84. Band Heft 2
ausgegeben am 15. 4. 1982

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1982

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 84/1 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 74,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 84, Heft 2

1. Abteilung

2. Abteilung

3. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Denker: Schwache Invarianzprinzipien für Reguläre Funktionale von Verteilungsfunktionen

B. Grünbaum; G. C. Shephard: Filings, Patterns, Fabrics and Related Topics in Discrete Geometry

H. O. Peitgen: Topologische Perturbationen beim globalen numerischen Studium nichtlinearer Eigenwert- und Verzweigungsprobleme

---

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
84 (1982) 57–78
AMS subject classification: 03 F 55, 03 F 65

Braucht die konstruktive Mathematik Grundlagen?

D. van Dalen, Utrecht

0 Einführung

Seit der Grundlagenkrise der Jahrhundertwende haben Mathematiker sich bemüht zu erklären, wie und warum man Mathematik treiben kann ohne auf Widersprüche zu stoßen. Das hat man meistens so gemacht, daß die Mathematik auf irgendwelche Weise ganz genau beschrieben wurde und an Hand dieser Beschreibung (sagen wir *Formalisierung*) dann festgestellt wurde, daß es keine Widersprüche geben kann. Die Anfänge dieser Praxis sind bekannt, man denke an die Axiomatisierung der Mengenlehre, wo es bekanntlich in der naiven Mengenlehre Widersprüche gegeben hatte. Wie man weiß, gipfelt diese Praxis in dem Programm von Hilbert, der 1922 angefangen hat, tatsächlich die Konsistenz von Teilen der Mathematik zu beweisen.

Hinter dieser Methode steckt die einfache Idee, den Formalismus der Mathematik selbst wieder mit mathematischen Methoden zu untersuchen. Brouwer hatte schon 1907 in seiner Dissertation bemerkt, daß auf diese Weise eine Mathematik zweiter Ordnung entsteht – was Hilbert später Metamathematik nannte – und daß es damit kein Ende nimmt. Man braucht einen Turm von Mathematiken höherer Stufen.

Ohne uns um eine genaue Definition zu kümmern, können wir einfach sagen, daß das Grundlagenstudium der Mathematik sich damit beschäftigt, die grundlegenden Prinzipien der Mathematik aufzudecken und deren Wirkung nachzuforschen. Dabei braucht man natürlich nicht den formalistischen Standpunkt zu vertreten. Man muß aber jedenfalls den Sachverhalt ganz genau formulieren; es liegt auf der Hand, dabei doch bestimmte Hilfsmittel wie die logische Sprache zu benützen.

Nun haben die Pioniere der konstruktiven Mathematik immer betont, daß so ein Grundlagenstudium völlig überflüssig, ja sogar schädlich sei.

Brouwer hatte hervorgehoben, daß erstens keine präzise sprachliche Beschreibung der mathematischen, geistigen Tätigkeit möglich sei und zweitens, daß die Betrachtung des sprachlichen Begleitgebäudes der Mathematik grundsätzlich getrennt bleibt von der Mathematik. Daß also die geistige Aktivität, die man Mathematik nennt, nicht ersetzt werden kann durch (oder sogar beeinflußt von) diese Mathematik.

Auch Bishop lehnt in seinem Buch „Foundations of constructive analysis" die wesentliche Benützung der Logik ab. Angeblich gibt es dafür bei Bishop zwei

Gründe: die Logiker benützen falsche Gesetze, wie das Tertium non Datur, und auch wenn sie das nicht tun, dann fangen sie an, konstruktive Fragmenten à *l'art pour l'art* zu analysieren und wenn Brouwer in seinen Schriften sich mit den Gründen der intuitionistischen Mathematik auseinandersetzt, dann wirft Bishop ihm vor, daß er sich in metaphysische Betrachtungen verliert.

Wenn aber die Pioniere der konstruktiven Mathematik so wegwerfend urteilen über „Grundlagen der Mathematik", ist es dann nicht angemessen, „Mathematik-ohne-Grundlagen" zu betreiben? Tatsächlich ist es möglich, Mathematik völlig konstruktiv zu betreiben: man konstruiert schrittweise alle mathematischen Objekte, die man braucht, und verfährt mit diesen Objekten auf konstruktive Weise.

Da braucht man entweder ganz wenig vorauszusetzen – wie Kronecker die ganzen Zahlen, oder eine Reflektion über die menschliche geistige Tätigkeit – wie Brouwer. Ein schönes Nebenprodukt ist die selbstverständliche Widerspruchsfreiheit: wenn man nur konstruktiv vorgeht, kann man niemals (z. B.) 0 = 1 finden. Wie einleuchtend das auch scheinen mag – wenn man sich das genau überlegt, dann bemerkt man, daß doch eine Induktion dahinter steckt. Also doch Meta-mathematik?

Wenn man die konstruktivistische Kritik an der klassischen (nichtkonstruktiven) Mathematik betrachtet, dann sieht man, daß die Abhängigkeit der Mathematik von der Logik verneint wird. Mathematik sei also kein deduktives oder axiomatisches System, das mit logischen Mitteln vorgeht. Nicht nur ist die Logik unzuverlässig [Brouwer, 1908], aber die Mathematik geht der Logik voran. Also, die Mathematik ist ein menschliches, geistiges Handeln, das völlig autonom ist, und das Observieren und Kodifizieren der Schlußweisen und Regelmäßigkeiten der begleitenden sprachlichen Formen gehört der Logik. Muß man nun sagen, daß Logik völlig nutzlos sei? Sogar Brouwer wollte nicht so weit gehen. In seinen Vorlesungen hat er doch eine beschränkte Rolle für die Logik anerkannt, z. B. in [Brouwer, 1952]: „Suppose that an intuitionistic mathematical construction has been carefully described by means of words, and then, the introspective character of the mathematical construction being ignored for a moment, its linguistic description is considered by itself and submitted to a linguistic application of a principle of classical logic. It is then always possible to perform a languageless mathematical construction finding its expression in the logico-linguistic figure in question?

After a careful examination one answers this question in the *affirmative* (if one allows for the inevitable inadequacy of language as mode of description) as far as the principles of contradiction and syllogism are concerned; but in the *negative* (except in special cases) with regard to the principle of the excluded third, . . .".

Die Abneigung von Brouwer für Logik und logische Terminologie berücksichtigend kann man schließen, daß bestimmte logische Schlüsse „konstruktiven Inhalt" behalten; wir würden heute sagen, daß die sogenannte intuitionistische Logik aufrecht erhalten wird. Gerade diese „careful examination" scheint uns mit Recht der Metamathematik anzugehören. Hier allerdings gibt es einen Existenzgrund für die Metamathematik: die Rechtfertigung bestimmter logischer Schlußweisen. Eine Erweiterung dieser Aufgabe ist das Auffinden besonderer Schlußweisen in

Beziehung auf spezielle Theorien, so wie Arithmetik oder Analysis. Ein einfaches Beispiel: wenn man in der formalisierten intuitionistischen Arithmetik eine Existenzaussage $\exists\, x A(x)$ beweisen kann, so kann man auch eine Instanz $A(n)$ beweisen. Solch ein Prinzip gehört nicht der reinen Logik an und benützt wesentlich extralogische Elemente.

Die Metamathematik erweist sich durchaus nützlich für die Analyse von Grundbegriffen. Die Lage ist in der konstruktiven Mathematik genauso wie in der klassischen Mathematik. Betrachten wir zum Beispiel den Mengenbegriff. Cantor hatte angefangen mit einem unanalysierten, naiven Mengenbegriff, der anfangs problemlos war, weil Cantor meistens konkrete Mengen betrachtete. Beim Übergang zur abstrakten Mengenlehre gab es dann unangenehme Probleme (Paradoxen von Cantor, Russell usw.). Spätere Untersuchungen hatten dann zum kumulativen Mengenbegriff geführt (Zermelo, von Neumann, Gödel) und zeigten, daß es eigentlich einen logischen und einen mathematischen Mengenbegriff gab [Gödel, 1947], [Wang, 1974]. An diesem Beispiel sieht man, daß ein so einfacher und, dem Anschein nach, unproblematischer Begriff wie „Menge“ letzten Endes einer Begründung bedarf. Ähnlicherweise gibt es in der konstruktiven Mathematik Grundbegriffe, die Erklärung bedürfen, z. B. Menge, Funktion, Beweis, Wahlfolge. Die Begründung dieser Begriffe ist noch immer nicht vollendet, und es gibt noch manches zu erforschen.

Zu dem möchte ich auch noch erwähnen, daß die Metamathematik auch als technisches Hilfsmittel benützt werden kann. Beispielsweise kann man in bestimmten Fällen ruhig die klassische Logik anwenden, auch wenn angeblich das Tertium non Datur nicht erlaubt scheint. Es gibt manchmal Verfahren, die eine Übersetzung von klassischen Systemen in intuitionistische liefern, wobei es sich herausstellt, daß ein bestimmtes Fragment invariant ist, so daß in so einem Fall klassische Beweisbarkeit die intuitionistische nach sich zieht. So hat Gödel 1933 gezeigt, daß negative Sätze der klassischen Arithmetik auch der intuitionistischen Arithmetik angehören, cf. [Kleene, 1952, § 81].

Wo die konstruktive Mathematik als systematische Disziplin angefangen hat ist bekannt: Kronecker hat mit seiner arithmetischen Begründung der Mathematik wohl zum erstenmal gezeigt, daß auf diesem Boden ein erhebliches Stück Mathematik aufgebaut werden kann. Später, nach den Erkenntnissen der Französischen Schule (Borel, Lebesgue, Baire, Poincaré usw.), hat Brouwer aufs Neue eine Konstruktivierung der Mathematik vorgenommen. Er hat jedoch in seinem Universum erheblich mehr Entitäten zugelassen als Kronecker, nämlich abstrakte Objekte wie Wahlfolgen und Mengen. In den letzten Jahrzehnten hat Bishop diese Linie fortgesetzt: dabei hat er eigentlich auf Kronecker zurückgegriffen und auf abstrakte Objekte verzichtet. Weil Bishop keine neue Methoden oder Prinzipien hinzugefügt hat, hat man seine Schule auch als sub-intuitionistisch bezeichnet.

In den dreißiger Jahren hat noch eine Schule der konstruktiven Mathematik ihre Laufbahn angefangen: die sogenannte rekursive Analysis. Gegründet auf den Begriff der berechenbaren Funktion (Herbrand-Gödel, Turing, Church usw.) hat man rekursive reelle Zahlen eingeführt und mit diesem rekursiven Kontinuum Analysis gemacht. Später hat man diese Methoden auch auf anderen mathematischen Strukturen angewandt. Die durch Markov begründete Russische Schule hat mit Erfolg manche Begriffe der traditionellen Mathematik in dem Rekursiven hinübergebracht.

Neuerdings haben die Kategorietheoretiker, wie u. a. Lawvere, Joyal, gezeigt, daß es einen engen Zusammenhang gibt zwischen Kategorietheorie und intuitionistischer Logik. Obwohl ein rechter Konstruktivist diese Verbindungen mit Topoi, Garben usw. mißtrauend betrachtet, kann man nicht leugnen, daß Betrachtungen vom Topostheoretischen Standpunkt manchmal ganz einleuchtend sind, cf. [Fourman, Mulvey, Scott, 1979].

Wir werden nur einen kleinen Teil des Problemkreises der konstruktiven Mathematik im folgenden berühren können. Insbesondere werden wir leider die Beweistheorie und die Semantik (einschließlich Garbentheorie usw.) außer Betracht lassen.

§ 1 Die „minimale" konstruktive Mathematik

Zuerst werden wir uns mit dem Teil der konstruktiven Mathematik befassen, der keine besonderen Annahmen über die Existenz von Objekten macht.

Fangen wir an mit der Logik. Seit den grundlegenden Arbeiten von [Heyting, 1930] wissen wir, daß die intuitionistische Prädikatenlogik als Untersystem der klassischen Logik betrachtet werden kann. Man sehe auch die Auseinandersetzungen von [Gentzen, 1935], [Kleene, 1952], [Prawitz, 1965]. Wie erfolgreich auch das Studium der intuitionistischen Logik als technische Disziplin war, das Begründungsproblem ist jedoch noch immer nicht eindeutig gelöst. Heyting hat die Bedeutung der logischen Junktoren zu formulieren versucht mit Hilfe von „Beweisen" oder „Konstruktionen" [Heyting, 1934]; um dies zu beschreiben, setzen wir eine Paaroperation und zugehörige Projektionen voraus: $\langle a, b\rangle$, $(c)_0$, $(c)_1$. Also ist ein Beweis von $A \wedge B$ ein Paar $\langle a, b\rangle$ so daß

a ein Beweis von A und b ein Beweis von B ist.

Die weiteren Fälle sind:

- $\vee$: ein Beweis von $A \vee B$ ist ein Paar $\langle a, b\rangle$, so daß $a = 0$ und b ein Beweis von A oder $a = 1$ und b ein Beweis von B ist.
- $\rightarrow$: ein Beweis von $A \rightarrow B$ ist ein Paar $\langle a, b\rangle$, so daß a eine Konstruktion ist, die einen willkürlichen Beweis von A in einen Beweis von B überführt, und b ist ein Nachprüfungsbeweis dieser Tatsache.
- $\exists$: ein Beweis von $\exists\, xAx$ ist ein Paar $\langle a, b\rangle$, so daß a eine Konstruktion eines Objektes $\bar{a}$ geeigneten Typus ist und b ein Beweis von $A\bar{a}$.
- $\forall$: ein Beweis von $\forall\, xAx$ ist ein Paar $\langle a, b\rangle$, wobei a für jedes Objekt p (geeigneten Typus) ein Beweis von Ap liefert, und b ist ein Nachprüfungsbeweis dieser Tatsache.

Ein paar Bemerkungen muß man gleich hinzufügen. Erstens, weil es sich um Prädikatenlogik handelt, gibt es ein intendiertes Universum das irgendwo vorausgesetzt wird. Zweitens, die Erklärung für $\rightarrow$ und $\forall$ unterscheiden sich dadurch, daß es eine zusätzliche Nachprüfung gibt. Diese zusätzliche Bedingung stammt von [Kreisel, 1962], sie wird nicht von jederman akzeptiert. Drittens sind hier zwei primitive Grundbegriffe versteckt: „*Konstruktion*“ und „*. . . ist Beweis von . . .*“. In konkreten Fällen, z. B. Arithmetik, kann man das einigermaßen erklären, aber im allgemeinen lassen wir dsa offen. Kreisel hat bemerkt, daß die Relation „a ist ein Beweis von A“ entscheidbar sein muß: „man erkennt einen Beweis von A, wenn man einen sieht.“ Diese Ansichten werden von verschiedenen Seiten bestritten [Beeson, 1979], [Prawitz, 1977]. Eine weitere Annahme, die durchaus plausibel erscheint, ist, daß „a ist ein Beweis von A“ selbst wieder eine Aussage ist. Dafür muß man Beweise als irgendwelche objektive Entitäten ansehen, über die man sich Gedanken machen kann. Dieses wird verneint z. B. durch [Sundholm]. Die Idee ist, daß im Falle der Implikation eine Nachprüfungsbedingung auf der Tatsache beruht, daß $Bew_A(p) \rightarrow Bew_B(a(p))$ an sich wieder komplex ist (wo $Bew_A(p)$ für „p ist ein Beweis von A“ steht). Allerdings nicht so komplex, daß ein Regressus ad Infinitum auftritt, denn $Bew_A(p)$ ist entscheidbar. Man vergleiche dies mit den Korrektheitsbeweisen der Informatik. Übrigens braucht man nicht so weit wie Sundholm zu gehen, um die Nachprüfungsbedingungen abzulehnen. Man kann einfach sagen: „ein Beweis für $A \rightarrow B$ ist eine Konstruktion a, so daß $Bew_A(p) \rightarrow Bew_B(a(p))$, für willkürliche p.“ Die Nachprüfung wird dann, sozusagen, nach der Metasprache verschoben. Wenn man auf diese Weise die Erklärungen vereinfacht, bleiben jedenfalls die Anwendungen erhalten (z. B. Beweisbarkeit des Auswahlaxioms, cf. [Martin-Löf, 1981]). In technischer Hinsicht gibt es eine primitiv rekursive Kodifizierung der Kreiselschen Version für das Implikationsfragment von [Troelstra, 1980] und für die Arithmetik eine Kodifikation von [Beeson, 1979], der aber die Entscheidbarkeit des Beweisprädikats fallen läßt und dadurch ein Realisierbarkeit-ähnliches Modell bekommt. Die vereinfachte Version (ohne Nachprüfungsbedingung) liegt der Arbeit von Bishop zu Grunde.

P. Lorenzen hat auch eine Sematik vorgeschlagen, die eng verwandt ist mit Gentzens Sequenzen-Kalkül und Beths Semantischen Tableaus. Seine Methoden haben in der philosophischen Logik Anhänger gefunden [Lorenzen, 1962].

Eine alternative Begründung der Bedeutung der logischen Konnektiven wurde vorgeschlagen von Dummett, Martin-Löf, Parwitz u. a. [Martin-Löf, 1981], [Dummett, 1975], [Prawitz, 1977]. Kurz gefaßt kann man sagen, daß sich diese Auffassung auf dem Wittgensteinschen Motto stützt „Meaning is Use.“ Betrachten wir ein einfaches Beispiel: was ist die Bedeutung der Konjunktion, also $A \wedge B$? Die Fregesche Antwort war einfach: Die Bedeutung von $A \wedge B$ ist die Wahrheitsbedingung von $A \wedge B$ (der Konjunktion). Dummett aber macht klar, daß diese Erklärung auf einem Platonischen Boden ruht und bei dem Meaning-is-Use-Gesichtspunkt nicht in Betracht kommt.

Die Bedeutungstheorie von Dummett usw. kann man folgenderweise grob zusammen fassen: man kennt die Bedeutung einer Aussage (Term), wenn man die Gründe kennt für ihre richtige Behauptung und dazu die Konsequenzen, die die Behauptung hat. Wenn man sich das überlegt, dann sieht man, daß die Gentzensche Introduktions- und Eliminationsregeln gerade die Bedeutung der logischen Konstanten festlegen in diesem Sinne (vgl. [Prawitz, 1977]). Eine weitgehende Anwendung dieses Gesichtpunktes hat Martin-Löf an verschiedenen Stellen gegeben, [Martin-Löf, 1975], [Martin-Löf, 1981]). Es ist bemerkenswert, daß die Martin-Löfsche Typentheorie ein besonders natürliches Verhältnis zu Introduktion und

Elimination hat. Betrachten wir zum Beispiel das cartesische Produkt $(\Pi\, x \in A)B$, das man üblicherweise als $\prod_{x \in A} B_x$ bezeichnet, wo A und B Typen sind (man denke an Mengen), dann hat man die Introduktionsregel

$$\frac{\begin{array}{c}[x \in A]\\ \vdots \\ b \in B\end{array}}{\lambda x \cdot b \in (\Pi\, x \in A)B} \quad \text{und Eliminationsregel} \quad \frac{c \in (\Pi\, x \in A)B \quad a \in A}{c(a) \in B(a(x))},$$

die ausdrücken, daß die Elemente des cartesischen Produktes Funktionen sind, mit den üblichen Eigenschaften. Dazu gibt es die folgende Gleichheitsregeln

$$\frac{a \in A \quad \begin{array}{c}[x \in A]\\ \vdots \\ b \in B\end{array}}{(\lambda x \cdot b)a = b(a/x) \in B(a/x)} \qquad \frac{c \in (\Pi\, x \in A)B}{\lambda x \cdot c(x) = c \in (\Pi\, x \in A)B}.$$

Man erkennt die β- und η-Konversionsregeln der λ-Kalküle. Wenn man Typen als Propositionen auffaßt (was man durchaus kann, wenn man eine Proposition mit der Menge seiner Beweise identifiziert), dann liest man $x \in A$ als „x ist ein Beweis von A" und $(\Pi\, x \in A)B$ als $(\forall\, x \in A)B$. Die Introduktions- und Eliminationsregeln zeigen dann wie ein „offener" Beweis b(x) von B einen Beweis b von $(\forall\, x \in A)B$ liefert, und auch umgekehrt. Das obige zeigt, daß es eine koherente Theorie der intuitionistischen Typenlogik gibt und daß die logische Konnektiven eine wohlbestimmte konstruktive Bedeutung haben. Jedenfalls reicht die Beweisinterpretation aus für die Praxis der konstruktiven Mathematik. Es läßt sich fragen, was denn diese Praxis sei. Kurz gesagt: die reelle und komplexe Analysis mitsamt Teilen der Funktionalanalysis und zugehörigen Teilen der Topologie. Dafür braucht man nicht so viel: reelle Zahlen, also Cauchy-Folgen (oder Dedekindsche Schnitte), reelle Funktionen, Funktionale usw. Schon in der intuitionistischen Schule von Brouwer und Heyting sind erhebliche Teile der Analysis entwickelt, aber Bishop hat 1967 eine elegantere und modernere Fassung der konstruktiven Analysis veröffentlicht, und seine Anregungen haben den ins Stocken geratenen Konstruktivismus wieder in Schwung gebracht.

Bishops Mathematik vertritt die minimale Konstruktivität, sie lehnt also abstrakte Objekte wie sie Brouwer eingeführt hat ab. Dennoch kann man staunen, wieviel in Bishops Buch und in den Arbeiten seiner Nachfolger erreicht wird. Betrachten wir zum Beispiel den klassischen Zwischenwertsatz: Sei f eine stetige reelle Funktion mit $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, dann gibt es eine Nullstelle zwischen 0 und 1. Konstruktiv ist diese Aussage falsch, denn man kann diese hypothetische Nullstelle nicht ausfindig machen (nicht approximieren). Dennoch kann man konstruktive Fassungen angeben, z. B.: Sei f wie oben, dann gibt es für jedes k ein x zwischen 0 und 1, so daß $|f(x)| < 2^{-k}$. Es gibt manche Konstruktivierungen von klassischen Sätzen, Brouwer hat selbst einige angegeben, darunter seinen Fixpunktsatz: Sei f eine stetige Funktion von Kreisscheibe in sich selbst, dann gibt es für jedes k ein x mit $|f(x) - x| < 2^{-k}$. Der Leser kann sich überzeugen von der Reichweite der konstruktiven Analysis bei [Bishop, 1967] oder [Bridges, 1979]. Die Frage, die wir uns stellen müssen, ist: welche Grundsätze werden da benützt und sind sie harmlos?

Das Bishopsche Buch hat manche metamathematische Untersuchungen angeregt, insbesondere haben Feferman und Friedman Rahmen für die konstruktive Analysis hergestellt, die ausreichen für einen erheblichen Teil der konstruktiven Analysis.

Die Friedmansche Grundlagen kann man auffassen als eine Art intuitionistische ZF-Mengenlehre, dahingegen hat Feferman ein System präsentiert, das Operationen und Mengen enthält und meines Erachtens sich wesentlicher dem Geist der Konstruktivität anschmiegt.

Den Unterschied zwischen Funktionen und Mengen, den es wie bekannt klassisch nicht gibt, kann man sich folgendermaßen vorstellen. Eine Funktion von $\mathbf{N}$ nach $\mathbf{N}$ (also eine Folge) ist eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl eine natürliche Zahl zuordnet (beschränkte Fassung); dieser Definition wegen hat eine Funktion einen konstruktiven Aspekt – wenn n vorgegeben ist, kann man f(n) angeben. Eine Teilmenge X von $\mathbf{N}$ wird dadurch gegeben, daß man weiß, was es heißt, einen Beweis von $n \in X$ zu haben. Also, in üblicher Schreibweise, $F = \{n \mid n > 2 \wedge \exists\, xyz > 0(x^n + y^n = z^n)\}$ ist eine legitime Menge, denn wir wissen, was es heißt, ein Beweis von $\exists\, xyz > 0(x^n + y^n = z^n)$ zu sein. Dennoch können wir nicht feststellen, ob F leer ist, ob $10^{10} \in F$, ob F endlich ist usw. Noch ein Beispiel: sei R die Riemannsche Vermutung und $X = \{n \mid (n = 0 \wedge R) \vee (n = 1 \wedge \neg R)\}$. Für X kann man feststellen, daß es nicht leer ist, aber es ist unbekannt, ob es *bewohnt* ist (d. h. ob $\exists\, n(n \in X)$). Der bekannte Zusammenhang zwischen Funktionen und Mengen aus der klassischen Mathematik trifft konstruktiv nicht mehr zu. Wohl kann man jede Funktion durch eine Menge von Paaren repräsentieren, aber man kann nicht jede Menge durch eine charakteristische Funktion repräsentieren. Das is klar für X oben, denn sei f charakteristische Funktion für X, dann gilt $f(0) = 0 \vee f(0) = 1$ (das kann man einfach entscheiden) und also $0 \notin X \vee 0 \in X$, das heißt $\neg R \vee R$. Das würde aber bedeuten, daß wir die Riemannsche Vermutung entscheiden könnten, was bekanntlich (noch) nicht der Fall ist. Angesichts dieses Unterschieds zwischen Funktionen und Mengen ist es angebracht, beide in einer Kodifizierung aufzunehmen. In seiner schönen Übersichtsarbeit [Feferman, 1979] hat Feferman die Einzelheiten verschiedener Formalisierungen hingeschrieben. Wir möchten hier auf diese Finessen verzichten und die wichtigsten Charakteristiken hervorheben. In Fefermans System gibt es Entitäten und Klassen. Die Entitäten umfassen mentale Objekte (so wie Konstruktionen, Regeln, Urelemente, Eigenschaften usw); Klassen sind einstellige Eigenschaften, wo wir üblicherweise schreiben: $t \in X$ für „t hat die Eigenschaft X." Dazu gibt es noch ein dreistelliges Prädikat App, wo man $App(t_1, t_2, t_3)$ versteht als „t_1 ist eine Operation die angewandt auf t_2 die Entität t_3 liefert", Die Operationen sind im allgemeinen *partiell*, und wir schreiben

$$t_1\, t_2 \downarrow \quad \text{für } \exists\, z\, App(t_1, t_2, z)$$

und $$t_3 \simeq t_1\, t_2 \quad \text{für } App(t_1, t_2, t_3).$$

Es läßt sich leicht einsehen wie man mit diesen Abkürzungen operiert. Die Grundtheorie T_0 hat dazu noch eine Anzahl Konstanten, nämlich für die Klasse der natürlichen Zahlen $\mathbf{N}$, und für die Operationen k, s (Kombinatoren), p, p_1, p_2 (Paaroperationen und Projektionen), d (Definition durch Fallunterscheidung), $p_{\mathbf{N}}$, ′, 0 (Predezessor, Successor und Null), c_n (für Komprehensionsklassen), J (join, disjunkte Vereinigung).

Die Axiome dieses Systems sind ziemlich harmlos: *definierende Gleichungen für die Operationen*, *Vollständige Induktion*, *Join, Elementare Komprehension*, d. h. eine Formel $\varphi(x, \vec{y}, \vec{z})$ ohne gebundene Klassenvariablen definiert eine Klasse $\{x \mid \varphi(x, \vec{y}, \vec{z})\}$, und *induktive Erzeugung.*

Man überzeugt sich leicht, daß die Axiome konstruktiv gerechtfertigt sind. Es gibt keine Mächtigkeitsoperation, also die üblichen Gefahren der Imprädikativität treten hier nicht auf. Es ist beachtenswert, daß dieses System wesentlich typenfrei ist. Daher kann man Vieles nachahmen, was in dem λ-Kalkül bzw. in der Rekursionstheorie vorgeht. Man zeigt leicht, daß das Rekursionstheorem herleitbar ist:

Es gibt ein r *so daß für jedes* f $rf\downarrow$ *und* $\forall x[rfx \simeq f(rf)x]$.

B e w e i s. Sei $h = \lambda y \cdot \lambda x \cdot f(yy)x$. Der Definition der λ-Abstraktion zufolge gilt $hy \downarrow$ für jedes y, und wir sehen, daß $hh = \lambda x \cdot f(hh)x \downarrow$. Definieren wir $rf = hh$, dann gilt $rfx = hhx \simeq f(hhx \simeq f(rh)x$. Also erfüllt $r = \lambda f \cdot \lambda x \cdot (\lambda yx \cdot f(yy)x)(\lambda yx \cdot f(yy)x)$ die Bedingung.

Jetzt kann man Rekursion auf **N** definieren: *Für jedes* a *und* f *gibt es ein* g *mit*

$$gx = \begin{cases} a & \textit{wenn } x = 0 \\ f(x, g(p_{\mathbf{N}}(x)) & \textit{wenn } x \in \mathbf{N} \text{ und } x \neq 0. \end{cases}$$

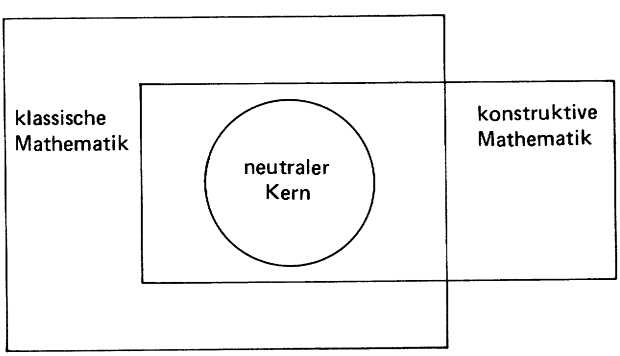
B e w e i s. Wir wollen erreichen, daß $gx \simeq dx0a(f(x, g(p_{\mathbf{N}}))), \ldots (*)$, wo d die Fallunterscheidungsoperation ist

$$\text{d. h. } dxyab = \begin{cases} a & \text{wenn } x = y, \\ b & \text{wenn } x \neq y \text{ und } x, y \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

* ist aber gerade eine Vergleichung, die durch das Rekursionstheorem gelöst wird. Schreiben wir $k = \lambda g \cdot \lambda x \cdot dx0a(f(x, g(p_{\mathbf{N}}(x))))$, dann erreichen wir $gx \simeq kgx$, wo $g = rk$ wie oben.

Wir sehen, daß wir also die primitiv rekursive Funktionen auf **N** definieren können, aber auch die Gödelschen primitiv rekursiven Funktionale aller endlichen Typen. Fügt man jetzt noch die intuitionistische Logik hinzu, dann sieht man, daß die intuitionistische Arithmetik $\mathbf{HA}^{\omega}$ aller endlichen Typen umfaßt wird.

Praktisch reicht das Fefermansche System aus, um Bishops konstruktive Mathematik zu treiben.



Das Verhalten zwischen verschiedenen Systemen zur Kodifizierung der konstruktiven Mathematik ist an mehreren Stellen festgestellt, ich verweise den Leser auf die Fefermansche Arbeit [Feferman, 1979]. Insbesondere kann man in T_0 die Martin-Löfsche Typentheorie interpretieren.

Die Grundlagen, die oben skizziert sind, vertragen sich sowohl mit der konstruktiven, wie mit der klassischen, platonischen Mathematik. Sie beschreiben, sozusagen, ein konstruktives Teilsystem der klassischen Mathematik. Zur Zeit des Grundlagenstreits in der Mathematik gab es eine populäre Ansicht, daß tatsächlich die Intuitionisten nur die klassische Mathematik beschränken wollten. Das System T_0 konnte als technisches Beispiel für eine solche Auffassung dienen.

In Wirklichkeit anerkennen manche Konstruktivisten Prinzipien, die mit der klassischen Mathematik in Widerspruch sind. Also bekommt man etwa die obige Topographie der mathematischen Landschaft. In den folgenden Paragraphen werden wir genauer betrachten, was im konstruktiven Teil vor sich geht.

§ 2 Intuitionistische Arithmetik

Die Arithmetik kann man mit Recht als das Fundament der Mathematik ansehen. Die natürliche Zahlen haben eine klare konstruktive Bedeutung, und man würde vielleicht erwarten, daß gerade hier die Konstruktivität besonders deutlich hervortritt. Das stimmt teilweise, aber doch nicht ganz.

Die intuitionistische Arithmetik ist von Heyting in 1930 formalisiert worden, seitdem redet man von der Heytingschen Arithmethik, **HA**. Durch Hinzufügung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten bekommt man die klassische Arithmetik von Peano, **PA**.

Man beachte daß die Axiomen wahr sind unter der intuitionistische Interpretation, und daß daher die Sätze von **HA** im intuitionistischen Sinne wahr sind.

Es würde zu weit führen, um das ganze Arsenal der metamathematischen Methoden hier auszustellen, der Leser sei verwiesen auf den Standard-Text [Troelstra, 1973]. Wir werden einige Hauptpunkte hervorheben.

(i) **HA** *hat die Disjunktions- und Existenzeigenschaft*, $\mathbf{HA} \vdash A \vee B \Rightarrow \mathbf{HA} \vdash A$ *oder* $\mathbf{HA} \vdash B$, $\mathbf{HA} \vdash \exists xAx \Rightarrow$ *Es gibt ein* n, *so daß* $\mathbf{HA} \vdash An$.

(ii) *Markovs Prinzip* MP *gilt nicht in* **HA**, *aber* **HA** *ist geschlossen unter Markovs Regel. Wo* MP *das Schema* $\forall x(Ax \vee \neg Ax) \vee \neg\neg \exists xAx \rightarrow \exists xAx$ *ist. Also, Instanzen von* MP *sind nicht ableitbar, aber* $\mathbf{HA} \vdash \forall x(Ax \vee \neg Ax)$, $\mathbf{HA} \vdash \neg\neg\exists xAx \Rightarrow \mathbf{HA} \vdash \exists xAx$.

(iii) *Es gibt eine Übersetzung* ° *von* **PA** *in* **HA** (Gödel, Gentzen) so daß

$$\mathbf{PA} \vdash A \leftrightarrow A^\circ,$$

$$\mathbf{PA} \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{HA} \vdash A^\circ$$

(iv) **HA** *und die These von Church sind widerspruchsfrei* (siehe § 3), *und* **HA** *ist geschlossen unter der Regel von Church.*

(v) $\mathbf{PA} \vdash \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \mathbf{HA} \vdash \forall x \exists y A(x,y)$ *für quantorfreie* A. (*das* Π_2^0-*fragment von* **PA** *ist konservativ über* **HA**, (Kreisel)).

Die philosophische Bedeutung dieser Eigenschaften ist nicht so leicht einzusehen.

Die Existenzeigenschaft z. B. wird oft angesehen für eine Konstruktivitätsevidenz des Systems, also im Einklang mit der unterliegenden intuitionistischen Motivierung. Kreisel hat aber betont, daß die Existenzeigenschaft weder ausreichend noch notwendig ist [Troelstra, 1973, p. 91]. Jedenfalls sind die metamathematischen Eigenschaften von **HA** technisch bequem, wie das folgende Beispiel zeigt.

Wenn man den Gödelschen Unvollständigkeitssatz für **PA** ableiten will, dann braucht man für die ursprüngliche Gödelsche Version die ω-Vollständigkeit. Jedoch nicht für **HA**.

Es sei G der Gödelsche Satz der sagt „ich bin nicht beweisbar“, d. h. $G \leftrightarrow \neg \exists x \, \mathrm{Prov}(\ulcorner G \urcorner, x)$.

Wenn $\mathbf{HA} \vdash \neg G$, dann $\mathbf{HA} \vdash \neg\neg \exists x \, \mathrm{Prov}(\ulcorner G \urcorner, x)$ also mit der Regel von Markov (denn B ist entscheidbar) $\mathbf{HA} \vdash \exists x \, \mathrm{Prov}(\ulcorner G \urcorner, x)$. Jetzt wendet man die Existenzeigenschaft an: $\mathbf{HA} \vdash \mathrm{Prov}(\ulcorner G \urcorner, n)$ für ein bestimmtes n. Aber das besagt, daß $\mathbf{HA} \vdash G$, was im Widerspruch mit der Konsistenz von **HA** wäre.

Wenn dagegen $\mathbf{HA} \vdash G$, dann gibt es ein n mit $\mathbf{HA} \vdash \mathrm{Prov}(\ulcorner G \urcorner, n)$, also $\mathbf{HA} \vdash \exists x \, \mathrm{Prov}(\ulcorner G \urcorner, x)$ und deshalb $\mathbf{HA} \vdash \neg G$, was gleichsam unmöglich ist. Man sieht, daß hier nur Konsistenz und nicht ω-Konsistenz benützt wird.

§ 3 Die Churchsche These und die rekursive Mathematik

Was bei dem Brouwerschen Konstruktivismus fehlt, nämlich eine explizite Charakterisierung des Begriffs ‚Algorithmus‘ oder ‚Konstruktion‘, das hat die Theorie der rekursiven Funktionen verschafft.

Es ist gleichgültig wie man sich die rekursive Funktionen denkt, ob gegeben durch Turing-Maschinen, Registermaschinen, Rekursionsgleichungen, μ-Rekursion oder durch den λ-Kalkül. Das Wichtige ist die Tatsache, daß es eine ganz genaue mathematische Definition gibt, und sogar eine arithmetische Definition.

Wir wiederholen in Eile die wichtigsten Grundtatsachen.

Die partiell rekursive Funktionen werden induktiv definiert durch

(i) $n(x) = 0$, $S(x) = x + 1$, $p_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ *sind partiell rekursiv.*

Die Klasse der partiell rekursiven Funktionen ist stabil unter folgenden Bildungen:

(ii) Substitution
(iii) Rekursion
(iv) Minimalisation,

d. h. wenn $g(y, x_1, \ldots, x_n)$ *partiell rekursiv ist und dazu total, dann ist auch* $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[g(y, x_1, \ldots, x_n) = 0]$ *partiell rekursiv* (wo $\mu y[\ldots y \ldots]$ *das kleinste* y *ist, so daß* ... y ... *gilt).*

Eine zahlentheoretische Funktion heißt (*total*) rekursiv, *wenn sie für alle Argumente definiert ist.*

Bisher hat man noch keinen Algorithmus entdeckt, der nicht rekursiv wäre. Church hat behauptet, daß *jeder Algorithmus rekursiv sei* (Churchsche These). Es gibt manche starke pragmatische, wie auch konzeptuelle Gründe für die Churchsche These. Die Präzisierung des Algorithmusbegriffs, der im Grunde doch subjektiv ist, durch den Begriff der Rekursivität, hat es ermöglicht, die Analysis auf der Rekursionstheorie zu begründen. Man betrachtet ein rekursives Kontinuum, das heißt man definiert die reelle Zahlen (z. B.) durch rekursive Cauchy-Folgen, und beschränkt sich forthin auf rekursive Operationen. Schon Turing (1936) hatte rekursive Zahlen eingeführt, und seitdem haben zahlreiche Forscher rekursive Analysis gemacht. Entweder kann man sich dabei der klassischen Logik bedienen – in diesem Falle ist die Rede von einem Teil der Rekursionstheorie, mit kaum konstruktivem Inhalt, oder man stützt sich auf die intuitionistische Logik und beschränkt sich auf konstruktive Funktionen unter Heranziehung der These von Church. Die Russische Schule des Konstruktivismus hat, A. A. Markov nachfolgend, diesen Weg eingeschlagen.

Kleene hat gezeigt, daß man rekursive Funktionen arithmetisch beschreiben kann: es gibt ein arithmetisches Prädikat $T(x, y, z)$, so daß $T(m, n, k)$ gilt, wenn die partiell rekursive Funktion mit Codenummer m (auch: Gödelnummer) bei Argument n eine Berechnung mit Codierung k ausführt.

Die Einzelheiten der Codierung sind für uns unwichtig, das Wichtige ist, daß man effektiv codieren kann. Dazu kann man den Wert der Berechnung aus der Codierung k berechnen, deuten wir diesen Wert mit $U(k)$ an. Die These von Church kann man dann so formulieren: wenn $f(x)$ ein Algorithmus ist, gibt es eine Zahl e, so daß für jedes n ein k existiert mit $T(e, n, k)$ und $f(n) = U(k)$. Die Funktion U läßt sich auch arithmetisch beschreiben. Es gibt also eine arithmetische Formel, die $f(n) = m$ beschreibt. Einfachheitshalber schreiben wir

$$f(n) = U(\mu k \cdot T(e, n, k)) = \{e\}(n).$$

Die These von Church hat also einen arithmetischen Ausdruck: f ist ein Algorithmus $\leftrightarrow \exists e \forall n[\exists k T(e, n, k) \wedge f(n) = \{e\}(n)]$. Konstruktiv gefaßt heißt $\forall x \exists y A(x, y)$, daß es einen Algorithmus f gibt, so daß $\forall x A(x, f(x))$. Also formuliert man die These von Church

$$CT_0 \quad \forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists e \forall x(\exists z T(e, x, z) \wedge A(x, \{e\}(x))).$$

In der klassischen Arithmetik ist CT_0 falsch. Es sei nämlich $K(x)$ ein arithmetisches Prädikat, das nicht rekursiv ist (d. h. keine rekursive charakteristische Funktion hat), siehe z. B. [Rogers, 1967], klassisch gilt $\forall x(K(x) \vee \neg K(x))$. Also $\forall x \exists y((K(x) \leftrightarrow y = 0) \wedge (\neg K(x) \leftrightarrow y = 1))$. CT_0 würde bedeuten, daß $\exists e \forall x[\exists z T(e, x, z) \wedge ((K(x) \leftrightarrow \{e\}(x) = 0) \wedge (\neg K(x) \leftrightarrow \{e\}(x) = 1))]$. Aber das heißt, daß K doch eine rekursive charakteristische Funktion hat. Quod non.

In der intuitionistischen Arithmetik, **HA**, ist die Sachlage dagegen völlig anders: **HA** und CT_0 sind konsistent. Dieses und Ähnliches stellt man fest mit Hilfe der Kleeneschen *Realisierbarkeit*, auf die wir jetzt nicht eingehen (siehe z. B. [Kleene, 1952], [Troelstra, 1973]).

Natürlich ist CT_0 nicht beweisbar in **HA**, denn dann wäre es auch beweisbar in **PA** (die Peanosche Arithmetik).

Dennoch ist **HA** geschlossen unter der *Regel von Church,* die besagt, daß wenn $\forall x \exists yA(x, y)$ in **HA** beweisbar ist, es eine rekursive Auswahlfunktion f gibt, so daß A $xA(x, f(x))$ in **HA** beweisbar ist: $\mathbf{HA} \vdash \forall x \exists yA(x, y) \Rightarrow$ $\mathbf{HA} \vdash \exists e \forall x[\exists zT(e, x, z) \wedge A(x, \{e\}(x))]$.

Die Russische Schule stützt sich nicht nur auf die These von Church, aber auch noch auf ein weiteres Prinzip, das von Markov. Informell kann man eine rekursive Funktion auffassen als eine abstrakte Maschine, die bei gegebenem *Input* schrittweise vorgeht bis sie hält und einen *Output* liefert. Eine Berechnung ist also eine endliche Reihe von Schritten mit am Ende dem Resultat. Das Markovsche Prinzip besagt informell: wenn es unmöglich ist, daß die Maschine bei der Berechnung nicht hält, dan hält sie. Betrachten wir ein Prädikat H(x), das gedacht wird als „die Maschine hält am Schritt x“, dann formalisiert man das Markovsche Prinzip als $\neg\neg\exists xH(x) \rightarrow \exists xH(x)$. Weil H(x) entscheidbar (sogar primitiv rekursiv) ist, erfüllt sie die allgemeine Form

$$\forall x(H(x) \vee \neg H(x)) \wedge \neg\neg\exists xH(x) \rightarrow \exists xH(x).$$

Das Markovsche Prinzip MP ist nicht in **HA** herleitbar, und es stellt eine wesentliche Überschreitung der Konstruktivität dar.

MP wird, wie Beeson gezeigt hat [Beeson, 1975], wesentlich benutzt in dem Beweis des Satzes von Kreisel, Lacombe und Shoenfield, der besagt, daß effektive Operationen von N^N nach N stetig sind.

Eine effektive Operation F operiert auf rekursiven Funktionen in dem Sinne, daß F eine rekursive Funktion $\{e\}$ ist, die auf Indizes von rekursiven Funktionen operiert, so daß wenn $\{n\} = \{m\}$, auch $\{e\}(n) = \{e\}m$. Mit Hilfe dieses Satzes von Kreisel, Lacombe, Shoenfield beweist man auch leicht, daß die effektive Operationen von $\mathbf{R}_{rec}$ nach $\mathbf{R}_{rec}$ stetig sind. Dieser Satz zeigt schon, daß die rekursive Analysis erheblich abweicht von der traditionellen Analysis. Wir erwähnen noch einige Merkwürdigkeiten der rekursiven Analysis.

(i) (Kleene) *Königs Lemma ist falsch. Das heißt es gibt einen rekursiven binären Baum ohne unendliche rekursive Pfade, jedoch gibt es keine obere Schranke für die Längen der rekursiven Pfade.* [Kleene, Vesley, 1965, p. 112].

(ii) *Der Satz von Heine-Borel gilt nicht für* $\mathbf{R}_{rec}$.

(iii) (Lacombe, Beeson). *Es gibt (stetige) Funktionen von* $[0, 1]_{rec}$ *nach* $\mathbf{R}_{rec}$, *die nicht beschränkt sind (also auch nicht gleichmäßig stetig)* [Beeson, 1976].

(iv) *Brouwers Fixpunktsatz ist falsch.* Das ist nicht so erstaunlich, denn schon der Zwischenwertsatz gilt nicht in der rekursiven Analysis. Aber Orevkov hat sogar gezeigt: *es gibt in der rekursiven Analysis eine gleichmäßigstetige Abbildung der Einheitskreisscheibe in sich selbst, so daß* $|f(x) - x|r > 0$ *für ein gewisses* r, *für jedes* x.

Man beachte, daß dies nicht eine einfache Erweiterung des eindimensionalen Falles ist, denn da hat man Folgendes:

Wenn f gleichmäßig stetig ist von $[0, 1] \to [0, 1]$ und $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, weil weiter noch $\forall yz(0 \leqslant y < z \leqslant 1 \to \exists z \in [y, z](f(x) \# 0))$, dann hat f eine Nullstelle.

Es stellt sich also heraus: Wenn man sich auf den Standpunkt stellt, daß nur gesetzmäßige Zahlenfolgen in Betracht kommen *und* dazu noch inhaltliche Gründe hat, um die Churchsche These zu akzeptieren (Turing hat solche Gründe angegeben), dann gibt es also eine ganz andere Analysis als die übliche. Eine Übersicht der rekursiven Analysis in der Tradition der Russischen Schule findet man in [Demuth, Kucera, 1979].

Neuerdings haben Pour-El und Richards rekursive Analysis in der angewandten Mathematik getrieben. Dabei haben sie eine Frage von Kreisel, ob physische Theorien die Existenz von nicht-rekursiven Objekten voraussagen, bejaht. Insbesondere haben sie bewiesen, daß die Schwingungsgleichung mit rekursiven Parametern eine eindeutige, nicht-rekursive Lösung hat [Pour-El, Richards, 1980]. Dieses Ergebnis hat allerdings gezeigt, daß traditionelle Teile der klassischen Mechanik nicht im Rekursiven stattfinden.

§ 4 Die intuitionistische Ansichten

Während die rekursive Analysis den Begriff des Algorithmus weitgehend beschränkt, hat der Intuitionismus einen „offenen Algorithmus-Begriff" aufgestellt. Immerhin hat Brouwer immer von Algorithmen und Gesetzen geredet, jedoch ohne sich von vornherein auf einer bestimmten Klasse festzulegen. Der intuitionistische Standpunkt ist, sozusagen: man erkennt einen Algorithmus, wenn man einen sieht (oder selbst macht).

Daher muß eine intuitionistische Begründung sich nicht auf eine Analysis des Begriffes des Algorithmusses stützen. Brouwer hatte deswegen einen anderen Weg eingeschlagen, er hatte einen „offenen" Begriff „Zahlenreihe" akzeptiert. Es gab natürlich auch für ihn gesetzmäßige Zahlenreihen, aber die waren nur als Spezimen von sogenannten *Wahlfolgen* aufzufassen. Wahlfolgen sind Zahlenreihen, deren Zahlen mehr oder weniger frei gewählt werden. Das heißt nicht, daß man gar keine Beschränkungen bezüglich zukünftiger Wahlen zulassen darf, es gibt allerhand teilweise Beschränkungen, die man unterwegs einführen kann. Zum Beispiel kann man nach zwei Wahlen sich forthin beschränken auf ungerade Zahlen und nach fünf Wahlen auf Primzahlen usw.

Das Universum der Intuitionisten ist also ziemlich unbestimmt, ungreifbar. Aber gerade diesen Zug hatte Brouwer ausgebeutet, um handfeste Prinzipien aufzustellen.

Es sei f eine Abbildung, die jeder Wahlfolge eine natürliche Zahl zuordnet, dann kann der Wert $f(\alpha)$ nur von einem Anfangsstück von α abhängen [Brouwer, 1918]. Obwohl Versuche gemacht sind, ist es noch nicht gelungen, diese Aussage zu einer einfacheren herzuleiten. Man kann sie plausibel machen: wenn $f(\alpha)$ nicht durch ein Anfangsstück bestimmt wird, dann gibt es Wahlfolgen β^i mit $\beta^i(j) = \alpha(j)$ für $j \leqslant i$ und $\beta^i(j) = \alpha(j) + 1$ für $j > i$, so daß $f(\alpha) \neq f(\beta^i)$ für alle i.

Definiert man jetzt

$$\gamma(j) = \begin{cases} \alpha(j) & \text{wenn } \neg \exists\, i \leqslant j\, A(i) \\ \beta^i(j) & \text{wenn } i < j,\ A(i) \text{ und } \forall\, k < i \neg A(k) \end{cases}$$

wo A(i) ein Prädikat ist, wofür $\forall\, i \neg A(i)$ oder $\neg \forall\, i \neg A(i)$ unentschieden ist (solche Prädikate sind traditionell im Intuitionismus, vgl. [Heyting, 1956]. Berechne dann $f(\gamma)$. Wenn $\exists\, i\, f(\gamma) = f(\beta^i)$, dann $\neg\neg \exists\, i\, A(i)$, und wenn $\forall\, i\, f(y^i) \neq f(\beta^i)$, dann $\forall\, i \neg A(i)$. Das heißt, wir könnten entscheiden ob $\neg \forall\, i \neg A(i)$ oder $\forall\, i \neg A(i)$, was nicht der Fall ist.

Eine Verallgemeinerung dieses *Stetigkeitsprinzips* sieht so aus:

$$\text{WC} \quad \forall\, \alpha \exists\, x A(\alpha, x) \rightarrow \forall\, \alpha \exists\, xy \forall\, \beta(\bar{\alpha}y = \bar{\beta}y \rightarrow A(\beta, x))$$

(*schwache Stetigkeit*) (wo $\bar{\alpha}y$ das Anfangsstück von α mit Länge y ist).

Durch auch noch zu fordern, daß x durch einen Stetigkeitsmodulus gegeben wird, bekommt man das *Prinzip der starken Stetigkeit*:

$$\text{SC} \quad \forall\, \alpha \exists\, x A(\alpha, x) \rightarrow \exists\, e \in K\, \forall\, \alpha\, A(\alpha, e(\alpha))$$

wobei K die induktiv definierte Klasse der Stetigkeitsmoduli (Brouwer-Operationen) ist. Wie K definiert ist, kann man in [Troelstra, 1977], [Van Dalen, Doets, de Swart, 1978] lesen.

Dazu hatte Brouwer auch noch ein transfinites Induktionsprinzip eingeführt, daß wir das Prinzip der *bar-Induktion* nennen (eine Induktion über einen wohlfundierten Baum).

Mit Hilfe der obigen Prinzipien kann man den Brouwerschen *Stetigkeitssatz* beweisen: *jede reelle Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist gleichmäßig stetig.*

Es sei nebenbei bemerkt, daß die Methoden zur Herleitung von negativen Resultaten (Gegenbeispielen) für intuitionistische und rekursive Analysis weitgehend parallel gehen. Für die positive Resultate ist das ganz anders.

Die obige Prinzipien sind nur eine kleine Auslese einer Unmenge von Verallgemeinerungen, die man z. B. finden kann in den Arbeiten [Kleene-Vesley, 1965], [Kreisel-Troelstra, 1970], [Troelstra, 1977], [Feferman, 1979]. Ein Prinzip ist noch erwähnenswert, weil es noch eine Rolle spielt

$$\forall\, \alpha \exists\, \beta A(\alpha, \beta) \rightarrow \exists\, F \in \text{CONT}\, \forall\, \alpha A(\alpha, F(\alpha))$$

wobei CONT die induktiv definierte Klasse der Stetigkeitsoperationen ist.

Zum Schluß dieses Paragraphen noch ein paar Bemerkungen zu den Anwendungen.

M. Beeson hat eine der Fefermansche Theorien auf metamathematische Eigenschaften nachgeprüft [Beeson, 1977]. In diesem System EM (und Erweiterungen) hatte er mit Erfolg die Techniken der Realisierbarkeit und Forcing angewandt. Es stellte sich heraus, daß dieses System geschlossen ist unter der Regel von Church und der Regel der lokalen Stetigkeit, die besagt, daß wenn $\forall\, a \in X\, \exists\, b \in Y\, A(a, b)$ beweisbar ist (wo X ein vollständiger separabeler metrischer Raum, und Y ein separabeler metrischen Raum ist), es eine stetige Auswahlfunktion auf einer geeigneten Umgebung gibt. Für kompakte X erweiterte Beeson das auf die Regel der lokalen gleichmäßigen Stetigkeit.

Weiter ist EM abgeschlossen unter den Regeln von König und Heine-Borel.

Diese Resultate sind insbesondere interessant, weil es sich hier um Prinzipien handelt, die für normale mathematische Praxis wichtig sind.

In dieser Richtung hat man auch Interessantes in der Toposkultur. Joyal hat einen schönen Beweis gegeben für die Regel der Stetigkeit für den Fall wo $X = Y = \mathbf{R}$.

Als Brouwer in den zwanziger Jahren die Wahlfolgen näher betrachtete, hatte er auch zugelassen, daß die Bedingungen höherer Ordnung benützt wurden. Das heißt, nicht nur Bedingungen $H(\alpha)$ auf Wahlfolgen, aber auch Bedingungen $\mathcal{H}(H)$ auf erster-Ordnung Bedingungen usw. Später hatte er dann wieder die Zulässigkeit der Bedingungen höherer Ordnung bezweifelt. Im allgemeinen ist nicht so viel zu dieser Sache zu sagen, aber ein Spezialfall hat sich doch in die Öffentlichkeit gerückt. Man kann sich leicht denken, daß man sich eine Wahlfolge verschafft und dabei verspricht, niemals die Wahlfreiheit zu beschränken. Obwohl dies eine Bedingung zweiter-Ordnung ist, scheint doch der Begriff so einfach zu sein und sozusagen ein Urphänomen, so daß dieser Begriff doch nähere Analyse verdient.

Brouwer hatte diese Art von Wahlfolgen ja wohl benützt, aber niemals in seinen Arbeiten erwähnt (siehe [Troelstra, 1979]), und erst Gödel und vor allem Kreisel haben diesen Begriff, unter dem Namen von *absolut freie Folgen*, oder *gesetzlose Folgen* untersucht und angewandt [Kreisel, 1958], [Kreisel, 1968].

Wir schreiben jetzt die Kreiselschen Axiome hin.

LS1 $\quad \forall n \exists \xi (\xi \in n)$,

hier ist n eine (codierte) endliche Reihe und das Axiom besagt, daß jede endliche Reihe Anfangsstück einer gesetzlosen Folge ist.

LS2 $\quad \forall \xi\eta (\xi \equiv \eta \vee \xi \not\equiv \eta)$,

wo $\equiv$ die intensionale Identität ist. Das Axiom besagt also, daß wenn man zwei gesetzlose Folgen generiert, entweder dieselbe Folgen, oder zwei verschiedene Folgen generiert werden. Man weiß soszusagen, was man macht.

LS3 $\quad A(\xi) \to \exists x \forall \eta (\bar{\xi}x = \bar{\eta}x \to A(\eta))$,

wo $A(\xi)$ nur die gesetzlosen Parameter ξ enthält. Dieses Axiom besagt, daß wenn ξ eine Eigenschaft A besitz, dies nur von einem Anfangsstücke $\bar{\xi}x$ abhängt, d. h. jede η mit diesem Anfangsstück hat die Eigenschaft A. LS3 heißt das *Stetigkeitsprinzip, ‚the principle of open data'*. Eine weitere Version ist

LS3$_n$ $\quad \not\equiv(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n) \wedge A(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n) \to \exists x \forall \eta (\not\equiv(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n)$
$\wedge \bar{\xi}x = \bar{\eta}x \to A(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n))$,

wobei $\not\equiv(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n) := \xi \not\equiv \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi \not\equiv \xi_n$.

Hier wird also eine Unabhängigkeit gefordert für die betreffende Folgen.

Wenn auch das fremd erscheinen mag, muß man einfach diese Unabhängigkeit im Begriff einverstanden denken. Eine unerwartete Konsequenz dieser Begriffsbildung ist, daß z. B. nicht ξ und η beide gesetzlos sein können, wo $\forall n[\xi(n) =$

$\eta(n+1)]$, denn sonst hätte man $\xi \not\equiv \eta \wedge \forall n(\xi(n) = \eta(n+1)$ und deshalb

$$\exists x \, \forall \zeta(\zeta \not\equiv \eta \wedge \bar{\xi}x = \bar{\zeta}x \rightarrow \forall n(\zeta(n) = \eta(n+1))).$$

Man wähle also das Anfangsstück von ξ wie durch $\bar{\xi}x$ vorgeschrieben und $\zeta(x) = \eta(x) + \eta(x+1) + 1$, dann gilt also $\zeta \not\equiv \eta$. Deshalb muß auch $\forall n(\zeta(n) = \eta(n+1))$ gelten, aber das haben wir soeben verdorben.

Die gesetzlose Folgen können dienen als Hilfsmittel zur Verwerfung von klassischen, logischen Gesetzen, z. B.

$$\forall \alpha \neg\neg \exists x \, (\alpha x = 0)$$

$$\neg \forall \alpha(\exists x \, (\alpha x = 0) \vee \neg \exists x(\alpha x = 0))$$

$$\neg \forall \alpha(\neg\neg \exists x(\alpha x = 0) \rightarrow \exists x(\alpha x = 0))$$

Man könnte leicht meinen, daß solche pathologische Folgen nichts nützen, man kann z. B. nicht einmal eine Cauchy-Folge damit generieren.

Jedoch sind die gesetzlose Folgen ausgezeichnete metamathematische Hilfsmittel. Kreisel hat sie benützt zu seinem Vollständigkeitsbeweis der intuitionistischen Aussagenlogik [Kreisel, 1958], [Troelstra, 1977]. Obwohl es für diese Logik klassische Vollständigkeitsbeweise gibt, z. B. für Beth-Modelle, Kripke-Modelle, topologische Modelle usw.), ist die von Kreisel verwendete Methode völlig intuitionistisch, also konstruktiv akzeptabel.

Kreisel hat die Theorie der gesetzlosen Folgen metamathematisch dadurch gesichert, daß er einen Eliminationssatz bewiesen hat. Dieser Satz sagt aus, daß es eine Übersetzung τ gibt, die gesetzlose Folgen eliminiert, so daß

$$LS \vdash A \leftrightarrow \tau(A)$$

und $$LS \vdash A \Leftrightarrow IDB \vdash \tau(A),$$

wo LS die Theorie der gesetzlosen Folgen ist und IDB eine Theorie von gesetzmäßigen Folgen mit axiomen für induktiv definierte Stetigkeitsoperationen (Brouwersche Operationen), [Kreisel, 1968], [Troelstra, 1977]. Die Theorie IDB ist begrifflich problemlos, sogar verträglich mit der klassischen Logik. Damit ist jedenfalls die Konsistenz von LS in Bezug auf IDB festgestellt.

Wenn man versucht, gesetzlose Folgen sichtbar zu machen, dann gibt es allerhand Schwierigkeiten. Insbesondere bietet das Stetigkeitsprinzip Schwierigkeiten. Im Rahmen der Beth-Modelle hat Van Dalen mit Hilfe von Cohen-generische Folgen Gesetzlosigkeit realisiert [van Dalen, 1978].

Die gesetzlose Folgen bestimmen weiter einen Ausgangspunkt für Untersuchungen über verallgemeinerte Folgen, mittels sogenannten *Projektionen* [Van Dalen, Troelstra, 1970], [Van der Hoeven, Troelstra, 1979]. Es läßt sich hoffen, daß diese Projektionen weitere Einsichten in die Struktur der Wahlfolgen gestatten werden.

§ 5 Merkwürdige Prinzipien

Unter den konstruktiven Begründungen der Mathematik geht der Intuitionismus am weitesten in Bezug auf die Anerkennung von abstrakten Objekten. Wie wir schon gesehen haben, gehören die Wahlfolgen zum Alltagsuniversum der Intuitionisten, und diese Bereicherung des mathematischen Gebietes überschreitet deutlich den finiten Standpunkt. Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, gilt für die Wahlfolgen ein Stetigkeitsprinzip, das mit der klassischen Analysis im Widerspruch ist. Hat man damit vielleicht „das Schlimmste hinter sich", oder gibt es noch weitere Prinzipien? Tatsächlich gibt es solche, aber selbst Intuitionisten sind sich über diese nicht ganz einig, und die Bishop-artige Konstruktivisten lehnen sie völlig ab.

Wir meinen jetzt die intuitionistische Phänomene, die beruhen auf Reflexion auf die geistige mathematische Tätigkeit des idealisierten Mathematikers – *das kreative Subjekt.* Brouwer hatte immer betont, daß die schöpfende mathematische Tätigkeit vom Subjekt abhängt. Das ist besonders klar bei Wahlfolgen, aber im allgemeinen hat das Subjekt eine große Freiheit bei der Entfaltung und Richtung seines Denkens. Dieser Aspekt des Intuitionismus ist am meisten den klassischen Mathematikern zuwider, weil es gegen die Objektivität der Wissenschaft verstößt. Tatsächlich kann man das kreative Subjekt am besten verstehen, wenn man sich zeitweise in einen solipsistischen Standpunkt versetzt.

Man denka also, man sei selbst das kreative Subjekt. Wie erfährt man, daß etwas wahr ist? Dafür gibt es keine entgültige Erklärung. Einen Satz wie $2 + 4 = 3 + 3$ beweist man durch eine Konstruktion auszuführen; daß ein Wahlfolge den Wert 7 zweimal annimmt, kann man nur während des Wahlprozesses erfahren. Einiges kann man doch sagen: wenn das kreative Subjekt A festgestellt hat, d. h. entgültige Gründe hat für A, dann ist A ein für allemal der Fall. Weiter weiß das kreative Subjekt in Bezug auf eine bestimmte Aussage A immer, ob es A einsieht oder nicht. Im Falle des Zweifels muß es nämlich zugeben, daß es A noch nicht festgestellt hat. Es gibt dafür kein anderes Kriterium!

Kreisel, [Kreisel, 1967], hat diese minimalen Voraussetzungen formuliert, dadurch daß er die Zeit mit Ordnung ω versehen hat, und als primitive Aussage „das kreative Subjekt beweist (seht ein) A an dem Zeitpunkt n" – symbolisch: $\Box_n A$ – genommen hat.

Die Axiome sind

(i) $\Box_n A \rightarrow \Box_{n+m} A$
(ii) $\Box_n A \vee \neg \Box_n A$
(iii) $A \leftrightarrow \exists x \, \Box_x A$

Tatsächlich ist für die Anwendungen etwas Schwächeres als (iii) ausreichend:

$$\Box_n A \rightarrow A$$

$$A \rightarrow \neg\neg \exists x \, \Box_x A$$

Aus den obigen Axiomen hat Kripke ein Prinzip hergeleitet, welches das kreative Subjekt nicht mehr erwähnt.

KS $\quad \exists \alpha (A \leftrightarrow \exists x \cdot \alpha(x) \neq 0)$

Man definiere

$$\alpha n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \square_n A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kripkes Schema sieht ein bißchen aus wie ein triviales Komprehensionsprinzip. Das Komprehensionsprinzip postuliert eine charakteristische Funktion, die prüft, ob ein Element die Eigenschaft A(x) hat. Kripkes Schema postuliert eine Funktion, die prüft, ob A gilt. Klassisch ist das natürlich völlig trival. Kripkes Schema erlaubt uns ein Surrogat für das Komprehensionsprinzip. Es sei A(x) eine Eigenschaft von natürlichen Zahlen. Auf Grund von Kripkes Schema hat man $\forall y \; \exists \alpha (A(y) \leftrightarrow \exists x \cdot \alpha(y) \neq 0)$. Eine Anwendung des Auswahlaxioms gibt $\exists \beta \; \forall y (A(y) \leftrightarrow \exists x \cdot \beta(\langle x, y \rangle) \neq 0)$ (wo $\langle x, y \rangle$ eine Codierung von Paren ist), also eine Menge von natürlichen Zahlen wird charakterisiert durch eine Funktion mit zwei Argumenten.

	.								
	.								
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	5	.	.	.	.	.	.	.	.
.	4	.	.	.	.	.	.	.	.
$3 \in A$	3	1	1	1	2	1	1	.	.
$2 \in A$	2	0	0	0	0	3	2	.	.
$1 \in A$?	1	0	0	0	0	0	0	.	.
$0 \in A$	0	0	0	0	1	2	7	.	.

Man beachte, daß eine Verschiebung nach rechts und Hinzufügung von Nullen dieselbe Menge liefert. Wir werden dieses benützen, um das *Uniformitätsprinzip* für Mengen von natürlichen Zahlen herzuleiten.

UP $\quad \forall X \; \exists x \, A(X, x) \rightarrow \exists x \; \forall X \, A(X, x)$.

Wenn man also eine Abbildung von $P(\mathbf{N}) \rightarrow \mathbf{N}$ hat, dann *muß* diese konstant sein. Man kann sich das deutlich machen, dadurch daß man bedenkt, daß Mengen ganz „wild" sein können, so daß man sie kaum unterscheiden kann. Umgekehrt, wenn man Mengen durch eine Funktion unterscheiden könnte, dann könnte man auch unlösbare Probleme beseitigen.

Es sei jetzt $\forall X \; \exists x \, A(X, x)$ gegeben, dann hat man auch $\forall \alpha \; \exists x \, A^*(\alpha, x)$, indem man X durch seine Kripke-Funktion ersetzt und A in A* umsetzt. Das Stetigkeitsprinzip besagt $\forall \alpha \; \exists xy \; \forall \beta (\bar{\alpha} y = \bar{\beta} y \rightarrow A^*(\beta, x))$. Wenn man insbesondere die konstante Funktion $\alpha x = 0$ einsetzt und die zugehörige x_0 bestimmt, dann sieht man daß *alle* Funktionen mit Anfangsstück 00 ..... 0 zur Länge y die Eigenschaft $A^*(\beta, x_0)$ haben. Jetzt verschieben wir alle Kripke-Funktionen der Mengen nach rechts über einen Abstand y und fügen Nullen hinzu. Dann hat jede Menge eine Kripke-Funktion, die x_0 bestimmt. Übersetzen wir den Ausdruck zurück, dann sehen wir, daß $\forall X \, A(X, x_0)$ gilt. Damit haben wir das Uniformitätsprinzip bewiesen.

Brouwer hat die Methode des kreativen Subjekts zum erstenmal angewandt, um positive und negative Eigenschaften genau zu trennen. Das einfachste Beispiel ist der Unterschied zwischen *Entfernung* und nicht-Identität.

$$a \# b := \exists k \exists p \forall n (|a_{p+n} - b_{p+n}| > 2^{-k}),$$

wo a_i, b_i die zugehörige Cauchy-Folgen sind, und $a \neq b := \neg a = b$.

In 1949 hat Brouwer bewiesen, daß $\neg \forall xy(x \neq y \rightarrow x \# y)$, siehe [Brouwer, 1948], [Troelstra, 1969]. Es liegt nahe, daß die Theorie des kreativen Subjekts wesentlich Folgen braucht um angewandt zu werden. Tatsächlich ist die Hinzufügung des kreativen Subjekts zur intuitionistischen Arithmetik konservativ [van Dalen, A]. Das heißt, „das kreative Subjekt macht keine Arithmetik". Für die Analysis ist die Hinzufügung des kreativen Subjekts wesentlich, denn das Resultat ist konservativ bezüglich Analysis + Kripkes Schema, [van Dalen, 1978].

Wie Myhill bemerkt, verstößt Kripkes Schema gegen das Stetigkeitsprinzip für Folgen,

d. h. $\forall \alpha \exists \beta A(\alpha, \beta) \rightarrow \exists F \in CONT \forall \alpha A(\alpha, F\alpha)$,

[Myhill, 1967], [Troelstra, 1969].

Der Beweis ist so elegant, daß es sich lohnt, ihn hier zu wiederholen. Man betrachte die Bedingung $A(\alpha) := \alpha(n)$ ist fast immer 0. KS sagt uns $\forall \alpha \exists \beta A(\alpha) \leftrightarrow \exists x \beta x \neq 0$. Wenn nun β stetig von α abhänge, dann würde ein endliches Anfangsstück von β ausreichen, um das x mit $\beta x \neq 0$ aufzuweisen, und deshalb würde ein endliches Anfangsstück von α das unendliche Verhalten von α festlegen, was unmöglich ist.

Die Konsistenz von KS und die $\forall \alpha \exists x$-Stetigkeit ist modelltheoretisch bewiesen von Kroll (vgl. [Grayson]). Die Untersuchungen der Analysis mit KS, sowie der gesetzlosen Reihen, benützen fast ausschließlich semantische Methoden. Dana Scott hatte zuerst gezeigt wie man die topologische Modelle auf die Analysis anwenden kann [Scott, 1968], [Scott, 1970]. Darauf folgten die Modelle von Joan Moschovakis und Van Dalen und Smorynski [Moschovakis, 1973], [Van Dalen, 1978], [Smorynski, de Jongh, 1976], um schließlich zu den Garbenmodellen zu führen [Fourman, Hyland, 1979], [Fourman, Scott, 1979], [Scott, 1979], [Grayson].

Die Prinzipien, die wir bisher betrachtet haben, sind motiviert durch die Eigenart bestimmter Objekte. Es gibt auch solche Prinzipien, die sozusagen Erfahrungseinsichten sind, wofür inhaltliche Argumente fehlen. Ein Beispiel ist die Teilabzählbarkeitseigenschaft (subcountability property, SCP) die besagt, daß jede Menge X mit entscheidbarer Identität (d. h. $\forall xy \in X(x = y \vee x \neq y)$) Teilmenge einer abzählbaren Menge ist. Die Lage in Bezug auf SCP ist noch rudimentär, Troelstra und Van Dalen haben die Konsistenz für einige Fälle bewiesen, aber im großen und ganzen ist das Problem der Konsistenz oder Beweisbarkeit noch ganz offen [Troelstra, 1977a].

Die obige Betrachtungen haben hoffentlich klar gemacht, daß man eine Begründung der konstruktiven Mathematik braucht, insbesondere wenn man das Unendlich und die zugehörigen Abstraktionen ernst nimmt. So einfach, wie im Anschluß an Kronecker, man sich die Konstruktivität gedacht hätte, ist die Lage bestimmt nicht; es ist inzwischen vieles geleistet und, paradoxerweise, die Probleme haben sich vervielfacht. Es läßt sich ruhig voraussagen, daß es für die konstruktive Mathematik eine rege Zukunft gibt.

Literatur

Barwise, J. (ed.) [1977]: Handbook of Mathematical Logic. Amsterdam: North-Holland

Beeson, M. [1975]: The nonderivability in intuitionistic formal systems of theorems on the continuity of effective operations. J. of Symbolic Logic **40**, pp. 321–346

Beeson, M. [1976]: The unprovability in intuitionistic formal systems of the continuity of effective operations on the reals. J. of Symbolic Logic **41**

Beeson, M. [1977]: Principles of continuous choice and continuity of functions in formal systems for constructive mathematics. Ann. Math. Logic **12**, pp. 249–322

Beeson, M. [1979]: A theory of Constructions and Proofs. Prepr. 134, Math. Inst. Utrecht 1979, p. 49

Bishop, E. [1967]: Foundations of constructive analysis. New York: McGraw Hill

Boffa, M.; van Dalen, D.; McAloon, K. (ed.): [1979]: Logic Collogium 1978. Amsterdam: North-Holland

Bridges, D. S. [1979]: Constructive functional analysis. London: Pitman

Brouwer, L. E. J. [1907]: Over de grondslagen der wiskunde. Diss. Amsterdam. Engl. Übers. in: [1975], pp. 11–101

Brouwer, L. E. J. [1908]: De onbetrouwbaarheid der logische principes. Tijdschrift voor Wijsbegeerte (2), pp. 152–158. Engl. Übers. in: [1975], pp. 107–111

Brouwer, L. E. J. [1918]: Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Verhandelingen 1e sectie 12, no. 5. Auch in: [1975], pp. 150–190

Brouwer, L. E. J. [1948]: Essentially negative properties. Indagationes Mathematicae **10**, pp. 963–964. Auch in: [1975], pp. 478–479

Brouwer, L. E. J. [1952]: Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism. South African J. of Science **49**, pp. 139–146. Auch in: [1975]; pp. 508–515

Brouwer, L. E. J. [1975]: Collected Works (ed. A. Heyting) Amsterdam: North-Holland

van Dalen, D. [1977]: The use of Kripke's Schema as a reduction principle. J. of Symbolic Logic **42**, pp. 238–240

van Dalen, D. [1978]: An Interpretation of Intuitionistic Analysis. Ann. Math. Logic **13**, pp. 1–43

van Dalen, D., [A]: The creative subject and Heyting's Arithmetic (to appear)

van Dalen, D; Doets, H. C.; de Swart, H. C. M. [1978]: Sets, Naive, Axiomatic and Applied. Oxford: Pergamon Press

van Dalen, D. (ed.) [1981]: L. E. J. Brouwer's Cambridge Lectures. Cambridge: Cambridge Univ. Press

van Dalen, D.; Troelstra, A. S. [1970]: Projections of Lawless Sequences. In: Intuitionism and proof theory (A. Kino, J. Myhill, R. E. Vesley (ed.)). Amsterdam: North-Holland, pp. 163–186

Demuth, O.; Kucera, A. [1979]: Remarks on constructive mathematical analysis. In: [Boffa, van Dalen, McAloon, 1979], pp. 81–130

Dummett, M. [1975]: The Philoshopical Basis of Intuitionistic Logic in H. E. Rose and J. C. Sheperdson (ed.). Logic Colloqium 1973. Amsterdam: North-Holland, pp. 5–40. Auch in: [1978], pp. 215–247

Dummett, M. [1978]: Truth and other Enigmas. London: Duckworth

Feferman, S. [1977]: Theories of finite type related to mathematical practice. In: [Barwise, 1977] pp. 913–972

Feferman, S. [1979]: Constructive theories of functions and classes. In: [Boffa, van Dalen, McAloon, 1979], pp. 159–224

Fourman, M. F.; Hyland, J. M. E. [1979]: Sheaf models for analysis. In: [Fourman, Mulvey, Scott, 1979], pp. 280–301

Fourman, M. P.; Mulvey, C. J.; Scott, D. S. (ed.) [1979]: Applications of Sheaves. Berlin – Heidelberg – New York: Springer. = Lecture Notes in Mathematics Vol 753

Fourman, M. F.; Scott, D. S. [1979]: Sheaves and Logic. In: [Fourman, Mulvey, Scott, 1979], pp. 302–401

Gentzen, G. [1935]: Untersuchungen über das logische Schließen. Math. Z. **39**, pp. 176–210, 405–431. Auch in: [Szabo, 1969]

Gödel, K. [1947]: What is Cantor's continuum problem? Ann. Math. Monthly **54**, pp. 515–525

Grayson, R. J. [1978]: Concepts of General Topology in Constructive Mathematics and in Sheaves. Ann. Math. Logic, **20**, 1–41

Heyting, A. [1930]: Die formale Regeln der intuitionistischen Logik. Sitzungsberichte der preußischen Akad. der Wissenschaften, p. 42–56. Die formale Regeln der intuitionistischen Mathematik II, III, ibid., p. 57–71, 158–169

Heyting, A. [1934]: Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie. Berlin – Heidelberg – Göttingen: Springer

Heyting, A. [1956]: Intuitionism. An Introduction. Amsterdam: North-Holland

van der Hoeven, G. F.; Troelstra, A. S. [1979]: Projections of Lawless Sequences II. In: [Boffa, van Dalen, McAloon, 1979] pp. 265–298

Kleene, S. C. [1952]: Introduction to Metamathematics. Amsterdam: North-Holland

Kleene, S. C.; Vesley, R. E. [1965]: The Foundations of Instuitionistic Mathematics. Amsterdam: North-Holland

Kreisel, G. [1958]: A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs. J. of Symbolic Logic **23**, pp. 369–388

Kreisel, G. [1962]: Foundations of intuitionistic logic. In: E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski (ed.)

Kreisel, G. [1965]: Mathematical Logic. In: Lectures on modern mathematics, Vol. III (ed. T. L. Saaty). New York: John Wiley, pp. 95–195

Kreisel, G. [1967]: Informal Rigour and Completeness Proofs. In: Problems in the Philosophy of Mathematics (ed. I. Lakatos). Amsterdam: North-Holland, pp. 138–186

Kreisel, G. [1968]: Lawless Sequences of natural numbers. Compositio Mathematica **20**, pp. 222–248

Kreisel, G.; Troelstra, A. S. [1970]: Formal Systems for some branches of intuitionistic analysis. Ann. Math. Logic **1**, pp. 229–387

Lorenzen, P. [1962]: Metamathematik. Mannheim: Bibliographisches Institut

Martin-Löf, P. [1975]: An intuitionistik theory of types: predicative part. In: [Rose, Sheperdson, 1975], pp. 73–118

Martin-Löf, P. [1981], Constructive mathematics and computer programming. Proceedings of the 6th-international Congres for Logic Methodology and Phil. Sc. (1979). To appear

Myhill, J. [1967]: Notes toward a formalization of intuitionistic analysis. Logique et Analyse **35**, pp. 280–297

Boykan Pour-El, M.; Richards, I. [1980]: The Wave Equation with Computable Initial Data such that its unique solution is not computable. Inst. of Technology, School of Mathematics, University of Minneapolis. Minneapolis

Prawitz, D. [1965]: Natural Deduction, a prooftheoretical study. Stockholm: Almquist & Wiksell

Prawitz, D. [1977]: Meanings and proofs: on the conflict between classical and intuitionistic logic. Theoria **43**, pp. 2–40

Rogers jr, H. [1967]: Theory of recursive functions and effective computability. New York: McGraw Hill

Rose, H. E.; Sheperdson, J. C. (ed.) [1975]: Logic Colloquim 1973. Amsterdam: North-Holland

Scott, D. S. [1968]: Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis. Composition Mathematica **20**, pp. 194–210

Scott, D. S. [1970]: Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis, II. In: Intuitionism and Proof Theory (eds. J. Myhill, A. Kino, R. E. Vesley). Amsterdam: North-Holland, pp. 235–255

Scott, D. S. [1979]: Identity and Existence in Intuitionistic Logic. In: [Fourman, Mulvey Scott, 1979], pp. 660–696

Sundholm, G.: Constructions, Proofs and the Meaning of the Logical Constants. J. Phil. Logic (to appear)

Szabo, M. E. (ed.) [1969]: The Collected Papers of Gerhard Gentzen. Amsterdam: North-Holland

Troelstra, A. S. [1969]: Principles of Intuitionism. Berlin – Heidelberg – New York: Springer

Troelstra, A. S. [1973]: Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis. Berlin – Heidelberg – New York: Springer. = Lectured Notes in Mathematics Vol. 344

Troelstra, A. S. [1977]: Choice Sequences. Oxford Logic Guides. Oxford: Oxford University Press

Troelstra, A. S. [1979]: A supplement to „Choice Sequences". Mathematisch Instituut, Amsterdam. Report 79–04

Troelstra, A. S. [1977a]: Axioms for intuitionistic mathematics incompatible with classical logic. In: Butts, Hintikka (ed.): Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory, Reidel

Troelstra, A. S. [1977b]: Aspects of constructive mathematics. In: [Barwise, 1977]; pp. 973–1052

Troelstra, A. S. [1980]: The interplay between logic and mathematics. Intuitionism. In: E. Agazzi (ed.): Modern Logic – A Survey. Dordrecht: Reidel, 197–221

Wang, H. [1974]: From Mathematics to Philosophy. London: Routledge & Kegan Paul

Prof. Dirk van Dalen
Rijksuniversiteit Utrecht
Mathematisch Instituut
Postbus 80 010
NL-3508 TA Utrecht

(*Eingegangen: 30. 7. 1981*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein
84 (1982) 79–91
AMS subject classification: 47 B 10

Approximationszahlen, Eigenwerte und Spuren von Operatoren in Banachräumen*)

A. Pietsch, Jena

Das wesentlichste Leitmotiv bei der Herausbildung der Funktionalanalysis war die um 1900 herangereifte Erkenntnis, daß viele Begriffe und Methoden aus der Algebra und Geometrie mit großem Erfolg auch beim Auflösen von unendlichen Gleichungssystemen oder Integralgleichungen angewandt werden können. Dabei dürfen die zugrunde liegenden Operatoren allerdings nicht allzu weit von der endlichdimensionalen Situation wegführen. Der wohl geeignetste Ansatz wurde 1918 von Friedrich Riesz gefunden, als er in Anlehnung an David Hilbert die „vollstetigen Transformationen" einführte. Unter Verwendung dieser Operatoren, die heute meistens als „kompakt" bezeichnet werden, gelang es, die fundamentalen Ergebnisse über Fredholmsche Integralgleichungen elementar und determinantenfrei zu beweisen. Dabei zeigte sich gleichzeitig die große Verallgemeinerungsfähigkeit der neuentstandenen Theorie, die später durch Stephan Banach ihr endgültiges Gepräge erhielt.

Typisch für diese Entwicklungsperiode, die sich etwa bis 1945 erstreckt, ist der rein qualitative Charakter der erzielten Aussagen. So wird zum Beispiel bewiesen, daß die (eventuell endliche oder sogar leere) Folge der Eigenwerte eines kompakten linearen Operators stets gegen Null strebt, ohne etwas über die Güte dieser Konvergenz auszusagen. Solche quantitativen Resultate können bei diesem Herangehen auch gar nicht erwartet werden, weil bereits am Ausgangspunkt zuviel verschenkt wird. Die Kompaktheit eines Integraloperators ergibt sich nämlich bereits aus der Stetigkeit des erzeugenden Kernes. Deshalb ist jede weitere Information überflüssig und geht somit im Rahmen der abstrakten Theorie verloren. Andererseits leuchtet es aber unmittelbar ein, daß ein solcher Operator umso bessere Eigenschaften besitzen muß, je glatter sein Kern ist. Diese Überlegungen führen zwangsläufig zu der Frage, ob man gewisse Kenngrößen dafür finden kann, „wie kompakt" ein Operator ist. Über eine Möglichkeit zur Lösung der damit gestellten Aufgabe soll in diesem Vortrag berichtet werden.

*) Erweiterte Fassung eines Übersichtsvortrags, X. Österreichischer Mathematikerkongreß Innsbruck, 14. September 1981.

0012–0456/82/02 0079–13 $02.60/0

1 Grundbegriffe

Im folgenden sind E, F und G stets Banach-Räume über dem komplexen Zahlenkörper $\mathbf{C}$.
Mit $\mathfrak{L}(E, F)$ bezeichnen wir die Menge aller (beschränkten linearen) Operatoren T, die von E nach F abbilden. Ausgerüstet mit der sogenannten Operatoren-Norm $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$ wird $\mathfrak{L}(E, F)$ selbst wieder zu einem Banach-Raum.

Insbesondere ist $E' := \mathfrak{L}(E, \mathbf{C})$ der duale Banach-Raum aller auf E erklärten (beschränkten linearen) Funktionale. Der Wert eines Funktionals $a \in E'$ für das Element $x \in E$ wird mit $\langle x, a\rangle$ bezeichnet.
Für $a_0 \in E'$ und $y_0 \in F$ definieren wir den Operator $a_0 \otimes y_0$ durch die Zuordnung $x \to \langle x, a_0\rangle y_0$. Ein Operator $L \in \mathfrak{L}(E, F)$ heißt finit, wenn er sich mit $a_1, \ldots, a_n \in E'$ und $y_1, \ldots, y_n \in F$ in der Form

$$L = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i$$

darstellen läßt. Die Minimalzahl der dabei benötigten Summanden stimmt mit der Dimension des Bildraumes sowie mit der Codimension des Nullraumes von L überein. Wir verwenden dafür das Symbol rank(L). Die Teilmenge aller finiten Operatoren von E nach F wird mit $\mathfrak{F}(E, F)$ bezeichnet.
Schließlich soll I_E die identische Abbildung des Banach-Raumes E sein.

2 Approximationszahlen

Für jeden Operator $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ und alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, \ldots$ definieren wir die *n-te Approximationszahl* durch den Ansatz

$$a_n(T) := \inf\{\|T - L\| : L \in \mathfrak{F}(E, F), \operatorname{rank}(L) < n\}.$$

Es lassen sich mühelos die folgenden Eigenschaften beweisen [OI, 11.2.3]:

(1) $\|T\| = a_1(T) \geqslant a_2(T) \geqslant \ldots \geqslant 0$ *für* $T \in \mathfrak{L}(E, F)$.

(2) $a_{n_1+n_2-1}(T_1 + T_2) \leqslant a_{n_1}(T_1) + a_{n_2}(T_2)$ *für* $T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(E, F)$.

(3) $a_{m+n-1}(ST) \leqslant a_m(S)a_n(T)$ *für* $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ *und* $S \in \mathfrak{L}(F, G)$.

(4) $a_n(L) = 0$ *für* $L \in \mathfrak{L}(E, F)$ *mit* $\operatorname{rank}(L) < n$.

(5) $a_n(I_E) = 1$ *für alle* Banach-*Räume* E *mit* $\dim(E) \geqslant n$.

3 Operatorenideale

Für $0 < r < \infty$ betrachten wir die Menge $\mathfrak{A}_r(E, F)$ aller Operatoren $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ mit

$$\mathbf{A}_r(T) := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^r\right\}^{1/r} < \infty.$$

Im Grenzfall $r = \infty$ soll $\mathfrak{A}_\infty(E,F)$ aus den sogenannten approximierbaren Operatoren $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ bestehen, die sich durch die Bedingung $\lim_n a_n(T) = 0$ charakterisieren lassen. Man setzt dann $\mathbf{A}_\infty(T) := \|T\|$.

Durch Routineschlüsse ergeben sich die folgenden Aussagen [OI, 14.2.2]:

(A) *Aus* $T_1, T_2 \in \mathfrak{A}_r(E, F)$ *folgt* $T_1 + T_2 \in \mathfrak{A}_r(E, F)$, *und mit einer Konstanten* $c_r \geqslant 1$ *gilt* $\mathbf{A}_r(T_1 + T_2) \leqslant c_r[\mathbf{A}_r(T_1) + \mathbf{A}_r(T_2)]$.

(B) *Aus* $X \in \mathfrak{L}(E_0, E), T \in \mathfrak{A}_r(E, F)$ *und* $Y \in \mathfrak{L}(F, F_0)$ *folgt* $YTX \in \mathfrak{A}_r(E_0, F_0)$, *und es gilt* $\mathbf{A}_r(YTX) \leqslant \|Y\|\ \mathbf{A}_r(T)\ \|X\|$.

Insbesondere hat man für $T \in \mathfrak{A}_r(E, F)$ und jede Zahl $\lambda \in \mathbf{C}$ stets $\lambda T \in \mathfrak{A}_r(E, F)$ und $\mathbf{A}_r(\lambda T) = |\lambda| \mathbf{A}_r(T)$. Somit ist $\mathbf{A}_r$ eine Quasinorm auf dem linearen Raum $\mathfrak{A}_r(E, F)$, aus der man in bekannter Weise eine Hausdorffsche Topologie erzeugen kann. Weil jede $\mathbf{A}_r$-konzentrierte Folge von Operatoren in $\mathfrak{A}_r(E, F)$ konvergiert, ergibt sich sogar ein Quasi-Banach-Raum. Die soeben angeführten Eigenschaften rechtfertigen die Sprechweise, daß die Klasse

$$\mathfrak{A}_r := \bigcup_{E,F} \mathfrak{A}_r(E, F)$$

ein *vollständiges quasinormiertes Operatorenideal* ist.

Sind H und K zwei unendlichdimensionale Hilbert-Räume, so gehört ein Operator $T \in \mathfrak{L}(H, K)$ genau dann zu $\mathfrak{A}_r(H, K)$, wenn er sich mit einer Zahlenfolge $(\tau_n) \in \ell_r$ sowie zwei orthonormierten Folgen von Elementen $x_1, x_2, \ldots \in H$ und $y_1, y_2, \ldots \in K$ in der Form

$$(*) \qquad T = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n x_n^* \otimes y_n$$

schreiben läßt [OI, 15.5.2]. Dabei bezeichnet x_n^* das durch die Zuordnung $x \to (x, x_n)$ erklärte Rieszsche Funktional. Im Grenzfall $r = \infty$ ist (τ_n) eine Nullfolge. Da man zusätzlich voraussetzen kann, daß stets $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$ gilt, ergibt sich $a_n(T) = \tau_n$ und somit

$$\mathbf{A}_r(T) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^r \right\}^{1/r} \quad \text{für } 0 < r < \infty.$$

Bereits 1946/48 haben John von Neumann und Robert Schatten spezielle Operatoren in Hilbert-Räumen untersucht, die unter Verwendung der vorangehenden Darstellung definiert wurden. Für $r = 2$ ergaben sich die seit 1907 bekannten Hilbert-Schmidt-Operatoren, während man im Fall $r = 1$ die besonders interessante Spurklasse erhielt.

Weil der Begriff der orthonormierten Folge in Banach-Räumen sinnlos ist, muß man hier nach einer geeigneten Ersatz-Variante für die Darstellung (*) suchen. Zu diesem Zweck können die Operatoren

$$L_k := \sum_{N_k} \tau_n x_n^* \otimes y_n \quad \text{mit } N_k := \{n : 2^k \leqslant n < 2^{k+1}\}$$

gebildet werden. Eine Analyse der dabei gewonnenen Reihenentwicklung führt zu einem wichtigen Kriterium [10, 12]:

Für $0 < r < \infty$ *gehört ein Operator* $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ *genau dann zu* $\mathfrak{A}_r(E, F)$, *wenn er sich mit* $L_0, L_1, \ldots \in \mathfrak{F}(E, F)$ *in der Form*

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} L_k$$

schreiben läßt, so daß $\mathrm{rank}(L_k) \leqslant 2^k$ *und* $(2^{k/r} \| L_k \|) \in \ell_r$ *gilt.*

Wird das folgende Infinum über alle möglichen Darstellungen gebildet, so ergibt sich durch den Ansatz

$$\mathbf{A}_r^0(T) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \| L_k \|^r \right\}^{1/r}$$

auf $\mathfrak{A}_r(E, F)$ eine zu $\mathbf{A}_r$ äquivalente Quasinorm, die sich in vielen Fällen als handlicher erweist.

Aus den vorangehenden Überlegungen erhält man eine unmittelbare Folgerung [OI, 14.2.8]:

Die Menge der finiten Operatoren liegt dicht in $\mathfrak{A}_r(E, F)$.

Wir formulieren nun eine Multiplikationseigenschaft, die sich unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung aus der Abschätzung $a_{2n-1}(ST) \leqslant a_n(S)a_n(T)$ ableiten läßt [OI, 14.2.3]:

Für $1/p + 1/q = 1/r$ *folgt aus* $T \in \mathfrak{A}_p(E, F)$ *und* $S \in \mathfrak{A}_q(F, G)$ *stets* $ST \in \mathfrak{A}_r(E, G)$, *und es gilt* $\mathbf{A}_r(ST) \leqslant 2^{1/r} \mathbf{A}_q(S) \mathbf{A}_p(T)$.

Als Gegenstück zu dieser Aussage kann man mit Hilfe des obigen Darstellungssatzes die Existenz von Faktorisierungen beweisen [10]:

Für $1/p + 1/q = 1/r$ *läßt sich jeder Operator* $R \in \mathfrak{A}_r(E, G)$ *mit einem geeigneten Banach-Raum* F *sowie Operatoren* $T \in \mathfrak{A}_p(E, F)$ *und* $S \in \mathfrak{A}_q(F, G)$ *in der Form* $R = ST$ *zerlegen.*

Ungeklärt ist dagegen bis jetzt noch die Situation bei den entsprechenden Divisionsproblemen. Man weiß zum Beispiel nicht, ob ein Operator $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ zwangsläufig in $\mathfrak{A}_p(E, F)$ liegt, wenn für alle Operatoren $S \in \mathfrak{A}_q(F, G)$ mit beliebigen Banach-Räumen G und $1/p + 1/q = 1/r$ stets $ST \in \mathfrak{A}_r(E, G)$ gilt.

Auch über das Tensorprodukt $T_1 \hat{\otimes}_\alpha T_2 \in \mathfrak{L}(E_1 \hat{\otimes}_\alpha E_2, F_1 \hat{\otimes}_\alpha F_2)$ von zwei Operatoren $T_1 \in \mathfrak{A}_r(E_1, F_1)$ und $T_2 \in \mathfrak{A}_r(E_2, F_2)$ ist noch kein abschließendes Resultat bekannt [13].

Durch die Beziehung $\langle Tx, b \rangle = \langle x, T'b \rangle$ für $x \in E$ und $b \in F'$ wird für jeden Operator $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ der duale Operatur $T' \in \mathfrak{L}(F', E')$ definiert. Offensichtlich gilt dann $a_n(T') \leqslant a_n(T)$. Es braucht aber nicht immer Gleichheit vorzuliegen. Trotzdem ergibt sich unter Ausnutzung des tiefliegenden Prinzips der lokalen Reflexivität die folgende Dualitätsbeziehung [OI, 14.2.5]:

Für einen Operator $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ *sind die Aussagen* $T \in \mathfrak{A}_r(E, F)$ *und* $T' \in \mathfrak{A}_r(F', E')$ *äquivalent. Dabei gilt* $\mathbf{A}_r(T) = \mathbf{A}_r(T')$.

4 Eigenwerte

Eine komplexe Zahl λ heißt *Eigenwert* des Operators $T \in \mathfrak{L}(E, E)$, wenn es ein Element $x \in E$ mit $Tx = \lambda x$ und $x \neq o$ gibt. Die Dimension $n(T, \lambda)$ der linearen Teilmenge

$$N(T, \lambda) := \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in E : (\lambda I_E - T)^k x = o\}$$

wird *Vielfachheit* von λ genannt. Diese Bezeichnung ist dadurch gerechtfertigt, daß sich im Fall eines endlichdimensionalen Banach-Raumes für $n(T, \lambda)$ gerade die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $d(\lambda) := \det(\lambda I_E - T)$ ergibt.

Jedem approximierbaren Operator $T \in \mathfrak{A}_\infty(E, E)$ ordnen wir die *Eigenwertfolge* $(\lambda_n(T))$ zu. Dabei sollen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

(1) $|\lambda_1(T)| \geqslant |\lambda_2(T)| \geqslant \ldots \geqslant 0.$

(2) Jeder Eigenwert $\lambda \neq 0$ wird $n(T, \lambda)$-mal aufgeschrieben.

(3) $\lambda_n(T) := 0$, falls T weniger als n Eigenwerte $\lambda \neq 0$ hat.

Leider besitzt die Zuordnung $T \to (\lambda_n(T))$ fast keine brauchbaren Eigenschaften. Deshalb ist es von großer Bedeutung, daß man die wesentlich günstigeren Approximationszahlen dazu verwenden kann, um auch Aussagen über die Eigenwerte zu gewinnen. Das erste Resultat in dieser Richtung stammt von Hermann W e y l , der 1949 für $T \in \mathfrak{A}_\infty(H, H)$ und $m = 1, 2, \ldots$ die folgende multiplikative Ungleichung bewies:

$$\text{(W)} \qquad \prod_{n=1}^{m} |\lambda_n(T)| \leqslant \prod_{n=1}^{m} a_n(T).$$

Die Übertragung dieser fundamentalen Beziehung auf approximierbare Operatoren in Banach-Räumen gelang dagegen erst 1979. In diesem Fall ergibt sich für $T \in \mathfrak{A}_\infty(E, E)$ und $m = 1, 2, \ldots$ die Abschätzung [8]

$$(\overset{\bullet}{W}) \qquad \prod_{n=1}^{m} |\lambda_n(T)| \leqslant c^m \prod_{n=1}^{m} a_n^\bullet(T).$$

Dabei ist $c > 1$ eine geeignete Konstante, die gleich e gewählt werden kann, und $(a_n^\bullet(T))$ bezeichnet die verdoppelte Folge der Approximationszahlen, $a_{2n-1}^\bullet(T) := a_n(T)$ und $a_{2n}^\bullet(T) := a_n(T)$. Bisher ist noch ungeklärt, ob die beschriebene Verdopplung tatsächlich erforderlich oder nur beweistechnisch bedingt ist. Das Auftreten der Konstanten $c > 1$ kann dagegen nicht vermieden werden.
Unter Verwendung eines rein analytischen Lemmas folgt schließlich aus $(\overset{\bullet}{W})$ für $T \in \mathfrak{A}_\infty(E, E)$, $0 < r < \infty$ und $m = 1, 2, \ldots$ die additive Ungleichung

$$\left\{ \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n(T)|^r \right\}^{1/r} \leqslant 2^{1/r} c \left\{ \sum_{n=1}^{m} a_n(T)^r \right\}^{1/r}.$$

Nun erhalten wir sofort das zentrale Theorem über Eigenwertverteilungen:

Für jeden Operator $\mathrm{T} \in \mathfrak{A}_r(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ *gilt* $(\lambda_n(\mathrm{T})) \in \ell_r$.

Dieses Resultat wurde erstmalig 1977 von Hermann König mit Hilfe von interpolationstheoretischen Methoden bewiesen [3]. Vom gleichen Autor stammt eine interessante Formel, die im Spezialfall n = 1 schon seit langem zur Berechnung des Spektralradius eines Operators benutzt wird. Für $\mathrm{T} \in \mathfrak{A}_\infty(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ und n = 1, 2, . . . hat man [4]

$$|\lambda_n(\mathrm{T})| = \lim_k a_n(\mathrm{T}^k)^{1/k}.$$

5 Spuren

Für jeden finiten Operator $\mathrm{L} \in \mathfrak{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ wird durch den Ansatz

$$\mathrm{spur}(\mathrm{L}) := \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, a_i \rangle$$

eine *Spur* definiert, die nicht von der speziellen Wahl der Darstellung

$$\mathrm{L} = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{E}'$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{E}$ abhängt. Es zeigt sich, daß die Zuordnung $\mathrm{L} \to \mathrm{spur}(\mathrm{L})$ ein lineares Funktional auf $\mathfrak{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ liefert, das bezüglich der Quasinorm $\mathbf{A}_1$ beschränkt ist. Deshalb existiert eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung auf ganz $\mathfrak{A}_1(\mathrm{E}, \mathrm{E})$, die ebenfalls mit „spur“ bezeichnet wird. Neben der Linearität und Beschränktheit ergibt sich die folgende wichtige Eigenschaft, durch die man Spuren von Operatoren in verschiedenen Banach-Räumen miteinander verknüpfen kann:

Für $\mathrm{T} \in \mathfrak{A}_1(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *und* $\mathrm{X} \in \mathfrak{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ *gilt* $\mathrm{spur}(\mathrm{XT}) = \mathrm{spur}(\mathrm{TX})$.

Von fundamentaler Bedeutung ist die für alle $\mathrm{T} \in \mathfrak{A}_1(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ bestehende Spurformel:

$$\mathrm{spur}(\mathrm{T}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathrm{T}).$$

Sie wurde für Operatoren in Hilbert-Räumen 1959 von Viktor Borisovitsch Lidskij bewiesen. Erst 1977 gelang Hermann König die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall [5].

Wenn man über Spuren von Operatoren in Banach-Räumen spricht, ist es unumgänglich, Alexander Grothendieck zu erwähnen, dessen richtungsweisende Beiträge dieses Gebiet maßgeblich beeinflußt haben.

Ein Operator $\mathrm{T} \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ heißt *nuklear*, wenn er sich mit $a_1, a_2, \ldots \in \mathrm{E}'$ und $y_1, y_2, \ldots \in \mathrm{F}$ in der Form

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes y_i$$

schreiben läßt, so daß $(\|a_i\| \|y_i\|) \in \ell_1$ gilt. Man setzt

$$\mathbf{N}(T) := \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \|y_i\|,$$

wobei sich das Infimum über alle möglichen Darstellungen erstrecken soll. Die Menge aller nuklearen Operatoren von E nach F wird mit $\mathfrak{N}(E, F)$ bezeichnet. Es stellt sich heraus, daß die Klasse

$$\mathfrak{N} := \bigcup_{E, F} \mathfrak{N}(E, F)$$

ein vollständiges normiertes Operatorenideal ist [OI, 6.3.2].
Man hat $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{N}$, und für zwei Hilbert-Räume H und K gilt sogar $\mathfrak{A}_1(H, K) = \mathfrak{N}(H, K)$, [OI, 18.6.3 und 15.5.3]. Im Gegensatz zu $\mathfrak{A}_1$ existiert aber auf dem echt größeren Operatorenideal $\mathfrak{N}$ keine Spur [11]. Die Zahl

$$\mathrm{spur}(T) := \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, a_i \rangle$$

hängt nämlich für einen Operator $T \in \mathfrak{N}(E, E)$ nur dann nicht von der speziellen Darstellung

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes x_i$$

ab, wenn der zugrunde liegende Banach-Raum E die sogenannte Approximationseigenschaft besitzt. Nun weiß man aber seit 1972, als Per E n f l o sein berühmtes Gegenbeispiel konstruierte, daß dies durchaus nicht immer der Fall sein muß [OI, 10.4.7].

Aber selbst dann, wenn man nur gutartige Banach-Räume in die Betrachtungen einbeziehen würde, könnte von einer „schönen" Spur nicht die Rede sein. Es gibt nämlich Operatoren $N \in \mathfrak{N}(\ell_1, \ell_1)$ mit $\mathrm{spur}(N) = 1$ und $N^2 = O$, [OI, 10.4.5]. Deshalb müssen alle $\lambda_n(N)$ verschwinden. Aus diesem Grund läßt sich keine – auch noch so raffinierte – Formel finden, die es gestattet, die Spur eines nuklearen Operators aus seinen Eigenwerten zu berechnen.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß sich die nuklearen Operatoren nicht als Ausgangspunkt für eine abgerundete Spurtheorie eignen, obwohl sie ursprünglich genau zu diesem Zweck erdacht wurden. Gerade wegen dieser Tatsache gewinnt das Operatorenideal $\mathfrak{A}_1$ wesentlich an Bedeutung. Weil $\mathfrak{N}$ das kleinste vollständige *normierte* Operatorenideal ist [OI, 6.7.2], erkennt man außerdem, daß sich in diesem Zusammenhang die Betrachtung des *quasinormierten* Falles nicht als Verallgemeinerung per se, sondern als unumgängliche Notwendigkeit ergibt.

6 Diagonaloperatoren

Im allgemeinen hat man große Schwierigkeiten, die Approximationszahlen von konkreten Operatoren zu bestimmen oder auch nur abzuschätzen. In einigen speziellen, aber durchaus interessanten Fällen ist das jedoch möglich.

Als einfachstes Beispiel behandeln wir *Diagonaloperatoren* von ℓ_p nach ℓ_q, die durch den Ansatz $T(\xi_n) = (\tau_n \xi_n)$ definiert sind. Dabei soll stets $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$ vorausgesetzt werden. Vollständig geklärt ist die Situation nur für $p \geqslant q$. Dann ergibt sich [OI, 11.11.4]

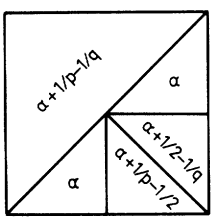
$$a_n(T : \ell_p \to \ell_q) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \tau_k^r \right\}^{1/r}.$$

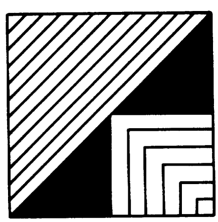
Hier wird der Exponent r durch die Gleichung $1/p + 1/r = 1/q$ bestimmt. Im Grenzfall $p = q$ gilt einfach $a_n(T) = \tau_n$. Für $p < q$ ist dagegen nur sehr wenig bekannt.

Wir betrachten nun die speziellen Diagonaloperatoren D_α, die aus den harmonischen Folgen $(n^{-\alpha})$ mit $\alpha > 0$ erzeugt werden. Damit D_α von ℓ_p nach ℓ_q wirkt, muß die Bedingung $\alpha > (1/q - 1/p)_+$ erfüllt sein. Es ergeben sich asymptotische Beziehungen der Form

$$a_n(D_\alpha : \ell_p \to \ell_q) \asymp n^{-\lambda}$$

Dies bedeutet, daß man die Approximationszahlen nach beiden Seiten durch konstante Vielfache von $n^{-\lambda}$ abschätzen kann. Die Werte des Exponenten λ sind in den folgenden Diagrammen dargestellt. Dabei haben wir links die algebraischen Ausdrücke eingetragen, während das rechte $(1/p, 1/q)$-Koordinatensystem die Niveaulinien bzw. -flächen λ = const zeigt:





Diese Ergebnisse konnten bisher nur für $\alpha \geqslant 1$ bewiesen werden, [OI, 11.11.4] und [1, 2, 6]. Im Fall $0 < \alpha < 1$ und $1 \leqslant p < 2 < q \leqslant \infty$ ist dagegen das asymptotische Verhalten von $a_n(D_\alpha : \ell_p \to \ell_q)$ noch nicht vollständig bekannt.

7 Einbettungsoperatoren

Im folgenden bezeichnet L_p den Lebesgue-Raum aller (Restklassen von) meßbaren komplexwertigen Funktionen f mit

$$\|f\| := \left\{ \int_0^1 |f(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} < \infty \quad \text{für } 1 \leqslant p < \infty$$

und $\quad \|f\| := \operatorname*{ess\text{-}sup}_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)| < \infty \quad$ für $p = \infty$.

Dabei haben wir uns der Einfachheit halber auf das Intervall [0, 1] als Definitionsbereich beschränkt. Für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ und $\rho = 1, 2, \ldots$ besteht der Sobolev-Raum W_p^ρ aus allen Elementen $f \in L_p$, für die auch die ρ-te schwache Ableitung zu L_p gehört. Bei vielen Gelegenheiten erweisen sich allerdings die nahe verwandten Besov-Räume B_p^ρ, die sogar für $0 < \rho < \infty$ erklärt sind, als geeigneter. Im Spezialfall $p = 2$ und $\rho = 1, 2, \ldots$ ergibt sich nichts Neues, denn man hat $B_2^\rho = W_2^\rho$. Ansonsten gilt $B_p^{\rho+\epsilon} \subset W_p^\rho \subset B_p^{\rho-\epsilon}$ für $\rho = 1, 2, \ldots$ und $0 < \epsilon < 1$.
Unter der Voraussetzung $\rho - \sigma > (1/p - 1/q)_+$ existiert der *Einbettungsoperator* I von B_p^ρ in B_q^σ. Der große Vorteil der Besov-Räume gegenüber den Sobolev-Räumen besteht darin, daß man sie unter Verwendung der Ciesielskischen Spline-Basen isomorph auf die klassischen Folgenräume abbilden kann. Mit zwei umkehrbaren Operatoren U und V ergibt sich dann (abgesehen von gewissen endlichdimensionalen Störungen) das folgende Diagramm [9]:

$$\begin{tikzcd} B_p^\rho \arrow[r, "I"] \arrow[d, shift right, "U"'] & B_q^\sigma \arrow[d, shift right, "V"'] \\ \ell_p \arrow[r, "D_\alpha"'] \arrow[u, shift right, "U^{-1}"'] & \ell_q \arrow[u, shift right, "V^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Dabei gilt $\alpha = \rho - \sigma - 1/p + 1/q$. Durch diesen – zuerst von Hermann König bemerkten – Zusammenhang ist es möglich, die bereits bekannten Resultate über Diagonaloperatoren auf Einbettungsoperatoren zu übertragen:

$$a_n(I : B_p^\rho \to B_q^\sigma) \asymp a_n(D_\alpha : \ell_p \to \ell_q).$$

8 Integraloperatoren

Wir betrachten nun einen *Integraloperator* $K \in \mathfrak{L}(L_p, L_p)$ der durch die Zuordnung

$$K : f(t) \to g(s) := \int_0^1 K(s, t) f(t) dt$$

definiert ist. Wenn man zusätzliche Informationen über den erzeugenden Kern besitzt, dann läßt sich häufig zeigen, daß K den Lebesgue-Raum L_p sogar in einen Besov-Raum B_p^ρ abbildet. Mit dem auf diese Weise induzierten Operator $K_0 \in \mathfrak{L}(L_p, B_p^\rho)$ ergibt sich die Faktorisierung $K = IK_0$. Besondere Bedeutung hat dabei die Tatsache, daß die für unsere Zwecke wichtigen Eigenschaften des Kernes in den Einbettungsoperator I verlagert sind, während von K_0 lediglich die Beschränktheit verwendet wird. Man hat

$$a_n(K : L_p \to L_p) \leqslant \| K_0 : L_p \to B_p^\rho \| \, a_n(I : B_p^\rho \to L_p).$$

Als unmittelbare Anwendung der bisher vorgestellten Theorie können wir nun ein abschließendes Resultat formulieren:

Wenn ein Integraloperator K *die Glattheit so verbessert, daß* $K(L_p) \subseteq B_p^\rho$ *gilt, dann ergibt sich* $(\lambda_n(K)) \in \ell_r$ *für* $r > 1/\rho$.

Das soeben beschriebene Verfahren wollen wir noch an einem einfachen Beispiel verdeutlichen. Für den symmetrischen Kern $M(s, t) := \min(s, t)$ geht die Definitionsgleichung $g := Mf$ durch zweimaliges Differenzieren in die Beziehung $g'' = -f$ über. Deshalb folgt aus $f \in L_2$ stets $Mf \in W_2^2$, und es gilt somit $(\lambda_n(M)) \in \ell_r$ für $r > 1/2$. Da M die Greensche Funktion des Differentialoperators $D : g \to -g''$ unter den Randbedingungen $g(0) = 0$ und $g'(1) = 0$ ist, lassen sich in diesem Fall sowohl die Eigenwerte als auch die Eigenfunktionen direkt angeben:

$$\lambda_n(M) = \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} \quad \text{und} \quad e_n(t) = \sin(2n-1)\pi t/2.$$

Also hat man $(\lambda_n(M)) \notin \ell_{1/2}$. Deshalb ist die vorangehende Aussage über die Eigenwertverteilung der betrachteten Klasse von Integraloperatoren nicht verbesserungsfähig.

9 Näherungsverfahren

Wird eine partielle Differentialgleichung nach der Fourierschen Methode gelöst, so ist es möglich, aus dem asymptotischen Verhalten der Eigenwerte auf die Konvergenzgeschwindigkeit derjenigen Reihe zu schließen, die bei der Entwicklung nach Eigenfunktionen auftritt. Es erhebt sich deshalb die grundlegende Frage, ob man mit Hilfe der Approximationszahlen auch bei anderen Näherungsverfahren geeignete Fehlerabschätzungen finden kann.

Zur Illustration dieses Gedankens betrachten wir einen approximierbaren Operator T, der in einem unendlichdimensionalen Banach-Raum E wirkt. Dabei soll vorausgesetzt werden, daß die Gleichung $u - Tu = x$ für jedes Element $x \in E$ genau eine Lösung $u \in E$ besitzt. Das bedeutet nichts anderes als die Existenz des inversen Operators $R := (I_E - T)^{-1}$.
Für einen Operator $L \in \mathfrak{F}(E, E)$ mit $\|T - L\|\,\|R\| \leqslant q < 1$ ist dann auch die Gleichung $u_0 - Lu_0 = x$ eindeutig lösbar, und mit einer nur von T und q abhängigen Konstanten $c > 0$ gilt $\|u - u_0\| \leqslant c\,\|T - L\|\,\|x\|$. Damit ist ein wesentlicher Vorteil erreicht. Ausgehend von einer beliebigen Darstellung

$$L = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in E'$ und $x_1, \ldots, x_n \in E$ ergibt sich nämlich das gesuchte Element u_0 aus der Formel

$$u_0 = x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

falls der Vektor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine Lösung des folgenden Gleichungssystems ist:

$$\alpha_k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, a_k\rangle = \langle x, a_k\rangle \quad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

Wird dieses Verfahren auf eine Folge von finiten Operatoren $L_n \in \mathfrak{F}(E, E)$ mit

$\|T - L_n\| \leqslant 2a_n(T)$ und $\operatorname{rank}(L_n) < n$ angewandt, so existieren ab einem geeigneten Index n_0 Näherungslösungen $u_{n_0}, \ldots, u_n, \ldots$, für die $\|u - u_n\| \leqslant 2ca_n(T)\|x\|$ gilt.

Daß sich bereits diese triviale Bemerkung bei der Behandlung von Integralgleichungen mit glatten Kernen als nützlich erweisen könnte, wage ich nicht zu hoffen. Immerhin wird dadurch die bereits bekannte Erfahrung begründet, warum die Spline-Approximation für den vorliegenden Zweck besonders geeignet ist.

10 Ergänzungen

Die einparametrige Schar der Operatorenideale $\mathfrak{A}_r$ mit $0 < r < \infty$ kann durch die Einführung eines zweiten Parameters w verfeinert werden. Zu diesem Zweck bilden wir die Menge $\mathfrak{A}_{r,w}(E, F)$ aller Operatoren $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ mit

$$\mathbf{A}_{r,w}(T) := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [n^{1/r - 1/w} a_n(T)]^w \right\}^{1/w} < \infty \quad \textit{für } 0 < w < \infty$$

und $\quad \mathbf{A}_{r,\infty}(T) := \sup_n n^{1/r} a_n(T) < \infty \quad \textit{für } w = \infty.$

Die auf diese Weise definierten vollständigen quasinormierten Operatorenideale $\mathfrak{A}_{r,w}$ ergeben sich fast zwangsläufig im Rahmen der reellen Interpolationstheorie, denn nach Jaak Peetre und Gunnar Sparr (1972) besteht für $1/r = (1 - \theta)/r_0 + \theta/r_1$ und $0 < \theta < 1$ die Beziehung

$$\mathfrak{A}_{r,w}(E, F) = (\mathfrak{A}_{r_0}(E, F), \mathfrak{A}_{r_1}(E, F))_{\theta,w}\,.$$

Die Klassen $\mathfrak{A}_{r,w}$ hängen lexikographisch von dem Grobparameter r und dem Feinparameter w ab. Im Spezialfall $r = w$ erhält man $\mathfrak{A}_r$.

Fast alle Eigenschaften der Operatorenideale $\mathfrak{A}_r$ finden sich in entsprechend modifizierter Form bei ihren Verallgemeinerungen $\mathfrak{A}_{r,w}$ wieder. Diese Feststellung gilt auch für das Theorem über die Eigenwertverteilung. In diesem Zusammenhang ist besonders der Fall $w = \infty$ interessant, weil dann aus $T \in \mathfrak{A}_{r,\infty}(E, E)$ stets $\sup_n n^{1/r} |\lambda_n(T)| < \infty$ folgt. Gerade dieses asymptotische Verhalten tritt aber bei den meisten Anwendungsbeispielen auf.

11 Schlußbemerkungen

Wie die vorangehenden Betrachtungen zeigen, hat sich seit einigen Jahren in den Auffassungen vieler Funktionalanalytiker ein grundsätzlicher Wandel vollzogen. Neben dem Bourbakischen Strukturdenken, das in seiner Reinkultur zu der sogenannten „Soft Analysis" führte, kommen wieder die klassischen Ideale in den Blickpunkt, die der Lösung von Einzelproblemen mehr Gewicht beimessen. Dadurch entsteht eine harmonische Synthese, die wenigstens in einigen Modell-Fällen eine direkte Verbindung von der abstrakten Theorie bis hin zum numerischen Resultat liefert.

Diese Behauptung steht im krassen Gegensatz zur Meinung von Jean Dieudonné, der kürzlich in seinem Buch „*History of Functional Analysis*" einschätzte, daß die Theorie der topologischen linearen Räume seit Anfang der fünfziger Jahre keine wesentlich neuen Ideen hervorgebracht hat. Bitte, entscheiden Sie selbst!

12 Literaturhinweise

Über die ursprünglich im Rahmen der Hilbert-Räume entwickelte Theorie der Operatorenideale $\mathfrak{A}_r$ gibt es viele ausgezeichnete Darstellungen (chronologische Reihenfolge):

Schatten, R.: Norm ideals of completely continuous operators, Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1960

Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear operators, Part II. New York–London: Wiley-Interscience 1963

Gohberg, I. C., Krejn, M. G.: Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators in Hilbert spaces. Moskau: Nauka 1965, und AMS Translations, Vol. 18, Providence 1969

Ringrose, J. R.: Compact non-selfadjoint operators. London: Van Nostrand Reinhold 1971. = Mathematical Studies, Vol. 35

Simon, B.: Trace ideals and their applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1979. = London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. 35

Die Ausdehnung der Idealtheorie auf Operatoren, die zwischen Banach-Räumen wirken, wurde erst vor kurzem in einer Monographie behandelt (zitiert als OI):

Pietsch, A.: Operator ideals. Berlin: Deutscher Verlag der Wiss. 1978, und Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland Publ. Company 1980

Hier findet man auch ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Über Interpolationstheorie und Funktionenräume kann man sich in den beiden folgenden Büchern informieren:

Bergh, J., Löfström, J.: Interpolation spaces. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1976

Triebel, H.: Interpolation theory, function spaces, differential operators. Berlin: Deutscher Verlag der Wiss. 1978, und Amsterdam-New York–Oxford: North-Holland Publ. Company 1978

Hinsichtlich neuester Ergebnisse verweisen wir auf die nachstehenden Publikationen:

[1] Carl, B., Pietsch, A.: Some contributions to the theory of s-numbers. Comment. Math. Prace Mat. **21** (1978) 65–76

[2] Höllig, K.: Approximationszahlen von Sobolev-Einbettungen. Math. Ann. **242** (1979) 273–281

[3] König, H.: Interpolation of operator ideals with an application to eigenvalue distribution problems. Math. Ann. **233** (1978) 35–48

[4] König, H.: A formula for the eigenvalues of a compact operator. Studia Math. **65** (1979) 141–146

[5] König, H.: s-numbers, eigenvalues, and the trace theorem in Banach spaces. Studia Math. **67** (1980) 157–171

[6] Majorov, V. E.: Lineare Durchmesser von Sobolev-Klassen und Ketten von extremalen Teilräumen (russ.). Mat. Sb. **113** (1980) 437–463

[7] Pietsch, A.: Über die Verteilung von Fourierkoeffizienten und Eigenwerten, Wiss. Z. Univ. Jena **19** (1980) 203–211

[8] Pietsch, A.: Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces. Math. Ann. **247** (1980) 149–168

[9] P i e t s c h , A.: Eigenvalues of integral operators, Part I. Math. Ann. **247** (1980) 169–178

[10] P i e t s c h , A.: Factorization theorems for some scales of operator ideals. Math. Nachr. **97** (1980) 15–19

[11] P i e t s c h , A.: Operator ideals with a trace. Math. Nachr. **100** (1981) 61–91

[12] P i e t s c h , A.: Approximation spaces. J. Approximation Theory **32** (1981) 115–134

[13] P i e t s c h , A.: Tensor products of sequences, functions, and operators. Archiv Math.

Prof. Dr. A. Pietsch
Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität
DDR – Jena

(*Eingegangen: 16. 9. 1981*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
84 (1982) 92–106
AMS subject classification: 52 A 05

Stabile konvexe Mengen

S. Papadopoulou, Eichstätt

Eine konvexe Teilmenge eines topologischen Vektorraumes bezeichnet man als stabil, wenn die „Mittelpunktabbildung" $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}$ offen ist. Im Fall einer kompakten konvexen Menge ist die Stabilität äquivalent zur Offenheit der Schwerpunktabbildung oder auch zur Eigenschaft, daß die obere Einhüllende einer stetigen Funktion wieder stetig ist.

Die Bedeutung der Stabilität liegt darin, daß in vielen Fällen die Offenheit einer Abbildung eine wesentliche Voraussetzung für die Existenz stetiger Schnitte ist. Aus diesem Grund spielt die Stabilität eine wichtige Rolle bei Problemen, für deren Lösung die Konstruktion gewisser Operatoren benötigt wird. Solche Probleme sind z. B. die Bestimmung der extremalen Operatoren zwischen zwei Banachräumen oder die Beschreibung des stationären Korovkin-Abschlusses eines Funktionenraumes.

Zweck des vorliegenden Artikels ist es, eine Übersicht über Eigenschaften der stabilen Mengen und deren Anwendungen zu geben.

1 Die CE-Eigenschaft

Es sei K eine konvexe kompakte Menge (in einem lokalkonvexen Hausdorffschen Raum) und A(K) der Raum der affinen stetigen Funktionen auf K. Für jede beschränkte Funktion f auf K wird dann die *obere Einhüllende* $\hat{f}$ von f folgendermaßen definiert:

$$\hat{f}(x) = \inf\{h(x) : h \in A(K), h \geqslant f\}, x \in K.$$

Damit ist $\hat{f}$ eine nach oben halbstetige, konkave Funktion. Das folgende Beispiel zeigt, daß $\hat{f}$ im allgemeinen nicht stetig ist, auch wenn f stetig und K endlich-dimensional ist.

1.1 Beispiel Sei $A = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ und K die konvexe Hülle der Menge $A \cup \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$. Ferner sei f eine beliebige stetige Funktion auf K, für die gilt: $f|A = 0$, $f(0, 0, 1) = f(0, 0, -1) = 1$. Nun stimmt jede stetige Funktion mit ihrer oberen Einhüllenden in den Extremalpunkten überein. Da jeder Punkt aus $A\backslash\{(0, 0, 0)\}$ ein Extremalpunkt von K ist, folgt: $\hat{f}(x, y, 0) = 0$ für alle $(x, y, 0) \in A\backslash\{(0, 0, 0)\}$. Aus der Konkavität von $\hat{f}$ folgt aber:
$\hat{f}(0, 0, 0) \geqslant \frac{1}{2}(\hat{f}(0, 0, 1) + \hat{f}(0, 0, -1)) = 1$, also ist $\hat{f}$ nicht stetig in $(0, 0, 0)$.

0012–0456/82/02 0092–15 \$03.00/0

Man sagt nun, eine kompakte konvexe Menge K habe die CE-*Eigenschaft*, falls für jede stetige Funktion f auf K die obere Einhüllende $\hat{f}$ von f ebenfalls stetig ist. (Die Buchstaben CE stehen für die Wörter: continuous envelope.) Äquivalent zur CE-Eigenschaft ist die Stetigkeit der unteren Einhüllenden $\check{f}$ jeder stetigen Funktion f, wobei $\check{f}$ durch

$$\check{f}(x) = \sup \{h(x) : h \in A(K), h \leqslant f\}, x \in K,$$

definiert wird.

Das Interesse an Mengen mit der CE-Eigenschaft ist durch theoretische, aber auch durch aus der Anwendung kommende Probleme geweckt worden. Den ersten Anstoß dazu gab im Jahre 1968 eine Arbeit von Witsenhausen [35], in der ein Minimax-Problem aus der Optimierungstheorie behandelt wird. Dieses Problem wird durch einen Algorithmus gelöst, der aus einer sukzessiven Konstruktion einer endlichen Anzahl von Funktionen besteht. Bei einigen Schritten dieses Verfahrens wird eine untere Einhüllende gebildet. In der Praxis kann man jedoch im allgemeinen die auftretenden Funktionen nicht explizit angeben, sondern nur deren Werte in endlich vielen Punkten approximieren. Damit die so erhaltene Lösung die wirkliche Lösung approximiert, ist es wichtig, daß die im Algorithmus vorkommenden Funktionen stetig sind.

Aus einer anderen Richtung kam im Jahre 1973 ein zweiter Anstoß für die Untersuchung der CE-Eigenschaft durch eine Arbeit von Vesterstrøm [34]. Er behandelt (mit spezieller Hinsicht auf Probleme der Theorie der Operatorenalgebren) die Frage, wann eine affine stetige Abbildung zwischen zwei konvexen kompakten Mengen offen ist. Er beweist dabei, daß eine konvexe kompakte Menge K genau dann die CE-Eigenschaft hat, wenn die Schwerpunktabbildung $r : M_1^+(K) \to K$ offen ist. Das ist das erste Resultat, das einen Zusammenhang zwischen der CE-Eigenschaft und geometrischen Eigenschaften der konvexen Menge K herstellt. Weitere Resultate, die später zu einem besseren Einblick in die geometrische Bedeutung der CE-Eigenschaft geführt haben, werden in den zwei nächsten Paragraphen geschildert.

2 Stabile konvexe Mengen

Eine konvexe Menge K (in einem lokalkonvexen Hausdorffschen Raum) heißt *stabil*, falls die Mittelpunktabbildung

$$\varphi : K \times K \to K : (x, y) \mapsto \frac{x + y}{2}$$

offen ist.

Es ist leicht zu zeigen (s. z. B. [9] oder [26]), daß die Stabilität einer konvexen Menge K zu jeder der folgenden Eigenschaften äquivalent ist:

2.1 *Für ein* $\lambda \in]0, 1[$ *ist die Abbildung* $\varphi_\lambda : K \times K \to (x, y) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y$ *offen.*

2.2 *Das Innere (bezüglich* K*) jeder konvexen Teilmenge von* K *ist konvex.*

2.3 *Die konvexe Hülle jeder in* K *offenen Menge ist offen in* K.

Im Fall einer kompakten konvexen Menge ist die Stabilität zu einer weiteren Reihe von Eigenschaften äquivalent, darunter zur CE-Eigenschaft und zur Offenheit der Schwerpunktabbildung. Wichtig für die Herleitung dieser Äquivalenzen sind die zwei folgenden Hilfssätze. Der erste stammt von Vesterstrøm [34]. Der zweite, der die Stabilität der Bauer-Simplexe betrifft, ist von mehreren Autoren bewiesen worden (Chang [7], Ditor-Eifler [13], Makarov [24], O'Brien [26]). Der hier ausgeführte Beweis stammt von Clausing und ist in [26] enthalten.

2.4 Hilfssatz *Seien* K_1, K_2 *zwei konvexe kompakte Mengen und* $\varphi : K_1 \to K_2$ *eine affine stetige Surjektion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*:

(a) φ *ist offen*

(b) *für jede affine stetige Funktion* h *auf* K_1 *ist die Funktion* $h_\varphi(y) = \sup\{h(x) : x \in \varphi^{-1}(y)\}$, $y \in K_2$, *stetig*.

B e w e i s. (a) ⇒ (b). Die Aussage (a) ist äquivalent damit, daß die Korrespondenz $y \mapsto \varphi^{-1}(y)$ von K_2 nach K_1 nach unten halbstetig ist. Wegen der Stetigkeit von φ ist sie aber auch nach oben halbstetig. Damit ist sie stetig und dasselbe gilt für die Korrespondenz $y \mapsto \{h(x) : x \in \varphi^{-1}(y)\}$ von K_2 nach $\mathbf{R}$. Die Stetigkeit von h_φ ist dann offenbar.

(b) ⇒ (a). Ist φ nicht offen, so gibt es ein y_0 und ein Netz (y_i) in K_2 mit folgenden Eigenschaften: $y_i \to y_0$, das Netz $(\varphi^{-1}(y_i))$ konvergiert gegen eine konvexe kompakte Teilmenge L von K_1 und $L \not\supset \varphi^{-1}(y_0)$. Sei $x_0 \in \varphi^{-1}(y_0)\setminus L$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine affine stetige Funktion h auf K_1, so daß $h(x_0) > \sup\{h(x) : x \in L\}$. Es folgt, daß

$$\begin{aligned} h_\varphi(y_0) \geqslant h(x_0) &> \sup\{h(x) : x \in L\} \\ &= \lim(\sup\{h(x) : x \in \varphi^{-1}(y_i)\}) = \lim h_\varphi(y_i). \end{aligned}$$

Das widerspricht der Stetigkeit von h_φ. ∎

Für einen kompakten (Hausdorffschen) Raum X bezeichne $M_1^+(X)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf X. Ein Bauer-Simplex ist eine Menge der Form $M_1^+(X)$ versehen mit der vagen Topologie.

2.5 Hilfssatz *Jedes Bauer-Simplex ist stabil.*

B e w e i s. Ist $\varphi : Y \to Z$ eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen und ist Y_0 eine Teilmenge von Y, die in jeder Faser von φ dicht liegt (d. h. $\varphi^{-1}(z) \cap Y_0$ ist dicht in $\varphi^{-1}(z)$ für alle $z \in Z$), so ist die Offenheit von φ zur Offenheit der Einschränkung $\varphi : Y_0 \to Z$ äquivalent. Im Fall der Abbildung

$$\varphi : M_1^+(X) \times M_1^+(X) \to M_1^+(X) : (\mu, \nu) \mapsto \frac{1}{2}(\mu + \nu)$$

wird die obige Bedingung von der Menge $M_0 = \{(\mu, \nu) \in M_1^+(X)$: es gibt stetige Radon-Nikodym-Ableitungen von μ und ν bezüglich $\mu + \nu\}$ erfüllt. (Das beruht darauf, daß für jedes positive Radon-Maß λ die stetigen Funktionen dicht in $L^1(\lambda)$ liegen.) Die Stabilität von $M_1^+(X)$ folgt also, wenn wir zeigen, daß die Abbildung

$\varphi : M_0 \to M_1^+(X) : (\mu, \nu) \mapsto \frac{1}{2}(\mu + \nu)$ offen ist.

Seien nun $(\mu, \nu) \in M_0$, $\lambda = \frac{1}{2}(\mu + \nu)$, (λ_i) ein Netz in $M_1^+(X)$ mit $\lambda_i \to \lambda$. Es genügt Maße μ_i, ν_i in $M_1^+(X)$ zu finden, so daß: $\lambda_i = \frac{1}{2}(\mu_i + \nu_i)$, $\mu_i \to \mu$, $\nu_i \to \nu$, $(\mu_i, \nu_i) \in M_0$. Seien f, g nicht-negative stetige Funktionen auf X, so daß: $\mu = f\lambda$, $\nu = g\lambda$, $f + g = 2$. Für die Maße $\bar{\mu}_i = f\lambda_i$, $\bar{\nu}_i = g\lambda_i$ gilt: $\bar{\mu}_i + \bar{\nu}_i = 2\lambda_i$, $\bar{\mu}_i \to \mu$, $\bar{\nu}_i \to \nu$. Es ist dann leicht nachzuprüfen, daß die durch

$$\mu_i = \begin{cases} \dfrac{\bar{\mu}_i}{\|\bar{\mu}_i\|}, & \text{falls } \|\bar{\mu}_i\| \geqslant 1 \\[2ex] \bar{\mu}_i + \bar{\nu}_i - \dfrac{\bar{\nu}_i}{\|\bar{\nu}_i\|}, & \text{falls } \|\bar{\mu}_i\| < 1 \end{cases}$$

$$\nu_i = \begin{cases} \bar{\mu}_i + \bar{\nu}_i - \dfrac{\bar{\mu}_i}{\|\bar{\mu}_i\|}, & \text{falls } \|\bar{\mu}_i\| \geqslant 1 \\[2ex] \dfrac{\bar{\nu}_i}{\|\bar{\nu}_i\|}, & \text{falls } \|\bar{\mu}_i\| < 1 \end{cases}$$

definierten Maße in $M_1^+(X)$ liegen und die genannten Bedingungen erfüllen. ∎

Der folgende Satz enthält die angekündigten Kennzeichnungen der Stabilität für konvexe kompakte Mengen. Er stammt von Debs [10], [11], Eifler [15], Makarov [24], O'Brien [26] und Uhlenbrok [33]. Teile dieses Satzes sind auch von Kutateladze [21], Lima [23] und Vesterstrøm [34] bewiesen worden.

2.6 Satz *Für eine konvexe kompakte Menge* K *sind folgende Aussagen äquivalent*:

(a) K *ist stabil.*

(b) *Die Schwerpunktabbildung* $r : M_1^+(K) \to K$ *ist offen.*

(c) *Die Einschränkung* $r : \mathrm{Max}(K) \to K$ *der Schwerpunktabbildung auf die Menge der maximalen Wahrscheinlichkeitsmaße auf* K *ist offen.*

(d) K *hat die* CE-*Eigenschaft.*

(e) *Für jede stetige konvexe Funktion* f *auf* K *ist die obere Einhüllende* $\hat{f}$ *stetig.*

B e w e i s. (a) ⇒ (b). Nach 2.1 ist die Stabilität von K damit äquivalent, daß für jedes $\lambda \in]0, 1[$ die Abbildung $K \times K \to K : (x, y) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y$ offen ist. Induktiv folgt, daß für jedes n-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ von Zahlen in $[0, 1]$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ die Abbildung $K^n \to K : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ offen ist. Das impliziert die Offenheit der Einschränkung $r : E \to K$ der Schwerpunktabbildung auf die Menge E aller Maße in $M_1^+(K)$ mit endlichem Träger. Die Offenheit der Abbildung $r : M_1^+(K) \to K$ folgt dann, weil E in jeder Faser von r dicht liegt (vgl. Beweis von 2.5).

(b) ⇒ (d). Sei f eine stetige Funktion auf K. Die durch $h(\mu) = \mu(f)$, $\mu \in M_1^+(K)$, definierte Funktion ist affin und stetig. Nach dem Hilfssatz 2.4 impliziert die Offenheit der Schwerpunktabbildung $r : M_1^+(K) \to K$, daß die Funktion

$$h_r(x) = \sup\{\mu(f) : \mu \in r^{-1}(x)\}, \qquad x \in K,$$

stetig ist. Daraus folgt die Stetigkeit von $\hat{f}$, weil $\hat{f}$ mit h_r identisch ist (s. [1], Cor. I.3.6).

(e) ⇒ (c). Für die Extremalpunktmenge ex K von K gilt ex K = $\{x \in K : \hat{f}(x) = f(x)$ für jede stetige konvexe Funktion f auf K$\}$ (s. [1], Prop. I.4.5). Die Eigenschaft (e) impliziert also, daß ex K abgeschlossen ist. Damit gilt Max (K) = M_1^+(ex K). Es genügt nun zu zeigen, daß für die Abbildung r : Max (K) → K die Bedingung (b) im Hilfssatz 2.4 erfüllt wird. Ist h eine affine stetige Funktion auf Max (K), so gibt es eine stetige Funktion g auf ex K, so daß $h(\mu) = \mu(g)$ für alle $\mu \in M_1^+$(ex K) gilt. Nach [23] gibt es eine stetige konvexe Funktion f auf K mit f|ex K = g. Dann gilt für jedes $x \in K$:

$$h_r(x) = \sup\{\mu(f) : \mu \in \mathrm{Max}\,(K),\ r(\mu) = x\} = \hat{f}(x).$$

(e) impliziert also die Stetigkeit von h_r.

(c) ⇒ (a). Max (K) ist eine Seite der Menge $M_1^+(K)$, die nach dem Hilfssatz 2.5 stabil ist. Daraus folgt, daß Max (K) ebenfalls stabil ist. Es ist nun leicht nachzuweisen, daß das Bild einer stabilen konvexen Menge durch eine offene stetige affine Abbildung stabil ist. Daraus folgt die Stabilität von K. ■

3 Endlich-dimensionale stabile Mengen

Im Fall einer endlich-dimensionalen konvexen kompakten Menge kann die Stabilität durch geometrische Eigenschaften gekennzeichnet werden, die leicht nachzuprüfen sind. In diesem Zusammenhang erweist sich der Begriff der Gerüste einer konvexen Menge K als wichtig. Für n = 0, 1, 2, . . . ist das *n-Gerüst* $K^{(n)}$ von K die Vereinigung aller Seiten von K mit Dimension kleiner als oder gleich n. Im Beweis der Implikation (e) ⇒ (c) im Satz 2.6 ist gezeigt worden, daß das 0-Gerüst (d. h. die Extremalpunktmenge) einer stabilen konvexen kompakten Menge K abgeschlossen ist. Dasselbe gilt für alle Gerüste, und im endlich-dimensionalen Fall ist diese Eigenschaft äquivalent zur Stabilität.

Der Satz 3.3, der diese Charakterisierung angibt, stammt von Debs [10], [11] und Papadopoulou [27] sowie zum Teil von Eifler [16], Makarov [24] und Reiter-Stavrakas [30].

Ist K eine konvexe Menge, so bezeichnet ∂K den relativen Rand von K, d. h. die Vereinigung aller echten Seiten von K. ρ steht für die Euklidische Metrik in $\mathbf{R}^m$. dim (K) bezeichnet die Dimension der Menge K.

3.1 **Hilfssatz** *Sei* (K_n) *eine Folge konvexer kompakter Mengen in* $\mathbf{R}^m$, *die (in der Hausdorff-Metrik) gegen eine konvexe kompakte Menge* K *konvergiert. Ist* x *ein Punkt im* ℓ*-Gerüst* $K^{(\ell)}$ *von* K, *so gibt es eine Folge* (x_n), *so daß gilt:* $x_n \in K_n^{(\ell)}$ *für alle* n *und* $x_n \to x$.

B e w e i s. Weil (K_n) gegen K konvergiert, gibt es eine Folge (y_n) mit $y_n \in K_n$, $y_n \to x$. Für jedes n sei F_{y_n} die von y_n erzeugte Seite von K_n. O. B. d. A. können wir annehmen, daß die Folge dim (F_{y_n}) konstant ist. Ist dim $(F_{y_n}) = k > \ell$, dann folgt $\rho(y_n, \partial F_{y_n}) \to 0$. Denn: Ist das nicht der Fall, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $\rho(y_n, \partial F_{y_n}) \geqslant \epsilon$ für unendlich viele n. Für jedes solche n gibt es dann eine k-dimensionale ϵ-Kugel um y_n, die in K_n enthalten ist. Diese Kugeln bilden eine

Folge, die gegen eine in K enthaltene k-dimensionale ϵ-Kugel um x konvergiert. Weil $k > \ell$, widerspricht die Existenz einer solchen Kugel der Tatsache, daß $x \in K^{(\ell)}$.

Aus $\rho(y_n, \partial F_{y_n}) \to 0$ folgt die Existenz von Punkten z_n, so daß $z_n \to x$, $z_n \in \partial F_{y_n}$, d. h. $\dim (F_{z_n}) < k$. Gilt immer noch $\dim (F_{z_n}) > \ell$, so kann das obige Argument wiederholt werden, bis man Punkte (x_n) erhält, für die $\dim (F_{x_n}) \leqslant \ell$ und $x_n \to x$ gilt. ■

3.2 **Hilfssatz** *Sei* K *eine endlich-dimensionale konvexe kompakte Menge und* F *eine konvexe kompakte Teilmenge von* K, *so daß* $F^{(n)} \subseteq K^{(n)}$ *für alle* $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Dann ist* F *eine Seite von* K.

B e w e i s. Sei m die Dimension von F und G die von F erzeugte Seite von K. Aus $F = F^{(m)} \subseteq K^{(m)}$ folgt, daß G auch Dimension m hat. Aus der Voraussetzung folgt ferner, daß $\partial F = F^{(m-1)} \subseteq G^{(m-1)} = \partial G$. Weil F und G dieselbe Dimension haben, kann aber ∂F nur dann in ∂G enthalten sein, wenn $F = G$. ■

3.3 **Satz** *Für jede konvexe kompakte Teilmenge* K *von* $\mathbf{R}^m$ *sind folgende Aussagen äquivalent*:

(a) K *ist stabil.*

(b) *Die Korrespondenz* $x \mapsto F_x$ *von* K *nach* K *ist nach unten halbstetig.* (F_x *ist die von* x *erzeugte Seite von* K.)

(c) *Für alle* $n = 0, 1, \ldots, m$ *ist das* n-*Gerüst* $K^{(n)}$ *von* K *abgeschlossen.*

B e w e i s. (a) ⇒ (b). Aus der Stabilität von K folgt nach 2.1, daß für jedes $\lambda \in]0, 1[$ die Abbildung $\varphi_\lambda : K \times K \to K : (x, y) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y$ offen ist. Das impliziert, daß die durch

$$\Phi_\lambda(x) = \{y \in K\text{: es gibt ein } z \in K \text{ mit } \lambda y + (1 - \lambda)z = x\}$$

definierte Korrespondenz von K nach K nach unten halbstetig ist. (b) folgt dann, weil

$$F_x = \bigcup_{\lambda \in]0,1[} \Phi_\lambda(x).$$

(b) ⇒ (c). Aus (b) folgt die Halbstetigkeit nach unten der Funktion $x \mapsto \dim (F_x)$ und damit die Abgeschlossenheit aller Gerüste.

(c) ⇒ (b). Es genügt folgendes zu zeigen: Für jede (in der Hausdorff-Metrik) konvergente Folge von Seiten (F_n) in K ist der zugehörige Limes F auch eine Seite von K. Sei $x \in F^{(\ell)}$, $\ell = 0, 1, \ldots, m$. Nach dem Hilfssatz 3.1 gibt es Punkte $x_n \in F_n^{(\ell)}$ mit $x_n \to x$. Weil die Mengen F_n Seiten von K sind, gilt $x_n \in K^{(\ell)}$ und damit $x \in K^{(\ell)}$ wegen der Abgeschlossenheit der Gerüste. Es folgt, daß $F^{(\ell)} \subseteq K^{(\ell)}$ für alle $\ell = 0, 1, \ldots, m$. Das impliziert nach dem Hilfssatz 3.2, daß F eine Seite von K ist.

(b) ⇒ (a). Um die Stabilität von K herzuleiten, genügt es, folgendes zu zeigen: Ist $[x, y]$ eine maximale in K enthaltene Strecke, z ein Punkt in $]x, y[$ und (z_n) eine Folge in K mit $z_n \to z$, dann gibt es eine Teilfolge (z_{n_k}) von (z_n) und Folgen (x_k), (y_k) in K, so daß $z_{n_k} \in [x_k, y_k]$, $x_k \to x$, $y_k \to y$. Wir betrachten dazu alle Tripel von Folgen (z_{n_k}), (x_k), (y_k) in K mit folgenden Eigenschaften:

(i) (z_{n_k}) ist eine Teilfolge von (z_n),

(ii) $z_{n_k} \in [x_k, y_k]$ für alle k,

(iii) $x_k \to x$,

(iv) die Folge $\dim (F_{y_k})$ ist konstant.

Darunter wählen wir ein Tripel (z_{n_k}), (x_k), (y_k), so daß $\dim (F_{y_k})$ minimal ist und die Folge (y_k) konvergiert. Es genügt nun zu zeigen, daß für ein solches Tripel $y_k \to y$ gilt. Wir nehmen an, daß $y_k \to y' \neq y$. y' muß dann in $[x, y[$ liegen und damit gilt $x \in F_{y'}$. Wegen (b) gibt es Punkte $x_k' \in F_{y_k}$, so daß $x_k' \to x$. Wir verlängern die Strecken $[x_k', y_k]$ jenseits y_k so weit wie möglich ohne die Menge K zu verlassen. Seien $[x_k', y_k']$ die so erhaltenen Strecken. Dann gilt: $\dim (F_{y_k'}) < \dim (F_{y_k})$. Es gibt aber Punkte $x_k'' \in [x_k, x_k']$, so daß $z_{n_k} \in [x_k'', y_k']$. Das Tripel (z_{n_k}), (x_k''), (y_k') erfüllt dann die Eigenschaften (i)–(iii). Schränken wir uns auf eine geeignete Teilfolge ein, so daß auch (iv) erfüllt wird, so erhalten wir einen Widerspruch zur Minimalität von $\dim (F_{y_k})$. ■

Ist K eine m-dimensionale konvexe kompakte Menge, so sind die Gerüste $K^{(m)}$, $K^{(m-1)}$ und $K^{(m-2)}$ immer abgeschlossen. Um die Stabilität von K nachzuweisen, genügt es also die Abgeschlossenheit der Gerüste $K^{(n)}$ für $n = 0, 1, \ldots, m-3$ nachzuprüfen. Insbesondere folgt, daß jede 2-dimensionale konvexe kompakte Menge stabil ist. Für 3-dimensionale Mengen ist die Stabilität zur Abgeschlossenheit der Extremalpunktmenge äquivalent.

Durch Anwendung des Satzes 3.3 ist es leicht einzusehen, daß jedes Polyeder stabil ist. Dasselbe gilt für jede (endlich-dimensionale) strikt konvexe, kompakte Menge. Einige weniger triviale stabile Mengen werden in den folgenden Beispielen beschrieben.

3.4 Beispiel Sei $\mathbf{T} = \{e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi]\}$ und $T_m = \{1, f_1, f_2, \ldots, f_{2m}\}$ ein Tschebyscheffsches System aus Funktionen auf $\mathbf{T}$ (z. B. die Menge $\{1, \cos\varphi, \sin\varphi, \ldots, \cos m\varphi, \sin m\varphi\}$). K_m bezeichne den zu T_m gehörigen Momentenkörper, d. h. die konvexe Hülle der Menge

$$\{(1, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{2m}(x)) : x \in \mathbf{T}\} \text{ in } \mathbf{R}^{2m+1}.$$

Folgende Eigenschaften von K_m sind bekannt (s. [18], Chapter VI):

Die Extremalpunktmenge ex K_m von K_m ist homöomorph zu $\mathbf{T}$. Für $n \leqslant m$ ist die konvexe Hülle jeder n-punktigen Teilmenge von ex K_m eine $(n-1)$-dimensionale Seite von K_m. Ist $n > m$, so ist jede konvexe Kombination von n Extremalpunkten ein innerer Punkt von K_m.

Daraus folgt für die Gerüste von K_m:

$$K_m^{(n-1)} = \{t_1 y_1 + \ldots + t_n y_n : y_i \in \mathrm{ex}\, K_m,\, t_i \in [0, 1],\, i = 1, \ldots, n,\, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}$$
für $n \leqslant m$,

$$K_m^{(n-1)} = K_m^{(m-1)} \quad \text{für } m < n \leqslant 2m, \qquad K_m^{(2m)} = K_m.$$

Damit sind alle Gerüste von K_m kompakt, d. h. K_m ist stabil.

(Für $T_m = \{1, \cos\varphi, \sin\varphi, \ldots, \cos m\varphi, \sin m\varphi\}$

sind die Mengen K_m die von Carathéodory [6] studierten Koeffizientenkörper.)

Ähnlich wie oben zeigt man, daß der Momentenkörper eines Tschebyscheffschen Systems auf einem Intervall [a, b] stabil ist. In diesem Fall ist allerdings die genaue Beschreibung der Gerüste (wegen der gesonderten Rolle der Endpunkte a, b) etwas umständlich.

3.5 Beispiel ([12]) Sei M_n die C*-Algebra der komplexen n x n-Matrizen. Der Zustandsraum S_n von M_n, d. h. die Menge aller positiv semidefiniten Matrizen mit Spur 1, ist stabil. Denn: Zu jeder Matrix A in S_n gibt es eine unitäre Matrix U und ein $m \in \{1, \ldots, n\}$, so daß $U^{-1} A U$ eine Diagonalmatrix ist, deren m ersten Diagonalelemente positiv sind und die übrigen verschwinden. Ist A_m die Matrix mit Elementen $a_{ij} = 1/m$, falls $i = j \leqslant m$, $a_{ij} = 0$ sonst, so gilt offenbar: $F_{U^{-1} A U} = F_{A_m}$. Weil die Abbildung $A \mapsto U^{-1} A U$ ein affiner Isomorphismus von S_n auf sich ist, folgt: $\dim (F_A) = \dim (F_{A_m})$. Daraus und wegen $F_{A_k} \subset F_{A_m}$ für $k < m$, folgt leicht, daß die Gerüste von M_n die Mengen $\{U A U^{-1} : U \in \mathscr{U}, A \in F_{A_m}\}$, $m = 1, 2, \ldots, n$, sind. ($\mathscr{U}$ ist die Menge aller unitären n x n-Matrizen.) Weil $\mathscr{U}$ kompakt ist, sind alle Gerüste von S_n kompakt.

Aus der Stabilität der Mengen S_n folgt, daß der Zustandsraum jeder endlichdimensionalen C*-Algebra stabil ist. Jede solche C*-Algebra ist nämlich eine direkte Summe von C*-Algebren der Form M_n (s. [32]). So ist der zugehörige Zustandsraum eine direkte konvexe Summe von stabilen Mengen und damit stabil.

4 Extremale Operatoren

Die in § 2 gegebene Definition der Stabilität einer konvexen Menge K ist äquivalent damit, daß die Korrespondenz

$$x \mapsto \left\{(y, z) : x = \frac{y+z}{2}\right\} \quad \text{von K nach K x K}$$

nach unten halbstetig ist. Aufgrund dieser Eigenschaft ermöglicht die Stabilität (unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen) die Konstruktion stetiger Schnitte der obigen Korrespondenz. Das führt zu einer Beschreibung der Extremalpunkte einiger Mengen von affinen stetigen Abbildungen nach einer stabilen Menge und damit zu gewissen Charakterisierungen extremaler Operatoren zwischen Banachräumen. Die hier vorgestellten Resultate stammen von Clausing und Papadopoulou [9].

4.1 Satz *Sei* S *ein Choquet-Simplex,* K *eine abgeschlossene stabile konvexe Teilmenge eines Fréchet-Raumes,* A(S, K) *die konvexe Menge aller affinen stetigen Abbildungen von* S *nach* K. *Die Extremalpunkte von* A(S, K) *sind genau diejenigen Abbildungen* φ *in* A(S, K), *für die gilt*: $\varphi(\text{ex } S) \subseteq \text{ex } K$.

B e w e i s. Sei φ eine Abbildung in A(S, K), für die es ein $x_0 \in \text{ex } S$ gibt, so daß $\varphi(x_0) \notin \text{ex } K$. Dann gibt es Punkte $y_0, z_0 \in K$ mit $y_0 \neq z_0$, $\varphi(x_0) = \dfrac{y_0 + z_0}{2}$. Die Korrespondenz

$$\Phi : x \mapsto \left\{(y, z) \in K \times K : \frac{y+z}{2} = \varphi(x)\right\} \quad \text{von S nach K x K}$$

ist nach unten halbstetig (wegen der Stabilität von K) und konvex (d. h. $\Phi(tx_1 + (1-t)x_2) \supseteq t\,\Phi(x_1) + (1-t)\,\Phi(x_2)$). Nach dem Auswahlsatz von Lazar [22] gibt es eine affine stetige Abbildung $(\varphi_1, \varphi_2) : S \to K \times K$, so daß $(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \in \Phi(x)$ für alle $x \in S$ und $(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)) = (y_0, z_0)$. φ_1 und φ_2 sind also Abbildungen in A(S, K) mit $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$. Das zeigt, daß φ nicht extermal in A(S, K) ist. ∎

Sei nun S ein Choquet-Simplex, A(S) der Banachraum aller affinen stetigen Funktionen auf S, A(S)′ der duale Raum von A(S). S wird in kanonischer Weise in A(S)′ eingebettet. Sei ferner X ein kompakter Hausdorffscher Raum, C(X) der Banachraum aller stetigen Funktionen auf X, M(X) der duale Raum von C(X), d. h. der Raum aller Radonmaße auf X, $M_1^+(X)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf X. U bezeichne die konvexe Menge aller positiven Operatoren von C(X) nach A(S), für die $T1 = 1$ gilt. Ordnet man jedem Operator T in U die Einschränkung des adjungierten Operators $T' : A(S)' \to M(X)$ auf S zu, so erhält man eine affine Bijektion zwischen den Mengen U und $A(S, M_1^+(X))$. Ist X metrisierbar, so erhält man aus dem Satz 4.1 und der Stabilität von $M_1^+(X)$ (s. 2.5), daß die Extremalpunkte von U genau diejenigen Operatoren T in U sind, für die $T'(\text{ex } S) \subseteq X$ gilt (vgl. [22], Th. 4.3).

Der Satz 4.1 hat auch ein „symmetrisches" Analogon. Sei L eine Lindenstrauss-Kugel (d. h. die Einheitskugel eines dualen L^1-Raumes E′ versehen mit der $\sigma(E', E)$-Topologie). Sei ferner K eine symmetrische (d. h. $K = -K$) konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Hausdorffschen Raumes. $A_0(L, K)$ bezeichne die Menge aller affinen stetigen Abbildungen φ von L nach K mit $\varphi(0) = 0$. Analog zu 4.1 kann man folgenden Satz beweisen.

4.2 Satz *Sei* L *eine Lindenstrauss-Kugel,* K *eine abgeschlossene symmetrische stabile konvexe Teilmenge eines Fréchet-Raumes. Dann sind die Extremalpunkte von* $A_0(L, K)$ *genau diejenigen Abbildungen* φ *in* $A_0(L, K)$, *für die* $\varphi(\text{ex } L) \subseteq \text{ex } K$ *gilt.*

Aus dem obigen Satz kann man gewisse Charakterisierungen von extremalen kompakten Operatoren herleiten. Wir betrachten dazu einen Banachraum F. Sei B die Einheitskugel des dualen Raumes F′ mit der Norm-Topologie. Sind L, E wie oben, so kann die Menge aller kompakten Operatoren von F nach E mit Norm $\leqslant 1$ mit der Menge $A_0(L, B)$ identifiziert werden (mittels der Zuordnung $T \mapsto T'|L$) (s. [14], S. 486). Aus 4.2 folgt also:

4.3 Satz *Seien* E, F *Banachräume, so daß* E′ *ein* L^1*-Raum und die Einheitskugel* B *von* F′ *(für die Norm-Topologie) stabil ist. Bezeichnet* K(F, E) *die konvexe Menge aller kompakten Operatoren von* F *nach* E *mit Norm* $\leqslant 1$, *so sind die Extremalpunkte von* K(F, E) *genau diejenigen Operatoren* T *in* K(F, E), *für die* $T'(\text{ex } L) \subseteq \text{ex } B$ *gilt, wobei* L *die Einheitskugel von* E′ *ist.*

Die zwei folgenden Beispiele liefern hinreichende Bedingungen dafür, daß die Einheitskugel eines Banachraumes stabil ist.

4.4 Beispiel ([22]) Die Einheitskugel B eines strikt konvexen Banachraumes E ist stabil. Denn: Jede offene konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen

Raumes ist offenbar stabil. Daraus folgt, daß die Korrespondenz

$$x \mapsto \left\{(y, z) \in B \times B : x = \frac{y+z}{2}\right\}$$

in jedem Punkt der offenen Einheitskugel nach unten halbstetig ist. Jeder Punkt x in B mit $\|x\| = 1$ ist aber ein Extremalpunkt von B, also ist die obige Korrespondenz auch in solchen Punkten nach unten halbstetig.

4.5 Beispiel ([31]) Sei E ein Banachraum mit der 3-2-Durchschnittseigenschaft, d. h. der Durchschnitt von drei abgeschlossenen Kugeln in E ist nicht leer, falls das für je zwei davon der Fall ist. Dann ist die Einheitskugel B von E stabil. Um das zu zeigen, betrachten wir einen Punkt $x \in B$, ein $a \in E$, so daß $x \pm a \in B$, und eine Folge (x_n) in B mit $x_n \to x$. Für jedes n betrachten wir die Kugeln

$$A_n = \{b \in E : \|b - x_n\| \leqslant 1\}, \qquad B_n = \{b \in E : \|b + x_n\| \leqslant 1\}.$$

$$C_n = \{b \in E : \|b - a\| \leqslant \|x_n - x\|\}.$$

Es gilt: $0 \in A_n \cap B_n, \quad a + x_n - x \in A_n \cap C_n, \quad a + x - x_n \in B_n \cap C_n.$

Also ist $A_n \cap B_n \cap C_n$ nicht leer. Sind a_n Punkte aus $A_n \cap B_n \cap C_n$, so gilt

$$\|a_n \pm x_n\| \leqslant 1, \|a_n - a\| \leqslant \|x_n - x\|,$$

d. h. $x_n \pm a_n \in B$, $x_n \pm a_n \to x \pm a$. Das zeigt die Stabilität von B.

Der Satz 4.3 enthält also verschiedene bekannte Charakterisierungen von extremalen kompakten Operatoren, z. B. ein Resultat von Fakhoury [17], [31], das den Spezialfall betrifft, in dem F' strikt konvex ist oder die 3-2-Durchschnittseigenschaft besitzt, und ein Resultat von Blumenthal-Lindenstrauss-Phelps ([5], Th. 3 (ii)), in dem E ein Raum der Form C(X), F endlich-dimensional und B ein Polyeder ist.

5 Der stationäre Korovkin-Abschluß eines Funktionenraumes

Sei (T_n) eine Folge positiver linearer Operatoren von C([0, 1]) in sich, so daß die Folge $(T_n f)$ für jede der drei Funktionen $f(x) = 1, = x, = x^2$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Nach einem wohlbekannten Satz von Korovkin [20] konvergiert dann für jede Funktion $f \in C([0, 1])$ die Folge $(T_n f)$ gleichmäßig gegen f. Spätere Untersuchungen (hauptsächlich von Bauer, Berens-Lorentz und Šaškin) haben zu wesentlichen Verallgemeinerungen dieses Satzes geführt und die genaue Rolle der drei genannten Funktionen geklärt. Das Hauptresultat in diesem Zusammenhang stellt der Satz 5.1 dar.

Sei X ein kompakter (Hausdorffscher) Raum, C(X) der Banachraum der stetigen Funktionen auf X, H ein Funktionenraum auf X, d. h. ein abgeschlossener Teilraum von C(X), der die Konstanten enthält und die Punkte von X trennt. Für jede Funktion $f \in C(X)$ wird die obere bzw. untere Einhüllende von f bezüglich H folgendermaßen definiert:

$$\hat{f} = \inf\{h \in H : h \geqslant f\} \quad \text{bzw.} \quad \check{f} = \sup\{h \in H : h \leqslant f\}.$$

Eine Funktion $f \in C(X)$ heißt H-*affin*, falls $\underset{\vee}{f} = \hat{f}$. Der Raum aller H-affinen Funktionen werde mit $\hat{H}$ bezeichnet. Der *Korovkin-Abschluß* von H ist die Menge $\operatorname{Kor}(H)$ aller Funktionen $f \in C(X)$ mit folgender Eigenschaft: Ist (T_i) ein Netz von positiven linearen Operatoren von C(X) in sich, so daß $T_i h \to h$ für alle $h \in H$, dann gilt $T_i f \to f$.

5.1 Satz ([3], [4]) *Für jeden Funktionenraum* H *auf einem kompakten Raum* X *gilt* $\operatorname{Kor}(H) = \hat{H}$.

Ist f eine Funktion aus dem Korovkin-Abschluß von H, so gilt insbesondere $Tf = f$ für alle positiven Operatoren T von C(X) in sich mit $Th = h$ für alle $h \in H$. Die Menge aller Funktionen in C(X) mit dieser Eigenschaft heißt der stationäre *Korovkin-Abschluß* von H und wird mit $\operatorname{Kor}_s(H)$ bezeichnet. Im allgemeinen ist $\operatorname{Kor}(H)$ ein echter Teilraum von $\operatorname{Kor}_s(H)$, wie folgendes Beispiel zeigt.

5.2 Beispiel ([3]) Sei $X = [0, 1]$, H der Raum aller stetigen Funktionen h auf $[0, 1]$ mit $\int_0^1 h(x)dx = h(1)$. Der Korovkin-Abschluß von H fällt mit H zusammen. Denn für jedes $f \in C(X)$ gilt

$$\hat{f}(1) \geqslant \int_0^1 \hat{f}(x)dx \geqslant \int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^1 \underset{\vee}{f}(x)dx \geqslant \underset{\vee}{f}(1).$$

Ist $f \in \operatorname{Kor}(H) = \hat{H}$, so folgt aus $\hat{f}(1) = \underset{\vee}{f}(1)$, daß $\int_0^1 f(x)dx = f(1)$, d. h. $f \in H$.

Der stationäre Korovkin-Abschluß von H ist aber der ganze Raum C(X). Um das zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß für jeden Punkt $x_0 \in \,]0, 1[$ eine Funktion $h \in H$ existiert, die auf jedem der Intervalle $[0, x_0]$, $[x_0, 1]$ affin ist, in x_0 einen vorgegebenen Wert und in den Punkten 0 und 1 beliebig große Werte annimmt. So kann man für jede Funktion $f \in C(X)$ eine Folge (h_n) in H finden, so daß $h_n \geqslant f$, $h_n(x_0) \to f(x_0)$. Es folgt, daß $\hat{f}(x_0) = f(x_0) = \underset{\vee}{f}(x_0)$. Ähnlich zeigt man, daß $\hat{f}(0) = f(0) = \underset{\vee}{f}(0)$ für alle $f \in C(X)$. Man kann nämlich für jedes $f \in C(X)$ und jedes $a > f(0)$ eine stückweise affine Funktion $h \in H$ finden, so daß $h \geqslant f$, $h(0) = a$. Für jedes $f \in C(X)$ und jedes $x \in [0, 1[$ gilt also $\hat{f}(x) = \underset{\vee}{f}(x)$.

Sei nun $T : C(X) \to C(X)$ ein positiver linearer Operator, so daß $Th = h$ für alle $h \in H$. Für jedes $f \in C(X)$ gilt dann $\underset{\vee}{f} \leqslant Tf \leqslant \hat{f}$, also $Tf(x) = f(x)$ für alle $x \in [0, 1[$. Aus der Stetigkeit der Funktionen f und Tf folgt $Tf = f$. ■

Für den stationären Korovkin-Abschluß eines Funktionenraumes H ist keine befriedigende allgemeine Charakterisierung bekannt. Eine angenehme Situation liegt natürlich vor, wenn $\operatorname{Kor}_s(H)$ mit $\operatorname{Kor}(H)$ zusammenfällt. Hinreichende Bedingungen dafür werden in [28] angegeben. Eine solche Bedingung ist im Fall eines metrisierbaren Raumes X die Stabilität des Zustandsraumes S von H, was wir später in diesem Paragraphen beweisen werden. Der Zusammenhang der Stabilität mit dem hier betrachteten Problem liegt darin, daß die Offenheit der Schwerpunktabbildung $r : \operatorname{Max}(S) \to S$ (vgl. Satz 2.6) die Konstruktion von stetigen Schnitten von r und damit von geeigneten positiven Operatoren $T : C(X) \to C(X)$ ermöglicht.

Ist H ein Funktionenraum auf dem kompakten Raum X, so ist der Zustandsraum S von H die Menge aller positiven linearen Funktionale auf H mit Norm 1.

S versehen mit der $\sigma(H', H)$-Topologie ist eine konvexe kompakte Menge. Für jedes $x \in X$ ist das zu x gehörige Auswertungsfunktional ϵ_x (d. h. das durch $\epsilon_x(h) = h(x)$, $h \in H$, definierte Funktional) ein Element des Zustandsraumes S. Die Abbildung $x \mapsto \epsilon_x$ ist eine topologische Einbettung von X in S. X kann also als Teilmenge von S aufgefaßt werden. Dann gilt $X \supseteq \operatorname{ex} S$. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf X heißt Darstellungsmaß für den Punkt $x \in X$ (bezüglich H), wenn $\mu(h) = h(x)$ für alle $h \in H$ gilt. M_x bezeichne die Menge aller Darstellungsmaße für x. Weil die Maße auf X auch als Maße auf S betrachtet werden können, kann man die Menge $M_1^+(X)$ mit der von S induzierten Choquet-Ordnung versehen. Für jedes $x \in X$ bezeichne dann Z_x die Menge aller maximalen Darstellungsmaße für x. Weil $\operatorname{ex} S \subseteq X$, ist Z_x die Menge aller maximalen Maße in $M_1^+(S)$, die x als Schwerpunkt haben.

5.3 Lemma *Sei* X *ein metrisierbarer kompakter Raum,* H *ein Funktionenraum auf* X. *Eine Funktion* $f \in C(X)$ *ist genau dann* H*-affin, wenn* $\mu(f) = f(x)$ *für alle* $x \in X$ *und alle* $\mu \in Z_x$ *gilt.*

B e w e i s. f ist genau dann H-affin, wenn $\mu(f) = f(x)$ für alle $x \in X$, $\mu \in M_x$ gilt (s. [2]). Sei nun $f \in C(X)$, so daß $\mu(f) = f(x)$ für alle $x \in X$, $\mu \in Z_x$. Nach [29] gibt es einen Borel-meßbaren Schnitt σ der Korrespondenz $x \mapsto Z_x$ von X nach $M_1^+(X)$. Sei $x_0 \in X$, $\mu_0 \in M_{x_0}$. Das durch $\nu(g) = \int_X \sigma(x)(g)\, d\mu_0(x)$, $g \in C(X)$, definierte Maß ν auf X ist dann ein Darstellungsmaß für x_0. Ferner wird ν von ex S getragen, weil das für jedes der Maße $\sigma(x)$ der Fall ist. ν liegt also in Z_{x_0} und damit gilt

$$f(x_0) = \nu(f) = \int_X \sigma(x)(f)\, d\mu_0(x) = \int_X f(x)\, d\mu_0(x).$$

Also gilt $f(x) = \mu(f)$ für alle $x \in X$, $\mu \in M_x$ und damit ist f H-affin. ■

5.4 Satz *Sei* X *ein metrisierbarer kompakter Raum,* H *ein Funktionenraum auf* X. *Ist der Zustandsraum* S *von* H *stabil, so gilt* $\operatorname{Kor}_s(H) = \hat{H}$.

B e w e i s. Sei f eine stetige Funktion auf X mit $f \notin \hat{H}$. Nach dem vorigen Lemma gibt es ein $x_0 \in X$ und ein $\mu_0 \in Z_{x_0}$, so daß $\mu_0(f) \neq f(x_0)$. Aus der Stabilität von S folgt, daß die Korrespondenz $x \mapsto Z_x$ von X nach $M_1^+(X)$ nach unten halbstetig ist. Nach dem Auswahlsatz von Michael [25] gibt es also einen stetigen Schnitt σ dieser Korrespondenz, so daß $\sigma(x_0) = \mu_0$. Sei nun $T: C(X) \to C(X)$ der durch $Tg(x) = \sigma(x)(g)$, $x \in X$, $g \in C(X)$, definierte positive lineare Operator. Weil $\sigma(x) \in M_x$ für alle $x \in X$, folgt, daß $Th = h$ für alle $h \in H$. Es gilt aber $Tf(x_0) = \mu_0(f) \neq f(x_0)$. Also $f \notin \operatorname{Kor}_s(H)$. ■

6 Ergänzungen

6.1 Die im Satz 3.3 angegebenen Charakterisierungen der Stabilität im endlich-dimensionalen Fall sind für unendlich-dimensionale Mengen nicht mehr gültig. Sogar beide Implikationen (c) ⇒ (b), (b) ⇒ (a) sind im allgemeinen falsch. Beispiele dafür sind in [27] enthalten. Es ist überdies nicht möglich unendlich-dimensionale Gerüste so zu definieren, daß die Abgeschlossenheit aller Gerüste immer die Stabilität charakterisiert. Denn die Vereinigung aller endlich-dimensionalen Gerüste einer kompakten konvexen Mange K liegt dicht in K. Ein unendlich-dimensionales Gerüst kann also nur dann abgeschlossen sein, wenn es mit K zusammenfällt.

6.2 Wie in § 3 klar wurde, liefert der Satz 3.3 viele Beispiele von endlich-dimensionalen stabilen konvexen kompakten Mengen. Im Gegensatz dazu sind nicht viele unendlich-dimensionale Beispiele von solchen Mengen bekannt. Die einzigen konkreten Beispiele sind die Bauer-Simplexe und Mengen, die aus solchen und aus endlich-dimensionalen stabilen Mengen durch kanonische Konstruktionen zusammengesetzt werden können, z. B. ein Würfel $[0, 1]^{\alpha}$ für eine beliebige Kardinalzahl α. R. E. Jamison hat verschiedene Resultate bewiesen, die erwarten lassen, daß die Stabilität im unendlich-dimensionalen Fall eine seltene Eigenschaft ist. (Diese Resultate sind noch nicht veröffentlicht.) Eines seiner Resultate besagt z. B., daß die Einheitskugel eines unendlich-dimensionalen dualen Banachraumes E', der die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt, (z. B. eines reflexiven Banachraumes oder eines separablen Dualraumes) versehen mit der $\sigma(E', E)$-Topologie nicht stabil ist. Unter den nicht-kompakten konvexen Mengen gibt es aber mehrere unendlich-dimensionale Beispiele von stabilen Mengen, z. B. die in 4.4 und 4.5 besprochenen Einheitskugeln oder die in [8] und [12] untersuchten Mengen von stetigen Abbildungen.

6.3 Man kann auch den Begriff der lokalen Stabilität einführen. Ist K eine konvexe kompakte Menge und x_0 ein Punkt in K, so heißt K stabil in x_0, falls für jedes $\lambda \in]0, 1[$ die Korrespondenz

$$x \mapsto \{(y, z) \in K \times K : \lambda y + (1 - \lambda)z = x\} \text{ von } K \text{ nach } K \times K$$

nach unten halbstetig in x_0 ist. Für diesen Begriff gilt ein Analogon des Satzes 2.6 (s. [16], [27]). Insbesondere ist K genau dann stabil in x_0, wenn für jede stetige Funktion f auf K die obere Einhüllende $\hat{f}$ stetig in x_0 ist. Weiter gilt ein Analogon der Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (b) im Satz 3.3. Ist nämlich K endlich-dimensional, so ist K nach einem Resultat von Eifler [16] genau dann stabil in x_0, wenn die Korrespondenz $x \mapsto F_x$ nach unten halbstetig in x_0 ist.

Eine endlich-dimensionale konvexe kompakte Menge K ist offenbar in jedem inneren Punkt stabil (vgl. 4.4). Das ist aber auch für die „meisten" Randpunkte der Fall. Klee und Martin [19] haben nämlich bewiesen, daß die Punkte in ∂K, in denen K stabil ist, eine dichte G_δ-Teilmenge von ∂K bilden.

6.4 Die Stabilität wird bei mehreren kanonischen Konstruktionen erhalten, z. B. bei der Bildung direkter konvexer Summen oder Produkte. Ein Schnitt einer stabilen Menge (d. h. der Durchschnitt mit einer Hyperebene) ist aber im allgemeinen nicht stabil. Es gibt sogar stabile Mengen, die keinen stabilen echten Schnitt besitzen. (Ein Schnitt von K ist echt, wenn er keine Seite von K ist.) Ein 4-dimensionales Beispiel dafür liefert die Menge $K = co(X)$, wobei

$$X = \{x_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

K ist stabil und es gilt ex $K = X$. Außerdem ist jede Strecke der Form $[x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}]$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$, eine Seite von K (s. Bsp. 3.4). Sei H eine Hyperebene in $\mathbf{R}^4$, so daß $S = K \cap H$ ein echter Schnitt von K ist. Dann hat die geschlossene Kurve X

Punkte auf beiden Seiten von H. Es gibt also Punkte $x_{\varphi_0}, x_{\psi_0} \in S$, $x_{\varphi_0} \neq x_{\psi_0}$, und Folgen (φ_n), (ψ_n), so daß $\varphi_n \to \varphi_0$, $\psi_n \to \psi_0$, $x_{\varphi_n}, x_{\psi_n} \notin S$, $\frac{1}{2}(x_{\varphi_n} + x_{\psi_n}) \in S$. Dann gilt

$$[x_{\varphi_n}, x_{\psi_n}] \cap S = \left\{ \frac{1}{2}(x_{\varphi_n} + x_{\psi_n}) \right\}.$$

Weil $[x_{\varphi_n}, x_{\psi_n}]$ eine Seite von K ist, folgt, daß $\frac{1}{2}(x_{\varphi_n} + x_{\psi_n}) \in \operatorname{ex} S$. Da $\frac{1}{2}(x_{\varphi_0} + x_{\psi_0}) \notin \operatorname{ex} S$, ist ex S nicht abgeschlossen, also ist S nicht stabil.

Literatur

[1] Alfsen, E. M.: Compact Convex Sets and Boundary Integrals. Berlin – Heidelberg – New York 1971: Springer. = Ergebn. der Math. 57

[2] Bauer, H.: Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem. Ann. Inst. Fourier **11** (1961) 89–136

[3] Bauer, H.: Theorems of Korovkin Type for Adapted Spaces. Ann. Inst. Fourier **23** (1973) 245–260

[4] Berens, H.; Lorentz, G. G.: Theorems of Korovkin Type for Positive Linear Operators on Banach Lattices. In: Approximation Theory (G. G. Lorentz, Ed.). New York – London: Academic Press 1973, pp. 1–30

[5] Blumenthal, R. M.; Lindenstrauss, J.; Phelps, R. R.: Extreme Operators into C(K). Pacific J. Math. **15** (1965) 747–756

[6] Carathéodory, C.: Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. Rend. Circ. Mat. Palermo **32** (1911) 193–217

[7] Chang, S. M.: On Continuous Image Averaging of Probability Measures. Pacific J. Math. **65** (1976) 13–17

[8] Clausing, A.: Retractions and Open Mappings between Convex Sets. Math. Z. **160** (1978) 263–274

[9] Clausing, A.; Papadopoulou, S.: Stable Convex Sets and Extremal Operators. Math. Ann. **231** (1978) 193–203

[10] Debs, G.: Sur les ensembles convexes stables. Thèse Univ. Paris VI, 1978

[11] Debs, G.: Applications affines ouvertes et convexes compacts stables. Bull. Sc. Math. **102** (1978) 401–414

[12] Debs, G.: Some General Methods for Constructing Stable Convex Sets. Math. Ann. **241** (1979) 97–105

[13] Ditor, S. Z.; Eifler, L. Q.: Some Open Mapping Theorems for Measures. Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972) 287–293

[14] Dunford, N.; Schwartz, J. T.: Linear Operators. Part I. New York – London – Sydney 1958: Interscience. = Pure and Applied Math. 7

[15] Eifler, L. Q.: Openness of Convex Averaging. Glasnik Math. **12** (1977) 67–72

[16] Eifler, L. Q.: Semi-Continuity of the Face Function for a Convex Set. Comm. Math. Helvetici **52** (1977) 325–328

[17] Fakhoury, H.: Préduaux de L-espaces et éléments extrémaux. Séminaire Choquet (Initiation à l'analyse) 10 (1970/71) no 20

[18] Karlin, S.; Studden, W. J.: Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics. New York – London – Sydney 1966: Interscience. = Pure and Applied Math. 15

[19] Klee, V.; Martin, M.: Semicontinuity of the Face-Function of a Convex Set. Comm. Math. Helvetici **46** (1971) 1–12

[20] Korovkin, P. P.: Über die Konvergenz positiver linearer Operatoren im Raum der stetigen Funktionen. Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.) **90** (1953) 961–964 (Russisch)

[21] Kutateladze, S. S.: Stetige baryzentrische Koordinaten und die CE-Eigenschaft. Optimizacija 14/31 (1974) 124–129 (Russisch)

[22] Lazar, A. J.: Affine Functions on Simplexes and Extreme Operators. Israel J. Math. **5** (1967) 31–43

[23] L i m a , Å.: On Continuous Convex Functions and Split Faces. Proc. London Math. Soc. **25** (1972) 27–40
[24] M a k a r o v , N. N.: Continuous Selectors of Representative Measures and the Space of Faces of a Convex Compactum. Math. Notes Acad. Sci. USSR **22** (1977) 991–996
[25] M i c h a e l , E.: Continuous Selections I. Ann. of Math. **63** (1956) 361–382
[26] O' B r i e n , R. C.: On the Openness of the Barycentre Map. Math. Ann. **223** (1976) 207–212
[27] P a p a d o p o u l o u , S.: On the Geometry of Stable Compact Convex Sets. Math. Ann. **229** (1977) 193–200
[28] P a p a d o p o u l o u , S.: Über den stationären Korovkin-Abschluß eines Funktionenraumes. Habilitationsschrift Univ. Erlangen – Nürnberg 1979
[29] R a o , M.: Measurable Selections of Representing Measures. Quart. J. Math. Oxford **22** (1971) 571–573
[30] R e i t e r , H. B.; S t a v r a k a s , N. M.: On the Compactness of the Hyperspace of Faces. Pacific J. Math. **73** (1977) 193–196
[31] S h a r i r , M.: A Note on Extreme Elements in $A_0(K, E)$. Proc. Amer. Math. Soc. **46** (1974) 244–246
[32] T a k e s a k i , M.: Theory of Operator Algebras I. Berlin – Heidelberg – New York 1979: Springer
[33] U h l e n b r o k , G.: Simpliziale Erweiterungen und Offenheit der Schwerpunktabbildung. Diss. Univ. Bielefeld 1977
[34] V e s t e r s t r ø m , J.: On Open maps, Compact Convex Sets, and Operator Algebras. J. London Math. Soc. **6** (1973) 289–297
[35] W i t s e n h a u s e n , H. S.: A Minimax Control Problem for Sampled Linear Systems. IEEE Trans. Automatic Control AC-**13** (1968) 5–21

Susanne Papadopoulou
Katholische Universität Eichstätt
und
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen – Nürnberg
Bismarckstr. 1 1/2
D-8520 Erlangen

(*Eingegangen*: *15. 7. 1981*)

Buchbesprechungen

Börger, E., Barnocchi, D., Kaulbach, F. (Hrsg.), **Zur Philosophie der mathematischen Erkenntnis,** Würzburg: Verlag Königshausen und Neumann 1981, 159 S., DM 34,80

Der vorliegende Sammelband faßt die Vorträge eines 1978/79 am Philosophischen Seminar der Universität Münster von den Herausgebern, unter denen ich den Kant-Forscher Friedrich Kaulbach besonders hervorheben möchte, abgehaltenen Seminars zusammen. – Der Beitrag von Helmut Vogel (München) „Der finite Standpunkt in Hilbert's Programm" referiert über sein Thema unter besonderer Betonung der Beweistheorie bis hin zu neueren Untersuchungen von Per Martin-Löf (1973).

Der Aufsatz von Peter Päppinghaus (Hannover) „Was ist konstruktive Mathematik" behandelt sein Thema im Anschluß an E. Bishop und den Intuitionismus z. B. von A. S. Troelstra. Der Autor wird seine Gründe haben, die Konstruktivistenschule von Lorenzen und Kambartel nicht auch nur zu erwähnen.

Der Beitrag von Hans Georg Carstens (Bielefeld) „Mathematiker und Philosophie der Mathematik" zeichnet zunächst ein Szenenbild, in dem das wachsende Selbstbewußtsein bedeutender Mathematiker (z. B. Brieskorn, Thom) gegenüber Philosophen, die sich der Grundlegung der Mathematik annehmen, ins Auge fällt. Einfache Betrachtungen aus der Flächentopologie vermitteln einen Einblick in die mathematische Werkstatt. Der Aufsatz schließt mit einer andeutenden Diskussion des bekannten Platonismus der Mathematiker und schließt mit einem interessanten Kant-Zitat.

Der kurze Beitrag von Hansjürgen Brämik (Münster) „Vom Denken in Begriffen" hat denselben Titel wie eine bekannte bei P. Bernays angefertigte Dissertation von A. I. Wittenberg, geht von ihr aus und schlägt eine Querverbindung zur Lyrik (insbesondere: Paul Celan).

Der Beitrag von Elmar Cohors-Fresenborg (Osnabrück) „Möglichkeiten und Grenzen einer algorithmischen Mathematik" gibt eine kurze Einführungsskizze in die Theorie der Registermaschinen und der rekursiven Aufzählbarkeit.

Der kurze Beitrag von Lutz Priese (Paderborn) „Über eine mathematische Theorie von Automaten und deren Anwendung" macht dem Leser ein gängiges Kapitel der Informatik samt Anwendung auf biologische und sozio-ökologische Phänomene zugänglich.

Der kurze Aufsatz von Egon Börger (Dortmund) „Überlegungen zur aristotelischen Irrtumslehre vom Standpunkt der mathematischen Logik" nimmt ein über 2000 Jahre altes Thema unter heutigen Gesichtspunkten wieder auf. Aristoteles hatte die zu seiner Zeit erarbeiteten Auflösungen beunruhigender Sophismen in einem Buch („elenchoi") zusammenfassend dargestellt und damit einer damals aktuellen Aufgabe Genüge getan. Offen steht die Frage, ob es der Mühe wert sei, der in der Logik üblicherweise gebotenen Theorie korrekten Schließens eine systematische Theorie der Fehlschlüsse zur Seite zu stellen. Der Verfasser führt neuere Entwicklungen in der Rekursivitätstheorie als Argument für eine positive Antwort ins Feld. Die Literaturhinweise dringen bis zu einer Arbeit von Specker und Strassen aus dem Jahre 1976 vor.

Der abschließende Beitrag von Friedrich Kaulbach (Münster) „Philosophische und informationstheoretische Erkenntnistheorie" ist der freundschaftlichen aber entschiedenen Abgrenzung echter philosophischer Erkenntnistheorie gegenüber informationstheoretischen Versuchen (Petri, Oeser u. a.), Erkenntnistheorie à la Informationstheorie zu betreiben, gewidmet. Die zentrale Instanz des Erkennens ist das Subjekt. Versuche, das Subjekt als einen Knotenpunkt in einem sog. Petri-Netz zu objektivieren und Erkenntnis als ein Optimieren von Datenverwertung hinzustellen, erreichen das Niveau philosophischer Fragestellung nicht, auch wenn aus ihnen gewisse Einsichten zu gewinnen sein mögen. Diese Abwehr positivistischer Überrollungsversuche gehört seit 100 Jahren zum täglichen Dienst des Philosophen.

Der Sammelband bemüht sich laut Vorwort u. a., die Diskussion um die Grundlagen der Mathematik wieder an die sog. echte Philosophie einschließlich der Metaphysik heranzuführen. Ich glaube, daß er höchstens Ansätze in dieser an sich wünschenswerten Richtung enthält, am deutlichsten in Friedrich Kaulbach's abschließendem Essay. Das Büchlein ist farbig und vielseitig, der philosophisch interessierte Mathematiker wird bei der Lektüre auf manche Kosten kommen. Auf die systematische Äußerung eines echten Philosophen zum Phänomen „Mathematik" müssen wir weiterhin warten.

Erlangen K. Jacobs

Temple, G., 100 Years of Mathematics, London: Duckworth & Co, 1981, 316 p., £ 32,–

Das vorliegende Buch des bekannten Oxforder Analytikers ist ein Versuch, an Hand sorgfältig nachgezeichneter Entwicklungslinien eines guten Dutzends von mathematischen Einzeldisziplinen den Gang der Mathematik in jenem bisher letzten Jahrhundert darzustellen, dem man ca. 90% aller mathematischen Einsichten verdankt. Die Darstellung ist überaus gründlich und belesen. Wenige Mathematiker dürften heute fähig sein, das zu leisten, was der Autor hier vollbracht hat. Jeder Mathematiker wird hier zu dem, was er vielleicht schon wußte, eine Fülle zusätzlicher historischer und sachlicher Informationen gewinnen. Die Lektüre erfordert eine mathematische Vorbildung, über die üblicherweise wohl nur Dozenten verfügen. Das einleitende erste Kapitel streift die Frage, wie Mathematik denn zu definieren sei. Der Autor zitiert Definitionen, die uns heute nur noch ein Schmunzeln abnötigen können wie Peirces „mathematics is the science which draws necessary conclusions" (1881) oder Russells „pure mathematics is the class of all propositions of the form „p implies q", p and q being carefully specified" (1903). Er tut es mit Respekt, nachdem er selbst mit einer kurzen Bemerkung den Schwierigkeitsgrad des Problems, die Mathematik zu charakterisieren, wesentlich besser erhellt hat: „At each stage in the advance of mathematical thought the outstanding characteristics are novelty and originality. This is why mathematics is such a delight to study, such a challenge to practise and such a puzzle to define". Bemerkenswert erscheinen mir Hinweise auf den künstlerischen Charakter der Mathematik – ein deutschen Lesern aus Hasses Hamburger Antrittsvorlesung (1950) wohlvertrauter Aspekt – und auf das, was man manchmal den naiven Platonismus der Mathematiker nennt. – Die weiteren Kapitel: 2. Real numbers, 3. Infinitesimals, 4. Cantor and transfinite numbers, 5. Finite and infinite numbers, 6. Vectors and Tensors, 7. Geometry and measurement, 8. the algebraic origins of modern algebraic geometry, 9. The primitive notions of topology, 10. The concept of functionality, 11. Derivatives and integrals, 12. Distributions, 13. Ordinary differential equations, 14. Calculus of variations, 15. potential theory, 16. mathematical logic. – Die Darstellung reicht etwa bis in die Mitte der 1960er Jahre. Das Literaturverzeichnis ist höchst eindrucksvoll. – Der Verlag bekundet durch die Preisgestaltung, daß er nicht wünscht, daß dies Buch dorthin gelangt, wohin es gehört: in jede öffentliche und private mathematische Bibliothek.

Erlangen K. Jacobs

Kennedy, H. C., Peano. Life and Works of Giuseppe Peano (Studies in the History of Modern Sciene 4), Dordrecht – Boston – London: D. Reidel Publ. 1980, xii + 230 p., 1 portrait, cloth Dfl 65.00, paper Dfl 30.00

H. C. Kennedy hat durch Aufsätze und Enzyklopädiebeiträge, durch seine Ausgabe der „Selected Works of Giuseppe Peano" (1973) und durch das Peanoheft in der Reihe „Kurze Mathematiker-Biographien" (Elemente der Mathematik, Beiheft 14, 1974) einen bedeutenden Ruf als Peanoforscher. Der hier vorgelegte Band faßt zusammen, was Kennedy über Peanos Leben und Arbeit in einem Zeitraum ermitteln konnte, in dem die Dokumentation zunehmend schwieriger wird und immer mehr Material in Verlust oder in Vergessenheit gerät.

Wenige verbinden mit dem Namen Peanos mehr als das Peanosche Axiomensystem für die natürlichen Zahlen und die „Peanokurve". Daß das wissenschaftliche Werk Peanos weit umfassender ist, und wo dennoch seine Grenzen für das heutige Interesse liegen, macht der vorliegende Band deutlich. Persönliche Entwicklung, universitäre Laufbahn und wissenschaftliche Arbeiten werden, überwiegend in chronologischer Abfolge, gemeinsam behandelt. Dadurch entsteht ein sehr plastisches Bild des Kontexts von Peanos mathematischer Arbeit (wobei mancher Peanos beständige Lehr- und Forschungsleistung während eines ganzen Jahrzehnts bestaunen wird, in dem die Universität Turin fast ununterbrochen von studentischen Unruhen bewegt wurde und der Lehrbetrieb weit häufiger ruhte als selbst an unruhigen Universitäten „unserer" Sechziger Jahre). Wir erhalten detaillierte Informationen über Peanos Anteil an der Durchsetzung des axiomatischen Standpunkts, der zuerst in „I principii di geometria logicamente esposti" und „Arithmetices principia" (beide 1889) geschickt in die Praxis umgesetzt erscheint. Die konsequente Nutzung einer logischen Notation, der auf die Rolle der Logik gelegte Nachdruck und das Verfahren der Definition durch Abstraktion lassen den bedeutenden Einfluß dieser frühen Schriften auf B. Russell verständlich werden.

1890 wird Peano außerordentlicher, 1895 ordentlicher Professor in Turin. Im gleichen Jahr erscheint der erste Band seines „Formulaire de mathématiques" (später „Formulario Matematico"), in dem das mathematische Wissen der Zeit, in logischer Notation vereinheitlicht, erfaßt werden sollte. Peano war zeitlebens überzeugt, daß diese Form nicht nur auch die didaktisch beste sei, sondern sogar die größten Chancen für die Entdeckung weiterführender Sätze und Zusammenhänge biete. Ungeachtet der Zweifel von Lehrern wie Forschern an diesem Anspruch setzte sich Peano aufs eifrigste für die Verbreitung seines „Formulaire" und seiner Notation an Schulen und Hochschulen ein. 1898 erwarb er sogar eine eigene Druckerpresse, um in seinem Haus in Cavoretto die Bände des „Formulaire" und die eng damit verbundene Zeitschrift „Rivista di Matematica" (sowie später die nichtmathematischen Schriften) in eigener Regie drucken zu können. Kennedy streicht zu Recht heraus, daß Peanos Hauptinteresse trotz seines Logisierungsprogramms auf den praktischen Konsequenzen mathematischer Theorien lag und daß dies auch für die sich zu dieser Zeit konstituierende „Peano-Schule" mit Forschern wie Vailati, Burali-Forti, Padoa, Pieri u. a. gilt.

Die dritte Auflage des „Formulaire" 1901 markiert das Ende der kreativen Tätigkeit Peanos auf mathematischem Gebiet. War er bis zur Jahrhundertwende der unbestrittene Führer der mathematischen Logik, so übernimmt nun Russell diese Rolle, während Peano seine neue (und ihn voll absorbierende) Aufgabe in der Verbesserung und Verbreitung einer künstlichen internationalen Hilfssprache sieht, für die er selbst mit dem „Latino sine flexione" einen Vorschlag macht, den er in den neuen Auflagen des „Formulaire" und in der „Rivista" realisiert. Für den im engeren Sinn mathematikhistorisch Interessierten vielleicht weniger reizvoll, ist der Bericht über diese Periode doch unentbehrlich für ein Gesamtbild von Peanos Persönlichkeit.

Es liegt an dieser zweiten Periode, daß man Peanos wissenschaftlich fruchtbare Zeit trotz seines Schaffens bis weit in unser Jahrhundert dem 19. Jahrhundert zuweisen muß, dem er auch seinem Forschungsstil nach ganz angehört. Mancher mag verwundert oder gar verstimmt sein, Peano bei Kennedy als mathematischen „Opportunisten" bezeichnet zu finden: als jemanden, der Arbeitsgebiete sucht, auf denen man rasch interessante Ergebnisse erhält; hat man diese, so geht man zu anderen aussichtsreichen Gebieten über. Was der „Opportunist" Peano entdeckte, bevor ihn das „Formulaire" und die Kunstsprachen von der schöpferischen Forschung abzogen, ist dennoch eindrucksvoll genug. Man hat Peano einen Meister des Gegenbeispiels genannt: die nach ihm benannte raumfüllende Kurve etwa dient ihm als Beispiel, daß sich eine stetige Kurve nicht immer in ein beliebig kleines Gebiet einschließen läßt. Man verdankt ihm auch das (nicht nach ihm benannte) bekannteste Beispiel einer Funktion, deren zweite partielle Ableitungen nicht vertauschbar sind, sowie analytische Ausdrücke für zunächst nur verbal erklärte Funktionen (wie die sog. Dirichletfunktion). Der Satz, daß für jede stetige Funktion f die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ eine Lösung besitzt, heute als Spezialfall eines allgemeineren Fixpunktsatzes betrachtet, wird bei seinem Entdecker Peano auf eine immer noch interessante elementare (und didaktisch lehrreiche) Weise bewiesen. Peano war wiederum Pionier, als er im Anschluß an sein nach, aber unabhängig von Dedekind aufgestelltes Axiomensystem der Arithmetik rekursive Definitonen verwendete (denn Grassmanns Arbeiten waren nahezu unbekannt geblieben), und die Analysis verdankt ihm die Definition des Häufungspunkts einer Funktion als Grundlage der Grenzwerttheorie. Den Einfluß maßtheoretischer Ideen Peanos auf Lebesgue hat wohl nur dieser selbst anerkannt, doch spricht man heute mit Recht bei einem der Zugänge zum Riemannschen Integral vom „Peano-Jordan-Inhalt" („Jourdan" an der betr. Stelle auf S. 174 ist einer der wenigen Druckfehler des Buches).

Zweifellos spielt Peano im ausgehenden 19. Jahrhundert die führende Rolle für die Axiomatisierung der Mathematik, und es entspräche herkömmlicher Wertung, dies in den Mittelpunkt auch der Würdigung seiner Persönlichkeit zu stellen. Es spricht für Kennedys unabhängige Sicht, wenn er bei der Schilderung der zweiten Periode des Wirkens Peanos dessen gewinnendes Wesen, seine Toleranz und seinen Optimismus in Lebensfragen betont und sich zu dem Urteil bekennt: „This is the man I would like to have known" (S. 175). Peano nicht nur als dem einflußreichen Mathematiker, sondern als einem der großen Wissenschaftler des 19. Jahrhunderts also ist dieses Buch gewidmet. Es ist als Dokumentation höchst wertvoll (und hätte der Verf. nicht oft mit unabhängig nachprüfbaren Quellenangaben gegeizt, müßte man die Dokumentation in jeder Hinsicht vorbildlich nennen). Ich habe bei dem Wort „Dokumentation" gezögert, weil sich an diesen Terminus oft die Assoziation von Archivstaub und Langeweile heftet. Nichts könnte hinsichtlich dieses Buches verfehlter sein: der Leser wird finden, daß fast alle der 25 Kapitel sehr lebendig geschrieben sind, und daß die gelungensten davon sogar eine ausgesprochen fesselnde Lektüre bilden.

Aachen Ch. Thiel

Edwards, C. H., Jr., The Historical Development of the Calculus, Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1979, 150 figs., 13 tab., xii + 351 p., cloth, DM 56,–

Wenn wohl andere neuere Schriften zur Geschichte der Mathematik die Differenz zwischen geistesgeschichtlicher Bildung und der Ausbildung in Mathematik und den Naturwissenschaften zu überwinden suchen, oder sie gar doktrinär überkleistern wollen, so erfreut dagegen das vorliegende Buch durch seinen offenherzig-eindeutigen Standpunkt: „The Calculus" ist die Differential- und Integralrechnung einer Variablen, eben in der Form, Darstellung und Vollendung, die sie heute gewonnen hat, und wie sie heute in Anfängervorlesungen dargestellt wird. Und von hier aus, mit den modernen Bezeichnungen, Symbolen, Rechentechniken und unserem Verständnis (verständlich für einen Studenten, der das erste Semester mit Gewinn hinter sich gebracht hat) wird die Entwicklung der Analysis dargestellt, beginnend mit den geometrischen Anfängen in Babylon, und eigentlich endend mit der Vollendung der axiomatischen Grundlagen im vorigen Jahrhundert. Entsprechend findet man zum Beispiel zur Erläuterung der geometrischen Überlegungen des Archimedes durchaus moderne perspektivische Figuren, und das ganze Buch ist fortlaufend mit Übungsaufgaben versehen. Äußerlich bei flüchtigem Durchblättern ist es von einer Einführung in die Analysis kaum zu unterscheiden. Die gegenwärtige Vollendung ist das Maß, anhand dessen die Entwicklung in der Vergangenheit beschrieben wird.

Auf diese Weise ist ein für den Mathematiker sehr gut lesbares Buch entstanden, das doch dem Interessierten schon durch die reichen Literaturangaben auch den Zugang zu den

Quellen erleichtert. In der Darstellung hat zu Recht die Entwicklung des Kalküls, der eigentlichen Rechentechnik und der wirklichen Ergebnisse größtes Gewicht, und es entsteht nicht wie sonst bei der häufig unglücklichen Verbindung von Geschichts- und Grundlagenwissenschaft der Eindruck, als seien die großen Ereignisse in der Entwicklung der Analysis mehr der Satz von Bolzano und der von Rolle gewesen, als etwa die Untersuchungen des Archimedes (der solide Beweis einer Abschätzung von π, die exakte Integration einiger Flächen und Körper), die Entdeckung der Reihenentwicklungen der klassischen Funktionen oder eben der „Kalkul" von Leibniz. Letzteres besonders findet eine erfreulich klare und deutliche Würdigung. Nicht nur ist Leibniz (wie der Autor aufführt) sonst in der englischsprachigen Literatur etwas stiefmütterlich behandelt worden, sondern zudem haben die Logiker (wohl im Gefolge von Russell?) ihn zu einem Ur-Erfinder des Kalkül-Begriffs in der heutigen Logik machen wollen, was zu einer Mißdeutung der Leibnizschen Gedanken führen mußte. Hier bringt das Buch wohltuende Erklärung und Berichtigung. Der allzu berühmte Prioritätsstreit wird treffend aber auch so kurz abgehandelt, wie es für diesen Staub der Vergangenheit angemessen ist.

Überhaupt scheint mir das Buch ein idealer Leitfaden zu sein, an den ein Dozent, der in den Anfängervorlesungen etwas zur Geschichte sagen soll, oder auch ein Lehrer im Schulunterricht sich halten kann: Es redet in der Sprache, die wir gewohnt sind und verstehen, es redet von dem Wesentlichen und Wichtigen, und die Darstellung ist unter diesem Aspekt so gut und verläßlich begründet, wie man sich über Langvergangenes kurz gefaßt nur äußern kann.

Regensburg Th. Bröcker

Borho, W., u. a., Lebendige Zahlen (Mathematische Miniaturen 1), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1981, 135 S., paper, DM 19,80

Das Interesse an populärwissenschaftlicher Literatur über Mathematik ist lebendig. Eine Reihe einführender Darstellungen in packende Fragestellungen, die sich ohne großen technischen Aufwand einem breiteren Publikum präsentieren lassen, ist auf verschiedenem Niveau erschienen, z. B. in Serien der Mathematical Association of America, in der Schülerbücherei des DDR-Teubner-Verlags, in der mathematischen Unterhaltungs-Literatur des Vieweg-Verlages und an manchen anderen Stellen. Ein Überangebot, das in Bereichen der mathematischen Grundausbildung an den Universitäten bisweilen beklagt wird, besteht jedoch nicht, besonders nicht auf gehobenem Niveau. So ist die im Birkhäuser-Verlag hier mit Band 1 beginnende Serie „Mathematische Miniaturen" zu begrüßen, die Populärwissenschaft auf höchstem Niveau bieten will: Forschende Mathematiker sollen in verständlicher und anregender Form über Methoden und Ergebnisse ihrer Arbeit berichten. Der erste Band bietet 5 ausgearbeitete Bonner Antrittsvorlesungen aus den Jahren 1974–79, die auf verschiedene Weise spannende Exkursionen in das Reich der Zahlen unternehmen.

W. Borho behandelt das 2000 Jahre alte Thema der „befreundeten Zahlen", das mit dem antiken Paar (220, 284) beginnt. Bis heute gehört dieses Thema in die experimentelle Zahlentheorie, die meisten Fragen bleiben offen; doch wird deutlich, wie sehr die vorhandene Theorie die experimentelle Suche nach befreundeten Zahlen unterstützen kann. Der Vortrag von D. Zagier über die ersten 50 Millionen Primzahlen mit seinen bizarren Fieberkurven ist durch den Abdruck in Beiheft 15 der Elemente d. Math. bzw. im Math. Intelligencer 0 bekannt, er ist hier um einige neue Rekorde ergänzt. J. Rohlfs hat das pythagoräische Thema der Summen von 2 Quadraten gewählt und gelangt von den pythagoräischen Tripeln über Anzahlbestimmungen zur Wärmeleitungsgleichung auf dem Torus. H. Kraft hat den gleichen Ausgangspunkt, der ihn aber in das große Thema „algebraische Kurven und diophantische Gleichungen" und speziell zu den schon von Diophant behandelten elliptischen Kurven führt, deren arithmetische Theorie in vollem Fluß ist. Die letzte Exkursion von J. C. Jantzen beginnt mit kombinatorischen Problemen, Permutationen, Partitionen, Young-Tableaus, und zeigt sodann die Auswirkungen auf die Darstellungstheorie der symmetrischen und allgemeinen linearen Gruppe. Aus der Darstellungstheorie entsprießen umgekehrt berühmte Potenzreihenidentitäten in einheitlicher (und allgemeinerer) Form.

Alle 5 Beiträge leben von der geglückten Verbindung zwischen historischer Betrachtung und moderner Darstellung bis hin zu neuen Forschungsergebnissen, sie überraschen durch unerwartete Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Themen, sie lassen an jeweils ihrem ausgewählten Gegenstand die Lebendigkeit der Zahlenwelt und die Faszination des Autors erleben, die dieser auf die Leser übertragen möchte. Wer gepackt ist, wird mit ausführlichen Literaturhinweisen zu einem tieferen Eindringen angeleitet – diese Arbeit kann dem interessierten Leser nicht erspart bleiben.

Das Büchlein ist kein Königsweg zur Mathematik (den es bekanntlich nicht gibt), aber es antwortet in vortrefflicher, suggestiver und zugleich sachlich fundierter Weise exemplarisch auf die Frage: Was ist Mathematik? Abiturient wie Hochschullehrer können Nutzen aus der anregenden Lektüre ziehen. Der Reihe sind weitere solche Bände zu wünschen.

Erlangen W.-D. Geyer

Graham, R. L., Rothschild, B. L., Spencer, J. H., Ramsey Theory (Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics), New York – Chichester – Brisbane – Toronto: J. Wiley & Sons 1980, VI + 174 p., cloth, DM 65,44

Was die Verfasser Ramsey Theory nennen, deren Vaterschaft sie Paul Erdös zuschreiben, ist ein faszinierender Zweig der neueren Kombinatorik. Sie fassen die aus den folgenden Sätzen entstandenen Problemkreise in eine systematische Theorie zusammen.

Satz von Ramsey (1930): Zerlegt man $\binom{\mathbf{N}}{r} = \{R \subset \mathbf{N}: |R| = r\}$ in k Klassen, so gibt es eine unendliche Teilmenge $M \subseteq \mathbf{N}$, so daß $\binom{M}{r}$ ganz in einer Klasse liegt.

Satz von van der Waerden (1927): Zerlegt man $\mathbf{N}$ in k Klassen, so enthält mindestens eine Klasse arithmetische Progressionen beliebig vorgegebener Länge.

Satz von Richard Rado (1933): I. Die lineare Gleichung

$$\text{(L)} \qquad a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0 \qquad \text{mit } a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$$

sei gegeben. Notwendig und hinreichend dafür, daß bei jeder Zerlegung von $\mathbf{N}$ in endlich viele Klassen mindestens eine Klasse eine Lösung $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von (L) enthält, ist, daß sich einige der Koeffizienten zu Null addieren.

II. Die sinngemäße Verallgemeinerung auf Systeme linearer Gleichungen.

Kapitel I des vorliegenden Buches behandelt den Problemkreis der Ramsey-Sätze, mit Auszügen aus den Originalarbeiten von Ramsey und Erdös-Szekeres, jedoch nicht die vor allem von Erdös, Hajnal und Rado geschaffene Erweiterung der Theorie auf unendliche Mengen (Partition Calculus). Darauf wird im letzten Kapitel VI kurz eingegangen.

Kapitel II behandelt den Satz von van der Waerden mit neueren Erweiterungen [vor allem von Hales-Jewett 1963 und Szemerédi 1969) (jede Menge natürlicher Zahlen von positiver Dichte enthält beliebig lange arithmetische Progressionen)]. Der tiefliegende Satz von Szemerédi wird im Buch nicht bewiesen, jedoch wird in Kapitel VI darauf hingewiesen, daß er aus dem ergodentheoretischen Satz von Fürstenberg folgt.

Kapitel III behandelt den Problemkreis der Radoschen Dissertation, mit neueren Entwicklungen von Folkman (1970), Deuber (1973) und Hindman (1974).

Kapitel IV behandelt das weitgehend ungelöste Problem der kleinsten Zahlen s, für welche die obigen Sätze noch gelten, wenn man $\mathbf{N}$ durch $\mathbf{N}_1^s = \{1, \ldots, s\}$ ersetzt. Erwähnt seien

Hinweise auf die unheimliche Größe der heute erhältlichen oberen Schranken für die van der Waerden-Zahlen, Abschätzungen der Ramsey-Zahlen nach oben und unten mit Einführung in die von Erdös begründete wahrscheinlichkeitstheoretische Kombinatorik und ganz wenige genaue Zahlenbestimmungen.

Kapitel V führt die Kapitel I und III weiter, mit besonderer Betonung graphentheoretischer Probleme.

Kapitel VI enthält kurzgefaßte Berichte über topologische Dynamik, Ultrafilter, Ausblicke in die Logik und den Partitionskalkül von Erdös, Hajnal und Rado.

Fast alle behandelten Themen lassen sich als Färbungsprobleme von Hypergraphen (das sind Inzidenzstrukturen mit endlichen Blöcken) deuten. Bei aller Systematik bleibt das Buch problemorientiert. Es enthält auf relativ geringem Raum eine erstaunliche Fülle von Ergebnissen und offenen Fragen. Oft gibt es schöne Motivationen, an anderen Stellen ist es in dem heute üblichen gedrängten Stil geschrieben, der dem Nichtspezialisten beim Studieren oft große Mühe macht. Aber diese Mühe lohnt sich, selbst wenn nur teilweises Verständnis erreicht wird.

Berlin H. Lenz

Gupta, H., Selected Topics in Number Theory, Tunbridge Wells: Abacus Press 1980, 394 p., £ 25.00

"Of all branches of mathematics, number theory is the one that has not only provided food for serious thought but also created enthusiasm for the subject among young and old alike." Dieser Satz aus dem Vorwort der "Selected Topics in Number Theory" des bekannten indischen Verfassers könnte als Motto für die vorliegende Monographie dienen.

Der Verfasser legt ein sehr eigenwilliges zahlentheoretisches Werk mit einem ungewöhnlichen Interessenspektrum vor; die Überschneidung mit anderen Monographien zahlentheoretischen Inhalts ist gering; auch für bekannte Ergebnisse werden öfters neue oder weitgehend unbekannte Beweise gegeben. Die Auswahl der behandelten Gegenstände ist stark durch die Interessen des Verfassers geprägt; so finden sich etwa vier Kapitel über Partitionen, die vorwiegend kombinatorische Schlußweisen beinhalten. Überhaupt kann man die vorliegende Monographie am besten so charakterisieren, daß kombinatorische Fragestellungen, Ideen und Beweise in den Vordergrund gerückt werden, während analytische Aspekte mehr im Hintergrund bleiben.

So findet der Leser in diesem Buch höchstens am Rande Ergebnisse über die Verteilung der Primzahlen, über diophantische Approximationen, über Siebmethoden, über quadratische Zahlkörper, über Modulformen oder über die Zetafunktion. Dafür findet man aber viele Gegenstände, die sonst in zahlentheoretischen Monographien kaum oder gar nicht behandelt werden; der Inhalt des Buches soll in der nachfolgenden Beschreibung wenigstens oberflächlich angedeutet werden.

Der Verfasser geht davon aus, daß der Leser einen ersten Kurs über Zahlentheorie hinter sich gebracht hat. Allerdings wird im 1. Kapitel ("Preliminary") das Wichtigste aus der elementaren Zahlentheorie (Fundamentalsatz, zahlentheoretische Funktionen, Kongruenzen, chinesischer Restsatz) wiederholt. Das 2. Kapitel behandelt primitive Kongruenzwurzeln und Indexrechnung. Auf den algebraischen Hintergrund (Stichwort „prime Restklassengruppe") geht der Verfasser kaum ein. Ungewöhnlich ist hier die ausführliche Behandlung von Eigenschaften der „primitiven" Teiler von $a^n - b^n$.

Im 3. Kapitel werden Potenzreste [auch ein Restsymbol für die Kongruenz $x^k \equiv a \bmod p$, falls $k \mid (p-1)$] behandelt, einschließlich der üblichen Theorie der quadratischen Reste bis zum quadratischen Reziprozitätsgesetz. Weiterhin werden Ergebnisse über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von zwei bzw. vier Quadraten gegeben.

Das 4. Kapitel ("Class Algebra of k-ic Residues") studiert einen Vektorraum von Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, p-1\}$, die mit Hilfe der Indexrechnung definiert werden. Die Ergebnisse werden angewandt, um Fragen der folgenden Art zu beantworten: Für welche Primzahlen $p \equiv 5$ mod 8 ist 3 biquadratischer Rest? Für welche $p \equiv 1$ mod 6 ist 2 kubischer Rest?

Das 5. und 6. Kapitel ("Stirling Numbers and Bernoulli Numbers" bzw. "Congruence Properties of Symmetric Functions") baut auf Teilen der Dissertation des Verfassers in den dreißiger Jahren auf und gibt Eigenschaften der Stirlingschen bzw. Bernoullischen Zahlen und Polynome. Im 6. Kapitel wird z. B. der Kongruenzwert von $\prod_{\nu \leqslant n, (\nu, n) = 1} \nu$ modulo n bestimmt, wobei ν alle zu n teilerfremden natürliche Zahlen $\leqslant n$ durchläuft; weiterhin werden Aussagen über die Nenner der Bernoullischen Zahlen gewonnen, der von Staudtsche Satz wird bewiesen, ebenso wird das Ergebnis von Glaisher und Lerch

$$(p-1)! \equiv (B_{p-1} - 1)p \text{ modulo } p^2$$

hergeleitet.

Die folgenden vier Kapitel ("Partition Functions of Various Types, Generating Functions, Graphs and Identities", "Partitions: Inequalities and Congruences", "An Asymptotic Formula for p(n, k)" und "Partition of j-partite Numbers") befassen sich mit Partitionen. Abgesehen von Kapitel 9, in dem nach Szekeres die Sattelpunktmethode benützt wird, um die Vermutung von Auluck-Chowla-Gupta

> „Für $n \geqslant n_0$ gibt es ein eindeutiges $k_0 = k_0(n)$ derart, daß $p(n, 1) < p(n, 2) < \ldots < p(n, k_0) \geqslant p(n, k_0 + 1) \geqslant \ldots \geqslant p(n, n)$ ist, wobei $p(n, k)$ die Anzahl der Partitionen von n in genau k Summanden bezeichnet"

anzugehen, ist der Verfasser mehr an kombinatorischen Aspekten, wie Rekursionsformeln, erzeugenden Funktionen und Identitäten zwischen solchen (wie Identitäten von Durfee, Jacobi, Gauß, Winquist) interessiert. Weiter werden obere und untere Abschätzungen für $p(n, j)$ gegeben. Die Ramanujan-Vermutung über die Kongruenzwerte von $p(n)$ modulo Potenzen von 5, 7, und 11 wird zitiert, ebenso die diesbezüglichen Ergebnisse von G. N. Watson und A. O. L. Atkin – allerdings ist "the proof of this theorem in all its generality is beyond the scope of this book"; die Bestimmung der Kongruenzwerte modulo $5^a\ 7^b\ 11^c$ für $a, b, c \leqslant 1$ wird durchgeführt.

Das 11. Kapitel ("Some Diophantine Equations") gibt Parameterdarstellungen der Lösungen der diophantischen Gleichungen $x_1 x_2 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$, $x^2 + y^2 = z^2$ und $x^n = y_1 \cdots y_m$. Weiter wird die Anzahl der Lösungen der Gleichungen $a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m = n$ asymptotisch bestimmt.

Das 12. Kapitel studiert "Permutations of the first n natural numbers". Die Seite 364, "Some interesting facts of Number Theory", gibt numerische Ergebnisse, wie etwa

$$(36\,36\,36\,36\,364)^2 = 13\,223\,140\,496\,13\,223\,140\,496,$$

und Sätze über Primzahlen (z. B. jede Menge von 7 aufeinanderfolgenden Zahlen > 36 enthält ein Vielfaches einer Primzahl > 41). Das ebenfalls aufgeführte tiefe Ergebnis von Chen (jede genügend große gerade Zahl n ist in der Form $n = p + P_2$ darstellbar) steht in diesem Zusammenhang nach Meinung des Referenten etwas deplaziert.

Die vorliegende Monographie mit ihrem ungewöhnlichen Interessenspektrum, ihrem ausführlichen Literaturverzeichnis, ihrem reichhaltigen Material an "Exercises", mit vielen numerischen Beispielen und nützlichen Tafeln ergänzt bestens jede zahlentheoretische Bibliothek und gibt mit bisher ungelösten Vermutungen Anregungen für weitere zahlentheoretisch-kombinatorische Forschungen.

Frankfurt am Main W. Schwarz

Mahler, K., p-adic Numbers and their Functions, 2nd ed., (Cambridge Tracts in Mathematics 76), Cambridge – London – New York – Melbourne: Cambridge University Press 1981, 250 p., £ 15.00

Dieses Buch bleibt, was die erste Auflage schon war: Eine schöne, klar geschriebene Einführung in die Theorie der p-adischen (bzw. g-adischen) Zahlen und ihrer Funktionen von einem elementaren Standpunkt aus; der „Arbeitsbereich" ist weithin $\mathbb{Q}_p$ (bzw. $\mathbb{Q}_g$). (Nur im 6. Kapitel, das neu ist, werden als Kostprobe für algebraische Erweiterungskörper die quadratischen Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}_p$ bestimmt, im 18. Kapitel wird dies dann dazu verwendet, um Funktionen auf diesen Körpern zu studieren.) Folglich hat die zweite Auflage gegenüber der ersten in den Kapiteln 1–5, in denen die arithmetischen Eigenschaften der g-adischen Zahlen hergeleitet werden, kaum Veränderungen erfahren.

Anders ist die Situation im zweiten Teil (Funktionen): Dieser Teil ist fast ganz neu und gegenüber der ersten Auflage wesentlich vertieft. Das Schwergewicht liegt auf dem Studium von stetigen Funktionen. Es wird die Frage der Approximation durch Polynome untersucht und gelöst; dabei zeigt es sich, daß p-adische Funktionen sich von g-adischen (wobei $g \in \mathbb{N}$ keine Primzahl ist) wesentlich unterscheiden. Für p-adische Funktionen wird dann die Differential- und die Integralrechnung weiter verfolgt; dabei wird die Äquivalenz des Dieudonné-Integrals und des van der Put-Integrals gezeigt und Zusammenhänge zwischen bestimmten Integralen und Lösungen einer Differenzen-Gleichung hergestellt.

Die ganze Darstellung des Buches legt, wie schon oben erwähnt, großen Wert auf leichte Zugänglichkeit. Außer einigen Kenntnissen in reeller Analysis wird nichts vorausgesetzt, und auch diese Analysiskenntnisse sind nur dazu nötig, um die Analogie zur reellen Analysis zu erkennen, auf die Mahler immer wieder hinweist. (Die Theorie der analytischen Funktionen wird, wie es sich aus dem Konzept des Buches zwangsläufig ergibt, fast nicht behandelt.) Es werden immer wieder wohlüberlegte Beispiele von Funktionen ausgearbeitet, die die Schärfe und Tragweite der behandelten Sätze illustrieren, und Übungsaufgaben können dem Leser zum Test dafür dienen, ob die eingeführten Begriffe verstanden wurden.

Für interessierte Studenten sollte die Lektüre des Buches von K. Mahler neben einer Vertiefung des Verständnisses der reellen Analysis einen ersten Einblick in die Arithmetik und die Funktionen von nicht-archimedischen Komplettierungen von $\mathbb{Q}$ geben, der dazu anregen kann, durch das Studium weiterführender Literatur (wie sie z. B. am Ende des Buches angegeben ist) weiter in dieses schöne und wichtige Gebiet einzudringen.

Saarbrücken G. Frey

Langlands, R. P., Base Change for GL(2) (Annals of Mathematics Studies 96), Princeton: Princeton University Press 1980, 236 p., cloth: $ 22.00 paper: $ 8.75.

Hier liegt kein Lehrbuch vor, sondern eine Originalarbeit aus der neueren Forschung. Demzufolge wird vom Leser schon auf den allerersten Seiten Vertrautheit mit komplexen Begriffsbildungen erwartet. Damit der nicht spezialisierte Leser eine Vorstellung der Ergebnisse gewinnen kann, wird versucht, die Resultate in wenig technischer Weise zu beschreiben und zu motivieren.

Für den Fachmann sei angemerkt, daß das vorliegende Buch sich von der vervielfältigten Seminarausarbeitung gleichen Titels aus dem Jahre 1975 unterscheidet durch Hinzunahme des zweiten Paragraphen, der eine Beschreibung der Eigenschaften des Basiswechsels gibt und durch eine ausführlichere Darstellung der Anwendung auf die Artin-Vermutung über L-Reihen im dritten Paragraphen.

Zur Motivation des Begriffs „Liften“ oder „Basiswechsel“ von automorphen Formen müssen wir etwas weiter ausholen.

In einer der anregendsten Arbeiten [20] (Ziffern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis des vorliegenden Buches) der letzten Jahrzehnte hat Langlands ein allgemeines Programm entwickelt, in dem er vorschlägt, was Ziele und Methoden einer Theorie von automorphen Formen auf reduktiven algebraischen Gruppen sein sollten. Ein Modell liegt für die Gl(1), die multiplikative Gruppe vor. Die Theorie der automorphen Formen dazu ist die Klassenkörpertheorie in der Formulierung, daß die Artinschen L-Reihen von 1-dimensionalen Darstellungen der Weil-Gruppe übereinstimmen mit den Heckeschen L-Reihen zu Quasicharakteren.

In Ausfüllung des allgemeinen Programmes haben Jacquet und Langlands [14] automorphe Darstellungen der $Gl_2(\mathbf{A}_E)$, der Gruppe der invertierbaren 2 x 2-Matrizen mit Werten im Adele-Ring eine Zahlkörpers E, untersucht. Hier erhofft man grob gesprochen eine Korrespondenz zwischen den zwei-dimensionalen komplexen Darstellungen der globalen Weil-Gruppe zu E und den automorphen Darstellungen von $Gl_2(\mathbf{A}_E)$, so daß korrespondierende Darstellungen dieselben L-Reihen haben. Akzeptiert man diese bis heute unbewiesene Vermutung Langlands', so wird man folgendermaßen auf den Begriff des Liftens von automorphen Darstellungen geführt: Ist $E|F$ eine endliche Erweiterung von Zahlkörpern, so hat man eine Inklusion $W_E \hookrightarrow W_F$ der zugehörigen Weil-Gruppen, und eine Darstellung von W_F ist offensichtlich auch eine von W_E. Also sollte mit einer automorphen Darstellung ρ von $Gl_2(\mathbf{A}_F)$ eine automorphe Darstellung $\Pi(\rho)$ von $Gl_2(\mathbf{A}_E)$ als Liftung von ρ korrespondieren.

Eine automorphe Darstellung Π ist Produkt von lokalen Darstellungen $\Pi = \bigotimes_v \Pi_v$ [14]. Die lokale Langlandsvermutung (sie wurde inzwischen bewiesen, man siehe hierzu [17]) besagt, daß sich Darstellungen der lokalen Deligne-Weil-Gruppen W'_{F_v} und zulässige Darstellungen von $Gl_2(F_v)$ entsprechen. Sie führt wie eben auf den Begriff des Liftens lokaler Darstellungen, und der Zusammenhang von lokalen und globalen Weilgruppen und ihren Darstellungen führt auf den Ansatz, daß für $\rho = \bigotimes_v \rho_v$ die Liftung $\Pi(\rho)$ von der Form $\Pi = \bigotimes_v \Pi_v(\rho_v)$ sein muß.

In der vorliegenden Arbeit wird für primzyklische galoissche Erweiterungen $E|F$ bewiesen, daß sich jede automorphe Darstellung von $Gl_2(\mathbf{A}_F)$ liften läßt als Tensorprodukt der lokalen Liftungen. Dabei sind genau die galoisinvarianten irreduziblen lokalen Darstellungen Liftungen.

Ein griffiger Spezialfall des Hauptergebnisses besagt, daß für eine galoissche Erweiterung $E|F$ von ungerader primzyklischer Ordnung die irreduziblen cuspidalen $gal(E|F)$-invarianten Darstellungen von $Gl_2(\mathbf{A}_E)$ eindeutig durch Liftung den cuspidalen irreduziblen Darstellungen von $Gl_2(\mathbf{A}_F)$ entsprechen.

Zum Beweis der Resultate, insbesondere auch für die Existenz der lokalen Liftungen, wird mit großem technischen Aufwand eine Identität für die getwistete Selbergsche Spurformel hergeleitet.

Als Anwendung seiner Ergebnisse beweist Langlands einen Spezialfall der Artinschen Vermutung. Diese Vermutung besagt, daß die L-Reihen zu Darstellungen ρ der Weil-Gruppe W_E holomorph sind, falls ρ keine trivialen Konstituenten hat. Langlands findet seiner globalen Vermutung entsprechend zu gewissen ρ eine automorphe Darstellung $\Pi = \Pi(\rho)$, deren bekanntlich holomorphe L-Reihe mit der von ρ übereinstimmt. Eine ausführlichere Darstellung dieses Resultats findet man bei Gelbart [11].

Die vorliegende Untersuchung bietet dem interessierten Leser die Möglichkeit, in die sehr lebendige moderne Theorie der automorphen Formen hineinzufinden, vorausgesetzt, ihn schrecken die überaus vielen technischen Komplikationen nicht ab. Eine große Hilfe bei der Lektüre bilden die Artikel von Borel, Tate, Kottwitz, Tunnell und Géradin-Labesse in [4].

Eichstätt J. Rohlfs

Jacobson, N., Basic Algebra I / Basic Algebra II, San Francisco: Freeman & Co. 1974/1980, 472/666 S.,£ 12.60/18.50

In den Jahren 1951/53/64 erschien die Trilogie „Lectures in Abstract Algebra" von Nathan Jacobson, für lange Zeit ein Standardwerk in den USA und darüber hinaus, noch 1976 im Springer-Verlag nachgedruckt. Im Laufe der Jahre haben sich jedoch die Algebra-Ausbildung in den USA und die Algebra selbst gewandelt: Die im 2. Band der Trilogie abgehandelte Lineare Algebra etwa wird z. T. bereits zu Beginn der Mathematikausbildung gelernt; die axiomatisch-strukturelle Methode der Dedekind-Noetherschen Algebra hat weit über die Algebra hinaus in vielen Teilen der Mathematik eine Heimstatt gefunden; zugleich gab es eine Kehrtwendung von überflüssigen Verallgemeinerungen hin zu konkreten Problemen hoher Komplexität; schließlich sind auch einige neue Grundideen in die Algebra gekommen, die eigene Gebiete entwickelten (z. B. Kategorien, Homologische Algebra, Modelltheorie). So konnte eine erneute Herausgabe der Trilogie nicht ohne gründliche Überarbeitung heutigen Erwartungen entsprechen.

Das Ergebnis dieser Überarbeitung ist das vorliegende, völlig neu konzipierte zweibändige Werk, das eher wie eine Neufassung von v. d. Waerdens berühmter Algebra als wie ein Nachfolger der „Lectures in Abstract Algebra" anmutet. Der Einteilung in zwei Bände liegt folgendes Prinzip zu Grunde: Der Band I will auf niederer Abstraktionsstufe den Reichtum klassischer Algebra ausbreiten, konkrete Fragen und Begriffe betonend, ohne den vorhandenen Tiefen auszuweichen. Das breite Spektrum deckt ab, was man an algebraischer Allgemeinbildung in einem Mathematikstudium erwerben sollte. In seiner Art ist dieser Band kaum zu übertreffen. Der Band II präsentiert weiteren Stoff in abstrakterer Form, bleibt aber bemüht, die technische Terminologie zu minimieren und wendet sich ebenfalls an den Nichtspezialisten. Aus verschiedenen Gebieten der Algebra wird Wichtiges herausgegriffen, der entstehende bunte Strauß konkreter und grundlegender Resultate liefert ein lebendiges Bild der Algebra und ein sicheres Fundament für das Studium der Spezialliteratur. In beiden Bänden ist die Darstellung ausführlich bis breit, mit zahlreichen Übungsaufgaben gewürzt, Hinweise auf weiterführende Literatur fehlen nicht. Der ausgereifte Charakter zeigt sich nicht nur in der Stoffauswahl, sondern auch in manchem Beweisdetail. Das vorliegende, reichhaltige, gut lesbare Werk ist eine vorzügliche Ergänzung jeder Algebra-Vorlesung, und wird durch seine Vielfalt auch den Erwartungen gerecht, die man an einen ergänzenden Text stellt. Die folgenden Kapitelüberschriften dokumentieren dies ein wenig.

Inhalt von Band I: Mengen, ganze Zahlen; Monoide und Gruppen; Moduln über Hauptidealringen; Galoistheorie; reelle Gleichungen und Ungleichungen; metrische Vektorräume und klassische Gruppen; Algebren über Körpern; Verbände und Boolesche Algebren.

Inhalt von Band II: Kategorien, universelle Algebra; Moduln; Strukturtheorie von Ringen; Darstellungstheorie endlicher Gruppen; homologische Algebra; noethersche Idealtheorie; Körpertheorie; Bewertungstheorie; Dedekindringe; formal-reelle Körper.

Wer es genauer wissen will, sollte sich das Vergnügen eines Streifzuges durch dieses Werk nicht entgehen lassen, das seinem Titel „Basic Algebra" voll gerecht wird. Hinzuzufügen ist, daß Druck und Ausstattung dem Werk entsprechen.

Erlangen W.-D. Geyer

Lüneburg, H., Translation Planes, Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980, ix + 278 p., cloth, DM 54,50

Bisher hat es noch kein Buch über endliche Translationsebenen gegeben, und daher füllt das vorliegende Buch sicher eine bestehende Lücke aus.

Die Gründe, die dieses Buch entstehen ließen, beschreibt der Autor in dem Vorwort: "The last two decades have witnessed great progress in the theory of translation planes. Being interested in, and having worked a little on this subject, I felt the need to clarify for myself what had been happening in this area of mathematics. Thus I lectured about it for several semesters and, at the same time, I wrote what is now this book." In der Tat ist ein Buch entstanden, welches sowohl für den Dozenten wie für den Lernenden wertvoll ist.

Der Aufbau des Buches wird beherrscht von dem gegenwärtigen Stand der Forschung in der Theorie endlicher Translationsebenen: Eine Vielzahl von Einzelthemen. Deshalb muß man dem Autor dankbar sein, wenn er mit diesem Buch wesentliche, in sich abgeschlossene Teile dieser Theorie in geschlossener Form zusammengestellt hat.

Nach einer Einführung in die Grundlagen zerfällt das Buch in sechs Kapitel, die größtenteils voneinander unabhängig lesbar sind:

Das einführende Kapitel I enthält neben der Andréschen Beschreibung der Translationsebenen und der Beschreibung endlicher Translationsebenen durch besondere Koordinatenbereiche die wichtigsten Grundbegriffe mit ihren ersten Folgerungen aus der Theorie affiner Ebenen, so werden etwa Homologien und Scherungen studiert.

Das Kapitel II behandelt die umfangreiche Klasse der verallgemeinerten André-Ebenen. Endliche André-Ebenen, verallgemeinerte André-Ebenen und Hall-Ebenen werden vorgestellt und einige ihrer Eigenschaften hergeleitet. Homologien verallgemeinerter André-Ebenen werden untersucht, das berühmte Kennzeichnungstheorem von Ostrom-Lüneburg wird bewiesen. Das Kapitel schließt mit einer Beschreibung der Kollineationsgruppen der verallgemeinerten André-Ebenen.

Das Kapitel III über Rang-3-Ebenen beginnt mit der Darstellung des Satzes von Wagner, nach dem endliche affine Ebenen Translationsebenen sind, wenn sie eine auf den Geraden transitive Kollineationsgruppe gestatten. Auf dieses Ergebnis stützt sich der Beweis des anschließenden Theorems von Kallaher-Ostrom-Lüneburg über eine spezielle Klasse endlicher Rang-3-Ebenen. Schließlich enthält das Kapitel eine bemerkenswerte Kennzeichnung der desarguesschen Ebenen der Ordnung 5, 7, 11, 19, 23, 29 und 59.

In Kapitel IV werden die Suzuki-Gruppen und ihre Geometrien studiert. Umfangreiche Teile dieses Kapitels finden sich schon in dem früher erschienenen Lecture Notes Band über dasselbe Thema (Lüneburg, H.: Die Suzuki-Gruppen und ihre Geometrien. Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag), doch werden hier neuere Resultate aufgenommen und dargestellt. Vorgeführt werden insbesondere die Lüneburg-Ebenen und die zu den Suzuki-Gruppen gehörenden Möbius-Ebenen. Ferner wird das bekannte Liebler-Theorem hergeleitet, in welchem die Lüneburg-Ebenen durch ihre Automorphismengruppen gekennzeichnet werden.

Kapitel V behandelt die Frage nach der Struktur der von Scherungen erzeugten Kollineationsgruppe einer endlichen Translationsebene. Neben anderen algebraischen Sachverhalten wird hier die genaue Beschreibung dieser Gruppen nach Ostrom-Hering hergeleitet.

Zentrales Thema des Kapitel VI sind endliche fahnentransitive affine Ebenen. Verschiedene Kennzeichnungen desarguesscher Ebenen werden hergeleitet. Die bis heute unbewiesene Vermutung, daß alle endlichen affinen Ebenen bekannt sind, die eine auf der unendlichfernen Geraden zweifach transitive Kollineationsgruppe gestatten, wird für Translationen bestätigt. Das Kapitel schließt mit der Einführung der Bol-Ebenen.

Schließlich werden im Kapitel VII Translationsebenen der Ordnung q^2 gekennzeichnet, welche eine zu der speziellen linearen Gruppe $SL_2(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe besitzen.

In den einzelnen Kapiteln legt der Autor Wert auf eine sorgfältige Darstellung algebraischer und zahlentheoretischer Sachverhalte, die den einzelnen Themen zugrunde liegen. Hier wird auch dem Nichtspezialisten deutlich, daß die Theorie der endlichen Translationsebenen durch ihre Methoden in lebendiger Beziehung zur Algebra und Zahlentheorie steht.

Eine Schwäche des Buches soll nicht verschwiegen werden: Die bibliographischen Belange sind nicht mit der gewohnten Sorgfalt aufgeschrieben. Wenn etwa Sätze Kontorowitsch, Iwasawa, oder anderen zugeschrieben werden, so sollten genaue Quellenangaben nicht fehlen.

Braunschweig U. Ott

Stillwell, J., Classical Topology and Combinatorial Group Theory (Graduate Texts, vol. 72), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980, 305 figs., xii + 301 p., cloth, DM 65,–

Die zentralen Themen dieses Buches, das sich an Studenten mittlerer Semester wendet, sind die Fundamental- oder auch Wegegruppe eines topologischen Raumes sowie grundlegende Anwendungen in der Flächentopologie, Topologie der 3-Mannigfaltigkeiten, Knotentheorie und kombinatorischen Gruppentheorie. Außerdem werden einige speziellere Fragen aus den letztgenannten Gebieten behandelt.

Ein wesentliches Anliegen des Verfassers ist es, dem Leser die geschichtlichen Ursprünge und Entwicklungen der relevanten Begriffe und Ideen nahezubringen. Für ein Lehrbuch ist dieses doch recht ungewöhnlich und macht das Buch für einen größeren Leserkreis interessant. Weiter ist positiv zu bemerken, daß bei der Präsentierung des Textes der intuitive geometrische Aspekt stets im Vordergrund steht. Das Buch enthält eine große Anzahl von sehr sorgfältig ausgeführten Illustrationen, die eine unmittelbare Erfassung geometrischer Sachverhalte erlauben. Ungewöhnlich, aber den Absichten des Autors angemessen, ist auch die Gestaltung des Textes, der sich in kleine überschaubare Abschnitte von jeweils etwa einer Seite Länge gliedert. Diese Abschnitte sind jeweils einem einzigen Sachverhalt gewidmet: einem Beispiel, einem Beweisschritt, einer Konstruktion, einem Begriff. Die sonst übliche Gliederung in Sätze, Beweise, Definitionen etc. fällt dadurch fort. Viele dieser Abschnitte bestehen ausschließlich aus historischen bzw. allgemein einordnenden Bemerkungen mit zahlreichen Literaturhinweisen, insbesondere auf die ältere Literatur von 1752 („die Eulersche Polyederformel") bis hin zur Mitte dieses Jahrhunderts.

Die gerade geschilderte Gesamtkonzeption macht das Buch angenehm und jederzeit fesselnd zu lesen – insbesondere kann es Studenten als Begleittext zu einer Vorlesung oder einem Seminar empfohlen werden, da es eine Fülle von geometrischem Anschauungsmaterial und viele weitere Anregungen gibt (u. a. auch durch die Übungen, die sich eng an den Text halten). Vereinzelt kann die weniger formale Art der Darstellung jedoch auch Anlaß zur Verwirrung geben. Eine systematischere formalere Darstellung des Themenkreises (abgesehen von den in den letzten drei Kapiteln behandelten spezielleren Fragen) wird z. B. in dem Buch von W. S. Massey, Algebraic Topology: An Introduction, gegeben (das in derselben Serie erschienen ist und in dem ebenfalls die Fundamentalgruppe im Mittelpunkt steht).

Gehen wir kurz auf die wichtigsten Themen ein. Kapitel 1 behandelt die kombinatorische Klassifikation der Flächen, die zuerst als verzweigte Überlagerungen der 2-Sphäre vorgestellt werden („Riemannsche Flächen"). Es folgt ein Kapitel über den Zusammenhang zwischen Graphen, Bäumen und freien Gruppen. In Kapitel 3 wird die Fundamentalgruppe eingeführt; es enthält eine sehr schöne elementare Berechnung der Fundamentalgruppe der Kreislinie (ohne Verwendung von Überlagerungen bzw. der Exponentialfunktion) sowie einen Beweis des Satzes von Seifert-Van Kampen, der dann im folgenden zur Berechnung aller auftretenden Fundamentalgruppen dient. Bei der Definition der Homotopie von Wegen bzw. der Fundamentalgruppe ist dem Autor leider eine Ungenauigkeit unterlaufen, da ausschließlich freie Homotopie von Wegen definiert wird (d. h. ohne Berücksichtigung von Anfangs- und Endpunkt). An dieser Stelle trüge eine etwas straffere funktoriellere Sicht (neben der intuitiven) wohl mehr zur Klärung des Begriffes bei. Kapitel 4 behandelt Poincarés Methode zur Berechnung der Fundamentalgruppe eines Simplizialkomplexes, verschiedene Beispiele (u. a. Fundamentalgruppen der Außenräume von wilden und zahmen Knoten), sowie einen Abschnitt über zweidimensionale Komplexe und ihre Anwendungen in der kombinatorischen Gruppentheorie (Reidemeister-Schreier-Untergruppensatz, Satz von Kurosh). Der dabei benötigte Begriff der Überlagerung wird jeweils nur für den gerade vorliegenden Spezialfall eingeführt. Es folgt ein Kapitel über die abelsch gemachte Fundamentalgruppe; darüber hinaus spielt Homologietheorie, die ja einen beträchtlichen formalen Aufwand erfordert, in diesem Buch keine Rolle.

Die drei restlichen Kapitel sind dann etwas spezielleren Themenkreisen gewidmet. Behandelt werden Kurven auf Flächen (mit einer sehr schönen Herleitung der Dehnschen Lösung des Wortproblems für Flächengruppen), eine genaue Analyse der Torusknotengruppen, Zopfgruppen, sowie im letzten Kapitel verschiedene Methoden zur Konstruktion dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. In diesem Kapitel wird u. a. bewiesen, daß jede kompakte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit durch „Dehn-surgery" an einer Verkettung in der 3-Sphäre entsteht bzw. verzweigte Überlagerung der 3-Sphäre ist (in Analogie zu den Flächen als verzweigten Überlagerungen der 2-Sphäre). Diese Sätze, die hier meines Wissens zum ersten Mal in einem Lehrbuch vollständig hergeleitet werden, führen bereits in ein Forschungsgebiet, das seine Ursprünge in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts hat und heute noch von großem Interesse ist. Eine ausgezeichnete weiterführende Lektüre wäre hier das Buch von D. Rolfsen, Knots and Links, sowie die leider noch nicht erschienenen Princeton-Vorlesungen von W. Thurston.

Erwähnt sei noch ein einführendes Kapitel 0, das verschiedene Grundlagen zusammenstellt und auf keinen Fall systematisch gelesen werden sollte. Ferner wurde ich vom Autor auf einen Fehler in dem sehr vage gehaltenen Abschnitt 6.2.4 hingewiesen: die geometrische Konstruktion erfordert eine g-Teilung des Winkels, wobei g das Geschlecht der Fläche bezeichnet.

Schließen wir mit der Bemerkung, daß das Buch in seiner etwas eigenwilligen Sicht der Dinge sicherlich eine Bereicherung der Literatur des Gebietes darstellt.

Bochum B. Zimmermann

Gaier, D., Vorlesungen über Approximation in Komplexen, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1980, 174 S., paperback, DM 28,–

Es ist begrüßenswert, daß über ein höchst aktuelles und schwieriges Gebiet, wie das der Approximation im Komplexen, genau zur rechten Zeit ein modernes Buch erscheint.

Zum Einlesen und zur Darstellung der in der Literatur recht verstreuten klassischen Resultate hat der Verfasser im ersten Teil Reihenentwicklungen, basierend auf ON-Systemen nebst ausführlicher Verwendung der Bergmannschen Kernfunktion, sowie Interpolationsprozesse (z. B. an Fejér-Punkten) behandelt. Konstruktive Aspekte stehen hier naturgemäß im Vordergrund. Mit selten anzutreffender Eleganz ist eine sowohl knappe als auch hinreichend ausführliche Präsentation gelungen.

Der zweite Teil spiegelt die jüngste analytische Entwicklung wider. Hier haben Vortragsreihen auf den vom Verfasser geleiteten Oberwolfacher Funktionentheorie-Tagungen Pate gestanden. Im Kapitel über die Approximation auf kompakten Teilmengen der komplexen Ebene werden die Sätze von Runge, Mergelyan bewiesen und erläutert. Ferner diskutiert der Verfasser die Untersuchungen von Alice Roth, den Satz von Bishop und den Satz von Vitushkin. Im Kapitel über die Approximation auf abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbf{C}$ wird die gleichmäßige Approximation durch meromorphe und durch holomorphe Funktionen behandelt. Es folgen Untersuchungen über Approximationen mit Geschwindigkeit, wobei einige der neuesten Resultate erläutert werden, ohne daß die Beweise im Detail ausgeführt sind. Anwendungen der Approximationssätze, z. B. auf radiale Randwerte ganzer Funktionen, auf das Randverhalten analytischer Funktionen im Einheitskreis und auf das klassische Problem der Julia-Richtungen ganzer Funktionen beschließen den zweiten Teil.

An diesem Buch wird man nicht vorbeigehen können, wenn man sich, von welchem Standpunkt auch immer, mit Approximationen im Komplexen beschäftigt. Ich habe es mit großer Freude gelesen.

Mannheim G. Meinardus

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.

Jahreschroniken der DMV für 1980 und 1981

Den folgenden Chroniken der Jahre meiner Amtszeit möchte ich ein paar Bemerkungen vorausschicken:

Nachdem die neue Konzeption des Jahresberichts verwirklicht worden war, galt die besondere Aufmerksamkeit den Jahrestagungen. Nach langen Diskussionen wurden neben den Übersichtsvorträgen zunächst Arbeitsgemeinschaften für jüngere Mathematiker in das Nachmittagsprogramm aufgenommen und dann auch die Sektionen durch die Mitarbeit von Sektionsleitern vorbereitet und aktiviert. Dies hat zu einer spürbaren Belebung der Tagungen geführt.

Die versuchsweise während der Jahrestagungen in Hamburg und Dortmund veranstalteten Arbeitsgemeinschaften konnten nach erfolgreichen Verhandlungen mit der Stiftung Volkswagenwerk ab 1981 auf eigene Füße gestellt werden. Für die Jahre 1982 bis 1984 sind pro Jahr etwa vier DMV-Seminare von einer Woche Dauer für jeweils 30 Teilnehmer ermöglicht worden.

Als weitere Maßnahme zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses wurde eingehend über die Möglichkeit und Gefahren eines „Aufbaustudiums" gesprochen.

Als Entlastung für die DMV hat sich die gute Zusammenarbeit mit der Konferenz der mathematischen Fachbereiche bewährt.

Nachdem sich die DMV in den vergangenen Jahren besonders eingehend mit Fragen des Unterrichts an Gymnasien und der Ausbildung von Lehrern beschäftigt hatte, scheinen nun die Probleme der Diplom-Mathematiker und die Konkurrenz zu den Informatikern besondere Aufmerksamkeit zu erfordern.

Düsseldorf, Februar 1982 G. Fischer

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.

Jahreschronik der DMV für 1980

1 Ämter und Gremien

1.1 in der DMV

Vorsitzender		*G. Fischer*
Schriftführer		*Wallisser*
Schatzmeister		*Grotemeyer*
Geschäftsführender Herausgeber		*Jacobs*
Präsidium	*Dold*	*Kirchgässner*
	Ebbinghaus	*Koecher*
	G. Fischer	*Wallisser*
	Grotemeyer	*R. Walter*
	Werner	*Witting*
	Jacobs	
Gäste	*Barner* (MFO)	
	Gruber (ÖMG)	
	Winkler (Fachbereichs-Konferenz)	

1.2 in den anderen Organisationen

Herr *Dold* vertritt die DMV im EMC (European Mathematical Council).

Für die Studienreformkommission Naturwissenschaften und Mathematik des Landes Nordrhein-Westfalen wurde Herr *Haußmann* aus Duisburg als Vertreter der DMV nominiert.

Die Herren *Gramsch* und *König* arbeiten im Auftrag der DMV an der Organisation der Toeplitz-Gedenkfeier mit.

Herr *König* soll die DMV bei der Toeplitz-Memorial-Conference offiziell vertreten.

Herr *Kirchgässner* wurde Vorsitzender der GAMM.

Herr *Bauer* (Erlangen) wurde in den DFG-Senat gewählt.

2 Jahrestagung und Mitgliederversammlung 1980

2.1 Die Jahrestagung fand vom 15.–19. September in Dortmund statt.
Es wurden folgende Übersichtsvorträge gehalten:

W. Barth, Erlangen	Algebraische Vektorraumbündel
D. van Dalen, Utrecht	Wieso Grundlagen der konstruktiven Mathematik?
J. Frehse, Bonn	Der Begriff der Kapazität in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen
B. Grünbaum, Seattle	Tilings, pattern, fabrics and related topics in discrete geometry
V. L. Klee, Seattle/Erlangen	Convex polytopes and computational complexity
S. Kobayashi, Berkeley	Complex Differential Geometry
O. Krafft, Aachen	Duale Optimalitätskonzepte in der Statistik
J. Moser, New York/Zürich	Dynamische Systeme mit verborgenen Symmetrien
H. O. Peitgen, Bremen	Topologische Perturbationen beim globalen numerischen Studium nichtlinearer Eigenwert- und Verzweigungsprobleme (mit Film)
C. M. Ringel, Bielefeld	Unzerlegbare Darstellungen endlich-dimensionaler assoziativer Algebren

Es wurden zwei Arbeitsgemeinschaften abgehalten:

U. Koschorke, Siegen	Blätterungen
E. Vogt, FU Berlin	
J. Nitsche, Freiburg	Finite Elemente

Es fand ein Kolloquium über Fragen der Lehrerausbildung statt sowie eine Sitzung, die sich mit Fragen der Mathematiker in Wirtschaft und Industrie beschäftigte.

2.2 Die Mitglieder-Versammlung fand am 18. September 1980 während der Jahrestagung in Dortmund statt.

Herr *Kirchgässner* scheidet auf eigenen Wunsch aus dem Präsidium aus, da er zum Präsidenten der GAMM gewählt wurde. Nachfolger wird Herr *Hirzebruch*. Nachfolger für Herrn *Helmberg*, der turnusmäßig ausscheidet, wird Herr *Werner*. Die Herren *Fischer* und *Grotemeyer* wurden wiedergewählt.

3 Aktivitäten der DMV

3.1 Es wurden Kontakte zum Berufsverband der Industriemathematiker und zur Deutschen Vereinigung für mathematische Logik und Grundlagenforschung (DVMLG) aufgenommen. Die DVMLG unterbreitet der DMV jeweils rechtzeitig (Mai/Juni des vorausgehenden Jahres) einen Dreiervorschlag für Hauptvortragende auf dem Gebiet der mathematischen Logik.

3.2 Der Artikel von Herrn *Gericke* „Aus der Chronik der DMV" (Jber. d. Dt. Math.-Verein. **68** (1966) 46–74) wird zum Jubiläum der Gründung der DMV (1890) in Bremen zusammen mit dem neuen Mitgliederverzeichnis an alle Mitglieder verschickt.

3.3 Der Abschlußbericht über die Durchführung des Versuchs „Fernstudien im Medienverbund" am Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz im WS 78/79 und SS 79 von Herrn *Pfister*, Mainz, wurde als Beilage zu den DMV-Mitteilungen an alle Mitglieder versandt.

3.4 DMV-Seminar. Die Veröffentlichungen der DMV-Arbeitsgemeinschaften erscheinen beim Birkhäuser-Verlag unter dem Titel „DMV-Seminar". Bei Bezug erhalten alle Mitglieder der DMV einen Rabatt von 25% auf den Kaufpreis.

3.5 Für das Jahr 1981 werden zwei Seminare in Schloß Mickeln bei Düsseldorf geplant:

21. 6. – 26. 6. „Complex differential geometry"
Leitung: Kobayashi, Wu (Berkeley)

20. 9. – 25. 9. 81 „Arithmetik elliptischer Kurven und Modulfunktionen"
Leitung: Harder (Bonn), Kneser (Göttingen)

Wegen der Finanzierung sollen die VW-Stiftung und die Sonderforschungsbereiche angesprochen werden.

3.6 Empfehlung des Vorsitzenden Herrn *Fischer* an den Minister NRWs, die bisherige Berufsbezeichnung „Diplom-Mathematiker" beizubehalten.

3.7 Mitgliederwerbung für die DMV in den Notices der AMS.

4 Organisation

4.1 Für die in der Geschäftsstelle der DMV in Freiburg anfallenden Arbeiten wurde eine Sekretärin bei acht Stunden wöchentlicher Arbeitszeit eingestellt.

4.2 Das Präsidium beschließt, die Akten der nach Kriegsende neu gegründeten DMV in Oberwolfach zu sammeln. Die Herren *Ebbinghaus* und *Gericke* sollen sich der Einrichtung dieses Archivs in Oberwolfach annehmen.

4.3 Zwischen Schriftführer, Herausgeber des Jahresberichtes und Teubner Verlag wurden folgende Erscheinungstermine vereinbart:

Heft 1	3. Januarwoche
Heft 2	15. April
Heft 3	3. Juliwoche
Heft 4	15. Oktober

Redaktionsschluß der Mitteilungen ist jeweils 4 Wochen vorher. Die Fachbereiche erhalten Vordrucke für die regelmäßig erwünschten Meldungen für die Mitteilungen; es sollen auch Stellenausschreibungen aufgenommen werden.

Freiburg, Februar 1982 R. Wallisser

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.

Jahreschronik der DMV für 1981

1 Ämter und Gremien

1.1 in der DMV

Vorsitzender		*G. Fischer*
Schriftführer		*Wallisser*
Schatzmeister		*Grotemeyer*
Geschäftsführender Herausgeber		*Jacobs*
Präsidium	*Dold*	*Koecher*
	Ebbinghaus	*Wallisser*
	Fischer	*Walter*
	Grotemeyer	*Werner*
	Hirzebruch	*Witting*
	Jacobs	

Herr *Werner* wird zum neuen Vorsitzenden für das Amtsjahr 1982 gewählt.

Gäste *Barner* (MFO)
Winkler (Fachbereichskonferenz)
Gruber (ÖMG)
Barth (Fachbeisitzer Mathematik bei der MNU)

1.2 in den anderen Organisationen

Herr *Fischer* vertritt die DMV auf der Jahreshauptversammlung der MNU vom 13.–16. April 1981.

Herr *Dold* vertritt die DMV im EMC (European Mathematical Council)

Herr *Habetha* wurde für die Wiederwahl in den FIZ-Benutzerrat vorgeschlagen.

2 Jahrestagung und Mitgliederversammlung 1981

2.1 Die DMV hat wegen des Österreichischen Mathematik-Kongresses im Jahre 1981 keine eigene Jahrestagung abgehalten.

Die ordentliche Mitglieder-Versammlung fand im Rahmen des Kongresses in Innsbruck am 17. September 1981 statt.

2.2 Auf der Mitglieder-Versammlung wurde Herr *Jacobs* aus dem Vorstand und Herr *Dold* aus dem Präsidium wiedergewählt. Nachfolger von Herrn *Ebbinghaus* wird Herr *W. Schwarz*.

2.3 Es wird der Bezug des Jahresberichtes erneut zur Diskussion gestellt. Das Präsidium stellt den folgenden Vorschlag zur Diskussion: „Die Regelung, daß der Bezug des Jahresberichtes im Mitgliedsbeitrag eingeschlossen ist, wird beibehalten". In offener Abstimmung wird dieser Vorschlag mit 124 Ja- und 6 Nein-Stimmen bei 4 Enthaltungen angenommen.

3 Aktivitäten der DMV

3.1 DMV-Seminare. Die DMV hielt zwei Seminare auf Schloß Mickeln in Düsseldorf-Himmelgeist ab: 21. 6.–26. 6. 81 und 20. 9.–25. 9. 81.

Die Finanzierung der ersten Veranstaltung erfolgte durch den SFB Bonn, die Universität Düsseldorf und die DMV. Für die ab dem 2. Halbjahr 1981 bis einschl. 1984 geplanten 14 Veranstaltungen wurde ein Antrag auf Förderung bei der VW-Stiftung gestellt, der im Juli 1981 genehmigt wurde. Als Veranstaltungsorte sind Schloß Mickeln und nach Fertigstellung Schloß Thurnau bei Bayreuth geplant.

Die Planung der Seminare für 1982 wurde vom Präsidium und einer ad hoc Kommission, bestehend aus den Herren *Harder* und *Hirzebruch*, vorgenommen. Folgendes Programm ist vorgesehen:

28. 3.–2. 4. „Spektraltheorie gewöhnlicher Differentialoperatoren, Hamiltonsche Gleichungen"
Leitung: J. Moser (Zürich), E. Trubowitz (New York), E. Zehnder (Bochum)

20. 6.–25. 6. „Gruppen und Graphen"
Leitung: B. Fischer (Bielefeld), D. Goldschmidt (Berkeley, USA)

29. 8.–3. 9. „Robust Statistics"
Leitung: R. J. Beran (Berkeley, USA), H. Rieder (Bayreuth)

5. 9.–10. 9. „Connectedness in Algebraic Geometry"
Leitung: A. Van de Ven (Leiden), R. Lazarsfeld (Princeton)

26. 9.–1. 10. „Riemannian Geometry"
Leitung: M. Gromov (Paris), H. Karcher (Bonn)

Für die weitere Planung ab 1982 wurde ein Komitee eingerichtet, dem die Herren *Hirzebruch*, *Jäger* und *Witting* angehören. Ausarbeitungen der Vorträge erscheinen beim Birkhäuser-Verlag. Mitglieder erhalten bei Bestellung über die DMV 25% Rabatt.

3.2 Zur Erkundung der Berufssituation für Diplom-Mathematiker wurden Kontakte mit der Zentralstelle für Arbeitsvermittlung (ZAV) in Frankfurt aufgenommen. Der Bericht der ZAV wurde zum großen Teil in den Mitteilungen abgedruckt.

Im Hinblick auf die günstigen Berufsaussichten ist eine Notiz in den Mitteilungen der MNU sowie in den Prospekten des Bundeswettbewerbs erschienen.

Der Entwurf des Berufskundeblattes ist fertiggestellt und wurde von der Bundesanstalt für Arbeit veröffentlicht.

Ein Aufsatz von Herrn *Schwarz* „Die berufliche Situation des Mathematikers in Industrie und Wirtschaft" wurde als Beilage in den Mitteilungen verschickt.

3.3 Aufbaustudium. Es wurde eine Kommission gebildet, die aus den Herren *Ebbinghaus, Fischer, Grotemeyer, Winkler, Witting* besteht und Überlegungen zum Thema „Aufbaustudium" angestellt hat. Die Ergebnisse wurden in einer kurzen Denkschrift zusammengefaßt.

3.4 Der Berufsverband Deutscher Mathematiker und Informatiker (BVMI) hat sich aufgelöst und sein Restvermögen an die DMV überwiesen. Es sollen Anstrengungen unternommen werden, daß möglichst viele Industriemathematiker in die DMV eintreten. Dazu muß die DMV neue Aktivitäten entwickeln.

3.5 Eine engere Zusammenarbeit mit dem Deutschen Verein zur Förderung des math.-naturwiss. Unterrichts (MNU) wird angestrebt. Der Aufruf der MNU zur „Rettung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung" ist von der DMV untersützt worden. Die Denkschrift der DMV zum Mathematik-Unterricht an den Gymnasien soll erneut an die Fachseminare gesandt werden.

3.6 Als Gegenseitigkeitsabkommen DMV–ÖMG können in Österreich wohnende ÖMG-Mitglieder für einen Jahresbeitrag von DM 30,00 Mitglied der DMV werden und DMV-Mitglieder zum ermäßigten Beitrag für ÖMG-Mitglieder an den Tagungen der ÖMG teilnehmen.

4 Organisation

Es sollen versuchsweise Notizen über die Neuerscheinungen von Büchern in den Mitteilungen veröffentlicht werden. Darüber wurde mit mehreren Verlagen gesprochen. Dabei soll es sich nicht um Anzeigen, sondern um standardisierte Ankündigungen im Umfang von etwa 10 Schreibmaschinenzeilen handeln.

Freiburg, Februar 1982 R. Wallisser