83. Band Heft 4
ausgegeben am 22. 10. 1981

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1981

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 83/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 74,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Gesamtherstellung: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

83. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1981

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Gesamtherstellung: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

3. Abteilung

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 83, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N. Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein
83 (1981) 147–158

Recent Results in Complex Differential Geometry*)

S. Kobayashi**), Berkeley

0 Introduction

It is a great pleasure and honor to address the meeting of the German Mathematical Society. Since it is difficult to give a comprehensive survey in limited time, I have chosen the following four topics from recent results in complex differential geometry.

1. Calabi conjecture
2. Characterizations of the projective space
3. Vanishing theorems
4. Holomorphic geometric structures.

Complex differential geometry has played and will continue to play important roles both in algebraic geometry and several complex variables. As you can see from the choice I made, I will ignore completely function theoretic aspects of complex differential geometry.

1 Calabi conjecture

We shall be concerned here with some of the consequences of the Calabi conjecture rather than the conjecture or its solution itself. We begin with the statement of the conjecture made by Calabi in 1957 [6] and proved by Yau in 1978 [52], [53].

Theorem 1.1 *Let* M *be a compact Kähler manifold with Kähler form* ω *and Ricci form* ρ*. Given a closed, real* $(1,1)$*-form* ρ' *cohomologous to* ρ*, there is a unique Kähler metric on* M *with Kähler form* ω' *cohomologous to* ω *and with Ricci form* ρ'.

The uniquess part of the theorem was already known to Calabi. A closely related problem settled by Aubin [2] and Yau [52] is the following

Theorem 1.2 *Let* M *be a compact Kähler manifold with* $c_1 < 0$, *i.e., with ample canonical bundle. Then there is a unique Einstein-Kähler metric on* M *whose Kähler form is cohomologous to the Kähler form of the initially given metric.*

*) Hauptvortrag, gehalten auf der Jahrestagung der DMV 1980 in Dortmund.
**) Partially supported by NSF Grant MCS 79-02552.

0012–0456/81/04 0147–012 $ 02.40/0

We shall mention some consequences of these two theorems; some of them had been known to follow from these theorems even before the theorems were proved.

In making the conjecture, Calabi was particularly interested in the special case of Theorem 1.1 where the Ricci form ρ is cohomologous to zero since ρ represents, up to a constant factor, the first Chern class c_1 of M. Namely he discussed consequences of the following

Corollary to Theorem 1.1 *Let* M *be a compact Kähler manifold with Kähler form* ω *and* $c_1 = 0$ *(in* $H^2(M; \mathbf{R})$*). Then there is a unique Kähler metric on* M *with Kähler form* ω' *and vanishing Ricci tensor.*

Calabi has shown that every Ricci-flat compact Kähler manifold M has a unramified finite covering space $\widetilde{M}$ of the form $\widetilde{M} = V \times T$, where V is a Ricci-flat compact Kähler manifold with first Betti number $b_1(V) = 0$ and T is a complex torus. The corollary above allows us to replace the differential geometric condition of "Ricci-flatness" by the algebraic geometric assumption that $c_1 = 0$. However, in 1969 Matsushima [36] succeeded in proving, without the then conjectural Theorem 1.1, that an algebraic manifold M with $c_1 = 0$ (in $H^2(M; \mathbf{R})$) has a unramified covering space $\widetilde{M}$ of the form $\widetilde{M} = V \times T$ described above. In 1973 Fischer and Wolf [8] proved the following structure theorem for a Ricci-flat compact Riemannian manifold.

Theorem 1.3 *Let* M *be a Ricci-flat compact Riemannian manifold. Then there is a finite normal Riemannian covering* $\widetilde{M} = V \times T$ *of* M *such that* V *is a compact simply connected Ricci-flat Riemannian manifold and* T *is a flat Riemannian torus.*

The Kählerian analogue of this theorem follows immediately and, combined with Corollary to Theorem 1.1, yields the following

Theorem 1.4 *Let* M *be a compact Kähler manifold with* $c_1 = 0$ *(in* $H^2(M;\mathbf{R})$*). Then there is a finite normal covering* $\widetilde{M} = V \times T$ *of* M *such that* V *is a compact simply connected Kähler manifold with* $c_1 = 0$ *and* T *is a complex torus.*

The result of Matsushima mentioned above is related to the following conjecture in algebraic geometry, [48]

Conjecture *Let* M *be an algebraic manifold and* $a_M : M \to \mathrm{Alb}(M)$ *its Albanese mapping. If the Kodaira dimension* $\kappa(M) = 0$, *then* $a_M : M \to \mathrm{Alb}(M)$ *is a holomorphic fibre bundle and the Kodaira dimension* $\kappa(F)$ *of the fibre* F *vanishes.*

The theorem of Matsushima shows that this conjecture is true when $c_1 = 0$, i.e., $m K_M = 0$ for some positive intger m (where K_M denotes the canonical bundle of M).

Theorem 1.4 reduces the study of compact Kähler manifolds with $c_1 = 0$ to the simply connected case. The class of simply connected compact Kähler manifolds with $c_1 = 0$ should play an important role in the classification of algebraic manifolds since it generalizes the class of K3 surfaces.

An integral formula of Lascoux and Berger [33] shows that a compact Ricci-flat Kähler manifold M with $c_2 = 0$ (in $H^4(M; \mathbf{R})$) is flat. This, combined with

Corollary to Theorem 1.1, implies the following algebraic geometric result:

Theorem 1.5 *If* M *is a compact Kähler manifold with* $c_1 = 0$ *and* $c_2 = 0$ (*in* $H^*(M; \mathbf{R})$), *then it has a complex torus as a unramified finite covering.*

It has been known for a long time that a Kähler manifold is Ricci-flat if and only if its holonomy group is contained in SU(n); this is a simple consequence of the fact that the Ricci form is the trace of the curvature form (up to a constant factor). In 1955 Berger [3] classified all linear groups which can be the holonomy group of an irreducible Riemannian manifold. He has shown that if M is an irreducible Riemannian manifold (i.e., the identity component of the holonomy group is irreducible), then either M is locally symmetric (i.e., the curvature is parallel) or the holonomy group of M is a closed subgroup of O(n) acting transitively on S^{n-1}, (n = dim M), see also Simons [46]. In the special case of a Kähler manifold, Berger's result reads as follows:

Theorem 1.6 *If* M *is an* n-*dimensional Kähler manifold and if the identity component* Φ^0 *of the holonomy groups is irreducible, then either* M *is locally hermitian-symmetric or is one of the following four groups:*

(i) U(n), (ii) SU(n), (iii) $Sp(k) \otimes U(1)$, (iv) Sp(k), *where* n = 2 k.

Since the irreducible hermitian-symmetric space is not Ricci-flat, we obtain the following

Corrollary to Theorem 1.6. *If* M *is a complete, simply connected Ricci-flat Kähler manifold, then it is a direct product* $M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_r$, *where* M_0 *is a complex Euclidean space (possibly reduced to a single point) and* M_i, i = 1, . . . , r, *are irreducible Kähler manifolds with holonomy groups* $SU(n_i)$ *or* $Sp(k_i)$, ($n_i = \dim M_i$ *or* $2k_i = \dim M_i$).

Recently, Bogomolov [5] has shown that Sp(k) cannot be the holonomy group of a compact Kähler manifold of dimension n = 2k, except in dimension 2 where SU(2) = Sp(1). Hence, when M is compact in the corollary above, all M_i, i = 1, . . . , r, have holonomy groups $SU(n_i)$.

On the other hand, it seems to be still unknown whether $Sp(k) \otimes U(1)$ actually occurs as the holonomy group of a (compact) Kähler manifold.

We shall now discuss an application of Theorem 1.1 in the case $c_1 > 0$ (i.e., the anti-canonical bundle is ample). In 1961 [21] I have shown that a compact Kähler manifold with $c_1 > 0$ has no unramified finite covering. For algebraic geometers, this is as good as "simply connected" since the true universal covering space, if noncompact, cannot be discussed by purely algebraic methods. In the same paper I proved, using the differential geometric result of Myers, that a compact Kähler manifold with positive Ricci tensor is simply connected and remarked that the positive solution of the Calabi conjecture would imply the following

Theorem 1.7 *A compact Kähler manifold with* $c_1 > 0$ *is simply connected.*

In connection with the comment above, it would be interesting to find out if every algebraic manifold admitting no unramified finite coverings is necessarily simply connected.

We shall now discuss two of the most important consequences Yau has derived from Theorem 1.2. In 1952 Guggenheimer [13] proved that a compact Einstein-Kähler surface M satisfies the inequality $c_1^2 \leqq 3c_2$ and the equality holds if and only if M is a space of constant holomorphic sectional curvature. This was extended by Chen and Ogiue [7] in 1975 to Einstein-Kähler manifolds of higher dimension. Their result states:

Theorem 1.8 *Every compact Einstein-Kähler manifold* M *of dimension* n *satisfies*

$\epsilon^n\, 2(n+1)\, c_2 c_1^{n-2} \leqq \epsilon^n n c_1^n$ (ϵ = *the sign of the scalar curvature*), *and the equality holds if and only if* M *is a space of constant holomorphic sectional curvature or* $c_1 = 0$.

The proofs of the results of Guggenheimer and Chen-Ogiue are both by local calculation expressing c_1 and c_2 in terms of the curvature. Theorem 1.2 together with Guggenheimer's inequality implies

Theorem 1.9 *If* M *is a compact complex surface with* $c_1 < 0$, *then*

$$c_1^2 \leqq 3c_2,$$

and the equality holds if and only if the universal covering space of M *is biholomorphic to the unit ball in* $\mathbf{C}^2$.

The inequality $c_1^2 \leqq 3c_2$ was conjectured for surfaces of general type by Van de Ven [49] who proved the weaker inequality $c_1^2 \leqq 8c_2$ in 1976. This was improved by Bogomoro to $c_1^2 \leqq 4c_2$, [44]. About at the same time as Yau, Miyaoka [37] obtained the proof of Van de Ven's conjecture:

Theorem 1.10 *If* M *is a compact complex surface of general type, then*

$$c_1^2 \leqq 3c_2.$$

A compact complex manifold with $c_1 < 0$ is an algebraic manifold of general type. In dimension 2, a compact complex surface of general type free from non-singular rational curves C with self-intersection $C \cdot C = -1$ or -2 satisfies the condition $c_1 < 0$, [32]. So, as far as the inequality $c_1^2 \leqq 3c_2$ is concerned, Miyaoka's theorem 1.10, proved in the frame-work of algebraic geometry, is more general than Yau's theorem 1.9. However, it does not give the characterization of M with $c_1^2 = 3c_2$ given by the differential geometric method; in fact, it is hard to see how one could possibly characterize quotients of the unit ball by other methods. The natural question arising from Theorems 1.9 and 1.10 is to show that a surface of general type satisfying the equality $c_1^2 = 3c_2$ has an ample canonical bundle and, hence, is covered by the unit disk in $\mathbf{C}^2$.

For algebraic geometers working on threefolds, the problem of establishing the inequality

$$3c_1^2 \leqq 8c_2c_1$$

for all compact threefolds of general type should be a challenge. (This inequality holds for any compact threefold with ample canonical bundle by Theorems 1.2 and 1.8).

In 1957, Hirzebruch and Kodaira [17] (see also Morrow [40]) proved that an n-dimensional compact Kähler manifold homeomorphic to $P_n C$ is biholomorphic to $P_n C$ if n is odd or if n is even and $c_1 \neq -(n+1)g$, where g is the positive generator of $H^2(M;Z) = \mathbf{Z}$. They proved that when n is even, c_1 is either $(n+1)g$ or $-(n+1)g$ and that M is biholomorphic to $P_n C$ in the first case. Theorem 1.2 allowed Yau to eliminate the second case. (In fact, from $(n+1)g^2 = p_1 = c_1^2 - 2c_2$, we obtain the relation $nc_1^2 = 2(n+1)c_2$ and conclude, by Theorem 1.8, that M is covered by the unit ball if $c_1 = -(n+1)g$). Thus,

Theorem 1.11 *If* M *is a compact Kähler manifold of dimension* n *homeomorphic to* $P_n C$, *then it is biholomorphic to* $P_n C$.

This leads us naturally to the following topic.

2 Characterizations of the projective space

From the Gauss-Bonnet theorem we see immediately that a compact Riemann surface with positive curvature is the Riemann sphere. In 1961, Frankel and Andreotti [9] proved, using the Enriques classification of algebraic surfaces, that a compact Kähler surface with positive curvature is biholomorphic to $P_2 C$. In his lecture note in 1970 [15], Hartshorne proved, also using the classification of algebraic surfaces, that a compact complex surface with ample tangent bundle is biholomorphic to $P_2 C$.

Since a hermitian vector bundle with positive holomorphic bisectional curvature is ample (but the converse is unknown [22]), Hartshorne's result is technically stronger than that of Frankel-Andreotti.

The first results in our efforts to extend Hartshorne's theorem to the 3-dimensional case were the following. Every compact complex threefold with ample tangent bundle is rational (Iitaka [18]) and admits an automorphism group of complex dimension $\geqq 7$, (Kohayashi-Ochiai [27]). Using the latter, Mabuchi proved in his thesis [34], [35] in 1976 that every compact 3-dimensional Kähler manifold with positive holomorphic sectional curvature is biholomorphic to $P_3 C$, generalizing the result of Frankel and Andreotti. At about the same time, Sumihiro and Mori [39] proved that a compact complex manifold with ample tangent bundle has the second Betti number $b_2 = 1$, strengthening the earlier result of Bishop and Goldberg [4] that a compact Kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature has $b_2 = 1$, (see also [12]). Since Mabuchi has actually shown that a compact complex threefold with ample tangent bundle and $b_2 = 1$ is biholomorphic to $P_3 C$, his result together with the result of Sumihiro and Mori implies that a compact complex threefold with ample tangent bundle is biholomorphic to $P_3 C$, thus extending the result of Hartshorne for surfaces.

In an effort to generalize Hartshorne's theorem to higher dimension, Ochiai and I [28] proved, in 1971, the following characterization of $P_n C$.

Theorem 2.1 *If a compact Kähler manifold* M *of dimension* n *satisfies*

$$c_1 \geqq (n+1)\alpha,$$

where α *is a positive element in* $H^{1,1}(M;Z)$, *then* M *is biholomorphic to* $P_n C$.

This may be considered as a variation of the theorem of Hirzebruch and Kodaira mentioned in §1. A consequence of Theorem 2.1 is that if a compact complex manifold M with ample tangent bundle admits a rational curve C (which may be singular) generating $H_2(M; \mathbf{Z})$, then M is biholomorphic to $P_n C$, (see [26], [47]).

Before I comment on other results related to Theorem 2.1, I want to complete the story on the generalization of Hartshorne's result. In 1979, Mori [38] has finally succeeded in proving

Theorem 2.2 *Every* n*-dimensional projective manifold* M *with ample tangent bundle over an algebraically closed field* k *of any characteristic is isomorphic to* $P_n k$.

His proof, valid for any characteristic, depends also on producing a rational curve C in M with certain properties. In the course of the proof, he establishes also the following interesting result.

Theorem 2.3 *Every projective manifold* M *with ample anti-canonical bundle* K_M^{-1} *(i.e.,* $c_1 > 0$*) over an algebraically closed field of any characteristic contains a rational curve.*

Then Siu and Yau [47] have also succeeded in proving the generalization of Frankel-Andreotti's result to higher dimension within the frame-work of complex differential geometry. Their idea was to produce a rational curve C generating $H_2(M; \mathbf{Z})$ using harmonic maps and then apply Theorem 2.1. If we can extend the theory of harmonic maps to (complex) Finsler manifolds, their method might yield Theorem 2.2 for $k = \mathbf{C}$.

Going back to Theorem 2.1, the assumption $c_1 \geqq (n+1)\alpha$ means, differential geometrically, that the Ricci tensor is "very large". In the same paper, Ochiai and I proved that if $c_1 = n\alpha$ (where α is a positive element of $H^{1,1}(M; \mathbf{Z})$), then M is biholomorphic to a non-singular hyperquadric in $P_{n+1}C$. Later, with his theory of Δ-genera Fijita [10] has succeeded in treating the case where $c_1 = r\alpha$ with $r < n$ at least when r close to n. Fujita's result played an essential role in the proof of Mabuchi's theorem. In a more recent paper [11], Fujita proves the following topological characterization of complex projective spaces:

Theorem 2.4 *Let* M *be an* n*-dimensional compact complex manifold with* $c_1 > 0$ *such that its cohomology ring* $H^*(M; \mathbf{Z})$ *is isomorphic to that of* $P_n C$*. Then* M *is biholomorphic to* $P_n C$ *provided* $n \leqq 5$.

Naturally, he conjectures that the theorem above holds for all n. It is also unknown whether the assumption $c_1 > 0$ is really necessary or not.

In connection with Mori's Theorem 2.3, it seems reasonable to expect that if the Ricci tensor of a compact Kähler manifold M has at least r positive eigenvalues everywhere, then M contains an $(r-1)$-parameter family of rational curves. As a related problem, we can ask if a threefold with $c_1 > 0$ is unirational or not. (A surface with $c_1 > 0$ is rational.)

Although I have not mentioned all of the contributions made by differential geometers as well as by algebraic geometers to the problem of characterizing the projective space, I hope I have shown amply that their joint efforts which have finally lead to Mori's theorem represent a good example of differential geometry and algebraic geometry stimulating each other to their mutual benefit.

3 Vanishing theorems

In one of the most ambitious projects, namely, that of classifying algebraic manifolds which is being undertaken mainly in Japan and Europe, the concept of Kodaira dimension is playing a pivotal role, (see, for example, Ueno [48] and also the conjecture quoted in §1). The Kodaira dimension $\kappa(M)$ of a compact complex manifold M measures the asymptotic behavior of $\dim H^0(M; mK_M)$ as $m \to \infty$, where $mK_M (= K_M^m)$ denotes the m-th tensor power of the canonical bundle K_M. As part of this classification program, Sakai [45] has been interested in a similar numerical invariant one obtains by replacing $\dim H^0(M; mK_M)$ with $\dim H^0(M; S^m \Omega_M^1)$, where $S^m \Omega_M^1$ denotes the m-th symmetric power of the cotangent bundle Ω_M^1. Sakai has calculated this new invariant for a large number of surfaces. In particular, he has shown that $H^0(M; S^m \Omega_M^1) = 0$ for all $m \geqq 1$ when M is a Kummer surface or a quartic surface and wanted know if this holds more generally for any K3 surface. An old theorem of Bochner (see Yano-Bochner [51]) guarantees that a compact complex manifold M with $c_1 > 0$ admits no holomorphic covariant tensor fields other than the zero field. In particular, if $c_1 > 0$, then $H^0(M; S^m \Omega_M^1) = 0$. But, for a K3 surface we have $c_1 = 0$. This has forced me to reexamine Bochner's vanishing theorem.

Let M be an n-dimensional compact Kähler manifold. Let $e_1, \ldots, e_n$ be a local field of unitary frames and $\theta^1, \ldots, \theta^n$ the field of dual frames so that the Kähler metric is given by $2 \sum_{\alpha=1}^{n} \theta^\alpha \cdot \overline{\theta}^\alpha$. Let

$$\mathrm{Ric} = 2 \Sigma R_{\alpha\overline{\beta}} \theta^\alpha \cdot \overline{\theta}^\beta$$

be the Ricci tensor of M. Let

$$\xi = \Sigma\, \xi^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\, \theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_p} e_{\beta_1} \ldots e_{\beta_q}$$

be an arbitrary holomorphic tensor field of covariant degree p and contravariant degree q. (We have omitted tensor product signs). We consider the following quadratic form:

$$\begin{aligned} Q(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{p} \quad & \Sigma R_{\lambda\overline{\mu}}\, \overline{\xi}^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \lambda \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p}\, \xi^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \mu \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} \\ - \sum_{j=1}^{q} \quad & \Sigma R_{\lambda\overline{\mu}}\, \xi^{\beta_1 \ldots \beta_{j-1} \lambda \beta_{j+1} \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\, \xi^{\beta_1 \ldots \beta_{j-1} \mu \beta_{j+1} \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \end{aligned}$$

Let $\| \; \|$ denote the length (of any tensor field) with respect to the Kähler metric. From

$$\int_M \Delta(\|\xi\|^2) = 0\,,$$

we obtain Bochner's formula

$$\int_M \|\nabla\xi\|^2 + Q(\xi, \xi) = 0\,,$$

where $\nabla\xi$ denotes the covariant derivative of ξ.

If the Ricci tensor and ξ satisfy the inequality $Q(\xi, \xi) > 0$, we obtain a contradiction. However, if $Q(\xi, \xi) \geqq 0$, then we can conclude only $\nabla\xi = 0$.

If M is an Einstein-Kähler manifold so that $R_{\alpha\bar{\beta}} = c\,\delta_{\alpha\beta}$, where $\delta_{\alpha\beta}$ is the Kronecker's δ, then $Q(\xi, \xi)$ simplifies to

$$Q(\xi, \xi) = c(p-q)\,\|\xi\|^2.$$

Consider the special case where the Ricci tensor is zero. Then Bochner's formula shows that any holomorphic tensor field is parallel, i.e., invariant under the holonomy group. As we mentioned in §1, Berger's theorem gives all possibilities for the holonomy group. Analyzing the representation of the holonomy group on the tensor space, we can conclude, for example, that $H^0(M; S^m\,\Omega_M^1) = 0$ if M is a compact, simply connected Kähler manifold with zero Ricci tensor. Because of Corollary to Theorem 1.1, this can be stated as a theorem in algebraic geometry:

Theorem 3.1 *Let* M *be a compact, simply connected Kähler manifold with* $c_1 = 0$. *Then* $H^0(M; S^m\,\Omega_M^1) = 0$ *for* $m \geqq 1$.

This answers the question raised by Sakai. For details and other results of the same nature, see [23], [24].

Given a compact Einstein-Kähler manifold, consider a holomorphic tensor field of covariant degree p and contravariant degree also p. Then we can conclude again that such a tensor field is parallel. A tensor field of equal covariant and contravariant degrees arises in connection with the concept of instability for vector bundles. A vector bundle E of rank r over a compact complex manifold M is said to be *instable* in the sense of Bogomolov if there is a representation ρ of $GL(r; C)$ with determinant 1 (i.e., a representation ρ which factors through $PGL(r; C)$) such that the associated vector bundle $E^{(\rho)}$ has a nonzero section s which vanishes at some point of M. Then

Theorem 3.2 *Let* M *be a compact Einstein-Kähler manifold. Then its tangent bundle* TM *is not instable in the sense of Bogomolov.*

To prove this, since every representation of $PGL(n; C)$ is fully irreducible, it suffices to consider the case where ρ is irreducible. Then $E^{(\rho)}$, where $E = TM$, is a subbundle of the holomorphic tensor bundle $T^{\{nq\}}_{\{nq\}}(M)$ of covariant and contravariant degrees nq for some integer q. As we have seen above, a holomorphic tensor field of such a type is parallel and hence cannot vanish unless it vanishes identically.

Corollary to Theorem 3.2 *Let* M *be a compact Kähler manifold. Then its tangent bundle* TM *is not instable in the sense of Bogomolov in each of the following three cases:*

(1) M *is simply connected and homogeneous;*

(2) $c_1 < 0$;

(3) $c_1 = 0$.

It is possible to extend Theorem 3.2 to „Einstein-Hermitian vector bundles", (see [24]). As a special case, we obtain

Theorem 3.3 *Let* E *be a homogeneous Hermitian vector bundle over a homogeneous compact complex manifold* M = G/H, *where* G *is a Lie group and* H *is a compact subgroup. If the natural representation of* H *on the fibre of* E *is irreducible, then* E *is not instable in the sense of Bogomolov.*

4 Holomorphic geometric structures

It was twenty-five years ago when I was a student in Seattle that the late Professor H. C. Wang asked me whether I could determine the compact complex manifolds which admit holomorphic affine connections. He had determined earlier the compact complex manifolds with holomorphic absolute parallelism (i.e., holomorphic affine connection with trivial holonomy) and had shown that a holomorphically parallelisable compact Kähler manifold is a complex torus, [50]. All I could prove at the time was that if a compact Kähler manifold admits a holomorphic affine connection, then its Chern classes c_i all vanish, [20]. At about the same time, Atiyah's paper on holomorphic connections in fibre bundles containing the same results appeared. Until a few years ago there had been little progress on the problem except in the area of holomorphic affine structures, i.e., flat holomorphic affine connections. Shortly after I had proved vanishing of holomorphic symmetric tensor fields (Theorem 3.1), I realized that the same method, with the aid of theorems 1.1 and 1.4, could be used to establish the following theorem. However, Ochiai pointed out a much simpler argument using Theorem 1.5, [19].

Theorem 4.1 *If a compact Kähler manifold admits a holomorphic affine connection, it is covered by a complex torus.*

Since this takes care of all algebraic manifolds, it has become possible, using Kodaira's classification of surfaces, to determine all compact complex analytic surfaces admitting holomorphic affine connections. Inoue, Ochiai and I [19] proved the following

Theorem 4.2 *The list of compact complex surfaces admitting holomorphic affine connections is given by*

(1) *the complex tori;*
(2) *the hyperelliptic surfaces;*
(3) *the minimal elliptic surfaces with odd* b_1, $p_g > 0$ *and* $c_1^2 = 0$;
(4) *the minimal surfaces with* $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ *and* $p_g = 0$ *with the exception of the Hopf surfaces which are covered by primary Hopf surfaces such that their generating automorphisms of* C^2-{0} *are not affine.*

Moreover, these surfaces admit holomorphic affine structure, i.e., flat holomorphic affine connections.

While we were completing the paper on holomorphic affine connections, Gunning's excellent lecture note [14] appeared. Written from a broader viewpoint, it contained not only many results overlapping with ours but also a number of interesting results on holomorphic projective connections and structures. Stimulated by his note, Ochiai and I continued our collaboration on holomorphic connections. In the projective case, the first basic result is the following [14], [29]

Theorem 4.3 *Let* M *be a compact complex manifold of dimension* n *admitting a holomorphic projective connection. Then any relation that holds between Chern numbers of* P_nC *holds also for Chern numbers of* M. *If* M *is, moreover, Kähler, then any relation that holds between Chern classes of* P_nC *holds also for Chern classes of* M.

This was already essentially in Gunning's note although not in this precise form. From Theorems 1.8 and 4.3, we obtain the following result which may be considered as a projective analogue of Theorem 4.1, [29]

Theorem 4.4 *A compact Einstein-Kähler manifold admits a holomorphic projective connection if and only if it has constant holomorphic sectional curvature. Moreover, such a space in fact admits a holomorphic projective structure.*

This together with Theorems 1.1 and 1.2 yields the following

Theorem 4.5 (1) *A compact Kähler manifold* M *with* $c_1 = 0$ (*in* $H^2(M; \mathbf{R})$) *admits a holomorphic projective connection if and only if it is covered by a complex torus. (A complex torus admits, in fact, a holomorphic affine structure).*

(2) *A compact complex manifold with* $c_1 < 0$ *admits a holomorphic projective connection if and only if it is covered by the unit ball in* $\mathbf{C}^n$. *Moreover, such a space actually admits a holomorphic projective structure.*

Again, using Kodaira's classification of surfaces, we obtained [29],

Theorem 4.6 *The list of compact complex surfaces admitting holomorphic projective connection is given by*

(1) *the projective plane* P_2C;

(2) *the surfaces covered by the unit ball in* $\mathbf{C}^2$;

(3) *the surfaces admitting holomorphic affine connections as classified in* Theorem 4.2.

All of these surfaces actually admit holomorphic projective structures.

The next natural holomorphic structure was the holomorphic analogue of a conformal connection and the corresponding flat structure which is modeled after a non-singular hyperquadric. Theorems analogous to Theorems 4.3, 4.4, and 4.5 hold and the classification can be done in dimension 2, see [30] for details. By then, general theorems on holomorphic G-structures modeled after compact hermitian symmetric spaces have emerged, resulting complete generalizations of theoems 4.3, 4.4 and 4.5 to such G-structures. In particular, the generalization of Theorem 4.3 contains Hirzebruch's proportionality principle [16]. It is interesting that the proof for the generalization of Theorem 4.4 requires the method used in the proof of Theorem 3.1 and is similar to the long and complicated proof I originally had for Theorem 4.1 (see [31] for details).

With these four topics I hope I have illustrated the beautiful relationship that exists between differential geometry and algebraic geometry.

Bibliography

[1] A t i y a h , M. F.: Complex analytic connections in fibre bundles. Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957) 181–207

[2] A u b i n , T.: Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kähleriennes compactes. C. R. Acad. Sci. Paris **283** (1976) 119–121

[3] B e r g e r , M.: Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. Bull. Soc. Math. France **83** (1955) 279–330

[4] B i s h o p , R. L.; G o l d b e r g , S. I.: On the second cohomology group of a Kähler manifold of positive curvature. Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965) 119–122

[5] B o g o m o l o v , F. A.: Hamiltonian Kähler manifolds. Soviet Math. Dokl. **19** (1978) 1462–1465

[6] C a l a b i , E.: On Kähler manifolds with vanishing canonical class. Alg. Geometry & Topology (in honor of Lefschetz). Princeton Univ. Press 1957, 78–89

[7] C h e n , B. Y.; O g i u e , K.: Some characterizations of complex space forms in terms of Chern classes. Quart. J. Math. Oxford **26** (1975) 459–464

[8] F i s c h e r , A. E.; W o l f , J. A.: The structure of compact Ricci-flat Riemannian manifold. J. Diff. Geometry **10** (1975) 277–288

[9] F r a n k e l, T. T.: Manifolds with positive curvature. Pacific J. Math. **11** (1961) 165–174

[10] F u j i t a , T.: On the structure of polarized varieties with Δ-genera zero. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **22** (1975) 103–115

[11] F u ij t a , T.: On topological characterizations of complex projective spaces and affine linear spaces. Proc. Japan Acad. **56** (1980) 231–234

[12] G o l d b e r g , S. I.; K o b a y a s h i , S.: On holomorphic sectional curvature. J. Diff. Geometry **1** (1967) 225–233

[13] G u g g e n h e i m e r , H.: Über vierdimensionale Einsteinräume. Experientia **8** (1952) 420–421

[14] G u n n i n g , R.: On Uniformization of Complex Manifolds, the Role of Connections. Princeton Univ. Press 1978. = Math. Notes No. 22

[15] H a r t s h o r n e , R.: Ample Subvarieties of Algebraic Varieties. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970. = Lecture Notes in Math. Vol. 156

[16] H i r z e b r u c h , F.: Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch. Symp. Intern. Top. Alg. 1956, 129–144, Univ. Mexico 1958

[17] H i r z e b r u c h , F.; K o d a i r a , K.: On the complex projective spaces. J. Math. Pure Appl. **36** (1957) 201–216

[18] I i t a k a, S.: On some new birational invariants of algebraic varieties and their application to rationality of certain algebraic varieties of dimension 3. J. Math. Soc. Japan **24** (1972) 384–396

[19] I n o u e , M.; K o b a y a s h i , S.; O c h i a i , T.: Holomorphic affine connections on compact complex surfaces. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **27** (1980) 247–264

[20] K o b a y a s h i , S.: On holomorphic affine connections. Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956) 361

[21] K o b a y a s h i , S.: On compact Kähler manifolds with positive definite Ricci tensor. Ann. Math. **74** (1961) 570–574

[22] K o b a y a s h i , S.: Negative vector bundles and complex Finsler structures. Nagoya Math. J. **57** (1975) 153–166

[23] K o b a y a s h i , S.: The first Chern class and holomorphic symmetric tensor fields. J. Math. Soc. Japan **32** (1980) 325–329

[24] K o b a y a s h i , S.: First Chern class and holomorphic tensor fields. Nagoya Math. J. **77** (1980) 5–11

[25] K o b a y a s h i , S.: O c h i a i , T.: On complex manifolds with positive tangent bundle. J. Math. Soc. Japan **22** (1970) 499–525

[26] K o b a y a s h i , S.; O c h i a i , T.: Compact homogeneous complex manifolds with positive tangent bundle. Diff. Geometry in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo 1972, 221–232

[27] K o b a y a s h i , S.; O c h i a i , T.: Three-dimensional compact Kähler manifolds with positive holomorphic bisectional curvature, J. Math. Soc. Japan **24** (1972) 465–480

[28] K o b a y a s h i , S.; O c h i a i , T.: Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics. J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973) 31–47

[29] Kobayashi, S.; Ochiai, T.: Holomorphic projective structures on compact complex surfaces. Math. Ann. **249** (1980) 75–94
[30] Kobayashi, S.; Ochiai, T.: Holomorphic structures modeled after hyperquadrics, to appear
[31] Kobayashi, S.; Ochiai, T.: Holomorphic structures modeled after compact hermitian symmetric spaces, to appear in the volume dedicated to Y. Matsushima
[32] Kodaira, K.: Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type. J. Math. Soc. Japan **20** (1968) 170–192
[33] Lascoux, A.; Berger, M.: Variétés kähleriennes compactes. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer 1970. = Lecture Notes in Math. Vol. 154
[34] Mabuchi, T.: Algebraic threefolds with ample tangent bundle. Proc. Japan Acad. **53** (1977) 31–34
[35] Mabuchi, T.: $\mathbf{C}^3$-actions and algebraic threefolds with ample tangent bundle. Nagoya Math. J. **69** (1978) 33–64
[36] Matsushima, Y.: On Hodge manifolds with zero first Chern class, Differentialgeometrie im Grossen. Berichte Math. Forschungsinstitut Oberwolfach **4** (1969) 251–257
[37] Miyaoka, Y.: On the Chern numbers of surfaces of general type. Inventiones Math. **42** (1977) 225–237
[38] Mori, S.: Projective manifolds with ample tangent bundles. Ann. Math. **110** (1979) 593–606
[39] Mori, S.; Sumihiro, H.: On Hartshorne's conjecture. J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978) 523–533
[40] Morrow, J.: A survey of some results on compact Kähler manifolds. Global Analysis (in honor of K. Kodaira). Princeton Univ. Press 1969, 315–324
[41] Ochiai, T.: On compact Kähler manifolds with positive holomorphic bisectional curvature. Proc. Symp. Pure Math. Vol. 27, Part II. Amer. Math. Soc. 1975, 113–123
[42] Ochiai, T.: A survey on holomorphic G-structures. Proc. Peking Symp. PDE and Diff. Geom. 1980
[43] Raynaud, M.: Fibres vectoriels instables – applications aux surfaces, (d'apres Bogomolov). Sem. Geometrie alg. Orsay 1977/78, Exposé No. 3
[44] Reid, M.: Bogomolov's theorem $c_1^2 \leqq 4c_2$. Intern. Symp. Alg. Geom. Kyoto 1977, 623–642
[45] Sakai, F.: Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979. = Lecture Notes in Math. Vol. 732, 545–563
[46] Simons, J.: On transitivity of holonomy systems. Ann. Math. **76** (1962) 213–234
[47] Siu, Y. T., Yau, S. T.: Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature. Inventiones Math. **59** (1980) 189–204
[48] Ueno, K.: Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975. = Lecture Notes in Math. Vol. 439
[49] Van de Ven: On the Chern numbers of surfaces of general type. Inventiones Math. **36** (1976) 285–293
[50] Wang, H. C.: Complex parallisable manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954) 771–776
[51] Yano, K.; Bochner, S.: Curvature and Betti Numbers. Annals of Math. Studies **32** (1953)
[52] Yau, S. T.: Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **74** (1977) 1798–1799
[53] Yau, S. T.: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifolds and the complex Monge-Ampère equations I. Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978) 339–411

Shoshichi Kobayashi
Dept. of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94720 USA

(Eingegangen: 31. 3. 1981)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
83 (1981) 159–168
AMS subject classification: 10-03 oder 01 A 70

Alfred Stöhr 1916–1973

E. Härtter, Mainz

Am 4. März 1916 wurde Alfred Max Helmut Stöhr in Berlin-Karlshorst als ältester Sohn des Bankrats Alfred Stöhr geboren. Seine Mutter Frieda geb. Müller, an der er sehr hing, verlor Herr Stöhr schon recht früh. Nachdem er von Januar 1922 bis Ostern 1923 eine Privatschule in Karlshorst und dann zwei Jahre die dortige 30. Gemeindeschule besucht hatte, wechselte er Ostern 1925 auf das Helmholtz-Realgymnasium in Berlin-Schöneberg. Da er von den neun Gymnasialklassen eine Klasse übersprang, legte er schon am 3. März 1933 dort die Reifeprüfung ab. Bereits während der Schulzeit zeigte er Interesse nicht nur für die Mathematik, sondern auch für technische Dinge.

Von Mai 1933 an studierte Herr Stöhr an der Friedrich Wilhelms-Universität Berlin acht Semester lang Mathematik, Physik und Chemie. Zu seinen akademischen Lehrern zählte neben den Professoren Erhard Schmidt und Werner Weber auch noch Issai Schur [1]), bis dieser im Sommer 1935 durch die politischen Umstände endgültig von seinem Ordinariat an der Universität Berlin ausscheiden mußte. Am 14. Februar 1938 bestand Herr Stöhr die Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen. Während des Studiums arbeitete er u. a. als redaktionelle Hilfskraft bei der Schriftleitung des „Jahrbuchs für die Fortschritte der Mathematik" und als Hilfsassistent am Mathematischen Institut der Universität Berlin. Das Thema der Dissertation von Herrn Stöhr lautete: „Über Zerlegungen von Rechtecken in inkongruente Quadrate" (Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades genehmigt von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Friedrich Wilhelms-Universität zu Berlin) [1]. Die Arbeit wurde am 18. Oktober 1938 eingereicht, die Referenten waren Werner Weber und Erhard Schmidt. Tag der mündlichen Doktorprüfung war der 23. November 1938, der Tag der Promotion der 25. Januar 1939.

Vom 1. Dezember 1938 bis 15. September 1939 war Herr Stöhr als redaktionelle Hilfskraft bei Prof. E. Hecke in Hamburg tätig. Nach Kriegsausbruch nahm er eine Stellung als Hochfrequenz-Ingenieur bei der Firma Telefunken GmbH an und blieb in dieser Position bis zum Kriegsende. Am 8. Dezember 1944 erwarb Herr Stöhr an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Deutschen Universität Prag den Grad eines Dr. rer. nat. habil. für das Fach Mathematik; die vorgelegte Arbeit hatte den Titel „Über einige lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten" I, II, III ([10], [11], [12]). Anfang Mai 1945 kehrte Herr Stöhr

[1]) Vgl. hierzu auch die Widmung der Arbeit [25].

0012–0456/81/04 0159–010 $ 02.00/0

nach Hamburg zurück, wo er vom Wintersemester 1945/46 ab zunächst als Lehrbeauftragter und dann vom 1. August 1946 ab als wissenschaftlicher Assistent tätig war. Am 30. Juli 1947 habilitierte er sich dort mit derselben Arbeit wie in Prag als Privatdozent für das Fach Mathematik. Vom Wintersemester 1950/51 bis zum Wintersemester 1951/52 war er an die Georg August-Universität Göttingen beurlaubt, im Wintersemester 1950/51 zur Vertretung eines Ordinariats. Nach der Umhabilitation an die Universität Göttingen am 29. Februar 1952 wechselte er zum Sommersemester 1952 endgültig dorthin über. Am Göttinger Mathematischen Institut war er vom 10. April 1952 bis 30. September 1956 wissenschaftlicher Assistent, insbesondere bei Herrn Prof. C. L. Siegel, wurde am 13. Juli 1955 zum außerplanmäßigen Professor ernannt und übernahm ab 1. Oktober 1956 als Diätendozent die Leitung des „Instituts für mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik", die er bis zum 31. März 1958, als er einem Ruf als außerordentlicher Professor an die Freie Universität Berlin folgte, innehatte. Dort wurde er am 1. April 1966 zum ordentlichen Professor ernannt. Im Sommersemester 1969 und im Wintersemester 1969/70 sowie während der ersten Hälfte des Wintersemesters 1971/72 hatte Herr Stöhr neben seiner Tätigkeit in Berlin die Vertretung von Herrn Prof. B. Schoeneberg in Hamburg. Nachdem Herr Stöhr im Sommersemester 1973 noch voll diensttätig war, befiel ihn in der vorlesungsfreien Zeit zwischen Sommersemester und Wintersemester 1973/74 eine schwere Erkrankung, die nach kurzer Zeit zu seinem Tode führte; er starb am 10. Oktober 1973 in Berlin.

Herr Stöhr war ein bescheidener, toleranter und sehr geduldiger Mensch, der sich nicht gerne in den Mittelpunkt stellte und es vermied, in der Öffentlichkeit auf seine Stellung hinzuweisen. Jedoch verteidigte er seine Rechte, wenn er in irgendeiner Weise seine Sphäre bedroht sah. Herr Stöhr pflegte verschiedene Hobbys[2]), wie die Botanik – viele Pflanzen kannte er mit ihren lateinischen Namen –, Chemie, Photographieren, Sprachen – er sprach unter anderem fließend holländisch und tschechisch –, und war handwerklich sehr geschickt. Die Mathematik betrachtete er als eines seiner Hobbys.

Das wissenschaftliche Wirken von Herrn Stöhr erstreckte sich auf viele Gebiete, hauptsächlich aber auf die Zahlentheorie und auf Differenzen- und Differentialgleichungen.

In seiner Dissertation [1][3]) behandelt Herr Stöhr im Anschluß an eine u. a. von M. Dehn diskutierte Frage das Problem, Rechtecke lückenlos in endlich viele (mindestens zwei) Quadrate verschiedener Seitenlängen zu zerlegen. Solche Rechtecke heißen zulässig zerlegt. Es wird als Ausgangspunkt der folgende Satz bewiesen: Zu je zwei vorgegebenen Zahlen ϵ, $q \in \mathbf{R}$ ($\epsilon > 0$, $q \geqslant 0$) gibt es ein zulässig zerlegtes Rechteck mit den Seitenlängen a und b, so daß gilt $|b/a - q| < \epsilon$. Es wird dann weiter gezeigt, daß sich an die Seitenverhältnisse solcher zulässig zerlegter Rechtecke neben dieser Bedingung noch eine Anzahl weiterer Bedingungen stellen läßt. Zu diesem Fragenkreis gehört auch die Arbeit [7], in der Zerlegungen eines Rechtecks in Rechtecke untersucht werden.

---

[2]) Für die betreffenden Informationen bedanke ich mich bei Frau Ruth Schmettau.
[3]) Die Nummern verweisen auf das Verzeichnis der Schriften von Herrn Stöhr.

Die weiteren Arbeiten von Herrn Stöhr aus den Jahren 1937–1943 ([3], [4], [6], [8]) sind hauptsächlich Fragen der additiven Zahlentheorie gewidmet. Ist A eine Menge $\subseteq \mathbf{N}_0$, so ist die Anzahlfunktion A(n) von A definiert durch

$A(n) := \sum_{a \in A:\, 0 < a \leqslant n} 1 \quad (n \in \mathbf{N}_0)$ und die (finite, Schnirelmannsche) Dichte von A durch $D(A) := \inf_{n \in \mathbf{N}} A(n)/n$ sowie die asymptotische Dichte $\mathrm{D}(A) := \varliminf_{n \in \mathbf{N}} A(n)/n$.

Ferner ist für h Mengen $A_1, \ldots, A_h \subseteq \mathbf{N}_0$ die Summenmenge $\sum_{j=1}^{h} A_j$ definiert durch $\sum_{j=1}^{h} A_j := \left\{ z \in \mathbf{N}_0 \;\middle|\; z = \sum_{j=1}^{h} a_j;\ a_j \in A_j \right\}$. Im Spezialfall $A_j = A\,(j = 1, \ldots, h)$ schreibt man $\sum_{j=1}^{h} A =: hA$. Falls gilt $hB = \mathbf{N}_0$, heißt B Basis h-ter Ordnung. Dann wird in der Arbeit [3], als Weiterführung von Untersuchungen von H. Rohrbach, mit Hilfe von Zifferndarstellungen eine Basis B h-ter Ordnung mit $B(n) < 2h\sqrt[h]{n}\ (n \in \mathbf{N})$ konstruiert und in [6] die Anzahl B(n) genauer abgeschätzt.

In der Serie von drei Arbeiten „Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie“ [4], [8], [24] (letztere aus dem Jahr 1956) wird in der ersten die mittlere Ordnung einer Menge $A \subseteq \mathbf{N}_0$ eingeführt: Ist jedes $z \in \mathbf{N}_0$ als Summe von (nicht notwendig verschiedenen) Summanden aus A darstellbar, so sei $\ell(z)$ die kleinste Anzahl von Summanden $\in A$, mit der z dargestellt werden kann (für $\ell(z) > 1$ ist also $z \in (\ell(z))A$, aber $z \notin (\ell(z) - 1)A$). Dann heißt $\lambda_A := \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{n} \sum_{z=1}^{n} \ell(z)$ die mittlere Ordnung von A; falls $\lambda_A < \infty$ ist, heißt A Basis von endlicher mittlerer Ordnung λ_A. Ferner wird $h_g := \max_{z \in \mathbf{N}} \ell(z)$ (falls das Maximum existiert) die genaue Ordnung von A genannt. Dann wird gezeigt $h_g < 2\lambda_A$ (falls $\lambda_A < \infty$) und $h_g = \lambda_A$ genau dann, wenn $D((h_g - 1)A) = 0$ ist. Weiter ergibt sich eine interessante Anwendung auf wesentliche Komponenten.

In der zweiten [8] dieser Arbeiten werden (anknüpfend an Betrachtungen in [6]) als Verallgemeinerung der Dichtebegriffe $\varphi(x)$-Dichten einer Menge $A \subseteq \mathbf{N}_0$ untersucht. Sei dazu $\varphi(x)$ eine Funktion $\mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$; dann heißt $\inf_{n \in \mathbf{N}} A(n)/\varphi(n)$ (finite) $\varphi(x)$-Dichte und $\varliminf_{n \in \mathbf{N}} A(n)/\varphi(n)$ asymptotische $\varphi(x)$-Dichte von A. Die dritte [24] der genannten Arbeiten bringt eine wesentliche Vereinfachung des Beweises eines Satzes von A. Brauer (Math. Z. **44** (1939) 212–232) über die Dichte der Summe zweier Mengen A und $B \subseteq \mathbf{N}_0$, wobei die Dichte $0 < D(A) < 1$ und B Basis von endlicher mittlerer Ordnung ist.

Von Herrn Stöhrs Arbeiten zur additiven Zahlentheorie ist besonders hervorzuheben der umfangreiche Bericht [22] „Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe, I, II“ aus dem Jahr 1955. Diese Arbeit enthält eine Fülle von interessanten Fragestellungen und offenen Problemen, die verschiedene andere Mathematiker – z. B. auch P. Erdös [4]) – in ihren Forschungen anregten; viele dieser Fragen sind auch heute noch nicht beantwortet. Dieser grundlegende Bericht hat seine Aktualität nicht verloren und wird daher in neueren Arbeiten immer wieder zitiert. Für eine Basis B h-ter Ordnung wird definiert

$$\widetilde{\beta}_1 := \inf_{n \in \mathbf{N}} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}}, \qquad \widetilde{\beta}_2 := \underline{\lim}_{n \in \mathbf{N}} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}}$$

($\varphi(x)$-Dichten mit $\varphi(x) = \sqrt[h]{x}$), sowie

$$\widetilde{\beta}_3 := \overline{\lim}_{n \in \mathbf{N}} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}}, \qquad \widetilde{\beta}_4 := \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}}, \qquad \nu_i(h) = \inf_B \widetilde{\beta}_i \ (i = 1, 2, 3, 4),$$

wobei B hierin alle Basen h-ter Ordnung durchläuft. Diese Größen sind für die Untersuchung von Basen von großem Interesse und werden in dieser Arbeit bestimmt bzw. abgeschätzt. So werden die folgenden Resultate angegeben:

$$\nu_1(h) = \frac{1}{\sqrt[h]{h}}, \qquad \nu_2(h) \geqslant \sqrt[h]{h!}, \quad \nu_3(h) \geqslant \frac{\sqrt[h]{h!}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{h}\right)}.$$

Weiterhin werden z. B. verschiedene Definitionen für den Minimalbasisbegriff diskutiert, Kriterien für Nicht-Basen bewiesen, Produkte von Zahlenmengen eingeführt und B_2-Folgen und Differenzbasen behandelt.

Von zwei weiteren Arbeiten, die sich mit Fragen der additiven Zahlentheorie befassen, hat Herr Stöhr eine gemeinsam mit H. Klöter [28] und eine zusammen mit E. Wirsing [29] verfaßt. In der letzteren dieser beiden Arbeiten wird ein einfacheres Konstruktionsverfahren für ein Ergebnis von Linnik (Mat. Sbornik, n. Ser. **10** (1942) 67-78) gegeben, das wesentliche Komponenten liefert, die keine Basen sind.

Eine ganze Reihe weiterer Arbeiten von Herrn Stöhr stammt aus dem Gebiet der Differenzen- und Differentialgleichungen. Seine Habilitationsschrift (in drei Teilen veröffentlicht [10], [11], [12]) behandelt lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Seien $y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{Z}$ Variablen und $k_\nu^{(\mu)} \in \mathbf{Z}$ sowie $a_\mu \neq 0$ Konstanten ($\mu = 1, \ldots, m$; $\nu = 1, \ldots, n$); dabei sollen die m-Tupel (Gitterpunkte) $(k_1^{(\mu)}, \ldots, k_n^{(\mu)})$ paarweise verschieden sein. Mit einer Funktion $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ wird definiert

$$(1) \qquad \nabla\, \Phi(y_1, \ldots, y_n) := \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \Phi(y_1 + k_1^{(\mu)}, y_2 + k_2^{(\mu)}, \ldots, y_n + k_n^{(\mu)});$$

ferner sei

$$\psi_0(y_1, \ldots, y_n) := \begin{cases} 1 & \text{für } y_1 = \ldots = y_n = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann wird die Gleichung

$$(2) \qquad \nabla\, \Phi(y_1, \ldots, y_n) = \psi(y_1, \ldots, y_n),$$

---

[4]) Erdös, P.: Einige Bemerkungen zur Arbeit von A. Stöhr: Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. J. f. d. reine angew. Math. **197** (1957) 216–219.

die bei elektrischen Netzwerken von Bedeutung ist, zunächst bei beliebiger rechter Seite untersucht. Es wird gezeigt, daß diese Gleichung stets lösbar ist, und die Lösung vollständig angegeben, d. h. alle Funktionen $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ konstruiert, die (2) genügen. Dies gelingt dadurch, daß (2) als Anfangswertproblem mit willkürlichen Anfangswerten aufgefaßt wird. Man erhält dabei unendlich viele Lösungen, die sich voneinander je um eine Lösung der homogenen Gleichung

$$(3) \qquad \nabla\, \Phi(y_1, \ldots, y_n) = 0$$

unterscheiden. Wird in (2) auf der rechten Seite speziell die Funktion ψ_0 gesetzt, so kann man unter einigen Einschränkungen an den Operator ∇ die Lösung von (2) mit Hilfe (n–1)-dimensionaler bestimmter Integrale (also nicht nur rekursiv) angeben. – Ist einer der Koeffizienten a_μ dominant, d. h. es gilt etwa $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{n-1}| \leqslant |a_n|$, dann gilt das „Prinzip vom Maximum“: Dies besagt, daß, wenn Φ Lösung der Gleichung (3) mit dieser Bedingung ist, die Funktion Φ in jedem endlichen Bereich von Gitterpunkten ihr Maximum auf den „Rand“ annimmt. Im zweiten Teil wird der Fall n = 2 behandelt und statt (1) speziell

$$(4) \qquad \nabla\, \Phi(y_1, y_2) = \Phi(y_1 + 1, y_2) + \Phi(y_1 - 1, y_2) + \Phi(y_1, y_2 + 1) \\ + \Phi(y_1, y_2 - 1) - 4\,\kappa\,\Phi(y_1, y_2)$$

mit $\kappa > 1$ untersucht. Eine besondere Lösung wird mit Hilfe elliptischer Funktionen bzw. Tschebyscheffscher Polynome dargestellt. Der dritte Teil [12] der Habilitationsschrift behandelt in Gleichung (4) den Fall $\kappa = 1$.

Auch die schon 1943 erschienene Arbeit „Oszillationstheoreme für die Eigenvektoren spezieller Matrizen“ [9] steht mit Randwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und mit Differenzengleichungen in Verbindung: Für reelle symmetrische Matrizen der Form

$$\mathbf{M}(\lambda) := \begin{pmatrix} g_1(\lambda) & k_1 & & & & 0 \\ k_1 & g_2(\lambda) & k_2 & & & \\ & k_2 & g_3(\lambda) & k_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & k_{N-2} & g_{N-1}(\lambda) & k_{N-1} \\ 0 & & & & k_{N-1} & g_N(\lambda) \end{pmatrix}$$

mit monoton wachsenden stetigen Funktionen $g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ und Konstanten $0 < k_n \in \mathbf{R}$ werden durch $\det \mathbf{M}(\lambda) = 0$ „Eigenwerte“ λ und durch $\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{u} = 0$ „Eigenvektoren“ $\mathbf{u}$ eingeführt. Es gibt nun genau N reelle Eigenwerte, und diese sind paarweise verschieden. Ordnet man sie nach wachsender Größe, wodurch auch die Eigenvektoren eine bestimmte Reihenfolge erhalten, so besitzt die Folge der Koordinaten des n-ten Eigenvektors (n = 1, 2, . . . , N) genau n – 1 Zeichenwechsel (erstes Oszillationstheorem).

In den beiden Arbeiten „Über die Differentialgleichungen eines dynamischen Weltmodells“ I, II ([13], [16]) untersucht Herr Stöhr das Differentialgleichungssystem $(\det \mathbf{B})\,\ddot{\mathbf{B}} + k\,\mathbf{B} = 0$ mit einer zeitabhängigen $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{B}$ und einer Konstanten k. Dieses System hat Beziehung zu dem Weltmodell von Milne und Mc Crea[5]) und Heckmann[6]).

Die unmittelbar aufeinander folgenden Arbeiten „Zur approximativen Lösung linearer homogener Differentialgleichungssysteme" [14] und „Über einen integralartigen Grenzübergang bei Kettenbrüchen" [15] stehen auch in inhaltlichem Zusammenhang, insofern als bei der zweiten dieser Arbeiten ein Resultat der ersten herangezogen wird. Auch die Arbeit „Bemerkungen über Kettenbruchintegrale" [17] ist in diesem Zusammenhang zu erwähnen.

Während in der kleinen Note „Eine Formel für gewisse symmetrische Polynome" [20] ein Satz aus Pólya, G.; Szegö, G.: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. II, 1925 (S. 99 und 302, Nr. 10; S. 45 und 229, Nr. 48) verallgemeinert wird, bringt die Arbeit „Neuer Beweis einer Formel über das reelle arithmetisch-geometrische Mittel" [23] unter Verwendung vollständiger elliptischer Integrale erster Gattung und konformer Abbildungen einen Beweis für die folgende auf Gauß zurückgehende Aussage: Sei $0 < b_0 < a_0 \in \mathbf{R}$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n); \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dann existieren $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: \hat{\alpha}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =: \hat{\beta}$, und es gilt $\hat{\alpha} = \hat{\beta} =: M(a_0, b_0)$; dieser gemeinsame Grenzwert heißt das (reelle) arithmetisch-geometrische Mittel von a_0 und b_0. Weiter gilt hierfür nun bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit

$$2^{-n} \log \frac{4\,a_n}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{M(a_0, b_0)}{M(a_0, \sqrt{a_0^2 - b_0^2})} + O(2^{-n} e^{-\alpha 2^n})$$

mit einem von n unabhängigen $\alpha > 0$.

In der Arbeit „Zur Funktionentheorie im Raum der symmetrischen Matrizen" [25] überträgt Herr Stöhr einige Sätze aus der Funktionentheorie, wie z. B. das Schwarzsche Lemma, auf gewisse Funktionen, in denen unabhängige und abhängige Variablen quadratische Matrizen sind, wobei die Elemente der abhängigen Matrix analytisch von den Elementen der unabhängigen Matrix abhängen.

Ein algebraisches Thema behandelt Herr Stöhr zusammen mit L. Rédei in der Arbeit „Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie" [27]. Es werden gewisse schiefe Produkte zweier Gruppen untersucht und die Isomorphie zu einem anderen Produkt gezeigt.

Das weite Interessenfeld von Herrn Stöhr zeigt sich auch darin, daß eine seiner Arbeiten [18] in einer Fachzeitschrift für Elektrotechnik und eine [5] in einer Fachzeitschrift für Anthropologie erschien.

Das breite Spektrum des Lehrangebots von Herrn Stöhr spannte sich von Vorlesungen über Gebiete der Zahlentheorie, Funktionentheorie, Differential-

---

[5]) Milne, E. A.: A Newtonian expanding universe. Quart. J. Math. Oxford 5 (1934) 64–72; Mc Crea, W. H.; Milne, E. A.: Newtonian Universe and the curvature of space. Quart. J. Math. Oxford 5 (1934) 73–80.

[6]) Heckmann, O.: Theorien der Kosmologie, Erster Teil. Berlin 1942.

gleichungen, Differentialgeometrie bis zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Sein Vorlesungsprogramm ab 1970 weist im einzelnen folgende Vorlesungen aus:

SS 1970:	Klassenzahl quadratischer Formen (4std.); Seminar algebraische Topologie (2std.);
WS 1970/71:	Elliptische Modulformen (4std.); zwei Seminare, eines davon über additive Zahlentheorie (je 2std.);
SS 1971:	Elliptische Modulformen (2std.); Seminar über topologische Automaten (2std.);
WS 1971/72:	Funktionentheorie (4std.); Thetafunktionen (2std.);
SS 1972:	Funktionentheorie II (4std.); Lektüre eines mathematischen Klassikers (2std.);
WS 1972/73:	Funktionentheorie I mit Übungen (6std.);
SS 1973:	Funktionentheorie II mit Übungen (6std.).

Ferner oblag ihm in Berlin über viele Jahre hinweg die Anfängerausbildung in angewandter Mathematik. Herrn Stöhrs Vorlesungen waren von hohem Niveau und stellten an die Hörer bei der Bewältigung des Stoffes besondere Anforderungen. In den Kollegs, die sich an Hörer mit speziellen Interessen wandten, kam sein Einfallsreichtum voll zur Geltung. Diese umfangreiche Lehrtätigkeit fand ihren Niederschlag in der Betreuung bzw. Mitbetreuung von 31 Diplomarbeiten als Erst- oder Zweitreferent und in der Mitwirkung an 110 Diplom-Hauptprüfungen.

Neben seiner fruchtbaren Tätigkeit in Forschung und Lehre übte Herr Stöhr mit Besonnenheit, Umsicht und Weitblick zahlreiche Funktionen in der akademischen Selbstverwaltung der Freien Universität Berlin aus, die einen großen Teil seiner Arbeitskraft in Anspruch nahmen. So gehörte er z. B. von Juni 1970 (der ersten Wahl des Gremiums) ununterbrochen bis 1973 dem Fachbereichsrat des Fachbereichs 19 Mathematik an (bis 1972 als stellvertretender Vorsitzender), er war von 1970–1971 Mitglied der Ausbildungskommission, 1970–1973 Mitglied der Forschungskommission des Fachbereichs 19 sowie Mitglied mehrerer Berufungs- und Habilitationskommissionen. Von 1971–1972 war er geschäftsführender Direktor des II. Mathematischen Instituts und von 1969 an für einige Jahre Vorsitzender des Prüfungsausschusses Mathematik. Außerdem war Herr Stöhr Mitglied des Konzils der FU Berlin.

Herr Stöhr hatte zwei Doktoranden:

P e t e r A l t h a m m e r promovierte mit der Arbeit: Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffs bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation (Referenten: A. Stöhr – H. Pachale (1961)),
A r n u l f M r o s e mit der Arbeit: Die Bestimmung der extremalen regulären Abschnittsbasen mit Hilfe einer Klasse von Kettenbruchdeterminanten (Referenten: A. Stöhr – K. P. Grotemeyer (1969)).

Bei den folgenden Dissertationen wirkte Herr Stöhr als Korreferent mit:

R o h d e , H a n n s - W a l t e r (Ref. A. Dinghas – A. Stöhr; 1962);
E l l i g e r , S i g u r d (Ref. K. P. Grotemeyer – A. Stöhr; 1963);
S t o b e r , I n g r i d S e l m a K l a r a (Ref. A. Dinghas – G. Grawert[7]) – A. Stöhr; 1964);

[7]) Institut für theoretische Physik der FU Berlin.

L e n z i n g , H e l m u t (Ref. K. P. Grotemeyer – A. Stöhr; 1964);
B r u n n e r , G ö t z (Ref. K. P. Grotemeyer – A. Stöhr; 1966);
Z e n g l i n , G ü n t e r (Ref. H. Münzner – A. Stöhr; 1969);
B a i e r l , R u d o l f H e r b e r t (Ref. H. Pachale – A. Stöhr; 1970).

Im Anschluß an den oben erwähnten Bericht [22] sei noch ein Auszug aus einem Brief von Herrn Stöhr an Herrn H.-H. O s t m a n n (ca. 1956) zitiert. Dieser Brief enthält einige offene Fragen zur additiven Zahlentheorie, die bis heute wohl noch nicht beantwortet sind; er war damals dem Verfasser dieses Nachrufs in einer Kopie zugänglich. Wir vereinbaren zunächst noch folgende Bezeichnung: Mit $m \in \mathbf{N}$ sei $\{0, 1, \ldots, m\} =: [0, m] = M$.

„**Definitionen:**

(a) A *heißt Basis*[8]) h-*ter Ordnung für* m, *wenn* $M \not\subseteq h A$ *ist.*

(b) A *heißt Basis genau* h-*ter Ordnung für* m, *wenn* $M \subseteq h A$ *und* $M \not\subseteq (h-1)A$ *ist.*

(c) A *heißt Minimalbasis* h-*ter Ordnung für* m, *wenn* A *eine Basis* h-*ter Ordnung für* m *ist, und wenn für jede Basis* B h-*ter Ordnung für* m *die Ungleichung* $B(m) \geqslant A(m)$ *gilt.*

(d) *Eine Minimalbasis* h-*ter Ordnung für* m, *die zugleich eine Basis genau* h-*ter Ordnung ist, soll der Kürze halber Minimalbasis* (d) *heißen.*

(e) *Eine Basis* A *genau* h-*ter Ordnung für* m *mit der Eigenschaft, daß für jede Basis* B *genau* h-*ter Ordnung für* m *die Ungleichung* $B(m) \geqslant A(m)$ *gilt, soll kurz Minimalbasis* (e) *heißen*[9]).

Jede Minimalbasis (d) ist offenbar auch eine Minimalbasis (e).
F r a g e : Gilt auch das Umgekehrte?

Man kann das auch so formulieren: Ist eine Minimalbasis (e) notwendig zugleich eine Minimalbasis h-ter Ordnung für m im Sinne der Definition (c)?

Es gelten folgende Aussagen:

(1) *Für* $1 \leqslant m \leqslant h$ *ist jedes* A, *das eine Basis* h-*ter Ordnung für* m *ist, bereits eine Basis* m-*ter Ordnung für* m.

B e w e i s . Jedenfalls ist $\{0, 1\} \subseteq A$, also ist $m A \supseteq m\{0, 1\} = [0, m]$.

Korollar: *Für* $1 \leqslant m < h$ *gibt es keine Basis genau* h-*ter Ordnung für* m, *also insbesondere auch keine Minimalbasis* (d) *oder* (e); *ferner ist dann jede Minimalbasis* h-*ter Ordnung für* m *zugleich eine Minimalbasis* m-*ter Ordnung für* m.

(2) *Für* $1 \leqslant h \leqslant m$ *gibt es Basen genau* h-*ter Ordnung für* m.

B e w e i s . Die aus der 0 und allen Zahlen z mit $z \equiv 1 \pmod h$, $1 \leqslant z \leqslant m$ bestehende Menge leistet das Verlangte.

---

[8]) Genauer: Abschnittsbasis (siehe [22]).

[9]) Zu den hier angeschnittenen Fragen vgl. auch O s t m a n n , H.-H.: Additive Zahlentheorie, I. Ergebnisse der Mathematik (1956), S. 175 ff.

V e r m u t u n g 1: *Für* $1 \leqslant h \leqslant m$ *gibt es Minimalbasen* (d).
V e r m u t u n g 2: *Für* $2 \leqslant h \leqslant m$ *gibt es eine Basis* B *genau* h-*ter Ordnung für* m *mit* $B(m) < h \cdot \sqrt[h]{m}$.

Für $h \leqslant m \leqslant h^2$ leistet jedenfalls das im Beweis zu (2) vorkommende Beispiel alles in Vermutung 2 Verlangte.

(3) *Es gibt eine Funktion* f(h) *so, daß für* $m \geqslant f(h)$ *jede Minimalbasis* h-*ter Ordnung für* m *eine Basis genau* h-*ter Ordnung für* m *ist (also Minimalbasis* (d) *ist).*

B e w e i s . h = 1 ist trivial; sei $h \geqslant 2$. Jede Minimalbasis h-ter Ordnung für m enthält weniger als $c_1 \cdot \sqrt[h]{m}$ positive Zahlen[10]); jede Basis (h–1)-ter Ordnung muß andererseits mindestens $c_2 \cdot \sqrt[h-1]{m}$ positive Zahlen enthalten, wo die $c_i > 0$ nur von h (aber nicht von m) abhängen[11]). Es gibt nun ein f(h) so, daß für $m \geqslant f(h)$ die Ungleichung $c_1 \cdot \sqrt[h]{m} < c_2 \cdot \sqrt[h-1]{m}$ gilt.

Korollar zu (3): *Für* $m \geqslant f(h)$ *gibt es eine Minimalbasis* (d); *die Vermutung* 1 *ist also für* $m \geqslant f(h)$ *richtig.*

Man könnte glauben, daß bereits f(h) = h das in (3) Verlangte leistet; das ist jedoch falsch, wie die folgenden Beispiele zeigen: {0, 1, 2} und {0, 1, 3} sind Minimalbasen dritter Ordnung für 4, aber keine Basen genau dritter Ordnung für 4 (aber Vermutung 1 wird durch diese Beispiele nicht widerlegt, denn {0, 1, 4} ist eine Minimalbasis (d) genau dritter Ordnung für 4.)".

Verzeichnis der wissenschaftlichen Publikationen von Herrn Stöhr[12])

[1] Über Zerlegungen von Rechtecken in inkongruente Quadrate. Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin **4** (1939) 119–140 (Diss.); (Zbl. **20**, 51; F. d. M. **65**, 178)

[2] Aufgabe 224 (gestellt im Jber. d. Dt. Math.-Verein. **46** (1936) 46 kursiv. Lösung: Jber. d. Dt. Math.-Verein. **48**, 49 kursiv) (F. d. M. **64**, 49)

[3] Eine Basis h-ter Ordnung für die Menge aller natürlichen Zahlen. Math. Z. **42** (1937) 739–743; (Zbl. **16**, 348; F. d. M. **63**, 129)

[4] Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie, I. Mittlere Ordnung. J. f. d. reine angew. Math. **183** (1941) 168–174; (Zbl. **25**, 25; M.R. **4**, 241; F. d. M. **67**, 123)

[5] Mehrdimensionale Darstellungen als Hilfsmittel in der anthropometrischen Habitusdiagnostik. Z. f. Menschliche Vererbungs- und Konstitutionslehre **25** (1941) 351–354

[6] Anzahlabschätzung einer bekannten Basis h-ter Ordnung. Math. Z. **47** (1942) 778–787; (Zbl. **26**, 202; M. R. **7**, 507; F. d. M. **68**, 77). Berichtigung zu Band 47 (A. Stöhr: Anzahlabschätzung einer bekannten Basis h-ter Ordnung, S. 778–787). Math. Z. **48** (1943) 792; (Zbl. **28**, 10)

[7] Über zweifach geordnete Mengen und Zerlegungen in Rechtecke, I. J. f. d. reine angew. Math. **184** (1942) 138–157; (Zbl. **26**, 389; M. R. **5**, 226)

[8] Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie, II. Eine Modifikation des Dichtebegriffs. J. f. d. reine angew. Math. **185** (1943) 56–62; (Zbl. **27**, 296; M. R. **5**, 201)

[10]) Siehe [3].
[11]) Siehe [22], 42.
[12]) In Klammern sind jeweils die Referate im Zentralblatt für Mathematik (Zbl.), den Mathematical Reviews (M.R.) und dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (F.d.M.) zitiert.

[9] Oszillationstheoreme für die Eigenvektoren spezieller Matrizen. J. f. d. reine angew. Math. **185** (1943) 129–143; (Zbl. **28**, 197; M. R. **6**, 199)
[10] Über einige lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, I. Allgemeiner Teil. Math. Nachr. **3** (1950) 208–242; (Zbl. **38**, 241; M. R. **12**, 711)
[11] Über einige lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, II. Erstes Beispiel: Der Operator $\nabla\phi(y_1, y_2) = \phi(y_1 + 1, y_2) + \phi(y_1 - 1, y_2) + \phi(y_1, y_2 + 1) + \phi(y_1, y_2 - 1) - 4\kappa\phi(y_1, y_2)$ mit $\kappa > 1$. Math. Nachr. **3** (1950) 295–315; (Zbl. **39**, 91; M. R. **12**, 711)
[12] Über einige lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, III. Zweites Beispiel: Der Operator $\nabla\phi(y_1, y_2) = \phi(y_1 + 1, y_2) + \phi(y_1 - 1, y_2) + \phi(y_1, y_2 + 1) + \phi(y_1, y_2 - 1) - 4\phi(y_1, y_2)$, Math. Nachr. **3** (1950) 330–357; (Zbl. **39**, 308; M. R. **12**, 711)
[13] Über die Differentialgleichungen eines dynamischen Weltmodells, I. Math. Nachr. **6** (1951) 71–88; (Zbl. **45**, 287; M. R. **13**, 746)
[14] Zur approximativen Lösung linearer homogener Differentialgleichungssysteme. Math. Nachr. **6** (1951) 97–102; (Zbl. **43**, 335; M. R. **13**, 589)
[15] Über einen integralartigen Grenzübergang bei Kettenbrüchen. Math. Nachr. **6** (1951) 103–107; (Zbl. **44**, 56; M. R. **14**, 24)
[16] Über die Differentialgleichungen eines dynamischen Weltmodells, II. Math. Nachr. **7** (1952) 339–357; (Zbl. **48**, 238; M. R. **14**, 277)
[17] Bemerkungen über Kettenbruchintegrale. Math. Nachr. **8** (1952) 157–165; (Zbl. **47**, 294; M. R. **14**, 855)
[18] Über gewisse nicht notwendig lineare (n + 1)-Pole. Arch. elektr. Übertragung **7** (1953) 546–548; (Zbl. **51**, 430; M. R. **15**, 377)
[19] Mehrfach zusammenhängende Polyedernetze. Math.-naturw. Unterricht **6** (1953) 65–66
[20] Eine Formel für gewisse symmetrische Polynome. Acta Sci. math. **15** (1954) 209–210; (Zbl. **56**, 17; M. R. **16**, 328)
[21] Zerlegung von Flächen vom Geschlecht eins in ähnliche Rechtecke. Proc. of the Internat. Math. Congr. Amsterdam 1954, 256–258 (1954)
[22] Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe, I, II. J. f. d. reine angew. Math. **194** (1955) 40–65; 111–140; (Zbl. **66**, 31; M. R. **17**, 713)
[23] Neuer Beweis einer Formel über das reelle arithmetisch-geometrische Mittel. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **58** (1956) 73–79; (Zbl. **70**, 289; M. R. **18**, 712)
[24] Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie, III. Vereinfachter Beweis eines Satzes von A. Brauer. J. f. d. reine angew. Math. **195** (1956) 172–174; (Zbl. **65**, 275; M. R. **17**, 946)
[25] Zur Funktionentheorie im Raum der symmetrischen Matrizen. Math. Z. **63** (1956) 464–477; (Zbl. **70**, 76; M. R. **17**, 726)
[26] Über die Anzahl der Wege in einem gewissen Straßennetz. Math. Z. **68** (1957) 77–81; (Zbl. **78**, 9; M. R. **19**, 1040; 1432)
[27] mit L. Rédei: Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie. Acta Sci. math. **15** (1953) 7–11; (Zbl. **51**, 257; M. R. **15**, 853)
[28] mit H. Klöter: Wesentliche Komponenten und asymptotische Dichte. J. f. d. reine angew. Math. **194** (1955) 210–217; (Zbl. **64**, 281; M. R. **17**, 13)
[29] mit E. Wirsing: Beispiele von wesentlichen Komponenten, die keine Basen sind. J. f. d. reine angew. Math. **196** (1956) 96–98; (Zbl. **71**, 39; M. R. **19**, 122)

Schließlich sei auch die wissenschaftliche Bearbeitung der deutschen Ausgabe des Buches Gantmacher, F. R.; Krein, M. G.: Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme. Berlin: Akademie-Verlag 1960, durch Herrn Stöhr erwähnt sowie seine Mitarbeit am Mathematischen Wörterbuch von Naas, J.; Schmid, H. L.: (Berlin – Stuttgart: Akademie-Verlag – Teubner 1961).

Prof. Dr. Erich Härtter
Lehrstuhl Statistik II
Fachbereich 03
Johannes Gutenberg-Universität
6500 Mainz

(*Eingegangen: 23. 6. 80*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
83 (1981) 169–181

In Memoriam Friedrich Karl Schmidt

E. Kunz, Regensburg und H.-J. Nastold, Münster*)

Friedrich Karl Schmidt wurde am 22. September 1901 in Düsseldorf geboren. Er besuchte die Schule seiner Heimatstadt bis 1920. Schon damals fesselte ihn besonders die Mathematik, doch zog ihn auch die Beschäftigung mit der Philosophie stark an. Bei Beginn seines Studiums, 1920 in Freiburg, schwankte er noch zwischen diesen beiden Fächern. Unter dem Einfluß von Lothar Heffter entschied er sich jedoch rasch für die Mathematik und studierte in der Folgezeit Mathematik und Physik, aber auch Philosophie, in Freiburg, Marburg und danach wieder in Freiburg. Dort promovierte er 1925 mit einer Arbeit über „Allgemeine Körper im Gebiet höherer Kongruenzen" bei Friedrich Loewy (vgl. Handschriftprobe). Angeregt durch den engen wissenschaftlichen und persönlichen Kontakt mit Helmut Hasse und Wolfgang Krull, der damals als junger Privatdozent in Freiburg wirkte, entstand in rascher Folge eine Reihe wichtiger Arbeiten, vornehmlich zur Theorie der algebraischen Funktionenkörper einer Variablen, zur algebraischen Zahlentheorie und zur Bewertungstheorie.

Im Herbst 1926 ging F. K. Schmidt als Assistent nach Erlangen, wo er sich 1927 habilitierte und wo er eine Zeit ungestörter und befriedigender wissenschaftlicher Arbeit erleben durfte. Er heiratete im Sommer 1927 Josefine Baumann, selbst Mathematikerin und frühere Studienkollegin in Freiburg. Aus der Ehe gingen die vier Kinder Christa, Ursula, Elmar und Hanno hervor, von denen Christa und Elmar später ebenfalls Mathematik studierten.

Im Oktober 1933 wurde F. K. Schmidt von Hermann Weyl als sein Vertreter nach Göttingen geholt, kurze Zeit bevor dieser nach Amerika auswanderte. In

*) Wir danken allen Kollegen, die uns bei der Abfassung dieses Nachrufs beraten und unterstützt haben.

0012–0456/81/04 0169–013 $ 02.60/0

Göttingen fand F. K. Schmidt ein großartiges Wirkungsfeld, doch kam es schon bald zum Konflikt mit den Nationalsozialisten, vornehmlich wegen der von ihm weiter gepflegten Beziehungen zu den nun geächteten jüdischen Kollegen. So mußte er nach einem Jahr Göttingen wieder verlassen, wurde jedoch im Oktober 1934 als Ordinarius nach Jena berufen. Auch hier dauerten seine Konflikte mit der Partei weiterhin fort. F. K. Schmidt war Nachfolger von Richard Courant als Herausgeber der mathematischen Werke des Springer-Verlags geworden und hatte Bücher emigrierter jüdischer Autoren herausgebracht. Auch weigerte er sich, seine Treue zur katholischen Kirche zu verleugnen. Dies führte zu seiner schrittweisen Kaltstellung als Institutsdirektor und der Entlassung aus dem Prüfungsausschuß der Universität. Er gab daher 1941 seine Lehrtätigkeit in Jena auf und wurde Mitarbeiter der Deutschen Forschungsanstalt für Segelflug in Ainringen bei Bad Reichenhall, wohin er mit seiner Familie übersiedelte.

Nach dem Ende des Krieges kehrte F. K. Schmidt im November 1945 wieder auf seine alte Stelle nach Jena zurück, folgte dann aber im Herbst 1946 einer Berufung nach Münster. Einen Ruf an die Humboldt-Universität Berlin, wo er einige Zeit als Gastprofessor tätig war, lehnte er ab, ebenso eine Berufung an die Universität Erlangen im Herbst 1948.

Zum Sommer-Semester 1952 nahm F. K. Schmidt einen Ruf nach Heidelberg an, der Stadt, in der er bis zu seinem Lebensende blieb. Er wirkte beim Ausbau der Mathematik, dem Neubau des Instituts im Neuenheimer Feld und in der naturwissenschaftlichen Fakultät mit großer Tatkraft bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1966 trotz wachsender Behinderung durch Krankheit. Seit 1954 war er Mitglied der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Die Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Freien Universität Berlin verlieh ihm 1968 die Ehrendoktorwürde

> „für seine bedeutenden Arbeiten auf dem Gebiet der algebraischen Zahlkörper und der algebraischen Funktionen, für seine Bemühungen um die Verbreitung mathematischer Forschung als langjähriger wissenschaftlicher Berater des Springer-Verlags Heidelberg, und
> für seine Hilfe nach dem Kriege, die Mathematik in Berlin auf einem hohen Niveau zu halten".

Nach dem Tode seiner ersten Frau im Jahre 1966 heiratete F. K. Schmidt 1968 Dr. Anna Bressau. Er setzte seine Vorlesungstätigkeit in Heidelberg auch nach der Emeritierung noch mehrere Jahre lang fort und nahm am Institutsleben regen Anteil. F. K. Schmidt starb am 25. Januar 1977, wenige Monate nach der Vollendung seines 75. Lebensjahres.

Ein Überblick über das wissenschaftliche Werk von F. K. Schmidt soll weiter unten gegeben werden. Zuvor möchten wir einige Worte über seine Persönlichkeit und zu seinen Vorlesungen sagen.

F. K. Schmidt wird allen, die ihn näher gekannt haben, als liebenswerter Mensch in dankbarer Erinnerung bleiben. Sein rheinisches Temperament, sein Humor – gepaart mit einem Schuß Ironie –, seine spontane Hilfsbereitschaft und seine ausgesuchte Höflichkeit gewannen ihm viele Freunde. Wie nur wenige Menschen war er begeisterungsfähig und wußte genauso zu begeistern. Seine Professoren-Kollegen, wie seine Mitarbeiter und Studenten sprachen von ihm stets als „FK", ohne daß sich hierin jedoch Respektlosigkeit äußerte.

Allgemeine Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen.

Einleitung:

Die Theorie der höheren Kongruenzen, d. h. die Untersuchung aller ganzen rationalen Funktionen einer Veränderlichen t mit Koeffizienten modulo einer Primzahl p, ist nach verschiedenen Arbeiten von Gauss, Galois [7],[1] Serret [22] und Schönemann [21] zuerst von Dedekind [2] systematisch unter zahlentheoretischen Gesichtspunkten in Angriff genommen worden. Dabei ergab sich weitgehende Übereinstimmung zwischen den in diesem Ring geltenden Gesetzen und den bekannten Verhältnissen bei den ganzen rationalen Zahlen. Die Kenntnis des allgemeinen endlichen Körpers oder Galois-Feldes legte es nahe, als Koeffizienten der rationalen Funktionen in t auch Elemente aus einer beliebigen, endlichen Erweiterung des Restklassensystems nach p zuzulassen, und dies ist in Abhandlungen von Moore [19] und Dickson [5] in der Tat geschehen. Dagegen hat erst neuerdings, fast 70 Jahre nach Dedekind, Herr E. Artin [1] in anderer Weise eine bedeutsame Verallgemeinerung der Dedekindschen Betrachtungen vorgenommen, indem er die Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion adjungierte und den so erzeugten quadratischen Körper ins Auge faßte. Die Analogie mit den quadratischen Zahlkörpern

1) Die in eckigen Klammern [ ] stehenden Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schlusse dieser Arbeit.

Bei all seinen vielen Tätigkeiten liebte er es doch, im Hintergrund zu bleiben, um im Stillen um so mehr zu wirken. Dieter Puppe, Kollege von F. K. Schmidt in Heidelberg, würdigte ihn in seinem Nachruf in der Heidelberger Akademie so: „Ich habe sein weises Urteil kennengelernt, seine Energie beim Durchführen des als richtig Erkannten, sein Verantwortungsgefühl für die ihm anvertrauten Menschen und seine von Herzen kommende Höflichkeit, die er gegen jedermann übte".

Zu einem unvergeßlichen Erlebnis pflegten für seine Studenten die Vorlesungen F. K. Schmidts zu werden, die stets von vollendeter Form und bis ins kleinste Detail durchdacht waren. Mit seinem ungewöhnlichen Temperament und seiner sprachlichen Brillanz verstand er es, seine Hörer zu überzeugen und mitzureißen. Diese Vorlesungen fanden manchmal schon um sieben Uhr in der Frühe statt, waren aber immer gut besucht. Es ist vielleicht bemerkenswert, daß es außer einigen Vorlesungsausarbeitungen kein Buch von F. K. Schmidt gibt. Nie konnte das geschriebene Wort die Wirkung des gesprochenen Wortes bei ihm voll wiedergeben. Er hätte ein Manuskript, sobald es abgeschlossen war, wieder neu zu schreiben begonnen, weil es ihm nun nicht mehr gefiel.

Im folgenden wollen wir versuchen, einen Überblick über die wichtigsten mathematischen Resultate F. K. Schmidts zu geben und einige Entwicklungen anzudeuten, die sich an sie angeschlossen haben.

1 Algebraische Funktionenkörper einer Variablen ([1], [4], [8], [9], [14], [16], [19])

Diesem Gebiet entstammen die meisten Veröffentlichungen F. K. Schmidts. Beginnend mit seiner (von Krull angeregten) Dissertation [1] setzte sich F. K. Schmidt zum Ziel, die Theorie der algebraischen Funktionenkörper einer Variablen, die für Grundkörper der Charakteristik 0 von Dedekind und Weber [DW] rein arithmetisch begründet worden war, so auszubauen, daß sie über beliebigem Grundkörper gültig bleibt. Dabei ging es zunächst um die Übertragung zahlentheoretischer Tatbestände auf Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper (Idealtheorie, Diskriminantentheorie, Einheitensatz, Endlichkeit der Klassenzahl), was auf Grund Dedekindscher Gedanken ohne größere Schwierigkeit möglich war, dann um das Auffinden der Analoga funktionentheoretischer Ergebnisse (Riemann-Rochscher Satz, Theorie der Weierstraßpunkte) bei beliebigem Grundkörper.

Der *Riemann-Rochsche Satz* für Funktionenkörper einer Variablen über vollkommenem Konstantenkörper wurde zuerst in [8] bewiesen und für die Theorie der Kongruenz-Zetafunktion nutzbar gemacht. Der allgemeine Beweis für beliebigen Grundkörper erfolgte in [16]. Einen anderen Beweis gab auch A. Weil [W_1] etwa zur gleichen Zeit. In beiden Fällen handelt es sich (in der Sprache der algebraischen Geometrie) um den Riemann-Rochschen Satz für singularitätenfreie algebraische Kurven über beliebigem Grundkörper. Der Standpunkt der Kurventheorie (der heute dieses Gebiet beherrscht) wurde allerdings im Gegensatz zu A. Weil von F. K. Schmidt nirgends explizit eingenommen, er behandelte Funktionenkörper stets auf idealtheoretischer oder bewertungstheoretischer Grundlage. Seine Bestrebungen, die algebraische Funktionentheorie möglichst über beliebigem Grundkörper aufzubauen, „um das Wesentliche der Schlüsse klar hervortreten zu lassen“ haben jedoch zweifellos den Trend hin zur abstrakten algebraischen Geometrie gefördert. Im Zusammenhang mit dem Riemann-Rochschen Satz führte die weitere Entwicklung zur Verallgemeinerung des Satzes auf Kurven mit Singularitäten durch Rosenlicht [R], dann zum Riemann-Rochschen Satz von Grothendieck ([BS]) für singularitätenfreie projektive Varietäten beliebiger Dimension und in jüngerer Zeit zur Behandlung des singulären Falles ([G], [F]).

Die Übertragung von Ergebnissen der komplexen Funktionentheorie auf algebraische Funktionenkörper über beliebigem Konstantenkörper war nicht immer so unmittelbar möglich, wie das für zahlentheoretische Sätze der Fall war, z. B. weil die Differentialrechnung in Körpern der Charakteristik $p > 0$ nicht in der gewohnten Weise zur Verfügung steht und wegen des Auftretens inseparabler Körpererweiterungen. Hier mußte F. K. Schmidt oft wesentlich neue Methoden entwickeln. So war es zunächst nicht klar, was das „richtige“ Analogon zum Begriff des *Weierstraßpunkts* in Körpern der Charakteristik $p > 0$ ist. Es gelang F. K. Schmidt jedoch ([19]), eine befriedigende Theorie der Weierstraßpunkte für Funktionenkörper über beliebigem Grundkörper aufzubauen, die analoge Ergebnisse wie die klassische Theorie enthält und in die sie durch Spezialisierung übergeht. Er definierte einfach einen Punkt x einer projektiven algebraischen Kurve als Weierstraßpunkt, wenn es nur endlich viele Punkte der Kurve gibt, deren Polordnungshalbgruppe mit der von x übereinstimmt. Es gibt dann nur endlich viele Weierstraßpunkte und diese können mit einer verallgemeinerten Wronski-Determinante berechnet werden. Als Anwendung dieser Theorie bewies H. L. Schmid [Sch] die Endlichkeit der Automorphismengruppe beliebiger Funktionenkörper des Geschlechts >1 mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper.

2 Zeta-Funktionen ([4], [8])

Das Analogon zur Riemannschen Zetafunktion in algebraischen Funktionenkörpern war zuerst von E. Artin [A] im Fall quadratischer Erweiterungen des rationalen Funktionenkörpers einer Variablen über endlichem Grundkörper eingeführt und untersucht worden. In der Arbeit [8], einem Teil seiner Habilitationsschrift, verallgemeinerte F. K. Schmidt die Artinschen Resultate auf den Fall beliebiger Funktionenkörper K einer Variablen über endlichem Konstantenkörper k, wobei gleichzeitig wesentliche Vereinfachungen erzielt wurden. Diese beruhten darauf, daß F. K. Schmidt die Zetafunktion von K/k durch $\zeta(z) = \Pi \frac{1}{1 - |\mathfrak{p}|^{-z}}$ definierte, wobei $\mathfrak{p}$ *alle* Primstellen des Funktionenkörpers (also auch die unendlich fernen bzgl. einer Transzendenten von K über k) durchläuft (und $|\mathfrak{p}|$ die Elementezahl des Restklassenkörpers von $\mathfrak{p}$ ist). Mit andern Worten: Die Zetafunktion wurde für das singularitätenfreie projektive Modell des Funktionenkörpers K/k definiert. Es ergab sich dann die bemerkenswerte Tatsache, daß sich die wichtigsten Grundeigenschaften der Zetafunktion direkt aus dem Riemann-Rochschen Satz herleiten lassen, z. B. daß ζ eine rationale Funktion in q^z (q = Elementezahl von k) ist, ferner die Funktionalgleichung $\zeta(1-z) = q^{(g-1)(2z-1)}\zeta(z)$, wo g das Geschlecht des Funktionenkörpers ist. In derselben Arbeit gibt F. K. Schmidt auch einen eleganten Beweis mit Hilfe der Zetafunktion für die Existenz von Divisorenklassen beliebigen Grades in den betrachteten Funktionenkörpern.

Die Untersuchung der Zetafunktion einer projektiven algebraischen Kurve X, die über einem endlichen Körper definiert ist, ist bedeutsam für die Frage nach der Anzahl der Punkte von X mit Koordinaten in den endlichen Erweiterungskörpern von k. Abschätzungen der Anzahl dieser Punkte führten zu dem Problem, ob das Analogon der Riemannschen Vermutung für die Kongruenzzetafunktion richtig ist. Dies wurde zunächst im Fall elliptischer Funktionenkörper von Hasse [H_1] bestätigt, dann im allgemeinen Fall durch A. Weil ([W_2], [W_3]).

Auch hier ist die Entwicklung mittlerweile zum höherdimensionalen Fall fortgeschritten. Das Studium der Zetafunktion für singularitätenfreie projektive Varietäten, die über endlichen Körpern definiert sind, führte zu den Weilschen Vermutungen und – als einer der großen Leistungen der Mathematik der Gegenwart – zu deren Beweis durch Deligne [D]. In seinem Bericht über die Weil-Vermutungen [Di], bezeichnet J. Dieudonné F. K. Schmidt neben E. Artin, H. Hasse, A. Weil,

A. Grothendieck und P. Deligne als einen der Mathematiker, deren Ideen zum Beweis dieser Vermutungen geführt haben.

3 **Klassenkörpertheorie** ([7], [9], [14])

Die Arbeit [9] (der zweite Teil der Habilitationsschrift) enthält die Übersetzung der Klassenkörpertheorie auf den Fall algebraischer Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper. Die Übertragung erfolgt in enger Anlehnung an die zahlentheoretischen Schlußweisen von Takagi und Hasse [H_2], wobei wieder die Divisorenklassengruppe des Funktionenkörpers an die Stelle der Idealklassengruppe tritt. Als wichtigste Modifikation gegenüber der Zahlentheorie erfolgt die Summation der L-Reihen nach dem Muster von [8] mit Hilfe des Riemann-Rochschen-Satzes. Die moderne Entwicklung hat die Klassenkörpertheorie algebraischer Funktionenkörper eingebettet in die Theorie der algebraischen Kurven und ihrer verallgemeinerten Jacobischer Varietäten (siehe z. B. Serre [S]).

Ebenfalls durch Fragestellungen der Klassenkörpertheorie motiviert ist die Abhandlung [14]. Ist K ein separabel erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über einem beliebigen Konstantenkörper k und L/K eine endliche separabel algebraische Erweiterung, so wird der Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(L)$ von L in K definiert als die Menge aller Primdivisoren von K, die in L in lauter verschiedene Primdivisoren zerfallen und unter denen mindestens einer vom Relativgrad 1 über K ist. Es wird die Frage behandelt, ob analog zur Zahlentheorie eine galoissche Erweiterung L/K durch $\mathfrak{R}(L)$ schon eindeutig festgelegt ist. Dies wird bewiesen im Fall, daß über dem Konstantenkörper k der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt, was folgendes heißen soll: Für ein irreduzibles Polynom $f \in k[X_1, \ldots, X_n, X]$ mit Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$, X soll es unendlich viele $(x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ geben, so daß f irreduzibel bleibt, wenn man X_i zu x_i spezialisiert.

Unter derselben Voraussetzung über k wird ferner gezeigt, daß auch zwei weitere Sätze der Zahlentheorie Analoga in Funktionenkörpern über k besitzen:
1. (*Bauerscher Satz*) Ist L/K galoissch und L′/K eine beliebige endliche separabel algebraische Erweiterung, so gilt $L \subset L'$ genau dann, wenn bis auf endlich viele Ausnahmen alle Primdivisoren aus $\mathfrak{R}(L')$ auch zu $\mathfrak{R}(L)$ gehören.
2. (*Frobeniusscher Existenzsatz*) Ist L/K galoissch, so gibt es zu jeder Untergruppe G der Galoisgruppe von L/K unendlich viele Primdivisoren von L, deren Zerlegungsgruppe mit G übereinstimmt.

Die Beweise sind wesentlich einfacher als im Zahlkörperfall. In der Hauptsache ist 2 zu beweisen. Die Konstruktion der in Frage stehenden Menge von Primdivisoren benutzt als wesentlichstes Hilfsmittel den Irreduzibilitätssatz.

Der lokalen Klassenkörpertheorie ist die Arbeit [7] gewidmet. Von Hasse waren in [H_3] die Hauptsätze der lokalen Klassenkörpertheorie (für $\mathfrak{p}$-adische Zahlkörper) formuliert und teilweise bewiesen worden. Es gelingt F. K. Schmidt in [7], die von Hasse übrig gelassenen Lücken auszufüllen und damit die Begründung der lokalen Klassenkörpertheorie abzuschließen. Insbesondere wird erstmals der *Existenzsatz der lokalen Klassenkörpertheorie* bewiesen: Ist k ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper und H eine Untergruppe von $k^{\times}$, die nicht nur aus Einheiten besteht und für die es ein s $\in \mathbf{N}$ gibt, so daß alle Elemente $x \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^s$ zu H gehören, so gibt es einen (und nur einen) abelschen Erweiterungskörper K/k, so daß H die Menge der Normen der Elemente aus K^x ist.

Der Beweis erfolgt noch im Umweg über die globale Klassenkörpertheorie. Man hat heute einfachere Beweise und es ist allgemein üblich und nützlich, die lokale Klassenkörpertheorie der globalen voranzustellen. Im Verlauf des Beweises für den Existenzsatz wird der folgende *Einheitensatz* für endlich algebraische Zahlkörper k gezeigt: Zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ gibt es unendlich viele zu einer weiteren gegebenen natürlichen Zahl prime Zahlen m, so daß jede Einheit ϵ von k mit $\epsilon \equiv 1 \bmod m$ eine n-te Potenz ist. Dieser Satz wurde später von Chevalley [C] wiederentdeckt und verallgemeinert; er spielt in der globalen Klassenkörpertheorie eine wichtige Rolle (vgl. [J]).

4 **Bewertungstheorie** ([10], [12], [13])

In der schönen Arbeit [12], die in ihrem Stil der Vortragsweise F. K. Schmidts in seinen Vorlesungen vielleicht am ähnlichsten ist, werden folgende Sätze bewiesen: 1. Ein Körper ist genau dann bzgl. zweier inäquivalenter Rang-1-Bewertungen komplett (= perfekt), wenn er algebraisch abgeschlossen ist und seine Kardinalität κ der Gleichung $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ genügt. 2. Es gibt dann genau 2^κ inäquivalente Bewertungen, hinsichtlich deren er komplett ist, und ebenso viele inäquivalente Bewertungen, hinsichtlich deren er nicht komplett ist. 3. Ist ein Körper K für eine diskrete Bewertung komplett, so ist diese bis auf Äquivalenz die einzige nichttriviale diskrete Bewertung von K und K ist nicht komplett hinsichtlich einer weiteren Bewertung.

Die Haupthilfsmittel zum Beweis dieser Sätze sind Mächtigkeitsaussagen aus der vorhergehenden Arbeit [10] über die Dichte metrischer Räume und Varianten des Henselschen Lemmas. Ähnlich wie das Henselsche Lemma selbst, ist die Aussage, daß ein Körper algebraisch abgeschlossen ist, sofern er bzgl. zweier inäquivalenter Bewertungen komplett ist, zu einem Standardschluß in zahlentheoretischen und bewertungstheoretischen Untersuchungen geworden.

Die Aussage 3 besitzt eine Analogon für reduzierte komplette lokale Ringe und reduzierte analytische Algebren, das für die Theorie dieser Ringe von Bedeutung ist (vgl. [BKKN], 2.3 und [KPR], 2.4).

In der mit H. Hasse gemeinsam verfaßten Arbeit [13] wird die Struktur der kompletten diskreten Bewertungsringe bestimmt. Die Hauptsätze der Arbeit lauten: 1. Ein kompletter diskreter Bewertungsring, der die gleiche Charakteristik besitzt wie sein Restklassenkörper k, ist isomorph zum Ring $k[\![x]\!]$ der formalen Potenzreihen in einer Variablen x über k. 2. Zu jedem Körper k der Charakteristik $p > 0$ gibt es einen und bis auf Isomorphie nur einen kompletten diskreten Bewertungsring R der Charakteristik 0 mit folgenden Eigenschaften: a) k ist isomorph zum Restklassenkörper von R. b) Das maximale Ideal von R wird von p erzeugt. 3. Ist R ein kompletter diskreter Bewertungsring der Charakteristik 0, $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal und ist der Restklassenkörper von R von der Charakteristik $p > 0$, so gibt es einen kompletten diskreten Bewertungsring $R_0 \subset R$ mit folgenden Eigenschaften: a) R_0 besitzt denselben Restklassenkörper wie R. b) Das maximale Ideal von R_0 wird von p erzeugt. c) R ist eine Eisensteinerweiterung vom Grad n von R_0, wobei n durch $pR = \mathfrak{m}^n$ definiert ist.

Die Beweise dieser Aussagen sind für heutige Verhältnisse teilweise etwas kompliziert, da die Theorie unendlicher Körpererweiterungen zu der Zeit, als die Arbeit geschrieben wurde, noch nicht weit genug entwickelt war. So war z. B. der Satz noch nicht bekannt, daß jede Erweiterung eines vollkommenen Körpers separabel ist. Gerade die in der Arbeit auftretenden Schwierigkeiten waren für F. K. Schmidt und andere (z. B. MacLane [ML]) ein Anlaß, sich mit der Strukturtheorie beliebiger Körpererweiterungen zu befassen.

Die Sätze von Hasse und F. K. Schmidt über komplette diskrete Bewertungsringe wurden später durch Cohen [Co] auf den Fall kompletter noetherscher lokaler Ringe verallgemeinert. Die Cohenschen Struktursätze gehören heute zu den wichtigsten Grundlagen der lokalen Algebra.

5 Galoistheorie und algebraische Gleichungen ([2], [3], [6], [11], [22])

Von den Arbeiten F. K. Schmidts zur Galoistheorie hat vor allem [11] die Aufmerksamkeit der Zahlentheoretiker auf sich gezogen. Sie schließt an die bewertungstheoretische Arbeit [12] an und enthält als Hauptsatz das folgede Ergebnis (das auch für allgemeinere als Zahlenkörper ausgesprochen wird): Ist N eine normale Erweiterung des Körpers $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen und ist jede algebraische Gleichung mit Koeffizienten aus N durch Radikale auflösbar, dann ist N der Körper $\overline{\mathbf{Q}}$ aller algebraischen Zahlen. Äquivalent damit ist, daß die absolute Galoisgruppe $G(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ keinen abgeschlossenen auflösbaren Normalteiler besitzt. In dieser Form kommt das Ergebnis gelegentlich in der Strukturtheorie der Galoisgruppen zur Anwendung (vgl. etwa [N_1]). Das Problem, eine Übersicht zu geben, über die auflösbaren abgeschlossenen Untergruppen von $G(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, oder äquivalent damit, über die nicht notwendig normalen Zahlkörper, über denen jede Gleichung durch Radikale auflösbar ist, ist von Neukirch [N_2] und Geyer [Ge] weiterverfolgt worden.

Die gemeinsam mit G. Preuss verfaßte Arbeit [22] gibt eine große Klasse von Körpern an, über denen der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt*). Die Körperklasse wird axiomatisch durch bewertungstheoretische Eigenschaften beschrieben und sie enthält viele der damals bekannten Fälle für die Gültigkeit des Irreduzibilitätssatzes. Darüber hinaus werden erstmalig Beispiele für *unendliche* algebraische Zahlkörper angegeben, die hilbertsch sind. Für einen Körper K heißt eine Menge H von Primdivisoren von K eine Hauptmenge, wenn $\mathcal{O}_H = \bigcap_{p \in H} \mathcal{O}_p$ eine Halbordnung von K ist. Dabei ist $\mathcal{O}_p := \{x \in K \mid |x|_p \leqslant 1\}$ und es wird eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset K$ eine Halbordnung genannt, wenn sie 0,1,-1 enthält, multiplikativ abgeschlossen ist, jedes $x \in K$ als Quotient zweier Elemente aus $\mathcal{O}$ geschrieben werden kann und ein $z \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ mit $z(\mathcal{O}+\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ existiert. Eine Hauptmenge H von K heißt endlich ergänzbar, wenn es

*) Die Arbeit enthält einen Fehler: Der zweite Teil von Bemerkung 4 auf S. 359 läßt sich nicht aufrecht erhalten. Jedoch kann man bei etwas größerer Vorsicht darauf verzichten, die Bemerkung zu benutzen.

Primdivisoren $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ von K gibt, so daß für $H' := H \cup \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t\}$ gilt: Für $x \in \mathcal{O}_{H'} \setminus \{0\}$ ist auch $x^{-1} \in \mathcal{O}_{H'}$. Das Hauptergebnis der Arbeit lautet: Über jedem Körper K, der eine endlich ergänzbare Hauptmenge von Primdivisoren besitzt, gilt der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz für separable Polynome. Genau dann gilt er auch für inseparable Polynome, wenn K unvollkommen ist. Angeregt durch die Axiomatik in [22] hat neuerdings Weissauer [W] allgemeinere arithmetische Kriterien für Hilbertsche Körper angegeben.

6 **Allgemeine Körper- und Ringtheorie** ([1], [5], [15], [20])

Mit der Frage nach der Struktur beliebiger Körpererweiterungen (insbes. inseparabler, nicht notwendig endlich erzeugter) hat sich F. K. Schmidt immer wieder beschäftigt. Ein frühes Resultat aus diesem Gebiet ist der Satz aus der Dissertation [1], daß jeder algebraische Funktionenkörper einer Variablen über einem vollkommenen Konstantenkörper eine separierende Transzendente besitzt. Verallgemeinerungen und Varianten hiervon wurden u. a. durch MacLane [ML] und in der gemeinsamen Arbeit [20] von F. K. Schmidt und MacLane gegeben.

Für die algebraische Geometrie wichtig wurde der Satz aus [15], daß für jede nullteilerfreie affine Algebra A über einem beliebigen Körper k die ganze Abschließung $\bar{A}$ von A in einer endlich algebraischen Erweiterung des Quotientenkörpers von A ein endlich erzeugter A-Modul ist, also wieder eine affine k-Algebra. Aus diesem Satz ergab sich, daß die von Zariski gegebene Konstruktion der *Normalisierung einer affinen oder projektiven Varietät* auch bei beliebigem Grundkörper durchgeführt werden kann (vgl. [Z]). In derselben Arbeit gab F. K. Schmidt auch ein raffiniertes Beispiel eines diskreten Bewertungsrings R, dessen ganze Abschließung $\bar{R}$ in einer endlich algebraischen (inseparablen) Erweiterung des Quotientenkörpers *kein* endlich erzeugter R-Modul ist, also ein Beispiel für einen diskreten Bewertungsring, der (in der Terminologie von Grothendieck) nicht *japanisch* ist. Nagata (vgl. [N]) hat die in der Arbeit [15] angeschnittenen Fragen später systematisch weiterverfolgt; ihm zu Ehren wurde von Grothendieck die obige Bezeichnung eingeführt. Die japanischen Ringe umfassen die engere Klasse der (nach Grothendieck) *exzellenten Ringe* (also der Ringe mit „nur guten Eigenschaften"), über die Nagata wesentliche Resultate bewiesen hat und denen auch gegenwärtig noch zahlreiche Veröffentlichungen gewidmet sind.

7 **Derivationen und Differentiale** ([17], [18], [23])

Die Untersuchung algebraischer Funktionenkörper der Charakteristik $p > 0$ führte naturgemäß zu der Frage nach einem Ersatz für die bei Charakteristik 0 gebräuchlichen Differentiationsverfahren, die im allgemeinen Fall ihre Gültigkeit verlieren. In Zusammenarbeit mit Hasse wurde in [17] eine Theorie der „höheren Differentialquotienten" in beliebigen Körpern K entwickelt. Ausgangspunkt ist der Begriff der iterativen Derivation D von K: D ist eine Folge $\{D^\nu\}_{\nu \in N}$ von Abbildungen $D^\nu : K \to K$, welche der Summenregel $D^\nu(x + y) = D^\nu x + D^\nu y$, der Produktregel

$D^\nu(xy) = \sum_{\rho+\sigma=\nu} D^\rho(x)\, D^\sigma(y)$ und der Iterationsregel $D^\mu(D^\nu(x)) = \binom{\mu+\nu}{\mu} D^{\mu+\nu}x$ genügt. Die übliche für Ableitungen gültige Iterationsregel ist durch Hinzufügung eines Binomialkoeffizienten verändert, wodurch verhindert wird, daß p-te Ableitungen bei Char. $p > 0$ verschwinden und wodurch sich natürlich auch die Produktregel verändert. Es zeigte sich, daß diese Derivationen für viele Zwecke in Funktionenkörpern dieselben Dienste tun wie die üblichen höheren Ableitungen bei Charakteristik 0. Insbesondere lassen sich Wronskische Determinanten ([18]) mit ähnlichen Eigenschaften wie in Charakteristik 0 einführen, was für die Theorie der Weierstraßpunkte wichtig ist. Als *Hasse-Schmidt-Derivationen* werden die oben beschriebenen Differentiationen gelegentlich noch verwendet.

Es ist heute in der algebraischen Geometrie gebräuchlicher, von Kähler-Differentialen auszugehen. Diese wurden von Kähler in [Kä] eingeführt, sie sind heute als das adäquate algebraische Analogon zum analytischen Begriff des Differentials anerkannt. In seinen Heidelberger Jahren beschäftigte sich F. K. Schmidt in seinen Seminaren und in Vorträgen viel mit den Kählerschen Differentialmoduln, er hat aber außer dem ausführlichen Referat [23] nichts mehr hierüber veröffentlicht. Jedoch sind viele seiner Ideen in die Arbeiten seiner Schüler eingegangen.

Nach 1945 hat F. K. Schmidt nur noch wenig veröffentlicht. Er vermittelte seine Erkenntnisse meist in Kolloquiums-Vorträgen, in seinen Seminaren und in privaten Diskussionen mit seinen Schülern. In dieser Zeit interessierte er sich u. a. für die folgenden Themen: Charakterisierung von Bewertungstopologien auf Körpern, Kähler-Differentiale ([23]) und (an [17] und [18] anschließend) die Theorie der höheren Differentiale. Viele seiner Ideen und Anregungen wurden von seinen Schülern aufgegriffen und weiterverfolgt, z. B. in den Arbeiten [KD], [Dü], [B_1], [B_2], [B_3], [Ku_1], [Ku_2], [Na] und [Hi].

Das Wirken von F. K. Schmidt als Forscher wird durch seine Publikationen nicht vollständig dokumentiert. So finden sich auch in der Zeit vor 1945 mehrfach in Veröffentlichungen anderer Autoren Hinweise auf Ergebnisse von ihm, die nie gedruckt worden sind. Charakteristisch dafür ist vielleicht die Bemerkung Irving Kaplanskys in den „Selected Papers" von MacLane (Springer 1979), S. 522 f.: „. . . The introduction to I. Kaplansky, Maximal fields with valuations, Duke Math. J. 9 (1942), 303–321, should have recorded that Krull, Allgemeine Bewertungstheorie, J. f. Math. 167 (1932), pages 163 and 191, said that Schmidt had extensive unpublished results concerning maximal valuation rings. When I wrote my thesis it was impossible to check this out. I unfortunately let the matter slide for a long time, but I did finally write Schmidt on Jan. 8, 1971. There was a prompt and cordial reply dated Febr. 15, 1971, but unfortunately all it said was that he had quite forgotten and had no notes on this subject".

Bei der Würdigung des Gesamtwerks von F. K. Schmidt muß man auch die Eleganz und Klarheit seiner Schriften hervorheben, die hierin seinen vielgerühmten Vorlesungen kaum nachstehen. Einer schönen Theorie einen schönen Rahmen zu geben, glaubte er sich stets verpflichtet. Daß er fühlte, was in der Mathematik bedeutsam war, zeigt sich daran, daß so viele Zweige der Algebra und Zahlentheorie, an deren Begründung er wesentlichen Anteil hatte, sich später zur schönsten Blüte entwickelt haben.

Schriften von F. K. Schmidt

[1] Allgemeine Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen. Diss. Freiburg i. Br. 1925
[2] Verallgemeinerung eines von Herrn A. Loewy stammenden Reziprozitätssatzes über algebraische Gleichungen. Sitz.-ber. Heidelb. Akad. Wiss. 1925, 5. Abh.
[3] Bemerkungen zum Brandtschen Gruppoid. Sitz.-ber. Heidelb. Akad. Wiss. 1927, 8. Abh.
[4] Zur Zahlentheorie in Körper von der Charakteristik p. Sitz.-ber. phys. med. Soz. Erlangen **58/59** (1926/27) 159–172
[5] Über die Primidealzerlegung eines Hauptideals eines Integritätsbereichs. Sitz.-ber. bayr. Akad. Wiss. München 1928, 285–287
[6] Zur Theorie der algebraisch auflösbaren Polynome und Zahlkörper von Primzahlgrad. Sitz.-ber. Heidelb. Akad. Wiss. 1929, 2. Abh.
[7] Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen. J. f. d. reine angew. Math. **162** (1930) 155–168
[8] Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p. Math. Z. **33** (1931) 1–32
[9] Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Koeffizientenbereich. Sitz.-ber. phys. med. Soz. Erlangen **62** (1931) 267–284
[10] Über die Dichte metrischer Räume. Math. Ann. **106** (1932) 457–472
[11] Körper, über denen jede Gleichung durch Radikale auflösbar ist. Sitz.-ber. Heidelb. Akad. Wiss. 1933, 2. Abh.
[12] Mehrfach perfekte Körper. Math. Ann. **108** (1933) 1–25
[13] (zusammen mit H. Hasse) Die Struktur diskret bewerteter Körper. J. f. d. reine angew. Math. **170** (1933) 4–63
[14] Über die Kennzeichnung algebraischer Funktionenkörper durch ihren Regularitätsbereich. J. f. d. reine angew. Math. **171** (1934) 162–169
[15] Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen. Math. Z. **41** (1936) 443–450
[16] Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen I. Beweis des Riemann-Rochschen Satzes für algebraische Funktionen mit beliebigem Konstantenkörper. Math. Z. **41** (1936) 415–438
[17] (zusammen mit H. Hasse) Noch eine Begründung der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten. J. f. d. reine angew. Math. **177** (1937) 215–237
[17a] Berichtigung zur Arbeit: Noch eine Begründung . . . . J. f. d. reine angew. Math. **178** (1937) 128
[18] Die Wronskische Determinante in beliebigen differenzierbaren Funktionenkörpern. Math. Z. **45** (1939) 62–74
[19] Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper II. Allgemeine Theorie der Weierstraßpunkte. Math. Z. **45** (1939) 75–96
[20] (zusammen mit S. MacLane) The generation of inseparable fields. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **27** (1941) 583–587
[21] Neues über die Riemannsche Vermutung (Vortragsmanuskript). Sem. Ber. math. Sem. Münster 12, 1–18
[22] (zusammen mit G. Preuss) Über den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Math. Nachr. **4** (1951) 348–365
[23] Referat über: E. Kähler, Algebra und Differentialrechnung im Zbl. f. Math. **53** (1953) 20–23

Literaturhinweise

[DW] Dedekind; Weber: Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. J. f. d. reine angew. Math. **92** (1882) 181–290
[W_1] Weil, A.: Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen. J. f. d. reine angew. Math. **179** (1938) 129–133
[W_2] Weil, A.: Sur les fonction algébriques à corps de constantes finis. C. R. Acad. Sci. Paris **210** (1940) 592–594
[W_3] Weil, A.: Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. Paris: Hermann 1948

[R] Rosenlicht, M.: Equivalence Relations on Algebraic Curves. Ann. Math. **56** (1952) 169–191

[BS] Borel, A.; Serre, J.-P.: Le théorème de Riemann-Roch. Bull. Soc. Math. de France **86** (1958) 97–136

[G] Grothendieck, A. (mit Berthelot, P. u. Illusic, L.): Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1971. = Lecture Notes in Mathematics Vol. 225

[F] Fulton, W.: Riemann-Roch for singular varieties. In: Algebraic Geometry, Arcata 1974. AMS Proc. Symp. Pure Math. **29** (1975) 449–457

[Sch] Schmid, H. L.: Über die Automorphismen eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik. J. f. d. reine angew. Math. **179** (1938) 5–21

[A] Artin, E.: Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen. Math. Z. **19** (1924) 153–246

[H_1] Hasse, H.: Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **10** (1934) 325–348

[H_2] Hasse, H.: Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. J. ber. d. Dt. Math.-Verein. **35** (1926) 1–55 und **36** (1927) 233–311

[H_3] Hasse, H.: Die Normresttheorie relativ abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen. J. f. d. reine angew. Math. **162** (1930) 145–154

[D] Deligne, P.: La conjecture de Weil I. Publ. Math. IHES **43** (1974) 273–307

[Di] Dieudonné, J.: The Weil Conjectures. The Mathematical Intelligencer **10** (1975) 7–21

[C] Chevalley, C.: Deux théorème d'arithmétique. J. Math. Soc. Japan **3** (1951) 36–44

[J] Jehne, W.: Zur Verschärfung des F. K. Schmidtschen Einheitensatzes. Math. Z. **77** (1961) 439–452

[S] Serre, J.-P.: Groupes algébriques et corps de classes. Paris: Hermann 1959

[BKKN] Berger, R.; Kiehl, R.; Kunz, E.; Nastold, H.-J.: Diferentialrechnung in der analytischen Geometrie. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1967. = Lecture Notes in Mathematics Vol. 38

[KPR] Kurke; Pfister; Roczen: Henselsche Ringe und algebraische Geometrie. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1974

[Co] Cohen, I. S.: On the structure and ideal theory of complete local rings. Trans. A. M. S. **59** (1946) 54–106

[K] Krull, W.: Dimensionstheorie in Stellenringen. J. f. d. reine angew. Math. **179** (1938) 204–226

[N_1] Neukirch, J.: Über die absoluten Galoisgruppen algebraischer Zahlkörper. Astérisque **41/42** (1977) 67–79

[N_2] Neukirch, J.: Eine Klasse von Körpern, über denen jede Gleichung durch Radikale auflösbar ist. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **30** (1967) 26–35

[Ge] Geyer, W.-D.: Unendliche algebraische Zahlkörper, über denen jede Gleichung auflösbar von beschränkter Stufe ist. J. Number Theory **1** (1969) 346–374

[W] Weissauer, R.: Hilbertsche Körper. Diss. Heidelberg 1980

[ML] MacLane, S.: Modular field I. Separating Transcendence Basis. Duke Math. J. **5** (1939) 372–393

[Z] Zariski, O.: Foundations of a General Theory of Birational Correspondences. Trans. A. M. S. **53** (1934) 490–542

[N] Nagata, M.: Local Rings. New York: Wiley 1962

[Kä] Kähler, E.: Algebra und Differentialrechnung. Ber. Math. Tagung Berlin 1953, 58–163

[KD] Kowalsky, H.-J.; Dürbaum, H.: Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien. J. f. d. reine angew. Math. **191** (1953) 135–152

[Dü] Dürbaum, H.: Über die Ganzheitsbereiche bewerteter Körper. Math. Z. **57** (1952/53) 86–93

[B_1] Berger, R.: Über den Modul der bei einer diskreten Bewertung ganzen Differentiale in einem Körper von Primzahlcharakteristik. J. f. d. reine angew. Math. **204** (1960) 188–204

[B_2] Berger, R.: Ausdehnung von Derivationen und Schachtelung der Differente. Math. Z. **78** (1962) 97–115

[B_3] Berger, R.: Differentiale höherer Ordnung und Körpererweiterung bei Primzahlcharakteristik. Sitz.-ber. Heidelb. Akad. Wiss. 1966, 3. Abh.

[Ku_1] Kunz, E.: Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen. J. f. d. reine angew. Math. **204** (1960) 165–182

[Ku_2] Kunz, E.: Differentialformen inseparabler algebraischer Funktionenkörper. Math. Z. **76** (1961) 55–74

[Na] Nastold, H.-J.: Zum Dualitätssatz in inseparablen Funktionenkörpern der Dimension 1. Math. Z. **76** (1961) 75–84

[Hi] Hirt, H.: Der Differentialmodul eines lokalen Prinzipalrings über einem beliebigen Ring. Sitz.-ber. Heidelb. Akad. d. Wiss. 1967/68. 2. Abh.

Prof. Dr. Ernst Kunz
Fachbereich Mathematik der Universität
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

Prof. Dr. Hans-Joachim Nastold
Mathematisches Institut der Universität
Roxeler Str. 64
4400 Münster

(*Eingegangen: 24. 9. 1980*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein
83 (1981) 182–185
ABS subject classification: 01 A 70

Heinrich Tietze 31. 8. 1880–17. 2. 1964*)

O. Perron †

Am 17. Februar 1964 ist der ordentliche Professor der Mathematik, Geheimer Regierungsrat Dr. Heinrich Tietze, nach längerer Krankheit im 84. Lebensjahr verschieden. Er war am 31. August 1880 in Schleinz (Nieder-Österreich) geboren, studierte an den Universitäten Wien, München, Göttingen, wurde 1904 in Wien zum Dr. phil. promoviert und habilitierte sich daselbst 1908 als Privatdozent für Mathematik. Bereits 1910 kam er als ao. Professor an die Technische Hochschule in dem damals österreichischen Brünn, wurde daselbst 1913 ordentlicher Professor, ging 1919 als solcher an die Universität Erlangen und kam von da 1925 an unsere Naturwissenschaftliche Fakultät. Im Studienjahr 1930/31 war er Dekan. 1950 wurde er emeritiert, hielt aber noch weiter kleine Vorlesungen über Gegenstände, die ihm am Herzen lagen und die auch ein weiteres Publikum interessieren konnten.

Tietze hat schon von Beginn seiner wissenschaftlichen Laufbahn an sich mit Leidenschaft der Topologie gewidmet, wofür man früher meistens „Analysis situs" sagte. Das ist ein Zweig der Geometrie, mit dem sich damals nur wenige Mathematiker ernstlich beschäftigten, während die anderen sich entweder gar nicht oder allenfalls einmal nebenbei in Mußestunden damit abgaben. Heute ist das anders, die Topologie hat sich unter Sprengung ihres ursprünglichen Rahmens eine zentrale Stellung nicht nur in der Geometrie, sondern in der gesamten Mathematik erobert, und an diesem Aufstieg ist Tietze maßgeblich beteiligt, zunächst einmal durch Klärung der Begriffe in einem zusammen mit seinem Freunde Vietoris verfaßten Artikel in der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (Band III. 1. 2), nachdem vielfach dasselbe Wort von verschiedenen Autoren in verschiedenem Sinne gebraucht worden war und umgekehrt für denselben Begriff verschiedene Wörter sich breit gemacht hatten, wodurch eine sehr lästige babylonische Sprachverwirrung entstanden war. Sodann ist ihm der Nachweis verschiedener grundlegender topologischer Sätze gelungen. Zum Beispiel konnte er 1910 in Band 19 des Jahresberichts d. Deutsch. Math.-Vereinigung nachweisen, daß auf jeder einseitigen oder (wie man eigentlich sagen sollte) nicht orientierbaren Fläche wenigstens sechs Nachbargebiete angegeben werden können, das heißt, sechs Gebiete, deren jedes mit jedem der fünf anderen eine gemeinsame Grenzlinie hat; vorher war nur die Möglichkeit von wenigstens fünf Nachbargebieten bekannt. Tietze konnte aber bei dieser Gelegenheit noch weiter zeigen, daß speziell auf dem Möbiusschen Band und auf der projektiven Ebene auch

*) Nachdruck mit freundlicher Genehmigung von Frau Hedwig Perron, München. Erstmals erschienen in der Jahreschronik 1963/64 der Universität München.

0012–0456/81/04 0182–04 $ 00.80/0

nicht mehr als sechs Nachbargebiete möglich sind. Und daraus konnte er weiter folgern, daß, wenn man bei einer beliebigen Gebietsteilung auf einer dieser Flächen zwei aneinander grenzende Gebiete verschieden färben will, man mit sechs Farben auskommt. Das ist sehr merkwürdig, weil sich bei einer viel einfacheren Fläche, nämlich gewöhnliche Ebene oder Kugel, wo leicht zu sehen ist, daß es nur vier Nachbargebiete geben kann, daraus (mit einiger Mühe) nur folgern läßt, daß man bei jeder Gebietsteilung mit fünf Farben auskommt. Daß es auch mit vier Farben geht, also die Maximalzahl der Farben gleich der Maximalzahl der Nachbargebiete ist, ist eine durch Erfahrung nahegelegte, aber meines Wissens auch heute noch nicht bewiesene Vermutung.

Wie liegt nun die Sache im (dreidimensionalen) Raum? Da war seit langem bekannt, daß man nicht nur vier oder fünf oder sechs, sondern beliebig viele Körper angeben kann, von denen jeder an jeden andern mit einer Fläche angrenzt. Man braucht ja nur etwa 100 getrennt liegende Kugeln zu nehmen und läßt an jede 99 Polypenarme gegen die 99 anderen Kugeln hin anwachsen. Zwei sich entgegenwachsende Polypenarme läßt man dann etwa auf halbem Wege an einer gemeinsamen Grenzfläche enden. Dann hat man 100 Körper, von denen je zwei eine gemeinsame Grenzfläche haben. Aber diese Körper werden von sehr bizarrer Gestalt sein, da die nicht zusammengewachsenen Polypenarme sich wohl auf sehr verschlungenen Wegen aneinander vorbeischlängeln müssen. Es war die Frage, ob es nicht auch mit einfacher gestalteten Körpern geht. Man fand allerhand Einfacheres. Aber erst Tietze fand gleich das Maximum an Einfachheit: In Band 16 der Monatshefte für Mathem. u. Phys. konnte er zeigen, was sehr überraschend war und zunächst kaum glaublich scheint, daß es sogar mit lauter konvexen Körpern geht.

Als Topologe hat sich Tietze natürlich auch mit stetigen Abbildungen befaßt. Da ist ihm z.B. in Band 38 der Rendiconti del Circ. mat. di Palermo der Beweis des folgenden grundlegenden Satzes gelungen: Jedes umkehrbar eindeutige stetige Abbild eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes auf sich selbst mit gleicher Indikatrix wie das Original kann durch stetige Deformation, bei der das Flächenstück als ganzes unverändert bleibt, gewonnen werden. In etwas anderer Richtung liegt folgender Satz (Journal f. d. r. u. a. Math. 145): Eine auf einer abgeschlossenen Menge des n-dimensionalen Euklidischen Raumes erklärte und beschränkte stetige Funktion läßt sich in den ganzen Raum als stetige Funktion fortsetzen. Man kann das leicht für selbstverständlich halten; aber von da bis zu einem wirklichen Beweis ist noch ein weiter Weg und so ist es noch bei vielen Sätzen der Topologie. Übrigens bleibt der Satz, wie Tietze gleich bemerkt hat, auch bei viel allgemeineren topologischen Räumen richtig.

Ein interessanter Zweig der Topologie ist die Theorie der Verknotung und Verkettung von Schnüren, wo besonders die Frage interessiert, ob zwei solche Gebilde äquivalent sind, daß heißt, ohne Zerschneidung ineinander übergeführt werden können. Wenn man diese Frage spielerisch experimentell anpackt, mag die Überführung wohl einmal gelingen; aber wenn sie nach langem Probieren einmal nicht gelingt, ist damit nie bewiesen, daß es wirklich unmöglich ist. Man braucht Kriterien, und da kommen scheinbar weit abgelegene mathematische Disziplinen zu Hilfe wie Gruppentheorie und sogar Zahlentheorie. Tietze hat seit 1942 in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie und in den Monatsheften hauptsächlich die zahlentheoretischen Zusammenhänge ausgenutzt, und es gelang ihm, die Existenz unendlich vieler nichtäquivalenter sogenannter Torus- oder Simony-Knoten nachzuweisen.

Soviel über Topologie. Aber Tietze war durchaus nicht nur Topologe, sondern hat auch auf anderen Gebieten Hervorragendes geleistet. So hat er schon 1905 in Band 16 der Monatshefte den Nachweis führen können, daß eine Besselsche Funktion als Funktion des Index keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Für die Theorie der halbregelmäßigen Kettenbrüche hat er das entscheidende Konvergenzkriterium beigebracht, und zwar als Geometer auf geometrischem Weg. In der Theorie der numerischen algebraischen Gleichungen hat er die bekannten Vorzeichenregeln von Descartes und Fourier auf neue Art bewiesen und auf nicht rationale analytische Funktionen ausgedehnt. Für den Fundamentalsatz über symmetrische Funktionen hat er einen besonders durchsichtigen Beweis geliefert und dabei auch den vorher nicht beachteten Fall von unendlich vielen Variablen behandelt. Dem Problem der geometrischen Konstruktion mit Lineal und Zirkel wußte er eine ganz neue Wendung zu geben. Längst bekannt war ja das für die Konstruierbarkeit eines Punktes notwendige und hinreichende Kriterium, daß seine Koordination sich aus den Koordinaten der gegebenen Punkte rational oder durch Adjunktion von Quadratwurzeln ergeben. Aber da sagt nun der äußerst kritische Tietze schon 1909 in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie und mit Nachdruck 1944 noch einmal in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie, daß das nicht stimmt, wenn man wirklich kein Konstruktionsmittel außer Lineal und Zirkel zulassen will. Denn wenn da viele Quadratwurzeln vorkommen und man macht die Konstruktion, dann bekommt man als Resultat eine ganze Anzahl von Punkten, unter denen auch der gesuchte ist. Aber welches nun der richtige ist, darüber geben die Instrumente Lineal und Zirkel keine Auskunft. Dazu bedarf es vielmehr eines gewissen Unterscheidungsvermögens des Zeichners, und dieses Vermögen ist als ein weiteres Hilfsmittel für die Konstruktion zu werten. Wenn man auf seine Anwendung verzichtet, ist die Konstruktion nicht mehr restlos durchführbar. Sind z. B. vier Punkte A, B, C, D gegeben und sucht man auf der mit dem Lineal zu zeichnenden Verbindungslinie von A und B einen Punkt E derart, daß die Strecke AE so lang ist wie AB und CD zusammengenommen, so wird man die Strecke CD in den Zirkel nehmen und mit diesem Radius einen Kreis mit dem Mittelpunkt B zeichnen. Dieser schneidet die genannte Verbindungsgerade in zwei Punkten; aber nur einer der beiden hat die vom Punkt E verlangte Eigenschaft. Bei diesem einfachen Beispiel wird sich der Zeichner wohl nicht lange besinnen brauchen, welches der richtige Punkt ist, er sieht es eben. Aber bei komplizierteren Konstruktionen wird er schon nachdenken müssen. Und nun kann man sich prinzipiell die Frage stellen, welche Konstruktionen sich noch ausführen lassen, wenn man wirklich nur Lineal und Zirkel als Roboter arbeiten läßt und das Unterscheidungsvermögen des Zeichners nicht als weiteres Instrument zu Hilfe nimmt. Tietze konnte die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür genau angeben, sie sind natürlich viel einschneidender als die früheren.

Noch vieles andere wäre zu sagen, um Tietzes wissenschaftliches Werk völlig auszuschöpfen. Dazu reicht der Raum hier nicht. Nur auf eine auf ganz anderem Gebiet liegende Arbeit sei noch hingewiesen. Im Jahr 1923 hat er in Band 3 der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik den mathematischen Folgen der Mendelschen Vererbungsgesetze nachgespürt und sich damit auf ein Gebiet begeben, das es damals eigentlich noch gar nicht gab und das erst in jüngster Zeit zaghaft auf den Namen Biomathematik getauft wurde. Er konnte dabei, so lange es sich um Monohybridismus handelt, wohl alles bestätigen, was vorher schon Zoologen gefolgert hatten; aber bei Polyhybridismus war doch manches nur mit starken Einschränkungen richtig und mußte modifiziert werden.

Den Gelehrten und in besonderem Maße wohl den Mathematikern wird vielfach nachgesagt, daß sie sich von der Außenwelt abkapseln, sich in den Elfenbeinturm ihrer Wissenschaft einsperren, weil die Laien von den geheimnisvollen mathematischen Formln doch nichts verstünden. Aber bei Tietze kann man diesen Vorwurf gewiß nicht erheben. Im Gegenteil liebte er es aus dem Elfenbeinturm herauszutreten. Er hat mehrfach Vorlesungen für ein breiteres Publikum gehalten und diese dann in einem zweibändigen Werk mit dem Titel „Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit" herausgegeben. Hier ist es ihm gelungen, auch für schwierige mathematische Fragen Interesse und Verständnis bei seinen Hörern und Lesern zu wecken und ihnen ohne einen gelehrten Formelapparat doch einen tiefen Einblick in das Wesen der Dinge zu vermitteln, ja sie bis an die Grenzen unseres Wissens heranzuführen.

Auch den rein menschlichen Kontakt mit den Studierenden hat Tietze stets gesucht. Berühmt wurden die von ihm organisierten ein- oder auch zweitägigen Seminarausflüge, wo alles aufs gewissenhafteste vorbereitet war. Gewöhnlich machte er mit einem Assistenten oder Studenten einige Zeit vorher eine Probetour, wobei die Unterkunft ausgekundschaftet und alles mit den in Frage kommenden Wirten verhandelt wurde. Dann gab es in der nächsten Seminarstunde eine gründliche Belehrung der Teilnehmer, daß man solides Schuhwerk braucht und auch gegen allenfalsige Unbilden der Witterung sich vorsehen soll. Am Tag vor der Tour mußten einige Studenten mit großen Rucksäcken zu ihm kommen, worin die von Frau Tietze gebackenen Kuchen verstaut wurden. Und dann ging es los. Manchmal waren es nur bescheidene Ziele wie Kloster Andechs oder Hohenpeißenberg. Zumeist aber wurden doch richtige Gipfel in den Voralpen bestiegen wie Benediktenwand, Rotwand, Bodenschneid, Notkarspitze, einmal auch das Kellerjoch bei Schwaz, wo beim 1800 Meter tiefen Abstieg ins Zillertal auch manch jüngerer bergungewohnter Teilnehmer lernen konnte, was ein ausgewachsener Muskelkater ist. An diese schönen und stets harmonisch verlaufenen Ausflüge werden sich die Teilnehmer, die jetzt in ganz Bayern und darüber hinaus verstreut sind, gewiß auch heute noch gerne erinnern.

Jber. d. Dt. Math.-Verein
83 (1981) 186–191
AMS subject classification: 01 A 70

Verzeichnis der unter H. Tietze angefertigten Dissertationen und Verzeichnis der Veröffentlichungen

Zusammengestellt von K. Seebach, München, und K. Jacobs, Erlangen

1 Unter H. Tietze angefertigte Dissertationen

[1] B i l z, Ernst: Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis situs, 1922, Univ. Erlangen

[2] K ü n n e t h, Hermann Lorenz: Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit, 1922, Math. Ann. **90**; Univ. Erlangen

[3] W o l k e n s t ö r f e r, Hans: Probleme der Erweiterung von topologischen Abbildungen ebener Punktmengen, 1929, Univ. München, U 30.5677

[4] A u m a n n, Georg: Beiträge zur Theorie der Zerlegungsräume, 1931, Math. Ann. **106**; Univ. München, U 32.6584

[5] H a m m e r, Hans Karl: Zu einer Theorie der Versuchszahlen. Über die wahrscheinlichste Anzahl von Versuchen, die zur Erreichung einer bestimmten Anzahl günstiger Ergebnisse nötig ist, 1938, Univ. München, U 38.7889

[6] E t z e l, Paul: Über eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Gruppe des Doppelverhältnisses, 1939, Univ. München, U 39.7930

[7] S e e b a c h, Karl: Über die Erweiterung des Definitionsbereiches differenzierbarer Funktionen, 1939, Math. Ann. **116**; Univ. München, U 39.7962

[8] A p f e l b a c h e r, Karl: Über die Beziehungen zwischen Umgebungsräumen und Häufungsräumen, 1940, Monatsh. f. Math. u. Phys. **49**; Univ. München, U 40.6051

2 Lehrbücher

[1] H a h n, H.; T i e t z e, H.: Einführung in die Elemente der höheren Mathematik. 332 S., 83 Fig. Hirzel, Leipzig 1925

[2] T i e t z e, H.; V i e t o r i s, L.: Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, III AB 13; S. 141–237. B. G. Teubner, Leipzig 1930

[3] T i e t z e, H.: Ein Kapitel Topologie. Zur Einführung in die Lehre von den verknoteten Linien. Hamburger Math. Einzelschriften 36, VII + 47 S., B. G. Teubner, Leipzig 1942

[4] T i e t z e, H.: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Vierzehn Vorlesungen für Laien und für Freunde der Mathematik. Bd. 1, 2; 256 S., 115 Fig. und 10 Taf.; 303 S., 41 Fig. und 8 Taf. Biederstein Verlag, München 1949. 2. durchgearb. Aufl., XX, 256 S., 115 Fig. im Text, 10 Taf.; VIII, 297 S., 41 Fig. im Text, 8 Taf., C. H. Becksche Verlagsbuchhandlung, München 1959. 3. Aufl., XX, 554 S. mit 156 Abb. im Text und 16 Taf., C. H. Becksche Verlagsbuchhandlung, München und Berlin 1964

[5] T i e t z e, H.: Problemen uit de Wiskunde. Nederlandse Bewerking door Bruno Ernst. N.V.W.J. Thieme & Cie-Zutphen 1961

[6] T i e t z e, H.: Famous problems of mathematics. Solved and unsolved mathematical problems from antiquity to modern times. Authorized translation form the second (1959) revised German edition. Edited by Beatrice Kevitt Hofstadter and Horace Komm. XVI, 367 p., Graylock Press, New York 1965

3 Zeitschriftenartikel[1])

[1] Über Funktionalgleichungen, deren Lösungen keiner algebraischen Differentialgleichung genügen können. Monatsh. f. Math. u. Phys. 16, 1905, 329–364

[2] Über das Problem der Nachbargebiete im Raum. Monatsh. f. Math. u. Phys. 16, 1905, 211–216

[3] Zur Analysis situs mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Wien. Ber. 115, 1906, 841–846

[4] Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Monatsh. f. Math. u. Phys. 19, 1908, 1–118

[5] Notiz zur Approximation von Potenzreihen durch rationale Funktionen. Monatsh. f. Math. u. Phys. 20, 1909, 285–288

[6] Über die Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel. Wien. Ber. 118, 1909, 735–575

[7] Einige Kettenbruch-Konvergenzkriterien. Monatsh. f. Math. u. Phys. 21, 1910, 344–360

[8] Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 19, 1910, 155–159

[9] Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche. Math. Ann. 70, 1911, 236–265

[10] Über die raschesten Kettenbruchentwicklungen reeller Zahlen. Monatsh. f. Math. u. Phys. 24, 1913, 209–242

[11] Über einfach zusammenhängende Flächen und ihre Deformationen in sich. Wien. Ber. 122, 1913, 1653–1658

[12] Sur les représentations continues des surfaces sur elles-mêmes. C. R. 157, 1913, 509–512

[13] Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind. J. reine angew. Math. 145, 1914, 9–14

[14] Bemerkungen zu den Sätzen von J. Pál über ebene und räumliche Jordansche Kurven. J. reine angew. Math. 145, 1914, 15–23

[15] Über stetige Abbildungen einer Quadratfläche auf sich selbst. Palermo Rend. 38, 1914, 247–304

[16] Eine Bemerkung zur Interpolation. Z. angew. Math. Phys. 64, 1914, 74–90

[17] Über stetige Kurven, Jordansche Kurvenbögen und geschlossene Jordansche Kurven. Math. Z. 5, 1919, 284–291

[18] Über den Richtungssinn und seine Verallgemeinerung. Jber. Dt. Math.-Verein. 29, 1920, 95–123

[19] Über ein Beispiel von L. Vietoris zu den Hausdorffschen Umgebungsaxiomen. Math. Ann. 87, 1922, 150–151

[20] Beiträge zur allgemeinen Topologie I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffes. Math. Ann. 88, 1923, 290–312

[21] Beiträge zur allgemeinen Topologie III. Über die Komponenten offener Mengen. Monatsh. f. Math. u. Phys. 33, 1923, 15–17

[22] Über Analysis situs. Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg. Univ. 2, 1923, 37–68

[23] Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen. Math. Z. 16, 1923, 308–317

[1]) Liegt das Jahr der Einreichung vor dem Jahr des Erscheinens, so ist die letzte Jahreszahl in Klammern beigefügt.

[24] Nachträgliche Bemerkung zu dem Aufsatz: „Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen". Math. Z. 18, 1923, 324

[25] Über das Schicksal gemischter Populationen. Z. angew. Math. Mech. 3, 1923, 362–393

[26] Über die Gauß-Green-Stokesschen Integralsätze. J. reine angew. Math. 153, 1924, 141–157

[27] Beiträge zur allgemeinen Topologie II. Über die Einführung uneigentlicher Elemente. Math. Ann. 91, 1924, 210–224

[28] Mendelsches Vererbungsgesetz. Z. angew. Math. Mech. 5, 1925, 88

[29] Über konvexe Figuren. J. reine angew. Math. 158, 1927, 168–172

[30] Über den Bereich absoluter Konvergenz von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen. Math. Ann. 99, 1928, 181–182

[31] Stützeigenschaften konvexer und nichtkonvexer Figuren. Jber. Dt. Math.-Verein. 37, 1928, 23

[32] Zur Topologie berandeter Mannigfaltigkeiten. Monatsh. f. Math. u. Phys. 35, 1928, 25–44

[33] Über Konvexheit im Kleinen und im Großen und über gewisse den Punkten einer Menge zugeordnete Dimensionszahlen. Math. Z. 28, 1928, 697–707

[34] Eine charakteristische Eigenschaft der abgeschlossenen konvexen Punktmengen. Math. Ann. 99, 1928, 394–398

[35] Bemerkungen über konvexe und nicht-konvexe Figuren. J. reine angew. Math. 160, 1929, 67–69

[36] Nachruf auf Aurel Edmund Voss. Jahrb. d. Ludw.-Maxim.-Univ. München, 1930/31, 14–17

[37] Nachruf auf Aurel Edmund Voss. Jahrb. Bayer. Akad. Wiss. 1931/32, 76–77

[38] Nachruf auf Friedrich Schur. Jahrb. Bayer. Akad. Wiss. 1931/32, 69–71

[39] Über die Proportionalität der aus Punktkoordinaten und der aus Ebenenkoordinaten gebildeten Geradenkoordinaten. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1933, 135–148

[40] Über eine Verallgemeinerung der Vorzeichenregeln von Descartes und Fourier-Budan. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. München, 1935, 357–377

[41] Über eine der Fourierschen Regel verwandte Zeichenregel für die Anzahl der Nullstellen in einem offenen Intervall. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1935, 485–491

[42] Über die Vorzeichenregeln von Descartes und Fourier-Budan. Monatsh. f. Math. u. Phys. 43, 1936, 210–214

[43] Über symmetrische Funktionen von endlich oder abzählbar unendlich vielen Veränderlichen. Monatsh. f. Math. u. Phys. 48, 1939, 487–499; 49, 1939, 1–52 (1941)

[44] Über die mit Lineal und Zirkel und die mit dem rechten Zeichenwinkel lösbaren Konstruktionsaufgaben I. Math. Z. 46, 1940, 190–203

[45] Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren I: Rekursionsformeln. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1940, 23–54

[46] Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren II: Komprimierte Gitterpunktmengen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1940, 69–131

[47] Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren III. Ein Satz über das Verhältnis der Lösungsanzahlen gewisser Partitionsaufgaben. S.-B. math. naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1940, 133–145

[48] Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren IV: Formeln und Tabellen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1940, 147–166

[49] Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren V: Der Hauptsatz über den Umbau komprimierter Gitterpunktmengen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1941, 1–37

[50] Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren VI: Konvexe Polygonzüge und Partitionen nebst deren Ordnungsbeziehungen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1941, 39–55

[51] Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren VII: Schrittweise Kompression partiell-komprimierter Mengen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1941, 165–170

[52] Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren VIII: Auswirkung der Kompression von Gitterpunktmengen auf die zugehörigen Partitionen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1941, 171–186

[53] Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren IX: Beispiele ähnlich geordneter Familien von komprimierten Gitterpunktmengen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1941, 187–191

[54] Über die Anzahl komprimierter Gitterpunktmengen von gegebener Punktezahl. Math. Z. 47, 1941, 352–356

[55] Über Tripel konjugierter Partitionen. Abh. Math. Sem. Hansische Univ. 14, 1941, 273–284

[56] Rekursionsformeln für den Inhalt gewisser Polyeder. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1941, 193–200

[57] Komprimierte Gitterpunktmengen und eine additiv-zahlentheoretische Aufgabe. J. reine angew. Math. 184, 1942, 49–64

[58] Über die Anzahl der Lösungen gewisser Aufgaben über Gitterpunktfiguren. Math. Ann. 118, 1942, 290–298

[59] Bemerkungen über verknotete und verkettete Linien. I: Über die speziellen Simony-Knoten und Simony-Ketten. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1942, 53–62

[60] Verallgemeinerung einer Rekursionsformel für gewisse Polyeder-Volumina. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1942, 17–20

[61] Bemerkungen über verknotete und verkettete Linien. II. Vorgeschriebene singuläre Primzahlen für eine Simony-Figur und für ihr Spiegelbild. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1943, 265–268 (1944)

[62] Über Orthogonalisierung, Kurventheorie und allgemeine Drehbewegung. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1943, 127–129 (1944)

[63] Über gewisse Umordnungen von Permutationen und ein zugehöriges Stabilitäts-Kriterium I., II. Jber. Dt. Math.-Verein. 53, 1943, 147–182; 54, 1943, 63–96 (1951)

[64] Über gewisse Umordnungen von Permutationen. I. II. III. IV. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1943, 131–134, 135–148, 269–279, 281–293 (1944)

[65] Über spezielle Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen. I. Monatsh. f. Math. u. Phys. 51, 1943, 1–14

[66] Über Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen für die Figur und für ihr Spiegelbild. Math. Z. 49, 1943, 351–369

[67] Einige Tabellen zur Verteilung der Primzahlen auf Untergruppen der teilerfremden Restklassen nach gegebenem Modul. Abh. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Abt., N.F.Nr. 55, 31 S., 1944

[68] Über Frenetsche Formeln, Poinsotsche Bewegungen und Gramsche Determinanten. J. reine angew. Math. 186, 1944, 116–128

[69] Über spezielle Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen. II. Monatsh. f. Math. u. Phys. 51, 1944, 85–100

[70] Über symmetrische Funktionen von abzählbar unendlich vielen Argumenten. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1944, 43–48 (1947)

[71] Über den Wettlauf von Restklassen bezüglich ihres Gehalts an Primzahlen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1944, 75–105 (1947)

[72] Über die Stäckelschen Lückenzahlen nebst kleinen Randbemerkungen zur Verteilung der Primzahlen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1944, 21–41 (1947)

[73] Verallgemeinerung einer Meissner-Stäckelschen Vermutung über die Verteilung der Primzahlen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1944, 69–73 (1947)

[74] Über vollständige Vielfachenmengen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1944, 19–20 (1947)

[75] Das Volumen von gewissen Polyedern. Math. Ann. 119, 1944, 221–246
[76] Eine Bemerkung zum Lehmerschen Problem. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1944, 163–170 (1947)
[77] Zur Analyse der Lineal- und Zirkel-Konstruktionen I. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1944, 209–231 (1947)
[78] Über die Herstellung einer Basis für die ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München, 1944, 147–162 (1947)
[79] Verallgemeinerung eines Hamilton-Cayley-Frobeniusschen Satzes auf ein beliebiges Paar vertauschbarer Matrizen. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1945/46, 45–46 (1947)
[80] Über real-statt formal-festgelegte Kettenalgorithmen zur simultanen Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1945/46, 1–43 (1947)
[81] Ein Algorithmus von Poincaré und andere Algorithmen zur Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1945/46, 185–219 (1947)
[82] Der Satz von Rolle als Sonderfall differentialgeometrischer Existenzprobleme. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1945/46, 77–79 (1947)
[83] Würfelspiel und Integralgeometrie. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1945/46, 131–158 (1947)
[84] Zusammenstellung einiger Werte des Integrallogarithmus. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1947, 47–50 (1949)
[85] Ein zweiter Beweis eines Satzes über Partitionen. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1947, 45–46 (1949)
[86] Tafel der Primzahl-Zwillinge unter 300000. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1947, 57–72 (1949)
[87] Über die Anzahl der stabilen Ruhelagen eines Würfels. Herrn Georg Faber zum 70. Geburtstag gewidmet. Elem. d. Math. III, 1948, 97–100
[88] Über stabile und indifferente Ruhelagen eines homogenen Zylinders. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1948, 299–301 (1949)
[89] Rudolf Fueter. 30. 6. 1880–9. 8. 1950. Jahrb. d. Bayer. Akad. Wiss. München, 1951, 175–178
[90] Dem Andenken an C. Carathéodory. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1950, 85–101 (1951)
[91] Constantin Carathéodory. – Auszugsweise aus einem ausführlicheren Nachruf. Arch. Math. 2, Karlsruhe, 1950, 241–245
[92] Die Relation zwischen den drei quadratischen Fundamentalformen einer Fläche. Math. Z. 52, 1950, 590–592
[93] On a gap occuring frequently in mathematical conclusions and a method of partitioning the linear arrangements of the natural numbers into classes. Math. Student 19, 1951, 118–120
[94] Über eine Verallgemeinerung des Gaußschen arithmetisch-geometrischen Mittels und die zugehörige Folge von Zahlen – n – Tupeln. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1952, 191–195 (1953)
[95] Über eine Klasse von Polynomen, die diejenigen mit lauter positiven Nullstellen umfaßt. Math. Nachr. 8, 1952, 7–12
[96] Über die Glaishersche Verallgemeinerung eines Eulerschen Satzes über Partitionen. J. reine angew. Math. 191, 1953, 64–68
[97] Gustav Herglotz. 2. 2. 1881–22. 3. 1953. Jahrb. Bayer. Akad. Wiss. 1953, 188–195 (1954)
[98] Aus Gesprächen mit Gustav Herglotz. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1953, 163–167 (1954)
[99] Bemerkungen zu Carathéodorys Einführung in Eulers Arbeiten über Variationsrechnung. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1955, 1–8 (1956)
[100] Zwei Sonderfälle eines Grenzwertproblems. Math. Nachr. 13, 1955, 283–287

[101] Ein Prinzip für Schachturnier-Tabellen. Archimedes 8, 1956, 41–43
[102] Bemerkungen zu meiner Note: Zwei Sonderfälle eines Grenzwertproblems. Math. Nachr. 15, 1956, 173
[103] Über Schachturniertabellen. Math. Z. 67, 1957, 188–202
[104] Über eingeschränkte und uneingeschränkte Partitionen. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1960, 11–16 (1961)

Prof. Dr. K. Seebach
FB Mathematik der Universität München
Theresienstr. 39
8000 München 2

Prof. Dr. K. Jacobs
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2
8520 Erlangen

(Eingegangen: 22. 3. 1981)

Buchbesprechungen

Robinson, A., Selected Papers (ed. by H. J. Keisler, S. Körner, W. A. J. Luxemburg and A. D. Young) Amsterdam – New York: North Holland Publ. Comp. 1979, **Vol. 1: Model Theory and Algebra**, XXXVIII + 694 p., \$ 56.00, **Vol. 2: Nonstandard Analysis and Philosophy**, XVI + 582 p., \$ 48.75, **Vol. 3: Aeronautics**, XXXII + 270 p., \$ 36.50 – set price \$ 122.00

Von den insgesamt 134 hinterlassenen Arbeiten von Abraham Robinson ist die überwiegende Mehrzahl, nämlich 98, auf die vorliegenden drei Bände verteilt. Die in diesen Bänden erfaßten Arbeiten stellen neben 9 Büchern (von denen 3 mit Koautoren geschrieben worden sind) im wesentlichen sein mathematisches und philosophisches Lebenswerk dar. Sie lassen sich in die Gebiete Angewandte Mathematik (14), Analysis (3), Modelltheorie (45), Nonstandard Analysis (27), Computer Science (3) und Philosophie (6) aufteilen.

Die zu Kriegsende und in den Jahren unmittelbar danach aufgrund seiner Tätigkeit am „Royal Aircraft Establishment" in Farnborough, England, entstandenen Arbeiten über Aeronautik sind in Band 3 mit dem Titel „Aeronautics" in chronologischer Reihenfolge zusammengefaßt. Sie beschäftigen sich hauptsächlich mit Tragflügeltheorie und Überschallströmung. Der Band 3 enthält neben Robinsons Biographie (verfaßt von George B. Seligman) und seiner vollständigen Publikationsliste eine Einführung von A. D. Young. In dieser Einführung wird der Beitrag von A. Robinson zur Angewandten Mathematik gewürdigt – Young schließt seine Ausführungen mit dem Satz „I feel sure that there will be many occasions in the future for which workers will turn to one or another of Robinson's pioneering paper for guidance, illumination and example".

Robinsons Beiträge zur Modelltheorie findet man zusammen mit drei Artikeln aus Computer Science (die er während seiner Beratertätigkeit bei IBM schrieb) in Band 1 mit dem Titel „Model Theory and Algebra". Die Artikel dieses Bandes sind in die folgenden Stichworte aufgeteilt: 1. Expository Papers – 2. Pure Model Theory – 3. Applications of Model Theory to Algebra – 4. Pure Algebra – 5. IBM Papers.

Allein diese Titel belegen schon in eindrucksvoller Weise die Vielseitigkeit von Robinsons Schaffen, das in diesem Band wohl am besten zum Ausdruck kommt. Neben der Biographie und dem vollständigen Publikationsverzeichnis enthält Band 1 eine Einführung von H. J. Keisler, in der Robinsons zentrale Bedeutung für die Entwicklung der Modelltheorie, und insbesondere der Anwendungen der Modelltheorie in der Algebra, hervorgehoben wird.

Die um 1960 und danach entstandenen Arbeiten über Nonstandard Analysis findet man in chronologischer Reihenfolge in Band 2 mit dem Titel „Nonstandard Analysis und Philosophy". Dieser Band enthält zusätzlich drei Arbeiten aus dem Gebiet der klassischen Analysis (die sich sowohl zeitlich als auch inhaltlich ebenso gut in Band 3 hätten einordnen lassen) und sechs Beiträge zur Philosophie und Geschichte der Mathematik. Wie schon die vorher besprochenen Bände, so enthält auch dieser Robinsons Biographie und seine vollständige Publikationsliste. In einer Einführung würdigt W. A. J. Luxemburg Robinsons großartige Schöpfung der Nonstandard Analysis – am Ende seiner Ausführungen sagt er: „We are certain that his ideas will remain a vital source of inspiration for many generations of mathematicians." Neben dieser enthält Band 2 eine weitere Einführung von S. Körner, die Robinsons Einstellung zur Mathematik analysiert und seine philosophischen Prinzipien darlegt.

Insgesamt halte ich die drei Bände für eine sehr gelungene Darstellung von Abraham Robinsons Schaffen. Sie ist durchaus in der Lage, jemandem, der wie ich Robinson selbst leider nie kennengelernt hat, von seinem Werk jedoch tief beeindruckt ist, ein lebendiges Bild von ihm zu vermitteln.

Konstanz A. Prestel

Schütte, K., Proof Theory (translated by J. N. Crossley) (Grundlehren der Math. Wiss., Bd. 225), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, XII + 299 p., cloth, DM 78,–

Im Jahre 1960 ist als Band 103 derselben Grundlehren die „Beweistheorie" des Verf. erschienen. Das vorliegende Buch ist, von einigen Anfangsstücken abgesehen, ein neues Werk, das die erheblichen Fortschritte darstellt, welche die Beweistheorie seither, und unter wesentlicher Mitwirkung des Verf., erfahren hat. Es ist im Prinzip ohne Vorkenntnisse lesbar und enthält im Teil A eine Einführung in die klassische und die intuitionistische Prädikatenlogik sowie in die einfache Typenlogik nebst ihrer Semantik. Die in den späteren Teilen B und C oftmals nicht einfachen Beweise sind vom Verf. in bewundernswerter Weise organisiert worden; im Zusammenwirken von Hilfsdefinitionen und Lemmata treten dem Leser, welcher sie erarbeitet, die Beweisgedanken in allen ihren Dimensionen vor Augen. Angesichts der Bedeutung, welche dieses Buch für seinen Gegenstand, die mathematischen Grundlagen der Mathematik hat, sei sein Inhalt etwas ausführlicher besprochen, als das sonst auf diesen Seiten üblich ist.

Die *Beweistheorie* befaßt sich mit der Ausführung des Hilbertschen Programms, Konsistenzbeweise für mathematische Theorien zu führen. *Konsistenz* einer Theorie T besagt, daß es keine Herleitung (in einem der üblichen logischen Kalküle) gibt, die aus den Axionen und Regeln von T eine „offenbar absurde" Aussage, z. B. „0 = 1", produziert. Eine solche Herleitung ist selbst ein mathematisches Objekt, das man sich am bequemsten als eine baumförmige Figur vorstellt, und ein *Konsistenzbeweis* für T hat zu zeigen, daß es bestimmte solcher Figuren, nämlich die Herleitungen absurder Aussagen, auf Grund der allgemeinen Struktur der Herleitungsfiguren, wie T sie bestimmt, *nicht* geben kann. Die Untersuchung der Struktur solcher Herleitungen ist von kombinatorischem Charakter; man muß eine *Komplexität* von Herleitungen definieren, und Beweise über die Existenz oder Nicht-Existenz von Herleitungen werden durch Induktion über jene Komplexität geführt. Die Reichhaltigkeit der kombinatorisch-graphentheoretischen Umformungsmöglichkeiten für Herleitungsfiguren bringt es mit sich, daß als Komplexitätsmaße die natürlichen Zahlen nicht ausreichen, sondern Ordinalzahlen (etwa der zweiten Zahlenklasse) gebraucht werden; folglich benötigen auch jene Induktionsbeweise nicht bloß die vollständige, sondern eine transfinite (Ordinalzahl-) Induktion. Gelingt es, einen Konsistenzbeweis für die Theorie T zu führen, so gibt es eine Ordinalzahl α derart, daß dabei nur Induktion über den durch α bestimmten Abschnitt der Ordinalzahlreihe verwendet wird. Umgekehrt mag man Formeln $v(x, y)$ von T finden, welche eine Totalordnung definieren, von der auf Grund allgemeinerer mengentheoretischer Überlegungen klar ist, daß sie sogar Wohlordnung ist; und für eine Ordinalzahl β mag es bereits *in der Theorie* T herleitbar sein, daß jene Totalordnung die transfinite Induktion auf dem durch β bestimmten Abschnitt der Ordinalzahlreihe gestattet. Nach einem Satz von Gödel 1931 muß dann β notwendig kleiner als die zum Konsistenzbeweis gehörende Zahl α sein; gelingt es, für *jedes* β unterhalb von α in T die transfinite Induktion bis β herzuleiten, so muß α die kleinste für einen Konsistenzbeweis ausreichende Zahl sein und ist damit *charakteristisch* für T. So enthält z. B. die Peano-Arithmetik PN die Induktion bis ω bereits als Axiomenschema (nämlich die vollständige Induktion); es folgt aus Sätzen von Gentzen 1935 und 1943, daß die charakteristische Zahl von PN die erste Cantorsche ϵ-Zahl ϵ_0 ist.

Ordinalzahlen werden gewöhnlich im Rahmen der Mengenlehre erklärt, die eine maßlos starke Theorie ist; da sich Arithmetik und Analysis aber direkt und einfach in der Mengenlehre modellieren lassen, würde ein eigener Konsistenzbeweis, der doch die volle Mengenlehre als Hilfsmittel zum Verfügen über die Ordinalzahlen heranzöge, in der Tat nur die Überzeugungskraft eines ϵ besitzen. Und erst recht bedarf es einer nicht-mengentheoretischen Beschreibung derjenigen Ordinalzahlen β, für die *in einer der* in Rede stehenden Theorien T die transfinite Induktion bis β hergeleitet werden soll – als mathematisches Objekt muß β dann auch mit den Mitteln von T beschrieben worden sein. Nun lernt man in den Anfängen der Mengenlehre, daß jede Ordinalzahl β eindeutig in *Cantorscher Normalform* $\omega^{\alpha_1}c_1 + \ldots + \omega^{\alpha_n}c_n, \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n \geqq 0$, mit positiven, endlichen c_i zu schreiben ist, und im Falle $\beta < \epsilon_0$ sind auch die α_i echt kleiner als

β; jedes β unterhalb von ϵ_0 läßt sich also aus kleineren Zahlen durch die Operationen der Addition, Multiplikation und Exponentiation von ω zusammensetzen. Diesen Sachverhalt nimmt man zum Anlaß, um nun *umgekehrt* durch Rekursion eine Gesamtheit von *ordinalen Termen* als *Bezeichnungen* der Ordinalzahlen unterhalb von ϵ_0 zu definieren, indem man jenen Prozeß der Zusammensetzung formal imitiert. Vermöge einer Kodierung durch Primzahlpotenzen und deren Produkte lassen sich solche Terme durch natürliche Zahlen und mit den Ausdrucksmitteln der Arithmetik repräsentieren, und auch eine Totalordnung zwischen solchen Termen läßt sich durch Rekursion über ihren Aufbau erklären; als spezifische Aufgabe der jeweiligen Theorie T bleibt allein der Nachweis, daß die Abschnitte jener Totalordnung auch die transfinite Rekursion erlauben. Jenseits von ϵ_0 versagt die Cantorsche Normalform ihren Dienst, da dann α_1 gleich β werden kann; nach einer zuerst von Veblen 1908 (bei Versuchen zur Lösung des Cantorschen Kontinuumproblems) entwickelten Methode kann man jedoch weiter in die zweite Zahlklasse vorstoßen, indem man zur Zusammensetzung von Ordinalzahlen aus ihnen vorangehenden auch noch die Darstellung durch gewisse *Normalfunktionen* N (ausgehend etwa von $N(x) = \omega^x$), deren *Ableitungen* N^z (nämlich $N^o = N$ und N^z, $z > o$, als der Aufzählung aller simultanen Fixpunkte sämtlicher N^y mit $y < z$) und *Diagonalfunktionen* (z. B. $D(x) = N^x(0)$) verwendet. Auch diese allgemeineren Bildungsprozesse lassen sich wieder zur rekursiven Konstruktion ordinaler Terme verwenden, und in den vergangenen Jahrzehnten haben namentlich der Verf. und seine Schüler weitreichende solcher Bezeichnungssysteme entwickelt.

Der Teil B des Buches enthält Untersuchungen zur Peano-Arithmetik und ihrer Charakterisierung durch ϵ_0. Voran geht ein mengentheoretischer Abriß über Ordinalzahlen und Normalfunktionen, dem die Aufstellung eines Systems ordinaler Terme folgt, das auch noch für die erste Hälfte des Teiles C benötigt wird (ein gleichartiges Bezeichnungssystem findet sich, von vorn herein in seiner Kodierung mit natürlichen Zahlen aufgestellt und daher besonders frappierend, im § 11 der „Beweistheorie" von 1960). Im Gentzenschen Konsistenzbeweis von 1935 wurden den verschiedenen Schlußregeln, mit denen Herleitungsfiguren aufgebaut werden, Ordinalzahlfunktionen zugeordnet, welche den entsprechenden Aufbau der Herleitungskomplexität beschrieben; die Hauptarbeit des Beweises besteht dann in einer scharfsinnigen, jedoch den speziellen Umständen angepaßten Analyse der Herleitungsumformungen, welche zum Beweis des sogenannten Schnitteliminations-Theorems gebraucht werden. An Stelle dieser Gentzenschen Methode verwendet der Verf. hier das allgemeinere, systematische Verfahren der von Gödel 1958 entwickelten *Funktionalinterpretation*, das seitdem in zahlreichen ähnlichen Situationen Anwendung gefunden hat; es handelt sich dabei um gewisse (höhere) Arithmetisierung der PN-Herleitungen, wozu nun nicht mehr, wie noch in der reinen Logik, die rekursiven Funktionen hinreichen, sondern die *Funktionale endlichen Typs* (Funktionen-Funktionen und deren entsprechend interierten Funktionale) benötigt werden. Formal werden die Funktionale endlichen Typs als gewisse Terme beschrieben, für die ein einfacher Kalkül FT erklärt ist; die Herleitung einer Formel v von PN kann explizit in eine Herleitung einer FT-Formel v* in FT transformiert werden. Die Nicht-Herleitbarkeit von „0 = 1" in PN beruht dann auf der Nicht-Herleitbarkeit der transformierten Aussage in FT; *diese* Nicht-Herleitbarkeit aber folgt aus der Existenz einer *Normalform* $\nu(t)$ eines jeden FT-Terms t (derart, daß $\nu(t)$ eine explizite Berechnungsvorschrift für das von t repräsentierte Funktional darstellt). Die Existenz der Normalform wird durch eine transfinite Induktion bis ϵ_0 bewiesen; die dafür nötige Zuordnung von Ordinalzahlen zu FT-Termen geht auf Howard 1970 zurück.

Der Teil C des Buches ist Untersuchungen über Teilsysteme der Analysis gewidmet. Faßt man reelle Zahlen als Unterklassen Dedekindscher Schnitte auf, so lassen sich die meisten Untersuchungen der klassischen Analysis schon in einem Begriffsrahmen führen, dem neben der Menge der rationalen Zahlen noch ein *System* von *Teil*mengen rationaler Zahlen zu Grunde liegt, das, den Konstruktionen mit reellen Zahlen entsprechend, unter gewissen Verfahren der Mengenbildung abgeschlossen sein muß. Da man aber rationale Zahlen sogleich noch durch natürliche Zahlen kodieren kann, gelangt man so zur Betrachtung eines logischen Systems CA, welches Variablen x, y, . . . 1ter Stufe für Zahlen und Variablen X, Y, . . . 2ter Stufe für Mengen von Zahlen enthält; für die Zahlen sollen die Axiome der Arithmetik PN gelten, für die Mengen das *Komprehensionsschema:* jede einschlägige Formel v definiert die Menge aller (natürlichen) Zahlen mit der Eigenschaft v. Das System CA bezeichnet man als das der *vollen klassischen Analysis*; es entzieht sich einer beweistheoretischen Analyse.

Eine Formel v von CA wird in der Regel auch (durch Quantoren „für alle“ und „es existiert“) *gebundene* Mengenvariablen enthalten; sie nimmt damit Beziehung auf das als *fertig vorliegend* aufgefaßte System *aller* derjenigen Mengen natürlicher Zahlen, von denen in CA gesprochen wird. Eine Mengenbildung durch Komprehension der Formel v *erschafft* nicht etwa eine neue Menge, sondern stellt nur eine Beziehung zwischen v und einer schon *vorhandenen* Menge her: eben die Beziehung, Komprehension von v zu sein. – Der *andere* mögliche Gesichtspunkt, die Mengenbildung durch Komprehension als die Produktion *neuer* Mengen anzusehen, wird in dem (schon von Whitehead-Russell in den Principia Mathematica entwickelten) System RA der *verzweigten* oder *prädikativen* Analysis beschrieben. Dazu bezeichne man als *Schichten* die Elemente eines gegebenen, hinreichend großen Abschnittes der Ordinalzahlreihe; für jede Schicht γ habe RA eine eigene Familie von Mengenvariablen X^γ, Y^γ, . . . und das *prädikative Komprehensionsschema* liefert eine *Menge der Schicht* γ, wenn γ das Maximum aller derjenigen δ ist, für welche die Formel v freie Mengenvariablen X^δ oder gebundene Mengenvariablen X^ϵ, $\delta = \epsilon + 1$, enthält (so daß die Bezugnahme auf *alle* Mengen der Schicht ϵ dann die Schicht der damit definierten Menge über ϵ hinaustreibt). Konsistenzbeweise für RA haben Lorenzen 1951 und Schütte 1952 angegeben, und Schütte hat die charakteristische, als Γ_0 bezeichnete Ordinalzahl von RA bestimmt (vergleiche auch die „Beweistheorie“ von 1960, §§ 28–29).

Die Unterscheidung der Schichten bringt es mit sich, daß das prädikative System RA bei praktischen Anwendungen nur mit Aufwand zu handhaben ist. Eine andere Möglichkeit, aus der vollen Analysis CA Teilsysteme auszusondern, erhält man durch die Einschränkung des Komprehensionsschemas auf Formeln v besonders einfacher Bauart. In der ersten Hälfte des Teiles C werden zwei solcher Teilsysteme besprochen. Im System EA muß die Formel v des Komprehensionsschemas *arithmetisch* sein, d. h. sie darf keine *gebundenen* Mengenvariablen enthalten. Im System DA muß v eine Δ^1_1-Formel sein, d. h. v muß sowohl einer Formel $\forall$Xw mit arithmetischem w (solche Formeln heißen auch Π^1_1*-Formeln*) als auch einer Formel $\exists$Xu mit arithmetischem u (solche Formeln heißen Σ^1_1*-Formeln*) beweisbar äquivalent sein; ein drittes System EN ohne Komprehensionsschema ist nur eine Variante der Arithmetik PN. Schon das System EA der *elementaren* Analysis erlaubt es, ein gutes Stück der reellen und komplexen Analysis zu entwikkeln (für Einzelheiten vergleiche man G. Takeuti „Two Applications of Logic to Mathematics“, Princeton 1978). Das System DA der Δ^1_1-Analysis läßt sich nun nach S. Feferman in der prädikativen Analysis RA *interpretieren*, so daß mit RA auch DA (und also EA) konsistent ist; zur Ausführung dieses Verfahrens verwendet der Verf. (wie schon in „Beweistheorie“ 1960) statt RA ein sog. halbformales System RA*, dessen Unterschied zu RA darin besteht, daß u. a. die arithmetische Induktionsregel (die RA von PN her enthält) durch eine sog. ω-Regel mit unendlich vielen Prämissen ersetzt wird. Alsdann werden (i) die charakteristischen Zahlen von EN, EA, DA und (ii) für die halbformalen Systeme EN*, EA*, DA* (deren Bildung in Analogie zu derjenigen von RA* geschieht) gewisse, den charakteristischen eng verwandte Zahlen Aut(–) bestimmt; dabei stellt es sich heraus, daß Aut(RA*) = Aut(DA*) gilt. Dies lehrt, daß die Δ^1_1-Komprehension von DA (und von DA*) in diesem Sinne eine stärkste der noch prädikativ zu deutenden Formen von Komprehension ist.

Die zweite Hälfte des Teiles C ist der Π^1_1-Analysis gewidmet, also demjenigen (nicht mehr prädikativen) Teilsystem von CA, in dem auch Π^1_1-Formeln zur Komprehension zugelassen sind. Ein Konsistenzbeweis für ein solches System wurde 1967 von Takeuti gefunden (man vergleiche auch Takeutis „Proof Theory“ 1975), der Gentzens Schnittelimination für PN auf diesen, ungleich komplizierteren Fall ausdehnte. Die Verschachtelung der Reduktionen im Schnitteliminationsbeweis macht es nötig, den diversen Schlußregeln stark wachsende Ordinalzahlfunktionen zuzuordnen, so daß die damit erklärten Herleitungskomplexitäten sehr groß werden. Da die zu ihrer konstruktiven Beschreibung nötigen Stationen im Transfiniten zunächst fehlten, verwandte Takeuti als Komplexitätsmaße nicht mehr Ordinalzahlen, sondern andere Objekte, die *ordinalen Diagramme* (die sich dann auch wieder in Beziehung zur Herleitbarkeit der transfiniten Induktion setzen ließen). Erst Feferman und Aczel haben anfangs der 70er Jahre in unpublizierten Noten eine neue Hierarchie von Normalfunktionen, den *Thetafunktionen*, beschrieben, deren Gesetzmäßigkeiten dann die Aufstellung geeigneter ordinaler Bezeichnungssysteme ermöglichten. Der Verf. stellt zuerst die Thetafunktionen (mit auf W. Buchholz zurückgehenden Vereinfachungen) dar und entwickelt dann ein Bezeichnungssystem. Darauf folgt zunächst eine Darlegung im wesentlichen des Takeutischen Satzes für ein System GPA der Π^1_1-Analysis, in dem dann ein schwächeres, immer noch Π^1_1-Komprehensionen ermöglichendes System PA_ω ausgesondert wird, dessen charakteristische Ordinalzahl bestimmt wird; bei dieser Gelegenheit wird auch das neuerdings wichtig gewordene Hilfsmittel der Theorien ID_n n-fach iterierter induktiver Definitionen entwickelt. Der Teil C endet mit dem Hinweis auf die weitergehenden Resultate von W. Buchholz und W. Pohlers über die charakteristischen Zahlen von GPA und anderen Systemen, die demnächst in einem Band der Lecture Notes erscheinen sollen.

Es erscheint als angemessen, dieses Werk die *summa theoriae demonstrationis* zu nennen.

Tübingen W. Felscher

Dreben, B., Goldfarb, W., The Decision Problem: Solvable Classes of Quantificational Formulas, Reading (Mass.): Addison-Wesley Publ. Comp. 1979, 283 pp, illustr., cloth $ 38,50

Lewis, H. R., Unsolvable Classes of Quantificational Formulas, Reading (Mass.): Addison-Wesley Publ. Comp. 1979, 198 pp, 29 illustr., paper $ 18,90

Die beiden Bücher behandeln das Gebiet der Entscheidungsprobleme für Klassen von Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe. Eine Formelklasse nennt man entscheidbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der für beliebige Ausdrücke dieser Klasse entscheidet, ob sie erfüllbar sind (d. h. mindestens ein Modell besitzen) oder nicht. Andernfalls nennt man Formelklassen unentscheidbar. Unter dem Entscheidungsproblem einer Formelklasse versteht man die Frage, ob diese Klasse entscheidbar ist oder nicht. Im ersten Fall nennt man das Entscheidungsproblem dieser Klasse (gemeint ist: rekursiv) lösbar, im zweiten unlösbar.

Seit Beginn der Untersuchungen zur Logik hat ein Hauptaugenmerk auf dem Entscheidungsproblem logischer Formelmengen gelegen. Einerseits fand man recht früh entscheidbare Teilklassen der Prädikatenlogik, z. B. die Klasse aller identitäts- und funktionsfreien Formeln mit nur einstelligen Prädikatensymbolen (Löwenheim, Skolem, Behmann) und die Klasse aller abgeschlossenen pränexen Formeln mit Präfix der Form E . . . EA . . . A (Bernays, Schönfinkel) oder E . . . EAAE . . . E (Gödel, Kalmar, Schütte) ohne Funktions- oder Identitätssymbol. Andererseits bemühte man sich seit Beginn des Jahrhunderts intensiv um Reduktion des Entscheidungsproblems für die Klasse aller Formeln auf das Entscheidungsproblem kleinerer Klassen, die „einfacher" schienen, da ihre Elemente starken syntaktischen Einschränkungen wie über die Form ihres Präfixes, Anzahl und Stellenzahl der in ihnen auftretenden Prädikatenzeichen u. ä. unterworfen waren. Eine große Zahl derartiger Reduktionen wurden in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts gefunden. Nach dem Unentscheidbarkeitsnachweis für die gesamte Prädikatenlogik durch Church und Turing sind derartige sog. Reduktionsklassen ebenfalls unentscheidbar.

Die Forschungen auf dem Gebiet lösbarer und unlösbarer logischer Entscheidungsprobleme in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts wurden durch die folgenden beiden Bücher zusammengefaßt: W. Ackermann: Solvable cases of the decision problem (Amsterdam 1954) und

J. Suranyi: Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe (Budapest 1959). Es lagen starke Ergebnisse vor, wie z. B. die Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems für Formeln mit Präfix AAAE und nur einem (nämlich 2-stelligen) Relationssymbol bei beliebig vielen einstelligen Prädikatensymbolen, oder für Formeln mit Präfix A . . . AE bzw. AAAE . . . E und nur einem einzigen Prädikatensymbol (einem 2-stelligen). Aber mehrere derartige durch Präfixform und Zahl und Stellenzahl der Prädikate definierte „Standardklassen" blieben ungelöst.

1962 brachte eine epochemachende Arbeit von J. R. Büchi in den Math. Annalen den Durchbruch („Turing-machines and the Entscheidungsproblem"). Büchi entwickelt dort (durch geschickte Kombination von Ideen von Turing und Skolem) eine Methode, die es gestattet, beliebige kombinatorische Systeme auf besonders einfache Art durch prädikatenlogische Ausdrücke zu beschreiben in dem Sinne, daß die kombinatorischen Probleme dadurch in logische Entscheidungsprobleme übersetzt werden. Die Einfachheit dieser Übersetzungsmethode zahlte sich insofern aus, als dadurch „einfachen" universellen Berechnungsformalismen syntaktisch besonders einfache Formelklassen mit unlösbarem Entscheidungsproblem zugeordnet werden konnten.

In der Tat ließ sich durch Verfeinerung des Büchischen Ansatzes in kurzer Zeit das Entscheidungsproblem aller Standardklassen lösen. Darüber hinaus konnten nun mit Erfolg die syntaktischen Kriterien verfeinert werden, nach denen Kompliziertheit logischer Formeln gemessen wurde. Man erzielte immer schärfere Unentscheidbarkeitssätze, indem auch noch die aussagenlogische Struktur von Formeln sowie die Variablenverteilung in den atomaren Formeln wie auch die Anzahl dieser atomaren Formeln starken Einschränkungen unterworfen wurden. Auf der anderen Seite erreichte man in vielen Fällen, daß eine weitere Einschränkung der Ausdrucksmöglichkeiten als unentscheidbar nachgewiesener Klassen nachweislich zu entscheidbaren Klassen führt. Damit konnte in vielen Fällen eine scharfe und bzgl. der gewählten Kriterien vollständige Abgrenzung zwischen entscheidbaren und unentscheidbaren Ausdrucksklassen erreicht werden.

Bezüglich der oben erwähnten (im wesentlichen 5) Typen syntaktischer Klassifikationskriterien behandeln die beiden hier zur Rezension anstehenden Bücher einen repräsentativen und in gewisser Hinsicht vollständigen Teil des heute auf diesem Gebiet bekannten Wissens. Es handelt sich um die erste systematische zusammenhängende Behandlung dieser Fragen seit den Büchern von Ackermann und Suranyi, getrennt in die Behandlung entscheidbarer und unentscheidbarer Fälle. Für jeden, der in dieses Forschungsgebiet einsteigen will, ist die Lektüre dieser Bücher von großem Nutzen und kann nur empfohlen werden. Auf eine zusammenfassende Detailübersicht möchte ich hier verzichten, da sie den ausgezeichneten Inhaltsverzeichnissen bzw. Übersichten in den Büchern entnommen werden kann. (Das Dreben/Goldfarbsche Buch ist besonders schwer zugänglich, was z. T. an der extremen Systematik insbesondere in puncto Allgemeinheit und Durchgängigkeit der Methode liegt.)

Beide Bücher können im Prinzip auf der Grundlage der Kenntnisse einer einführenden Vorlesung in Prädikatenlogik und Rekursionstheorie verstanden werden. Beide Bücher sind sehr sorgfältig, mit vollständigen, präzisen Definitionen und wohlüberlegten Erläuterungen bzw. Beispielen zu Beweisen geschrieben. Dennoch setzen sie einen nicht geringen Grad mathematischer Reife voraus, was die Fähigkeit betrifft, komplexe kombinatorische Zusammenhänge zu begreifen. Jedes Buch füllt einen einsemestrigen Seminarkurs.

Dortmund E. Börger

Bochner, S., The Role of Mathematics in the Rise of Science, Princeton (N. J.): Princeton University Press 1966, 386 pp, cloth $ 20.00

Dies Buch ist durch Verschmelzung und Erweiterung aus einer Reihe von Einzel-Essays entstanden, die der Verfasser (*1899) ab 1961 publizierte. Unter den Erweiterungen ist vor allem der biographische Anhang zu nennen. Mit diesem Werk erhält der gebildete Laie (Mathematiker haben natürlich Vorteile) Gelegenheit, Mathematik- und Philosophie-Geschichte mit den Augen eines der bedeutenden Mathematikers unseres Jahrhunderts zu sehen. Die Lektüre ist belehrend und vergnüglich. Inhalt (Kapitelüberschriften in freier Übersetzung): I. Vom Mythos über die Mathematik zum Wissen, II. Der Unterschied zwischen Allgemeingeschichte und Wissenschaftsgeschichte, III. Umwälzungen in der Physik und Krisen in der Mathematik, IV. Über das Verhältnis von aristotelischer und heutiger Physik, V. Die Rolle der Mathematik beim Aufstieg der Mechanik, VI. Die Bedeutung einiger mathematischer Grundbegriffe für die Physik, VII. Das Wesen der Mathematik, VIII. Das Wesen der Analysis. Einige Zitate, ebenfalls in freier Übersetzung: „Die griechische Mathematik mag inspirativ und vielseitig gewesen sein; dennoch war sie langsam, ungeschickt . . . und irgendwie steril“, „Viel erstaunlicher als die Entwicklung der griechischen Mathematik durch 400 Jahre hindurch war die Umorientierung der Physik des 20. Jahrhunderts, die in ganzen 4 Jahren, 1925–1928, durch eine kleine Schar junger Leute bewirkt wurde“, „Mathematik ist eine Form der Poesie, die über Poesie hinausgeht, weil sie Wahrheit verkündet“, „Die Mathematik ist keine Handlangerin der Naturwissenschaften; man kann wesentliche Mathematik machen, ohne an die Naturwissenschaften überhaupt zu denken; philosophische Bemühungen, die Ursprünge der Mathematik auf Nützlichkeitserwägungen zu reduzieren, haben keinerlei Überzeugungskraft“, „Weyl . . . , prominenter Mathematiker und connaisseur der Physik; die Plastizität seines Denkens kam in seinen Büchern . . . klarer heraus, als in seinen Abhandlungen; das kommt bei Mathematikern selten vor.“

Mit diesen Zitaten hoffe ich möglichst viele Kollegen zu genußreicher Lektüre zu verlocken.

Erlangen K. Jacobs

Steen, L. A., Mathematics Today – Twelve Informal Essays, Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1978, 367 pp, cloth, DM 27,–

Der erste Satz des Vorworts dieses Buches lautet:

The objective of the present book of essays is to convey to the intelligent nonmathematician something of the nature, development, and use of mathematical concepts, particularly those that have found application in current scientific research.

Diesem Vorsatz dienten sorgfältige Vorarbeiten eines Kommitees namhafter Mathematiker, unter der Schirmherrschaft von AMS, MAA und SIAM. Hervorragende Autoren, die z. T. über Erfahrungen in der innermathematischen Publizistik verfügten, wurden für die einzelnen Essays gewonnen. Ich glaube dennoch nicht, daß dies Buch den gebildeten Laien erreichen wird, obwohl er aus verschiedenen Teilabschnitten großen Gewinn ziehen könnte. Die Bereitschaft von Nichtmathematikern, sich in eine ungewohnte, wenn auch noch so einfache Formel hineinzudenken, kann m. E. nicht niedrig genug eingeschätzt werden. Man darf gespannt sein, ob Gymnasiallehrer die Sprachhürde nehmen und die sich hier ausgezeichnet bietende Gelegenheit, ihre mathematische Bildung aufzufrischen, nützen werden; ich bin auch hier pessimistisch. Hervorragend geeignet ist das Buch als bildende Lektüre für Hochschulmathematiker, die über die Grenzen der eigenen Spezialdisziplin hinausschauen wollen. Ich finde die Dialoge in Hammonds Beitrag „Mathematics – our invisible culture“, Penrose's Essay „The geometry of the universe“ und den Artikel „The four-color problem“ von Appel-Haken besonders reizvoll, möchte aber auch die übrigen Beiträge – mit den Autoren J. Alperin, F. Browder, M. Davis, R. Graham, F. C. Hoppensteadt, S. Mac Lane, D. S. Moore, I. Richards, J. Schwartz und P. Thompson – dem Leser besonders ans Herz legen.

Ein verdienstvolles Buch.

Erlangen K. Jacobs

Tropfke, Johannes, Geschichte der Elementarmathematik. 4. Auflage, Band 1: Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin – New York: Walter de Gruyter 1980, XIII + 742 S., DM 184,–

J. Tropfkes „Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung" war längst zu einem Begriff geworden; kein an der Geschichte seiner Wissenschaft interessierter Mathematiklehrer kam in den letzten Jahrzehnten ohne sie aus – eben weil sie im Gegensatz zu anderen Darstellungen infolge ihres systematischen Aufbaus als eine Art Nachschlagewerk auf Fragen nach dem Auftreten und der Entwicklung bestimmter Probleme aus dem Gebiet der Elementarmathematik sofort Antwort zu geben vermochte. Zuerst bescheiden in zwei Bänden 1902 veröffentlicht, gab sie der Berliner Oberstudiendirektor Tropfke von 1921–1924 in einer auf sieben Bände angewachsenen zweiten Auflage heraus. Zwischen 1930 und 1940 erschienen die ersten vier Bände, vom Verfasser erneut gründlich ergänzt, in dritter Auflage, doch die Manuskripte der weiteren Bände, welche der Verfasser hinterlassen hatte, gingen bei Kriegsende verloren.

Nach jahrelanger Vorbereitung am Institut für Geschichte der Naturwissenschaften der Universität München haben die Bearbeiter des jetzt erschienenen ersten Bandes der vierten Auflage eigentlich einen ganz neuen „Tropfke" vorgelegt. Einerseits hat die in vielen Ländern intensivierte mathematikhistorische Forschung inzwischen eine Fülle von Material neu erschlossen, das berücksichtigt werden mußte, andererseits nahm man eine Straffung und Neugliederung im Interesse einer größeren Übersichtlichkeit vor. So ist diese Neuauflage nur noch auf drei Bände berechnet. Im wesentlichen enthält Band 1 den Stoff der ersten drei Bände der vorangegangenen Auflage, auf etwa ebenso vielen Seiten. Er ist jetzt auf vier Kapitel verteilt.

Das erste, rund 150 Seiten umfassende, handelt von den Zahlen: Zahlwörter, Zahlzeichen, Zahl- und Maßsysteme in vielen Kulturen werden vorgestellt, die Sonderstellung der Null und der Eins beschrieben und die Systematisierung bei den Griechen behandelt, schließlich die modernen Definitionen (algebraisch, transzendent, komplex usw.) angeführt. Das zweite Kapitel beschreibt auf rund 200 Seiten die Entwicklung der Rechenoperationen: zunächst Allgemeines, Fachwörter, Symbole, dann die elementaren Operationen (Kopf-, Finger-, Abacusrechnen sowie die vier Grundrechenarten in schriftlicher Form). Das dritte Kapitel über die Algebra (rund 150 Seiten) ist in fünf Abschnitte gegliedert: Algebra ohne Symbole (Dreisatz, einfacher und doppelter falscher Ansatz und ähnliches), die algebraische Ausdrucksweise (Bezeichnungen und Symbole), Gleichungen (von den linearen mit einer Unbekannten bis zu den höheren mit mehreren Unbekannten), allgemeine Gleichungstheorie (von Cardano bis zum Fundamentalsatz der Algebra) und schließlich Methoden zur näherungsweisen Lösung. Sehr stark erweitert gegenüber den früheren Auflagen wurde der Inhalt des vierten Kapitels, das angewandte Rechnen (rund 150 Seiten): im ersten Abschnitt werden fünfzehn verschiedene Aufgabentypen aus dem täglichen Leben, im zweiten unter fast vierzig Zwischenüberschriften Probleme der Unterhaltungsmathematik vorgestellt. Es darf wohl hier gesagt werden, daß ohne die unermüdliche Mitarbeit des inzwischen über 90jährigen Kurt Vogel, der bereits den letzten erschienenen Band der vorigen Auflage zum Druck befördert hatte, eine solche Reichhaltigkeit kaum hätte erzielt werden können.

Am Beispiel der quadratischen Gleichungen (Abschnitt 3.3.4, S. 406–425) sei skizziert, in welcher Weise die Fülle der genannten Themen in dieser Neubearbeitung gemeistert wird. Zunächst werden Beispiele aus der ägyptischen und babylonischen Mathematik erläutert, dann solche aus Euklid, Diophant, aus indischen und arabischen Quellen (einschließlich geometrischer Interpretationen). Hinweise auf gegenseitige Beeinflussung fehlen ebensowenig wie kurze Verweise auf ähnliche Texte anderer Autoren, denn natürlich können überall nur ausgewählte, für die jeweilige Zeit oder Behandlungsart besonders charakteristische Beispiele gebracht werden. Der Schlußabschnitt über die quadratische Gleichung im Abendland wird eröffnet durch Aufzählung der drei hier erzielten Fortschritte (Anerkennung der Null und der negativen Zahlen als Koeffizienten ermöglicht Zusammenfassung in *einer* Normalform; Anerkennung derselben Zahlen als Lösungen; Einführung der komplexen Zahlen leitet zum Fundamentalsatz der Algebra über), dann folgen Beispiele aus Stifel, Cardano, Viète und Descartes.

Überall findet der Benutzer genaue Verweise auf das umfangreiche Literaturverzeichnis, das sowohl die weiterführende neuere Sekundärliteratur wie eine Fülle von Originalquellen aufführt – insgesamt weit über tausend. Der Druck ist dank der Verwendung verschiedener Schriftarten und eines ansprechenden Satzes sehr übersichtlich, nur wurde aus Kostengründen auf den Randausgleich verzichtet. Zahlreiche in den Text eingestreute Abbildungen tragen zum besseren Verständnis bei und erhöhen die Brauchbarkeit dieses Werkes, das für weitere Jahrzehnte als „der Tropfke" *das* Nachschlagewerk zur Elementarmathematik bleiben wird.

Hamburg C. J. Scriba

Leibniz, Gottfried Wilhelm, Sämtliche Schriften und Briefe. Dritte Reihe: Mathematischer, Naturwissenschaftlicher und Technischer Briefwechsel, 1. Band, 1672–1676. Herausgegeben von dem Leibniz-Archiv der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover. Berlin (Ost): Akademie-Verlag 1976, LXXV + 861 S., geb., DM 180,–

Hofmann, Joseph Ehrenfried, Register zu Gottfried Wilhelm Leibniz: „Mathematische Schriften" und „Der Briefwechsel mit Mathematikern" (herausgegeben von C. I. Gerhardt) (Olms Paperbacks, Bd. 49). Hildesheim – New York: Georg Olms Verlag 1979, 312 S., Kart., DM 39,80

Innerhalb der sog. Akademie-Ausgabe der sämtlichen Schriften und Briefe von G. W. Leibniz, deren Reihen I–III den Briefwechsel, IV–VII die Schriften enthalten, ist die Mathematik bisher sehr schlecht weggekommen. Gemäß der Planung wird sie zusammen mit den Naturwissenschaften und der Technik in Reihe III durch den Briefwechsel, in Reihe VII durch die Schriften vertreten sein. Während sich bei Reihe VII die ersten Bände noch in der Vorbereitung befinden, liegt in Reihe III der erste Band mit dem Briefwechsel der Jahre 1672–1676 vor. Für die Bearbeitung war ursprünglich Dietrich Manke vorgesehen. Nach seinem frühen Tod im Jahre 1939 wurde als sein Nachfolger J. E. Hofmann von der Preußischen Akademie der Wissenschaften mit der Vorbereitung der Briefe aus der Pariser Zeit für den Druck beauftragt. Kriegs- und Nachkriegsjahre führten zu großer Verzögerung, da der neue Herausgeber die Arbeit nur neben seiner Berufstätigkeit ausführen konnte. Das Manuskript des Bandes hatte er noch fertiggestellt, das Erscheinen aber nicht mehr erlebt, da er 1973 infolge eines erlittenen Verkehrsunfalles verstarb. Unter Mitwirkung einiger seiner Freunde besorgte Dr. Heinz-Jürgen Heß vom Leibniz-Archiv in Hannover die Endredaktion, das Korrekturlesen und die Registerherstellung dieses Bandes.

J. E. Hofmann besaß dank seiner jahrzehntelangen Beschäftigung mit Leibniz, die sich auch in vielen Veröffentlichungen niederschlug, einen einmaligen Überblick über das mathematische Schaffen des großen Gelehrten. Daher hat er, abweichend von den übrigen Reihen, der Briefedition ausführliche sachliche Erläuterungen beigegeben, worin insbesondere die Entwicklung der mathematischen Ideen von Leibniz während der kritischen Zeit seines Pariser Aufenthaltes (1672–1676) sorgfältig dokumentiert, interpretiert und in den zeitgenössischen Wissensstand eingeordnet wird. In der 50seitigen Einleitung geht er darüberhinaus auf den bekannten Prioritätsstreit um die Erfindung der Infinitesimalrechnung zwischen Newton und Leibniz ein, fallen doch in die genannte Zeitspanne die beiden Besuche von Leibniz in London, wo dieser Gelegenheit hatte, in einige Manuskripte Newtons Einblick zu nehmen und sich Notizen daraus zu machen. Auch diese sind im vorliegenden Band abgedruckt. Ausführliche Register sowie Wort- und Sachverzeichnisse für die englischen, die französischen und lateinischen Texte sowie ein sehr detailliertes Sachregister beschließen den Band und machen ihn zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel für die weitere Forschung.

Da aber mit Sicherheit bei der Fülle der erhaltenen Briefe und Manuskripte noch Jahrzehnte vergehen werden, bevor die Reihen III und VII einmal abgeschlossen sind, behalten vorerst die beiden von C. I. Gerhardt im 19. Jahrhundert veranstalteten Auswahlausgaben „G. W. Leibniz: Mathematische Schriften", 7 Bände, Berlin und Halle 1849–1863 und „Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern", Bd. 1 (mehr nicht erschienen), Berlin 1899 (beide nachgedruckt im Verlag Olms, Hildesheim, 1962) trotz vieler Unzulänglichkeiten noch ihren Wert. Deshalb wurde als Ergänzung dazu vom Referenten das von J. E. Hofmann für seinen privaten Gebrauch erstellte Register herausgegeben. Die beiden eben zitierten Ausgaben sind darin getrennt erfaßt. Im jeweiligen Namenregister finden sich nicht nur Personen, sondern auch deren Schriften – oft aufgrund von Anspielungen mühsam identifiziert –, wodurch z. B. die Hinweise auf Johann I. Bernoulli allein 20 Seiten füllen. Wo in den Briefen ein Anonymus, Amicus, Anglus quidam usw. erwähnt wird, konnte Prof. Hofmann in vielen Fällen ebenfalls den Namen ausfindig machen. Die auftretenden Zeitschriften sind in einem eigenen Alphabet erfaßt. Im Gegensatz zu einem rein mechanisch erstellten Register handelt es sich also hier um das Resultat einer jahrzehntelangen Beschäftigung mit der Materie. Dieser wertvolle Schlüssel zur Originalliteratur wird erst dann veraltet sein, wenn die Akademie-Ausgabe einmal vollständig vorliegen wird. Bei den geringen Finanzmitteln, die unsere Gesellschaft für derartige Vorhaben aufzubringen bereit ist, mag dieses Ereignis vielleicht zu Lebzeiten unserer Enkel, vielleicht auch noch später eintreten. Gegenwärtig wird am Leibniz-Archiv in Hannover am folgenden Band sowie am ersten Band der Reihe VII gearbeitet.

Schließlich sei in diesem Zusammenhang noch hingewiesen auf die dritte posthume Buchveröffentlichung J. E. Hofmanns, die englische Ausgabe des bekannten, seit langem vergriffenen Leibniz-Buches „Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672–1676)", München 1949. Die noch vom Verfasser durchgesehene, von Adolf Prag (Oxford) angefertigte revidierte Übersetzung erschien 1974 bei der Cambridge University Press unter dem Titel „Leibniz in Paris, 1672–1676. His growth to mathematical maturity". Wie der fünfteilige chronologische Index sofort zeigt (er führt allein etwa 100 Briefe der Jahre 1638 bis 1669 auf), behandelt der Verf. in dieser Monographie nicht nur die Pariser Jahre, sondern er bezieht die umfangreiche und verwickelte Vorgeschichte der entscheidenden mathematischen Probleme aufgrund eingehender Kenntnis der Originalquellen mit ein. So ist diese Darstellung zugleich hervorragend geeignet als Einführung in die von Leibniz während seines Parisaufenthaltes mit Mathematikern und Naturwissenschaftlern geführte Korrespondenz.

Hamburg C. J. Scriba

Euler, Leonhard, Opera Omnia. Series Secunda, Vol. 16: Commentationes mechanicae ad theoriam machinarum pertinentes. Hg. von Ch. Blanc und P. de Haller. 1979, XX + 327 S. – **Vol. 20 und 21: Commentationes mechanicae et astronomicae ad scientiam navalem pertinentes,** 1. bzw. 2. Teil. Hg. von W. Habicht. 1974, LX + 275 S. bzw. 1978, CCXLIV + 241 S. **Series Tertia, Vol. 9: Commentationes opticae.** Hg. von W. Habicht und E. A. Fellmann. 1973, LXIV + 328 S. – Zürich: Orell Füssli Verlag. Je Band sFr 135.–

Die Serien II (Opera mechanica et astronomica) und III (Opera physica, Miscellanea) nähern sich allmählich der Vollendung. Mit den Bänden II, 20 und 21 liegen alle Veröffentlichungen zur Schiffstheorie vor, nachdem Eulers zweiteiliges Werk „Scientia navalis" aus dem Jahre 1749 schon früher in den Bänden II, 18 und 19 neu herausgegeben worden war. Vor allen Dingen ist sehr zu begrüßen, daß der Herausgeber der Bände 20 und 21, Walter Habicht, in Band 21 einen sehr umfangreichen deutschsprachigen Kommentar aufgenommen hat. Dort erläutert er auf fast 200 Seiten Eulers großes Werk und auf weiteren 50 Seiten die späteren, in Band 21 enthaltenen Einzelarbeiten Eulers zum Schiffswesen, nachdem er gleiches in der Einleitung zu Band 20 schon für die früheren, dort versammelten Arbeiten getan hatte. Die „Scientia navalis“ trennt nämlich zugleich zwei Schaffensperioden Eulers auf dem Gebiet der Hydromechanik voneinander – während der ersten suchte Euler nach den einfachen und allgemeinen Prinzipien, während der zweiten erweist er sich als der Meister, der die selbstgeschaffenen Hilfsmittel souverän anwendet. Neben der „Mechanica“ stellt die „Scientia navalis“ einen Meilenstein auf dem Weg zur modernen rationalen Mechanik dar, werden doch in den ersten Kapiteln die Grundlagen der Hydrostatik gelegt, in den folgenden die Theorie des Wasserwiderstandes und der Fortbewegung von Körpern im widerstehenden Medium erarbeitet. Außer den Einleitungen Habichts wird man deshalb auch den über 100 Seiten umfassenden Bericht „Rational fluid mechanics 1687–1765“ von C. A. Truesdell heranzuziehen haben, der 1954 in Bd. II, 12 publiziert wurde, die Einleitung Truesdells zu Bd. II, 13 aus dem folgenden Jahr und schließlich die hervorragende, als selbständiger Teilband II, 11/2 erschienene Studie des gleichen Verfassers aus dem Jahre 1960 „The rational mechanics of flexible or elastic bodies“, 435 Seiten umfassend.

Der 1979 erschienene Band II, 16 enthält Arbeiten Eulers zur Maschinentheorie. Vorausgegangen war schon 1957 mit Band II, 15 ein erster Band derartiger Arbeiten, während der dritte und letzte diesem Thema gewidmete Band II, 17 bisher noch aussteht. Der von den Herausgebern gewählte Begriff „Theoria machinarum“ könnte etwas in die Irre führen: in den in Band II, 16 vereinigten Arbeiten Eulers und seines Sohnes Johann Albrecht werden Anwendungen der Hydromechanik behandelt: man findet hier Untersuchungen der Strömungsverhältnisse und auftretenden Kräfte bei Windmühlen und Drachen (letztere wurden damals von den Physikern bei der Erforschung der Gewitterelektrizität verwendet), bei Ballons (es war die Zeit der Montgolfièren!), man liest Studien über die Verbesserung der Wasserräder, über archimedische Schrauben, über die Konstruktion eines Manometers und die Bewegung des Blutes in den Arterien (aufgefaßt als eine Strömung durch eine elastische Röhre). Daß sich diese Studien oft nicht unmittelbar für die Praxis nutzbar machen ließen, hatte zwei, von Euler selbst erkannte Gründe: einerseits wählte er in Ermangelung einer besseren, empirisch gestützten Hypothese für die Wirkung des Windes oder einer strömenden Flüssigkeit auf eine geneigte Ebene das Newtonsche Sinusquadratgesetz, das die Verhältnisse nur unzureichend beschreibt, andererseits führten die dynamischen Untersuchungen oft auf so komplizierte Gleichungen, daß ihre Lösung außerhalb des Bereichs der damals bekannten mathematischen Methoden lag.

In Serie III, in der jetzt lediglich noch Bd. 10 mit Arbeiten über Magnetismus, Elektrizität und Wärme fehlt, wurde 1973 mit Band 9 die lange Reihe jener Bände abgeschlossen, die der Optik gewidmet sind: schon 1911/12 war in den Bänden III, 3 und 4 Eulers dreiteilige „Dioptrica“ aus den Jahren 1769–71 neu herausgegeben worden. Zwischen 1963 und 1969 folgten die Bände III, 5–8 mit Abhandlungen aus der Theorie der Optik; dazu hatten die verschiedenen Herausgeber kürzere Einleitungen beigesteuert. In allen in III, 9 zusammengefaßten Arbeiten untersuchte Euler Probleme aus dem Gebiet der geometrischen Optik. Einige Abhandlungen verbessern die allgemeine Theorie, andere behandeln die Konstruktion wirksamer Linsensysteme, Teleskope und Mikroskope, wobei das Hauptproblem die Korrektur der sphärischen und chromatischen Aberration darstellte. Auch dieser ein Thema abschließende Band zeichnet sich aus durch besonders ausführliche Kommentare der Herausgeber. W. Habicht gibt auf 60 Seiten eine eindringliche mathematische Analyse der Eulerschen Arbeiten zur geometrischen Optik vom modernen Standpunkt aus. Während Euler Mißerfolge bei Anwendung seiner Theorie in der Praxis auf ungenügende Qualität der optischen Gläser, mangelhafte Bearbeitung und unvollständige Kenntnis der Dispersionsgesetze zurückführte, lag der Hauptgrund seiner Enttäuschung – wie die moderne Analyse zeigt – darin, daß er sich auf die Untersuchung der Abbilder von Objekten auf der optischen Achse beschränkte, die Störeffekte weiter davon entfernt liegender Gegenstände unterschätzend. Erst die von Gauß einige Jahrzehnte später entwickelte Theorie erwies sich bei der Verbesserung optischer Instrumente als erfolgreich. W. Habicht zeigt in seiner Einleitung, wie der Anschluß von Eulers Untersuchungen an die in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelte allgemeine Abbildungstheorie durch Hinzufügung einiger wichtiger Ideen hergestellt werden kann. Am Schluß des Bandes beleuchtet E. A. Fellmann in einem historischen Kommentar Eulers Stellung in der Geschichte der Optik. Er skizziert die Ansichten Keplers und Newtons, geht auf die praktischen Versuche der Konstruktion achromatischer Linsen ein, auf Eulers und Klingenstjernas theoretische Bemühungen sowie auf die Fortschritte, welche Clairaut und d'Alembert gelangen. Zum Schluß streift er Eulers Überzeugung, daß optische, elektrische und magnetische Erscheinungen als verschiedene Ätherzustände eng miteinander zusammenhängen und deshalb eine simultane Behandlung erfahren müßten. Neben einem Literaturverzeichnis enthält der Band auch ein chronologisches Verzeichnis aller optischen Schriften Eulers, die in den Bänden III, 3–9 jetzt vorliegen.

Abschließend sei noch einmal betont, wie stark sich die Ausgabe der „Opera Omnia" des großen Schweizers in den letzten Jahren dadurch gewandelt hat, daß durch die Aufnahme fachkundiger und wissenschaftshistorischer Kommentare dem Benutzer weit mehr als der bloße Abdruck des Originaltextes der Eulerschen Abhandlungen geboten wird. Die Ansprüche an wissenschaftliche Editionen sind in den letzten hundert Jahren erheblich gestiegen. Am zu Anfang des Jahrhunderts dieser Ausgabe zugrundegelegten Prinzip, die publizierten Arbeiten Eulers unverändert in den Reihen I–III abzudrucken, wurde festgehalten: auf Entwürfe und Handschriften wird nicht Bezug genommen, die Entstehung einzelner Arbeiten nicht näher dokumentiert. Aber die inzwischen aufgenommenen längeren Einleitungen, Kommentare und Analysen erleichtern ganz wesentlich das Verständnis der Eulerschen Arbeiten, ja sie bieten teilweise Ergebnisse wissenschaftshistorischer Forschung dar, die anderswo nicht zu finden sind. Wer immer sich mit der Mathematik und der Naturwissenschaft des 18. Jahrhunderts beschäftigt, sollte darum bei Eulers „Opera" nicht nur an dessen eigene Arbeiten denken, sondern auch an die wertvollen Beiträge der Herausgeber. Es wäre der Mühe wert, an geeigneter Stelle der neu begonnenen Serie IV eine Übersicht über dieselben abzudrucken.

Hamburg C. J. Scriba

Euler, L., Opera omnia. Series quarta A, Commercium epistolicum, Volumen quintum: Commercium cum A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange, edd. Adolf P. Juškevič et René Taton, Basel: Birkhäuser Verlag 1980, VIII + 611 S. DM 160,–

Die Briefwechselreihe IV A der Eulerschen Opera omnia Ausgabe ist auf sieben Bände geplant. Während der 1975 erschienene Band 1 die Beschreibung des gesamten erhaltenen Eulerschen Briefwechsels enthielt, ist in dem vorliegenden Band, der als zweiter dieser Reihe erschienen ist, zum ersten Mal in einer mustergültigen Edition die gesamte bekannte Korrespondenz Eulers mit A. Clairaut, Jean d'Alembert und J. L. Lagrange veröffentlicht, von den 138 Briefen 90 zum ersten Mal. Hinzu kommen anhangsweise 12 Briefe Clairauts an K. G. Razumovskij, J. D. Schumacher, A. N. Grischow und G. F. Müller, 6 Schriften bzw. Briefe d'Alemberts an S. Formey und J. A. Euler (Eulers Sohn) bzw. zwei Briefe von Lagrange an S. Formey und A.-J. Lexell. Der einzige bekannte Brief zwischen Laplace und Euler soll im letzten Band der Reihe IV A erscheinen, mit Monge hat Euler nie korrespondiert.

Die Gliederung des Bandes, über die das Vorwort Auskunft gibt, ist bis ins kleinste Detail durchdacht. Die Herausgeber haben alles getan, um das überreiche, wissenschaftliche Material der Forschung zu erschließen und zugänglich zu machen, das eine kurze Besprechung kaum angemessen aufzeigen kann. Eine umfangreiche Einführung (63 Seiten) zu allen drei Korrespondenzen charakterisiert die Briefwechsel und ermöglicht, den historischen Wert der veröffentlichten Texte einzuschätzen.

Jeder chronologisch geordneten Korrespondenz geht eine Liste der Briefe und Auszüge aus den veröffentlichten Briefen voraus, die einzelnen Briefe sind ausführlich in vorzüglicher Weise nach inhaltlichen und historischen Gesichtspunkten kommentiert. Allen drei Korrespondenzen ist das Faksimile eines Briefes des Korrespondenten an einen anderen Briefpartner als Euler beigegeben. Den nichtfranzösischen Briefen ist eine französische Übersetzung beigefügt.

Der Eulersche Briefwechsel mit Clairaut erstreckt sich über die Zeit 1740–1764 und umfaßt 61 Briefe. Er behandelt zahlreiche Probleme, läßt sich aber in drei Abschnitte gliedern: 1. 1740–1744 geht es vorwiegend um Fragen der reinen Mathematik und der Mechanik, insbesondere der Hydromechanik, 2. 1744–1752 steht die Behandlung der Theorie der Mondbewegung und anderer Fragen der Himmelsmechanik im Vordergrund, 3. 1763/4 geht es um die Theorie und Konstruktion optischer Instrumente. In vielen Briefen gibt Euler Clairaut Andeutungen über seine jüngsten, noch unedierten Forschungen. Eulers Briefwechsel mit d'Alembert erstreckt sich über die Zeit 1746–1773 und umfaßt 40 Briefe. Zu den dauernden Streitpunkten zwischen beiden Briefpartnern gehörten 1. die Logarithmen negativer Zahlen, 2. die Ansätze zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, 3. die Integrale partieller Differentialgleichungen. Hinzu kamen andere, persönliche Streitpunkte. Sie hingen damit zusammen, daß d'Alembert ein Freund von Maupertuis war, dem Präsidenten der Akademie der Wissenschaften in Berlin (1746–1759) und Freund von König Friedrich II. Dieser versuchte vergeblich, d'Alembert zu überreden, Nachfolger von Maupertuis zu werden.

Themen, in denen d'Alembert und Euler miteinander wetteiferten, waren die Himmelsmechanik (Mondtheorie), das Problem der Äquinoktien und der Nutation der Erdachse, die Hydromechanik (Widerstand der Flüssigkeiten) sowie die Diskussion über die schwingende Saite. Euler opponierte dagegen, daß d'Alembert die Priorität der Lösung beanspruchte. Die Herausgeber stellen richtig, daß d'Alembert nicht bis zu seinem Lebensende unstetige Funktionen (im Sinne des 18. Jahrhunderts) bei Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zurückwies (zur Problematik s. Th. Hawkins, Lebesgue's theory of integration, New York ^{2}1975, S. 4). Die letzten Briefe dieser Korrespondenz geben über die persönlichen Beziehungen der beiden Briefpartner und Eulers Privatleben Auskunft. Während sich seit d'Alemberts Berlinbesuch im Jahre 1763 deren Beziehungen freundschaftlich entwickelten, brach die Korrespondenz zwischen ihnen nach Eulers Rückkehr nach Petersburg im Jahre 1766 für immer ab.

Eulers Briefwechsel mit Lagrange umfaßt 37 Briefe und betrifft die Zeit 1754–1775. Mit diesem geistig ebenbürtigen Partner korrespondierte er über die gesamte reine und angewandte Mathematik, insbesondere über die Zahlentheorie. Lagrange präzisierte und verallgemeinerte Eulers Ergebnisse – die Herausgeber nehmen eine höchst interessante Synkrisis zwischen beiden Forschern vor. Zu den wichtigsten Themen gehörte die Variationsrechnung, deren Erfindung Euler ausdrücklich Lagrange zuschrieb. Zu den weiteren Themen sind vor allem partielle Differentialgleichungen von Kreis- und zylindrischen Wellen zu zählen, die schwingende Saite, Probleme der Mechanik (Tautochronenproblem), Integrabilitätskriterien sowie die Himmelsmechanik und Astronomie (Mondtheorie). Dieser Briefwechsel erklärt in der Tat viele wichtige Aspekte der Arbeiten zwei der bedeutendsten Repräsentanten der europäischen Wissenschaft während der betreffenden Periode 1754–1775.

Die umfangreichen dokumentarischen Anhänge enthalten acht wertvolle Verzeichnisse, darunter Register der erwähnten Eulerschen Veröffentlichungen und Handschriften, eine äußerst nützliche Konkordanztafel der Eulerschen Schriften innerhalb der Opera omnia Ausgabe, der Veröffentlichungen anderer Autoren und der Personennamen. Auch die äußerst gediegene Bandgestaltung verdient besonders hervorgehoben zu werden. Mit diesem Band hat die Wissenschaftsgeschichte, speziell zum 18. Jahrhundert, einen erheblichen Schritt nach vorn getan.

Berlin E. Knobloch

Dieudonné, J., avec la collaboration de P. Dugac, W. J. et F. Ellison, J. Guérindon, M. Guillaume, G. Hirsch, C. Houzel, P. Libermann, M. Loève, J.-L. Verley: Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900. Paris: Hermann 1978. Bd. 1: X + 267 S., Bd. 2: VII + 472 S., ffr 272.–

Laut Titel will dieses Werk einen Abriß der Geschichte der Mathematik von 1700–1900 geben. Aber was wird wirklich geboten? Die 13 Kapitel, deren Länge zwischen 10 und 170 Seiten schwankt, sind überschrieben: Mathematische Analysis im 18. Jahrhundert, Algebra und Geometrie bis 1840, Algebra seit 1840, analytische Funktionen, Zahlentheorie, Grundlagen der Analysis, elliptische Funktionen und abelsche Integrale, Funktionalanalysis, Differentialgeometrie, Maß und Integration, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Axiomatik und Logik. Hinzu kommen eine Einleitung von 16 Seiten, ein 30seitiger „historischer Index" (Kurzbiographien von rund 330 Mathematikern von durchschnittlich 4–5 Zeilen!) und ein 9seitiges Register mathematischer Begriffe. Das Inhaltsverzeichnis führt neben den Überschriften der Kapitel auch diejenigen der Abschnitte auf, nennt aber nicht die Verfasser der einzelnen Kapitel – interessiert man sich dafür, welche Kapitel ein bestimmter Mitarbeiter geschrieben hat, muß man bei sämtlichen Kapitelanfängen nachschlagen.

Nachdem das 17. Jahrhundert mit der Erfindung der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung wichtige neue Gebiete erschlossen hatte, war bekanntlich die Mathematik des 18. Jahrhunderts, zu erheblichen Teilen aber auch noch diejenige des 19. Jahrhunderts von den Anwendungen geprägt, um nicht zu sagen: mit ihnen untrennbar verbunden. Doch Kapitel über die Mechanik, die Hydromechanik, die Himmelsmechanik, die Wärmetheorie, die Optik usw. fehlen. Man sehe sich die gesammelten Werke Eulers oder der großen Franzosen an, man gehe die Liste der Preisaufgaben der Akademien durch, man schaue in die wissenschaftlichen Korrespondenzen des 18. und 19. Jahrhunderts: wie sehr stehen da überall die Anwendungen und ihre speziellen Probleme im Vordergrund. Was J. Dieudonné und seine Mitarbeiter bieten, ist nur eine Auswahl aus dem damaligen mathematischen Universum, gesehen durch die Brille des heutigen reinen Mathematikers. Es handelt sich eher um einen Ausschnitt denn um einen Abriß der Geschichte der Mathematik, wobei viele der wesentlichen Querverbindungen zu den Anwendungen verlorengingen.

Dann der Zeitraum: Abgesehen von den beiden ersten Kapiteln wird das 18. Jahrhundert gegenüber dem 19. recht stiefmütterlich behandelt. Auf der anderen Seite gehen viele Autoren über das 19. Jahrhundert hinaus und beziehen die spätere Entwicklung mit ein. (Fast 25% der im historischen Index aufgeführten Personen sind nach 1875 geboren, können also zur Mathematik des 19. Jahrhunderts kaum noch beigetragen haben.) Dies ist freilich kein Zufall, sondern in vielen Fällen bedingt durch die Konzeption der Kapitel: Angelegt als Übersichtsartikel auf der Grundlage des heutigen Mathematikverständnisses, sehen sie in der Geschichte der Mathematik vor allem jene Entwicklungslinien, aus denen die moderne, abstrakt-axiomatisch-strukturelle Auffassung von Mathematik hervorging. Wo „Vorläufer" nur „Einzelprobleme" behandelten, werden diese bestenfalls gelegentlich im Vorübergehen erwähnt; im Vordergrund steht bei vielen Beiträgen die Darlegung der mathematischen Strukturen und Theorien in heutiger Ausdrucksweise, verbunden mit historischen Hinweisen auf jene Mathematiker und ihre Publikationen, die im 18., 19. und 20. Jahrhundert zu deren Entwicklung wichtige Beiträge leisteten. (Eine der wenigen Ausnahmen stellt z. B. das von P. Dugac verfaßte Kapitel über die Grundlagen der Analysis dar, das in seinem Aufbau den Originalquellen folgt und diese referiert und interpretiert.)

Man verstehe mich nicht falsch: Ich bezweifle keineswegs den Wert von Übersichten über Teilgebiete der Mathematik, in denen nicht wie in einem Lehrbuch jeder Satz auch bewiesen wird – im Gegenteil, ich schätze deren Bedeutung sehr hoch ein. Aber ich wehre mich gegen die mißbräuchliche Benutzung des Wortes Geschichte (histoire). Wenn ein Philosoph eine systematisch gegliederte Einführung in seine Disziplin schreibt, kann er natürlich wesentliche philosophische Grundpositionen am Werk großer Denker exemplifizieren; doch es wäre ein Mißverständnis, allein deshalb sein Buch als „Geschichte der Philosophie“ zu betiteln.

Die mathematikhistorische Forschung der letzten Jahrzehnte hat große Fortschritte gemacht in der Erschließung von Quellen (wovon die Autoren leider nur teilweise Kenntnis genommen haben) wie auch in ihrer wissenschaftlichen Methodik. Mit zunehmendem Interesse, das ihr in jüngster Zeit auch von Nichtmathematikern entgegengebracht wurde, stand sie (und steht sie noch) in der Gefahr, in eine einseitig durch soziologische Fragestellungen bestimmte Richtung gedrängt zu werden, wo doch nach meiner Auffassung ihr Hauptobjekt die Entwicklung der mathematischen Probleme und Theorien sein muß. Jene Art von Fragestellungen, die sicher auch dazugehört, kommt im vorliegenden Werk praktisch nur in der Einleitung des Herausgebers zur Sprache. In den einzelnen Kapiteln findet man kaum einmal ein Wort darüber, inwiefern etwa die Tätigkeit eines Mathematikers an einer Akademie, Universität, Technischen Hochschule oder als Gymnasiallehrer den Fortschritt seiner mathematischen Ideen gehemmt, gefördert oder in bestimmte Richtung gelenkt hat. Das von J. Dieudonné herausgegebene Werk beweist andererseits, daß neben der einen Bedrohung, der Überfremdung durch allgemeine gesellschaftswissenschaftliche Aspekte, die Mathematikgeschichte der anderen Bedrohung noch keineswegs entronnen ist, dem Mißverständnis nämlich, die Uminterpretation älterer mathematischer Ergebnisse im Sinne der modernen Auffassung und ihre Anpassung in die jetzige Form der Theorie sei Mathematikgeschichte. So wenig wie es statthaft ist, in der politischen Geschichtsschreibung aus dem Geschehen der Vergangenheit nur jeweils das herauszugreifen, was den Tendenzen der Gegenwart oder den eigenen Intentionen förderlich ist, so wenig darf die Geschichtsschreibung der Mathematik ausgehen von einer vorgefaßten Meinung, was Mathematik ist oder wie sie zu sein habe, um dann in der Vergangenheit allein nach jenen Elementen zu suchen, die sich in das gegenwärtige Theoriengebäude an geeigneter Stelle einbauen lassen. Es ist Aufgabe der Mathematikgeschichtsschreibung, die ganze Vielfalt der Entwicklung in der Vergangenheit sina ira et studio herauszuarbeiten und zu beschreiben. Der schwierige Kurs zwischen Skylla und Charybdis bleibt weiterhin zu suchen.

Hamburg C. J. Scriba

Dieudonné, J., History of Functional Analysis (North Holland Mathematics Studies, vol. 49), Amsterdam – New York: North Holland Publ. Comp. 1981, VI + 312 pp.

Verfasser beginnt sein Buch mit der folgenden Definition: Funktionalanalysis ist die Lehre von den topologischen Vektorräumen und von den Abbildungen eines Teiles eines topologischen Vektorraumes E in einen topologischen Vektorraum F, wobei diese Abbildungen verschiedenen algebraischen und topologischen Bedingungen genügen. Selbst unter diese relativ enge Definition fällt ein großer Teil der Analysis, insbesondere die heutige Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Kap. I berichtet über die Anfänge der Theorie der Fourierreihen und das Sturm-Liouvillesche Problem, das die ersten Ergebnisse der späteren Spektraltheorie enthält. Kap. II trägt die Überschrift „The crypto-integral equations“. Es enthält eine Skizze der Lösungsmethoden gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, die im 19. Jahrhundert entwickelt wurden. Ausführlich werden die Anfänge der Potentialtheorie diskutiert, die Resultate von Laplace, Gauß, Green, Poisson, die Integrale zur Darstellung der Lösung verwenden. Zwei Paragraphen sind der Geschichte des Dirichletschen Prinzips gewidmet. Ausführlich wird die Methode von Beer-Neumann geschildert, die auf die Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung 2. Art führt.
Kap. III bringt die originellen Ideen von H. A. Schwarz, die er zur Lösung der Gleichung der schwingenden Membran entwickelt hat, und die tiefen und vielseitigen Gedanken von H. Poincaré über Eigenwerte und Eigenfunktionen desselben und verwandter Probleme. Bei ihm findet man

die erste a priori Abschätzung. Kap. IV beginnt mit einem kurzen Rückblick auf die Entwicklung der linearen Algebra im 19. Jahrhundert, die der Verfasser mit Recht als unglücklich bezeichnet. Das erste System unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten erscheint schon bei Fourier. Aufbauend auf Ergebnissen von Poincaré führt H. von Koch unendliche Determinanten ein. Die ersten Schritte von Pincherle und Volterra in die Funktionalanalysis blieben vage, Le Roux und Volterra haben aber später die erste allgemeine Theorie der Integralgleichungen aufgestellt, die der Volterraschen Integralgleichungen. Kap. V trägt die Überschrift: „The crucial years and the definition of Hilbert space". Verfasser führt die damalige stürmische Entwicklung auf vier fundamentale Arbeiten zurück, die von Fredholm über Integralgleichungen (1900), Hilberts Arbeit über Spektraltheorie (1906), die Thèse von Lebesgue über Integration (1902), Frechéts Thèse über metrische Räume (1906). Hervorgehoben wird noch die geometrische Betrachtungsweise des Hilbertraumes und der Satz von Fischer-Riesz. Kap. VI heißt „Duality and the definition of normed spaces". Es beginnt mit den Ergebnissen von F. Riesz über die stetigen Linearfunktionen auf dem Raum C [a, b], über die L^P und die l^p und ihre Dualität und das Momentenproblem. Ausführlich werden die Arbeiten von Helly besprochen, der für eine große Klasse normierter Räume eine Gleichungstheorie entwickelt und dabei einen Spezialfall des Satzes von Hahn-Banach beweist. Die grundlegenden Arbeiten von Hahn und Banach werden kurz erläutert. Das Kapitel schließt mit dem Banachschen Buch, auf die spätere Entwicklung der Theorie der Banachräume wird nur verwiesen. Kap. VII berichtet über die Entwicklung der Spektraltheorie nach 1900. § 1 behandelt die Rieszsche Theorie der kompakten Operatoren, § 2 geht ausführlich auf die Spektraltheorie von Hilbert ein, § 3 berichtet über Weyls Arbeiten über singuläre Integralgleichungen und die Spektren der Sturm-Liouville-Operatoren, ferner über Carlemans Ergebnisse über singuläre Integralgleichungen. § 4 zeigt, wie sich diese Ergebnisse einordnen in die von Neumannsche Spektraltheorie unbeschränkter Operatoren, deren Resultate ausführlich dargestellt werden. § 5 erwähnt kurz die Theorie der von Neumannschen Algebren und geht auf die Grundbegriffe der Theorie der Banach-Algebren ein. § 6 gibt einen kurzen Überblick über spätere Entwicklungen der Spektraltheorie: Struktur der Banach-Algebren, Banach-Algebren von stetigen Funktionen, harmonische Analysis, Satz von Peter-Weyl, Darstellungstheorie Liescher Gruppen, Halbgruppen von Operatoren. Kap. VIII bringt auf nur 12 Seiten die Entwicklung der lokalkonvexen Räume und der Distributionen, wobei der entscheidende Anteil des Verfassers (und Bourbakis) an der endgültigen Form dieser Theorien leider nicht klar wird. Das letzte Kapitel gibt Anwendungen der Funktionalanalysis auf Differentialgleichungen wieder. Fixpunktsätze, die Methode von Leray-Schauder, Carlemanoperatoren und verallgemeinerte Eigenvektoren, Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen stehen am Beginn. Es folgen Sobolevräume, a priori Ungleichungen und die Existenz der Elementarlösung für lineare partielle Differentialoperatoren beliebiger Ordnung. Das Buch schließt mit einer relativ ausführlichen Skizze der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren.

Frankfurt am Main G. Köthe

Dieudonné, J., Grundzüge der modernen Analysis, Band 5/6 (aus dem Franz. übers. von Ludwig Boll), (Logik und Grundl. der Mathematik, Band 21), Wiesbaden: Vieweg Verlag 1979, 450 S., Gbd. DM 76,–

Aus der wohl allgemein bekannten, im Entstehen begriffenen Serie von J. Dieudonné (die gegenwärtig acht Bände umfaßt) sind nunmehr zwei weitere Bände ins Deutsche übersetzt. Diese beiden Bände entsprechen den Kapiteln 21 (Kompakte Liesche Gruppen) und 22 (Harmonische Analysis) im Rahmen des Gesamtvorhabens und sind in der deutschen Ausgabe zu einem Buch zusammengefaßt. Die Schweißnaht zwischen den beiden Kapiteln bildet der Begriff der (stetigen) linearen Darstellung einer Gruppe. In Kapitel 21 wird die Struktur- und Darstellungstheorie kompakter Liescher Gruppen behandelt. Beim Aufbau dieser klassischen Theorie kann man unterschiedliche Akzente setzen. Hier werden die Struktursätze unter weitgehendem Verzicht auf algebraische Methoden, d. h. einer detaillierten Untersuchung der Lieschen Algebra der kompakten Gruppe bzw. ihrer Komplexifizierung hergeleitet. Stattdessen wird das Schwergewicht auf differentialgeometrische Betrachtungen und das Studium der adjungierten Darstellung gelegt. Erst gegen Ende des Kapitels wird gezeigt, daß es zu jeder halbeinfachen komplexen Lieschen Algebra genau eine kompakte halbeinfache zusammenhängende Liesche Gruppe derart gibt, daß die Komplexifizierung der Lieschen Algebra der Gruppe isomorph zu der gegebenen Algebra ist. Im Beweis des Hauptsatzes der Darstellungstheorie kompakter Liescher Gruppen, d. h. des sogenannten Satzes vom höchsten Gewicht, wird die irreduzible Darstellung zu vorgegebenem höchsten Gewicht als Quotient der universellen Einhüllenden der zugehörigen Lieschen Algebra konstruiert. – Im Kapitel 22 werden zunächst Gelfandsche Paare und die zugehörigen Kugelfunktionen untersucht. Durch Spezialisieren erhält man die fundamentalen Sätze der harmonischen Analysis auf lokalkompakten abelschen Gruppen. Den Abschluß des Buches bildet die Theorie der Distributionen einschließlich eines kurzen Abrisses über Sobolewsche Räume.

Zu jedem Paragraphen gibt es eine große Zahl von Aufgaben, die von recht unterschiedlicher Art sind. Einige schließen sich eng an den Aufbau der zuvor dargestellten Theorie an, behandeln Beispiele, bringen einige zusätzliche theoretische Einsichten. Andere hingegen enthalten wirklich neuen Stoff. So sind z. B. die Grundzüge der Dixmier-Kirillowschen Darstellungstheorie nilpotenter Liescher Gruppen in eine Reihe von Aufgaben verpackt.

Das Buch ist sehr klar geschrieben, sowohl im Hinblick auf die Strukturierung der Theorie als auch im Detail. Für meinen persönlichen Geschmack ist der Stil etwas zu „französisch", d. h. zu nüchtern und sachlich, auf Kommentierung (einschl. Bewertung) einzelner Ergebnisse zu oft verzichtend. Im Gegensatz dazu stehen die Einleitungen der beiden Kapitel, die in einem völlig anderen Stil geschrieben sind und mir ganz ausgezeichnet gefallen haben.

Da es sich bei diesem Buch um einen Teil eines monumentalen Werkes handelt, ergeben sich naturgemäß beim Gebrauch Schwierigkeiten in Form häufiger Rückverweise auf frühere Bände. Da man (leider) bei einem Durchschnittsstudenten (auch höheren Semesters) wohl kaum unterstellen kann, daß er die vorigen Bände gelesen hat oder die entsprechenden Kenntnisse aus anderen Quellen gewonnen hat, erscheint mir das Buch zum selbständigen Einarbeiten in die Theorie für Studenten in der Regel als problematisch. Sehr wohl kann man Teile des Buches zur Grundlage eines Seminars machen. Des weiteren sollte ein Dozent einer Vorlesung mit einschlägigem Thema an diesem Buch nicht vorbeigehen.

Zum Abschluß noch ein Wort zur Übersetzung. Bei der Übertragung eines fremdsprachigen Buches ins Deutsche kann man zwei extreme Prinzipien verwenden. Man kann mehr oder weniger Wort für Wort übersetzen und so den ursprünglichen Stil weitestgehend zu erhalten versuchen. Oder man nimmt die Inhalte in dem vorgegebenen Aufbau her und schreibt auf dieser Basis gleichsam ein neues Buch. Der Übersetzer hat sich ziemlich genau an das erstgenannte Prinzip gehalten, was gelegentlich zu etwas merkwürdigen Satzungetümen führte, die mich dann lebhaft an in lateinischen Klassenarbeiten sehr beliebte Übersetzungen antiker Autoren erinnerte.

Bielefeld D. Poguntke

Bröcker, Th., Analysis in mehreren Variablen – einschließlich gewöhnlicher Differentialgleichungen und des Satzes von Stokes (Teubner Studienbücher) Stuttgart: B. G. Teubner Verlag 1980, VI + 361 S., 114 Abb., kart. DM 29,80

Das vorliegende Buch ist für Studenten vom zweiten bis zum vierten Semester geschrieben worden und aus Vorlesungen des Verfassers in Regensburg entstanden. Der Text umfaßt den klassischen Bestand der Differential-Rechnung in mehreren Variablen, soweit er ins Grundstudium gehört. Behandelt werden Taylor-Entwicklungen, der Satz über implizite Funktionen, die lokale Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, dazu kommen ein Kapitel über Analysis auf Mannigfaltigkeiten und eines über die klassischen Integralsätze. Die Behandlung der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist ausführlich und betont nach Arnolds Vorbild die Geometrie der Integralkurven, statt nur Formeln zur Integration der Gleichungen zu geben. Der Stokessche Satz wird für Formen bewiesen, aber auch in der Sprache der Vektoranalysis erläutert.

Das Buch lebt auf eine außerordentliche Weise vom Bemühen, die Studenten für die Mathematik zu gewinnen, und von der Liebe des Autors zum Detail. Alle Beweise sind sorgfältig ausgeführt, die Erläuterungen klar, und manche der vielen Beispiele sind wahrhaft lustig, etwa das über kontrahierende Abbildungen: „Breitet man zum Beispiel hier im Hörsaal einen vorzüglichen Stadtplan von Regensburg aus, so stimmt genau ein Punkt auf dem Plan mit dem dort abgebildeten Punkt der Stadt überein, er liegt ungefähr dort, wo der Plan den Hörsaal abbildet, genauer wo der Plan den Plan abbildet, genauer wo der Plan das Bild des Plans abbildet . . .“. Es ist ein ernsthaftes Buch, das überall den geometrischen Gehalt der Analysis betont und den topologischen Kern der Integralsätze sucht.

Der Autor nimmt einen definierten Standpunkt in der Auswahl des Stoffes ein. Dies scheint mir kein Fehler; jeder Student wird noch weitere Bücher in seinem Studium lesen und lesen müssen. Nicht behandelt werden das Messen von Mengen im $\mathbf{R}^n$, die Konvergenzsätze der Lebesgueschen Theorie, die Fourier-Transformation, und es enthält nur wenige Übungsaufgaben. Das Buch ist – wenigstens für einen Schreibmaschinentext – sehr gut gestaltet und enthält über hundert vorzügliche Skizzen und Abbildungen.

Bochum R. Böhme

Okonek, Ch., Schneider, M., Spindler, H., Vector bundles on complex projective spaces (Progress in Mathematics, vol. 3), Basel-Boston-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1980, 389 pp, paper DM 40,–

Dieses Buch ist die Ausarbeitung einer Vorlesung, gehalten vom Mitautor M. Schneider, welche auf einem Übersichtsvortrag im Séminaire Bourbaki, 1978, basierte. Dadurch ist das Buch einerseits lesbar für Studenten (mit Vorbildung in algebraischer oder analytischer Geometrie) und führt andererseits mitten in ein sehr aktuelles Forschungsgebiet. Der Aufbau ist klar und, bis auf Standard-Literaturhinweise, in sich abgeschlossen. So hat das Buch mehr den Charakter eines Lehrbuches als den eines „Lecture Notes“-Bandes. Der Inhalt entstammt Originalarbeiten, und es ist das erste Mal, daß er in Buchform präsentiert wird.

Das Buch besteht aus zwei Kapiteln. Kapitel I (Holomorphic vector bundles and the geometry of $\mathbf{P}_n$) enthält Methoden zur Konstruktion von Bündeln, und Kapitel II (Stability and moduli spaces) befaßt sich mit dem Klassifikationsproblem. Der Inhalt, die „historischen“ Bemerkungen am Schluß eines jeden Paragraphen, und das Literaturverzeichnis (138 Titel) geben einen umfassenden Überblick über den gegenwärtigen Stand der Theorie algebraischer Vektorbündel auf projektiven Räumen.

Erlangen Wolf Barth

W.K. Bühler

Gauss

A Biographical Study

1981. 10 figures. VIII, 208 pages.
Cloth DM 39,–; approx. US $ 18.60
ISBN 3-540-10662-6

Price is subject to change without notice.

Contents: Introduction. - Childhood and Youth, 1777-1795. - Student Years in Göttingen, 1795-1798. - The Number-theoretical Work. - The Return to Brunswick. Dissertation. The Ceres Orbit. - Marriage. Later Brunswick Years. - Family Life. The Move to Göttingen. - Death of Johanna and Second Marriage. The First Years as Professor in Göttingen. - The Astronomical Work. Elliptic Functions. - Geodesy and Geometry. - The Call to Berlin and Gauss's Social Role. The End of the Second Marriage. - Physics. - The Göttingen Seven. - Numerical Work. Dioptrics. - The Years 1838-1855. - Gauss's Death. - Epilogue. - Appendices A-C. - Notes. - Bibliography. - Index.

Carl Friedrich Gauss was one of the world's greatest mathematicians, and his work is still a great source of inspiration and scientific interest.

This "essayistic" biography of Gauss, the mathematician, is addressed to contemporary mathematicians and scientists. It is conceived as a guidebook to the understanding of Gauss's ideas and life, and takes into account the effects of the extraordinary political, social and technical developments of his times.

The book is selective, not encyclopedic: the author concentrates on questions and topics that are of interest today. Specific examples are used to illustrate Gauss's approach to mathematics, his work and its influence on modern mathematics, and to summarize how it differs from that of his predecessors and contemporaries.

In addition to biographical details and separate summaries of Gauss's mathematical work, the volume contains a number of relatively unknown illustrations. Its clear and fluent style will make it rewarding reading to mathematicians and nonmathematicians alike.

6013/5

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York