83. Band Heft 2
ausgegeben am 22. 4. 1981

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1981

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende dieses Heftes zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 74,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 73 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Gesamtherstellung: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 83, Heft 2

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

3. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

W. Barth: Algebraische Vektorbündel

J. Frehse: Capacity Methods in the theory of Partial Differential Equations

E. Härtter: Alfred Stöhr 1916–1973

E. Hölder: Lichtensteins wissenschaftliche Wirksamkeit – Zum 100. Geburtstag von Leon Lichtenstein

M. Kracht: Maximilian Pinl in memoriam

O. Krafft: Dual Optimization Problem in Stochastics

E. Kunz; H.-J. Nastoldt: In Memoriam Friedrich Karl Schmidt

H. Rohrbach: Richard Brauer zum Gedächtnis

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker – Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint. Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N. Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
83 (1981) 45–77
AMS subject classification 10D05, 10D40, 10H10, 30F35

Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen*)

J. Elstrodt, Münster

1 Einleitung

Der Inhalt dieses Berichts geht weitgehend zurück auf richtungweisende Untersuchungen von Atle Selberg, die dieser seit etwa 1950–51 durchgeführt hat und die unter dem Stichwort „Selbergsche Spurformel" berühmt geworden sind. Selberg selbst hat wiederholt in Vorlesungen (Princeton 1952, Göttingen 1954) und auf Kongressen (Bombay 1956, Stockholm 1962, Oberwolfach 1968) über seine Resultate vorgetragen und eindrucksvolle Ergebnisberichte vorgelegt [137], [139], [140], von denen hier besonders die vielzitierte programmatische Arbeit [137] hervorgehoben werden muß. Leider hat Selberg keine ausführliche Darstellung seiner Theorie veröffentlicht. Insbesondere ist die zunächst vorgesehene Vervielfältigung einer Ausarbeitung der Göttinger Vorlesung [136] nicht zustandegekommen.

Diese äußeren Umstände haben dazu geführt, daß die Selbergschen Ideen lange Zeit für viele Mathematiker schwer zugänglich waren. Erst in jüngster Vergangenheit sind mehrere einführende Publikationen erschienen, die geeignet sind, diesem Übelstande abzuhelfen. Hier ist vor allem D. A. Hejhal [76] zu nennen. Dieser erste Band behandelt die Spurformel nur für diskontinuierliche Untergruppen Γ der Gruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, für welche der Quotient der oberen Halbebene $\mathbf{H}$ modulo Γ kompakt ist. In einem noch nicht erschienenen zweiten Band will Hejhal den Fall von Gruppen mit endlichem Volumen des Quotienten $_\Gamma\backslash\mathbf{H}$ behandeln, der auch von T. Kubota [94] und A. Selberg [136] diskutiert wird. Als einführende Literatur, die einen guten Überblick über den vorliegenden Themenkreis vermittelt, sind die Arbeiten D. A. Hejhal [75] und A. B. Venkov [161] besonders geeignet.

Selbergs Ideen zur harmonischen Analysis auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten sind eine Art allgemeines Programm, mit dessen Ausgestaltung in spezielleren Situationen sich zahlreiche anspruchsvolle Arbeiten aus neuerer und neuester Zeit beschäftigen. Unter bewußtem Verzicht auf mögliche größere Allgemeinheit und um einige grundlegende Gedanken frei von großem technischem Aufwand klar hervortreten zu lassen, diskutieren wir die Selbergsche Spurformel und einige ihrer Anwendungen nur in einem relativ einfachen interessanten Spezialfall, und zwar im Fall der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g \geqslant 2$. – Das Lite-

*) Hauptvortrag auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Hamburg 1979.

0012–0456/81/01 0045–33$06.60/0

raturverzeichnis enthält auch eine Reihe von Arbeiten, die über den hier gesteckten Rahmen erheblich hinausgehen, und soll Anregungen zu möglicher weitergehender Lektüre vermitteln.

2 Qualitative Spektraltheorie des Laplace-Beltramischen Operators

Es sei also X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geqslant 2$. Nach der Uniformisierungstheorie ist dann X konform äquivalent zum Quotienten $_\Gamma\backslash\mathbf{H}$ der oberen Halbebene

$$\mathbf{H} := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

nach einer geeigneten fixpunktfreien diskontinuierlichen Untergruppe Γ der Gruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Hier bezeichnet $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ die Gruppe der biholomorphen Abbildungen

$$(2.1) \quad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$$

der oberen Halbebene auf sich. Γ ist diskontinuierlich genau dann, wenn die Menge der den Elementen von Γ entsprechenden Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ diskret ist. Ferner heißt Γ fixpunktfrei, wenn kein von der Identität verschiedenes Element von Γ einen Fixpunkt in $\mathbf{H}$ hat. – Es bedeutet also keine echte Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir von Anfang an und für die ganze weitere Darlegung voraussetzen:

Voraussetzungen *Γ sei eine fixpunktfreie diskontinuierliche Untergruppe von* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, *so daß* $X = {}_\Gamma\backslash\mathbf{H}$ *eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht* $g \geqslant 2$ *ist.*

Die Voraussetzung der Kompaktheit von X hat zur Folge, daß Γ keine parabolischen Elemente (d. h. Transformationen der Gestalt (2.1) mit $|a + d| = 2$) enthält. Daher ordnen sich z. B. die Modulgruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ und ihre Untergruppen von endlichem Index nicht in die folgende Theorie ein. In der Tat erfordert die Diskussion dieser Gruppen und allgemeiner der sog. Grenzkreisgruppen erster Art mit parabolischen Transformationen einen wesentlich größeren Aufwand; s. [55], [66], [74], [75], [94], [101], [103], [107], [110], [111], [119], [121], [125], [132], [133], [136], [148], [161], [162], [183], [184]. – Konkrete Beispiele von Gruppen, auf welche unsere Voraussetzungen zutreffen, sind gewisse unter den Quaternionengruppen; s. [66], S. 115–119, [76], S. 302ff.

Unter unseren Voraussetzungen hat die Gruppe Γ einen relativ kompakten Fundamentalbereich $\mathscr{F} \subset \mathbf{H}$, (d. h. eine in bezug auf $\mathbf{H}$ relativ kompakte Menge $\mathscr{F}$ von Vertretern der Bahnen von Γ in $\mathbf{H}$). Ein solcher Fundamentalbereich kann stets gewählt werden als Inneres eines von endlich vielen Orthogonalkreisbogen auf $\mathbf{R}$ berandeten Polygons (Poincarésches Normalpolygon, Dirichletscher Fundamentalbereich) vereinigt mit geeigneten Randpunkten des Polygons. Die Randkreisbogen von $\mathscr{F}$ sind dann paarweise äquivalent bzgl. Γ (d. h., werden paarweise durch geeignete Elemente von Γ aufeinander abgebildet; s. Fig. 1).

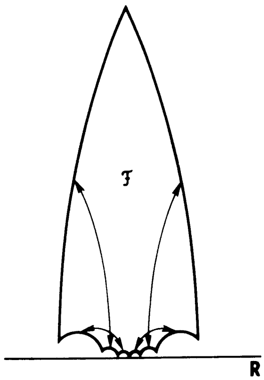


Fig. 1

Topologisch kann man sich dann X aus $\mathcal{F}$ entstanden denken durch Identifikation Γ-äquivalenter Randstücke von $\mathcal{F}$. Die komplexe Struktur von X erhält man einfach durch sog. „Durchdrücken" der auf $\mathbf{H}$ vorhandenen komplexen Struktur. Entsprechendes gilt für die sogleich einzuführende hyperbolische Metrik auf $\mathbf{H}$. – Funktionen auf X entsprechen in unserer Situation bijektiv den Γ-invarianten Funktionen auf $\mathbf{H}$, und wir werden unser Augenmerk bevorzugt auf letztere richten.

Die obere Halbebene $\mathbf{H}$ versehen wir mit der PSL(2, $\mathbf{R}$)-invarianten hyperbolischen Metrik

(2.2) $$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

($z = x + iy \in \mathbf{H}, x \in \mathbf{R}, y > 0$). Zu dieser Metrik gehören im Sinne der Riemannschen Geometrie das PSL(2, $\mathbf{R}$)-invariante Flächenmaß ω,

(2.3) $$d\omega = \frac{dx\,dy}{y^2},$$

und der PSL(2, $\mathbf{R}$)-invariante Laplace-Beltramische Operator

(2.4) $$\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Die PSL(2, $\mathbf{R}$)-Invarianz von Δ bedeutet, daß gilt

(2.5) $$\Delta(f \circ S) = (\Delta f) \circ S$$

für alle $f \in C^2(\mathbf{H})$ und alle $S \in \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

Wir fassen Δ auf als linearen Operator im Hilbert-Raum

(2.6) $$\mathcal{H} := \{f : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{C} : f \text{ ist meßbar, } \Gamma\text{-invariant und } \int_{\mathcal{F}} |f|^2 \, d\omega < \infty\}$$
$$\cong L^2(X)$$

mit dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D} := \{f \in \mathcal{H} : f \text{ zweimal stetig differenzierbar}\}.$$

Da Δ PSL(2, $\mathbf{R}$)-invariant ist (s. (2.5)) und $\mathcal{F}$ relativ kompakt, ist $\Delta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}$

wohldefiniert, und zwar erweist sich $-\Delta : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{H}$ als wesentlich selbstadjungierter positiver Operator (s. [132], [133]). Die Spektraltheorie von $-\Delta$ ist qualitativ wohlbekannt:

Satz 2.1 *Der Operator* $-\Delta : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{H}$ *hat ein vollständiges Orthonormalsystem* $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ *reeller Eigenfunktionen* φ_n $(n \geq 0)$ *mit zugehörigen (entsprechend den jeweiligen Vielfachheiten gezählten) Eigenwerten*

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots,$$

und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty. \tag{2.7}$$

Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen ist offenbar $\lambda_0 = 0$ einfacher Eigenwert und die zugehörige Eigenfunktion φ_0 ist konstant; es kann also $\varphi_0 = (\omega(\mathscr{F}))^{-1/2}$ gewählt werden. – Satz 2.1 kann folgendermaßen relativ leicht bewiesen werden: Die Resolvente $(-\tilde{\Delta} - \lambda)^{-1}$ der selbstadjungierten Fortsetzung $-\tilde{\Delta}$ von $-\Delta : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{H}$ erweist sich für $\lambda < 0$ als Integraloperator mit symmetrischem Kern vom Hilbert-Schmidtschen Typ. Die Behauptung folgt daher aus dem bekannten Satz von E. Schmidt (s. [132], S. 41, Satz 15; [133], Teil II, S. 286, Satz 8.2; [54], Teil II, S. 130, Korollar 8.4). Hejhal [76], S. 3 weist darauf hin, daß Satz 2.1 auch durch geringfügige Modifikationen der klassischen Hilbertschen Methode der Konstruktion einer Parametrix bewiesen werden kann; s. dazu auch [117].

Es ist bekanntlich sehr schwierig, weitergehende präzise Aussagen über die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu machen. Im Rahmen des entsprechenden allgemeineren Eigenwertproblems des Laplace-Beltramischen Operators auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten gibt es einige wenige Typen von Mannigfaltigkeiten, wie z. B. die Sphären oder Tori, bei denen man das betr. Eigenwertproblem explizit lösen kann. Für das hier betrachtete Eigenwertproblem des Laplace-Beltramischen Operators auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ ist bisher kein einziges Beispiel einer solchen Fläche bekannt, bei dem man die Folge der Eigenwerte wirklich explizit angeben kann – von den Eigenfunktionen ganz zu schweigen.

In Ermangelung exakter Methoden strebt man daher zunächst asymptotische Aussagen an. In diesem Zusammenhang haben sich erzeugende Funktionen der Typen

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \tag{2.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \tag{2.9}$$

bewährt; (2.8) kommt bei der Diskussion der Wärmeleitungsgleichung vor, (2.9) ist die Minakshisundaram-Pleijelsche Zetafunktion ([117], [127]). Man analysiert z. B.

das asymptotische Verhalten der Funktion (2.8) bei Annäherung an die Konvergenzabszisse und kann dann durch Anwendung Tauberscher Sätze asymptotische Aussagen über die Eigenwerte herleiten. Als einfaches Beispiel für diese Schlußweise werden wir in Abschnitt 5 das Weylsche asymptotische Gesetz für die Verteilung der Eigenwerte herleiten.

Eine Reihe des Typs (2.8), (2.9) steht auch auf der linken Seite der Selbergschen Spurformel, der wir uns jetzt zuwenden.

3 Die Selbergsche Spurformel

Wie schon oben bemerkt wurde, impliziert die Kompaktheit von X, daß Γ keine parabolischen Transformationen enthält. Da Γ fixpunktfrei auf $\mathbf{H}$ operiert, enthält Γ auch keine elliptischen Elemente (d. h. keine Transformationen der Form (2.1) mit $|a + d| < 2$). Daher ist unter unseren Voraussetzungen jedes von der Identität verschiedene Element $P \in \Gamma$ *hyperbolisch* (d. h. von der Gestalt (2.1) mit $|a + d| > 2$). Jedes solche P hat zwei verschiedene Fixpunkte in $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Transformiert man diese Fixpunkte mit Hilfe einer geeigneten lineargebrochenen Transformation der Gruppe $PSL(2, \mathbf{R})$ nach 0 bzw. ∞, so sieht man, daß P in der Gruppe $PSL(2, \mathbf{R})$ konjugiert ist zu einer Streckung

$$(3.1) \quad z \longmapsto N(P)z$$

mit eindeutig bestimmtem $N(P) > 1$. Schreibt man P in der Gestalt (2.1), so ist offenbar N(P) gleich dem Quadrat des betragsmäßig größeren der beiden Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Mit Selberg nennen wir N(P) die *Norm* von P. Offenbar haben alle Elemente der Konjugationsklasse $\{P\}_\Gamma$ von P in Γ die gleiche Norm, die wir daher auch als die Norm von $\{P\}_\Gamma$ bezeichnen können. Die Menge derjenigen Elemente von Γ, welche die beiden Fixpunkte von P festlassen, ist bekanntlich eine unendliche zyklische Untergruppe von Γ. Von den beiden Erzeugenden dieser Gruppe wählen wir diejenige P_0 aus, für welche gilt

$$P = P_0^m$$

mit einer natürlichen Zahl $m \geqslant 1$; P_0 heißt die zu P gehörige *primitive (hyperbolische) Transformation*. (Dann ist P_0^{-1} das zu P^{-1} gehörige primitive Element von Γ.) Durchläuft Q die Menge der primitiven Elemente von $\Gamma \setminus \{I\}$, so erhält man in der Gestalt Q^m ($m \geqslant 1$) alle Elemente von $\Gamma \setminus \{I\}$, und zwar jedes Element genau einmal. In diesem Sinne kann man sagen, daß die Menge der primitiven Elemente von Γ für die Gruppe Γ eine Rolle spielt, die der Rolle der Menge der Primzahlen in bezug auf die Menge der natürlichen Zahlen vergleichbar ist.

Wir schreiben die Eigenwerte $\lambda_n (n \geqslant 0)$ des Operators $-\Delta: \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{H}$ stets in der Gestalt [1])

$$(3.2) \quad \lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2 ,$$

und können dann die Spurformel wie folgt formulieren ([137], S. 74):

Satz 3.1 *Es seien* $\epsilon > 0$,

$$S_\epsilon : = \{ r \in \mathbf{C} : |\operatorname{Im} r| < \frac{1}{2} + \epsilon \},$$

und $h : S_\epsilon \longrightarrow \mathbf{C}$ *sei eine gerade holomorphe Funktion, die für* $|r| \longrightarrow \infty$ *gleichmäßig im Streifen* S_ϵ *der Wachstumsbeschränkung*

$$(3.3) \quad h(r) = O((1 + |r|^2)^{-1-\epsilon})$$

genüge. Ferner sei

$$(3.4) \quad g(u) : = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iru} h(r)\, dr$$

die Fourier-Transformierte von h. *Dann gilt die* Selbergsche Spurformel

$$(3.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) = \frac{\omega(\mathscr{F})}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\, r \tanh \pi r \, dr + \sum_{\{P\}_\Gamma} \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}}\, g(\log N(P)) ;$$

dabei wird die Reihe auf der rechten Seite erstreckt über die Γ*-Konjugationsklassen* $\{P\}_\Gamma$ *der (hyperbolischen) Elemente* $P \in \Gamma \setminus \{I\}$; *für jedes solche* P *bezeichnet* P_0 *die zugehörige primitive Transformation*[2]). *Unter den angegebenen Bedingungen konvergieren beide in* (3.5) *auftretenden Reihen und das Integral absolut.*

Für das Verständnis der Spurformel (3.5) ist es sehr nützlich, wenn man sich mit den wesentlichen Überlegungen vertraut macht, die zum Beweis dieser Formel führen. Dazu betrachten wir mit Selberg Punkt-Paar-Invarianten; das sind Funktionen $k : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{C}$, die der Transformationsformel

$$(3.6) \quad k(Sz, Sw) = k(z, w)$$

für alle $S \in PSL(2, \mathbf{R})$ genügen. Jedes solche k ist eine Funktion des (durch (2.2) definierten) hyperbolischen Abstands $|z, w|$ der Punkte z, w, kann also wegen

$$2 \cosh |z, w| = \frac{|z - w|^2}{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w} + 2$$

[1]) Später werden wir über die Vorzeichen der r_n geeignet verfügen. An dieser Stelle ist das noch nicht nötig, da die r_n in die gerade Funktion h eingesetzt werden.

[2]) Diese Bezeichnungsweise verwenden wir stillschweigend in der ganzen folgenden Arbeit.

in der Gestalt

$$(3.7)\quad k(z,w) = \psi\left(\frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z \ \operatorname{Im} w}\right)$$

mit geeignetem $\psi\colon [0,\infty[\longrightarrow \mathbf{C}$ geschrieben werden. Umgekehrt ist auch jeder Kern k der Form (3.7) eine Punkt-Paar-Invariante.

Wir nehmen nun eine stetige Funktion $\psi\colon [0,\infty[\longrightarrow \mathbf{C}$ mit kompaktem Träger und bilden mit der gemäß (3.7) gebildeten Punkt-Paar-Invariante k den Kern

$$(3.8)\quad K(z,w) := \sum_{M\in\Gamma} k(z, Mw)\,.$$

Da ψ einen kompakten Träger hat, ist die Reihe (3.8) sogar lokal endlich; ferner ist K in beiden Variablen Γ-invariant. Daher definiert K einen linearen Operator $\mathscr{K}\colon \mathscr{H}\longrightarrow\mathscr{H}$ vermöge

$$(3.9)\quad (\mathscr{K}f)(z) := \int_{\mathscr{F}} K(z,w)\, f(w)\, d\omega(w)$$

($f\in\mathscr{H}$, $z\in\mathbf{H}$; $d\omega$ s. (2.3)). Von entscheidender Bedeutung für die folgende Argumentation ist nun die Feststellung, daß die *Eigenfunktionen* φ_n *des Laplace-Beltramischen Operators auch Eigenfunktionen von* $\mathscr{K}$ sind. Genauer gilt: Es ist

$$(3.10)\quad \mathscr{K}\varphi_n = h(r_n)\,\varphi_n \qquad (n \geqslant 0)$$

mit einer ganzen Funktion $h\colon \mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}$, die aus ψ gewonnen wird durch folgende Kette von Integraltransformationen:

$$\psi\longmapsto Q\colon [0,\infty[\longrightarrow\mathbf{C},$$

$$(3.11)\quad Q(x) := \int_x^\infty \frac{\psi(t)}{\sqrt{t-x}}\,dt \qquad \text{(Abelsche Integraltransformation)},$$

$$Q\longmapsto g\colon \mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{C},$$

$$(3.12)\quad g(u) := Q(e^u + e^{-u} - 2)\,,$$

$$g\longmapsto h\colon \mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C},$$

$$(3.13)\quad h(r) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iru}\, g(u)\, du\,.$$

Zum Beweise von (3.10) führt man im Integral

$$(3.14)\quad (\mathscr{K}\varphi_n)(z) = \int_{\mathbf{H}} \psi\left(\frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z\ \operatorname{Im} w}\right)\varphi_n(w)\, d\omega(w)$$

hyperbolische Polarkoordinaten zum Zentrum z ein und entwickelt φ_n in eine Fourierreihe ([54], Teil I, Satz 2.1). Da ψ nur vom hyperbolischen Radius abhängt, liefert nur der von der Winkelvariablen freie nullte Term der Fourierreihe einen Beitrag zu (3.14). Dieser Beitrag läßt sich mit Hilfe der Differentialgleichung

$$-\Delta\varphi_n = \left(\frac{1}{4} + r_n^2\right)\varphi_n$$

auf die Gestalt der rechten Seite von (3.10) bringen (Details z. B. bei Hejhal [76], S. 8–19).

Wir fahren fort im Beweis der Spurformel und entwickeln $K(z,\cdot) \in \mathscr{H}$ nach dem vollständigen Orthonormalsystem der Eigenfunktionen φ_n:

$$K(z,\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)\,\varphi_n .$$

Bezeichnen wir mit $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ das (im ersten Argument lineare) Skalarprodukt in $\mathscr{H}$, so lassen sich die Entwicklungskoeffizienten $c_n(z)$ mit Hilfe von (3.10) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} c_n(z) &= \langle K(z,\cdot), \varphi_n\rangle = \int_{\mathscr{F}} K(z,w)\ \varphi_n(w)\, d\omega(w) \\ &= (\mathscr{K}\varphi_n)(z) = h(r_n)\,\varphi_n(z)\ . \end{aligned}$$

(Die φ_n wurden als reellwertige Funktionen gewählt.) Damit folgt:

$$(3.15)\quad K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} h(r_n)\,\varphi_n(z)\,\varphi_n(w),$$

und diese Reihe konvergiert a priori bei festem z im quadratischen Mittel in bezug auf w. Setzen wir nun schärfer voraus, daß ψ zusätzlich zweimal stetig differenzierbar ist, so kann man mit Hilfe klassischer Schlußweisen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen leicht zeigen, daß die Reihe (3.15) sogar gleichmäßig absolut in $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ konvergiert. Dann folgt aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(r_n)| = \int_{\mathscr{F}} \sum_{n=0}^{\infty} |h(r_n)|(\varphi_n(z))^2\, d\omega(z) < \infty ,$$

d. h. $\mathscr{K}$ i s t v o n d e r S p u r k l a s s e. Gliedweise Integration der Reihe (3.15) führt nun auf die a l l g e m e i n e S p u r f o r m e l

$$(3.16)\quad \sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) = \int_{\mathscr{F}} K(z,z)\, d\omega(z).$$

Ein Blick auf die obigen Überlegungen läßt erkennen, daß man eine Formel des Typs (3.16) auch unter wesentlich allgemeineren geometrischen Rahmenbedingungen herleiten kann. Dieser Gedanke wird in [137] genauer ausgeführt. Für die praktische Anwendung der Formel (3.16) ist natürlich von entscheidender Bedeutung, ob man das Integral auf der rechten Seite auswerten kann. Unter unseren speziellen Voraussetzungen ist das möglich: Man trägt dazu die Reihe (3.8) ein, vertauscht die Reihenfolge von Summation und Integration und faßt die Summanden der äußeren Summe zusammen zu Summen, bei denen über die Konjugationsklassen von Γ summiert wird. Der Beitrag der Konjugationsklasse von Γ, die nur die Identität enthält, läßt sich dann so umformen, daß sich das Integral auf der rechten Seite der Gl. (3.5) ergibt. Die von den Konjugationsklassen der hyperbolischen Elemente von Γ herrührenden Terme führen zur unendlichen Reihe auf der rechten Seite von (3.5) (Details bei Hejhal [76], S. 22–29). Auf diese Weise erhält man die Selbergsche Spurformel (3.5) für diejenigen Paare (h, g) von Funktionen, die im Sinne der Kette (3.11)–(3.13) von Integraltransformationen den zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $\psi: [0, \infty[\longrightarrow \mathbf{C}$ mit kompaktem Träger entsprechen. Ein naheliegender Approximationsprozeß (s. [76], S. 30–34) ergibt dann die Gültigkeit der Formel (3.5) in dem in Satz 3.1 genannten Umfang.

Damit ist erklärt, was die Spurformel ist, und wir haben auch in groben Zügen skizziert, wie man diese Formel beweist, aber es ist noch nichts darüber gesagt, was diese Formel bedeutet: Die B e d e u t u n g der linken Seite der Spurformel (3.5) ist klar, es werden a n a l y t i s c h e I n v a r i a n t e n der Fläche X, nämlich die den Eigenwerten des Laplace-Beltramischen Operators entsprechenden Zahlen r_n, in eine holomorphe Funktion eingesetzt. Die linke Seite der Spurformel wird also durch das E i g e n w e r t s p e k t r u m von X festgelegt. Dagegen haben die auf der rechten Seite in (3.5) vorkommenden Zahlen $\log N(P)$ g e o m e t r i s c h e B e d e u t u n g: Die obere Halbebene $\mathbf{H}$ kann aufgefaßt werden als die universelle Überlagerung der Fläche X und Γ als die zugehörige Gruppe von Decktransformationen. Γ ist zur Fundamentalgruppe von X isomorph. Daher entsprechen die Konjugationsklassen von Γ bijektiv den freien Homotopieklassen geschlossener (orientierter) Wege auf X (Deformation geschlossener Wege auf X, deren Anfangspunkt mitbewegt werden darf). In jeder nicht-trivialen solchen freien Homotopieklasse existiert eine eindeutig bestimmte Kurve kürzester Länge, eine geschlossene (orientierte) Geodätische, die man wie folgt erhält ([8], [9]): Entspricht der betrachteten freien Homotopieklasse die Konjugationsklasse $\{P\}_\Gamma$ der Gruppe Γ, so ist jeder Vertreter P dieser Klasse hyperbolisch, hat also zwei verschiedene reelle Fixpunkte. Der in $\mathbf{H}$ gelegene Orthogonalkreisbogen K durch diese Fixpunkte ist dann eine P-invariante Geodätische in $\mathbf{H}$ in bezug auf die hyperbolische Metrik (2.2); s. Fig. 2. Wählt man einen Punkt $a \in K$, so ist auch $Pa \in K$, und der

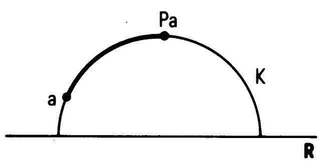


Fig. 2

hyperbolische Abstand der Punkte a und Pa beträgt gerade $\log N(P)$. „Durchdrücken" des Orthogonalkreisbogens von a nach Pa auf die Fläche X liefert dann die geschlossene Geodätische in der $\{P\}_\Gamma$ entsprechenden freien Homotopieklasse von X, und diese Geodätische hat die Länge $\log N(P)$. Der Konjugationsklasse $\{P^{-1}\}_\Gamma$ entspricht dann die umgekehrt orientierte geschlossene Geodätische; sie hat ebenfalls die Länge $\log N(P)$. Stellt man P dar in der Gestalt P_0^m mit der zu P gehörigen primitiven Transformation P_0, so erhält man die der Konjugationsklasse $\{P\}_\Gamma$ entsprechende geschlossene Geodätische offenbar durch m-faches Durchlaufen der zu $\{P_0\}_\Gamma$ gehörigen sog. p r i m i t i v e n g e s c h l o s s e n e n G e o d ä t i s c h e n. – Durchläuft nun $\{P\}_\Gamma$ die Konjugationsklassen der hyperbolischen Elemente von Γ, so erhält man in den Zahlen $\log N(P)$ die nach Vielfachheiten[3]) gezählten Längen

[3]) Höhere Vielfachheiten können nicht nur vorkommen, sondern nach einem Satz von Radol [131] ist sogar *notwendig* die Folge der Vielfachheiten des Längenspektrums unbeschränkt.

der geschlossenen Geodätischen auf X, das sog. Längenspektrum von X. Damit können wir folgende inhaltliche Interpretation der Spurformel (3.5) geben: *Die Selbergsche Spurformel ist eine quantitative Beziehung zwischen dem Eigenwertspektrum von* X *und dem Längenspektrum von* X, *also zwischen analytischen Invarianten und geometrischen Invarianten von* X. Sie leistet in dieser Hinsicht für die kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g \geqslant 2$ dasselbe wie die Poissonsche Summenformel für die kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht 1 und allgemeiner für die Tori (s. [9], [32], [75], [112], [146], [178]).

4 Eindeutigkeitsfragen

Da in der Spurformel über die Funktion h in weitem Rahmen frei verfügt werden kann, und da zwischen dem hyperbolischen Flächeninhalt $\omega(\mathscr{F})$ des Fundamentalbereichs $\mathscr{F}$ und dem Geschlecht g von X die Beziehung

(4.1) $\omega(\mathscr{F}) = 4\pi(g-1)$

besteht, folgt aus der Spurformel mühelos ein bemerkenswerter Satz von H. Huber [83], Teil I, S. 8.

Satz 4.1 a) *Kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht $\geqslant 2$ mit gleichem Eigenwertspektrum haben auch gleiches Längenspektrum und gleiches Geschlecht.*

b) *Kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht $\geqslant 2$ mit gleichem Längenspektrum haben auch gleiches Eigenwertspektrum und gleiches Geschlecht.*

Zum vollständigen Beweis dieses Satzes braucht man nur die in Abschnitt 6 betrachtete spezielle Funktion (6.1) zu nehmen und kann das Gewünschte aus (6.5), (6.6) ablesen. – Ein dem Satz 4.1 entsprechendes Resultat gilt auch für Tori ([10], [12], [178]), für kompakte Flächen variabler negativer Krümmung (s. [38]), für höherdimensionale kompakte hyperbolische Raumformen (s. [8], [9]), für gewisse höherdimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten negativer Schnittkrümmung (s. [60]) und in noch allgemeinerem Rahmen ([10], [49], [50]; s. auch [4], [89], [142]).

Satz 4.1 legt die Frage nahe, inwieweit die komplexe Struktur der Fläche X durch ihr Eigenwertspektrum bzw. Längenspektrum eindeutig bestimmt ist. Schon 1962 hatte Gelfand [65] den Gedanken geäußert, hier könnte ein Zusammenhang mit dem klassischen Modulproblem für kompakte Riemannsche Flächen bestehen. Da unter unseren Voraussetzungen zwei Flächen $X = {}_{\Gamma}\backslash\mathbf{H}$, $X' = {}_{\Gamma'}\backslash\mathbf{H}$ genau dann konform äquivalent sind, wenn die zugehörigen Gruppen Γ, Γ' in $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ konjugiert sind, können wir unser Eindeutigkeitsproblem so formulieren: Sind je zwei fixpunktfreie diskontinuierliche Untergruppen Γ, Γ' von $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ mit kompakten Quotienten $X = {}_{\Gamma}\backslash\mathbf{H}$, $X' = {}_{\Gamma'}\backslash\mathbf{H}$ und mit gleichem Eigenwertspektrum notwendig konjugiert in $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$? Ein erstes Ergebnis in Richtung einer positiven Antwort auf diese Frage erzielten Gelfand et al.

[65], S. 75, [66], S. 87–89. Schärfer zeigte dann McKean [112], daß nur endlich viele nicht konjugierte Gruppen (d. h. nur endlich viele nicht konform äquivalente Flächen X) mit gleichem Eigenwertspektrum existieren. Die besten Eindeutigkeitsresultate erzielte Wolpert [176], [177]. Wir formulieren ein wesentliches Ergebnis dieser Untersuchungen als

Satz 4.2 *Es gibt eine (echte) reell-analytische Untermannigfaltigkeit* V_g *im Teichmüller-Raum* T_g *der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht* $g \geqslant 2$, *so daß für alle Elemente von* $T_g \backslash V_g$ *die konforme Struktur (bis auf die Wahl der Orientierung) durch das Eigenwertspektrum eindeutig bestimmt ist.*

Ein entsprechendes Resultat ist auch für Tori bewiesen worden [178]. Aber während bei den höherdimensionalen Tori seit langem bekannt ist, daß Tori mit gleichem Eigenwertspektrum nicht isometrisch zu sein brauchen ([12], S. 154ff., [73], [115]), konnten Beispiele für eine negative Antwort auf unser Eindeutigkeitsproblem erst vor kurzem von M.-F. Vignéras [165], [166] angegeben werden:

Satz 4.3 *Es gibt fixpunktfreie diskontinuierliche Untergruppen von* $PSL(2, \mathbf{R})$ *mit kompakten Quotienten und mit gleichem Eigenwertspektrum, welche aber nicht konjugiert sind in* $PSL(2, \mathbf{R})$.

Nach diesem Exkurs über Eindeutigkeitsfragen wenden wir uns anderen Anwendungen der Selbergschen Spurformel zu.

5 Das Weylsche asymptotische Gesetz

Selberg erwähnt in [137], S. 74, man könne die Spurformel benutzen zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der Eigenwerte und der Normen der Konjugationsklassen der primitiven hyperbolischen Elemente von Γ. Umfangreiche Untersuchungen zu diesem Fragenkreis hat Hejhal [76] durchgeführt; wir skizzieren in den folgenden Abschnitten einige typische Resultate.

Wählt man als Funktion h in der Spurformel

$$h(r) = e^{-(1/4 + r^2)T} \tag{5.1}$$

$(T > 0)$, so ist die gemäß (3.4) zugehörige Funktion g gegeben durch

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\, e^{-\frac{T}{4} - \frac{u^2}{4T}} .$$

Setzt man diese Funktionen in die Spurformel ein, so folgt wegen (3.2):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n T} &= \frac{\omega(\mathscr{F})}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(1/4 + r^2)T}\, r \tanh \pi r \, dr + o(1) \\ &= \frac{\omega(\mathscr{F})}{4\pi T} + O(1) \quad \text{für } T \longrightarrow +0 . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Da auf der linken Seite eine Dirichlet-Reihe mit positiven Koeffizienten steht, erhält man durch Anwendung eines klassischen Tauberschen Satzes ([90]) für die summatorische Funktion der Koeffizienten dieser Dirichlet-Reihe folgendes Resultat:

Satz 5.1 *Für* $T \longrightarrow \infty$ *gilt*

$$(5.3) \quad \sum_{\lambda_n \leqslant T} 1 \sim \frac{\omega(\mathscr{F})}{4\pi} T.$$

Dies ist das berühmte Weylsche asymptotische Gesetz für die Verteilung der Eigenwerte, das von H. Weyl 1911 bewiesen wurde für die Anzahl der Eigenwerte $\leqslant T$ beim Dirichletschen Problem in beschränkten ebenen Gebieten ([173], [174]). Für den hier betrachteten Fall des Eigenwertproblems des Laplace-Beltramischen Operators auf einer kompakten Riemannschen Fläche und allgemeiner auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit wurde das (5.3) entsprechende höherdimensionale Analogon von S. Minakshisundaram und Å. Pleijel [116], [117] bewiesen. (Diese Autoren diskutieren sogleich das asymptotische Verhalten von $\sum_{\lambda_n \leqslant T} \varphi_n^2(z)$ nach dem Vorbild von T. Carleman [29]; s. auch [5].) Einen guten Einblick in den aktuellen Stand der Kenntnisse auf dem Gebiet der asymptotischen Aussagen vom Weylschen Typ vermittelt V. Guillemin [72]. – Übrigens kann man (5.2) auch zu einer asymptotischen Entwicklung verschärfen; vgl. dazu [12], [43], [46], [56], [117], [142].

Eine interessante Variante von (5.3) hat H. Huber [87] angegeben. Für eine Untergruppe G der (bekanntlich endlichen) Gruppe der konformen Automorphismen von X betrachtet Huber die reguläre Darstellung R_μ von G im Eigenraum E_μ des Operators $-\Delta$ zum Eigenwert μ. Für die irreduziblen Komponenten von R_μ erzielt er dann folgendes Resultat:

Satz 5.2 *Es seien* $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ *die verschiedenen der Größe nach geordneten Eigenwerte von* $-\Delta$, *und für eine irreduzible Darstellung* ρ *von* G *bezeichne* $\nu_\rho(\mu_j)$ *die Anzahl der zu* ρ *äquivalenten irreduziblen Komponenten von* R_{μ_j} $(j \geqslant 0)$. *Dann gilt für* $T \longrightarrow \infty$:

$$(5.4) \quad \sum_{\mu_n \leqslant T} \nu_\rho(\mu_n) \sim \frac{\omega(\mathscr{F})}{4\pi} \cdot \frac{\operatorname{grad} \rho}{\operatorname{ord} G} T.$$

Dieser Satz wird in [87] durch eine geschickte Anwendung der Selbergschen Spurformel bewiesen. Das Weylsche asymptotische Gesetz (5.3) ist in (5.4) als Spezialfall $G = \{\mathrm{id}\}$ enthalten. Insbesondere folgt aber aus (5.4), daß es zu jeder irreduziblen Darstellung ρ von G stets unendlich viele Eigenwerte μ von $-\Delta$ gibt, so daß ρ zu einer irreduziblen Komponente von R_μ äquivalent ist. Da nach Hurwitz [88] (s. auch Greenberg [70]) jede endliche Gruppe zu einer Untergruppe der Automorphismengruppe einer geeigneten kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht $\geqslant 2$ isomorph ist, folgt weiter aus Satz 5.2, daß die Eigenwerte von $-\Delta$ beliebig hohe Vielfachheiten haben können; für jedes $k \geqslant 1$ können sogar unendlich viele Eigenwerte einer Vielfachheit $\geqslant k$ vorkommen. Dagegen sind nach einem Ergebnis von Uhlenbeck [152] „im allgemeinen" alle Eigenräume des Laplace-Beltramischen Operators eindimensional. – Ein Analogon von Satz 5.2 gilt sogar für beliebige kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten, auf denen eine kompakte

Liesche Gruppe von Isometrien operiert; s. dazu J. Brüning und E. Heintze [13], [14] und H. Donnelly [44]; vgl. auch [43]. In [14] werden auch allgemeinere elliptische Differentialoperatoren diskutiert, und es wird eine O-Abschätzung für den Fehler in der (5.4) entsprechenden asymptotischen Aussage angegeben.

Natürlich wäre es sehr erwünscht, das Weylsche asymptotische Gesetz (5.3) zu einer Beziehung der Gestalt

$$(5.5) \quad \sum_{\lambda_n \leq T} 1 = \frac{\omega(\mathscr{F})}{4\pi} T + O(T^\alpha) \quad \text{für } T \longrightarrow \infty$$

mit einem $\alpha < 1$ zu verschärfen. Um hier zum Ziel zu gelangen, werden wir mit Selberg eine Zetafunktion einführen, die es ermöglicht, das asymptotische Verhalten der Eigenwerte und der Normen der Konjugationsklassen der primitiven hyperbolischen Elemente von Γ sehr genau zu bestimmen.

6 Die Selbergsche Zetafunktion

Selberg bemerkt in [137], S. 75, die Spurformel (3.5) „has a rather striking analogy to certain formulas that arise in analytic number theory from the zeta- and L-functions of algebraic number fields". Bei dieser Bemerkung hat Selberg offenbar an die sog. „expliziten Formeln" der analytischen Zahlentheorie (s. [102], Chapter XVII, [171], [172]) gedacht. Grob gesprochen, sind diese expliziten Formeln Identitäten folgender Beschaffenheit: Auf der linken Seite der Gleichung steht eine Reihe, die erstreckt wird über die nicht-trivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion (bzw. L-Funktion); diese Nullstellen werden in eine Funktion h eingesetzt. Auf der rechten Seite der Gleichung kommt außer elementaren Summanden und übersichtlichen Integralen eine unendliche Reihe vor, bei der über die Primzahlpotenzen (bzw. Potenzen der Primideale) summiert wird. Die Logarithmen der Primzahlpotenzen (bzw. Logarithmen der Normen der Potenzen der Primideale) werden dabei in die Fourier-Transformierte von h eingesetzt. In der Tat ist die Analogie dieser expliziten Formeln zur Spurformel (3.5) verblüffend, wenn man die nicht-trivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion (bzw. L-Funktion) den Zahlen $1/2 + i\, r_n$ entsprechen läßt und die Zahlen $\log N(P) = \log N(P_0)^m$ den Zahlen $\log p^m$ (bzw. $\log N\mathfrak{p}^m$). Auf Grund dieser Analogie drängt sich die Frage auf, ob auch für unser Eigenwertproblem eine Zetafunktion erklärt werden kann, die der Riemannschen Zetafunktion (bzw. den L-Funktionen) entspricht. Dazu teilt Selberg [139], S. 179 mit: „Actually . . . [Gl. (3.5)] turns out to be structurally strikingly similar to the socalled "exact formulas" in the theory of primes, so much so that one can actually from it construct a kind of zeta function associated with the group Γ, which in its properties (Euler product, functional equation, and location of trivial and nontrivial zeros) resembles the usual zeta or L-functions."

Zur Begründung dieser Ausführungen wenden wir die Spurformel (3.5) an auf die Funktion

$$(6.1) \quad h(r) = \frac{1}{r^2 + (s - 1/2)^2} - \frac{1}{r^2 + (a - 1/2)^2}$$

(Re $s > 1$, Re $a > 1$). Der hier vorgenommene Kunstgriff der Differenzenbildung für verschiedene Parameter s, a bewirkt, daß h der Wachstumsbeschränkung (3.3) genügt. Zu dieser Funktion h gehört gemäß (3.4) die Fourier-Transformierte

$$(6.2)\quad g(u) = \frac{1}{2s-1}\, e^{-(s-1/2)|u|} - \frac{1}{2a-1}\, e^{-(a-1/2)|u|} .$$

Daher kann die Reihe auf der rechten Seite von (3.5) auf folgende Gestalt gebracht werden:

$$(6.3)\quad \sum_{\{P\}_\Gamma} \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}}\, g(\log N(P)) = G(s) - G(a)\,,$$

wobei

$$(6.4)\quad G(s) := \frac{1}{2s-1} \sum_{\{P\}_\Gamma} \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}}\, N(P)^{-(s-1/2)}$$

$$= \frac{1}{2s-1} \sum_{\{P\}_\Gamma} \sum_{\nu=0}^{\infty} \log N(P_0)\, N(P)^{-s-\nu}$$

$$= \frac{1}{2s-1} \sum_{\{P_0\}_\Gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \log N(P_0)\, N(P_0)^{-k(s+\nu)}$$

$$= \frac{1}{2s-1} \sum_{\{P_0\}_\Gamma} \sum_{\nu=0}^{\infty} \log N(P_0)\, \frac{N(P_0)^{-s-\nu}}{1 - N(P_0)^{-s-\nu}}$$

$$= \frac{1}{2s-1} \frac{\mathcal{Z}'}{\mathcal{Z}}(s)$$

mit der S e l b e r g s c h e n Z e t a f u n k t i o n

$$(6.5)\quad \mathcal{Z}(s) := \prod_{\{P_0\}_\Gamma} \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - N(P_0)^{-s-\nu}\right)$$

(Re $s > 1$). Die äußere Produktbildung in (6.5) wird erstreckt über die Konjugationsklassen $\{P_0\}_\Gamma$ der primitiven hyperbolischen Elemente P_0 von Γ. Das Produkt (6.5) konvergiert für Re $s > 1$ absolut, denn man kann leicht zeigen, daß die Anzahl der Konjugationsklassen hyperbolischer Elemente von Γ mit Norm $\leqslant x$ gleich $O(x)$ ist für $x \longrightarrow \infty$ ([76], S. 7, Proposition 2.5). Daher sind die obigen Umformungen für Re $s > 1$ legitim.

Für die Funktion (6.1) läßt sich das Integral auf der rechten Seite von (3.5) mit Hilfe des Residuenkalküls auswerten, und man erhält aus der Spurformel

Satz 6.1 *Für* Re $a > 1$ *gilt:*

$$(6.6)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n^2+(s-1/2)^2}-\frac{1}{r_n^2+(a-1/2)^2}\right)$$

$$=\frac{\omega(\mathscr{F})}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+s}-\frac{1}{n+a}\right)+\frac{1}{2s-1}\frac{\mathsf{Z}'}{\mathsf{Z}}(s)-\frac{1}{2a-1}\frac{\mathsf{Z}'}{\mathsf{Z}}(a)\,.$$

Die Formel (6.6) gilt zunächst für $\mathrm{Re}\, s > 1$, $\mathrm{Re}\, a > 1$, doch sieht man sofort, daß mit (6.6) die meromorphe Fortsetzung von

$$(6.7)\quad \frac{1}{2s-1}\frac{\mathsf{Z}'}{\mathsf{Z}}(s)$$

in die volle s-Ebene geleistet ist. Bevor wir das Ergebnis des Fortsetzungsprozesses für Z im Satz 6.2 formulieren, ist es zweckmäßig, die r_n wie folgt festzulegen: Es sei

$$(6.8)\quad N:=\max\left\{n\geqslant 0:\ \lambda_n<\frac{1}{4}\right\},$$

und für $n = 0,\dots,N$ sei

$$(6.9)\quad r_n:=-i\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_n}\,,$$

während für $n > N$

$$(6.10)\quad r_n:=\sqrt{\lambda_n-\frac{1}{4}}$$

gesetzt wird (Quadratwurzeln aus nicht-negativen reellen Zahlen sind hier nicht-negativ gewählt). Offenbar ist mit dieser Wahl der r_n, die wir im folgenden stets beibehalten, die Gl. (3.2) erfüllt, und wir können formulieren (s. [137], S. 75–76):

Satz 6.2 *Die Selbergsche Zetafunktion* $\mathsf{Z}(s)$ *ist eine ganze Funktion der Ordnung* 2 *mit den trivialen Nullstellen* $s=-k\ (k\geqslant 1,\ k$ *ganz*) *der Vielfachheit* $(2g-2)(2k+1)$. *Die nicht-trivialen Nullstellen von* Z *sind genau die Zahlen*

$$(6.11)\quad s_n=\frac{1}{2}+i\,r_n\,,\qquad \tilde{s}_n=1-s_n=\frac{1}{2}-i\,r_n$$

$(n\geqslant 0)$; $s_0 = 1$ *ist Nullstelle der Vielfachheit* 1, $\tilde{s}_0 = 0$ *ist Nullstelle der Vielfachheit* $2g-1$, *und für* $n\geqslant 1$, $\lambda_n \neq 1/4$ *stimmt die Vielfachheit der Nullstellen* $s_n, \tilde{s}_n$ *mit der Dimension des Eigenraums von* $-\Delta$ *zum Eigenwert* λ_n *überein. Ist* $1/4$ *Eigenwert von* $-\Delta$ *und* $\lambda_j = 1/4$, *so ist* $s_j = \tilde{s}_j = 1/2$ *eine Nullstelle von* Z, *deren Vielfachheit gleich der doppelten Dimension des Eigenraums von* $-\Delta$ *zum Eigenwert* $1/4$ *ist.*

Da die linke Seite der Gl. (6.6) invariant ist bei der Substitution $s \longmapsto 1-s$, folgt weiter mit Hilfe der Partialbruchentwicklung des Cotangens eine F u n k t i o n a l - g l e i c h u n g für die Selbergsche Zetafunktion:

Satz 6.3 *Die Selbergsche Zetafunktion genügt der Funktionalgleichung*[4])

[4]) Hier ist der Faktor $\exp(\omega(\mathscr{F})\dots)$ auf der rechten Seite in natürlicher Weise als meromorphe Funktion auf $\mathbf{C}$ aufzufassen.

$$(6.12)\quad \mathbf{Z}(s) = \mathbf{Z}(1-s)\exp\left(\omega(\mathscr{F}) \int_0^{s-1/2} u \tan \pi u \, du\right).$$

Offenbar weist die Selbergsche Zetafunktion formal eine weitgehende Analogie zur Riemannschen Zetafunktion auf (Analogon der Eulerschen Produktentwicklung s. (6.5), analytische Fortsetzbarkeit, Funktionalgleichung, Existenz trivialer und nicht-trivialer Nullstellen); mehr noch: Abgesehen von evtl. vorhandenen endlich vielen nicht-trivialen Nullstellen im Intervall $]0,1[$ liegen sämtliche nicht-trivialen Nullstellen von $\mathbf{Z}$ auf der „kritischen Geraden" $\{1/2 + i r;\ r \in \mathbf{R}\}$. In diesem Sinne kann man sagen, daß das Analogon der Riemannschen Vermutung für die Selbergsche Zetafunktion richtig ist. Man beachte, daß der Beweis dieser Aussage sich entscheidend auf die Spurformel stützt, die uns die Identität (6.6) liefert. – Da die nicht-trivialen Nullstellen der Selbergschen Zetafunktion im oben genau präzisierten Sinne von den Eigenwerten des Laplace-Beltramischen Operators herkommen, liegt die Frage nahe, ob auch die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion in ähnlicher Beziehung zu den Eigenwerten eines Differentialoperators stehen. Versuche in dieser Richtung haben bisher zu keinen greifbaren Erfolgen geführt (s. [30]).

Auch für kompakte Quotienten symmetrischer Räume vom Rang eins kann man Zetafunktionen vom Selbergschen Typus einführen, die alle Eigenschaften der Selbergschen Zetafunktion besitzen (s. [61]); Entsprechendes gilt für gewisse nicht kompakte Quotienten (s. [63]).

7 Der Fehlerterm im Weylschen asymptotischen Gesetz

Die Analogie zur Riemannschen Zetafunktion legt es nahe, die Nullstellen der Selbergschen Zetafunktion im kritischen Streifen nach denselben Verfahren zu untersuchen, die für die Riemannsche Zetafunktion entwickelt wurden [151]. Dabei ergeben sich in der Tat asymptotische Aussagen des Typs (5.5).

Ausgangspunkt der Diskussion ist das Argumentprinzip: Man integriert $\mathbf{Z}'/\mathbf{Z}$ über den positiv orientierten Rand des Rechtecks $R(T)$ mit den Ecken $A \pm iT$, $1 - A \pm iT$ $(1 < A < 2,\ T > 0)$, bestimmt die Residuensumme mit Satz 6.2 und faßt das Integral über die linke Hälfte von $R(T)$ mit Hilfe der Funktionalgleichung (6.12) mit dem Integral über die rechte Hälfte von $R(T)$ zusammen; s. [76], S. 115–117. Dann liefert die genaue Auswertung folgendes Resultat:

Satz 7.1 *Es sei* $T > 0$, $T \notin \{r_n : n \geq N\}$ *und*

$$(7.1)\quad N(T) := \#\{n : 0 \leq r_n < T\}.$$

Dann gilt für $T \longrightarrow \infty$

$$(7.2)\quad N(T) = \frac{\omega(\mathscr{F})}{4\pi} T^2 + \frac{1}{\pi} \arg \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2} + iT\right) + O(1).$$

(*Hier bezeichnet* $\arg \mathbf{Z}$ *den Imaginärteil eines in* $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 1/2,\ z \neq 1/2 + i r_n$ für alle $n \geq 0$, $z \notin [1/2, 1]\}$ *stetigen und auf* $]1, \infty[$ *reellen Logarithmus von* $\mathbf{Z}$.)

Auf Grund des Zusammenhangs (3.2) zwischen den λ_n und den r_n entspricht der Term $\frac{\omega(\mathscr{F})}{4\pi} T^2$ auf der rechten Seite von (7.2) dem Weylschen asymptotischen Gesetz (5.3). Um zu Präzisierungen des Typs (5.5) zu gelangen, hat man also das Verhalten von arg $Z(1/2 + iT)$ für $T \longrightarrow \infty$ zu untersuchen. Diese Untersuchung kann man mehr oder minder aufwendig durchführen. Schon eine naheliegende Übertragung einer für die Riemannsche Zetafunktion wohlbekannten Schlußweise ([151], S. 180), die sich auf die Jensensche Formel stützt, führt auf ([76], S. 118; [129], S. 212–213)

Satz 7.2 $N(T) = \frac{\omega(\mathscr{F})}{4\pi} T^2 + O(T)$ *für* $T \longrightarrow \infty$.

Eine entsprechende Anzahlabschätzung wurde von Kolk [93] in wesentlich allgemeinerem Rahmen bewiesen. – Das Ergebnis des Satzes 7.2 gilt mutatis mutandis für eine große Klasse von Mannigfaltigkeiten: Schon Avakumović [5] hat eine entsprechende Abschätzung für beliebige kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten bewiesen; s. auch Herrmann [78]. Das Resultat von Avakumović ist wiederum ein Spezialfall einer wesentlich allgemeineren Abschätzung, die Hörmander [81] für den Kern der Spektralschar eines beliebigen positiven selbstadjungierten elliptischen Differentialoperators auf einer parakompakten Mannigfaltigkeit angegeben hat. Am Beispiel des Laplaceschen Operators auf der Sphäre $S^3 \subset \mathbf{R}^4$ hat Avakumović [5] gezeigt, daß das dreidimensionale Analogon der Restabschätzung des Satzes 7.2 bestmöglich ist, und Hörmander [81] demonstriert den entsprechenden Sachverhalt im n-dimensionalen Fall am Beispiel der n-Sphäre.

Im Rahmen der hier betrachteten kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g \geqslant 2$ ist es aber möglich, die Restabschätzung des Satzes 7.2 zu verschärfen. Ein erster Schritt in dieser Richtung ist ein Ergebnis von Duistermaat und Guillemin [49], [50], denen es gelang, unter relativ allgemeinen Voraussetzungen das $O(T)$ in Satz 7.2 durch ein $o(T)$ zu ersetzen. Das beste bisher bekannte Resultat erzielten Hejhal [76] und Radol [129] mit Hilfe der Selbergschen Zetafunktion. Wir formulieren dieses Ergebnis als

Satz 7.3 $N(T) = \frac{\omega(\mathscr{F})}{4\pi} T^2 + O\left(\frac{T}{\log T}\right)$ *für* $T \longrightarrow \infty$.

Die Beweise dieses Satzes in [76], S. 119ff. und [129] gehen von unterschiedlichen Ideen aus: Hejhal überträgt eine Methode von Selberg ([135], [151]) zur Abschätzung von arg $\zeta(1/2 + iT)$ auf die Selbergsche Zetafunktion und gelangt nach einer längeren Kette von Abschätzungen zu Satz 7.3. – Randol geht anders vor: Da für die Selbergsche Zetafunktion das Analogon der Riemannschen Vermutung richtig ist, kann man auf Z diejenigen Überlegungen anwenden, die für die Riemannsche Zetafunktion unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung entwickelt wurden. Es handelt sich hier um eine Schlußweise von Littlewood (s. [151], S. 296ff.), die sich auf Z übertragen läßt und die dann relativ rasch zum Ergebnis des Satzes 7.3 führt (s. [129], S. 213ff.). Die Restabschätzung des Satzes 7.3 wurde von Bérard [6], [7] auch bewiesen für eine größere Klasse kompakter Riemannscher Mannigfaltigkeiten, die alle kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten negativer Schnittkrümmung enthält.

Hejhal [76] und Randol [129] beweisen auch Ω-Theoreme für den Fehlerterm im Weylschen asymptotischen Gesetz, gelangen aber nur zu logarithmischen Termen, so daß die Frage nach der wahren Größenordnung des Fehlers nach wie vor offen ist. Für spezielle Gruppen sind allerdings bessere untere Abschätzungen des Fehlers bekannt. So hat Selberg für gewisse Quaternionengruppen bewiesen: $\arg Z(1/2 + iT) = \Omega_{\pm}(T^{1/2}(\log T)^{-1})$ (s. [76], S. 302–315; vgl. auch [131 a]).

Auch für Gruppen mit nicht kompaktem Fundamentalbereich, aber endlichem hyperbolischem Flächeninhalt des Fundamentalbereichs, gibt es eine Version der Selbergschen Spurformel, die entsprechend zum Studium der Verteilung der Eigenwerte herangezogen werden kann (s. z. B. [66], [74], [75], [92], [93], [94], [98], [99], [100], [107], [136], [137], [148], [156], [161], [162]). Hier sind z. B. für die Modulgruppe $PSL(2, \mathbf{Z})$ von Kuznecov [99], [100] folgende Resultate mitgeteilt worden: Bezeichnet $N^+(T)$ (bzw. $N^-(T)$) die Anzahl der in ihren Vielfachheiten gezählten Eigenwerte $\leqslant T$ des Laplace-Beltramischen Operators zur Modulgruppe mit geraden (bzw. ungeraden) Eigenfunktionen, so gilt für $T \longrightarrow \infty$

$$N^+(T) = \frac{1}{24} T - \frac{1}{4\pi} \sqrt{T} \left(3 \log T - 6 - 4 \log \pi + \log 2 + O\left(\left(\frac{\log \log T}{\log T}\right)^{1/2}\right)\right),$$

$$N^-(T) = \frac{1}{24} T - \frac{1}{4\pi} \sqrt{T} \left(\log T - 2 + 3 \log 2 + O\left(\left(\frac{\log \log T}{\log T}\right)^{1/2}\right)\right).$$

Auffällig ist, daß hier der Fehlerterm im Weylschen asymptotischen Gesetz nicht einmal der in Satz 7.2 genannten Wachstumsbeschränkung unterliegt. Venkov [161 a] erzielt eine noch bessere Fehlerabschätzung, die für alle diskontinuierlichen Untergruppen von $PSL(2, \mathbf{R})$ mit endlichem hyperbolischem Flächeninhalt des Fundamentalbereichs gilt.

8 Der „Primzahlsatz"

Informationen über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion liefern in der analytischen Zahlentheorie Informationen über die Verteilung der Primzahlen. Dementsprechend liegt es nahe, die vorhandenen Kenntnisse über die Nullstellen der Selbergschen Zetafunktion anzuwenden auf das zugehörige „Primzahlproblem". Die „Primzahlen" sind hier die Normen $N(P_0)$ der primitiven hyperbolischen Elemente von Γ, und das Analogon der Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $\leqslant x$ ist hier die Anzahlfunktion

$$\pi_0(x) := \# \{\{P_0\}_\Gamma : P_0 \text{ primitiv hyperbolisch, } N(P_0) \leqslant x\}.$$

Im Sinne dieser Analogien entsprechen die hier vorliegenden Verhältnisse in erstaunlichem Maße der Situation in der klassischen analytischen Zahlentheorie. Es gibt ein natürliches Analogon der Chebyshevschen Funktion

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p,$$

nämlich die Funktion

$$\Theta(x) := \sum_{\substack{\{P_0\}_\Gamma \\ N(P_0) \leqslant x}} \log N(P_0) .$$

Ferner gibt es ein Analogon der Chebyshevschen Funktion

$$\psi(x) := \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) ,$$

wobei $\Lambda(n)$ die von Mangoldtsche Funktion bezeichnet ($\Lambda(n) = \log p$, falls n gleich einer Potenz $p^k (k \geqslant 1)$ der Primzahl p ist, und $\Lambda(n) = 0$ für alle übrigen natürlichen Zahlen n): Da die Zahlen $\Lambda(n)$ auftreten als Koeffizienten der Dirichletreihe, die die logarithmische Ableitung der Riemannschen Zetafunktion darstellt

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad (\text{Re } s > 1),$$

liegt es nahe, die Koeffizienten

$$\Lambda(P) := \frac{\log N(P_0)}{1 - N(P)^{-1}}$$

($P \in \Gamma$, P hyperbolisch mit zugehöriger primitiver hyperbolischer Transformation P_0) der logarithmischen Ableitung

$$\frac{Z'}{Z}(s) = \sum_{\{P\}_\Gamma} \frac{\Lambda(P)}{N(P)^s} \qquad (\text{Re } s > 1)$$

(s. (6.4)) zur Definition des Analogons

$$\Psi(x) := \sum_{\substack{\{P\}_\Gamma \\ N(P) \leqslant x}} \Lambda(P)$$

der Funktion ψ zu verwenden. Wie in der klassischen analytischen Zahlentheorie ist auch hier der „Primzahlsatz“

$$\pi_0(x) \sim \text{li } x \quad \text{für } x \longrightarrow \infty$$

(li = Integrallogarithmus; li $x \sim \frac{x}{\log x}$ für $x \longrightarrow \infty$) äquivalent zu entsprechenden asymptotischen Gesetzen für $\Theta(x)$ bzw. $\Psi(x)$. Es gilt sogar ein „Primzahlsatz mit Restglied“; diesen beweist Hejhal [76] in folgenden Schritten: Der Mittelwert

$$\Psi_1(x) := \int_1^x \Psi(t)\, dt$$

erweist sich der Untersuchung als besser zugänglich als die Funktion Ψ selbst. Die Funktion Ψ_1 läßt sich vermöge

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \frac{Z'}{Z}(s)\, ds$$

(Integration längs der Vertikalgeraden Re $s = \sigma_0 > 1$) durch die logarithmische Ableitung der Selbergschen Zetafunktion ausdrücken. Mit Hilfe des Residuenkalküls gewinnt man sodann eine explizite Formel für Ψ_1 (s. [76], S. 91, Theorem 5.12) und eine explizite Formel für Ψ_1 mit Restabschätzung ([76], S. 110, Theorem 6.16). Letztere Formel ergibt für Ψ und für Θ folgende Aussage (Bezeichnungen s. (6.8)–(6.11)):

Satz 8.1 *Für* $x \longrightarrow \infty$ *gilt*

$$\Psi(x) = x + \sum_{k=1}^{N} \frac{x^{s_k}}{s_k} + O(x^{3/4}(\log x)^{1/2}), \tag{8.1}$$

$$\Theta(x) = x + \sum_{k=1}^{N} \frac{x^{s_k}}{s_k} + O(x^{3/4}(\log x)^{1/2}). \tag{8.2}$$

Da ersichtlich

$$\pi_0(x) = \int_2^x \frac{d\,\Theta(t)}{\log t} + O(1)$$

ist, folgt aus Satz 8.1 sofort

Satz 8.2 („Primzahlsatz mit Restglied") *Für* $x \longrightarrow \infty$ *gilt*

$$\pi_0(x) = \operatorname{li} x + \sum_{k=1}^{N} \operatorname{li} x^{s_k} + O\left(\frac{x^{3/4}}{\sqrt{\log x}}\right). \tag{8.3}$$

Dieser Satz wurde erstmals bewiesen von H. Huber [83]. Hejhal [76] beweist Hubers Ergebnis unter systematischer Heranziehung der Selbergschen Zetafunktion (wie oben skizziert). Randol [128] schließt ähnlich, benutzt aber eine zweimal gemittelte Funktion, die unserem $\Theta(x)$ ähnelt, und gibt für den „Primzahlsatz" ein Restglied an, bei dem das Wurzelzeichen im Nenner in (8.3) getilgt ist.

Im Sinne der im Abschnitt 3 angegebenen geometrischen Interpretation der Zahlen $\log N(P)$ als Längenspektrum der Fläche X beinhaltet Satz 8.2 eine Aussage über die asymptotische Verteilung der Längen der primitiven geschlossenen Geodätischen auf der Fläche X. Entsprechende symptotische Aussagen sind auch in allgemeinerem Rahmen bekannt; s. [8], [9], [39], [60], [63].

Es ist eine offene Frage, ob der Exponent 3/4 im O-Term des Satzes 8.2 durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann. Für den Fall der Modulgruppe gibt Kuznecov [100], Theorem 5 dasselbe Fehlerglied an wie in (8.3); s. auch [1], [118], [164].

Für den Fehlerterm in (8.3) hat Hejhal [76] folgendes sehr befriedigende Ω-Theorem bewiesen:

Satz 8.3 *Für* $x \to \infty$ *gilt*

$$\pi_0(x) = \operatorname{li} x + \sum_{k=1}^{N} \operatorname{li} x^{s_k} + \Omega_{\pm}\left(x^{1/2}\,\frac{(\log\log x)^{1/2}}{\log x}\right).$$

9 Das hyperbolische Gitterpunktproblem; Existenz „kleiner" Eigenwerte

Auffällig an den Formeln (8.1)–(8.3) ist das Auftreten der Zahlen $s_1, \ldots, s_N \in \,]\,1/2, 1\,[$, die von den „kleinen" (d. h. in $]0, 1/4[$ gelegenen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ des Operators $-\Delta$ herkommen. Offenbar wird die Summe $\sum_{k=1}^{N} \mathrm{li}\, x^{s_k}$ in (8.3) das asymptotische Verhalten von $\pi_0(x)$ um so nachhaltiger beeinflussen, je kleiner λ_1 ist. (Dabei bleibt zunächst offen, ob es überhaupt Gruppen Γ gibt, für die $N \geqslant 1$ ist, d. h., für die $\lambda_1 < 1/4$ ist.) Auf ähnliche Phänomene ist man bei der Betrachtung h y p e r b o l i s c h e r G i t t e r p u n k t p r o b l e m e gestoßen (s. [41], [42], [58], [71], [82], [83], [108], [109], [122], [150a]): Setzt man für z, w $\in \mathbf{H}$

$$(9.1) \quad \sigma(z, w) := \frac{|z-\bar{w}|^2}{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w},$$

so hängt σ mit dem hyperbolischen Abstand $|\cdot, \cdot|$ vermöge

$$\sigma(z, w) = 2 \cosh |z, w| + 2$$

zusammen. Statt mit $|\cdot, \cdot|$ kann man daher hyperbolische Kreisscheiben auch durch σ beschreiben. Bezeichnet man nun mit $A(T; z, w)$ die Anzahl der Elemente $M \in \Gamma$ mit $\sigma(z, M(w)) \leqslant T$, so weist $A(T; z, w)$ für $T \longrightarrow \infty$ folgendes asymptotische Verhalten auf (φ_k s. Satz 2.1):

Satz 9.1 *Für* $T \longrightarrow \infty$ *gilt*[5])

$$(9.2) \quad A(T; z, w) = \frac{\pi}{\omega(\mathscr{F})}\, T + \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma(s_k - 1/2)}{\Gamma(s_k + 1)}\, \varphi_k(z)\, \varphi_k(w)\, T^{s_k} + O(T^{3/4}).$$

Dieser Satz wird von Patterson [122] in Verschärfung früherer Ergebnisse von Huber [82], [83] sogar für beliebige diskontinuierliche Untergruppen von PSL(2, $\mathbf{R}$) mit einem Fundamentalbereich von endlichem hyperbolischem Flächeninhalt bewiesen. Entsprechende Resultate sind auch für diskontinuierliche Gruppen von Isometrien höherdimensionaler hyperbolischer Räume bekannt ([58], [71]); zur Fehlerabschätzung s. auch [175].

Die asymptotischen Aussagen (8.1)–(8.3), (9.2) legen die Frage nahe, ob es wirklich Gruppen Γ mit $\lambda_1 < 1/4$ oder schärfer mit beliebig kleinen positiven Eigenwerten gibt. Diese Frage wurde schon 1942 von Delsarte [41] aufgeworfen. Selberg bemerkt dazu in einer Fußnote [137], S. 74, daß für das entsprechende Eigenwertproblem automorpher Formen mit dem Transformationsverhalten $f(Mz) = \chi(M)\, f(z)$ ($z \in \mathbf{H}$, $M \in \Gamma$) mit einem Charakter $\chi: \Gamma \to \{\zeta;\ |\zeta| = 1\}$ für geeignete Γ, χ beliebig viele Eigenwerte in $]\,0, 1/4\,[$ liegen können; ob das auch für $\chi = 1$ gilt, bleibt dort unerwähnt. Nachdem McKean irrtümlich behauptet hatte [112], es sei stets $\lambda_1 \geqslant 1/4$, wurde die Existenz von Gruppen mit beliebig vielen Eigenwerten in $]\,0, 1/4\,[$ erstmals bewiesen von Randol [126]. Dabei bedient sich Randol einer kunstvollen Anwendung der Selbergschen Spurformel.

---
5) In (9.2) bezeichnet der Buchstabe Γ die Eulersche Gammafunktion.

Randol macht in seiner Arbeit [126] keine Aussage darüber, ob auch beliebig kleine positive Eigenwerte vorkommen können, doch kann man auch das durch eine geringfügige Modifikation der Randolschen Schlußweise zeigen. Dabei erhält man dann folgendes Ergebnis: *Zu jeder Gruppe* Γ, *die den in Abschnitt 2 genannten Voraussetzungen genügt, jeder natürlichen Zahl* k *und jedem* $\delta > 0$ *gibt es eine Untergruppe (sogar einen Normalteiler)* Γ^* *von endlichem Index in* Γ, *so daß in* $]0, \delta[$ *mindestens* k *Eigenwerte von* $-\Delta$ *zur Gruppe* Γ^* *liegen.* Geometrisch bedeutet das, daß jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht $\geqslant 2$ eine endlichblättrige Überlagerung X^* hat, für welche in $]0, \delta[$ mindestens k Eigenwerte von $-\Delta$ liegen. Die Blätterzahl von X^* wird dabei nach der Randolschen Konstruktion sehr groß sein, so daß X^* ein sehr großes Geschlecht haben wird. Es bleibt daher die Frage, ob für jedes Geschlecht $g \geqslant 2$ Gruppen mit beliebig kleinen positiven Eigenwerten existieren. Diese und verwandte Fragen wurden von Buser ([17]–[28]) und Huber ([84]–[86]) untersucht. Wir zitieren hier zwei Ergebnisse aus [18] als Satz 9.2; s. auch [134].

Satz 9.2 a) *Zu jedem Geschlecht* $g \geqslant 2$ *und jedem* $\epsilon > 0$ *gibt es eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht* g *mit* $2g-3$ *Eigenwerten in* $]0, \epsilon[$.
b) *Für jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht* $g \geqslant 2$ *ist* $\lambda_{4g-2} > 1/4$.

Diese Aussagen präzisieren den Inhalt der Fußnote auf S. 74 in [137]. – Weitere Hinweise auf einige unter den zahlreichen Arbeiten, die sich mit Abschätzungen der ersten Eigenwerte und verwandten Fragen beschäftigen, findet man im Literaturverzeichnis.

Auf Grund von Satz 9.2 ist plausibel, warum man für das hyperbolische Gitterpunktproblem das asymptotische Gesetz

$$(9.3) \quad A(T; z, w) \sim \frac{\pi}{\omega(\mathscr{F})} T \quad \text{für } T \longrightarrow \infty$$

nicht ohne weiteres durch eine elementargeometrische Schlußweise nach dem Vorbild des euklidischen Kreisproblems (s. [79], § 5) beweisen kann. Eine solche Schlußweise sollte für den Fehlerterm in (9.3) für alle Gruppen eine Wachstumsbeschränkung der Form $O(T^\alpha)$ mit einem $\alpha < 1$ ergeben – aber diese Wachstumsbeschränkung gilt nicht für alle Gruppen, da nach Satz 9.2 in Gl. (9.2) die Zahl $s_1 < 1$ beliebig nahe bei 1 liegen kann.

10 Ein anderer Zugang zur Selbergschen Zetafunktion

Die obigen Ausführungen lassen die tragende Rolle der Selbergschen Zetafunktion deutlich erkennen. Dagegen bleibt die genauere Herkunft dieser Funktion ein wenig dunkel; die verblüffenden formalen Analogien zu zahlentheoretischen Gegebenheiten wird man kaum als befriedigende Erklärung für die bemerkenswerten Eigenschaften der Selbergschen Zetafunktion akzeptieren.

Ein besseres Verständnis der Situation stellt sich hier ein, wenn man die ursprüngliche Problemstellung, die zur Aufstellung der Spurformel führte, nämlich die Frage nach den Eigenwerten des Operators $-\Delta: \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{H}$, einmal von der Seite der Resolvente

$$R_\lambda := (-\widetilde{\Delta} - \lambda)^{-1}$$

$(\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{\lambda_n : n \geqslant 0\} =: \rho(-\widetilde{\Delta}))$ der selbstadjungierten Fortsetzung $-\widetilde{\Delta}$ des Operators $-\Delta: \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{H}$ her betrachtet. Offenbar ist $\mathbf{R}_\lambda$ ein beschränkter linearer Operator in $\mathscr{H}$ mit dem vollständigen Orthonormalsystem $(\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ von Eigenfunktionen:

$$R_\lambda \varphi_n = (\lambda_n - \lambda)^{-1} \varphi_n .$$

Da zufolge Satz 5.1 die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}$ divergiert, ist der Operator $\mathbf{R}_\lambda$ nicht von der Spurklasse. Bildet man dagegen mit einem $\mu \in \rho(-\widetilde{\Delta})$ das Produkt $\mathbf{R}_\lambda \mathbf{R}_\mu$, so ist

$$R_\lambda R_\mu \varphi_n = (\lambda_n - \lambda)^{-1} (\lambda_n - \mu)^{-1} \varphi_n ,$$

und da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$ konvergiert (s. Satz 2.1), ist $R_\lambda R_\mu$ von der Spurklasse.

Setzt man noch

$$\lambda = s(1-s), \quad \mu = a(1-a),$$

so erhält man

$$(10.1)\quad (\lambda - \mu) \operatorname{Spur}(R_\lambda R_\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n - \lambda} - \frac{1}{\lambda_n - \mu}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n^2 + (s - 1/2)^2} - \frac{1}{r_n^2 + (a - 1/2)^2}\right) .$$

Hier steht auf der rechten Seite dieselbe Reihe wie auf der linken Seite der Gl. (6.6). Nach Gl. (6.6) ist also die logarithmische Ableitung der Selbergschen Zetafunktion im wesentlichen gleich der Spur des Operators $R_\lambda R_\mu$. Diese Tatsache kann man auch ad hoc folgendermaßen einsehen und so zu einem neuen Beweis der Gl. (6.6) gelangen:

Es seien $\operatorname{Re} s > 1$, $\operatorname{Re} a > 1$. Dann läßt sich R_λ darstellen als Integraloperator

$$\mathbf{R}_\lambda f(z) = \int_{\mathscr{F}} G_\lambda(z, z') f(z') \, d\omega(z')$$

$(f \in \mathscr{H})$ mit einem Kern G_λ, den man in Gestalt einer Poincaréschen Reihe wie folgt genau angeben kann: Für je zwei nicht Γ-äquivalente Punkte $z, z' \in \mathbf{H}$ ist[6])

$$(10.2)\quad G_\lambda(z, z') = \frac{(\Gamma(s))^2}{4\pi\Gamma(2s)} \sum_{M \in \Gamma} \left(\frac{1}{4}\sigma(z, Mz')\right)^{-s} \cdot F\left(s, s; 2s; \frac{4}{\sigma(z, Mz')}\right)$$

(σ s. (9.1); F bezeichnet die hypergeometrische Funktion); s. [54], Teil I, Gl. (4.15),

[6]) Der Buchstabe Γ bezeichnet einmal die Gammafunktion, zum anderen die Gruppe Γ.

(4.19), (5.1) und Teil II, S. 103, Korollar 6.2 oder [133], Teil II. Die Hilbertsche Resolventengleichung

$$(\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu = R_\lambda - R_\mu$$

liefert für G_λ die Gleichung

(10.3) $$(\lambda - \mu) \int_{\mathcal{F}} G_\lambda(z, z') G_\mu(z', w)\, d\,\omega(z') = \lim_{\zeta \to w} (G_\lambda(z, \zeta) - G_\mu(z, \zeta))$$

([54], Teil II, S. 119f.). Man kann daher den Ausdruck

(10.4) $$(\lambda - \mu) \operatorname{Spur}(R_\lambda R_\mu) = \int_{\mathcal{F}} \int_{\mathcal{F}} G_\lambda(z, z') G_\mu(z', z)\, d\,\omega(z')\, d\,\omega(z)$$

berechnen, indem man die Reihe (10.2) auf der rechten Seite der Gl. (10.3) einträgt, den Grenzübergang $\zeta \longrightarrow z$ ausführt und gemäß (10.4) bzgl. z über den Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ integriert. Bei der Integration vertauscht man die Reihenfolge von Summation und Integration und wendet auf die äußere Summe dieselben Umformungen an, die man auch im Beweis der Spurformel verwendet (Summation über die Konjugationsklassen von Γ; vgl. [76], S. 22–29). Die entstehenden Ausdrücke lassen sich explizit bestimmen, und man erhält nach einiger Rechnung

(10.5) $$(\lambda - \mu) \operatorname{Spur}(R_\lambda R_\mu)$$
$$= -\frac{\omega(\mathcal{F})}{2\pi}(\psi(s) - \psi(a)) + \frac{1}{2s-1} \sum_{\{P\}_\Gamma} \frac{\log N(P_0)}{N(P)^s - N(P)^{s-1}}$$
$$- \frac{1}{2a-1} \sum_{\{P\}_\Gamma} \frac{\log N(P_0)}{N(P)^a - N(P)^{a-1}}$$
$$= -\frac{\omega(\mathcal{F})}{2\pi}(\psi(s) - \psi(a)) + \frac{1}{2s-1}\frac{Z'}{Z}(s) - \frac{1}{2a-1}\frac{Z'}{Z}(a)$$

(ψ = logarithmische Ableitung der Gammafunktion; vgl. (6.4), (6.5)). Wegen der bekannten Partialbruchentwicklung der Funktion ψ ist mit (10.1), (10.5) ein weiterer Beweis der Gl. (6.6) erbracht. Da die bemerkenswerten Sätze 6.2, 6.3 gerade auf (6.6) beruhen, haben wir hiermit einen mehr direkten Zugang zur Selbergschen Zetafunktion und ihren eindrucksvollen Eigenschaften erhalten. Wir halten fest: *Die Selbergsche Zetafunktion entsteht durch Spurbildung aus dem Produkt $R_\lambda R_\mu$ der Resolventenoperatoren R_λ, R_μ.* Daher ist es plausibel, daß Z zur genaueren Untersuchung der hier betrachteten Probleme besonders gut geeignet ist. Das wird zusätzlich verdeutlicht durch folgende Bemerkung: *In der Selbergschen Zetafunktion steckt ebensoviel „Information" wie in der Spurformel selbst.* Man kann nämlich nach einer Bemerkung bei Hejhal [76], S. 189, Remark 12.13 aus den Eigenschaften der Selbergschen Zetafunktion mit Hilfe des Residuenkalküls die Spurformel zurückgewinnen – oder auch die Spurformel auf diesem Wege beweisen, wenn man den im vorliegenden Abschnitt 10 beschriebenen Zugang zur Selbergschen Zetafunktion wählt. Letzterer Weg entspricht dem Vorgehen in der analytischen Zahlentheorie ([102], Chap. 17), wo man die allgemeinen expliziten Formeln unter Benutzung des Residuenkalküls aus den Eigenschaften der L-Reihen herleitet. In gewissem Sinne ist daher die Wahl (6.1) der Funktion h bestmöglich, denn sie gibt uns in der Selbergschen Zetafunktion ein kräftiges analytisches Werkzeug zur Diskussion des Eigenwertspektrums und des Längenspektrums, und die Spezialisierung der Spurformel für die Funktion h aus (6.1) bedeutet keinen Informationsverlust.

Literatur

[1] Andrianov, A. N.; Fomenko, O. M.: Distribution of the norms of the hyperbolic elements of the modular group and the class number of indefinite binary quadratic forms. Soviet Math. Dokl. **12** (1971) 217–219; transl. from Doklady Akad. Nauk SSSR **196** (1971) 743–745

[2] Arthur, J.: The Selberg trace formula for groups of F-rank one. Ann. of Math. **100** (1974) 326–385

[3] Arthur, J.: A trace formula for reductive groups, I. Terms associated to classes in G(Q). Duke math. J. **45** (1978) 911–952; II. Applications of a truncation operator. Compositio math. **40** (1980) 87–121

[4] Atiyah, M. F.: Eigenvalues and Riemannian geometry. Manifolds-Tokyo 1973. Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology, Tokyo, 1973, 5–9. Tokyo: Univ. of Tokyo Press 1975

[5] Avakumović, V. G.: Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **65** (1956) 327–344

[6] Bérard, P.: Sur la fonction spectrale du Laplacien d'une variété riemannienne compacte sans points conjugués. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **283** (1976) 45–48

[7] Bérard, P. H.: On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points. Math. Z. **155** (1977) 249–276

[7a] Bérard, P. H.: Spectres et groupes cristallographiques, I. Domaines euclidiens. Inventiones math. **58** (1980) 179–199; II. Domaines sphériques. Ann. Inst. Fourier, à paraître.

[8] Bérard-Bergery, L.: Sur les longueurs des géodésiques périodiques et le spectre des formes d'espace hyperbolique compactes. Séminaire de Géométrie Riemannienne 1970–71, Variétés a courbure négative. M. Berger, Univ. de Paris VII (1971) 84–126

[9] Bérard-Bergery, L.: Laplacien et géodésiques fermées sur les formes d'espace hyperbolique compactes. Séminaire Bourbaki, 24e année, 1971/72, exposé n° 406. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973. = Lectures Notes in Mathematics, Vol. 317, 107–122

[10] Berger, M.: Geometry of the spectrum, I. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 27, part II, pp. 129–152. Providence, R.I.: American Mathematical Society 1975

[11] Berger, M.: Une inégalité universelle pour la première valeur propre du Laplacien. Bull. Soc. math. France **107** (1979) 3–9

[12] Berger, M.; Gauduchon, P.; Mazet, E.: Le spectre d'une variété riemannienne. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1971. = Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194

[13] Brüning, J.; Heintze, E.: Représentations de groupes d'isométries dans les sous-espaces propres du Laplacien. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **286** (1978) 921–923

[14] Brüning, J.; Heintze, E.: Representations of compact Lie groups and elliptic operators. Inventiones math. **50** (1979) 169–203

[15] Bruggeman, R. W.: Fourier coefficients of cusp forms. Inventiones math. **45** (1978) 1–18

[16] Bruggeman, R. W.: Kuznetsov's proof of the Ramanujan-Petersson conjecture for modular forms of weight zero. Commun. of the Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht **8** (1979); (Erratum s. Zent.-Bl. f. Math. **408** (1980) Referat 10014.)

[17] Buser, P.: Untersuchungen über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen. Diss. Basel 1976

[18] B u s e r , P.: Riemannsche Flächen mit Eigenwerten in (0, 1/4). Commentarii math. Helvet. **52** (1977) 25–34

[19] B u s e r , P.: Riemannsche Flächen mit großer Kragenweite. Commentarii math. Helvet. **53** (1978) 395–407

[20] B u s e r , P.: The collar theorem and examples. Manuscripta math. **25** (1978) 349–357

[21] B u s e r , P.: Über eine Ungleichung von Cheeger. Math. Z. **158** (1978) 245–252

[22] B u s e r , P.: Eine untere Schranke für λ_1 auf Mannigfaltigkeiten mit fast negativer Krümmung. Arch. der Math. **30** (1978) 528–531

[23] B u s e r , P.: Cubic graphs and the first eigenvalue of a Riemann surface. Math. Z. **162** (1978) 87–99

[24] B u s e r , P.: Beispiele für λ_1 auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **165** (1979) 107–133

[25] B u s e r , P.: Dichtepunkte im Spektrum Riemannscher Flächen. Commentarii math. Helvet. **54** (1979) 431–439

[26] B u s e r , P.: Über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen. Commentarii math. Helvet. **54** (1979) 477–493

[27] B u s e r , P.: Riemannsche Flächen und Längenspektrum vom trigonometrischen Standpunkt aus. Habil.-schr. Bonn 1980

[28] B u s e r , P.: On Cheeger's inequality $\lambda_1 \geqslant h^2/4$. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 36, pp. 29–77. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1980

[29] C a r l e m a n , T.: Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. Comptes rendus du VIII^e Congrès des Mathématiciens Scandinaves à Stockholm 1934, Lund 1935, S. 34–44 (siehe auch Édition complète des articles de Torsten Carleman. Malmö 1960, 471–481)

[30] C a r t i e r , P.; H e j h a l , D.: Sur les zéros de la fonction zêta de Selberg. Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette 1979

[31] C h a n g , F.-R.: On the diameters of compact Riemann surfaces. Proc. Amer. math. Soc. **65** (1977) 274–276

[32] C h a z a r a i n , J.: Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. Inventiones math. **24** (1974) 65–82 (siehe auch Séminaire Goulaouic-Schwartz 1974, exposé n° 16.)

[33] C h a z a r a i n , J.: Spectre des opérateurs elliptiques et flots hamiltoniens. Séminaire Bourbaki, 27e année, 1974/75, exposé n° 460. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1976. = Lecture Notes in Mathematics, Vol. 514, pp. 111–123

[34] C h e e g e r , J.: A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. Problems in Analysis. A symposium in honor of S. Bochner, pp. 195–199. Princeton, N. J.: Priceton Univ. Press 1970

[35] C h e n , S.-S.: Spectra of discrete uniform subgroups of semisimple Lie groups. Math. Ann. **237** (1978) 157–159

[36] C h e n g , S.-Y.: Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. Math. Z. **143** (1975) 289–297

[37] C h e n g , S.-Y.: Eigenfunctions and eigenvalues of Laplacian. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 27, part II, pp. 185–193. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1975

[38] C o l i n d e V e r d i è r e , Y.: Spectre du laplacien et longueurs de géodésiques périodiques, I. Composito math. **27** (1973), 83–106; II. ibid. **27** (1973) 159–184 (siehe auch Séminaire Goulaouic-Schwartz 1973–1974, exposé n° 14.)

[39] D e G e o r g e , D. L.: Length spectrum for compact locally symmetric spaces of strictly negative curvature. Ann. sci. École norm. sup., IV. Sér. **10** (1977) 133–152

[40] D e G e o r g e , D. L.; W a l l a c h , N. R.: Limit formulas for multiplicities in $L^2(\Gamma\backslash G)$. Ann. of Math., II. Ser. **107** (1978) 133–150; Part II: to appear

[41] D e l s a r t e , J.: Sur le gitter fuchsien. C. R. Acad. Sci., Paris **214** (1942) 147–149

[42] D e l s a r t e , J.: Le gitter fuchsien. Oeuvres de Jean Delsarte, Tome II, 829–845. Paris: Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique 1971

[43] D o n n e l l y , H.: Spectrum and the fixed point sets of isometries, I. Math. Ann. **224** (1976) 161–170; II. (mit V. K. P a t o d i) Topology **16** (1977) 1–11

[44] D o n n e l l y , H.: G-spaces, the asymptotic splitting of $L^2(M)$ into irreducibles. Math. Ann. **237** (1978) 23–40

[45] D o n n e l l y , H.: On the wave equation asymptotics of a compact negatively curved surface. Inventiones math. **45** (1978) 115–137

[46] D o n n e l l y , H.: Asymptotic expansions for the compact quotients of properly discontinuous group actions. Illinois J. Math. **23** (1979) 485–496
[47] D o n n e l l y , H.: On the analytic torsion and the eta invariant for negatively curved manifolds. Amer. J. Math. **101** (1979) 1365–1379
[48] D u f l o , M.; L a b e s s e , J.-P.: Sur la formule des traces de Selberg. Ann. sci. École norm. sup., IV. Sér. **4** (1971) 193–284
[49] D u i s t e r m a a t , J. J.; G u i l l e m i n , V. W.: The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 27, part II, pp. 205–209. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1975
[50] D u i s t e r m a a t , J. J.; G u i l l e m i n , V. W.: The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. Inventiones math. **29** (1975) 39–79
[51] D u i s t e r m a a t , J. J.; K o l k , J. A. C.; V a r a d a r a j a n , V. S.: Spectra of compact locally symmetric manifolds of negative curvature. Inventiones math. **52** (1979) 27–93; Erratum, ibid. **54** (1979) 101 (siehe auch Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976–77, exposé n° 16 (1977))
[52] E i c h l e r , M.: Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale. Math. Z. **67** (1957) 267–298
[53] E h r e n p r e i s , L.: An eigenvalue problem für Riemann surfaces. Advances in the theory of Riemann surfaces. Proceedings of the 1969 Stony Brook Conference. A h l f o r s , L. V. et al. (eds.), pp. 131–140. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press 1971
[54] E l s t r o d t , J.: Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, Teil I. Math. Ann. **203** (1973) 295–330; Teil II. Math. Z. **132** (1973) 99–134; Teil III. Math. Ann. **208** (1974) 99–132
[55] F a d d e e v , L. D.: Expansion in eigenfunctions of the Laplace operator on the fundamental domain of a discrete group on the Lobačevskiĭ plane. Trans. Moscow math. Soc. **17** (1967) 357–386; transl. from Trudy Moskov. mat. Obšč. **17** (1967) 323–350
[56] F a r a u t , J.: Spectre d'une variété riemannienne compacte. Séminaire de théorie spectrale 1972–73, exposé V, 34 pp. Institut de Recherche Mathématique Avancée, Univ. de Strasbourg 1973
[57] F a y , J. D.: Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group. J. f. d. reine angew. Math. **293/294** (1977) 143–203
[58] F r i c k e r , F.: Ein Gitterpunktproblem im dreidimensionalen hyperbolischen Raum. Commentarii math. Helvet. **43** (1968) 402–416
[59] G a n g o l l i , R.: Asymptotic behaviour of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces. Acta math. **121** (1968) 151–192
[60] G a n g o l l i , R.: The length spectra of some compact manifolds of negative curvature. J. diff. Geometry **12** (1977) 403–424
[61] G a n g o l l i , R.: Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. Illinois J. Math. **21** (1977) 1–42
[62] G a n g o l l i , R.; W a r n e r , G.: On Selberg's trace formula. J. math. Soc. Japan 27 (1975) 328–343
[63] G a n g o l l i , R.; W a r n e r , G.: Zeta functions of Selberg's type for some noncompact quotients of symmetric spaces of rank one. Nagoya math. J. 78 (1980) 1–44
[64] G e l b a r t , S.: The decomposition of $L^2(_\Gamma\backslash G)$. Séminaire Choquet 11e–12e années, 1971–1973, exposé n° 4, 10 pp.
[65] G e l' f a n d , I. M.: Automorphic functions and the theory of representations. Proc. Internat. Congr. Math. Stockholm 1962, pp. 74–85. Uppsala: Almqvist & Wiksell 1963
[66] G e l' f a n d , I. M.: G r a e v , M. I.; P y a t e t s k i i - S h a p i r o , I. I.: Representation theory and automorphic functions. Philadelphia – London – Toronto: W. B. Saunders Co. 1969 (Russ. Original: Moskau: Nauka 1966)
[67] G o d e m e n t , R.: Introduction aux travaux de A. Selberg. Séminaire Bourbaki, exposé n° 144. Paris 1957
[68] G o d e m e n t , R.: La formule des traces de Selberg considérée comme source de problèmes mathématiques. Séminaire Bourbaki, 15e année, 1962/63, exposé n° 244. Paris 1962
[69] G o d e m e n t , R.: Introduction à la théorie de Langlands. Séminaire Bourbaki, 19e année, 1966/67, exposé n° 321. New York: Benjamin 1968
[70] G r e e n b e r g , L.: Maximal groups and signatures. Discontinuous groups and Riemann

surfaces. Greenberg, L. (ed.) Annals of Mathematics Studies, Vol. 79, pp. 207–226. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press 1974

[71] Günther, P.: Problème de réseaux dans les espaces hyperboliques. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **288** (1979) 49–52

[72] Guillemin, V.: Some classical theorems in spectral theory revisited. Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations. Hörmander, L. (ed.) Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press 1979, pp. 210–259

[73] Harthong, J.; Rubenthaler, H.: Contre-exemple de Milnor. Séminaire de théorie spectrale 1972–73, exposé VI, 30 pp. Institut de Recherche Mathématique Avancée, Univ. de Strasbourg 1973

[74] Hejhal, D. A.: The Selberg trace formula for congruence subgroups. Bull. Amer. math. Soc. **81** (1975) 752–755

[75] Hejhal, D. A.: The Selberg trace formula and the Riemann zeta function. Duke math. J. **43** (1976) 441–482

[76] Hejhal, D. A.: The Selberg trace formula for PSL(2, **R**). Volume I. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1976. = Lecture Notes in Mathematics, Vol. 548

[77] Hejhal, D. A.: Sur certaines séries de Dirichlet dont les pôles sont sur les lignes critiques. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **287** (1978) 383–385

[78] Herrmann, O.: Über die Verteilung der Längen geodätischer Lote in hyperbolischen Raumformen. Math. Z. **79** (1962) 323–343

[79] Hilbert, D.; Cohn-Vossen, S.: Anschauliche Geometrie. Berlin: Springer 1932 (Nachdruck: Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgemeinschaft 1973)

[80] Hiramatsu, T.: On some dimension formula for automorphic forms of weight one, I. Prepr. 1979

[81] Hörmander, L.: The spectral function of an elliptic operator. Acta math. **121** (1968) 193–218

[82] Huber, H.: Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene. Commentarii math. Helvet. **30** (1956) 20–62

[83] Huber, H.: Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen, I. Math. Ann. **138** (1959) 1–26; II. Math. Ann. **142** (1961) 385–398; Nachtrag zu II. Math. Ann. **143** (1961) 463–464

[84] Huber, H.: Über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen. Commentarii math. Helvet. **49** (1974) 251–259

[85] Huber, H.: Über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Mannigfaltigkeiten konstanter negativer Krümmung. Arch. d. Math. **26** (1975) 178–182

[86] Huber, H.: Über die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen, I. Commentarii math. Helvet. **51** (1976) 215–231; II. ibid. **53** (1978) 458–469

[87] Huber, H.: Über die Darstellungen der Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche in den Eigenräumen des Laplace-Operators. Commentarii math. Helvet. **52** (1977) 177–184

[87a] Huber, H.: On the spectrum of the Laplace operator on compact Riemann surfaces. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 36, pp. 181–184. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1980

[88] Hurwitz, A.: Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. Math. Ann. **41** (1893) 403–442 (= Hurwitz, A.: Mathematische Werke, Bd. I, 391–430. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1932, 1962.)

[89] Kac, M.: Can one hear the shape of a drum? Amer. math. Monthly **73** (1966) 1–23

[90] Karamata, J.: Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze. Math. Z. **33** (1931) 294–299

[91] Kawanaka, N.: The decomposition of $L^2(\Gamma \backslash SL(2, \mathbf{R}))$ and Teichmüller spaces. J. Math. Kyoto Univ. **11** (1971) 113–147 (siehe auch Proc. Japan Acad., Ser. A **46** (1970) 1126–1129)

[92] Kolk, J.: Formule de Poisson et distribution asymptotique du spectre simultané d'opérateurs différentiels. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **284** (1977) 1045–1048

[93] Kolk, J. A. C.: The Selberg trace formula and asymptotic behaviour of spectra. Diss. Rijksuniv. Utrecht 1977, 136 pp.

[94] Kubota, T.: Elementary theory of Eisenstein series. Tokyo: Kodansha Ltd.; New York: Halsted Press 1973

[95] K u b o t a , T.: Über diskontinuierliche Gruppen Picardschen Typus und zugehörige Eisensteinsche Reihen. Nagoya math. J. **32** (1968) 259–271
[96] K u d l a , S. S.; M i l l s o n , J. J.: Harmonic differentials and closed geodesics on a Riemann surface. Inventiones math. **54** (1979) 193–211
[97] K u z n e c o v , N. V.: The Petersson hypothesis for forms of zero weight and the Linnik hypothesis. Preprint. No. 02. Habarovsk: Akademija Nauk SSSR, Habarovskii Kompleksnyĭ Naučno-Issledovatel'skiĭ Institut 1977, 91 pp. (Russ.) (siehe auch [16] und Zent.-bl. f. Math. **381** (1979) Referat 10021; Erratum s. Zent.-bl. f. Math. **408** (1980) Referat 10014.)
[98] K u z n e c o v , N. V.: An arithmetical form of Selberg's trace formula and the distribution of norms of primitive hyperbolic classes of the modular group. Prepr. Habarovsk: Far-eastern Science Centre, Academy of Sciences of the USSR (1978), 44 pp. (siehe auch Zent.-bl. f. Math. **381** (1979) Referat 10022)
[99] K u z n e c o v , N. V.: Asymptotic formulas for the eigenvalues of the Laplacian on a fundamental domain of the modular group. Prepr. Habarovsk: Far-eastern Science Centre, Academy of Sciences of the USSR 1978, 42 pp. (Russ.) (siehe auch Zent.-bl. f. Math. **381** (1979) Referat 10023)
[100] K u z n e c o v , N. V.: The distribution of norms of primitive hyperbolic classes of the modular group and asymptotic formulas for the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on a fundamental region of the modular group. Soviet Math. Dokl. **19** (1978) 1053–1056; transl. from Doklady Akad. Nauk SSSR **242** (1978) 40–43
[101] L a c h a u d , G.: Analyse spectrale des formes automorphes et séries d'Eisenstein. Inventiones math. **46** (1978) 39–79 (siehe auch Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 25, pp. 387–397. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1974)
[102] L a n g , S.: Algebraic number theory. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1970
[103] L a n g , S.: $SL_2(\mathbf{R})$. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1975
[104] L a n g l a n d s , R.: The dimension of spaces of automorphic forms. Amer. J. Math. **85** (1963) 99–125
[105] L a n g l a n d s , R. P.: On the functional equations satisfied by Eisenstein series. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1976. = Lecture Notes in Mathematics, Vol. 544
[106] L a n g l a n d s , R. P.: Shimura varieties and the Selberg trace formula. Canadian J. Math. **29** (1977) 1292–1299
[107] L a x , P. D.; P h i l l i p s , R. S.: Scattering theory for automorphic functions. Annals of Mathematics Studies, Vol. 87. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press 1976 (siehe auch Séminaire Goulaouic-Schwartz 1973–1974, exposé n° 23 (1974))
[107a] L a x , P. D.; P h i l l i p s , R. S.: Scattering theory for automorphic functions. Bull. Amer. math. Soc. (New Series) 2 (1980) 261–295
[108] L e h n e r , J.: Automorphic forms. Discrete groups and automorphic functions. H a r v e y , W. J. (ed.), pp. 73–120. London: Academic Press 1977
[109] L e h n e r , J.: Automorphic forms. Pittsburgh, Pa.: Department of Mathematics and and Statistics, Univ. of Pittsburgh 1976. = Lecture Notes in Mathematics and Statistics, Vol. 4.
[110] M a a ß , H.: Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. Math. Ann. **121** (1949) 141–183
[111] M a a ß , H.: Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Ann. **125** (1953) 235–263
[112] M c K e a n , H. P.: Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface. Commun. pure appl. Math. **25** (1972) 225–246. Correction, ibid. **27** (1974) 134 (siehe auch [126] und [149])
[113] M c K e a n , H. P.; S i n g e r , I. M.: Curvature and eigenvalues of the Laplacian. J. diff. Geometry **1** (1967) 43–69
[114] M e n n i c k e , J.; G r u n e w a l d , F.; S c h w e r d t f e g e r , B.: Vorträge über Selbergs Spurformel. Mathematisches Institut der Univ. Bielefeld 1979
[115] M i l n o r , J.: Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. Proc. nat. Acad. Sci. USA **51** (1964) 542
[116] M i n a k s h i s u n d a r a m , S.: Eigenfunctions on Riemannian manifolds. J. Indian math. Soc. **17** (1953) 159–165

[117] Minakshisundaram, S.; Pleijel, Å.: Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds. Canadian J. Math. **1** (1949) 242–256

[118] Naboko, S. N.: Bounds on the number of geodesics on the fundamental region of the modular group. J. Soviet Math. **8** (1977) 199–202; transl. from Zapiski naučn. Sem. Leningrad. Otd. mat. Inst. Steklov **37** (1973) 43–46

[119] Neunhöffer, H.: Über die analytische Fortsetzung von Poincaréreihen. S.-ber. Heidelb. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1973, 2. Abh., 33–90

[120] Nichanian, M.: Les transformées de Fourier des distributions de type positif sur SL (2, **R**) et la formule des traces des Selberg. Thèse. Univ. Louis Pasteur Strasbourg I, 1974

[121] Niebur, D.: A class of nonanalytic automorphic functions. Nagoya math. J. **52** (1973) 133–145

[122] Patterson, S. J.: A lattice-point problem in hyperbolic space. Mathematika, London **22** (1975) 81–88; Corrigendum ibid. **23** (1976) 227

[123] Patterson, S. J.: The Laplacian operator on a Riemann surface, I. Compositio math. **31** (1975) 83–107; II. ibid. **32** (1976) 71–112; III. ibid. **33** (1976) 227–259

[124] Patterson, S. J.: Spectral theory and Fuchsian groups. Math. Proc. Cambridge philos. Soc. **81** (1977) 59–75

[125] Pavlov, B. S.; Faddeev, L. D.: Scattering theory and automorphic functions. J. Soviet Math. **3** (1975) 522–548; transl. from Zapiski naučn. Sem. Leningrad. Otd. mat. Inst. Steklov **27** (1972) 161–193

[125a] Ragozin, D. L.; Warner, G.: On a method for computing multiplicities in $L_2(\Gamma\backslash G)$. New York: Academic Press (1977). = Symposia Mathematica, Vol. 22, 291–314

[126] Randol, B.: Small eigenvalues of the Laplace operator on compact Riemann surfaces. Bull. Amer. math. Soc. **80** (1974) 996–1000

[127] Randol, B.: On the analytic continuation of the Minakshisundaram-Pleijel zeta function for compact Riemann surfaces. Trans. Amer. math. Soc. **201** (1975) 241–246

[128] Randol, B.: On the asymptotic distribution of closed geodesics on compact Riemann surfaces. Trans. Amer. math. Soc. **233** (1977) 241–247

[129] Randol, B.: The Riemann hypothesis for Selberg's zeta-function and the asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplace operator. Trans. Amer. math. Soc. **236** (1978) 209–223

[130] Randol, B.: Cylinders in Riemann surfaces. Commentarii math. Helvet. **54** (1979) 1–5

[131] Randol, B.: The length spectrum of a Riemann surface is always of unbounded multiplicity. Proc. Amer. math. Soc. **78** (1980) 455–456

[131a] Randol, B.: A Dirichlet series of eigenvalue type with applications to asymptotic estimates. Prepr. 1980

[131b] Randol, B.: A remark on the multiplicity of the discrete spectrum of congruence groups. Prepr. 1980

[132] Roelcke, W.: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. S.-ber. Heidelb. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1953/55, 4. Abh., 109 S. (1956)

[133] Roelcke, W.: Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I. Math. Ann. **167** (1966) 292–337; II. ibid. **168** (1967) 261–324

[134] Schoen, R.; Wolpert, S.; Yau, S. T.: On the first eigenvalue of a compact Riemann surface. Prepr. 1977

[135] Selberg, A.: On the remainder in the formula for N(T), the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$. Avh. Norske Vidensk.-Akad. Oslo, I. Mat.-Naturv. Kl. 1944, No. 1, 27 pp. (1945)

[136] Selberg, A.: Harmonic analysis, 2. Teil. Vorlesungsniederschrift (aufbewahrt in der Bibliothek des Mathematischen Instituts der Univ. Göttingen). Göttingen, Sommersemester 1954

[137] Selberg, A.: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian math. Soc. **20** (1956) 47–87

[138] Selberg, A.: Automorphic functions and integral operators. Seminars in analytic functions, Vol. 2, pp. 152–161. Princeton, N. J.: Institute for Advanced Study 1957

[139] Selberg, A.: Discontinuous groups and harmonic analysis. Proc. Internat. Congr. Math. Stockholm 1962, pp. 177–189. Stockholm 1963

[140] Selberg, A.: On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. Theory of numbers. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 8, pp. 1–15. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1965

[141] Semenov-Tjan-Šanskiĭ, M. A.: Harmonic analysis on Riemannian symmetric spaces of negative curvature and scattering theory. Math. USSR Izvestija **10** (1976) 535–563; transl. from Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **40** (1976) 562–592 (siehe auch Soviet Math. Dokl. **15** (1974) 1822–1827; transl. from Doklady Akad. Nauk SSSR **219** (1974) 1330–1333)

[142] Singer, I. M.: Eigenvalues of the Laplacian and invariants of manifolds. Proc. Internat. Congr. Math. Vancouver 1974, Vol. I, pp. 187–200

[143] Sitaram, A.: A Selberg type zeta function and the representations of $SL(2, \mathbf{R})$. Thesis. Univ. of Washington, Seattle 1975

[144] Sitaram, A.: A note on $L^2(\Gamma \backslash SL(2, \mathbf{R}))$. Michigan math. J. **26** (1979) 325–331

[145] Subia, N.: Sur les petites valeurs propres de l'opérateur de Laplace sur les surfaces de Riemann compactes de courbure – 1. Séminaire de théorie spectrale 1974, exposé 8, 8 pp. Institut de Recherche Mathématique Avancée, Univ. de Strasbourg 1974

[146] Subia, N.: Formule de Selberg et formes d'espaces hyperboliques compactes. Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sem. Nancy-Strasbourg, 1973–75). Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975. = Lecture Notes in Mathematics, Vol. 497, pp. 674–700

[147] Tamagawa, T.: On Selberg's trace formula. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I, A **8** (1960) 363–386

[148] Tanaka, S.: Selberg's trace formula and spectrum. Osaka J. Math. **3** (1966) 205–216

[149] Tarnopolska-Weiss, M.: A remark on a result of McKean. Proc. Amer. math. Soc. **56** (1976) 337–338

[150] Terras, A.: Fourier analysis on symmetric spaces and applications to number theory. Univ. of California at San Diego, La Jolla 1979

[150a] Thurnheer, P.: Le terme de reste dans un problème de réseau hyperbolique. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **290** (1980) 581–583

[151] Titchmarsh, E. C.: The theory of the Riemann zeta-function. London: Oxford Univ. Press 1951

[152] Uhlenbeck, K.: Generic properties of eigenfunctions. Amer. J. Math. **98** (1976) 1059–1078

[153] Venkov, A. B.: Expansion in automorphic eigenfunctions of the Laplace operator and the Selberg trace formula in the space $SO_0(n, 1)/SO(n)$. Soviet Math. Dokl. **12** (1971) 1363–1366; transl. from Doklady Akad. Nauk SSSR **200** (1971) 266–269

[154] Venkov, A. B.: Expansion in automorphic eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator in classical symmetric spaces of rank one, and the Selberg trace formula. Proc. Steklov Inst. Math. **125** (1973) 1–48; transl. from Trudy mat. Inst. Steklov **125** (1973) 6–55

[155] Venkov, A. B.: The Selberg trace formula for $SL(3, \mathbf{Z})$. J. Soviet Math. **12** (1979) 384–424; transl. from Zapiski naučn. Sem. Leningrad. Otd. mat. Inst. Steklov **63** (1976) 8–66

[156] Venkov, A. B.: On an asymptotic formula connected with the number of eigenvalues corresponding to odd eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator on a fundamental region of the modular group $PSL(2, \mathbf{Z})$. Soviet Math. Dokl. **18** (1977) 524–526; transl. from Doklady Akad. Nauk SSSR **233** (1977) 1021–1023

[156a] Venkov, A. B.: Selberg's trace formula for the Hecke operator generated by an involution, and the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on the fundamental domain of the modular group $PSL(2, \mathbf{Z})$. Math. USSR Izvestija **12** (1978) 448–462; transl. from Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **42** (1978) 484–499

[157] Venkov, A. B.: On the space of cusp forms for certain Fuchsian groups generated by reflections. Soviet Math. Dokl. **18** (1977) 1214–1217; transl. from Doklady Akad. Nauk SSSR **236** (1977) 525–527

[158] Venkov, A. B.: On the space of cusp functions for a Fuchsian group of the first kind with nontrivial commensurator. Soviet Math. Dokl. **19** (1978) 343–347; transl. from Doklady Akad. Nauk SSSR **239** (1978) 511–514

[159] Venkov, A. B.: Selberg's trace formula and non-euclidian vibrations of an infinite membrane. Soviet Math. Dokl. **19** (1978) 708–712; transl. from Doklady Akad. Nauk SSSR **240** (1978) 1021–1024

[160] Venkov, A. B.: The Artin-Takagi formula for Selberg's zeta-function and the Roelcke conjecture. Soviet Math. Dokl. **20** (1979) 745–748; transl. from Doklady Akad. Nauk SSSR **247** (1979) 540–543

[161] Venkov, A. B.: Spectral theory of automorphic functions, the Selberg zeta-function, and some problems of analytic number theory and mathematical physics. Russ. math. Surveys **34**, No. 3 (1979) 79–153; transl. from Uspehi mat. Nauk **34**, No. 3 (207) (1979) 69–135

[161a] Venkov, A. B.: On the remainder term in the Weyl-Selberg asymtotic formula. (Russ.) Zapiski naučn. Sem. Leningrad. Otd. mat. Inst. Steklov **91** (1979) 5–24

[161b] Venkov, A. B.: Zeroes of ζ- and L-functions of imaginary quadratic fields and eigenvalues of PSL (2, **Z**)-automorphic Laplacian. (Russ.) Doklady Akad. Nauk SSSR **250** (1980) 528–531

[162] Venkov, A. B.; Kalinin, V. L.; Faddeev, L. D.: A nonarithmetic derivation of the Selberg trace formula. J. Soviet Math. **8** (1977) 171–199; transl. from Zapiski naučn. Sem. Leningrad. Otd. mat. Inst. Steklov **37** (1973) 5–42

[163] Venkov, A. B.; Skriganov, M. M.: Weyl's formula in the spectral theory of automorphic functions. Functional Anal. Appl. **13** (1979) 54–55; transl. from Funkcional'. Analiz Priloženia **13** No. 1 (1979) 67–68

[164] Venkov, A. B.; Vinogradov, A. I.: The asymptotic distribution of the norms of hyperbolic classes and spectral characteristics of cusp forms of weight zero for a Fuchsian group. Soviet Math. Dokl. **19** (1978) 1545–1548; transl. from Doklady Nauk SSSR **243** (1978) 1373–1376

[165] Vignéras, M.-F.: Exemples de sous-groupes discrets non conjugués de PSL (2, **R**) qui ont même fonction zêta de Selberg. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. **A 287** (1978) 47–49

[166] Vignéras, M.-F.: Arithmétique des Algèbres de Quaternions. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980. = Lecture Notes in Mathematics, Vol. 800

[167] Vignéras, M.-F.: L'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Selberg de la groupe modulaire PSL (2, **Z**). Astérisque **61** (1979) 235–249

[168] Vishik, S. M.: Analogs of Selberg's ζ-function. Functional Anal. Appl. **9** (1975) 256–257; transl. from Funkcional'. Analiz Priloženia **9** No. 3 (1975) 85–86

[169] Wallach, N.: On the Selberg trace fromula in the case of compact quotient. Bull. Amer. math. Soc. **82** (1976) 171–195

[170] Warner, G.: Selberg's trace formula for nonuniform lattices: The R-rank one case. Studies in Algebra and Number Theory. Rota, G.-C. (ed.). New York: Academic Press 1979. = Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol. 6, pp. 1–142

[171] Weil, A.: Sur les „formules explicites" de la théorie des nombres premiers. Comm. Sém. Math. Univ. Lund (= Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.), Tome supplémentaire, dédié à Marcel Riesz (1952) 252–265

[172] Weil, A.: Sur les formules explicites de la théorie des nombres. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **36** (1972) 3–18. = Math. USSR Izvestija **6** (1972) 1–17

[173] Weyl, H.: Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen. Math. Ann. **71** (1912) 441–479. (= Weyl, H.: Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, 393–430. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1968)

[174] Weyl, H.: Ramifications, old and new of the eigenvalue problem. Bull Amer. math. Soc. **56** (1950) 115–139. (= Weyl, H.: Gesammelte Abhandlungen, Bd. IV, 432–456. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1968)

[175] Wolfe, W.: The asymptotic distribution of lattice points in hyperbolic space. J. functional Anal. **31** (1979) 333–340

[176] Wolpert, S.: The eigenvalue spectrum as moduli for compact Riemann surfaces. Bull. Amer. math. Soc. **83** (1977) 1306–1308

[177] Wolpert, S.: The length spectra as moduli for compact Riemann surfaces. Ann. of Math., II. Ser. **109** (1979) 323–351

[178] Wolpert, S.: The eigenvalue spectrum as moduli for flat tori. Trans. Amer. math. Soc. **244** (1978) 313–321

[179] Wolpert, S.: An asymptotic formula for the Taylor coefficients of automorphic forms. Technical Report TR 78–49. Department of Mathematics, Univ. of Maryland, College Park, Maryland 1978

[180] Wolpert, S.: On the variational theory of the Laplacian for hyperbolic surfaces. Technical Report TR 79–18. Department of Mathematics, Univ. of Maryland, College Park, Maryland 1979

[181] Yamada, T.: On the distribution of the norms of the hyperbolic transformations. Osaka J. Math. **3** (1966) 29–37
[182] Yau, S.-T.: Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold. Ann. sci. École norm. sup., IV. Sér. **8** (1975) 487–507
[183] Zagier, D.: Traces des opérateurs de Hecke. Séminaire Delange – Pisot – Poitou (Théorie des nombres) 17e année, 1975/76, exposé n° 23, 12 pp.
[184] Zagier, D.: The Eichler-Selberg trace formula on $SL_2(\mathbf{Z})$. In: Lang, S.: Introduction to modular forms, 44–54. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1976. Correction in: Modular Functions of One Variable VI. Proceedings International Conference, Bonn 1976. Serre, J.-P.; Zagier, D. B. (eds.). Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1977. = Lecture Notes in Mathematics, Vol. 627, pp. 171–173
[185] Zagier, D.: Eisenstein series and the Riemann zeta-function. Prepr. 1980
[186] Zagier, D.: Eisenstein series and the Selberg trace formula, I. Prepr. 1980

Prof. Dr. Jürgen Elstrodt
Mathematisches Institut der
Universität Münster
Roxeler Straße 64
D-4400 Münster

(*Eingegangen: 10. 3. 1980*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
83 (1981) 78–83

Corrections and Addenda to Our Paper: Abel's Theorem and Webs[1])

S. S. Chern*, Berkeley, and P. Griffiths**, Cambridge, MA

We regret to report that our paper in question contains two essential errors:

1. The lemmas on pp. 85, 86 are incorrect, because of a faulty elementary argument. The divisibility in question is true only under an additional hypothesis, which we will call normality and which will be defined below.

2. The proof of (4.34) contains a gap, which we are not able to fill. Following Bol, we will complete the proof of our main theorem by an algebraic-geometric argument, which will be given below. Thus our main theorem is valid with the additional condition of normality. For completeness we will state it as follows (cf. p. 18):

Consider a normal d-*web of codimension* 1 *in* $\mathbf{R}^n$ *of maximum rank* $\pi(d, n)$. *Suppose that* $n \geqslant 3$, $d \geqslant 2n$. *Then the web is linearizable, i.e., equivalent to a web whose leaves are hyperplanes.*

Our paper is in order with the deletion of the lemmas on pp. 85, 86 and §IV B. We wish to thank C. Im Hof for detecting the second error, which led us to a reexamination of the paper and to the need of the condition of normality. In the following we will follow the structure of the original paper and the notations:

III B. iv. *Divisibility for normal webs.* By (3.81) and (3.90) we introduced $A_{i3,n+1}, \ldots, A_{i3,2n-3}$ (the inequality $1 \leqslant D \leqslant n+2$ under the summation sign should be deleted.). By (3.90) we derive immediately

$$(3.101)\quad A_{i3,n+\rho} = A_{i,\rho+3,n} - 2\, t_i\, A_{i,\rho+2,n} + t_i^2\, A_{i,\rho+1,n}, \qquad 1 \leqslant \rho \leqslant n-3\,.$$

Since by (3.70) $A_{i\alpha\gamma}$ is of degree $\alpha + n - 1$ in t_i, it follows from the above formula (3.101) that $A_{i3,n+\rho}$ is of degree $n + \rho + 2$ in t_i.

Under a change of the harmonic connection (3.86) the $A_{i\alpha\gamma}$ are transformed according to (3.92), which gives

$$(3.102)\quad A^*_{i\alpha n} = A_{i\alpha n} + t_i^\beta h_{\beta,\alpha+n} - (\alpha-1)\, t_i^{\alpha+\beta-2}\, h_{\beta,n+2} + (\alpha-2)\, t_i^{\alpha+\beta-1}\, h_{\beta,n+1}\,.$$

[1]) Jber. d. Dt. Math.-Verein. **80** (1978) 13–110.

* Research partially supported by NSF Grant MCS 77-23579.
** Research partially supported by NSF Grant MCS 78-07348.

0012–0456/81/02 0078–06$01.20/0

It follows that

$$(3.103)\quad A^*_{i3,n+\rho} = A_{i3,n+\rho} + t_i^\beta h_{\beta,n+\rho+3} - 2\,t_i^{\beta+1}h_{\beta,n+\rho+2} + t_i^{\beta+2}\,h_{\beta,n+\rho+1},\quad 1 \leqslant \rho \leqslant n-3\,.$$

Thus only the terms of degree $\leqslant n+2$ in t_i can be modified by a change of the harmonic connection.

Definition *The web is called normal, if all* A_{i3s}, $1 \leqslant s \leqslant 2n-3$, *are of degrees* $\leqslant n+2$ *in* t_i. *From now on we suppose our web normal.*

Before we prove the divisibility on normal webs, we wish to make a remark on the best harmonic connection. We think there is a harmonic connection simpler than the one described in Proposition (3.87). It is given by

(3.104) **Proposition** (New Best Harmonic Connection) *There is a unique symmetric, harmonic connection such that*

$$(3.105a)\quad A_{i3\gamma} = 0,$$

$$(3.105b)\quad A_{i3,n+\rho} = p_\rho\ t_i^{n+1} + q_\rho\ t_i^{n+2},\qquad 1 \leqslant \rho \leqslant n-3\,.$$

In fact, by Lemma (3.94), conditions (3.105a) leave only the $h_{\beta\lambda}$, $n+4 \leqslant \lambda \leqslant 2n$, undetermined. By keeping (3.105a), we can suppose

$$h_{\beta\lambda} = 0,\qquad 2 \leqslant \lambda \leqslant n+3\,.$$

The lemma then follows from (3.103).

By (3.57) and (3.61) the intersection $\mathbf{P}^{n-2}(x,\sigma)$ of two neighboring $\mathbf{P}^{\lambda-n-1}(x)$'s is spanned by

$$(3.106)\quad Y_\lambda = \sum_i \frac{t_i^\lambda}{\Delta_i} Z_i,\qquad 2 \leqslant \lambda \leqslant 2n\,,$$

where

$$(3.107)\quad \Delta_i = \Sigma\ y^\alpha t_i^\alpha$$

was previously denoted by Δ (cf. (3.63)). We wish to express the condition that $\mathbf{P}^{n-2}(x,\sigma)$ is fixed, i.e.,

$$(3.108)\quad dY_\lambda \equiv 0,\quad \operatorname{mod} Y_2, \ldots, Y_{2n}\,.$$

The left-hand side is given by

$$(3.82)\quad \frac{dZ}{ds} = \sum_i \left\{ -k^\rho T_{i\rho} + \frac{1}{\Delta_i} k^{\alpha+\beta}(t_i^\beta T_{i\alpha\gamma} Y^\gamma + t_i^\alpha T_{i\beta\gamma} Y^\gamma) - \frac{1}{\Delta_i^2} k^\rho t_i^\rho (z^\alpha t_i^\alpha + T_{i\alpha\beta}\, y^\alpha y^\beta) \right\} Z_i$$

with

$$(3.109)\quad k^\lambda = 1,\quad k^\rho = 0,\quad \rho \neq \lambda,\qquad 2 \leqslant \lambda, \rho \leqslant 2n\,.$$

With the values (3.109) for k^ρ the first two terms of (3.82) can be written

(3.110) $\Sigma \frac{1}{\Delta_i} E_{\lambda\alpha\gamma} y^\gamma Z_i$,

where

(3.111) $E_{\lambda\alpha\gamma} = -T_{i\lambda} t_i^\gamma + T_{i,\,\alpha+\gamma} t_i^{\lambda-\alpha} + T_{i,\lambda-\alpha+\gamma} t_i^\alpha$.

As we are expressing the condition (3.108), it suffices, by (3.106), to evaluate $E_{\lambda\alpha\gamma}$ mod $t_i^2, \ldots, t_i^{2n}$. Since our web is normal, $T_{i\rho}$ is of degree $n+\rho-2$ in t_i, so that $E_{\lambda\alpha\gamma}$ is of degree $\lambda+\gamma+n-2$ in t_i.

For this purpose we set

(3.112) $P_\alpha = -\sum_{3\leqslant\rho\leqslant\alpha+n} (2\alpha-\rho)(t_i^{\alpha-\rho-1} A_{i3,\rho-2})^+$,

where $(\ )^+$ denotes the sum of terms of positive degree in t_i. (This expression differs from the same on p. 85 in that the ranges of summation are different. Notice also that the power $\alpha-\rho-1$ of t_i could be negative.) The terms in (3.112) are of decreasing degrees and P_α is of degree $\leqslant n+\alpha-2$ in t_i. The first step in the reduction is achieved by the lemma:

(3.113) $E_{\lambda\alpha\gamma} - t_i^\lambda P_\gamma \equiv 0, \quad \text{mod } t_i^2, \ldots, t_i^{2n}$.

This is shown by direct inspection. For simplicity we will write

(3.114) $A_{i3s} = A_s$.

Since α is a summand of λ, there are two cases: 1) $2\leqslant\lambda\leqslant n+1$, in which case we suppose $\lambda=\alpha+1$; 2) $n+1\leqslant\lambda\leqslant 2n$, where we suppose $\lambda = n+\alpha$.

Consider first the case $\lambda=\alpha+1$. The left-hand side of (3.113) is of degree $\alpha+\gamma+n-1$. If the latter is $\leqslant 2n$, there is nothing to prove. Hence we suppose

$$\alpha+\gamma\geqslant n+2.$$

Each term of P_γ is a numerical multiple of

$$(t_i^{\gamma-\rho-1} A_{\rho-2})^+.$$

Its degree is $\leqslant n+\gamma-\rho+1$, for, the web being normal, $A_{\rho-2}$ is of degree $\leqslant n+2$ in t_i. To prove (3.113) it suffices to restrict to the ρ such that

$$\alpha+1+n+\gamma-\rho+1\geqslant 2n+1$$

or

$$\rho\leqslant\alpha+\gamma-n+1.$$

It follows that

$$t_i^{\alpha+1} P_\gamma \equiv t_i^{1+\alpha}\{(3-2\gamma)(t_i^{\gamma-4}A_1)^+ + \ldots + (\alpha+\gamma-n+1-2\gamma)(t_i^{n-2-\alpha} A_{\alpha+\gamma-n-1})^+\}$$

On the other hand, we have, by (3.111) and (3.81),

$$E_{\alpha+1,\alpha\gamma} = (3-2\gamma)\, t_i^{\alpha+\gamma-3} A_1 + (4-2\gamma)\, t_i^{\alpha+\gamma-4} A_2 + \ldots + (\alpha+\gamma-n+1-2\gamma)\, t_i^{n-1} A_{\alpha+\gamma-n-1}.$$

Clearly this expression is congruent to $t_i^{\alpha+1} P_\gamma$.

The second case $\lambda = n + \alpha$ can be treated in a similar way. However, it will not be necessary, for $Y_{1+\alpha}$ already span $\mathbf{P}^{n-2}(x, \sigma)$, the $Y_2, \ldots, Y_{2n}$ being linearly dependent.

Using (3.113) and (3.82), the condition (3.108) becomes

$$(3.115) \quad \sum_i \frac{t_i^\lambda}{\Delta_i^2} \{z^\alpha t_i^\alpha + T_{i\alpha\beta}\, y^\alpha y^\beta - (P_\alpha y^\alpha)(t_i^\beta y^\beta)\}\, Z_i = 0\,.$$

The sum of the second and third terms in this expression is of the form $\widetilde{Q}_{i\alpha\beta} y^\alpha y^\beta$, where

$$(3.116) \quad 2\,\widetilde{Q}_{i\alpha\beta} = 2\, T_{i\alpha\beta} - P_\alpha t_i^\beta - P_\beta t_i^\alpha\,.$$

We wish to prove the lemma:

(3.117) **Lemma** $\widetilde{Q}_{i\alpha\beta}$ *is a linear combination of* t_i^γ.

For this purpose we make use of the new best harmonic connection in (3.104). Then

$$T_{i\lambda} = 0, \qquad 2 \leqslant \lambda \leqslant n+3,$$

$$T_{i\lambda} = -(\lambda - n - 3)\, q_1 t_i^{\lambda-2} - \{(\lambda - n - 3)\, p_1 + (\lambda - n - 4)\, q_2\}\, t_i^{\lambda-3} - \ldots - p_{\lambda-n-3}\, t_i^{n+1}, \qquad \lambda \geqslant n+4.$$

By (3.112),

$$P_1 = P_2 = 0,$$

$$t_i^\beta P_\alpha \equiv (n + 3 - 2\alpha)\, q_1\, t_i^{\alpha+\beta-2} + \{(n + 3 - 2\alpha)\, p_1 + (n + 4 - 2\alpha) q_2\} t_i^{\alpha+\beta-3} + \ldots + \{(\alpha + \beta - 1 - 2\alpha)\, p_{\alpha+\beta-n-3} + (\alpha + \beta - 2\alpha)\, q_{\alpha+\beta-n-2}\}\, t_i^{n+1},$$
$$\bmod t_i^\gamma.$$

From these expressions the statement on $\widetilde{Q}_{i\alpha\beta}$ follows immediately.

From the lemma (3.117) we get the equation of paths following the formula (3.85).

IV B'. Completion of the proof of linearization

This section replaces IV B. To complete the proof of our main theorem we will need some results on algebraic geometry. We begin with the lemma:

(4.101) **Lemma** *Suppose that in* $\mathbf{P}^N$ *we have a family* $\{C\}$ *of* ∞^n *rational curves, any pair of which meet in* $n-1$ *points. Then these curves lie on an algebraic surface.*

P r o o f. We assume that a general curve C has degree δ. Since the normal bundle $N \to C$ is a quotient of the ample bundle $T(\mathbf{P}^N)\,|\,C$, its Grothendieck decomposition has only factors $O_C(k)$ where $k > 0$. It follows that $H^1(C, N) = 0$, so that the Hilbert scheme of curves of degree δ is reduced and smooth at C. We denote by Ξ the irreducible component of the Hilbert scheme containing the curves of our family, and for each curve C we let $\Xi_C \subset \Xi$ be the set of curves that meet C in at least $n-1$ points. Clearly Ξ_C is an algebraic subvariety of Ξ, and therefore so is the intersection

$$\Xi_0 = \bigcap_C \Xi_C$$

By assumption $\dim \Xi_0 \geqslant n$. We choose a general irreducible algebraic curve T in Ξ_0 and denote by $\{C_t\}_{t\in T}$ the corresponding family of ∞^1 rational curves in P^N. Then

$$S = \bigcup_{t\in T} C_t$$

is an irreducible algebraic surface, and each of our given curves C meets S in infinitely many points. Hence they all lie on S. ■

We will now describe the algebraic surface S.

(4.102) S *is a regular algebraic surface.*

Proof. Since the tangents to the ∞^n curves $\{C\}$ span the tangent plane to S at a general point, any holomorphic differential would have to restrict to a non-zero holomorphic differential on $C \cong P^1$.

(4.103) *The* ∞^n *rational curves are contained in a linear system* $|L|$.

Proof. This is a property of an algebraic family of curves on any regular algebraic surface.

(4.104) *The linear system* $|L|$ *has dimension equal to* n.

Proof. Let $C \cong \mathbf{P}^1$ be a curve in our system. Since any two curves meet in $n-1$ points, we have

$$L|C \cong O_C(n-1).$$

From the exact cohomology sequence

$$0 \to O_S \to O_S(L) \to O_C(n-1) \to 0$$

and $h^1(O_S) = 0$ we obtain

$$0 \to C \to H^0(O_L(L)) \to C^n \to 0.$$

This implies (4.104).

The linear system $|L|$ clearly has no fixed component, and it induces a rational mapping

(4.105) $\varphi_L : S \to \mathbf{P}^n$.

(4.106) *The mapping* (4.105) *is birational onto its image.*

Proof. The proof of (4.104) shows that $|L|$ has no base points. Hence φ_L is a holomorphic mapping of S onto a non-degenerate surface S_0 of some degree δ in $\mathbf{P}^n$. Since

$$\delta \cdot (\text{degree of } \varphi_L) = n-1, \qquad \delta \geqslant n-1,$$

we infer that φ_L is birational.

We now apply the above results to the family $\{E(x)\}$ of rational curves in the Poincare space $\mathbf{P}^{\pi-1}$. Indeed, the condition "$K^\rho = 0$ in (3.62)" on line 7 of page 80 means that the axis $\mathbf{P}^{n-2}$ is pointwise fixed along a path $\{x(t)\}$. Since any pair of points x,x' may be joined by a path, the condition in the lemma (4.101) is fulfilled. This gives

(4.107) *The* ∞^n *rational curves* $E(x)$ *lie on a two-dimensional surface* $S \subset \mathbf{P}^{\pi-1}$. *The paths* $\{x(t)\}$ *are characterized by the property: As we move along* $x(t)$, $n-1$ *points of* $E(x(t))$ *remain fixed.*

We also have:

(4.108) *The surface* $S \subset \mathbf{P}^{\pi-1}$ *is birational to a surface* $S_0 \subset \mathbf{P}^n$ *of minimal degree* $n-1$. *Under this mapping the rational curves* $E(x)$ *are in a one-to-one correspondence with the hyperplane sections* $H(x) \cap S_0$, $H(x) \in \mathbf{P}^{n*}$.

By (4.107) and (4.108) the proof of the main theorem can be completed as follows: The mapping

(4.109) $U \to \mathbf{P}^{n*}$

given by

$$x \to H(x)$$

has the defining property

$$E(x) = H(x) \cap S_0.$$

It follows that the paths $\{x(t)\}$ are mapped to pencils of hyperplanes in such a way that the $n-1$ fixed points correspond to the intersection $B \cap S_0$ where $B \cong \mathbf{P}^{n-2}$ is the base of the pencil. Thus the mapping (4.109) maps our path geometry to the flat one on $\mathbf{P}^{n*}$, and this completes the proof of our main theorem.

Before concluding we cannot refrain from mentioning what we consider to be the fundamental problem on the subject, which is to determine the maximum rank non-linearizable webs. The strong conditions must imply that there are not many. It may not be unreasonable to compare the situation with the exceptional simple Lie groups. Perhaps the error in 1. makes our subject more interesting.

Prof. S. S. Chern
Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94720, USA

Prof. Phillip Griffiths
Harvard University
Cambridge, MA 02138, USA

(*Eingegangen: 2. 5. 1980*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
83 (1981) 84–95
AMS subject classification: 01 A 70

Felix Bernstein*)

M. Frewer, Bayreuth

Felix Bernstein wurde am 24. 2. 1878 als Sohn von Julius Bernstein und dessen Frau Sophie (geb. Levy) in Halle a. d. Saale geboren. Sein Vater, seit 1873 Ordinarius für Physiologie an der Universität Halle, war einer der letzten Schüler von Du Bois-Reymond und einer der Pioniere auf dem Gebiet der Elektrobiologie; sein Großvater, Aaron Bernstein, Ehrendoktor der Universität Tübingen, war ein vielseitiger politischer und naturwissenschaftlicher Schriftsteller. Der als Autor des Revisionismus bekannte Sozialdemokrat Eduard Bernstein war ein Onkel von Felix Bernstein.

Felix Bernstein wurde also eine vielseitige Veranlagung in die Wiege gelegt, die sich in seinem vielseitigen und ideenreichen wissenschaftlichen Werk und in seinem weiten Interessenfeld widerspiegelt.

Schon als Gymnasiast nahm er in Halle an Seminaren Georg Cantors teil. So wurde er in die Mengenlehre eingeführt zu einer Zeit, als sie noch nicht allgemein bekannt und anerkannt war. Beim Korrekturlesen einer Cantorschen Veröffentlichung fand er im Winter 1896/97 den Beweis des nach ihm benannten Äquivalenzsatzes.

Hierbei bildete den Ausgangspunkt die folgende vollständige Disjunktion:

Seien M, N beliebige Mengen. „$M \sim N$" bedeute M ist gleichmächtig wie N, M ist äquivalent N. Es tritt genau einer der folgenden 4 Fälle ein:

(1) $\exists\ N' \subseteq N : N' \sim M$ und $\nexists\ M' \subseteq M : M' \sim N$;
in Zeichen: $N > M$; in Worten: N größer als M;

(2) $\exists\ M' \subseteq M : M' \sim N$ und $\nexists\ N' \subseteq N : N' \sim M$;
in Zeichen: $M > N$; in Worten: M größer als N;

(3) $\exists\ M' \subseteq M : M' \sim N$ und $\exists\ N' \subseteq N : N' \sim M$;

(4) $\nexists\ M' \subseteq M : M' \sim N$ und $\nexists\ N' \subseteq N : N' \sim M$;
M und N heißen dann nicht vergleichbar. ([2], S. 17)

Cantor hatte diese Disjunktion selbst nicht veröffentlicht. Schoenflies berichtete, daß er von ihr zuerst durch einen Brief Cantors erfuhr und daß sie in Göttingen wie eine Offenbarung wirkte und von Hand zu Hand wanderte ([144], S. 102).

Der Bernsteinsche Äquivalenzsatz betrifft den Fall (3):

Satz *Zwei Mengen* M *und* N, *von denen jede einer Teilmenge der anderen äquivalent ist, sind selbst äquivalent. Also gilt im Fall* (3): $M \sim N$.

*) Auszug aus meiner Diplomarbeit „Das wissenschaftliche Werk Felix Bernsteins"; entstanden am Institut f. Mathematische Statistik der Universität Göttingen anläßlich des 100. Geburtstages von Bernstein am 24. 2. 1978.

0012–0456/81/02 0084–12$02.40/0

B e w e i s : Nach Voraussetzung gilt: $\exists\ M' \subset M : M' \sim N$ und $\exists\ N' \subset N : N' \sim M \Rightarrow \exists\ M'' \subset M' \subset M : M'' \sim N' \sim M$

Wir haben zu zeigen: $M'' \subset M' \subset M$ und $M'' \sim M \Rightarrow M' \sim M$.

Diese Aussage ist als S a t z C von C a n t o r bekannt; er hat ihn 1895 ohne Beweis formuliert ([138], S. 484).

Wir setzen: $M'' := P,\ M' - M'' := Q,\ M - M' := R$, OE $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$, $R \neq \emptyset$

In jedem anderen Fall ist die Behauptung klar. Nach Voraussetzung existiert eine umkehrbare eindeutige Abbildung $f : P \cup Q \cup R \rightarrow P$.

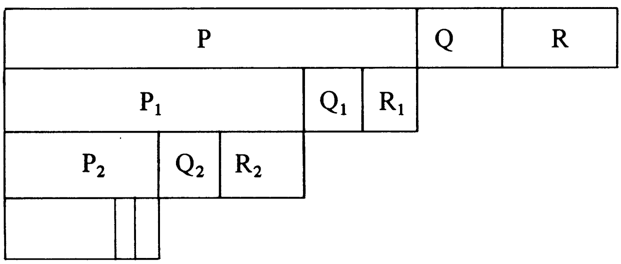
Wir erhalten:

$P\ = f(P \dot{\cup} Q \dot{\cup} R) = f(P) \dot{\cup} f(Q) \dot{\cup} f(R) := P_1 \dot{\cup} Q_1 \dot{\cup} R_1$

$P_1 = f(P_1 \dot{\cup} Q_1 \dot{\cup} R_1) = f(P_1) \dot{\cup} f(Q_1) \dot{\cup} f(R_1) := P_2 \dot{\cup} Q_2 \dot{\cup} R_2$

$P_2 = f(P_2 \dot{\cup} Q_2 \dot{\cup} R_2) = f(P_2) \dot{\cup} f(Q_2) \dot{\cup} f(R_2) := P_3 \dot{\cup} Q_3 \dot{\cup} R_3$ usw.

wobei $P_1 := f(P)$, $P_2 := f(P_1)$, $P_3 := f(P_2), \ldots$ (u. analog für die anderen Mengen) gesetzt ist. Es gilt $P \supset P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$



Sei $\quad P_\omega := \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} P_i;\ P_0 := P$.

$\forall\ p \in P$ gilt: entweder $p \in P_\omega$ oder $\exists\ n \in \mathbf{N} : p \in P_{n-1} - P_n$

$$\Rightarrow \quad P = P_\omega \ \dot{\cup} \ \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (P_{n-1} - P_n) = P_\omega \ \dot{\cup} \ \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (Q_n \dot{\cup} R_n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad P &= P_\omega \dot{\cup} Q_1 \dot{\cup} R_1 \dot{\cup} Q_2 \dot{\cup} R_2 \dot{\cup} \ldots \\ &\sim P_\omega \dot{\cup} Q \dot{\cup} R_1 \dot{\cup} Q_1 \dot{\cup} R_2 \dot{\cup} \ldots \\ &= P \dot{\cup} Q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad P \dot{\cup} Q \sim P \sim P \dot{\cup} Q \dot{\cup} R$$ q.e.d.

Der Ä q u i v a l e n z s a t z hat eine interessante Geschichte. Cantor hatte ihn – zum Teil in seiner Umformulierung als Satz C – bereits in mehreren Veröffentlichungen ([136], S. 391 f; [137], S. 387 f; [138]) und in seiner Korrespondenz mit Dedekind (1882) ([140], S. 55–59) ohne Beweis formuliert.

Auf der Frankfurter Naturforscherversammlung im Herbst 1896 trug Schröder einen (lückenhaften) Beweis des Äquivalenzsatzes vor ([139], S. 471) – beruhend auf langwierigen Logikkalkülen. Er wurde 1898 veröffentlicht [145].

Im Winter 1896/97 fand Bernstein seinen Beweis und trug ihn 1897 in einem Seminar Cantors in Halle vor ([139], S. 471). Cantor teilte ihn 1897 auf dem ersten Internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich Borel mit.

In Borels „Leçons sur la théorie des fonctions" wurde er zum ersten Mal veröffentlicht ([134], S. 104–107) – als erster einwandfreier Beweis des Äquivalenzsatzes ([139], S. 472), was die Benennung nach Bernstein rechtfertigt.

Im Nachlaß Dedekinds ([141], S. 447) wurde ein unveröffentlichter, vollständiger Beweis des Satzes C gefunden, datiert vom 11. 7. 1887. Anknüpfend an ein Gespräch mit Bernstein 1897 in Bad Harzburg konstruierte Dedekind 1899 in einem Brief an Cantor einen neuen ähnlichen Beweis ([141], S. 448). „Offenbar hatte er vergessen, daß es sich um die Rekonstruktion eines alten Beweises handelte" (E. Noether) ([141], S. 448).

In Unkenntnis von Dedekinds Beweis ([139], S. 451) gab ihn Zermelo 1908 in einer neuen Formulierung wieder ([146], S. 271f.).

Nach seinem Abitur Ostern 1896 studierte Bernstein in Pisa und Rom Philosophie, Archäologie und vor allem Kunstgeschichte, später in München, Halle, Berlin und Göttingen Mathematik. Als einer der ersten Doktoranden Hilberts setzte er seine Studien der Mengenlehre fort und beschäftigte sich mit Fragen aus der Zahlentheorie.

In seiner Dissertation „Untersuchungen aus der Mengenlehre" [2] (1901) fand er hinreichende Bedingungen für die Vergleichbarkeit zweier Mengen, berechnete die Mächtigkeit von verschiedenen Teilmengen der Potenzmenge des Kontinuums und bewies die wichtige Mächtigkeitsrelation $\aleph_1 \leqslant c$ (mit $\aleph_1$: = Mächtigkeit der Menge aller Ordnungstypen von wohlgeordneten abzählbaren Mengen; c: = Mächtigkeit des Kontinuums [0,1]).

Mit diesen Ergebnissen sowie in zwei weiteren Aufsätzen ([12]; [118]) lieferte er aufschlußreiche Beiträge zur Untersuchung des Kontinuumproblems: „Existiert eine Mächtigkeit m, so daß $|\mathbf{N}_0| < m < |[0,1]|$?" Er konnte damit zwar nicht zu seiner Lösung beitragen, aber darauf hinweisen, daß die bisherigen Lösungsversuche mit Hilfe von Mächtigkeitsbetrachtungen vermutlich in die falsche Richtung zielten.

Einige seiner Ergebnisse erübrigten sich später mit dem Beweis des Wohlordnungssatzes von Zermelo (1904) und der axiomatischen Lösung des Kontinuumproblems durch Gödel (1938/1939) und Cohen (1963), so daß sie zwar in der damaligen Forschung, aber nicht in der heutigen Mathematik Relevanz hatten bzw. haben. Bernsteins heutzutage bekanntester Beitrag zur Mengenlehre ist der Beweis des Äquivalenzsatzes.

Nach seiner Habilitation an der Universität Halle – am 27. 4. 1903 mit einer Habilitationsschrift „Über den Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers" [3] und mit einer Antrittsvorlesung über die Kant-Laplacesche Theorie der Entstehung des Planetensystems in neuerer mathematischer Behandlung – las er dort von 1903 bis 1907 als Privatdozent zunächst ausschließlich reine Mathematik.

Während dieser Zeit veröffentlichte Bernstein mehrere kleinere Arbeiten zur Mengenlehre und zur Elementargeometrie und lieferte den Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche [15], einer seiner bedeutendsten Beiträge zur reinen Mathematik.

Satz *Unter allen Jordankurven von gegebenem Inhalt hat der entsprechende sphärische Kreis minimale Länge.*

Er bewies diesen Satz zunächst für reguläre, konvexe Jordankurven und verallgemeinerte ihn dann auf beliebige Jordankurven. Seine interessante Beweisidee wurde später u. a. dargestellt von Blaschke ([130], S. 40; [131], S. 65f.], Bonnesen ([132], S. 225) sowie Bonnesen und Fenchel ([133], S. 113).

Während Bernstein gehofft hatte, in Halle den erkrankten Cantor in der reinen Mathematik vertreten zu dürfen, wurde er gedrängt, Vorlesungen über angewandte Mathematik – Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungsmathematik – abzuhalten ([147], undatierter Brief von Bernstein an Hilbert). 1906/07 schrieb er seine ersten Aufsätze über das Gaußsche Fehlergesetz [17], [19]. Gleichzeitig beschäftigte er sich am Institut seines Vaters mit Fragen der Physiologie.

Zu dieser Zeit lehnte er das Angebot ab, mathematischer Direktor des Verbandes der öffentlichen Lebensversicherungsanstalten zu werden. Er teilte Hilbert in einem Brief mit, daß er sich zugunsten der mathematischen Forschung entschieden habe und daß er Kompensationsforderungen an die Universität Halle für diese Entscheidung für unangebracht halte, weil es um die prinzipielle Frage gehe, ob man in der Wissenschaft bleiben wolle oder nicht – ein ideales Moment, das man nicht geschäftlich ausbeuten sollte ([147], undatierter Brief von Bernstein an Hilbert). 1907 übernahm er die Leitung der mathematischen Klasse des erst 1895 begründeten ersten deutschen Seminars für Versicherungswissenschaft in Göttingen – zunächst als Privatdozent, seit 1911 als außerordentlicher Professor für mathematische Statistik und Versicherungsmathematik.

Er beschäftigte sich jedoch in seinen ersten Göttinger Dozentenjahren in Forschung sowie Lehre vorrangig mit Fragen aus der reinen Mathematik. Er hoffte zunächst weiterhin auf eine Dozentur für reine Mathematik ([147], undatierter Brief von Frau Bernstein, der Mutter von Felix Bernstein, an Hilbert). Dieses Ziel blieb ihm verwehrt.

Eine seiner bekanntesten Arbeiten aus dieser Zeit ist sein Beitrag „Zur Theorie der trigonometrischen Reihe“ [22]. Als Nebenresultat konnte er darin – unter wesentlicher Ausnutzung des Auswahlaxioms – die Existenz „total-imperfekter“ Mengen, also nicht-abzählbarer Mengen, die keinen perfekten Bestandteil enthalten, im Kontinuum nachweisen. Er ging dabei von einer gewissen Eigenschaft aus, die der Familie aller perfekten Teilmengen des Kontinuums zukommt und die später von Miller [142], [143] zu Ehren Bernsteins „p r o p e r t y B“ genannt wurde.

Hervorzuheben ist ferner sein Nachweis der Nicht-Existenz einer mittleren Bewegung der Perihele der Planetenbahnen in gewissen Spezialfällen; damit gelang es ihm mit Wahrscheinlichkeitsbestimmungen für Kettenbruchentwicklungen – u. a. einem bekannten 0-1-Gesetz ([129], S. 164–176) – zur Lösung eines physikalischen Problems beizutragen.

Im Ersten Weltkrieg wurde er aus medizinischen Gründen von der Armee freigestellt und stattdessen bei der Kriegsorganisation in Berlin beschäftigt; er war Administrator für Lederverteilung an Kriegs- und Zivilbehörden und hatte Kurse zur Ausbildung von kriegsversehrten Akademikern in Statistik abzuhalten.

Im Sommersemester 1918 wurde unter Leitung von Bernstein das Institut für Mathematische Statistik der Universität Göttingen begründet. Das Seminar für Versicherungswissenschaft blieb mit beiden Klassen in unveränderter Form bestehen. 1921 wurde für ihn auf Betreiben Hilberts ein persönliches Ordinariat für Versicherungsmathematik und Mathematische Statistik geschaffen.

Seit dieser Zeit konzentrierte sich Bernstein in Forschung und Lehre auf praxisorientierte Fragestellungen aus dem Versicherungswesen und der Humangenetik.

Außerdem beschäftigte er sich gelegentlich mit Fragen aus der mathematischen Physik. Am bekanntesten sind hier seine Beiträge zur Laplace-Transformation. Er zeigte, daß mit Hilfe der Laplace-Transformation verschiedene mathematische Probleme vereinfacht werden können. Die numerische Ermittlung der Laplace-Transformation ist mit Hilfe eines mechanischen Apparates, des „Verallgemeinerten Galtonbretts", möglich, der unter Bernsteins Anleitung am Institut für Mathematische Statistik in Göttingen konstruiert wurde [94], [95].

Die mathematische Klasse des Göttinger Seminars für Versicherungswissenschaft war stark frequentiert – zunächst weil die Studenten günstige Aussichten im Versicherungswesen erwarteten, später auch wegen der schlechten Aussichten im Gymnasiallehrerberuf. Bernstein war um eine praxisnahe Ausbildung seiner zahlreichen Schüler bemüht. Die Themen der von ihm betreuten versicherungsmathematischen Dissertationen stellen ein breites Spektrum von Fragestellungen aus verschiedenen Versicherungszweigen dar. Gelegentlich wurde er von Versicherungsgesellschaften um die Empfehlung eines seiner Schüler für eine offene Stelle gebeten.

Bernstein sammelte selbst praktische Erfahrungen auf dem deutschen Finanz- und Versicherungsmarkt: als Konstrukteur der 1919 ausgegebenen „Deutschen Sparprämienanleihe", als Reichskommissar für Anleihen unter dem Finanzminister Erzberger (1921), als Revisor bei der Göttinger Professoren, Witwen- und Waisen-Versorgungsanstalt, als Gutachter in verschiedenen Auseinandersetzungen im Versicherungswesen.

Seine Vorlesungen hielt er im Stil des Lehrbuchs „Versicherungsmathematik" von Broggi, das er ins Deutsche übersetzt hatte [135].

Der Schwerpunkt seiner Forschungsarbeit in der Versicherungsmathematik lag nicht in der Ausweitung ihrer Theorie, sondern in der Anwendung ihrer Ergebnisse auf verschiedene Versicherungszweige. Insbesondere war er an der Hinterbliebenen-Versorgung und der Risiko-Absicherung in der Lebensversicherung interessiert. Auf eine mathematische Begründung seiner Erörterungen verzichtete er im allgemeinen, oder er beauftragte seine Diplomanden oder Doktoranden mit ihrer Durchführung.

Ihn interessierte die Risikoerfassung nicht nur mathematisch, sondern auch biologisch. Unter seiner Anleitung fanden seine Schüler Ruth Heidemann und Heinz Steinhaus, daß die Lebenserwartung eines Menschen, also sein zu versicherndes Risiko, vom Grad seiner Alterssichtigkeit abhängig ist. Mit diesen Untersuchungen, die er später in den USA mit Erhebungen von Familienmaterial und Beobachtungen des individuellen Verlaufs der Alterssichtigkeit fortsetzte, leistete er den ersten systematischen Beitrag zur Erfassung des biologischen Alters eines Menschen und erwarb sich damit große Verdienste in der Gerontologie.

Bernstein bot außer Vorlesungen über Versicherungsmathematik regelmäßig Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik an. Die klassischen Konzepte der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Czuber und der Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung von Gauß und Helmert spielten darin eine große Rolle. An der in dieser Zeit vor allem in den USA von Fisher, E. S. und K. Pearson, Neyman u. a. vorangetriebenen Forschung in der Mathematischen Statistik beteiligte er sich nicht; er bediente sich auch nur sehr selten in seinen statistischen Material-Auswertungen der von ihnen entwickelten Schätz- und Testverfahren.

Sein Ziel war es vielmehr, der Mathematischen Statistik, die zu seiner Zeit in Deutschland noch keine große Bedeutung hatte, immer neue Anwendungsgebiete zu erschließen, um sie zu einem ebenso wichtigen Bindeglied zwischen Mathematik und Praxis zu entwickeln, wie es die theoretische Physik zwischen Mathematik und Experimentalphysik bildete. Aus diesem Ziel erklärt sich sein Hang zu spektakulären Problemen, z. B. die Schätzung der Lebenserwartung aus dem Grad der Alterssichtigkeit, sein Versuch einer Rassenanalyse aufgrund der Tonlage der menschlichen Singstimme und dem Drehsinn des menschlischen Kopfhaarwirbels, seine Krebs-Erbgangshypothese.

Er durchsuchte ständig die „Biometrika“ und andere Zeitschriften nach neuen Beispielen und zeichnete sich durch das schnelle Erfassen der den Problemen zugrunde liegenden Strukturen und durch originelle Lösungswege aus. Diese seine Arbeitsweise prägte auch den Stil seiner Vorlesungen. Er war nicht an systematisierten theoretischen Ausführungen interessiert, sondern orientierte sich stark an Beispielen und ließ sich von seiner Intuition leiten.

Da man um sein Physiologie-Studium in Halle wußte, wurde Bernstein von Mitgliedern der medizinischen Fakultät der Universität Göttingen häufig um die statistische Auswertung ihrer Versuche gebeten. Die Humangenetik wurde das wichtigste Anwendungsgebiet seiner statistischen Methoden, in dem er dann mit der Klärung des ABO-Blutgruppen-Erbgangs und mit seinen Beiträgen zur formalen Genetik seine größten Erfolge errang.

Bernsteins wichtigste Beiträge zur formalen Genetik sind seine Korrektur eines durch Familienauslese bei rezessiven Erbgängen verursachten Fehlers mittels der Bernsteinschen a priori-Methode, an der sich eine polemische Auseinandersetzung mit Weinberg und anderen Autoren entzündete, und seine Produkt-Methode zum Test auf Koppelung bzw. Unabhängigkeit zwischen zwei Genen. Während es sich bei dem ersten (nur) um eine sorgfältige Erwartungswertberechnung handelt, ist der zweite ein Beispiel dafür, wo er mit Hilfe mathematischer Strukturierung und Methoden ein Problem, nämlich den Koppelungsnachweis, lösen konnte, das bis dahin den Genetikern unlösbar erschien.

Neben diesen zwei wichtigen Beiträgen, als deren Autor er heute noch bekannt ist, hat er noch mehrere andere Fragestellungen (bezüglich Auslesefehlern oder Abweichungen vom Hardy-Weinberg-Modell) behandelt.

Schon bald kannte er den neuesten Stand der internationalen genetischen Forschung. 1929 trug er in seiner „Variations- und Erblichkeitsstatistik“ [67], dem ersten Band des „Handbuch der Vererbungswissenschaft“ von Baur und Hartmann, die wichtigsten Ergebnisse anderer Autoren zusammen und ergänzte sie durch viele eigene Ideen. Dieses Buch ist ein typisches Beispiel seiner stark von seiner Intuition und vom groben Skizzieren erfaßter Gedankengänge geprägten Arbeits- und Vortragsweise.

Besonders umfangreich, aber trotzdem nicht sehr bekannt, sind seine – oben schon erwähnten – Arbeiten über die Tonlage der menschlichen Singstimme. Materialerhebungen in Deutschland, Italien, Rumänien und in den USA wiesen die Singstimme als ein Rassencharakteristikum mit einem monomeren Erbgang aus. Während die Rassendifferenzierung heute als erwiesen gilt, wurden Widersprüche zu seiner Erbgangshypothese gefunden.

Bernsteins bedeutendstes Anwendungsbeispiel ist seine Klärung des ABO-Blutgruppen-Erbgangs (1924) mit Hilfe populationsgenetischer Methoden. Die ABO-Blutgruppen haben eine so große Bedeutung vor allem in der Medizin und in der Anthropologie, daß seine umfangreichen Arbeiten auf diesem Gebiet sein wohl bekanntestes wissenschaftliches Werk sind. Neben der Widerlegung der bis dahin für richtig gehaltenen dihybriden Erbgangshypothese und der Aufstellung und immer weiter reichenden Begründung seiner Hypothese multipler Allelie fand er 1925 Schätzfunktionen für die Allelhäufigkeiten und verbesserte sie 1930 zu Näherungslösungen der Maximum-Likelihood-Gleichung. Beide Schätzfunktionen werden heute noch häufig angewandt.

Im Sommersemester 1928 und Sommersemester 1929 arbeitete Bernstein auf Einladung der Long Island Biological Association im Laboratorium der Gesellschaft in Cold Spring Harbor.

Am 1. 12. 1932 reiste er zum dritten Mal in die USA, zunächst um dort für 4 Monate Gastvorlesungen zu halten. Während dieser Reise beschloß er, in den USA zu bleiben – aufgrund seiner Entlassung im Jahre 1933.

Er weilte zunächst als Gastprofessor an der Columbia University in New York, dann als Professor für Biostatistik am zahnärztlichen und medizinischen Institut der Universität New York und schließlich als Dozent an der Universität Syracuse (im Staat New York).

1949, inzwischen als Professor emeritus der Universität Göttingen wieder eingesetzt, arbeitete er als Fulbright-Professor des US State Department an dem von Gini geleiteten Statistik-Institut der Universität Rom.

Nach seiner Emigration aus Deutschland veröffentlichte Bernstein nur noch wenige wissenschaftliche Aufsätze, u. a. weil ihm die finanziellen Mittel für umfangreiche Materialerhebungen in den USA fehlten.

Die letzten Jahre seines Lebens verbrachte Bernstein vor allem in Rom, Freiburg und in der Schweiz. Am 3. 12. 1956 verstarb er in Zürich.

Mit ihm schied ein vielseitiger, weltoffener Wissenschaftler. Wenn ihm die große Anerkennung damals und heute verwehrt bleib, so mag es zum Teil durch seine ihn stets behindernde chronische Krankheit bedingt sein. Entscheidend ist wohl, daß seinem weiten Tätigkeitsfeld ein fester Standort fehlte, so daß jede Wissenschaft nur eine, die ihre, Seite davon sah und sieht.

Veröffentlichungen von Felix Bernstein

[1] Über einen Schoenflies'schen Satz der Theorie der stetigen Funktionen zweier reeller Veränderlicher. Gött. Nachr. (1900) 98–102
[2] Untersuchungen aus der Mengenlehre. Diss. Göttingen 1901
[3] Über den Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers. I, II. Gött. Nachr. (1903) 46–58; (1903) 304–311

[4] Bemerkung zur Mengenlehre. Gött. Nachr. (1904) 557–560
[5] Über die Begründung der Differentialrechnung mit Hilfe der unendlich kleinen Größen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **13** (1904) 241–246
[6] Erklärung zu dem Aufsatz von K. Geißler „Zur Auffassung der unendlich kleinen Größen". Jber. d. Dt. Math.-Verein. **13** (1904) 346
[7] Über unverzweigte Abelsche Körper in einem imaginären Grundbereich. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **13** (1904) 116–119
[8] Das Leuchtturmphänomen und die scheinbare Form des Himmelsgewölbes. Z. Psych. Physiol. Sinnesorg. **34** (1904) 132–140
[9] Untersuchungen aus der Mengenlehre (im wesentlichen unveränderter Abdruck der Dissertation). Math. Ann. **61** (1905) 117–155
[10] Zum Kontinuumproblem. Math. Ann. **60** (1905) 463f.
[11] Zur Mengenlehre. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **14** (1905) 198f.
[12] Die Theorie der reellen Zahlen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **14** (1905) 447ff.
[13] Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen. Math. Ann. **60**(1905) 187–193
[14] Über eine neue geometrisch mechanische Erzeugungsweise des Kreises und der sphärischen Kegelschnitte. Z. Math. Phys. **52** (1905) 330–335
[15] Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene. Math. Ann. **60** (1905) 117–136
[16] Sur la théorie des ensembles. C. R. hebd. Séanc. Acad. sci., Paris **143** (1906) 953ff.
[17] Über eine Funktionalgleichung und eine erweiterte Begründung des Gaußschen Fehlergesetzes. Ber. Verh. königl. sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Kl. **58** (1906) 228–236
[18] Zur Theorie der trigonometrischen Reihe. J. f. d. reine angew. Math. **132** (1907) 270–278
[19] Über das Gaußsche Fehlergesetz. Math. Ann. **64** (1907) 417–448
[20] Über konvexe Kurven mit einer überall dichten Menge von Ecken. Arch. Math. Phys. **12** (1907) 285f.
[21] Das Hilfskassengesetz und die Pflege der Versicherungswissenschaft auf den deutschen Universitäten. Allgemeine Zeitung München. Beilage Nr. 99 v. 15. 5. 1907, 196f.
[22] Zur Theorie der trigonometrischen Reihe. Ber. Verh. königl. sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Kl. **60** (1908) 325–338
[23] Über die axiomatische Einfachheit von Beweisen. 4. Int. Kongr. Math., Rom 1908. **3** (1909) 391f.
[24] Bericht über Rudolf F. Podžena: „Eine Methode zur experimentellen und konstruktiven Bestimmung des Firmaments" und über Hans Haenel: „Die Gestalt des Himmels und die Vergrößerung der Gestirne am Horizonte". Naturw. Rdsch. **24** (1909) 377f.
[25] Über den letzten Fermat'schen Lehrsatz. Gött. Nachr. (1910) 482–488
[26] Über den zweiten Fall des letzten Fermat'schen Lehrsatzes. Gött. Nachr. (1910) 507–516
[27] Über die Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem. Math. Ann. **71** (1911) 417–439
[28] Über geometrische Wahrscheinlichkeit und das Axiom der beschränkten Arithmetisierbarkeit der Beobachtungen. Math. Ann. **72** (1913) 585ff.
[29] Beiträge zur mathematischen Statistik, I. Zur Methode der Bearbeitung von unvollkommenem Material. Gött. Nachr. (1913) 84–98
[30] Beiträge zur mathematischen Statistik, IV. Berechnung der Korrelation zwischen zwei Argumenten, für die nur die Häufigkeitskurve ihres Produktes gegeben ist. Gött. Nachr. (1914) 324–333
[31] (gemeinsam mit M. Krafft) Beiträge zur mathematischen Statistik, II. Integralungleichungen konvexer Funktionen. Gött. Nachr. (1914) 299–308
[32] (gemeinsam mit W. S. Baer) Ein Axiomensystem der Methode der kleinsten Quadrate. Math. Ann. **76** (1915) 284–294
[33] (gemeinsam mit G. Doetsch) Zur Theorie der konvexen Funktionen. Math. Ann. **76** (1915) 514–526
[34] (gemeinsam mit O. Szász) Über die Irrationalität unendlicher Kettenbrüche mit einer Anwendung auf die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} q^{r^2} x^r$. Math. Ann. **76** (1915) 295–300
[35] Bemerkungen zur Abhandlung „Körpermaßstudien an Kindern" von M. Pfaundler. Z. Kinderheilk. **16** (1917) 78–84
[36] Über das Fourierintegral $\int_0^{\infty} e^{-x^4} \cos tx\, dx$. Math. Ann. **79** (1918) 265–268

[37] Die Hochschulkurse zur Ausbildung von kriegsbeschädigten Akademikern in Statistik an der Universität Göttingen. Dt. Statist. Zentralbl. **10**, 718 (1918) 137–140
[38] Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **28** (1919) 63–78
[39] Die Übereinstimmung derjenigen beiden Summationsverfahren einer divergenten Reihe, welche von T. E. Stieltjes und E. Borel herrühren. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **28** (1919) 50–63
[40] Deutsche Sparprämienanleihe 1919. Berlin u. Leipzig: Reimer 1919
[41] Prämienanleihen in alter und neuer Zeit. Das Neue Reich **1**, 30 (1919) 5f.
[42] Bemerkung zu der Abhandlung: Über die Konvergenz eines mit einer Potenzreihe assoziierten Kettenbruchs von H. Hamburger. Math. Ann. **81** (1920) 46f.
[43] Berichtigung zu der Arbeit: Die Übereinstimmung ... [39]. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **29** (1920) 94
[44] Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion, I. Sber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. **40** (1920) 735–747
[45] Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion, II. Allgemeine Lösung. Koninkl. Akad. Wet. Amsterdam, Proc. **29**, 5 (1921) 759–765
[46] Der Statistiker und der Versicherungsbeamte. Die akademischen Berufe **5** (1921) 233–246
[47] Ein Kriterium für den positiv definiten Charakter von Fourierintegralen und die Darstellung solcher als Summe von Quadraten. Math. Ann. **85** (1922) 155–159
[48] (gemeinsam mit G. Doetsch) Über die Integralgleichung der elliptischen Thetafunktion. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **31** (1922) 148–153
[49] (gemeinsam mit G. Doetsch) Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion, III. Dritte Herleitung durch den verallgemeinerten Volterraprozess und weitere Beispiele (Mittag-Lefflersche Funktion und Beltramische Integralgleichung). Gött. Nachr. (1922) 32–46
[50] (gemeinsam mit G. Doetsch) Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion, IV. Integrale Additionstheoreme. Das Additionstheorem von Césaro und das der Funktion U(c, t). Vierte Herleitung der fundamentalen Integralgleichung. Gött. Nachr. (1922) 47–52
[51] (gemeinsam mit A. Faust) Die Theorie der gleichsinnigen Faktoren in der Mendelschen Erblichkeitslehre vom Standpunkt der mathematischen Statistik. Z. indukt. Abstamm-. u. Vererb.-Lehre **28** (1922) 295–323
[52] (gemeinsam mit P. Schläper) Über die Tonlage der menschlichen Singstimme. Ein Beitrag zur Statistik der sekundären Geschlechtsmerkmale beim Menschen. Sber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. (1922) 30–37
[53] Zur Statistik der sekundären Geschlechtsmerkmale beim Menschen. Gött. Nachr. (1923) 89–95
[54] Der Pythagoräische Lehrsatz. Z. math. naturw. Unterr. aller Schulgattungen **55** (1924) 204–207
[55] Die Konstruktionsmotive der Sparprämienanleihe von 1918. Z. Math. Mech. **4** (1924) 498f.
[56] Ergebnisse einer biostatistischen zusammenfassenden Betrachtung über die erblichen Blutstrukturen des Menschen. Klin. Wschr. **3** (1924) 1495ff.
[57] Zusammenfassende Betrachtungen über die erblichen Blutstrukturen des Menschen. Z. indukt. Abstamm-. u. Vererb.-Lehre **37** (1925) 237–270
[58] Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie, I. Quantitative Rassenanalyse auf Grund von statistischen Beobachtungen über den Klangcharakter der Singstimme. Sber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. (1925) 61–70
[59] Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie, II. Quantitative Rassenanalyse auf Grund von statistischen Beobachtungen über den Drehsinn des Kopfhaarwirbels. ibidem (1925) 71–82
[60] (gemeinsam mit G. Doetsch) Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung, I. Eine neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. Math. Z. **22** (1925) 285–292
[61] Reich, Länder, Eisenbahn, Post und Anleihemarkt. Bank-Archiv **25** (1925/26) 312ff.
[62] Über die numerische Ermittlung von verborgenen Periodizitäten. Z. f. angew. Math. Mech. **7** (1927) 441–444
[63] (gemeinsam mit G. Doetsch) Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung, IV. Die

räumliche Fortsetzung des Temperaturverlaufs (Bolometerproblem). Math. Z. **26** (1927) 89–98
[64] Die Theorie des Crossing-over vom statistischen Standpunkt. Z. indukt. Abstamm-. u. Vererb.-Lehre. Suppl. **1** (1928) 422–430
[65] Über mendelistische Anthropologie. ibidem Suppl. **1** (1928) 431–438
[66] Heredity and human races. Collecting Net **3** (1928)
[67] Variations- und Erblichkeitsstatistik. Berlin: Borntraeger 1929. = Baur, E.; Hartmann, M. (Hrsg.): Handbuch der Vererbungswissenschaft, Band 1
[68] Über die Ermittlung und Prüfung von Gen-Hypothesen aus Vererbungsbeobachtungen am Menschen und über die Unzulässigkeit der Weinbergschen Geschwistermethode als Korrektur der Auslesewirkung. Arch. Rass.- u. Ges. Biol. **22** (1929) 241–244
[69] Über die Anwendung der Steinerschen Fläche in der Erblichkeitslehre, insbesondere in der Theorie der Blutgruppen. Z. f. angew. Math. Mech. **9** (1929) 503
[70] Über den mittleren Fehler der Potenzmomente. Bl. f. Vers. math. u. verwandte Gebiete **1** (1930) 365–377
[71] Die Zukunft der Rentenversicherung. Vers.-arch. **1**, 2 (1930) 16–26
[72] Alterssichtigkeit und Lebensaussichten. Z. Vers. Wiss. **30** (1930) 382–387
[73] Die Erblichkeit und Natur des Krebses. Medsche Welt **4**, 33 (1930) 1163ff.
[74] Über die Erblichkeit und Natur des Krebses. Medsche Klin. **43/44** (1930) 1–25
[75] Über die Erblichkeit der Blutgruppen. Z. indukt. Abstamm-. u. Vererb.-Lehre **54** (1930) 400–426
[76] Fortgesetzte Untersuchungen aus der Theorie der Blutgruppen. ibidem **56** (1930) 231–273
[77] Über den anthropologischen Wert der Blutgruppen nach Mendes-Corrêa. Anthrop. Anz. **6** (1930) 336ff.
[78] Bemerkung zu einer Arbeit von G. H. M. Waaler: Häufigkeitsberechnung bei den menschlichen Blutgruppen. Z. indukt. Abstamm-. u. Vererb.-Lehre **55** (1930) 266
[79] Stimme und Rasse. Bericht über eine Tagung der int. Ges. f. experiment. Phonetik, Bonn 1930
[80] Revisions- u. Treuhandfragen im Versicherungswesen. Neumanns Z. Vers.-Wesen **54** (1931) 193 f.
[81] Zukunftsaufgaben der Versicherungsmathematik. Z. Vers. Wiss. **31** (1931) 141–151
[82] Erfüllt die Lebensversicherung ihre Aufgabe? Vers.arch. **1**, 9 (1931) 1–8
[83] Alterssichtigkeit. Ein Maßstab für die Lebensdauer. Zentztg. Opt. Mech. **52** (1931) 321 f.
[84] Alterssichtigkeit und natürliche Lebensdauer. Kölnische Ztg. Nr. 293 v. 2. 6. 1931
[85] Die Erblichkeit des Krebses. Z. Volksaufartung u. Erbkunde **1** (1931) 84ff.
[86] Die X-Y-Methode zur Prüfung neuer Therapien mit besonderer Berücksichtigung der Tuberkuloseschutzimpfung (Calmette-Verfahren). Dt. medsche Wschr. **57**, 10 (1931) 397f.
[87] Über die Unzulässigkeit der Weinbergschen Geschwistermethode. Arch. Rass-. u. Ges. Biol. **23** (1931) 285–290
[88] Ist die Weinbergsche Geschwistermethode neben der direkten Methode von Nutzen? Z. indukt. Abstamm-. u. Vererb.-Lehre **58** (1931) 434f.
[89] Zur Grundlegung der Chromosomentheorie der Vererbung beim Menschen mit besonderer Berücksichtigung der Blutgruppen. ibidem **57** (1931) 113–138
[90] Zur Frage der Blutgruppenvererbung. Klin. Wschr. **10** (1931) 1496f.
[91] Zur Frage der Blutgruppenvererbung (Schlußbemerkung). Klin. Wschr. **10** (1931) 1911
[92] Berichtigung zur Arbeit: Fortgesetzte Untersuchungen aus der Theorie der Blutgruppen [76]. Z. indukt. Abstamm-. u. Vererb.-Lehre **59** (1931) 420
[93] Über die numerische Ermittlung von verborgenen Periodizitäten. Forsch. Fortschr. **8** (1932) 257f.
[94] Verallgemeinertes Galtonbrett zur Durchführung von Funktionaltransformationen. Z. Phys. **77** (1932) 104–113
[95] Neuer Galtonapparat zur Durchführung einer praktischen Lösung von Randwertaufgaben der partiellen Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta u = c$ mit besonderer Berücksichtigung des Torsionsproblems. Z. Phys. **79** (1932) 684–695
[96] Über eine Methode, die soziologische und bevölkerungsstatistische Gliederung von Abstimmungen bei geheimen Wahlverfahren statistisch zu ermitteln. Allg. statist. Arch. **22** (1932) 253–256

[97] Die mittleren Fehlerquadrate und Korrelationen der Potenzmomente und ihre Anwendungen auf Funktionen der Potenzmomente. Metron **10**, 3 (1932) 3–34
[98] Über die Auseinandersetzung in der Frage der Wanderversicherung zwischen der Invalidenversicherung und der Angestelltenversicherung. Soz. Praxis (1932) 1057–1062
[99] Die natürliche Lebensdauer des Menschen und ihre statistische und individuelle Beurteilung. Comitato Italiano per lo Studio dei Problemi della Popolazione **10** (1932)
[100] Biologische Faktoren der Verminderung der Sterblichkeit. ibidem **10** (1932)
[101] Alterssichtigkeit und Lebenserwartung. Forsch. Fortschr. **8** (1932) 272f.
[102] Über die Beobachtungsökonomie in der Statistik. Assekuranz-Jb. **51** (1932) 1–8
[103] Korrekturen bei erblichkeitsmathematischer Untersuchung von Krankheiten mit rezessivem Erbgang. Arch. Rass-. u. Ges. Biol. **27** (1932) 25–31
[104] Bericht über statistische Untersuchungen, betreffend den Charakter der menschlichen Singstimme. Comitato Italiano per lo Studio dei Problemi della Popolazione **10** (1932)
[105] Die geographische Verteilung der Blutgruppen und ihre anthropologische Bedeutung. ibidem **10** (1932)
[106] Der Wirtschaftsprüfer für Versicherungsgesellschaften. Neumanns Z. Vers.-Wesen **55** (1932) 601f.
[107] Gedanken zur Kollektivversicherung. ibidem **56** (1933) 165f.
[108] Die Versorgungskassen der Ärzte im Lichte der geänderten wirtschaftlichen Verhältnisse. Dt. Ärztebl. **63** (1933) 71f.
[109] Säkulare Sterblichkeitsänderung und Prinzip der Gewinnverteilung mittels der Hoecknerschen Überschußkonstanten λ. Blätter f. Vers.-math. u. verwandte Gebiete **2**, 10 (1933) 390ff.
[110] Berichtigung zu der Arbeit: Zur Grundlegung der Chromosomentheorie . . . [89]. Z. indukt. Abstamm.- u. Vererb.-Lehre **63** (1933) 181–184
[111] Über die Ausgleichung der Blutgruppen- und Genzahlen. Z. Rassenphysiol. **6** (1933) 36f.
[112] Growth and Decay. Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology, Long Island, N.Y. 1934. **2** (1934) 209–217
[113] The change in the range of accomodation with age and its connection with the length of life. Science **81** (1935) 423f.
[114] Principles of probability in natural science. J. Math. Phys. **14** (1935) 28–35
[115] (gemeinsam mit R. Machol) The detection of linkage in human families. Proc. R. Soc. London (B) **117** (1935) 63–68
[116] Regression and correlation evaluated by a method of partial sums. Annals Math. Statist. **8** (1937) 77–89
[117] Factors of heredity, age and acquired hypersensitivity in relation to cancer. Cancer problem symposium, Am. Ass. for the Advancement of Science, June 1937, 45ff.
[118] The continuum problem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **24** (1938) 101–104
[119] (gemeinsam mit Z. W. Birnbaum, S. Achs) Is or is not cancer dependent on age? Am. J. Cancer **37** (1939) 298–311
[120] New methods of the analysis of blood groups of inbred populations. Proc. 11. ann. Meet. Am. Ass. Phys. Anthrop. Am. J. phys. Antrop. **27** (1940) Suppl. S. 10
[121] The balance of progress of freedom in history, in: Anshen, R. N. (Hrsg.): Freedom. Its meaning. New York 1940: Harcourt, Brace & Co
[122] (gemeinsam mit H. L. Borison; S. Finkel): A case of spurious linkage as claimed for the classical blood groups and allergy. J. Immun. **46** (1943) 245–248
[123] The probable agent of poliomyelitis (infantile paralysis). Genus. Com. Ital. **6–8** (1943–1949) 3–8
[124] (gemeinsam mit M. Bernstein) Law of physiological ageing as derived from long range data on refraction of the human eye. Archs Ophthal. **34** (1945) 378–388
[125] Neue biologische Resultate über den natürlichen Ablauf des menschlichen Lebens und eine rationelle Organisation der inaktiven Periode. Atti del 14. Congresso internationale di Sociologica, Rom 1950. **2**, 883–899
[126] Il probabile veicolo dell'infezione da virus poliomielitico. Riv. Ist. sieroter. ital. **25** (1950) 33–38
[127] The mathematics of the human bloodgroups and the algebraic line-congruences. Proc. int. Congr. Math., Amsterdam 1954. **2** (1954) 199f.
[128] Differences in Aplitude to Mathematics. New York Times 1956

Literaturverzeichnis

[129] B a r o n e , J.; N o v i k o f f , A.: A history of the axiomatic formulation of probability from Borel to Kolmogorov, I. Archs. Hist. exact Sci. **18** (1978) 123–190
[130] B l a s c h k e , W.: Kreis und Kugel. Leipzig 1916
[131] B l a s c h k e , W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, I. Elementare Differentialgeometrie. 3. Aufl. Berlin 1930
[132] B o n n e s e n , T.: Über eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichheit des Kreises in der Ebene und auf der Kugeloberfläche nebst einer Anwendung auf eine Minkowskische Ungleichheit für konvexe Körper. Math. Ann. **84** (1921) 216–227
[133] B o n n e s e n , T.; F e n c h e l , W.: Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934
[134] B o r e l , E.: Leçons sur la théorie des fonctions. Paris 1898
[135] B r o g g i , H.: Versicherungsmathematik. Leipzig u. Berlin 1911
[136] C a n t o r , G.: Fondements d'une théorie générale des ensembles. Acta Math. **2** (1883) 381–408
[137] C a n t o r , G.: De la puissance des ensembles parfaits de points. Acta Math. **4** (1884) 381–392
[138] C a n t o r , G.: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, I. Math. Ann. **46** (1895) 481–512
[139] C a n t o r , G.: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Hrsg.: E. Zermelo. Berlin 1932
[140] C a n t o r , G.; D e d e k i n d , R.: Briefwechsel Cantor-Dedekind. Hrsg.: E. Noether u. a. Paris 1937
[141] D e d e k i n d , R.: Gesammelte mathematische Werke. Hrsg.: R. Fricke u. a. Bd. 3 Braunschweig 1932
[142] M i l l e r , E. W.: Concerning biconnected sets. Fundam. Math. **29** (1937) 123–133
[143] M i l l e r , E. W.: On a property of families of sets. C. R. Séanc. Soc. Sci. Lettres Varsovie 3, 30 (1937) 31–38
[144] S c h o e n f l i e s , A.: Zur Erinnerung an Georg Cantor. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **31** (1922) 97–106
[145] S c h r ö d e r , E.: Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze. Nova Acta, Leopoldina **71** (1898) 301–362
[146] Z e r m e l o , E.: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I. Math. Ann. **65** (1908) 261–281
[147] Nachlaß von David Hilbert in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Cod. Ms. Hilbert 22

M. Frewer
Herderstr. 15
8580 Bayreuth

(*Eingegangen: 15. 5. 1979*)

Buchbesprechungen

Hasse, H., Mathematische Abhandlungen (Hrsg. H. W. Leopoldt und P. Roquette), Berlin – New York: de Gruyter 1975, 3 Bände, XLII + 1592 S., Ganzleinen, DM 510,–

These three volumes of papers by H. Hasse were published by the Walter de Gruyter Verlag while Hasse was still alive, and it is only due to a number of delays – some due to the tardiness of the reviewer – that this review only appears after Hasse's death. He himself contributed some introductory comments, and the editors, H. W. Leopoldt and P. Roquette, acknowledge his help in producing the collection. Altogether 77 papers are republished here, out of a total lifework consisting of 165 papers and quite a number of books listed at the end of the third volume. To the reviewer the selection made does indeed cover all Hasse's fundamental contributions and cannot be faulted. Nevertheless, one might now hope to see further volumes to complete the collection. Most of the books are accessible, but some are not too widely known as they are not easily available. The reviewer has a sentimental attachment to Hasse's little volumes on algebra, which constituted his first introduction as an undergraduate to the theory of equations.

The editors have organised the published material into twelve chapters, according to subject matter, and this certainly does make it easier to locate specific papers, whose precise title one may not remember. Subjects of course overlap, but nevertheless the subdivision has been successful.

In the mathematical community as a whole Hasse is probably best known for his local-global priciple which, under the name of "Hasse-principle", has entered universal mathematical usage, applied in various contexts. Its natural origin was in the theory of quadratic forms over algebraic number fields, as developed in five classical papers, which rightly head the collection. In Hasse's own introductory comments to the present volumes he gave generous acknowledgment to Hensel's role in this context, and he quotes a letter of Hensel's containing some suggestive hints. Nevertheless it is apparent that the editors were quite right to say in their preface that it was Hasse who conceived the principle.

Naturally a central place is occupied by papers on class field theory, and four out of the five chapters in Volume I really belong to this general area. Two of the principal contributions which Hasse made to the rapid advance in the 1920s and '30s were the introduction of a local point of view – specifically by the theory of what is known as the local Hasse-symbol – and the connection with the theory of algebras. The latter was subsequently formalised in terms of cohomology of groups, but Hasse himself was not too enamoured by this. As he says in his Brighton lecture on the history of class field theory: "... the sharply profiled laws and individual features of this magnificent edifice seem to me to have lost something of their original splendour and plasticity by the penetration of class field theory with cohomological concepts and methods ...".

Although this is not the place for a comprehensive appreciation of Hasse's work, it seems worthwhile to mention here some of his less well-known papers which have recently acquired new topicality.

In "Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normrestsymbol" (1931, here No. 10) the "Widerlegung" is accomplished by an example of an Abelian (because of the "Satz" necessarily non-cyclic) extension of a number field in which the local-global principle for norms breaks down – namely $\mathbf{Q}(\sqrt{-39}, \sqrt{-3})$ over $\mathbf{Q}$. The deviation from this principle was subsequently shown to be closely connected with central extensions, and recent years have seen a large number of publications in this area.

In an entirely different direction, and more important, one should mention the long programmatic paper on "Artinsche Führer, Artinsche L-Funktion und Gaußsche Summen" (1954, No. 63), written in a very typical Hasse style. Some years before this, Richard Brauer had established his induction theorems for group representations with its fundamental application to Artin L-functions. It was this which led up to Hasse's paper. In the latter in particular the constants in the functional equation and the underlying Galois Gauss sums were treated systematically as a generalisation of the corresponding Abelian objects, both on the global and on the local level. The major problem which was left open was the existence of local constants and local Galois Gauss sums, uniquely defined and with appropriate induction properties, which would yield a natural local decomposition of the global objects in the Galois case, just as had been established in the Abelian case. This problem grew in importance with the arrival of the Langlands conjectures and it was in fact Langlands who first solved the problem completely (unpublished). A proof – different from that of Langlands – was published by Deligne. During the last ten years the Galois Gauss sums have also come to play a fundamental role in the newly developing theory of Galois module structure for rings of algebraic integers.

In all these developments another paper (joint with H. Davenport) has assumed new importance ("Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen" (1934, No. 44)). Its original aim was a proof of the Riemann hypothesis for certain curves over finite fields, and to achieve this, classical Abelian Gauss sums were treated as zeros of the appropriate Zeta functions. And indeed the chapter in which this paper appears is that on "congruence function fields". The current, very considerable, interest in the paper however arises from the arithmetic properties of Gauss sums, and the identities between them, which are proved in the paper almost incidentally.

As a nice touch, the first and third volume each present a photograph of Hasse at different ages – the one in the third volume is how one remembers him, including the diagram of fields on a blackboard, which appears as natural background. The overture to the second volume is a copy of part of a handwritten draft in Hasse's inimitable and perfect Gothic hand.

The three volumes are attractively printed and the layout and arrangement are entirely satisfactory. The editors, as well as the publishers, deserve all praise for doing their subject full justice.

London A. Fröhlich

P. Dugac: Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (L' histoire des sciences, textes et études), Paris: J. Vrin 1976, 334 S., ca. DM 100,–

Am 6. Oktober 1981 jährt sich zum 150ten Male der Geburtstag Dedekinds. Seine Werke wurden von R. Fricke, E. Noether und O. Ore mit wertvollen Kommentaren herausgegeben (Vieweg 1930–1932), wobei der vorgesehene Lebenslauf mit persönlichen Erinnerungen Frickes durch Frickes Tod leider entfiel. E. Noether und J. Cavaillès edierten den Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind (Hermann 1937), soweit er sich auf die Grundlegung der Mengenlehre bezieht. Der Nachruf von E. Landau (Göttinger Nachrichten 1917) und verstreute biographische Notizen lieferten Fragmente einer Biographie, über die man sich am besten in K.-R. Biermanns 10spaltigem Artikel „Dedekind" im Dictionary of Scientific Biography, vol. IV (Ch. Scribner's Sons 1971) orientiert.

Das vorliegende Buch zerfällt in 2 Teile, einen biographischen Teil von 142 Seiten und einen etwas umfangreicheren Anhang, der nicht edierte Texte (meist Briefe) zur Biographie Dedekinds enthält. Ein Blick auf die Kapitelüberschriften des ersten Teils läßt eine umfassende Biographie und Würdigung des Werkes von Dedekind vermuten: 1. Mann und Werk vor 1871, 2. Herausgabe von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie und Dedekinds Supplemente, 3. „Stetigkeit und Irrationalzahlen", 4. Herausgabe der Werke Riemanns. Dedekinds „französische" algebraische Zahlentheorie, 5. Mitglied der Berliner Akademie, 6. Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, 7. „Was sind und was sollen die Zahlen?", 8. Morphismen und Strukturen, 9. Mitglied der Pariser Akademie, 10. Grundlagen der allgemeinen Topologie, 11. Cantor und Dedekind, 12.

Warum wurde Dedekind nie Universitätslehrer?, 13. Der Einfluß von Dedekind, 14. Die Einheit der dedekindschen Mathematik.

Eine genauere Einsicht in den Text zeigt jedoch, daß dieses Werk trotz seines Umfangs einen fragmentarischen Charakter nicht verleugnen kann. So werden die Mitgliedschaften Dedekinds in manchen Akademien (z. B. der in Göttingen oder der in Rom) nicht erwähnt, man findet nichts über Dedekinds Mitwirkung an der Herausgabe der Werke von Gauß und über seine Kommentare im 2. Band dieser Werke. Obwohl auf die Bedeutung Dedekinds für die algebraische Zahlentheorie eingegangen wird, werden die über das berühmte Supplement zu Dirichlets Vorlesungen hinausgehenden zahlentheoretischen Arbeiten Dedekinds gar nicht zitiert, geschweige denn diskutiert, so daß es kein Wunder ist, wenn man z. B. Hensels Namen hier nicht antrifft. Doch verkennt diese Kritik vielleicht die sich schon im Titel andeutende Zielrichtung dieses Buches, das nicht mit den Werkkommentaren E. Noethers und O. Ores konkurrieren will. Das Buch will, so sagt J. Dieudonné in seinem Vorwort, Dedekind, dessen Bedeutung für die algebraische Zahlentheorie und algebraische Geometrie allgemein bekannt ist und gebührend geschätzt wird, auch als einen Begründer der modernen Denkweise bei der Grundlegung der Mathematik in der Nachfolge von Boole und Bolzano und als Vorgänger von Zermelo und Hilbert gleichrangig neben G. Cantor stellen. Die Kapitel 3 und 7 behandeln daher intensiv die beiden Grundlagenbüchlein Dedekinds, die auch heute noch sehr modern wirken und eine vorbildliche Schule begrifflichen mathematischen Denkens darstellen. Kapitel 8 stellt Dedekind zu Recht als einen der Begründer der Verbandstheorie dar (als deren Vollender F. Klein-Barmen präsentiert wird). Das nur 3 Seiten lange Kapitel 13 über den Einfluß von Dedekinds Werk ist substantiell, doch wird man manche Namen (wie Artin oder Bourbaki) ebenso vermissen wie eine Betrachtung der nach Dedekind benannten Begriffe.

Als Belohnung für den Leser dieses detailreichen Streifzuges durch Dedekinds Leben und Werk hat der Autor einen wild wuchernden Anhang aus 58 Appendices geschaffen, auf die bereits im ersten Teil laufend verwiesen wird. Es handelt sich hierbei um Briefe und Manuskripte aus den Archiven diverser Akademien und Universitäten sowie aus dem vor einem Jahrzehnt aufgefundenen Nachlaß (Briefwechsel von Dedekind mit Cantor, Frobenius und Weber) von E. Noether. Hier kann man nicht nur die Geburt mancher mathematischen Idee verfolgen, sondern in noch stärkerem Maße das Leben deutscher Mathematiker der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts in plastischen Bildern vor sich entstehen sehen. Dem Autor ist für die Publikation dieses farbenreichen, vielstimmigen zweiten Teiles ganz besonders zu danken.

Erlangen W.-D. Geyer

Levy, A., Basic Set Theory (Perspectives in Mathematical Logic), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1979, XIV + 391 S., geb., DM 55,–

Dieses Werk ist eine ungewöhnlich sorgfältig geschriebene Einführung in die reine Mengenlehre. Zur Darstellung kommen hauptsächlich klassische Themen, wobei gelegentlich neuere Entwicklungen berührt werden. Vorausgesetzt wird eigentlich nichts. Der große Vorzug dieses Buches ist, daß alle behandelten Themen stets gründlich diskutiert und motiviert werden, so daß es auch von Studenten zum Selbststudium mit sicherem Erfolg zur Hand genommen werden kann. Der Text ist sorgfältig in Kapitel (insgesamt 9), Abschnitte und Sektionen gegliedert, die prägnante Überschriften tragen, so daß eine Orientierung immer leicht fällt.

Kapitel I behandelt das Problem, die Mengenlehre zu axiomatisieren. Es wird das Zermelo-Fraenkelsche System ZF dargestellt, allerdings nicht in der üblichen Form, sondern à la P. Bernays mit Klassentermen und freien Klassenvariablen. Dies hat gewiß manche Vorzüge, aber als Nachteil muß in Kauf genommen werden, daß der Leser in drei langen Unter-Kapiteln syntaktische Probleme über die verwendete Sprache durchzuarbeiten hat, bevor er mit der Mengenlehre in erste Berührung gerät.

Die Kapitel II, III und IV entwickeln die Kardinalzahl- und Ordinalzahl-Theorie von Grund auf. Neben der Arithmetik dieser Zahlen werden auch fundierte Relationen, Definitionen durch Rekursion und die v. Neumannschen Stufen $V_a = R(a)$ behandelt. Hervorzuheben ist, daß hier auch die Theorie der „stationären Mengen" von Ordinalzahlen abgehandelt wird. Im Beweis des Satzes von J. Silver über die Potenzen singulärer Kardinalzahlen und etwa bei der Formulierung des kombinatorischen Prinzipes $\diamond$ von R. Jensen spielen diese Mengen eine wichtige Rolle. Da aber auch in vielen neueren Ergebnissen von S. Shelah wesentlicher Gebrauch von stationären Mengen gemacht wird (darauf geht das vorliegende Buch natürlich nicht ein), kann die Bedeutung dieser Mengen sowohl für die reine Mengenlehre als auch die Modell-Theorie und Algebra nicht überschätzt werden.

Die Aleph-Exponentiation findet sich in Kapitel V. Bewiesen werden hier die bedeutenden Ergebnisse von Bukovsky-Hechler und Silver. Auch über das Auswahlaxiom, Äquivalente zum Auswahlaxiom, schwache Formen des Auswahlaxioms und „global choice" wird in diesem Kapitel ausführlich gesprochen. Die etwas philosophischen Bemerkungen zu Beginn sind allerdings ein wenig schief und werden am besten überlesen (S. 159).

In den folgenden Kapiteln VI und VII werden die Zahlbereiche **Z**, **Q** und **R** aufgebaut und insbesondere ihre topologischen Eigenschaften auseinander gesetzt. Hier findet sich auch der Bairesche Kategorie-Satz und der Alexandroff-Hausdorffsche Satz, daß die Kontinuums-Hypothese für Borel-Mengen und A-Mengen gültig ist.

Kapitel VIII enthält grundlegendes über Boolesche Algebren (der Stonesche Darstellungs-Satz, das Prim-Ideal-Theorem und Vollständigkeit). Ein ganzer Abschnitt ist dem Martinschen Axiom MA gewidmet. Es wird mit mehreren Anwendungen deutlich gemacht, daß dieses Axiom, das aus der Kontinuums-Hypothese folgt, nicht wie sie die Existenz von Kardinalzahlen zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ strikt ausschließt, sondern aussagt, daß diejenigen Kardinalzahlen, die zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ liegen (falls es solche gibt) sich in gewisser Weise ähnlich wie $\aleph_0$ verhalten.

Mit einem Kapitel IX über unendliche Kombinatorik und große Kardinalzahlen schließt das Buch. Hier finden sich einerseits Partitions-Sätze vom Ramseyschen Typ und Jensens Prinzip $\diamond$ als auch ihre Verallgemeinerungen zu den sogenannten „Ramsey-Kardinalzahlen" und „unaussprechlichen Kardinalzahlen" (ineffable cardinals). Diese Zahlen werden mit anderen großen Zahlen wie Mahloschen Zahlen, meßbaren Kardinalzahlen und schwach-kompakten Kardinalzahlen verglichen. Die Darstellung vermeidet hier bewußt modelltheoretische Methoden!

Das Buch wurde von einem der besten Kenner der Mengenlehre geschrieben, der in den vergangenen 25 Jahren ganz wesentlich zum Fortschritt dieser Wissenschaft beigetragen hat. In ganz erfreulicher Weise hat sich diese Kennerschaft in diesem Buche niedergeschlagen, was sich in der Stoffauswahl, den Beweisführungen und den prägnanten Zwischentexten zeigt. Themenkreise wie „Reflektions-Prinzipien", „Konstruktibilität" (im Sinne von Gödel), „Forcing" und „Axiomatik" werden in diesem Buche nicht dargestellt, da sie mit Recht nicht „basic" genannt werden können. Diese Themenkreise sind anderen Monographien dieser Reihe „Perspectives in mathematical Logic" vorbehalten, in denen dann auch Perspektiven mengentheoretischer Forschung dargestellt werden sollen.

Der Druck des Buches ist wie bei fast allen Publikationen des Springer-Verlages vorzüglich. Leider ist der Einband nicht sehr strapazierfähig und die Bindung verzieht sich schon nach wenigem Lesen. Unter den Druckfehlern sei hier nur mitgeteilt, daß auf S. 171 oben in den Leerraum AC_{wo} einzufügen ist.

Tübingen U. Felgner

Felscher, W., Naive Mengen und abstrakte Zahlen, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut. Band I 1978, 280 S. Kart., DM 24,–. – Band II (Algebraische und reelle Zahlen) 1978, 222 S., Kart., DM 24,–. – Band III (Transfinite Methoden) 1979, 272 S., Kart., DM 24,–

Das dreibändige Werk ist als eine inhaltlich, methodisch und geschichtlich umfassende Einführung in die Grundlagen der Mathematik (Mengen- und Zahlenlehre) konzipiert. Dabei sind die einzelnen Bände großenteils unabhängig voneinander lesbar.

Der erste Band beschäftigt sich mit Mengen und ihrer Axiomatisierung, mit Hilfsmitteln aus der Algebra und mit natürlichen Zahlen. Er beginnt mit einigen methodologischen Ausführungen über Definitionen und entwickelt dann, ausgehend von einer Analyse der Russellschen Antinomie, verschiedene Ansätze zu deren Überwindung wie Typenhierarchien, Zermelo (-Fraenkelsche) Mengenlehre und die Klassen-Mengen-Lehren nach Morse, Quine und Wang und nach von Neumann, Bernays und Gödel, sowie ihre Beziehungen untereinander. Hauptzweck der algebraischen Betrachtungen ist die systematische Einführung in den Gebrauch von Homomorphismen. Sie erweist sich von Nutzen bei der Vorstellung verschiedener Möglichkeiten, die Struktur der natürlichen Zahlen von einem algebraischen Standpunkt aus zu kennzeichnen. Rekursionstheoretische Aspekte werden dabei eingehend berücksichtigt. Die arithmetischen Betrachtungen führen bis zu einer Behandlung der rationalen Zahlen. Daneben finden sich weitere grundlegende mengentheoretische Betrachtungen wie etwa solche über Ordnungen und Hüllensysteme, über endliche Mengen und verschiedene Endlichkeitsdefinitionen, oder auch ein Abriß der Theorie der rekursiven Funktionen als eines Beispiels für eine intensional ausgerichtete arithmetische Theorie.

Der zweite Band befaßt sich mit algebraischen und reellen Zahlen. Unter starker Betonung historischer Gesichtspunkte wird zunächst eine Einführung in die Teilbarkeitstheorie der algebraischen Zahlen gegeben. Wesentliche Themen bilden Kreisteilungskörper und die Rolle Kummers, die Idealtheorie Dedekinds und die Divisorentheorie Kroneckers. Der zweite Teil des Bandes ist den reellen Zahlen gewidmet. Über Vervollständigungen geordneter Mengen, (archimedisch) geordnete Gruppen, Ringe und Körper führen die Betrachtungen – z. T. in einem allgemeinen Rahmen – zu verschiedenen Definitionen der reellen Zahlen und zu ihren topologischen Eigenschaften. Dabei finden sich auch Themen wie Eudoxische Gruppen, der Satz von Cantor-Bendixson und das Cantorsche Diskontinuum. An manchen Stellen erfordert der bewußte Verzicht auf das Auswahlaxiom Modifikationen gegenüber vertrauten Argumentationsweisen. Den Schluß bildet eine ausführliche Betrachtung der geschichtlichen Entwicklung des Zahlen- und des Größenbegriffs und ihrer Beziehungen vom Altertum bis zur Entstehung der modernen Analysis.

Der dritte Band (Transfinite Methoden) behandelt Wohlordnungen und Ordinalzahlen, Ordinalzahlarithmetik, Mächtigkeiten und Kardinalzahlen, die kumulative Hierarchie und eine Variante des Scottschen Axiomensystems der Mengenlehre, das Auswahlaxiom in verschiedenen Formulierungen und seine Rolle in Analysis und Algebra, das Zornsche Lemma und andere Maximalprinzipien. Er schließt mit einer Schilderung der verschiedenen methodologisch-erkenntnistheoretischen Haltungen, die in ontologischen Diskussionen über die Mathematik Bedeutung gewonnen haben.

Allen Bänden ist eine reichhaltige Bibliographie beigegeben.

Eine summarische Schilderung des Inhalts wird allerdings nicht den in mancher Hinsicht außergewöhnlichen Zügen des Werkes gerecht. Hier findet der Leser keine statisch anmutende Beschreibung „fertiger“ Theorien. Er wird vielmehr an Hand ausführlicher Motivationen, eingehender Hinweise auf die geschichtliche Entwicklung, zahlreicher methodologischer Bemerkungen und vieler nichttrivialer Beispiele vor die Erkenntnis gestellt, daß „die Axiomatisierungen derjenigen mathematischen Theorien, welche nicht bloß einer Mode des Tages entspringen, in einem Fundus mathematischer Erfahrungen begründet sind, der eine umfangreiche, über längere Zeit hin kultivierte Praxis zusammenfaßt“. Eine wichtige Rolle übernehmen hierbei die insbesondere im zweiten Band sehr ausführlichen und mit vielen Zitaten belegten geschichtlichen Betrachtungen, z. B. zur Entstehung der Idealtheorie, über das Kroneckersche Programm mit seinen intuitionistisch-konstruktiven Ansätzen oder über die dazu kontrastierende Auffassung Dedekinds, der als ein Wegbereiter der Mengenlehre geschildert wird, indem er – wohl als erster, bei der Einführung der Ideale – bewußt abstrakte Mengenbildungen durch Komprehension vollzieht. Der Leser wird die Fülle des Quellenmaterials begrüßen und die Gründlichkeit, mit der es zusammengestellt ist. Auch methodologische Hinweise bleiben nicht im Unverbindlichen. Sie werden durch ausführliche Darstellungen belegt, wie etwa bei den algebraisch orientierten Konzeptionen der natürlichen Zahlen, oder von eingehenden Diskussionen begleitet, z. B. solchen über die Rolle der Induktionsprinzipien und der Mengenlehre bei der „Finitarisierung" von Beweisen oder über die Elimination transfiniter Zahlen durch Hilfsmittel vom Typ des Zornschen Lemmas.

Die Darstellung ist durch große Sorgfalt geprägt. Sie folgt nicht dem Schema von Definition – Satz – Beweis, sondern bevorzugt den aufgelockerten, sprachlichen Text, benutzt dabei aber eine recht konsequente Symbolik. Den einzelnen Kapiteln geht eine Leseanweisung voran, die auch Auskunft über die Voraussetzungen und den Schwierigkeitsgrad gibt. Eine Fülle pointierter Bemerkungen erfreut durch treffende Würze.

Dozenten der Mathematik werden viele interessante Aspekte entdecken und Anregungen erhalten, wenn sie z. B. bei Vorlesungen über Zahlbereiche oder Mengenlehre einem eingeschliffenen Kanon entgehen und wichtige Begriffe durch Rückgang zu den Wurzeln mit mehr Aussicht auf umfassendes Verständnis vermitteln möchten. Mathematiklehrer finden in den ersten beiden Bänden wertvolle Informationen über den Hintergrund ihres Unterrichts. Im Hinblick auf Studenten mittlerer Semester sollte jedoch angemerkt werden, daß eine Ausschöpfung des Gewinns, den die Lektüre des Werks zu bieten vermag, nicht ohne eine gewisse Anstrengung möglich ist: Manchmal verlangen die Erarbeitung mehrerer Varianten eines Sachverhalts oder einer Methode mit oft zahlreichen zu ihrer Abgrenzung eingeführten Begriffen sowie der Wechsel von ausführlichem Beweis und Beweisskizze und die Einflechtung von Beweisalternativen (übrigens eine unerschöpfliche Quelle an Übungsmöglichkeiten) eine stärker gefestigte mathematische Erfahrung. Dies gilt auch für eine Reihe recht anspruchsvoller methodologischer Bemerkungen.

Das Werk ist also sicher nicht für einen „bequemen" Leser geschrieben. Dafür wird aber auch nicht Bequemlichkeit für den Leser durch Unverbindlichkeit der Aussagen erkauft. Wer sich der Lektüre unter diesem Gesichtspunkt widmet, wird die Erfahrung machen, daß ein ansehnlicher Gewinn nicht ausbleibt.

Freiburg i. Br. H.-D. Ebbinghaus

Ribenboim, P., 13 Lectures on Fermat's Last Theorem, New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1979, XVI + 302 pp., cloth DM 48,–

A proof of Fermat's last theorem is worth 10,000 DM, provided that it is published before September 13, 2005. As this date approaches, Springer-Verlag is trying to help the mathematical community to find the solution before it is too late. First, they published Kummer's *Collected Papers,* in 1975; next, in 1976, they reprinted Paul Bachmann's *Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung;* H. M. Edwards' *Fermat's last theorem, a genetic introduction to algebraic number theory* appeared in the GTM-series in 1977; and in 1979, Paulo Ribenboim's *13 Lectures on Fermat's last theorem* were printed. Both Edwards and Ribenboim announce a second volume: Ribenboim, to provide the detailed proofs suppressed in the volume under review; and Edwards, to continue his carefully organized account of the vicissitudes of Fermat's last theorem in the nineteenth century, written in the discursive style of the age.

Ribenboim's book is very much different from Edwards'. It may appropriately be described as an annotated bibliography on Fermat's last theorem. The material is divided into thirteen lectures, the first two of which give a survey of the history of the problem and the most striking results that have been obtained. The ten following lectures each discuss one particular approach to the problem. The final lecture, entitled "Variations and fugue on a theme", is devoted to Fermat's last theorem for polynomials, matrices, ordinal numbers, non-associative numbers, etcetera. Each of the thirteen lectures has an extensive bibliography, and there is a "general bibliography" at the beginning of the book. Not discarding the relatively small overlap, I counted 671 items in the fourteen bibliographies.

The mathematical content of the lectures is of varying depth and difficulty. Besides stating the results, Ribenboim usually tries to give the reader an impression of the main techniques going into the proofs. He often lets the original sources speak for themselves, without attempting to force a unifying point of view upon his reader. Among the several reasons to look forward to the second volume I mention two.

Let p be a prime number, and suppose that there exist integers x, y, z for which $x^p + y^p = z^p$ and $xyz \not\equiv 0 \bmod p$ (the **first case** of Fermat's last theorem). It has been proved that in these circumstances we have $m^p \equiv m \bmod p^2$ for all positive integers $m \leqslant 31$. Morishima (1931) claimed to be able to replace 31 by 43. Under the same hypothesis, Vandiver (1934) claimed to have proved that p divides the class number of $\mathbf{Q}(\cos(2\pi/p))$. Both results are among the strongest ever proved on Fermat's last theorem. In both cases the validity of the proof has been called in question. In the volume under review, we are only offered second-hand opinions about this matter. It will be interesting to see what the second volume has to say about these two points.

I conclude this review with two quotations from the book. The first is the dedication: "Hommage à André Weil pour sa Leçon: goût, rigueur et pénétration", calling to mind Weil's Oeuvres Scientifiques III, pp. 266–277. The second is the epilogue, written in the style of the rest of the book: "There is no epilogue. The search continues. New methods are invented, which will in turn be applied to other problems. Or, it is just the reverse. And this is the best that could happen, for it is the probing and search of such profound questions that nourishes mathematics."

We must be grateful to Ribenboim for having written this richly documented survey article in book form. It will greatly simplify the task of the many mathematicians who have, from time to time, to judge the correctness of alleged proofs of Fermat's last theorem.

Amsterdam H. W. Lenstra, Jr.

Renschuch, B., Elementare und praktische Idealtheorie (Studienbücherei, Mathematik für Lehrer, Band 16), Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976, 348 S., gebunden, DM 23,–

Es ist Kennern des Gebietes bekannt, daß sich B. Renschuch seit über 20 Jahren im Rahmen der Gröbnerschen Schule mit der Theorie der Polynomideale beschäftigt. Diese Forschungen finden ihren Ausdruck in zahlreichen Publikationen von Renschuch selbst und seinen Mitarbeitern und Schülern. Da diese Veröffentlichungen sehr zerstreut sind und einem westlichen Leser wohl auch nur schwer zugänglich sind, ist es zu begrüßen, daß nunmehr in dem vorliegenden Band ein wesentlicher Teil ihres Inhalts in geschlossener Form zusammengestellt ist. Wie bereits der Titel andeutet, bringt das Buch außer einigen elementaren Begriffen in Kapitel I keine allgemeine Ring- und Idealtheorie, sondern beschränkt sich auf den klassischen Fall. Die Grundlagen des Buches sind Vorlesungen und Seminare, die vor Hörern mit geringen Vorkenntnissen gehalten wurden. Dementsprechend ist jede Aussage bis in die Kleinigkeiten hinein durchgearbeitet und wird häufig durch Beispiele gestützt. Diese vielen Beispiele bedeuten einen besonderen Wert dieses Buches.

Nach den grundlegenden Begriffen und den idealtheoretischen Zerlegungssätzen der ersten beiden Kapitel wird in den Abschnitten III und IV, in denen die Nullstellen- und Dimensionstheorie der Polynomideale behandelt werden, mehr die Beziehung zur algebraischen Geometrie deutlich.

In den Kapiteln V und VI über die Syzygientheorie und die Hilbertfunktion findet man alles Bekannte elementar zugänglich dargestellt. Ein Leser, der sich nicht scheut, die vielen Zahlenbeispiele auch durchzurechnen, dürfte einigen Gewinn aus der Lektüre des Buches ziehen.

Auf ungelöste Fragen, die die Theorie reichlich bietet, wird an vielen Stellen hingewiesen. Ein wesentliches Anliegen des Verfassers ist es, reinen Existenzbeweisen ein konstruktives Verfahren an die Seite zu stellen, was zum Teil schon bei Basisfragen bisher nicht möglich ist. Lösbar sind derartige Fragen aber häufig bei den sogenannten Potenzproduktidealen (Idealen, die eine Basis aus lauter Monomen besitzen), die daher auch als Standardbeispiele benutzt werden. Erwähnenswert ist ferner das ausführliche Literaturverzeichnis.

Hamburg H. Timmermann

Kunz, E., Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie (vieweg studium Bd. 46 Aufbaukurs Mathematik), Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg 1980, X + 239 S., Pb., DM 32,–

In der englischen Literatur gibt es seit geraumer Zeit eine Anzahl solider Einführungen in die kommutative Algebra, nach dem klassischen Werk von Zariski-Samuel 1958/1960 (und Serre's Algèbre locale 1965) erschienen 1969/1970 die Bücher von Matsumura, Kaplansky sowie Atiyah-Macdonald, unter denen als Einführung besonders das letzte durch dichte Kürze und Würze besticht. In den letzten Jahren sind mit den Werken von Šafarevič, Mumford, Hartshorne und Griffiths-Harris auch hervorragende Einführungen in die algebraische Geometrie entstanden. Kann ein Buch wie das vorliegende neben dieser Konkurrenz bestehen?

Eine erste Antwort leitet sich daraus ab, daß man auf Grund der rasanten Entwicklung der letzten Jahrzehnte mit dem jetzigen Wissen eine etwa 200 Semester dauernde Vorlesung über kommutative Algebra und algebraische Geometrie halten könnte, ohne sich zu wiederholen. Dies bedeutet zum einen, daß Einführungen in dieses Gebiet immer wieder neu zu überarbeiten sind, um der Weiterentwicklung gerecht zu werden. Zum anderen nimmt auch die Zahl der Wege zu, die in dieses Gebiet hineinführen.

Das vorliegende, aus Regensburger Vorlesungen entstandene Buch wählt einen reizvollen Weg, der es deutlich von der bestehenden Literatur abhebt. Das Programm des Buches hat Herr Kunz bereits in einem DMV-Vortrag (Jber. d. Dt. Math.-Verein. 81 (1979) 97–108) vorgestellt. Das das ganze Buch durchsetzende Ziel ist die Behandlung der aus dem letzten Jahrhundert stammenden Frage nach der Anzahl der Gleichungen, die zur Beschreibung einer algebraischen Varietät nötig sind, und die Hinführung zu den in jüngerer Zeit hier erzielten zahlreichen schönen Resultaten, die sich vor allem nach der Lösung des Serreschen Problems über projektive Moduln einstellten.

Das Programm, dieser speziellen Frage mit ihren gelösten und ungelösten Teilproblemen nachzugehen, führt von selbst dazu, einen großen Teil der Grundbegriffe der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie in enger Verzahnung zu entwickeln, gegenseitige Einflüsse und Motivationen sichtbar zu machen und einen Grundstock für das weitere Eindringen in diese Gebiete zu legen. Obwohl der Schwerpunkt des Buches mehr in der kommutativen Algebra liegt, bleiben bei diesem Vorgehen allerdings einige elementare Aspekte der kommutativen Algebra unberücksichtigt wie Flachheit, Komplettierung, Differentiale, Hilbertpolynom, Multiplizitäten; die homologische Algebra wird auf die Verwendung projektiver Auflösungen und des Schlangenlemmas reduziert. So ist kein Nachschlagewerk für die Grundlagen der kommutativen Algebra (oder gar der algebraischen Geometrie) entstanden, sondern ein wohlgebahnter Pfad, der den nur mit Grundkenntnissen der Algebra ausgerüsteten Neuling durch einen essentiellen Teil der Grundlagen der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie hindurch bis zu Themen und Resultaten neuester Forschung führt, die noch in keinem Lehrbuch zu finden sind. Der elementar gehaltene, sorgfältig geschriebene Text wird wirksam ergänzt durch 187 reichhaltige Übungsaufgaben, deren Bearbeitung das Verständnis fördert und den Blickwinkel erweitert. Die anregenden Literaturhinweise für weiteres Studium am Ende jeden Kapitels erhöhen den Wert dieser Einführung.

Zum Inhalt: Die ersten 3 Kapitel behandeln Grundtatsachen über affine und projektive Varietäten, Dimensionstheorie, und die Funktionengarbe einer Varietät. Das 4. Kapitel über das Lokal-Global-Prinzip in der kommutativen Algebra enthält die ersten Spezialitäten: Das Lokal-Global-Prinzip für erweiterte Moduln von Quillen (hier nach Hochster aus dem Lokal-Global-Prinzip für Matrizenäquivalenz von Vaserstein abgeleitet) führt mit dem Freiheitssatz von Horrocks zu dem Freiheitsatz von Quillen-Suslin, der den Beweis der 20 Jahre offenen Vermutung von Serre erlaubt, wonach Vektorbündel über dem affinen n-dimensionalen Raum trivial sind. Serre's Abspaltungssatz für Vektorbündel wird aus einem Existenzsatz für nirgends verschwindende Schritte von Eisenbud-Evans hergeleitet, mit ähnlichen Methoden wird die lokale Abschätzung der globalen Erzeugendenanzahl eines Moduls nach Forster-Swan gezeigt. Kapitel 5 behandelt das Zielthema in erster Runde: Kroneckers Satz von 1882, daß jede Varietät im n-dimensionalen Raum mit n + 1 Gleichungen beschreibbar ist, wurde erst 1972/73 von Storch und Eisenbud-Evans optimiert: n Gleichungen genügen (und sind für 0-dimensionale Varietäten auch nötig). Krulls Hauptidealsatz zeigt, daß in Kodimension d mindestens d Gleichungen nötig sind. Genügen diese (und erzeugen das Ideal aller auf der Varietät verschwindenden Polynome), so spricht man von einem mengentheoretisch (idealtheoretisch) vollständigen Durchschnitt. Die idealtheoretisch vollständigen Durchschnitte werden verschieden charakterisiert; aus der Serreschen Vermutung ergeben sich Mohan Kumars Verschärfungen des Satzes von Forster-Swan, insbesondere der Beweis der Forsterschen Vermutung, daß das Ideal einer glatten affinen Varietät von n Elementen erzeugt werden kann. Kapitel 6 betrachtet reguläre und singuläre Punkte von Varietäten, insbesondere (in Verallgemeinerung des vollständigen Durchschnitts) Cohen-Macaulay-Ringe. Der Ungemischtheitssatz von Macaulay liefert Hartshornes Resultate über den Zusammenhang mengentheoretisch vollständiger Durchschnitte im projektiven Raum. Kapitel 7 schließlich stellt die homologische Kennzeichnung regulärer Ringe und lokal vollständiger Durchschnitte dar, sowie Serres Satz über die Erzeugendenzahl von Moduln der projektiven Dimension 1, der neue Kennzeichnungen lokal vollständiger Durchschnitte in Kodimension 2 liefert. Dies alles wird neben zentralen Sätzen aus Kap. 4 im letzten Paragraphen benutzt, um als einen Höhepunkt den Satz von Szpiro zu zeigen, wonach jede glatte Kurve im affinen 3-dimensionalen Raum Schnitt zweier Flächen ist, also mit 2 Gleichungen beschrieben werden kann. Die 1978 von Mohen Kumar erzielte n-dimensionale Verallgemeinerung dieses Satzes übersteigt die elementaren Methoden des Buches.

Dieser vielseitigen, klassische und moderne Themen der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie mischenden Einleitung seien fleißige Leser gewünscht, die hier die elementare, konkrete Natur von Objekten und Problemen erkennen können, die bisweilen in Mammuttheorien untergeht. Zugleich wird eine solide Basis und Anregung für das Studium der anspruchsvolleren Werke über algebraische Geometrie der letzten Jahre gelegt.

Erlangen W.-D. Geyer

Hartshorne, R., Algebraic Geometry (Graduate Texts, vol. 52), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1977 (corrected printing), 25 figs., xvi + 496 pp., cloth, DM 56,–

Das vorliegende Buch füllt eine lange empfundene Lücke in der mathematischen Lehrbuchliteratur aus, hat doch die algebraische Geometrie seit der durch Serre, Grothendieck u. a.

Mitte der 50er Jahre eingeleiteten stürmischen Entwicklung dort noch keinen adäquaten Niederschlag gefunden. Die Gründe dafür beschreibt der Autor in seiner Einleitung so: „The author of an introductory book on algebraic geometry has the difficult task of providing geometrical insight and examples, while at the same time developing the modern technical language of the subject. For in algebraic geometry, a great gap appears to separate the intuitive ideas which form the point of departure from the technical methods used in current research". Zwar wurde zuvor schon in anderen Büchern versucht, diese Lücke zu überbrücken (wie etwa in dem Buch von I. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, in englischer Übersetzung seit 1977 zugänglich), doch enthält keines dieser Bücher die wichtigen globalen Resultate der Cohomologietheorie mit ihren weitreichenden Folgerungen.

Das Programm für Hartshornes Buch ist einfach und naheliegend: Nach einer konkreten Einführung (ohne Garbentheorie) in die „klassische algebraische Geometrie" der affinen und projektiven Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper (Kap. I) werden die Theorie der Schemata in der Garbensprache (Kap. II) sowie die Cohomologietheorie für quasikohärente Garben bei Zugrundelegung der Zariski-Topologie (Kap. III) entwickelt und die so gewonnenen Methoden dann zu einer eleganten Behandlung der Kurven- (Kap. IV) und Flächentheorie (Kap. V) benutzt.

Jedes dieser fünf Kapitel würde Stoff für jeweils ein Buch liefern. Daß der Verfasser in bewundernswerter Weise dies alles in einem Buch (auf knapp 500 Seiten) untergebracht hat, wurde ermöglicht durch eine Reihe von Selbstbeschränkungen: Zunächst in der Methode: Es wird durchweg die kommutative Algebra als Grundlage gewählt. Lediglich in einem Anhang „Transzendente Methoden" wird die Brücke zur komplexen Analysis und zur Differentialgeometrie geschlagen. Dies ist umsomehr vertretbar, als über methodisch andere Zugänge zur Algebraischen Geometrie inzwischen ausgezeichnete Bücher vorliegen: D. Mumford, Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties, und P. Griffiths – J. Harris, Principles of Algebraic Geometry. Sodann in den vom Leser erwarteten Voraussetzungen: Die – im übrigen nicht sehr tiefliegenden – Hilfsmittel aus der kommutativen Algebra und homologischen Algebra werden ohne Beweis an den entsprechenden Stellen formuliert und mit exakten Literaturhinweisen versehen. Auch dies ist angesichts der vorhandenen vielfältigen Lehrbuchliteratur über diese Gegenstände vertretbar.

Schließlich vermeidet es der Autor, die technischen Hilfsmittel in größtmöglicher Allgemeinheit zu entwickeln. So beschränkt er sich bei Schemata auf noethersche Schemata, bei der Cohomologietheorie auf quasikohärente Garben und bei den globalen Hauptsätzen des III. Kapitels über Morphismen auf projektive Morphismen anstelle der allgemeineren eigentlichen Morphismen. Ferner beschränkt er sich in Beispielen oft auf den geometrisch wichtigsten Fall projektiver Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper. Nicht zuletzt erhält das Buch seinen großen Wert durch die mehr als 400 Übungsaufgaben und Probleme. In ihnen wird eine Fülle wichtiger neuer im Haupttext nicht behandelter Resultate dargeboten, und sie enthalten somit wichtige Ergänzungen. Zum anderen bringen sie Beispiele und Gegenbeispiele zur Erläuterung und Abgrenzung der allgemeinen Begriffe sowie Konkretisierungen der allgemeinen Sätze. Oft wird so auch die Kraft der gewonnenen Methoden durch Anwendung auf an früherer Stelle aufgeworfenen Fragen illustriert. Der Leser soll so zum aktiven Lernen angeleitet werden.

Im einzelnen enthält das I. Kapitel neben einer Einführung der Hauptgegenstände der algebraischen Geometrie, nämlich der Varietäten im affinen und projektiven Raum, die wichtigen Grundbegriffe Dimension, reguläre Funktion, Morphismus, rationale Abbildung, nichtsinguläre Varietät, Grad einer projektiven Varietät und Schnittmultiplizität. Schließlich werden viele Beispiele bereitgestellt, auf die bei der Weiterentwicklung der Theorie in den folgenden Kapiteln jeweils zurückgegriffen wird. Am Ende des Kapitels wird zur Motivation für das Folgende das „Klassifikationsproblem" diskutiert.

Das II. Kapitel enthält die Grundlagen der Theorie der Schemata. Dazu wird die Garbensprache kurz und knapp ab ovo entwickelt. Endlichkeitseigenschaften von Schemata und Morphismen, separierte und eigentliche Morphismen, quasikohärente und kohärente Modulgarben und Divisoren werden eingeführt und deren wichtigste Eigenschaften beschrieben. Projektive Morphismen, „ample" Geradenbündel, lineare Systeme und Aufblasungen werden studiert. Schließlich werden Differentialformen definiert, das Regularitätsverhalten untersucht, Bertinis Satz und die birationale Invarianz des geometrischen Geschlechts bewiesen. Das Kapitel schließt mit formalen Schemata.

Kernpunkt des Buches ist das III. Kapitel, das die Cohomologietheorie in der oben geschilderten Allgemeinheit enthält, insbesondere die Endlichkeitssätze für projektive Morphismen, Serres Dualitätssatz für projektive Varietäten, die Vergleichssätze für formale Kohomologie mit den Folgerungen Stein-Faktorisierung, Zusammenhangs-Prinzip und Zariskis Hauptsatz. Eingehend und mit vielen Beispielen werden flache und glatte Morphismen studiert, flacher Basiswechsel und die Halbstetigkeitseigenschaft behandelt.

Im IV. Kapitel werden die entwickelten allgemeinen Methoden auf Kurven angewandt: Der Satz von Riemann-Roch wird bewiesen. Kurven werden als verzweigte Überlagerung des $\mathbf{P}^1$ dargestellt, in den $\mathbf{P}^3$ eingebettet oder birational in $\mathbf{P}^2$ abgebildet, so daß das Bild nur einfache Doppelpunkte als Singularitäten besitzt. Schließlich werden elliptische Kurven studiert und kanonische Einbettungen behandelt. Klassifikationsfragen allgemein und die Klassifikation von Kurven im $\mathbf{P}^3$ werden angeschnitten.

Kapitel V gibt eine Einführung in die Theorie der algebraischen Flächen. Es werden die Schnitttheorie auf Flächen entwickelt und der Satz von Riemann-Roch bewiesen. Als Anwendungen erhält man das Index-Theorem von Hodge und ein Kriterium von Nakai-Moishezon für „ample" Divisoren auf Flächen. Regelflächen werden studiert und schließlich monoidale Transformationen, d.h. Aufblasungen in einem Punkt von Flächen. Der Faktorisierungssatz für birationale Abbildungen von Flächen und die „eingebettete Auflösung der Singularitäten" von Kurven auf Flächen werden bewiesen. Man erhält so die birationale Invarianz des arithmetischen Geschlechtes. Kubische Flächen im $\mathbf{P}^3$, insbesondere die 27 Geraden auf einer solchen werden ausführlich dargestellt. Das Kapitel schließt mit einem Ausblick auf die Klassifikation von Flächen.

Drei Anhänge über Schnitttheorie und den Satz von Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck, transzendente Methoden und die Weil-Vermutungen geben Ausblicke auf aktuelle Forschungen.

Dieses Buch ist gut lesbar und sowohl für den Experten wie für den Lernenden wertvoll. Auch dem Nichtspezialisten werden so wesentliche Ergebnisse und Methoden der algebraischen Geometrie, die heute mit vielen Gebieten der Mathematik in lebendiger Beziehung steht, zugänglich gemacht. Dem Autor ist für dieses schöne Buch zu danken.

Münster i. W. H.-J. Nastold

Schubert, H., Kalkül der abzählenden Geometrie (Reprint), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1979, 349 S., geb. DM 62,–

Die abzählende Geometrie ist vielleicht der älteste Zweig der algebraischen Geometrie und ein besonders interessantes Beispiel für die Entwicklung mathematischer Forschung. Viele ihrer Fragen und Probleme sind leicht zu stellen und zu begreifen, die sicheren Grundlagen für ihre Lösungen aber liegen tief. Schon das 2000 Jahre alte Problem des Apollonius gehört hierher: Wieviele Kreise berühren 3 gegebene Kreise in der Ebene? Steiner verallgemeinerte dieses Problem 1848 mit der Frage nach der Anzahl der Kegelschnitte, die 5 gegebene Kegelschnitte berühren. Da die einen festen Kegelschnitt berührenden Kegelschnitte eine Hyperfläche sechsten Grades im 5 dimensionalen Raum der Kegelschnitte bilden, nahm Steiner an, daß die Antwort seiner Frage

i. a. $6^5 = 7776$ lautete. Doch ist dies falsch, weil der Schnitt von 5 solchen Hyperflächen stets die Veronesesche Fläche enthält, die die in Doppelgeraden entarteten Kegelschnitte repräsentiert. Die außerhalb dieser Fläche isoliert liegenden Schnittpunkte liefern die eigentliche Lösung, es sind i. a. 3264 Stück, wie Chasles 1864 zeigte, der eine erste Theorie für Anzahlprobleme bei Kegelschnitten entwickelte (vgl. Kleiman: „Chasles's enumerative theory of conics. A historical introduction", lecture notes, Aarhus 1975).

Der Autor dieses zuerst 1879 bei Teubner erschienenen Buches ist der Oberlehrer Hermann Cäsar Hannibal Schubert (1848–1911), der bedeutendste Hamburger Mathematiker vor der Gründung der Hamburger Universität. Er wurde schon frühzeitig bekannt, als ihm die Dänische Akademie der Wissenschaften 1875 die goldene Medaille für die Beantwortung der Frage verlieh, wieviele kubische Raumkurven 12 gegebene quadratische Flächen berühren. Die Lösung dieser Preisaufgabe ist ein Höhepunkt dieses Buches, in dem Schubert Chasles' Ansätze zu einem virtuos gehandhabten Kalkül weiter entwickelt, den er an vielen Beispielen darstellt. Das Buch wurde zu einem Meilenstein der Entwicklung der algebraischen Geometrie. Die innere Konsistenz des Kalküls beeindruckte – nur war nicht ganz klar (auch Schubert nicht), warum er eigentlich funktionierte. Hilbert stellte die Frage nach den Grundlagen des Schubertschen Kalküls als 15tes seiner berühmten Pariser Probleme; über die Lösung dieses Problems durch van der Waerden u. a. und die Entwicklung der Theorie der Schnittmultiplizitäten kann bei Kleiman in dem AMS-Band über die Hilbertschen Probleme (Proc. Symp. Math. 28 (1976)) nachgelesen werden.

Vorangestellt ist dem Nachdruck ein 12seitiges Vorwort von Kleiman sowie eine von Burau zusammengestellte Liste der wissenschaftlichen Publikationen Schuberts, die die Breite seiner Interessen verdeutlicht und insbesondere Zeugnis ablegt für seine Bemühungen um die Verbindung von Schule und Hochschule und um die Elementarmathematik, ohne daß er aufgehört hätte, die abzählende Geometrie weiter zu treiben. Der Frage „Wo finden wir heute solche Lehrer?" muß gerechterweise eine zweite zur Seite gestellt werden „Wo haben heute Studienräte noch so viel Zeit zur wissenschaftlichen Betätigung wie die früheren Oberlehrer?"

Im Mathematischen Wörterbuch von Naas-Schmid sucht man Schuberts Namen vergeblich, in dem aus Japan stammenden Encyclopedic Dictionary of Mathematics werden die Schubert-Zyklen der Grassmann-Mannigfaltigkeit dem Topologen Horst Schubert unterschoben! Der Nachdruck eines 100 Jahre alten Werkes kann hier aufklärend wirken, aber es ist nicht das historische Interesse allein, was den Nachdruck attraktiv macht. In einer Zeit der Abkehr von zu formalen Konstruktionen und Hinwendung zu konkreten geometrischen Problemen liefert uns Schuberts Buch umfangreiches Beispielmaterial, das von der modernen algebraischen Geometrie noch lange nicht geklärt und aufgearbeitet ist. Hier winkt noch manche Frucht dem, der sich in Schuberts Rechnungen vertieft.

Erlangen W.-D. Geyer

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Hinweise für Autoren

Für den Abdruck vorgesehene Manuskripte sind in einwandfrei leserlicher und völlig satzfertiger Form (einseitig beschriebenes Manuskript, Schreibmaschinenschrift 1 1/2-zeilig) und entsprechend den nachstehenden Richtlinien ausgezeichnet einzureichen.

Der Beginn von Absätzen oder neuen Abschnitten sollte deutlich durch Einrücken gekennzeichnet sein. In jedem Fall sollte ein Hinweis für den Setzer, in dem alle Besonderheiten aufgeführt sind, beigefügt werden.

Ferner sollten die Manuskripte entsprechend dem Subject Classification Schemes der Mathematical Reviews (AMS/MOS) klassifiziert sein. Am Ende der Manuskripte sollte die genaue Anschrift des oder der Verfasser angegeben werden. Zuschriften sowie die Versendung der Korrekturabzüge erfolgen, sofern nicht anders vermerkt, immer an den erstgenannten Autor.

Zeichnungen sollten fortlaufend numeriert werden und auf gesonderten Blättern in Form von klaren Bleistiftzeichnungen im richtigen maßstäblichen Verhältnis möglichst in doppelter Größe dem Manuskript beigefügt werden. Am linken Rand des Textes sollte ein Hinweis auf die jeweils einzufügende Figur angebracht werden.

Fußnoten sollten auf der jeweiligen Seite, auf die sie Bezug nehmen, angebracht werden (nicht am Ende des Textes). Literatur sollte in folgender Weise zitiert [1] und dann am Ende des Textes in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt werden. Verweise sollten in folgender Form vorgenommen werden:

[1] N e v e n , J.: Martingale Problems. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 79 (1957) 175–180

[2] W i t t e n b u r g , J.: Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner 1977. = Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 33.

Um eine rasche Veröffentlichung zu erreichen, erhalten die Autoren nur einen Korrekturabzug. Die Autoren werden gebeten, nur Druckfehler zu korrigieren. Sollten weitere Korrekturen wie Einfügungen oder Streichungen vorgenommen werden, müssen diese dem Autor berechnet werden. Die von den Autoren durchgesehenen Korrekturabzüge sind umgehend an den Herausgeber zurückzusenden.

Die Autoren erhalten von ihren Arbeiten nach Veröffentlichung 75, von Buchbesprechungen 2 Sonderdrucke unentgeltlich. Zusätzliche Sonderdrucke können gegen entsprechende Berechnung zum Zeitpunkt der Rückgabe der Korrekturen bestellt werden.

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Auszeichnungen für den Satz

Die im Manuskript enthaltenen Formelbuchstaben werden generell steil gesetzt. Besondere Schriftarten sind entsprechend den folgenden Richtlinien farblich auszuzeichnen.

gestrichelte schwarze Unterstreichung	– S p e r r u n g
doppelte schwarze Unterstreichung	– **halbfett** (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in Formeln)
grüne Unterstreichung	– *kursiv* (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in den Formeln)
doppelte grüne Unterstreichung	– **halbfette lateinische Buchstaben** (in Formeln)
rote Unterstreichung	– griechische Buchstaben
lila Unterstreichung	– Groteskbuchstaben
doppelte lila Unterstreichung	– halbfette Groteskbuchstaben z. B. für **R, N, C** usw.
blaue Unterstreichung*)	– Fraktur
gelbe Unterstreichung	– Großbuchstabe O (zur Unterscheidung von der Ziffer Null)
gelb eingekastelt*)	– Skript
lila eingekastelt	– logische und mengentheoretische Symbole wie z. B. $\exists$, $\forall$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, sowie Malkreuz x und Verknüpfungszeichen $\circ$
grün eingekastelt	– Kleinbuchstabe ℓ (zur Unterscheidung zur Ziffer eins (1))

Die Bezeichnungen Theorem, Lemma, Korollar, Proposition, Definition usw. werden üblicherweise halbfett gesetzt. Der danach folgende Text (bis auf Formelbuchstaben) wird kursiv gesetzt. Die Bezeichnungen Beweis, Bemerkung, Hinweis usw. werden normal gesetzt, jedoch gesperrt. Der nachfolgende Text wird in normaler Schrift gesetzt.

Mathematische Formeln sollten so deutlich geschrieben werden, daß kein Mißverständnis möglich ist. Die Autoren werden gebeten, insbesondere deutlich zu unterscheiden zwischen Großbuchstaben und Kleinbuchstaben, Null sowie kleinem o und großem O, griechischen Buchstaben φ, Φ, κ, K, θ, Θ, Strich (z. B. Ableitungsstrich) und Apostroph. Ferner sollte darauf geachtet werden, daß keine Verwechslung zwischen k, K, r, u, v (lateinisch) und κ, μ, ν (griechisch) sowie $\in$ und ϵ (griechisch) möglich ist.

*) Von der Verwendung dieser Schriftarten ist beim Composersatz nach Möglichkeit abzusehen.

B. G. Teubner, Postfach 80 10 69, D-7000 Stuttgart 80

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e. V.

Jahreschronik der DMV für 1978

1 Ämter und Gremien

1.1 in der DMV

Der Vorsitzende wird aus dem Präsidium und von diesem für 1 Jahr gewählt. Der Vorstand (Schriftführer, Schatzmeister und Geschäftsführender Herausgeber des Jahresberichts) und das achtköpfige Präsidium werden von der Mitgliederversammlung gewählt. Die Amtsperiode der Vorstandsmitglieder dauert drei, die der Präsidiumsmitglieder vier Jahre, derart, daß jährlich ein Vorstandsamt und zwei Präsidiumssitze zur Wahl anstehen.

Als ständige Gäste beraten das Präsidium: Der Vorsitzende der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) und der Direktor des Mathematischen Forschungsinstitutes Oberwolfach; ferner nimmt der Vorsitzende der Konferenz der Mathematischen Fachbereiche („Dekane-Konferenz") an den Präsidiumssitzungen teil, soweit keine Personalfragen anstehen.

1978 waren die Ämter wie folgt besetzt:

Vorsitzender	*Witting*
Schriftführer	*Tietz*
Schatzmeister	*Grotemeyer*
Geschäftsführender Herausgeber	*Benz*

Präsidium	*Dold*		*Kirchgässner*
	Ebbinghaus		*Koecher*
	G. Fischer		*Kunle*
	Helmberg		*Witting*
Gäste	*Grosser*	bzw.	*Gruber* (ÖMG)
	Barner (Oberwolfach)		
	Pareigis (Fachbereichs-Konferenz)		

1.2 in anderen Organisationen

1.2.1 Herr *H. Werner* gehörte einem vorläufigen Komitee an, das über die Gründung einer European Mathematical Federation beraten sollte. Es hat zunächst die Gründung eines satzungsfreien European Mathematical Council (EMC) beschlossen, das in einem Probelauf von vier Jahren diese Frage klären wird.

1.2.2 Die Herren *Barner, Bauer, Grotemeyer, Tietz* und *Witting* nahmen auf der Sitzung der IMU - General Assembly, die am 11. und 12. August 1978 in Otaniemi (Finnland) stattfand, die Stimmen Westdeutschlands wahr.

Herr *Kneser* wurde für weitere vier Jahre in die Executive Commission der IMU gewählt.

2 Jahrestagung und Mitgliederversammlung

2.1 Auf der Jahrestagung, die vom 1.–6. Oktober in Aachen stattfand, wurden die folgenden Hauptvorträge gehalten:

H. J. M. Bos, Utrecht	Mathematics in the Eighteenth Century
U. Felgner, Tübingen	Kategorizität
E. Kunz, Regensburg	Über die Anzahl der Gleichungen, die zur Beschreibung einer algebraischen Varietät erforderlich sind
P. Lax, New York	Scattering Theory
J. L. Lions, Paris	Asymptotic Analysis in Periodic Structure Theory, Numerical Analysis, Applications
H. Mäurer, Darmstadt	Neuere Ergebnisse zur Geometrie der Quadriken
F. Takens, Groningen	Global Aspects in Bifurcation Theory
W. R. van Zwet, Leiden	Edgeworth Expansions in Statistics
R. Walter, Dortmund	Konvexität in Riemannschen Mannigfaltigkeiten
D. Wolke, Freiburg	Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion

2.2 Die Mitgliederversammlung fand während der Jahrestagung am 4. Oktober statt.

2.2.1 Herr *Jacobs* wird als Nachfolger von Herrn *Benz* zum neuen Geschäftsführenden Herausgeber in den Vorstand gewählt. Nachwahlen in das Präsidium: *R. Walter* (als Nachfolger von *H. Kunle*) und *M. Koecher* (Wiederwahl).

2.2.2 Das vom Präsidium beschlossene neue Konzept für den Jahresbericht, das den Mitgliedern bereits auf der Mitgliederversammlung 1977 und durch das als „Pilotheft" im Juni 1978 versandte Heft 1/81 vorgestellt worden war, wurde von der Mitgliederversammlung gebilligt, indem der folgende Beschluß gefaßt wurde:

„Die Mitgliedschaft der DMV schließt künftig den Bezug des Jahresberichts der DMV ein. Diese Regelung wird auf der Mitgliederversammlung 1981 erneut zur Diskussion gestellt werden. Der Mitgliedsbeitrag beträgt DM 60,–".

2.2.3 Die Mitgliederversammlung bat den Vorsitzenden, sich im Namen der DMV für die Mathematiker Massera (Uruguay) und Bolonkin (UdSSR), die politischen Pressionen ausgesetzt sind, zu verwenden.

3 Aktivitäten der DMV

3.1 Das Präsidium appellierte an die Mitglieder und rief zu einer einmaligen Spende von mindestens DM 10,– für den IMU-Development-Fund auf; dieser Fond wurde von der IMU eingerichtet, um durch ihn die Entfaltung der Mathematik in Entwicklungsländern anzuregen und zu fördern.

3.2 Das Präsidium hat – unter der Federführung von Herrn *Kunle* – eine Lehrerbildungskommission eingesetzt mit dem Auftrag, Empfehlungen für die universitäre Ausbildung künftiger Mathematiklehrer zu erarbeiten und damit die Bemühungen um den Mathematikunterricht, die die DMV 1976 mit der Herausgabe ihrer „Denkschrift zum Mathematikunterricht an Gymnasien" manifestiert hat, fortzusetzen.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e. V.

Jahreschronik der DMV für 1979

1 Ämter und Gremien

1.1 in der DMV

Vorsitzender		*Witting*
Schriftführer		*Tietz*
Schatzmeister		*Grotemeyer*
Geschäftsführender Herausgeber		*Jacobs*
Präsidium	*Dold*	*Kirchgässner*
	Ebbinghaus	*Koecher*
	G. Fischer	*R. Walter*
	Helmberg	*Witting*
Gäste	*Gruber* (ÖMG)	
	Barner (Oberwolfach)	
	Pareigis bzw. *Winkler* (Fachbereichs-Konferenz)	

1.2 in den anderen Organisationen

1.2.1 Herr *Dold* vertritt die DMV im EMC (European Mathematical Council).

1.2.2 Das „Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete" ist vom FIZ-4 (Fach- und Informations-Zentrum) übernommen worden, nachdem die Akademie der Wissenschaften der DDR die Zusammenarbeit mit der Heidelberger Akademie der Wissenschaften aufgekündigt hatte; Herr *Habetha* wurde in den FIZ-Benutzerrat gewählt.

2 Jahrestagung und Mitgliederversammlung 1979

2.1 Die Jahrestagung fand vom 16.–21. September in Hamburg statt. Es wurden die folgenden Übersichtsvorträge gehalten:

H. Amann, Kiel	Funktionalanalysis und nichtlineare Differentialgleichungen
V. Baumann, Bochum	Stand und Möglichkeit einer Weiterentwicklung der Mathematischen Statistik
J. W. S. Cassels, Cambridge	Rationale quadratische Formen

K. Diederich, Wuppertal	Konvexität in der komplexen Analysis Neue Ergebnisse und Methoden
J. Elstrodt, Münster	Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen
J. E. Fenstadt, Oslo	Non-standard methods in stochastic analysis and mathematical physics
L. Gårding, Lund	Microlocal analysis of distributions
M. Knebusch, Regensburg	Signaturen, reelle Stellen und reduzierte quadratische Formen
H.-O. Kreiss, Uppsala	Numerical methods for hyperbolic partial differential equations
H. H. Schaefer, Tübingen	Ordnungsstrukturen in der Operatorentheorie
E. Vogt, Berlin	Blätterungen, deren Blätter alle kompakt sind
D. T. Whiteside, Cambridge	Isaac Newton: Dynamic Mathematician

Erstmalig wurden zwei Arbeitsgemeinschaften über aktuelle Gebiete der mathematischen Forschung abgehalten, und zwar

M. Knebusch, Regensburg W. Scharlau, Münster	Algebraische Theorie der quadratischen Formen
K. Diederich, Wuppertal I. Lieb, Bonn	Konvexität in der komplexen Analysis Neue Ergebnisse und Methoden

Darüberhinaus fand erstmalig ein Nachmittag für Industriemathematiker statt.

2.2 Auf der Mitgliederversammlung, die am 20. September stattfand, wurde Herr *Wallisser* als Nachfolger von Herrn *Tietz* zum neuen Schriftführer in den Vorstand gewählt. Die Herren *Kirchgässner* und *Witting* wurden für weitere 4 Jahre in das Präsidium gewählt.

3 Aktivitäten der DMV

3.1 Die DMV hat den Internationalen Mathematiker-Kongreß 1982 nach Hamburg eingeladen. Die Initiative ging vom Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg aus; Herr Riemenschneider hatte sich bereit erklärt, die Organisation zu übernehmen; die Freie und Hansestadt Hamburg sowie die Deutsche Forschungsgemeinschaft hatten in großzügiger Weise Unterstützung zugesagt. Unsere Bewerbung hat in der engeren Wahl gestanden; die IMU entschied sich jedoch zugunsten von Warschau, nachdem der Kongreß mehrere Male nicht im Ostblock stattgefunden hatte.

3.2 Die Lehrerbildungskommission hat unter der Federführung von Herrn *Kunle* die Denkschrift „Zur Ausbildung von Studierenden des gymnasialen Lehramts im Fach Mathematik" fertiggestellt. Das Präsidium hat die Denkschrift verabschiedet und allen Mitgliedern und mathematischen Fachbereichen zugesandt.

3.3 Dem IMU-Development Fund wurden DM 4.800,– überwiesen.

3.4 Amnesty International teilte mit, daß Herr Bolonkin seit der DMV-Intervention besser behandelt würde.

4 Organisation

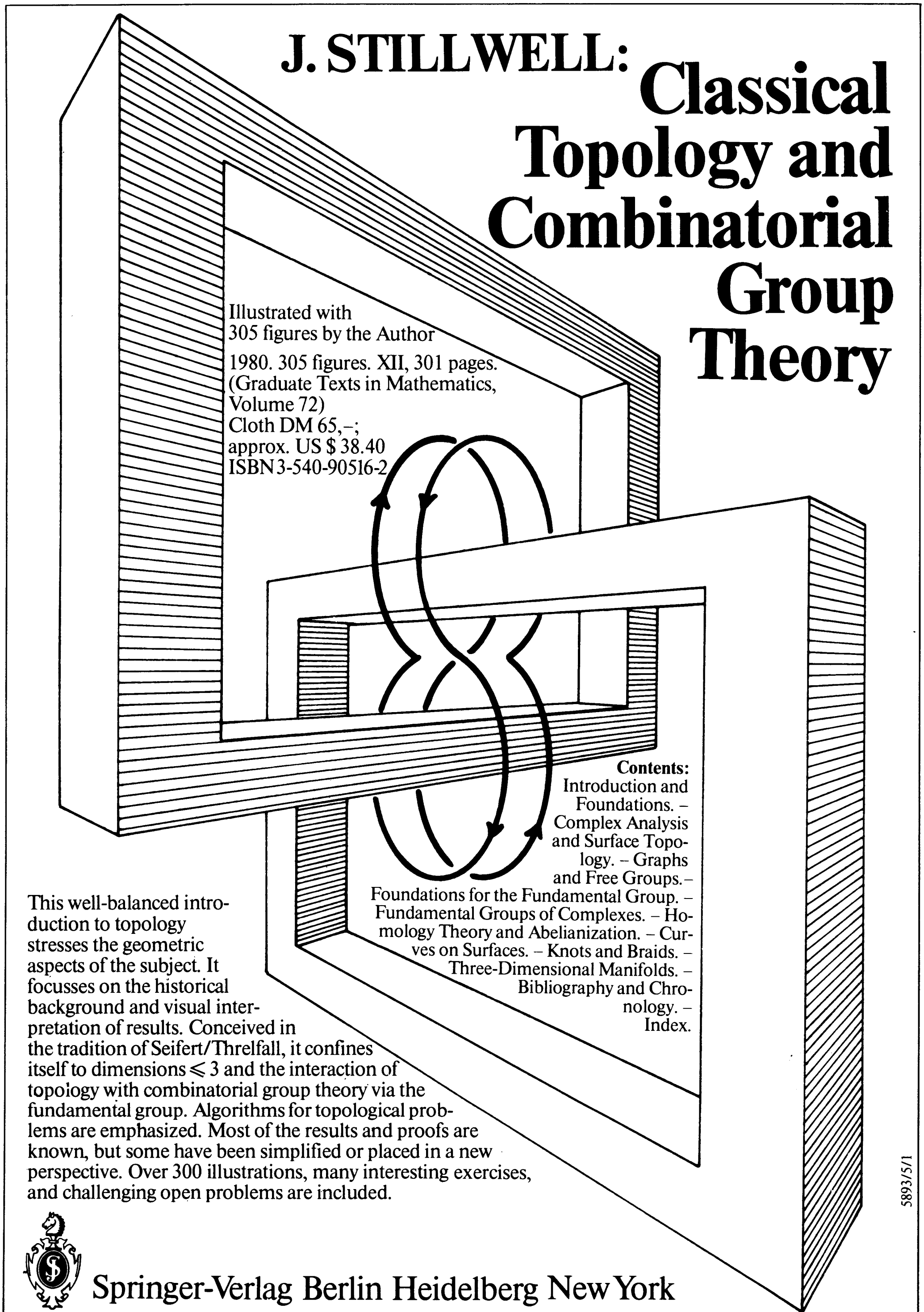
4.1 Eine Geschäftsstelle der DMV wurde eingerichtet:
Albertstr. 24, D-7800 Freiburg

4.2 Der neugewählte Schriftführer, Herr *Wallisser,* wird mit der Geschäftsstelle zusammenarbeiten und die Schriftleitung der Mitteilungen der DMV übernehmen.

5 Gegenseitigkeitsabkommen

Die DMV unterhält gegenwärtig Reziprozitätsabkommen mit folgenden mathematischen Fachverbänden:

American Mathematical Society
Australian Mathematical Society
London Mathematical Society
Societé Mathématique de Belgique
Societé Mathématique de France
Unione Matematica Italiana
Schweizerische Mathematische Gesellschaft


J. STILLWELL: Classical Topology and Combinatorial Group Theory
Illustrated with 305 figures by the Author
1980. 305 figures. XII, 301 pages.
(Graduate Texts in Mathematics, Volume 72)
Cloth DM 65,–; approx. US $ 38.40
ISBN 3-540-90516-2
Contents:
Introduction and Foundations. – Complex Analysis and Surface Topology. – Graphs and Free Groups. – Foundations for the Fundamental Group. – Fundamental Groups of Complexes. – Homology Theory and Abelianization. – Curves on Surfaces. – Knots and Braids. – Three-Dimensional Manifolds. – Bibliography and Chronology. – Index.
This well-balanced introduction to topology stresses the geometric aspects of the subject. It focusses on the historical background and visual interpretation of results. Conceived in the tradition of Seifert/Threlfall, it confines itself to dimensions ⩽ 3 and the interaction of topology with combinatorial group theory via the fundamental group. Algorithms for topological problems are emphasized. Most of the results and proofs are known, but some have been simplified or placed in a new perspective. Over 300 illustrations, many interesting exercises, and challenging open problems are included.
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
5893/5/1