84. Band Heft 4
ausgegeben am 22. 10. 1982

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1982

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 84/1 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 74,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

84. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1982

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, Schwetzingen

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

3. Abteilung

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 84, Heft 4

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

B. Grünbaum; G. C. Shephard: Filings, Patterns, Fabrics and Related Topics in Discrete Geometry

K. Jacobs: Arithmetische Progressionen

G. Kalmbach: Orthomodulare Verbände

K. Mahler: Warum ich eine besondere Vorliebe für die Mathematik habe

C. M. Ringel: Unzerlegbare Darstellungen endlich-dimensionaler Algebren

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein
84 (1982) 163–195
AMS subject classification: 62–02

Schwache Invarianzprinzipien für reguläre Funktionale von Verteilungsfunktionen

M. Denker, Göttingen

Kaum ein Gebiet in der Statistik ist so unmittelbar von wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen beeinflußt worden wie gerade die asymptotische Verteilungstheorie der nichtparametrischen Statistik. Grundlegende Konvergenzsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie (wie z. B. der zentrale Grenzwertsatz) und „stochastisch äquivalente" Prozesse bilden die Grundlage dieser Theorie. Abgesehen von wenigen Ausnahmen (z. B. [93], [113], [165]), bei denen eine Grenzverteilung direkt ausgerechnet wurde, erhielt man zunächst allgemeine Grenzwertaussagen auf Grund des klassischen zentralen Grenzwertsatzes und abgeleiteter Verteilungsaussagen. Es war Doobs Verdienst ([55]), im Jahre 1949 darauf hinzuweisen, daß die Verteilungen der Kolmogoroff-Smirnoff-Statistiken aus dem kolmogoroffschen zentralen Grenzwertsatz für empirische Prozesse herleitbar sein müssen. Nachdem Donsker ([54]) hierfür einen ersten Beweis gab, rückte die Verteilungstheorie empirischer Prozesse immer mehr in den Mittelpunkt des Interesses (vgl. [18], [39], [45], [69], [130] u. a.). Tatsächlich kann man aus dem Grenzwertsatz für empirische Prozesse den klassischen zentralen Grenzwertsatz herleiten; ebenso wie es möglich ist, dazu das Donskersche Invarianzprinzip ([53]) zu verwenden. Filippova ([60]) hat 1962 dieses ausgenutzt und erweitert: Durch Einführung eines multiplen stochastischen Integrals über die Brownsche Brücke gelang es ihr, das Grenzverhalten der von-Mises-Funktionale ([113]) zu beschreiben. Allgemeinere Aussagen als solche „eindimensionalen" Grenzwertsätze erhält man in Form von funktionalen zentralen Grenzwertsätzen oder Invarianzprinzipien in Analogie zum Donskerschen Satz. In den letzten Jahren wurden für von-Mises-Funktionale und die Hoeffdingschen U-Statistiken ([78]) verschiedene Invarianzprinzipien mit den unterschiedlichsten Methoden bewiesen. Das klassische Donskersche Resultat ([53]) kann man in den Fällen benutzen, wenn sich die Statistik wie ein Partialsummenprozeß unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariabler verhält. Müller [114], Bickel-Wichura ([17]) und Kiefer ([92]) haben Invarianzprinzipien für empirische Prozesse gezeigt, und diese Resultate kann man nun dazu verwenden, die Filippova-Methode für Invarianzprinzipien auszubauen. Die „reversed martingale"-Eigenschaft der U-Statistiken liefert über ein allgemeines Invarianzprinzip für solche Martingale ([104]) zusammen mit der Invarianz der Brownschen Bewegung bei Zeitumkehr ebenfalls Invarianzprinzipien für reguläre Funktionale. Man kann aber auch aus fast sicheren Invarianzprinzipien die gewünschten schwachen Konvergenzaussagen gewinnen, wenn nur die Approximationsgüte an die Brownsche Bewegung,

0012–0456/82/04 0163–33 $06.60/0

bzw. an den Vergleichsprozeß, gut genug ist. Letztlich muß aber doch in irgendeiner Form das Konvergenzkriterium für schwache Konvergenz benutzt werden, nämlich Konvergenz der endlich dimensionalen Marginalien und Straffheit (in Form von „verallgemeinerten Stetigkeitsmodulen"). Diese direkte Methode ist ebenfalls benutzt worden (in den anderen Fällen steckt diese Äquivalenz in den benutzten Sätzen).

Natürlich ist es unmöglich, die Resultate über reguläre Funktionale (von-Mises-Funktionale und U-Statistiken) auch nur annähernd vollständig in gedrängter Form darzustellen; für U-Statistiken sei auf das Literaturverzeichnis verwiesen, das (hoffentlich) einigermaßen vollständig hierzu ist. Man findet dort Arbeiten über Konvergenz gegen stabile Verteilungen ([4]), fast sichere Konvergenz ([6], [81], [100]), den Satz vom iterierten Logarithmus ([5], [68], [136], [157]), fast sichere Invarianzprinzipien ([32], [33], [155], [156]), reduzierte und unvollständige U-Statistiken ([19], [29]), Konvergenzgeschwindigkeit gegen die Grenzverteilung ([8], [9], [11], [24], [30], [34], [37], [43], [57], [67], [70], [124], [183]) u. a. (Besonders die Arbeit von F. Götze ([67]) muß als wesentlicher Fortschritt über die Konvergenzgeschwindigkeit gelten.)

1 Einige wahrscheinlichkeitstheoretische Hilfsmittel

Es werden stets Zufallsvariable X und Folgen von Zufallsvariablen X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ betrachtet, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ definiert sind und Werte in einem separablen, vollständigen, metrischen Raum E (mit Metrik d) annehmen. Wegen der Bedeutungslosigkeit der Struktur von $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ werden wir ihn meistens unterdrücken. Auf E betrachten wir die Borelsche σ-Algebra $\mathscr{B}$ (es gilt also $X^{-1}\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ für eine Zufallsvariable). Mit $\mathscr{L}(X)$ bezeichnen wir die Verteilung von X, also das Bildmaß von P unter $X(\mathscr{L}(X)(B) = P(X^{-1}B)\ (B \in \mathscr{B}))$. Ist $E = \mathbf{R}$, ordnen wir einer Zufallsvariablen X ihre Verteilungsfunktion $F = F_X$ durch $F(x) = P(X \leqslant x) = \mathscr{L}(X)(]-\infty, x])$ zu, und ebenso ihre Momente $E|X|^r = \int |x|^r dF(x)\ (r \geqslant 1)$, bzw. ihren Erwartungswert $EX = \int x dF(x)$ und ihre Varianz $\mathrm{Var}(X) = E(X - EX)^2$, falls sie existieren.

Für Zufallsvariable X, X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bzw. Wahrscheinlichkeitsmaße μ, μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ auf $(E, \mathscr{B})$ unterscheidet man die folgenden Konvergenzen

a) Sei $E = R$, X_n konvergiert gegen X im r-ten Mittel, wenn $\lim\limits_n E|X_n - X|^r = 0$ gilt.

b) X_n konvergiert gegen X fast sicher, wenn $P(\lim X_n = X) = 1$ gilt.

c) X_n konvergiert gegen X stochastisch, wenn für jedes $\epsilon > 0$ $\lim\limits_n P(d(X_n, X) > \epsilon) = 0$ gilt.

d) μ_n konvergiert gegen μ schwach, wenn für alle stetigen, beschränkten Funktionen f auf E $\lim\limits_n \int f d\mu_n = \int f d\mu$ gilt. Wir schreiben dann $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{Q}} \mu$.

e) X_n konvergiert gegen X schwach, wenn $\mathscr{L}(X_n) \xrightarrow{\mathscr{Q}} \mathscr{L}(X)$ gilt.

Aus a) oder b) folgt c) und daraus e). Insbesondere folgt hieraus:

Satz 1.1 *Seien* X, X_n, Y_m $(n, m = 1, 2, \ldots)$ *Zufallsvariable. Aus* $\lim P(d(X_n, Y_n) > \epsilon) = 0$ *für jedes* $\epsilon > 0$ *und aus der schwachen Konvergenz von* X_n *gegen* X *folgt die schwache Konvergenz von* Y_n *gegen* X.

Solche Paare von Prozessen, die die erste Voraussetzung in 1.1 erfüllen, nennt man stochastisch äquivalent. Nach dem Portmanteau-Satz ist die schwache Konvergenz in d) (unter anderem) äquivalent zu $\lim_n \mu_n(B) = \mu(B)$ für alle μ-randlosen Borelschen Mengen, d. h. also alle Mengen $B \in \mathscr{B}$ mit $\mu(\partial B) = 0$, wobei ∂B den topologischen Rand von B bezeichnet. Zwei einfache Konsequenzen aus der schwachen Konvergenz werden sich später als nützlich erweisen:

Satz 1.2 *Seien* $(E, \mathscr{B})$ *und* $(E', \mathscr{B}')$ *zwei (separable, vollständige, metrische) Räume und* μ, μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *Wahrscheinlichkeitsmaße auf* $\mathscr{B}$.

a) *Sei ferner* $h : E \to E'$ *eine meßbare Abbildung und es sei* D_h *die Menge aller Unstetigkeitsstellen von* h. *Dann ist* $D_h \in \mathscr{B}$. *Gilt* $\mu(D_h) = 0$ *und* $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \mu$, *so folgt* $h\mu_n \xrightarrow{\mathscr{D}} h\mu$ *für die Bildmaße unter* h.

b) *Seien* μ, μ_n *(bzw.* ν, ν_n*)* $(n = 1, 2, \ldots)$. *Wahrscheinlichkeitsmaße auf* $(E, \mathscr{B})$ *(bzw.* $E', \mathscr{B}'$*)). Dann gilt für die Produktverteilungen* $\mu_n \times \nu_n, \mu \times \nu$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *auf* $E \times E', \mathscr{B} \times \mathscr{B}'$):

$$\mu_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \mu \text{ und } \nu_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \nu \Leftrightarrow \mu_n \times \nu_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \mu \times \nu$$

Betrachten wir den Raum $C([0, 1])$ aller stetigen Funktionen auf $[0, 1]$, versehen mit der Supremumsnorm. Das Standard-Wienermaß W auf $C([0, 1])$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Borelschen Mengen von $C([0, 1])$, das durch die Eigenschaften

$$\text{i) } W(\pi_t < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2t}}\, du$$

für alle Projektionen $\pi_t(f) = f(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ und

ii) für jede Auswahl von $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1$ sind die Zufallsvariablen $\pi_{t_n} - \pi_{t_{n-1}}, \ldots, \pi_{t_2} - \pi_{t_1}, \pi_{t_1}$ unabhängig.

Jede $C([0, 1])$-wertige Zufallsvariable mit Verteilung W heißt Standard-Wienerprozeß, geschrieben $W = (W(t))_{0 \leqslant t \leqslant 1}$. Daraus kann man sofort die Brownsche Brücke W^0 ableiten:

$$W^0(t) = W(t) - tW(1) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Auf Müller ([114]) und Bickel-Wichura ([17]) geht die Definition eines Gaußschen Prozesses auf $C([0, 1]^2)$, dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Einheitsquadrat, zurück, der in der einen Komponente ein Wienermaß, in der anderen aber eine Brownsche Brücke ist. Meistens wird er als Kieferprozeß $K = (K(t, s))_{0 \leqslant t,s \leqslant 1}$ bezeichnet. Er ist durch 2 Forderungen charakterisiert: Einerseits sind die endlich dimensionalen Marginalverteilungen normalverteilt und andererseits gilt $EK(t, s) = 0 \;\; \forall\, 0 \leqslant t, s \leqslant 1$ und $EK(t, s)\, K(t', s') = \min(t, t')\, (s(1 - s'))$ für $0 \leqslant t, t', s, s' \leqslant 1, s \leqslant s'$. Für $t = 1$ ist $(K(1, s))_{0 \leqslant s \leqslant 1}$ die Brownsche Brücke und für festes s ist $(K(s, t))_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ ein (nicht standardisierter) Wienerprozeß.

Für eine Folge von reellen Zufallsvariablen $(X_n)_{n \geqslant 1}$ bezeichne F_n die Verteilungsfunktion des empirischen Prozesses: $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{]-\infty, t]}(X_k)$, $(t \in \mathbf{R})$. F_n ist dann eine rechtsstetige Funktion, für die ebenfalls die linksseitigen Limiten existieren. Bezeichne $D_1 = D([0, 1])$ die Menge aller Funktionen auf $[0, 1]$ mit diesen Eigenschaften. $F_{n|[0,1]}$ ist i. a. nicht meßbar bzgl. der Borelschen Mengen erzeugt von der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Skorohod ([163]) führte 1956 eine Metrik ein, bzgl. der D_1 ein vollständiger, separabler, metrischer Raum und F_n meßbar wird. Auf Straf ([171]) und Neuhaus ([116]) geht eine Verallgemeinerung zurück. Sei D_K die Menge aller Funktionen $f : [0, 1]^K \to \mathbf{R}$ mit folgenden Eigenschaften: Für alle t und $A \subset \{1, \ldots, K\}$ existiere $\lim\limits_{\substack{s_j \uparrow t_j\ j \in A^c \\ s_j \downarrow t_j\ j \in A}} f(s)$ und ist gleich f(t) für $A = \{1, \ldots, K\}$.

Der Raum $C([0, 1]^K)$ ist stets eine abgeschlossene Teilmenge von D_K in der Skorohod-Topologie; für K = 1 lassen sich das Wienermaß und die Verteilung der Brownschen Brücke und für K = 2 die Verteilung des Kieferprozesses als Maß auf D_1 bzw. D_2 auffassen.

Satz 1.3 *Sei* $(X)_{n \geq 1}$ *eine Folge unabhängiger, auf* [0, 1] *gleichmäßig verteilter Zufallsvariabler. Dann konvergieren die* D_2*-wertigen Zufallsvariablen,* $(s, t) \to [ns]\, n^{-1/2}(F_{[ns]}(t) - t)$ *schwach gegen den Kieferprozeß.*

Dieser Satz geht auf Bickel-Wichura ([17]) zurück. Ein Teilresultat wurde von Müller in [114] gezeigt. Kiefer ([92]) (und später eine Reihe von anderen Autoren) untersuchten die fast sichere Konvergenz, und erzielten Resultate, aus denen 1.3 folgt. Für s = 1 erhält man wegen 1.2.a) Kolmogoroffs Resultat: die schwache Konvergenz von $t \to \sqrt{n}(F_n(t) - t)$ gegen die Brownsche Brücke W^0. Neuhaus und Sen ([119]) zeigten einen zu 1.3 analogen Satz.

Satz 1.4 *Unter den Voraussetzungen von* 1.3 *konvergieren die Zufallsvariablen* $(s, t) \to n^{1/2}(F_{[n/s]+1}(t) - t)$ *schwach gegen den Kieferprozeß.*

Eine ausführliche Darstellung der Resultate über den empirischen Prozeß für unabhängige Zufallsvariable findet man in dem Artikel von Gänssler und Stute ([64]). Einen analogen Satz für schwach abhängige Prozesse findet man in der Arbeit von Berkes und Philipp [15], auf den im letzten Teil noch näher eingegangen wird.

2 Vier wesentliche Typen von Statistiken

Der χ^2-Anpassungstest, den K. Pearson ([128]) im Jahre 1900 beschrieb, ist wohl das erste nachweislich besprochene Verfahren zur Behandlung statistischer Probleme, bei denen nur wenig Information über die betrachteten Wahrscheinlichkeitsmaße vorausgesetzt wurde; zumindest so wenig, daß es unmöglich ist, diese Verteilungen in „natürlicher und vernünftiger Weise" mit endlich vielen Parametern funktionell zu beschreiben. (So geartete Problemstellungen nennt man daher „nichtparametrisch". Nebenbei bemerkt, haben nichtparametrische Verfahren im allgemeinen den Vorzug der größeren Anwendungsbreite (z. B. in der Medizin) gegenüber parametrischen Methoden, während letztere wiederum präziser arbeiten, wenn das Problem parametrisch formuliert werden kann.) Scheffé ([140]) betrachtet Pearsons Arbeit als den Beginn der nichtparametrischen Statistik. Bis in die dreißiger Jahre erschienen relativ wenig Arbeiten, die diesem Gebiet zugeordnet werden können. In der Folgezeit jedoch entstanden eine Reihe von nichtparametrischen Test- und Schätzverfahren, die man heute in jedem Lehrbuch über dieses

Gebiet findet und mit den Namen Kolmogoroff, Smirnoff, Wallis, Krupka, Kendall, Friedman, Mann, Whithney, Wilcoxon, v. d. Waerden, Fisher-Yates u. a. verbindet. Eines der Hauptprobleme bei diesen Untersuchungen ist die Bestimmung der asymptotischen Verteilung der benutzten Statistiken im Sinne der schwachen Konvergenz, wenn die Anzahl der Beobachtungen wächst. Denn das erlaubt nach dem Portmanteau-Satz die approximative Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeiten. Man unterscheidet heute im wesentlichen vier Typen von Statistiken, die dieses asymptotische Verhalten beschreiben. Mit einer Klasse wollen wir uns näher beschäftigen; die anderen drei aber doch kurz besprechen, um einige Zusammenhänge anzudeuten.

a) Die Kolmogoroff-Smirnoff-Statistik und gewisse Anpassungstests

Es sei F eine stetige Verteilungsfunktion und $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, F-verteilter Zufallsvariabler.

$$D_N = \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_N(x) - F(x)| \quad \text{und} \quad D_N^+ = \sup_{x \in \mathbf{R}} F_N(x) - F(x)$$

werden als Kolmogoroff-Smirnoff-Statistiken bezeichnet. Für ihre Grenzverteilung gilt der

Satz 2.1 ([93], [164])

$$\lim_{N \to \infty} P(\sqrt{N}\, D_N < \alpha) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k-1)} e^{-2k^2\alpha^2} \qquad (\alpha \geqslant 0)$$

$$\lim_{N \to \infty} P(\sqrt{N}\, D_N^+ < \alpha) = 1 - e^{-2\alpha^2} \qquad (\alpha \geqslant 0)$$

Auf Doob ([55]) geht die Beweisidee dieses Satzes mittels der Brownschen Brücke zurück. Donsker ([54]) gab einen ersten Beweis mit dieser Methode (vgl. auch Chentsov [39], Anderson-Darling [12], Darling [45], Billingsley [18]); hierbei wird zum ersten Mal ein Invarianzprinzip benutzt, um eine statistische Grenzwertaussage zu erhalten. Man kann nämlich zunächst einmal annehmen, daß die X_i auf [0, 1] gleichförmig verteilt sind. Nach dem kolmogoroffschen Resultat (Satz 1.3) gilt dann $\mathscr{L}(\sqrt{N}(F_N - F)) \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathscr{L}(W^0)$. Nun ist $h(f) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$ eine auf C([0, 1]) stetige Funktion, also konvergiert wegen Satz 1.2 D_N gegen $h(W^0)$ schwach. Die Verteilung von $h(W^0)$ kann aber direkt berechnet werden. Ähnlich verfährt man bei D_N^+.

Die Cramér-von Mises-Statistik ([41], [112]), definiert als

$$\omega^2 = \int (F_n - F)^2 dG$$

gehört ebenfalls unter diese Rubrik, wie auch zu den von-Mises-Funktionalen in d). Solche Statistiken beruhen auf einem „Abstandsbegriff" für empirische Verteilungen; in [137] findet man eine Beschreibung dieser Klasse.

b) Permutationsstatistiken

Die Idee der Permutationstests geht auf Fisher zurück, das allgemeine Konzept wurde maßgeblich von Scheffé beeinflußt. Zu jedem $n \in \mathbf{N}$ sei X_n eine $\mathbf{R}^{k_n}$-wertige Zufallsvariable, deren Verteilung invariant unter allen möglichen Koordinatenvertauschungen ist. Es gebe ferner einen Vektor $a_n \in \mathbf{R}^{k_n}$ mit $P(X_n = a_n) = (k_n!)^{-1}$; mit gleicher Wahrscheinlichkeit wird also jeder Vektor, der aus einer Permutation der Koordinaten von a_n entsteht, von X_n als Wert angenommen. Gleiche Koordinatenwerte von a_n läßt man hierbei nicht zu. Ist nun $b_n \in \mathbf{R}^{k_n}$, so nennt man das zufällige Skalarprodukt $\langle b_n, X_n \rangle$ eine (lineare) Permutationsstatistik. Für den Hauptsatz der Verteilungstheorie kann man o. E. annehmen, daß $\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} = \sum_{i=1}^{k_n} b_{ni} = 0$ und $\sum a_{ni}^2 = \sum b_{ni}^2 = n$ gelten:

Satz 2.2 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(A) $\max_i n^{-1} a_{ni}^2 \to 0$, $\max_i n^{-1} b_{ni}^2 \to 0$ $(n \to \infty)$ *und die Verteilungen von* $n^{-1/2} \langle b_u, X_n \rangle$ *konvergieren schwach gegen die Standard-Normalverteilung.*

(B) *Für jedes* $\epsilon > 0$ *gilt*

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ |a_{ni} - b_{nj}| > \epsilon\sqrt{n}}}^{k_n} (n^{-1} a_{ni} b_{ni})^2 \to 0 \qquad (k_n \to \infty).$$

In dieser Form ist der Satz von Hájek ([73]) angegeben worden. Ursprünglich geht er auf Wald-Wolfowitz ([182]), mit Verbesserungen von Noether ([122]) und Hoeffding ([80]) zurück. Hájek konstruiert Zufallsvariable Y_n und Z_n auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, so daß die Koordinaten von Y_n unabhängig sind, $P(Y_{ni} = a_{nj}) = k_n^{-1}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant k_n)$, $\mathscr{L}(Z_n) = \mathscr{L}(X_n)$ und $n^{-1/2} \langle b_n, Y_n - Z_n \rangle$ stochastisch gegen Null streben. Dann bedeutet (B) gerade die Lindeberg-Bedingung für das Schema $(Y_{ni})_{1 \leqslant i \leqslant k_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und die Äquivalenz folgt unmittelbar aus dem Zentralen Grenzwertsatz unter der Lindeberg-Bedingung. Weitere Referenzen und einen Überblick über die Verteilungstheorie und zusammenhängende Fragen findet man in dem Buch von Puri und Sen ([129]). Diese Beweistechnik wird von Nandi und Sen ([115], [144], [146], [147]) u. a. dazu verwendet, die Verteilungskonvergenz für U-Statistiken unter Permutations-invarianten Beobachtungen zu studieren. Der hier zugrunde liegende Prozeß besteht nicht mehr aus unabhängigen Beobachtungen. Die Abhängigkeitsstrukturen, die im letzten Teil betrachtet werden, sind jedoch anderer Natur und erfordern daher auch andere Methoden.

c) Rang- und Ordnungsstatistiken

Sehr viele nichtparametrische Statistische Verfahren beruhen auf Funktionalen, angewandt auf die Ränge der zugrunde liegenden Beobachtungen. (Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ reelle Zufallsvariable, so heißt

$$R_i = \sum_{k=1}^{n} 1_{]-\infty, X_i]}(X_k)$$

der Rang von X_i unter $X_1, \ldots, X_n$.)

Einige Statistiken, die in diese Klassifizierung fallen, können auch als von-Mises-Funktionale oder U-Statistiken angesehen werden, aber nicht alle. V. d. Waerdens

Test ist hierfür ein typisches Beispiel. Es sei $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-1/2\, t^2}\, dt$ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung N(0, 1). Es seien X_n, Y_m $(n \geqslant 1, m \geqslant 1)$ unabhängige Zufallsvariable mit $\mathscr{L}(X_n) = F, \mathscr{L}(Y_m) = G$; F und G seien dabei stetige Verteilungsfunktionen. Man definiert sodann

$$n\, T_N = \sum_{i=1}^{n} \phi^{-1}\left(\frac{R_i}{N+1}\right) = \sum_{k=1}^{N} \phi^{-1}\left(\frac{k}{N+1}\right) V_k \qquad (N = (n+m)),$$

wobei R_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ den Rang von X_i unter allen $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ bezeichnet und wobei $V_k = 1$ ist, wenn die k – t kleinste Beobachtung ein X_ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant n)$ ist, und $V_k = 0$ sonst gilt. Setzt man $\lambda_N = n(n+m)^{-1}$ und $H_N(t) = \lambda_N F_n(t) + (1 - \lambda_n) G_m(t)$ $(t \in \mathbf{R})$, so kann man auch $T_N = \int \phi^{-1}\left(\frac{N}{N+1} H_N\right) dF_n$ schreiben, also T_N als stochastisches Integral (im Sinne eines Lebesgue-Stieltjes Integral für jedes $\omega \in \Omega$) darstellen.

Allgemein bezeichnet man eine Statistik der Form

$$T_N = \int h\left(\frac{N}{N+1} H_N\right) dF_m$$

als eine Rangstatistik. Das wohl schönste und allgemeinste Resultat für die Statistiken wurde von Chernoff und Savage ([40]) 1958 erhalten:

Satz 2.3 *Es sei* h *eine auf*]0, 1[*definierte, nicht konstante Funktion, die für ein* $K > 0$ *und* $\delta > 0$

$$|h(x)| \leqslant K(x(1-x))^{(-1/2)+\delta} \quad \textit{und} \quad |h'(x)| \leqslant K(x(1-x))^{(-3/2)+\delta}$$

erfüllt. Für ein Paar (n, m) *sei* $H_{(N)} = \lambda_N F + (1 - \lambda_N) G$,

$$\mu_N = \int h(H_{(N)}) dF$$

und
$$N \sigma_N^2 = 2(1 - \lambda_N) \Big\{ \iint_{x<y} G(x)(1 - G(y)) h'(H_{(N)}(x)) h'(H_{(N)}(y)) dF(x) dF(y) + \frac{1 - \lambda_N}{\lambda_N} \iint_{x<y} F(x)(1 - F(y)) h'(H_{(N)}(x)) h'(H_{(N)}(y)) dG(x) dG(y) \Big\}$$

gesetzt. Gilt nun für $\lim \frac{n}{n+m} = \lambda \in\,]0, 1[$ $\lim \sigma_N^2 > 0$, *so konvergiert* $\sigma_N^{-1}(T_N - \mu_N)$ *schwach gegen* N(0, 1).

Die zu diesem Satz existierenden Beweise sind sehr aufwendig; besonders die Beweise in [69] und [130] verlangen einige trickreiche Abschätzungen über die empirischen Prozesse F_n, G_m und H_N. Kürzlich wurde ein einfacher Beweis von U. Rösler und dem Autor gefunden.

d) v. Mises-Funktionale und U-Statistiken

Ihrer Definition nach sind diese beiden Typen von Statistiken vollkommen verschieden; in ihrem Grenzverhalten ähneln sie sich jedoch stark.

In seiner grundlegenden Arbeit [113] im Jahre 1947 führte v. Mises eine Klasse von Statistiken ein, die heute nach ihm benannt werden. Filippova ([60]) gab eine Verallgemeinerung (das Restglied) betreffend, die sich jedoch schon implizit in der Arbeit von v. Mises findet.

Es sei $T : U \to \mathbf{R}$ ein Funktional auf einer Teilmenge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbf{R}$. Zu zwei Verteilungsfunktionen $F^{(0)}$ und $F^{(1)}$ und für $t \in [0, 1]$ setzt man $F^{(t)} = (1 - t)F^{(0)} + tF^{(1)}$, und nennt T m-mal differenzierbar im Punkt $F^{(0)} \in U$ in bezug auf die um $F^{(0)}$ sternförmige Menge $A \subset U$, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind.

i) Für alle $t \in [0, 1]$, alle $F^{(1)} \in A$ und alle $p = 1, \ldots, m$ existiert $\frac{d^p}{dt^p} T(F^{(t)})$.

ii) Für alle $p = 1, \ldots, m$ existieren Abbildungen $T^{(p)}_{F(0)} : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, so daß für alle $F^{(1)} \in A$

$$\frac{d^p}{dt^p} T(F^{(t)})|_{t=0} = \int \ldots \int T^{(p)}_{F(0)} (y_1, \ldots, y_p) \prod_{i=1}^{p} d(F^{(1)}(y_i) - F^{(0)}(y_i))$$

Definition 2.4 *Ein Funktional* $T : U \to \mathbf{R}$ *heißt von-Mises-Funktional der Ordnung* m *im Punkt* $F^{(0)} \in U$, *falls es eine um* $F^{(0)}$ *sternförmige Menge* $A \subset U$ *gibt, so daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind*:

(1) *Für die empirischen Verteilungsfunktionen* F_n *von* n *unabhängigen nach* $F^{(0)}$ *verteilten Zufallsvariablen gilt* $\lim_{n\to\infty} P(F_n \in A) = 1$.

(2) T *ist* m-*mal differenzierbar im Punkt* F^0 *in bezug auf die sternförmige Menge* A.

(3) *Für alle* $\epsilon, \delta > 0$ *und alle* $p = 1, \ldots, m$ *gilt*:

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{(p/2)-\delta} \sup_{0<t<1} |\frac{d^p}{dt^p} T(F_n^{(t)})| > \epsilon) = 0,$$

wobei $F_n^{(t)} = (1 - t)F^{(0)} + t F_n$

gesetzt wird.

Satz 2.5 ([113], [60]) *Es sei* T *ein v.-Mises-Funktional der Ordnung* m + 1 *im Punkt* $F^{(0)}$, *und es gelte* $T^{(p)}_{F(0)} \equiv 0$, $p = 1, \ldots, m - 1$. *Dann sind die Zufallsvariablen* $n^{m/2}(T(F_n) - T(F^{(0)})$ *und* $\frac{1}{m!} n^{m/2} \int \ldots \int T^{(m)}_{F(0)}(y_1 \ldots y_m) \prod_{i=1}^{m} d(F_n(y_i - F^{(0)}(y_i))$ *stochastisch äquivalent im Sinne von* Satz 1.1.

Die asymptotische Verteilung dieser v.-Mises-Funktionale wird also durch Statistiken der Form

$$V_n(h) = \int \ldots \int h(y_1, \ldots, y_m) \prod_{i=1}^{m} d(F_n(y_i) - F(y_i))$$

beschrieben; man bezeichnet deshalb letztere ebenfalls als v.-Mises-Funktionale, und in diesem Sinn werden im folgenden Abschnitt von-Mises-Funktionale verstanden.

Auch verwendet man des öfteren den Begriff des von-Mises-Funktionals für Statistiken der Form $\int \ldots \int h(x_1, \ldots, x_m) \prod_{i=1}^{m} dF_n(x_i)$.

Sei $F(\cdot, \theta)$ $(\theta \in \mathbf{R})$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, $-\infty = a_1 < a_2 < \ldots < a_r = \infty$ eine Zerlegung von $\mathbf{R}$ und $f_i(\theta) = F(a_{i+1}, \theta) - F(a_i -, \theta)$ $(\theta \in \mathbf{R})$.
Sei

$$H(t, \theta) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\frac{d}{d\theta} f_i(\theta)}{f_i(\theta)} \int_{a_i}^{a_{i+1}} dF_n^{(t)}.$$

Der klassische Maximum-Likelihood-Schätzer $T(F_n^{(t)})$ ist durch die Forderung $H(t, T(F_n^{(t)})) = 0$ definiert. Ist f_i dreimal stetig differenzierbar in θ_0, $f_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ und $V = \sum_{i=1}^{r} (f_i'(\theta_0))^2/f_i(\theta) \neq 0$, dann kann mit 2.5 gezeigt werden, daß $n^{1/2}(T(F_n) - T(F_0))$ und $V^{-1} \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i'(\theta_0)}{f_i(\theta_0)} \int_{a_i}^{a_{i+1}} d(F_n(\cdot) - F(\cdot, \theta_0))$ stochastisch äquivalent sind.
Analoges gilt für den χ^2-Minimum, den ω^2-Minimum und Hubers M-Schätzer ([85], [86]), die gewissen Differenzierbarkeitsforderungen genügen. Unter die von-Mises-Funktionale fallen ferner beispielsweise Statistiken der Form $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_i - EX_i)$, die Cramér-von-Mises-Statistik oder der χ^2-Anpassungstest von Pearson

$$\chi_N^2 = \sum_{k=1}^{r} p_k^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} 1_{I_k}(X_i) - Np_k \right)^2.$$

Dabei ist $(I_k \mid k = 1, \ldots, r)$ eine endliche Zerlegung von $\mathbf{R}$ und p_k die theoretische Wahrscheinlichkeit von I_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$.
Die Definition einer U-Statistik, die auf Hoeffding ([78]) im Jahre 1948 zurückgeht, ist vergleichsweise einfach. Sie wurde zunächst für den Ein-Stichprobenfall gegeben, später (1951, [98]) von Lehmann verallgemeinert. Für $k = 1, \ldots, K$ $n = 1, 2, \ldots$ seien Zufallsvariable $X_n(k)$ mit Werten in E_k gegeben. Sei $h : \prod_{k=1}^{K} E_k^{m_k} \to \mathbf{R}$ eine Funktion in m_1 Argumenten aus E_1, m_2 Argumenten aus E_2 usw.

Definition 2.6 *Zu* $N = (N_1, \ldots, N_k) \in \mathbf{N}^k$, h *und* $(X_n(k))$ *ist eine* U-*Statistik durch*

$$U_N(h) = \sum{}' h(X_{t_1(1)}(1), \ldots, X_{t_{m_1}(1)}(1), X_{t_1(2)}(2), \ldots X_{t_{m_K}(K)}(K))$$

gegeben. Die Summe erstreckt sich hierbei über alle $1 \leqslant t_\ell(k) \leqslant N_k$, *die paarweise verschieden sind* $(k = 1, \ldots, K)$.

Diese Definition ist leicht verschieden von der üblicherweise gegebenen; wir haben sie jedoch in dieser Form wegen des engen Zusammenhangs mit verallgemeinerten v.-Mises-Funktionalen der Form

$$V_N(h) := \int \ldots \int h(x_{11}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{Km_K}) \prod_{k=1}^{K} \prod_{i=1}^{m_k} d(F_{N_k}^{(k)}(x_{ki}) - F^{(k)}(x_{ki}))$$

gewählt. Bis auf Summierung über die Diagonale und die Normierung durch $\prod_{k=1}^{K} N_k^{m_k}$ kann eine U-Statistik als endliche Summe von verallgemeinerten v.-Mises-Funktionen geschrieben werden. Das sieht man leicht durch Ausrechnen ein. Es ist dann – wenigstens intuitiv – klar, daß die asymptotische Theorie für beide Statistiken in gleicher Weise behandelt werden kann.

Zum Schluß seien noch einige illustrative Beispiele angegeben. In dem Buch von Randles und Wolfe ([131]) findet man weitere Beispiele ausführlich besprochen. Alle Zufallsvariablen X_n, $X_n(k)$ seien unabhängig.

(1) $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist ein Schätzer für den Erwartungswert.

(2) $\frac{1}{n(n-1)} \left[n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \right)^2 \right] = \frac{1}{m(n-1)} U_n(h)$ mit $h(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1 - x_2)^2$ ist ein unverfälschter Schätzer für die Varianz $E(X_1 - EX_1)^2$.

(3) Für $h = 1_{]0,\infty[}$ ist $U_n(h)$ die Statistik für den Vorzeichentest von Fisher ([61]).

(4) Für $h(x_1, x_2) = 1_{]0,\infty[}(x_1 + x_2)$, $h'(x) = 1_{]0,\infty[}(x)$ ist $U_n(h') + \frac{1}{2} U_n(h)$ gerade Wilcoxons „signed rank"-Statistik.

(5) Für $h(x_1, x_2, x_3) = 1_{]0,\infty]}(x_1 - x_2 - x_3)$ kann man die Statistik $U_n(h)$ benutzen, um die Bedingung $1 - F(s + t) = (1 - F(s))(1 - F(t))$ gegen $1 - F(s + t) < (1 - F(s))(1 - F(t))$ $(\forall\, t, s \geq 0)$ zu testen. Man setzt hierbei voraus, daß F stetig ist und $F(0) = 0$ erfüllt. (Hollander, Proschan [83]). Eine Zufallsvariable X mit einer solchen Verteilungsfunktion F, die die obige Gleichheit erfüllt, besitzt kein Gedächtnis: $P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t)$ oder $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$ $(s, t \geq 0)$. Gilt diese Eigenschaft, so muß F exponentialverteilt sein ([65]). Anschaulich bedeutet diese Eigenschaft, daß die restliche Lebensdauer (z. B. einer Glühbirne) nach der Zeit t sich stochastisch genauso verhält wie zu Beginn.

(6) Sei $h(x, y) = 1_{]0,\infty[}(y - x)$. Die Mann-Whitney-Wilcoxon-Statistik ist definiert als $W = \sum_{j=1}^{n} R_j$, wobei R_j der Rang von $X_j(2)$ unter allen Beobachtungen $X_1(1), \ldots, X_m(1), X_1(2), \ldots, X_n(2)$ ist. Man findet sofort die Relation

$$W = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} h(X_k(1), X_j(2)) + \frac{n(n+1)}{2},$$

im wesentlichen ist also W eine zwei-Stichproben U-Statistik.

(7) Für den Lehmann-Test ist wiederum $K = 2$ und

$$h(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \min(x_1, x_2) > \max(y_1, y_2) \\ & \text{oder } \min(y_1, y_2) > \max(x_1, x_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zu setzen. Sind F und G die stetigen Verteilungsfunktionen der beiden jeweils identisch verteilten Folgen, so gilt $F = G$ genau dann, wenn $\Delta(F, G) := \int (F(x) + G(x))^2 \, d\,\frac{F + G}{2}(x) = 0$ gilt. Außerdem gilt $E\, h(X_1(1), X_2(1), X_1(2), X_2(2)) = \frac{1}{3} + \Delta(F, G)$, so daß $U_N(h)$ eine unverfälschte Statistik ist, um Δ zu schätzen oder zu testen.

3 Verteilungstheorie für unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariable

V. Mises (1947) beschreibt das Grenzverhalten seiner Funktionale so: „Volterra (1913) also introduced the notion of derivatives and of Taylor-development for a 'fonction de ligné'. Using these concepts a more specific statement can be pronounced: The type of asymptotic distribution of a differentiable statistical function $T(F_n(x))$ depends on which is the first non-vanishing term in the Taylor development of T at the point F; if it is the linear term the limiting distribution is normal, under restrictions that can easily be derived from the CLT; in other cases higher types of asymptotic distributions result." von Mises beweist „second type asymptotic distribution" und gibt einen vollständigen Ausdruck der charakteristischen Funktion in der Form $1/D(ui)$, wobei $D(\lambda)$ im allgemeinen die Fredholm-Determinante eines symmetrischen Kernes ist, der von der 2. Ableitung von T im Punkt F und von F selbst abhängt.

Filippova ([60]) hat eine sehr einfache Methode angegeben, wie man für von-Mises-Funktionale der Form

$$n^{m/2} \int \dots \int h(x_1, \dots, x_m) \prod_{i=1}^{m} d(F_n - F)(x_i)$$

die asymptotische Verteilung bestimmen kann. Für eine Zerlegung $\alpha = \{A_1, \dots, A_r\}$ von $\{1, \dots, m\}$ sei h_α die durch

$$h_\alpha(y_1, \dots, y_r) = h(z_1, \dots, z_m), \quad \text{mit } z_i = y_\ell \Leftrightarrow i \in A_\ell,$$

definierte Funktion. Sodann sei H(F) der Banachraum aller Funktionen $h : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ mit endlicher Norm

$$\|h\|^2 = \sum_\alpha \int \dots \int (h_\alpha(y_1, \dots, y_r))^2 \prod_{i=1}^{r} dF(y_i).$$

Ist F die Verteilungsfunktion des Lebesguemaßes auf [0, 1], schreiben wir anstelle von H(F) lediglich H.

(Man ist bei den folgenden Untersuchungen nicht daran gebunden, nur reelle Kerne $h \in H(F)$ zu betrachten. Ohne wesentliche Änderungen kann man Abbildungen h mit Werten in einem endlich dimensionalen euklidischen Raum zulassen, ja sogar solch h, die Werte in einem Typ 2-Banachraum annehmen. Letzteres kann mittels [96] und einigen Standardüberlegungen erreicht werden.).

Für eine Treppenfunktion

$$h = \sum h_{c_{i_1}, \dots, c_{i_m}} 1_{[c_{i_1}-1, c_{i_1}[\times \dots \times [c_{i_m}-1, c_{i_m}[}$$

$(0 = c_1 < c_2 < \dots < c_m = 1)$ kann ein stochastisches Integral $Z_1(h)$ sofort durch

$$Z_1(h) = \sum h_{c_{i_1}, \dots, c_{i_m}} \prod_{\ell=1}^{m} (W^0(c_{i_\ell}) - W^0(c_{i_\ell - 1}))$$

erklärt werden. Filippova zeigte, daß es eine Konstante C (unabhängig von h) mit $E|Z_1(h)|^2 \leq C\|h\|^2$ existiert, so daß für beliebiges $h \in H$ $Z_1(h)$ durch Approximation mittels Treppenfunktionen wohldefiniert ist, geschrieben

$$Z_1(h) = \int \dots \int h(x_1, \dots, x_m) \prod_{i=1}^{m} dW^0(x_i).$$

Stochastische Integration mittels der Brownschen Brücke wurde später von Jeulin und Yor ([90]) in anderem Zusammenhang untersucht.

Für $h(x, y) = \sum_{k=1}^{r} g_k(x)g_k(y)$ wird beispielsweise $Z_1(h) = \sum_{k=1}^{r} (Z_1(g_k))^2$. Sind nun die g_k orthogonal, zentriert und normiert, so ist die Verteilung von $Z_1(h)$ gerade eine zentrale χ^2-Verteilung mit $r - 1$ Freiheitsgraden.

Für die Gleichverteilung folgt aus dem kolmogoroffschen Resultat ($\mathscr{L}(\sqrt{n}(F_n - F)) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{L}(W^0)$) und Satz 1.2, daß $n^{m/2} \int \ldots \int h(x_1, \ldots, x_m) \prod_{i=1}^{m} d(F_n - F)(x_i)$ schwach gegen $Z_1(h)$ für jede Treppenfunktion h konvergiert. Benutzt man nun noch die fast triviale Abschätzung

$$E(\int \ldots \int h(x_1, \ldots, x_m) \prod_{i=1}^{m} d(F_n - F)(x_i))^2 \leqslant C\|h\|^2,$$

so erhält man mittels 1.1 die schwache Konvergenz für jedes $h \in H$. Für beliebiges F und $h \in H(F)$ konstruiert man leicht eine Funktion $\hat{h} \in H$, so daß die Prozesse $(n^{m/2} V_n(h))_{n \geqslant 1}$ und $(n^{m/2} V_n(\hat{h}))_{n \geqslant 1}$ dieselbe Verteilung besitzen. Man erhält damit Filippovas Resultat ([60[) (cf. von Mises [113] für m = 2).

Satz 3.1 *Für alle* $h \in H(F)$ *konvergiert* $n^{1/2m} V_n(h)$ *schwach gegen* $Z_1(\hat{h})$.

Man wird natürlich sofort versuchen, Satz 1.3 anstelle des kolmogoroffschen Resultates in voller Allgemeinheit anzuwenden. $Z_t(h)$ ($h \in H$) ist ebenso wie $Z_1(h)$ für beliebiges $0 \leqslant t \leqslant 1$ wohldefiniert, wenn man die Brownsche Brücke durch den Prozeß $K(t, \cdot)$ ersetzt. Für Treppenfunktionen h besitzt dann der Prozeß $(Z_t(h))_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ eine Verteilung, die auf C[0, 1] konzentriert ist, d. h. $(Z_t(h))$ besitzt stetige Pfade. Die Abschätzung der zweiten Momente kann man durch

$$P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |Z_t(h)| \geqslant \epsilon) \leqslant C\epsilon^{-2} \|h\|^2 \quad (\epsilon > 0)$$

ersetzen und wie gehabt vorgehen. Es empfiehlt sich, dies sogleich mit mehreren Stichproben durchzuführen.

Betrachten wir also K Verteilungsfunktionen $F^{(1)}, \ldots, F^{(K)}$, $0 \leqslant m_k$ $(1 \leqslant k \leqslant K)$, $m = \sum m_k$ und bilden das verallgemeinerte v. Mises-Funktional $V_N(h)$ wie im Anschluß an Definition 2.6. Die diesem Funktional zugrunde liegenden Zufallsvariablen seien dabei alle unabhängig. Wir nehmen o. E. an, daß alle Zufallsvariablen reell sind, denn für beliebige Bildräume gibt es einen maßtheoretischen Isomorphismus zu einer Verteilung auf **R**. Den Raum $H(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ und die zugehörige Norm bildet man ganz ähnlich wie im Fall K = 1; bei der Norm summiert man lediglich über alle Zerlegungen α, die die durch die Stichproben induzierte Zerlegung der Koordinatenmenge verfeinern. Sind alle $F^{(i)}$ die Gleichverteilung auf [0, 1], lassen wir wiederum die Indizierung fort. Den bisher betrachteten Kieferprozeß ersetzt man durch K unabhängige Kopien $K_1, \ldots, K_K$ und man kann nun leicht mittels Approximation durch Treppenfunktionen zeigen, daß für $h \in H$

$$Z_t^0(h) = \int \ldots \int h(x_{11}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{Km_K}) \prod_{k=1}^{K} \prod_{i=1}^{m_k} dK_k(t, x_{ki})$$

einen wohldefinierten Prozeß $Z^0(h)$ mit stetigen Pfaden ergibt. Das führt auf den folgenden, von Miller-Sen [111] in einem Spezialfall bewiesenen

Satz 3.2 *Für jedes* $h \in H(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ *existiert ein* $\hat{h} \in H$, *so daß die durch*

$$t \to N^{1/2m} t^m V_{([N_1 t], \ldots, [N_k t])}(h)$$

definierten D_1*-wertigen Zufallsvariable schwach gegen* $\prod_{k=1}^{K} \alpha_k^{1/2m_k} Z^0(\hat{h})$ *konvergieren, wenn die Quotienten* NN_k^{-1} *für* $N \to \infty$ *gegen* $\alpha_k > 0$ $(k = 1, \ldots, K)$ *streben.*

Da die Projektion $\pi_1 f = f(1)$ eine stetige Abbildung auf D_1 ist, erhält man für $K = 1$ die Resultate von Filippova und von Mises zurück. Weiterhin erhält man für $K = 1$, $m = 1$ und $h(x) = x$ das Donskersche D_1-Invarianzprinzip ([53])

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} (X_k - E X_k) \overset{\mathscr{L}}{\to} W$$

wobei $\sigma^2 = \operatorname{Var} X_1$ und für $t = 1$ den zentralen Grenzwertsatz.
Es ist naheliegend, den Zeitparameter t sogleich durch einen K-dimensionalen Vektor zu ersetzen. Für Treppenfunktionen $h \in H$ und $t = (t_1, \ldots, t_K) \in [0, 1]^K$ ist

$$Z_t(h) = \int \ldots \int h(x_{11}, \ldots, x_{Km_K}) \prod_{k=1}^{K} \prod_{i=1}^{m_k} dK_k(t_k, x_{ki})$$

wohldefinierter Prozeß mit stetigen Pfaden; die Erweiterung kann mittels der Abschätzung von $P(\sup_{0 \leqslant t_k \leqslant 1} |Z_t(h)| \geqslant \epsilon)$ erfolgen. Für $K \leqslant 2$ benutzt Neuhaus in [118] ein Resultat von Smythe ([166]) aus dem Jahre 1974 (neben einigen anderen Dingen, die nicht unbedingt notwendig sind.) Tatsächlich empfiehlt es sich, eine Verallgemeinerung einer Martingal-Ungleichung von Doob auf *-Martingale zu verwenden, die auf Cairoli (1970) zurückgeht. Damit entfällt die Restriktion auf $K \leqslant 2$. Man betrachtet auf $\mathbf{N}^K$ die lexikographische Ordnung. Dann heißt eine Familie $(M_k)_{k \in \mathbf{N}^K}$ von Zufallsvariablen ein *-Martingal bzgl. der Familie $(\mathscr{A}_k)_{k \in \mathbf{N}^K}$ von σ-Algebren, falls $\mathscr{A}_k \subset \mathscr{A}_\ell$ $(k \leqslant \ell)$ und $E(M_k | \mathscr{A}_\ell) = M_{k \wedge \ell}$ gilt.
Cairolis Ungleichung besagt nun

$$E \max_{k \leqslant n} |M_k|^p \leqslant (p/(1-p))^{Kp} E |M_n|^p \qquad (p > 1, K \geqslant 1).$$

Mit dieser Ungleichung erhält man ziemlich unmittelbar

Lemma 3.3 *Sei* $T_N(h)$ *die durch*

$$t = (t_1, \ldots, t_K) \to N^{\frac{1}{2}m} \prod_{j=1}^{K} t_j^{m_j} V_{([N_j t_j])_{1 < j < K}}(h) \qquad (N = \sum N_j)$$

definierte D_K*-wertige Zufallsvariable. Dann gibt es für* $0 < \alpha < \beta < 1$ *eine Konstante* C, *so daß für jedes* $h \in H(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$, *jedes* $\epsilon > 0$ *und jedes* N_k *mit* $\alpha \leqslant N N_k^{-1} \leqslant \beta$

$$P(\sup_{t \in [0,1]^K} |T_N(h)(t)| \geqslant \epsilon) \leqslant C\epsilon^{-2} \|h\|^2$$

gilt.

Mit diesem Lemma ist das Problem gelöst: Für Treppenfunktionen $h \in H$ konvergiert $T_N(h)$ schwach gegen $\prod_{k=1}^{K} \alpha_k^{\frac{1}{2}m_k} Z(h)$, und mit dem Portmanteau-Satz gilt eine Abschätzung wie in 3.3 auch für $Z(h)$. Also wird für beliebiges $h \in H$ $Z(h)$ ein wohldefinierter Prozeß mit stetigen Pfaden in $C([0,1]^K)$ und man erhält

Satz 3.4 [48] *Für jedes* $h \in H(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ *existiert ein* $\hat{h} \in H$, *so daß* $T_N(h)$ *schwach gegen* $\prod_{k=1}^{K} \alpha_k^{\frac{1}{2}m_k} Z(\hat{h})$ *in* D_K *konvergiert, wenn* $N_k^{-1} N \to \alpha_k > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant K)$ *und* $N \to \infty$ *gilt.*

Ein Resultat wie im letzten Satz bleibt bestehen, wenn man noch endliche Summen von v. Mises-Funktionalen zuläßt. Diese Beobachtung zusammen mit der auf Hoeffding ([78]) zurückgehenden und von allen Autoren benutzte Projektionsmethode für U-Statistiken, erlaubt es, auch diese Klasse nach der entwickelten Methode zu behandeln. Es seien wiederum K Stichproben mit Verteilungsfunktionen $F^{(1)}, \ldots F^{(K)}$ und $m_k \geqslant 0$, $m = \sum_{k=1}^{K} m_k$ vorgegeben. Man definiert $\hat{H}(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ die Menge aller Funktionen h in m Argumenten, die

$$\int \ldots \int (h(x_{11}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{Km_K}))^2 \prod_{k=1}^{K} \prod_{i=1}^{m_k} dF^{(k)}(x_{ki}) < \infty$$

erfüllen. Dies definiert ebenfalls eine Norm auf $\hat{H}(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$, die mit der auf $H(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ übereinstimmt, wenn h Null ist, sofern mindestens zwei Argumente, die derselben Stichprobe zugeordnet sind, gleich sind. Es bezeichne deshalb $H^0 \subset H$ den Unterraum der soeben beschriebenen Funktionen. Zu jedem $h \in \hat{H}(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ gibt es dann ein $\hat{h} \in H^0$, so daß die Prozesse $(U_N(\hat{h}))$ und $(U_N(h))$ dieselbe Verteilung besitzen. Für $\hat{h} \in H^0$ ist dann $U_N(\hat{h})$ $= \prod_{k=1}^{K} N_k^{m_k} \int \ldots \int \hat{h}(x_{11}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{Km_K}) \prod_{k=1}^{K} \prod_{i=1}^{m_k} F_{N_k}^{(k)}(x_{ki})$, und somit als endliche Summe von v. Mises-Funktionalen darstellbar. Man nennt eine Funktion $h \in \hat{H}(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ $\mathscr{F}$-degeneriert, wobei $\mathscr{F}$ eine Familie von Teilmengen aus $\{(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant K; 1 \leqslant j \leqslant m_i\}$ ist, wenn für jedes $F \in \mathscr{F}$ das Integral von h über die Koordinaten, die nicht zu F gehören, identisch verschwindet. Sei weiterhin $\tilde{\mathscr{F}} = \{\tilde{F} \mid \forall\, F \in \mathscr{F} \text{ ist } \tilde{F} \cap F^c \neq \emptyset\}$, $M' = \min\{|F| \mid F \in \tilde{\mathscr{F}}\}$ und $\mathscr{F}_0 = \{F \in \tilde{\mathscr{F}} \mid |F| = M'\}$. Für eine Teilmenge F von Koordinaten (i, j) $(i = 1, \ldots, K, j = 1, \ldots, m_i)$ sei $E_F h$ diejenige Funktion, die man durch Integration von h über die zu F gehörenden Koordinaten erhält. Nach dem bereits besprochenen, ist $Z(E_{F^c} h)$ $(h \in H)$ ein wohldefinierter Prozeß mit stetigen Pfaden. Mit diesen Bezeichnungen erhält man einen generellen Satz über Invarianzprinzipien für U-Statistiken:

Satz 3.5 [48] *Es sei* $h \in \hat{H}(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)}$ $\mathscr{F}$*-degeneriert. Dann existiert eine Funktion* $\hat{h} \in H^0$, *so daß die durch*

$$t = (t_1, \ldots, t_K) \to \prod_{k=1}^{K} t_k^{m_k} N^{\frac{1}{2}M'} \prod_{k=1}^{K} [t_k N_k]^{-m_k} U_{([N_k t_k])_{1<k<K}}(h)$$

definierten D_K*-wertigen Zufallsvariablen schwach gegen die Zufallsvariable*

$$t = (t_1, \ldots, t_K) \to \sum_{F \in \mathscr{F}_0} \prod_{(i,j) \notin F} t_i \prod_{(i,j) \in F} \alpha_i^{1/2} Z(E_{F^c}\hat{h})$$

konvergieren, sofern $N \to \infty$ *und* $N_k^{-1} N \to \alpha_k > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant K)$ *streben.*

Aus diesem Satz lassen sich eine Reihe von Resultaten ableiten, die in den letzten Jahren bewiesen wurden:

1) Es sei $\mathscr{F} = \{\emptyset\}$. Dann ist $\mathscr{F}_0 = \{\{(i, j)\} \mid 1 \leqslant i \leqslant K,\ 1 \leqslant j \leqslant m_i\}$, und man erhält Konvergenz gegen

$$\sum_{k=1}^{K} \prod_{j \neq k} t_j m_k \alpha_k^{1/2} W_k(t_k)$$

unter zusätzlicher Annahme, daß h symmetrisch in den zu einer Stichprobe gehörenden Argumenten ist. Die Zufallsvariablen W_k sind in dieser Darstellung unabhängige Wienerprozesse.

Dieses Resultat findet sich in der Arbeit von Sen ([153]), eine vereinfachte Form (1-dimensionale Zeit) wurde von Miller und Sen ([111]) bewiesen. Die Normierung in diesen Artikeln wird etwas anders vorgenommen, führt im wesentlichen aber zu dem gleichen Ergebnis. Sen betrachtet in [153] auch den Fall eines von-Mises-Funktionals der Form

$$\int \ldots \int h(x_{11}, \ldots, x_{Km_K}) \prod_{k=1}^{K} \prod_{i=1}^{m_k} dF_{N_k}^{(k)}(x_{ki})$$

mit $h \in H(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ und kommt zu ganz analogen Ergebnissen.
Für $t_k = 1$ $(k = 1, \ldots, K)$ erhält man den zentralen Grenzwertsatz von Lehmann ([98]) für das Mehrstichprobenproblem, der sich im Falle $K = 1$ weiterhin auf den Grenzwertsatz von Hoeffding ([78]) reduziert:

$$\sqrt{N}\, U_N(h) \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0, m^2 \|h\|^2).$$

2) Es sei $K = 1$, $m = 2$ und $\mathscr{F} = \{1, 2\}$. Man erhält – wieder unter Symmetrieannahme – die schwache Konvergenz gegen $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j((W_j(t))^2 - t)$ (Neuhaus [118]).
Dabei sind W_j unabhängige Standard-Wienerprozesse, die man zusammen mit den λ_j folgendermaßen bestimmt: Wenn h symmetrisch ist, ist $Af(x) = \int h(x, y) f(y) dy$ ein Hilbert-Schmidt-Operator. Dann hat h eine Darstellung in H^0 der Form

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(x) f_j(y),$$

wobei die λ_j $(j \in \mathbf{N})$ die Eigenwerte von A bezeichnen und die f_j $(j \in \mathbf{N})$ ein O-N-System von Eigenvektoren bilden. Die Prozesse W_j sind dann durch

$$W_j(t) = \int f_j(x) dK(t, x)$$

gegeben.

3) Wenn $K = 2$, $m_1 = m_2 = 2$ und $\mathscr{F} = \{\{(1,1),(2,1)\},\{(1,2),(2,2)\}\}$ ist, kann man für ein $h \in \hat{H}(F^{(1)}, F^{(2)})$, das

$$h(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = h(x_{12}, x_{11}, x_{22}, x_{21})$$

erfüllt, ähnlich vorgehen und erhält:

$$t_1^2 t_2^2 N \left(\frac{1}{[N_1 t_1]\,[N_2 t_2]}\right)^2 \sum_{\substack{1 \leqslant u \neq v \leqslant [N_1 t_1] \\ 1 \leqslant r \neq s \leqslant [N_2 t_2]}} h(X_u(1), X_v(1), X_r(2), X_s(2))$$

$$\xrightarrow{\mathscr{D}} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \{(t_2 \alpha_1^{1/2} \nu_{1j} W_{1j} + t_1 \alpha_2^{1/2} \nu_{2j} W_{2j})^2 - t_1 t_2 (t_2 \alpha_1 \nu_{1j}^2 + t_1 \alpha_2 \nu_{2j}^2)\}.$$

Hier sind die $\{W_{ij}\}$ unabhängige Standard-Wienerprozesse, $\nu_{1j}^2 = E(\int f_j dF^{(2)})^2$, $\nu_{2j}^2 = E(\int f_j dF^{(1)})^2$. Das Resultat findet sich ebenfalls bei Neuhaus ([118]).

Es gibt mehrere Möglichkeiten, schwache Invarianzprinzipien zu beweisen. Die eine Methode ist bisher beschrieben worden. Auf Grund von Lemma 3.3 sind die Invarianzprinzipien für von-Mises-Funktionale als einfache Folgerung des Invarianzprinzips für den empirischen Prozeß darstellbar. Für U-Statistiken benötigt man zusätzlich die Hoeffdingsche Projektionsmethode, die im Fall $M' = 1$ (vgl. 3.5) schon fast allein genügt, das Invarianzprinzip zu erhalten, denn die Vergleichsstatistik ist in diesem Fall eine endliche Summe von Partialsummenprozessen, für die das Donskersche Invarianzprinzip angewandt werden kann (vgl. Miller und Sen, [111], [153]).

Will man dagegen kein bekanntes Invarianzprinzip benutzen, ist man gezwungen, die schwache Konvergenz mit der üblichen Methode zu beweisen: Die schwache Konvergenz in D_k ist äquivalent zur schwachen Konvergenz der endlich dimensionalen Marginalverteilungen und der Straffheit. Neuhaus benutzt diese Möglichkeit in [118]; der resultierende Beweis wird jedoch ein wenig lang.

Ein weiterer Ansatz geht auf Loynes ([104], [105]) zurück. Eine U-Statistik der Form $\hat{U}_N(h) = \frac{(N-m)!}{N!} U_N(h)$ $(N \geqslant m)$ ist ein Rückwärtsmartingal (Berk [14]):

$$E(\hat{U}_{m+j}(h) \mid \mathscr{F}_n) = \hat{U}_n(h) \qquad (0 \leqslant j \leqslant n-m)$$

mit einer σ-Algebra $\mathscr{F}_n$, die von den Zufallsvariablen $Y_n = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ und X_k für $k \geqslant n$ erzeugt wird (Y_n ist die der Größe nach geordnete Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$). Betrachtet man den Raum

$$D_L := \{f \in D([0,\infty[) \mid \lim_{t \to \infty} t^{-1} f(t) \text{ existiert und ist endlich}\},$$

so gilt folgender Satz von Loynes:

Satz 3.7 ([105]) *Für jedes* $n \in \mathbf{N}$ *sei* X_n *ein* D_L*-wertiges Martingal. Es sei weiterhin vorausgesetzt, daß die endlich dimensionalen Marginalverteilungen von* X_n *schwach gegen die des Wienermaßes* W *auf* $C_L := C([0,\infty[) \cap D_L$ *konvergieren, und daß die folgende Momentenbedingung gilt: Es existieren Konstanten* $\alpha > 0$ *und* $C < \infty$, *so daß für alle genügend großen* $n \in \mathbf{N}$ $E|X_n(t)|^\alpha \leqslant Ct^{1/2\alpha}$ *gilt. Dann folgt*

$$\mathscr{L}(X_n) \xrightarrow{\mathscr{D}} W.$$

Loynes wendet diesen Satz auf die folgenden Prozesse, gebildet aus U-Statistiken, an. Es sei $K = 1$, h $\{\emptyset\}$-degeneriert und symmetrisch, und $E(E_{\{1\}^c}h)^2 > 0$. Man definiert:

$$
\begin{array}{ll}
Y_n^{(1)}(t) = \sigma_n^{-1} U_k(h) & (t = \sigma_k^{-2}\sigma_n^2)\ \sigma_n^2 = \operatorname{Var} U_n(h) \\
Y_n^{(2)}(t) = A^{-1/2} n^{1/2} U_k(h) & (t = n/k)\ A = m^2 \|h\|^2 \\
Y_n^{(3)}(t) = A^{-1/2} n^{1/2} U_k(h) & (t = \sigma_k^{-2}\sigma_n^2) \\
Y_n^{(4)}(t) = \sigma_n^{-1} U_k(h) & (t = n/k)
\end{array}
$$

für $k \geqslant m$ und setzt $Y_n^{(i)}$ konstant auf den durch obige Vorschrift definierten links abgeschlossenen Intervallen, insbesonders also auch auf den Intervallen $[n/m, \infty[$ bzw. $[\sigma_n^2/\sigma_m^2, \infty[$. Die Voraussetzungen von 3.7 sind leicht nachprüfbar und man erhält so

Satz 3.8 [105] *Für jedes* $i = 1, \ldots, 4$ *gilt* $\mathscr{L}(Y_n^{(i)}) \overset{\mathscr{D}}{\to} W$ (in D_L). *Durch* $hf(t) = tf(t^{-1}+)$ $(t > 0)$, $hf(0) = \lim\limits_{t \to \infty} t^{-1} f(t)$ *wird eine Isometrie* h *von* D_L *definiert, deren Einschränkung auf* C_L *ebenfalls eine Isometrie ist. Es gilt weiterhin*

$$\mathscr{L}(h\, Y_n^{(i)}) \overset{\mathscr{D}}{\to} W \quad (\text{in } D_L).$$

Die behauptete Isometrie findet man für C_L schon in [114]. Die zweite Konvergenzaussage folgt mittels 1.2 und der wohlbekannten Tatsache, daß mit dem Standard-Wienerprozeß W auch $t^{-1}W(t)$ den Standard-Wienerprozeß darstellt.
Für $i = 1$ wurde das Ergebnis $Y_n^{(1)} \overset{\mathscr{D}}{\to} W$ von Loynes ([104]), 1970 bewiesen, für $i = 2$ liefert $h\, Y_n^{(2)} \overset{\mathscr{D}}{\to} W$ das Resultat von Miller und Sen [111]. Ebenso erhält man aus 3.7 übrigens das Invarianzprinzip 1.3 für den empirischen Prozeß.
Bemerkenswert an dieser Betrachtungsweise ist folgendes: Es werden zugleich Invarianzprinzipien erhalten, die durch Bildung des üblichen Partialsummenprozesses aus $U_m, U_{m+1}, \ldots, U_n$ charakterisiert sind, als auch solche, die die „tails" $U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, \ldots$ benutzen. Sätze der letzten Art finden sich noch in den Arbeiten von Sen und Neuhaus ([118], [119], [153]). Speziell ist auch Satz 1.4 von diesem Typ, und in Analogie zur Filippovaschen Methode ist zu vermuten, daß ein analoger Schluß ausgehend von Satz 1.4 möglich ist. Die Resultate von Neuhaus und Sen benutzen wiederum einen mehrdimensionalen Zeitparameter, und behandeln teilweise den nichtdegenerierten Fall ($\mathscr{F} \neq \{0\}$). Es wäre jedoch interessant zu wissen, ob die Resultate von Loynes allgemeiner gelten.

Satz 3.9 (Sen [153]) *Es sei* $h \in \hat{H}(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ *symmetrisch und*

$$r^2(N) = \operatorname{Var}\left[\left(\prod_{k=1}^{K} \binom{N_k}{m_k}^{-1} \frac{1}{m_k!}\right) U_N(h)\right] \qquad (N = (N_1, \ldots, N_K)).$$

Falls $NN_k^{-1} \to \alpha_k > 0$ *und* $\sigma_k^2 := m_k^2\, E(E_{\{k,1\}^c}h)^2 > 0$ *für alle* $k = 1, \ldots, K$ *gelten, so konvergieren die* D_K*-wertigen Zufallsvariablen*

$$t = (t_1, \ldots, t_K) \to r^{-1}(N)\left(\prod_{k=1}^{K} \binom{[N_k t_k^{-1}]}{m_k} U_{([N_1 t_1^{-1}], \ldots, [N_K t_K^{-1}])}(h) - Eh\right)$$

schwach gegen einen Prozeß Y, *der durch*

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{K} \sigma_k \alpha_k^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{K} \sigma_j^2 \alpha_j \right)^{-1/2} W_k(t_k)$$

erklärt ist. Dabei bezeichnen die Prozesse W_k $(k = 1, \ldots, K)$ *unabhängige Standard-Wienerprozesse.*

Ein ähnliches Resultat wird von Sen für Funktionen $h \in H(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ für von-Mises-Funktionale gezeigt (vgl. Satz 3.5, 1. Anmerkung). Für den folgenden Satz bezeichne $[x]$ die kleinste ganze Zahl $\geqslant x$.

Satz 3.10 (Neuhaus [118]) *Es sei* $m_1 = m_2 = 2$, $h \in H(F^{(1)}, F^{(2)})$ *symmetrisch und*

$$U_N^0 = \{N_1 N_2 N^{-1} ([N_1 t_1^{-1}] [N_2 t_2^{-1}])^{-2}\} \; U_{([N_1 t_1^{-1}], [N_2 t_2^{-1}])}(h).$$

Ist h $\mathscr{F}$*-degeneriert mit* $\mathscr{F}$ *wie in* Anmerkung 3 *zu* 3.5, *so konvergieren für* $N_k N^{-1} \to \alpha_k > 0$ $(k = 1, 2)$ *die* D_2*-wertigen Zufallsvariablen* U_N^0 *schwach gegen einen Prozeß* Y, *definiert durch*

$$Y(t_1, t_2) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \lambda_\sigma \{(a_\sigma W_{1\sigma}(t_1) + b_\sigma W_{2\sigma}(t_2))^2 - (a_\sigma^2 t_1 + b_\sigma^2 t_2)\}.$$

Die Prozesse W_{ij} $(i = 1, 2, j \in \mathbf{N})$ bezeichnen wiederum unabhängige Standard-Wienerprozesse, $h(x, y) = \Sigma\, \lambda_\sigma f_\sigma(x) f_\sigma(y)$ die Hilbert-Schmidt-Operator-Darstellung von h und $a_\sigma^2 = \alpha_2\, E(E_{\{f\}} f_\sigma)^2$, $b_\sigma^2 = \alpha_1\, E(E_{\{1\}} f_\sigma)^2$.
Eine letzte Methode zum Beweis von schwachen Invarianzprinzipien bleibt zu besprechen. Sie benutzt fast sichere Invarianzprinzipien. Ist nämlich die Approximationsgüte besser als $\sqrt{n}$, so folgt das gewünschte Resultat unmittelbar. Wie man aber schon im Fall $K = 1$, $m = 1$ sehen kann, erreicht man eine solche Approximationsgeschwindigkeit nicht allgemein; die Existenz höherer Momente als das zweite ist meistens notwendig.
Für nichtdegenerierte U-Statistiken findet man ein fast sicheres Invarianzprinzip in [155] bewiesen. Es sei $K = 1$ und $h \in \hat{H}(F)$ symmetrisch. Die Brownsche Bewegung auf $C([0, \infty[)$ sei mit $(B(t))_{0 \leqslant t < \infty}$ bezeichnet. Man betrachtet nun einerseits den Partialsummenprozeß $S(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ mit

$$S(k) = k\, A^{-1} \frac{(k-m)!}{k!} U_k(h) \qquad (A^2 = m\, E(E_{\{1\}^c} h)^2 > 0, Eh = 0)$$

und $S(t) = S(k)$ $(k \leqslant t < k + 1)$, andererseits Funktionen $f : [0, \infty[\to R_+$, die strikt monoton wachsend in t sind, für die aber $t^{-1} f(t)$ strikt monoton fallend ist und die

$$\sum_{n \geqslant 1} [f(cn)]^{-1} E[(E_{\{1\}^c} h)^2\, 1_{\{E_{\{1\}^c} h > \sqrt{f(cn)}\}}] < \infty$$

für jedes $c > 0$ erfüllen. Es gilt unter diesen Annahmen

Satz 3.11 ([155]) *Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem ein Prozeß* $\tilde{S}(t)$ *zusammen mit der Brownschen Bewegung definiert werden kann, so daß* $\mathscr{L}((S(t))_{0 \leqslant t < \infty}) = \mathscr{L}((\tilde{S}(t))_{0 \leqslant t < \infty})$ *und*

$$|\tilde{S}(t) - B(t)| = O(\sqrt{t\,f(t)}\log t) \text{ f.s.}$$

gelten.

Setzt man z. B. für den Kern $h \in H(F)$ $E|h(X_1, \ldots, X_m)|^{2+\delta} < \infty$ für ein $\delta > 0$ voraus, kann f so gewählt werden, daß $t\,f(t) \geqslant t^{1+\epsilon}$ für ein $\epsilon > 0$ gilt. Damit wird in 3.11 die Approximation so gut, daß das Invarianzprinzip von Miller-Sen [111] unmittelbar ableitbar wird. Des weiteren ist 3.11 anwendbar bei sequentiellen Verfahren, dem Satz vom iterierten Logarithmus und beispielsweise der Bestimmung der asymptotischen Verteilung von $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} U_k(h)$ (vgl. [155]).

Während Sen für den Satz 3.11 ein fast sicheres Invarianzprinzip für den Partialsummenprozeß in der klassischen Form von Straßen verwendet, gibt es aber zumindest Ansätze dafür, weiterführende Resultate wie das fast sichere Invarianzprinzip für empirische Prozesse ([44], [92] u. a.) zu verwenden und dabei ebenso kanonisch vorzugehen, wie zu Anfang dieses Abschnittes beschrieben. Für Kolmogoroff-Smirnoff- und Cramér-von-Mises-Statistiken findet man dieses in der Arbeit von Burke ([33]) durchgeführt. Er betrachtet u. a. Statistiken der Form

$$S_N(X) = \sum_{k=1}^{K} N_k[F_{N_k}^{(k)}(x) - \bar{F}_N(x)]^2 \text{ mit } \bar{F}_N(x) = \sum_{k=1}^{K} N_k F_{N_k}^{(k)}(x) / \sum_{j=1}^{K} N_j$$

($N = (N_1, \ldots, N_K)$), und zeigt (unter gewissen Voraussetzungen, die etwas langwierig zu beschreiben sind), daß S_N von einer endlichen Linearkombination von Quadraten unabhängiger Brownscher Brücken einen Supremumsabstand der Größenordnung $N^{-1/4} (\log N)^{3/2}$ ($N = \sum N_k$) besitzt. Hieraus folgt ebenfalls die schwache Konvergenz unmittelbar.

Während Loynes mit seiner Betrachtungsweise 1978 einen generellen Gesichtspunkt für die Betrachtung der Partialsummenprozesse gebildet aus $U_m, \ldots, U_n$ und $U_n, U_{n+1}, \ldots$ einführt, hat Hall ([75]) 1979 ein Invarianzprinzip bewiesen, das die Anmerkungen 1) und 3) nach Satz 3.5 zusammenfaßt.

Sei zunächst $K = 1$, $m = 2$ und h eine symmetrische Funktion in $\hat{H}(F)$ mit $E\,h(X_1 X_2) = 0$. Die Projektion der U-Statistik $U_N(h)$ ist gerade $S_N(h) = 2(n-1) \sum_{i=1}^{N} (E_{\{2\}}h)(X_i)$. Sei $h(x, y) = \sum \lambda_j f_j(x) f_j(y)$ die $L_2(F \times F)$-Darstellung von h, und $\sum$ die Kovarianzmatrix von

$$(E_{\{2\}}h; f_1(X_1) - Ef_1(X_1), \ldots,),$$

die natürlich positiv semidefiniert ist. Dann existiert eine untere Dreiecksmatrix $\sum_0$ mit $\sum_0 \sum_0^T = \sum$. Seien $W_0 W_1, \ldots$ unabhängige Standard-Wienerprozesse und

$$V = (V_0 V_1, \ldots) = \textstyle\sum_0 W \; (W = (W_0 W_1, \ldots)),\; Y_n(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [W_i(t)^2 - t(1 - (E\,f_i X_1)^2)].$$

Hall zeigt, daß Y_n stochastisch gegen einen Prozeß Y konvergiert. Die Zufallsvariable (V_0, Y) (mit Pfaden in $D_1 \times D_1$) bestimmt nun die Limesverteilung im

Satz 3.12 [75] *Die $D_1 \times D_1$-wertigen Zufallsvariablen (ξ_N, η_N), definiert durch*

$$\xi_N(t) = \frac{1}{2} N^{-3/2} t^{-1} U_{[Nt]}(h)$$

und $\eta_N(t) = N^{-1}(U_{[Nt]}(h) - S_{[Nt]}(h))$,

konvergieren schwach gegen (V_0, Y) *(in* $D_1 \times D_1$ *mit der Produkt-Skorohod-Topologie).*

Für $E_{\{2\}}h \equiv 0$ ist $V_0 = 0$ und somit $S_N(h) = 0$, das ergibt das Resultat von Neuhaus. Für 2 und insbesondere für K-Stichproben findet man das entsprechende Resultat ebenfalls in [75]. Die Darstellung des Limesprozesses Y wird jedoch sehr kompliziert, weshalb an dieser Stelle darauf verzichtet wird.

Satz 3.13 (Hall [75]) *Es sei* $K = m_1 = m_2 = 2$ *und* $h \in \hat{H}(F^{(1)}, F^{(2)})$ *symmetrisch. Man definiere Zufallsvariable*

$$\xi_{(N_1,N_2)}(t_1, t_2) = \frac{1}{4} N_1^{-2} N_2^{-2} N^{1/2} U_{([N_1t_1], [N_2t_2])}(h)$$

und $$\eta_{(N_1,N_2)}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} N_1^{-1} N_2^{-1} N^{-1} (U_{([N_1t_1], [N_2t_2])}(h) - N(N-1)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{[N_1t_1]} E_{\{1\}^c}h(X_i)1) + \sum_{j=1}^{[N_2t_2]} E_{\{2\}^c}h(X_j(2)) \right).$$

Dann konvergieren die $D_2 \times D_2$*-wertigen Zufallsvariablen* $(\xi_{(N_1,N_2)}, \eta_{(N_1,N_2)})$ *schwach gegen einen Prozeß* (V_0, Y), *der ähnlich wie für* 3.12 *erhalten wird.*

Eine letzte Verallgemeinerung sei schließlich noch besprochen. Gregory betrachtet in [71] U-Statistiken und von-Mises-Funktionale unter benachbarten Alternativen (vgl. [74]); vornehmlich untersucht er ihre Anwendung auf Anpassungstests; ein Grenzwertsatz wird aber ebenfalls bewiesen. Insbesondere findet man in dieser Arbeit für spezielle h die Berechnung der öfters angesprochenen Zerlegung von Kernen mittels der Darstellung über den zugehörigen Hilbert-Schmidt-Operator. Mit der Methode von Filippova kann man leicht einen Satz unter benachbarten Alternativen erhalten. Es seien K, $m_k = 2$, $m = 2K$, $\alpha_k = \lim N N_k^{-1}$ fest vorgegeben. für jedes $N \in \mathbf{N}$ seien K unabhängige Prozesse $(X_\ell^N(k))_{1 \leq \ell \leq N_k}$ $(k = 1, \ldots, K)$ unabhängiger Zufallsvariabler mit Verteilungsfunktion $F^{(k,N)}$ gegeben. Für festes $1 \leqslant k \leqslant K$ sei vorausgesetzt, daß die Verteilungen $F^{(k,N)}$ durch eine Verteilung $F^{(k)}$ dominiert seien; die Radon-Nikodym-Ableitung $\frac{dF^{(k,N)}}{dF^{(k)}}$ sei mit $\varphi_{k,N}$ bezeichnet. Sei weiterhin $h \in \hat{H}(F^{(1)}, \ldots, F^{(K)})$ $\mathscr{I}$-degeneriert mit $\mathscr{I} = \{\{1, 3, 5, \ldots, 2K-1\}, \{2, 4, 6, \ldots, 2K\}\}$ und symmetrisch im Sinne von

$$h(x_{11}, x_{12}, x_{21}, \ldots, x_{K2}) = h(x_{12}, x_{11}, x_{22}, x_{21}, \ldots, x_{K1}).$$

Dann existiert wiederum die Darstellung

$$h(x, y) = \sum \lambda_j f_j(x) f_j(y) \text{ in } L_2(F^{(1)} \times \ldots \times F^{(K)})$$

über den assoziierten Hilbert-Schmidt-Operator; man setzt nun $a_{kj}^2 = \int (E_{\{k1\}^c}h)^2 \, dF^{(k)}$.

Satz 3.14 [48] *Für* $g_{k,N} = \sqrt{N}(\varphi_{k,N} - 1)$ *existiere*

$\lim g_{k,N} = g_k$ *in* $L_2(F^{(1)} \times \ldots \times F^{(K)})$.

Es seien W_{kj} $(k = 1, \ldots, K, j \in \mathbf{N})$ *unabhängige Standard-Wiener-Prozesse auf* $C[0, 1])$ *und* $b_{kj} = \int f_j g_k \, dF^{(1)} \times \ldots \times F^{(K)}$. *Dann konvergieren die* D_K*-wertigen Prozesse, definiert durch*

$$t \to \prod_{k=1}^{K} t_k^2 N \prod_{k=1}^{K} [t_k N_k]^{-2} \sum_{\substack{1 \leq t_i \neq s_i \leq [N_i t_i] \\ i = 1, \ldots, K}} h(X_{t_1}^N(1), X_{s_1}^N(1), \ldots, X_{t_K}^N(K), X_{s_K}^N(K))$$

schwach in D_K *gegen die Verteilung eines Prozesses* Y, *der durch*

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left[\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k^{1/2} \prod_{\ell \neq k} t_\ell (a_{kj} W_{kj}(t_k) - b_{kj})^2 \right. \right.$$
$$\left. \left. - \prod_{k=1}^{K} t_k \left(\sum_{\ell=1}^{K} a_{\ell j}^2 \alpha_\ell \prod_{i \neq \ell} t_i \right) \right) \right]$$

erklärt ist.

Gregorys Resultat folgt durch Spezialisierung auf K = 1 und t = 1 ([71]). Sind alle Prozesse $X_j^N(k)$ unabhängig von N, d. h. ist $\varphi_{k,N} \equiv 1$, so erhält man gerade eine Spezialaussage von Satz 3.5.

4 Verteilungstheorie für abhängige Zufallsvariable

Die ersten Anfänge, asymptotische Verteilungen von Statistiken bei abhängigen Beobachtungen zu untersuchen, datieren zumindest bis auf das Jahr 1948 zurück, wenn man einmal von den Permutationsstatistiken absieht ([79], [62]). Man untersuchte zunächst m-abhängige Prozesse und Markoffketten, bzw. -prozesse, und begründete die Untersuchungen vornehmlich wahrscheinlichkeitstheoretisch. In dem Buch von Grenander und Rosenblatt ([72], S. 181) über Zeitreihen findet man jedoch eine weitergehende Begründung für solche Untersuchungen:
"The experimentalist would argue that in most physically realizeable situations where a stationary process has been observed during a time interval long compared to time lags for which correlation is appreciable, the average of the sample would be asymptotically normally distributed. Intuitively it seems likely that a strong mixing condition (see Hopf [84] and Rosenblatt [134]) would insure the validity of the central limit theorem. Unfortunately, none of the extensions of the central limit theorem to dependent variables seems to answer this problem in terms well adapted for practical interpretation."
Ein brauchbares Konzept in diesem Sinne wurde in den letzten beiden Jahrzehnten von verschiedenen Autoren entwickelt (Rosenblatt [118], Ibragimov [89], (siehe auch [87] und [88]) und Ornstein [125], um nur einige zu nennen). Man bezeichnet diese Klasse von Prozessen als schwach abhängig und unterscheidet nach folgender Definition

Definition 4.1 *Es sei* (X_n) $(n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *oder* $n \in \mathbf{Z})$ *ein Prozeß, und es bezeichne* $\mathscr{F}_s^t$ *die σ-Algebra, die von den Zufallsvariablen* X_n *mit* $s \leq n \leq t$ *erzeugt werden.*

a) (X_n) *heißt gleichmäßig mischend (φ-mischend), falls die Folge*

$$\varphi(n) := \sup\{|P(B\,|\,A) - P(B)|\,|\,A \in \mathscr{F}^t_{-\infty}, B \in \mathscr{F}^\infty_{t+n}, t \in \mathbf{Z}\}$$

gegen Null strebt. ([89])

b) $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *heißt zweiseitig gleichmäßig (φ-)mischend, falls der Prozeß* (X_n) *und seine Zeitumkehr φ-mischend sind.* ([49]) *Den Koeffizienten bezeichnen wir mit* $\varphi^*(n)$.

c) (X_n) *heißt absolut regulär (β-mischend), falls*

$$\beta(n) = E(\sup_{B\in\mathscr{F}^\infty_{t+n}, t\in\mathbf{Z}} |P(B\,|\,\mathscr{F}^t_{-\infty}) - P(B)|)$$

gegen Null strebt. ([87])

d) (X_n) *heißt stark mischend (α-mischend), falls*

$$\alpha(n) = \sup\{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|\,|\,A \in \mathscr{F}^t_{-\infty}, B \in \mathscr{F}^\infty_{t+n}\ t \in \mathbf{Z}\}$$

gegen Null strebt ([118]).

Es gelten die Implikationen b) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d). Die Umkehrungen gelten i. a. nicht ([88], [28]). Markoffketten erfüllen b), wenn sie aperiodisch sind.
Von spezieller Bedeutung erweist sich c). Ornstein (cf. [125]) führte den Begriff der schwachen Bernoullieigenschaft für dynamische Systeme $(\Omega, \mathscr{F}, P, T)$ (einer invertierbaren, maßtreuen Abbildung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum) ein, der – stochastisch gesehen – äquivalent zur absoluten Regularität ist.

Definition 4.2 *Eine meßbare Zerlegung* $\alpha = \{A_1, A_2, \ldots\}$ *von Ω heißt schwach Bernoulli, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbf{N}$ derart existiert, daß für alle* $m \geqslant 1$ $\bigvee_{-m}^{0} T^i\alpha$ *ϵ-unabhängig von* $\bigvee_{N}^{N+m} T^i\alpha$ *ist. Dabei heißt eine Zerlegung β ϵ-unabhängig von der Zerlegung γ, wenn es eine Familie von Atomen $\mathscr{E} \subset \gamma$ mit* $P(\mathscr{E}) > 1 - \epsilon$ *und* $\sum_{B\in\beta} |\frac{P(B \cap C)}{P(C)} - P(B)| \leqslant \epsilon$ *für alle* $C \in \mathscr{E}$ *gibt. Man sagt sodann,* T *besitze die schwache Bernoullieigenschaft, falls eine schwache Bernoulli-Zerlegung existiert.*

Das Problem des Nachweises dieser Eigenschaft bei speziellen Systemen erweist sich als ein schwieriges Problem, ist aber in einigen Fällen gelöst: Die folgenden Systeme sind schwach Bernoulli und damit absolut regulär:

1) Jeder unabhängige Prozeß mit diskretem Zustandsraum und jeder dazu isomorphe Prozeß, insbesondere jede aperiodische Markoffkette. ([125])

2) Jeder hyperbolische Automorphismus auf einer kompakten Mannigfaltigkeit, speziell jeder hyperbolische Automorphismus auf dem Torus ([27], [10]).

3) Das Sinai-Billiard und abgeleitete Systeme ([95], [66], [160], [161], [162]).

4) Transformationen $T : [0, 1] \to [0, 1]$, die der Hofbauer-Keller-Bedingung genügen ([82]), speziell der Lasota-Yorke-Bedingung [97], wenn sie schwach mischend sind.

Nebenbei bemerkt, haben fast alle dieser Systeme als Modell ihre spezielle Bedeutung in verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen: Physik, Biologie, Ökonomie,

Medizin, Ökologie (z. B. als Populationsmodelle; bei Krankheitsabläufen wie haemolytischer Anämie; Preis-Nachfrage-Modelle in der Ökonomie; die sog. Lorenz-Formulierung eines meteorologischen Problems, bei dem die vertikale Konvektion einer Flüssigkeit mit großer Prandtlzahl untersucht wird).
Auf den ersten Blick scheint es ein Paradoxon zu sein, auf Systeme, die durch deterministische Abbildungen oder Differentialgleichungen beschrieben werden, statistische Verfahren anzuwenden. Es ist jedoch zweierlei zu bedenken. Auch wenn ein System deterministisch gesteuert wird, kann das Erscheinungsbild so chaotisch werden, daß eine stochastische Beschreibung am sinnvollsten ist. Umgekehrt, kann ein unabhängiger Prozeß stets durch eine deterministische Abbildung beschrieben werden (z. B. ist für $Tx = 2x \bmod 1$ $0 \leqslant x \leqslant 1$ die Folge $1_{[0,1/2]} \circ T^n$ unabhängig).
Statistische Untersuchungen für schwach abhängige Prozesse erschienen seit den 60er Jahren ([102], [110], [120], [142], [145], [170], [184], [190]). Die Ergebnisse, die U-Statistiken und v. Mises-Funktionale betreffen, sollen nun zum Abschluß kurz dargestellt werden. Es ist nicht möglich, eine einheitliche Darstellung wie im unabhängigen Fall zu geben. Das liegt vor allem an unterschiedlichen Mischungsraten und Momentenbedingungen, die gemacht werden können. Die Verteilungstheorie von U-Statistiken und v. Mises-Funktionalen hängt vor allem von guten Abschätzungen der zweiten Momente ab. Im unabhängigen Fall sind diese sehr einfach zu berechnen. Im schwach abhängigen Fall sind z. T. sehr feine und diffizile Abschätzungen notwendig.
In Abschnitt 3 spielte die Anzahl der Stichproben eine wesentliche Rolle. Im schwach abhängigen Fall ist jedoch die Theorie erst so weit entwickelt, daß diese Anzahl praktisch keine Rolle spielt. Deshalb soll der Einfachheit halber nur der Einstichprobenfall dargestellt werden. Für einen Prozeß $(X_n)_{n \geqslant 1}$ sei die Bedingung $\sigma_{\Delta,\delta}$ wie folgt definiert:

$$(\sigma_{\Delta,\delta}) : \sup_{t \in \Delta} E[\,|h(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})|^{2+\delta}\,]^{\frac{1}{2+\delta}} < \infty \text{ für } \Delta \subset \mathbf{N}^m \text{ und } \delta \geqslant 0.$$

Seien $\Delta_1 = \{t \in \mathbf{N}^m \mid t_i \neq t_j \ \forall\, i \neq j\}$, $\Delta_2 = \mathbf{N}^m$.

Satz 4.3 [49] *Sei* $(X_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ *ein stationärer Prozeß mit Werten in* E, $h : E^m \to \mathbf{R}$. *Es sei* $Eh = 0$ *und* h *symmetrisch und nicht degeneriert, d. h.* $E(E_{\{1\}^c}h)^2 > 0$. *Dann konvergiert die Folge* $\frac{N}{m\sigma_N} \frac{(N-m)!}{N!} U_N(h)$ *schwach gegen die Standard-Normalverteilung unter einer der folgenden Bedingungen*:

a) $(\sigma_{\Delta_1,\delta})$ *für ein* $\delta > 0$, $\sigma_N^2 \to \infty$ *und* 4.1b)
b) $(\sigma_{\Delta_1,0})$, 4.1b), $\sum \varphi^*(n) < \infty$ *und* $\sigma^2 \neq 0$
c) $(\sigma_{\Delta_1,\delta})$ *für ein* $\delta > 0$, 4.1c), $\sum \beta^{\delta/(2+\delta)}(n) < \infty$ *und* $\sigma^2 \neq 0$.

Dabei ist

$$\sigma_N^2 = E\left[\left(\sum_{t=1}^{N} E_{\{1\}^c}h(X_t)\right)^2\right]$$

und $$\sigma^2 = E[E_{\{1\}^c}h(X_1)]^2 + 2\sum_{t=2}^{\infty} E[E_{\{1\}^c}h(X_1) \cdot E_{\{1\}^c}h(X_t)].$$

Die gleiche Aussage, $\frac{N}{m\sigma_N} V_N(h) \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0, 1)$, gilt für v. Mises-Funktionale, $V_N(h) = N^{-m} \sum_{1 \leq t_i \leq N} h(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_m})$, wenn in a) – c) Δ_1 durch Δ_2 ersetzt wird. Unter der Bedingung a) ist $N^{-1}\sigma_N^2$ eine langsam variierende Funktion, und σ^2 in b) und c) existiert stets (diese Reihe ist absolut konvergent ([88]).

Man ist bei 4.3 nicht auf die Stationaritätsbedingung angewiesen. Man benötigt dann jedoch eine stärkere $(\sigma_{\Delta,\delta})$-Bedingung und eine weitere Zusatzeigenschaft. Die Ausdehnung auf K Stichproben ist ebenfalls möglich, aber recht kompliziert darzustellen ([49]). Dabei können die Stichproben untereinander Abhängigkeitsstrukturen aufweisen. Sen ([152] hat 4.3 für Prozesse bewiesen, die einer stärkeren Mischungsbedingung (der *-Mischung [21]) und stärkeren Bedingungen an die Mischungskoeffizienten genügen. Für absolut reguläre Prozesse (4.3c)) ist das Resultat von Yoshihara ([189]) bewiesen worden. Der unabhängige Fall (Hoeffding) ist mit 4.3b) abgedeckt. Die Grenzwertaussagen für m-abhängige Prozesse in [2], [145], [110] folgen natürlich ebenfalls aus 4.3b). Im schwach mischenden Fall ist so gut wie kein Ergebnis bekannt (wenn man von trivialen Varianzabschätzungen absieht). Zum Beweis der Aussage von 4.3 benutzt man eine Varianzabschätzung, um einen stochastisch äquivalenten Prozeß zu erhalten, auf den dann zentrale Grenzwertsätze von Ibragimov und Rosenblatt ([88]) angewandt werden können. Invarianzprinzipien lassen sich ebenfalls formulieren:

Satz 4.4 *Die Zufallsvariablen* $t \to \sqrt{N} \frac{t}{m\sigma} \frac{([Nt]-m)!}{[Nt]!} U_{[Nt]}(h)$ *konvergieren schwach gegen das Standard-Wienermaß, wenn* $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *ein stationärer Prozeß,* h *eine symmetrische, nicht degenerierte, zentrierte Funktion ist und eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist*:

a) $(\sigma_{\Delta_1,0})$, 4.1b), $\sum \varphi^*(n) < \infty$ *und* $\sigma^2 \neq 0$

b) $(\sigma_{\Delta_1,\delta})$ *für ein* $\delta > 0$, 4.1c), $\beta^{\delta/2+\delta}(n) = O(n^{-(2-\epsilon)})$ *für ein* $\epsilon > 0$ *und* $\sigma^2 \neq 0$.

Für v. Mises-Funktionale gilt eine analoge Aussage, wenn Δ_1 durch Δ_2 ersetzt wird. Im Falle der *-Mischung wurde 4.4 von Sen ([152]) unter stärkeren Bedingungen an die Mischungskoeffizienten und unter der Forderung der Existenz höherer Momente bewiesen. 4.3b) wurde von Yoshihara ([189]) unter stärkeren Voraussetzungen gezeigt (Existenz höherer Momente, stärkere Fallrate der Mischungskoeffizienten). 4.4a) deckt natürlich wiederum den unabhängigen Fall ab (Miller, Sen [111], Sen [153]). Der Beweis von 4.4a) erfolgt mit Theorem 20.1 von Billingsley ([18]), der von 4.4b) benutzt ein Invarianzprinzip von Oodaira, Yoshihara ([123]). Für dynamische Systeme, die schwach Bernoulli sind (mit entsprechender Zelegung α und entsprechendem Mischungskoeffizienten der absoluten Regularität), kann man unter Benutzung der Sätze 4.3 und 4.4 statistische Verfahren entwickeln. Das setzt jedoch voraus, daß die Zerlegung α bekannt ist. Im allgemeinen kann man jedoch darauf nicht hoffen, z. B. wenn T die Anzahl der Individuen nach einer Generation bei einem Populationsmodell mit nichtüberlappenden Generationen bedeutet, besitzt man nur Kenntnis über den Prozeß $T^0, T^1, T^2, \ldots$. Man kann aber in vielen Fällen zeigen, daß $E(T - E(T\,|(\alpha)_{-n}^0))^q$ gegen Null strebt für ein q. $E(T\,|(\alpha)_{-n}^0)$ bezeichnet hier die bedingte Erwartung von T bzgl. der σ-Algebra, die von allen

Mengen in den Zerlegungen $T^{-k}\alpha$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ erzeugt wird; ([27], [31], [82]). Prozesse mit einer solchen Eigenschaft nennt man ein Funktional eines schwach abhängigen Prozesses ([88]), oder ein solches T wird auch als sequentiell bezeichnet ([50]).
In diesem Fall hängen die Grenzwertaussagen stark von der Gestalt der Funktion h ab. Als Beispiel für einen solchen Satz betrachten wir zwei Prozesse
$X_n = f(Z_n^1, Z_{n+1}^2, \ldots), Y_m = g(Z_m^2, Z_{m+1}^2, \ldots)$ $(n, m \in \mathbf{Z})$, wobei

(i) (Z_n^i) $(i = 1, 2)$ zwei absolut reguläre, stationäre Prozesse mit $\beta(n) = 0(n^{-\delta/1-\delta})$ sind, (Z_n^1) unabhängig von (Z_n^2) ist, und der Zustandsraum E kompakt ist.

(ii) $g, f : E^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ Hölder-stetig sind.

Sei F die Verteilung von X_1, G die von Y_1.

Satz 4.5 [49] *Sei* $h : R^{m_1+m_2} \to \mathbf{R}$ *symmetrisch beschränkt, zentriert und von beschränkter* $\prod_{k=1}^{m_1} F \times \prod_{k=1}^{m_2} G$-*Variation im Sinne von* [126]. *Seien* (X_n), (Y_n) *zwei Prozesse, wie in* i) *und* ii) *beschrieben und setze* $h_1 = E_{\{1\}^c}h$, $h_2 = E_{\{m_1+1\}^c}h$. *Dann konvergieren*

$$\sigma_1^2 = E(h_1(X_1))^2 + 2 \sum_{t \geqslant 2} Eh_1(X_1)h_1(X_t)$$

und

$$\sigma_2^2 = E(h_2(Y_1))^2 + 2 \sum_{t \geqslant 2} Eh_2(Y_1)h_2(Y_t)$$

absolut. Falls $\sigma_1^2 > 0$ *oder* $\sigma_2^2 > 0$ *und* $1 > \alpha = \lim \frac{n}{n+m} > 0$, *so konvergieren*

$$\frac{\sqrt{n+m}}{\sigma} \binom{n}{m_1}^{-1} \binom{m}{m_2}^{-1} U_{(n,m)}(h)$$

schwach gegen die Standard-Normalverteilung. Dabei wird $\sigma^2 = \alpha^{-1} m_1^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)^{-1} m_2^2 \sigma_2^2$ *gesetzt.*

Dieser Satz ist gerade so formuliert, um ihn direkt auf dynamische Systeme mit endlicher schwach Bernoulli-Zerlegung anwenden zu können. Die üblicherweise benutzten Statistiken basieren auf Kernen h, die diese Voraussetzung der beschränkten Variation erfüllen (z. B. $h(x, y) = 1_{]0,\infty[}(x + y)$), oder selbst Hölder-stetig sind. Für letztere Kerne läßt sich ein ähnlicher Satz formulieren ([49]).
Bis jetzt wurde nur der nichtdegenerierte Fall behandelt, also der Fall, wenn $E_{\{i\}^c}h$ nicht konstant ist. Für den degenerierten Fall ist bisher so gut wie nichts entwickelt worden. Zunächst einmal bewiesen Berkes, Philipp ([15]) ein f.s. Invarianzprinzip für Funktionale von stark mischenden Prozessen, aus dem folgendes schwache Invarianzprinzip ableitbar ist:
Berkes und Philipp betrachten eine strikt stationäre, stark mischende Folge ξ_n $(n \geqslant 1)$ von reellen Zufallsvariablen und eine Funktion f, die auf dem Raum aller unendlichen Folgen reeller Zahlen definiert ist. Sie setzen sodann

$$\eta_n = f(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots)$$

$$\eta_{nm} = E(\eta_n \mid \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m})) \qquad (n, m \in \mathbf{N}).$$

Für auf [0, 1] gleichförmig verteilte Zufallsvariable η_n ist die Kovarianzfunktion Γ des Prozesses $(\eta_n \mid n \geqslant 1)$ durch

$$\Gamma(s, s') = E(g_1(s)g_1(s')) + \sum_{n=2}^{\infty} E(g_1(s)g_n(s') + g_1(s')g_n(s)) \qquad (0 \leqslant s, s' \leqslant 1)$$

und $\quad g_n(s) = 1_{[0,s]}(\eta_n) - s$

definiert.

Satz 4.6 ([15]) *Es gelte* $\alpha(n) = O(n^{-8})$ *und* $E|\eta_n - \eta_{nm}| = O(m^{-12})$, η_1 *sei auf* $[0, 1]$ *gleichförmig verteilt und* Γ *positiv definit. Dann konvergiert die Folge* $N^{1/2}\, t(F_{[Nt]}(s) - s)$ $(0 \leqslant s, t \leqslant 1)$, *gebildet aus dem empirischen Prozeß von* (η_n), *schwach gegen einen (verallgemeinerten) Kieferprozeß* K *mit Kovarianz*

$$E\, K(t, s)K(t', s') = \min(t, t')\Gamma(s, s') \qquad (0 \leqslant s, s', t, t' \leqslant 1).$$

Für $t = 1$ erhält man die schwache Konvergenz von $N^{1/2}(F_N(s) - s)$ gegen eine (verallgemeinerte) Brownsche Brücke $K(1, \cdot)$ mit Kovarinzfunktion Γ. Für φ-mischende Zufallsvariable (η_n) wurde ein solches Resultat von Sen ([154]) und Yoshihara ([191]) gezeigt. Yoshiharas Resultat benötigt $\varphi(n) = O(n^{-1-\delta})$ für ein $\delta > 0$ und ist wesentlich schärfer als Sens Bedingung, natürlich auch besser als 4.6 im gleichmäßig mischenden Fall.

Das Hauptproblem besteht nun darin, ein stochastisches Integral in Analogie zum unabhängigen Fall zu entwickeln. Es ist unmittelbar einzusehen (z. B. aus 4.3, 4.4, 4.5), daß ein enger Zusammenhang zwischen den existierenden Momenten eines Kernes h und der Mischungsbedingung des Prozesses bestehen muß, damit ein solches Integral wohldefiniert werden kann. Der Fall $K = 1$, $m = 2$ ist relativ einfach zu überschauen. Für Treppenfunktionen h definiert man $Z_1(h)$ ebenso wie zu Anfang des Abschnittes 3, wobei man allerdings die Brownsche Brücke durch den in Satz 4.6 (bzw. in [191]) auftretenden Prozeß ersetzen muß. Die Norm muß folgendermaßen abgeändert werden:

$$\|h\|^{2+\delta} = \sup\{E|h_\alpha(X_{t_1}, \ldots, t_r)|^{2+\delta}\ \alpha \text{ Zerlegung } t_j \in \mathbf{Z},\ t_i \neq t_j\}$$

für ein passendes $\delta > 0$. Will man nur beschränkte Kerne zulassen, müßten entsprechend die ∞-Normen herangezogen werden. Es gilt dann sicherlich

Satz 4.7 *Für Treppenfunktionen gilt* $E\, Z_1(h)^2 \leqslant C\|h\|^2$ *falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist*:

a) $\delta = 0$, 4.1a) *mit* $\sum_n n\, \Phi^{1/2}(n) < \infty$

b) $\delta > 0$, 4.1c) *mit* $\sum_n n\, \beta^{\delta/2+\delta}(n) < \infty$

c) (X_n) *ist ein Funktional eines absolut regulären Prozesses mit den Eigenschaften von* Satz 4.5, *sowie* $\beta(n) = O(n^{-8})$, *und* h *ist eine beschränkte Funktion mit beschränkter Variation.*

Die Fälle $m > 2$ oder $K > 1$ sind nicht untersucht worden, ebensowenig ist bis jetzt in keinem Fall der Prozeß Z(h) verallgemeinert worden. Die Auswertung von Satz 4.7 ist ebenfalls noch nicht vorgenommen worden; ein Resultat findet sich aber in [47]; das speziell für einen Anpassungstest anwendbar ist (um etwa für eine Transformation T zu testen, ob eine gewisse vorgegebene Verteilung gerade das invariante Maß für T ist).

Satz 4.8 *Unter den Voraussetzungen von* Satz 4.5 *für ein Funktional* (X_n) *mit Verteilungsfunktion* F *und für einen beschränkten symmetrischen Kern* $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *mit* $E_{\{1\}}h \equiv 0$ *konvergieren die Zufallsvariablen* $N^{-1}U_N(h)$ *schwach gegen* $Z_1(\hat{h})$ mit

$$\hat{h}(x, y) = \begin{cases} h(F^{-1}x, F^{-1}y) & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}, \textit{ sofern}$$

i) $\beta(n) = O(n^{-8})$

ii) $F(b) - F(a) \leqslant C(b - a)^r$ *für* $a < b$, *ein* $C > 0$ *und* $r > 0$.

iii) $P(X_0 = X_n) = 0 \quad \forall\, n$.

Ist $\hat{h}(x, y) = \sum \lambda_j f_j(x) f_j(y)$ (in L_2) *die Darstellung durch den Hilbert-Schmidt-Operator und ist* $Z_1(f_j)$ $(j \in \mathbf{N})$ *wohldefiniert, so folgt auch* $Z_1(h) = \sum \lambda_j [Z_1(f_j)^2 - 1]$.

Literatur

[1] A b d a l i m o v , B.; M a l e v i c h , T. L.: Refinement of a limit theorem for U-statistics. Izv. Akad. Nauk UzSSR Ser. Fiz.-Math. Nauk **2** (1970) 6–12

[2] A b d a l i m o v , B.; M a l e v i c h , T. L.: Asymptotic normality of U-statistics for S-dependent variables. Stoch. Proc. and Rel. Problems, vol. I. Tashkent: Fan 1970, 26–30

[3] A b d a l i m o v , B.; M a l e v i c h , T. L.: The central limit theorem for U-statistics. Stoch. Proc. and Rel. Problems, vol. II. Tashkent: Fan 1972, 3–9

[4] A b d a l i m o v , B.; M a l e v i c h , T. L.: On the refinement of a central limit theorem for a U-statistic. Izv. Akad. Nauk SzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk **4** (1972) 62–63

[5] A b d a l i m o v , B.; M a l e v i c h , T. L.: The law of iterated logarithm for a U-statistic. Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk **2** (1972) 3–6

[6] A b d a l i m o v , B.; M a l e v i c h , T. L.: On the rate of convergence in the strong law of large numbers for U-statistics. In: Random Processes and Statistical Derivations. No. V. Tashkent: Fan 1975, 3–9

[7] A b d a l i m o v , B.; M a l e v i c h , T. L.: Stable limit distributions for U-statistics. Theor. Verojatn. Primen. **22** (1977) 379–386. = Theory Prob. Appl. **22** (1977) 370–377

[8] A b d a l i m o v , B.; M a l e v i c h , T. L.: Probabilities of large deviations for U-statistics. Teor. Verojatn. Primen. **24** (1979) 215–220. = Theory Prob. Appl. **24** (1979) 215–219

[9] A b d a l i m o v , B.; M a l e v i c h , T. L.: On an estimation of the deviation of U-statistics distribution from normality. Izv. Akad. Nauk USSR Ser. Fiz-Mat. Nauk 1979, **3** (1979) 10–13

[10] A d l e r , R. L.; W e i s s , B.: Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus. Proc. Natl. Akad. Sci. **57** (1967) 1573–1576

[11] A h m a d , F.: On the Berry-Esséen theorem for random U-statistics. Ann. Stat. **8** (1980) 1395–1398

[12] A n d e r s o n , T. W.; D a r l i n g , D. A.: Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes. Ann. Math. Stat. **23** (1952) 193–212

[13] A r v e s e n , J. N.: Jackknifing U-statistics. Ann. Math. Stat. **40** (1969) 2076–2100

[14] B e r k , R. H.: Limiting behavior of posterior distributions when the model is incorrect. Ann. Math. Stat. **37** (1966) 51–58

[15] B e r k e s , I.; P h i l i p p , W.: Almost sure invariance principle for the empirical distribution function of mixing random variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **41** (1977) 115–137

[16] B h a p k a r , V. P.: A nonparametric test for the problem of several samples. Ann. Math. Stat. **32** (1961) 1108–1117

[17] B i c k e l , P. J.; W i c h u r a , M. J.: Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications. Ann. Math. Stat. **42** (1971) 1656–1670

[18] B i l l i n g s l e y , P.: Convergence of Probability Measures. New York: Wiley 1968

[19] B l o m , G.: Some properties of incomplete U-statistics. Biometrika **63** (1976) 573–580

[20] Blum, J. R.; Kiefer, J.; Rosenblatt, M.: Distribution free tests of independence based on the sample distribution function. Ann. Math. Stat. **32** (1961) 485–498
[21] Blum, J. R., Hanson, D. L., Koopmans, L. H.: On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **2** (1963) 1–11
[22] Boenner, N.; Kirschner, H.-P.: Note on conditions for weak convergence of von Mises' differentiable statistical functions. Ann. Math. Stat. **5** (1977) 405–407
[23] Boos, D. D.; Serfling, R. J.: A note on differentials and the CLT and LIL for statistical functions, with application to M-estimates. Ann. Stat. **8** (1980) 618–624
[24] Borovskikh, Yu. V.: Approximation of U-statistics distribution. Dopov. Akad. Nauk Ukr. RSR, Ser. A (1979) 695–698
[25] Borovskikh, Yu. V.: Approximation der Verteilungen von U-Statistiken I., Sib. Mat. Zh **5** (1980) 180
[26] Borovskikh, Yu, V.: Approximation of the distributions of the von Mises' functionals. Dopov. Akad. Nauk Ukr. RSR, Ser. A, **2** (1980) 6–9
[27] Bowen, R.: Markov partitions for Axiom-A-diffeomorphisms. Amer. J. Math. **92** (1970) 725–747
[28] Bradley, R. C.: On the φ-mixing condition for stationary random sequences. Duke Math. J. **47** (1980) 421–433
[29] Brown, B. M.; Kildea, D. G.: Reduced U-statistics and the Hodge-Lehmann estimator. Ann. Math. Stat. **6** (1978) 828–835
[30] Brown, R. C.; Silverman, B. W.: Rates of Poisson convergence for U-statistics. J. Appl. Prob. **16** (1979) 428–432
[31] Bunimovich, L. A.; Sinai, Y. G.: On a fundamental theorem in the theory of dispersing billiards. Math. USSR Sbornik **19** (3) (1973) 407–423
[32] Burke, M. D.: On the multivariate two-sample problem using strong approximations of the EDF. J. Multiv. Anal. **7** (1977) 491–511
[33] Burke, M. D.: On the asymptotic power of some k-sample statistics based on the multivariate empirical process. J. Multiv. Anal. **9** (1979) 183–205
[34] Callaert, H.; Janssen, P.: The Berry-Esséen theorem for U-statistics. Ann. Math. Stat. **6** (1978) 417–421
[35] Callaert, H.; Janssen, P.; Veraverbeke, N.: Some asymptotic results for the distribution function of U-statistics. Proc. 2nd Prague Symp. 1978 (1979) 135–146
[36] Callaert, H.; Janssen, P.; Veraverbeke, N.: An Edgeworth expansion for U-statistics. Ann. of Stat. **8** (1980) 299–312
[37] Chan, Y.-K.; Wierman, J.: On the Berry-Esséen theorem for U-statistics. Ann. of Prob. **5** (1977) 136–139
[38] Chatterjee, S. K.: A multisample nonparametric scale test based on U-statistics. Calc. Stat. Ass. Bull. **29** (1966) 109–119
[39] Chentsov, N. N.: Weak convergence of stochastic processes whose trajectories have no discontinuities of the second kind and the 'heuristic' approach to the Kolmogorov-Smirnov tests. Theor. Prob. Appl. **1** (1956) 140–144
[40] Chernoff, H.; Savage, I. R.: Asymptotic normality and efficiency of certain nonparametric test statistics. Ann. Math. Stat. **29** (1958) 972–994
[41] Cramér, H.: On the composition of elementary errors. Skand. Aktuarietidsskrift **11** (1928) 13–74, 141–180
[42] Cramér, H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Princeton Univ. Press 1946
[43] Csörgo, S.: On an asymptotic expansion for the von Mises ω^2-statistic. Acta Sci. Math. **38** (1976) 45–67
[44] Csörgo, S.; Révész, P.: A strong approximation of the multivariate empirical process. Studia Sci. Math. Hung. 1980
[45] Darling, D. A.: The Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises tests. Ann. Math. Stat. **28** (1957) 823–838
[46] Davis, C. E.; Quade, D.: U-statistics for skewness or symmetry. Comm. Stat., Theory Methods A7 (1978) 413–418
[47] Denker, M.: Statistical decision procedures and Ergodic Theory. Proceedings of the Conference on Ergodic Theory Rel. Topics 1981. Akad. d. Wiss. Berlin
[48] Denker, M.; Grillenberger, C.; Keller, G.: A note on invariance principles for v. Mises' statistics. Preprint

[49] D e n k e r , M.; K e l l e r , G.: On U-statistics and v. Mises' functionals for weakly dependent processes. Preprint

[50] D e n k e r , M.; K e a n e , M.: Almost topological dynamical systems. Isr. J. Math. **34** (1979) 139–160

[51] D e o , C. M.: A note on empirical processes of strong mixing sequences. Ann. of Prob. **1** (1973) 870–875

[52] D e s h p a n d e , J. V.: A nonparametric test based on U-statistics for the problem of several samples. J. Indian Stat. Ass. **3** (1965) 20–29

[53] D o n s k e r , M.: An invariance principle for certain probability limit theorems. Mem. Amer. Math. Soc. **6** (1951)

[54] D o n s k e r , M.: Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov statistics. Ann. Math. Stat. **23** (1952) 277–281

[55] D o o b , J. L.: Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems. Ann. Math. Stat. **20** (1949) 393–403

[56] D u r b i n , J.: Distribution theory of tests based on the sample distribution function. Regional Conference Ser. Appl. Math. **9**. Siam, Philadelphia 1973

[57] E a g l e s o n , G. K.: Orthogonal expansions and U-statistics. Austr. J. Stat. **21** (1979) 221–237

[58] F e i g i n , P. D.; H e a t h c o t e , C. R.: The empirical characteristic function and the Cramer-von Mises statistic. Sankhya, Ser. A **38** (1976) 309–325

[59] F e u e r v e r g e r , A.; M u r e i k a , R. A.: The empirical characteristic function and its application. Ann. of Stat. **5** (1977) 88–97

[60] F i l i p p o v a , A. A.: Mises' theorem on the asymptotic behaviour of functionals of empirical distribution functions and its statistical applications. Theory of Prob. Appl. VII, **1** (1962) 24–57

[61] F i s h e r , R. A.: Statistical Methods for Research Workers. Edinburgh: Oliver and Boyd 1925

[62] F r a s e r , D. A. S.: Nonparametric Methods in Statistics. New York: Wiley 1957

[63] G ä n s s l e r , P.; S t u t e , W.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1977

[64] G ä n s s l e r , P.; S t u t e , W.: Empirical processes: A survey of results for independent and identically distributed random variables. Ann. of Prob. **7** (1979) 193–243

[65] G a l a m b o s , J.; K o t z , S.: Characterization of probability distributions. LNiM. **675** (1978)

[66] G a l l a v o t t i , G.; O r n s t e i n , D.: Billiards and Bernoulli schemes. Comm. math. physics **38** (1974) 83–101

[67] G ö t z e , F.: Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **50** (1979) 333–355

[68] G o s h , M.; S e n , P. K.: On the almost sure convergence of von Mises' differentiable statistical functions. Calcutta Stat. Ass. Bull. **19** (1970) 41–44

[69] G o v i n d a r a j u l u , Z.; L e C a m , L.; R a g h a v a c h a r i , M.: Generalizations of theorems of Chernoff and Savage on the asymptotic normality of test statistics. Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. **1** (1966) 609–638

[70] G r a m s , W. F.; S e r f l i n g , R. J.: Convergence rates for U-statistics and related statistics. Ann. Stat. **1** (1973) 153–160

[71] G r e g o r y , G. G.: Large sample theory for U-statistics and tests of fit. Ann. Math. Stat. **5** (1977) 110–123

[72] G r e n a n d e r , U.; R o s e n b l a t t , M.: Statistical analysis of stationary time series. New York: Wiley 1957

[73] H á j e k , J.: Some extensions of the Wald-Wolfowitz-Noether theorem. Ann. Math. Stat. **32** (1961) 506–523

[74] H á j e k , J.: Š i d á k , Z.: Theory of Rank Tests. New York: Academic Press 1967

[75] H a l l , P.: On the invariance principle for U-statistics. Stoch. Proc. Appl. **9** (1979) 163–174

[76] H a l m o s , P. R.: The theory of unbiased estimation. Ann. Math. Stat. **17** (1946) 34–44

[77] H o d g e , J. L.; L e h m a n n , E. L.: Estimates of location based on rank tests. Ann. Math. Stat. **34** (1963) 598–611

[78] H o e f f d i n g , W.: A class of statistics with asymptotically normal distribution. Ann. of Math. Stat. **19** (1948) 325–346

[79] H o e f f d i n g , W.; R o b b i n s , H.: The central limit theorem for dependent random variables. Duke Math. J. **15** (1948) 773–780

[80] Hoeffding, W.: A combinatorial central limit theorem. Ann. Math. Stat. **22** (1951) 558–566
[81] Hoeffding, W.: The strong law of large numbers for U-statistics. Inst. Stat. Univ. North Carolina, Mimeo. Ser. 302 (1962)
[82] Hofbauer, F.; Keller, G.: Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations, erscheint in Math. Z
[83] Hollander, M.; Proschan, F.: Testing whether new is better than used. Ann. Math. Stat. **43** (1972) 1136–1146
[84] Hopf, E.: Ergodentheorie. Berlin – Heidelberg – Göttingen: Springer 1937. = Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete Bd. 5
[85] Huber, P. J.: Robust estimation of a location parameter. Ann. Math. Stat. **42** (1964) 73–101
[86] Huber, P. J.: Robust statistics: A review. Ann. Math. Stat. **43** (1972) 1041–1067
[87] Ibragimov, I. A.; Rozanov, Y. A.: Gaussian Random Processes. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1978
[88] Ibragimov, I. A.; Linnik, V. K.: Independent and Stationary Sequences of Random Variables. Groningen: Wolters-Noordhoff 1971
[89] Ibragimov, I. A.: Some limit theorems for stochastic processes stationary in the strict sense. Dokl. Akad. Nauk USSR **125** (1959) 711–714
[90] Jeulin, T.; Yor, M.: Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis. Séminaire de Prob. XIII, Univ. de Strasbourg 1977/78, LNiM **721** (1979) 332–360
[91] Kiefer, J.: K-samples analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramér-von Mises tests. Ann. Math. Stat. **30** (1959) 420–447
[92] Kiefer, J.: Skorohod embedding of multivariate R. V.'s and the sample D. F. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **24** (1972) 1–35
[93] Kolmogorov, A.: Sulla determinatione empirica di una legge di distributione. Giornale Ist. Ital. Attuari **4** (1933) 83–91
[94] Krewski, D.: Jackknifing U-statistics in finite populations. Comm. Stat., Theory Methods **7** (1978) 1–12
[95] Kubo, I.; Murata, H.: Perturbed billiard systems I, II. Nagoya Math. J. **61** (1976) 1–57 und ibid. **81** (1981) 1–25
[96] Kuelbs, J.: The invariance principle for Banach space valued random variables. J. Multiv. Anal. **3** (1973) 161–172
[97] Lasota, A.; Yorke, J.: On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. Trans. Amer. Math. Soc. **186** (1973) 481–488
[98] Lehmann, E. L.: Consistency and unbiasedness of certain non-parametric tests. Ann. Math. Stat. **22** (1951) 165–179
[99] Lemmer, H. H.: A robust test for the one-sample dispersion problem based on a U-statistic. South African Statist. J. **11** (1977) 119–124
[100] Lin, K.-H.: Dominated ergodic theorems for U-statistics and related statistics. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **5** (1977) 299–304
[101] Locke, C.; Spurrier, J. D.: The use of U-statistics for testing normality against alternatives with both tails heavy or both tails light. Biometrika **64** (1977) 638–640
[102] Loynes, R. M.: Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. Ann. Math. Stat. **36** (1965) 993–999
[103] Loynes, R. M.: The central limit theorem for backwards martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **13** (1969) 1–8
[104] Loynes, R. M.: An invariance principle for reverse martingales. Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970) 56–64
[105] Loynes, R. M.: On the weak convergence of U-statistic processes and of the empirical processes. Math. Proc. Cambridge philos. Soc. **83** (1978) 269–272
[106] Majumdar, H.; Sen, P. K.: Invariance principles for jack-knifing U-statistics for finite population sampling and some applications. Comm. Stat. Theory Methods A7 (1978) 1007-1-25
[107] Mann, H. B.; Whitney, D. R.: On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. Ann. Math. Stat. **18** (1947) 50–60
[108] Maritz, J. S.; Staudte, R. G., jun.; Wu, M.: A location estimator based on a U-statistic. Ann. Math. Stat. **5** (1977) 779–786
[109] Mielke, P. W., jun.; O'Reilly, F. J.: Asymptotic normality of MRPP statistics from invariance principles of U-statistics. Comm. Stat., Theory Methods A**9** (1980) 629–637

[110] Mihailov, V. G.: The central limit theorem for non-homogeneous U-statistics of finitely dependent random variables. Math. USSR, Sbornik **27** (1975) 554–563
[111] Miller, R. G.; Sen, P. K.: Weak convergence of U-statistics and von Mises' differentiable statistical functionals. Ann. Math. Stat. **43** (1972) 31–41
[112] v. Mises, R.: Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendung. Leipzig und Wien 1931
[113] v. Mises, R.: On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions. Ann. Math. Stat. **18** (1947) 309–348
[114] Müller, D. W.: On Glivenko-Cantelli convergence. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **16** (1970) 195–210
[115] Nandi, H. K.; Sen, P. K.: On the properties of U-statistics when the observations are not independent. Part Two: Unbiased estimation of the parameters of a finite population. Calc. Stat. Ass. Bull. **12** (1963) 125–143
[116] Neuhaus, G.: On weak convergence of stochastic processes with multi-dimensional time parameter. Ann. Math. Stat. **42** (1971) 1285–1295
[117] Neuhaus, G.: Asymptotic properties of the Cramer-von Mises-statistics when parameters are estimated. Proc. Prague Symp. 1973; Vol. II (1974) 257–297
[118] Neuhaus, G.: Functional limit theorems for U-statistics in the degenerate case. J. Multivariate Anal. **7** (1977) 424–439
[119] Neuhaus, G.; Sen, P. K.: Weak convergence of tail-sequence processes for sample distributions and averages. Mitt. Math. Sem. Giessen **123** (1977) 25–35
[120] Newell, G. F.: Asymptotic extremes for m-dependent random variables. Ann. Math. Stat. **35** (1964) 1322–1325
[121] Nikitin, Ja., Ju.: Bahadur relative asymptotic efficiency of statistics based on the empirical distribution function. Dokl. Akad. Nauk SSSR **231** (1976) 802–805. = Soviet Math. Dokl. **17** (1977) 1645–1649
[122] Noether, G. E.: On a theorem of Wald and Wolfowitz. Ann. Math. Stat. **20** (1949) 455–458
[123] Oodaira, H.; Yoshihara, K.: Functional central limit theorems for strictly stationary processes satisfying the strong mixing condition. Kodai Math. Sem. Reports **24** (1971) 259–269
[124] Orlov, A. I.: The rate of convergence of the distribution of the Smirnov-von Mises statistic. Theor. Prob. Appl. **19** (1974) 737–757
[125] Ornstein, D.: Ergodic Theory, Randomness, and Dynamical Systems. Yale Univ. Press 1974
[126] Oxtoby, J. C.: Measure and Category. Berlin – Heidelberg – New York: Springer. = Graduate Texts in Mathematics. Vol. 3
[127] Parthasarathy, K. R.: Probability measures on metric spaces. New York: Academic Press 1967
[128] Pearson, K.: On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. Phil. Mag. 5ser. **50** (1900) 157–175
[129] Puri, M. L.; Sen, P. K.: Nonparametric Methods in Multivariate Analysis. New York: Wiley 1971
[130] Pyke, R.; Shorack, G. R.: Weak convergence of a two-sample empirical process and a new approach to Chernoff-Savage theorems. Ann. Math. Stat. **39** (1968) 755–771
[131] Randles, R. H.; Wolfe, D. A.: Introduction to The Theory of Nonparametric Statistics. New York: Wiley 1979
[132] Rényi, A.: On a group of problems in the theory of ordered samples. Sel. Transl. Math. Stat. Prob. **13** (1973) 289–298
[133] Rosenblatt, M.: Limit theorems associated with variants of the von-Mises-statistics. Ann. Math. Stat. **23** (1952) 617–623
[134] Rosenblatt, M.: A central limit theorem and a strong mixing condition. Proc. Nat. Acad. Sci. NSA **42** (1956) 43–47
[135] Rosenkrantz, W. A.: A rate of convergence for the von-Mises-statistic. Trans. Amer. Math. Soc. **139** (1969) 329–337
[136] Rubin, H.; Sethuraman, J.: Probabilities of moderate deviations. Sankhȳa Ser. A **27** (1965) 325–346
[137] Sahler, W.: A survey on distribution-free statistics based on distances between distribution functions. Metrika **13** (1968) 149–169
[138] Sazonov, V. V.: On ω^2-criterion. Sankhȳa. Ser. A. **30** (1968) 205–210

[139] S a z o n o v , V. V.: An improvement of a convergence-rate estimate. Theory Prob. Appl. **14** (1969) 640–651
[140] S c h e f f é , H.: Statistical inference in the non-parametric case. Ann. Math. Stat. **14** (1943) 305–332
[141] S e n , P. K.: On some convergence properties of U-statistics. Calc. Stat. Ass. Bull. **10** (1960) 1–18
[142] S e n , P. K.: On the properties of U-statistics when the observations are not independent. Part one: Estimation of the non-serial parameters of a stationary process. Calc. Stat. Ass. Bull. **12** (1963) 69–92
[143] S e n , P. K.: A Hajék-Rényi type inequality for generalized U-statistics. Calcutta Stat. Ass. Bull. **21** (1972) 171–179
[144] S e n , P. K.: On some permutation tests based on U-statistics. Calc. Stat. Ass. Bull. **14** (1965) 106–126
[145] S e n , P. K.: Some non-parametric tests for m-dependent time series. J. Amer. Stat. Ass. **60** (1965) 134–147
[146] S e n , P. K.: On a class of bivariate two-sample nonparametric tests. Proc. V Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. Univ. California Press **1** (1966) 638–656
[147] S e n , P. K.: On some permutation tests for stochastic independence. Sankhya Ser. A. **29** (1967) 157–174
[148] S e n , P. K.: On a class of multisample permutation tests based on U-statistics. J. Amer. Stat. Ass. **62** (1967) 1200–1213
[149] S e n , P. K.: U-statistics and combination of independent estimates of regular functionals. Calc. Stat. Ass. Bull. **16** (1967) 1–14
[150] S e n , P. K.: On a robustness property of a class of nonparametric tests based on U-statistics. Calc. Stat. Ass. Bull. **18** (1969) 51–60
[151] S e n , P. K.: A note on weak convergence of empirical processes for sequences of Φ-mixing random variables. Ann. Math. Stat. **42** (1971) 2131–2133
[152] S e n , P. K.: Limiting behaviour of regular functionals of empirical distributions for stationary *-mixing processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **25** (1972) 71–82
[153] S e n , P. K.: Weak convergence of generalized U-statistics. Ann. of Prob. **2** (1974) 90–102
[154] S e n , P. K.: Weak convergence of multidimensional empirical processes for stationary Φ-mixing processes. Ann. Stat. **2** (1974) 147–154
[155] S e n , P. K.: Almost sure behaviour of U-statistics and von Mises' differentiable statistical functions. Ann. of Stat. **2** (1974) 387–395
[156] S e n , P. K.: Almost sure convergence of generalized U-statistics. Ann. of Prob. **5** (1977) 287–290
[157] S e r f l i n g , R. J.: The law of iterated logarithm for U-statistics and related von Mises' statistics. Ann. Math. Stat. **42** (1971) 1794 (abstract).
[158] S e t h u r a m a n , J.; S u k h a t m e , B. V.: Joint asymptotic distribution of U-statistics and order statistics. Sankhya **21** (1958) 289–298
[159] S h o r a k , G. R.: The weighted empirical process of row independent random variables with arbitrary distribution functions. Stat. Neerl. **33** (1979) 169–189
[160] S i n a i , Y. G.: Construction of Markov partitions. Funct. Anal. and its Appl. **2** (1968) 245–253. = Funkt. Anal. i ego Prim. **2** (1968) 70–80
[161] S i n a i , Y. G.: Markov partitions and C-diffeomorphisms. Funct. Anal. and its Appl. **2** (1968), 64–89. = Funkt. Anal. i ego Prim. **2** (1968), 67–89
[162] S i n a i , Y. G.: Dynamical systems with elastic reflections. Russ. Math. Survey **25** (1970) 137–189
[163] S k o r o h o d , A. V.: Limit theorems for stochastic processes. Theor. Prob. Appl. **1** (1956) 261–290
[164] S m i r n o v , N.: On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples. Bull. Math. Univ. Moscow. Sér. Int. Vol. **2** (2) 1939
[165] S m i r n o v , N.: An approximation of the distribution laws of random quantities determined by empirical data. Uspeki Mat. Nauk **10** (1944) 179–206
[166] S m y t h e , R. T.: Sums of independent random variables on partially ordered sets. Ann. of Prob. **2** (1974) 906–917
[167] S p r o u l e , R. N.: A sequential fixed-width confidence interval for the mean of a U-statistic. Ph. D. dissertation, Univ. N. Carolina, Chapel Hill, 1969
[168] S p r o u l e , R. N.: Asymptotic properties of U-statistics. Trans. Amer. Math. Soc. **199** (1974) 55–64

[169] S t e p h e n s , M. A.: The distribution of the goodness-of-fit statistic U_N^2. I, II. Biometrika **50** (1963) 303–313 und ibid. **51** (1964) 393–397
[170] S t i g l e r , S. M.: Linear functions of order statistics with smooth weight functions. Ann. Math. Stat. **2** (1974) 676–693
[171] S t r a f , M. L.: Weak convergence of stochastic processes with several parameters. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. **2** (1971) 187–221
[172] S t r o b e l , J.: Rates of convergence in the central limit theorem for U-statistics. Preprint. Ruhr-Universität Bochum 1976
[173] S u g u i r a , N.: Multisample and multivariate nonparametric tests based on U-statistics and their asymptotic efficiencies. Osaka J. Math. **2** (1965) 385–426
[174] S u k h a t m e , B. V.: On certain two-sample nonparametric tests for variances. Ann. Math. Stat. **28** (1957) 188–194
[175] S u k h a t m e , B. V.: Testing the hypothesis that two populations differ only in location. Ann. Math. Stat. **29** (1957) 60–78
[176] S u k h a t m e , B. V.: A two-sample distribution-free test for comparing variances. Biometrika **45** (1958) 544–549
[177] T a m u r a , R.: On the nonparametric tests based on certain U-statistics. Bull. Math. Stat. Japan **9** (1960) 61–68
[178] U r y , H. K.; W i g g i n s , A. D.: A general upper-bound on the variance of the Wilcoxon-Mann-Whitney U-statistic for symmetric distributions with shift alternatives. British J. Math. Stat. Psychology **29** (1976) 263–267
[179] v. d. W a e r d e n , B. L.: Order test for the two-sample-problem I, II, III. Indag. Math. **14** (1952) 453–458 Corr. ibid. **15** (1953), 80; ibid. **15** (1953) 303–310; ibid. **15** (1953) 311–316
[180] v. d. W a e r d e n , B. L.: Ein neuer Test für das Problem der zwei Stichproben. Math. Annalen **126** (1953) 93–107
[181] v. d. W a e r d e n , B. L.: Testing a distribution function. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Ser. A **56** (1953) 201–207
[182] W a l d , A.; W o l f o w i t z , J.: Statistical tests based on permutations of the observations. Ann. Math. Stat. **15** (1944) 358–372
[183] W e b e r , N. C.: Rates of convergence for U-statistics with varying kernels. Bull. Austral. Math. Soc. **21** (1980) 1–5
[184] W e l s h , R. E.: A weak convergence theorem for order statistics from strong-mixing processes. Ann. Math. Stat. **42** (1972) 1637–1646
[185] W i c h u r a , M. J.: Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters. Ann. Math. Stat. **40** (1969) 681–687
[186] W i l c o x o n , F.: Individual comparisons by ranking-methods. Biometrics **1** (1945) 80–83
[187] W i l l i a m s , G. W.; S e n , P. K.: Asymptotically optimal sequential estimation of regular functionals of several distributions based on generalized U-statistics. J. Multivariate Anal. **3** (1973)
[188] Y a m a t o , H.: Relations between limiting Bayes estimates and the U-statistics for estimable parameters of degrees 2 and 3. Commun. Stat., Theory Methods **A6** (1977) 55–66
[189] Y o s h i h a r a , K.: Limiting behaviour of U-statistics for stationary, absolutely regular processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **35** (1976) 237–256
[190] Y o s h i h a r a , K.: Limiting behaviour of one-sample rank-order statistics for absolutely regular processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **43** (1978) 101–127
[191] Y o s h i h a r a , K.: Note on multidimensional empirical processes for Φ-mixing random vectors. J. Multiv. Anal. **8** (1978) 584–588
[192] van Z u i j l e n , M. C. A.: Properties of the empirical distribution function for independent nonidentically distributed random variables. Ann. of Prob. **6** (1978) 250–266

Prof. Dr. Manfred Denker
Inst. f. Math. Stochastik
der Universität
Lotzestr. 13
3400 Göttingen

(*Eingegangen: 5. 2. 1982*)

Buchbesprechungen

Locher-Ernst, L., Projektive Geometrie, Dornach 1940, 1980², DM 29,–
Locher-Ernst, L., Urphänomene der Geometrie, Dornach 1937, 1980², DM 22,–
Locher-Ernst, L., Raum und Gegenraum, Dornach 1957, 1970², DM 35,50
Locher-Ernst, L., Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis, Dornach 1944, 1973², DM 39,80
Locher-Ernst, L., Geometrische Metamorphosen, Dornach 1970, DM 32,80

Als Mathematiker in einem keineswegs mathematikfreundlichen Lande (Ungarn, du hast es besser) freut man sich, wenn man unvermutet auf Sympathisanten stößt. Der Begründer der Anthroposophie Rudolf Steiner (1861–1925) hat u. a. auch Mathematik studiert, sich dann seine eigentümlichen Gedanken dazu gemacht und diese in seinem umfangreichen Schriften- und Vortragswerk immer wieder anklingen lassen. Die Anthroposophie hat sich in über einem halben Jahrhundert als eine stabile, im Gebaren wohltuend solide Weltanschauungsbewegung etabliert, der Öffentlichkeit bemerkenswerte Alternativen zum staatlichen Schulsystem und der herkömmlichen Behindertenfürsorge – um nur zwei Beispiele zu nennen – vorgestellt und namhafte Persönlichkeiten wie den Dirigenten Bruno Walter (1876–1962), den Architekten Hans Scharoun (1893–1972) und den mit einer bekannten Mathematikerin verheirateten Literaturnobelpreisträger Saul Bellow (* 1915) zu interessieren vermocht. Der bekannte und verdiente Mathematiker Louis Locher-Ernst (1906–1962) ist Anthroposoph gewesen. Er hat der mathematischen Öffentlichkeit drei Lehrbücher (Differential- und Integralrechnung, Basel (Birkhäuser) 1948; Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven, Basel (Birkhäuser) 1951, Arithmetik und Algebra, Zürich 1945), den Anthroposophen jedoch mindestens ein halbes Dutzend Bücher anthroposophisch-mathematischen Inhalts hinterlassen. Fünf davon möchte ich hier zum Anlaß nehmen, einige schlaglichtartige Einblicke in die anthroposophische Mathematik-Beschäftigung zu versuchen.

Rudolf Steiners persönliche Begegnung mit der Mathematik begann in seiner Schulzeit. Ein freundlicher Lehrer überließ ihm leihweise ein Geometrie-Lehrbuch. Steiner schreibt hierzu in seiner Autobiographie (Mein Lebensgang, Dornach ⁷1962) auf S. 20/21: „... konnte der Hilfslehrer mit etwas in mein Leben eingreifen, das für mich richtunggebend geworden ist. Bald nach meinem Eintreten in die Neudörfler Schule entdeckte ich in seinem Zimmer ein Geometriebuch. Ich stand so gut mit diesem Lehrer, daß ich das Buch ohne weiteres eine Weile zu meiner Benutzung haben konnte. Mit Enthusiasmus machte ich mich darüber her. Wochenlang war meine Seele ganz erfüllt von der Kongruenz, der Ähnlichkeit von Dreiecken, Vierecken, Vielecken; ich zergrübelte mein Denken mit der Frage, wo sich eigentlich die Parallelen schneiden; der pythagoreische Lehrsatz bezauberte mich.

Daß man seelisch in der Ausbildung rein innerlich angeschauter Formen leben könne, ohne Eindrücke der äußeren Sinne, das gereichte mir zu höchsten Befriedigung. Ich fand darin Trost für die Stimmung, die sich mir durch die unbeantworteten Fragen ergeben hatte. Rein im Geiste etwas erfassen zu können, das brachte mir ein inneres Glück. Ich weiß, daß ich an der Geometrie das Glück zuerst kennen gelernt habe."

Solche Worte bekommt ein Mathematiker von Nichtmathematikern selten zu hören. Die spätere mathematische Beschäftigung Steiners scheint im wesentlichen der projektiven Geometrie, so wie sie am Ende des 19. Jahrhunderts vorlag, gegolten zu haben. Die ihm eigentümliche Art der Beschäftigung bestand weniger im Handhaben-Lernen von Beweismethoden, sondern in der erlebnismäßigen Erfassung von Satz- und Definitions-Inhalten. Diese Eigenart Steiners ist auch für die obengenannten fünf Bücher von Locher-Ernst charakteristisch. So heißt es z. B. in „Raum und Gegenraum auf S. 8:

> ... daß der Raum keineswegs ein Gefäß ist, das von Seiten eines deus ex machina für den Ablauf der Geschehnisse bereitgestellt worden wäre. Der Raum ist ein Begriff, mit dessen Hilfe das Denken die Wahrnehmungswelt durchdringt ... Die tiefwurzelnde Meinung, der Raum sei ein totes Gefäß, stellt eine der Ketten dar, mit denen Ahriman den Menschen in Fesseln hält ....

So ein Zitat könnte den Eindruck erwecken, als würde Louis Locher-Ernst seinen Lesern nur jene methodische Phantastik bieten, für die ich den Großteil des von Rudolf Steiner Geäußerten halte. Dem ist aber nicht so. Die drei Bände „Urphänomene der Geometrie", „Projektive Geometrie" und „Raum und Gegenraum" bieten ein solides geometrisches Training. Besonders hervorzuheben ist das überaus sorgfältig gestaltete, rein schwarzweiße Abbildungsmaterial. Der „Gegenraum" ist eine Ausgestaltung der Vorstellung „ein solides Tetraeder wird durch ein Loch im solide gedachten Restraum ersetzt". Das Gergonne-Ponçeletsche Dualitätsprinzip bildet die Leitlinie aller geometrischen Darlegungen von Rudolf Steiner und Louis Locher-Ernst (S. 6). Charakteristisch ist auch eine Stelle „Urphänomene der Geometrie" S. XI:

> Das Wort *Axiom* wird im folgenden vermieden, es hat heute recht stark den Beigeschmack einer ganz in der menschlichen Willkür liegenden, beliebigen Setzung angenommen. Da für mich das mathematische Begriffsgebäude nicht ein bloßes Hirngespinst ist, sondern einen abstrakten Abklang einer wesenhaften Welt, deren Erzeugnis die physisch-sinnliche ist, darstellt, scheint mir das von Geothe in die Farbenlehre eingeführte Wort „*Urphänomen*" vielsagender, mehr auf die Wirklichkeit hinweisend, zu sein.

Die Abschließung der euklidischen Ebene durch eine unendlichferne Gerade wird erlebnismäßig vertieft. So heißt es in „Urphänomene der Geometrie" auf S. 41:

> ... Wir wollen uns dazu aufschwingen, zwei parallelen Geraden einen und nur einen unendlichfernen Punkt anzuerkennen.

Und ebenda auf S. 44:

> Wenn wir uns im Endlichen umschauen, welche Figuren die Eigenschaft haben, mit jeder Geraden genau einen Punkt gemeinsam zu haben, so sagt uns die geometrische Anschauung, daß nur die Gerade selbst diese Eigenschaft besitzt, so daß wir auf die Idee kommen:
> *Die unendlichfernen Punkte einer Ebene bilden eine Gerade, die unendlichferne Gerade* g_∞ *dieser Ebene.*
> ... Wie sehr sie zum Organismus des Raumes hinzugehört, wird sich immer mehr erweisen ...

Der normale Hochschulmathematiker sieht die Sache der Geometrie natürlich anders u. z. mit guten Gründen. Der in anthroposophischer Geometrie Gebildete sollte irgendwann einmal auf eine ihm verständliche Gegen-Äußerung des Establishments stoßen. Hierzu ist in einer Rezension nicht genügend Raum. Was der Anthroposophie, auch in Sachen Mathematik, m. E. nottut, ist eine Persönlichkeit, die sie aus der engen Bindung an die vom 19. Jahrhundert geprägte Vorstellungswelt Rudolf Steiners herausführt. In den hier vorgestellten Büchern von Louis Locher-Ernst ist eine derartige Bewegung noch nicht zu spüren. Vielmehr bleiben die beiden z. T. über die Mathematik hinausführenden Aufsatzsammlungen „Geometrische Metamorphosen" und „Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis" noch völlig im Banne des Gründers. Daß dieser Gründer Ehrfurcht vor allen Kulturtraditionen predigte, macht ihn mir sympathisch. Daß er im Vorzimmer der Mathematik seine eigene Mathematik-Schule aufmachte, gibt Anlaß zum Schmunzeln, aber nicht zur Vertreibung. Wer wollte auch einen so kompetenten Mathematiker wie Louis Locher-Ernst wegen seines anthroposophischen Engagements aus der Mathematik vertreiben wollen? Meinen höflichen Respekt!

Erlangen K. Jacobs

Wolfowitz, J., Selected papers, Editor: Kiefer J. with the assistance of Augustin, U. and Weiss, L., Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1980, 1 portrait, 6 figs., 1 tab., xxiii + 642 pp., cloth, DM 69,–

Jacob Wolfowitz war eine der hervorragenden Persönlichkeiten der modernen mathematischen Statistik und Informationstheorie. Der Band seiner ausgewählten Arbeiten wurde für seinen 70sten Geburtstag herausgegeben, und in der Einleitung wurde der Wunsch ausgesprochen, daß er seine fruchtbare wissenschaftliche Tätigkeit noch für viele Jahre fortsetzen möge. Leider ist dieser Wunsch nicht erfüllt worden, denn am 16. Juli 1981 ist er gestorben. So ist jetzt diese Arbeitensammlung auch als Gedenkband für einen großen Wissenschaftler anzusehen.

In dem Band werden nach einer kurzen Biographie und einer Besprechung der Themen und der Bedeutung der Forschungsarbeit von J. Wolfowitz 49 seiner Arbeiten reproduziert, die aus seinen zwischen 1939 und 1979 erschienenen 120 Publikationen ausgewählt wurden. Eine Liste sämtlicher Publikationen ist am Ende des Bandes zu finden.

Wie die Herausgeber betonen, war Wolfowitz auch ein hervorragender Lehrer und Vortragender, der seine Zuhörer nie in dem mathematischen Formalismus verlorengehen ließ. Er vermochte die wesentlichen Gedanken mit großer Klarheit darzustellen. Der Besprecher hatte leider keine Gelegenheit, die Klarheit der Vorlesungen von Wolfowitz zu genießen, doch kann er wohl feststellen, daß die Lektüre seiner Arbeiten einen ähnlichen Eindruck auf den Leser macht. Dies geht auf die wissenschaftliche Grundeinstellung von Wolfowitz zurück. Er war nicht der Mann, der großangelegte abstrakte Theorien schaffte. Vielmehr vermochte er mit relativ kleinem mathematischen Aufwand grundlegende Fragen zu klären und in neueren Forschungsrichtungen bahnbrechende Arbeit zu leisten.

Die erste Periode seiner wissenschaftlichen Tätigkeit war geprägt durch die Zusammenarbeit mit Abraham Wald, dem Begründer der modernen statistischen Entscheidungstheorie und sequenziellen Analyse, die zu mehreren viel zitierten Ergebnissen auf diesen Gebieten führte. Aus der Vielfältigkeit der weiteren Forschungen von Wolfowitz seien hier nur die asymptotische statistische Theorie und die Informationstheorie erwähnt. Charakteristisch für sein Streben nach Klarheit und sinnvolle Fragestellungen ist seine Kritik an der klassischen „Maximum Likelihood" Theorie, die ihn dann zur Einführung der „Maximum Probability" Methode veranlaßte. Nicht seltener zitiert sind seine Arbeiten über „Minimum Distance" Methoden und stochastische Approximation. In der Informationstheorie erkannte er als erster klar die grundsätzlich kombinatorische Natur (einer Vielzahl) der wesentlichen Probleme und demonstrierte die Tragweite der einfachen „Typical Sequences" Methode durch den Beweis einer Fülle von Kodierungssätzen.

Durch die Lektüre dieser Arbeitensammlung kann man viele Bestandteile der heutigen Statistik und Informationstheorie sozusagen bei ihrer Geburt kennenlernen. Dieses dürfte für ein tieferes Verständnis der zugrundeliegenden Motivationen und eventuell auch für eine kritische Überprüfung der existierenden Theorien sehr behilflich sein. Einige Schwierigkeiten für den Leser bereitet der Umstand, daß mehrere Arbeiten des Bandes nicht unabhängig lesbar sind, etwa weil sie von Arbeiten des Verfassers abhängen, die in die Sammlung nicht aufgenommen wurden. Obwohl die Auswahl sicher nicht leicht gewesen sein dürfte, hätten die Herausgeber vielleicht mehr Rücksicht auf diesen Gesichtspunkt nehmen können. (Insbesondere die letzten drei Arbeiten sind nicht mehr auf demselben Niveau wie die früheren und könnten wohl zugunsten von anderen weggelassen werden. Obwohl in der Einleitung des Bandes (Seiten XIX–XX) gerade die letzte Arbeit hoch gewertet wird, ist ihr wesentlichster Teil, die untere Schranke für partielle Nebeninformation, in Wirklichkeit falsch, weil die Behauptung $U^i \to Y^i \to X^i \to Z^i$ – Seite 628, Zeile 5 von unten – nicht gilt.)

Ferner hält der Besprecher es für bedauerlich, daß die Herausgeber auf Hinweise auf den heutigen Stand der von Wolfowitz studierten Gebiete verzichtet haben. Er ist der Meinung, daß eine gezielte Auswahl von Referenzen die Mehrarbeit gelohnt und den Nutzen des Bandes erhöht hätte. Aber trotz dieser kritischen Bemerkungen ist der Besprecher überzeugt, daß die Herausgabe dieser Arbeitensammlung ein sehr nützliches Unternehmen war. Er möchte deren Lektüre jedem warm empfehlen, der sich für mathematische Statistik und Informationstheorie interessiert und hofft, daß der Leser die Lektüre genießt, so wie er selber sie genossen hat.

Budapest – Bielefeld I. Csiszár

Potthoff, K., Einführung in die Modelltheorie und ihre Anwendungen, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1981, xii + 277 S., kart., DM 48,–

Modelltheorie ist eine Teildisziplin der Mathematischen Logik. In ihr untersucht man die Modelle elementarer (erststufiger) Axiomensysteme unter lokalen und globalen Gesichtspunkten, d. h. man untersucht die Eigenschaften einzelner Modelle sowie Eigenschaften der Gesamtheit aller Modelle. Ihre Wurzeln hat die Modelltheorie einerseits in den Arbeiten von Löwenheim und Skolem aus den Jahren 1915 und 1934, andererseits in einer grundlegenden Arbeit von Gödel aus dem Jahre 1930. In den Arbeiten von Löwenheim und Skolem wird mit einer Konstruktion, die im wesentlichen die Ultraproduktkonstruktion darstellt, die Nichtcharakterisierbarkeit der natürlichen Zahlen durch ein elementares Axiomensystem gezeigt. Diese Methode der Konstruktion von sogenannten Nichtstandard Modellen eines Axiomensystems stand Pate bei der Entwicklung der Nichtstandard Analysis durch Abraham Robinson in den sechziger Jahren. In der Arbeit von Gödel wurde für eine Formalisierung des Beweisbegriffes gezeigt, daß diese alle mathematischen Schlußweisen vollständig erfaßt, daß also eine Unbeweisbarkeit notwendig in einem „Gegenbeispiel“ begründet sein muß. Die Konstruktion dieses Gegenbeispiels stellt eine andere grundlegende Methode der heutigen Modelltheorie dar.

Die beiden, eben besprochenen Methoden wurden in den dreißiger Jahren von A. Tarski durch weitere ergänzt und systematisiert. Tarski begann auch das Studium konkreter algebraischer Theorien unter modelltheoretischen Gesichtspunkten; hier wären etwa die Entscheidbarkeit der elementaren Theorie algebraisch abgeschlossener Körper sowie reell abgeschlossener Körper zu nennen.

In den sechziger Jahren erhielt die Modelltheorie wesentliche Impulse einerseits durch den tiefliegenden Satz von Morley, andererseits durch eine aufsehenerregende Anwendung modelltheoretischer Methoden durch Ax und Kochen in dem Problemkreis diophantischer Gleichungen. Der Satz von Morley besagt, daß je zwei Modelle einer (elementaren) Theorie gleicher, aber beliebiger überabzählbarer Mächtigkeit isomorph sind, falls dies schon für eine einzige überabzählbare Mächtigkeit richtig ist. Der Beweis dieses Satzes brachte für die Modelltheorie wiederum neue Konstruktionsmethoden, die sich für die weitere Entwicklung als grundlegend erwiesen. Mit den Arbeiten von Ax und Kochen eröffnete sich der Modelltheorie ein weites Feld der Anwendung – Fragen der Entscheidbarkeit und Axiomatisierbarkeit in der Algebra, speziell der Körpertheorie.

Alle in diesem kurzen Abriß der Entwicklung der Modelltheorie (bis zur Mitte der sechziger Jahre) angesprochenen Begriffe werden in dem vorliegenden Buch eingeführt und mehr oder minder ausführlich behandelt. Hinsichtlich der Gewichtung der behandelten Themen hat diese Einführung in die Modelltheorie für mich bisweilen den Charakter der Ausarbeitung einer (oder mehrerer) Vorlesungen. Dieser Eindruck wird durch die manchmal etwas oberflächliche Bezugnahme auf die Literatur noch verstärkt. Hinzu kommt die nicht vom Autor zu vertretende Tatsache, daß das Buch leider nicht gesetzt, sondern nur in Schreibmaschinendruck vorliegt. Den Anwendungen, insbesondere in der Algebra, widmet der Autor, wie schon der Titel ankündigt, besondere Aufmerksamkeit.

Die Darstellung ist meist sehr sorgfältig und durch zahlreiche Übungen ergänzt. Die Auswahl der Übungen ist gut getroffen. Bedauerlicherweise hat bei ihrer Erstellung der Autor jedoch nicht die gleiche Sorgfalt walten lassen wie beim Text: die Übungen 3.4, 3.8, 4.3, 13.3 enthalten falsche Behauptungen.

Ein bemerkenswerter Schwerpunkt dieser Einführung in die Modelltheorie ist der Anhang I über Nichtstandard Analysis. In diesem Anhang, der etwa ein Viertel (!) des ganzen Buches einnimmt, wird eine Grundlegung der Nichtstandard-Analysis gegeben, die derjenigen von Machover und Hirschfeld (Lecture Notes in Math. Nr. 94, Springer) folgt. Die Entwicklung der Begriffe und Methoden in diesem Anhang ist sowohl gut motiviert (was man nicht von allen Teilen des Buches gleichermaßen behaupten kann) als auch präzise durchgeführt. – Bei einer Grundlegung der Nichtstandard-Analysis ist oft gerade die Präzision ein Hindernis für die Verständlichkeit. – Die Darstellung darf ohne Zweifel als gelungen bezeichnet werden. Nur schade, daß das Integral nicht mit einbezogen wurde. Statt dessen frönt der Autor der Darstellung allgemeiner topologischer Begriffe im Rahmen der Nichtstandard-Analysis.

Neben dieser kleinen Kritik an der Themenauswahl in Anhang I (es gibt noch einen weiteren, sehr kurzen Anhang über Mengenlehre) sei noch eine Kritik an dem Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes angemerkt. Zum Beweis dieses wohl wichtigsten Satzes der Mathematischen Logik verwendet der Autor eine Methode (Forcing), die sich zwar auch an anderen Stellen des Buches verwenden läßt (und eben deshalb vom Autor benutzt wird), die aber in ihrer Undurchsichtigkeit ein Verständnis dieses Beweises behindert. Nicht umsonst fordert der Autor den Leser auf, den Beweis erst einmal zu überspringen, um ihn dann zu einem späteren Zeitpunkt „nach einer intensiven Beschäftigung mit der Modelltheorie“ wieder aufzugreifen.

Trotz aller geäußerter Kritik möchte ich den an der Modelltheorie und ihren Anwendungen Interessierten dieses Buch empfehlen. Es vermittelt einen guten Einblick und ist nicht zuletzt wegen seiner etwas eigenwilligen Zusammenstellung eine wertvolle Ergänzung der Literatur zur Modelltheorie.

Konstanz A. Prestel

Fenstad, Jens E., General Recursion Theory, an Axiomatic Approach (Perspectives in Mathematical Logic), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1980, XI + 225 S., geb., DM 78,–

Die gewöhnliche Rekursions-Theorie verfolgt das Ziel, den intuitiven Begriff der „Berechnung“ so einzufangen und zu formalisieren, daß er mathematischen Untersuchungen zugänglich wird. Diese etwa 50 Jahre alte Theorie gehört längst zum klassischen Bestand der Mathematik insbesondere aufgrund ihrer zahlreichen Anwendungen etwa in der Algebra (Wortprobleme in Gruppen, . .), Logik (Gödels Unvollständigkeitssatz, . .), Komplexitäts-Theorie und Computer-Wissenschaft. Es waren zunächst Probleme der Deskriptiven Mengenlehre und der Logik infinitärer Sprachen, die vor etwa 30 Jahren zu Verallgemeinerungen der Rekursions-Theorie führten. Die gewöhnliche Rekursion auf der Reihe $\mathbf{N}$ der natürlichen Zahlen ist so gut wie Rekursion auf der Menge HF der erblich endlichen (hereditarily finite) Mengen. Rekursion auf $\mathbf{N}$ führte zur Rekursion auf Ordinalzahlen und diese wiederum zu einer Theorie sogenannter „zulässiger Strukturen“ (admissible sets); Rekursion auf HF wurde zur Mengen-Rekursion verallgemeinert.

Das vorliegende Buch hat das Ziel, in diese und ähnliche verallgemeinerten Rekursions-Theorien einzuführen. Der Zugang ist axiomatischer Natur und das bedeutet, daß Berechnungs-

Strukturen zugrunde gelegt werden, die jeweils bestimmten Forderungen (Axiomen) genügen müssen. Das Buch ist in vier größere Teile gegliedert.

Teil A entwickelt die allgemeine Theorie und führt die Theorie der Berechnungen bis zu einer verallgemeinerten Fassung des ersten Rekursions-Theorems und einem Darstellungssatz.

Teil B befaßt sich mit „endlichen Theorien", d. h. mit Berechnungs-Theorien, die einen „vernünftigen" Endlichkeits-Begriff zulassen. Die hohe Bedeutung, die einer adäquaten Verallgemeinerung des Begriffes der endlichen Menge in der verallgemeinerten Rekursions-Theorie zukommt, hatte G. Kreisel erkannt. Der Verfasser wählt den von Y. Moschovakis vorgeschlagenen Endlichkeits-Begriff. Ihm wird als zweiter fundamentaler Begriff der der Präwohlordnung an die Seite gestellt. Darüber wird das Gebäude der Spector-Theorien aufgebaut, das sich als eine „richtige" Verallgemeinerung der hyperarithmetischen Theorie erweist.

Teil C ist den unendlichen Theorien gewidmet. Hier werden allgemeine Versionen der gewöhnlichen Rekursions-Theorie und vor allem die Theorie der „zulässigen Mengen" behandelt. Die Theorie der Inadmissibilität wird nur kurz gestreift. Ausführlicher wird die Theorie der Grade (und Reduzibilität) dargestellt.

In Teil D wird im wesentlichen Rekursion in höheren Typen und ihr Zusammenhang mit rudimentären Mengen-Funktionen und Mengen-Rekursion behandelt.

Das Buch gehört der anspruchsvollen Reihe der „Perspectives in Mathematical Logic" an. In den Monographien dieser Reihe sollen die behandelten Themen aus einer einheitlichen und deutlich umrissenen Perspektive heraus entwickelt werden. In dem vorliegenden Band ist es der axiomatische Standpunkt, von dem aus die verschiedenen Entwicklungslinien der Rekursions-Theorie gesehen werden. Seine Sicht der Dinge teilt der Autor in zahlreichen klar formulierten Bemerkungen mit, Ansichten, die Einsichten sind. Diese Bemerkungen sind eine große Hilfe für den Lernenden und zugleich aber auch ein Genuß für den Kenner.

Tübingen U. Felgner

Davenport, H., Multiplicative Number Theory (2nd ed. revised by Montgomery, H. L.) (Graduate Texts in Mathematics, vol 74). Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1980, xiii + 177 pp, Cloth, DM 37,–

Wie in anderen Gebieten der Mathematik gibt es auch in der Zahlentheorie gewisse Hauptströmungen, darunter das „große Sieb". Es gibt ausgezeichnete Buchdarstellungen davon, und das zu besprechende Buch nimmt dabei eine besondere Stellung ein. Es hat eine ganze Generation von Zahlentheoretikern nachhaltig beeinflußt, und vielen einen Zugang zum großen Sieb eröffnet. Im Zusammenhang mit dem großen Sieb hat es in unserer Zeit spektakuläre Entdeckungen gegeben.

Es geht in erster Linie um die Verteilung von Primzahlen in primen Restklassen. Nach Vorarbeiten von Linnik, Renyi und Roth wurde 1965 der mittlerweile berühmte Mittelwertsatz von Bombieri und A. I. Vinogradov bewiesen. Als Anwendung bestätigte Chen danach beinahe die Goldbach-Vermutung; er bewies, daß jede große gerade Zahl sich in der Gestalt $P_1 + P_2P_3$ ($P_{1,2,3}$ prim) schreiben läßt.

Das vorliegende Buch fand in der ersten Auflage großen Zuspruch. Jetzt ist es erfreulicherweise wieder erhältlich. Montgomery hat in der Revision viel von seiner eigenen Erfahrung eingebracht, doch den Stil des Buches weitgehend beibehalten. Die wichtigsten Vereinfachungen gehen auf Vaughan zurück.

Das Buch handelt unter anderem von multiplikativen Charakteren (daher auch der Titel Multiplikative Zahlentheorie), Funktionalgleichung und Nullstellenverteilung zugehöriger

L-Funktionen, Siegels Satz von der Ausnahmenullstelle, Exponentialsummen mit Primzahlen (mit Anwendung auf die Summe von 3 Prinzahlen) und vom großen Sieb.

Es ist anzunehmen, daß auch diese Auflage Anregungen zu neuen Entdeckungen geben wird.

Hannover G. J. Rieger

Bellman, R., Analytic Number Theory: An Introduction (Mathematics Lecture Notes Series, No 57) New York – Amsterdam: The Benjamin/Cummings Publ. Company 1980, 195 pp, hardbound, $ 19.50

Das vorliegende durch und durch ungewöhnliche Buch des renommierten Verfassers soll eine Einführung in die analytische Zahlentheorie geben; "the theme is the mean value of certain important elementary arithmetic functions, the Euler φ function, the divisor function, the squarefree function, and the prime divisor function."

Der Verfasser weist im Vorwort darauf hin, daß viele Themen ausgelassen wurden, insbesondere werden keine Exponentialsummen behandelt. Der Verfasser betont "... we have concentrated on the areas in which we have had greatest personal interest." Demnach befaßt sich der Autor, der viele wichtige Beiträge zur Analysis geleistet hat, reichlich mit Hilfsmitteln aus der klassischen Analysis; diese werden nach Meinung des Referenten gegenüber den eigentlich zahlentheoretischen Themen etwas überbetont.

Der Inhalt des Buches mag aus den unten folgenden Kurzbeschreibungen des Inhalts der einzelnen Kapitel hervorgehen. Jedes Kapitel schließt mit Kommentaren und einer Fülle von Literaturhinweisen. In jedem Kapitel finden sich auch viele „Exercises", die oft den Text ganz wesentlich ergänzen; der Schwierigkeitsgrad dieser Übungsaufgaben ist unterschiedlich, er reicht von einfachsten Übungen zur Analysis (Show that $1 - e^{-x} \geqslant 0$, if $x \geqslant 0$) über recht schwierige zahlentheoretische Aufgaben ("Use this result (gemeint ist die Perronsche Formel) to obtain an error term for the higher divisor function" oder "Show that if f(n) is additive and monotone, it must be a multiple of the logarithm") bis zu Forschungsprojekten ("Construct a theory of multiplicative functions for Gaussian integers").

Kap. I. "Estimates": Spezialfälle der Eulerschen Summenformel, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Abelsche partielle Summation, $\int_0^\infty \exp(-x^2)dx$. – Kap. II. "Transforms": Fourierreihen und Cesáro-Summierbarkeit, Parsevalsche Gleichung, die Fourier-, Laplace- und Mellin-Transformation. – Kap. III "Congruences": Der kleine Satz von Fermat, die Kongruenz $F(n) \equiv 0 \bmod p$ für $F(X) \in \mathbf{Z}[X]$. – Kap. IV. "The Γ Function": Funktionalgleichung, Stirlings Formel, Weierstraßsche Produktdarstellung, die Betafunktion. – Kap. V. "Riemann Zeta Function": Definition, Eulerprodukt, Möbiussche Umkehrformel, Multiplikative Funktionen, Funktionalgleichung der Zeta-Funktion, Primzahlsatz. – Kap. VI. "The Poisson Summation Formula": Summenformel, Anwendung auf Thetafunktionen, Gaußsche Summen. – Kap. VII. "Functional Equations": Funktionalgleichungen von Thetafunktionen. – Kap. VIII. "The Euler φ Function": Multiplikativität, die Mittelwerte $M(\varphi)$, $M(\varphi^2)$, und $M(\varphi \circ F)$ für ein Polynom $F(X) \in \mathbf{Z}[X]$. – Kap. IX. "The Divisor Function": Perrons Formel, die Mittelwerte $M(\tau)$, $M(\tau^2)$, and $M(\tau \circ F)$ für quadratische Polynome F. – Kap. X. "The Squarefree Problem" (welch "abus de language"!): Mittelwert $M(\mu^2)$, Pellsche Gleichung, asymptotische Auswertung von $\sum_{n \leqslant N} \mu^2(n^2+1)$. – Kap. XI. "The Prime Divisor Function, Selberg's Sieve Method, and Algebraic Independence": Es werden die Mittelwerte $M(\omega)$, $M(\omega^2)$ und $M(\omega \circ F)$ für $F(X) \in \mathbf{Z}[X]$ bestimmt, die obere Abschätzung bei Selbergs Sieb skizziert und die algebraische Unabhängigkeit gewisser zahlentheoretischer Funktionen untersucht. – Kap. XII. "Tauberian Theorems": Der Taubersatz von Hardy-Littlewood, untere Abschätzung des Fehlerglieds beim Teilerproblem.

Diese Kurzbeschreibung deutet auf einen reichhaltigen Inhalt hin. Dies wird erreicht durch knappste Beweisskizzen (oder fehlende Beweise), durch wenig Motivation und knappste Fassung von Beziehungen zu anderen Gebieten; oft werden aber nicht einmal die Behauptungen sauber formuliert. Als Beispiele für den Stil des Buches zitieren wir die vollständigen (!) Paragraphen 11.3 (p. 156), 12.7 (p. 183), 2.10 (p. 24) und 6.10 (p. 83).

"**11.3. The Mean Value of $2^{\omega(n)}$**
Using the representation above[1]) we readily find

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{N} 2^{\omega(n)} = c_1 N + O(\sqrt{N}).$$

We leave it to the reader to determine the constant c_1."

"**12.7. The Erdös-Selberg Method for the Prime Number Theorem**
Let us say a few words about the famous result of Erdös-Selberg concerning the prime number theorem. Many mathematicians have believed that is was impossible to find a proof of the prime number theorem without leaving the real line.
The Erdös-Selberg proof consists of two steps. First, classical methods are used to derive a non-linear recurrence relation. Then a Tauberian theorem is used to obtain from this relation the prime number theorem."

Oder, wenn L(f) als Abkürzung für die Laplace-Transformierte steht:

"**2.10. The Product Formula**
Consider the function

$$(1) \qquad h(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy.$$

Then we have the fundamental result of Borel

$$(2) \qquad L(h) = L(f)L(g).$$

The function h(x) is usually called the convolution of f and g. The validity of Borel's formula may be established under various conditions on f and g."

Oder

"**6.10. Sums of Squares**
We easily see that

$$(1) \qquad \left(\sum_n e^{-n^2 z}\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) e^{-nt}, {}^2)$$

where $r_k(n)$ is the number of representation(s) of n as a sum of k squares. If we make the change of variable $e^{-t} = z$, we can use Cauchy's formula to express $r_k(n)$. We expect that the modular transformation will help us to obtain an expression for $r_k(n)$. To accomplish this, the Farey dis(s)ection is very useful.

[1]) Gemeint ist $2^{\omega(n)} = \sum_{k^2/n} \mu(k).\tau(nk^{-2})$.

[2]) Nebenbei: Statt z müßte hier t stehen.

This program was carried out by Hardy. In the general case, the same method can be used for Waring's problem, as was done by Hardy and Littlewood. A different procedure, based on trigonometric sums, was used by Vinogradov."

Der Referent fragt sich, für wen dieses Buch geschrieben sein soll. Der Studierende, an den man bei den Worten "An Introduction" denkt, kann mit diesen hingeworfenen Brocken nichts anfangen. Wer hingegen auf zahlentheoretischem Gebiet arbeitet (oder dies beabsichtigt), weiß um die angeführten Dinge, und zwar i. a. mit viel mehr Details. Die vielen Literaturhinweise des Buches könnten eine wertvolle Hilfe sein, wenn sie nicht so unzuverlässig wären: Namen wie Turán, Pólya, Halász, Rényi, Rouché werden oft ohne Akzent geschrieben, bei Szegö, Hölder, Krätzel, Lindelöf etc. fehlen meist die Punkte über den Umlauten; Halberstam wurde in Halberstein umgetauft, Chandrasekharan in Chandrakersan, dessen zitiertes Buch heißt nicht "The Elementary Arithmetic Functions" sondern "Arithmetical Functions" (p. 76), H. Hasse erhält den Vornamen E. Hasse. Die Lösung des siebten Hilbertschen Problems wird Shneider und L. Gelfand (statt Th. Schneider und A. O. Gelfond) zugeschrieben. Namen wie Wirsing, Elliott, Prachar, Pintz, Hlawka, W. M. Schmidt, Iwaniec, H. L. Montgomery, R. C. Vaughan tauchen im Namensverzeichnis nicht auf; dabei haben etwa die beiden letztgenannten wichtige Ergebnisse über quadratfreie Zahlen erzielt und hätten unter den gut 50 Literaturhinweisen zu Kap. X unbedingt genannt werden müssen (wie auch Nair und verschiedene Arbeiten von Hooley, ebenso Hooleys Buch). Den Beweis des berühmten Ergebnisses von N. Levinson[3]) über die Nullstellen der Zetafunktion auf Re s = 1/2 soll man in Levinsons "Complex Variables", San-Francisco 1970 finden[4]). Zu Kapitel XI, in dem auch die Siebmethode behandelt wird, findet sich kein Hinweis auf die Standardwerke von Halberstam-Roth (Sequences), Halberstam-Richert (Sieve Methods) und H. L. Montgomery (Topics in Multiplicative Number Theory). Druckfehler gibt es reichlich, auch in Formeln (oft bezeichnen dort verschiedene Buchstaben dieselbe Größe). Gelegentlich entsteht der Eindruck, daß die einzelnen Kapitel nicht hinreichend aufeinander abgestimmt sind.

Die Übungsaufgaben stellen einen reichen Schatz dar, aber auch hier muß der Leser etwa bei Aufg. 1.11 (4) (p. 11), 8.8 (1) (p. 116) oder 5.8 (8) (p. 61) erst rätseln, wie diese Aufgaben zu interpretieren sind: Aufg. Nr. 3 und 4 (p. 126) und Aufg. Nr. 1.2 (p. 127) sind identisch. Der "Subject Index" enthält 24 Stichworte.
Nach Meinung des Referenten hätte das vorliegende Buch vor der Drucklegung eine gründliche Überarbeitung nötig gehabt. In der vorliegenden Form sollte es jedenfalls Studierenden nicht empfohlen werden.

Frankfurt a. Main W. Schwarz

Zagier, D. B., Zetafunktionen und quadratische Körper, Eine Einführung in die höhere Zahlentheorie (Hochschultext) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1981, 8 Abb., ix + 144 S., geheftet, DM 28,–

Das vorliegende Buch ist der analytischen Theorie der binären quadratischen Formen gewidmet. Im ersten Teil werden die analytischen Grundlagen (Dirichletsche Reihen, Riemannsche Zetafunktion, L-Reihen zu Dirichletcharakteren) bereitgestellt, wobei auch eine hübsche Einführung der Gammafunktion angegeben und der Formalismus zur Berechnung der Werte von

---

[3]) Advances Math. **13** (1974) 383–436. Math. Rev. **58** # 27837.

[4]) Siehe p. 75.– Dieses Buch ist übrigens gemeinsam von N. Levinson und R. M. Redheffer verfaßt.

L-Reihen an negativen ganzen Stellen dargestellt wird. In einem zweiten Teil wird die analytische Klassenzahlformel für binäre quadratische Formen hergeleitet und dann auf quadratische Zahlkörper uminterpretiert. Daß dabei nicht auch Ringklassencharaktere betrachtet wurden und somit nur die Theorie für Fundamentaldiskriminanten körpertheoretisch interpretiert wurde, ist zu bedauern. Das Buch schließt mit der Darstellung der wunderschönen Zusammenhänge zwischen Kettenbrüchen, Klassenzahlen und der Berechnung der Zetafunktionen an der Stelle 0 für indefinite Formen.

Graz F. Halter-Koch

Cohn, P. M. Universal Algebra, 2nd edition (Mathematics and its Applications, vol 6), Dordrecht: D. Reidel Publ. Comp. 1981, xv + 380 pp, Cloth, Dfl 85,–: paper, Dfl 37,50 (1st edition: Harper & Row, 1965)

Die Neuauflage von P. M. Cohns Buch „Universal Algebra" ist ein revidierter Neudruck der ersten Auflage, der durch vier weitere Kapitel ergänzt wurde. Dieses Taschenbuch ist als Einführungstext für den Anwender angelegt und nicht für den Spezialisten auf diesem Gebiet gedacht. Es stellt eine vorzügliche Einführung in die Grundbegriffe und fundamentalen Resultate der allgemeinen Algebra dar, aber der Leser, der einen Einblick in den heutigen Stand der Allgemeinen Algebra gewinnen will, wird andere Bücher dieses Titels zu Rate ziehen müssen. Die erste Auflage dieses Buches (hier Kap. 1 bis 7) bezog ihre Motivation aus Problemen der klassischen Algebra, die zusätzlichen Kapitel (8 bis 11) der zweiten Auflage erweitern das Blickfeld auf Aspekte der Kategorientheorie, der Modelltheorie sowie der Linguistik und Automatentheorie. Das Augenmerk dieses Buches bleibt jedoch die Rolle der Allgemeinen Algebra als übergreifende Theorie der verschiedenen algebraischen Einzeldisziplinen. Die ersten vier Kapitel enthalten die Grundbegriffe und den Aufbau der Allgemeinen Algebra, angefangen von den Grundlagen der Mengenlehre, der geordneten Mengen und Verbände sowie der Kategorientheorie über Algebren, Unteralgebrenverbände, Kongruenzverbände, subdirekter Darstellungen, freie Algebren und Wortprobleme bis zu Varietäten. Die Darstellung ist sehr stark kategorientheoretisch ausgerichtet. Die folgenden Kapitel V und VI enthalten eine Einführung in die Grundlagen der Modelltheorie und insbesondere die Konstruktion von Ultraprodukten und Axiomatisierungsfragen. In Kapitel VII und X werden Anwendungen auf die klassische Algebra insbesondere im Hinblick auf die Ringtheorie gegeben und die Kapitel VIII, IX und XI enthalten einen Überblick über Lawveres Kategorientheoretischen Zugang zu „Algebraischen Theorien", über unendliches Forcing und Modellbegleiter sowie über formale Sprachen und Automaten.

Insgesamt gibt dieses Buch einen guten Einblick in die Grundlagen der Allgemeinen Algebra hauptsächlich aus den Blickwinkeln der klassischen Algebra, der Kategorientheorie und der Modelltheorie, jedoch macht die stark kategorientheoretische Behandlung des Stoffes dem Anfänger das Lesen dieses Buches nicht gerade leicht.

Kassel H. Werner

Hungerford, T. W. Algebra (Graduate Texts in Mathematics, vol 73) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag, Reprint 1980 (Originally published by Holt, Rinehart and Winston Inc. 1974), 530 pp. Cloth, DM 45,–

Eigentlich hätte mir das Buch bekannt vorkommen müssen, als ich es zum ersten Male in der Hand hielt. Der veränderte Einband und Verlag hatten mich zunächst getäuscht. Schon vor mehreren Jahren hatte ich das Buch, von einem anderen Verlag herausgegeben, flüchtig gesehen. In unserer Bibliothek war es wohl aus Sparsamkeitsgründen nie angeschafft worden. In Erinnerung war mir daher nur, daß es einige zwar wohlbekannte aber in Lehrbüchern nur selten zu findende Sätze enthielt. Inzwischen habe ich mich davon überzeugt, daß es mehr als das bietet.

Wenn man einem Studenten eine umfassende Einführung in den Gesamtbereich der Algebra anbieten will, ohne dabei auf den einzelnen Gebieten schon in den Bereich der Spezialvorlesungen vorzudringen, dann scheint dieses Lehrbuch wie geschaffen dafür: Gruppentheorie bis zu den nilpotenten und auflösbaren Gruppen, dem Satz von Krull-Schmidt und den Sylowschen Sätzen (mit einem neuartigen, eleganten Beweis) – Ring- und Modul-Theorie mit Lokalisierungstechniken und der Struktur der Moduln über Hauptidealringen – Körpertheorie inklusive unendlich-dimensionaler Galoistheorie und Theorie der transzendenten Körpererweiterungen – kommutative Algebra bis zum Hilbertschen Nullstellensatz – Strukturtheorie der nichtkommutativen Ringe mit der Theorie der zentral einfachen Algebren, der halbeinfachen Algebren, des Jacobson- und Prim-Radikals – und schließlich eine kurze Einführung in die Kategorientheorie. Auffällig ist, daß die meisten Beweise die Überschrift „Sketch of Proof" tragen. Für den routinierten Mathematiker ist es ein Vergnügen, diese Beweise zu lesen. Die Beweisidee wird schnell klar, die Routine-Schritte, wie z. B. vollständige Induktion werden im Detail nicht ausgeführt. Für den ungeübten Studenten mag hier gelegentlich ein größeres Problem auftauchen. Es ist für ihn jedoch eine hervorragende Übung, die kleinen Punkte in den Beweis-Skizzen zu finden, die eines weiteren Arguments bedürfen, um dieses auszuführen. Der fortlaufende Text ist intensiv mit Beispielen durchsetzt. Darüber hinaus findet der Leser eine ungewöhnlich umfangreiche Aufgabensammlung (insgesamt 825 überwiegend sehr geschickt gewählte Aufgaben). Natürlich konnte sich auch hier der Autor nicht ganz der Versuchung entziehen, Lehrstoff in den Aufgaben unterzubringen, z. B. die Struktur der teilbaren abelschen Gruppen, der Satz von Wedderburn über endliche Schiefkörper, Hopkins' Satz, daß jeder artinsche Ring noethersch ist. Jedoch bezieht sich der Lehrstoff des Buches nicht auf solche Aufgaben.

Alles in allem ein Lehrbuch im guten amerikanischen College-Stil, das sowohl ein wertvolles Handbuch für den Dozenten einer Algebra-Vorlesung abgibt, als auch für den an der Algebra interessierten Studenten eine breite Basis bietet.

München B. Pareigis

Brieskorn, E., Knörrer, H., Ebene algebraische Kurven, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1981, XI + 964 S., sFr. 44,–/DM 48,–

Das vorliegende maschinengeschriebene, reichhaltig mit schönen Abbildungen und vielfältigen Reproduktionen (von Dürers Spinnenlinie bis zum Wankelmotor, von Quechua-Webtechnik bis zu keltischen Knotenornamenten) versehene Buch ist das im Frühjar 1978 fertiggestellte Skriptum einer einführenden Vorlesung über ebene algebraische Kurven, die der erste Autor 1975/76 für Studenten mittlerer Semester hielt. Dem Birkhäuser-Verlag ist zu danken, daß er diese inhaltsreiche Materialsammlung und Anregungsquelle in handlicher Form preiswert dem mathematischen Publikum zugänglich macht.

Das Buch will kein Lehrbuch (im üblichen Sinn), sondern ein Lesebuch sein. Es kommt ihm nicht darauf an, die Theorie der algebraischen Kurven möglichst weit zu entwickeln, sondern es will Appetit anregen. Die ebenen algebraischen Kurven dienen als Paradigma für das Wechselspiel algebraischer, analytischer und topologischer Methoden. An vielen Stellen wird weit ausgeholt zu Themen, die im Detail dann doch nur im elementaren Fall ebener Kurven oder nur für einfache Typen von Kurven (die elliptischen Kurven nehmen mehrfach den Platz eines exemplarischen Beispiels ein) explizit durchgeführt werden. Verbunden damit ist ein ausführlicher Vorlesungsstil, in dem heuristische, historische und methodische Überlegungen einen breiten Raum einnehmen (viele Seiten dienen nur der Suche nach der richtigen Definition eines Begriffes). Wer wenig Zeit hat, wird es vielleicht schwierig finden, das Buch zu benutzen; auch das 18seitige Stichwortverzeichnis macht es nicht zu einem knappen, formal präzisen, übersichtlichen Nachschlagewerk.

Wer sich die Zeit nimmt, den verschlungenen Pfaden des Buches zu folgen, wird reich belohnt, auch wenn der Anfänger nicht alle Bemerkungen verstehen oder in ihrer vollen Tragweite erfassen wird. Eine Fülle von höherer Mathematik in elementarer Ausprägung wird vor dem Leser ausgebreitet in ausgefeilter und reich bebilderter Form, die das jeweils betrachtete Objekt von möglichst vielen Seiten und in seinen mannigfachen Verbindungen im Gesamtgebäude der Mathematik sieht. Dies ist bisweilen mühsamer zu lesen als zu hören – der lebendige Vortrag, der mit leichter Hand Übersichtsskizzen entwirft und Einblicke vermittelt ohne auf alle Details einzugehen, wird in einem Skriptum nur unvollkommen eingefangen, wo u. a. auch die vorhandenen Lücken durch Literaturzitate oder weitere Anmerkungen gestopft werden. Die angestrebte Vielseitigkeit führt dazu, daß der Leser nicht nur von Kaustiken und Katastrophen, von exotischen Sphären und Chernschen Klassen, von regulär-singulären Punkten und Monodromiegruppen bei linearen homogenen Differentialgleichungen, von Ehresmann- und Gauss-Manin-Zusammenhängen hört, er erhält auch nebenbei eine elementare Einführung in die algebraische Topologie (simpliziale Homologie, Schnittring, Poincaré-Dualität, de Rham-Cohomologie, Lerays Corand).

Das Buch ist in 3 Kapitel gegliedert. Das erste, besonders attraktive Kapitel behandelt die Geschichte der algebraischen Kurven. § 1 (Ursprung und Erzeugung von Kurven) stellt eine Reihe einzelner algebraischer Kurven mit historischen Bemerkungen vor, eine wunderschöne Einführung in die Bücher von Loria und Gomez Teixeira sowie die Übersichtsartikel von Berzolari und Kohn-Loria in der alten Encyclopädie der Math. Wiss. § 2 (Synthetische und analytische Geometrie) würdigt Descartes' Leistung durch Koordinatisierung der Beispiele aus § 1 und Newtons reelle Klassifikation der kubischen Kurven. § 3 (Entwicklung der projektiven Geometrie) zeigt die Vorzüge der projektiven Betrachtungsweise auf, insbesondere an Hand der komplexen Theorie der kubischen Kurven, und untersucht die Topologie der auftretenden Objekte (Tori und Degenerationen).

Das zweite Kapitel untersucht Kurven mit elementaren algebraischen Methoden. § 4 (Polynome) enthält die klassische Algebra des Polynomrings einschließlich einer Diskussion und Zeichnung der Diskriminantenfläche für $x^4 + cx^2 + bx + a$, der Hilbertsche Nullstellensatz erscheint in dem Spezialfall des Studyschen Lemmas. § 5 (Definition und elementare Eigenschaften von ebenen algebraischen Kurven) liefert die ersten Grundbegriffe der Theorie und wendet sie auf die in Kap. I behandelten Kurven an; die intensivere Behandlung der Singularitäten deutet bereits auf den Schwerpunkt des Buches. § 6 (Schnitt ebener Kurven) entwickelt den Satz von Bézout mit Anwendungen in elementarer Weise aus der Resultanten-Definition der Schnittvielfachheit und führt den Begriff der dualen Kurve ein unter Benutzung eines nur zitierten Resultates aus der Eliminationstheorie. Ein zweites Mal wird der Satz von Bézout im Komplexen sodann topologisch gewonnen durch Berechnung des Schnittringes von $\mathbf{P}_n\mathbf{C}$, wobei an einigen Stellen (z. B. Übereinstimmung von topologischer und algebraischer Schnittzahl) bewußt Lücken bleiben. § 7 (Einige einfache Arten von Kurven) untersucht ebene algebraische Kurven vom Grad $\leqslant 3$, u. a. die Wendepunktskonfiguration und die j-Invariante einer elliptischen Kurve, sowie deren Struktur als abelsche Varietät.

Das dritte und letzte, zugleich zentrale Kapitel untersucht ebene Kurven durch die Auflösung ihrer Singularitäten und umfaßt mehr als die Hälfte des Buches. § 8 (Lokale Untersuchungen) liefert zunächst die allgemeinen lokalen Grundlagen der analytischen Theorie wie Weierstraßscher Vorbereitungssatz, Rückertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie; daß jede analytische Singularität algebraisch realisierbar ist, wird nur zitiert. Newton-Polygon und Puiseux-Entwicklung werden sehr ausführlich behandelt, ebenso wie die den ebenen Kurvensingularitäten zugeordneten Zöpfe und iterierten Torusknoten. Die topologische Klassifikation irreduzibler ebener Kurvensingularitäten durch die Puiseux-Paare wird angedeutet und auf den reduziblen Fall übertragen, eine analytische Klassifikation an Beispielen erläutert. Auch die Analyse und Auflösung ebener Singularitäten durch quadratische Transformationen, die zu einer äquivalenten Charakterisierung des topologischen Typs durch Multiplizitätensequenz bzw. Auflösungsgraph führt, wird ausführlich dargelegt, sodann wird die Milnorfaserung einer Singularität untersucht, wobei allerdings nicht auf die Deformation von Singularitäten eingegangen wird. Die Ergebnisse von § 8 werden in § 9 (Globale Untersuchungen) dazu benutzt, globale Invarianten von Kurven aus lokalen Invarianten ihrer Singularitäten zu berechnen. Zunächst werden die Plückerschen Formeln in der allgemeinen Fassung von Max Noether ausführlich hergeleitet, die Klasse und Zahl der Wendepunkte einer Kurve aus ihrem Grad und den lokalen Daten ihrer Singularitäten bestimmen. Dann werden analoge Formeln für das Geschlecht gewonnen, die von Clebsch und Noether stammen, und auf Kurven auf beliebigen Flächen übertragen. Der Schlußabschnitt behandelt Differentialformen auf Riemannschen Flächen und ihre Perioden, explizit wird eine Basis der Differentiale 1. Gattung bzw. der Differentiale 2. Gattung modulo exakten Differentialen bestimmt. Dies wird einerseits als konkretes Beispiel einer Hodge-Zerlegung vorgeführt, andererseits führt die konkrete Ausrechnung im Fall kubischer Kurven auf die hypergeometrische Differentialgleichung für die Perioden des Differentials 1. Gattung und die Bestimmung der zugehörigen Monodromiegruppe.

Die Druckfehlerhäufigkeit in diesem unkonventionellen Buch ist durchschnittlich (auf den 13 Seiten von § 4.4 fanden sich 13 Tippfehler), störende Druckfehler (die Verwechslung von Brauer mit Brouwer zähle nicht dazu) fielen mir nicht auf. Dem anregenden Buch sind nicht nur Leser zu wünschen, die auf dem Gebiet der Singularitäten arbeiten wollen; es ist eine Fundgrube für jeden Geometer, Algebraiker oder Analytiker, sei er Student oder Dozent.

Erlangen W.-D. Geyer

Franzoni, T., Vesentini, E., Holomorphic Maps and Invariant Distances (North Holland Math. Studies, vol 40) Amsterdam – New York: North Holland Publ. Comp. 1980, viii + 228 pp, Dfl. 65.00

In der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher spielen eine Reihe von invarianten Metriken eine ausgezeichnete Rolle. Ausgehend von der bekannten Poincaréschen Metrik ω auf dem Einheitskreis $\Delta \subset \mathbf{C}$ definierte Carathéodory 1928 auf jedem Gebiet $D \subset \mathbf{C}^n$ (zunächst nur für $n = 2$) eine stetige Pseudometrik c_D, die gegenüber allen biholomorphen Abbildungen invariant ist und insbesondere eine Metrik darstellt, wenn D beschränkt ist. c_D ist gerade die kleinste Pseudometrik auf D, so daß alle holomorphen Abbildungen $f : D \to \Delta$ kontraktiv sind. Erstaunlicherweise wurde erst 1968 die auf duale Weise charakterisierte invariante Pseudometrik von Kobayashi eingeführt und ihre Nützlichkeit für Anwendungen herausgestellt: $k_D \geqslant c_D$ ist die größte Pseudometrik auf D, so daß alle holomorphen Abbildungen $\Delta \to D$ kontraktiv sind. Beide Pseudometriken zeichnen sich dadurch aus, daß z. B. beliebige holomorphe Abbildungen $D \to D'$ Kontraktionen sind (im Gegensatz etwa zur Bergman-Metrik auf beschränkten Gebieten, die nur gegenüber biholomorphen Abbildungen invariant ist – dafür aber stets eine hermitesche Metrik ist).

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungsnachschriften der Autoren entstanden. Ziel ist, für die Gebiete in komplexen Banachräumen eine in sich geschlossene Darstellung der elementaren Eigenschaften von Carathéodory- und Kobayashipseudometrik zu geben. Dazu gehört dann auch eine Einführung in die unendlichdimensionale Funktionentheorie.

Entstanden ist ein sorgfältig ausgearbeiteter Text, der von Studenten mit Grundkenntnissen in Funktionentheorie und Funktionalanalysis gelesen werden kann.

Tübingen W. Kaup

Zimmermann, U., Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures (Annals of Discrete Mathematics 10) Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland 1981, x + 380 S., geb. Dfl. 125,–

Da die kombinatorische Optimierung keine generellen Methoden zur Optimierung nichtlinearer ganzwertiger Funktionen über diskrete Mengen kennt, hat man in den letzten Jahren immer wieder spezielle Methoden für einzelne – für die Anwendung relevante – Funktionstypen entwickelt. Die Fülle von Publikationen zur Algebraisierung kombinatorischer Optimierungsprobleme hat jedoch gezeigt, daß oftmals eine Reformulierung des kombinatorischen Optimierungsproblems als Optimierungsproblem über eine spezielle, geordnete algebraische Struktur von großem Nutzen ist und die Anwendung klassischer Verfahren zur algorithmischen Lösung solch nichtlinearer Probleme erlaubt.

Herr U. Zimmermann hat in dem hier vorliegenden Buch (seiner Habilitationsschrift) den umgekehrten und interessanteren Weg gewählt und dargestellt, in welchen algebraischen Strukturen man kombinatorische Optimierung betreiben kann. Dabei geht er von einer algebraischen Struktur (H, *, R, ¤) aus mit einem Semimodul H, Semiring R, innerer Komposition * auf H und äußerer Komposition ¤ und betrachtet für $S \subseteq R^n$ „lineare" algebraische Optimierungsprobleme der Form $\inf\{\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i ¤ c_1 \mid x \in S\}$.

Wie in der klassischen kombinatorischen Optimierung kann er nun, durch Aufprägung einer kombinatorischen Struktur auf S, algebraische Wegeprobleme, algebraische Netzwerkflußprobleme, algebraische Matroid- und algebraische Matchingprobleme unterscheiden. Interessant an diesem algebraischen Ansatz ist, daß man bei Fixierung der kombinatorischen Struktur auf S aber Variation der algebraischen Struktur bekannte kombinatorische Probleme erhält, deren Gemeinsamkeiten bisher nicht so offengelegt werden konnten.

Bei der Untersuchung algebraischer, kombinatorischer Optimierungsprobleme verfolgt der Autor vornehmlich folgende Ziele: a) Lineare Charakterisierung der zulässigen Mengen (Darstellung des zulässigen Bereichs als Lösungsmenge eines algebraischen Gleichungs- bzw. Ungleichungssystems), b) Entwicklung einer Dualitätstheorie und c) Angabe eines wenn möglich polynomialen Algorithmus (im Sinne der Komplexitätstheorie) zur Lösung des Problems. Die Ausführungen in den einzelnen Kapiteln zeigen dabei oft, daß bekannte Verfahren in sehr schöner Weise verallgemeinert werden können, bzw. daß verschiedene Verfahren als ein und der selbe Algorithmus – jedoch ausgeführt in verschiedenen algebraischen Strukturen – interpretiert werden können.

Das hier vorliegende Buch ist die erste umfassende Darstellung des heutigen Wissensstandes auf dem Gebiet der algebraischen Optimierungsprobleme. Der Autor hat sich der Mühe unterzogen, fast alle wichtigen und bekannten Resultate auf diesem Gebiet in seine Theorie einzuarbeiten und hat eine Reihe von eigenen neuen Resultaten hinzugefügt. Das Buch zerfällt in 2 Teile. Im ersten Teil stellt der Autor alle wichtigen Resultate über geordnete algebraische Strukturen zusammen, die er im zweiten Teil bei der Darstellung linearer algebraischer Optimierungsprobleme benötigt. Auch dieser erste Teil ist vollständig mit Beweisen versehen, so daß auch der nur mit Grundkenntnissen der Algebra ausgerüstete Leser eine gute Einführung in die Problemstellungen erhält.

Zum Inhalt: In den ersten drei Abschnitten werden geordnete Mengen, geordnete Gruppen und verbandsgeordnete Gruppen eingeführt und die wesentlichen Definitionen zur Matroidtheorie zusammengestellt. Abschnitt 4 führt zu den Dekompositionssätzen linear geordneter Teilerhalbgruppen von Clifford und Lugowski. Die Grundlagen zur Formulierung von Gleichungs- und Ungleichungssystemen und linearen Abbildungen über geordnete Semimoduln werden schließlich in Abschnitt 5 gelegt und mit Abschnitt 6 über linear geordnete Semimoduln über den reellen Zahlen sind nun alle Werkzeuge bereitgestellt, um mit dem eigentlichen Thema des Buches zu beginnen. Teil 2 des Buches beginnt mit algebraischen Wegeproblemen. Die Algebraisierung erlaubt hier einen einheitlichen Ansatz für eine Reihe sehr verschiedener kombinatorischer Probleme. Zur Lösung algebraischer Wegeprobleme werden wie im klassischen Fall Matrixmethoden verwendet. Es zeigt sich, daß die Gauß-Jordan Elimination eine Verallgemeinerung in gewissen idempotenten Semiringen zuläßt, sofern die zu behandelnde Matrix eine Stabilitätsbedingung erfüllt. Damit hat man eine gemeinsame Wurzel für eine Vielzahl verschiedener kombinatorischer Algorithmen in sehr schöner Weise herauskristallisiert. Im Abschnitt 9 werden Eigenwertprobleme in Semiringen betrachtet. Der Autor zeigt hier die Verwandtschaft algebraischer Eigenwertprobleme mit algebraischen Wegeproblemen auf und zeigt insbesondere Anwendungen für die Semiringe $(\mathrm{R}, \max, +)$ und $(\mathrm{R}_+ \cup \{\infty\}, \max, \min)$. Abschnitt 10 behandelt Extremal-Linearprogramme über Semiringe, welche von residuierten verbandsgeordneten kommutativen Monoiden G abgeleitet sind und beweist für den Spezialfall verbandsgeordneter, kommutativer Gruppen G einen starken Dualitätssatz. Als Anwendungen werden u. a. Maschinenreihenfolgeprobleme diskutiert und explizite Lösungsmethoden für extremale Gleichungs- und Ungleichungssysteme im Fall beschränkt linear geordneter kommutativer Gruppen vorgestellt. Für Gleichungssysteme werden mittels Schrankenmethoden ähnliche Ergebnisse hergeleitet. Wie im klassischen Fall ist die Theorie algebraischer linearer Programme Grundlage für eine Algebraisierung schwieriger kombinatorischer Optimierungsprobleme. Im Abschnitt 11 wird deshalb auch recht ausführlich dargestellt, welche minimalen Anforderungen an die algebraische Struktur zu stellen sind, damit eine Dualitätstheorie für algebraische lineare Programme möglich wird. Zum Beweis eines Dualitätssatzes genügt ein linear geordneter Teilermonoid H mit schwacher Kürzungsregel, welcher gleichzeitig ein linear geordnetes Semimodul über den positiven Kegel R_+ eines Unterrings des geordneten reellen Zahlenkörpers ist. Es zeigt sich jedoch, daß die gewohnte Symmetrie dualer Programme dabei verloren geht. Mittels einer Indexbedingung lassen sich jedoch Komplementaritätsbedingungen herleiten und im Falle eines erweiterten Semivektorraums über R_+ gibt der Autor sogar ein primal-duales Simplexverfahren an, welches als konstruktiver Beweis für einen starken Dualitätssatz algebraisch linearer Programme dient. Zahlreiche Beispiele und Spezialisierungen schließen dieses sehr inhaltsreiche Kapitel. Im Abschnitt 12 werden algebraische Flußprobleme behandelt. Es zeigt sich, daß die primaldualen Verfahren von Ford und Fulkerson ebenfalls eine Algebraisierung erlauben und somit auch Transport- und Zuordnungsproblem mit einer algebraischen Zielfunktion versehen werden können. Im letzten Abschnitt wendet sich der Autor kombinatorischen Optimierungsproblemen zu und stellt algebraisierte Versionen des Greedy-, des 2-Matroid-Schnitt- und des Matchingalgorithmus vor. Eine Bibliographie mit über 250 Referenzen rundet diese schöne Darstellung algebraischer Methoden in der Optimierung ab.

Erlangen A. Bachem

Heuser, H., Lehrbuch der Analysis, Teil 1 (Mathematische Leitfäden), Stuttgart: B. G. Teubner Verlag 1980, 644 S., Kart. DM 48,–*)

Es fehlt nicht an Lehrbüchern der Analysis für das erste Semester, und man muß auch sagen, daß die meisten ganz brauchbar sind; ein wirklicher Fortschritt über gute Bücher, die schon vor 50 Jahren existierten, ist allerdings selten zu sehen. Das Hauptbedenken gegen die meisten Bücher ist, daß sie so wenig Material enthalten, und man wird daher mit Interesse in dieses Buch schauen: Es ist ein dickes Buch, und in der Tat, es bringt eine Fülle von Material.

Diesen Vorzug guter alter Bücher versucht der Verfasser nun mit unseren hochgeschraubten Forderungen nach begrifflicher Strenge zu verbinden, und er bietet seinen Lesern überdies viele historische Hinweise, literarische Reminiszenzen und etwas blumige Ermunterungen. Hierin gefällt mir das Buch weniger; ich sage das rundheraus vorweg, weil es doch in anderer Hinsicht ein lobenswertes und nützliches Buch ist. Die „Grundlagen" zunächst: Erst auf Seite 142 beginnt die Analysis mit der Lehre von den Grenzwerten. So lange muß der Leser sich im Grunde in Pendanterien, Konventionen, Definitionen und Trivialitäten herumtreiben, und soviel auch vom reichen Teppich der Analysis, von Höhenluft, hellem Licht und dem Apostel Paulus die Rede sein mag, es hilft nicht: Die Sache ist substanzlos und für den am Logischen und Axiomatischen Interessierten ist die Darstellung schließlich doch ungenügend. Was soll man sich bei dem Satz: „Eine Gesamtheit von Dingen, die nicht notwendigerweise alle verschieden sind, nennen wir nicht Menge, sondern System, . . ." (17) denken? Warum wird z. B. der Wohlordnungssatz für $\mathbf{N}$ (sehr ungeschickt) bewiesen, wenn man doch bald manches viel weniger Klare gutgläubig oder anschaulich hinnehmen muß? Das „Auswahlaxiom" wird in dem Buch nicht erwähnt und das Unkonstruktive der heutigen Mathematik sogar in unzulässiger Weise verschleiert, wenn es heißt, mit dem Cauchykriterium könne man „grundsätzlich bei *jeder* Reihe entscheiden, ob sie konvergiert oder divergiert", (203). Ein Student, der das Grundlegende noch nicht kennt, wird sich trotz gutem Zureden auch später manchmal verlieren: Was ist ein Integral? Mehrere Seiten wüster Konstruktion mit Riemannschen Summen (447ff). Und dann das Differential: „Heute verstehen wir ganz unmystisch unter dem Differential dx der unabhängigen Veränderlichen x *irgendeine* Zahl und definieren das zugehörige Differential df der Funktion f an der Stelle ξ durch $df := f'(\xi)\,dx$ (die Schreibweise df ist insofern unbefriedigend, als sie weder die Stelle ξ noch das Differential dx erkennen läßt)" (269). – Im zweiten Teil soll übrigens auch der Satz von Stokes kommen.

Nun zum Historischen: Wir erfahren das Geburts- und Todesjahr vieler Mathematiker, und entgehen fast keiner der abgenutzten Kolleggeschichten – ohne daß es je einen Beleg gäbe. Was sagte doch Kronecker? „Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen . . ." (33), auf Minkowski geht angeblich die Dreiecksungleichung im $\mathbf{R}^n$ zurück (97). Wirklich? „Strenge Konvergenzbetrachtungen, ja erst die Skrupel darüber, was denn überhaupt ein Grenzwert sei, sollten erst mit Cauchy und Gauß beginnen", (385). Hatte Newton wirklich keine „Skrupel"? – bei diesem „kecken Vereinfachungsverfahren" (320)? und Bolzano? Von Aristoteles erfahren wir, daß er „kein aktual Unendliches, sondern nur ein potentiell Unendliches . . . zulassen wollte", und daß er den Fallgesetzen ganz zuwiderlaufende Vorstellungen hatte (326), es „mußte erst ein Newton kommen . . ." – vielleicht auch ein Galilei? Man darf ja im Kolleg zur Unterhaltung mancherlei erzählen, aber wenn ich wieder einmal eine Entstellung der Zenonischen Lehre lese, und die Behauptung: „Zenon hätte sein Sprinterparadoxon schwerlich auf den Markt der Meinungen zu bringen gewagt, wenn ihm bewußt gewesen wäre, daß eine streng wachsende Zahlenfolge sehr wohl nach oben beschränkt sein kann" (194), so kommen mir Zweifel, ob hier Ergebnisse ernstlichen Quellenstudiums mitgeteilt werden.

Wozu überhaupt will man sich mit so viel Bildungsreminiszenzen schmücken, wenn man doch von ganz anderen Interessen geleitet ist: Über Konvergenz muß man sich Gedanken machen, um „den Bedürfnissen der Praxis" zu genügen (142). Was „eine Erstinvestition im Werte von K

---

*) Anmerkung: Die 2., durchgesehene Auflage erschien im September 1982, DM 52,–.

Mark nach n Konsumschritten" (143) für eine Erhöhung des Volkseinkommens bewirkt (wenn man an die Theorie von Keynes glaubt, der übrigens nie erwähnt wird, obwohl er doch oft gegenwärtig ist), darauf ein „helles Licht" zu werfen, ist ein anhaltendes Bemühen des Autors.

Und in der Tat, wenn man von den Anwendungen, den Beispielen, den Rechenverfahren, asymptotischen Formeln angezogen ist, und im Allgemeinen und Grundsätzlichen nicht weit über den Schulstoff hinausgehen möchte, dann ist dies das richtige Buch. Es bietet eigentlich, was viele Kollegen der angrenzenden Fakultäten von uns erwarten: Reiche Übung in Beispielen, Anwendungen auf Raketenstart, Autobremsung, Konstruktion von Radios, Sparen der Heizenergie, Ausbreitung von Läusen, Wahrscheinlichkeit von Unfällen, Bekämpfung des Lärms, Wachstum der Menschheit. Und in dem dicken Buch findet sich Raum für viele schöne klassische und substanzreiche Rechnungen und Sätze: Die Eulersche Summenformel, die Stirlingsche Formel, das Abelsche Theorem, die Zetafunktionen, Räuber-Beute-Gleichungen. Hier liegt der Nutzen und Gewinn des Buches. Die Lust an elementaren Formeln und ihrer möglichen Bedeutung, zumal außerhalb der Mathematik, aber auch außerhalb ihres Entstehungsgebietes in der Mathematik – analytischer in der Zahlentheorie – ist das eigentliche Element, wo der Autor sich entfalten kann. Im Geometrischen fehlt es wieder (das zeigt sich bei der Behandlung der Schwingungsgleichung, auch beim Integral). Nach dem Gewinn, den es bringt, soll das Buch beurteilt werden, und so wollen wir es empfehlen, für Lehrer, für Volkswirte, für Studenten nach den ersten Semestern als Übungsfeld, für Professoren als reiche Materialquelle.

Regensburg — Th. Bröcker

Heuser, H., Lehrbuch der Analysis, Teil 2 (Mathematische Leitfäden), Stuttgart: B. G. Teubner Verlag 1981, 736 S., Kart. DM 58,–

Auch der zweite Teil des Lehrbuches der Analysis von H. Heuser ist mit seinen rund 700 Seiten weit mehr als eine dürre Anhäufung von Definitionen, Sätzen und Beweisen aus wichtigen Bereichen der Analysis, mit denen ein Mathematikstudent sich nach Möglichkeit in seiner ersten Studienhälfte vertraut machen sollte.

Zunächst kurz zum Inhalt: Auf eine Behandlung von Banachräumen mit Anwendung auf die Lösung von Differential- und Integralgleichungen und eine Einführung des Lebesgueschen Integrals auf der Zahlengeraden folgt eine ausführliche Diskussion von Fourierreihen mit verschiedenen Anwendungen. Über Umgebungsfilter werden topologische Räume eingeführt und die für die Analysis wichtigen topologischen Grundtatsachen bereitgestellt. In einem rund 100 Seiten langen Kapitel wird dann die Differentialrechnung im $\mathbf{R}^p$ dargestellt, ergänzt durch kurze Abschnitte über Differentiation in Banachräumen und komplexe Differentiation. Ein Kapitel über Wegintegrale führt u. a. bis zur Cauchyschen Integralformel. Nach einer Behandlung von mehrdimensionaler Riemann-Integration werden zunächst die Gaußschen Integralsätze und eine klassische Version des Stokesschen Integralsatzes bewiesen, ehe dann die allgemeine Form des Stokesschen Satzes mit der dazu erforderlichen Maschinerie behandelt wird. Wie nach dem Abschnitt über Wegintegrale schließt sich ein Kapitel mit Anwendungen an. Ganz kurz wird dann noch Lebesgueintegration im $\mathbf{R}^p$ behandelt. Die Fixpunktsätze von Brouwer, Schauder und Kakutani mit Anwendung des letzteren auf die Existenz von Wettbewerbsgleichgewichten in einer reinen Tauschwirtschaft schließen den rein mathematischen Teil des Buches ab. In einem immerhin 70seitigen geschichtlichen Abriß werden dann mit kräftigen Strichen wesentliche Schritte in der Entwicklung der Analysis von den Pythagoräern bis zur Gegenwart dargestellt. Jeder der mathematischen Abschnitte ist durch Übungsaufgaben ergänzt.

Ein großer Gewinn ist das Buch vor allem wohl in zweierlei Hinsicht: Zum einen werden darin so ausführlich und überlegt formuliert, wie man es sich in einer Vorlesung nur wünschen könnte, die Absichten erläutert, die in den einzelnen Abschnitten, Sätzen oder Beweisen verfolgt werden, und die Einführung neuer Begriffe ausgiebig motiviert. Zum anderen ist das Buch immer wieder aufgelockert durch viele Anwendungen in den verschiedensten Bereichen, wie sie in dieser Fülle und Ausführlichkeit wohl kaum in einer Vorlesung unterzubringen sind. Daher wird es nicht nur der Student gern zum Selbststudium, sondern auch der Lehrende als Fundgrube für eine Vorlesung benutzen. Andererseits fordert selbstverständlich die gewählte Art der Darstellung, bei der wesentlich mehr als bei einer ganz knappen Schreibweise persönliche Vorstellungen zum Ausdruck kommen, in einzelnen Punkten zur Kritik heraus. Auch über die rein mathematische Behandlung – so wird hier und dort ohne Notwendigkeit sogleich mit Koordinaten gearbeitet (z. B. Ableitungen als Matrizen eingeführt) – mag man an verschiedenen Stellen anderer Auffassung sein.

Insgesamt halte ich aber das Buch von H. Heuser für eine wertvolle Bereicherung des Angebots an deutschsprachigen Büchern über Analysis.

Bielefeld W. Hansen

Strubecker, K., Einführung in die Höhere Mathematik. Band III: Integralrechnung einer reellen Veränderlichen, München – Wien: R. Oldenbourg 1980, XV + 807 S., 256 Abb., DM 88,–

Der Verfasser setzt sein eindrucksvolles Werk mit dem Band III (Integralrechnung) fort. Die beiden ersten Bände (Grundlagen, Differentialrechnung) wurden im Band 72 des Jahresberichts besprochen. Ein vierter Band wird Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen behandeln. Im Vorwort beschreibt der Verfasser die Richtung des Buches: „eindringliche Breite der Darstellung, zahlreiche Beispiele, viele Anwendungen und manche erläuternde Bemerkungen"; und er gibt die Stichworte: Lehrbuch, Vertiefung, Selbststudium, zu Rate ziehen; Mathematiker, Ingenieure, Lehrer. Das folgende Referat schildert den Aufbau des Buches und manche Einzelheiten, um dem Leser ein Bild von der Reichhaltigkeit des Werkes zu geben.

Die zum Integralbegriff führenden Überlegungen werden besonders ausführlich motiviert und erläutert, auch mit historischen Beispielen (Archimedes, Cavalieri, Fermat). Der Aufbau folgt zunächst der Linie Darboux und Jordan (Einschließung), um schließlich in die Riemannsche Definition (Grenzwert) einzumünden. Behandelt werden auch die Integrierbarkeitskriterien von Lebesgue sowie die Totalvariation. Geometrische Deutungen und Anwendungen (Sektorformel, Spiralen, Drehkörper; Arbeitsleistung bei Seilwinde, Dehnung, Kolbenhub) sowie die Keplersche Faßregel (elliptische Dauben; Fehlerformel und Rechenbeispiele) vermitteln dem Leser einen zusätzlichen Einblick.

Das anschließende Kapitel bringt Mittelwertsätze, Ungleichungen, Stammfunktionen (mit analytischen und numerischen Beispielen sowie Anwendungen: Temperatur, Wechselstrom). Dann wird die Lehre von den systematischen Integrationen sehr ausführlich dargestellt: Grundintegrale, partielle Integration, Substitution; rationale, algebraische, transzendente Funktionen; Reihen. All das ist versehen mit vielen didaktischen Hinweisen, Tabellen, Zeichnungen, Konkretisierungen (spezielle Kurven und Integrale). Der Verfasser geht auch auf grundsätzliche Fragen ein (Liouville, Richardson, Turing) und gibt insbesondere bei den Reihenentwicklungen zahlreiche interessante Beispiele.

Die umfangreichen Lehrerfahrungen des Verfassers zeigen sich besonders bei der Einführung uneigentlicher Integrale: Er kennt die Lernschwierigkeiten und beugt ihnen durch gründliche Erläuterungen vor. Die allgemeinen Sätze und Regeln ergänzt er durch etliche Einzelfälle (Gammafunktion, Normalverteilung, Fresnelsche Integrale). Den Cauchyschen Hauptwert verdeutlicht er im Rahmen der Tragflügeltheorie. Ähnlich reichhaltig ist das Kapitel über die Definition von Funktionen durch bestimmte Integrale (elliptische Funktionen, Integrallogarithmus, allgemeine Parameterintegrale auch im uneigentlichen Fall).

Erfreulich eingehend behandelt der Verfasser die numerische Integration, von der Trapezformel bis zu Romberg, Gauß (samt Primzahlsatz) und Tschebyscheff – mit Fehlerabschätzungen und zahlreichen Beispielen. Den Abschluß bildet die Eulersche Summenformel (Bernoulli-Polynome, Stirlingformel). Ausgiebig sind auch die Anwendungen auf Geometrie und Mechanik: Bogenlänge (auch näherungsweise), Hüllkurven, Kinematik, Oberfläche, Erdellipsoid, Schwerpunktsbestimmungen; dazu viele Formeln und Zeichnungen: Quadriken, Spiralen, Kardioide, Lemniskate usw. Schließlich geht er kurz auf graphische und instrumentelle Integrationsverfahren ein (interessante Bilder; Anwendungen: Balken, Arbeitsdiagramme). Das Schlußkapitel ergänzt die vielen historischen Hinweise im Text und schildert die Entwicklung der Integralrechnung von der Antike bis zu Lebesgue.

Wer von der mathematischen Autobahn abweicht, verzichtet auf trügerische Bequemlichkeit und lernt interessante Gebiete kennen. Alle Mathematiker sollten derartige Exkursionen unternehmen und so ihr Blickfeld erweitern. Darum sei das Buch jedermann warm empfohlen: Igitur eme, lege, fruere! (Quelle und Übersetzung findet der Leser im Vorwort des besprochenen Bandes.)

Tübingen K. Zeller

Pham, F., Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin (Progress in Mathematics, vol 2) Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1979, 334 pp., paperback, DM 42,–

Der Titel des Buches erinnert sogleich an den in der algebraischen Geometrie und der Theorie der Singularitäten wohlbekannten Gauß-Manin-Zusammenhang. Die abweichende Bezeichnung kommt dadurch zustande, daß dieser hier im Rahmen der Theorie der Differentialsysteme behandelt wird. Dies bedeutet eine Verlagerung des Akzents in Richtung auf die Analysis.

Den Hauptteil des Buches bilden die Abschnitte 2 und 4, in denen F. Pham eine Einführung in die Theorie der Differentialsysteme und ihrer Mikrolokalisierung gibt; dabei wird das Gauß-Manin-Differentialsystem besonders berücksichtigt. Für die Motivation ist die Einführung wertvoll, die F. Pham den beiden Abschnitten voranstellt. Zum Begriff des Differentialsystems gelangt man, wenn man Systeme linearer partieller Differentialgleichungen lediglich bis auf formale Äquivalenz studiert. Genauer handelt es sich bei einem Differentialsystem um einen kohärenten Modul über der Garbe der Keime linearer partieller Differentialoperatoren. So läßt sich ein integrabler Zusammenhang auf einem Vektorbündel – wie der Gauß-Manin-Zusammenhang – als Differentialsystem auffassen. Der Vorteil dieser Begriffsbildung zeigt sich bei singulären Zusammenhängen, bei denen im Vergleich zur traditionellen Begriffsbildung eine stärkere Differenzierung möglich ist. Aus diesem Grunde ist es für diejenigen, die sich mit dem Gauß-Manin-Zusammenhang befassen, sehr zu empfehlen, sich mit der zunächst recht ungewohnten Theorie der Differentialsysteme vertraut zu machen, und das vorliegende Buch ist für diesen Zweck sehr nützlich.

Einen Eindruck von der Anwendung der eingeführten Begriffsbildung auf die Theorie der Singularitäten vermitteln die von anderen Autoren verfaßten Abschnitte 3 und 5. In Abschnitt 3 – der Thèse von Lo Kam Chan – wird unter anderem eine Abschätzung für die „charakteristischen Exponenten" des Gauß-Manin-Differentialsystems hergeleitet. In Abschnitt 5, einer Arbeit von Ph. Maisonobe und J. E. Rombaldi, werden die verschiedenen Arten von

„Lösungen" des Gauß-Manin-Differentialsystems charakterisiert; unter anderem erhält man dabei einen neuen Beweis der Picard-Lefschetz-Formeln.

Unabhängig von der Anwendung auf die Theorie des Gauß-Manin-Zusammenhangs ist das vorliegende Buch auch denen zu empfehlen, die sich allgemein mit der Theorie der Differentialsysteme vertraut machen wollen. Ohne eine derartige Vorbereitung ist es schwer, auch nur ungefähr zu erfassen, um was es in der einschlägigen Literatur geht.

Münster H. A. Hamm

Goldstine, H. H., A History of the Calculus of Variations From the 17th through the 19th century (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol 5) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1980, 66 figs., xviii + 410 pp., cloth, DM 88,–

Der vorliegende Band ist der fünfte in einer höchst beachtlichen Reihe "Studies in the History of Mathematics and Physical Science". Das Gewicht der erschienenen Bände und das geistige Ziel, das sich abzeichnet, könnten es sehr wohl empfehlen, alle Bände einmal unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt zu referieren. Hier soll aber nur der 1980 erschienene Band 5 von H. H. Goldstine über die Geschichte der Variationsrechnung besprochen werden.

Die prinzipielle Alternative zwischen einer ideengeschichtlichen Darstellung und einer biographisch-historischen Beschreibung wird hier konsequent zugunsten der ersten Möglichkeit entschieden. Ein neugieriger Betrachter kann das manchmal bedauern. Nach einer gewissenhaften Diskussion von Eulers Buch „methodus inveniendi lineas curvas . . ." mag man gespannt sein, was ein so außerordentlicher Mann in den Jahrzehnten seines Lebens danach getan oder gedacht hat – das vorliegende Buch verliert ihn aber rasch aus dem Auge. Der nächste Abschnitt im Text bespricht die ersten Arbeiten von L. de Lagrange.

Wenig erfahren wir auch über die alltäglichen Lebensumstände, die seinerzeit dieser oder jener große Mathematiker vorfand. Die Spannung des Textes lebt von den Problemen, die schon dem 17. Jahrhundert geläufig waren, und die erst unser Jahrhundert in einem gewissen Sinn vollständig gelöst hat.

Das Buch bespricht die wichtigen Arbeiten aus der Geschichte der Variationsrechnung mit Genauigkeit und Ruhe. Der Text beginnt mit einer spektakulären Arbeit von L. Newton über ein erstaunliches Problem: „Wie soll ein Schiffsrumpf aussehen, damit der Widerstand des ihn umströmenden Wassers minimal wird?". Danach kommen die Arbeiten von Leibniz und die der beiden Bernoullis. Selbst der Satz des Buches ist hier sehr schön. Abgedruckt sind (als Fotodruck) die alten Figuren der Originalarbeiten, die Erklärungen verwenden die Symbole der alten Figuren; und der Verfasser findet doch stets einen Weg, im Text mit den alten Symbolen so in die Sprache heutiger Mathematik hinüberzugleiten, daß ein guter Student sofort verstehen kann, wie Probleme der Analysis damals bearbeitet worden sind. Manche Bemerkung im Text verdient es, Allgemeingut unter den heutigen Mathematikern zu werden, (e.g. p. 139: (Notice that Legendre seems to have invented the symbolism for a partial derivative. He says: . . .)).

Man könnte meinen, daß der zweite Teil des Buches über die Entwicklung der Variationsrechnung im vergangenen Jahrhundert weniger bedeutsam sein könne. Daß dies nicht so ist, liegt zu einem Teil daran, daß die Arbeiten von C. C. J. Jacobi (1836, 1838) so kurz und soweit ohne Beweise geschrieben sind, daß ihre Kommentierung und Entfaltung zwei Generationen beschäftigt hat. Auch diese Entwicklung ist, wenn wir jetzt zurückblicken, lehrreich und lohnend.

Wir sehen schließlich am Schluß des Buches, wie unter den Händen von K. Weierstraß, D. Hilbert, A. Kneser und anderen die Variationsrechnung für Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen die uns heute vertraute Gestalt angenommen hat, die etwa in den Lehrbüchern von C. Caratheodory heute noch gelesen wird.

Daß sich die Variationsrechnung seit 1900 noch einmal sehr gewandelt hat, insbesondere auf ihrem Weg zu Problemen für Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher, ist natürlich und wird nirgends berührt.

Ich halte das vorliegende Buch für einen vorzüglichen Weg, die klassische Variationsrechnung von den Klassikern selbst zu lernen.

Bochum R. Böhme

Schechter, M., Operator Methods in Quantum Mechanics, Amsterdam: North-Holland 1981, xxii + 324 p., Dfl. 90.00

Mathematische Vorlesungen, in denen interessante (und damit meist auch schwierige) Probleme aus den Anwendungen behandelt werden, finden an vielen Universitäten kaum statt, auch dann, wenn dafür geeignete Dozenten vorhanden sind. Als Grund hierfür wird meist die Tatsache genannt, daß eine mehrsemestrige Vorbereitungsvorlesung nötig wäre, um die Voraussetzungen bereitzustellen; nur selten halten genügend viele Studenten einen so langen Kurs durch. Viel öfter sollte deshalb der Versuch gewagt werden, ausgewählte Probleme schon bei einem relativ bescheidenen Kenntnisstand in Angriff zu nehmen und die erforderlichen Hilfsmittel ganz gezielt dann bereitzustellen, wenn sie benötigt werden. Das hat für den Studenten den großen Vorteil, daß die Motivation gleich mitgeliefert wird und die Tragweite der Resultate leichter erkannt werden kann. Eine ähnliche Zielsetzung verfolgt der Autor des vorliegenden Buches, das aus mehrjährigen Vorlesungen hervorgegangen ist.

Das Thema dieses Buches ist die Quantenmechanik, die bekanntlich zu vielen interessanten Fragestellungen in der Operatorentheorie und den Differentialgleichungen Anlaß gibt. Dabei beschränkt sich der Autor (leider, wie ich meine) ganz auf e i n Teilchen in e i n e r Dimension. Der Autor sagt dazu: „I found the theory so rich that I was able to fill this entire volume (über 300 Seiten) analizing only a single particle in one dimension. In fact, I was not able to cover all of the one-dimensional topics that I would have liked. It is true that most of the methods developed can be applied to systems of particles in higher dimension, but I found that there was enough to do in the simplest case." Es ist natürlich richtig, daß die meisten Methoden auch im höherdimensionalen Fall anwendbar sind, jedoch gibt die konkrete Anwendung auf die eindimensionalen Differentialoperatoren nur in wenigen Fällen einen deutlichen Hinweis darauf, wie man bei partiellen Differentialoperatoren vorzugehen hat. Dementsprechend sind die meisten konkreten Resultate so formuliert, daß ihre Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen (soweit sie existiert) nicht erkennbar ist. Aus dieser Sicht hätte ich eine Beschränkung auf etwas elementarere Fragestellungen begrüßt, wenn dadurch die Behandlung einfacher partieller Differentialoperatoren ermöglicht worden wäre.

Andererseits sind in vielen Fällen (z. B. bei der Untersuchung der wesentlichen Selbstadjungiertheit, des absolutstetigen Spektrums und in der Streutheorie) die dargestellten Methoden für die Untersuchung der gewöhnlichen Differentialoperatoren oft zu aufwendig. Relativ elementare Ergebnisse aus der Theorie der singulären Sturm-Liouville-Operatoren könnten die Resultate oft schneller liefern und wären der Problemstellung besser angemessen.

Um die Beweise zu vereinfachen, wird häufig auf die allgemeinste Formulierung der Sätze verzichtet, was ich sehr begrüße. Gelegentlich entsteht dadurch allerdings ein etwas schiefes Bild. So wird in Lemma 9.14.5 gezeigt, daß der Multiplikationsoperator mit einer reellen lokal-L_2-Funktion selbstadjungiert ist, obwohl dies auch für eine meßbare Funktion kaum schwerer zu beweisen ist. Unangemessen scheint mir auch der Beweis der Existenz einer Orthonormalbasis in L^2 mit Hilfe der Tatsache, daß $e^{-|x|^2} R_0(-1)$ kompakt ist ($R_0(z)$ ist die Resolvente von $H_0 = -\Delta$).

Vorkenntnisse werden vom Leser kaum erwartet: Gute Analysiskenntnisse, Funktionentheorie und ein geringes Grundwissen aus der Funktionalanalysis, insbesondere der Hilbertraumtheorie. Alle wichtigen Begriffe der Hilbertraumtheorie werden erklärt, die wichtigsten Sätze werden bei Bedarf angegeben und meist bewiesen. Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren wird am Ende des ersten Kapitels ohne Beweis angegeben, was aber nicht bedeutet, daß die Vertrautheit mit diesem Satz vorausgesetzt wird. Nicht bewiesene Sätze werden so erläutert und benutzt, daß der Leser auch dann gut damit umgehen kann, wenn er den Beweis nicht in einem anderen Buch nachliest.

In Kapitel 1 wird der mathematische Rahmen für die Quantenmechanik eines Teilchens in einer Dimension aus den Axiomen der Quantenmechanik entwickelt. Die Kapitel 2 bis 5 sind der Untersuchung des Spektrums gewidmet: wesentliches Spektrum, diskretes Spektrum (insbesondere negative Eigenwerte) einschließlich zahlreicher Kriterien zur Bestimmung des Spektrums. Auch Störungssätze für relativ beschränkte (Rellich-Kato) und relativ kompakte Störungen sind hier enthalten. In Kapitel 6 und 7 schließen sich die Grundlagen der zeitabhängigen Streutheorie für „short range" und „long range" Potentiale an, wobei viel Mühe auf die Klärung des Begriffs „Streuzustand" verwendet wird. Nach der Einführung in die stationäre Theorie in Kapitel 8 wird in Kapitel 9 und 10 das wichtige Problem der Vollständigkeit der Wellenoperatoren untersucht. Hier spielt die Faktorisierungsmethode (wie sie insbesondere von Kato-Kuroda und Schechter entwickelt wurde) eine zentrale Rolle. In Kapitel 11 wird u. a. gezeigt, daß auch bei oszillierenden Potentialen die Wellenoperatoren existieren und vollständig sein können. Kapitel 12 gibt eine Eigenfunktionsentwicklung an. In Kapitel 13 wird das Teilchen in einem beschränkten Intervall und auf der Halbachse untersucht, auch die Streutheorie auf der Halbachse wird dargestellt. Dabei wird gezeigt, daß mit Hilfe der Dirichletrandbedingung ein selbstadjungierter Operator erkärt wird; es wird aber nicht darauf eingegangen, weshalb gerade diese Randbedingung gewählt wird. In Kapitel 14 wird die Streuung an „hardcore" Potentialen behandelt. Kapitel 15 gibt das Invarianzprinzip für Wellenoperatoren, und in Kapitel 16 wird die Streutheorie unter Spurklassenbedingungen dargestellt und auf den eindimensionalen Fall angewandt.

Dieses insgesamt, auch in der äußeren Aufmachung, gut gelungene Buch macht viele der jüngsten Ergebnisse der Störungs-Spektral- und Streutheorie und ihre Anwendung auf gewöhnliche Differentialoperatoren gut zugänglich. Gemessen an der Schwierigkeit des Gegenstandes ist es sehr gut lesbar. Die Orientierung in dem Buch ist allerdings nicht ganz leicht: Das Stichwortverzeichnis läßt viele Wünsche offen, und wer würde schon den Satz von Rellich-Kato unter der Überschrift „The Potential" suchen. Als Vorlage für eine Vorlesung über mathematische Methoden der Quantenmechanik und als Begleittext zu einer entsprechenden Vorlesung oder einem Seminar scheint mir das Buch sehr gut geeignet.

Frankfurt/Main J. Weidmann

Hua, L.-K., Wang, Y., Applications of Number Theory to Numerical Analysis, Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1981 und Beijing: Science Press, ix + 241 pp., cloth, DM 78,–

Seit etwa 30 Jahren beschäftigt man sich mit Methoden, bei denen zahlentheoretische Resultate zur Lösung gewisser analytischer Aufgaben herangezogen werden. Das vorliegende Buch stellt die wesentlichen Zweige dieser Forschungsrichtung zusammenhängend dar.

Bei den analytischen Aufgaben handelt es sich um die Berechnung von Integralen über dem s-dimensionalen Einheitswürfel G_s, insbesondere im Falle s-fach periodischer Funktionen, um die Bestimmung der Lösungen Fredholmscher Integralgleichungen über dem Bereich G_s, um das Cauchysche Anfangswertproblem der s-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung über

$\mathbf{R}^s \times [0, \infty)$ und um das Dirichletsche Randwertproblem über G_s. Die zahlentheoretischen Resultate beziehen sich auf konkrete Fragen der diophantinen Approximation gewisser algebraischer Zahlen und vor allem auf Gleichverteilungsprobleme.

Im ersten Kapitel werden Einheiten algebraischer Zahlkörper, insbesondere die Einheiten der Kreisteilungskörper und der jeweils maximalen reellen Unterkörper vorgestellt. Sodann folgen im Kapitel 2 elementare Rekursionsformeln und ebensolche rationalen Approximationen für spezielle PV-Zahlen (Pisot-Vijayarghavan). Dies sind ganze Zahlen des betrachteten Zahlkörpers, die reell und größer als 1 sind, während alle Konjugierten dem Betrage nach kleiner als 1 sind. Das dritte Kapitel ist der Gleichverteilungsfrage gewidmet. Konkrete Aussagen, wie sie später benötigt werden, erhält man mit Hilfe des Begriffs der Diskrepanz einer Punktmenge aus G_s. Dem Studium dieser Diskrepanzfunktion und ihres Zusammenhangs mit diophantinen Approximationen dient das Kapitel 4. Die Gleichverteilungsprinzipien werden nun in den Kapiteln 5 bis 8 zur Aufstellung von Integrationsformeln und zur Abschätzung der numerischen Fehler verwendet. Speziell dienen dabei das Kapitel 5 dem grundsätzlichen Zusammenhang zwischen Gleichverteilung und numerischer Integration, das Kapitel 6 der Diskussion verschiedener Klassen periodischer Funktionen bei besonderer Berücksichtigung der Frage nach der Größenordnung der Fourierkoeffizienten, das Kapitel 7 der numerischen Integration periodischer Funktionen und endlich das Kapitel 8 der Diskussion des numerischen Fehlers. Optimalitätsaussagen für gewisse Integrationsformeln bezüglich spezieller Funktionenklassen stehen hier im Vordergrund der Betrachtungen. In den verbleibenden Kapiteln 9 und 10 werden approximierende Polynome, Fredholmsche Integralgleichungen, das Cauchysche Problem für die Wärmeleitungsgleichung im vollen Raum $\mathbf{R}^s$ und die Dirichletsche Randwertaufgabe der Laplace-Gleichung auf G_s behandelt.

Das Buch enthält eine Fülle von interessanten und tiefliegenden Resultaten. Leider erschwert das Fehlen eines Sachwortverzeichnisses die Orientierung stark. Versucht man, die Bedeutung der gewonnenen Verfahren, der Optimalitätsaussagen und der Fehlerabschätzungen für die Numerische Analysis zu bewerten, so darf man nicht außer Acht lassen, daß – bedauerlicherweise – die hier zugrunde gelegten Prinzipien nur einen Teil der numerisch relevanten Fragen erfassen können. Sicher sind in dem vorliegenden Buch bei weitem nicht alle derzeit bekannten Anwendungen der Zahlentheorie auf die Numerik enthalten.

Zusammenfassend muß aber gesagt werden, daß es sich hier um ein mit großer Sorgfalt und Sachkenntnis geschriebenes Werk handelt, das dem Spezialisten unentbehrlich sein wird.

Mannheim G. Meinardus

Brezinski, C., Padé-Type Approximation and General Orthogonal Polynomials (International Series of Numerical Mathematics, vol 50), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1980, 250 p, paperback, DM 68,–

Das Gebiet der Padé Approximation hat sich in den letzten Jahren besonders stark entwickelt, fünf Kongreßberichte und vier Monographien zum Thema verdeutlichen das. In einem lesenswerten Übersichtsartikel hat C. K. Chui [3] die wesentlichen Fragestellungen und wichtigen Verallgemeinerungen knapp angerissen. Die Bücher von G. A. Baker jr. [1], C. Brezinski [2], J. Gilewicz [4] und das vorliegende decken zwar recht unterschiedliche Teilbereiche der Padé Approximation ab, einen Ergebnisbericht ersetzen sie jedoch nicht.

Das vorliegende Buch verfolgt zwei Ziele. Einerseits wird ein einheitlicher Zugang zu bekannten und neuen Ergebnissen der Padé Approximation mit Hilfe verallgemeinerter orthogonaler Polynome aufgezeigt. Zum anderen wird mit einer Approximation vom Padéschen Typ eine allgemeinere und flexiblere Variante der Padé Approximation vorgestellt. Der grundlegende Ansatz beruht auf dem schon lange bekannten Zusammenhang des Momentenproblems mit Kettenbrüchen, der hier in neuer Form ausgenutzt wird.

Zu einer formalen Potenzreihe $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ ist eine rationale Funktion w/v mit Zählergrad $k - 1$ und Nennergrad k eine $(k - 1/k)_f$ Approximation vom Padéschen Typ, wenn bei vorgegebenem v die Beziehung

$$w(t)/v(t) - f(t) = O(t^k) \qquad t \to 0$$

erfüllt ist.

Die freie Wahl von v erlaubt es, Pole der Approximation vorzugeben. Faßt man die Koeffizienten c_i als Momente eines linearen Funktionals c über den reellen Polynomen auf, so ergibt sich die klassische Padé Approximation mit der Ordnung $O(t^{2k})$, wenn v orthogonal zu allen Polynomen kleineren Grades gewählt werden kann, d. h., es muß dann $c(vx^i) = 0$ für $i = 0, 1, \ldots, k - 1$ gelten. Hier liegt der Zusammenhang mit verallgemeinerten orthogonalen Polynomen. Approximationen $(p/q)_f$ vom Padéschen Typ werden über die $(k - 1/k)$ Approximationen definiert, die grundlegende Eigenschaft der Pole bleibt dabei erhalten.

Diese Approximation wird im ersten Kapitel eingeführt und auf grundlegende Eigenschaften hin untersucht. Die Möglichkeiten, die in ihrer Variationsbreite liegen, werden nur angedeutet, insbesondere ist der Bericht über Anwendungen zu kurz gehalten. Das schwierige Problem, die Pole der Padé Approximationen unter Kontrolle zu halten, wurde mit einer klugen Idee umgangen. Die allgemeine Konvergenztheorie ist aber auch hier nur wenig untersucht.

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit verallgemeinerten orthogonalen Polynomen und ihren Beziehungen zu verschiedenen Themenkreisen der numerischen Analysis. Die Ergebnisse sind wohlbekannt, sie werden ausführlich und flüssig dargestellt, wobei geschickt kompiliert und ergänzt wird.

Hierauf baut das dritte Kapitel auf, in dem ein Zugang zu wichtigen Teilen der Padé Approximation mit Hilfe verallgemeinerter orthogonaler Polynome gegeben wird. Die algebraischen Eigenschaften und Rekursionsbeziehungen werden formalisiert und dann zur Herleitung der wichtigen Algorithmen zur konkreten Berechnung benutzt. Ein solcher Algorithmus ist als Fortran Programm beigefügt, er erwies sich bei einem kurzen Test als sehr zufriedenstellend.

Im vierten Kapitel werden Verallgemeinerungen der Grundidee studiert. Es geht um einen topologischen ϵ-Algorithmus und um Padé Approximation für doppelte und Funktions-Potenzreihen.

Das Buch verlangt vom Leser Grundkenntnisse in angewandter Analysis und ist in sich selbst abgeschlossen. Es ist nicht unbedingt als Einstieg in die Padé Approximation geeignet, vermittelt aber einem fortgeschrittenen, am Thema interessierten Leser viele Informationen. Es werden reizvolle neue Fragestellungen eröffnet, deren Untersuchung lohnenswert erscheint.

[1] Baker, G. A., jun.: Essentials of Padé Approximants. New York: Academic Press 1975
[2] Brezinski, C.: Accélération de la convergence en analyse numérique (Lecture Notes in Math. 584) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977
[3] Chui, C. K.: Recent results on Padé approximants and related problems. In: Approximation Theory II, ed. by G. G. Lorentz, C. K. Chui, L. L. Schumaker, 79–115. New York – San Francisco – London: Academic Press 1976
[4] Gilewicz, J.: Approximants de Padé (Lecture Notes in Math. 667), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1978

Erlangen H. J. Schmid

Ivanov, V. V., The theory of approximate methods and their application to the numerical solution of singular integral equations (Mechanics: Analysis, vol 2) Leyden: Noordhoff International Publ., 1976, 348 pp., Cloth, Dfl 80.00

Das Buch ist für das Gebiet der numerischen Lösung singulärer linearer Integralgleichungen eine sehr gute Zusammenstellung der Theorie, verschiedener numerischer Methoden und Algorithmen und einer Anzahl von Anwendungsgebieten; es sind die bis zum Erscheinen des Buches gängigsten Verfahren behandelt, wobei der Autor auch viele eigene Ergebnisse eingearbeitet hat.

Zunächst wird in Kap. I eine allgemeine Theorie von Näherungsverfahren für Operatorgleichungen in Hilbert- und Banachräumen gegeben mit Betrachtungen über Konvergenz, Konvergenzrate, Stabilität, Algorithmen und Vergleich verschiedener Methoden, insbesondere Fehlerquadratmethode, Ritz-Galerkin-Verfahren, Iterationsverfahren, auch für nichtlineare Fälle, und Momentenmethode. Kap II bringt allgemeine Betrachtungen über lineare singuläre Integralgleichungen, geschlossen lösbare Fälle und theoretische Grundlagen. Kap. III behandelt ausführlich die numerische Lösung linearer singulärer Integralgleichungen mit Cauchy-Kern einschließlich Eigenwertaufgaben und Systemen von Integralgleichungen, und Kap. IV Integralgleichungen vom Convolutionstyp. Ein Anhang von 11 Seiten gibt einen kurzen Ausblick auf andere Typen, davon 2 1/2 Seiten auf nichtlineare Integralgleichungen.

Das sehr klar geschriebene Buch setzt vom Leser Elemente der Funktionalanalysis, auch der konstruktiven Funktionalanalysis, der Funktionentheorie, der gebräuchlichsten Rechenmethoden und Grundlagen der Theorie der singulären Integralgleichungen voraus. Bekannte Resultate werden im Zusammenhang mit Quellenangabe ohne Beweis genannt; weitergehende Untersuchungen werden sehr übersichtlich durch schwarze Randlinien gekennzeichnet. Es werden auch Zusammenhänge mit anderen Gebieten, insbesondere mit Randwertaufgaben bei Differentialgleichungen, Anwendungen auf Elastizitätstheorie, Hydrodynamik, theoretische Physik, optimal control u. a. beschrieben.

Es ist schade, daß das Buch, welches der numerischen Lösung von Integralgleichungen gewidmet ist, kein numerisches Beispiel bringt. Der Leser, der bei einer Anwendung die Lösung einer singulären Integralgleichung numerisch berechnet, würde einen Vergleich verschiedener Verfahren bezüglich Güte, Rechenaufwand, u. a. sicher sehr begrüßen; jedoch einem Leser, der an der Theorie der numerischen Verfahren interessiert ist, kann das Buch sehr empfohlen werden.

Hamburg L. Collatz

Todd, J., Basic Numerical Mathematics, vol 1: Numerical Analysis (International Series of Numerical Mathematics, vol 14) Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1979, 253 S., hardcover, DM 59,–

Das vorliegende Buch ist der erste Teil eines zweibändigen Werkes, von dem der zweite Teil „Numerical Algebra“ 1977 erschien. Es ist ein sehr originell geschriebenes Lehr- und Übungsbuch der numerischen Mathematik, welches von der jahrzehntelangen didaktischen Erfahrung des Autors zeugt. In den einzelnen Kapiteln wird oft mit einfach durchschaubaren numerischen Beispielen begonnen; für Leser, die nicht Spezialisten in numerischer Mathematik sind, wird so viel an Theorie gebracht, daß ein tieferer Einblick in den jeweiligen Sachverhalt möglich ist. Sehr viel Stoff wird in Form von Übungsaufgaben geboten, deren ausführliche Lösung auf 86 Seiten dargestellt wird. Der Autor behandelt oft „bad examples“, welche sehr zur Förderung des Verständnisses beitragen; er steht damit im Gegensatz zu vielen anderen Autoren, die oft Beispiele verwenden, die „gut gehen“, während es für den Lernenden wichtig ist, auch die Schwächen und Grenzen der verwendeten Methoden kennenzulernen.

Grundbegriffe der Analysis, Konvergenz und Stetigkeit werden vorausgesetzt. Nach einfachen Algorithmen werden Konvergenzrate, Konvergenzbeschleunigung und asymptotisches Verhalten, Lösung von Gleichungen für eine reelle Veränderliche, Approximation stetiger Funktionen durch Polynome, Interpolation, Quadratur, Predictor-Corrector-Methode bei Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen, Instabilität und Differenzenverfahren für 2-Punkt-Randwertaufgaben u. a. jeweils durch einfache Problemtypen behandelt. Das Buch kann für den Gebrauch neben den Vorlesungen und zum Selbststudium sehr empfohlen werden.

Hamburg L. Collatz

Engels, H., Numerical quadrature and cubature (Computational mathematics and applications), London: Academic Press 1980, XIV + 441 p., coth $ 74.00

Quadratur und Kubatur bilden einen klassischen Bereich der Numerischen Analysis, der jedoch nur selten gemeinsam abgehandelt wird. Diese Trennung mag verschiedene Gründe haben, zwei davon erscheinen offensichtlich. Im Eindimensionalen liegt eine gut ausgebaute Theorie vor, deren Beweistechniken aber nur selten direkt verallgemeinert werden können. Die wenigen Ergebnisse zur Kubatur dagegen werden häufig trivial, wenn sie auf den eindimensionalen Fall reduziert werden. Förderlich für die Problematik der Kubatur, aber auch für das Verständnis der Quadratur war diese Trennung nie. Schließlich zeigen auch die neueren Entwicklungen im Bereich der Kubatur, daß es Interpretationen der eindimensionalen Vorgehensweise gibt, die allgemein anwendbar sind.

H. Engels betrachtet in seinem Buch Quadratur und Kubatur aus einheitlicher Sicht, wobei konstruktive Methoden im Vordergrund stehen. Es wird ein gemeinsamer Kern entwickelt, von dem aus Quadratur und Kubatur dargestellt werden. Hierdurch treten gleichzeitig spezifische Schwierigkeiten des Mehrdimensionalen, aber auch die speziellen Verfeinerungsmöglichkeiten im Eindimensionalen deutlich hervor. Es werden die klassischen Ergebnisse, aber auch die neueren Entwicklungen behandelt. Der Inhalt gliedert sich nach Konstruktionsprinzipien. Quadratur und Kubatur werden – soweit das möglich ist – gemeinsam behandelt, spezielle eindimensionale Resultate werden für sich zusammengefaßt.

In einem einführenden Kapitel wird das Ziel des Buches erläutert, es werden Hinweise auf dessen Benutzung gegeben und eine Übersicht über die bereits vorhandenen Lehrbücher zum Thema. Kapitel 2 befaßt sich mit geometrischen Konstruktionsmethoden und dem analaytischen Arbeiten mit Taylorreihen, unbestimmten Koeffizienten und erzeugenden Funktionen. Ein weiterer Schwerpunkt ist die Konstruktion interpolatorischer Formeln, er wird später im Detail studiert. Schließlich wird auf zusammengesetzte und auf Produkt-Formeln eingegangen. In den beiden nächsten Kapiteln geht es um Fehlerabschätzungen und Konvergenzverhalten. Es werden Darstellungen und Abschätzungen des Restgliedes und die Konvergenz von Verfahren zur Quadratur und Kubatur untersucht. In dem Kapitel über orthogonale Polynome wird der klassische Stoff in einigen Punkten wesentlich erweitert. Hervorzuheben sind die eigenen Forschungen des Autors, so die gleichzeitige asymptotische Entwicklung der Nullstellen eines Legendrepolynoms, aber auch die Untersuchungen von H. M. Möller, die einen systematischen Zugang zu minimalen Kubaturformeln mit Hilfe orthogonaler Polynome eröffnen, sowie Resultate von I. P. Mysovskih. Die für viele Anwendungen wichtigen interpolatorischen Formeln mit vorgeschriebenen Knoten oder Koeffizienten werden eingehend in Kapitel 6 behandelt. Hieran schließen sich spezielle Ergebnisse zur interpolatorischen und nicht-interpolatorischen Quadratur. Insbesondere wird auch auf die numerische Berechnung unbestimmter Integrale eingegangen.

Zusätzliches Material, nämlich Hinweise auf Tabellenwerke, Formel- und Literatursammlungen sowie Programme findet man in einem abschließenden Abschnitt.

Diese Inhaltsübersicht zeigt, daß das Buch zu einem Standardwerk der Numerischen Quadratur und Kubatur werden wird. Es besticht durch einen nahtlosen Übergang von Theorie zur konkreten Anwendung. Hier wird das ganze Spektrum der augenblicklich zur Verfügung stehenden Hilfsmittel berücksichtigt, bis hin zu nichtnumerischen Programmiersprachen. Die umfangreichen Referenzen zum dargestellten Gebiet wurden sorgfältig aufbereitet. Sie helfen auch in speziellen Fragen weiter, die nicht mehr explizit behandelt wurden. Übungsaufgaben, Bemerkungen und Literaturhinweise schließen die einzelnen Kapitel ab.

Eine Vielzahl von Beispielen, Tabellen und graphischen Darstellungen hilft beim Einarbeiten in den Stoff, bietet außerdem dem Fortgeschrittenen eine nützliche Arbeitshilfe.

Das Buch ist in gut lesbarer, abwechslungsreicher Form geschrieben, der Aufbau ist dabei so gehalten, daß Anfänger und Kenner sich bei richtigem Gebrauch gleichermaßen angesprochen fühlen.

Ein Wermutstropfen mag für Studenten der Preis des Buches sein, der aber sollte bei einem ausgezeichneten Buch nie ausschlaggebend sein.

Erlangen H. J. Schmid

Meis, Th., Marcowitz, U., Numerical Solution of Partial Differential Equations (Applied Mathematical Science 32) New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1981, 541 S., DM 52,–

Dieses Buch ist eine Übersetzung des unter dem deutschen Titel „Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen" im Jahre 1978 in der Reihe Hochschultexte im Springer-Verlag erschienenen Monographie. Nach Aussage der Autoren ist der Text hervorgegangen aus einschlägigen Vorlesungen an der Universität Köln. Entsprechend den Vorkenntnissen der Studenten enthält das Buch auch einige Grundlagen (meist ohne Beweis angegeben) aus Funktionsanalysis und der Theorie partieller Differentialgleichungen, die in den Text eingearbeitet wurden. Das macht die Lektüre dieser Monographie in angenehmer Weise unabhängig vom Studium umfangreicher Zusatzliteratur. Die Autoren legen Wert darauf, daß zum Verstehen numerischer Algorithmen theoretische Gesichtspunkte ebenso von Bedeutung sind wie algorithmische Darstellungen bis hin zu lauffähigen Computerprogrammen. Dieses Selbstverständnis von Numerischer Mathematik kann auch nach Auffassung des Referenten nicht oft genug betont werden. Das vorliegende Buch genügt diesem Anspruch voll und ganz. Die Einheit von Theorie und numerischer Praxis durchzieht dieses Lehrbuch wie ein roter Faden. In der Exaktheit der mathematischen Darstellung gibt es nicht viel Vergleichbares auf dem recht komplexen Gebiet der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen.

Im einzelnen werden die folgenden Themenkreise behandelt:

I. Anfangswertprobleme bei hyperbolischen und parabolischen Differentialgleichungen. Im Zentrum dieses Kapitels steht der Äquivalenzsatz von Lax-Richtmyer. Die dazu benötigten Begriffe wie „sachgemäß gestellte Aufgabe, Konsistenz, Konvergenz und Stabilität" werden eingeführt und an zahlreichen Beispielen erklärt. Es ist überhaupt eine Stärke der Darstellung in diesem Buch, daß Begriffe anhand von Beispielen eingeführt und Resultate durch weitere Beispiele vertieft werden. Den Schluß dieses Kapitels bildet ein kurzer Exkurs über Extrapolationsmethoden.

II. Randwertaufgaben bei elliptischen Differentialgleichungen. Es werden zunächst Differenzenverfahren betrachtet, sowie der theoretische Hintergrund (z. B. Maximum-Prinzip) entwickelt und verschiedene bekannte Verfahren auf ihre Konvergenz hin analysiert. Numerische Algorithmen, die auf Variationsmethoden beruhen, werden ausführlich dargestellt und Fehlerabschätzungen aufgezeigt. Schließlich gehen die Autoren noch auf Kollokationsmethoden und Randintegralverfahren ein.

III. Lösung von Gleichungssystemen. Häufig wird in Büchern über die Numerik partieller Differentialgleichungen auf die Darstellung der Lösungsmethoden der finiten Probleme (Gleichungssysteme) wenig Wert gelegt. In der vorliegenden Monographie stellen die Autoren diesen Themenkreis gleichberechtigt neben die theoretische Fundierung von numerischen Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen. Nach dem Grundsatz „die Brauchbarkeit einer Diskretisierung hängt von der Effektivität der Verfahren zur Lösung der Gleichungssysteme ab" werden zahlreiche gebräuchliche Gleichungslöser entwickelt und auf ihre Effektivität hin analysiert.

In einem Anhang zu diesem Buch sind FORTRAN-Programme zu ausgesuchten Verfahren enthalten und dokumentiert.

Insgesamt gesehen stellt das vorliegende Buch eine ausgezeichnete Bereicherung der schon vorhandenen Lehrbuchliteratur über das behandelte Gebiet dar. Es eignet sich für Lehrende als begleitende Lektüre zur Vorlesung, wie auch als Buch zum Selbststudium für Studenten.

Augsburg K.-H. Hoffmann

Integrable Systems – Selected papers, by S. P. Novikov, V. B. Matveev, I. M. Gelfand, I. M. Krichever, L. A. Dikii, A. M. Vinogradov, B. V. Yusin, B. A. Kuperschmidt, B. A. Dubrovin, I. S. Krasilshchik (London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol 60) Cambridge – London – New York – Melbourne: Cambridge University Press 1981, 266 pp, paper, £ 13.00

There are many aspects to the study of integrable Hamiltonian systems. This collection of papers by Soviet mathematicians emphasizes the algebraic side of the subject, in particular the formal algebraic side. The book, edited and introduced by G. Wilson, is evenly divided between the general discussion of Hamiltonian mechanics as well as formal variational calculus and the precise relationship between the Korteweg – deVries equation and the theory of algebraic curves. Wilson explains that the purpose of the book is to collect fundamental papers from leading Soviet workers in the field. From this point of view it is a little surprising that there is no paper by V. E. Zakharov (or, for that matter, by any of his coworkers, e.g. Manakov, Mikhailov, Shabat). After all, it was Zakharov (along with Faddeev) who first showed that the Korteweg – deVries equation is an integrable Hamiltonian system.

Zürich E. Trubowitz

Michlin, S. G., Prößdorf, S., Singuläre Integraloperatoren (Mathematische Lehrbücher und Monographien, Abt. II, Band 52) Berlin: Akademie-Verlag 1980, 544 S., Leinen, DM 88,–

Die Theorie der singulären Integraloperatoren hat in ihrer Geschichte einige Male Ideen hervorgebracht, die zu weit über ihren Ursprung hinausgehenden Entwicklungen Anlaß gaben. Beispiele sind Fredholmoperatoren, Indexformel, Pseudodifferentialoperatoren. Das vorliegende Buch zeigt, daß die Theorie auch heute noch reich an lebendigen Ideen ist. Mit seiner leicht lesbaren und dabei zugleich detaillierten wie umfassenden Darstellungsweise eignet es sich als Standardlehrbuch und Nachschlagewerk für das Gesamtgebiet der singulären Integraloperatoren.

Neben den älteren Lehrbüchern [6], [1], [5] existieren seit einigen Jahren Bücher über Teilgebiete der allgemeinen Theorie ([2], [4], [7], [8], [9]), jedoch sind viele Ergebnisse der letzten Zeit bisher noch nicht in Buchform erschienen. Einige Teile des Buches sind daher der Darstellung von in Form von Zeitschriftenartikeln vorliegenden Arbeiten gewidmet (z. B. [3]

in Kap. V § 6ff.), die durch die hier verwendete einheitliche Betrachtungsweise leichter zugänglich werden. Daneben sind auch einige neue Resultate angegeben, z. B. über mehrdimensionale singuläre Gleichungen mit entartetem Symbol und über die näherungsweise Lösung von mehrdimensionalen singulären Gleichungen.

Nicht behandelt werden nichtlineare Gleichungen, Pseudodifferentialoperatoren und die Methode der maximalen Funktionen. Somit erstreckt sich der Inhalt, bei selbstverständlicher Verwendung moderner funktionalanalytischer Methoden, auf die „klassische" Theorie der singulären Integraloperatoren.

Etwa die Hälfte des Buches ist den eindimensionalen singulären Integralgleichungen gewidmet. Inhaltliche Schwerpunkte sind dabei neben zahlreichen Anwendungsbeispielen die Gleichungen mit stückweise stetigem und diejenigen mit entartetem Symbol. Bei den mehrdimensionalen Gleichungen finden die Differenzierbarkeitseigenschaften von Symbol und Charakteristik sowie die Lösungstheorie in verschiedenen Funktionenräumen mit und ohne Gewicht besonderes Interesse.

Die Kapitelüberschriften lauten: Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis; Das eindimensionale singuläre Integral; Eindimensionale singuläre Integralgleichungen mit stetigen Koeffizienten auf geschlossenen Kurven; Eindimensionale singuläre Integralgleichungen mit unstetigen Koeffizienten; Systeme eindimensionaler singulärer Gleichungen; Eindimensionale singuläre Gleichungen mit entartetem Symbol; Einige Aufgaben, die auf singuläre Integralgleichungen führen; Einige weitere Hilfsmittel; Mehrdimensionale singuläre Integrale in Räumen mit gleichmäßiger Metrik; Das Symbol des mehrdimensionalen singulären Integraloperators; Singuläre Integraloperatoren in Räumen mit Integralmetrik; Mehrdimensionale Integralgleichungen; Singuläre Gleichungen auf glatten Mannigfaltigkeiten ohne Rand; Systeme mehrdimensionaler singulärer Gleichungen; Das Lokalitätsprinzip; Singuläre Operatoren auf Mannigfaltigkeiten mit Rand; Merhdimensionale singuläre Gleichungen mit entartetem Symbol; Methoden der näherungsweisen Lösung von eindimensionalen singulären Integralgleichungen; Näherungsweise Lösung mehrdimensionaler singulärer Integralgleichungen.

[1] Gakhov, F. D.: Boundary value problems. Pergamon Press, London 1966
[2] Gochberg, I. Z. und Feldman, I. A.: Faltungsgleichungen und Projektionsmethoden zu ihrer Lösung. Birkhäuser Verlag, Basel – Stuttgart 1974
[3] Gohberg, I. C. und Krupnik, N. J.: Singular integral operators with piecewise continuous coefficients and their symbols. Math. USSR – Izv. 5 (1971), 955–979
[4] Gohberg, I. und Krupnik, N.: Einführung in die Theorie der eindimensionalen singulären Integraloperatoren. Birkhäuser Verlag, Basel – Stuttgart 1979
[5] Mihlin, S. G.: Multidimensional singular integrals and integral equations. Pergamon Press, Oxford 1965
[6] Muschelischwili, N. I.: Singuläre Integralgleichungen. Akademie-Verlag, Berlin 1965
[7] Prößdorf, S.: Einige Klassen singulärer Gleichungen. Akademie-Verlag, Berlin 1974
[8] Stein, E. M.: Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press, New Jersey 1970
[9] Vekua, N. P.: Systems of singular integral equations. Nordhoff Publ. Comp., Groningen 1967

Darmstadt E. Meister

de Finetti, B., Theorie der Wahrscheinlichkeit (Scientia Nova), Wien – München: Oldenbourg Verlag 1981, xi + 819 S., DM 128,–

Die mathematische Statistik wird an unseren Universitäten (und teilweise auch an den Gymnasien) als eine rein mathematische Disziplin gelehrt: man definiert und zieht logische Folgerungen. Von den Anlässen, Wahrscheinlichkeitstheorie zu betreiben, ist ein begleitender, motivierender Jargon übriggeblieben, der auf das rein mathematische Vorgehen anregend wirkt, ohne in es einzugreifen. Die Situation ändert sich, sobald man in die praktische Statistik eintritt. Hier herrscht an den Universitäten die „Kochbuchsituation“: es heißt „man nehme dies, man tue das“, und die Begründungen, die man für solche Anweisungen gibt, sind teils mathematischer, teils praktischer Natur. – Der namhafte Autor des vorliegenden Buches hat sich die Aufgabe gestellt, in diesen Anweisungssalat eine sauber begründete Ordnung hineinzubringen. Bei dieser Aufgabe fällt der Mathematik lediglich eine dienende Rolle zu.

Demgemäß ist dies Buch nicht schlichtweg als ein mathematisches einzuordnen, obwohl es zahlreiche mathematische Deduktionen enthält. Philosophischen Charakter hat es m. E. auch nicht. Es läßt sich noch am ehesten jenem eigenartigen Betätigungsfeld zuordnen, das an philosophischen Instituten in steigendem Maße mitgepflegt und Wissenschaftstheorie genannt wird.

De Finetti ist Anhänger der sog. subjektiven Wahrscheinlichkeiten. Er identifiziert auf S. 38/39 die Wörter „zufällig“ und „nicht bekannt“. Auf S. 106 heißt es „das P stellt die Ansichten eines Individuums angesichts ungewisser Tatsachen dar“. Um den subjektiven Aspekt noch deutlicher zu machen, duzt de Finetti den Leser. Ferner ist viel von Wetten und Preisen die Rede. Es geht dem Autor um die Frage, welche praktische Bedeutung Wahrscheinlichkeiten haben und wie man sie ansetzen soll, während den Mathematiker nur die Eigenschaften wohldefinierter Wahrscheinlichkeitsräume interessieren.

Es gibt eine Stelle in der Wahrscheinlichkeitstheorie, wo die subjektive Betrachtungsweise einen klaren Beitrag zur Lösung eines nichtmathematischen Problems liefert, nämlich die Interpretation des Gesetzes der großen Zahlen. Wer Wahrscheinlichkeiten als Häufigkeiten definiert und dann sagt, das Gesetz der großen Zahlen rechtfertige diese Definition, verfällt in einen circulus vitiosus. De Finetti kann (auf S. 411) korrekt sagen: „P(X) ... ist der Wert, von dem wir fast sicher glauben, daß X sich ihm stark nähern wird.“

Das Buch ist in meinen Augen die persönliche Äußerung eines nachdenklichen Kollegen von bedeutendem Format. Seinen mathematischen Inhalt kann man anderswo besser lernen. Der Wert des Buches liegt im ausführlichen Ausdruck einer bestimmten Grundeinstellung. Die Darstellung leidet jedoch unter zahlreichen Abschweifungen. Ein inhaltlicher Mangel: der Autor scheint die Theorie der Zufälligkeit, wie sie nach 1960 von Kolmogorov, Per Martin-Löf und C. P. Schnorr entwickelt wurde, nicht zu erkennen. Der Mathematiker wird das Buch, wenn er es überhaupt liest, es um de Finettis willen lesen und die Erwartung hegen, daß die formalen Aspekte von de Finettis Ideen eines Tages in einer mathematischen Theorie (deren Darlegung mit „Gegeben seien n Subjekte“ beginnen könnte) wieder auftauchen werden.

Erlangen K. Jacobs

Lehrbuch der Analysis

Von Prof. Dr. rer. nat. H. HEUSER, Universität Karlsruhe

Ziel dieses zweiteiligen Werkes ist es, ausgehend von der axiomatischen Beschreibung der reellen Zahlen den Aussagenbestand der klassischen Analysis möglichst lebendig und faßlich zu entwickeln und von dieser Basis aus weiter vorzudringen bis hin zu den moderneren Begriffen und Sätzen dieser Disziplin, wie z. B. Netzkonvergenz, Banachräume, metrische und topologische Räume, Lebesguesches Integral, die Sätze von Arzelà-Ascoli und Stone-Weierstraß, der Stokessche Satz über die Integration von Differentialformen und die Fixpunktsätze von Banach, Brouwer, Schauder und Kakutani.

Das Buch ist überwiegend „reell". Da aber Naturwissenschaftler und Ingenieure schon sehr frühzeitig komplexe Zahlen benötigen und viele analytische Fragen erst im Komplexen befriedigend geklärt werden können, wurde ein Unterkurs über komplexe Zahlen und Funktionen eingebaut, der bis zu den Cauchyschen Integralsätzen und der Entwickelbarkeit holomorpher Funktionen in Potenzreihen führt. Ein historischer Bericht rundet das Buch ab. Über 1300 Aufgaben sollen dem Leser helfen, die Analysis zum sicheren Besitz (working knowledge) zu machen.

Teil 1: 2., durchgesehene Auflage. 1982. 643 Seiten mit 128 Bildern und 780 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen. (Mathematische Leitfäden) Kart. DM 52,–

Aus dem Inhalt des ersten Teiles

Mengen, Zahlen und Funktionen: Mengen / Axiomatik der reellen Zahlen / Komplexe Zahlen / Kombinatorik / Metriken / Funktionenräume und -algebren / Lineare Abbildungen / Der Differenzenoperator / Interpolationspolynome / Mengenvergleiche

Zahlenfolgen und unendliche Reihen: Grenzwertbegriff / Prinzipien der Konvergenztheorie / Allgemeine Potenz und Logarithmus / Exponentialprozesse / Häufungswerte / Konvergenz- und Divergenzkriterien

Stetige und differenzierbare Funktionen: Stetige Funktionen / Fixpunkt- und Zwischenwertsätze / Der Umkehrsatz / Grenzwerte von Funktionen / Grenzwerte von Netzen / Doppelreihen / Die Ableitung / Mittelwertsätze / Extremalprobleme / Konvexe Funktionen und Ungleichungen

Taylorscher Satz und Potenzreihen: Mittelwertsatz für höhere Differenzen / Taylorscher Satz und Taylorsche Entwicklung / Reelle und komplexe Potenzreihen / Abelscher Grenzwertsatz / Fundamentalsatz der Algebra / Partialbruchzerlegung / Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Integration: Unbestimmte Integrale / Riemannsches Integral / Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung / Das Cauchysche, Riemannsche und Lebesguesche Integrabilitätskriterium / Integralungleichungen und Mittelwertsätze / Uneigentliche Integrale / Riemann-Stieltjessche Integrale / Funktionen von beschränkter Variation / Die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

Vertauschung von Grenzübergängen: Gleichmäßige Konvergenz / Vertauschung von Grenzübergängen bei Folgen / Gleichstetige Funktionenfamilien und der Satz von Arzelà-Ascoli / Vertauschung von Grenzübergängen bei Netzen / Monotone Konvergenz

Teil 2: 1981. 736 Seiten mit 100 Bildern und 576 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen. (Mathematische Leitfäden) Kart. DM 58,–

Aus dem Inhalt des zweiten Teiles

Banachräume und Banachalgebren / Lebesguesches Integral und Fourierreihen / Topologische Räume / Differentialrechnung im $\mathbf{R}^p$ */ Wegintegrale / Mehrfache R-Integrale / Differentialformen und Integralsätze / Mehrfache L-Integrale / Die Fixpunktsätze von Brouwer, Schauder und Kakutani / Ein historischer tour d'horizon*

B. G. Teubner Stuttgart