

83. Band Heft 3
ausgegeben am 15. 7. 1981

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer



B. G. Teubner Stuttgart 1981

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 83/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 74,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69

D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 73 30 76

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: The appearance of the code at the bottom of the first page of an article in this journal indicates the copyright owner's consent that copies of the article may be made for personal or internal use, or for the personal or internal use of specific clients. This consent is given on the condition, however, that the copier pay the stated percopy fee through the Copyright Clearance Center, Inc., P. O. Box 765, Schenectady, New York 12301, for copying beyond that permitted by Sections 107 or 108 of the U.S. Copyright Law. This consent does not extend to other kinds of copying, such as copying for general distribution, for advertising or promotional purposes, for creating new collective works, or for resale.

© B. G. Teubner Stuttgart 1981 – Verlagsnummer 2896/3

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Gesamtherstellung: Schwetzingen Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 83, Heft 3

1. Abteilung

O. Krafft: Dual Optimization Problems in Stochastics	97
W. Barth: Algebraische Vektorbündel	106
M. Kracht: Maximilian Pinl in memoriam	119
H. Rohrbach: Richard Brauer zum Gedächtnis	125
E. Hölder: Lichtensteins wissenschaftliche Wirksamkeit	135

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Milne, J. S., Étale Cohomology (<i>G. Tamme</i>)	33
Grauert, H., Remmert, R., Theorie der Steinschen Räume; Grauert, H., Remmert, R., Theory of Stein Spaces (<i>G. Fischer</i>)	35
Hlawka, E., Theorie der Gleichverteilung (<i>K. Jacobs</i>)	36
Arnold, V. I., Gewöhnliche Differentialgleichungen (<i>Th. Bröcker</i>)	37
Hille, E., Ordinary Differential Equations in the Complex Domain (<i>H. Wittich</i>)	37
Colton, D. L., Solutions of Boundary Value Problems by the Method of Integral Operators (<i>R. P. Gilbert</i>)	39
Arnold, V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics (<i>E. Zehnder</i>)	39
Lindenstrauss, J., Tzafriri, L., Classical Banach Spaces II – Function Spaces (<i>H. H. Schaefer</i>)	40
Heyde, C. C., Senata, E., I. J. Bienaymé: Statistical Theory Anticipated (<i>K. Jacobs</i>)	41
Wentzell, A. D., Theorie zufälliger Prozesse (<i>W. Stute</i>)	41
Dynkin, E. B., Yushkevič, A. A., Controlled Markov Processes (<i>P. Mandl</i>)	42
Heyer, H., Einführung in die Theorie Markoffscher Prozesse (<i>H. Rost</i>)	43
Rauhut, B., Schmitz, N., Zachow, E.-W., Spieltheorie – Eine Einführung in die mathe- matische Theorie strategischer Spiele (<i>K. Jacobs</i>)	43
Fiorini, S., Wilson, R. J., Edge-Colourings of Graphs (<i>W. Mader</i>)	44
Ahlsvede, R., Wegener, I., Suchprobleme (<i>K. Jacobs</i>)	44
Franklin, J., Methods of Mathematical Economics (<i>W. Vogel</i>)	45
Elliott, P. D. T. A., Probabilistic Number Theory. I. Mean Value Theorems – II. Central Limit Theorems (<i>K. Jacobs</i>)	46

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

J. Frehse: Capacity Methods in the Theory of Partial Differential Equations

E. Härtter: Alfred Stöhr 1916–1973

S. Kobayashi: Recent Results in Complex Differential Geometry

E. Kunz; H.-J. Nastoldt: In Memoriam Friedrich Karl Schmidt

O. Perron †: Heinrich Tietze 31. 8. 1880–17. 2. 1964

K. Seebach: Verzeichnis der unter H. Tietze angefertigten Dissertationen und Verzeichnis der Veröffentlichungen

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint. Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N. Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Dual Optimization Problems in Stochastics*)

O. Krafft, Aachen

1 Introduction

The term “dual” appears in a variety of meanings in almost all branches of mathematics. In its simplest form it only means “two” (e.g. dual numbers), in a broader sense it signifies a strong connection between formally different notions (e.g. dual spaces, functionals, graphs, homomorphisms etc.). If mathematical propositions remain true when certain pairs of notions are interchanged, one talks of “duality principles”. One of many examples is the following, cf. Oxtoby [36], p. 80: “A subset of \mathbf{R}^1 is a nullset if its intersection with every set of first category is countable” and its dual “a subset of \mathbf{R}^1 is of first category if its intersection with every nullset is countable”. The mathematician feels very much at ease with such principles, since he obtains unification by forming pairs. Moreover, they provide heuristic means for finding new theorems. Another mode of duality – a maximis ad minima – can be found in optimization theory. A simple example which may be thought of as the origin of many abstract concepts is the following, cf. Beckenbach, Bellman [3], p. 124: Let R be a convex region and p be a point outside R . Then a point $q_0 \in R$ which has minimum distance to p has the property that the line pq_0 is orthogonal to the tangent plane T_0 at q_0 . Conversely, if one seeks under all tangent planes to R one for which the distance to p is maximal, a (local) maximum is given by T_0 . Thus the minimum and the maximum problem are dual to each other and (q_0, T_0) is a common solution. The basic question arising for general optimization problems is to find mathematical objects which satisfy such a duality relation. The most elegant results in that direction have been obtained by considering dual spaces and conjugate functionals, cf. e.g. Kretschmer [33], Dieter [8], Rockafellar [41] or van Slyke and Wets [56]. Such results, however, cover only a part of the problems appearing in applications. For instance, they are not tailored to discrete problems and the literature on duality for integer programming is only in status nascendi, cf. e.g. Tind [52]. Far reaching consequences of a dual pairing have been obtained in *linear* programming: Let $c \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ be given. The problem

$$(1.1) \quad \min \{ c^T x : x \in \mathbf{R}^n, x \geq 0, Ax \geq b \}$$

has been dualized by von Neumann, cf. Dantzig [6], p. 29, to

*) Hauptvortrag auf der Jahrestagung 1980 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Dortmund.

$$(1.2) \max \{b^T y: y \in \mathbf{R}^m, y \geq 0, A^T y \leq c\}$$

and the corresponding duality theorem is equivalent to the minimax theorem for two-persons-zero-sum matrix games. For this kind of problems a practical aspect of duality is the possibility to use that of both forms which is more suitable for a computer. Another aspect, observed by economists, is that if a real life problem can be formulated as a linear programming problem then the dual problem must have a reasonable interpretation as a real life problem, too. Impressive examples are the transportation or the diet problem, cf. e.g. Dorfman, Samuelson, Solov [9], p. 122, p. 45, or as a more recent discovery, the duality relation between index numbers and utility functions, cf. Samuelson, Swamy [45]. Another important aspect is that the structure of dual problems yields in many cases conclusions on the structure of optimal solutions. The last two aspects for problems in statistics and probability theory have already been emphasized in [29]; the concepts of most powerful tests at level α , the Kullback-Leibler information measure, Tchebycheff-bounds and the normal-distribution were suitable objects. For a more exhaustive treatment of variational methods in statistics we refer to Rustagi [44]. In the following sections we will continue the series of examples.

2 Minimum correlation

Let $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ be a probability space, $\Omega = \sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n B_j$, $A_i, B_j \in \mathfrak{A}$,

be two partitions of Ω and $X(\omega) = \sum_{i=1}^m x_i 1_{A_i}(\omega)$, $Y(\omega) = \sum_{j=1}^n y_j 1_{B_j}(\omega)$ be two

random variables whose distributions P^X and P^Y are given by $P(A_i) = p_i$, $1 \leq i \leq m$, and $P(B_j) = q_j$, $1 \leq j \leq n$. The problem is to determine P in such a way that the correlation between X and Y becomes a minimum. In a more general setting, this problem is relevant for instance in the theory of Monte Carlo methods, cf. Hammersley, Handscomb [19], p. 61. Putting $p_{ij} = P(A_i B_j)$, we get the optimization problem

$$(2.1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j p_{ij} = \min$$

subject to the conditions

$$(2.2) \sum_{j=1}^n p_{ij} = p_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=1}^m p_{ij} = q_j, \quad 1 \leq j \leq n, \\ p_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

(2.1–2) is formally equivalent to a special case – transportation costs factorize into $c_{ij} = x_i y_j$ – of the transportation problem mentioned in the introduction. This was first noted by Fréchet [11]. Some further contributions on this connection with

the transportation problem are Herzel [21], Féron [10] and [31]. Besides this, (2.1–2) has some other interesting aspects:

(a) If one considers via (1.2) the dual problem to (2.1–2) it becomes in stochastic terminology: Find real random variables U and V with the same regions of constancy as X and Y , resp., i.e. $U(\omega) = \sum_{i=1}^m u_i 1_{A_i}$, $V(\omega) = \sum_{j=1}^n v_j 1_{B_j}(\omega)$, such that

$$(2.3) \quad E_P(U - V) = \max$$

subject to the conditions

$$(2.4) \quad V(\omega) - U(\omega) \leq X(\omega)Y(\omega),$$

for all $\omega \in \Omega$

$$U(\omega) \geq 0, \quad V(\omega) \geq 0.$$

Here E denotes the expectation operator. Comparing this with the original problem, one sees that the variation in the common probability density p_{ij} can be replaced by a variation in the values of random variables which can be attained on the regions A_i and B_j , respectively. Furthermore, by the duality theorem, the minimal correlation can be expressed by a maximal difference of expectations (plus the constant EXY). This duality relation has also been used by Hailperin [17] to solve, inter alia, the following problem: Find in the unit square three sets A_1, A_2 and A_3 with prescribed area $F(A_i) = a_i$, $1 \leq i \leq 3$, such that the area of their symmetric difference $A = A_1^c A_2 A_3 + A_1 A_2^c A_3 + A_1 A_2 A_3^c$ becomes maximal. Writing probability for area and event for set, one gets a problem very similar to (2.1–2), cf. also (c).

(b) The problem of minimum correlation, if generalized to arbitrary real random variables X and Y , is closely related to the problem of finding in the set \mathcal{F} of two dimensional distribution functions $F(x_1, x_2)$ with prescribed marginal distributions $F_1(x_1), F_2(x_2)$ an element F^* which satisfies

$$F^*(x_1, x_2) \leq F(x_1, x_2) \text{ for all } F \in \mathcal{F} \text{ and all } x_1, x_2 \in \mathbf{R}^1.$$

The relation between both problems is – besides statistical motivation – that they have the same solution, namely

$$(2.5) \quad F^*(x_1, x_2) = \max \{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\}.$$

The first contribution to the minimum correlation problem is by Hoeffding [22], who exhibited (2.5). More general measures of distances between distributions and related extremal problems have been discussed by Fréchet [12], Dall'Aglio [5], Cambanis et al. [4] and Rüschemdorf [42], their connection with the problem of rearrangements of functions is treated in Whitt [57], Rüschemdorf [43] and Tchen [51].

The first systematic study of the set \mathcal{F} , a so-called Fréchet class, is by Fréchet [11]. If one considers Fréchet classes with higher dimensional marginal distributions, the problem of compatibility appears, i.e. the problem whether \mathcal{F} is void or not. Important contributions to this problem are due to Kellerer [27],

Strassen [50] and, unifying their results, Hansel and Troallic [20]. An easy to read exposition of the last paper can be found in Jacobs [25], Appendix B.

(c) Whereas problems (2.1–2) and (2.3–4) are linked by (1.1) and (1.2), no such canonical duality is given if one considers generalizations of (2.1–2). Using results of Isii [24], a rather wide extension could be given by Gaffke and Rüschen-dorf [15]. Let E be a compact metric space, $\phi: E^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ be continuous and let P_1, \dots, P_n be probability measures on the Borel- σ -algebra $\mathfrak{B}(E)$ on E . Let $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, \dots, P_n)$ be the set of all probability measures on $\mathfrak{B}^n(E)$ with marginals P_1, \dots, P_n . They show that

$$(2.6) \quad \inf\{\int \phi \, dP : P \in \mathcal{F}\} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \int f_i \, dP_i : f_i \in C(E), 1 \leq i \leq n, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \leq \phi(x) \text{ for all } x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n \right\}.$$

Putting $E = \{0, 1\}$, and taking for P_i , $1 \leq i \leq 3$, the binomial $\mathfrak{B}(1, a_i)$ -distributions and

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 (x_3 - 1) + x_1 (x_2 - 1) x_3 + (x_1 - 1) x_2 x_3$$

as a special case one has Hailperin's problem discussed in (a). From the many consequences of the duality theorem (2.6) only a curious one shall be quoted: For any real, integrable function f on $[0, 1]$ and any $n \geq 2$ one has

$$\int_0^1 f(x) \, dx \leq \sup \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) : x_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n}{2} \right\}.$$

3 Optimum designs and extremum ellipsoids

In the theory of experimental design, one of the main branches of applied statistics, various concepts have been proposed to measure the efficiency of a design. Roughly spoken a design is the set of quantitative conditions under which an experiment is performed. For certain classes of experiments by abstraction and approximation a design can be defined as a probability measure ξ on a compact set $K \subset \mathbf{R}^k$, K being the experimental region. Two concepts of optimality play a prominent role. We give here only the definitions and refer for motivation and background to [30], chap. 5.

Definition Let K be a compact set in \mathbf{R}^k and Ξ be the set of probability measures on K \mathfrak{B}^k for which the information matrix

$$M(\xi) = \int_K x x^T \, d\xi(x)$$

is regular. $\xi^* \in \Xi$ is called a D-optimum design iff

$$\det M(\xi^*) \geq \det M(\xi) \text{ for all } \xi \in \Xi.$$

$\xi^* \in \Xi$ is called a G-optimum design iff

$$\sup_{x \in K} d(x, \xi^*) \leq \sup_{x \in K} d(x, \xi) \text{ for all } \xi \in \Xi,$$

where $d(x, \xi) = x^T M^{-1}(\xi)x$.

We have chosen these two concepts here in order to illustrate how a duality relation stemming from rather applied ideas lead to a nice duality relation in geometry. The main result concerning D- and G-optimum designs is due to Kiefer and Wolfowitz [28], who proved their equivalence with the help of convexity arguments. Another proof, using the minimax theorem of game theory, has been given by Karlin and Studden [26], p. 326, and a generalization has been obtained by Whittle [58]. Algorithmical aspects of this problem have been discussed by Gribik and Kortanek [16]. In a penetrating paper Pukelsheim [38] has recently generalized, supplemented and corrected most of the work which has been done in this area. Especially, the case of singular information matrices and other optimality criteria – if λ_i are the characteristic roots of $M(\xi)$, then the determinant is a special case of the means $(\sum \alpha_i \lambda_i^t)^{1/t}$ of order t , $-\infty \leq t \leq \infty$ – are treated, too. Some of his results stem from geometrical considerations to be described in the following. Consider ellipsoids of the form $d(x, \xi) \leq k$. Since $\int_K d(x, \xi) d\xi = k$, typically such an ellipsoid intersects K , but does not circumscribe K . From the Kiefer-Wolfowitz equivalence theorem follows that there is an ellipsoid of the above form which circumscribes K . It is found by *maximizing* the content of all such ellipsoids. This has been observed by Silvey [48] who also conjectured that one should have the same result, if one looks for an ellipsoid of *minimum* content, centered on the origin and containing K . In geometry this last ellipsoid is known as Löwner-ellipsoid, cf. Danzer, Laugwitz and Lenz [7]. This conjecture has been settled by Sibson [46] and exploited and extended in various directions by Sibson [47], Silvey and Titterington [49], Titterington [52], [53] and Pukelsheim [38]. One of the consequences of this duality relation is the fact that the support of an optimum design must be contained in the intersection of the boundary of the extremal ellipsoid and K ; in almost all situations the optimum design has thus finite support.

It might be interesting to note that the problem becomes much more complicated, if for given $n \in \mathbf{N}$ one admits only measures ξ with support $\{x_1, \dots, x_r\}$ and $\xi(\{x_i\}) = n_i/n$, where $n_i \in \mathbf{N}$, $1 \leq i \leq r$, $\sum_{i=1}^r n_i = n$, a restriction which is imposed by applications in statistical practice. In this case a duality gap appears and, therefore, the equivalence theorem does not hold. Moreover, optimum designs are known only for some very special classes of problems, cf. Hohmann and Jung [23] and [14].

4 Gauß-Markoff estimation

Let $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ be a set of probability measures where $\Theta = \mathbf{R}^p \times \Theta'$. Let X be an n -dimensional random vector such that $E_\theta X = Ba$ for all $\theta = (a, \theta') \in \mathbf{R}^p \times \Theta'$ and covariance $\text{Cov}_\theta X = S$, where B is a known real $n \times p$ -matrix and S is an unknown

but fixed non-negative definite (symmetric) $n \times n$ -matrix. Let, furthermore, $k \in \text{im } B^T$ be given. A very old problem, already treated by Gauß, is the following, for a modern exposition cf. van der Waerden [55], chap. 7: Find under all linear, unbiased estimators of $k^T a$ one which has smallest variance, i.e. find a vector $u^* \in \mathbf{R}^n$ such that $u^{*T} S u^*$ becomes minimal under all $u \in \mathbf{R}^n$ satisfying $B^T u = k$. If $S = \rho I_n$, $\rho > 0$, and B has full rank, then the solution is the least squares estimator $u^* = B(B^T B)^{-1} k$. Using the concept of the Moore-Penrose inverse of a matrix (A^+ is the Moore-Penrose inverse of A iff $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $AA^+ = (AA^+)^T$, $A^+A = (A^+A)^T$) it is also easy to derive a simple expression for u^* if B and S are arbitrary, provided only that S is positive definite. In case that S has deficiency in rank, the problem is much more difficult, cf. Rao [39], [40], Ahlers and Lewis [1], Albert [2], Mitra and Moore [35], Hallum et al. [18] and Pukelsheim [37]. One way of dealing with the problem which fits into the theme of this survey is the following, cf. [32]: Consider the slightly more general setting where k^T is replaced by an $s \times p$ -matrix K and u^T by an $s \times n$ -matrix U . The consistency condition $k \in \text{im } B^T$ is now written as $K = KB^+B$. The problem is

$$(4.1) \quad USU^T = \min$$

subject to the condition

$$(4.2) \quad UB = K.$$

The minimum is to be taken w.r.t. the Löwner-ordering in the set of non-negative definite matrices, i.e. $A \geq B$ iff $A - B$ is non-negative definite. For other extremum problems in this ordering cf. Marshall and Olkin [34], chap. 16 E, and [13]. Putting $D = S + BB^T$ and observing that because of (4.2) the objective function (4.1) can equivalently be replaced by UDU^T – a trick due to Rao which makes the spaces $\text{im } S$ and $\text{im } B$ easier to compare – with appropriate modifications one can define a Lagrange functional

$$F(U, Y) = UDU^T + \frac{1}{2} \{ Y^T (K^T - B^T U^T) + (K - UB) Y \}$$

where Y is a $p \times s$ -matrix. Putting

$$\hat{U} = K(B^T D^+ B)^+ K^T \quad \text{and} \quad \hat{Y} = 2(B^T D^+ B)^+ K^T$$

one can prove, cf. [32], that

$$(4.3) \quad F(\hat{U}, Y) \leq F(\hat{U}, \hat{Y}) \leq F(U, \hat{Y})$$

for all $s \times n$ -matrices U and all $p \times s$ -matrices Y , i.e. F has a saddle point w.r.t. the Löwner ordering. From this follows that (4.1–2) has \hat{U} as a solution. In view of the various aspects of duality described in the introduction, we get moreover an interesting statistical problem: The saddle point conditions (4.3) entail a dual problem to (4.1–2), namely to find

$$\max \{ \min \{ F(U, Y) : U \in \mathbf{R}^{s \times n} \} : Y \in \mathbf{R}^{s \times p} \}.$$

Its solution \hat{Y} then should have some interpretation in statistical terms. For the classical problem, i.e. $s = 1$, this is in fact possible: Let for $a_0 \in \mathbf{R}^p$

$$\mathcal{B}(a_0, k) = \{u \in \mathbb{R}^n : u^T B a_0 = k^T a_0\}$$

be the set of all linear estimators which are unbiased for $a = a_0$. We call $a^* \in \mathbb{R}^p$ a least favorable parameter iff for all $a \in \mathbb{R}^p$

$$\min \{u^T S u : u \in \mathcal{B}(a^*, k)\} \geq \min \{u^T S u : u \in \mathcal{B}(a, k)\}.$$

It turns out that \hat{y} is, except for some constants, a least favorable parameter. Thus the classical estimation problem can be linked via duality with a minimax estimation problem.

5 Acknowledgement

I wish to thank K. Jacobs, J. Lehn and L. Rüschemdorf for valuable hints on references, and F. Pukelsheim and L. Rüschemdorf for letting see me their forthcoming papers [38] and [43].

References

- [1] Ahlers, C. W.; Lewis, T. O.: Linear estimation with a positive semidefinite covariance matrix. *J. Industr. Math.* **21** (1971) 23–27
- [2] Albert, A.: The Gauss-Markov theorem for regression models with possibly singular covariances. *SIAM J. Appl. Math.* **24** (1973) 182–187
- [3] Beckenbach, E. F.; Bellman, R.: *Inequalities*. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1965
- [4] Cambanis, S.; Simons, G.; Stout, W.: Inequalities for $E_k(X, Y)$ when the marginals are fixed. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. Verw. Gebiete* **36** (1976) 285–294
- [5] Dall'Aglio, G.: Fréchet classes and compatibility of distribution functions. *Symposia mathematica* **9** (1972) 131–150
- [6] Dantzig, G. B.: *Lineare Programmierung und Erweiterungen*. Berlin – Heidelberg – New York: 1966
- [7] Danzer, L.; Laugwitz, D.; Lenz, H.: Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden. *Arch. Math. (Basel)* **8** (1957) 214–219
- [8] Dieter, U.: Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen I: Dualitätstheorie. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. Verw. Gebiete* **5** (1966) 89–117
- [9] Dorfman, R.; Samuelson, P. A.; Solov, R. M.: *Linear Programming and Economic Analysis*. New York: McGraw-Hill 1958
- [10] Féron, R.: Tableaux de corrélation dont les marges sont données et programmes linéaires. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **12** (1963) 103–116
- [11] Fréchet, M.: Les tableaux de corrélation et les programmes linéaires. *Revue Inst. Int. de Stat.* **25** (1957) 23–40
- [12] Fréchet, M.: Sur la distance de deux lois de probabilité. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **6** (1957) 185–198
- [13] Gaffke, N.; Krafft, O.: Matrix inequalities in the Löwner ordering. To appear in: *Modern Applied Mathematics: Optimization and Operations Research* (B. Korte ed.) Amsterdam: North-Holland 1981
- [14] Gaffke, N.; Krafft, O.: Exact D-optimum designs for quadratic regression. *Typeskript. Inst. f. Statistik RWTH Aachen* 1980
- [15] Gaffke, N.; Rüschemdorf, L.: On a class of extremal problems in statistics. To appear in: *Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization*
- [16] Gribik, P. R.; Kortanek, K. O.: Equivalence theorems and cutting plane algorithms for a class of experimental design problems. *SIAM J. Appl. Math.* **32** (1977) 232–259

- [17] Hailperin, T.: Best possible inequalities for the probability of a logical function of events. *Amer. Math. Monthly* 72 (1965) 343–359
- [18] Hallum, C. R.; Lewis, T. O.; Boullion, T. L.: Estimation in the restricted general model with a positive semi-definite covariance matrix. *Comm. Statist.* 1 (1973) 157–166
- [19] Hammersley, J. M.; Handscomb, D. C.: *Monte Carlo Methods*. London: Methuen 1964
- [20] Hansel, G.; Troallic, J. P.: Mesures marginales et théorème de Ford-Fulkerson. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. Verw. Gebiete* 43 (1978) 245–251
- [21] Herzog, A.: Le tabella di co-e contrograduazione e la programmazione lineare. *Metron* 21 (1961) 186–200
- [22] Hoeffding, W.: Maßstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften Math. Inst. Univ. Berlin* 5 (1940) 181–233
- [23] Hohmann, G.; Jung, W.: On sequential and non-sequential D-optimum design. *Biometrische Z.* 17 (1975) 329–336
- [24] Isii, K.: Inequalities of the types of Chebychev and Cramér-Rao and mathematical programming. *Ann. Inst. Stat. Math.* 16 (1964) 277–293
- [25] Jacobs, K.: *Measure and Integral*. New York: Academic Press 1978
- [26] Karlin, S.; Studden, W. J.: *Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics*. New York: Interscience Publ. 1966
- [27] Kellerer, H. G.: Verteilungsfunktionen mit gegebenen Marginalverteilungen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. Verw. Gebiete* 3 (1964) 247–270
- [28] Kiefer, J.; Wolfowitz, J.: The equivalence of two extremum problems. *Canad. J. Math.* 12 (1960) 363–366
- [29] Krafft, O.: Programming methods in statistics and probability theory. In: *Nonlinear Programming* (J. B. Rosen, O. L. Mangasarian, K. Ritter eds.) New York: Academic Press 1970, 425–446
- [30] Krafft, O.: *Lineare statistische Modelle und optimale Versuchspläne*. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht 1978
- [31] Krafft, O.: A note on a special transportation problem. To appear in: *Operations Research Verfahren*.
- [32] Krafft, O.: Least favorable parameters in the Gauss-Markoff model. Typescript. Inst. f. Statistik RWTH Aachen, 1980
- [33] Kretschmer, K. S.: Programmes in paired spaces. *Canad. J. Math.* 13 (1961) 221–238
- [34] Marshall, A. W.; Olkin, I.: *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. New York: Academic Press 1979
- [35] Mitra, S. K.; Moore, B. J.: Gauss-Markoff estimation with an incorrect dispersion matrix. *Sankhyā A* 35 (1973) 139–152
- [36] Oxtoby, J. C.: *Measure and Category*. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970
- [37] Pukelsheim, F.: Equality of two BLUE's and ridge estimates. *Commun. Statist. A* 6 (1977) 603–607
- [38] Pukelsheim, F.: On linear regression designs which maximize information. To appear in: *J. Statist. Plann. Inf.*
- [39] Rao, C. R.: Unified theory of linear estimation. *Sankhyā A* 33 (1971) 370–396
- [40] Rao, C. R.: Choice of best linear estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix. *Commun. Statist. A* 7 (1978) 1199–1208
- [41] Rockafellar, R. T.: Extensions of Fenchel's duality theorem for convex functions. *Duke Math. J.* 33 (1966) 81–90
- [42] Rüschenendorf, L.: Vergleich von Zufallsvariablen bzgl. integralinduzierter Halbordnungen. *Habil.-schr. RWTH Aachen*, 1979
- [43] Rüschenendorf, L.: Solution of a statistical optimization problem by rearrangement methods. To appear in: *Metrika*
- [44] Rustagi, J. S.: *Variational Methods in Statistics*. New York: Academic Press 1976
- [45] Samuelson, P. A.; Swamy, S.: Invariant economic index numbers and canonical duality: Survey and synthesis. *Amer. Econ. Rev.* 64 (1974) 568–593
- [46] Sibson, R.: Discussion of Dr. Wynn's and of Dr. Laycock's Papers. *J. Roy. Statist. Soc. B* 34 (1972) 181–183

- [47] Sibson, R.: D_A -optimality and duality, in: Progress in Statistics. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 9 (J. Gani et al. eds), Vol. II (1974) 677–692
- [48] Silvey, S. D.: Discussion of Dr. Wynn's and of Dr. Laycock's Papers. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 34 (1972) 174–175
- [49] Silvey, S. D. and Titterington, D. M.: A geometrical approach to optimal design theory. Biometrika 60 (1973) 21–32
- [50] Strassen, V.: The existence of probability measures with given marginals. Ann. Math. Statist. 36 (1965) 423–439
- [51] Tchen, A. H.: Inequalities for distributions with given marginals. Ann. Probability 8 (1980) 814–827
- [52] Tind, J.: On duality in non-convex and integer programming. Oper. Res. Verf. 32 (1978) 193–201
- [53] Titterington, D. M.: Optimal design: Some geometrical aspects of D-optimality. Biometrika 62 (1975) 313–320
- [54] Titterington, D. M.: Geometric approaches to design of experiment. Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statistics 11 (1980) 151–163
- [55] Van der Waerden, B. L.: Mathematische Statistik, 3rd ed. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1971
- [56] Van Slyke, R. M.; Wets, R. J.: A duality theory for abstract mathematical programs with applications to optimal control theory. J. Math. Anal. Appl. 22 (1968) 679–706
- [57] Whitt, M.: Bivariate distributions with given marginals. Ann. Statist. 4 (1976) 1280–1289
- [58] Whittle, P.: Some general points in the theory of optimal experimental design. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 35 (1973) 123–130

Prof. Dr. Olaf Krafft
 Institut für Statistik und
 Wirtschaftsmathematik der
 RWTH Aachen
 Willnerstr. 3
 D-5100 Aachen

(Eingegangen: 3. 11. 1980)

Algebraische Vektorbündel*)

W. Barth, Erlangen

1 Einführung

Es sei f eine differenzierbare Funktion, definiert für Punkte $p \in \mathbf{R}^n$. Ihr Wert $f(p)$ ist unabhängig von der Wahl von Koordinaten x_1, \dots, x_n oder y_1, \dots, y_n . Anders ist dies für ihren Gradienten

$$(\text{grad}_x f)(p) = \begin{pmatrix} (\partial f / \partial x_1)(p) \\ \vdots \\ (\partial f / \partial x_n)(p) \end{pmatrix},$$

der sich ja wegen der Kettenregel gemäß

$$(1) \quad \text{grad}_x f = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \text{grad}_y f$$

transformiert. Hier bezeichnet $(\partial y / \partial x)$ die Funktionalmatrix $(\partial y_\nu / \partial x_\mu)$ mit μ als Zeilenindex und ν als Spaltenindex. Hat man viele Koordinatensysteme $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, $i \in I$, so sind die Funktionalmatrizen $c^{ij} = (\partial x^{(i)} / \partial x^{(j)})$, wieder wegen der Kettenregel, durch die folgenden Beziehungen verknüpft:

$$(2) \quad \begin{aligned} c^{ii} &= 1 \quad \text{für alle } i \in I, \\ c^{ij} \cdot c^{ji} &= 1 \quad \text{für alle } i, j \in I, \\ c^{ij} \cdot c^{jk} \cdot c^{ki} &= 1 \quad \text{für alle } i, j, k \in I. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet 1 die $n \times n$ Einheitsmatrix.

So elementar die Kettenregel der Differentiation in der Analysis auch ist, so unanschaulich ist leider die folgende geometrische Einkleidung der Formeln (2). Dazu zwei Definitionen:

Definition 1 *Es sei X ein topologischer Raum. Ein Cozyklus auf X vom Rang r besteht aus einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ von X und aus einem System stetiger matrixwertiger Funktionen $c^{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(r, \mathbf{C})$, das den Bedingungen (2) genügt.*

*) Erweiterte Fassung eines Vortrages, gehalten auf der DMV-Jahrestagung in Dortmund, am 15. 9. 1980.

Natürlich ist (2) so zu verstehen, daß das Produkt $c^{ij}(u) \cdot c^{jk}(u) \cdot c^{ki}(u)$ dort die Einheitsmatrix ist, wo man es überhaupt bilden kann, also für $u \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Wenn X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, überdeckt durch offene Mengen U_i , auf denen lokale Koordinatensysteme $x^{(i)}$ gelten, so bilden offenbar die Funktionalmatrizen $c^{ij} = \partial x^{(j)} / \partial x^{(i)}$ einen Cozyklus vom Rang $n = \dim X$. Aber auch das System der Matrizen $((\partial x^{(j)} / \partial x^{(i)})^{-1})^t$ bildet einen solchen.

Definition 2 *Das zum Cozyklus c^{ij} gehörige Vektorbündel V ist der topologische Raum, den man aus der disjunkten Vereinigung $\bigcup_i (U_i \times \mathbb{C}^r)$ erhält, wenn man identifiziert*

$$U_i \times \mathbb{C}^r \ni (u, v) = (u', v') \in U_j \times \mathbb{C}^r,$$

wenn $u = u' \in X$ und $v = c^{ij}(u) \cdot v'$.

Die in dieser Definition verwendete Identifikations-Relation ist eine Äquivalenzrelation. Das liegt an den Gleichungen (2), die der Reihe nach die Reflexivität, die Symmetrie und die Transitivität der Relation ausdrücken.

Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit, überdeckt durch Gültigkeitsbereiche U_i lokaler holomorpher Koordinaten $x^{(i)}$, so definieren die Funktionalmatrizen $\partial x^{(j)} / \partial x^{(i)}$ das **Kotangentialbündel** T_X^* , und der Cozyklus $((\partial x^{(j)} / \partial x^{(i)})^{-1})^t$ definiert das **Tangentialbündel** T_X von X .

Auf ein gegebenes Vektorbündel V kann man alle Funktoren anwenden, die auf Vektorräume anwendbar sind, indem man den definierten Cozyklus den entsprechenden Matrizenmanipulationen unterwirft. Man erhält so z. B. das duale Bündel V^* , die symmetrischen und alternierenden Produkte $S^p V$ und $\Lambda^p V$, sowie die Tensorbündel $(\otimes^p V) \otimes (\otimes^q V^*)$. Sind zwei Vektorbündel V_1 und V_2 vorgegeben, so kann man analog die neuen Bündel $V_1 \otimes V_2$ und $V_1 \oplus V_2$ bilden.

Der topologische Raum V ist versehen mit zwei kanonischen Abbildungen: Der Projektion $\pi: V \rightarrow X$, die auf den Stücken $U_i \times \mathbb{C}^r \subset V$ mit der Projektion auf den ersten Faktor übereinstimmt, und der Einbettung $0: X \rightarrow V$, lokal definiert durch $0|_{U_i}: U_i \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r, u \rightarrow u \times 0$. Es gilt natürlich $\pi \circ 0 = \text{id}_X$.

Eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ kann man sich geometrisch vorstellen durch ihren Graphen, eine Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$. Analog kann man eine Pfaffsche Form σ auf der Mannigfaltigkeit X durch eine Teilmenge von T_X^* beschreiben: Die Beschränkungen

$$\sigma|_{U_i} = \sum_{k=1}^n \sigma_k^{(i)} dx_k^{(i)}$$

werden beschrieben durch Abbildungen $(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)})$ von

U_i in den n -dimensionalen Zahlenraum. Über $U_i \cap U_j$ sind die Werte der zu $\sigma|_{U_i}$ und $\sigma|_{U_j}$ gehörenden Abbildungen mittels der Funktionalmatrix $\partial x^{(j)} / \partial x^{(i)}$ verknüpft wie Gradienten (1). Bei der Konstruktion von T_X^* aus den Stücken $U_i \times \mathbb{C}^r$ werden diese Werte identifiziert, d. h., σ definiert eine globale Abbildung $X \rightarrow T_X^*$, für welche gilt $\pi \circ \sigma = \text{id}_X$. Auf diese Weise ist der Pfaffschen Form ein „Graph“ $\sigma(X) \subset T_X^*$ zugeordnet.

Definition 3 *Ein Schnitt in dem Vektorbündel V ist eine stetige Abbildung $s: X \rightarrow V$ mit $\pi \circ s = \text{id}_X$. Die Menge aller Schnitte in V bildet den Vektorraum $\Gamma(V)$.*

Die oben definierte Abbildung $0: X \rightarrow V$ nennt man den Nullschnitt. Eine Pfaffsche Form σ ist nichts anderes als ein Schnitt in T_X^* , und ein p -fach kontra- und q -fach kovariantes Tensorfeld ist ein Schnitt im Tensorbündel $(\otimes^p T_X) \otimes (\otimes^q T_X^*)$. In diesem Sinne ist ein Vektorbündel die geometrische Verdinglichung einer Klasse von Transformationsregeln: Genügen Tensorfelder (oder noch allgemeinere „Felder“) Übergangsbedingungen, ausgedrückt durch matrizenwertige Transformationsfunktionen c^{ij} , so müssen die c^{ij} notwendigerweise die Cozyklusbedingungen (2) erfüllen, und Schnitte im zugehörigen Vektorbündel sind nichts anderes als Graphen dieser Felder. Schnitte im trivialen Bündel $X \times \mathbb{C}^r$ sind natürlich Graphen ganz normaler Abbildungen in den Zahlenraum \mathbb{C}^r .

2 Präzisierung

Was in Definition 1 kurz ein Cozyklus vom Rang r genannt wurde, heißt üblicherweise Cozyklus mit Werten in der Gruppe $GL(r, \mathbb{C})$. Analog definiert man einen Cozyklus mit Werten in einer topologischen Gruppe G . Dies ist ein System von stetigen G -wertigen Funktionen $c^{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$, welche (2) erfüllen, wobei man unter 1 die konstante Abbildung auf das neutrale Element $e \in G$ versteht. Der Name Cozyklus erklärt sich aus dem Spezialfall $G = \mathbb{Z}$, wo die Cozyklusbedingungen (2) die Form $c^{ij} = -c^{ji}$ und $c^{ij} + c^{jk} = c^{ik}$ annehmen: Ordnet man der gewählten Überdeckung $\bigcup_i U_i$ von X einen simplizialen Komplex zu, ihren „Nerv“, so wird unser Cozyklus ein Element der zu den 1-dimensionalen Zyklen dieses Simplizialkomplexes dualen Gruppe.

Wenn $G = GL(n, \mathbb{R})$, kann man in Definition 2 statt \mathbb{C}^r auch den reellen Vektorraum \mathbb{R}^r verwenden. Man erhält dann reelle Vektorbündel statt der bereits definierten komplexen Bündel. So ist das Tangentialbündel T_X an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit X stets reell (die Funktionalmatrizen haben reelle Werte).

Genauso wie man Cozyklen mit Werten in verschiedenen Gruppen betrachtet, kann man auch verschiedene Anforderungen an die Abbildungen g^{ij} stellen. Man kann sie differenzierbar voraussetzen (wenn X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und G eine Liegruppe), holomorph (X komplexe Mannigfaltigkeit und G komplexe Liegruppe) oder algebraisch. Es ist dieser letzte Fall, über den hier berichtet werden soll. Einerseits ist es der konkreteste, aber andererseits leider der Fall, bei dem eine präzise Definition der verwendeten Begriffe den größten Aufwand erfordert.

Der Basisraum X für ein algebraisches Vektorbündel V muß stets eine (hier über \mathbb{C} definierte) algebraische Varietät sein. Der Begriff „algebraische Varietät“ entstand aus dem Versuch, Systeme von Polynomgleichungen $f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}^n$, zu lösen. Die Menge der Lösungen x eines solchen Systems nennt man heute eine affine Varietät. Eine explizite Auflösung des Gleichungssystems ist natürlich nur in den allerspeziellsten Fällen möglich (z. B., wenn die Gleichungen linear sind). Dies führte zu einer qualitativen Behandlung dieser Lösungsmengen und zu ihrer Betrachtung unter geometrischen Gesichtspunkten. Die dadurch entstandene „algebraische Geometrie“ entwickelte, wie jede Theorie, Impulse in Richtung auf Vereinfachung durch Verallgemeinerung. (Z. B. sind viele Methoden nur auf

kompakten Varietäten sinnvoll, und affine Varietäten sind nie kompakt, höchstens wenn sie aus endlich vielen Punkten bestehen.) So definiert man eine algebraische Varietät X durch Verkleben endlich vieler affiner Varietäten U_i , wie man differenzierbare Mannigfaltigkeiten durch Verkleben von Koordinatenumgebungen zusammensetzt. Ich möchte mir hier die technischen Details sparen, und auf das ausgezeichnete Lehrbuch [9] verweisen.

Um ein algebraisches Vektorbündel über der algebraischen Varietät X zu definieren, muß man ausgehen von einer Überdeckung $X = \bigcup U_i$ durch affine Varietäten $U_i \subset \mathbf{C}^n$. (Die Durchschnitte $U_i \cap U_j$ sind dann auch affine Varietäten.) Weiter braucht man einen Cozyklus, ein System von matrixwertigen Abbildungen $c^{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(r, \mathbf{C})$. Man fordert die Algebraizität der c^{ij} in dem Sinn, daß alle r^2 komplexwertigen Funktionen, aus denen ein c^{ij} sich aufbaut, regulär auf $U_i \cap U_j$ sind. Dabei heißt eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbf{C}$ auf der affinen Varietät $U \subset \mathbf{C}^n$ regulär, wenn sie durch Einschränkung eines Polynoms $p: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$ erhalten wird.

Ist V ein so definiertes Vektorbündel, so bezeichne $\Gamma(V)$ im folgenden immer den Vektorraum der regulären Schnitte. Dabei heißt ein Schnitt $\sigma: X \rightarrow V$ regulär, wenn $\sigma|_{U_i}: U_i \rightarrow \mathbf{C}^r$ definiert ist durch r reguläre Funktionen auf U_i .

In konkreten Fällen wird im folgenden die Basis X stets ein komplex-projektiver Raum $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ sein. Ein Punkt in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ wird festgelegt durch ein $(n+1)$ -tupel $(z_0: \dots: z_n)$ von homogenen Koordinaten $z_i \in \mathbf{C}$. Dabei ist $(tz_0: \dots: tz_n) = (z_0: \dots: z_n)$ für $t \in \mathbf{C}^*$, und die z_i sind nie alle gleichzeitig Null. Die Überdeckung von $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ durch die $n+1$ affinen Mengen $U_i = \{z_i \neq 0\}$ bietet sich direkt an. Die regulären Funktionen auf U_i sind die Polynome in den n Variablen z_k/z_i , $k \neq i$, und auf $U_i \cap U_j$ sind es die Polynome in z_k/z_i , $k \neq i$, und in z_i/z_j . Ein tief liegendes Resultat, die von Quillen [17] und A. A. Suslin bewiesene Serresche Vermutung, hat zur Konsequenz, daß jedes Vektorbündel auf \mathbf{P}_n bezüglich dieser festen Überdeckung definiert werden kann.

Der Ehrlichkeit halber sollte ich hier einfügen, daß man konkrete Vektorbündel – außer in den allereinfachsten Fällen – nie mit Hilfe von Cozyklen definiert oder behandelt, sondern indirekte Methoden bevorzugt. Vgl. hierzu die folgenden Abschnitte 3, 4 und 5. Meist benutzt man Garbentheorie in Verbindung mit homologischer Algebra. Die einem Bündel V zugeordnete Garbe ist die „Gesamtheit“ aller Schnitte in $V|_U$, wo $U \subset X$ alle offenen Mengen durchläuft. (Wenn V algebraisch ist, müssen die U zariski-offen, und die Schnitte regulär sein.) Eine solche Garbe ist offenbar ein monströses Objekt. Trotzdem kann man hervorragend damit rechnen (falls man nicht von Zweifeln geplagt wird, ob Garben überhaupt existieren). Jedenfalls bestimmen sich V und die ihm zugeordnete Garbe gegenseitig, und ihre Beziehung zueinander ist so eng, daß ich nur im äußersten Notfall verschiedene Bezeichnungen für beide verwenden möchte. Im folgenden werde ich zwischen beiden nicht mehr unterscheiden.

In Definition 2 wurde nicht präzisiert, wann zwei Vektorbündel V_1 und V_2 als gleich (genauer: isomorph) anzusehen sind. Dies soll der Fall sein, wenn sie über demselben Basisraum X definiert sind, und wenn es einen bijektiven Vektorbündelhomomorphismus $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ gibt. (Ein solcher Homomorphismus ist eine Abbildung, auf kanonische Weise definiert durch einen (regulären) Schnitt im Bündel $V_1^* \otimes V_2$.) Man überzeugt sich schnell, daß dies genau dann der

Fall ist, wenn die beiden definierenden Cozyklen cohomolog sind. Falls die Überdeckungen für beide Cozyklen gleich sind, bedeutet dies: Es gibt stetige reguläre Abbildungen $\varphi_i: U_i \rightarrow GL(r, \mathbf{C})$ so, daß für die beiden Cozyklen c^{ij} und b^{ij} gilt: $\varphi_i \cdot c^{ij} = b^{ij} \cdot \varphi_j$. Falls die Überdeckungen nicht gleich sind, muß man zu Verfeinerungen übergehen.

Der Rang eines Vektorbündels ist der Rang r des definierenden Cozyklus, d. h. die Dimension der Vektorräume $\pi^{-1}x$, $x \in X$.

3 Beispiele

Wie in Abschn. 1 erläutert, sind die Tensorbündel an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit die ersten Beispiele für Vektorbündel. Drei weitere Beispiele von Bündeln über $X = \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ sollen in diesem Abschnitt diskutiert werden. Daß ich den projektiven Raum als Basis wähle, liegt nur zum Teil daran, daß mir dieser Fall besonders vertraut ist, zum Teil aber auch daran, daß die Auswahl gar nicht so groß ist. Wirklich reichliches Beispielmateriale oder strukturierte Theorie liegen sonst eigentlich nur vor für kompakte Riemannsche Flächen und für affine Varietäten. Der erstere Fall ist natürlich aus Dimensionsgründen am besten zugänglich, der letztere wird am besten mit rein algebraischen Methoden behandelt. Die erwähnte Arbeit von Quillen gehört hierher.

Die Bündel $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(k)$. Die affine Überdeckung $\mathbf{P}_n = \bigcup_0^n U_i$, $U_i = \{z_i \neq 0\}$, werde zugrundegelegt. Für jedes feste $k \in \mathbf{Z}$ ist dann ein Cozyklus mit Werten in $\mathbf{C}^* = GL(1, \mathbf{C})$ sofort anzugeben

$$c^{ij} = \left(\frac{z_j}{z_i} \right)^k.$$

Jedes homogene Polynom $\varphi(z_0, \dots, z_n)$ vom Grade k definiert einen Schnitt σ in dem zu k gehörenden Bündel vermöge $\sigma|U_i = \varphi/z_i^k$. Unschwer stellt man so einen Isomorphismus her zwischen dem Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad k und dem Raum der Schnitte in diesem Bündel. Seit FAC [19] bezeichnet man dieses Bündel (oder eigentlich seine zugehörige Garbe) mit $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(k)$. Geometrisch besonders einfach zu realisieren sind $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(0)$, das triviale Bündel $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{C}$, und $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(-1)$, das Hopf-Bündel. Es entsteht durch die Projektion

$$\pi: \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \ni (z_0, \dots, z_n) \rightarrow (z_0 : \dots : z_n) \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C}).$$

Die Bündel $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(k)$ sind gar zu einfach zu beschreiben, als daß sie selbst von großem Interesse sein könnten. In der Tat sind sie so etwas wie elementare Bausteine, aus denen man interessantere Bündel zusammensetzt. Eine dafür typische Methode wird in Zusammenhang mit dem folgenden Beispiel skizziert.

Das Poncelet-Bündel auf $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$. In der projektiven Ebene $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ seien drei Punkte A_1, A_2, A_3 nicht kollinear gewählt. Dann gibt es ein Rang-2 Bündel V über $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ mit den zwei Eigenschaften:

- i) $\Lambda^2 V = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(2)$,
- ii) ein Schnitt $\sigma \in \Gamma(V)$ besitzt genau die Punkte A_1, A_2, A_3 als Nullstellen.

Daß ein solches V existiert, ist nicht trivial. Am einfachsten konstruiert man es mit den Mitteln der Garbentheorie. Hier möchte ich dazu nur sagen, daß i) und ii) zusammen äquivalent sind mit dem Bestehen einer exakten Garbensequenz

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \xrightarrow{\sigma} V \rightarrow I_{A_1 A_2 A_3} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(2) \rightarrow 0,$$

und daß alle solche Sequenzen eineindeutig den Elementen des Vektorraumes $\text{Ext}^1 \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(I_{A_1 A_2 A_3} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2})$ entsprechen. Hier ist $I_{A_1 A_2 A_3}$ die Garbe der Keime von regulären Funktionen auf \mathbf{P}_2 , welche in A_1, A_2 und A_3 verschwinden. Der zunächst etwas abschreckend wirkende Ext-Raum ist berechenbar. Standardmethoden, z. B. [3], theorem 4, ergeben einen kanonischen Isomorphismus dieses Raumes mit dem Vektorraum $\Gamma(I_{L_1 L_2 L_3} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(2))$, d. h., mit dem Vektorraum der quadratischen Polynome auf der dualen projektiven Ebene, die in denjenigen Punkten L_1, L_2 und $L_3 \in \mathbf{P}_2^*$ verschwinden, welche den Seiten des Dreiecks A_1, A_2, A_3 entsprechen. Mit anderen Worten: Die Bündel V mit i) und ii) entsprechen eineindeutig den (wie eine genauere Analyse zeigt: nichtentarteten) Kegelschnitten C , welche dem Dreieck A_1, A_2, A_3 einbeschrieben sind.

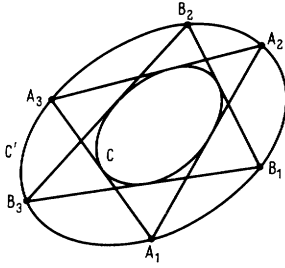
Natürlich muß bei dieser kurzen Diskussion die wahre Natur der Beziehung zwischen V und C etwas im Dunkeln bleiben. Daß diese Beziehung sehr eng ist, zeigt die folgende Tatsache [3], die ich hier ohne Beweis mitteilen möchte: Jede Gerade $L \subset \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ ist selbst wieder ein eindimensionaler $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Die Einschränkung $V|L$ von V auf die Gerade L ist stets isomorph zum Vektorbündel $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(1)$, außer im Fall, daß L Tangente an C ist, wo $V|L = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(2)$.

Nachdem nun die Existenz eines (sogar sehr vieler) V mit i) und ii) plausibel gemacht ist, sei die folgende Konsequenz von (3) erwähnt: Wie zu jeder exakten Garbensequenz gehört auch zu (3) eine exakte Cohomologiesequenz, die hier wegen $H^1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}) = 0$ die Form

$$0 \rightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{\sigma} \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(I_{A_1 A_2 A_3} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(2)) \rightarrow 0$$

hat. In Worten heißt das: dividiert man den Vektorraum $\Gamma(V)$ der Schnitte von V durch den eindimensionalen Unterraum aufgespannt von unserem fixierten σ , so ist der Quotientenraum isomorph zum Vektorraum der quadratischen Polynome $f(z_0, z_1, z_2)$ die in allen drei Punkten A_1, A_2 und A_3 verschwinden. Ein Kegelschnitt C' durch A_1, A_2, A_3 bestimmt, bis auf einen Skalar $\lambda \in \mathbf{C}^*$ eindeutig, ein solches quadratisches Polynom f , und damit einen 2-dimensionalen Vektorraum von Schnitten $\lambda\varphi + \mu\sigma$ in V . (Hier ist φ ein Urbild von f und $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$.) Jeder dieser Schnitte $\lambda\varphi + \mu\sigma$ bestimmt wieder eine Sequenz analog zu (3), und deswegen ein neues Dreieck B_1, B_2, B_3 das dem Kegelschnitt C umbeschrieben ist. Die Nullstellen B_1, B_2 und B_3 des Schnittes $\lambda\varphi + \mu\sigma$ müssen auch Nullstellen von f sein: Das neue Dreieck $B_1 B_2 B_3$ ist genauso wie das alte $A_1 A_2 A_3$ gleichzeitig dem Kegelschnitt C um- und dem Kegelschnitt C' einbeschrieben. Außerdem hat sich gezeigt: Die Existenz eines einzigen solchen Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ bedingt die Existenz von unendlich vielen dieser Dreiecke. Das ist der Satz von Poncelet (s. Fig. 1).

Dieser Zusammenhang zwischen dem Vektorbündel V und den Familien von Poncelet-Dreiecken ist nicht nur amüsant. Er ist das einfachste mir bekannte Beispiel eines Phänomens, das man sehr allgemein (und ungenau) wie folgt formu-



Figur 1

lieren kann: Rang-2 Bündel über der projektiven Ebene verdanken ihre Existenz immer speziellen Konfigurationen von Punkten und Kurven in $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$. (Für eine präzise Formulierung siehe etwa [7], p. 731, für weitere Beispiele [3].)

Nun befindet man sich beim Rechnen mit Punktmengen und Kurven der projektiven Ebene auf gesichertem Grund. Die großen Geometer und Rechenmeister des vergangenen Jahrhunderts haben uns hier genügend gangbare Wege gebahnt (von denen abzuweichen übrigens merkwürdig schwierig ist). So ist denn auch die Konstruktion von Vektorbündeln über der Ebene, oder deren Klassifikation kein Selbstzweck. Trotz mancher neu entwickelten Techniken und befriedigender Ergebnisse ist das letztenendes nur die Vorbereitung für den folgenden, interessanteren Schnitt: die Theorie auf \mathbf{P}_3 . Statt eines konkreten Beispiels auf \mathbf{P}_3 möchte ich einen allgemeinen Satz zitieren, der Grundlage zur Konstruktion vieler Beispiele ist.

Satz von Serre [21]. Es sei eine Raumkurve $C \subset \mathbf{P}_3(\mathbf{C})$, d. h., eine kompakte komplexe Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 in $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ vorgelegt. Es gibt ein Rang-2 Bündel V über $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ und einen Schnitt $\sigma \in \Gamma(V)$ mit der genauen Nullstellenmenge $\{\sigma = 0\} = C$, dann und nur dann, wenn das Kotangentialbündel T_C^* der Kurve von der Form $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(k)|C$ ist, für eine ganze Zahl k .

Diese Beziehung zwischen Raumkurven und Vektorbündeln über dem Raum ist der eigentliche Grund für das Interesse an Vektorbündeln in der algebraischen Geometrie. Das Studium von Raumkurven ist ja eines der naheliegendsten, deswegen auch ältesten, zugleich aber anscheinend eines der schwierigsten Gebiete in der algebraischen Geometrie. Man denke nur an das Klassifikationsproblem:

Eine ebene Kurve bestimmt ihre Gleichung, ein homogenes Polynom $f(z_0, z_1, z_2)$, eindeutig bis auf einen Skalarfaktor. Wenn man also unter Klassifikation der ebenen Kurven die Angabe aller möglichen Gleichungen versteht, so ist dies Klassifikationsproblem durch Hinschreiben aller homogenen Polynome in z_0, z_1, z_2 trivial gelöst. Im Gegensatz dazu kann eine Raumkurve nie durch eine einzige Gleichung beschrieben werden (sonst wäre sie ja eine Fläche), sondern nur durch ein System $f_1 = f_2 = \dots = 0$ von homogenen Polynomgleichungen in vier Variablen. Leider reichen zwei Gleichungen nur in den speziellsten Fällen aus, so daß man i. a. Systeme mit mindestens drei Polynomen betrachten muß. Ein System $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ von drei Polynomen nun hat als Lösungsmenge i. a. eine diskrete Punktmenge, und nur wenn es überbestimmt ist, eine Kurve. Das Problem besteht also

ganz grob formuliert in der Lösung überbestimmter, nichtlinearer Gleichungssysteme.

Nach allem, was man bis jetzt weiß, scheint es bei der Klassifikation von Raumkurven keine Systematik zu geben. So erklärt sich auch, warum es seit den eindrucksvollen Arbeiten von Halphen [8] und M. Noether [15] vor hundert Jahren wenig nennenswerte Fortschritte in dieser Richtung gibt.

Verständlich wird so auch, warum jede Hoffnung, bei der Klassifikation von Vektorbündeln über $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ auf eine Systematik zu stoßen, ganz neue Einsichten in das Klassifikationsproblem der Raumkurven erwarten ließe.

4 Klassifikation

Was bedeutet es, algebraische Vektorbündel V (von festem Rang r , über einer festen Basismannigfaltigkeit X) zu klassifizieren? V wird ja nicht durch eine Gleichung, sondern durch einen Cozyklus vom Rang r beschrieben, genauer gesagt, durch eine Cohomologieklassse solcher Cozyklen. Obwohl man den Raum der regulären Cozyklen mit einer Topologie versehen kann, und Cohomologieklassen auffassen kann als Äquivalenzklassen bezüglich der Operation einer (unendlich-dimensionalen) Gruppe, ist für $r \geq 2$ die Menge der Cohomologieklassen auf sinnvolle Weise weder zu einem endlich-dimensionalen, noch zu einem hausdorffschen Raum zu machen. Das ist schon so im allereinfachsten Fall $X = \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Klassifikation der Bündel durch Klassifikation von Cozyklen führt also aus dem Rahmen der algebraischen Geometrie (der immer endlich-dimensional und hausdorffsch ist) hinaus.

Damit ist begründet, wie man bei der Klassifikation nicht vorgeht, aber es ist noch nicht klar, was man unter Klassifikation eigentlich zu verstehen hat. Ganz naiv sollte man darunter das Anfertigen eines Katalogs verstehen, in dem jedes Bündel genau einmal erwähnt wird. Der Katalog soll natürlich eine algebraische Varietät sein, deren Punkte eindeutig auf die Isomorphieklassen der Bündel bezogen sind, und zwar so, daß die gegenseitige Lage der Punkte das „Deformationsverhalten“ der Bündel widerspiegelt, d. h., das Vorkommen von Bündeln in algebraischen Familien. Die Varietät nennt man dann den (groben) *M o d u l r a u m*. Aber was soeben über Cozyklen ausgeführt wurde, bedeutet leider, daß so ein Modulraum nicht existiert.

Die Methode, um in dieser Situation doch noch zu einer befriedigenden Klassifikation zu kommen, verdanken wir D. Mumford. Es ist die Maschinerie der geometrischen Invariantentheorie [14]. Mumford gab nicht nur eine Präzisierung der abstrakten Begriffe, wie etwa Modulraum, die überall in der algebraischen Geometrie bei Klassifikationsproblemen benutzt werden, sondern auch rechnerische, beinahe numerische, Verfahren zur Konstruktion der Modulräume. Grob gesagt, besteht seine Methode darin, die zu klassifizierenden Objekte einzuteilen in „stabile“, die eine Klassifikation durch einen Modulraum zulassen, und „instabile“, die sich einer Klassifikation entziehen.

Für unser Klassifikationsproblem sind die folgenden drei Punkte wichtig. (Sie stammen alle entweder direkt von Mumford selbst, oder aus stark durch ihn beeinflussten Arbeiten.)

A. Ein Kriterium, um stabile Vektorbündel zu erkennen. Dies ist in seiner Allgemeinheit leider sehr unanschaulich und etwas kompliziert zu formulieren. Ich möchte hierfür auf Chapter II, § 1 des sehr informativen Buches [16] verweisen. Im weiter unten diskutierten Fall $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, $\text{rang } V = 2$, $\Lambda^2 V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$, bedeutet Stabilität, daß V außer dem Nullschnitt keine anderen Schnitte zuläßt.

B. Eine Methode, einem stabilen Bündel seinen charakteristischen Punkt im Modulraum zuzuordnen, seinen „Namen“, unter dem es im Katalog zu finden ist. Auch hier enthält das allgemeine Verfahren sehr wenig Information. Bei Beschränkung auf einen konkreten Grundraum X kann es jedoch geometrisch sehr reizvoll sein. Ich denke hier an den Fall der hyperelliptischen Kurven [4] (wo ein Zusammenhang mit linearen Räumen auf zwei für die Kurve charakteristischen Quadriken besteht) und den im nächsten Abschnitt etwas eingehender betrachteten Fall $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

C. Die Konstruktion des Modulraums selbst. Sie wurde zuerst von Mumford und Narasimhan für eindimensionale Basisräume X (kompakte Riemannsche Flächen) durchgeführt. Später wurde das Verfahren von Maruyama und anderen in einer Serie von Arbeiten so verallgemeinert, daß man jetzt weiß [13], [6]: Zu vorgegebener (projektiv-algebraischer) Basismannigfaltigkeit X , gegebenem Rang r , und vorgeschriebenem topologischen Typ (präzisiert durch die Chern-Klassen c_1, \dots, c_r) existiert stets ein grober Modulraum $M(X; r; c_1, \dots, c_r)$, welcher die stabilen Bündel auf X vom Rang r mit Chernklassen c_1, \dots, c_r klassifiziert. Der Ehrlichkeit halber sei erwähnt, daß dies einzig die Existenz des Modulraums betrifft. Über seine Eigenschaften (Zusammenhang, Singularitäten, ist er vielleicht sogar leer?) weiß man für allgemeines X praktisch nichts. Nur für eindimensionales X [15] und $X = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ [12] sind hier genauere Aussagen bewiesen.

Eigenartigerweise scheint man beim Beweis der Endlich-Dimensionalität des Modulraumes nicht ohne die Tatsache auszukommen, daß ein Polynom konstant ist, wenn seine Ableitung verschwindet. Deswegen sind auch i.a. die analogen Aussagen über Körpern der Charakteristik $p > 0$ noch unbewiesen!

5 Die Spezialfälle $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ und $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$

Über die Klassifikation auf der projektiven Ebene weiß man relativ gut Bescheid [12], über die auf dem dreidimensionalen Raum dagegen kaum etwas. Ich möchte den Grund dafür an zwei typischen, eng zusammenhängenden Beispielen diskutieren.

Stabile Rang-2-Bündel auf $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ mit $\Lambda^2 V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$. Die Bedingung $\Lambda^2 V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ legt die erste Chernklasse auf $c_1 = 0$ fest. Die zweite Chernklasse $c_2(V)$ ist dann eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Hierzu, und zu den Details der folgenden Konstruktion siehe [3], [12].

Dem Bündel V zugeordnet sind cohomologische Invarianten, die Vektorräume $H^1(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k))$, $k \in \mathbb{Z}$. Die beiden Räume $H^1(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-2))$ und $H^1(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1))$ sind auf natürliche Weise dual zueinander (Serre-Dualität [20]) und ihre Dimension ist gerade n (Riemann-Roch-Hirzebruch [11]). Die drei homo-

genen Koordinaten z_0, z_1, z_2 auf $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ definieren \mathbf{C} -lineare Abbildungen $\alpha_i: H^1(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-2)) \rightarrow H^1(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-1))$, $i = 0, 1, 2$, die mit der Dualität verträglich sind. Natürlich sind sowohl die Cohomologieräume als auch die Abbildungen α_i sehr abstrakt definiert. Identifiziert man jedoch die Cohomologieräume mit dem gleichdimensionalen Zahlenraum \mathbf{C}^n , so werden aus den drei abstrakten α_i drei symmetrische komplexe $n \times n$ -Matrizen. Der springende Punkt ist, daß V durch die Matrizen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ eindeutig festgelegt ist. (Dies ist nicht trivial!)

Leider hängen die α_i von dem gewählten Isomorphismus zwischen \mathbf{C}^n und den Cohomologieräumen ab. Eine andere Identifikation führt zu Matrizen $g\alpha_i g^t$, $i = 0, 1, 2$, mit $g \in GL(n, \mathbf{C})$. Insgesamt erhält man so eine Injektion unseres Modulraums, nicht in den Vektorraum der Tripel symmetrischer $n \times n$ -Matrizen, sondern in den Quotienten dieses Vektorraums nach der natürlichen $GL(n, \mathbf{C})$ -Operation. Schließlich kommen auch nicht alle Tripel $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ von Rang-2 Vektorbündeln, sondern nur solche für welche die alternierende $3n \times 3n$ -Matrix

$$(A) \quad \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ -\alpha_0 & 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

den Rang $2n + 2$ hat. Diese Bedingung führt zu ernsthaften Komplikationen. Zunächst bilden die der Bedingung $\text{rang}(A) \leq 2n + 2$ genügenden Tripel eine Menge \tilde{M} , die im Raum aller Tripel $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ durch Polynomgleichungen beschrieben wird (Verschwinden von Unterdeterminanten). Vermöge der Zuordnung $V \rightarrow \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \pmod{GL(n, \mathbf{C})}$ wird unser Modulraum letztlich eine Teilmenge von $\tilde{M}/GL(n, \mathbf{C})$. In Wirklichkeit ist diese Einbettung sogar birational, d. h. unter Vernachlässigung von algebraischen Teilmengen kleinerer Dimension, ein Isomorphismus. Das wesentliche Problem ist also jetzt, den Quotienten $\tilde{M}/GL(n, \mathbf{C})$ zu beschreiben.

Wenn man noch weitere niederdimensionale algebraische Teilmengen wegläßt, kann man folgende Normierungen treffen:

a) $\alpha_2 = 1$. In der Tat ist α_2 invertierbar außerhalb einer dünnen Menge und kann unter der $GL(n, \mathbf{C})$ -Operation auf die Einheitsmatrix transformiert werden. Nach dieser Normierung bleibt von der operierenden $GL(n, \mathbf{C})$ nur noch die orthogonale Gruppe $O(n, \mathbf{C})$ übrig.

b) $\alpha_0 =$ Diagonalmatrix. Hierzu muß man zeigen, daß diejenigen Tripel in M dicht liegen, für welche α_0 lauter verschiedene Eigenwerte hat. Wegen der unübersichtlichen Rangbedingung ist das nicht ganz trivial. Nach dieser Normierung bleibt von der operierenden Gruppe nur noch eine endliche Untergruppe Σ_n übrig, im wesentlichen die symmetrische Gruppe.

Benützt man $\alpha_2 = 1$, so zeigen elementare Matrizenumformungen, daß die Matrix (A) gerade den Rang

$$2n + \text{rang}(\alpha_0 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_0)$$

hat. Es handelt sich also nun um Paare α_0, α_1 symmetrischer Matrizen mit vorgegebenem Kommutatorrang $\text{rang}[\alpha_0, \alpha_1] = 2$. Die entscheidende Bemerkung ist, daß

man bei vorgegebener Diagonalmatrix $\alpha_0 = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, wo alle Eigenwerte a_i verschieden sind, und vorgegebener alternierender Matrix λ die Gleichung

$$(4) \quad [\alpha_0, \alpha_1] = \lambda$$

nach α_1 auflösen kann. Es ist trivialerweise

$$\alpha_1 = \text{Diagonalmatrix} + \left(\frac{\lambda_{ij}}{a_i - a_j} \right)_{i \neq j}.$$

Wenn man also λ alle alternierenden Rang-2-Matrizen durchlaufen läßt, α_0 alle Diagonalmatrizen $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ mit paarweise verschiedenen a_i und α_1 alle Lösungen der Gleichung (4), so erhält man (abgesehen von niederdimensionalen Mengen und von der Quotientenbildung nach Σ_n) eine Parametrisierung des Modulraums $M(\mathbf{P}_2; 2; 0, n)$. Diese Parametrisierung ist gut genug, um wichtige Eigenschaften des Modulraums (z. B. seinen Zusammenhang) zu beweisen. Man kann so auch seine Dimension berechnen und erhält

$$\begin{aligned} 4n - 3 &= n && \text{(Dimension der Matrizen } \alpha_0) \\ &+ 2n - 3 && \text{(Dimension der Matrizen } \lambda) \\ &+ n && \text{(Dimension der Matrizen } \alpha_1). \end{aligned}$$

Stabile Rang-2-Bündel auf $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ mit $\Lambda^2 V = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}$ und $H^1(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-2)) = 0$. Der Raum der Bündel mit dieser cohomologischen Nebenbedingung ist von Interesse, weil er eine „reelle“ Teilmenge enthält, welche Instantonen parametrisiert [1]. Dies sind bestimmte Lösungen der Yang-Mills-Gleichung, einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung aus der $SU(2)$ -Eichtheorie.

Ohne zu sehr zu untertreiben, kann man feststellen, daß man über Rang-2-Bündel auf $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ eigentlich nicht viel mehr weiß, als daß es Bündel V gibt, für welche $H^1(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-2)) = 0$ ist, und solche, für die dies nicht gilt. Selbst die einfachsten Fragen über Modulräume sind nur in ganz speziellen Fällen (kleine Chernklassen) beantwortet.

Zunächst geht vieles (unter der Bedingung $H^1(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-2)) = 0$) ganz ähnlich wie auf $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$. Nur die Matrix (A) wird etwas größer. Es geht darum, den Raum aller Sextupel $\alpha_{01}, \dots, \alpha_{23}$ von symmetrischen $n \times n$ -Matrizen zu beschreiben, für welche die alternierende $4n \times 4n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} \\ -\alpha_{01} & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{02} & -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} \\ -\alpha_{03} & -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

den vorgegebenen Rang $2n + 2$ hat. Normiert man wieder $\alpha_{23} = 1$, so zeigen elementare Matrizenumformungen, daß diese Matrix den Rang

$$2n + \text{rang} \begin{pmatrix} [\alpha_{03}, \alpha_{02}] & \alpha_{01} + \alpha_{03} \alpha_{12} - \alpha_{02} \alpha_{13} \\ -\alpha_{01} - \alpha_{12} \alpha_{03} + \alpha_{13} \alpha_{02} & [\alpha_{13}, \alpha_{12}] \end{pmatrix}$$

besitzt. Versucht man aber, jetzt weiter so vorzugehen, wie auf $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$, dann muß man (nach den Umbenennungen $\alpha_{03} = \alpha_0$, $\alpha_{02} = \alpha_1$, $\alpha_{13} = \beta_0$, $\alpha_{12} = \beta_1$) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} [\alpha_0, \alpha_1] &= \lambda_1 \\ [\beta_0, \beta_1] &= \lambda_2 \\ [\alpha_0, \beta_1] + [\beta_0, \alpha_1] &= \lambda_3 \end{aligned}$$

diskutieren. Zu beliebig vorgegebenen alternierenden $n \times n$ -Matrizen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und gegebenen α_0, β_0 kann man aber jetzt, schon aus Dimensionsgründen, keine Lösungen α_1, β_1 erwarten. Für kleine Werte von n hat man übrigens andere indirekte Beschreibungen des betrachteten Modulraums ($n = 1$: [2], $n = 2$: [10], $n = 3$: [5]), aber für $n \geq 4$ führen alle Methoden der modernen Theorie immer wieder auf das obige System quadratischer Gleichungen. Irgendwelche Ansätze zu seiner Lösung sind mir nicht bekannt. Der abstrakte Formalismus ist eben wesentlich weiter entwickelt als die konkrete Rechentechnik. Dies ist ein – wie mir scheint bedauerlicher – Aspekt vieler Gebiete in der heutigen Mathematik.

Schlußbemerkung: In dieser Arbeit wurde versucht, ein umfangreiches und kompliziertes Gebiet knapp und allgemeinverständlich darzustellen. Lesern, die detailliertere Information und weitere Literaturhinweise wünschen, seien außer dem Buch [16] auch die beiden, sich ergänzenden, Übersichtsartikel von Van de Ven und Hartshorne empfohlen, die kürzlich in dem Kongreßbericht „Géométrie algébrique, Algebraic geometry, Angers 1979“, Sijthoff & Noordhoff (1980), erschienen sind.

Referenzen

- [1] Atiyah, M. F.; Hitchin, N. J.; Drinfeld, V. G.; Manin, Ju.: Construction of Instantons. Phys. Lett. **65A** (1978) 185–187
- [2] Barth, W.: Some properties of stable rank-2 vector bundles on \mathbf{P}_n . Math. Ann. **226** (1977) 125–150
- [3] Barth, W.: Moduli of vector bundles on the projective plane. Invent. math. **42** (1977) 63–91
- [4] Desale, U. V.; Ramanan, S.: Classification of vector bundles of rank 2 on hyperelliptic curves. Invent. math. **38** (1976) 161–185
- [5] Ellingsrud, G.; Strømme, S. A.: Stable rank-2 vector bundles on \mathbf{P}^3 with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$. Math. Ann. **255** (1981) 123–135
- [6] Forster, O.; Hirschowitz, A.; Schneider, M.: Type de scindage généralisé pour les fibrés stables. In: Vector Bundles and Differential Equations. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1980. = Progress in Math. **7**
- [7] Griffiths, Ph.; Harris, J.: Principles of Algebraic Geometry. New York: Wiley-Interscience 1978
- [8] Halphen, G.: Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques. J. Ec. Polyt. **52** (1882) 1–200
- [9] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry, Graduate Text in Mathematics. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1977
- [10] Hartshorne, R.: Stable vector bundles of rank 2 on \mathbf{P}^3 . Math. Ann. **238** (1978) 229–280
- [11] Hirzebruch, F.: Topological Methods in Algebraic Geometry. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1966

- [12] H u l e k, K.: On the classification of stable rank- r vector bundles over the projective plane. In: Vector bundles and Differential Equations. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1980. = Progress in Math. 7
- [13] M a r u y a m a, M.: Moduli of stable sheaves, J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977) 91–126 und 18 (1978) 557–614
- [14] M u m f o r d, D.: Geometric Invariant Theory. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1965. = Ergebnisse d. Math. Bd. 34
- [15] N o e t h e r, M.: Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven. Berlin: Verlag d. Königl. Akad. Wiss. 1883
- [16] O k o n e k, C.; S c h n e i d e r, M.; S p i n d l e r, H.: Vector Bundles on Complex Projective Spaces. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1980: = Progress in Math. 3
- [17] Q u i l l e n, D.: Projective modules over polynomial rings. Invent. math. 36 (1976) 167–171
- [18] R a m a n a n, S.: The moduli spaces of vector bundles over an algebraic curve. Math. Ann. 200 (1973) 69–84
- [19] S e r r e, J. P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. 61 (1955) 197–278
- [20] S e r r e, J. P.: Un théorème de dualité. Comm. Math. Helv. 29 (1955) 9–26
- [21] S e r r e, J. P.: Sur les modules projectifs. Sémin. Dubreil-Pisot 1960/61, exposé 2

Wolf Barth
Universität Erlangen
Mathematisches Institut
Bismarckstr. 1 1/2
8520 Erlangen

(Eingegangen: 27. 3. 1981)

Maximilian Pinl

in memoriam

M. Kracht, Düsseldorf

Am 16. September 1978 verstarb in Köln Professor Dr. phil. Maximilian Pinl nach einem wechselvollen, arbeitsreichen und wissenschaftlich erfolgreichen Leben im Alter von 81 Jahren. Trotz eines Augenleidens, das ihn in den letzten Jahren sehr behinderte, war er bis zuletzt – wie sein Schriftenverzeichnis und sein Briefwechsel ausweisen – wissenschaftlich interessiert und noch tätig.

Maximilian Pinl wurde am 17. August 1897 in Dux im nordwestböhmisches Braunkohlengebiet (in der heutigen Tschechoslowakei) als Sohn des Leiters der Hospitalapotheke geboren. Bis 1915 besuchte er das altsprachliche k. u. k. Staatsobergymnasium der benachbarten Badestadt Teplitz-Schönau. Hernach wurde er zum Militärdienst herangezogen und geriet Mitte des Jahres 1916 in Kriegsgefangenschaft, die fast zwei Jahre andauerte und die ihn bis nach Westsibirien führte.

1919 nahm Pinl ein Studium an der Montanistischen Hochschule im steiermärkischen Leoben auf – ein Studium, das er später als Irrtum empfand. Inspiriert durch Hermann Weyls Buch „Raum, Zeit, Materie“ und beraten durch den theoretischen Physiker der Universität Graz, wandte er sich 1922 dem Studium der Mathematik und der theoretischen Physik an der Universität Wien zu. Er studierte bei Ph. Furtwängler, H. Hahn, J. Lense, K. Reidemeister, H. Thirring und W. Wirtinger. Im Jahre 1926 wurde er als Schüler von J. Lense mit der Dissertation „Über ametrische Mannigfaltigkeiten im euklidischen Raum von fünf und mehr Dimensionen“ promoviert.

Nach der Promotion wechselte er zu weiterführenden Studien an die Berliner Universität. Als seine Lehrer aus der dortigen Zeit gibt er selbst an: St. Bergmann, L. Bieberbach, A. Einstein, A. Hammerstein, H. Hopf, K. Löwner, M. v. Laue, R. v. Mises, J. v. Neumann, E. Schmidt, E. Schrödinger und I. Schur. Aus wirtschaftlichen Gründen war Pinl nebenbei als Statistiker tätig und bis 1935 Mitarbeiter am „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“. Mit der Arbeit „Quasimetrik auf totalisotropen Flächen“ (publiziert als [3], [4], [6]) habilitierte er sich für das Fach Mathematik im Jahre 1936 an der Deutschen Universität Prag.

Auf Grund der politischen Verhältnisse erfolgte die Bestätigung der *venia legendi* durch die tschechoslowakische Regierung erst im Januar 1938. Hernach war Pinl als Dozent in Prag tätig. Da er jedoch auch Vorlesungen über die mathe-

matischen Grundlagen der Relativitätstheorie, die „neue Physik“, hielt und da er zudem nicht bereit war, seine bedrohten Kollegen zu verleugnen, wurde er nach der Besetzung Prags wegen seiner Einstellung gegenüber dem Nationalsozialismus von der Geheimen Staatspolizei ein halbes Jahr lang in „Untersuchungshaft“ genommen. Nach der Haftentlassung mit einem Verbot jeglicher akademischer Tätigkeit an einer deutschen Universität belegt, verbrachte er die Kriegsjahre als Mathematiker bei den Messerschmitt-Flugzeugwerken in Augsburg (1940/43) mit gasdynamisch-theoretischen Untersuchungen sowie an der Luftfahrtforschungsanstalt in Braunschweig (1943/45) mit bibliographischen Arbeiten.

Nach Auflösung der Deutschen Universität Prag und Beendigung des Krieges habilitierte er sich im Dezember 1945 an die Universität Köln um und wurde dort 1948 zum außerplanmäßigen Professor ernannt. Noch im gleichen Jahre erhielt er einen Ruf an die Universität Greifswald, dem er jedoch nicht folgen konnte. Er nahm darauf eine Berufung als Head of the Department of Mathematics der Universität Dacca (Ostpakistan, heute: Bangla Desh) an und war dort von 1949 bis 1954 tätig (mit einer einsemestrigen Unterbrechung in Köln). 1954 erhielt er an der Universität Köln eine Diätendozentur und lehrte dort bis zur Vollendung seines 65. Lebensjahres 1962. Im Jahre 1957 erhielt Pinl die Rechte eines emeritierten außerordentlichen Professors.

Auch nach seiner Emeritierung folgte er noch Einladungen zu Gastprofessuren. Von 1962 bis 1964 war er in den USA als Visiting Professor an der Technischen Hochschule in Atlanta, Georgia, und an der Universität Moscow, Idaho. Weitere Einladungen an die Universitäten von Raleigh, North Carolina, sowie von Teheran (Iran) nahm er nicht wahr. Nach seiner Rückkehr nach Köln 1964 folgte er jedoch einer Einladung von H. Behnke und lehrte noch bis 1967 als Gastprofessor an der Universität Münster.

Seiner aktiven wissenschaftlichen Betätigung bis ins hohe Alter entsprangen 89 Publikationen. Entsprechend seinem oben geschilderten Werdegang, lagen seine wissenschaftlichen Interessen auf den Gebieten der Differentialgeometrie und der Partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendungen auf Geometrie, Relativitätstheorie und Gasdynamik.

Dem von seinem Lehrer J. Lense geweckten Interesse entsprechen seine Beschäftigung mit Ausnahmefällen in Theorien und sein Wunsch, auch diese Fälle durch eine erweiterte Theorie zu erfassen. Insbesondere in der bewegungs-invarianten Differentialgeometrie finden sich zahlreiche Quotientenformeln, die nur gültig sind, wenn die Diskriminante der metrischen Grundform nicht verschwindet. So untersuchte Pinl in einer Reihe von Arbeiten, u. a. auch in seiner Habilitationsschrift, im fünf- und mehrdimensionalen euklidischen Raum die zweidimensionalen Flächen, auf denen alle Koeffizienten der quadratischen metrischen Grundform identisch verschwinden, d. h. ametrische oder totalisotrope Flächen, und nahm die Einordnung in die Finsler-Berwaldsche Krümmungstheorie vor. Des weiteren galt sein besonderes Interesse bis in die letzte Zeit den Minimalflächen bzw. Minimalhyperflächen.

Die Differentialgeometrie und die Theorie der Partiellen Differentialgleichungen sind eng benachbarte Gebiete und befruchten einander. Zudem finden sie Anwendung in der theoretischen bzw. mathematischen Physik. Dies sowie

sein Lebensweg von 1940 bis 1945 und sein frühes Interesse an der Relativitätstheorie bewirken Pinls Arbeiten auf den Gebieten Partielle Differentialgleichungen, Gasdynamik und Relativitätstheorie.

Seine umfangreichen sprachlichen Kenntnisse, u. a. auch der slawischen Sprachen, nutzte er zu sehr verdienstvollen Übersetzungen differentialgeometrischer Monographien: der Werke „Diferencialní Geometrie“, „Tensorovy počet“ ([11]) und „Diferencialní Přímková Geometrie“ ([19]) von V. Hlavatý aus dem Tschechischen und „Leçons de Géométrie différentielle I, II“ ([57], [58]) von Gh. Vranceanu aus dem Französischen. Seine deutsche Übersetzung und Bearbeitung [19] bildete ferner die Grundlage einer Übersetzung ins Englische (Groningen, 1953).

Nach Beendigung seiner Lehrtätigkeit im Alter von 70 Jahren übernahm er von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung den Auftrag, einen Bericht über die Kollegen der Mathematik zu schreiben, die von 1933 bis 1945 an deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen verfolgt worden sind. Dadurch sollte ein Beitrag geleistet werden, das große geistige Erbe der Mathematik in Deutschland von vor 1933 bewußt zu machen und lebendig zu erhalten. Für diese Aufgabe kamen Pinl sehr zustatten seine umfangreichen Kenntnisse über Leben und Werk vieler Mathematiker sowohl aus seinen früheren bibliographischen Tätigkeiten als auch aus vielfachen persönlichen Kontakten. Dieser Bericht (190 Seiten) ist im „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ in Form von Biographien, Nachrufen und Bibliographien in den fünf Beiträgen [75], [79], [80], [84], [86] von 1969 bis 1976 erschienen.

Pinl war ein liebenswerter, stets hilfsbereiter Mensch. Trotz seines wechselvollen Lebensweges und dadurch bedingter wirtschaftlicher Unsicherheit – in seiner Berliner Zeit „hatte seine Frau dennoch den Mut, ihn zu heiraten, und hat aber, ebenso wie die gemeinsame Tochter, nie Not gelitten“ – blieb er immer optimistisch.

Der Verfasser dieses Nachrufs hat ihn während seiner Münsteraner Zeit durch seine Seminare über Minimalflächen und Partielle Differentialgleichungen kennen – und schätzen gelernt. Den Studenten gegenüber war Pinl von väterlicher Güte. Er wußte stets Rat und besaß die wertvolle Gabe, die Studenten zu ermutigen, ihren eigenen Fähigkeiten zu vertrauen. Nicht zuletzt aus diesem Grunde fühlen sich Kollegen an vielen Universitäten durch ihn gefördert und bezeichnen sich, auch wenn sie nicht direkt zu seinen Doktoranden zählen, dankbar als seine Schüler.

Schriftenverzeichnis

- [1] Über ametrische Mannigfaltigkeiten im euklidischen Raum von fünf und mehr Dimensionen. Diss. Wien 1926
- [2] Über Kurven mit isotropen Schmiegräumen im euklidischen Raum von n Dimensionen. Monatsh. Math. Phys. **39** (1932) 157–172
- [3] Quasimetrik auf totalisotropen Flächen, I. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **35** (1932) 1181–1188
- [4] Quasimetrik auf totalisotropen Flächen, II. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **36** (1933) 550–557

- [5] Der Asymptotenkegel der Minimalhyperflächen. Sitzungsber. Berlin. Math. Ges. **32** (1933) 21–26
- [6] Quasimetrik auf totalisotropen Flächen, III. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **38** (1935) 171–180
- [7] Zur dualistischen Theorie isotroper und verwandter Kurven im euklidischen Raum von n Dimensionen. Monatsh. Math. Phys. **44** (1936) 1–12
- [8] W-Projektionen totalisotroper Flächen, I. Časopis Pěst. Math. Fys. **66** (1937) 95–102
- [9] Zur integrallosen Darstellung n -dimensionaler isotroper Mannigfaltigkeiten im euklidischen R_{n+2} . Math. Z. **42** (1937) 337–354
- [10] Zur Existenztheorie und Klassifikation totalisotroper Flächen. Compositio Math. **5** (1937) 208–238
- [11] Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung (Autorisierte Übersetzung aus dem Tschechischen zu: V. Hlavatý: *Differencialní Geometrie, Tensorový počet.*) Groningen/Batavia 1939: Noordhoff, xi + 569 pp.
- [12] W-Projektionen totalisotroper Flächen, II. Časopis Pěst. Mat. Fys. **69** (1940) 23–35
- [13] Zur Theorie der halbisotropen Flächen in R_4 . Jber. d. Dt. Math.-Verein. **50** (1940) 65–78
- [14] Zur dualistischen Theorie isotroper Kurven. Monatsh. Math. Phys. **49** (1940) 261–278
- [15] Zur geometrischen Deutung und Transformation der Grundgleichung der ebenen kompressiblen Potentialströmung. Z. f. angew. Math. Mech. **21** (1941) 80–85
- [16] mit H. B e h r b o h m : Zur Theorie der kompressiblen Potentialströmungen, I. Neue Linearisierung der Grundgleichung der ebenen adiabatisch kompressiblen Potentialströmung. Z. f. angew. Math. Mech. **21** (1941) 193–203
- [17] mit H. B e h r b o h m : Zur Theorie der kompressiblen Potentialströmungen, II. Intermediäre und singuläre Integrale der Grundgleichung der ebenen adiabatisch kompressiblen Potentialströmung. Z. f. angew. Math. Mech. **21** (1941) 341–350
- [18] Zur Theorie der kompressiblen Potentialströmungen, III. Charakteristiken, Bicharakteristiken und Eikonale der linearisierten Grundgleichung. Z. f. angew. Math. Mech. **22** (1942) 305–311
- [19] Differentielle Liniengeometrie. (Autorisierte Übersetzung aus dem Tschechischen zu: V. Hlavatý: *Differencialní Přímková Geometrie.*) Groningen 1945: Noordhoff, xxii + 568 pp.
- [20] Über Flächen mit isotropem mittleren Krümmungsvektor. Ber. Math.-Tagung Tübingen 1946, pp. 121–122 (1947)
- [21] Zur Integrationstheorie adiabatisch-kompressibler Potentialströmungen. Z. f. angew. Math. Mech. **25/27** (1947) 153–154
- [22] Partielle Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung. In: *Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946*, Band 2. Wiesbaden 1948: Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, pp. 21–45
- [23] Über Flächen mit isotropem mittleren Krümmungsvektor. Monatsh. Math. **52** (1948) 301–310
- [24] Binäre orthogonale Matrizen und integrallose Darstellungen isotroper Kurven. Math. Ann. **121** (1949) 1–20
- [25] Abwickelbare Schiebflächen im R_n . Comment. Math. Helv. **24** (1950) 64–67
- [26] Über die komplexen Minimalflächen mit der Gaußschen Krümmung Null. Arch. Math. **2** (1950) 283–288
- [27] Geodesic coordinates and rest systems for general linear connections. Duke Math. J. **18** (1951) 557–562
- [28] Über einen Satz von L. Berwald und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen. Monatsh. Math. **55** (1951) 188–199
- [29] On the theory of half minimal surfaces. Pakistan J. Sci. Res. **3** (1951) 101–105
- [30] Isotrope Vektoren im erweiterten Hermiteschen Raum. Comment. Math. Helv. **26** (1952) 323–327
- [31] Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen. Arch. Math. **4** (1953) 369–373
- [32] B-Kugelbilder reeller Minimalflächen in R_4 . Math. Z. **59** (1953) 290–295
- [33] mit R. A r a : The ideal straight lines on Scherk's minimal surface. Pakistan J. Sci. Res. **5** (1953) 145–149
- [34] mit R. A r a : Zur integrallosen Darstellung reeller isotroper Kurven. J. f. d. reine angew. Math. **192** (1953) 204–209

- [35] Integrallose Darstellung isotroper Kurven im sphärischen drei- und vierdimensionalen Raum. *Math. Ann.* **128** (1954) 49–54
- [36] Über die Gaußsche Krümmung der reellen Minimalflächen im R_4 . *Monatsh. Math.* **58** (1954) 27–32
- [37] The ideal straight lines on the catenary surface and its adjoined surface. *Math. Student* **22** (1954) 137–139
- [38] Geschlossene Minimalflächen. *Compositio Math.* **12** (1954) 178–184
- [39] mit K. S c h u f f : Zur Theorie der Hermiteschen Kreise. *Monatsh. Math.* **59** (1955) 22–26
- [40] Begriff und Ziel der einheitlichen Feldtheorien. *Math.-Phys. Semesterber.* **4** (1955) 183–194
- [41] Warum messen wir in der euklidischen Geometrie Winkel durch transzendente, Längen jedoch durch algebraische Funktionen? *Math.-Phys. Semesterber.* **4** (1955) 263–269
- [42] Explicit representations of real isotropic curves in pseudospherical three- and fourdimensional spaces. *Rend. Mat. e Appl.* (5) **14** (1955) 686–695
- [43] Group theory and relativity. *Dacca Univ. Studies* **81–2** (1956) 125–133
- [44] Zur Integration der isotropen Komplexe in R_5 . *Monatsh. Math.* **60** (1956) 298–312
- [45] „100 Jahre Differentialgeometrie.“ *Math.-Phys. Semesterber.* **5** (1956) 34–48
- [46] Geschlossene Minimalflächen, II. *Proc. Internat. Congr. Math.* 1954, Vol. I, pp. 491–492. Amsterdam 1957
- [47] Ch. Loewners Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen der Gasdynamik. *J. f. d. reine angew. Math.* **199** (1958) 174–187
- [48] Minimalflächen fester Gaußscher Krümmung. *Math. Ann.* **136** (1958) 34–40
- [49] Zur Differentialgeometrie im totalisotropen R_2 und R_3 eines komplexen euklidischen R_4 und R_6 . *Monatsh. Math.* **63** (1959) 256–264
- [50] Die Hauptgruppen singulärer konformeuklidischer Räume. *J. f. d. reine angew. Math.* **203** (1960) 40–46
- [51] Über lineare Übertragungen mit fallweise konstanter Torsion. *J. f. d. reine angew. Math.* **204** (1960) 108–115
- [52] On affinely connected manifolds whose torsion can be transformed into constant components. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960) 505–510
- [53] Bedingungen für konstante Tensorfelder. *Sitzungsber. Berlin. Math. Ges.* **1959/60** (1960) 54–59
- [54] Über eine konstante lineare Übertragung, welche dem Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen entspricht. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **55** (1961) 13–21
- [55] Zum Gedenken an Robert Ritter. *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* **63** (1961) 137–140
- [56] Die Äquivalenz konstanter und verschwindender Christoffelklammern zweiter Art. *Monatsh. Math.* **65** (1961) 259–264
- [57] Vorlesungen über Differentialgeometrie. Teil I. (Übersetzung aus dem Französischen, Bearbeitung und Herausgabe in deutscher Sprache zu: Gh. Vranceanu: *Leçons de Géométrie différentielle*. I.) *Math. Lehrbücher und Monogr., II. Abt., Bd. 12.* Berlin 1961: Akademie-Verlag, viii + 371 pp.
- [58] Vorlesungen über Differentialgeometrie. Teil II. (Übersetzung aus dem Französischen, Bearbeitung und Herausgabe in deutscher Sprache zu: Gh. Vranceanu: *Leçons de Géométrie différentielle*. II.) *Math. Lehrbücher und Monogr., II. Abt., Bd. 13.* Berlin 1961: Akademie-Verlag, viii + 405 pp.
- [59] Alte Weisheit. In: Festschrift zum 60. Geburtstag von Walther Maas. Braunschweig 1961: Privatdruck M. Maas, pp. 147–151
- [60] Flächen mit semizirkulärer Dupinscher Indikatrix. *Monatsh. Math.* **66** (1962) 236–240
- [61] Zum Gedenken an Rudolf Lauffer. *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* **65** (1963) 143–147
- [62] Kriterien für euklidische Differentialformen. *J. f. d. reine angew. Math.* **212** (1963) 1–6
- [63] Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen, II. *Arch. Math.* **15** (1964) 232–240
- [64] Über die Verwendung natürlicher Kurvenparameter als Parameter eingebetteter Riemannscher Mannigfaltigkeiten. *J. f. d. reine angew. Math.* **214/215** (1964) 399–404
- [65] Professor Dr. R. Ritter (Gedankvortrag). *Sitzungsber. Berlin. Math. Ges.* **1961/64** (1964) 60–65
- [66] In memory of Ludwig Berwald. *Scripta Math.* **27** (1965) 193–203
- [67] Spezielle Beziehungen zwischen den Krümmungstensoren von Riemann, Ricci, Weyl und Brinkmann. *Arch. Math.* **16** (1965) 101–105

- [68] Minimalflächen und isotrope Kurven im Riemannschen Raum. An. Şti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi I a Mat. (N. S.) **11 B** (1965) 473–480
- [69] Památce Ludwiga Berwalda. (Ludwig Berwald in memoriam. Vgl. [66].) Časopis Pěst. Mat. **92** (1967) 229–238
- [70] Die Radikale des komplexen euklidischen n -dimensionalen Raumes. Monatsh. Math. **71** (1967) 218–222
- [71] Georg Feigl zum Gedächtnis. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **70** (1967) 53–60
- [72] Der Divergenzcharakter der Gaußschen Krümmungsdichte und der Satz von Gauß-Bonnet. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **70** (1968) 162–164
- [73] mit H. W. T r a p p : Stationäre Krümmungsdichten auf Hyperflächen des euklidischen R_{n+1} . Math. Ann. **176** (1968) 257–272
- [74] Die Äquivalenz konstanter und verschwindender Christoffelklammern zweiter Art, Berichtigung. (Vgl. [56]) Monatsh. Math. **72** (1968) 431
- [75] Kollegen in einer dunklen Zeit. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **71** (1969) 167–228
- [76] Minimalmannigfaltigkeiten und analytische Funktionen. J. f. d. reine angew. Math. **239/240** (1969) 145–152
- [77] mit W. Z i l l e r : Minimalmannigfaltigkeiten und analytische Funktionen, II. J. f. d. reine angew. Math. **244** (1970) 177–189
- [78] Zur Theorie der Minimalflächen im vierdimensionalen euklidischen Raum. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **15** (1970) 1487–1498
- [79] Kollegen in einer dunklen Zeit, II. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **72** (1971) 165–189
- [80] Kollegen in einer dunklen Zeit, III. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **73** (1972) 153–208
- [81] mit W. Z i l l e r : Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen, III. Arch. Math. **23** (1972) 643–649
- [82] Eine Fragestellung von W. Wirtinger. 8. Österreich. Math.-Kongr., Vortragsauszüge. Wien 1973
- [83] Mathematicians under Hitler. Publications of the Leo Baeck Institute, Year Book 18. London 1973: Secker and Warbirg, pp. 129–182
- [84] mit A. D i c k : Kollegen in einer dunklen Zeit. Schluß. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **75** (1974) 166–208
- [85] Zur Theorie der Minimalhyperflächen gerader Dimension in komplexen euklidischen Räumen der Dimension $2n + 1$. Monatsh. Math. **79** (1975) 47–54
- [86] mit A. D i c k : Kollegen in einer dunklen Zeit (Nachtrag und Berichtigung). Jber. d. Dt. Math.-Verein. **77** (1976) 161–164
- [87] mit W. Z i l l e r : Minimal hypersurfaces in spaces of constant curvature. J. Differential Geometry **11** (1976) 335–343
- [88] Alte und neue Weisheit. In: Walther Maas zum Gedächtnis. Braunschweig 1977: Privatdruck M. Maas, pp. 23–32
- [89] E. B. Christoffels Weg zum absoluten Differentialkalkül und sein Beitrag zur Theorie des Krümmungstensors. In: E. B. C h r i s t o f f e l : The Influence of his Work on Mathematics and the Physical Sciences. (P. L. Butzer and F. Fehér, eds.) Basel 1981 (im Druck): Birkhäuser Verlag

Doz. Dr. M. Kracht
 Mathematisches Institut
 der Universität
 Universitätsstr. 1
 4000 Düsseldorf 1

(Eingegangen: 1. 5. 1979)

Richard Brauer zum Gedächtnis

H. Rohrbach, Mainz

Am 17. April 1977 starb Richard Brauer in Boston, Massachusetts, im Alter von 76 Jahren. Mit ihm ist einer der ganz großen Mathematiker dieses Jahrhunderts von uns gegangen. Der Verlust hat seine Freunde, Kollegen und Schüler sehr hart getroffen.

Geboren am 10. Februar 1901 zu Berlin-Charlottenburg als jüngstes von drei Kindern des wohlhabenden Großkaufmanns Max Brauer und seiner Frau Lilly Brauer wuchs Richard Brauer in einem sehr kultivierten Hause auf. Die Geborgenheit im Familienzusammenhalt trug ihn auch über den Tod des Vaters hinweg, den er früh (1917) verlor. Er besuchte das humanistische Kaiser Friedrich Gymnasium zu Charlottenburg und zeigte sehr bald besonderes Interesse für technische Dinge und Probleme. Bereits während der frühen Schulzeit versuchte er sich an physikalischen Experimenten, wobei es ihm vor allem darauf ankam, selbständig Erkenntnis zu gewinnen. Erst im letzten Schuljahr weckte ein neu an die Schule gekommener Lehrer, der bei Frobenius promoviert hatte, in ihm das Interesse für Mathematik. Im September 1918 bestand er die Reifeprüfung und wurde sogleich zum Zivildienst eingezogen. Im November 1918 endete der erste Weltkrieg.

Im Februar 1919 immatrikulierte sich Richard Brauer an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg. Er und sein um sieben Jahre älterer Bruder Alfred Brauer, der als Kriegsfreiwilliger den Weltkrieg von 1914 bis 1918 mitgemacht hatte, hatten sich dahin verständigt, daß Richard Brauer, seinen technischen Neigungen entsprechend, Physik, Alfred Brauer Mathematik studieren wollten. Schon damals schwebte ihnen eine spätere Zusammenarbeit auf den beiden Gebieten vor. Man ist versucht, an das Vorbild der Brüder Harald und Niels Bohr zu denken.

Doch schon im ersten Semester wurde Richard Brauer sich darüber klar, daß er mehr theoretisch als praktisch veranlagt war und Mathematik ihm näher lag als Physik. So wechselte er bereits zum Sommersemester 1919 an die Universität Berlin über und studierte wie sein Bruder Mathematik und Physik mit dem Schwergewicht auf Mathematik. Bis auf das Sommersemester 1920, das er in Freiburg verbrachte, blieb er bis zur Promotion an der Universität Berlin.

Es war erstaunlich, mit welcher Aufmerksamkeit und Auffassungsgabe Richard Brauer den Vorlesungen folgen konnte. Er fiel dadurch sehr bald den Dozenten auf und kam schnell in persönlichen Kontakt mit ihnen. In Freiburg hörte er bei Oscar Bolza und Alfred Loewy. Durch ein Referat in einem mathematisch-historischen Seminar von Loewy blieb er mit diesem in langer wissenschaftlicher

Korrespondenz. In Berlin regten ihn zunächst die Vorlesungen von Erhard Schmidt an, der im allgemeinen wenig präpariert in die Vorlesung kam und häufig die Studenten aufforderte, an einem Beweis mitzuwirken. Im Sommer 1922 trug Brauer im Seminar von E. Schmidt und L. Bieberbach über Differentialgleichungen vor und flocht dabei einen eigenen Beweis ein, der später im Buch von L. Bieberbach über Differentialgleichungen veröffentlicht wurde (1. Aufl. 1923, S. 129). Mehr und mehr interessierten ihn aber die Vorlesungen und Seminare von I. Schur. Hier fesselten ihn der klare und gut durchdachte Aufbau sowie die bestens vorbereitete und begeisternde Vortragsweise. Sie wurden ihm Vorbild für seine eigene spätere Lehrtätigkeit, und es ist nicht zuviel gesagt, wenn man feststellt, daß unter allen Schülern von I. Schur Richard Brauer derjenige ist, der das grandiose Wirken Schurs als Lehrer und Forscher am vollkommensten fortgeführt hat.

Ich selber begann mit meinem Studium der Mathematik und Physik an der Universität Berlin im Wintersemester 1921/22 und gewann bald durch die gemeinsame Tätigkeit in der studentischen Mathematisch-Physikalischen Arbeitsgemeinschaft (Mapha) die Freundschaft des um neun Jahre älteren Alfred Brauer. Es blieb nicht aus, daß sie sich auch auf Richard Brauer ausdehnte. Es war bezeichnend für ihn, wie er mir die Freundschaft anbot. Damals war es – anders als unter heutigen Studenten – selbstverständlich, daß man sich mit „Herr“ und „Sie“ anredete. Nun ergab es sich, daß Richard Brauer und ich im Physikalischen Praktikum als ein Paar zusammen getan wurden und jede Woche an zwei Nachmittagen gemeinsam die vorgeschriebenen Versuche machten. Nach einiger Zeit sagte er (als der Ältere) in seiner liebenswürdigen und humorvollen Art zu mir: Finden Sie es nicht richtig, daß wir um des Transitivitätsgesetzes willen zueinander Du sagen sollten? Denn mit Alfred Brauer stand ich schon auf Du und Du. Natürlich stimmte ich ihm gern zu, und so wurden auch wir beide Freunde, obgleich ich mathematisch in keiner Weise an ihn heranreichte.

Im Juli 1925 promovierte Richard Brauer summa cum laude bei I. Schur mit einer Arbeit über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen. Die feierliche Promotion mit Überreichung des Doktordiploms durch den Dekan der Philosophischen Fakultät (die in Berlin damals auch die naturwissenschaftlichen Fächer umfaßte) erfolgte erst nach Druck der Dissertation im März 1926.

Bald nach seiner Promotion heiratete Richard Brauer die Physikerin Dr. phil. Ilse Karger, die ebenfalls an der Universität Berlin studiert und promoviert hatte. Sie war die Tochter eines Berliner Arztes, die er bereits im Wintersemester 1920/21 in einer Vorlesung von I. Schur über Zahlentheorie kennengelernt hatte. Nachdem sie 1924 das Studium der Experimentalphysik abgeschlossen hatte, wandte sie sich mathematischen Vorlesungen zu, um noch das Staatsexamen für das höhere Lehrfach abzulegen. Die Hochzeit fand im September 1925 in Berlin statt. Am Polterabend vorher war ich mit vielen Freunden bei Brauers eingeladen und trug in der Maske von Wilhelm Busch ein Gedicht nach dessen Art vor, in dem ich auf beider Lebensweg und Zueinanderfinden einging.

Im Wintersemester darauf trat Richard Brauer eine Assistentenstelle bei Konrad Knopp in Königsberg an. Dort habilitierte er sich 1927 und lehrte gemeinsam mit Gabor Szegő, Kurt Reidemeister, Werner Rogosinski und Theodor Kaluza.

Knopp war einem Ruf nach Tübingen gefolgt. In diesen ersten Jahren seines mathematischen Schaffens entstanden bereits wegweisende Arbeiten (im Anschluß an und zum Teil mit I. Schur) über Gruppen linearer Substitutionen, über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen (mit Emmy Noether), über hyperkomplexe Zahlensysteme und auch die Arbeit über die algebraische Struktur von Schiefkörpern, in der er eine kommutative Gruppe aus Isomorphismenklassen zentraler Divisionsalgebren definierte, deren Eigenschaften einen guten Einblick in die Struktur einfacher Algebren ermöglicht. Diese Gruppe wurde später – zu seiner eigenen Überraschung – als „Brauergruppe“ bezeichnet und hat ihre Nützlichkeit bei algebraischen Strukturuntersuchungen immer wieder bewiesen. Eine wesentliche Anwendung fand sie in der gemeinsamen Arbeit von Richard Brauer, Emmy Noether und Helmut Hasse (Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren), in der gezeigt wurde, daß jede rationale Divisionsalgebra zyklisch über ihrem Zentrum ist.

In diesem Zusammenhang möchte ich eine Besonderheit in der wissenschaftlichen Arbeitsweise von R. Brauer hervorheben. Er war kein Mann der Teamarbeit im landläufigen Sinne, obwohl er mehrfach mit anderen zusammen publiziert hat. Er mußte bei Zusammenarbeit stets seine Eigenständigkeit auch äußerlich wahren. So gab bei der Arbeit an der lang gehegten Vermutung jeder der drei Verfasser (Brauer, Noether, Hasse) unabhängig von dem andern den Beweis für ein Teilergebnis. Diese faßte dann H. Hasse zu der gemeinsamen Arbeit zusammen. Ähnlich war es in der Studentenzeit gewesen. Die erste Publikation von Richard Brauer, gemeinsam mit Alfred Brauer und Heinz Hopf veröffentlicht (über die Irreduzibilität einiger spezieller Klassen von Polynomen), entstand aus der Lösung einer Schur-Aufgabe. I. Schur pflegte in den Übungen zu seinen Vorlesungen stets eine oder zwei Aufgaben von erheblichem Schwierigkeitsgrad zu stellen, um seine Hörer zu selbständigem mathematischen Arbeiten anzuregen. Um die Lösung einer solchen Aufgabe mühten sich beide Brüder Brauer, aber getrennt voneinander, jeder in seinem Zimmer der elterlichen Wohnung. Erst wenn sie Teilergebnisse hatten, kamen sie zusammen und verglichen, nahmen auch Gedanken des andern auf, aber trennten sich wieder. So ging es, bis jeder für sich eine Lösung gefunden hatte. Dann wurde gemeinsam aus beiden Lösungen eine möglichst elegante erarbeitet. Heinz Hopf hatte unabhängig davon eine Lösung vorgelegt. Auf Vorschlag von I. Schur wurde aus beiden Lösungen eine gemeinsame Publikation verfaßt und im Jahresbericht der DMV veröffentlicht. Die Lösung von Brauer fand auch Aufnahme im Buch G. Polya – G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 2 (1925), 347 bis 350. Entsprechend war es später. Gemeinsame Arbeiten (mit A. Loewy, mit I. Schur, mit E. Noether u. a.) entstanden, indem jeder an seinem Ort Ergebnisse fand, die dem anderen brieflich mitgeteilt wurden, und allmählich erhielt durch weitere Korrespondenz die gemeinsame Arbeit ihre Gestalt.

In die Königsberger Zeit fiel auch ein Angebot von I. Schur, mit Richard Brauer zusammen ein Buch über alle Aspekte der Darstellungstheorie von Gruppen zu schreiben. Es sollte insbesondere auch die Anwendung der Darstellungstheorie in der Quantenmechanik behandeln. Vorarbeiten dazu hat Richard Brauer dann anderweitig veröffentlicht, weil einerseits Schur wegen anderer Aufgaben von dem Projekt zurücktrat, andererseits der Nationalsozialismus jede Zusammenarbeit unmöglich machte.

Denn die fruchtbare Schaffenszeit in Königsberg fand sehr abrupt ihr Ende, als im Frühjahr 1933, alsbald nach der Machtergreifung durch die Nationalsozialisten, Richard Brauer seine Stellung als Assistent und Privatdozent genommen wurde – nur weil er Jude war. Im Sommersemester 1933, da er nicht mehr lesen durfte, stellte er sich auf eine Emigration ein. Durch das Emergency Committee for the aid of displaced German Scholars erhielt er im November 1933 eine Gastprofessur für ein Jahr in Lexington, Kentucky, USA. Die dortige jüdische Gemeinde hatte sich bereiterklärt, eine finanzielle Unterstützung zu leisten. Gewissenhaft wie er war, bereitete er sich auf die neuen Verhältnisse vor. Zwar konnte er seine sehr geringen Kenntnisse der englischen Sprache so schnell nicht verbessern, aber er fragte mich sehr intensiv und aufmerksam aus nach den Lebens- und Arbeitsgewohnheiten in den Vereinigten Staaten, bis hin zu Kleidung, Speisen, gesellschaftlichen Formen. Ich war 1924 zehn Monate in den Vereinigten Staaten gewesen und hatte an der Universität in Philadelphia, Pennsylvania, ein Summer School Term studiert. So konnte ich ihm mancherlei Auskunft geben. Später berichtete er mir, daß ihm diese Auskünfte von allen, die er vor der Überfahrt erhalten hatte, am hilfreichsten gewesen waren. Für mich war es eine Freude, daß ich ihm diesen kleinen Dienst noch hatte tun können.

Erst drei Monate später konnte seine Frau mit den beiden Kindern, Ulrich (geboren 1927) und Günther (geboren 1932), nachkommen. Sie wurden ebenfalls sehr freundlich von der Gemeinde in Lexington aufgenommen. Beide Ehepartner verstanden es, mit der ihnen eigenen Offenheit, Nüchternheit und Freundlichkeit sich bald in die neuen Verhältnisse einzuleben. Vor allem aber war es der wissenschaftliche Ruf, der Richard Brauer aufgrund seiner Veröffentlichungen voranging, der ihm den weiteren Verbleib ermöglichte. Bereits für das akademische Jahr 1934/35 erhielt er am Institute for Advanced Study in Princeton, New Jersey, eine Stelle als Assistent von Hermann Weyl. Damit ging ein Lebenstraum für ihn in Erfüllung. Denn im Zuge der eigenen gruppentheoretischen Untersuchungen hatte R. Brauer die Weylschen Arbeiten, in denen Weyl die infinitesimalen Methoden von Lie und Cartan mit den Schurschen Methoden der Darstellung von Gruppen zur Bestimmung von Charakteren kombinierte, äußerst bewundert und sich gewünscht, mit Weyl einmal zusammenzutreffen.

So ergab sich für Richard Brauer eine zweite fruchtbare Schaffensperiode in der Zusammenarbeit mit H. Weyl. Sie hat auch diesen stark beeindruckt. In seinem Buch „The classical groups“ (1939) ist die große Anerkennung zu spüren, die Weyl dem viel jüngeren R. Brauer zollt. Immer wieder finden sich in dem Buch Hinweise auf Brauersche Ergebnisse. In diese Zeit fällt auch die Bearbeitung von R. Brauer und N. Jacobson der Weylschen Vorlesungen über Liesche Gruppen, die zusammen mit einigen Seminarthemen unter dem Titel „The structure and representation of continuous groups“ veröffentlicht wurde (Princeton 1934/35). R. Brauer bezeichnete diese Zeit in Princeton gern als den Abschluß seiner mathematischen Ausbildung. Neben H. Weyl waren es vor allem Carl Ludwig Siegel und Emil Artin – alle drei ebenfalls durch den Nationalsozialismus aus Deutschland vertrieben – deren Einfluß und Anregungen sich nachhaltig auf seine wissenschaftliche Arbeit auswirkten.

Einen erstaunlichen Beweis seiner differenzierenden, wissenschaftlich geprägten Denkweise gab R. Brauer, in den ersten Jahren des Verstoßenseins, gegenüber der alten Heimat. Der Verlag B. G. Teubner in Leipzig plante eine Neuauflage des ersten Bandes der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (Algebra/Zahlentheorie). Die neuen Herausgeber hatten auch R. Brauer mit zwei Beiträgen dafür vorgesehen, und der Verlag schloß darüber einen Vertrag mit ihm ab (1. Algebra der hyperkomplexen Zahlensysteme. 2. Symmetrische Funktionen, Invarianten von linearen Gruppen endlicher Ordnung). Meines Wissens geschah dies in der Absicht, ihm zu zeigen, daß ihn seine Mathematiker-Kollegen in Deutschland nach wie vor zu den Ihren zählten. Ohne Ressentiment schrieb Richard Brauer, allein dem wissenschaftlichen Ethos verpflichtet in dem Wunsche, der mathematischen Forschung zu nutzen, die gewünschten Beiträge. Trotz der durch die Umstellung in neue Verhältnisse bedingten Schwierigkeiten lieferte er sie 1936 pünktlich ab. Von den Herausgebern wurden sie dankbar angenommen, doch bevor sie zum Druck kamen, trat der Verlag, durch neue verschärfte Gesetze gegen die Juden gezwungen, vom Vertrag zurück. So blieben beide Beiträge ungedruckt. Es hat jetzt den Anschein, daß sie in die geplanten Collected Papers von Richard Brauer aufgenommen werden. Sollte das nicht geschehen, so meine ich, sollten Mittel und Wege gefunden werden, um eine nachträgliche Herausgabe der beiden Beiträge als Enzyklopädieheft zu ermöglichen, auch wenn die Neuauflage der Enzyklopädie inzwischen eingestellt ist.

Im Anschluß an Princeton erhielt Richard Brauer, auf Empfehlung von Emmy Noether, zum Herbst 1935 ein assistant professorship an der Universität von Toronto, Canada. Dort blieb er mit einem associate und dann full professorship bis 1948. Zu einem längeren Bleiben war er bereit. Doch hatte er sich mittlerweile zu einem der führenden Mathematiker profiliert, und so war es kein Wunder, daß ihn die Vereinigten Staaten wieder zurückholten, 1948 auf ein full professorship an die Universität von Michigan in Ann Arbor, 1951 auf ein full professorship an die Harvard Universität in Cambridge, Massachusetts. Hier blieb er und hier entfaltete er die volle Reife seines mathematischen Schaffens. Fast die Hälfte seiner Arbeiten ist in Cambridge entstanden, und eine sehr große Zahl von Schülern, in Toronto, Ann Arbor und Cambridge, verdanken ihm entscheidende Anstöße und Förderung. Sie haben inzwischen selbst Lehrstühle an Universitäten inne und tragen das Wirken ihres Lehrers Richard Brauer, das sie mathematisch und menschlich geprägt hat, in großer Dankbarkeit weiter.

Auch seine Angehörigen waren und sind mathematisch tätig. Seine Frau, Ilse Brauer, hatte instructorships in Mathematik an den Universitäten in Toronto, Ann Arbor, Mich., und Waltham, Mass., und zuletzt ein assistant professorship an der Universität Boston¹⁾. Von den beiden Söhnen erwarb der ältere, George Ulrich, den Ph. D. in Mathematik an der Universität von Michigan; er ist seit 1966 Associate Professor in Mathematik an der Universität von Minnesota in Minneapolis. Der jüngere, Fred Günther, erwarb den Ph. D. in Mathematik 1956 am Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.; er ist seit 1966 Professor of Mathematics an der Universität von Wisconsin in Madison, Wis.

¹⁾ Ilse Brauer hat ihren Mann nur um drei Jahre überlebt; sie ist am 4. Juli 1980 gestorben.

Das Ehepaar Brauer hat oft Europa besucht, vor allem Deutschland, England und die Schweiz, um alte Freunde zu treffen. Brauer hat mehrfach Gastvorlesungen gehalten. So hatte er in Göttingen 1964 die Gauß-Gastprofessur der Akademie der Wissenschaften inne; 1971 las er als Hardy Lecturer in Cambridge, England; 1973 hielt er ein Seminar in Warwick, England; 1972 war er als Gastprofessor in Aarhus, Dänemark. Zuvor hatte er 1959/60 eine Gastprofessur in Japan an der Universität in Nagoya.

Richard Brauers große wissenschaftliche Leistungen und sein warmer persönlicher Einsatz für die ihm anvertrauten Studenten und Mitarbeiter fanden in reichem Ausmaß die gebührende Anerkennung. Er wurde als Mitglied gewählt durch die Royal Society of Canada (1945), die American Academy of Arts and Sciences (1954), die National Academy of Sciences (1958), die London Mathematical Society (Ehrenmitglied 1963), die Akademie der Wissenschaften in Göttingen (korrespondierendes Mitglied 1964), die American Philosophical Society (1974). Der Ehrendoktor wurde ihm verliehen 1968 von der University of Waterloo, Ontario; 1969 von der University of Chicago, Illinois; 1974 von der University of Notre Dame, Indiana; 1975 von der Brandeis University, Waltham, Massachusetts. An Preisen wurden ihm zuerkannt das Guggenheim Memorial Fellowship 1941/42; der Cole Prize der American Mathematical Society 1949; die National Medal for Scientific Merit 1971 durch den Präsidenten der Vereinigten Staaten.

Eine ausführliche Würdigung seines mathematischen Schaffens findet man bei Green, J. A.: Bull. London Math. Soc. 10 (1978) 317–342, und bei Feit, W.: Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) 1 (1979) 1–20. Einen kurzen Hinweis auf ihn brachte Pinl, M.: Jber. d. Dt. Math.-Verein. 73 (1971/72) 184–185.

Schriftenverzeichnis

- [1] Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde. Friedrich-Wilhelms-Universität, Berlin 1926, 71 Seiten
- [2] Über die Irreduzibilität einiger spezieller Klassen von Polynomen (mit A. Brauer und H. Hopf). Jber. d. Dt. Math.-Verein. 35 (1926) 99–112
- [3] Über Zusammenhänge zwischen arithmetischen und invariantentheoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen. Sitz. Preuss. Akad. Wiss. (1926) 410–416
- [4] Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen (mit E. Noether). Sitz. Preuss. Akad. Wiss. (1927) 221–228
- [5] Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, I. Math. Z. 28 (1928) 677–696
- [6] Über einen Satz für unitäre Matrizen. Tôhoku Math. J. 30 (1928) 72
- [7] Über Systeme hyperkomplexer Zahlen. Math. Z. 30 (1929) 79–107
- [8] Die stetigen Darstellungen der komplexen orthogonalen Gruppe. Sitz. Preuss. Akad. Wiss. (1929) 626–638
- [9] Über einen Satz für unitäre Matrizen (mit A. Loewy). Tôhoku Math. J. 32 (1930) 44–49
- [10] Über Systeme hyperkomplexer Größen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 38 (1929) 47–48
- [11] Zum Irreduzibilitätsbegriff in der Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen (mit I. Schur). Sitz. Preuss. Akad. Wiss. (1930) 209–226
- [12] Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, II. Math. Z. 31 (1930) 733–747
- [13] Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern. J. Reine Angew. Math. 166 (1932) 241–252

- [14] Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren (mit H. Hasse und E. Noether). *J. Reine Angew. Math.* **167** (1931) 399–404
- [15] Über die Konstruktion der Schiefkörper, die von endlichem Rang in bezug auf ein gegebenes Zentrum sind. *J. Reine Angew. Math.* **168** (1932) 44–64
- [16] Über den Index und den Exponenten von Divisionalgebren. *Tôhoku Math. J.* **37** (1933) 77–87
- [17] Über die Kleinsche Theorie der algebraischen Gleichungen. *Math. Ann.* **110** (1934) 473–500
- [18] Über die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern. *Actualités Sci. Indust.* no. 195 (1935) 15 Seiten
- [19] Spinors in n dimensions (mit H. Weyl). *Amer. J. Math.* **57** (1935) 425–449
- [20] Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Polya (mit A. Brauer), *Math. Z.* **40** (1935) 242–265
- [21] Sur les invariants intégraux des variétés représentatives des groupes de Lie simples clos, *C. R. Acad. Sci. Paris* **201** (1935) 419–421
- [22] Algebra der hyperkomplexen Zahlensysteme (Algebren). Angenommen zur Publikation (1936) in: *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, IB 8. Leipzig: B. G. Teubner, etwa 50 Seiten
- [23] Symmetrische Funktionen. Invarianten von linearer Gruppen endlicher Ordnung. Angenommen zur Publikation (1936) in: *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, IB 12, Leipzig: B. G. Teubner, etwa 50 Seiten
- [24] A characterization of null systems in projective space. *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (1936) 247–254
- [25] On algebras which are connected with the semisimple continuous groups. *Ann. of Math.* **38** (1937) 857–872
- [26] Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen. *Math. Z.* **41** (1936) 330–339
- [27] On the modular representations of groups of finite order I (mit C. Nesbitt). *Univ. Toronto Studies* no. 4 (1937) 21 Seiten
- [28] On the regular representations of algebras (mit C. Nesbitt). *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **23** (1937) 236–240
- [29] Sur la multiplication des caractéristiques des groupes continus et semi-simples. *C. R. Acad. Sci., Paris* **204** (1937) 1784–1786
- [30] On normal division algebras of index 5. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **24** (1938) 243–246
- [31] On modular and p -adic representations of algebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **25** (1939) 252–258
- [32] On the representation of groups of finite order. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **25** (1939) 290–295
- [33] On the Cartan invariants of groups of finite order. *Ann. of Math.* **42** (1941) 53–61
- [34] On the modular characters of groups (mit C. Nesbitt). *Ann. of Math.* **42** (1941) 556–590
- [35] A generalization of theorems of Schönhardt and Mehmke on polytopes (mit H. S. M. Coxeter). *Trans. Roy. Soc. Canada III* (3) **34** (1940) 29–34
- [36] On sets of matrices with coefficients in a division ring. *Trans. Amer. Math. Soc.* **49** (1941) 502–548
- [37] On the connection between the ordinary and the modular characters of groups of finite order. *Ann. of Math.* **42** (1941) 926–935
- [38] Investigations on group characters. *Ann. of Math.* **42** (1941) 936–958
- [39] On groups whose order contains a prime number of the first power I. *Amer. J. Math.* **64** (1942) 401–420
- [40] On groups whose order contains a prime number to the first power II. *Amer. J. Math.* **64** (1942) 421–440
- [41] On the nilpotency of the radical of a ring. *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942) 752–758
- [42] On permutation groups of prime degree and related classes of groups. *Ann. of Math.* **44** (1943) 57–79
- [43] On the arithmetic in a group ring. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **30** (1944) 109–114
- [44] On hypercomplex arithmetic and a theorem of Speiser. *Festschrift for 60th birthday of Andreas Speiser* (Zürich, 1945) 13 Seiten
- [45] A note on systems of homogeneous algebraic equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945) 749–755

- [46] On simple groups of finite order (mit H. F. Tuan). *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945) 756–766
- [47] On the representation of a group of order g in the field of the g -th roots of unity. *Amer. J. Math.* **67** (1945) 461–471
- [48] On blocks of characters of groups of finite order, I. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **32** (1946) 182–186
- [49] On blocks of characters of groups of finite order, II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **32** (1946) 215–219
- [50] On splitting fields of simple algebras. *Ann. of Math.* **48** (1947) 79–90
- [51] On Artin's L -series with general group characters. *Ann. of Math.* **48** (1947) 502–514
- [52] On the zeta-functions of algebraic number fields. *Amer. J. Math.* **69** (1947) 243–250
- [53] Applications of induced characters. *Amer. J. Math.* **69** (1947) 709–716
- [54] On a conjecture by Nakayama. *Trans. Roy. Soc. Canada III* (3) **41** (1947) 11–19
- [55] A note on Hilbert's Nullstellensatz. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948) 894–896
- [56] Representations of groups and rings. *Amer. Math. Soc. Colloquium lectures* (1948) 22 Seiten
- [57] On a theorem of H. Cartan. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949) 619–620
- [58] On the zeta-functions of algebraic number fields II. *Amer. J. Math.* **72** (1950) 739–746
- [59] Beziehungen zwischen Klassenzahlen von Teilkörpern eines galoisschen Körpers. *Math. Nachr.* **4** (1951) 158–174
- [60] On the algebraic structure of group rings. *J. Math. Soc. Japan* **3** (1951) 237–251
- [61] On the representations of groups of finite order. *Proc. Internat. Cong. Math.* (1950) II, 33–36
- [62] A characterization of the characters of groups of finite order. *Ann. of Math.* **57** (1953) 357–377
- [63] On the characters of finite groups (mit J. Tate). *Ann. of Math.* **62** (1955) 1–7
- [64] On groups of even order (mit K. A. Fowler). *Ann. of Math.* **62** (1955) 565–583
- [65] Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. *Math. Z.* **63** (1956) 406–444
- [66] A note on the class-numbers of algebraic number fields (mit N. C. Ankeny und S. Chowla). *Amer. J. Math.* **78** (1956) 51–61
- [67] Number-theoretical investigations on groups of finite order. *Proc. Internat. Symp. on Alg. Number Theory* (Tokyo-Nikko, 1955) 55–62
- [68] On the structure of groups of finite order. *Proc. Internat. Cong. Math.* (1954) I, 209–217
- [69] Some remarks on associative rings and algebras. *Nat. Acad. Sci., Nat. Res. Coun. Publication* 502, *Linear Algebras* (1957) 4–11
- [70] A characterization of the one-dimensional unimodular projective groups over finite fields (mit M. Suzuki und G. E. Wall). *Illinois J. Math.* **2** (1958) 718–745
- [71] On a problem of E. Artin (mit W. F. Reynolds). *Ann. of Math.* **68** (1958) 713–720
- [72] On the number of irreducible characters of finite groups in a given block (mit W. Feit). *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **45** (1959) 361–365
- [73] Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung II. *Math. Z.* **72** (1959) 25–46
- [74] On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group (mit M. Suzuki). *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **45** (1959) 1757–1759
- [75] Les groupes d'ordre fini et leurs caractères. *Sém. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot* (Paris, 1959) 6–01 bis 6–16
- [76] On blocks of representations of finite groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **47** (1961) 1888–1890
- [77] Investigation on groups of even order, I. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **47** (1961) 1891–1893
- [78] On finite groups with an abelian Sylow group (mit H. S. Leonard). *Canad. J. Math.* **14** (1962) 436–450
- [79] On groups of even order with an abelian 2-Sylow subgroup. *Arch. Math.* **13** (1962) 55–60
- [80] On some conjectures concerning finite simple groups. *Studies in Math. Analysis and Related Topics* (Stanford, 1962) 56–61
- [81] On finite groups and their characters. *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963) 125–130
- [82] Representations of finite groups. *Lectures on Modern Math.*, I (Wiley, 1963) 133–175
- [83] On quotient groups of finite groups. *Math. Z.* **83** (1964) 72–84
- [84] A note on theorems of Burnside and Blichfeldt. *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964) 31–34
- [85] Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups I. *J. Algebra* **1** (1964) 152–167

- [86] Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups II. *J. Algebra* **1** (1964) 307–334
- [87] On certain classes of positive definite quadratic forms. *Acta Arith.* **9** (1964) 357–364
- [88] On the relation between the orthogonal group and the unimodular group. *Arch. Rational Mech. Anal.* **18** (1965) 97–99
- [89] On finite desarguesian planes I. *Math. Z.* **90** (1965) 117–123
- [90] On finite desarguesian planes II. *Math. Z.* **91** (1966) 124–151
- [91] Investigation on groups of even order II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **55** (1966) 254–259
- [92] Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups III. *J. Algebra* **3** (1966) 225–255
- [93] A characterization of the Mathieu group M_{12} (mit P. Fong). *Trans. Amer. Math. Soc.* **122** (1966) 18–47
- [94] An analogue of Jordan's theorem in characteristic p (mit W. Feit). *Ann. of Math.* **84** (1966) 119–131
- [95] Some results on finite groups whose order contains a prime to the first power. *Nagoya Math. J.* **27** (1966) 381–399
- [96] Emil Artin. *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967) 27–43
- [97] On simple groups of order $5 \cdot 3^a \cdot 2^b$ (Mimeographed notes, Harvard Univ., 1967) 49 Seiten
- [98] Über endliche lineare Gruppen von Primzahlgrad. *Math. Ann.* **169** (1967) 73–96
- [99] On a theorem of Burnside. *Illinois J. Math.* **11** (1967) 349–352
- [100] On blocks and sections in finite groups I. *Amer. J. Math.* **89** (1967) 1115–1136
- [101] On pseudo groups. *J. Math. Soc. Japan* **20** (1968) 13–22
- [102] On blocks and sections in finite groups II. *Amer. J. Math.* **90** (1968) 895–925
- [103] On simple groups of order $5 \cdot 3^a \cdot 2^b$. *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (1968) 900–903
- [104] On a theorem of Frobenius. *Amer. Math. Monthly* **76** (1969) 12–15
- [105] Defect groups in the theory of representations of finite groups. *Illinois J. Math.* **13** (1969) 53–73
- [106] On the order of finite projective groups in a given dimension. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* **11** (1969) 103–106
- [107] On the representations of finite groups. *Yeshiva Univ.* (1969) 121–128
- [108] On groups with quasi-dihedral Sylow 2-subgroups II. *Theory of Finite Groups, a symposium* (Benjamin, 1969) 13–19
- [109] On the first main theorem on blocks of characters of finite groups. *Illinois J. Math.* **14** (1970) 183–187
- [110] Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups (mit J. L. Alperin und D. Gorenstein). *Trans. Amer. Math. Soc.* **151** (1970) 1–261
- [111] On finite desarguesian planes III. *Math. Z.* **117** (1970) 76–82
- [112] Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups IV. *J. Algebra* **17** (1971) 489–521
- [113] Types of blocks of representations of finite groups. *Proc. Symp. in Pure Math.* **21**. Amer. Math. Soc. (1971) 7–11
- [114] Some properties of finite groups with wreathed Sylow 2-subgroup (mit W. J. Wong). *J. Algebra* **19** (1971) 263–273
- [115] Character theory of finite groups with wreathed Sylow 2-subgroups. *J. Algebra* **19** (1971) 547–592
- [116] Blocks of characters. *Proc. Internat. Cong. Math.* (1970) **1**, 341–345
- [117] On the work of John Thompson. *Proc. Internat. Cong. Math.* (1970) **1**, 15–16
- [118] Finite simple groups of 2-rank two (mit J. L. Alperin und D. Gorenstein). *Scripta Math.* **29** (1973) 191–214
- [119] A note on zeta-functions of algebraic number fields. *Acta Arith.* **24** (1973) 325–327
- [120] On the structure of blocks of characters of finite groups. *Proc. Second Internat. Conf. Theory of Groups* (Canberra, 1973) 103–130
- [121] Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups V. *J. Algebra* **28** (1974) 433–460
- [122] On 2-blocks with dihedral defect groups. *Symposia Math. (INDAM)* **13** (1974) 367–393
- [123] On the centralizers of p -elements in finite groups (mit P. Fong). *Bull. London Math. Soc.* **6** (1974) 319–324
- [124] On the resolvent problem. *Ann. Mat. Pura Appl.* **102** (1975) 45–55
- [125] On finite groups with cyclic Sylow subgroups I. *J. Algebra* **40** (1976) 556–584

134 H. Rohrbach

- [127] Blocks of characters and structure of finite groups. *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)*
1 (1979) 21–38
- [128] On finite projective groups, from *Contributions to Algebra* (Academic Press, 1977)

Prof. Dr. Hans Rohrbach
Fachbereich Mathematik
Universität Mainz

Privatadresse:
In der Fischzucht 5
8743 Bischofsheim

(Eingegangen: 23. 6. 1980)

Lichtensteins wissenschaftliche Wirksamkeit

Zum 100. Geburtstag von Leon Lichtenstein*)

E. Hölder, Mainz

1. Aus Anlaß des 100. Geburtstages von Lichtenstein sein mathematisches Werk zu vergegenwärtigen, wäre eine wichtige Aufgabe; sie erscheint aber wegen des Reichtums der ungefähr 125 Abhandlungen sehr schwierig. Ich jedenfalls kann nur aus meiner Sicht ein paar mehr bibliographische bzw. historische Bemerkungen machen.

Im ganzen finde ich die Abhandlungen Lichtensteins in der Literatur doch wenig zitiert, am wenigsten die großen Abhandlungen in den Zeitschriften in Quartformat (Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss. [1], Crelles Journal, Acta Math. [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]). Es mag sein, daß darin jene subtile Betrachtung viel Platz einnimmt, die Bers und Schechter in der Einleitung ihrer Darstellung Elliptic Equations and Their Solutions (in: Bers, L.; John, F.; Schechter, M.: Partial Differential Equations. New York – London – Sydney: Interscience Publishers 1964, S. 133) die spezielle Ausführung von Besonderheiten (unbegrenzte Gebiete, Singularitäten usw.) bei unkonventionellen Typen nennen. Dies ist heute vielleicht gegenüber einer mehr abstrakten funktionalanalytischen Darstellung zurückgetreten. Eine Ausnahme bildet vielleicht der viel erwähnte Satz von Korn und Lichtenstein; er besagt die Möglichkeit, ein nichtanalytisches Flächenstück im Raum auf die Kreisscheibe konform abzubilden ([1], [10]). Prinzipiell kann man sagen, jedes Flächenstück im Raum ist eine Riemannsche Fläche.

Dies spielt auch eine Rolle bei der neueren Behandlung der Minimalflächen und der Flächen gegebener mittlerer Krümmung durch Courant, S. Hildebrandt und seine Schule. Hier und sonst vielfach findet ein weiterer Beitrag Lichtensteins zur komplexen Analysis Anwendung: der Nachweis der Analytizität der Lösungen gewisser (nicht-)linearer partieller Differentialgleichungen ([11]), worauf der Nachruf von O. Hölder (Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. 76 (1934) 307–314) eingeht.

Viel gelesen und allseitig gebraucht für das Gebiet der Potentialtheorie und der Uniformisierung einerseits, der Rand- und Eigenwertprobleme der partiellen Differentialgleichungen andererseits, sind, denke ich, die beiden Enzyklopädie-

*) Diese Arbeit wurde im Rahmen eines Forschungsauftrages der Deutschen Forschungsgemeinschaft abgefaßt. Meine Mitarbeiterin war Frau Dipl.-Math. M. Marmé.

Artikel ([12], [13]), die die große, auch zurückliegende, Literatur in genauester Weise referieren. Zum zweiten Artikel fand man ja eine Art Fortsetzung erwünscht in Miranda, C.: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. *Ergebn. d. Math. N. F. H.* 2 Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1955.

Lichtenstein kam (aus Münster/Westf., tatsächlich aber mehr aus Berlin) nach Leipzig als Nachfolger des Geometers K. Rohn zu den mathematischen Kollegen O. Hölder und Herglotz; diese hatten Mühe gehabt, die philosophische Fakultät für die Berufung von Lichtenstein zu gewinnen. Später, 1929, war er dann Dekan dieser Fakultät. Bis zum Weggang von Herglotz (1925) bestand die Harmonie der drei Konfessionen, die mein Vater schon als Student in Berlin zwischen den drei Großen Weierstraß, Kronecker und Kummer erlebt hatte.

2 Schüler

In seiner Leipziger Zeit hatte Lichtenstein viele direkte Schüler, die er zur Promotion gebracht hat; in zeitlicher Reihenfolge: E. Hölder, E. Kähler, A. Wintner, V. Garten und K. Maruhn, H. Boerner, F. Neumann, H. Schubert. Ihre Dissertationen über Probleme der Gleichgewichtsfiguren, der Hydrodynamik und der Rand- und Eigenwertprobleme will ich bei den entsprechenden Büchern Lichtensteins erwähnen.

Lichtenstein hatte zwei Assistentenstellen: eine am mathematischen Institut Leipzig, diese hatte vor mir L. Neder, später Professor in Münster, inne; eine zweite als Herausgeber der „Fortschritte der Mathematik“ und der „Mathematischen Zeitschrift“ von J. Springer in Berlin. Hier waren vor meiner Zeit Assistenten A. Weinstein, G. Szegő, wahrscheinlich auch Müntz; später zu meiner Zeit V. Garten und K. Maruhn. A. Wintner und J. Schauder haben als Rockefeller-Stipendiaten wissenschaftlich arbeiten können (nach Aussage von Orlicz, vgl. die Gedächtnisrede bei der Leipziger Feier 1978 von D. Przeworska-Rolewicz, in *Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Nat. R.* 29 (1980) 15–26. Außer ihnen kamen als Gäste zu Lichtenstein für einige Zeit auswärtige junge, bereits „fertige“ Mathematiker: Nikliborc, J. von Neumann, J. Leray.

Lichtenstein hat übrigens außer den Referenten auch selbst alle bei der Mathematischen Zeitschrift eingereichten Arbeiten genau studiert: inhaltlich mathematisch, aber auch formal drucktechnisch – bis auf den auf dem Kopf stehenden i-Punkt, den Landau monierte.

3. Wintner hatte sich insbesondere mit der Theorie der unendlich vielen nicht-linearen Gleichungen und Differentialgleichungen mit unendlich vielen Variablen in Budapest und Wien im Anschluß an F. Riesz beschäftigt. Lichtenstein hat Wintner ermöglicht, diese Forschungen in Leipzig fortzusetzen, insbesondere sein Buch „Spektraltheorie der unendlichen Matrizen“ (Leipzig 1929) zu schreiben. Dieses Buch, das Lichtenstein angeregt und mit einer Einleitung versehen hat, und die vielen anschließenden Arbeiten Wintners gaben ja unmittelbar nach Erscheinen des Enzyklopädie-Artikels von Hellinger & Toeplitz der Theorie einen neuen Anfang; ein Kontakt zwischen Wintner und J. v. Neumann, der, wie erwähnt, ebenfalls Lichtenstein besuchte, ergab sich freilich nicht.

Lichtenstein hat sich um Wintner wie ein Vater gesorgt. Eine von Wintner bereits selbständig abgefaßte Arbeit mit dem Titel „Über die Existenz der Hillschen Mondbahn of maximum lunation und der Poincaréschen Schlingbahnen“ (Math. Z. 28 (1928) 430–450) wurde auf Betreiben Lichtensteins als Dissertation in Leipzig angenommen, doch die Habilitation in Leipzig gelang nicht – zum Glück, muß man sagen.

Wintner wandte die Methode der unendlich vielen Variablen an auf Existenzsätze für störungstheoretische Probleme der Himmelsmechanik, der Hillschen Theorie der Variationsbahn des Mondes und des Mondes mit „maximum lunation“ und der Theorie der kleinen Planeten. Er gab auch die mathematische Begründung für Lösungsscharen („Gruppen“) des 3-Körperproblems, die E. Strömrgren in Kopenhagen damals – zum ersten Mal – mit modernen numerischen Methoden behandelt hatte, sowie für dessen Abschlußprinzip.

Schauders präzise Abschätzungen zu den Potentialen der doppelten und der einfachen Schicht, die in der Math. Z. 33, 35 (1931/32) erschienen, betrachtete Lichtenstein als einen neuen wichtigen Beitrag in der von O. Hölder, Liapounoff, Korn und von ihm selbst eingeschlagenen Richtung der Methode der H-Bedingung, der Lichtenstein wohl auch den Namen gegeben hat. Sie waren vielleicht der Anlaß für Lichtenstein, seine eigenen Abschätzungen ([22], [23], [24]) für das Newtonsche Potential noch fortzusetzen ([25]); sie bezogen sich auch auf die Änderung des Gebietes, die er für Existenzsätze nötig hatte; dabei spielt die funktionentheoretische Betrachtung von Hilfsparametern eine Rolle, für die Lichtenstein komplexe Werte zuläßt.

Für Schauder waren, wie Leray, der mit ihm gemeinsam jene fundamentale Arbeit (Topologie et équations fonctionnelles, in: Schauder, J. P.: Œuvres, Warszawa 1978, 320–348) verfaßt hat, in „L'œuvre de Jules Schauder“ (ib. S. 14) betont, diese (ursprünglich weiter geplanten, aber mit Rücksicht auf eine vorher erschienene Arbeit von O. D. Kellogg nicht veröffentlichten) Abschätzungen *V o r b e r e i t u n g* für Schauders neue Fortsetzungsmethode mittels der a priori-Schranken für partielle Differentialgleichungen.

4 Lichtensteins Bücher

Für die Leser, die Lichtensteins Werk näher kennenlernen wollen, gehe ich jetzt zu einer mehr systematischen, nach Sachgebieten geordneten Darstellung über, wobei ich mich nur noch an die von Lichtenstein verfaßten drei großen Bücher halte, von denen alle zwei Jahre eins fertig wurde (alle bei J. Springer):

- (H) Grundlagen der Hydromechanik (1929), [14]
- (I) Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integral-Differentialgleichungen nebst Anwendungen (1931), [15]
- (G) Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten (1933), [16]

Hydromechanik

Bezüglich (H) verweise ich im wesentlichen auf meine Besprechung im Jber. d. Dt. Math.-Verein 74 (1972) H. 1/2, 32–33 kursiv, des 1968 erschienenen Nachdrucks des Werkes.

Lichtensteins große hydrodynamische Abhandlungen, die diesem Buch (H) zugrunde liegen, bilden eine Reihe:

- I. „Über einige Existenzsätze des Anfangswertproblems der Hydrodynamik für homogene Flüssigkeiten“, [17], [18],
- II. das gleiche für inhomogene Flüssigkeiten; Wirbelsätze, [19],
- III. Permanente (langsame) Bewegung einer . . . zähen Flüssigkeit, [20],
- IV. Stetigkeitssätze, Helmholtz-Kirchhoffsche stationäre geradlinige Wirbelfäden, [21];

eine weitere Reihe bilden die dazu notwendigen „Hilfssätze der Potentialtheorie I–IV“ ([22], [23], [24], [25]).

Eine Abhandlung ([26]) über die Bewegung inkohärenter Materie im unendlich ausgedehnten Raum entkräftet einen von H. Seeliger gemachten Einwand gegen die Anwendung des Newtonschen Gravitationsgesetzes im unendlichen Raum. Lichtenstein zeigt, daß man auch im ganzen unendlichen, mit Materie erfüllten Raum unter geeigneten Voraussetzungen über die Dichte durchaus eine wohlbestimmte Anziehungskraft definieren kann.

Die erste Reihe enthält außer der Lösung des Anfangswertproblems auch die Untersuchung stationärer Bewegungen. Lichtensteins Behandlung der (mit den homogenen bzw. heterogenen Gleichgewichtsfiguren methodisch eng zusammenhängenden) stationären Bewegung von Wirbeln muß, wie Maruhn bemerkt hat (Proc. IX. Int. Congr. Appl. Mech., Brussels 1957, 1, 173–176), im Fall von Wirbelringen korrigiert werden wegen der notwendigen Abhängigkeit der „Drehung“ vom Achsenabstand. Die Existenz im Großen bewiesen unter Zurückführung auf ein Variationsproblem und mit Steiners Symmetrisierung Fraenkel und Berger (Acta Math. 132 (1974) 13–51).

Diese ringförmigen Figuren (des Gleichgewichts rotierender Flüssigkeiten bzw. von stationären Wirbeln) scheinen mir (bei Berücksichtigung der variablen Dichte, im Sinn der „Figur der Erde“) eine Grundlage zu sein zur Behandlung von toroidalen Plasmaringen sowie von Supraleiterringen; beides spielt in modernen technischen Einrichtungen eine Rolle bzw. ist theoretisch von Bedeutung für den Existenzbeweis der gequantelten Magnetflüsse.

Ich erwähne hier noch die von Lichtenstein angeregte Dissertation „Über einige Lichtensteinsche Hilfssätze der Potentialtheorie und ihre Anwendung auf die Hydrodynamik“ von H. Schubert, die 1935 bei mir beendet wurde. Sie überträgt Lichtensteins komplizierte potentialtheoretische Abschätzungen im unendlichen Raum auf das 2-Dimensionale, wobei noch eine Bedingung hinzugefügt werden mußte, und wendet sie auf das Anfangswertproblem der ebenen inkompressiblen Strömung an.

In Lichtensteins letzten Jahren gab es bei diesem insofern eine hydrodynamische Sensation, als ein jüngerer polnischer Mathematiker, Wolibner, das Anfangswertproblem für alle Zeiten löste. Davon erzählte Lichtenstein, und ich selbst fand daraufhin eine andere Ableitung mit seinen Abschätzungen. Schließlich gab Schaefer für die Bewegung Potenzreihen in der Zeit t an, die unbeschränkt konvergieren.

Mit den Abschätzungen der Ableitungen der Potentiale in nicht beschränkten Gebieten der Ebene habe ich im Krieg noch das stationäre Umströmungsproblem der Gasdynamik gelöst um ein in der Ebene \mathbb{R}^2 befindliches Profil mit Ecke

bei kleiner Machzahl (vgl. meinen Bericht IB FZ BS 72/1 Beiträge zur mathematischen Behandlung des Umströmungsproblems der Gasdynamik DFGLR 1972). Im Großen bis beliebig nahe an die Schallgeschwindigkeit geht der Existenzbeweis allerdings nur in endlichen Gebieten um Profile ohne Ecken mit der Schauder-Lerayschen Fortsetzungsmethode (im Lichtenstein-Gedächtnisband der Math. Z. 72 (1960)). Bers behandelt das letzte Problem im unendlich ausgedehnten Strömungsgebiet anders, und zwar mit den Methoden der quasikonformen Abbildungen (Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954) 441–504).

Auch das von Bers untersuchte zweite Randwertproblem für Minimalflächen im Außenraum eines Zylinders (Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951) 465–491) gehört hierher als eine vernünftige ('adiabatische') Approximation der Umströmung um ein Profil.

Die klassischen Arbeiten von Müntz und Korn zum Randwertproblem der Minimalflächen, die ja Lichtenstein weitgehend auf reguläre Extremalflächen verallgemeinert hat, wie überhaupt alles über Minimalflächen, findet man in J. C. C. Nitsches Werk „Vorlesungen über Minimalflächen“ (Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975)

5 Integralgleichungen

Lichtensteins Monographie „Integro- und Differentialgleichungen“ (I) führt in klassischer Weise (die Theorie von E. Schmidt verallgemeinernd) in die nicht-lineare Analysis ein und bringt viele Anwendungen. Meist werden Lösungen in der Nachbarschaft einer bekannten (eventuell trivialen) mit sukzessiver Approximation ermittelt. Aber es werden auch einige Probleme im Großen behandelt. Der mir gegenüber einmal von Schauder gemachte Einwand, daß Lichtenstein vorher in jedem Einzelfall das, was man jetzt den Banachschen Fixpunktsatz nennt, erneut mit sukzessiver Approximation bewiesen hat, trifft jedenfalls bezüglich des Buches (I) nicht mehr zu. Die Banachschen Begriffsbildungen werden allerdings erst schüchtern benutzt.

Diese Darstellung gibt Lichtenstein Gelegenheit, auch seine früheren Untersuchungen ([4], [5]) über lineare partielle Differentialgleichungen, meist mit zwei unabhängigen Variablen, und ihre ersten und zweiten Rand- und Eigenwertprobleme zu referieren.

Die nichtlinearen Probleme, insbesondere Variationsprobleme, [31], [32], führen im sogenannten „singulären Fall“ zur Diskussion der Verzweigungs-gleichungen: daran kann sich die Diskussion der Stabilität bzw. deren Wechsel anschließen. Das spielt heute eine große Rolle. Der singuläre Fall liegt vor, wenn die zugehörigen linearen Jacobischen Variationsgleichungen eine Eigenfunktion besitzen. Für solche lineare Differentialgleichungen, gewöhnliche und partielle, hatte Lichtenstein das Rand- und Eigenwertproblem mit Hilberts Methode der unendlich vielen Variablen behandelt ([27], [28], [29]). Das von Lichtenstein mit diesen Mitteln entwickelte Eigenwertkriterium der linearen Jacobischen Differentialgleichung für das Minimum einer Extremalfläche ([30], [31], [32]) stellt eine große Verallgemeinerung dar der berühmten Untersuchung

von H. A. Schwarz (in der Festschrift für Weierstraß, Acta Soc. Scient. Fennicae 15 (1888) 315–362) über Minimalflächen.

Die entsprechende Untersuchung Lichtensteins für das gewöhnliche *e i n - d i m e n s i o n a l e* Variationsproblem ([30]) wurde in der Dissertation von H. Boerner (Math. Z. 34 (1931) 293–319 und Math. Z. 35 (1932) 161–189; Eigenwertprobleme) unter anderem auf eindimensionale Variationsprobleme höherer Ordnung ausgedehnt, danach von E. Hölder auf Extremalen des von Caratheodory untersuchten Lagrangeschen Variationsproblems (im Lichtenstein Gedächtnisband der Prace Matematyczno-Fizyczne 43 (1935) 307–346; sodann in Acta Math. 70 (1939) 193–242; Math. Ann. 148 (1962) 214–225).

Lichtensteins Untersuchungen zu den *z w e i d i m e n s i o n a l e n* Variationsproblemen [28], [32], insbesondere das lineare Eigenwertproblem, hat später E. Hölder in Mainz auf mehrdimensionale elliptische Variationsprobleme (mehrere unabhängige Variable und mehrere gesuchte Funktionen) übertragen (Math. Ann. 148 (1962) 214–225). Dazu und selbständig gab S. Hildebrandt abschließende Beiträge (Math. Ann. 148 (1962)) unter Verwendung der Resultate von Hestenes über Elliptizität.

Bei den nichtlinearen Variationsproblemen kann die lokale Lösungsmethode auch zu Lösungen im Großen führen, etwa mittels der Fortsetzungsmethoden durch Anwendung der Schauderschen Abschätzungen mit den a priori-Schranken.

Mit partiellen Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Variablen und mehreren gesuchten Funktionen hat sich Lichtenstein kaum beschäftigt. Dieses Gebiet hat sich ja dann am meisten entwickelt durch die Arbeiten von Morrey. Hier werden jetzt meist Variationsmethoden benutzt, wie das Lichtenstein auch schon gelegentlich getan hat. Aber es sind ganz neue Räume von Funktionen mit verallgemeinerten Ableitungen (Distributionen, Sobolev-Räume). In diesen findet man mit Variationsmethoden zunächst eine schwache Lösung, deren Regularität ist dann aber zu zeigen.

Dazu kommen im Buch (I), wie gesagt, konkrete Anwendungen auch auf Gleichgewichtsfiguren und Hydrodynamik, für welche diese Methode wohl nach wie vor gut geeignet ist; z. B. die Levi-Civitaschen Wasserwellen, deren potentialtheoretische Behandlung mit nichtlinearen Integralgleichungen Lichtenstein F. Neumann als Dissertation (Leipzig 1930, permanente wirbelfreie Flüssigkeiten in Kanälen) gegeben und für das Buch vereinfacht hat. Zu dieser Art von Problemen mit freiem Rand gibt es natürlich auch andere Methoden, ich erwähne die umfassende von H. Beckert, siehe dazu die neue Monographie von Zeidler, E.: Beiträge zur Theorie und Praxis freier Randwertaufgaben. Schriftenreihe d. Inst. f. Math. bei der DAW(A)Z, Berlin 1971, die auf die klassische Monographie Lichtensteins mehrfach Bezug nimmt. Darüberhinaus stellt sie für die mannigfachen Probleme, die klassifiziert werden, die verschiedenen anderen Methoden dar und wägt sie für die Praxis der Wellen ab.

6 Gleichgewichtsfiguren

Lichtensteins Leipziger Zeit begann mit seiner Antrittsvorlesung ([33]) „Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung“ (1923) und später (1928)

folgte, wohl vorbereitet durch Vorlesungen über Potentialtheorie, Mechanik, Hydro-mechanik, sein Kolleg über kosmogonische Hypothesen; hier hat Lichtenstein Probleme der Himmelskörper skizziert, die dann zum Teil von seinen Schülern in den unter ihm angefertigten Dissertationen aufgegriffen und weiterentwickelt wurden.

Aber auch junge Mathematiker in seiner polnischen Heimat interessierte Lichtenstein für die Gleichgewichtsfiguren: Nikliborc bewies allgemein die von Crudeli nur für konvexe Figuren gefundene Schranke (die Hälfte der Poincareschen) für die Winkelgeschwindigkeit und fand Schranken für die Abplattung (Math. Z. 31 (1929) 366–377 und Math. Z. 34 (1931) 74–90) und sogar ein Topologe, Mazurkiewicz (Math. Z. 25 (1926)), stellte eine Schranke $e^{268 \ 050}$ für die Achsenstreckung einer Gleichgewichtsfigur auf, die ich (ebenda S. 754) nur unwesentlich auf e^{9000} herabsetzen konnte, obwohl sie wahrscheinlich 1 ist; erst Nikliborc hatte praktischen Erfolg.

Kostitzin hat für das Buch (G) einen Beitrag zur Clairautschen Gleichung der Theorie der Erde geliefert.

Dem Buch (G) Lichtensteins liegen gleich drei Reihen von Untersuchungen zugrunde:

- a) „Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren“, dazu gehören:
 - I. Homogene Flüssigkeiten [34],
 - II. Berichtigung und vor allem Stabilität [35],
 - III. Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde [36].
 Zu I. kommt die neue Begründung [31].
- b) Unter dem Titel „Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper“ erschien:
 - I. Laplacesche Theorie des Erdmondes [37],
 - II. „Doppelsterne“ [38],
 - III. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren (ohne Zentralkörper) [39],
 - IV.–VI. Maxwellsche Theorie der Saturnringe [40], [41], [42],
 - VII. dazu ein Anfangswertproblem [43].
- c) Von den „Kosmogonischen Untersuchungen“ scheint nur
 - I. Zwei Einzelmassen, die in einem Punkt zusammenhängen [44], erschienen zu sein.

Daneben steht die Untersuchung über das Weltmeer, die Lichtenstein dann nochmals in seinen Adorfer Vorträgen unter geringeren Voraussetzungen vereinfacht behandelt hat; die Arbeit wurde von K. Maruhn herausgegeben, s. u..

Das letzte Werk (G) über Gleichgewichtsfiguren vollendete Lichtenstein kurz vor seinem Tod 1933. Es stellt eine sehr gute Übersicht aller Untersuchungen von ihm selbst und auch von seinen Mitarbeitern zu diesem Thema dar.

F. W. Levi fand bei Lichtensteins Tod einen Trost darin, daß sein Lebenswerk mit dem Buch über Gleichgewichtsfiguren ja vollendet sei. Letzteres stimmt aber weder bezüglich des Spezialgebietes der Gleichgewichtsfiguren und Himmelskörper noch bezüglich seiner übrigen mathematischen Pläne (etwa Spektraltheorie singularer Differentialgleichungen).

Es war eine Überraschung, als mir Frau Lichtenstein nach seinem Tod zwei Manuskripte gab: Vorträge, die Lichtenstein in Adorf in der Schweiz vorhatte zu halten. Diese beiden Arbeiten [45], [46], die K. Maruhn und ich herausgegeben ha-

ben, brachten eine ganz neue Methode für den Existenzbeweis einer Gleichgewichtsfigur: nicht mehr die subtile differential-geometrische klassische Bestimmung des Abstandes ζ der Nachbarfigur zu einer gegebenen, es reichte schon die H-Bedingung für ζ selbst, ohne daß die Ableitungen von ζ gebraucht wurden. Zum Schluß war alles plötzlich viel einfacher geworden.

Eine ganz neue direkte Variationsmethode zur Behandlung der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten – allerdings nur mit Rotationssymmetrie – hat übrigens J. F. G. Auchmuty in „Existence of Axisymmetric Equilibrium Figures“ (Arch. Rational Mech. 65 (1977) 249–261) entwickelt.

Von den Schülern haben E. Kähler und E. Hölder die allgemeine Theorie der Gleichgewichtsfiguren gefördert. Der erstere wies in seiner Dissertation (Math. Z. 28 (1928) 220–237) aufgrund seiner Untersuchung zum 3-Körperproblem der Himmelsmechanik auf Gleichgewichtsfiguren hin, die überhaupt keine Symmetrieebene durch die Rotationsachse haben; sie haben nur die eine Symmetrieebene senkrecht zur Rotationsachse, deren Existenz Lichtenstein als erster allgemein bewiesen hat.

E. Hölder hat nach seiner Dissertation über Gleichgewichtsfiguren mit Oberflächenspannung (Math. Z. 25 (1926) 188–208), die für einen Himmelskörper mit fester Kruste maßgebend sein könnte, Beiträge zu allgemeinen Theorie gegeben: über die Behandlung der trivialen Verzweigungsgleichungen, die von der Invarianz des Problems gegenüber den Transformationen einer Lie-Gruppe herrühren und deren („triviale“) Verzweigungsgleichungen sich damit behandeln lassen; das führte zum Abschluß von Lichtensteins Begründung der Laplaceschen Theorie des Erdmondes (Leipz. Berichte (1926) 21–36). Von E. Hölder stammen auch Beiträge zu Lichtensteins Theorie der S t a b i l i t ä t der Gleichgewichtsfiguren (ebenda S. 23), die seitdem, etwa für heterogene Figuren, nie wieder aufgegriffen worden sind. Die Habilitationsschrift von E. Hölder endlich (Math. Z. 31 (1927) 197–257) enthält Untersuchungen periodischer Bahnen des Mehrkörperproblems (kleine Planeten, Hills Variationsbahn des Mondes). Hier ist die Methode, die linearen Terme der Differentialgleichungen mit der (verallgemeinerten) Greenschen Funktion zu behandeln, die nichtlinearen mit sukzessiver Approximation und nachfolgend die Verzweigungsgleichungen zu diskutieren; das war durch Lichtensteins Theorie der Saturnringe vorgebildet; die Methode unterscheidet sich von der Methode der unendlich vielen Variablen von Hill und Wintner und von Poincarés Kontinuitätsmethode.

7. Am Ende seiner Monographie (G), sozusagen in seinem Schlußwort überhaupt, sagt Lichtenstein von den „Entwicklungen dieses Buches“, die „fast ausschließlich mathematischen Charakters . . .“, aber „doch aus der Beschäftigung mit astrophysikalischen und kosmologischen Fragen entsprungen sind“: „Vielleicht könnten darum die Resultate und Methoden dieses Buches . . . bei weiterem Ausbau in der Theorie der Planetenatmosphären, der Bildung der Satelliten, möglicherweise auch in der Theorie der Doppelsterne und dgl. einmal auch eine mehr praktische Bedeutung für die Astronomie erlangen. Im Zusammenhang damit wäre . . . die Einführung weiterer physikalischer Parameter und eine ins einzelne gehende Verfolgung der . . . betrachteten Konfiguration bei ihrem Fortschreiten längs einer

linearen Reihe von (quasistationären) Zuständen erwünscht.“ Eine solche müßte auch die Evolution eines Sternmodells etwa längs der Hauptreihe sein.

Garten und besonders Maruhn haben Rochesche Satelliten, ringförmige Gleichgewichtsfiguren mit und ohne Zentralkörper, doppelsternartige heterogene Gleichgewichtsfiguren, die in einem Punkt zusammenhängen, ebensolche Gleichgewichtsfiguren mit einer Kante, behandelt.

In jenem Schlußwort nennt Lichtenstein ausdrücklich seine Untersuchung „Der Laplacesche Urkörper“ [37]; daran anschließend entstand die Arbeit von Maruhn (Math. Z. 37 (1933) 463–478), die heterogene Gleichgewichtsfiguren mit einer Kante behandelt. Das paßt gut zu dem 1931 von O. Struve jun. entwickelten Modell der sehr rasch rotierenden „Be- und Hüllensterne“, die am Äquator ständig Materie verlieren; sie hängen zusammen mit saturnähnlichen „Ringmodellen“ und engen Doppelsternen mit Materieaustausch; auch solche Konfigurationen haben Lichtenstein und Maruhn behandelt. Vergleiche dazu Slettebak, A. (ed.): „Be & Shell Stars“ IAU Symp. 1975, Reidel 1976, zit. nach der Besprechung dieses Buches von D. Lemke (Z. f. Flugwiss. Weltraumforsch. 1 (1977)).

Lichtenstein selbst sagt noch im Schlußwort seines Buches „Hydromechanik“ (H), S. 338, nach der Besprechung der ruhenden Gaskugeln von Emden: „Auch Eddington begnügt sich mit der Betrachtung einer ruhenden Gasmasse. Eine systematische Behandlung des Problems des Sternleichgewichts mit Strahlungsgleichgewicht unter Berücksichtigung der Zentrifugalkraft bildet eine zur Zeit noch offene Aufgabe.“ Hier weist Lichtenstein in der Anmerkung auf eine Abhandlung von H. von Zeipel hin: „Zum Strahlungsgleichgewicht der Sterne“. Sie dämpfte zum ersten Mal beim Vorhandensein von Rotation und Energieerzeugung den Enthusiasmus über Emdens Entdeckung, daß das Strahlungsgleichgewicht mit einem polytropen Gas (vom konstanten Index $n = 3$) behandelt werden kann.

In der Tat macht man für die **B e r e c h n u n g** der modernen Sternmodelle reichere und realistischere Annahmen betreffs der Zone des radiativen bzw. des (polytropen) konvektiven Gleichgewichts, der Zustandsgleichung, der Opazität κ und der Energieerzeugung ϵ , die von weiteren Parametern wie den Wasserstoff- und den Heliumanteilen X , Y abhängen.

Darüber gibt Auskunft die schöne Darstellung von M. Schwarzschild „Structure and Evolution of the Stars“ (Princeton, N. J. 1958, vgl. meine Skizze in Mitt. Math. Sem. Gießen 123 (1977) 195–227). Die Theorie betrifft meist ruhende Gaskugeln und ist wenig beeinflusst von der klassischen Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.

Gewiß ist beim Aufbau solcher Gasmassen die Rotation der Figuren für die Astrophysik von sekundärem Interesse. Immerhin gibt die Deformation der Schichtung durch die Rotation zusammen mit der Divergenz des Strahlungsflusses Schwierigkeiten und Anlaß zu Mischungsvorgängen im Stern, die man vernachlässigbar wissen möchte, und ebenso gibt die durch die Störung hervorgerufene Drehung der Apsidenlinie der Bahnellipse eines Doppelsterns einen Test für den Aufbau, der praktisch verwendet wird, s. M. Schwarzschild, S. 154 und S. 175. Dazu sagt Schwarzschild selbst (ibid., S. 152):

„Der Abstand der durch Rotation deformierten Niveaulächen von der ursprünglich ruhenden ist ja von 1. Ordnung klein. Deshalb kann man für die übrigen

Größen die Approximationen 0-ter Ordnung nehmen, also die Ausgangswerte im ungestörten (ruhenden) Modell – ohne sich um die Störung des thermischen Gleichgewichts des Sterns zu sorgen!“

Also kann für die 1. Approximation als Ausgangsfigur der nach den modernen Modellen vorher numerisch berechnete kugelförmige Aufbau zugrunde gelegt werden. Dann aber ergibt sich, wie ich in meiner zuletzt zitierten Arbeit zeigte, mit der klassischen Clairaut-Liapounoff-Lichtensteinschen Theorie der heterogenen Gleichgewichtsfiguren genau die Differentialgleichung für die 1. Approximation der Deformation der Niveauflächen und der Wert für die Abplattung eines Sterns bzw. die Apsidalbewegung eines Doppelsterns; theoretisch ergibt sich freilich aus dieser approximierenden Berechnung die Aufgabe, die Zirkulation, die durch die Divergenz des Strahlungsflusses hervorgerufen wird, als stationäre Bewegung im rotierenden Stern gleichzeitig mit der Gestalt der Fläche konstanter Dichte streng zu ermitteln.

8 Schluß

Ich habe hier auch erwähnt, was sich an Lichtensteins Untersuchungen angeschlossen hat. Eine Würdigung dieser selbst ist der Nachruf meines Vaters Otto Hölder. Dazu habe ich damals aus meiner genauen Kenntnis vieler Arbeiten Lichtensteins einiges beigetragen. Leider hat die Sächsische Akademie das von O. Hölder handschriftlich vorbereitete Schriftenverzeichnis beim Druck weggelassen. Ich zitiere nur die von mir erwähnten Arbeiten Lichtensteins in neuer Numerierung.

Inzwischen fand in Leipzig vom 07.–09. 12. 1978 anlässlich der hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von Leon Lichtenstein ein Lichtenstein-Festkolloquium statt u. a. mit den wissenschaftlichen Vorträgen von H. Beekert: „Leon Lichtenstein 1878–1933“ und von H. Schubert: „Lichtensteins Verhältnis zu den Grundbegriffen der Mechanik“, die in *Wiss. Z. Karl-Marx Univ. Leipzig, Math.-Natwiss. R.* 29 (1980), H. 1 publiziert sind.

Vor allem hat Frau Przeworska-Rolewicz dort das Leben Lichtensteins geschildert und eine vollständige Liste seiner Publikationen abgedruckt. Sie führt auch die nach dem Tode Lichtensteins in der polnischen Zeitschrift *Mathesis Polska* zum Gedenken an Leon Lichtenstein erschienenen Artikel an, vor allem den Nekrolog von H. Steinhaus und die Aufsätze von W. Nikliborc: „Leon Lichtensteins Arbeiten zur Himmelsmechanik“ und von J. Schauder: „Leon Lichtensteins Arbeiten über partielle Differentialgleichungen“ (cf. *Mathesis Polska VIII*, 9–10 (1933), 131–159).

Herrn Jacobs (Erlangen) verdanke ich ebenfalls die Kenntnis von Nachrufen auf Leon Lichtenstein; davon ist noch zu erwähnen: Anon, *Wiad. M.* 38 (1935) 131–136.

Literatur

- [1] Beweis des Satzes, daß jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann. Abh. d. Preuß. Akad. Wiss. (1911), Anhang (Habilitationsschrift)
- [2] Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken. J. f. d. reine angew. Math. **140** (1911) 100
- [3] Über das Poissonsche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials. Ebenda **141** (1912) 12
- [4] Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, I. Die erste Randwertaufgabe. Allgemeine ebene Gebiete. Ebenda **142** (Schwarz-Heft) (1913) 1
- [5] Das gleiche II. Abteilungsweise stetige Koeffizienten. Das zweite Randwertproblem. Gemischte Randwertbedingungen. Ebenda **143** (1913) 51
- [6] Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. Methode der unendlich vielen Variablen. Ebenda **145** (1915) 24
- [7] Zur Variationsrechnung. Zweite Mitteilung. Das isoperimetrische Problem. Ebenda **165** (1931) 194
- [8] Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Die erste Randwertaufgabe für analytische Gebiete mit Ecken. Acta Math. **36** (1913) 345
- [9] Integration der Differentialgleichung $\Delta_2 u = ke^u$ auf geschlossenen Flächen. Methode der unendlich vielen Variablen. Acta Math. **40** (1916) 1
- [10] Zur Theorie der konformen Abbildung. Konforme Abbildung nichtanalytischer, singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete. Bull. d. l'Acad. d. Sc. d. Cracovie (1916) 192
- [11] Über den analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme. Ebenda (1913) 916
- [12] Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Leipzig: B. G. Teubner 1918. = Enzyklop. d. math. Wiss. II C 3, 177
- [13] Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Leipzig: B. G. Teubner 1924. = Ebenda C 12, 1277
- [14] Grundlagen der Hydromechanik. Berlin: J. Springer 1929. = Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 30
- [15] Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin: J. Springer 1931
- [16] Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin: J. Springer 1933
- [17] Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze. Math. Z. **23** (1925) 89
- [18] Ergänzungen zu der vorstehenden Abhandlung. Ebenda, S. 310
- [19] Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Zweite Abhandlung. Nichthomogene, unzusammendrückbare, reibungslose Flüssigkeiten. Math. Z. **26** (1926) 196
- [20] Das gleiche. Dritte Abhandlung. Permanente Bewegungen einer homogenen, inkompressiblen, zähen Flüssigkeit. Math. Z. **28** (1928) 387
- [21] Das gleiche. Vierte Abhandlung. Stetigkeitssätze. Eine Begründung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie geradliniger Wirbelfäden. Math. Z. **32** (1930) 608
- [22] Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie, I. Math. Z. **23** (1925) 72
- [23] Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie, II. Ber. Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. **78** (1926) 147
- [24] Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie, III. Ebenda, 213
- [25] Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. IV. Ebenda **82** (1930) 265
- [26] Über einen Einwand gegen das Newtonsche Attraktionsgesetz. Ein Problem der Dynamik vollkommen inkohärenter, gravitierender Medien. Math. Z. **27** (1928) 607
- [27] Zur Analysis der unendlich vielen Variablen, I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Rend. Circ. Mat. Palermo **38** (1914) 113
- [28] Das gleiche. Zweite Abhandlung: Reihenentwicklung nach Eigenfunktionen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Math. Z. **3** (1919) 127

- [29] Die Theorie der Integralgleichungen und Funktionen unendlich vieler Variablen und ihrer Anwendung auf die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, § 7, Schlußteil §§ 9–11, in Pascal: Repertorium der Mathematik, der höheren Analysis I 3 (2. Aufl.) Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1929
- [30] Zur Variationsrechnung. Erste Mitteilung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1919) 161
- [31] Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme, I. Das einfachste Problem bei fester Begrenzung. Jacobische Bedingung und die Existenz des Feldes. Verzweigung der Extremalflächen. Mh. Math. 28 (1917) 3
- [32] Das gleiche. Zweite Abhandlung. Das einfachste Problem bei fester und bei freier Begrenzung. Math. Z. 5 (1919) 26
- [33] Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung. Leipzig: S. Hirzel 1923
- [34] Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Sitz.-Ber. d. Preuß. Akad. Wiss. 48 (1918) 1120
- [35] Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Zweite Abhandlung. Stabilitätsbetrachtungen. Math. Z. 7 (1920) 126
- [36] Das gleiche. Dritte Abhandlung. Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde. Math. Z. 36 (1933) 481
- [37] Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Erste Abhandlung. Die Laplacesche Theorie über die Gestalt des Erdmondes. Math. Z. 10 (1921) 130
- [38] Das gleiche. Zweite Abhandlung. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit. Math. Z. 12 (1922) 201
- [39] Das gleiche. Dritte Abhandlung. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper. Math. Z. 13 (1923) 82
- [40] Untersuchungen über die Figur der Himmelskörper. Vierte Abhandlung. Zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. Math. Z. 17 (1923) 62
- [41] Das gleiche. Fünfte Abhandlung. Neue Beiträge zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. In: Probleme der Astronomie. Festschr. f. H. v. Seeliger. Berlin: J. Springer 1924, 200
- [42] Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Sechst Abhandlung. Weitere Beiträge zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (II) Vol. I, Fasc. I–II (1932) 173
- [43] Das gleiche. Siebente Abhandlung. Beiträge zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. Anfangswertproblem. Math. Z. 37 (1933) 424
- [44] Kosmogonische Untersuchungen, I. Eine aus zwei Einzelmassen, die einen Punkt gemeinsam haben, bestehende Gleichgewichtsfigur nichthomogener Flüssigkeit. Ber. Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. 80 (1928) 35
- [45] Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren homogener Flüssigkeiten (bearb. v. E. Hölder) Math. Z. 39 (1935) 639
- [46] Zur mathematischen Theorie der Gestalt des Weltmeeres (bearb. v. K. Maruhn) Prace Mat.-Fiz. 43 (1936) 1

Prof. Dr. Ernst Hölder
Friedrichstraße 36
D-65 Mainz-Gonsenheim

(Eingegangen 15. 7. 80)

Buchbesprechungen

Milne, J. S., *Étale Cohomology* (Princeton Mathematical Series, 33) Princeton: Princeton University Press 1980, 320 pp, cloth, \$ 33.50

Zu den wichtigsten mathematischen Entwicklungen der letzten zwei Jahrzehnte gehört zweifellos A. Grothendiecks Neubegründung der algebraischen Geometrie. Als ein methodisches Mittel zum Studium der Geometrie der Schemata erfand er in den frühen 60er Jahren die étale Kohomologie. Ihre Bedeutung hat sie in Delignes Beweis der Weil-Vermutungen über die Zeta-funktion glatter projektiver Mannigfaltigkeiten über endlichen Körpern in hervorragender Weise dokumentiert. Heutzutage ist die étale Kohomologie fest etabliert, nicht nur in der algebraischen Geometrie und kommutativen Algebra, sondern z. B. auch in der algebraischen Zahlentheorie oder in der Darstellungstheorie proendlicher Gruppen.

Für ein systematisches Studium der étalen Kohomologie standen bisher neben einigen ein-führenden Vorlesungsmanuskripten lediglich die umfangreichen und in Teilen äußerst mühevoll zu lesenden Originalarbeiten in SGA 4 und SGA 5 zur Verfügung.

Mit dem vorliegenden Buch stellt nun der Autor ein Werk vor, das eine umfassende – bis zur kohomologischen Formel für Grothendiecksche L-Reihen hinführende – Gesamtdarstellung der Theorie gibt, die im Vergleich zu den Originalarbeiten elementarer, aber vor allem auch sehr viel kürzer ist. Es ist angebracht, zumindest in groben Zügen auf den Inhalt des Buches einzugehen.

Kap. I, Étale Morphismen: Es beginnt mit einer gründlichen Behandlung der étalen Morphismen von (stets als lokal-noethersch vorausgesetzten) Schemata, befaßt sich dann mit Hensel-schen Ringen, insbesondere mit verschiedenen Konstruktionsmethoden der Henselisierung eines ge-gebenen lokalen noetherschen Rings, und zitiert abschließend die wichtigsten Eigenschaften der Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden Schemas.

Kap. II, Garbentheorie: Erklärt werden zunächst der kleine und der große E-Situs eines Schemas X relativ zu einer vorgegebenen Klasse E von Morphismen; speziell erhält man die Zariski-, die étale und die flache Topologie von X . Auf die Verwendung des allgemeinen – nach Meinung des Referenten sehr einsichtigen – Begriffs der Grothendieck-Topologie wird verzichtet. Das macht in den nachfolgenden Beweisen des öfteren Fallunterscheidungen notwendig, je nachdem um welche Klasse E von Morphismen es sich handelt. Behandelt wird dann die übliche Theorie der abelschen Prägarben und Garben auf einem E-Situs (assozierte Garbe zu einer Prägarbe, direkte Bilder und Urbilder, Halme) bis hin zum Zerlegungssatz für étale abelsche Garben bezüglich einer Zerlegung des Schemas in ein abgeschlossenes Unterschema und das offene Komplement.

Kap. III, Kohomologie: Nach einer Übersicht über die homologische Algebra wird die Kategorie der abelschen Garben auf einem E-Situs studiert. Es werden die Kohomologiegruppen, welche Auflösungen und Čech-Kohomologie eingeführt, desgleichen die Rechtsableitungen des direkten Bildfunktors und die Leray'sche Spektralsequenz, die relative Kohomologie bezüglich eines abgeschlossenen Unterschemas und die Kohomologie mit kompaktem Träger. Allgemeine Vergleichssätze für Kohomologie werden bewiesen, und insbesondere werden die Beziehungen zwischen der étalen und der komplexen Kohomologie für glatte komplexe Mannigfaltigkeiten diskutiert. – Größeren Raum widmet der Autor der Interpretation der 1-Kohomologie mit Werten in Gruppenschemata mittels prinzipal-homogener Räume, unter Einschluß der nichtkommutativen Gruppen. Speziell werden Hilbert's Satz 90 und die Kummertheorie behandelt, ebenso die Theorie von Artin-Schreier. Besonders interessant sind die tieferliegenden Resultate über die flache 1-Kohomologie mit Werten in finiten flachen kommutativen Gruppenschemata. Als Anwendung wird ein kohomologischer Beweis des bekannten schwachen Endlichkeitssatzes von Mordell-Weil für abelsche Varietäten über algebraischen Zahlkörpern gegeben.

Kap. IV, Die Brauer-Gruppe: Das Kapitel beginnt mit einer ausführlichen Darstellung der Theorie der Azumaya-Algebren und der Brauer-Gruppe über einem lokalen noetherschen Ring. Alsdann wird die Brauergruppe $Br(X)$ eines Schemas X definiert. Unter zusätzlichen Annahmen über X (die z. B. von quasi-projektiven Schemata über Körpern stets erfüllt werden) wird eine kanonische Injektion $Br(X) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(X, G_m)$ konstruiert. Abschließend wird die Frage der Bijektivität von $Br(X) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(X, G_m)$ diskutiert und in einigen Fällen bewiesen, z. B. für das Schema eines Henselschen Rings und für separierte glatte Varietäten über Körpern, die Vereinigung zweier affiner offener Teilmengen sind.

Kap. V, Kohomologie von Kurven und Flächen: Dies ist ein besonders schönes Kapitel, erfordert allerdings recht detaillierte Kenntnisse in der algebraischen Geometrie. In einem allgemeinen gehaltenen ersten Teil werden zunächst die für Endlichkeits- und Dualitätssätze erforderlichen Begriffe behandelt, wie konstruierbare Garben – hier verwendet der Autor die algebraischen Räume von M. Artin –, \mathbb{Z}_ℓ - und \mathbb{Q}_ℓ -Garben, kanonische Paarungen zwischen Ext-Gruppen und die Spurabbildung für finite étale Morphismen konstanten Grades. – Für eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper werden der Endlichkeitsatz und die Poincaré-Dualität für konstruierbare Garben von \mathbb{Z}/n -Moduln bewiesen. Ferner wird die Lefschetzsche Fixpunktformel hergeleitet, hier allerdings mehr als eine Umformulierung bekannter Tatsachen über die Endomorphismen der zugehörigen Jacobischen, und als Anwendung wird die kohomologische Formel für die Zetafunktion bewiesen. In einem besonders interessanten Teil wird schließlich u. a. die Formel von Ogg-Šafarevič-Grothendieck über die Euler-Poincaré-Charakteristik einer konstruierbaren Garbe von \mathbb{F}_ℓ -Moduln bewiesen. – Mittels Lefschetzbüschel wird das Studium der Kohomologie einer glatten projektiven Fläche auf das von Flächen über der projektiven Geraden und damit auf das Studium der zugehörigen Leray-Spektralsequenz zurückgeführt. Die Untersuchung der Spektralsequenz erfolgt durch die Monodromietheorie (lokal und global). In allgemeinerer Form ist dies ein wesentlicher Reduktionsschritt in Delignes Beweis der Weil-Vermutungen. Als Anwendung der erhaltenen Ergebnisse wird ein étal-kohomologischer Beweis der endlichen Erzeugbarkeit der Néron-Severi-Gruppe und des Castelnuovo'schen Rationalitätskriteriums für Flächen gegeben.

Kap. VI, die fundamentalen Theoreme: Dieses Kapitel bringt die grundlegenden und allgemeinen Sätze und Tatsachen der étalen Kohomologie. Wir zählen sie auf: Kohomologische Dimension algebraischer Schemata, das Endlichkeitstheorem für eigentliche Morphismen, der eigentliche Basiswechsel, höhere direkte Bilder mit kompaktem Träger, der glatte Basiswechsel, die Gysin-Sequenz, das schwache Lefschetz-Theorem, die Künnethformel, die Zykelabbildung, Chernklassen, die Poincaré-Dualität, die Lefschetzsche Fixpunktformel und Grothendiecks kohomologische Formel für die Zetafunktion eines glatten projektiven Schemas über einem endlichen Körper. – Hervorzuheben ist hier der zwar nur skizzierte, aber gegenüber den Originalarbeiten in SGA 4 erheblich vereinfachte Beweis des Endlichkeitstheorems; er beruht im wesentlichen auf der Theorie der algebraischen Räume und auf M. Artins Approximationssatz. – Am Ende seines Buches beweist der Autor – und dies erscheint mir als besonders verdienstvoll – die allgemeine kohomologische Formel für die Grothendieckschen L-Reihen zu beliebigen \mathbb{Q}_ℓ -Garben auf separierten Schemata über endlichen Körpern. Diese Formel spielt eine entscheidende Rolle in Delignes Beweis der Weil-Vermutungen.

Soweit die knappe Inhaltsübersicht. Durch den gesamten Text zieht sich darüber hinaus eine Vielzahl von Anmerkungen und auch Übungsaufgaben, in welchen auf weitergehende Entwicklungen, auf Querverbindungen und auf offene Fragen hingewiesen wird.

Das Buch ist in weiten Strecken sehr komprimiert und manchmal auch nur skizzenhaft geschrieben. Angesichts der Fülle des Stoffs ist dies bei dem geringen Umfang von nur 312 Seiten auch gar nicht verwunderlich. Es erfordert vom Leser neben profunden Kenntnissen in kommutativer Algebra und algebraischer Geometrie vor allem auch die Bereitschaft zu intensiver Mitarbeit. So wird es dem jungfräulichen Leser beispielsweise nicht von vornherein klar sein, was man etwa

unter den höheren direkten Bildern von \mathbf{Z}_2 -Garben zu verstehen hat (die benutzt, aber nicht erklärt werden).

Angesichts der Bedeutung der étalen Kohomologie und angesichts der enormen Leistung, die der Autor mit diesem Werk vollbracht hat, ist dem Buch nur der allergrößte Erfolg zu wünschen. Es ragt als ein hoher Fels in eine Landschaft, die durch die scheinbar grenzenlose Produktion von algebraischer Trivalliteratur mit ihren ewig gleichen Definitionöchen und Sätzchen immer platter zu werden droht.

Regensburg

G. Tamme

Grauert, H., Remmert, R., Theorie der Steinschen Räume (Grundlehren der mathem. Wissensch., Band 227), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, xx + 249 S., geb., DM 88,—

Grauert, H., Remmert, R., Theory of Stein Spaces (transl. by A. Huckleberry) (Grundlehren der mathem. Wissensch., Band 236), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, xxi + 249 pp., geb., DM 79,50

Die Theorie der analytischen Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen hat seit dem Beginn dieses Jahrhunderts mehrere Entwicklungsphasen durchlaufen. Zunächst beschäftigte man sich mit Gebieten in und über dem Zahlenraum \mathbf{C}^n . Die erste umfassende Sammlung von Ergebnissen hierüber gibt der Bericht von H. Behnke und P. Thullen (Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Springer 1934).

Viele der dort gestellten Probleme wurden in den folgenden Jahren gelöst, und allgemeinere Bereiche (komplexe Mannigfaltigkeiten und später komplexe Räume) rückten in den Vordergrund des Interesses. Eine sehr vielseitige Darstellung dieser Entwicklungen gaben R. C. Gunning und H. Rossi (Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice Hall 1965). Aber inzwischen hatte die algebraische Geometrie starken Einfluß auf die komplexe Analysis gewonnen, was zu einer weiteren Verallgemeinerung der komplexen Räume und dem Vordringen algebraischer Methoden führte.

Der vorliegende Band gehört zu der Trilogie „Analytische Stellenalgebren“, „Coherent Analytic Sheaves“ und „Theorie der Steinschen Räume“ (der erste Band ist schon 1971 erschienen, der zweite Band befindet sich in Vorbereitung). Darin wird erstmals ein großer Teil der komplexen Analysis vom heutigen Standpunkt aus systematisch abgehandelt.

Die „Analytischen Stellenalgebren“ enthalten die lokale Theorie analytischer Mengen aus algebraischer Sicht, d. h. die Theorie der Algebren von Funktionskeimen. Für die Funktionstheorie interessantere Fragen ergeben sich bei der analytischen Fortsetzung von Funktionskeimen. Im Zahlenraum \mathbf{C}^n hatte dies zum Begriff des Holomorphiegebietes als Existenzbereich holomorpher Funktionen geführt. Im Jahre 1951 zeigte K. Stein, daß die für Holomorphiegebiete charakteristischen Eigenschaften auch für komplexe Mannigfaltigkeiten fundamentale funktionentheoretische Konsequenzen haben. Die so ausgezeichneten Mannigfaltigkeiten oder Räume wurden von Cartan und Serre später „variétés de Stein“ genannt.

Von den wichtigsten Ergebnissen über Steinsche Räume seien nur einige genannt:

- (1) Jede offene Riemannsche Fläche ist Steinsch.
- (2) Auf Steinschen Räumen läßt sich jede additive Cousin-Verteilung lösen, bei multiplikativen Cousin-Verteilungen sind die Hindernisse rein topologischer Natur („Okasches Prinzip“).
- (3) Das Poincaré-Problem über die globale Quotientendarstellung meromorpher Funktionen ist auf Steinschen Räumen stets lösbar.
- (4) Steinsche Mannigfaltigkeiten lassen sich eigentlich in einen Zahlenraum \mathbf{C}^N einbetten.
- (5) Steinsche Räume lassen sich durch die Existenz von streng plurisubharmonischen Ausschöpfungsfunktionen charakterisieren (Levi-Problem).

Cartan und Serre hatten 1953 gezeigt, wie sich die Eigenschaften (2) und (3) aus zwei fundamentalen garbentheoretischen Sätzen folgern lassen: Ist X ein Steinscher Raum und \mathcal{F} eine kohärente Modulgarbe über X , so gilt:

Theorem A Jeder Halm \mathcal{F}_x ist durch Schnitte von \mathcal{F} über X erzeugt.

Theorem B Für $q \geq 1$ ist $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$.

Dieser garbentheoretische Aspekt Steinscher Räume steht im Mittelpunkt des vorliegenden Buches. Zwei vorbereitende Kapitel enthalten in erfreulich knapper Darstellung das Wichtigste über Garben, komplexe Räume und Cohomologie. Für einige schwierige Ergebnisse (etwa die Kohärenzsätze von Oka und Cartan) wird auf den Band „Coherent Analytic Sheaves“ verwiesen. Sodann wird der Kohärenzsatz für Bildgarben bei endlichen holomorphen Abbildungen aus Ergebnissen des Bandes „Analytische Stellenalgebren“ gefolgert. Als weitere Vorbereitung wird mit Hilfe von Dolbeault-Cohomologie bewiesen, daß für jeden kompakten Quader $Q \subset \mathbb{C}^n$ gilt: $H^q(Q, \mathcal{O}) = 0$ für $q \geq 1$. Die Heftungstechniken von Cousin und Cartan ergeben damit Theorem B für kompakte Quader. Daraus lassen sich die Theoreme A und B auf beliebigen komplexen Räumen mit Hilfe des Kohärenzsatzes für endliche Abbildungen durch eine sehr elegante Technik von sogenannten „Quaderausschöpfungen“ folgern.

Im zweiten Teil des Buches werden vorwiegend Anwendungen dieser garbentheoretischen Resultate gegeben. Neben den Lösungen der schon erwähnten Probleme von Cousin und Poincaré werden weitere garbentheoretische Eigenschaften und Charakterisierungen Steinscher Räume abgeleitet. Besonders wertvoll und auflockernd sind die vielen Hinweise auf weitere Ergebnisse, zum Teil neuesten Datums, und die ausführlichen Literaturangaben.

Der dritte und letzte Teil des Buches handelt von kompakten komplexen Räumen. Zentrales Ergebnis ist der Endlichkeitssatz von Cartan und Serre für die Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in kohärenten Modulgarben. Mit Steinschen Räumen hat dies insofern zu tun, als beim Beweis Steinsche Überdeckungen und deren cohomologische Eigenschaften verwendet werden. Schließlich wird der eindimensionale Fall betrachtet, wo der Endlichkeitssatz den klassischen Satz von Riemann-Roch liefert. Auch ein oft benutzter Satz über die Aufspaltung von Vektorbündeln über der Riemannschen Zahlenkugel wird ausführlich bewiesen.

In den letzten Jahren sind in der Theorie Steinscher Räume die uralten Verbindungen zur reellen Analysis (plurisubharmonische Funktionen, Pseudokonvexität etc.) wieder besonders in den Vordergrund getreten. Dabei gab es viele überraschende Antworten auf klassische Fragen. Auch diese und weitere in vorliegendem Buch nicht behandelte Aspekte der Theorie Steinscher Räume sollten durch eine ähnlich sorgfältige und elegante Darstellung besser zugänglich gemacht werden.

Düsseldorf

G. Fischer

Hlawka, E., Theorie der Gleichverteilung, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1979, 152 S., geb., DM 38,—

Der Verfasser, Begründer einer auf dem obengenannten Gebiet arbeitenden Schule, legt hiermit eine zusammenfassende Darstellung der Gleichverteilungstheorie vor. Er stützt sich dabei auf wiederholt gehaltene Vorlesungen. — Der 1. Teil des Buches (Kap. I–III) ist den klassischen Ergebnissen von Weyl, Fejer und van der Corput gewidmet. In Teil 2 (Kap. IV–VI) werden die — zum großen Teil auf den Verfasser und seine Schule zurückgehenden — Gleichverteilungsaussagen für Folgen in kompakten Gruppen und — allgemeiner — kompakten Räumen dargestellt. Teil 3 (Kap. VII–IX) behandelt Anwendungen der Gleichverteilungstheorie in der Zahlentheorie und der Numerik. — Das Buch zeichnet sich durch hohen Gehalt bei geringer Seitenzahl aus. Es ist ausgezeichnet lesbar. Die Kapitelzahlen und -längen sind genau bzw. annähernd gleichverteilt. Ich meine, kein Mathematiker sollte sich die hier dargebotenen Genüsse entgehen lassen.

Auch für verschiedene Formen des akademischen Unterrichts scheint mir das Buch hervorragend geeignet. Ergänzende Literatur enthält: Rauzy (ed.) Répartition modulo 1. (Lecture Notes in Mathematics Bd. 475). Heidelberg: Springer-Verlag 1975.

Erlangen

K. Jacobs

Arnold, V. I., Gewöhnliche Differentialgleichungen (a. d. Russ. übers. v. Brigitte Mai), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1980, 259 Abb., 275 S., geb., DM 49,50

Wer konnte nicht schon die englische Fassung dieses einzig schönen Buches. Erst jetzt, wo das Gute fertig vor uns liegt, kann man jedem zeigen, wie unzulänglich die Lehre über die gewöhnlichen Differentialgleichungen bei uns noch war, jedenfalls nach den Lehrbüchern zu urteilen, die unsere Anfänger benutzen: Da gilt es, elementare Integrale durch Variablentransformation zu finden, wobei man leicht einen „Fall“ vergißt; nur selten aber hört man, was überhaupt eine Transformation ist, und in welche Gestalt man im allgemeinen eine Differentialgleichung transformieren kann: „Eine passende Transformation ausfindig zu machen, bleibt dem mathematischen Spürsinn des einzelnen überlassen“, das ist die ganze Erklärung – aber nicht etwa in dem hier zu besprechenden Buch. Arnold faßt die lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssätze überhaupt in dem Satz zusammen, aus dem dann alles weitere fließt: Daß man ein Vektorfeld lokal um einen nicht singulären Punkt durch Transformation „begradigen“, also in die Gestalt $\dot{y}_1 = 1, \dot{y}_k = 0$ für $k > 1$ überführen kann. Das ganze Buch ist geometrisch gefaßt, die 259 Abbildungen sind aufklärend und belehrend, mathematisch so gelungen wie graphisch. Die vielen Beispiele sind die wirklich wichtigen und typischen. Der Student begreift, warum es in der lokalen Theorie auf das Studium der Singularitäten ankommt und erfährt von der topologischen Unterscheidung, Äquivalenz, Klassifikation und Stabilität der Singularitäten. Natürlich findet man, was die Divergenz mit der Entwicklung des Volumens unter dem lokalen Fluß zu tun hat. Immer bringt das Buch das Explizite und Rechnerische, aber das Hauptanliegen bleibt Anschaulichkeit und Geometrie. Und es ist dabei ein sehr persönliches Buch, Sprache eines Menschen; besonders auch die häufigen historischen Anmerkungen scheinen aus unmittelbarer natürlicher Neigung des Verfassers zu den Alten hervorzugehen.

Danken wir dem VEB Wissenschaften und dem Springer Verlag, daß sie uns dieses ausgezeichnete Buch in solider Übersetzung und anständig gesetztem Druck so leicht zugänglich machen: Es gibt kein besseres.

Regensburg

Th. Bröcker

Hille, E., Ordinary Differential Equations in the Complex Domain (Pure and Applied Mathematics), New York – London – Sydney – Toronto: Wiley-Interscience Publ. 1976, xi + 484 pp, cloth, \$ 36,15

Aus der Fülle von Untersuchungen über gewöhnliche Dgln. (Abk. für Differentialgleichungen) im Komplexen trifft der Verfasser E. Hille eine geglückte Auswahl. Neben Resultaten, die unbedingt in ein Lehrbuch gehören, werden klassische und neuere Untersuchungen von besonderer Bedeutung behandelt. Das sind u. a. Beiträge zum Wachstumsverhalten der Lösungen bei isolierten Singularitäten.

Die für die Lektüre des Buches erforderlichen Kenntnisse aus Funktionalanalysis und Funktionentheorie werden im 1. Kapitel zusammengestellt. Im folgenden Kapitel werden Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Normalsysteme 1. Ordnung behandelt: Fixpunktmethod, Methode der sukzessiven Approximation und Majorantenmethode.

Im Anschluß an die Arbeiten von P. Painlevé wird im Kapitel 3 die analytische Fortsetzung von holomorphen Lösungselementen der Dgl.

$$w' = P(z, w) / Q(z, w), \quad P(z, w) = \sum_{j=0}^p A_j(z) w^j, \quad Q(z, w) = \sum_{j=0}^q B_j(z) w^j,$$

A_j und B_j algebraische Funktionen, untersucht. Die Forderung, daß bei den Lösungen bewegliche algebraische Verzweigungspunkte fehlen sollen, führt zur Riccatischen Dgl. Dieser Dgl. ist Kap. 4 gewidmet. Im Mittelpunkt stehen der Satz von Malmquist und Verallgemeinerungen. Zum Beweis werden Hilfsmittel der Wertverteilungslehre herangezogen. Seit Erscheinen dieses Buches sind erhebliche Fortschritte in dieser Richtung gemacht worden.

In den nächsten Kapiteln (5–9) werden lineare Dgln. behandelt. Verf. betrachtet in Kap. 5 zunächst lineare Dgln. erster und zweiter Ordnung: Allgemeine Theorie, Stellen der Bestimmtheit, Sätze über das Anwachsen der Lösungen (u. a. asymptotische Entwicklung der Lösungen von $(K(z)w')' + b(z)w = 0$), analytische Fortsetzung und Monodromiegruppe. (Satz 5.4.3 ist in der angegebenen Form falsch, wie $w'' + e^{-z}w' - w = 0$ mit der Lösung $w = e^z + 1$ der Ordnung 1 zeigt. Nach Satz 5.4.4 gilt für $P(z)$ ganz transzendent, $Q(z)$ ein Polynom: Die Dgl. $w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0$ hat mindestens eine ganze Lösung der Ordnung ∞). Die Resultate werden auf spezielle Dgln. angewendet (Kap. 6): Hypergeometrische, Legendresche, Besselsche, Hermite-Webersche und Mathieusche Dgl. In Kapitel 7 wird nach knappen Hinweisen auf die Bedeutung von Psi-Reihen (sie spielen z. B. bei der Gleichung $zw'' = w^2$ von Emden eine Rolle) ein kurzer Abriß der Theorie der Integraldarstellungen (Euler, Laplace, Mellin) gegeben und auf die hypergeometrische und Legendresche Dgl. angewandt.

In einer großen Anzahl von Abhandlungen sind die Nullstellen von $w(z)$ $w'(z)$ untersucht worden, $w(z)$ Lösungen von $w'' + G(z)w = 0$. Diesem Thema, zu dem der Verf. eine Reihe von bemerkenswerten Beiträgen geleistet hat, ist das Kap. 8 gewidmet. Neuere Beiträge von Z. Nehari u. a. werden berücksichtigt. Zu begrüßen ist die Anwendung der entwickelten Methoden auf einige spezielle Dgln. der math. Physik. U. a. wird das Resultat von Hurwitz über die Nullstellen der Besselschen Funktionen $J_a(z)$, a reell und > -1 , abgeleitet. In Kapitel 9 „Lineare Dgln. n-ter Ordnung und Matrix-Dgln.“ wird die Theorie aus Kap. 5 ergänzt und verallgemeinert, wobei $dW(z)/dz = A(z)W(z)$, A und W Matrizen, behandelt wird: Analytische Fortsetzung und Monodromiegruppe, Verhalten der Lösungen bei isolierten Singularitäten, Stellen der Bestimmtheit, Riemannsches Problem und Stellen der Unbestimmtheit.

Die Schwarzsche Ableitung tritt bei verschiedenen Gelegenheiten in der Funktionentheorie auf. In Kap. 10 wird darüber berichtet: Anwendung in der konformen Abbildung, algebraische Lösungen der hypergeometrischen Dgl. und Zusammenhang zwischen Schlichtheit und Schwarzscher Ableitung. In den beiden letzten Kapiteln werden spezielle Klassen nichtlinearer Dgln. erster und zweiter Ordnung behandelt und zwar im Anschluß an Untersuchungen von Ch. Briot, C. Bouquet, P. Painlevé und P. Boutraux. Dadurch werden die Betrachtungen über Singularitäten aus Kap. 3 ergänzt.

In dem Buch von Hille findet man eine Fülle von Anmerkungen zur Geschichte der Theorie der Dgln. im Komplexen. Sie machen ohne Zweifel die Lektüre des Buches lebendig und fördern das Verständnis für spezielle Fragen der Theorie. Im Anschluß an jedes Kapitel wird durch Aufgaben von verschiedenem Schwierigkeitsgrad die Möglichkeit geboten, den Stoff zu erweitern (z. B. werden zwei Vermutungen von E. C. Titchmarsh in Aufgaben behandelt) und zu vertiefen. Von großem Nutzen sind die zahlreichen Literaturangaben. Sie sind für den Leser wichtig, da die Darstellung an manchen (schwierigen!) Stellen etwas knapp ausfällt und daher Rückgriff auf zusätzliche Literatur erfordert. Mir scheint, daß dafür an weniger schwierigen Stellen eine straffere Darstellung von Vorteil gewesen wäre.

Colton, D. L., Solutions of Boundary Value Problems by the Method of Integral Operators (Research Notes in Mathematics Series No. 6), London – San Francisco – Melbourne: Pitman Publ. 1976, 156 pp, illustrated, paper, £ 6.00

Dieses Buch bringt den Leser sehr schnell an den Rand der laufenden Forschung auf dem Gebiet der funktionentheoretischen Methoden bei Differentialgleichungen. Dem Material des Buches liegt ein Kurs zugrunde, der vom Verfasser an der Universität Konstanz 1974–1975 gehalten wurde. Obwohl seit dieser Zeit viele Fortschritte gemacht wurden, ist dieses Vorlesungsskript jedem zu empfehlen, der etwas Interesse an funktionentheoretischen Methoden hat.

Kapitel I beschäftigt sich in erster Linie mit der Theorie von S. Bergman und I. Vekua und hat aus diesem Grunde eine gewisse historische Bedeutung. Darüber hinaus zeigt das Kapitel eine neue Perspektive auf und enthält mehrere originelle Beweise. Die Bergman-Vekuaschen Theorien werden zu einer einheitlichen Theorie zusammengefaßt.

Da viele, die in diesem Forschungsgebiet arbeiten, einen etwas undurchsichtigen Stil angenommen haben, ist das Buch sowohl für den Anfänger als auch für den reiferen Forscher eine große Erleichterung.

Kapitel II konzentriert sich auf parabolische Gleichungen mit einer Raumveränderlichen und gibt einen Überblick über die Forschungsergebnisse des Verfassers. Dabei wird zunächst der Fall von konstanten Koeffizienten betrachtet. Ein Integraloperator wird eingeführt, der analytische Funktionen auf analytische Lösungen der parabolischen Gleichungen abbildet. Es ist bekannt, daß die Lösungen in der Zeitveränderlichen nicht analytisch sind; daher wird ein neuer Operator gesucht, dessen Wertebereich die Menge der klassischen Lösungen enthält. So wird ein Operator konstruiert, der Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung auf die klassischen Lösungen der eindimensionalen parabolischen Gleichung, deren Koeffizienten analytisch in t und stetig differenzierbar in x sind, abbildet. Überdies wird gezeigt, daß jede klassische Lösung, die der oben erwähnten Gleichung genügt, in solcher Form dargestellt werden kann. Weiter werden Spiegelprinzipien für Gebiete entwickelt, die invariant bezüglich einer Spiegelungsabbildung sind. Diese Prinzipien haben eine Anwendung auf Anfangsrandwertprobleme.

Kapitel III behandelt parabolische Gleichungen mit zwei Raumveränderlichen. Es wird vorausgesetzt, daß die Koeffizienten sowohl in der Raum- als auch in der Zeitveränderlichen holomorph sind. Hier führt man wie in der Bergman-Vekuaschen Theorie $z = x + iy$ und $z^* = x - iy$ für x und y ein und versucht, eine verallgemeinerte E-Funktion oder komplexe Riemannsche Funktion zu entwickeln. Nachdem eine solche Funktion gefunden ist, ist der entsprechende Integraloperator für die Konstruktion einer vollständigen Familie der klassischen Lösungen benutzbar. Als eine Anwendung der Methode der fundamentalen Singularitäten wird das inverse Stefan-Problem für einen vorgeschriebenen freien Rand gelöst.

Das letzte Kapitel (IV) gibt einen Überblick über die „Method of Ascent“, die vom Verfasser und Rezensenten zusammen entwickelt worden ist. In dem Fall, wo eine elliptische Gleichung invariant bezüglich Rotationen ist, ist es möglich, eine Integraldarstellung von einer besonders einfachen und eleganten Form zu bekommen. Insbesondere tritt die Dimension nur als Potenz eines Integrationsparameters auf. Diese Tatsache erlaubt einem, Integraloperatoren von n -dimensionalen Gleichungen direkt aus dem zweidimensionalen Analogon zu berechnen. Der Verfasser entwickelt auch eine „Method of Ascent“ für die Außenbereiche und löst als eine Anwendung das inverse Strahlungsproblem der Schallwellen in einem homogenen Material.

Delaware

R. P. Gilbert

Arnold, V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics (Graduate Texts in Mathematics, vol. 60), New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1978, x + 462 p., cloth, DM 54,-

Das Buch entstand aus einer dreisemestrigen Vorlesung über klassische Mechanik, die V. Arnold 1966–1968 für Studenten des dritten und vierten Studienjahres an der Fakultät Mathematik-Mechanik der Moskauer Universität gehalten hatte.

In Inhalt und Charakter entspricht die erste Hälfte des Buches eher einer ausgezeichneten Mechanik-Vorlesung eines theoretischen Physikers. Ausgehend von physikalischen Prinzipien wird zunächst die Newtonsche Punktmechanik eingeführt mit den klassischen Erhaltungssätzen der Galileigruppe. In einem zweiten Teil wird dann ausgehend von den Variationsprinzipien der Lagrangeformalismus dargestellt und angewendet auf die Theorie der Schwingungen und die Theorie der starren Körper. Der zentrale dritte Teil beschreibt den allgemeinen Hamiltonschen Formalismus auf symplektischen Mannigfaltigkeiten; als Anwendung schließt sich eine Einführung in die Störungstheorie von Systemen in der Nähe von integrablen Systemen an. Im Vordergrund stehen immer die qualitativen und geometrischen Aspekte der dynamischen Probleme, welche an vielen Beispielen erläutert werden, und weniger der mathematische Formalismus. Dieser wird jeweils dort eingeführt, wo er gebraucht wird, so etwa werden die Mannigfaltigkeiten eingeführt zur Beschreibung von Systemen mit Nebenbedingungen. Die Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten und die symplektische Geometrie werden im Rahmen des Hamiltonschen Formalismus entwickelt.

Die zweite Hälfte des Buches hat nicht mehr Vorlesungscharakter. Hier werden in 13 Appendices Beziehungen der klassischen Mechanik zu anderen Gebieten der Mathematik und der Physik aufgezeigt, Beziehungen zur Riemannschen Geometrie, zur Strömungstheorie idealer Flüssigkeiten, zum Stabilitätsproblem der Himmelsmechanik, zur Klassifikation der Kaustiken in der geometrischen Optik. In diesen Appendices werden, ohne Beweis, zum Teil tiefe Ergebnisse der letzten 20 Jahre beschrieben, welche hauptsächlich auf V. Arnold zurückgehen.

Zusammenfassend bewältigt das Buch eine Fülle an Stoff von den Anfängen der Mechanik bis zu Ausblicken auf die aktuelle Forschung. Es ist anschaulich und lebendig geschrieben und ist auch für den Fachmann anregend. Das ganze Buch verrät das tiefe Verständnis des Meisters.

Bochum

E. Zehnder

Lindenstrauss, J., Tzafriri, L., *Classical Banach Spaces II – Function Spaces* (Ergebnisse d. Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 97) Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1979, 3 Fig., x + 243 S., cloth, DM 78,–

Während im ersten Band (*Classical Banach Spaces I*; vgl. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 82 (1980) 12) die klassischen Banachschen Folgenräume im Mittelpunkt standen, wird im vorliegenden Band II die neue und neueste Theorie Banachscher Funktionenräume (Banachverbände) vorgelegt, vor allem aber in Richtung einer „Geometrie der Banachräume“; wie sie in den siebziger Jahren von den Autoren sowie von W. B. Johnson, Krivine, Maurey, Pisier und anderen entwickelt worden ist.

Das Buch enthält nur zwei, jedoch sehr umfangreiche Kapitel, die an den Leser teilweise außerordentliche Anforderungen stellen. Im I. Kapitel werden neben den wichtigsten Grundeigenschaften der Banachverbände und ihrer Darstellungstheorie vor allem die dualen Begriffe der p -Konvexität und der q -Konkavität eingeführt, die später (in der Theorie gleichmäßiger Konvexität, vor allem aber im Kap. II) eine entscheidende Rolle spielen. Daneben finden sich die Theorie gleichmäßiger Konvexität (Typus und Kotypus, Kahanes Theorem) und Band I ergänzende Resultate über die Approximationseigenschaften in allgemeinen Banachräumen, sowie geometrische Aspekte der Interpolationstheorie. Ein besonderer Abschnitt befaßt sich mit der Approximationseigenschaft in Banachverbänden, insbesondere dem Beispiel eines gleichmäßig konvexen Banachverbandes ohne Approximationseigenschaft nach Szankowski. Das II. Kapitel wendet sich einer

sehr viel spezielleren Klasse von Banachverbänden zu, nämlich $r. i.$ (= rearrangement invariant) Funktionenräumen X über $[0, 1]$, $[0, \infty)$ (Lebesguemaß) und \mathbf{N} (Zählmaß). Für diese werden die sog. Boyd-Indices eingeführt (p_x und q_x), welche einen Schlüsselbegriff für die Interpolation von Operatoren (in erheblicher Verallgemeinerung des M. Rieszschen Konvexitätssatzes) sowie für andere Anwendungen darstellen. (Beispiel: Jeder separable $r. i.$ -Raum X mit $1 < p_x, \infty > q_x$ ist primär, d. h. in jeder direkten Summe $X = Y \oplus Z$ ist Y oder Z zu X isomorph.) Es folgen u. a. Anwendungen auf die Isomorphie von $r. i.$ -Räumen, Eindeutigkeit der $r. i.$ -Struktur und erneut auf die Interpolationstheorie.

Auch für den vorliegenden II. Band kann ohne Vorbehalte gesagt werden, daß Stil und Darstellung höchsten Ansprüchen genügen. Indessen erscheint es dem Referenten unmöglich, auf engem Raum auch nur einen Eindruck von der Fülle und Kompliziertheit der gewonnenen Resultate zu geben, und es bedarf hoher Motivation von Seiten des auf diesem Gebiet wenig erfahrenen Lesers, sich in das Werk einzuarbeiten. So ist es – in gewissem Kontrast zu Band I – auch kein Nachschlagewerk, in welchem man sich rasch über vielseitig anwendbare Resultate orientieren kann; wer sich aber mit dieser noch in Entwicklung begriffenen Theorie intensiv auseinandersetzen möchte, für den dürfte es unentbehrlich sein.

Tübingen

H. H. Schaefer

Heyde, C. C., Seneta, E., I. J. Bienaymé: *Statistical Theory Anticipated* (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 3), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, xiv + 172 S., gebd., DM 48,–

Die Wahrscheinlichkeitstheorie und die auf sie gründenden statistischen Methoden haben sich vom 17. bis ins 20. Jahrhundert hinein stets im engen Kontakt mit den Anwendungen entwickelt. Glücksspiele, Versicherungsprobleme und Fehlerrechnung sind einige der wichtigsten Stichworte. Die Anfangsphase der Stochastik begann mit Pascal und Fermat, die erste systematische Darstellung stammt von Huygens 1657. Zwischen dem zusammenfassenden Buch von Laplace 1812 und den Arbeiten von K. Pearson (ab 1900) klafft nach der gut dokumentierten Ansicht der Autoren eine Lücke im Geschichtsbewußtsein der Stochastiker. In diese Lücke tritt das vorliegende, überaus sorgfältig gearbeitete Buch. Irénéé Jules Bienaymé (1796–1878), heute unter Stochastikern meist nur im Zusammenhang mit P. L. Tschebyshev (1821–1894) und der bekannten Ungleichung genannt, spielte im akademischen Leben der erwähnten Periode eine bedeutende Rolle. Er war bis 1848 hoher Beamter im Finanzministerium und beschäftigte sich dort intensiv mit Bevölkerungsstatistik. Ab 1848 übernahm er zeitweilig eine Professur (für Calcul des Probabilités) an der Sorbonne, 1852 wurde er, 55jährig, in die Académie Française gewählt. Bienaymé stand mit Tschebyshev in Verbindung, drei Briefe von B. an T. sind erhalten. Die Verfasser katalogisieren die Publikationen und Erwähnungen von Bienaymé und interpretieren seine Resultate im Lichte der heutigen Forschung. Ergebnis: eine Reihe heutiger Methoden der Statistik sind von Bienaymé zumindest ansatzweise bereits ausgearbeitet worden. – Das Buch stellt eine höchst wertvolle Bereicherung der mathematikhistorischen Literatur dar und ist insbesondere Stochastikern als Lektüre sehr zu empfehlen.

Erlangen

K. Jacobs

Wentzell, A. D., *Theorie zufälliger Prozesse* (Mathematische Reihe, Band 65), Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1979, 264 S., gebd., DM 76,–

Beim vorliegenden Buch handelt es sich um eine ins Deutsche übersetzte Vorlesungsschrift des Verfassers. Voraussetzung für ein Verständnis ist eine solide Kenntnis der klassischen Maßtheorie sowie (mit Einschränkungen) der Funktionalanalysis.

Ziel des Buches ist eine Vermittlung der traditionellen Inhalte einer Vorlesung „Stochastische Analysis“. Ausgehend von der Beschreibung einiger wichtiger stochastischer Modelle (Wiener Prozeß, stationäre Prozesse) in Kapitel 1 werden in den drei folgenden Kapiteln die Grundelemente der Korrelationstheorie entwickelt, wobei unter anderem auch die optimale Lösung der linearen Vorhersage eines stationären Prozesses diskutiert wird. Kapitel 5 enthält den Kolmogoroffschen Existenzsatz für stochastische Prozesse sowie Kriterien zu deren Realisierbarkeit in Funktionenunterräumen. In den anschließenden Kapiteln wird eine Einführung in die Martingaltheorie (z. B. Ungleichungen, Konvergenzsätze, Markoffzeiten) sowie die Theorie der Markoffschen Prozesse (z. B. (Starke)-Markoff-Eigenschaft, Feller-Prozesse, Infinitesimale Operatoren) gegeben. Speziell diskutiert wird die wichtige Klasse der Diffusionsprozesse und ihre Beschreibung durch stochastische Gleichungen. Zu diesem Zweck wird das Stochastische Integral (bzgl. des Wiener Prozesses) eines zufälligen Prozesses definiert und auf grundlegende Eigenschaften hin (z. B. Ito-Formel) untersucht.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß das hier vorliegende Buch zwar nicht thematisch, jedoch strukturell eine interessante Alternative zu bestehenden Lehrbüchern darstellt. Sein besonderer Reiz liegt darin, daß verhältnismäßig viel Raum für die Motivierung der einzuführenden mathematischen Begriffe reserviert wird. Um trotzdem auf etwa 200 Seiten eine ausgewogene Darstellung des komplexen Stoffes zu ermöglichen, sind viele kleinere Einzelaussagen, welche üblicherweise als Lemma oder Theorem formuliert sind, als Aufgabe aufgeführt. Eine vorteilhafte Verwendung des Buches setzt somit eine intensive Bearbeitung der Übungen voraus (für die auf etwa 30 Seiten kurze Lösungsvorschläge angefügt sind). Geht man von dieser Bereitschaft aus, so kann das Buch Dozenten und Studenten uneingeschränkt als Begleittext zu einer entsprechenden Vorlesung empfohlen werden.

München

W. Stute

Dynkin, E. B., Yushkevich, A. A., **Controlled Markov Processes** (transl. from the Russian by J. M. Danskin and C. Holland), (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 235), Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1979, vii + 289 pp., cloth DM 79,50.

Die Theorie der Steuerung Markovscher Prozesse mit diskretem Zeitparameter beruht auf einfachen und anschaulichen Ideen der dynamischen Programmierung. Deswegen ist sie weit verbreitet und besonders bei den Ökonomen populär. In den Händen der Mathematiker wurde diese Theorie oft in der Richtung vom endlichen Zustandsraum zu Prozessen in allgemeinen Räumen weiterentwickelt. Viele von diesen Verallgemeinerungen tragen nur wenig zur Theorie der Steuerung konkreter Systeme bei. Sie lösen Probleme der Maßtheorie bzw. der Topologie. Der Inhalt des besprochenen Buches stellt einen Kompromiß zwischen den beiden Auffassungen der Steuerung Markovscher Prozesse dar. Die Grundideen werden an einfachen Beispielen erklärt. Es werden aber auch Modelle behandelt, in welchen Sätze über analytische Mengen Anwendung finden.

Der erste Teil des Buches betrifft die Prozesse am endlichen Zeitintervall. Davon ist das erste Kapitel mit vielen Beispielen den Prozessen mit endlichem oder abzählbarem Zustandsraum gewidmet. Die übrigen zwei Kapitel behandeln die Verallgemeinerungen: die sogenannten halbstetigen und Borelschen Modelle. Aus dem zweiten Teil über die Steuerung mit unendlichem Horizont sind für den anwendungsorientierten Leser die Kapitel 6 und 7 von Interesse. Dort wird die Steuerung zeithomogener Prozesse, und zwar mit dem erwarteten diskontierten Gewinn und mit dem durchschnittlichen Gewinn pro Zeiteinheit als Optimalitätskriterium dargestellt. Mit dem Begriff der kanonischen Strategie ist es den Verfassern gelungen, die Theorie der Steuerung unter dem letztgenannten Kriterium für zerlegbare Markovsche Ketten übersichtlich zu entwickeln. Der letzte Teil des Buches bringt einige Anwendungen. Dort kann man sich über das Problem des zweiarmigen Banditen und über einige ökonomische Modelle informieren. Fünf Anhänge

geben die notwendige Auskunft über die Borelschen Räume, über analytische Mengen und über einige Fragen der Maßtheorie. Zum Schluß ist die Bibliographie mit historisch-bibliographischen Bemerkungen. Das Buch ist eine Übersetzung des russischen Originals aus dem Jahre 1975.

Prag

P. Mandl

Heyer, H., Einführung in die Theorie Markoffscher Prozesse, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1979, 253 S., Kart., DM 28,—

Beschreiben wir zunächst den Gegenstand des Buches anhand der Kapitelüberschriften mit einigen Stichworten zum jeweiligen Inhalt in Klammern:

- I. Allgemeine Theorie stochastischer Prozesse (Stoppzeiten, Konstruktion von Maßen in Produkträumen, (rechts)stetige Modifikationen);
- II. Markoffsche Prozesse (Starke Markoffeigenschaft, Rechtsstetigkeit, Quasilinksstetigkeit, Huntprozesse);
- III. Potentialtheorie des Brownschen Prozesses (Newtonsches Potential, Kapazität, Dirichletproblem, polare Mengen);
- IV. Huntsche Prozesse und ihre Potentialtheorie (Eintrittszeiten, exzessive Funktionen, feine Topologie, Generator einer Halbgruppe).

Das Buch wendet sich laut Vorwort an Studenten eines Stochastikkurses, ist jedenfalls aus einem Vorlesungsskriptum für einen solchen Hörerkreis entstanden. Das Entstehungsjahr des Skriptums (1971) steht in enger Beziehung zum Themenkatalog: es ist die Zeit der Dominanz der Ideen von Hunt über Potentialtheorie und Markoffprozesse, die etwa durch das Buch von Blumenthal und Gettoor (1968) an eine ganze Generation von Mathematikern vermittelt worden sind.

Die Kritik des Referenten richtet sich auf zwei Punkte, die aber eng miteinander zusammenhängen. Dies ist einmal die Form der Darlegung der Materie: Begriffe und Aussagen werden ohne Strukturierung und Gewichtung aneinandergereiht; das Buch zählt ca. 100 „Sätze“, die keineswegs alle gleichwertig sind. Es ist natürlich das gute Recht des Autors, sich auf eine reine Mitteilung von Definitionen, Sätzen und Beweisen zu beschränken (er spricht im Vorwort von „Rekapitulation der Vorlesung“); aber: eine Einführung in die Theorie findet nicht statt. Der zweite Punkt betrifft das Fehlen vieler konkreter Gegenstände, welche in der Lage gewesen wären, die abstrakte Theorie zu motivieren. Genannt seien: diskretwertige Prozesse (Geburts- und Todesprozesse); Diffusionen; Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen; eine Andeutung des Problems, wie man aus einem lokalen (Differenzen- oder Differential-) Operator einen Prozeß erzeugt und welche Rolle Randbedingungen dabei spielen.

Heidelberg

H. Rost

Rauhut, B., Schmitz, N., Zachow, E.-W., Spieltheorie – Eine Einführung in die mathematische Theorie strategischer Spiele (Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Band 49) Stuttgart: B. G. Teubner 1979, 400 S., pb. DM 28,80

Der vorliegende Band der Teubner-Studienbücher gibt eine breite, durch zahlreiche Beispiele unterstützte Einführung in die klassische Spieltheorie. Spiele in extensiver Form werden ausführlich behandelt. Kuhns Gleichgewichtstheorem für Baumspiele wird bewiesen. Bei den Zweipersonen-Nullsummenspielen wird die Existenz von Gleichgewichtspunkten sowohl mittels des Fixpunktsatzes von Brouwer als auch nach dem Iterationsverfahren von Julia Robinson bewiesen. Die mathematisch einfachste Methode der Trennung von konvexen Mengen durch Hyperebenen kommt implizit vor. Die Theorie wird bis zu den nichtkooperativen n -Personenspielen und den Koalitionsspielen ausgebaut und schließt mit einem Abschnitt über den Shapley-Wert. – Die Verfasser haben – sicher absichtlich – verschiedene wichtige Punkte unausgeführt gelassen. Line-

are Programme erscheinen nur in Form eines Ausblicks; die Simplexmethode wird nicht durchgeführt, sondern nur erwähnt; ein Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes wird nicht gegeben. So wird man das vorliegende Buch als vorzüglichen Einführungstext benützen, zusätzlich aber z. B. auch auf die Bücher

Burger, E., Einführung in die Theorie der Spiele. Berlin: de Gruyter 1958;

Vogel, W., Lineares Optimieren. Leipzig: Geest & Portig 1967

zurückgreifen und für die Theorie der Marktspiele in die Lektüre von

Hildenbrand, W., Core and equilibria of a large economy. Princeton: University Press 1974

Rosenmüller, J., Kooperative Spiele und Märkte. Berlin: Springer 1971

einsteigen.

Erlangen

K. Jacobs

Fiorini, S.; Wilson, R. J., Edge-Colourings of Graphs (Research Notes in Mathematics Series No. 16), London – San Francisco – Melbourne: Pitman Publ. 1977, 160 pp, illustrated, paper, £ 6.50

V. G. Vizing zeigte 1964, daß der chromatische Index $\chi'(G)$ jedes endlichen Graphen G gleich $\gamma(G)$ oder $\gamma(G) + 1$ ist, wobei $\gamma(G)$ den Maximalgrad von G bezeichne und der chromatische Index $\chi'(G)$ gleich der kleinsten Anzahl von Farben sei, mit denen sich die Kanten von G so färben lassen, daß Kanten mit gemeinsamer Ecke verschiedene Farben bekommen. Das zentrale Problem der vorliegenden Monographie ist die Charakterisierung der Graphen G mit $\chi'(G) = \gamma(G) + 1$. Das Problem ist allerdings nur für spezielle Graphenklassen wie etwa die plättbaren Graphen G mit $\gamma(G) \geq 8$ gelöst. Um es in den Griff zu bekommen, werden kritische Graphen untersucht, das sind zusammenhängende Graphen mit $\chi'(G) = \gamma(G) + 1$ und $\chi'(G-k) < \chi'(G)$ für alle Kanten k von G . Es werden Konstruktionen für kritische Graphen beschrieben, und es werden die Kantenzahl, die Taille und der Umfang kritischer Graphen nach oben und unten abgeschätzt. Viele der Untersuchungen über spezielle Graphenklassen dienen dazu, die sogenannte "Critical graph conjecture" zu untermauern, die besagt, daß jeder kritische Graph eine ungerade Anzahl von Ecken besitzt. Diese Vermutung wird für alle Graphen mit höchstens zehn Ecken verifiziert. (Inzwischen wurde die "Critical graph conjecture" durch M. K. Goldberg widerlegt, und die auf Seite 59 zitierte Vermutung von Evans wurde sogar in schärferer Form mittlerweile von A. Hilton und L. Andersen bewiesen).

Das Buch gibt eine vollständige Darstellung aller mit Kantenfärbungen zusammenhängenden Ergebnisse. Es ist besonders darauf hinzuweisen, daß viele der dargestellten Resultate bisher nur in russischer Sprache zugänglich waren. Jeder Paragraph wird durch Übungen abgeschlossen, die zum Teil der Einübung der neuen Begriffe dienen, zum Teil aber auch den Stoff wesentlich erweitern. So ist etwa der bekannte, schwierige Satz von Grötzsch ohne Literaturhinweis in Übungsaufgabe 3e enthalten. Die Behauptung von Übung 10b (i) (vgl. auch S. 67 (ii)) ist nicht ganz korrekt, da auch der Kantengraph eines Sterns eckenkritisch ist. Auch die (druckfehlerverfälschte?) Behauptung von S. 80, daß jeder k -chromatische, eckenkritische Graph $(k-1)$ -fach zusammenhängend wäre, ist nicht zutreffend; er ist im allgemeinen nur $(k-1)$ -fach kantenzusammenhängend. Hervorzuheben wäre noch der "Guide to the bibliography", der in übersichtlicher Form ergänzende Literaturhinweise zu allen angeschnittenen Problemen gibt.

Hannover

W. Mader

Ahlswede, R., Wegener, I., Suchprobleme (Teubner Studienbücher), Stuttgart:

B. G. Teubner 1979, 328 S., pb.; DM 28,80

Dies Buch ist in gewisser Weise eine bahnbrechende Leistung. Es bringt eine Vielzahl von Einzeluntersuchungen, die bisher nur in Zeitschriftenartikeln und Spezialmonographien zugäng-

lich sind, auf den als Buchtitel gewählten Nenner und wagt zum ersten Male eine lehrbuchmäßige Darstellung. Dies Wagnis scheint mir gelungen zu sein. Die Kapitel: I. Einleitung, II. Ein exemplarisches Suchmodell, III. Binäre Suchprobleme ohne Einschränkungen an die Tests, IV. Alphabetische Codes und binäre Suchbäume, V. Sortierprobleme, VI. Wägeprobleme und geometrische Probleme, VII. Spezielle Suchprobleme mit irrtumsfreien Tests, VIII. Stochastische Approximation, IX. Suchprobleme mit zerfallsgestörten Antworten und Kanäle mit Rückkopplung, X. Identifikations- und Rangordnungsprobleme, XI. Die Minimierung der erwarteten Suchkosten, XII. Die Maximierung der Erfolgswahrscheinlichkeit bei beschränkten Ressourcen, XIII. Allgemeinere Modelle für Suchprobleme mit Inspektionen. Besondere Erwähnung verdient die Einordnung von wesentlichen Teilen der Informationstheorie in den neuen Rahmen, sowie das starke Gewicht, das die Verfasser auf die Diskussion von Algorithmen und Berechnungsgeschwindigkeiten legen. Das Buch empfiehlt sich für alle Arten unkonventioneller Lehrveranstaltungen in der Grenzzone von reiner und angewandter Mathematik: dem Dozenten für die Vorbereitung einer viele Gebiete berührenden Vorlesung oder als Text für ein Seminar solcher Zielsetzung; dem ungewöhnlich talentierten Studenten zum Zweck der Umstrukturierung und Verbindung getrennt gelernter Materials. Ich wünsche dem Buch eine große Leserschaft.

Erlangen

K. Jacobs

Franklin, J., Methods of Mathematical Economics – Linear and Nonlinear Programming, Fixed Point Theorems, (Undergraduate Texts in Mathematics), New York – Heidelberg – Berlin: Springer Verlag 1980, x + 297 p, cloth DM 45,—

Das Buch ist in zweifacher Hinsicht ungewöhnlich:

1. Der Stil ist lebhaft und nähert sich oft einem Gespräch mit dem Leser, viele Einzelheiten werden sehr ausführlich kommentiert und durch Beispiele erklärt.
2. Ungewöhnlich ist die Zusammensetzung des Inhalts; 2/3 Sätze über Optimierung und 1/3 Fixpunkt-Sätze.

Das Kapitel 1 (176 Seiten) führt in die lineare, endlichdimensionale Optimierung ein. Neben der Simplex-Methode und den Dualitätsaussagen werden einfache Fälle der parametrischen und der Vektoroptimierung besprochen. Ferner enthält das Kapitel Abschnitte über Zweipersonen-Nullsummenspiele und ganzzahliges Optimieren (nach Gomory). Von den graphentheoretischen Verfahren werden der maximale Fluß, das Zuordnungsproblem, der kürzeste Weg und das allgemeine Transportproblem behandelt. Beweise werden gern über Varianten des Farkas-Lemmas geführt.

Das Kapitel 2 (47 Seiten) über die nichtlineare Optimierung behandelt quadratisches Optimieren (nach Wolfe), es folgt ein kurzer Abriß der Kuhn-Tucker-Theorie. Danach wird das Wesentlichste aus der geometrischen Optimierung erklärt.

Das Kapitel 3 (69 Seiten) über Fixpunkt-Sätze ist wohl als „Bonbon“ gedacht. Es beginnt mit dem Banach'schen Fixpunkt-Satz. Dann folgt ein Beweis des Brouwer'schen Fixpunkt-Satzes, welcher von A. Garsia stammt und hier zum ersten Mal veröffentlicht ist. Er benutzt den Stokes'schen Satz als Hilfsmittel und dürfte besonders den „Ingenieur-Mathematikern“ willkommen sein.

Es schließt sich der Beweis von Milnor aus dem Jahre 1978 (über das „Hairy ball theorem“) und der Beweis über das Sperner-Lemma an. Das Kapitel endet mit dem Schauder'schen Fixpunkt-Satz (für Banach-Räume) und Kakutani's Fixpunkt-Satz, angewendet auf Gleichgewichtspunkte in Mehr-Personen Spielen. Jeder Abschnitt schließt mit Übungsaufgaben, die noch manche Ergänzung zum Text bringen.

Typisch für das Buch scheint mir, daß meistens nur die grundlegenden Arbeiten, die zeitlich oft weit zurückliegen, benutzt werden. Dies gefällt mir für das Kapitel 1, denn es erinnert mich dadurch im Aufbau und den Beweismethoden oft an mein 1967 erschienenes Buch

über lineares Optimieren. Spätestens ab Kapitel 2 wünsche ich mir aber die Angabe von einigen neueren und weitergehenden Lehrbüchern. Ich glaube, daß dadurch der Zielgruppe (laut Vorwort undergraduates and first year graduates), die wohl aus Studenten zwischen dem dritten und sechsten Semester besteht, sehr geholfen würde. Es entsteht sonst doch ein etwas verzerrtes Bild der hier behandelten Theorien. Ich möchte das Buch trotzdem sehr empfehlen. Ich habe es mit großem Vergnügen gelesen.

Bonn

W. Vogel

Elliott, P. D. T. A., Probabilistic Number Theory I, Mean Value Theorems (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 239), New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag 1979, XXII + 359 pp. + XXVII, cloth DM 69,50.

Probabilistic Number Theory II, Central Limit Theorems (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 240), New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag 1980, XVIII + 341 pp. + XXXIV, cloth 70,-.

Eine Abbildung $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ heißt additiv, wenn $f(ab) = f(a) + f(b)$ für teilerfremde $a, b \in \mathbf{N}$ gilt; $f(n) = \text{Anzahl der Primfaktoren von } n$ ist ein Beispiel. $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ heißt multiplikativ, wenn $f(ab) = f(a)f(b)$ für teilerfremde $a, b \in \mathbf{N}$ gilt; der Logarithmus einer multiplikativen Funktion ist additiv. Ist $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ und setzt man $\mathbf{N}_n = \{a \in \mathbf{N} \mid a \leq n\}$, so bildet f die Gleichverteilung in \mathbf{N}_n in eine Wahrscheinlichkeitsverteilung w_n in \mathbf{R} ab. Sind p_1, \dots, p_n verschiedene Primzahlen, so lege

man auf ein k -tes Exemplar von $\{0, 1\}$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\left(1 - \frac{1}{p_k}, \frac{1}{p_k}\right)$ und bilde die Produktverteilung m_n auf $\{0, 1\}^n$. Identifiziert man eine Symbolfolge aus $\{0, 1\}^n$ in naheliegender Weise mit einem Produkt von einigen der Primzahlen p_j , so werden additive Funktionen zu Summen unabhängiger ZVen. Immer wenn man eine Folge w_1, w_2, \dots von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in \mathbf{R} hat, stellt sich die Frage, bei welchen Umnormierungen sie in eine schwach-konvergente Folge übergeht, welche Grenzverteilungen auftreten, und wie schnell die Konvergenz ist. Entstammen die w_1, w_2, \dots – etwa auf eine der obengenannten Arten – zahlentheoretischen Fragestellungen, so sind wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen über sie als zahlentheoretische Ergebnisse interpretierbar. – Das vorliegende Werk berichtet umfassend über die innerhalb dieses Ideenkreises bisher erreichten Ergebnisse, u. z. in der Einteilung „Vorbereitungen – Mittelwertsätze – Zentrale Grenzwertsätze“. Der Autor schreibt damit zugleich die Geschichte der Forschungen einer internationalen Gelehrtengruppe, in der die Namen Barban, Bombieri, Davenport, Delange, Elliott, Erdős, Fainleib, Halász, Halberstam, Hardy, Kac, Kubilius, Linnik, Lukacs, Montgomery, Ramanujan, Rényi, Roth, Turán, Vinogradov, Wintner, Wirsing, Zolotarev u. a. den Ton angeben. Band I beginnt mit zwei Kapiteln über Maß- bzw. Wahrscheinlichkeitstheorie (in relativ klassischer Form) und über additive Zahlentheorie (z. B. Siebmethoden und Dirichlet-Reihen. Es folgen Kapitel, die jeweils einem bedeutenden Forschungsthema gewidmet sind: dem Kubilius-Modell, einer nach Kubilius und Turán benannten Ungleichung, dem Erdős-Wintner-Theorem, einer Gruppe von Sätzen, die auf Delange, Wirsing und Halász zurückgehen, sowie Gleichverteilungsfragen. Band II beschäftigt sich überwiegend mit Fragen vom Typ des Zentralen Grenzwertsatzes: Ermittlung von Grenzverteilungen und Konvergenzgeschwindigkeitsabschätzungen. – Der Stil des Buchs entspricht der klassischen „harten“ Analysis. Ein grundlegendes Werk.

Erlangen

K. Jacobs



S.-s. Chern

Complex Manifolds Without Potential Theory

(With an appendix on the geometry of characteristic classes)

Universitext

2nd edition. 1979. V, 152 pages
DM 25,-; approx. US \$ 11.90
ISBN 3-540-90422-0

This is a short introduction to complex manifolds, including sheaf theory, vector bundles, connections, curvature forms, and characteristic classes.

The second edition contains a new appendix on the geometry of characteristic classes and a new treatment of the Chern-Simons invariants which is more adaptable to applications.

Applications of Chern's concepts include gauge theory and Yau's proof of the Calabi conjecture.

The Chern Symposium 1979

Proceedings of the International Symposium on Differential Geometry in honor of S.-s. Chern, held in Berkeley, California, June 1979

Editors: W.-Y. Hsiang, S. Kobayashi, I. M. Singer, A. Weinstein, J. Wolf, Hung-Hsi Wu

1980. VII, 259 pages
Cloth DM 56,-; approx. US \$ 26.70
ISBN 3-540-90537-5

Contents:

M. F. Atiyah: Real and Complex Geometry in Four Dimensions. – *R. Bott:* Equivariant Morse Theory and the Yang-Mills Equation on Riemann Surfaces. – *E. Calabi:* Isometric Families of Kähler Structures. – *M. Green, P. Griffiths:* Two Applications of Algebraic Geometry to Entire Holomorphic Mappings. – *F. Hirzebruch:* The Canonical Map for Certain Hilbert Modular Surfaces. – *N. H. Kuiper:* Tight Embeddings and Maps. Submanifolds of Geometrical Class Three in E^N . – *J. Moser:* Geometry of Quadrics and Spectral Theory. – *L. Nirenberg:* Remarks on Nonlinear Problems. – *R. Ossermann:* Minimal Surfaces, Gauss Maps, Total Curvature, Eigenvalue Estimates, and Stability. – *W.-T. Wu:* de Rham-Sullivan Measure of Spaces and Its Calculability. – *C. H. Yang:* Fibre Bundles and the Physics of the Magnetic Monopole. – *S.-T. Yau:* The Total Mass and the Topology of an Asymptotically Flat Space-Time.

S.-s. Chern

Selected Papers

1978. 2 portraits. XXI, 476 pages (34 pages in German, 36 pages in French)
Cloth DM 57,-; approx. US \$ 27.20
ISBN 3-540-90339-9

The papers in this volume comprise approximately a third of S.-s. Chern's total mathematical work to date. The selection has been made by the author himself, preference being given to his shorter and less accessible papers. In addition to the papers, the volume contains two articles by Phillip Griffiths and André Weil and a "Summary of My Scientific Life and Works" by Shiing-shen Chern himself.



Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

New

The Mathematical Experience

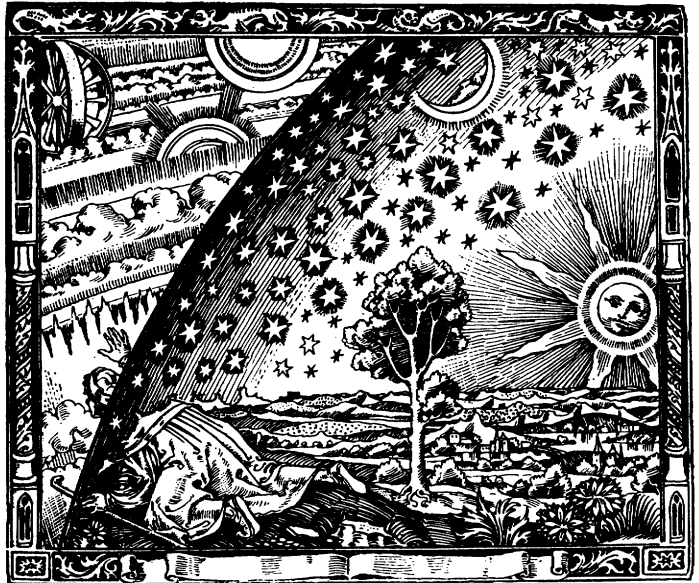
Philip J. Davis
Reuben Hersh

Information:

The book addresses questions of the nature of mathematics, its teaching, its history, its methodology and philosophy. It examines the internal and external factors which determine the subject of mathematics, its own structure and the pressures of its applications. It is written from the personal point of view of two eminent, creative mathematicians who demonstrate a loving care for their subject.

From the Contents:

The Mathematical Landscape
What is Mathematics?
Where is Mathematics?
The Tools of the Trade
I. F. Shafarevitch and the New Neoplatonism.
Why Mathematics Works: A Conventionalist Answer.
Underneath the Fig Leaf
Mathematics in the Market Place
Number Mysticism
Mathematical Objects and Structures
Infinity, or the Miraculous Jar of Mathematics
The Drive to Generality and Abstraction: The Chinese Remainder Theorem
The Creation of New Mathematics: An Application of the Lakatos Heuristic
Mathematical Models, Computers, and Platonism



1981. Approx. 440 pages.
Hardcover
sFr. 52.-/DM 58.-/\$24.00
ISBN 3-7643-3018-X

**Birkhäuser
Verlag**

Basel · Boston · Stuttgart



Please order from your bookseller
or Birkhäuser Verlag, P.O. Box 34,
CH-4010 Basel, Switzerland,
or Birkhäuser Boston Inc.,
380 Green Street, Cambridge,
MA 02139, USA

Neuerscheinungen

Grundzüge der linearen Algebra

Von Prof. Dr. rer. nat. R. WAGNER, Universität Würzburg

1981. 260 Seiten mit 10 Bildern und 129 Aufgaben. $13,7 \times 20,5$ cm.
(Mathematik für das Lehramt an Gymnasien) ISBN 3-519-02756-9
Kart. DM 28,80

Die axiomatische Darstellung der grundlegenden Teile der reellen linearen Algebra ist durch viele Anwendungen (Zahlenfolgen, Polynome, trigonometrische Funktionen, euklidische Geometrie), Aufgaben und intensive Erläuterungen aufgelockert. Der Einsatz von Abbildungen dominiert über den Matrizenkalkül. Andere Koordinatenkörper werden nur gelegentlich gestreift, dafür finden Vektorräume unendlicher Dimension ausgiebig Berücksichtigung. Die Darstellung soll – in einigen Teilen – auch Lehrer an Gymnasien bei der Gestaltung des Unterrichts anregen.

Aus dem Inhalt: Vektorräume (Unterräume, Dimension) / Lineare Abbildungen (Matrizen, Anwendung bei der Interpolation) / Lineare Gleichungssysteme (Struktur der Lösungsmenge, Gaußscher Algorithmus) / Eigenwerttheorie (Jordansche Normalform) / Euklidische Vektorräume (Skalarprodukt, orthogonale und selbstadjungierte Abbildungen, Anwendung in der euklidischen Geometrie) / Determinanten (Vektorprodukt, charakteristisches Polynom) / Anhang

Lehrbuch der Algebra, Teil 3

Unter Einschluß der linearen Algebra

Von Prof. Dr. rer. nat. G. SCHEJA, Universität Tübingen, und
Prof. Dr. rer. nat. U. STORCH, Universität Osnabrück

1981. 239 Seiten mit 21 Bildern, 53 Beispielen und 258 Aufgaben. $16,2 \times 22,9$ cm.
(Mathematische Leitfäden) ISBN 3-519-02223-0
Kart. DM 28,—

Der vorliegende dritte Teil ist eine Sammlung von in sich geschlossenen Anhängen zu den Kapiteln I bis VI des ersten Teiles. Diese Anhänge behandeln weiterführende Themen und dienen dem vertiefenden Selbststudium und der Seminararbeit im zweiten und dritten Studienjahr.

Aus dem Inhalt

Grundbegriffe der Mengenlehre: Zornsches Lemma

Gruppen und Ringe: Untermonoide von \mathbf{Z} / Untergruppen von \mathbf{Q} / Kettenbrüche

Moduln und Algebren: Radikale / Moduln über Hauptidealringen / Direkte Produkte ohne Basen

Homomorphismen von Gruppen und Ringen: Sylow-Sätze / Primrestklassen / Quadratische Reste / Freie Gruppen / Der Satz von Nielsen und Schreier

Homomorphismen von Moduln: Quadratische Algebren / Projektive Moduln / Injektive Moduln / Divisible abelsche Gruppen / Moduln endlicher Länge / Matrizenringe / Halbeinfache Ringe und Moduln / Projektive Räume / Synthetische Beschreibung affiner Räume

Determinanten: Alternierende Gruppen / Spezielle lineare Gruppen



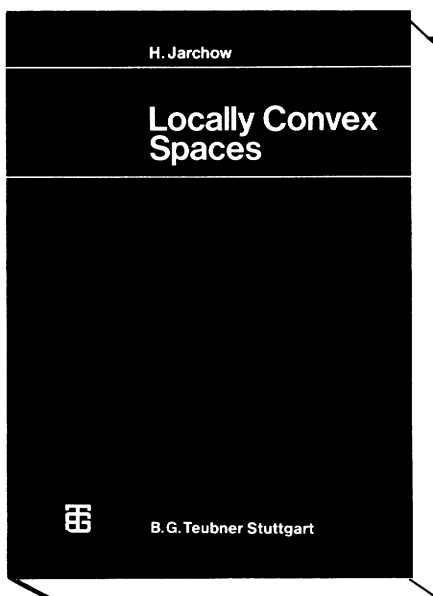
B. G. Teubner Stuttgart

new

Locally Convex Spaces

By Prof. Dr. phil. H. JARCHOW,
Universität Zürich

1981. 550 pages. 16,2×22,9 cm
(Mathematische Leitfäden)
ISBN 3-519-02224-9. Geb. DM 98,—



This monograph provides a systematic and comprehensive account to the general theory of locally convex spaces. It is primarily intended to serve as a textbook as well as a guide to more advanced topics for a student with some familiarity in general topology and basic measure theory. However, since some of the material covered here is of fairly recent origin and partly appears for the first time in a book, and also since some well-known topics have been given a not so well-known treatment, the book might even prove useful to more advanced readers, for the development of seminars, and for reading courses.

The classical material on the subject is presented in a fairly complete manner and in substantial generality. The reader will also find rather detailed discussions on topics like Schwartz spaces, barrelled and bornological spaces, properties of continuous function spaces, bases and Schauder bases, topological tensor products, nuclear spaces. Among the topics treated in the book which are of more recent origin are in particular webbed topological vector spaces and corresponding closed graph and open mapping theorems, complete metrizability of the strong dual of a locally convex space and related material, and an introduction to the theory of ideals of operators in Banach spaces.

Contents: Topological Vector Spaces / Completeness / Baire Tvs and Webbed Tvs / Local Convexity / Basic Duality Theory / Continuous Convergence / Schwartz Spaces / Barrelledness and Reflexivity / Sequential Barrelledness / Bornological Spaces / Topological Bases / Projective and Injective Tensor Products / Approximation Properties / Ideals of Operators / Nuclear Spaces



B. G. Teubner Stuttgart