85. Band Heft 1
ausgegeben am 20. 1. 1983

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1983

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende dieses Heftes zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 84,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 85, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

F. Bachmann †; **W. Nolte**: Rolf Lingenberg, Mensch und Forscher
W. Deuber; **B. Voigt**: Der Satz von van der Waerden über arithmetische Progressionen
K. Jacobs: Arithmetische Progressionen
C. M. Ringel: Unzerlegbare Darstellungen endlich-dimensionaler Algebren
C. J. Scriba: Die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung von Schülern und Lehrern

---

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
85 (1983) 1–32

Tilings, Patterns, Fabrics and Related Topics in Discrete Geometry[1)]

B. Grünbaum[2]), Seattle, and G. C. Shephard, Norwich

Dedicated to Prof. Dr. Heinrich Heesch, a pioneer in the research of tilings and patterns

1 Introduction

This century has seen great advances in a wide variety of mathematical disciplines. Everybody is aware of this fact, and no elaboration of it is necessary. However, concomitant with that development has been an ever-widening gap between various disciplines. Although syntheses bridging the separation have in several instances led to important (and sometimes spectacular) results, in general there seems to have been little interest in the interdisciplinary areas. The main aim of the present survey is to call attention to one such field which, for lack of an accepted name, we shall call "theory of patterns". Its ramifications reach group theory, combinatorics, elementary and differential geometry, and topology, as well as such applied areas as crystallography, engineering, design, art, anthropology and others. At the center of our discussions are two ideas: the consideration of (repetitive) *patterns*, and the *classification* (at different levels) based on symmetries of various kinds.

The vagueness of the preceding sentence is deliberate. It reflects our desire to present, at this stage, only a conceptual framework for a variety of known and new results. Precise definitions will be given below, together with illustrative examples. The concepts and results presented here have evolved during the last five or so years. We hope that they will be found useful in understanding many phenomena in geometry and applied geometry, and inspire new investigations and applications.

We shall concentrate on the plane – the ordinary, old-fashioned, real Euclidean plane of traditional geometry. The same topics are interesting and challenging in other situations as well – for example, in Euclidean spaces of higher

---

[1]) This paper is an elaboration of addresses given by B. G. at the Deutsche Mathematiker Vereinigung Jahrestagung 1980 in Dortmund, and at the 1980 Annual Meeting of the Canadian Mathematical Society in Vancouver, B.C.

[2]) Research supported by the USA National Science Foundation Grant No. MCS77 – 01629 A01.

0012-0456/83/01 0001-32 $06.40/0

dimensions, or in other manifolds. However, in these settings most of the problems are still unsolved, and it is even probable that the most attractive questions have not yet been formulated[3]).

Our subject could be described as a study of *families of sets* in the plane – but this is so vague as to be practically meaningless. Hence we shall restrict the generality and so arrive at a number of topics which will turn out to be fruitful. It is very likely that many other ways of specialization would lead to interesting theories and results.

The authors are indebted to Dr. Matthew Hackman for the computer graphics program used in the preparation of Figures 4, 7, 9, 12 and 14.

2 Basic definitions and examples

The two most important areas we shall study can be briefly indicated by the words "tiling" and "pattern". A *tiling* (or *tessellation*) $\mathcal{T} = \{T_i : i = 1, 2, \ldots\}$ is a family of closed topological disks T_i (the *tiles* of $\mathcal{T}$) which cover the plane without gaps or overlap[4]). More formally, the union $\bigcup_{i \geq 1} T_i$ is the whole plane, and $\operatorname{int} T_i \cap \operatorname{int} T_j = \emptyset$ whenever $i \neq j$. In Figure 1 we show examples from ancient and modern art. (Naturally, in these and the following illustrations we can show only a small finite part of each tiling or pattern, but we shall tacitly assume that it is extended appropriately over the whole plane.)

A *pattern* $\mathcal{P}$ is a family $M(\mathcal{P}) = \{P_i : i = 1, 2, \ldots\}$ of distinct sets P_i (called the copies of the *motif* of $\mathcal{P}$) which are mutually equivalent under the symmetries of $\mathcal{P}$. This definition[5]) will be elaborated below, and we shall find various connections between tilings and patterns.

Real-world examples of patterns occur frequently in almost all cultures.

---

[3]) The only part of the topic in which significant results are known in higher dimensions concerns the *discrete* (or *crystallographic*) *groups of symmetry*; we shall consider the planar case in Section 3. In the 1880's, Schoenflies and Fedorov worked independently on the three-dimensional case and – after pointing out each other's errors – reached the concensus that there are 230 classes of discrete 3-dimensional groups (if enantiomorphic groups are not considered different, the count is reduced to 219). The topic of discrete groups in higher dimensions was brought into prominence by its inclusion in the eighteenth of Hilbert's [1900] list of problems. The finiteness of the number of classes in each dimension was soon established by Bieberbach and others (see the very readable proofs in Burckhardt [1966] and Schwarzenberger [1980], where references to the literature may also be found). The determination of the precise number of classes in each dimension turned out to be a very hard problem. It was only recently solved for the four-dimensional space by Brown, Bülow, Neubüser, Wondratschek & Zassenhaus [1978], completing and correcting earlier work by many other authors. Brown *et al.* found that there are 4895 classes of 4-dimensional groups (or 4783 if enantiomorphic groups are not distinguished).

[4]) Detailed discussions of various definitions of "tiling" and of related concepts are given in Grünbaum & Shephard [1982a]. This book also deals with many of the other topics presented here, and gives detailed historical and bibliographic references.

[5]) The definition of "pattern" used here is more general that the analogous definition considered in Grünbaum & Shephard [1978d], [1979a], [1981a], [1982a]. On the other hand, our definition is much more restrictive than that of Grenander [1976], or the one underlying the theory of "pattern recognition".

One explanation of this fact could be that as soon as people start producing and decorating various objects they discover that regular repetition saves effort by eliminating decisions. Most people find such decorations attractive – we do not know whether this is due to some intrinsic resonances or affinities to regularity, or results from conditioning. In Figures 2 and 3 we show a number of examples of patterns from various cultures, and from science and technology.

So far we have shown only examples of *dispersed* patterns, that is, patterns in which the copies of the motif are pairwise disjoint. In Figure 4 we show non-dispersed patterns which consist of overlapping squares, or overlapping 12-gons.

In all these illustrations the "symmetries" which act on the pattern were understood to be isometric maps of the plane onto itself. But other kinds of transformations can be chosen as allowable symmetries. In Figure 5, the squares form a pattern under similarities, the T's – under affine maps[6]). The tiles in Figure 6 form a pattern if homeomorphic maps of the plane onto itself are admitted as symmetries. Several other variants are possible; some will be discussed below.

What can we do mathematically with these notions of tilings and patterns? One of the possibilities is to investigate questions of *taxonomy* – that is, the classification of patterns or tilings into *types*, and the description and enumeration of these types. Clearly, such an activity can be carried out in a variety of ways, and at different levels of detail; the reasonableness of a classification depends, to a large degree, on the circumstances in which it is to be used. Our main aims are elementary-geometric ones, and they guide our choice of definitions. We find it very satisfying to discover that our approach leads in many cases to classifications devised earlier by workers guided by the needs of other disciplines.

In discussing various classifications we shall present the results in simple declarative sentences, and in tables. This should not obscure the fact that each such sentence (or entry in a table) could be stated as a formal theorem.

But before attempting any classifications we shall restrict attention to "geometric patterns". Here we again understand the symmetries as isometries, and we say that a pattern $\mathscr{P}$, with the family $M(\mathscr{P}) = \{P_i : i = 1, 2, \ldots\}$ of copies of the motif, is a *geometric pattern* if it is:

(a) *locally finite* (that is, each bounded set meets only a finite number of the P_i's);

(b) *bonded* (that is, if symmetries s_j belonging to the group $S(\mathscr{P})$ of symmetries of $\mathscr{P}$ map a certain P_i onto itself for all $j = 1, 2, \ldots$, and if $\lim_{j \to \infty} s_j = s_0$ in the metric of linear operators, then $s_0(P_i) = P_i$); and

(c) *doubly periodic* (that is, admits translational symmetries in two non-parallel directions).

---

[6]) Groups of similarity symmetries have been considered by a number of authors (see, for example, Wolf [1949], Wolf & Wolff [1956], Šubnikov [1960], Šubnikov & Kopcik [1972], Lockwood & Macmillan [1978], Zamorzaev, Galyarskii & Palistrant [1978], Brandmüller [1980], Wondratschek [1980]), mainly from an elementary-geometric point of view. However, in no case have the patterns admitted been clearly defined, and hence the situation is still rather unsatisfactory. To an even greater extent, this applies to the treatment of various more general kinds of symmetry (see, for example, Wolf & Wolff [1956]).

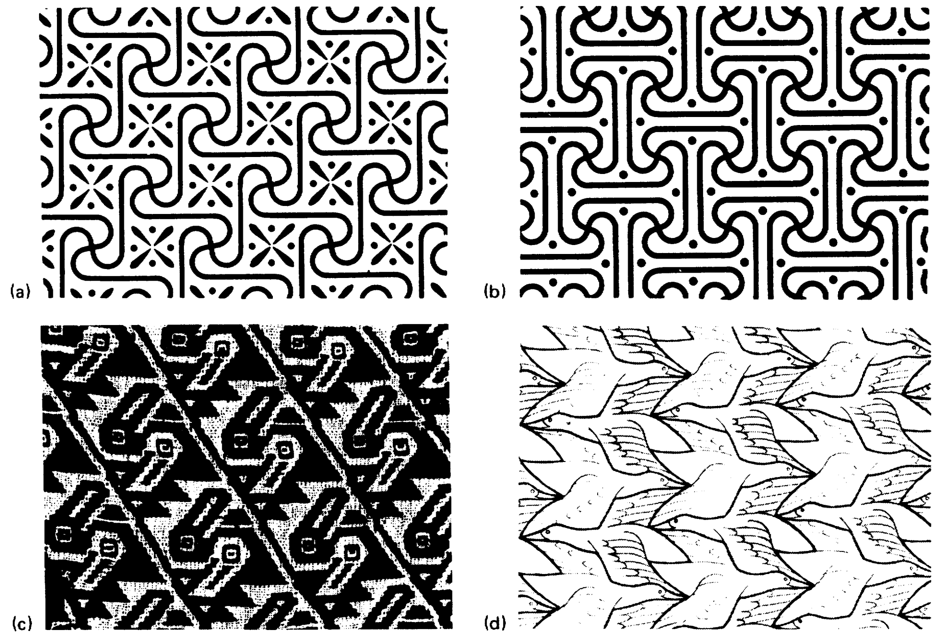


Figure 1. Examples of tilings taken from ancient and modern art. Parts (a) and (b) are Egyptian (after Audsley & Audsley [1882]), part (c) is pre-Inca (after Izumi [1964]), and part (d) is from Escher [1971]. To conform to the definition of tiling, the decorations on the tiles should be disregarded and the tiles considered as "plain" sets.

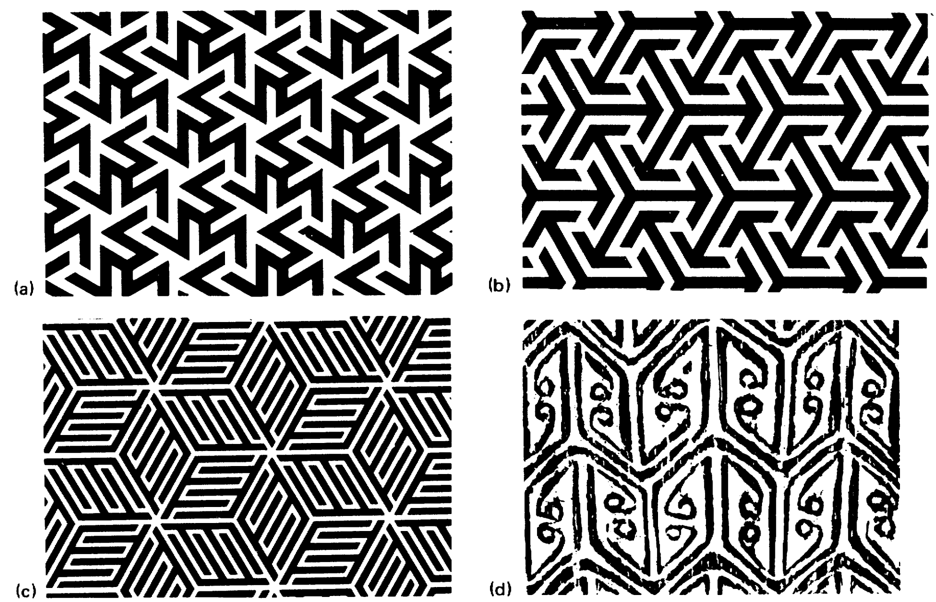


Figure 2. Examples of patterns: (a), (b) are Islamic, (c) is Japanese and (d) is from New Guinea. The first three are after Audsley & Audsley [1882], the last after Lewis [1925].

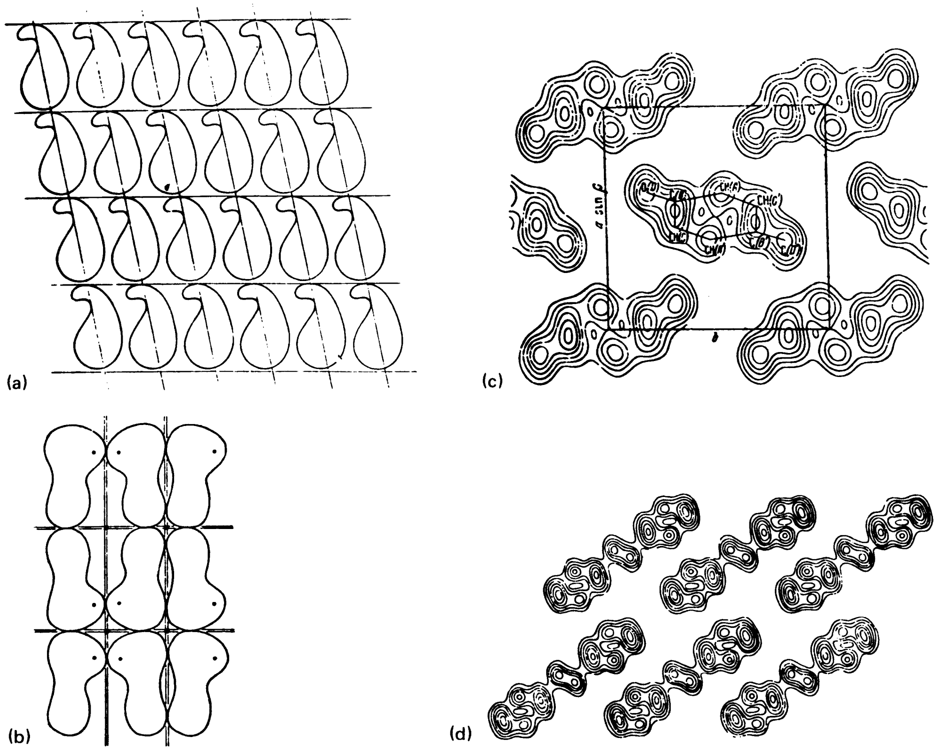


Figure 3. Examples of patterns arising in science. (a) is from Kelvin [1894], the others from Kitaigorodskii [1955]; the straight lines are extraneous to the patterns and serve to bring out their symmetries.

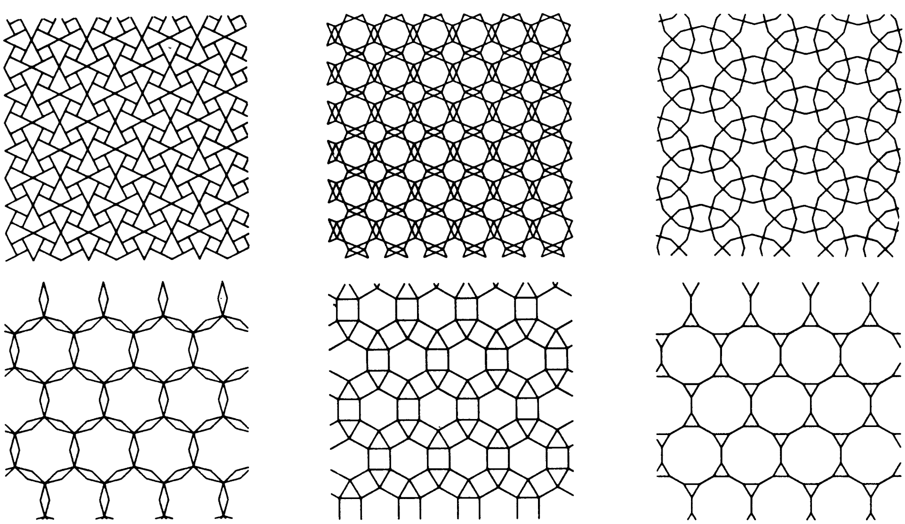


Figure 4. Islamic patterns formed by (a) overlapping squares; (b) overlapping regular dodecagons (see Bourgoin [1879], El-Said & Parman [1976], Wade [1976]). Note that all but the last two could also be interpreted as patterns formed by overlapping straightline segments.

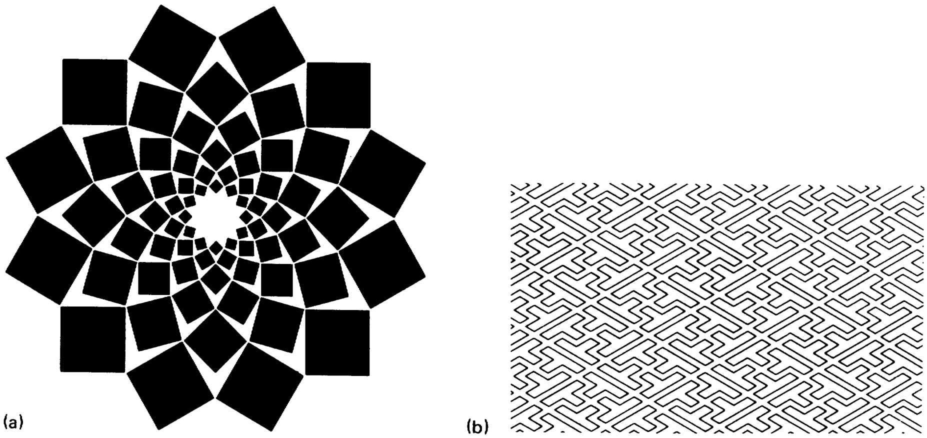


Figure 5. (a) A similarity pattern formed by squares (after Beard [1973]); (b) an affine pattern (after Dye [1981]).

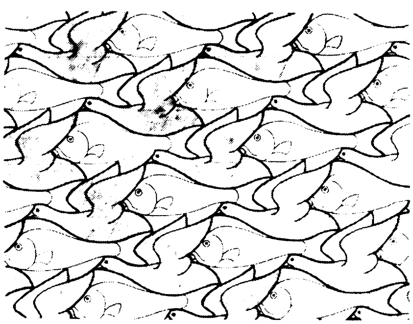


Figure 6. A tiling which is a homeomorphic image of the square tiling (the markings on the tiles should be ignored); hence its tiles form a pattern if homeomorphisms are admitted as symmetries. (From Escher [1971].)

Requirement (c) is imposed only for convenience of exposition; we could easily do without it, but would then have to talk about strip patterns, etc., which would lengthen the survey considerably[7]). However, conditions (a) and (b) are essential if we wish to keep the elementary-geometric framework and avoid far-reaching complications and "bad" patterns. The first condition eliminates patterns such as the one in which each P_i is a single point and $\mathscr{P}$ consists of all points for which both coordinates belong to $Q[\sqrt{5}]$, that is, are of the form $p + q\sqrt{5}$, with p and q rational. This is a very interesting doubly periodic pattern which admits rotations by 72° among its symmetries – but it certainly is not elementary-geometric. The second condition eliminates another kind of non-elementary-geometric patterns, such as the pattern $\mathscr{P}_0$ in which one copy P_0 of the motif consists of all

---

7) To obtain the definition of *strip* (or *frieze*) patterns one only needs to replace (c) by:

(c*) singly periodic (that is, admits translational symmetries, all of which are parallel).

Such patterns occur in applications and in everyday practice even more frequently than the doubly periodic ones.

the points of the x-axis that have rational coordinates, and the other copies are obtained by translating P_0 vertically through integral distances.

It should be noted that the purpose of the above restrictions is *not* the elimination of *every* "bad" pattern. They exclude only those patterns which, in some sense, behave "badly" with respect to their symmetry properties. For example, a geometric pattern $\mathscr{P}_1$ results if the pattern $\mathscr{P}_0$ just mentioned is modified by using instead of P_0 a motif P_1 obtained by deleting from P_0 the set P_2 consisting of all points of the x-axis having integral coordinates. As a set, P_1 is about as "bad" as P_0, but regarding symmetries the pattern $\mathscr{P}_1$ behaves very much like the "nice" pattern $\mathscr{P}_2$ obtained by translating P_2 vertically through integral distances.

Clearly, other choices and decisions as to what patterns are "bad" or "nice" could be made and used as the basis of a theory.

3 Classifications of geometric patterns

Our coarsest classification of geometric patterns is into twenty types of the so-called *extended crystallographic classification*. In this classification patterns $\mathscr{P}$ and $\mathscr{P}^*$ are assigned to the same type if the groups $S(\mathscr{P})$ and $S(\mathscr{P}^*)$ of their (isometric) symmetries are affinely equivalent. In Figure 7 we show examples of geometric patterns of all twenty types. We note here that the statement usually encountered in the literature asserts that there are precisely 17 (classes of) crystallographic groups[8]) (in the plane). The discrepancy arises from the fact that the customary "crystallographic classification" deals only with *discrete* groups of symmetries. Though this restriction is perfectly reasonable in some circumstances, it has often been accepted in contexts in which it is inappropriate (as it is in the elementary-geometric situation in which non-discrete patterns and groups appear naturally). For example, when discussing the symmetry groups of periodic ornaments which occur in different cultures, it is ridiculous to ignore the often utilized ornaments with groups s1m and smm, and the "plain ornament" with group $s\infty\infty$, just because their symmetry groups are not discrete![9]) Yet, as a matter of fact, this

[8]) This result goes back to Fedorov [1891]. In more accessible form it reappeared in Pólya [1924] and Niggli [1924]. Among mathematicians it became well known only following the presentation in Speiser [1927]. Unfortunately, when adopting for these groups the "international" notation introduced by crystallographers, Speiser interchanged the symbols p3ml and p31m. This error propagated itself in much of the mathematical literature before being pointed out by Schattschneider [1978]. For readable accounts of the crystallographic groups in the plane see, for example, Coxeter & Moser [1957], Budden [1972], Lockwood & Macmillan [1978]. A practical guide for the determination of the symmetry groups of ornaments is Schattschneider [1978]; see also the references in footnote 10).

[9]) Could it be that we mathematicians – with our frequently indulged penchant for proclaiming undebatable truths to a world which only vaguely perceives the underlying assumptions of our assertions – have cowed generally reasonable people into unreasonable attitudes? If so, would it not be desirable to change the situation and to give to the various "users" of mathematics the theories applicable to their concerns? From the point of view of "pure" mathematics it makes no difference (and even no sense to inquire) whether a square tiling of a vertical plane has sides or diagonals of the squares in horizontal position. But for a designer or art historian these are very different patterns, and if we are to provide the mathematical tools for their disciplines we should develop the appropriate "geometries".

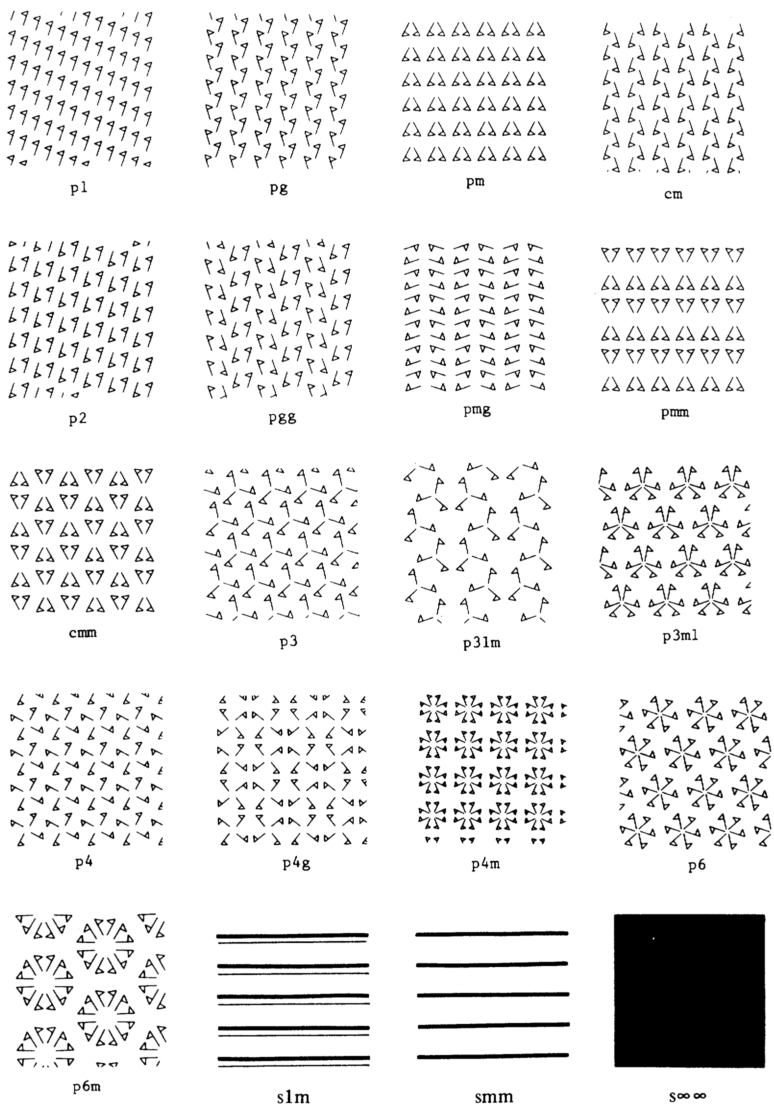


Figure 7. Geometric patterns of the twenty different types of the extended crystallographic classification. Near each pattern a symbol for its symmetry group is indicated; for the first 17 this is the (short) "international symbol" devised by crystallographers.

has happened (and continues to happen) very often[10]). Naturally, these three types of patterns would be eliminated if we considered only *bounded* sets as motifs

[10]) See, for example, Müller [1944], Shepard [1948], Growe [1971], Washburn [1977], Zaslow [1977], Schattschneider [1978], Brandmüller [1980], Stevens [1980], Wondratschek [1980].

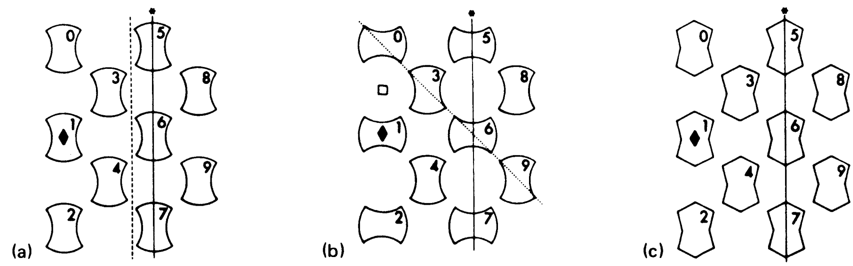


Figure 8. An illustration of the concept of compatibility. The reflections about the lines marked by asterisks are compatible with the bijections between the patterns indicated by the numerals; so are the 2-fold rotations about the centers of the diamonds. However, the glide-reflection in (a) along the dashed line is not compatible with this bijection onto the pattern in (b) although a different bijection would be compatible with it (for example, the one corresponding to the glide-reflection along the dotted line in (b)). The 4-fold rotation about the center of the square in (b) is not compatible with any bijection onto (a) or (c). The patterns in (a) and (c) are henomeric under the bijection indicated by the numerals; they are also homeomeric, but not diffeomeric. The pattern in (b) is not henomeric to the other two.

(as seems reasonable in crystallography) – but then many other interesting patterns would also be lost[11]).

For many purposes the extended crystallographic classification of geometric patterns is too coarse. In order to define finer classifications we need a simple and natural concept which we call "compatibility".

Let $\mathscr{P}$ and $\mathscr{P}^*$ be patterns, $M(\mathscr{P})$ and $M(\mathscr{P}^*)$ their families of copies of the motifs, $\varphi : M(\mathscr{P}) \to M(\mathscr{P}^*)$ a bijection, and let the symmetry $s \in S(\mathscr{P})$ induce the bijection $s_M : M(\mathscr{P}) \to M(\mathscr{P})$. We shall say that s *is compatible with* ϕ if there exists a symmetry $s^* \in S(\mathscr{P}^*)$ of the same kind as s, which induces the bijection $s_M^* : M(\mathscr{P}^*) \to M(\mathscr{P}^*)$, such that the diagram

$$\begin{tikzcd} M(\mathscr{P}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "s_M"'] & M(\mathscr{P}^*) \arrow[d, "s_M^*"] \\ M(\mathscr{P}) \arrow[r, "\varphi"] & M(\mathscr{P}^*) \end{tikzcd}$$

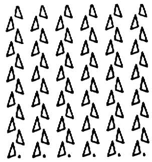
is commutative. By "the same kind" we mean that both s and s* must be translations, or both reflections, or glide-reflections, or n-fold rotations. The requirement of commutativity of the diagram is obviously equivalent to the condition that the mapping $\varphi \circ s_M \circ \varphi^{-1} : M(\mathscr{P}^*) \to M(\mathscr{P}^*)$ be induced by a symmetry of $\mathscr{P}^*$.

The notion of compatibility is illustrated in Figure 8.

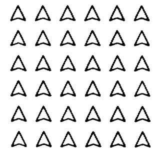
---

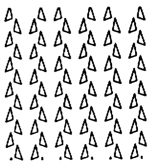
[11]) It should be stressed that even slight changes in the definitions would lead to different classifications. For example, if we admit *directed lines* as copies of the motif for geometric patterns, then three new classes of groups occur; if the left and right sides of directed lines are distinguishable, two more classes of groups are possible. All seven classes of such "one way continuous" periodic groups were described by Heesch [1930]; see also Šubnikov & Kopcik [1972, pp. 185–187 of the English translation]. Still other groups arise if single-point motifs are endowed with an orientation, or if the plane is considered as having two "sides"; for the latter eventuality compare Section 5 below.

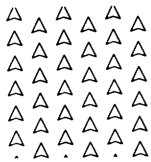

PP 1

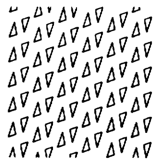

PP 2

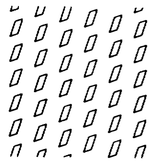

PP 3

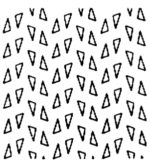

PP 4

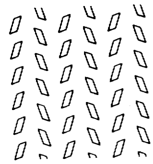

PP 5


PP 6

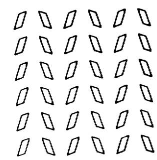

PP 7 *

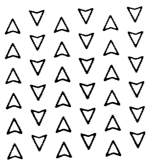

PP 8 *

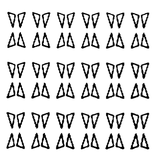

PP 9 *

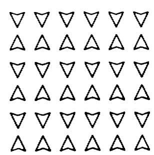

PP 10

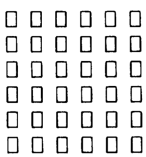

PP 11 *

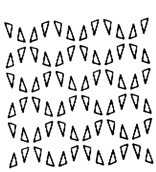

PP 12

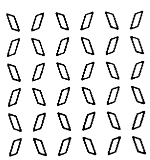

PP 13 *

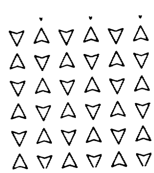

PP 14 *

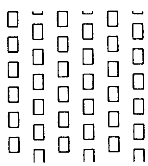

PP 15 *

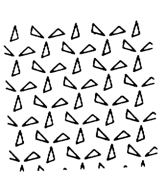

PP 16 *

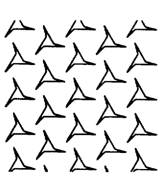

PP 17 *

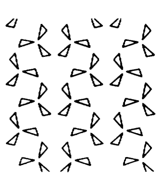

PP 18

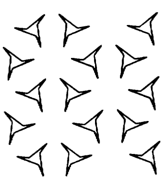

PP 19 *

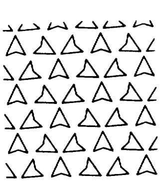

PP 20 *

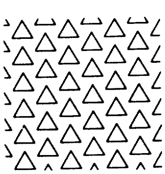

PP 21 *

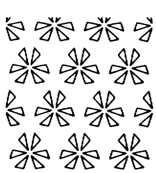

PP 22

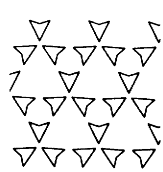

PP 23 *


PP 24


PP 25 *


PP 26


PP 27 *


PP 28 *

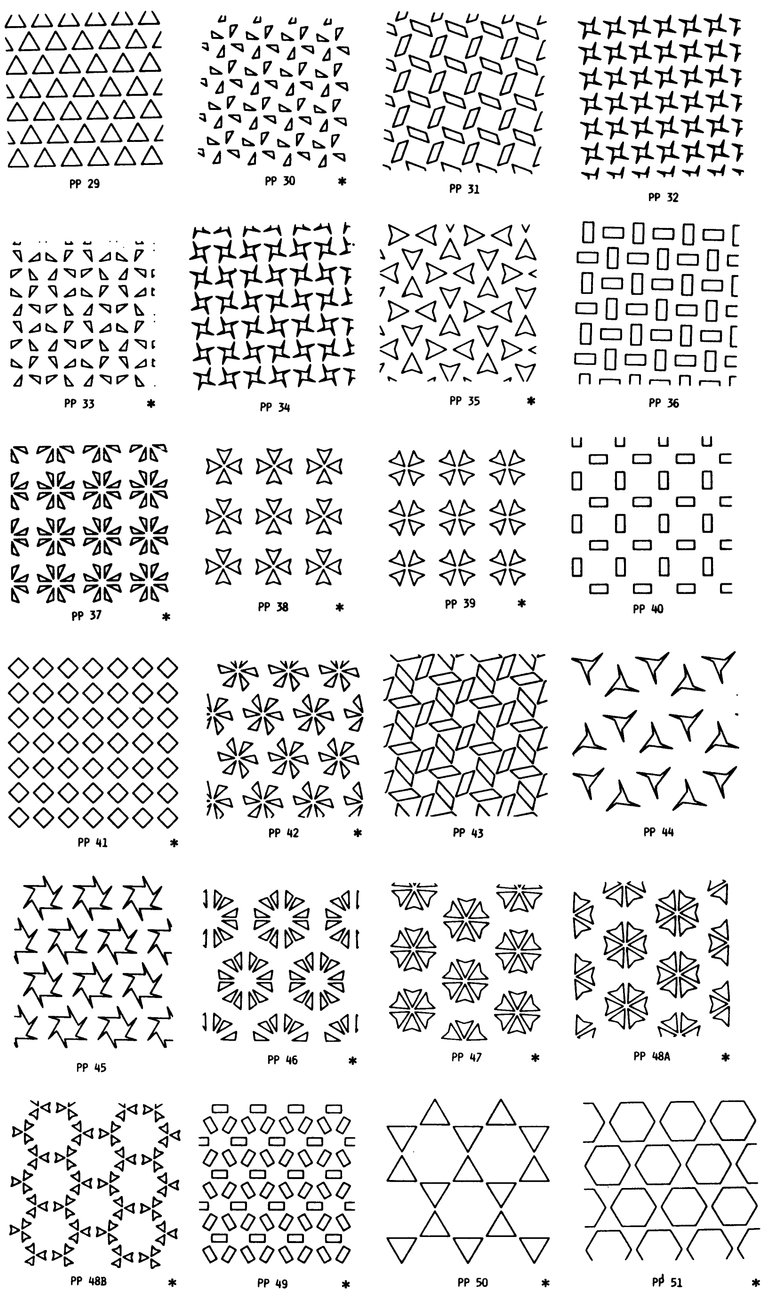


Figure 9. Examples of the 51 henomeric types of dispersed geometric patterns with bounded motifs; near each is indicated a symbol for the henomeric type. The patterns denoted PP 48A and PP 48B have the same henomeric type PP 48 (but are not homeomeric). These examples also represent the 52 homeomeric types of dispersed geometric patterns with closed topological disks as copies of the motif. The asterisks indicate the (henomeric and homeomeric) types which admit dot patterns as representatives.

We are now ready to define a classification finer than the extended crystallographic one. Patterns $\mathscr{P}$ and $\mathscr{P}^*$ are called *henomeric* (from ἑνω – join, unite, μέρος – part) or to have the same *henomeric type* if there exists a bijection $\varphi : M(\mathscr{P}) \to M(\mathscr{P}^*)$ such that *every* symmetry in $S(\mathscr{P})$ is compatible with φ and *every* symmetry in $S(\mathscr{P}^*)$ is compatible with φ^{-1}. The concept of henomeric type[12]) is illustrated in Figure 8.

Among the known results concerning the henomeric classification are the following. There exist precisely 73 henomeric types of geometric patterns in which the motif is a bounded set. Of these, 51 types are *dispersible*, that is, have representatives which are dispersed patterns such that each copy of the motif is a connected set; all these types are illustrated in Figure 9[13]). For 30 among these types there exist representative *dot patterns*, that is patterns in which each copy of the motif is a single point[14]). The 30 types with this property are indicated by asterisks in Figure 9. The remaining 22 henomeric types are *non-dispersible*; in each pattern representing such a type either copies of the motif overlap or, if the pattern is dispersed, the motif cannot be a connected set[15]). In Figure 10 we indicate how representatives of the latter kind for all 22 non-dispersible types can be obtained; it is easy to see how to modify the procedure to produce examples of the former kind.

The henomeric types of geometric patterns possible with unbounded motifs have not been determined so far, although results are available in certain special cases. To mention only a very simple example: if the motif is the open strip between two parallel lines and we only consider dispersible geometric patterns, then there are precisely two henomeric types; they are illustrated in Figure 11.

It is not hard to verify that geometric patterns of the same henomeric type have the same symmetry groups, the same stabilizer of the motif, and the

Figure 10. The generation of the 22 henomeric types of non-dispersed geometric patterns with bounded motifs. Each such pattern $\mathscr{P}^*$ can be generated from a pattern $\mathscr{P}$ in which the stabilizer of each copy of the motif is one of the groups c4, c6, d2, d3, d4 or d6. It is only necessary to replace each copy of the motif in $\mathscr{P}$ by a family of several copies of the motif in $\mathscr{P}^*$, as indicated above (equal numerals denote parts of the same copy of the motif).

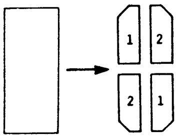
---

12) Naturally, we claim no originality for the concept of compatibility, which is very widely applicable to questions of classifications. (Formally, isomorphisms – and even homomorphisms – of groups are compatible with multiplication by a fixed element of the group.) At least some aspects of the idea can be traced half a century back, to Delone [1932]. However, in the works of Delone and his school (as well as in publications by other authors), compatibility was used to define classifications of various artifacts associated with tilings (or other objects) and not classifications of the tilings themselves. See below, footnote 20).

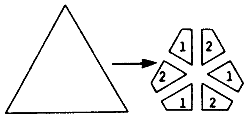
13) An error in the determination of motif-transitive subgroups led the authors to assert in Grünbaum & Shephard [1979a] that there are 52 henomeric types of dispersible geometric patterns with bounded motifs. The error was corrected in the text and the table of Grünbaum & Shephard [1981a] but, unfortunately, not in Figure 4 of that paper.

14) See Grünbaum & Shephard [1981a] for an account of relations between the henomeric types of dispersible patterns and of dot patterns (and of the corresponding homeomeric types, see below) on the one hand, and crystallographic concepts and results on the other hand.

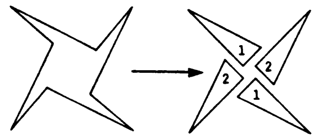
15) It should be noted that a non-dispersed geometric pattern may well be of a dispersible type; any pattern of a dispersible type will be called *dispersible*.



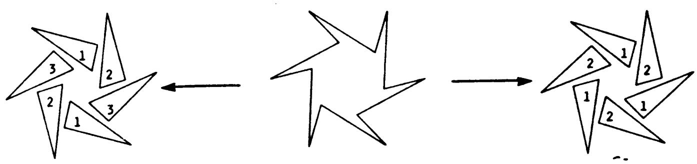
PP 16-1, PP 20-1, PP 36-1,
PP 40-1, PP 49-1



PP 26-1, PP 29-1, PP 50-1

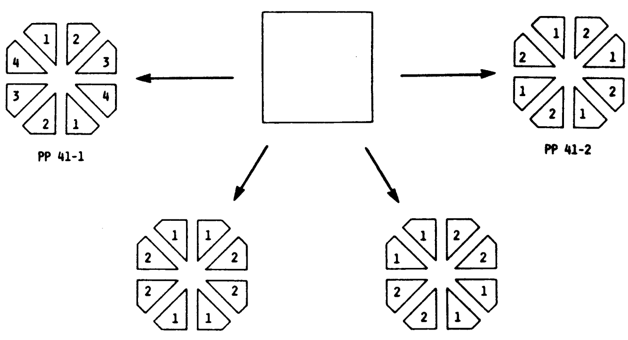


PP 32-1, PP 34-1



PP 45-1

PP 45-2

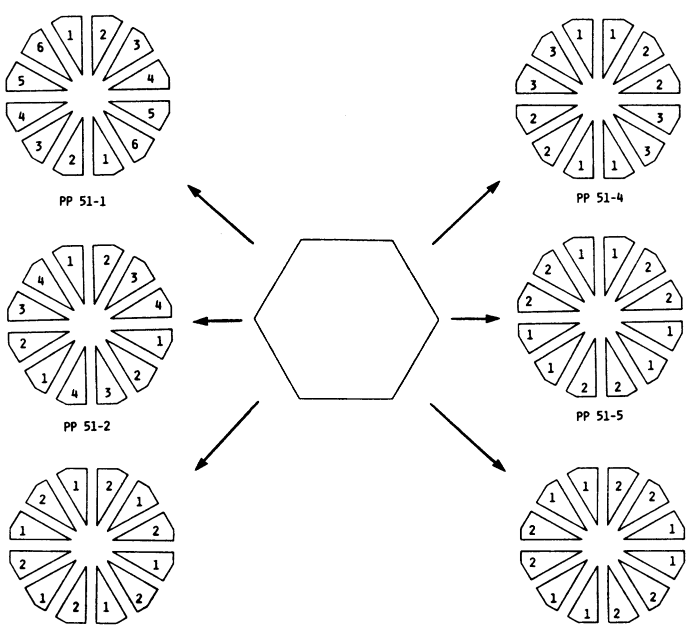


PP 41-1

PP 41-2

PP 41-3

PP 41-4



PP 51-1

PP 51-4

PP 51-2

PP 51-5

PP 51-3

PP 51-6

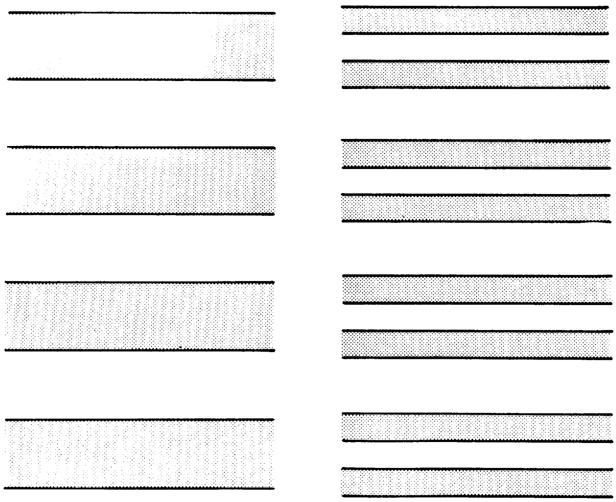


Figure 11. The two henomeric types of dispersed geometric patterns in which the motif is the open strip between two parallel lines.

same family of motif transitive subgroups of the symmetry group. Conversely, it can be shown that if two geometric patterns with bounded motifs coincide in all these attributes then they have the same henomeric type. This provides an effective method for the enumeration of henomeric types. In Table 1 we have collected these and some other data on all 73 types of geometric patterns with bounded motifs.

One of the applications of the henomeric classification is the full and explicit description of all geometric patterns possible with a given motif. Which henomeric types are admitted by a given bounded motif depends only on the symmetry group of the motif. Another application of this classification is to the theory of colored patterns, to which we shall return below.

In analogy to the definition of henomeric types we can define a still finer classification. Patterns $\mathscr{P}$ and $\mathscr{P}^*$ are called *homeomeric* (ὁμοιος – similar) or of the same *homeomeric type* provided there exists a homeomorphism ψ of the plane E^2 onto itself which maps $\mathscr{P}$ onto $\mathscr{P}^*$, such that ψ is compatible with every symmetry in $S(\mathscr{P})$ and ψ^{-1} is compatible with every symmetry of $S(\mathscr{P}^*)$. Here we say that a homeomorphism ψ is compatible with a symmetry $s \in S(\mathscr{P})$ provided the map $\varphi : M(\mathscr{P}) \to M(\mathscr{P}^*)$ induced by ψ is compatible with s.

The notion of homeomeric type is illustrated in Figures 8 and 12.

Although the homeomeric classification if too fine in many situations, it is very appropriate in some cases. A few of the available results are the following.

There exist precisely 52 homeomeric types of dispersed geometric patterns in which the motif is a closed topological disk. These 52 homeomeric types are in a one-to-one correspondence with the 51 henomeric types of dispersed geometric patterns with bounded motifs, except that the henomeric type PP48 corresponds to two homeomeric types (see Figure 9). In an analogous way, to the 30 henomeric

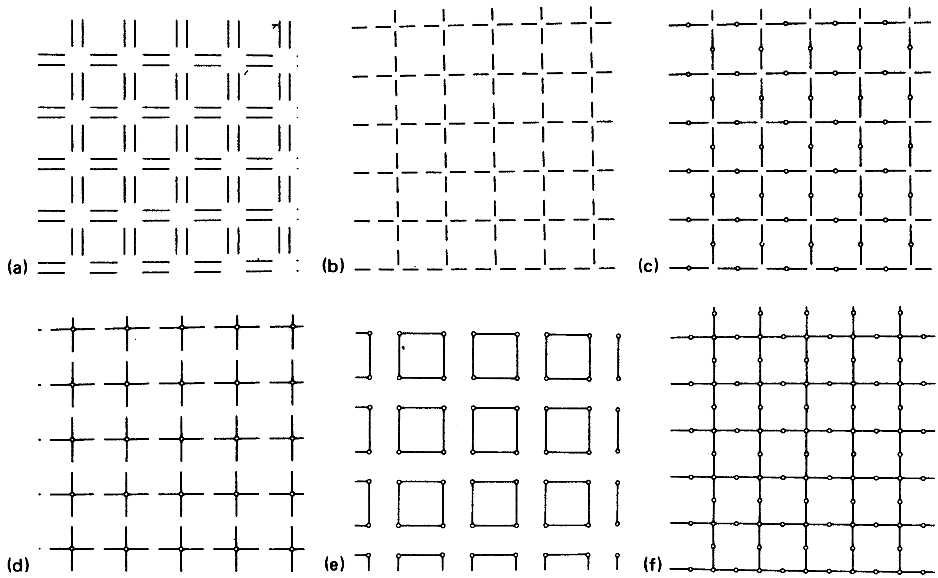


Figure 12. Six patterns in which the copies of the motif are segments. (The segments can be taken as open, or as closed. In the former case all six patterns are dispersed; in the latter the patterns in (a) and (b) are dispersed and all are dispersible.) The small circles indicate common endpoints of two or four segments. The patterns are of the same henomeric type PP 38, but they are not homeomeric. The lines of reflective symmetry leave only a single point invariant in each copy of the motif mapped onto itself in (a), while all points of the segment are left invariant in (b). Hence no homeomorphism between the patterns in (a) and (b) can be compatible with such reflective symmetries. The other patterns differ in the disposition of the endpoints of the segments either topologically, or with respect to symmetries of the patterns.

types of dot patterns correspond 31 homeomeric types. There exist precisely 131 homeomeric types of dispersed patterns in which the motif is an open circular disk[16]). Of these, 31 types are *coherent*, that is, the union of the copies of the motif has a connected set as closure. The henomeric and homeomeric types of dispersed patterns in which the motif is a closed circular disk correspond precisely to the henomeric and homeomeric types of dot patterns.

A *closed* [*open*] *ellipse pattern* is a dispersed pattern in which the copies of the motif are congruent to the [interior region of a] non-circular ellipse E. It can be shown that, regardless of the shape of the ellipse E chosen, there exist 37 henomeric types of (open, or closed) ellipse patterns, 38 homeomeric types of closed ellipse patterns, and 192 homeomeric types of open ellipse patterns. Among the latter, 57 types are coherent[17]).

---

[16]) These 131 types were first determined by Sinogowitz [1939], following the earlier investigations of the coherent types by Niggli [1927]. For illustrations of the 31 coherent types see Fejes Tóth [1965, Fig. 42]; unfortunately, the accompanying explanation does not describe the classification correctly.

[17]) Nowacki [1948] was the first to investigate coherent ellipse patterns; he found 53 of the 57 types.

Table 1. The 73 henomeric types of geometric patterns in which the motif is a bounded set. The dispersible types are listed in the first part, the non-dispersible types in the second part. The data in the first part are taken mostly from Grünbaum & Shephard [1981a], [1982a]; the second part is new. Column (1) contains a symbol for each henomeric type. Column (2) gives the symmetry group of the pattern, using the "International Symbols" introduced by the crystallographers. The stabilizer of each copy of the motif is indicated in Column (3); cn means the cyclic group of order n, while dn stands for the dihedral group of order 2n. Column (4) lists all the motif-transitive proper subgroups G of the symmetry group $S(\mathscr{P})$ of the pattern $\mathscr{P}$; a number in parentheses following the designation of a group G indicates that $\mathscr{P}$ admits this number of inequivalent motif-transitive proper subgroups of $S(\mathscr{P})$ isomorphic to G, and an asterisk indicates that $\mathscr{P}$ admits motif-transitive proper subgroups of $S(\mathscr{P})$ isomorphic to $S(\mathscr{P})$. Column (5) shows the minimal group which cannot occur as the symmetry group of the *motif* of the pattern (since a motif with such high symmetry would necessarily yield a more symmetric pattern). The absence of an entry in Column (5) means that the pattern type is possible even with motif having symmetry d∞; these are precisely the henomeric types for which dot patterns (or circle patterns) are possible. Column (6) indicates the number of *aspects* occurring in the pattern (that is, the number of translationally inequivalent copies of the motif); D means directly congruent, R – reflectively congruent. In the second part, Column (7) gives the minimal number of copies of the motif which must have a common point, in case the motif is a topological disk.

First part: dispersible types

Pattern type (1)	Symmetry group (2)	Stabilizer (3)	Motif-transitive proper subgroups (4)	Forbidden super-groups (5)	Aspects (6)
PP 1	p1	c1		c2	1D
PP 2	pg	c1		d∞	1D, 1R
PP 3	pm	c1		d∞	1D, 1R
PP 4	pm	d1	p1, pg, cm, *	d2	1
PP 5	cm	c1		d∞	1D, 1R
PP 6	cm	d1	p1, pg	d2	1
PP 7	p2	c1			2D
PP 8	p2	c2	p1, *		1D
PP 9	pgg	c1			2D, 2R
PP 10	pgg	c2	pg	d∞	1D, 1R
PP 11	pmg	c1			2D, 2R
PP 12	pmg	c2	pg, pm, pgg, *	d∞	1D, 1R
PP 13	pmg	d1	pg, p2, pgg		2
PP 14	pmm	c1			2D, 2R
PP 15	pmm	d1	pm, p2, pmg, cmm, *		2
PP 16	pmm	d2	p1, pg, pm(2), cm, p2(3), pgg, pmg(2), cmm(3), *(2)		1
PP 17	cmm	c1			2D, 2R
PP 18	cmm	c2	cm, pgg, pmm	d∞	1D, 1R
PP 19	cmm	d1	cm, p2, pgg, pmg		2
PP 20	cmm	d2	p1, pg, cm, p2(2), pgg(2), pmg		1
PP 21	p3	c1			3D
PP 22	p3	c3	p1, *	c6	1D
PP 23	p31m	c1			3D, 3R
PP 24	p31m	c3	cm, p3ml	d∞	1D, 1R

Table 1 continued

Pattern type (1)	Symmetry group (2)	Stabilizer (3)	Motif-transitive proper subgroups (4)	Forbidden supergroups (5)	Aspects (6)
PP 25	p31m	d1	p3		3
PP 26	p31m	d3	p1, pg, cm, p3(2)	d6	1
PP 27	p3ml	c1			3D, 3R
PP 28	p3ml	d1	p3		3
PP 29	p3ml	d3	p1, pg, cm, p3(2), p31m	d6	1
PP 30	p4	c1			4D
PP 31	p4	c2	*	c4	2D
PP 32	p4	c4	p1, p2(3), *(2)	d∞	1D
PP 33	p4g	c1			4D, 4R
PP 34	p4g	c4	pg, cm, pgg(2), pmm, cmm	d∞	1D, 1R
PP 35	p4g	d1	pgg, p4		4
PP 36	p4g	d2	pg, pgg, p4(2)	d4	2
PP 37	p4m	c1			4D, 4R
PP 38	p4m	d1	cmm, p4, p4g, *		4
PP 39	p4m	d1	pmm, p4, p4g		4
PP 40	p4m	d2	cm, pgg, pmm, cmm, p4(2), p4g(2), *	d4	2
PP 41	p4m	d4	p1, pg(2), pm(2), cm(2), p2(3), pgg(3), pmg(3), pmm(3), cmm(4), p4(3), p4g(3), *(2)		1
PP 42	p6	c1			6D
PP 43	p6	c2	p3	d∞	3D
PP 44	p6	c3	p2, *	d∞	2D
PP 45	p6	c6	p1, p2(2), p3(2)	d∞	1D
PP 46	p6m	c1			6D, 6R
PP 47	p6m	d1	p3ml, p6		6
PP 48	p6m	d1	p31m, p3ml, p6		6
PP 49	p6m	d2	p3, p31m, p3ml, p6		3
PP 50	p6m	d3	cm, pgg, pmg, cmm, p2, p31m, p3ml, p6(2)		2
PP 51	p6m	d6	p1, pg(2), cm(2), p2(2), pgg(3), pmg(2), cmm, p3(2), p31m(2), p3ml, p6		1

A *closed* [*open*] *segment pattern* is a dispersed pattern in which the copies of the motif are closed [or open] straight-line segments. There are 37 henomeric types of closed [or of open] segment patterns, 50 homeomeric types of closed segment patterns, and 209 homeomeric types of open segment patterns (of which 57 are coherent).

Table 1 continued

Second part: non-dispersible types

Pattern type (1)	Symmetry group (2)	Stabilizer (3)	Motif-transitive proper subgroups (4)	Forbidden super-groups (5)	Aspects (6)	Overlap (7)
PP 16-1	pmm	c2	pm, pmg(2), cmm(2), *	d∞	1D, 1R	2
PP 20-1	cmm	c2	cm, pmg	d∞	1D, 1R	2
PP 26-1	p31m	c3	cm	d∞	1D, 1R	2
PP 29-1	p3ml	c3	cm, p31m	d∞	1D, 1R	2
PP 32-1	p4	c2		c4	2D	2
PP 34-1	p4g	c2		c4	2D, 2R	2
PP 36-1	p4g	c2		d∞	2D, 2R	2
PP 40-1	p4m	c2	p4g	d∞	2D, 2R	2
PP 41-1	p4m	c2		d∞	2D, 2R	4
PP 41-2	p4m	c4	pm, cm, pmg, pmm, cmm, *	d∞	1D, 1R	2
PP 41-3	p4m	d2	cm, pmg, cmm, p4, p4g, *	d4	2	2
PP 41-4	p4m	d2	pm, pmg, pmm(2), cmm, p4, p4g	d4	2	2
PP 45-1	p6	c2	p3	c6	3D	3
PP 45-2	p6	c3	p2	c6	2D	2
PP 49-1	p6m	c2	p3ml, p31m	d∞	3D, 3R	2
PP 50-1	p6m	c3	cmm(2)	d∞	2D, 2R	2
PP 51-1	p6m	c2	p3ml, p31m	c6	3D, 3R	6
PP 51-2	p6m	c3		c6	2D, 2R	
PP 51-3	p6m	c6	cm(2), pmg(2), cmm, p3ml, p31m	d∞	1D, 1R	
PP 51-4	p6m	d2	p3, p6, p3ml, p31m	d6	3	3
PP 51-5	p6m	d3	cm(2) p2, pmg(2), pgg, cmm, p3ml	d6	2	2
PP 51-6	p6m	d3	cm(2), p2, pmg(2), pgg, cmm, p31m	d6	2	2

A classification even finer than the homeomeric one is appropriate in some situations. We say that two patterns are *diffeomeric* if they are homeomeric under a differentiable homeomorphism. For example, the two open segment patterns in Figure 13 (b)(c) have the same homeomeric type but are not diffeomeric. The diffeomeric classification of open segment patterns is discussed in a forthcoming paper (Grünbaum & Shephard [1982c]), where it is shown that there are 235 diffeomeric types and, in addition, eleven families of diffeomeric types, each family depending on a real-valued parameter. Of these, 57 types and six families of types are coherent. (This corrects several entries in Table 2 of Grünbaum & Shephard [1981a].)

In the next section we shall encounter the diffeomeric classification of certain kinds of tilings.

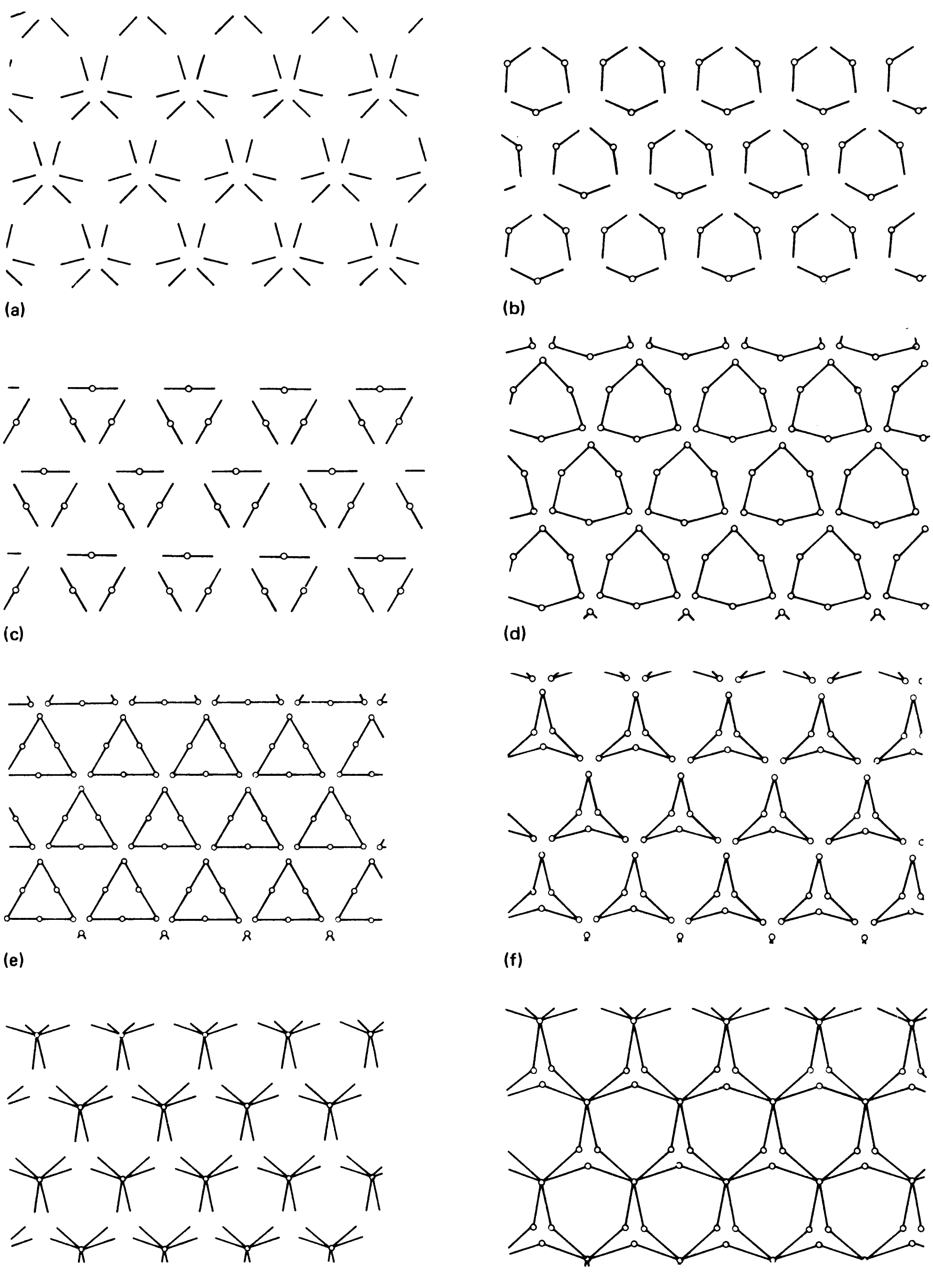


Figure 13. Eight open segment patterns of henomeric type PP 27. As in Figure 12 the segments can be taken as open or as closed. They are of five homeomeric types: (b) and (c) have the same homeomeric type, and so have (d), (e) and (f). The eight patterns are of different diffeomeric types: (g) and (h) each represent a oneparameter family of diffeomeric types (the smaller angle at the six-valent vertex can serve as parameter). The small circles indicate common endpoints of two or six segments.

4 Classifications of tilings

In most investigations it is convenient to consider only *normal* tilings, that is, tilings $\mathscr{T} = \{T_i : i = 1, 2, \ldots\}$ in which:

(a) the intersection of any two or more tiles is either empty, or a single point (called a *vertex* of $\mathscr{T}$) or a single arc (called an *edge* of $\mathscr{T}$);

(b) the tiles are *uniformly bounded* (that is, there exist real numbers $u > 0$ and $U > 0$ such that each tile T_i has diameter at most U and contains a circle of radius u).

Unless the contrary is explicitly stated, all tilings considered in the sequel shall be assumed to be normal[18]).

Special attention is usually given to three kinds of highly symmetric tilings. These are the *isohedral, isotoxal* and *isogonal* tilings, in which the isometric symmetries of the tiling act transitively on the tiles, or the edges, or the vertices, respectively. As we shall see, tilings of each of these kinds can be viewed as geometric patterns of dispersible henomeric types (see footnote 15); hence the classifications of such patterns are applicable to them. Since in many questions concerning tilings it is natural and necessary to take into account the topological properties of the tiling, the homeomeric classification is often appropriate.

Each isohedral tiling can be considered as a geometric pattern (of a dispersible henomeric type) in which the tiles serve as copies of the motif; alternatively, it is possible to consider the interiors of the tiles as copies of the motif. It can be shown that there are 11 topological types[19]) of isohedral tilings, 39 henomeric types, 81 homeomeric types[20]), and infinitely many diffeomeric types. The homeomeric classification coincides with the one based on "incidence symbols", carried out in Grünbaum & Shephard [1977a]. Only 47 of the homeomeric types (and 27 of the henomeric types) have representatives in which the tiles are convex. The diffeomeric classification of the isohedral tilings with convex tiles is a refinement of the classification presented in Grünbaum & Shephard [1978c]; a detailed account of this topic is being prepared.

Each isotoxal tiling[21]) can be interpreted as a geometric pattern of a dispersible henomeric type if the edges of the tiling are taken as copies of the motif

---

[18]) Tilings which fail to be normal because condition (b) is violated are of interest in connection with graph-theoretical and topological investigations, and in studies of tilings of the hyperbolic plane. The pioneering work of Bilinski [1948] had no continuation for many years. For surveys of the available results and references to the literature see Grünbaum & Shephard [1979a], [1981c], and Thomassen [1980].

[19]) These were first determined by Laves [1931]. It is astonishing that – although they were recognized much earlier as topologically dual to the "uniform" or "Archimedian" tilings – no mathematician found them remarkable enough to warrant investigation.

[20]) It has often been stated that there are 93 (rather than 81) types of isohedral tilings (Heesch [1968], Delone, Dolbilin & Štogrin [1978], Delone, Galiulin & Štogrin [1979]; for similar assertions under additional restrictions see Delone [1959], Wollny [1974]). This claim, however, is unjustified, since what is being counted in these publications are *not* types of isohedral tilings, but "types" of various other objects such as "pairs" (consisting of a tiling and a group related to it), or "marked" tilings, or "incidence symbols", etc. See Grünbaum & Shephard [1982a] for more details.

[21]) The isotoxal tilings were first investigated by Heesch [1933], who determined the topological types and found many of the homeomeric types.

of the pattern. It turns out that there are 5 topological, 18 henomeric, and 26 homeomeric types of (normal) isotoxal tilings; if non-normal isotoxal tilings are considered there are, additionally, 7 topological, 6 henomeric, and 15 homeomeric types. The homeomeric classification coincides with the classification discussed in Grünbaum & Shephard [1978b], based on "incidence symbols".

Every isogonal tiling is a geometric pattern of a dispersible henomeric type in which each copy of the motif consists of the union of a vertex with all the edges incident with that vertex. There are 11 topological types, 49 henomeric types, and 91 homeomeric types; the homeomeric classification again coincides with the earlier ad hoc classification of isogonal tilings using "incidence symbols" (see Grünbaum & Shephard [1978a]). Only 63 homeomeric types (belonging to 30 henomeric types) can be realized by isogonal tilings with convex tiles; this coincides with a result obtained by the crystallographer Šubnikov in [1916], except for three types which he missed[22]).

We note in passing that it is tempting (and customary) to consider isohedral and isogonal tilings as being duals of each other. The fact that there are 81 homeomeric types of isohedral tilings as compared with 91 types of isogonal tilings clearly indicates that some caution must be exercised in assertions about duality.

Probably more for psychological than for mathematical reasons, investigations of the highly symmetric tilings reported above have preceded the (logically more basic) investigations of patterns dealt with in Section 3. A similar development seems to be happening at the present, concerning the slightly less symmetric tilings and patterns in which – under isometric symmetries – there are two transitivity classes of tiles, or edges, or vertices, or copies of the motifs (the so-called 2-isohedral, 2-isotoxal, 2-isogonal tilings, and 2-motif patterns, respectively). Specifically, the 51 topologically distinct types of 2-isotoxal tilings have been determined (Grünbaum & Shephard [1982b]); the topological types of the 2-isohedral tilings have been investigated (the 508 known types probably represent all topological possibilities – see Grünbaum, Löckenhoff, Shephard & Temesvári [1982] for details, and for references to the literature); the 38 homeomeric types of 2-isohedral triangulations (that is, edge-to-edge tilings by triangles) have also been determined (Holladay [1982]). However, no study seems to have investigated the henomeric classification of dispersed geometric 2-motif patterns (with bounded motifs), or the homemeric classification of such patterns which have closed topological disks as motifs.

5 Colored patterns

We next turn to "colored patterns" – a topic motivated by art as much as by science. A *colored pattern* is a pattern in which each copy of the motif is assigned one of several "colors" (or other distinguishable properties or symbols).

---

[22]) The same incomplete result is presented in Šubnikov & Kopcik [1972]. The treatment by Sauer [1937] is even more defective. The attempted application of a classification of isogonal tilings by Fedotov [1978] is flawed both logically and in factual details; see Grünbaum & Shephard [1981b].

If the number n of colors is important, we shall used it as a prefix, and speak of n-colored patterns, etc. A *color symmetry* of a colored pattern consists of an (isometric) symmetry of the underlying (uncolored) pattern coupled with a well-defined permutation of the colors[23]). For example, the tiling by pelicans in Figure 1(c) is a 2-colored pattern. Many of the tilings in the prints of M. C. Escher are 2-, 3- or 4-colored.

In analogy with the symmetry groups of geometric patterns it is possible to study the similarly defined *color groups* (groups of color symmetries). The 2-color groups have interested crystallographers for over fifty years[24]). There exist precisely 46 affinely inequivalent color groups of 2-colored geometric patterns with bounded motifs. The corresponding results for n-color groups, with $n \geq 3$, have been much slower in coming[25]). The first determination of the 23 classes of 3-color groups of dispersed geometric patterns with bounded motifs was accomplished only in 1976[26]). Since then there has been a rapid advance, and the number of classes of n-color groups of such patterns appears to be known[27]) for all $n \leq 60$ and for many other values of n.

The 2-color groups are useful in determining the possible groups of symmetry of (uncolored) patterns in the *two-sided plane* or, equivalently and often more conveniently, patterns in a *plane-pair* (that is, in a pair of distinct, parallel planes). It is easily seen that in such a pattern *either* all the copies of the motif are in one of the planes, *or* each copy of the motif in one plane is exactly matched by a copy in the other, *or* the pattern can be faithfully represented by a 2-colored pattern in the (ordinary) plane. This shows that there are 17 + 17 + 46 = 80 classes of groups of symmetry of dispersed geometric patterns with bounded motifs contained in a plane-pair[28]).

The question whether a given pattern can be colored in accordance with a certain color group depends only on the henomeric type of the pattern[29]); this provides another application of the henomeric classification. But probably more

---

[23]) Naturally, it is also possible to consider the symmetries of the underlying pattern (disregarding the colors), or else only those symmetries which map each copy of the motif onto another of the same color.

[24]) See, for example, Alexander & Herrmann [1929], Heesch [1929], Hermann [1929], Weber [1929], Woods [1935], and the very influential Šubnikov [1951]. For details and references see Zamorzaev [1976], Grünbaum & Shephard [1982a, Chapter 8].

[25]) The main impediment have been the arbitrary restrictions imposed on the transformations admitted as color symmetries by Belov (see Shubnikov, Belov et al. [1964]), Loeb [1971], and others. For historical details and for references to the literature see, in particular, Zamorzaev, Galyarskii & Palistrant [1978], Jarratt & Schwarzenberger [1980], Grünbaum & Shephard [1982a].

[26]) A description of these groups was circulated in Grünbaum [1976]; more accessible accounts are Grünbaum & Shephard [1977b], [1979a].

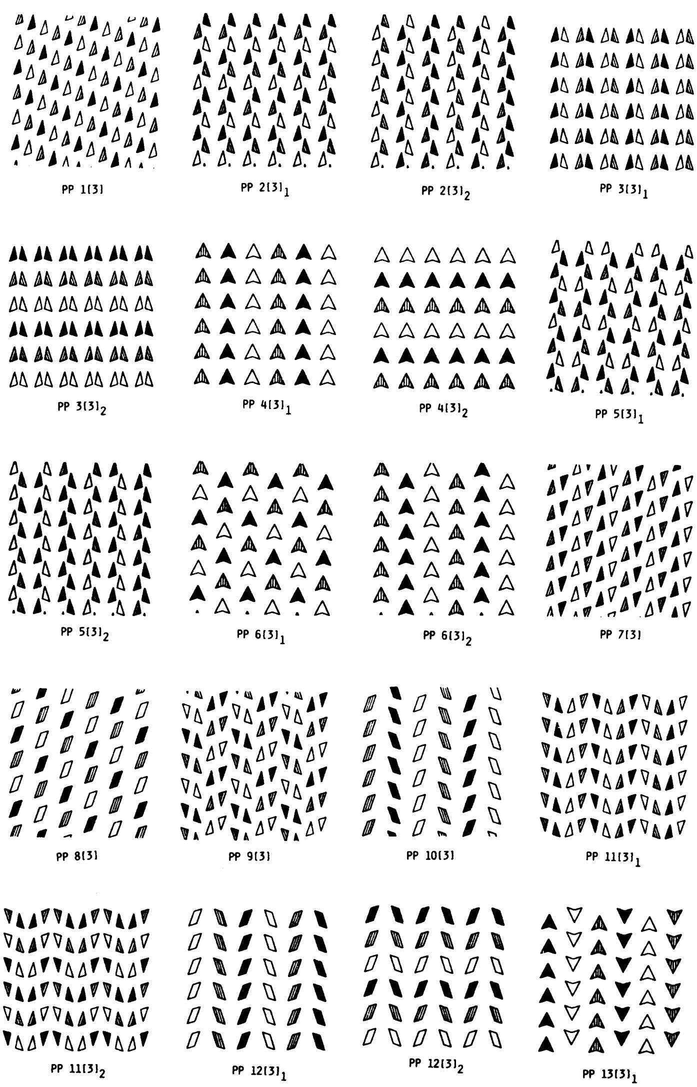
[27]) Senechal [1979] determined the numbers of n-color groups for various classes of integers n (for example, products of distinct primes, etc.); Jarratt & Schwarzenberger [1980] enumerated the groups for $n \leq 15$, while Wieting [1982] presents results for all $n \leq 60$.

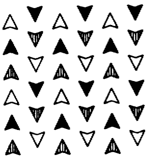
[28]) Several of the papers mentioned in footnote 24 actually enumerate these 80 classes. This is a very natural approach for crystallographers, who view the plane as a material object situated in the 3-dimensional space.

[29]) See, for example, Senechal [1979].

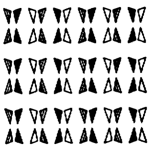
interesting are the more refined kinds of classifications of colored patterns which are analogous to the classifications of (uncolored) patterns discussed in Section 3. The first steps in such an investigation are detailed in Grünbaum & Shephard [1982a, Chapter 8]. As an example we can mention that – in analogy to the 51 types of dispersible geometric patterns with bounded motifs – there exist 86 *2-henochromatic types* (or *2-color pattern types*) and 57 3-henochromatic types. The latter are illustrated in Figure 14, and all are shown in Chapter 8 of Grünbaum & Shephard [1982a].

Despite considerable work on the classification of colored patterns carried out in the last few years, the topic is clearly only at the start of its development.

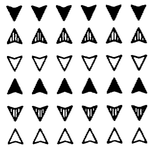




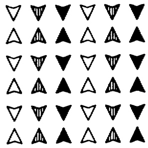
PP $13[3]_2$



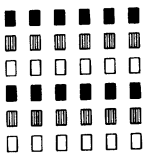
PP $14[3]$



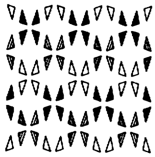
PP $15[3]$



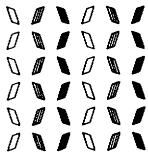
PP $15[3]^*$



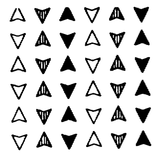
PP $16[3]$



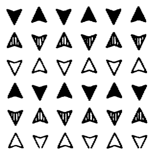
PP $17[3]$



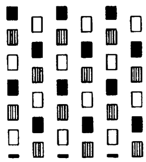
PP $18[3]$



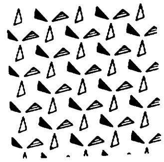
PP $19[3]$



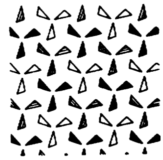
PP $19[3]^*$



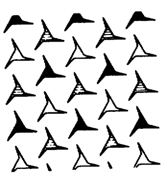
PP $20[3]$



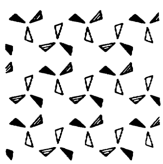
PP $21[3]_1$



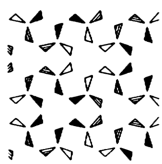
PP $21[3]_2$



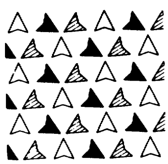
PP $22[3]_2$



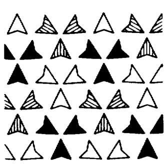
PP $23[3]_1$



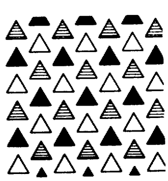
PP $23[3]_2$



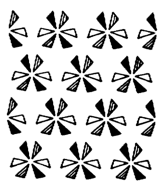
PP $25[3]_1$



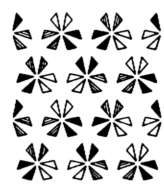
PP $25[3]_2$



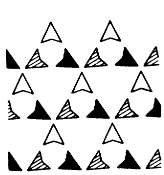
PP $26[3]_2$



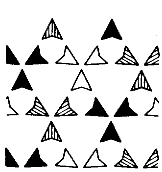
PP $27[3]_1$



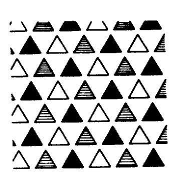
PP $27[3]_2$



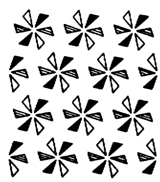
PP $28[3]_1$



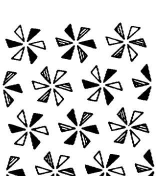
PP $28[3]_2$



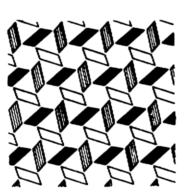
PP $29[3]_2$



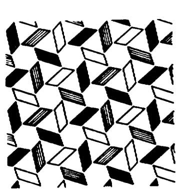
PP $42[3]_1$



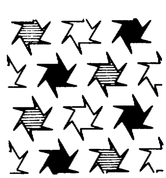
PP $42[3]_2$



PP $43[3]_1$



PP $43[3]_2$



PP $45[3]_2$

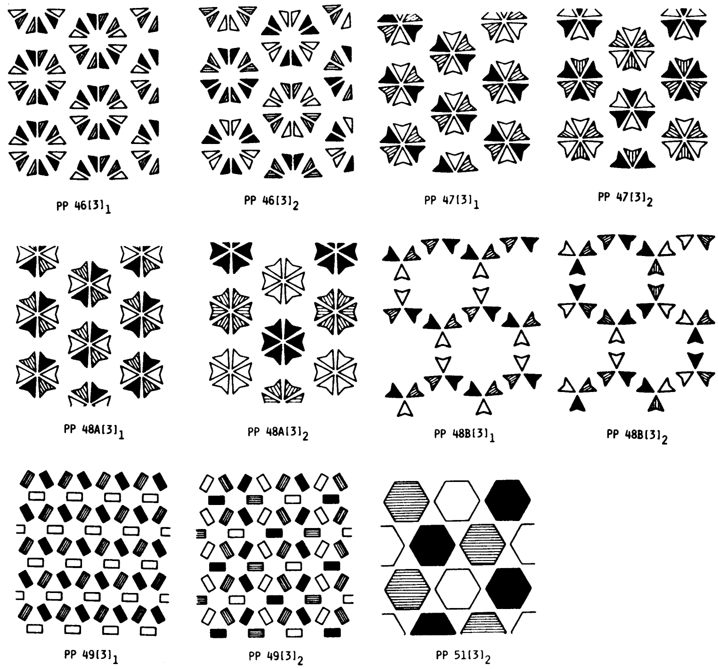


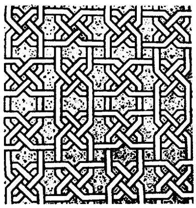
Figure 14. The 59 henochromatic types of 3-colored dispersed geometric patterns with bounded motifs. The 3-colored patterns marked PP15[3] and PP15[3]* have the same henochromatic type but can be distinguished in the finer *homeochromatic* classification discussed in Grünbaum & Shephard [1982a, Chapter 8]. The same holds for PP19[3] and PP19[3]* and also for those patterns whose reference numbers only differ by the letters A and B.

6 Layered patterns

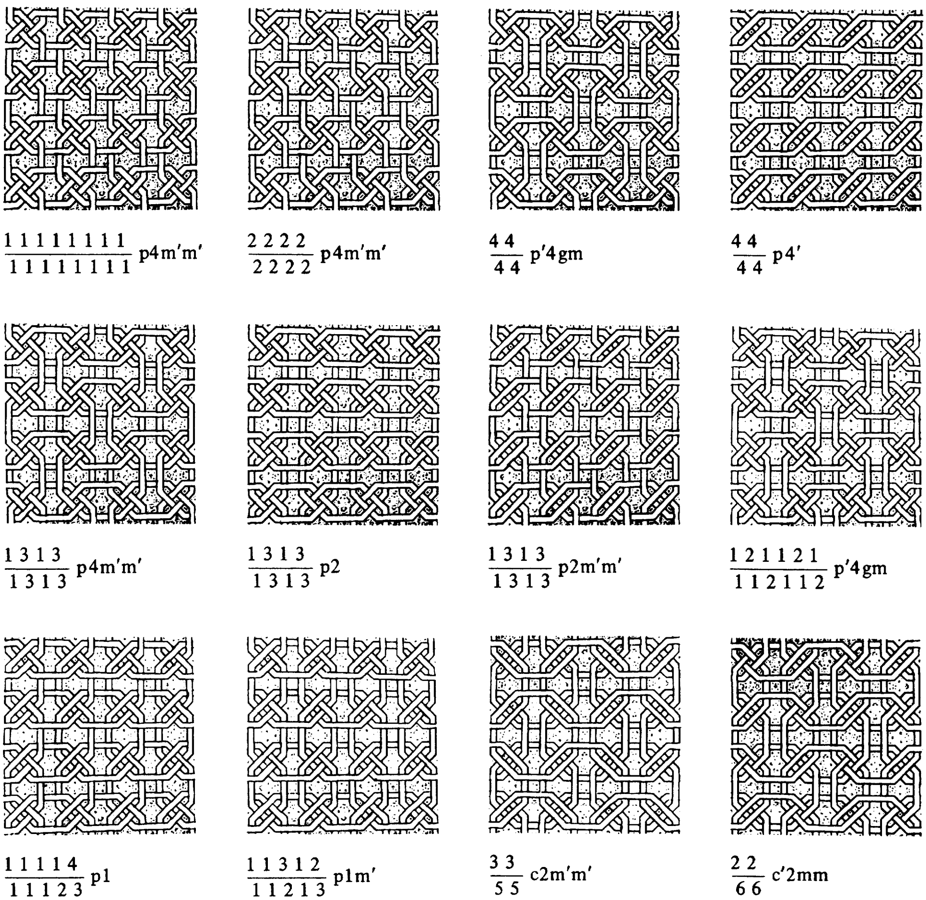
The crafts of the weaver and the basketmaker, as well as many ornaments of the Islamic, Celtic and other cultures, provide the motivation for the study of "layered patterns". Intuitively, a "layered pattern" can best be imagined as having copies of the motif cut out of paper or similar impermeable material of negligible thickness, so that "stacking" in some order occurs at each overlap. More formally, restricting attention for the moment to layered patterns in which no overlap involves more than two copies of the motif, we make the following definition.

A geometric pattern in which no three copies of the motif have a common point is called a *layered pattern* provided it is possible to assign, for each connected component of the intersection of two copies of the motif, a "precedence order at that component" to each of the two copies of the motif involved, in such a way that *layered symmetries* act transitively on the pattern. Here a "layered symmetry" is a pairing of an isometric symmetry of the original underlying pattern with a suitable permutation of the precedence order (either unchanged, or else reversed).

As an example, the decorated tile (from fourteenth century Turkey) shown in Figure 15(a) can be considered to represent a pattern with octagonal



(a)



(b)

Figure 15. (a) A layered ornament taken from a medieval ceramic tile (Aslanapa [1965]). (b) Examples of layered patterns obtained by modifying the ornament in (a). Near each is indicated the "over" and "under" arrangement of the crossings, as well as the group of 2-color symmetry corresponding to the layered pattern.

rings as copies of the motif (disregarding the "mottled" background, and the "weaving" of the rings over and under each other); the pattern is of the henomeric type PP41. With the layering shown it is *not* a layered pattern since it lacks the requisite layered symmetries. (For example, the octagon in the upper right corner cannot be equivalent under any layered symmetry to the one in upper center, since in the latter the layering is "two-over-two-under", and in the former it is "one-over-one-under".) However, the same pattern can be made into a layered pattern in many ways; some examples are shown in Figure 15(b). Near each of these layered patterns we have marked, using a self-explanatory symbol adapted from the weaving trade, the arrangement of the "over" and "under" crossings of a suitable copy of the motif.

It follows immediately from the definitions that the groups of layered symmetries of such 2-layered patterns are essentially equivalent to the 2-color groups discussed in Section 5 (unless they correspond to the groups of (unlayered) patterns by not involving any changes in the precedence order). In Figure 15(b) these groups of layered symmetries are indicated following the notation in Lockwood & Macmillan [1978].

Analogously, it is possible to define layered patterns in which stacking of more than two copies of the motif can occur; their symmetries are related to the appropriate color symmetries. We are not giving the precise definitions since no work on this topic seems to have been done, and in consequence there are questions about the appropriateness of some aspects of the definition. For example, it is not clear whether the "natural" approach would allow all permutations of the precedence order to be paired with geometric symmetries, or only those which either preserve or reverse all precedences; several other fine points will also need to be decided.

But one other aspect deserves explicit mention even in connection with 2-layered patterns. Since the practical realizations of layered patterns usually involve material films which naturally have two sides, is seems appropriate to allow among the symmetry operations the "flipping over" of the layered pattern in the three-dimensional space. If this is the case, then the groups of symmetry appropriate for the study of layered patterns are easily seen to be the 2-color (or multicolor) groups of geometric patterns on the plane-pair.

It seems that no attempt has been made so far to devise a henomeric (or other suitable) classification of layered patterns. However, some additional information is available for the special layered patterns which are called "fabrics"; their definition is clearly inspired by the material objects designated by this word.

A *fabric*[30]) is a layered pattern in which:

(i) each copy of the motif is the open strip between two parallel lines;

(ii) for each strip, the union of all the strips parallel to it has a closure which covers the plane;

(iii) the strips in different directions are "interwoven" in such a manner that the fabric "hangs together".

---

[30]) More precisely, these are the *isonemal* fabrics ($\nu\eta\mu\alpha$ = thread, yarn). More general fabrics are discussed in Grünbaum & Shephard [1980a] but since we do not use the more general concept here, we keep the shorter designation.

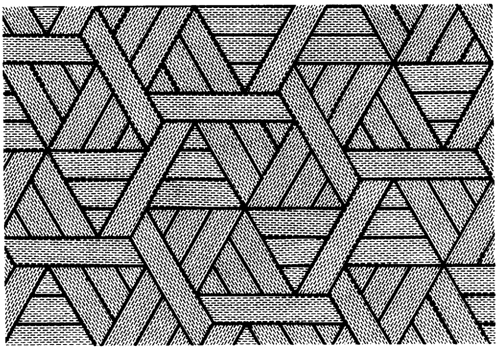


Figure 16. An example of a fabric with strips in three directions and with 3-fold overlaps. It belongs to an infinite family of such fabrics.

Following some early work by Lucas on satins (about a century ago), and by Shorter and Woods (about half a century ago), the interest in the topic has recently been revived. It is not hard to show that the strips of a fabric can have only 2, 3, 4 or 6 different directions, and that the maximal number of layers with common overlap is also one of these numbers (although 4-fold overlap is possible with just two directions, and 6-fold overlap with 3 directions). More interesting is the fact that in each of these six cases there exist infinitely may homeomeric types of fabrics; see Figure 16 for the case of 3-fold overlaps[31]). Fabrics with strips in two directions (and only 2-fold overlaps) have been studied in some detail[32]). In particular, methods of generating several infinite families[33]) of highly symmetric fabrics have been described, which lead to various number-theoretic and combinatorial questions. It seems probable that with moderate effort complete descriptions could be found of all fabrics having a given group of layered symmetries.

7 Conclusions

There is nothing in the topics and results presented above (or in those that were only hinted at and are still unexplored) which could not have been found twenty, fifty or more years ago. However, despite the great theoretical and practical interest that workers in various non-mathematical fields had in such questions of mathematical taxonomy, until very recently the topic was almost completely neglected by mathematicians. This attitude not only cost us, mathematicians, in lost prestige in the eyes of our colleagues from other disciplines (and possibly resulted in lost jobs and opportunities for our students), but also deprived us of mathematically valuable insights and results. It seems to the authors that we, as a profession, must rid ourselves of our narcissistic tendencies and become again receptive – as mathematicians of earlier times have been – to stimuli from other fields. We also have to realize – and inculcate in our students an appreciation of

---

[31]) A detailed exposition of these results is being prepared (Grünbaum & Shephard [1982d]); for a brief account see Pedersen [1982].

[32]) See Grünbaum & Shephard [1980a].

[33]) These include some of the kinds of fabrics technically known as satins and twills.

the fact – that algebraic and axiomatic frameworks are largely meaningless playthings if they do not support an otherwise interesting structure. We also should note that geometry still is – as it always was – a source of new ideas and directions. Moreover, visual accessibility of a topic is an asset which should be valued and utilized, in order to counter the widespread illiteracy concerning spatial relations and other geometric circumstances.

The topics we have discussed are only a small sample of meaningful mathematics inspired by such external stimuli. But they fit rather well Felix Klein's more that a century old definition of geometry as the study of invariants of groups of transformations – the patterns and other objects of our discussion are precisely such invariants.

References

E. Alexander and K. Herrmann [1929]: Die 80 zweidimensionalen Raumgruppen. Z. Kristallographie 70, pp. 328–345.

O. Aslanapa [1965]: Türkische Fliesen und Keramik in Anatolien. Baha Matbaasi, Istanbul.

W. Audsley and G. Audsley [1882]: Outlines of Ornament in the Leading Styles. Scribner and Welford, London. New edition: Designs and Patterns from Historic Ornament. Dover, New York 1968.

R. S. Beard [1973]: Patterns in Space. Creative Publications, Palo Alto, CA.

S. Bilinski [1948]: Homogeneous plane nets. [In Croatian] Rad Jugoslav. Akad. Znanosti i Umjetnosti 271, pp. 145–255. Condensed German translation: Homogene Netze der Ebene. Bull. Internat. Acad. Yougoslave. Cl. Sci. Math. Phys. Tech. (N.S.) 2(1949), pp. 63–111.

J. Bourgoin [1879]: Les éléments de l'art arabe: le trait des entrelacs. Firmin-Didot, Paris. Reprint of plates: Arabic Geometrical Pattern and Design, Dover, New York 1973.

J. Brandmüller [1980]: Zum Symmetriebegriff und seiner Bedeutung für Naturwissenschaft und Kunst. In: Symmetrie, edited by A. Preisinger = Schriftenreihe der Technischen Universität Wien, Vol. 16. Pages 9–42.

H. Brown, R. Bülow, J. Neubüser, H. Wondratschek and H. Zassenhaus [1978]: Crystallographic groups of four-dimensional space. John Wiley & Sons, New York – Chichester – Brisbane – Toronto.

F. J. Budden [1972]: The fascination of groups. Cambridge University Press, London.

J. J. Burckhardt [1966]: Die Bewegungsgruppen der Kristallographie. 2nd ed. Birkhäuser Verlag, Basel – Stuttgart.

D. W. Crowe [1971]: The geometry of African art I. Bakuba art. J. of Geometry 1, pp. 169–182.

B. N. Delone [Delaunay] [1932]: Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie. Z. Kristallographie 84, pp. 109–149.

B. N. Delone [1959]: The theory of planigons. [In Russian] Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 23, pp. 365–386.

B. N. Delone, N. P. Dolbilin and M. I. Štogrin [1978]: Combinatorial and metric theory of planigons. [In Russian] Trudy Matem. Instituta Akad. Nauk SSSR 148, pp. 109–140.

B. N. Delone, R. V. Galiulin and M. I. Štogrin [1979]: The contemporary theory of regular decompositions of the Euclidean space. [In Russian] In: Regular partition of plane and space, by E. S. Fedorov, edited by B. N. Delone et al. Nauka, Leningrad. Pp. 235–260.

D. S. Dye [1981]: The New Book of Chinese Lattice Designs. Dover, New York.

I. El-Said and A. Parman [1976]: Geometric Concepts in Islamic Art. World of Islam Festival Publ. Co., London.

M. C. Escher [1971]: The World of M. C. Escher. Edited by J. L. Locher. Abrams, New York.

E. S. Fedorov [1981]: Symmetry in the plane. [In Russian]. Zapiski Rus. Mineralog. Obščestva, Ser. 2, 28, pp. 345–390, 2 plates.

V. P. Fedotov [1978]: Some remarks on discrete chronogeometry. [In Russian] Sibirskii Matem. Žurnal 19, pp. 186–192. English translation: Siberian Math. Journal 19 (1978), pp. 132–136.

L. Fejes Tóth [1965]: Reguläre Figuren. Akadémiai Kiadó, Budapest. English translation: Regular Figures. Pergamon, New York – London 1964.

U. Grenander [1976]: Pattern Synthesis (Lectures in Pattern Theory Volume 1). Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin.

B. Grünbaum [1976]: Color symmetries and colored patterns. Mimeographed notes, University of Washington, Seattle.

B. Grünbaum, H.-D. Löckenhoff, G. C. Shephard and A. H. Temesvári [1982]: The enumeration of normal 2-homeohedral tilings. (To appear)

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1977a]: The eighty-one types of isohedral tilings in the plane. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 82, pp. 177–196.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1977b]: Classification of plane patterns. Mimeographed notes, Amer. Math. Soc. Summer Meeting, August 1977, Seattle.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1978a]: The ninety-one types of isogonal tilings in the plane. Trans. Amer. Math. Soc. 242, pp. 335–353.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1978b]: Isotoxal tilings. Pacif. J. Math. 76, pp. 407–430.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1978c]: Isohedral tilings of the plane by polygons. Comment. Math. Helvet. 53, pp. 542–571.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1978d] The homeomeric classification of patterns. C. R. Math. Reports Acad. Sci. Canada 1, pp. 57–60.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1979]: Incidence symbols and their applications. Proc. Sympos. Pure Math. 34, pp. 199–244.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1980]: Satins and twills: an introduction to the geometry of fabrics. Math. Magazine 53, pp. 139–161 and 313.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1981a]: A hierarchy of classification methods for patterns. Z. Kristallographie 154, pp. 163–187.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1981b]: Some remarks on Fedotov's paper on discrete chronogeometry. [In Russian] Sibirsk. Mat. Žurnal 22, pp. 220–226. English translation: Siberian Math. Journal 22, pp. 164–169.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1981c]: The geometry of planar graphs. In: Combinatorics, Proc. Eighth British Combinat. Conf., Swansea 1981, H. N. V. Temperley, ed. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 52, Cambridge Univ. Press. Pp. 124–150.

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1982a]: Tilings and Patterns. Freeman, San Francisco. (To appear.)

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1982b]: The 2-homeotoxal tilings of the plane and the 2-sphere. (To appear.)

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1982c]: The diffeomeric classification of segment patterns. (To appear.)

B. Grünbaum and G. C. Shephard [1982d]: Isonemal fabrics. (To appear.)

H. Heesch [1929]: Zur Strukturtheorie der ebenen Symmetriegruppen. Z. Kristallographie 71, pp. 95–102.

H. Heesch [1930]: Zur systematischen Strukturtheorie IV. Über die Symmetrien zweiter Art in Kontinuen und Semidiskontinuen. Z. Kristallographie 73, pp. 346–356.

H. Heesch [1933]: Über topologisch gleichwertige Kristallbindungen. Z. Kristallographie 84, pp. 399–407.

H. Heesch [1968]: Reguläres Parkettierungsproblem. Westdeutscher Verlag, Köln – Opladen.

C. Hermann [1929]: Zur systematischen Strukturtheorie III. Ketten- und Netzgruppen. Z. Kristallographie 69, pp. 250–270.

D. Hilbert [1900]: Mathematische Probleme. Göttinger Nachrichten 1900, pp. 253–297 = Arch. Math. Phys. Ser. 3, 1 (1901), pp. 44–63 and 213–237. English translation: Mathematical Problems, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902), pp. 437–479; reprinted in: Mathematical developments arising from Hilbert problems. Proc. Sympos. Pure Math. vol. 28 (F. E. Browder, ed.). Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976. Pages 1–34.

K. Holladay [1982]: Dihedral triangulations. (To appear.)

S. Izumi [1964]: The Costume and Textile Ornament of the Pre-Inca Cultures. Sanichi Shobo, Kyoto.

J. D. Jarratt and R. L. E. Schwarzenberger [1980]: Coloured plane groups. Acta Cryst. A36, pp. 884–888.

Lord Kelvin [1894]: Molecular Tactics of a Crystal. British Assoc. Adv. Sci.

A. I. Kitaigorodskii [1955]: Organic crystalochemistry. [In Russian] Akad. Nauk SSSR, Moscow. English translation: Organic chemical crystallography. Consultants Bureau, New York 1961.

F. Laves [1931]: Ebenenteilung and Koordinationszahl. Z. Kristallographie 78, pp. 208–241.

A. B. Lewis [1925]: Decorative Art of New Guinea: Incised Designs. Anthropology Design Series No. 4, Field Museum of Natural History, Chicago. Reprinted in: Decorative Art of New Guinea. Dover, New York 1973.

E. H. Lockwood and R. H. Macmillan [1978]: Geometric Symmetry. Cambridge University Press, London – New York – Melbourne.

A. L. Loeb [1971]: Color and Symmetry. Wiley, New York.

E. Müller [1944]: Gruppentheoretische und Strukturanalytische Untersuchungen der Maurischen Ornamente aus der Alhambra in Granada. Ph. D. Thesis, Univ. Zürich. Baublatt, Rüschikon.

P. Niggli [1924]: The Flächensymmetrien homogener Diskontinuen. Z. Krist. 60, pp. 283–298.

P. Niggli [1927]: Die topologische Strukturanalyse I, II. Z. Kristallographie 65, pp. 391–415 and 68 (1928), pp. 404–466.

W. Nowacki [1948]: Symmetrie und physikalisch-chemische Eigenschaften kristallisierter Verbindungen. V. Über Ellipsenpackungen in der Kristallebene. Schweiz. Mineralog. Petrog. Mitt. 28, pp. 502–508.

J. J. Pedersen [1982]: Some isonemal fabrics on polyhedral surfaces. In: The Geometric Vein, edited by C. Davis, B. Grünbaum and F. A. Sherk. Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin.

G. Pólya [1924]: Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. Z. Krist. 60, pp. 278–282.

R. Sauer [1937]: Ebene gleicheckige Polygongitter. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 47, pp. 115–124.

D. Schattschneider [1978]: The plane symmetry groups. Their recognition and notation. Amer. Math. Monthly 85, pp. 439–450.

P. L. E. Schwarzenberger [1980]: N-dimensional crystallography. Pitman, San Francisco – London – Melbourne.

M. Senechal [1979]: Color groups. Discrete Applied Math. 1, pp. 51–73.

A. O. Shepard [1948]: The symmetry of abstract design with special reference to ceramic decoration. Publication 574, Carnegie Institution of Washington, Washington, D.C.

A. V. Shubnikov [Šubnikov], N. V. Belov and others [1964]: Colored symmetry. Pergamon Press, Oxford.

U. Sinogowitz [1939]: Die Kreislagen und Packungen kongruenter Kreise in der Ebene. Z. Kristallographie 100, pp. 461–508.

A. Speiser [1927]: Die Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. 2nd ed. Springer, Berlin. 4th ed. Birkhäuser, Basel 1956.

P. S. Stevens [1980]: Handbook of regular patterns. The MIT Press, Cambridge MA – London.

A. Šubnikov [1916]: On the question of the structure of crystals. [In Russian] Bull. Acad. Imp. Sci., Ser. 6, Vol. 10, pp. 755–779.

A. V. Šubnikov [Shubnikov] [1951]: Symmetry and antisymmetry of finite figures. [In Russian] Akad. Nauk. SSSR, Moscow – Leningrad. English translation in: Shubnikov, Belov and others [1964], pp. 1–172.

A. V. Šubnikov [Shubnikov] [1960]: Symmetry of similarity. [In Russian] Kristallografiya 5, pp. 489–496. English translation: Soviet Physics – Crystallography 5 (1961), 469–476.

A. V. Šubnikov and V. A. Kopcik [1972]: Symmetry in science and art. [In Russian] Nauka, Moscow. English translation: A. V. Shubnikov and V. A. Koptsik, Symmetry in science and art. Plenum Press, New York – London 1974.

C. Thomassen [1980]: Planarity and duality of finite and infinite graphs. J. Combinat. Theory (B) 29, pp. 244–271.

D. Wade [1976]: Pattern in Islamic Art. Overlook Press, Woodstock, NY.

L. Weber [1929]: Die Symmetrie homogener ebener Punktsysteme. Z. Kristallographie 70, pp. 309–327.

T. W. Wieting [1982]: Plane chromatic ornaments. Decker, New York.

K. L. Wolf [1949]: Symmetrie und Polarität. Studium Generale 2, pp. 213–224.

K. L. Wolf and R. Wolff [1956]: Symmetrie. Böhlau-Verlag, Münster – Köln (2 volumes).

W. Wollny [1974]: Die 36 regulären Parketts mit dem Quadratnetz. Geometriae Dedicata 3, pp. 41–60.

H. Wondratschek [1980]: Symmetrie in der Ornamentik. In: Symmetrie, edited by A. Preisinger = Schriftenreihe der Technischen Universität Wien, Vol. 16. Pages 43–63.

H. J. Woods [1935]: The geometrical basis of pattern design I, II, III, IV. Journal of the Textile Institute (Manchester) 26, pp. T197–T210, T293–T308, T341–T357, and 27, pp. T305–T320.

A. M. Zamorzaev [1976]: Theory of simple and multiple antisymmetry. [In Russian] Štiinca, Kišinev.

A. M. Zamorzaev, E. I. Galyarskii and A. F. Palistrant [1978]: Color symmetry, its generalizations and applications. [In Russian] Štiinca, Kišinev.

B. Zaslow [1977]: A guide to analyzing prehistoric ceramic decorations by symmetry and pattern mathematics. In: Pattern Mathematics and Archeology, Anthropological Research Papers No. 2, Arizona State University, Tempe, Arizona.

Prof. Branko Grünbaum
Department of Mathematics
University of Washington
Seattle, Washington 98195, USA

Prof. G. C. Shephard
University of East Anglia
Norwich NR4 7TJ, England

(*Eingegangen: 1. 3. 1982*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
85 (1983) 33–49
AMS subject classification: O6, 81

Orthomodulare Verbände

G. Kalmbach, Ulm

Die historischen Wurzeln der Theorie orthomodularer Verbände liegen bei J. von Neumanns (1936) Interesse an neuen, quantenmechanischen Modellen, deren Axiome aus der Operatortheorie und der Theorie der Hilberträume abgeleitet sind. Die Theorie entwickelte sich in den ersten 25 Jahren nur langsam, seit 1963 sind über orthomodulare Verbände Beiträge von 100 bis 200 Mathematikern, Philosophen und Physikern in 500 Arbeiten und in 15 Büchern erschienen.

Der erste Abschnitt gibt einen historischen Abriß. Die dort benutzten Begriffe und zitierten Resultate werden in den folgenden Abschnitten präzisiert, deren Anordnung nach Schwerpunkten in der Algebra (§ 2), Geometrie (§ 3), Maßtheorie (§ 4) oder Logik (§ 5) vorgenommen worden ist.

§ 1 Geschichtlicher Überblick

In den Jahren 1936/37 erschienen mehrere Arbeiten von J. von Neumann, in denen er „algebraische Verallgemeinerungen des quantenmechanischen Formalismus" vorschlägt. Zusammen mit G. Birkhoff entwickelte er die ersten Ansätze einer nicht-klassischen Quantenlogik, die dem distributiven Gesetz der klassischen Logik nicht genügt: „Logicians have usually assumed that properties . . . of negation were the ones least able to withstand a critical analysis, the study of mechanics points to the *distributive identities* . . . as the weakest link in the algebra of logic." (Siehe auch [11], [12], [17]).

Modelle hierzu treten auf bei den Projektionsverbänden eines Hilbertraumes oder bei der Klassifikation der Typ I–III Faktoren in Operatorringen [111], oder bei den kontinuierlichen Geometrien [113], [14], auf denen unter anderem maßtheoretisch gearbeitet wird: entweder wird die Existenz einer Übergangswahrscheinlichkeit gefordert [15] oder es wird explizit eine Dimensionsfunktion konstruiert.

Das *orthomodulare Gesetz* für Projektionsoperatoren P, Q im Hilbertraum wurde 1937 von K. Husimi formuliert:

„*If* $P \subset Q$ *we get* $P \cup (P' \cap Q) = Q$, *that is*
$(Q - P) + P = Q$ *provided* $Q \supset P$."

Es wurde 1940 von R. Dilworth durch das nicht-modulare Gegenbeispiel (Fig. 1) von Dedekinds *modularem Gesetz:*

0012-0456/83/01 0033-17 $03.40/0

$$P \subset Q \quad \textit{impliziert} \quad P \cup (R \cap Q) = (P \cup R) \cap Q,$$

abgegrenzt. Der Name „orthomodular" stammt von I. Kaplansky, der 1955 zeigte, daß vollständige, modulare Orthoverbände kontinuierliche Geometrien sind.

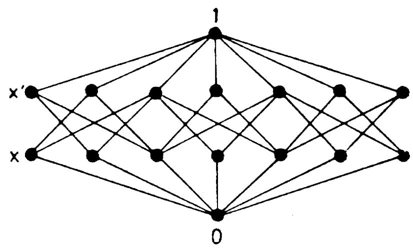


Fig. 1

In den Jahren 1954/61 publizierten L. Loomis, S. Maeda und U. Sasaki Arbeiten über spezielle Klassen orthomodularer Verbände, die eine *Dimensionstheorie* im Sinne von [111] und [14] gestatten. Unter verschiedenen Voraussetzungen konstruierten Loomis und S. Maeda auf ihren (Dimensions-) Verbänden L *Dimensionsfunktionen* und gaben einfache Beweise zur *Typen*zerlegung von L an. Sasaki untersuchte Projektionen und Dimension auf Verbänden, die atomistisch, vollständig, orthokomplementiert und orthomodular sind und das Austauschaxiom von MacLane (ein geometrisches Axiom) erfüllen. Beispiele hierfür sind die Projektionsverbände eines Hilbertraums. Zehn Jahre später fand A. Ramsay (siehe auch [99]), daß Sasakis orthomodulare Verbände im wesentlichen mit Loomis' Dimensionsverbänden übereinstimmen.

Kurz vor Ramsays Resultat erschienen die ersten Arbeiten von D. Foulis und S. Holland, in denen die Struktur orthomodularer Verbände allgemein untersucht wurde. Das spätere Interesse von Foulis galt *Baer*-Halbgruppen*, die zur Darstellung orthomodularer Verbände geeignet sind und zentriert nun um eine verallgemeinerte Maßtheorie und Statistik (siehe auch R. Greechie, C. Randall und G. Rüttimann), bei der geeignete orthomodulare Strukturen (verallgemeinerte Boolesche σ-Algebren als Grundräume) – und *empirische Logiken* verwendet werden. S. Holland führte die Segalsche *nicht-kommutative Integrationstheorie* auf orthomodularen Strukturen aus und faßte die bis 1970 vorliegenden Resultate über orthomodulare Verbände in einem Übersichtsartikel zusammen.

In Kürze sei ferner erwähnt: M. Janowitz bewies eine Vielzahl von Theoremen über Verbände, die den orthomodularen nahestehen; einige dieser Ergebnisse werden weiter unten zitiert oder benutzt. R. Greechie untersucht wichtige Strukturfragen, unter anderem wie orthomodulare Verbände aus Booleschen Algebren durch *Verkleben* entstehen; er leistete den entscheidenden Beitrag zur *graphischen Darstellung* orthomodularer Verbände. Auf dem Weg zur Charakterisierung orthomodularer *Varietäten* stellt und löst G. Bruns eine Vielzahl von Aufgaben, die zur Bereicherung der ganzen orthomodularen Theorie beitragen. 1982/83 wird bei Academic Press ein von G. Kalmbach geschriebenes Buch erscheinen, in dem die bis 1980 entwickelte orthomodulare Theorie behandelt wird.

§ 2 Orthomodulare Strukturen

Es sei auf der Menge P eine (reflexive, antisymmetrische und transitive) Ordnung $\leqslant$ mit einem kleinsten und größten Element 0 und 1 und eine unäre Operation gegeben, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $x \leqslant y$ *impliziert* $y' \leqslant x'$,

(ii) $x'' = x$,

(iii) *falls* $x \leqslant y'$ *gilt, so existiert das Supremum* $x \vee y$ *in* P,

(iv) $x \vee x' = 1$,

(v) $x \leqslant y$ *impliziert* $x \vee (x' \wedge y) = y$.

Unter den Bedingungen (i)–(iv) heißt $(P; ', 0, 1, \leqslant)$ eine *orthokomplementierte Ordnung* und, falls zu je zwei Elementen x, y in P ein Supremum $x \vee y$ und ein Infimum $x \wedge y$ existiert, heißt P ein *Orthoverband.* Ensprechend sind die Begriffe *orthomodulare Ordnung* und *orthomodularer Verband* für $(P; ', 0, 1, \leqslant)$ mit den Bedingungen (i)–(v) erklärt.

Die Menge $\mathscr{C}(H)$ der abgeschlossenen Unterräume eines Hilbertraumes H trägt eine orthomodulare Struktur: die Mengeninklusion ist die Ordnung, die Unterräume $0 = \{0\}$ und $1 = H$ sind das kleinste und größte Element in $\mathscr{C}(H)$, die unäre Operation $^{\perp}$ ordnet einem Unterraum M sein orthogonales Komplement $M^{\perp} = \{x \in H \mid (x, y) = 0, \forall\, y \in M\}$ zu. Das orthomodulare Gesetz folgt zum Beispiel aus der Tatsache, daß jeder Vektor v in M sich bezüglich $N \subseteq M$ aufspaltet in $v = w + z$ mit $w \in N$ und $z \in N^{\perp} \cap M$, also $M \subseteq N \vee (N^{\perp} \wedge M)$. Da trivialerweise $N \vee (N^{\perp} \wedge M)$ in M enthalten ist, gilt die in (v) geforderte Gleichheit $N \vee (N^{\perp} \wedge M) = M$. Je ein Beispiel eines nicht-orthomodularen Orthoverbandes und eines orthomodularen Verbandes ist in den folgenden Hasse-Diagrammen dargestellt (Fig. 2 und 3).

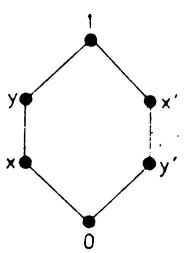


Fig. 2

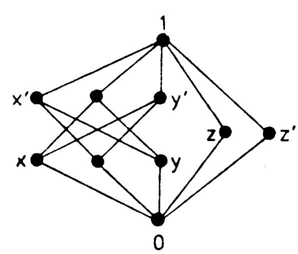


Fig. 3

Fig. 3 illustriert ein einfaches Konstruktionsprinzip orthomodularer Verbände: für eine Menge $\{B_i\}_{i \in I}$ Boolescher Algebren sei $B_i \cap B_j = \{0, 1\}$ oder $B_i = B_j$; dann ist $L = \bigcup_{i \in I} B_i$ mit der induzierten Struktur ein orthomodularer Verband. Ein solches L heißt, falls es nicht Boolesch ist, *horizontale Summe.* Fig. 1 und $\mathscr{C}(H)$ mit $\dim H \geqslant 3$ sind keine horizontalen Summen. – Eine Boolesche Algebra ist ein modularer Orthoverband und ein modularer Orthoverband ist ein orthomodularer Verband. Die Umkehrungen gelten nicht: Fig. 3 ist nicht modular, und MO2 ist ein nicht-distributiver modularer Orthoverband (Fig. 4).

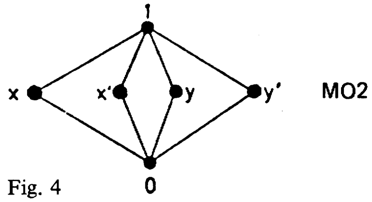


Fig. 4

Überträgt man den Begriff des Kommutierens zweier Projektionsoperatoren PQ = QP eines Hilbertraumes H auf die zugeordneten Unterräume N = P(H) und M = Q(H), so ergibt sich die Gleichheit

$$N = (N \wedge M) \vee (N \wedge M^{\perp}),$$

die allgemein in orthomodularen Verbänden mit *NCM* (N *kommutiert* mit M) bezeichnet wird.

Maximale Teilmengen eines orthomodularen Verbandes L, in denen Elemente paarweise kommutieren, heißen *Blöcke* und stimmen mit den maximalen Booleschen Unteralgebren von L überein. Ihre mengentheoretische Vereinigung ist L. Die Blockstruktur ermöglicht eine vereinfachte graphische Darstellung orthomodularer Verbände: man stelle eine Boolesche Algebra 2^n durch eine glatte Kurve mit n-Punkten (zwei davon als Endpunkte) dar (Fig. 5).

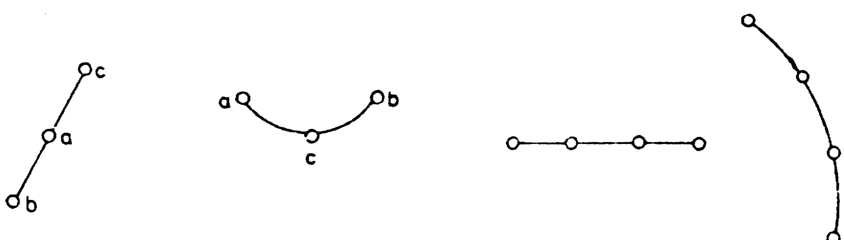


Fig. 5

Überlappen sich zwei Boolesche Algebren nicht-trivial als Blöcke eines orthomodularen Verbandes, so sei dies durch Unstetigkeiten im zugehörigen Graphen G klar markiert.

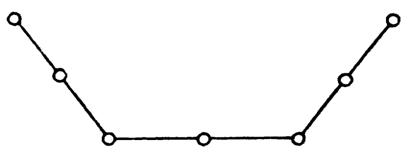


Fig. 6

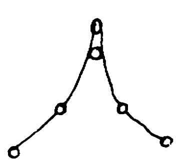


Fig. 7

Das zu Fig. 6 gehörige Hasse-Diagramm ist die Fig. 1. Fig. 7 stellt den orthomodularen Verband $2^2 \times MO2$ dar, der aus zwei Blöcken isomorph zu 2^4 besteht, die ihrerseits sich in einer Unteralgebra isomorph zu 2^3 überlappen. Sind in einem orthomodularen Verband alle Blöcke endlich, so haben seine, wie soeben beschriebenen, *Greechie-Diagramme* G zusätzliche charakteristische Eigenschaften: Angenommen, je zwei „Blöcke" haben höchstens einen Eckpunkt gemeinsam, so dürfen „Loops" der Ordnung 3 und 4 (Fig. 8 und 9) in G nicht vorkommen [63].

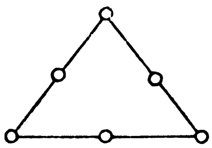


Fig. 8

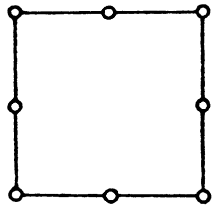


Fig. 9

Erlaubt man Untergraphen in G wie in Fig. 7, so wird die Situation komplizierter, zum Beispiel stellen Fig. 10 und 11 orthomodulare Verbände mit einem 3-er bzw. 4-er Loop dar. Die angegebene Situation ist dann typisch, was in den beiden Spezialfällen Fig. 10, 11 heißt [40]: Zu einem 3-er Loop (Fig. 12) existiert ein zentraler Block (Fig. 13), und zu einem 4-er Loop (Fig. 14) existiert ein zentrales Astroid (Fig. 15).

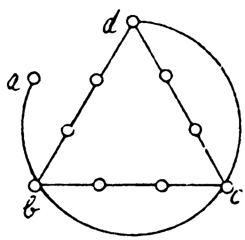


Fig. 10

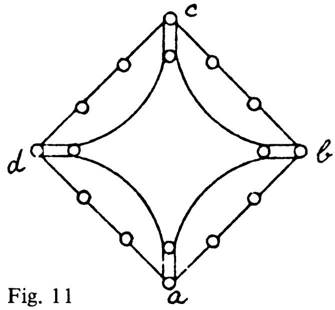


Fig. 11

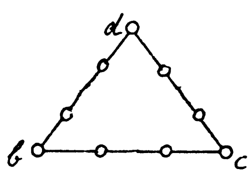


Fig. 12

Fig. 13

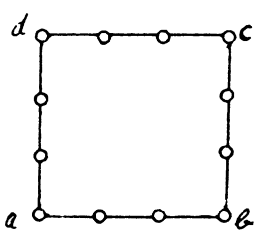


Fig. 14

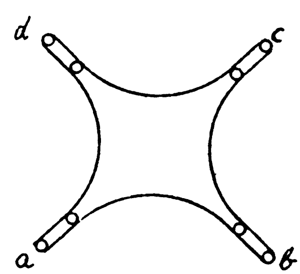


Fig. 15

Die exakte Formulierung dieser Begriffe und Theoreme ist langwierig und soll deswegen hier übergangen werden; – es sind inzwischen genug Beispiele vorhanden, mit denen der Leser die folgende Theorie testen kann. Werden noch weitere *unendliche* Beispiele gesucht, so kann dazu jeder Projektionsverband einer von Neumann-Algebra dienen.

Das Kommutieren von Elementen eines orthomodularen Verbandes L ergibt nützliche Rechenregeln, die eine Anwendung des distributiven Gesetzes erlauben: Gilt xCy, xCz, so ist der Unter*verband* $[x, y, z] \subseteq L$, der von x, y und z in L erzeugt wird, distributiv [48], [76]. Allgemeiner gilt: hat $S \subseteq L$ die Eigenschaft, daß in jeder 3-elementigen Teilmenge von S eines der Elemente mit den restlichen beiden kommutiert, so ist der von S in L erzeugte Unter*verband* [S] distributiv [65]. Man beachte, daß die von S erzeugte Unteralgebra in L im allgemeinen nicht distributiv ist (cf. Fig. 16).

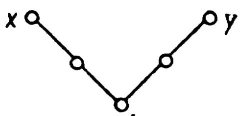


Fig. 16

Mit diesen Ergebnissen zeigt man zum Beispiel, daß ein orthomodularer Verband L genau dann Boolesch ist, wenn jedes Element $x \in L$ ein eindeutiges *„Komplement"* $c \in L$ mit $x \vee c = 1$ und $x \wedge c = 0$ besitzt. Bezeichnet man mit *C(M)* die Menge der Elemente des orthomodularen Verbandes L, die mit jedem Element von $M \subseteq L$ kommutieren, so folgt, daß C(L) eine Boolesche Algebra ist. Die Elemente c von C(L) heißen *zentral* und gestatten eine direkte Zerlegung von L in ein Produkt, das isomorph zu $[0, c] \times [0, c']$ ist. Man bemerke, daß allgemein jedes *Intervall* $[a, b] = \{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ in L, versehen mit der Orthokomplementierung $x^{\#} = a \vee (x' \wedge b)$, ein orthomodularer Verband ist. Besitzt L nur endlich viele Blöcke, so kann diese Eigenschaft auch durch eine der folgenden Bedingungen an L ausgedrückt werden: (a) L wird von endlich vielen Blöcken überdeckt. (b) Die Menge $\{C(x) \mid x \in L\}$ ist endlich. (c) Es existiert eine natürliche Zahl n, so daß von je $(n + 1)$ Elementen aus L mindestens zwei miteinander kommutieren.

Beschränkt man sich auf die Varietät, die von den soeben beschriebenen *Block-endlichen* orthomodularen Verbänden erzeugt wird, so beginnt der Subvarietätenverband an seinem unteren Ende mit Fig. 17, wobei O die triviale Klasse, $\mathscr{B}$ die Klasse der Booleschen Algebren, $\mathscr{C}$ die von MO2 erzeugte Varietät und $\mathscr{C}_i$ die von L_i, $i = 1, \ldots, 4$ erzeugten Varietäten sind; L_1 ist in Fig. 6, L_2 ist in Fig. 3 und L_3 das *orthomodulare Haus*, ist in Fig. 18 dargestellt; L_4 ist die horizontale Summe dreier Kopien von 2^2.

Die horizontale Summe von n-Kopien von 2^2 heißt **MOn**. Die Subvarietäten [MOn] bilden in der von Block-endlichen, modularen Orthoverbänden erzeugten Varietät am unteren Ende eine unendliche Kette

$$0 \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{C} \subset \mathscr{C}_4 \subset \ldots \subset [\mathrm{MO}(n-1)] \subset [\mathrm{MO}n] \subset \ldots$$

Einige weitere Resultate über Subvarietäten sind: Die von den horizontalen Summen erzeugten Varietät $\mathscr{H}\mathscr{O}\mathscr{R}$ orthomodularer Verbände hat eine endliche Basis,

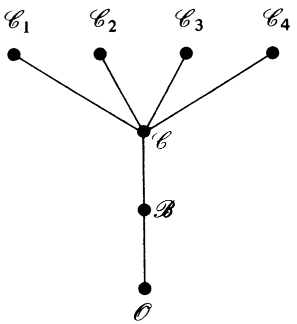


Fig. 17

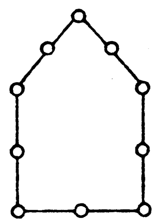


Fig. 18

ebenso jede Subvarietät von $\mathscr{H}\mathscr{O}\mathscr{R}$, d. h. sie können durch Angabe endlich vieler Gleichungen beschrieben werden. Subvarietäten $\mathscr{V}$ mit $\mathscr{D}\mathscr{F} \subseteq \mathscr{V} \subseteq \mathscr{S}$ haben keine endliche Basis, wobei $\mathscr{D}\mathscr{F}$ aus den orthomodularen Verbänden mit einer vollen Menge von dispersionsfreien Zuständen besteht und $\mathscr{S}$ von den orthomodularen Verbänden mit einer starken Menge von Zuständen erzeugt wird [57]. Die Definitionen dieser Begriffe wird in § 4 nachgeholt.

Insgesamt sind nur lückenhafte Kenntnisse über den Verband der Subvarietäten orthomodularer Verbände vorhanden. Es wäre zum Beispiel wünschenswert, genaueres über die von den Verbänden $\mathscr{C}$(H) (H Hilbertraum) erzeugte Subvarietät $\mathscr{H}$ zu wissen. Bekannt ist, daß in $\mathscr{H}$ zusätzliche Gleichungen gelten, wie das orthodesarguesische Gesetz (A. Day) oder die (Un-)Gleichung [58]

$$x \leqslant y \vee (y' \wedge (y \vee x) \wedge ((z' \wedge (z \vee x)) \vee ((y \vee z) \wedge (y' \wedge (y \vee x)) \vee (z' \wedge (z \vee x)))))$$

Neben der graphischen Darstellung orthomodularer Verbände sind auch *topologische Darstellungen* [81] angegeben worden, die den Stoneschen Darstellungssatz für Boolesche Algebren verallgemeinern. Die von Foulis [47] entwickelte Darstellung orthomodularer Verbände L durch *Baer*-Halbgruppen* S(L) wird zur Zeit neu überarbeitet, da sie nicht kategorisch ist. Die Definition von S(L) ist wie folgt: Elemente von L sind die antitonen Abbildungen ψ: L → L, die Partner einer Galoiskorrespondenz sind, d. h. zu denen es eine antitone Abbildung ψ^*: L → L gibt mit $\psi \circ \psi^* \geqslant \mathrm{id}$ und $\psi^* \circ \psi \geqslant \mathrm{id}$. Die Abbildung i: L → L mit $i(x) = x'$ gehört zu S(L), ebenso die Abbildung 0: L → L mit $0(x) = 1$. Die Multiplikation auf S(L) ist $\psi_1 \psi_2 = \psi_1 \circ i \circ \psi_2$, somit ist 0 und i ein Null- und Eins-Element.

Die Partner-Beziehung * ist eine Involution auf S(L) und L ist über die Zuordnung $a \to \psi_a$ mit $\psi_a(x) = a' \vee (a \wedge x')$ in S(L) eingebettet. L besteht genau aus den *Projektionen* von S(L), das sind die $\psi \in S(L)$ mit $\psi^2 = \psi = \psi^*$.

Die von Foulis angegebene axiomatische Beschreibung der Strukturen S = S(L) benutzt einige Eigenschaften der multiplikativen Halbgruppe der Operatoren $\mathscr{B}$(H) eines Hilbertraumes H; ein solches S sei eine (multiplikative) Halbgruppe mit einer Involution *: S → S und einem Null- und Eins-Element; jeder Rechtsannihilator $r(a) = \{x \in S \mid ax = 0\}$ sei von einer Projektion a' mit $a'^2 = a' = a'^*$ erzeugt, $r(a) = a'S$. Zwar erfüllt $\mathscr{B}$(H) diese Axiome – zum Beispiel ist T′ die Projektion auf den Nullraum von T –, aber $\mathscr{B}$(H) tritt umgekehrt nicht als ein S(L) auf.

§ 3 Dimensionsverbände

Die Dimensionstheorie orthomodularer Verbände wurde von Loomis und S. Maeda entwickelt, um die komplizierte Operatormaschinerie aus der Murray-von Neumannschen [111] Typentheorie beweistechnisch zu eliminieren. Der erste Schritt in dieser Richtung ist schon bei den kontinuierlichen Geometrien zu finden, die von Neumann verbandstheoretisch definierte, mit einer Äquivalenzrelation $\equiv$ versah und nachträglich zeigte, daß sie eine *Dimensionsfunktion* α mit Werten in $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \infty\}$ besitzen, für die gilt (i) $\alpha(0) = 0$, (ii) $a \perp b$ impliziert $\alpha(a \vee b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ (endliche Additivität), (iii) a ist „endlich" genau dann, wenn $\alpha(a) < \infty$, (iv) $a \equiv b$ ist gleichwertig mit $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstanten ist α eindeutig bestimmt. Bei den Murray-von Neumannschen „Faktoren" $\mathscr{A}$ hat die Dimensionsfunktion α auf dem Projektionsverband den Wertebereich $\{0, 1, \ldots, n\}$ (Typ I_n), $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ (Typ I_∞), $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ (Typ II_1), $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \infty\}$ (Typ II_∞) oder $\{0, \infty\}$ (Typ III). Typ III-Faktoren werden als Modelle bei Equilibriumszuständen unendlicher termodynamischer Systemen mit definiter *endlicher* Temperatur verwendet, Typ II_∞-Faktoren bei *unendlicher* Temperatur [79].

Ersetzt man $P(\mathscr{A})$ durch einen (wie unten definierten orthomodularen) Dimensionsverband L, so besagt die Typentheorie: L ist isomorph zu dem Produkt $[0, e_I] \times [0, e_{II}] \times [0, e_{III}]$ mit $e_I, e_{II}, e_{III} \in C(L)$, so daß $[0, e_i]$ vom Typ i, $i \in \{I, II, III\}$ ist. Ferner spaltet sich für i = I, II der Faktor $[0, e_i]$ auf in einen „endlichen" Anteil und einen, möglicherweise nicht existierenden, „unendlichen" Anteil $[0, e_i^\infty] \subseteq [0, e_i]$ mit: $[0, e_i]$ ist isomorph zu $[0, e_i \wedge e_i^{\infty\prime}] \times [0, e_i^\infty]$. Der von *S. Maeda* stammende Beweis ist von unübertrefflicher Kürze und Eleganz.

Alle Projektionsverbände der von Neumann Algebren, speziell alle Verbände $\mathscr{C}(H)$ abgeschlossener Unterräume eines Hilbertraumes H, sind Dimensionsverbände. Fig. 3 stellt keinen Dimensionsverband dar.

Definition *Sei* L *ein vollständiger, orthomodularer Verband,* $\equiv$ *eine Äquivalenzrelation auf* L. *Das Paar* $(L, \equiv)$ *heißt Dimensionsverband falls*

(i) $a \equiv 0$ *impliziert* $a = 0$.

(ii) *Ist* $a \perp b$ *und* $c \equiv a \vee b$, *so existieren* $d \perp e$ *mit* $c = d \vee e$ *und* $a \equiv d$, $b \equiv e$ (*endliche Division*).

(iii) *Sind* $A \subseteq L$, $B \subseteq L$ *orthogonal und existiert eine bijektive Abbildung* g *von* A *auf* B *mit* $a \equiv g(a)$ *für alle* $a \in A$, *so ist* $\bigvee A \equiv \bigvee B$ (*vollständige Additivität*).

(iv) $a \sim b$ *impliziert* $a \equiv b$.

Hier heißt $a \sim b$, a ist *perspektiv* zu b, daß ein gemeinsames Komplement c von a und b existiert, – es ist $a \vee c = 1 = b \vee c$, $a \wedge c = 0 = b \wedge c$. *Orthogonal* heißt eine Teilmenge $A \subseteq L$, falls jedes Elementepaar von A orthogonal ist und $a, b \in L$ heißen *orthogonal*, $a \perp b$, falls $a \leqslant b'$ gilt.

Die Dimensionsäquivalenzrelation $\equiv$ ermöglicht es, auf der Menge der Restklassen $L/\equiv$ eine Struktur so zu definieren, daß eine (im wesentlichen eindeutige) *Dimensionsfunktion* α auf L existiert mit den Eigenschaften (i) $\alpha(x) = 0$ gilt genau für $x = 0$. (ii) $x \perp y$ impliziert $\alpha(x \vee y) = \alpha(x) + \alpha(y)$ (endliche Additivität). (iii) Ist $x \in L$ „endlich", so ist $\alpha(x)$ „fast immer" endlich. (iv) $x \equiv y$ impliziert $\alpha(x) = \alpha(y)$.

(v) Zentrale Elemente $z \in C(L)$, für die aus $a \leqslant d \sim z$ folgt $a \leqslant z$, genügen der Gleichung $\alpha(z \wedge x) = \phi(z) \cdot \alpha(x)$. Hierbei ist $\phi(z)$ die charakteristische Funktion des Bildes von z im Stoneraum S der Booleschen Algebra $C_0 = \{c \in C(L) \mid a \leqslant d \sim c$ impliziert $a \leqslant c\}$.

Die Bedingung (v) entfällt, falls $C(L) = \{0, 1\}$ ist, – eine Eigenschaft, die von Neumann in seinen Untersuchungen fast immer verlangt hat. Falls C(L) nicht trivial ist, d. h. $C(L) \neq \{0, 1\}$ gilt, liegen die Werte von α in der Menge C(S) der nicht-negativen (endlichen oder unendlichen) stetigen Funktionen auf S. α ist bis auf Multiplikation mit einem Element $f \in C(S)$ (diese f ersetzen nun Konstanten) eindeutig bestimmt.

In Ergänzung der oben gemachten Resultate über Dimensionsverbände L definieren wir folgende Begriffe: $x \in L$ heißt *endlich,* falls $x \equiv y$ und $y \leqslant x$ implizieren $x = y$. L ist vom Typ III, falls 0 das einzige endliche Element ist. Wir schreiben $x \,\rho\, y$, falls $u \leqslant x$, $v \leqslant y$ und $u \equiv v$ implizieren $u = 0 = v$. Das Element $x \in L$ heißt *einfach*, falls $y \,\rho\, (x \wedge y')$ gilt für alle $y \leqslant x$. L ist vom *Typ* I, wenn jedes Element $x \in L$ Supremum von paarweise orthogonalen, einfachen Elementen ist. L ist vom *Typ* II, wenn jedes Element $x \in L$ Supremum von paarweise orthogonalen, endlichen Elementen ist und $x \neq 0$ die Existenz orthogonaler Elemente $0 \neq y, z \leqslant x$ mit $y \equiv z$ impliziert. Die oben erwähnten Elemente $e_i \wedge e_i^{\infty\,\prime}$ sind das Supremum der Elemente $x \leqslant e_i$, zu denen es eine endliche, orthogonale Menge B endlicher (zentraler) Elemente $b \in C_0$ mit $b \leqslant e_i$ und $x \leqslant \bigvee B$ gibt.

Als äußerst nützlich erweisen sich in der orthomodularen Dimensionstheorie Resultate aus [85], [86] über die Relation $a \,\nabla\, b$, die für Elemente a, b eines orthomodularen Verbands L durch: $(a \vee x) \wedge b = x \wedge b$ gilt für alle $x \in L$, definiert ist. Falls L modular ist, kann $a \,\nabla\, b$ auch durch die Bedingung: $c \leqslant a$, $d \leqslant b$ und c projektiv zu d implizieren $c = 0 = d$, charakterisiert werden. Hierbei heißt c *projektiv* zu d, $c \approx d$, falls es Elemente $c = c_0, c_1, \ldots, c_r = d$ in L mit $c_i \sim c_{i+1}$ gibt. „Projektiv“ ist somit die transitive Hülle der Perspektivität und als solche ist sie eine Äquivalenzrelation auf L. Im allgemeinen ist die Perspektivität nicht transitiv. Vollständige, modulare Orthoverbände L bilden eine Ausnahme, für sie kann die *Perspektivität als Dimensionsäquivalenzrelation* genommen werden. Sie sind charakterisiert unter den vollständigen, orthomodularen Verbänden als Dimensionsverbände mit endlichem Einselement. Im irreduziblen Fall haben ihre Dimensionsfunktionen die Werte $\{m/n \mid 0 \leqslant m \leqslant n\}$ für eine natürliche Zahl n oder die Werte $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Im letzten Fall hat der Verband L keine *Atome*, das sind Elemente $x \in L$, für die aus $0 < y \leqslant x$ folgt $y = x$. Die Beweise dieser Resultate sind tiefsinnig. Man kann entweder S. Maedas Argumentation oder Amemiya-Halperin und von Neumann folgen, – ein verbandstheoretisch hier beweisbares Seitenresultat ist das Kaplanskysche Juwel: vollständige, modulare Orthoverbände sind kontinuierliche Geometrien.

Es sei hier erwähnt, daß *viele* geometrische Begriffe sinnvoll auf Verbände übertragen werden können. Durch den Zusammenhang mit Unterraumverbänden einer Geometrie [88], sind manche geometrische Konstruktionen, wie die Existenz von *Koordinaten* für gewisse abstrakte Geometrien, verbandstheoretisch einfacher durchzuführen. Die regulären Ringe, die zusammen mit einem „normalized frame F“ nach von Neumann, die Koordinaten kontinuierlicher Geometrien dar-stellen, gaben unter anderem Anlaß zur Koordinatenkonstruktion auf „Desarguesschen Verbänden mit einem n-Diamanten ($n \geqslant 3$) F" [37]. Projektive und affine Koordinaten fallen unter eine solche Konstruktion.

§ 4 Maße auf orthomodularen Strukturen

Schon in seinen ersten verbandstheoretischen Charakterisierungen der Verbände $\mathscr{C}(H)$ abgeschlossener Unterräume eines Hilbertraumes H führt J. von Neumann neben Dimensionsfunktionen auch Wahrscheinlichkeitsfunktionen, sogenannte transition probabilities ein [25], [114], [15].

Als Verallgemeinerung Boolescher σ-Algebren sind orthomodulare σ-(vollständige) Verbände geeignet, Grundräume einer verallgemeinerten Maßtheorie zu sein. Ein *Zustand* auf einem orthomodularen Verband L ist eine nicht-negative, reellwertige Funktion α auf L mit (i) $\alpha(1) = 1$, (ii) $x \perp y$ impliziert $\alpha(x \vee y) = = \alpha(x) + \alpha(y)$.

Normierte Dimensionsfunktionen sind somit Zustände. L besitzt eine *volle* [*starke*] Menge $\mathscr{Z}$ von Zuständen, falls $x \leqslant y$ für $x, y \in L$ genau dann gilt, wenn $\alpha(x) \leqslant \alpha(y)$ [$\alpha(x) = 1$ impliziert $\alpha(y) = 1$] für alle $\alpha \in \mathscr{Z}$ gilt. $\mathscr{C}(H)$ hat eine volle Menge von Zuständen. *Dispersionsfrei* heißt ein Zustand, der nur die Werte 0 und 1 annimmt. In vielen Fällen, zum Beispiel auf vollständigen, modularen Orthoverbänden, sind die Dimensionsfunktionen des vorhergehenden Paragraphen Maße, die folgendermaßen definiert werden. Ein *σ-Verband* ist ein Verband, in dem abzählbare Teilmengen ein Supremum besitzen. Ein *Maß* auf einem orthomodularen σ-Verband L ist eine Abbildung α von L in $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0\} \cup \{\infty\}$ mit $\alpha(\bigvee A) = \sum_{a \in A} \alpha(a)$ für jede abzählbare, orthogonale Teilmenge $A \subseteq L$. Entweder ist dann α identisch ∞ oder $\alpha(0)$ ist 0. Falls $\alpha(1)$ endlich ist, kann ein Maß auch durch (i) $a_n \in L$, $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant a_{n+1}$ impliziert $\alpha(\bigvee a_n) = \lim \alpha(a_n)$, oder (ii) $a_n \in L$, $n \in \mathbf{N}$, $a_n \geqslant a_{n+1}$, $\alpha(a_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbf{N}$ impliziert $\alpha(\bigwedge a_n) = \lim \alpha(a_n)$, oder (iii) $a_n \in L$, $n \in \mathbf{N}$, $a_n \geqslant a_{n+1}$, $\bigwedge a_n = 0$, $\alpha(a_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbf{N}$ impliziert $\lim \alpha(a_n) = 0$, charakterisiert werden (H. Gensheimer, G. Rüttimann). Nach [127] sind auf $\mathscr{C}(H)$ Maße α vollständig additiv, d. h. $\alpha(\bigvee A) = \sum_{a \in A} \alpha(a)$ gilt für jede orthogonale Teilmenge $A \subseteq L$. Nach S. Maeda [11] folgt hiermit die Gültigkeit des *Gleasonschen Theorems* für beliebige Hilberträume: Maße auf $\mathscr{C}(H)$ sind genau durch die Spuren positiver Operatoren T der Spurklasse mit Spur 1 gegeben.

Auf Dimensionsverbänden L nannte Holland ein Maß α mit (i) $\alpha(0) = 0$, (ii) $a \equiv b$ impliziert $\alpha(a) = \alpha(b)$, (iii) zu $a \neq 0$ existiert $0 \neq b \leqslant a$ mit $\alpha(b) < \infty$ ein „*gauge*" und zeigte folgende Version des *Radon-Nikodym-Theorems*, das Segals [131] operatortheoretische Integration verallgemeinert: In der Beziehung $\alpha = f \circ \beta$ sei α ein gauge, β eine Dimensionsfunktion und f ein lineares Funktional auf dem Raum C(S) (siehe § 3). Zwei der Funktionen α, β, f bestimmen die dritte eindeutig. Zu gegebenen α oder β können die beiden anderen Funktionen so konstruiert werden, daß die Gleichheit $\alpha = f \circ \beta$ gilt.

Wahrscheinlichkeiten sind Maße α auf einem orthomodularen σ-Verband L mit $\alpha(1) = 1$. Für eine volle Menge $\mathscr{W}$ von Wahrscheinlichkeiten auf L definierte

Maczyński die Bedingung

(*) *Zu jeder Folge* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *mit* ($n \neq m$ *impliziert* $\alpha(x_n) + \alpha(x_m) \leqslant 1$ *für alle* $\alpha \in \mathscr{W}$) *existiert* $y \in L$ *mit* $\Sigma\, \alpha(x_n) = 1 - \alpha(y)$ *für alle* $\alpha \in \mathscr{W}$.

Falls L ein Unterraumverband eines unendlich-dimensionalen Vektorraums V über **R** (oder **C**) ist mit: (i) L enthält alle endlich-dimensionalen Unterräume von V, (ii) ist einer der beiden Unterräume $M, N \in L$ endlich-dimensional, so ist $M + N \in L$, (iii) ist $D \subset L$, so auch $\cap D \in L$, – dann gilt

L *ist der Verband abgeschlossener Unterräume eines Hilbertraumes definiert durch ein inneres Produkt auf* V *genau dann, wenn* L *eine volle Menge* $\mathscr{W}$ *von Zuständen mit der Bedingung* (*) *besitzt* [100].

Kakutani und Mackey hatten dieses Theorem in *der* Form gezeigt, daß die letzte Bedingung an L ersetzt wird durch: L gestattet eine (im komplexen Fall reguläre) Orthokomplementierung, so daß L orthomodular ist.

Zahlreiche weitere Resultate über Zustände und Maße können in Gudder [5] gefunden werden.

§ 5 Quantenlogiken

Orthomodulare Verbände bilden die semantische Seite einer nichtklassischen Logik $\mathscr{OM}$. Da nicht-distributive Verbände zur Bewertung der Terme benutzt werden, kann nach [20] ein Deduktionstheorem in $\mathscr{OM}$ nicht gelten. Mit der intuitionistischen Logik $\mathscr{I}$, deren Semantik gewisse distributive Verbände, die Heyting Algebren, verwendet, hat $\mathscr{OM}$ nur die klassische, Boolesch-wertige Logik gemeinsam. $\mathscr{OM}$ besitzt eine endliche modus-ponens Axiomatisierung, für die der Vollständigkeitssatz gilt [91]. Nur *eine* der in $\mathscr{OM}$ möglichen Implikationen liefert einen Vollständigkeitssatz. Verlangt man von einer solchen Polynomimplikation $a \to b = p(a, b)$ die in [25] aufgestellte Bedingung

$$p(a, b) = 1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad a \leqslant b \quad \text{gilt,}$$

so sind fünf orthomodulare Implikationen möglich

$$a \to b = a \to_1 b = (a' \wedge b) \vee (a' \wedge b') \vee (a \wedge (a' \vee b)),$$

$$a \to_2 b = (a' \wedge b) \vee (a \wedge b) \vee ((a' \vee b) \wedge b'), \qquad a \to_3 b = a' \vee (a \wedge b),$$

$$a \to_4 b = b \vee (a' \wedge b')$$

und $\quad a \to_5 b = (a' \wedge b) \vee (a \wedge b) \vee (a' \wedge b')$.

Dies kann so bewiesen werden, daß man den freien von zwei Elementen a, b erzeugten orthomodularen Verband bestimmt. Er ist modular und nach [95] isomorph zu $2^4 \times MO2$. Die 96 Elemente dieses Verbandes müssen dann einzeln auf die Birkhoff-von Neumann-Bedingung hin angesehen werden, – die fünf aufgeführten $a \to_i b$ bleiben hierbei übrig.

Über *freie* orthomodulare Strukturen ist wenig bekannt. Der 3-erzeugte hat unendliche Ketten und unendlich viele Blöcke [33]. Der n-erzeugte hat den n-erzeugten freien Verband als Unterverband. Deswegen ist die Theorie orthomodularer Verbände erster Stufe unentscheidbar (G. McNulty).

Das *Wortproblem* orthomodularer Verbände ist ungelöst. Bruns bewies in diesem Zusammenhang folgende Strukturaussage: Ist A eine endliche Teilmenge eines orthomodularen Verbandes L mit C(A) = C(L), so ist L isomorph zu einem direkten Produkt einer Booleschen Algebra und einem orthomodularen Verband ohne nicht-triviale Boolesche Faktoren. Für ein Block-endliches L heißt dies: L ist isomorph zu $B_0 \times L_1 \times \ldots \times L_m$ mit einfachen, nicht-Booleschen L_i und einem Booleschen Faktor B_0. Ist außerdem L endlich erzeugt, so ist L endlich.

Goldblatt bemerkte, daß „orthomodular nicht elementar" ist, da ein Prä-Hilbert-Unterraum eines separablen Hilbertraumes H elementar äquivalent zu H in der Sprache erster Stufe ist (unter Benutzung einer einzigen binären Relation), und die Hilberträume unter den Prä-Hilberträumen durch die Orthomodularität ihrer „Projektionsverbände" $\mathscr{C}(H)$ charakterisiert sind.

Denneau, ein Schüler Takeutis, zeigte, daß die Gleichungstheorie von $\mathscr{C}(H)$ für einen unendlich-dimensionalen Hilbertraum H entscheidbar ist und aus genau den Identitäten besteht, die in allen Verbänden gelten.

Die fünf oben erwähnten orthomodularen Implikationen sind in der Literatur viel untersucht worden, am häufigsten davon $a \to_3 b$. Diese Implikation erscheint einem intuitionistisch geneigten Gemüt als geeignete Verallgemeinerung der klassischen Implikation $a' \vee b$. Da eine Abschwächung des distributiven Gesetzes jedoch bei $\mathscr{OM}$ in eine andere Richtung als eine Abschwächung der Orthokomplementierung bei $\mathscr{I}$ zielt, ist sie für $\mathscr{OM}$ ungeeignet, – es sei denn, man verzichte auf einen Vollständigkeitssatz.

Meistens werden – wegen $\mathscr{H}$ (der von den $\mathscr{C}(H)$ erzeugten Varietät) ungleich $\mathscr{OM}$ – Modell-Betrachtungen als *Quantenlogiken* bezeichnet und Implikationen wie $\to_3$ als eine zusätzliche Operation auf diesen Strukturen genommen. Beispiele für Quantenlogiken variieren je nach dem Autor – es mögen orthomodulare Ordnungen, also nicht einmal Verbände sein –, oder auch das Beispiel $\mathscr{C}(H)$ mit dem Standardmodell der Quantenmechanik, dem separablen Hilbertraum H.

Der verbreitete Name *Orthologik* wurde von Foulis-Randall [52] geprägt mit Hilfe einer Liste von sechs Eigenschaften an ein Tripel $(L; \leqslant, \perp)$. Es ist hierbei L eine mindestens zwei Elemente enthaltende Menge, $(L; \leqslant)$ ist eine Ordnung mit einem kleinsten und größten Element 0 und 1 und $\perp$ ist eine symmetrische Orthogonalitätsrelation bezüglich derer nur 0 zu sich selbst orthogonal ist. Orthologiken können als die algebraische Version der wie folgt definierten Räume $\Pi = \Pi(X, \perp, \mathscr{A})$ angesehen werden: X sei eine Menge, versehen mit einer symmetrischen, irreflexiven, binären Relation $\perp$, $\mathscr{A}$ eine Menge von Teilmengen von X mit den unten aufgezählten vier Eigenschaften der Menge von Orthonormalbasen eines Hilbertraumes. Definiert man zu $M \subseteq N \in \mathscr{A}$ die Menge $M^\perp = \{x \in X \mid x \perp m \ \forall\, m \in M\}$, so trägt $\Pi = \{M^\perp \mid M \subseteq N \in \mathscr{A}\}$ in den interessanten Fällen die Struktur einer orthomodularen Ordnung oder die Struktur eines orthomodularen Verbandes. Beispiele hierzu sind: die Menge X der Einheitsvektoren im Hilbertraum, die ihre zugehörigen 1-dimensionalen Unterräume repräsentieren, die Orthogonalität $x \perp y$ wird definiert durch $(x, y) = 0$ und die Menge $\mathscr{A}$ der Orthonormalbasen. $\mathscr{A}$ erfüllt die Bedingungen (i) $X = \bigcup \mathscr{A}$, (ii) jedes $E \in \mathscr{A}$ ist orthogonal, (iii) $E, F \in \mathscr{A}$ und $E \subseteq F$ impliziert

E = F, (iv) E, F $\in \mathscr{A}$ und $D \subseteq E \cup F$ orthogonal impliziert $D \subseteq G$ für ein $G \in \mathscr{A}$. – Maße und Zustände sind auf Orthologiken definiert und intensiv untersucht worden. Im Sinne der mathematischen Logik stellen diese Untersuchungen keine Logik, sondern Modelle dar.

Bibliographie

I. Bücher

[1] S. Berberian: Baer*-rings. Grundl. math. Wiss. 195, Springer, New York, 1972

[2] G. Birkhoff: Lattice Theory. Third Ed., Amer. math. Soc., Colloq. Publ. Vol. XXV, Providence, 1973

[3] T. S. Blyth and M. F. Janowitz: Residuation Theory. Pergamon Press, Oxford, 1972

[4] H. Gross: Quadratic forms in infinite dimensional vector spaces. Birkhäuser, Basel, 1979

[5] S. P. Gudder: Stochastic methods in quantum mechanics. North-Holland, Amsterdam, 1979

[6] C. A. Hooker (ed.): Physical Theory as Logico-Operational structure. Reidel, Dordrecht, 1979

[7] J. M. Jauch: Foundations of Quantum Mechanics. Addison-Wesley, Reading, 1968

[8] G. Kalmbach: Orthomodular lattices. Academic Press, London, to appear

[9] G. W. Mackey: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Benjamin, New York, 1977

[10] F. Maeda and S. Maeda: Theory of symmetric lattices. Grundl. math. Wiss. 173, Springer, New York, 1971

[11] S. Maeda: (in Japanese) Lattice theory and quantum logic. Maki-shoten, Tokyo, 1980

[12] P. Mittelstaedt: Quantum logic. Reidel, Dordrecht, 1978

[13] J. von Neumann: Math. Grundlagen der Quantenmechanik. Springer, Berlin, 1932

[14] J. von Neumann: Continuous Geometry. Princeton Univ. Press, Princeton, 1960

[15] J. von Neumann: Continuous geometries with a transition probability. I. Halperin, ed., Mem. Amer. math. Soc. **34** (1981), no. 252

[16] C. Piron: Foundations of Quantum Physics. Benjamin, New York, 1976

[17] M. M. Richter: Logikkalküle. B. G. Teubner, Stuttgart, 1978

[18] V. S. Varadarajan: Geometry of quantum theory I, II. Van Nostrand, New York, 1968, 1970

II. Zeitschriftenartikel

[19] I. Amemiya and I. Halperin: Complemented modular lattices. Canadian J. Math. **11** (1959) 481–520

[20] J. Bammert: Quasideduktive Systeme und S-Algebren I, II. Arch. Math. Logik Grundlag. **11** (1968) 56–67, 101–112

[21] M. K. Bennett: A finite orthomodular lattice which does not admit a full set of states. Siam Review **12** (1970) 267–271

[22] L. Beran: Extension of a theorem of Gudder and Schelp to polynomials of orthomodular lattices. Proc. Amer. math. Soc. **81** (1981) 518–520

[23] J. Bevis: Matrices over orthomodular lattices. Proc. Glasgow math. Assoc. **10** (1969) 55–59

[24] G. Birkhoff: Lattices in applied mathematics. In: R. Dilworth (ed.), Lattice Theory, Proc. Symp. pure Math., Vol. II, AMS, Providence, 1961, 155–184

[25] G. Birkhoff and J. von Neumann: The logic of quantum mechanics. Ann. of Math. **37** (1936) 823–843

[26] G. Bruns: Free ortholattices. Canadian J. Math. **28** (1976) 977–985

[27] G. Bruns: A finiteness criterion for orthomodular lattices. Canadian J. Math. **30** (1978) 315–320

[28] G. Bruns: Block-finite orthomodular lattices. Canadian J. Math. **31** (1979) 961–985

[29] G. Bruns and R. Greechie: Some finiteness conditions for orthomodular lattices. Preprint, McMaster Univ., 1978
[30] G. Bruns and R. Greechie: Orthomodular lattices which can be covered by finitely many blocks. Preprint, McMaster Univ., 1981
[31] G. Bruns and G. Kalmbach: Varieties of orthomodular lattices. Canadian J. Math. **XXIII** (1971) 802–810
[32] G. Bruns and G. Kalmbach: Varieties of orthomodular lattices II. Canadian J. Math. **XXIV** (1972) 328–337
[33] G. Bruns and G. Kalmbach: Some remarks on free orthomodular lattices. Proc. Lattice Theory Conf. Houston (1973), 397–408
[34] J. Bub: Von Neumann's projection postulate as a probability conditionalization rule in quantum mechanics. J. Philos. Logic **6** (1977) 381–390
[35] D. E. Catlin: Spectral theory in quantum logic. Inter. J. theor. Phys. **1** (1968) 285–297
[36] R. Cignoli: Deductive systems and congruence relations in ortholattices. In: Math. Logic, Proc. 1-st Brazil Conf., eds. Arruda, da Costa, Chuaqui. Dekker, N.Y., 1978, 57–72
[37] A. Day: Projective Geometry and modular lattices. Lecture Notes, Lakehead Univ., 1981
[38] R. Dedekind: Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Math. Ann. **53** (1900) 371–403; Gesammelte Werke II, 236–271
[39] M. Denneau: On the decidability of the identities valid in the lattice of closed subspaces of an infinite dimensional Hilbert space. Ph.D. dissertation, Univ. of Ill., Urbana, 1978
[40] M. Dichtl: Astroids and pastings. Algebra Universalis, to appear
[41] R.P. Dilworth: On complemented lattices. Tôhoku math. J. **47** (1940) 18–23
[42] J.P. Eckmann and Ph. Ch. Zabey: Impossibility of Quantum Mechanics in a Hilbert space over a finite field. Helv. Phys. Acta **42** (1969) 420–424
[43] P. A. Fillmore: Perspectivity in projection lattices. Proc. Amer. math. Soc. **16** (1965) 383–387
[44] P. D. Finch: On orthomodular posets. J. Austral. Math. Soc. **11** (1970) 57–62
[45] P. D. Finch: Quantum logics as an implication algebra. Bull. Austral. math. Soc. **2** (1970) 101–106
[46] H. Fischer and G. Rüttimann: The geometry of the state space. Math. Found. Quantum Theory, A. R. Marlow (ed.), Academic Press, New York, 1978, 153–176
[47] D. J. Foulis: Baer*-semigroups. Proc. Amer. math. Soc. **11** (1960) 648–654
[48] D. J. Foulis: A note on orthomodular lattices. Portugaliae Math. **21** (1962) 65–72
[49] D. J. Foulis: Semigroups coordinatizing orthomodular geometries. Canadian J. Math. **17** (1965) 40–51
[50] D. J. Foulis and C. H. Randall: Conditioning maps on orthomodular lattices. Glasgow math. J. **12** (1971) 35–42
[51] D. J. Foulis and C. H. Randall: Lexicographic orthogonality. J. combinat. Theory **11** (1971) 157–162
[52] D. J. Foulis and C. H. Randall: Operational Statistics I. Basic concepts. J. math. Physics **13** (1972) 1667–1675
[53] D. J. Foulis and C. H. Randall: The stability of pure weights under conditioning. Glasgow math. J. **15** (1974) 5–12
[54] D. J. Foulis and C. H. Randall: Empirical logic and tensor products. Preprint, Univ. of Mass., 1979
[55] A. M. Gleason: Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. J. Math. Mech. **6** (1957) 885–893
[56] R. Godowski: Commutativity in quantum logics. Reports on math. Physics. to appear. Preprint, Tech. Univ. Warsaw, 1980
[57] R. Godowski: States on orthomodular lattices. Preprint, Tech. Univ. Warsaw, 1981
[58] R. Godowski and R. Greechie: Some equations related to states on orthomodular lattices. Preprint, Univ. of Warsaw, 1982
[59] R. I. Goldblatt: The Stone space of an ortholattice. Bull. London math. Soc. **7** (1975) 45–48
[60] R. I. Goldblatt: Orthomodularity is not elementary. Preprint, Victoria Univ., 1982
[61] R. J. Greechie: On the structure of orthomodular lattices satisfying the chain condition. J. combinat. Theory **4** (1968) 210–218

[62] R. J. Greechie: An orthomodular poset with a full set of states not embeddable in Hilbert space. Carib. J. Sci. Math. **2** (1969) 15–26

[63] R. J. Greechie: Orthomodular lattices admitting no states. J. combinat. Theory **10** (1971) 119–132

[64] R. J. Greechie: Some results from the combinatorial approach to quantum logic. Synthese **29** (1974) 113–127

[65] R. J. Greechie: On generating distributive sublattices of orthomodular lattices. Proc. Amer. math. Soc. **67** (1977) 17–22. An addendum to: On generating distributive sublattices of orthomodular lattices. Proc. Amer. math. Soc. **76** (1979) 216–218

[66] R. J. Greechie: Finite groups as automorphism groups of orthocomplemented projective planes. J. Austral. math. Soc. **25** (1978) 19–24

[67] R. J. Greechie and S. P. Gudder: Is a quantum logic a logic? Helv. Phys. Acta **44** (1971) 238–240

[68] R. J. Greechie and S. P. Gudder: Quantum logics. In: C. A. Hooker (ed). Contemporary Research in the foundations and philosophy of quantum theory. Reidel, Boston, 1973

[69] S. P. Gudder: Spectral methods for a generalized probability theory. Trans. Amer. math. Soc. **119** (1965) 428–442

[70] S. P. Gudder: Representations of Baer*-semigroups and quantum logics in Hilbert space. Preprint, Univ. Denver, 1979

[71] G. Hardegree: An axiom system for orthomodular quantum logic. Preprint, 1977, 1–34

[72] G. Hardegree: The conditional in abstract and concrete quantum logic. In: C. Hooker (ed.), Logico-algebraic approach to quantum mechanics. II. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1979, 49–108

[73] L. Herman, E. Marsden, and R. Piziak: Implication connectives in orthomodular lattices. Notre Dame J. formal Logic **XVI** (1975) 305–328

[74] C. Herrmann: A finitely generated modular ortholattice. Canadian math. Bull. **24** (1981) 241–243

[75] D. Hilbert, J. von Neumann and L. Nordheim: Über die Grundlagen der Quantenmechanik. Math. Ann. **98** (1927) 1–30. In: J. von Neumann, Collected Works, Vol. I, 1961, 104–133

[76] S. S. Holland, Jr.: A Radon-Nikodym theorem in dimension lattices. Trans. Amer. math. Soc. **108** (1963) 66–87

[77] S. S. Holland, Jr.: The current interest in orthomodular lattices. In: J. C. Abbott (ed.), Trends in lattice theory, van Nostrand, New York, 1970, 41–126

[78] S. S. Holland, Jr.: Isomorphisms between interval sublattices of an orthomodular lattice. Hiroshima math. J. **3** (1973) 227–241

[79] N. N. Hugenholtz: On the type of equilibrium states in quantum statistical mechanics. Comm. math. Physics **6** (1967) 189–193

[80] K. Husimi: Studies on the foundations of quantum mechanics I. Proc. of the physico-math. Soc. of Japan **19** (1937) 766–789

[81] L. Iturrioz: A representation theory for orthomodular lattices by means of closure spaces. Preprint, Univ. Lyon, 1982

[82] P. A. Ivert and T. Sjödin: On the impossibility of a finite propositional lattice for quantum mechanics. Helv. Phys. Acta **51** (1978) 635–636

[83] M. F. Janowitz: Baer semigroups. Duke math. J. **32** (1963) 85–96

[84] M. F. Janowitz: On the antitone mappings of a poset. Proc. Amer. math. Soc. **15** (1964) 829–833

[85] M. F. Janowitz: Perspective properties of relatively complemented lattices. J. natur. Sci. Math. **VIII** (1968) 193–210

[86] M. F. Janowitz: Separation conditions in relatively complemented lattices. Colloq. Math. **XXII** (1970) 25–34

[87] M. F. Janowitz: Constructible lattices. J. Austral. math. Soc. **14** (1972) 311–316

[88] B. Jónsson: Lattice-theoretic approach to projective and affine Geometry. In: The axiomatic method. Proc. Internat. Sympos., L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1959, 188–203

[89] S. Kakutani and G. W. Mackey: Two characterizations of real Hilbert space. Ann. of Math. **45** (1944) 50–58

[90] S. Kakutani and G.W. Mackey: Ring and lattice characterizations of complex Hilbert space. Bull. Amer. math. Soc. **52** (1946) 727–733
[91] G. Kalmbach: Orthomodular logic. Z. math. Logik Grundl. Math. **20** (1974) 395–406
[92] G. Kalmbach: Orthomodular lattices do not satisfy any special lattice equation. Arch. Math. (Basel) **XXVIII** (1977) 7–8
[93] I. Kaplansky: Any orthocomplemented complete modular lattice is a continuous geometry. Ann. of Math. **61** (1955) 524–541
[94] S. Kochen and E.P. Specker: The problem of hidden variables in quantum mechanics. J. Math. Mech. **17** (1967) 59–87
[95] J. Kotas: On decomposition of the modular orthocomplemented finite-generated lattice. Bull. Acad. Polon. Sci. **XI** (1963) 639–642
[96] J. Kotas: An axiom system for the modular logic. Studia logica **XXI** (1967) 17–38
[97] L.H. Loomis: The lattice theoretic background of the dimension theory of operator algebras. Memoirs Amer. math. Soc. **18** (1955)
[98] S. MacLane: A lattice formulation for transcendence degree and p-basis. Duke Math. J. **4** (1938) 455–468
[99] M.D. MacLaren: Nearly modular orthocomplemented lattices. Trans. Amer. math. Soc. **114** (1965) 401–416
[100] M.J. Maczyński: On a lattice characterization of Hilbert spaces. Colloq. Math. **31** (1974) 243–248
[101] M.J. Maczyński: A remark on Mackey's problem about modular pairs and completeness. Bull. Acad. Polon. Sci. **25** (1977) 27–31
[102] S. Maeda: Dimension functions on certain general lattices. J. Sci. Hiroshima Univ. A **19** (1955) 211–237
[103] S. Maeda: Dimension theory on relatively semiorthocomplemented complete lattices. J. Sci. Hiroshima Univ. A **25** (1961) 369–404
[104] S. Maeda: On atomistic lattices with the covering property. J. Sci. Hiroshima Univ. A **31** (1967) 105–121
[105] S. Maeda: On finite-modular atomistic lattices. Algebra Universalis **12** (1981) 76–80
[106] E.L. Marsden: Irreducibility conditions on orthomodular lattices. Carib. J. Sci. Math. **1** (1969) 27–39
[107] E.L. Marsden: A note on implicative models. Notre Dame J. formal Logic **XIV** (1973) 139–144
[108] B. Mielnik: Geometry of quantum states. Comm. Math. Physics **9** (1968) 55–80
[109] B. Mielnik: Generalized quantum mechanics. Comm. Math. Physics. **37** (1974) 221–256
[110] R.P. Morash: Remarks on the classification problem for infinite dimensional Hilbert lattices. Proc. Amer. math. Soc. **43** (1974) 42–46
[111] F.J. Murray and J. von Neumann: On rings of operators. Ann. of Math. **37** (1936) 116–229
[112] J. von Neumann: On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism (Part I). Math. Sb. **43** N.S. 1 (1936) 415–484. In: J. von Neumann Collected Works, Vol. III, 1961, 492–561
[113] J. von Neumann: Continuous Geometry. N.A.S. Proc. **22** (1936) 92–100. In: J. von Neumann Collected Works, Vol. IV, 1961, 126–134
[114] J. von Neumann: Continuous geometries with a transition probability. Reviewed by I. Halperin. In: J. von Neumann Collected Works, Vol. IV, 1961, 191–194
[115] C. Piron: Axiomatique quantique. Helv. Phys. Acta **37** (1964) 439–468
[116] C. Piron: On the logic of quantum logic. J. philos. Logic **6** (1977) 481–484
[117] R. Piziak: Orthomodular lattices as implication algebras. J. philos. Logic **3** (1974) 413–418
[118] J.C.T. Pool: Semimodularity and the logic of quantum mechanics. Comm. Math. Phys. **9** (1968) 212–228
[119] A. Ramsay: Dimension theory in complete orthocomplemented weakly modular lattices. Trans. Amer. math. Soc. **116** (1965) 9–31
[120] C.H. Randall and D.J. Foulis: An approach to empirical logic. Amer. math. Monthly **77** (1970) 363–374
[121] C.H. Randall and D.J. Foulis: States and the free orthogonality monoid. Math. Systems Theory **6** (1972) 268–276

[122] C. H. Randall and D. J. Foulis: Operational statistics II, manuals of operations and their logics. J. Math. Physics **14** (1973) 1472–1480
[123] C. H. Randall and D. J. Foulis: Operational statistics and tensor products. Preprint, Univ. Mass., 1979
[124] C. H. Randall, M. F. Janowitz and D. J. Foulis: Orthomodular generalizations of homogeneous Boolean algebras. J. Austral. math. Soc. **XV** (1973) 94–104
[125] G. T. Rüttimann: Projections on orthomodular lattices. In: A. Hartkämper, H. Neumann, eds., Found. Quant. Mech., Lecture Notes Physics. Springer, Berlin 1974, Vol. 29, 334–341
[126] G. T. Rüttimann: Jauch-Piron states. J. Math. Phys. **18** (1977) 189–193
[127] G. T. Rüttimann: Non-commutative measure theory. Preprint, Univ. Bern, 1979
[128] U. Sasaki: Orthocomplemented lattices satisfying the exchange axiom. J. Sci. Hiroshima Univ. A **17** (1954) 293–302
[129] E. A. Schreiner: Modular pairs in orthomodular lattices. Pacific J. Math. **19** (1966) 519–528
[130] D. Schweigert: Compatible relations of modular and orthomodular lattices. Proc. Amer. math. Soc. **81** (1981) 462–464
[131] I. E. Segal: A non-commutative extension of abstract integration. Ann. of Math. **57** (1953) 401–457
[132] N. Zierler: On the lattice of closed subspaces of Hilbert space. Pacific. J. Math. **19** (1966) 583–586
[133] N. Zierler and M. Schlessinger: Boolean embeddings of orthomodular sets and quantum logic. Duke math. J. **32** (1965) 251–262

Prof. Dr. Gudrun Kalmbach
Abt. Mathematik III
Universität Ulm
Oberer Eselsberg
D-7900 Ulm

(*Eingegangen: 2. 8. 1982*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein
85 (1983) 50–53
AMS subject classification: 01 A 60, 01 A 70

Warum ich eine besondere Vorliebe für die Mathematik habe

Ein Aufsatz aus dem Jahre 1923

K. Mahler, Canberra

Die meisten Menschen halten die Mathematik für die trockenste und langweiligste aller Wissenschaften. Sie wundern sich, wenn jemand ihr Studium zu seinem Lebensziele macht. Sogleich fragen sie ihn, warum er denn für diese Wissenschaft eine besondere Vorliebe habe. Auch mich hat man schon öfters nach diesen Gründen gefragt. Darum will ich sie hier einmal nennen.

Schon durch die Ereignisse meiner Jugend bin ich zu der Bekanntschaft mit dieser Wissenschaft geführt worden. Nach einer ganz kurzen Schulzeit, in einem Alter von etwa neun Jahren, war ich durch Krankheit plötzlich gezwungen worden, eine längere Zeit auf das Gehen überhaupt zu verzichten. Gerade in diesem Alter sehnt man sich nach spielender Betätigung, woran ich aber verhindert war. Lesen konnte und wollte ich nicht immer, und deshalb suchte ich mir auf andere Art die Zeit zu verkürzen. Ich hatte ein kleines Reißzeug. Damit zeichnete ich zu meiner Unterhaltung aus einem uralten Geometriebuch die Figuren ab – und auf diesem Wege legte ich unbewußt die Grundsteine zu meinem heutigen Ziele. Auch auf der Volksschule fuhr ich damit fort und verfertigte wohl auch Modelle für den Raumlehrunterricht. Dann kam die Zeit, wo ich mich entschloß, ein technisches Fach zu ergreifen und darum die Tagesschule und Kunstgewerbeschule besuchte. Hier endlich nahmen meine bisherigen Spielereien die Formen ernsten, bewußten Strebens an. Ich bekam hier nämlich meinen ersten Mathematikunterricht, und anfangs davon geleitet, dann aber allmählich immer selbstständiger werdend, eignete ich mir in den nächsten Jahren nach und nach meine Kenntnisse an.

Und gerade dieses Studieren wurde mir in dieser Zeit, besonders während meiner Lehrjahre, immer wieder eine Quelle der Freude und Erholung. Gegen die körperliche Arbeit, die mich manchmal sehr anstrengte, gegen die Unannehmlichkeiten des Berufs und des Alltags fand ich das tröstende und beruhigende Gegengewicht im Lesen und Lernen der Mathematik. Hatte ich meine Tagesarbeit überstanden, und war ich zu Hause angekommen, so widmete ich mich nur noch meinen Büchern. In ihnen konnte ich das Nachdenken, die geistigen Kräfte üben. Immer wieder konnte ich mich in diese reine ideelle Welt vertiefen, und nur von den Worten eines Euler, Gauß oder Klein geleitet, wunderbare Geheimnisse durchdringen und lösen oder doch wenigstens ahnen. Denn hier waltete nur noch der Geist; eine hö-

0012–0456/83/01 0050–04 $00.80/0

here, unkörperliche Phantasie hatte hier eine Welt außerhalb der irdischen erreicht, in der es keine Ausnahmen, keine Unstimmigkeiten, keine Gegensätze gab. Was machte es mir nicht eine Freude, ein immer gewaltigeres und erhabeneres Gebäude vor mir erstehen zu sehen, und noch mehr Verbindungsgänge zwischen scheinbar weit getrennten Räumen desselben zu entdecken. Dann konnte ich so recht das Wort Schellbachs, der für seine Wissenschaft so begeistert war, verstehen, daß die Menschen alle zu bedauern wären, denen es nicht vergönnt ist, diese Schönheiten zu schauen. Noch größer war meine Freude, wenn es mir nach langen Mühen endlich gelang, ein Hindernis zu überklettern, eine Ableitung, einen Lehrsatz, eine Formel endlich einzusehen und zu begreifen. Zu diesem Zwecke konnte ich oft tage-, ja wochenlang immer von neuem die gleichen Stellen eines Werkes durchlesen, überdenken und zu verstehen suchen, selbst wenn ich immer wieder dort aufgehalten wurde, bis es mir endlich gelang, die Klippe zu überwinden. Und hatte ich das an einer Stelle vermocht, so fuhr ich fort, indem ich eine andere aufsuchte und in der gleichen Art überwand. Gerade dieses fortwährende Suchen und Versuchen machte mir eine Wissenschaft so teuer. – Später kam dazu auch noch die Freude am selbstständigen Arbeiten. Das Lob, das ich für meinen ersten mathematischen Aufsatz erhielt, spornte mich noch mehr zu eigenem Schaffen an und trieb mich noch mehr zur Mathematik hin. Denn gerade dieses eine Erfinden entsprach meinen Anlagen. Während jedes andere Gebiet der Wissenschaft und Kunst nur durch langes Studium, durch teure Versuche und vielleicht nur durch persönlichen Unterricht die Möglichkeit zu selbstständigem Schaffen gibt, war ich hier bei der Mathematik sogleich dazu imstande. Die einzigartige Form derselben: ihr so unpersönliches, objektives Aussehen und ihre feste, unveränderliche Gestalt, zugleich verbunden mit der größten persönlichen, subjektiven Art des Schaffens, ist die Ursache davon und machte sie mir so teuer. Diese Leichtigkeit des Lernens trug natürlich gleichfalls dazu bei, meine Vorliebe für die Mathematik zu erhöhen, denn „man lernt lieben, was man kann".

Neben der Leidenschaft, die ich für die Mathematik als Gesamtheit empfand, übten doch auch die einzelnen Gebiete besondere Wirkungen auf mich aus, und manche von ihnen erfreuten sich bald meiner besonderen Vorliebe. In den ersten Jahren waren dies besonders die Infinitesimalrechnung und die wunderbaren Schöpfungen Kleins. Bei der Unendlichkeitsrechnung bewog mich besonders dazu die Freude an dem fabelhaften Reichtum von Anwendungen, die man damit anstellen konnte, wie die ganz seltsamen, paradoxen Erscheinungen in ihr, die nur fortgesetztes Nachdenken durchdringen konnte. Weit mehr gefiel mir aber später das Arbeiten nach den Werken Kleins, dessen Richtung einer seiner Schüler die „ästhetisierende" genannt hat. Hier erfreute ich mich in der Tat Schönheiten des Zusammenhanges, wie ich sie noch in keinem anderen Gebiet gefunden hatte. Einem begeisterten Kunstfreunde konnte vor einem schönen Gemälde schwerlich anders zu Mute sein, wie mir hier beim Studieren von Eigenschaften der Zahlen, Punkte, Kreise und Kugeln. Oft zwar hatte ich hier mit Unkenntnis mancher Grundlagen zu kämpfen, doch das wurde für mich nur der Anlaß, immer neue Werke durchzuarbeiten und sogar trotz der Sprache mich an Gauß' „Disquisitiones arithmeticae" zu wagen. In der letzten Zeit endlich arbeitete ich hauptsächlich an Hilberts Forschungen über die Grundlagen der Mathematik. Die Philosophie der mathematischen Wissenschaften lehrte mich bald erkennen, wie weit der Mathematiker die Erfahrung benutzen mußte. Diese nicht mehr einfachen, äußerst strengen Untersuchungen, die mit praktischen Zwecken fast nichts mehr zu tun haben, entsprachen am meisten meiner Natur, meinem Bestreben, Vergleiche anzustellen und den Dingen und Ereignissen auf den Grund zu gehen. So hatte jedes Einzelgebiet der Mathematik besondere Eigenschaften, die es, und damit die ganze Wissenschaft mir teuer machten. Dazu ward mir jedes neue Werk eine neue Ursache, weiter zu studieren. Nur zu oft fand ich zu meinem Ärger beim Lesen Verweise auf andere Bücher, die ich nicht besaß und erst anschaffen mußte. Jedes neue Werk und damit die Möglichkeit, weiter Neues zu lernen, ward aber wieder ein weiterer Grund für meine Vorliebe. Allerdings – zu jeder Zeit fand ich mich doch nicht von ihr allein befriedigt, und dann suchte ich mich auf andere Art zu erholen und zu bilden. Doch jedesmal führte mich alsbald ein Grund schnell wieder zu meiner Wissenschaft zurück und machte sie mir noch teurer: das war ihre Geschichte. Viele unserer Künstler und Gelehrten schildern den Eindruck, den auf sie die Geschichte der alten Heldenvölker, der Griechen, Römer, Germanen, gemacht, und wie sie dadurch beeinflußt wurden. Ich fand an diesen Erzählungen ewigen Kampfes weniger Gefallen. Dagegen bei der Geschichte der aufbauenden Kultur und dabei besonders bei der exakten Wissenschaften: bei diesem empfand ich höhere Befriedigung, denn sie zeigten mir die Entstehung unvergänglicher Werte. So, wie andere sich an dem Leben eines Alexander, eines Cäsar erbauen mögen, las ich gern über die griechischen und arabischen Mathematiker oder über jüngere Helden der Wissenschaft, wie Newton, Leibniz, Euler, Gauß. Und dann empfand ich die höchste Bewunderung für diese Heroen des Wissens und auch den Ehrgeiz, selbst wie sie etwas zu dem Gebäude der Mathematik beizutragen. Vor allen Dingen war es der „Fürst der Mathematiker" Gauß, dessen Werke mir immer wieder als etwas Überirdisches, Unerreichbares erschienen, wie sein Leben als das eines Menschen, der bereits von Geburt an für eine hohe Sendung bestimmt war. Von den Anfängen meines Studiums an, wo ich ihn als den Mathematiker achtete, der zuerst den „Fundamentalsatz der Algebra" bewies, bis heute, wo ich in ihm den größten aller Mathematiker verehre, stand mir sein Bild immer vor Augen und trieb mich selbst zum Lernen und Schaffen an, damit ich bald imstande sein möchte, seine Schöpfungen zu studieren. – Im gleichen Sinne leiteten mich auch die berühmtesten Aufgaben der Mathematik, so besonders das uralte Problem der Kreisquadratur, dessen Entstehung, Verlauf und Lösung ich während meines Lebens verfolgte, und an dem ich selbst meine Kräfte maß.

So haben denn die verschiedensten Ursachen zusammengewirkt, um meine Vorliebe zur Mathematik zu begründen: meine kränkliche Jugend, die Erholung, die ich in ihr fand, ihre Geschichte ... Vor allen Dingen aber war es die Tatsache, daß ich die Mathematik eben durchaus nicht trocken und langweilig fand, sondern in ihr ungeahnte Schönheiten entdeckte. Und dieser Vorliebe halber habe ich auch ihr Studium zu meinem Lebensziel gemacht.

Warum ich den Deutschen Aufsatz von 1923 schrieb

Der Aufsatz (der, wie ich hoffe, andere junge Leute zur Mathematik leiten wird) hatte die folgende Geschichte.

Ich wurde 1903 in Krefeld a. Rh. als Sohn eines Buchdruckers geboren. Es gab keine Akademiker unter meinen Verwandten, obwohl mehrere auf die höhere Schule gingen.

Seit meinen ersten Jahren litt ich an Knochen-Tuberkulose und ging daher erst ab 1910 für 1 1/2 Jahre auf die Vorschule der Krefelder Oberrealschule und ab 1914 für 2 1/2 Jahre auf die Volksschule. Dazwischen war ich krank und erhielt nur zu Hause den wichtigsten Unterricht in den Elementarfächern.

Meine erste Absicht war, Feinmechaniker zu werden. Daher ging ich ab Ostern 1917 für zwei Jahre auf elementare technische Schulen in Krefeld. Dort hatte ich meinen ersten Kontakt mit elementarer Mathematik, was meine ganze Zukunft änderte. Noch im Sommer 1917 kaufte und studierte ich Logarithmentafeln, danach Bücher über Trigonometrie, über analytische Geometrie und über Differential- und Integralrechnung, alles ohne Lehrer. Bald danach begann ich Bücher über mehr fortgeschrittene Teile der Mathematik, z. B. über Zahlentheorie und Funktionentheorie, zu lesen.

Ich beabsichtigte, auf eine Technische Hochschule zu gehen, um dort Mathematik zu studieren, denn dafür wäre es nicht notwendig gewesen, die schwere Abiturientenprüfung zu bestehen. Als Vorbereitung ging ich daher ab 1919 für nicht ganz drei Jahre als Lehrling zu einer Krefelder Maschinenfabrik, davon das erste Jahr auf ihr Zeichenbüro. Während dieser drei Jahre fuhr ich natürlich mit meinem mathematischen Studieren fort, und ich begann bereits, kleine Arbeiten zu schreiben über das, was ich gelernt hatte und was daraus folgte.

Der Direktor der Krefelder Realschule, Dr. J. Junker (ein früherer Student von Christoffel) hörte über mich und sandte einige meiner Versuche zu Felix Klein. Dieser gab sie an C. L. Siegel, der damals sein Assistent war.

Siegel korrigierte meine Versuche und gab als sein Urteil, daß es mir möglich gemacht werden sollte, das Abitur zu bestehen und auf die Universität zu gehen.

Mehrere Lehrer an der Realschule halfen mir danach mit Deutsch, Französisch und Englisch. Der Deutschlehrer fand aber meine Aufsätze sehr langweilig, da ich nicht viel Erfahrung hatte. Um ihm zu zeigen, daß es wenigstens einen Gegenstand gab, an dem ich wirklich interessiert war, schrieb ich den Aufsatz.

Ich bestand dann das Abiturientenexamen im Sommer 1923 und ging im Herbst an die Universität Frankfurt/Main zu Siegel.

Prof. Dr. Kurt Mahler
Department of Mathematics
The Australian National University
P.O. Box 4
Canberra, A.C.T. 2600
Australien

(*Eingegangen: 25. 1. 1981*)

Buchbesprechungen

Young, L., Mathematicians and Their Times, History of Mathematics and Mathematics of History (Notas de Matemática (76), Ed. L. Nachbin, North-Holland Mathematics Studies 48), Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland Publishing Company, 1981. X + 344 S., US $ 36,50 / Dfl. 75.00

Der Verf. hat viele Mathematiker persönlich kennen gelernt, von vielen weiteren durch seine Eltern lebendige Vorstellungen erhalten. So stehen viele Charaktere, mathematische Werdegänge und menschliche Schicksale vor seinem Auge. Die Berichte darüber machen meiner Ansicht nach den Hauptwert des Buches aus.

Dieses Erleben und Wissen führt zum Nachdenken über die Gründe, die den Werdegang und das Schicksal eines Mathematikers beeinflussen, und da greift der Verf. nun hinaus in die Mathematikgeschichte bis zurück zu den Babyloniern und Ägyptern. Sein Ziel beschreibt er so (S. 1): "I am not going to present, under the cloak of history, mathematical theories long past: they can be exciting, but less so at second hand. The place to study them is in specialist work, or in the original texts. What I shall present, in connections with the mathematicians we shall come to, is rather some picture of the background in which they worked, the times in which they lived and the personal problems they encountered: times often as cruel, and problems as acute, as our own." Und S. VI: "Past *ideas*, past *efforts* are useful, much more than past achievements, now long out of date." Ein schönes Ziel; ich finde, daß es nicht ganz erreicht ist. Geboten wird ein Auszug aus der Storia delle Matematiche von G. Loria (1929–1933) mit reichlichen Bemerkungen nicht nur über das Unterrichts- und Prüfungswesen, sondern auch über die politische, soziale und kulturelle Situation, alles "from our high level as mathematicians" (S. 254).

Für die Neuzeit, insbesondere für die Zeit nach 1800, standen dem Verf. offenbar reichere Quellen zur Verfügung, die er leider nicht angibt. Es gibt natürlich von Newton, Leibniz, Euler usw. gute Biographien, und die Werke sind meist gut zugänglich. Offenbar hat der Verf. von diesem Material auch guten Gebrauch gemacht. Genaue Kenntnisse der Allgemeingeschichte ermöglichen ihm eine Einordnung der Lebensschicksale der Mathematiker; ihre Hauptwerke werden kurz skizziert, wofür der Verf. natürlich ein kompetenter Fachmann ist.

Den Mathematikhistoriker ärgern einige Einzelheiten, die der Verf. wahrscheinlich als nebensächlich ansehen wird:

S. 23: "The geometry of Euclid, as set out in his Elements – which were still taught in English schools when my father was a boy –, deals mainly with circles and triangles." Ich glaube gern, daß man auf englischen Schulen nur die ersten drei Bücher der „Elemente" behandelt hat, aber das wird doch wohl nicht die einzige Informationsquelle des Verf. gewesen sein.

S. 29: "Theaetetus is the subject of a dialogue of Plato: he proved the irrationality of numbers such as the square root of 2." In dem genannten Dialog Platons berichtet Theaitetos, daß sein Lehrer Theodoros diese Beweise seinen Schülern vorgeführt hat. Auf solche Kleinigkeiten kommt es wohl nicht an. Wem schadet es schon, wenn historische Angaben falsch sind.

S. 48: ". . . the really exciting work of Bradwardine is the Tractatus de continuo, still only available in manuscript: in it he introduces concepts of infinity, among other things, that amount to Transfinite Numbers." Das ist fast wörtlich von Loria übernommen (Bd. 1, S. 418/9), auf den der Verf. sich oft beruft. Ob Loria das bisher nicht edierte Manuskript eingesehen hat, oder woher er das sonst weiß, ist nicht ohne weiteres erkennbar. Inzwischen ist es wenigstens teilweise ediert: V. P. Zubov hat die Definitionen, Postulate und die 150 Sätze lateinisch wiedergegeben, die Beweise leider nur in russischer Sprache referiert (Istorikomatematiceskij Issledowanija XIII, 1960). – Seit Philoponos (6. Jh. n. Chr.) wird diskutiert, ob es verschiedene Unendlich geben kann (was meist abgelehnt wurde) oder ob Unendlich gleich Unendlich ist. Es

wäre sehr interessant, zu wissen, was Bradwardine wirklich dazu gesagt hat. Aber was hier geboten wird, ist die unkontrollierte Weitergabe eines Gerüchts.
S. 153: Hier ist von „the Hindeburg nonsense" die Rede. Die falsche Schreibung des Namens (richtig: Hinden*n*burg) zeigt, daß der Verf. das, was er als „nonsense" bezeichnet, gar nicht im Original gesehen hat.
S. 300: Hausdorff „ended up in 1913 with a professorship at Greisswald". Es muß Grei*f*swald heißen. Von dort wurde Hausdorff 1921 nach Bonn berufen. Was über die Bedeutung von Greifswald für sein späteres Schicksal gesagt wird, muß auf Bonn übertragen werden. – Der Verf. sagt: „Such details I have at second hand." Aber er hätte die Angaben leicht nachprüfen können, z. B. in den von ihm mehrfach zitierten Lebenserinnerungen („Semesterberichte") von H. Behnke.

Ich will nicht behaupten, daß sich diese Beispiele ***beliebig*** vermehren ließen, aber ein paar weitere könnte ich schon noch angeben. Sie berühren das Hauptanliegen des Buches nicht, aber es wäre auch nicht schön, wenn sie durch die Leser des Buches weiterverbreitet würden.

Das Werk ist in einem lockeren Stil temperamentvoll geschrieben und enthält vieles, was man bedenken und beherzigen sollte.

Freiburg H. Gericke

Fricker, F., Einführung in die Gitterpunktlehre (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 73), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1982, XIII + 215 S., DM 94,–

Dieses Buch gibt erstmalig eine systematische Einführung in die Gitterpunktlehre. Das Buch kann mit geringen Vorkenntnissen (aus Differential- und Integralrechnung sowie einigen Grundtatsachen aus Funktionentheorie und Zahlentheorie) gelesen werden; speziellere Hilfsmittel (Gammafunktion und Kugelvolumen, Fourierreihen, Besselfunktionen, Zetafunktion etc.) werden in einem Anhang bereitgestellt.

Im ersten Kapitel wird die Darstellbarkeit einer natürlichen Zahl als Quadratsumme untersucht und auf das Problem der Gitterpunktanzahl in Kreis und vierdimensionaler Kugel angewendet. Es wird die Gaußsche Formel für die Darstellbarkeit einer natürlichen Zahl als Summe zweier Quadrate und die Jacobische Formel für die Anzahl der Darstellungen als Summe von vier Quadraten bewiesen.

Im zweiten Kapitel wird vor allem das Kreisproblem behandelt. Mit der Van der Corputschen Abschätzung für Exponentialsummen wird das Resultat von Sierpinski

$$A(t) = \pi t + O(t^{1/3})$$

für die Anzahl $A(t)$ der Gitterpunkte im Kreis $x^2 + y^2 \leqslant t$ gezeigt. Die untere Abschätzung $A(t) = \pi t + \Omega(t^{1/4} \log^{-1/2} t)$ wird mittels des Satzes von Erdös-Fuchs bewiesen. Die Beweise der Van der Corputschen Abschätzung und des Satzes von Erdös-Fuchs sind im Detail ausgeführt. Ferner werden im 2. Kapitel das Teilerproblem und einige andere ebene Gitterpunktprobleme behandelt.

Im 3. Kapitel werden Gitterpunktprobleme in höheren Dimensionen behandelt und zwar das mehrdimensionale Kugelproblem und das Piltzsche Teilerproblem. Für die Dimension $k = 4$ erhält man aus der Jacobischen Formel über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von vier Quadraten für die Anzahl der Gitterpunkte $A_4(t)$ in einer 4-dimensionalen Kugel mit Radius $\sqrt{t}$ die Abschätzung

$$A_4(t) = V_4(t) + O(t \log t)$$

und mit einem einfachen Induktionsargument für Dimensionen $k \geqslant 4$

$$A_k(t) = V_k(t) + 0(t^{(k/2)-1} \log t)$$

($V_k(t)$ . . . Volumen der k-dimensionalen Kugel mit Radius $\sqrt{t}$).
Das dreidimensionale Kugelproblem macht Schwierigkeiten; das bisher beste Resultat von Vinogradov zur Abschätzung des 0-Gliedes wird ohne detaillierten Beweis angeführt.

Im 4. Kapitel wird das Gitterpunktproblem in Ellipsoiden behandelt. Es werden einige Grundtatsachen über Thetafunktionen bereitgestellt und dann der Fall der rationalen Ellipsoide behandelt. Für irrationale Ellipsoide werden die klassischen Sätze von Landau, des Begründers einer systematischen Gitterpunktlehre, sowie von Walfisz (teilweise mit Beweisskizzen) angeführt und sodann in historischer Abfolge (bis zum gegenwärtigen Stand der Forschung) eine Fülle interessanter Resultate besprochen.

Am Ende eines jeden Abschnittes wird auf weitere Beweisvarianten sowie die Literatur zum jeweiligen Themenkreis eingegangen; auch neueste Literatur wird angeführt. Das Buch ist sehr gut lesbar und eine der schönsten Darstellungen dieses Gebietes. Es ist daher vor allem jenen zu empfehlen, die sich mit diesem Gebiet näher beschäftigen möchten, aber auch für alle Mathematiker geeignet, welche die Methoden der analytischen Zahlentheorie an einem wichtigen Problem kennenlernen wollen.

Wien E. Hlawka

Diederich, K., Lieb, I., Konvexität in der Komplexen Analysis (DMV 2), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1981, 140 p., paper DM 24,–

Vorliegendes Buch ist eine Ausarbeitung der von den Autoren 1979 auf dem DMV-Seminar in Hamburg gehaltenen Vorträge über neuere, von ihnen wesentlich mitgetragene Entwicklungen auf dem Gebiet der komplexen Analysis; vor allem wird die große Bedeutung der sogenannten reellen Methoden hervorgehoben, die in den letzten Jahren immer stärker die komplexe Analysis beeinflussen.

Bekannt aus der Theorie einer Veränderlichen ist die Tatsache, daß sich biholomorphe Abbildungen oft bis zum Rand gutartig verhalten. Die Verallgemeinerungen dieses klassischen Resultates auf höhere Dimensionen werden nun hier als der Leitfaden benutzt, entlang dessen Resultate und Methoden vorgestellt werden. Als Konsequenz findet der Leser eine kohärente, gut lesbare Darstellung vor; ein Trick, der das Lesen sehr vereinfacht und häufig sogar spannend macht.

Ich glaube, daß das vorliegende Buch in ausgezeichneter Weise dazu helfen kann, als erste Zusammenfassung vieler Originalarbeiten dem Spezialisten als schnelles Nachschlagewerk zu dienen und dem an der Entwicklung der komplexen Analysis Interessierten eine erste Orientierung über den modernen Stand eines ihrer wesentlichen Aspekte an die Hand zu geben.

Für fortgeschrittene Seminare ist dieses Buch eine lohnende Arbeitsgrundlage; ein etwas ausführlicheres 2. Kapitel wäre für diesen Zweck sicher hilfreich gewesen.

Zusammengefaßt: jedem Mathematiker, der sich nur etwas für komplexe Analysis interessiert, kann sehr empfohlen werden, sich mit diesen DMV-Report zu beschäftigen, der nicht nur neue Resultate vorstellt, sondern durch seine Darstellung die Zusammenhänge zwischen Einzelresultaten deutlich aufzeigt.

Nun zum Inhalt im Einzelnen: Das erste Kapitel ist dem Satz von Henkin-Vormoor, nach dem jede eigentliche, holomorphe Abbildung zwischen streng-pseudokonvexen Gebieten im $\mathbf{C}^n$ mit C^2-Rändern hölderstetig ist, sich also stetig auf den Rand fortsetzen läßt, gewidmet. Der Beweis wird so deutlich aufgegliedert, daß man sieht, im wesentlichen werden nur

Abschätzungen für die Kobayashi-Pseudodifferentialmetrik und Informationen über das Randabstandsverhalten eigentlicher holomorpher Abbildungen benötigt. Diese Erkenntnis führt dann dazu, daß diese Eigenschaften auch in allgemeineren Situationen richtig bleiben. Man erhält schließlich folgendes Ergebnis:

> **Satz** Ist $\phi : \Omega \to \Omega'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung des pseudokonvexen Gebietes Ω mit C^2-Rand in das Gebiet Ω', das gleichmäßig pseudokonvex ausdehnbar ist, so ist ϕ hölderstetig auf Ω.

Diese Formulierung des Satzes bleibt allerdings unbefriedigend, weil unklar ist, welches Gebiet Ω' obige Eigenschaft erfüllt; dies wird im Kapitel III wie folgt gelöst: jedes Gebiet mit reell-analytischem Rand ist gleichmäßig pseudokonvex ausdehnbar.

Fragt man nach stärkeren Randeigenschaften von biholomorphen Abbildungen zwischen z. B. streng pseudokonvexen Gebieten mit C^∞-Rändern, so benötigt man z. Z. noch eine der quantitativen Lösungstheorien des $\bar\partial$-Problems, nämlich die des $\bar\partial$-Neumann Problems. Damit ist schon der Inhalt des Kapitels II grob umrissen. Neben der Darlegung der Situation für streng pseudokonvexe Gebiete wird die Gültigkeit subelliptischer Abschätzungen für (p, q)-Formen für pseudokonvexe Gebiete mit lokal reell-analytischen Rändern in Randpunkten x_0 gezeigt, für die in einer Umgebung gelegene reell-analytische Mengenkeime im Rand eine holomorphe Dimension $< q$ haben, was sofort über die Pseudolokalität des Neumann-Operators zu guten Lösungen der $\bar\partial$-Gleichung führt. Wesentliches Hilfsmittel hier sind die sogenannten subelliptischen Multiplikatoren nach J. J. Kohn.

Daß lokal die Nichtexistenz reell-analytischer Mengenkeime der holomorphen Dimension $\geqslant q$ im Rand eines pseudokonvexen Gebietes mit reell-analytischem Rand umgeschrieben werden kann in die Nichtexistenz komplex-analytischer Mengenkeime ist Inhalt des Kapitels III. Dies führt mit den Ergebnissen aus II zu einer geometrischen Charakterisierung, wann subelliptische Abschätzungen in Randpunkten erfüllt sind. Global wird gezeigt, jedes pseudokonvexe Gebiet mit reell-analytischem Rand enthält keine komplex-analytische Mengenkeime positiver Dimension, also sind subelliptische Abschätzungen in jedem Randpunkt erfüllt, was bedeutet, daß das $\bar\partial$-Problem hypoelliptisch ist.
Im letzten Kapitel wird ein durchsichtiger Beweis des Feffermanschen Satzes

> Ist $\phi : \Omega \to \Omega'$ eine biholomorphe Abbildung zwischen den streng pseudokonvexen Gebieten Ω und Ω' mit C^∞-Rand, so besitzt ϕ einen C^∞-Diffeomorphismus $\phi : \bar\Omega \to \bar\Omega'$, als Fortsetzung.

vorgestellt, der auf S. Bell zurückgeht. Als wesentlicher Hilfsbegriff wird die Bedingung (R) für ein Gebiet Ω eingeführt, die besagt, der Bergmann Projektor auf Ω ist hinreichend regulär. Ist (R) für die C^∞-glatten pseudokonvexen Gebiete Ω, Ω' erfüllt, so ergibt sich mittels der Bellschen Rechtsinversen des Bergmann Projektors recht einfach obiger Satz. Mit den Ergebnissen vorher folgt zudem, daß streng pseudokonvexe Gebiete mit C^∞-Rand und pseudokonvexe Gebiete mit reell-analytischem Rand der Bedingung (R) genügen; d. h. der Feffermansche Fall ist in dem Resultat enthalten.

Abschließend sollte noch bemerkt werden, daß seit dem DVM-Seminar 1979 weitere Fortschritte bezüglich oben behandelter Fragen erzielt worden sind, was die Aktualität dieser Darstellung hinreichend belegen dürfte.

Osnabrück P. Pflug

Lewin, L., Polylogarithms and associated functions, Amsterdam: North Holland Publ. 1981, xx + 360 p., Dfl 150.00

Es ist sehr zu begrüßen, daß das im Jahre 1958 von L. Lewin erschienene Buch über Polylogarithmusfunktionen und damit verwandte Funktionen eine Wiederauflage erfahren hat, in der nun auch noch weitere Aspekte und neuere Ergebnisse zum Thema ihren Niederschlag finden konnten.

Der Autor geht von der speziellen Funktion $\mathrm{Li}_2(z) := \int_0^z \frac{dt_2}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1}$ aus, die bereits L. Euler 1768 und parallel und unabhängig davon J. Landen untersucht hatten und die von C. J. Hill, durch Vergleich mit einer Potenzreihenentwicklung und Integraldarstellung der Logarithmusfunktion $\mathrm{Li}_1(z) := -\log(1-z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t}$ $(z < 1)$ angeregt, die Funktion des Dilogarithmus genannt wurde. Mit dieser Funktion hatten sich darauf des weiteren sehr ausführlich E. E. Kummer, N. H. Abel, W. Schaeffer, W. Spence, N. Nielsen, O. Hölder, W. Feyer und schließlich W. Maier und G. Wechsung beschäftigt.

Ein Anliegen des vorliegenden Buches ist es insbesondere, möglichst viele Eigenschaften, Funktionalgleichungen und Anwendungsprobleme sowohl für die Dilogarithmusfunktion $\mathrm{Li}_2(z)$ und dazu verwandte Funktionen anzugeben als auch die durch Iterationen solcher Integralbildungen entstehenden neuen Funktionen zu beschreiben. So wird allgemein die Funktion des Polylogarithmus für $n = 1, 2, 3, \ldots$ durch die Rekursionsformel $\mathrm{Li}_n(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_{n-1}(t)dt}{t}$ für $n \geqslant 2$ mit dem oben angegebenen Anfangswert $\mathrm{Li}_1(z)$ erklärt. Für $|z| < 1$ bei $n = 1$ bzw. $|z| \leqslant 1$ bei $n \geqslant 2$ kann die Polylogarithmusfunktion durch die Potenzreihe $\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^n}$ dargestellt werden. Bei analytischer Fortsetzung ist die Wahl des entsprechenden Blattes der Riemannschen Fläche zu beachten.

Der Autor ist in besonderer Weise für das Vorhaben prädestiniert, da er sich seit mehr als 40 Jahren mit diesem Gegenstand beschäftigt hat, alle ihm zugänglichen Ergebnisse gesammelt, in eigenständiger Weise verarbeitet und neue Ideen zur Darstellung und Weiterführung entwickelt hat. So stellt das Buch eine Fundgrube für alle diejenigen dar, die sich mit solchen speziellen Funktionen beschäftigen möchten, die in Zusammenhang mit den Funktionen des Polylogarithmus stehen. Der Leser muß jedoch immer genau darauf achten, daß er unter Beachtung des Argumentbereichs den richtigen Wertebereich der in Rede stehenden komplex zu denkenden Funktionen erkennt und verwendet.

Nach kurzer geschichtlicher Einleitung eines jeden Kapitels werden Potenzreihenentwicklung, Integraldarstellung, asymptotisches Verhalten für komplexe Argumente wie auch Realteil- und Imaginärteilverhalten der Funktionen und Funktionalgleichungen angegeben, der Zusammenhang mit verwandten Funktionen nachgewiesen und explizit aufgeschrieben, Rekursionsformeln hergeleitet und spezielle Funktionswerte berechnet, die naturgemäß einen Zusammenhang mit speziellen Werten der Riemannschen Zetafunktion und mit Bernoullischen und Eulerschen Zahlen zeigen. Auch das Teilverhältnis des Goldenen Schnittes spielt eine bemerkenswerte Rolle. In den einzelnen Kapiteln wird immer wieder ein Faktorisierungstheorem zur Gewinnung von Funktionalgleichungen herangezogen: Durch Faktorisierung eines geeigneten Ausdrucks und dessen logarithmische Integration ergibt sich eine Funktionalgleichung in Gestalt einer Summe von Polylogarithmusfunktionen.

Auf Anwendungen in Physik und Geometrie wird ausführlich eingegangen. So beziehen sich die angesprochenen physikalischen Probleme auf solche der Quantenelektrodynamik, der Theorie elektrischer Netzwerke und der Bose-Einstein- bzw. Fermi-Dirak-Statistik beim thermodynamischen Verhalten von idealen Ferromagneten. Zu solchen physikalischen Problemen hatte der Autor selbst verschiedene eigene Beiträge während seiner Ingenieurtätigkeit geliefert. Die Anwendungen in der Geometrie bei der Inhaltsmessung von speziellen Polyedern in Riemannschen Räumen nichtverschwindender konstanter Krümmung, mit der sich zunächst L. Schläfli,

N. I. Lobatschefskij und H. S. M. Coxeter und darauf aufbauend W. Maier, P. Müller, H. Möller und der Referent beschäftigt haben, machen weitgehend von den Polylogarithmusfunktionen und deren Verallgemeinerungen Gebrauch und finden im vorliegenden Buch ebenfalls ihre Beachtung.

Obwohl der Inhalt des Buches nur einem kleinen Abschnitt aus der Theorie der speziellen Funktionen gewidmet ist, wird der Spezialist dankbar das Buch zur Hand nehmen und in ihm als eine Art Nachschlagewerk immer wieder neue explizite Zusammenhänge und Formeln finden. Verschiedene Zusätze sind zur ersten Auflage hinzugekommen, und auch Anordnung und Übersichtlichkeit haben in der neuen Auflage gewonnen.

Die Überschriften der einzelnen Kapitel lauten: 1. Dilogarithmus. 2. Arcustangensintegral. 3. Verallgemeinertes Arcustangensintegral. 4. Clausens Integral. 5. Dilogarithmus eines komplexen Arguments. 6. Trilogarithmus. 7. Funktionen höherer Ordnung. 8. Integration von Funktionen und Reihensummation. – Das Arcustangensintegral $\mathrm{Ti}_2(x) := \int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,dt$ und Clausens Integral $\mathrm{Cl}_2(x) := -\int_0^x \log\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)dt$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ stellen den Imaginärteil von $\mathrm{Li}_2(z)$ bei geeignetem Argument z dar. Eine Zusammenstellung der benutzten Bezeichnungen erleichtert dem Leser den Rückgriff auf frühere Textstellen. Der Autor empfiehlt in einleuchtender Weise die von ihm gewählte durchgängige Bezeichnung $\mathrm{Li}_n(z)$ für die Polylogarithmusfunktionen und legt eine Aufstellung vieler in der Literatur verwendeten Bezeichnungen für ebendieselben Funktionen, insbesondere für die Dilogarithmusfunktion, vor. Ein ausführliches Literaturverzeichnis, tabellierte Funktionswerte für Polylogarithmus- und verwandte Funktionen sowie eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln und Funktionalgleichungen am Ende des Buches runden die nützliche Darstellung des Gegenstandes ab. Mit der Angabe einiger weiterer untersuchenswerter und ungelöster Probleme werden die Ausführungen abgeschlossen.

Jena J. Böhm

Baker, Jr., G. A., Graves-Morris, P. R., Padé Approximants. Part I: Basic Theory, Part II: Extensions and Applications (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol 13, vol 14), Reading, Mass.: Addison-Wesley 1981, 360 pp., $ 32.50, 260 pp., $ 29.50, hardbound

This is a two-volume treatise on the subject of Padé approximants. The first volume treats the basic theory of these rational approximants, while the second volume deals with extensions, numerical methods, and applications in physics.

During the early 1800's, Cauchy initiated the study of rational interpolation, and later in 1848 Jacobi simplified Cauchy's solution by introducing certain rational functions which are equivalent to the Padé approximants we use today. The properties of these approximants were studied in some detail in 1881 by Frobenius, and in 1892, under the influence of Hermite at the Ecole Normale Supérieure, Padé in his dissertation classified these rational fraction approximants and arranged them in a table (which is now called the Padé table). In those early days, Padé approximants were considered as another form of continued fraction which was already a well established subject. During the early 1960's, physicists, including the first named author of these two volumes found that Padé approximants are very useful as a systematic method of extracting more information from formal power series expansions, and the method has been especially successful in critical phenomena. In addition, in scattering theory and quantum field theory where series of Stieltjes occur frequently, they also found that the approximants along certain diagonals of the Padé table converge fairly rapidly to the expected solutions. Thus, the subject of Padé approximants became very popular. Hundreds of papers related to this subject have been written during the past two decades. For more information the reader is referred to [1]–[7], and the references therein.

The definition of Padé approximants is given in Chapter 1 of Part I where examples, and the block structure of the Padé table are also discussed. Numerical calculations and methods are studied in the next two chapters. In particular, the ϵ-algorithm, the η-algorithm and the Q.D. algorithm are studied in some detail. Chapter 4 deals with the connection of the approximants with continued fractions while the last two chapters of the first part are devoted to the important subject of convergence, with Chapter 5 on Stieltjes series and Pólya series, and Chapter 6 on analytic and meromorphic functions. The first chapter in Part II discusses various aspects of extensions. In particular, multipoint Padé approximants and multivariate approximants are included. However, simultaneous Padé approximants of more than one power series are not mentioned. The other three chapters are on applications, with Chapter 2 on integral equations and quantum mechanics, Chapter 3 on the connection with numerical analysis, and Chapter 4 on the connection with quantum field theory.

These two volumes of the Encyclopedia of Mathematics and Its Applications are very well written, with up-to-date and fairly complete bibliography. The first volume is excellent for non-specialists to become familiar with the subject, and the two volumes together are very good references for both specialists and those who might use Padé approximants occassionally. The presentation is very clear and all the difficult proofs are omitted.

References

[1] Baker, Jr., G. A.: The Essentials of Padé Approximants. Academic Press, N.Y. 1975
[2] Brezinski, C.: Padé type approximation and general orthogonal polynomials. Birkhäuser Verlag, 1980.
[3] Chui, C. K.: Recent results on Padé approximants and related problems. In: Approximation Theory II. Academic Press, N.Y. 1976, pp. 79–116
[4] Gilewiz, J.: Approximants de Padé. Springer Lecture Notes in Math. No. 667, 1978
[5] Gregg, W. B.: The Padé table and its relation to certain algorithms of numerical analysis, SIAM Review *14* (1972) pp. 1–62
[6] Jones, W. B.; Thron, W. J.: Continued fractions: Analytic theory and applications. Encyclopedia of Math. and Its Applications, Vol. 11, 1980
[7] Wuytack, L.: Applications of Padé approximation in numerical analysis. In: Approximation Theory. Springer Lecture Notes in Math. Vol. 556, 1976, pp. 453–461

College Station, Texas Ch. K. Chui

Churchhouse, R. F. (editor), Numerical Methods (Handbook of Applicable Mathematics III, General Editor: W. Ledermann), Chichester: J. Wiley & Sons 1981, 565 pp, £ 32.50

Bei dem vorliegenden Buch handelt es sich um den dritten Band eines auf sechs Teile angelegten „Handbook of Applicable Mathematics“, der den numerischen Methoden gewidmet ist. Die Zielsetzung des Handbuchs ist, Informationsquelle für alle diejenigen zu sein, die keine Mathematiker sind, in deren Arbeitsbereich aber mathematische Methoden zunehmend an Bedeutung gewinnen. Diesem Zweck entsprechend wird angestrebt, möglichst alle für die Anwendungen relevanten Themen zu erfassen, wobei die einzelnen Abschnitte in sich selbst konsistent sein sollen bei einer vorwiegend die mathematischen Ideen und weniger die Details und Beweise betonenden Darstellung des Stoffes.

Die eine Absicht der Herausgeber, möglichst viele Problemkreise der numerischen Mathematik zu erfassen, ist auf den in elf Kapitel untergliederten 500 Textseiten des Buches realisiert worden (die restlichen 60 Seiten enthalten FORTRAN-Programme zu einigen der beschriebenen Methoden). Die Überschriften der einzelnen Kapitel lauten der Reihe nach: Einführung in die numerischen Methoden, Berechnung und Interpolation von Funktionen, Lösung linearer Gleichungssysteme, Matrix-Berechnungen, nichtlineare Gleichungen, Kurvenanpassung und Approximation von Funktionen, Quadratur, gewöhnliche Differentialgleichungen, partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen, numerische Optimierung.

Was die Darstellung des Stoffes angeht, so fällt die Qualität der einzelnen Kapitel recht unterschiedlich aus, und vor allem verhalten sich die einzelnen Kapitel, was die Ausführlichkeit und Aktualität der angesprochenen numerischen Verfahren angeht, äußerst unausgewogen zueinander. Einige Beispiele mögen das etwas näher erläutern. Kap. 2 über Interpolation erschöpft sich im wesentlichen in der Frage der Untertabellierung von Funktionstabellen mit Hilfe polynomialer Interpolation. Spline- und Hermite-Interpolation bzw. solche mit rationalen Funktionen finden sich nicht hier, sondern eingestreut in Kap. 6. Dem wichtigen Prinzip der Richardson-Extrapolation wird nur eine kurze Bemerkung gewidmet, die Aitken-Neville-Formeln fehlen. Im Kap. 3 über die Lösung linearer Gleichungssysteme werden das Gaußsche Eliminationsverfahren sowie das Gauß-Jordan-Verfahren verbal beschrieben und im dreidimensionalen Fall an Beispielen vorgeführt. An iterativen Verfahren (hier eigenartigerweise indirekte Methoden genannt) werden das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren vorgestellt. Der Inhalt dieses Kapitels geht bei weitem an der Bedeutung der Aufgabenstellung vorbei. Der Begriff der LR-Zerlegung findet sich eingestreut in einem Abschnitt über die Cholesky-Zerlegung positiv definiter Matrizen in Kap. 4, das aber eigentlich dem algebraischen Eigenwertproblem (in übrigens zufriedenstellender Darstellung) gewidmet ist. In Kap. 4 ist auch ein Abschnitt über die Fehlerquadratmethode eingestreut, die in Kap. 6 gehört und dort ebenfalls behandelt wird, wobei auf die Notwendigkeit besonderer numerischer Methoden bei ihrer Lösung nicht eingegangen wird. In Kap. 4 taucht auch auf einmal ein Abschnitt über Vektor- und Matrixnormen auf, den es etwas ausführlicher noch einmal in Kap. 6 gibt. Die Anwendung auf die Konditionierung linearer Gleichungssysteme an dieser Stelle erscheint deplaziert. Auch das Kapitel 5 über Lösung nichtlinearer algebraischer Gleichungen ist seinem Inhalt nach völlig unzureichend. Für Systeme von Gleichungen wird nur das Newton-Verfahren im zweidimensionalen Fall beschrieben. Für die oft sich einschleichenden mathematischen Ungenauigkeiten sei beispielhaft das Konvergenzkriterium aus diesem Kapitel für die Iteration $x_{n+1} = F(x_n)$ genannt, nach dem Konvergenz genau dann vorliegen soll, wenn x_0 genügend nahe an der (als existent vorausgesetzten) Lösung α liegt und $|F'(\alpha)| < 1$ ausfällt.

Die Kapitel über Approximation von Funktionen (82 S.), Quadratur (62 S.), Integralgleichungen (70 S.) sind dagegen ungeheuer detailliert. Dort finden sich Abschnittsüberschriften wie Ökonomisierung von Potenzreihen durch Tschebyscheff-Polynome, Approximation reeller Zahlen durch Kettenbrüche, eine Methode, Kettenbrüche von Potenzreihen abzuleiten, Pseudo-Gauß-Quadratur usw. Den partiellen Differentialgleichungen werden dagegen nur 50 Seiten gewidmet. Hier fehlen beispielsweise die Finite-Element-Methoden resp. Variationsmethoden völlig. Auf den 48 Seiten gewöhnliche Differentialgleichungen werden Randwertaufgaben, etwa das Schießverfahren, nicht behandelt. Hinweise auf die gerade bei gewöhnlichen Anfangswertaufgaben vorhandenen wirkungsvollen Programmpakete fehlen. Auf die etwas abseits gelegene Frage der Stabilität von Mehrschrittverfahren mit mehreren unimodularen Wurzeln des charakteristischen Polynoms wird eingegangen, nicht dagegen auf die wichtigen Stabilitätsfragen bei steifen Problemen.

Die Aufgabe, die sich die Herausgeber des Handbuchs gestellt haben, ist sicherlich nur schwer zufriedenstellend lösbar. Die mit dem Teil III gegebene Approximation im Bereich der Numerik ist, wie die vorangehende Kritik zum Ausdruck bringt, nur eingeschränkt akzeptabel.

Berlin R. D. Grigorieff

Lamb Jr, G. L., Elements of Soliton Theory, New York – Chichester – Brisbane – Toronto: A. Wiley-interscience Series 1980, 289 p.

Das vorliegende Buch behandelt vollständig-integrable Evolutionsgleichungen, wie die Korteweg-de Vries-Gleichung (KdV), die sinus-Gordon-Gleichung, oder auch die kubische Schrödinger-Gleichung, hauptsächlich vom Standpunkt der inversen Streutheorie. Beim ersten Durchblättern vermißt man die Behandlung anderer Aspekte dieses schönen Teils der Mathematischen Physik; zum Beispiel die Betrachtung von Lie-Algebra-Methoden, symplektischer Geometrie, Symmetriegruppen, oder auch die Behandlung des Begriffs „vollständig integrabel". Man sollte diese Beschränkung aber nicht unbedingt als Nachteil empfinden, denn nur dadurch gelingt dem Autor ein in sich geschlossener und gut lesbarer Text, der als leicht verständliche Einführung in das sich rasant entwickelnde Gebiet der Soliton-Gleichungen geeignet ist.

Was es mit Solitonen und der inversen Streutheorie auf sich hat, ist leicht am Beispiel der KdV

(1) $$u_t = u_{xxx} - 6\, uu_x, \qquad u = u(x, t)$$

erklärt. Diese Gleichung wurde 1895 von Korteweg und de Vries zur Beschreibung der 1834 von Scott Russel entdeckten Flachwasserwellenphänomene aufgestellt. Interessant an diesen Phänomenen, die mitunter recht spektakulärer Natur sein können (Tsunamis, Seiches, Gezeitenwellen) ist, daß Wellen mit konstanter Geschwindigkeit und von stabiler Form auftreten können; also Wellen bei denen sich nichtlineare und dispersive Effekte kompensieren. Solche Wellen nennt man „solitary waves". Weitaus erstaunlicher aber ist die Tatsache, daß diese Wellen auch nach Wechselwirkungen ihre charakteristische Form und Geschwindigkeit beibehalten. Wegen dieses Partikel-ähnlichen Verhaltens wurden die auftretenden „solitary waves" dann Solitone genannt. Mathematisch gesprochen bedeutet dies, daß es zur Gl. (1) viele endlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten gibt, die unter dem Fluß von (1) invariant sind, und deren Punkte asymptotisch (also $|t| \to \infty$) als lineare Überlagerung von Solitonen angesehen werden können. Dies kann natürlich eine beachtliche Vereinfachung bedeuten, da der Fluß auf einer endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit sicher einfacher zu verfolgen ist, als der durch (1) gegebene Fluß (auf einer ∞-dimensionalen Mannigfaltigkeit!)

Eine Beschreibung der interessierenden invarianten Mannigfaltigkeiten ist aufgrund einer Beobachtung möglich, die auf Kruskal, Zabusky, S. Gardner, G. M. Greene und Miura zurückgeht.

Betrachtet man nämlich eine Schar eindimensionaler Schrödingeroperatoren

$$L(t) = -D^2 + u(t), \qquad D = \text{Differentiation nach } x,$$

so läßt sich die Zeitableitung, sofern das Potential u(t) eine Lösung der KdV ist, ausdrücken als

(2) $$\frac{d}{dt} L = [B, L]\,,$$

wobei

(3) $$B = 3\,u(t)\,D + 3\,D\,u(t) - 4\,D^3.$$

Dies bedeutet, daß die Eigenwerte und das Spektrum von L(t) zeitunabhängig sind, daß (1) also einen isospektralen Fluß des Schrödinger-Operators beschreibt. Die invarianten Mannigfaltigkeiten ergeben sich dann aus der Forderung, daß gewisse Linearkombinationen der Eigenwerte von L(t) extremal bezüglich der Variation von u sein sollen.

Die Gleichungen (2) und (3) sind nun die Grundlage der sogenannten inversen Streumethode. Denn physikalische Intuition sagt einem, daß das Potential u(t) in L(t) durch seine Streudaten (Transmissions-, Reflexionskoeffizienten und Gebundene Zustände) eindeutig bestimmt ist. Dies sind ja gerade die Größen, die dem Physiker experimentell zugänglich sind; und diese

Intuition läßt sich auch mathematisch rechtfertigen (Marchenko-Gleichung und Porzner-Levithan-Gleichung). Da aber die Streudaten einer Auswertung des Streuexperiments im Unendlichen entsprechen, wo der Operator B ein Differentialoperator ist (sofern man ausmacht, daß u im Unendlichen schnell verschwinden soll), läßt sich die zeitliche Evolution der Streudaten durch eine lineare Gleichung beschreiben. Man hat die ursprüngliche Gleichung also durch die Abbildung

$$u(t) \to \text{Streudaten}(t)$$

linearisiert. Wenn man diese Transformation jetzt rückgängig macht (inverse Streutransformation), dann kann man das Cauchy-Problem für die KdV lösen.

Natürlich ist diese Methode doch noch mit einem beachtlichen Aufwand verbunden; und die Details, die für diese Überlegungen notwendig sind, findet man in Lambs Buch. Jeder Interessierte, auch wenn er vielleicht einen ganz anderen Zugang zur Solitontheorie vorzieht, sollte die inverse Streumethode einmal durchgerechnet haben. Für diese Durcharbeitung ist Lambs Buch eine exzellente Anleitung.

Für den Kenner sei noch erwähnt, daß Lamb natürlich auch die inverse Streutheorie der Gleichungen durchrechnet, die der KdV-Hierarchie durch Bäcklundtransformationen verbunden sind. Außerdem wird der ganze AKNS-Apparat (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur) behandelt.

Den Anfänger wird besonders erfreuen, daß Lamb die Theorie des Schrödingeroperators in großer Breite bringt. Dies scheint mir heute, wo viele junge Mathematiker keinerlei Vorbildung in Physik haben, besonders lobenswert.

Von den anderen spektakulären Eigenschaften der KdV – und verwandter Systeme – wird leider nur noch die Existenz unendlich vieler Erhaltungssätze behandelt. Wie schon gesagt, fehlen Ausführungen über die unendlich-dimensionale abelsche Symmetriegruppe der KdV, die Hamilton-Struktur der Gleichung, und überhaupt alles was mit Lie-Algebren zu tun hat. Mehrdimensionale Phänomene werden natürlich auch nicht behandelt, aber darüber hat man ja auch zum Zeitpunkt der Drucklegung des Buches noch kaum etwas gewußt.

Besonders wertvoll ist, daß Lamb den physikalischen Anwendungen fast 100 Druckseiten widmet. Dies wird besonders den selbstkritischen Theoretiker erfreuen, dessen Wohlbefinden ja zu nicht geringem Teil von der Existenz solcher Anwendungen abhängt.

Insgesamt also: Ein sehr schönes, anwendungsorientiertes Buch, welches einen wichtigen Teilaspekt der Solitontheorie verständlich und in großer Ausführlichkeit beschreibt.

Paderborn B. Fuchssteiner

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Hinweise für Autoren

Für den Abdruck vorgesehene Manuskripte sind in einwandfrei leserlicher und völlig satzfertiger Form (einseitig beschriebenes Manuskript, Schreibmaschinenschrift 1 1/2-zeilig) und entsprechend den nachstehenden Richtlinien ausgezeichnet einzureichen.

Der Beginn von Absätzen oder neuen Abschnitten sollte deutlich durch Einrücken gekennzeichnet sein. In jedem Fall sollte ein Hinweis für den Setzer, in dem alle Besonderheiten aufgeführt sind, beigefügt werden.

Ferner sollten die Manuskripte entsprechend dem Subject Classification Schemes der Mathematical Reviews (AMS/MOS) klassifiziert sein. Am Ende der Manuskripte sollte die genaue Anschrift des oder der Verfasser angegeben werden. Zuschriften sowie die Versendung der Korrekturabzüge erfolgen, sofern nicht anders vermerkt, immer an den erstgenannten Autor.

Zeichnungen sollten fortlaufend numeriert werden und auf gesonderten Blättern in Form von klaren Bleistiftzeichnungen im richtigen maßstäblichen Verhältnis möglichst in doppelter Größe dem Manuskript beigefügt werden. Am linken Rand des Textes sollte ein Hinweis auf die jeweils einzufügende Figur angebracht werden.

Fußnoten sollten auf der jeweiligen Seite, auf die sie Bezug nehmen, angebracht werden (nicht am Ende des Textes). Literatur sollte in folgender Weise zitiert [1] und dann am Ende des Textes in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt werden. Verweise sollten in folgender Form vorgenommen werden:

[1] N e v e n , J.: Martingale Problems. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **79** (1957) 175–180

[2] W i t t e n b u r g , J.: Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner 1977. = Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 33.

Um eine rasche Veröffentlichung zu erreichen, erhalten die Autoren nur einen Korrekturabzug. Die Autoren werden gebeten, nur Druckfehler zu korrigieren. Sollten weitere Korrekturen wie Einfügungen oder Streichungen vorgenommen werden, müssen diese dem Autor berechnet werden. Die von den Autoren durchgesehenen Korrekturabzüge sind umgehend an den Herausgeber zurückzusenden.

Die Autoren erhalten von ihren Arbeiten nach Veröffentlichung 75, von Buchbesprechungen 2 Sonderdrucke unentgeltlich. Zusätzliche Sonderdrucke können gegen entsprechende Berechnung zum Zeitpunkt der Rückgabe der Korrekturen bestellt werden.

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Auszeichnungen für den Satz

Die im Manuskript enthaltenen Formelbuchstaben werden generell steil gesetzt. Besondere Schriftarten sind entsprechend den folgenden Richtlinien farblich auszuzeichnen.

gestrichelte schwarze Unterstreichung	– S p e r r u n g
doppelte schwarze Unterstreichung	– **halbfett** (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in Formeln)
grüne Unterstreichung	– *kursiv* (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in den Formeln)
doppelte grüne Unterstreichung	– **halbfette lateinische Buchstaben** (in Formeln)
rote Unterstreichung	– griechische Buchstaben
lila Unterstreichung	– Groteskbuchstaben
doppelte lila Unterstreichung	– halbfette Groteskbuchstaben z. B. für **R, N, C** usw.
blaue Unterstreichung*)	– Fraktur
gelbe Unterstreichung	– Großbuchstabe O (zur Unterscheidung von der Ziffer Null)
gelb eingekastelt*)	– Skript
lila eingekastelt	– logische und mengentheoretische Symbole wie z. B. $\exists$, $\forall$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, Malkreuz $\times$, Verknüpfungszeichen $\circ$, $\cap$, $\cup$, $\bigcap$, $\bigcup$, $\in$, $\subset$, Laplace-Operator Δ, Nabla ∇
grün eingekastelt	– Kleinbuchstabe ℓ (zur Unterscheidung zur Ziffer eins (1))

Die Bezeichnungen Theorem, Lemma, Korollar, Proposition, Definition usw. werden üblicherweise halbfett gesetzt. Der danach folgende Text (bis auf Formelbuchstaben) wird kursiv gesetzt. Die Bezeichnungen Beweis, Bemerkung, Hinweis usw. werden normal gesetzt, jedoch gesperrt. Der nachfolgende Text wird in normaler Schrift gesetzt.

Mathematische Formeln sollten so deutlich geschrieben werden, daß kein Mißverständnis möglich ist. Die Autoren werden gebeten, insbesondere deutlich zu unterscheiden zwischen Großbuchstaben und Kleinbuchstaben, Null sowie kleinem o oder großem O, griechischen Buchstaben φ, ϕ, Φ, κ, K, ϑ, θ, Θ, Strich (z. B. Ableitungsstrich) und Apostroph. Ferner sollte darauf geachtet werden, daß keine Verwechslung zwischen k, K, r, u, v (lateinisch) und κ, μ, ν (griechisch) sowie $\in$ und ϵ (griechisch) möglich ist.

---

*) Von der Verwendung dieser Schriftarten ist beim Composersatz nach Möglichkeit abzusehen.

B. G. Teubner, Postfach 80 10 69, D-7000 Stuttgart 80