Funktionentheorie eine bedeutende Rolle bei der Behandlung solcher Randwertprobleme zukommen muß. Hilberts Untersuchungen zu Beginn unseres Jahrhunderts (Göttinger Nachr. (1910) 1–65) befruchten diese Disziplin in entscheidendem Maße. Basierend auf Ideen von E. E. Levi konzipiert David Hilbert unter Verwendung von Singularitätenfunktionen die Integralgleichungsmethode und erschließt damit für Randwertprobleme einen einfachen Zugang zur Fredholmtheorie. Neue Impulse gehen u.a. von T. Carleman aus (das „Ähnlichkeitsprinzip“); die Theorie findet ihren einstweiligen Abschluß in den Monographien von L. Bers (Function-theoretical properties of solutions of partial differential equations of elliptic type. Ann. Math. Studies No. 33, 1954), von I. N. Vekua (Generalized analytic functions. Oxford: Pergamon Press, 1962) sowie von W. Haack und W. Wendland (Vorlesungen über Partielle und Pfaffsche Differentialgleichungen. Basel: Birkhäuser Verlag, 1969). Heute gelten die Bers – Haack – Vekua – Ergebnisse über Riemann-Hilbertsche Randwertaufgaben bereits als klassisch.

Nun dokumentiert das zur Besprechung vorliegende Buch von Wolfgang Wendland, daß der Themenkreis der Riemann-Hilbertaufgaben in der Funktionentheorie keineswegs schon abgeschlossen ist. Vielmehr hat sich das Interesse in neuerer Zeit der Untersuchung von elliptischen Randwertproblemen für Systeme 1. Ordnung mit mehr als zwei gesuchten Funktionen zugewandt. Das Buch ist ausschließlich diesem neuen und ohne Frage höchst bedeutungsvollen Aspekt gewidmet. Der Verfasser erklärt es zu einem seiner Anliegen, die Brücke von der klassischen Bers – Haack – Vekua – Theorie zu den erwähnten allgemeineren Systemen schlagen zu wollen.

Der Inhalt des Buches gliedert sich augenscheinlich in zwei Teile auf. Teil A behandelt ausschließlich die Theorie, Teil B ihre numerischen Aspekte. Im Vordergrund der theoretischen Untersuchungen steht insbesondere die Fredholmtheorie. Die Technik ist verblüffend einfach. Mit Hilfe von Homotopien werden die allgemeinen Gleichungssysteme als Störungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen interpretiert. Das Verfahren gestattet nicht nur die explizite Berechnung der jeweiligen Fredholmindizes, in solch konsequenter Weise dürften wohl elementare Homotopiemethoden hier zum ersten Mal vollständig und umfassend bei Systemen 1. Ordnung eingesetzt worden sein. Dem theoretischen Teil wird auf diese Weise eine schöne Geschlossenheit gegeben. Wie von selbst fügen sich in diesen Rahmen die von Bojarski, Douglis, Gilbert und Pascali ausgehenden wichtigsten neueren Entwicklungen ein. Klarzustellen ist, daß sich die Untersuchungen nur auf elliptische Randwertprobleme in einfach zusammenhängenden Gebieten der komplexen Ebene beziehen, obwohl eine Verallgemeinerung auf mehrfach zusammenhängende Gebiete nicht zu grundsätzlich neuen Schwierigkeiten führen dürfte. Ebenso ist klarzustellen, daß der überwiegende Teil der Lösungstheorie in Räumen Hölder-stetig differenzierbarer Funktionen entwickelt wird. Die lineare Theorie überwiegt bei weitem, es werden aber durchaus auch Aspekte der Theorie für entsprechende semilineare und nichtlineare Systeme beleuchtet. Teil A schließt mit der Darstellung der diskutierten Randwertprobleme in Form von singulären Integralgleichungen. Einige Lösungseigenschaften, wie zum Beispiel das Ähnlichkeitsprinzip, Nullstellen von Lösungen, die eindeutige Fortsetzbarkeit, das Spiegelungsprinzip und die Rungesche Approximationseigenschaft werden noch kurz erörtert.

In Teil B stellt der Autor drei verschiedene Methoden zur numerischen Behandlung der vorher untersuchten Randwertprobleme vor: die Integralgleichungsmethode, das Differenzenverfahren und die Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Obwohl dies gängige numerische Verfahren mit einem weit ausgebauten theoretischen Hintergrund sind, gilt es hier doch einige Novitäten besonders herauszustellen, und zwar

1) die Verwendung von Koerzitivitäts-Ungleichungen bei den Integralgleichungen,
2) den ersten Konvergenzbeweis für finite Differenzenmethoden bei Systemen 1. Ordnung, der zum Teil auf neuen Abschätzungen der Greenschen und Neumannschen Funktionen basiert,
3) die volle Durcharbeitung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für Systeme 1. Ordnung mit dem erstaunlichen Resultat, daß die resultierenden diskreten Gleichungen eine quasidiagonale Gestalt haben, was man ja von den Differentialgleichungen gerader Ordnung her bereits kennt.

Es soll kein Zweifel daran gelassen werden, daß das Buch von einem Kenner der Materie geschrieben worden ist, der sein Interessengebiet dem allerneuesten Stand der Forschung entsprechend darzustellen versucht. Das Werk trägt deshalb nicht den einführenden Charakter eines Lehrbuchs. Dem Leser werden einige Vorkenntnisse abverlangt (zum Beispiel eine gewisse Vertrautheit mit dem Umgang Pfaffscher Formen; man ist gut beraten, wenn man diesbezüglich das oben zitierte Buch von W. Haack und W. Wendland konsultiert).

Auf Anwendungen (die hauptsächlich der Elastizitätstheorie und der Strömungsmechanik entspringen) geht der Verfasser in einem zehnseitigen Appendix leider nur sehr kurz ein, und über die Erprobung oder gar über exemplarische Resultate der vorgestellten numerischen Verfahren ist fast nichts in Erfahrung zu bringen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die vorliegende Monographie vielleicht nicht als eine Einführung in die funktionentheoretischen Methoden bei partiellen Differentialgleichungen benutzt werden sollte, daß sie aber dem Interessierten den heutigen Stand der Forschung in der speziellen Disziplin der Randwertprobleme für elliptische Systeme 1. Ordnung mit mehr als zwei Unbekannten aufzeigt. Ein ausführliches Literaturverzeichnis, welches jedem der acht Kapitel gesondert beigefügt ist und welches insgesamt etwa 560 Titel umfaßt, rundet die Bedeutung des Buches als wertvolles wissenschaftliches Werk ab.

Dem sehr sorgfältig geschriebenen und von Pitman hervorragend ausgestatteten Buch seien viele Leser gewünscht, die von den zahlreichen Anregungen zu weiterer wissenschaftlicher Arbeit profitieren mögen.

Erlangen H. Grabmüller

Dickey, R. W., Bifurcation problems in nonlinear elasticity (Research Notes in Mathematics, Nr. 3), London – San Francisco – Melbourne: Pitman Publishing 1976, 119 pp., £ 6.00

Das Bändchen ist entstanden aus einer Serie von Vorträgen des Autors und enthält einige Beispiele zur Verzweigung von Lösungen nichtlinearer Randwertaufgaben, die sämtlich aus der Elastizitätstheorie stammen. Die wichtigsten seien hier genannt: die Biegung einer elastischen Saite und einer kreisförmigen Membran unter Normaldruck, die rotierende Saite fester Länge und die Beulung einer kreisförmigen Platte. Formuliert werden sie als gewöhnliche Randwertprobleme, die durchgehend mit adhoc Verfahren behandelt werden können: mit Hilfe der Phasenebene, durch Shooting Verfahren und mit Monotonie-Methoden. Keines der behandelten Probleme ist neu, und so ist dieses Bändchen eher eine elementare, exemplarische Einführung in die Bifurkationstheorie als eine „Research-Note". Obschon 1976 erschienen, ist das Literaturverzeichnis bestenfalls bis 1969 zuverlässig, und auch da verrät es eine kaum zu rechtfertigende Vorliebe für die New-Yorker Schule. Es enthält im übrigen eine Fülle von kleinen Fehlern – meistens Druckfehler – und einige inkonsequente Bezeichnungen. All dies macht es sicher zu einem der schwächeren Beiträge dieser neuen Serie. Dennoch könnte dieses Büchlein für den Nichtfachmann, gerade der Beispiele und der expliziten Darstellung wegen, als Einführung von Interesse sein.

Stuttgart K. Kirchgässner

Marsden, J. E., McCracken, M., The Hopf Bifurcation and its Application (Applied Mathematical Sciences, vol. 19), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1976, xii + 408 p., soft cover DM 36.20

In einem parameterabhängigen dynamischen System zweigt von einem stabilen Fixpunkt ein geschlossener Orbit ab, wenn zwei einfache, konjugiert komplexe Eigenwerte der Linearisierung die imaginäre Achse mit von Null verschiedener Geschwindigkeit überqueren. Als E. Hopf diesen Satz 1942 bewiesen hatte, schrieb er, er glaube kaum, daß in diesem Ergebnis wesentlich Neues stecke. In der Tat waren die Methoden fünfzig Jahre früher von Poincaré entwikkelt worden, und Hopf's Leistung bestand in deren Ausdehnung auf beliebige Dimensionen. Jetzt, nach weiteren 35 Jahren, liegt hier ein modernes Buch über dieses Thema vor, und man fragt sich, was diese neuerliche Renaissance bewirkt habe. Einer der Gründe liegt sicher in den Umwälzungen unserer Vorstellung von der Natur der Turbulenz, die durch die Arbeit von Ruelle und Takens 1971 hervorgerufen worden sind. Sie haben nämlich gezeigt, daß spätestens nach vier sukzessiven Verzweigungen vom Hopf-Typ sogenannte „strange attractors" (SA) auftreten können. Das sind Mengen, die gewöhnlich aussehen wie das Produkt aus einer Cantor-Menge und einer Mannigfaltigkeit, die als Ganzes attraktiv, deren Individualpunkte jedoch instabil sind. In der Nähe eines SA hat der Fluß chaotischen Charakter und wird als turbulent angesehen. Ein zweiter Anlaß für das erwachte Interesse an Hopf-Verzweigungen liegt in den vielfältigen Erscheinungen der Natur begründet, die als Bifurkation erklärt werden können: Oszillation chemischer Reaktionen, Laserpulse, Magnetfeld der Erde, um nur wenige zu nennen.

Das vorliegende Buch gibt eine systematische Einführung in den methodischen Teil und einen episodenhaften in den Anwendungsbereich dieser Theorie. Allerdings beschränkt sich auch der erste Teil ganz und gar auf die rein analytischen Methoden, mit denen das Verhalten in der Nähe des Verzweigungspunktes beschrieben werden kann. Dabei geht es hauptsächlich um die Reduktion des evtl. unendlich-dimensionalen Problems auf eine Hopf-Verzweigung im $\mathbf{R}^2$. Dies wird bewerkstelligt mit der Zentrumsmannigfaltigkeit, die invariant und lokal attraktiv ist und somit alle rekurrenten Vorgänge enthalten muß. Sie wird zunächst konstruiert, und mit ihrer Hilfe wird sodann der Hopf'sche Satz bewiesen. Ein Analogon dieses Satzes gilt auch für parameterabhängige Diffeomorphismen, bei denen zwei einfache Eigenwerte den Einheitskreis verlassen. Angewendet auf die Poincaré-Abbildung für einen geschlossenen Orbit führt dies zu Bedingungen für die Abzweigung eines zweidimensionalen Torus. Stabilitätsuntersuchungen für die verzweigenden Lösungen und eine kritische Analyse der ursprünglichen Arbeit beschließen diesen ersten Teil. Der zweite Teil befaßt sich mit Einzelproblemen, hauptsächlich aus dem Bereich der Anwendungen. Dazu wird zunächst die Theorie der Halbgruppen, die von partiellen Differentialoperatoren erzeugt werden, soweit wie nötig entwickelt und die notwendigen Regularitäts-Eigenschaften der zugehörigen Halbflüsse bewiesen. Nach einem Abschnitt über Bifurkation mit Symmetrien (Schecter) folgen Untersuchungen zur Turbulenzentstehung bei zähen Strömungen, zur Bifurkation bei Populations-Modellen (Oster und Guckenheimer) und die Analyse der Membran-Diffusion zweier interaktiver Zellen (Smale). Am Ende wird ein SA für die Lorenz-Gleichungen konstruiert (Guckenheimer).

Das Buch ist in seinem systematischen Teil ein großer Gewinn, insofern es die Entwicklung bis 1974 auch für Außenstehende lesbar zusammenfaßt. Der zweite Teil ist reizvoll, könnte aber durch manche Neuerscheinung vorteilhaft ersetzt werden. Das sorgfältig zusammengestellte Literaturverzeichnis enthält auch die wichtigsten topologischen Arbeiten, mit denen globale Ergebnisse gewonnen werden können. Kurz: Eine vorzügliche Vorlage für ein Seminar.

Stuttgart K. Kirchgässner

Poston, T., Stewart, I. N., Taylor expansions and catastrophes (Research Notes in Math., Vol. 7), London-San Francisco-Melbourne: Pitman Publishing 1976, 168 S., pbk., £ 6.75

Die Katastrophentheorie von René Thom, die zum ersten Mal einen Weg gezeigt hat, die Methoden und Ergebnisse der modernen Geometrie in den Naturwissenschaften allgemein anwendbar zu machen, hat leider bisher nur wenige wirklich stichhaltige Anwendungen gefunden. Das liegt zum Teil daran, daß Naturwissenschaftler, auch wenn sie einmal etwas davon gehört haben, die Katastrophentheorie nicht anwenden können, weil sie sie nicht verstehen – ja, wie sollten sie sie denn verstehen können, wo ihnen doch die nötigen mathematischen Vorkenntnisse fehlen und ihnen sogar die geometrische Denkweise der Katastrophentheorie von ihrer rein numerisch-analytischen mathematischen Ausbildung her völlig fremd ist. Gerade diesem Problem will das vorliegende Buch von Poston und Stewart Abhilfe schaffen.

Die Autoren haben sich zum Ziel gesetzt, eine für Laien allgemeinverständliche Darstellung der Thomschen Singularitätentheorie (also des mathematischen Hintergrunds der Katastrophentheorie) zu schreiben, in der die Grundbegriffe erklärt werden, die Sätze, ohne auf Beweise einzugehen, glaubhaft gemacht werden, und genauestens erklärt wird, wie man die Sätze in der Praxis anwenden kann, d. h., wie man damit rechnet. Allerdings befaßt sich hiermit nur der erste Teil (etwa 2/3) des Buches. Es folgen noch zwei Kapitel über speziellere Themen, die eigentlich eher für Experten gedacht sind.

Genaueres zum Inhalt: Das Buch besteht aus fünf Kapiteln (die wohl ursprünglich als getrennte Arbeiten gedacht waren). Die ersten drei Kapitel, wie gesagt für Laien gedacht, setzen keine weiteren Vorkenntnisse voraus als das, was jeder Nautrwissenschaftler einmal über Infinitesimalrechnung gelernt hat. In Kapitel 1 werden die Grundbegriffe erläutert: es wird erklärt, in welchem Sinne man die Jets einer Funktion als gute Approximationen zu der Funktion auffassen kann, das Morse-Lemma wird erläutert, und der Transversalitätsbegriff wird definiert. Im 2. Kapitel wird erläutert, wie man intuitiv aus der Generizität der Transversalitätseigenschaft die Thomsche Klassifikation der Elementarkatastrophen (bis zu Entfaltungsdimension 5) folgern kann, natürlich ohne den Satz genau zu beweisen; auch das Splittinglemma kommt hier, wenigstens in Beispielen, vor. Kapitel 3 befaßt sich mit der Matherschen Singularitätentheorie – es wird erklärt, was k-bestimmte Keime sind (und welche praktische Bedeutung die k-Bestimmtheit hat), was (uni)verselle Entfaltungen sind, was die Kodimension eines Keimes ist, und die Matherschen Sätze hierüber werden in der Form zitiert, daß genaue und detaillierte Algorithmen angegeben werden, um auszurechnen, ob ein Keim k-bestimmt oder eine Entfaltung versell ist. Ein Algorithmus zur Anwendung des Splittinglemmas (im Buch heißt das „Normalisierung") wird auch angegeben, aber es ist so ungeschickt, daß man diesen Abschnitt besser nicht lesen sollte: Die Autoren setzen ihre Koordinatentransformationen in der falschen Richtung ein, so daß sie bei jedem Induktionsschritt die errechnete Koordinatenänderung umkehren müssen bevor sie weitermachen können, was eine sehr langwierige Rechnung mit Taylorreihen erfordert. Macht man die bis auf einen Vorzeichenwechsel gleichen Substitutionen in der anderen Richtung, so kann man sich das Umkehren ganz sparen.

Vom Aufbau her hätte sich dieser erste Teil des Buches sehr gut eignen können, Nichtmathematikern gerade das Wesentliche an der Singularitätentheorie mitzuteilen und verständlich zu machen, aber leider wird die schöne Grundkonzeption durch die sehr schlechte Ausführung im Detail völlig zunichte gemacht. Die Darstellung ist viel zu vague, um gut verständlich zu sein, und oft fehlen nötige Erklärungen. Man hat zudem das Gefühl, daß die Autoren in einer Art „Gastarbeitermathematik" schreiben und dem Leser überhaupt nicht zutrauen, mit exakten Aussagen fertig zu werden. Natürlich haben komplizierte Beweise in einem solchen Buch nichts zu suchen, aber leider haben die Verfasser auch da genauere Erläuterungen und Beweise weggelassen, wo sie sehr kurz und einfach gewesen wären und viel zum Verständnis beigetragen hätten. So wird z.B. laufend gesagt, Transversalität sei eine „typische" Eigenschaft, aber daß dies unter anderem heißt, daß die Eigenschaft dicht ist, wird nie erwähnt. Oder es wird gesagt, daß der Keim $x^n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n-bestimmt ist, weil man mit elementarer Analysis zeigen könne, wenn $j^n f = x^n$ dann ist $\sqrt[n]{f}$ differenzierbar. Mir wäre diese letzte Aussage nicht von vornherein klar, und der einzeilige! Beweis wird nicht gegeben. Die Autoren wollen die Katastrophentheorie für die Anwender entmystifizieren, aber durch die Verschwommenheit der Erklärungen wird gerade das Gegenteil erreicht, denn dem Leser wird dadurch implizit gesagt, Genaueres könne er ja doch nicht verstehen. Auch kann er aus der Fülle ungenauer Erklärungen das Wesentliche schwer herauspicken, was bei der schönen Grundkonzeption sehr schade ist.

Andrerseits wird dann oft dem als sehr ungebildet vorausgesetzten Leser geradezu nahegelegt, Sachen selber auszurechnen, die für ihn viel zu schwierig sein müssen (so z.B. die Beweise der Grundtatsachen über das Doppelverhältnis oder die Umkehrung einer komplizierten polynomialen Koordinatentransformation). Außerdem enthält das Buch sehr viele Fehler – einige sind zwar nur Druckfehler, aber auch diese können gerade bei mathematisch ungebildeten Lesern viel Verwirrung stiften.

Die beiden letzten Kapitel fand ich etwas besser als das Vorausgegangene. Sie enthalten zwar nichts mathematisch besonders Tiefsinniges, aber doch einiges Schönes, und sind für Singularitätentheoretiker nicht ganz ohne Interesse. Hier sind zwar immer noch einige Fehler und Unklarheiten, und manchmal wird am Thema etwas vorbeigeredet, aber da diese Kapitel doch eher für Mathematiker gedacht sind, ist das nicht so sehr störend. In Kapitel 4 wird die geometrische

Struktur der Menge der entarteten homogenen quartischen Binärformen untersucht. Die Menge wird in zwei Teile zerlegt, die auf elegante und gut zu verstehende Art beschrieben werden. Nur beim Wiederzusammenkleben dieser Teile ist zu bemängeln, daß nicht (oder nur sehr schlecht) begründet wird, warum die angegebene Struktur nahe der Klebestelle auch differenzierbar und nicht nur topologisch richtig ist; auch wird völlig irrelevanterweise von einer Verdrillung geredet, die eigentlich nur weit weg von der Klebestelle sichtbar wird. Das Kapitel schließt mit einer „dualen“ Beschreibung der quartischen Formen, die allerdings zu knapp ist, um gut verständlich zu sein.

In Kapitel 5 wird die Struktur der Bifurkationsmenge zweier einfacher Katastrophenmaschinen (Kreise und Ellipse, die auf einer schrägen Ebene rollen) durch geometrische Argumente hergeleitet und in Zeichnungen sichtbar gemacht, und eine überraschende (aber vielleicht rein zufällige) Ähnlichkeit zur Geometrie von Kapitel 4 wird aufgedeckt. Das Kapitel ist gut zu verstehen, abgesehen von einem Fehler am Anfang, wo die Gradientenentfaltung einer Katastrophenmaschine normalisiert wird durch eine völlig unverständliche (und auch falsche) explizite Koordinatentransformation; zu der angegebenen Transformation der Entfaltungsparameter kann es gar keine Transformation der übrigen Variablen geben, die die gewünschte Normalform erzeugt.

Um zusammenzufassen: als Einführung in die Singularitätentheorie für Nichtmathematiker ist das Buch zwar im Aufbau sehr schön, aber in der Ausführung ziemlich schlecht. Da es aber meines Wissens fast das einzige Buch dieser Art ist (abgesehen von einem neueren Buch von den gleichen Autoren, in dem auch Teile dieses Buches übernommen worden sind), mag es vielleicht doch von etwas Nutzen sein für einen Leser, der das Buch mit Einsicht und ohne allzu großen Erwartungen liest, und der sich nicht entmutigen läßt, wenn er etwas nicht versteht (denn es ist nicht seine Schuld). Die letzten beiden Kapitel sind trotz einiger Mängel besser und enthalten schöne geometrische Ausführungen, aber mathematisch Bedeutsames enthält das Buch nicht.

Bochum G. Wassermann

Gibson, C. G., Singular Points of Smooth Mappings (Research Notes in Mathematics, No. 25), London – San Francisco – Melbourne: Pitman 1979, 200 p., paper, £ 6.00

Es handelt sich weniger um „Research Notes“ – wie die Reihe heißt – als um eine für Studenten nach den ersten zwei-drei Semestern lesbare, vielfach ermunternde Einführung in die oft beschriebene Theorie der endlichen Bestimmtheit und Entfaltung differenzierbarer Singularitäten. Als solche hält sie sich an bewährte Vorbilder. Allerdings wird man doch kaum erwarten, daß ein Student das ganze Buch durchliest, dem man nicht auch gleich zumuten könnte und sollte, den inzwischen ja recht einfachen Beweis des Vorbereitungssatzes aufzunehmen. Dieser zählt hier ebenso zu den „tiefliegenden“ Sätzen, wie etwa der komplex-analytische Nullstellensatz. Im einzelnen findet man: Kapitel 1 – Eine sehr ansprechende Erinnerung an die Grundlagen der Differentialrechnung; es wird erklärt was differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des R^n und ihre Tangentialbündel sind, was Vektorfelder sind und ihr Fluß lokal um einen Punkt (Die Formulierung des Glättungssatzes Seite 30 ist fehlerhaft, weil es auf einer Untermannigfaltigkeit im allgemeinen kein „konstantes“ Vektorfeld gibt). Kapitel 2 – Erklärung des Begriffs der Transversalität und Beweis einer einfachen Version des Jet-Transversalitätssatzes mit Anwendung auf die Thom(-Boardman)-Singularitätenmengen erster Ordnung. Kapitel 3 – Gruppenaktionen und zu den Orbits transversale Scheiben als Modell der „Entfaltung“. Nur für die Orbits werden die Mannigfaltigkeiten in dem übrigens ganz lokalen Buch gebraucht. Kapitel 4 – Endliche Bestimmtheit und Klassifikation von Funktionskeimen der Kodimension $\leqslant 5$ (Der Beweis des Satzes über endliche Bestimmtheit enthält einen kleinen Kurzschluß: Etwas leichtfertig betrachtet der Verfasser eine Funktion $(1-t)\,f + t\,g$ nur lokal um t = 0, wo t im maximalen Ideal liegt). Das Splittinglemma wird nur für endlich bestimmte Keime bewiesen. Kapitel 5 – Erklärung der Kontaktäquivalenz von Abbildungskeimen; der Satz über ihre universellen Entfaltungen wird nicht bewiesen, weil der Vorbereitungssatz fehlt. Der Zusammenhang von Deformationen unter Kontaktäquivalenz und stabilen Abbildungskeimen wird skizziert und der Satz von Boardman über die Thom-Boardman-Singularitätenmengen wird ohne Beweis beschrieben, auf Beispiele angewendet und für Klassifikationen benutzt. In Appendices werden der Satz von Sard (nach Milnor) und der klassische Satz von Borel über die Realisierung von Taylorreihen bewiesen.

Die erste Hälfte des Buches ist ein sehr lesbare anregende Einführung mit die Anschauung unterstützenden schönen Skizzen; in der zweiten Hälfte wird der Leser wohl doch leicht den Faden verlieren, weil das Unbewiesene sich häuft.

Regensburg Th. Bröcker

Minc, H., Permanents (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 6), Reading, Ma: Addison-Wesley Publ. Comp. 1978, xviii + 205 pp, cloth, $ 29,60

Mit diesem Buch liegt erstmals eine Monographie vor, die ausschließlich der Permanenten gewidmet ist, jener Matrix-Funktion, die M. Marcus in seinem Vorwort „intractable and fascinating" nennt. Absicht des Autors ist es, einen vollständigen Überblick über Geschichte, Theorie und Anwendung der Permanenten zu geben. Ist die Entwicklung – seit der Schöpfung dieses Begriffes durch Binet und Cauchy im Jahre 1812 – zunächst eher gemächlich verlaufen, so hat in den letzten zwanzig Jahren eine enorme Aktivität eingesetzt, ausgelöst durch grundlegend neue Ansätze zur Behandlung lang ausstehender Probleme (Arbeit von Marcus/Newman zur Vermutung von v. d. Waerden) und verstärktes Interesse seitens der Kombinatorik und Physik an Permanenten als Werkzeug zur Behandlung von Enumerationsproblemen graphentheoretischer Natur. Über alle wichtigen Stationen dieser Entwicklung wird hier berichtet.

Zum Inhalt: das erste Kapitel bietet einen Überblick über die Geschichte der Permanenten anhand einiger klassischer Resultate; dabei wird die Entwicklung seit 1959 nur stichwortartig wiedergegeben, da vieles davon in den folgenden Kapiteln ausführlich dargestellt wird. Im zweiten Kapitel werden elementare Eigenschaften der Permanenten behandelt, insbesondere solche, die ein Analogon für Determinanten haben; ferner wird die auf Marcus/Newman zurückgehende Darstellung der Permanenten im Rahmen der multilinearen Algebra präsentiert, ein Ansatz, der zu gewichtigen Resultaten führt (siehe Kapitel 4.5). Struktureigenschaften von (0,1)-Matrizen und nichtnegativen Matrizen werden im dritten Kapitel untersucht, dabei wird ganz besonders der enge Bezug zu kombinatorischen Fragestellungen deutlich. Das vierte Kapitel behandelt untere Schranken für die Permanenten von (0,1)-Matrizen, nichtnegativen und positiv-semidefiniten hermiteschen Matrizen – es kulminiert in dem Nachweis der Richtigkeit von v. d. Waerdens Vermutung für die Klasse der positiv-semidefiniten symmetrischen doppelt-stochastischen Matrizen, und dies leitet über zu dem fünften (und umfangreichsten) Kapitel dieses Buches, das den vielfältigen Bemühungen um die Vermutung von v. d. Waerden über die Permanente von doppelt-stochastischen Matrizen gewidmet ist. Am Ende dieses Kapitels (S. 99 unten) findet sich ein Hinweis auf ein von T. Bang 1976 angekündigtes Resultat, für das bei Drucklegung des Buches noch kein Beweis vorlag. Tatsächlich konnte dieses Resultat inzwischen von S. Friedland (im wesentlichen) verifiziert werden (A lower bound for the permanent of a doubly stochastic matrix. Ann. of Math. **110** (1979) 167–176), der zeigt, daß die Permanente einer doppelt-stochastischen n x n-Matrix nicht kleiner als e^{-n} ist. Damit ist nun eine untere Schranke nachgewiesen, deren Größenordnung in etwa dem von v. d. Waerden vermuteten Wert $n! \cdot n^{-n}$ entspricht. Obere Schranken für die Permanenten von (0,1)-Matrizen, nichtnegativen und komplexen Matrizen bilden den Gegenstand des sechsten Kapitels. Anschließend werden verschiedene Methoden zur Berechnung von Permanenten vorgestellt und bezüglich ihrer Effizienz miteinander verglichen – ein Punkt, zu dem später noch etwas gesagt werden soll. Das abschließende achte Kapitel bringt einige Resultate über Sub-Permanenten und vermittelt einen Eindruck von der Verwendung der Permanenten bei graphentheoretischen Enumerationsproblemen, wie sie etwa in der statistischen Mechanik und Kombinatorik untersucht werden. Diesem Aspekt hat der Autor weniger großes Gewicht beigemessen; der Interessierte findet aber in diesem Abschnitt, wie auch im Literaturverzeichnis, eine Reihe von Hinweisen. Schließlich wird die von Marcus/Minc im Jahre 1965 publizierte Liste mit fünfzehn Vermutungen und Problemen samt Kommentaren über die in der Zwischenzeit erzielten Resultate wiedergegeben – etliche neue Probleme verschiedener Autoren ergänzen diese Zusammenstellung. Das Literaturverzeichnis enthält 303 Titel, vermutlich alle wichtigen Arbeiten zur Theorie der Permanenten überhaupt, die bis zur Abfassung des Buches publiziert wurden, oder kurz davor standen. Die Arbeiten sind chronologisch geordnet, und das wesentliche Ergebnis wird jeweils in ein oder zwei knappen Sätzen dargestellt.

Das Buch ist sehr gut lesbar; wenige Druckfehler und einige etwas unpräzise Formulierungen fallen nicht ins Gewicht gegenüber einer beeindruckenden Fülle an Material, das sorgfältig dargeboten wird. An Voraussetzungen genügen solide Grundkenntnisse in linearer Algebra; dank der vielen ausführlichen Beweise, in denen die spezifischen Techniken dieses Gebietes demonstriert werden, und der zu jedem Kapitel gebotenen Aufgaben verschiedener Schwierigkeit eignet es sich gut dafür, dem Nicht-Spezialisten den Zugang zu ermöglichen. Insbesondere für Leser mit kombinatorischen Neigungen dürfte dieses Buch eine Fundgrube sein. Und wer sich ernsthaft mit Permanenten beschäftigen will, wird an diesem Buch nicht vorübergehen können, das in seiner Thematik konkurrenzlos ist.

Abschließend erscheint mir noch ein Hinweis zu einer Tatsache angebracht, die in dem vorliegenden Buch immer wieder angesprochen, ja man kann fast sagen: beklagt wird. Es geht darum, daß bis heute keine effizienten Methoden zur Berechnung von Permanenten bekannt sind – ganz im Gegensatz zu der Situation bei Determinanten. Selbst das bislang beste Verfahren für allgemeine Permanenten (Ryser/Nijenhuis/Wilf) erfordert einen Rechenaufwand, der exponentiell mit der Größe der gegebenen Daten wächst; dies gilt sogar für den speziellen Fall der Berechnung der Permanenten von (0,1)-Matrizen – dem entspricht das bekannte kombinatorische Problem der Bestimmung der Anzahl kompletter 1-Faktoren (perfect matchings) in einem bipartiten Graphen. Nun hat L. G. Valiant gezeigt, daß die Berechnung der Permanenten – sogar schon bei (0,1)-Matrizen – ein sogenanntes #P-vollständiges Problem im Sinne der Komplexitätstheorie ist (The complexity of computing the permanent. Theor. Computer Sci. 8 (1979) 189–201). Dies gibt jedenfalls starke Hinweise darauf, daß es möglicherweise überhaupt keine effizienten Algorithmen zur Berechnung von Permanenten geben kann. Valiants Arbeiten zur komplexitätstheoretischen Klassifizierung von Enumerationsproblemen (siehe auch: The complexity of enumeration and reliability problems, SIAM J. on Computing 8 (1979) 410–421; Negative results on counting, in: Springer Lecture Notes in Computer Science, Vol. 67, 38–46), die verständlich zu machen suchen, warum bei so vielen Problemen dieser Art die Suche nach „expliziten" exakten Lösungen vergeblich war, oder sogar: sein mußte, werden im vorliegenden Buch von Minc noch nicht erwähnt; dort, wie natürlich auch hier, müßte allein die Einführung und Erläuterung der erforderlichen Terminologie den Rahmen sprengen. Eine gute Darstellung des nötigen Hintergrundwissens findet der Interessierte in dem Buch Garey, M. R., Johnson, D. S., Computers and Intractability, Freeman 1979, dessen Kapitel 7.3 der Komplexität von Enumerationsproblemen gewidmet ist.

Erlangen V. Strehl

McEliece, R. J., The Theory of Information and Coding – A mathematical framework for Communication (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 3), Reading, Ma: Addison-Wesley Publ. Comp. 1977, xi + 302 pp, cloth, $ 29,60

Dieser dritte Band der „roten Enzyklopädie" (Encyclopedia of mathematics and its Applications; Gian-Carlo Rota, editor) gibt Einführung in und Überblick über das Gebiet der mathematischen Informationstheorie, u. z. sowohl von der wahrscheinlichkeitstheoretischen als auch von der algebraischen Seite. – Die Einleitung läßt sich als eine Art Werkstattführung lesen. Teil I (Kap. 1–6) des darauf folgenden systematischen Texts enthält im wesentlichen die wahrscheinlichkeitstheoretische, Teil II (Kap. 7–11) die algebraische Informationstheorie. In vier kurzen Anhängen werden einige benötigte Hilfsmittel (z. B. Auszüge aus der Theorie der endlichen Körper) skizziert. Genauere Angaben: Kap. 1 bringt die Grundtatsachen über Information und Entropie; als Motivation wird die Definition des DMC (discrete memoryless channel) und anderer einfacher Kanaltypen eingefügt; die Fano-Ungleichung wird bewiesen; die gegenseitige Information in zwei Zufallsvariable wird definiert; es folgen die wichtigsten Ungleichungen für diese Information. In Kap. 2 wird für den DMC und eine vorgegebene Kostenfunktion auf dem Eingangsalphabet die sog. capacity-cost function eingeführt. Ein coding theorem ohne Fehlergliedabschätzung erscheint als theorem 2.4; die Bedingung „für genügend großes n" fehlt in der Formulierung dieses und anderer Sätze, ergibt sich aber aus dem Text und dem Beweis. In Kap. 3 erscheint eine Kostenfunktion für fehlerhafte Übertragung (distortion measure) und die zugehörige Variante von Shannon's Quellencodierungstheorem (theorem 3.4). Kap. 4 nimmt die reellen Zahlen als Alphabet und arbeitet mit Gauß'schen Übertragungs-Wahrscheinlichkeitsverteilungen; Approximationsüberlegungen, die z. T. schon in Kap. 1 dargelegt wurden, gestatten weitgehend die Übertragung der diskreten Theorie aus Kap. 2 und Kap. 3 auf den vorliegenden kontinuierlichen Fall. Kap. 5 enthält den Hauptsatz der stochastischen Informationstheorie, das source-channel coding theorem. Kap. 6 berichtet über weitergehende Resultate, insbesondere über Fehlergeschwindigkeitsabschätzungen. Mit Kap. 7 beginnt der algebraische Teil; der Hamming-Code erscheint als Beispiel aus der Klasse der linearen Codes; Codes, die r Irrtümer entdecken bzw. korrigieren, werden definiert, die grundlegenden Abschätzungen bewiesen. Kap. 8 behandelt spezielle algebraische Code-Typen: Bose-Ray-Chaudhuri (BCH), Reed-Solomon, Golay sind die wichtigsten Namen. Kap. 9 beschäftigt sich mit Faltungs-Codes, Kap. 10 mit variablen Codewortlängen. In Kap. 11 wird wieder ein Überblick über weitergehende Resultate geboten. – Die den Kapiteln angefügten Notizen und das Literaturverzeichnis verraten mehr Einseitigkeit als man bei einem Buch mit enzyklopädischem Ehrgeiz erwarten sollte. Das hat besonders die stochastische Informationstheorie zu spüren bekommen: die Namen Dobrushin, Cziszàr, Ahlswede, Augustin, Strassen fehlen völlig. So bleibt der enzyklopädisch interessierte Leser auf weitere Literatur angewiesen. Dennoch halte ich den vorliegenden Text für ein Buch, das einen guten Zweck erfüllt.

Erlangen K. Jacobs