85. Band Heft 2
ausgegeben am 15. 4. 1983

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1983

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 85/1 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 84,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt **Band 85, Heft 2**

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

F. Bachmann †; **W. Nolte**: Rolf Lingenberg, Mensch und Forscher
R. Beran: Bootstrap Methods in Statistics
S. Hildebrandt: Partielle Differentialgleichungen und Differentialgeometrie
C. J. Scriba: Die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung von Schülern und Lehrern

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
85 (1983) 55–65

Arithmetische Progressionen

K. Jacobs, Erlangen

Ein Bericht, Herrn van der Waerden zu seinem 80. Geburtstag am 2. 2. 1983 erstattet

§ 1 Arithmetische Progressionen und „schöne" Mengen

Eine endliche Menge A von k ganzen Zahlen heißt eine *arithmetische Progression der Länge* k, wenn ihre Elemente äquidistant liegen, wenn sie sich also, mit anderen Worten, in der Form

$$A = \{a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (k - 1)d\}$$

darstellen läßt. Das bedeutet erst ab $k = 3$ eine nichttriviale Forderung. Man könnte statt „arithmetische Progression" auch „Restklassen-Intervall" sagen.

Eine Menge S von ganzen Zahlen soll *schön* heißen, wenn sie arithmetische Progressionen beliebiger Länge enthält. Es ist leicht, schöne Mengen herzustellen: man lasse immer längere Blöcke von aufeinanderfolgenden Zahlen auftreten. Läßt man zwischen solchen Blöcken immer längere Lücken, so wird auch das Komplement der Menge schön. Die Zahlen 1, 2, 4, 9, 19, . . . (man mache die nächste Lücke immer um 1 größer als die letzte Zahl) bilden eine unschöne Menge: man hat das Auftreten von arithmetischen Progressionen der Länge 3 verhindert; die Lücken sorgen freilich dafür, daß das Komplement der Menge schön wird. – Weniger einfach ist das

Beispiel 1.1 „Der Geist, der stets verneint" bildet die sog. Thue-Morse-Folge (Thue [1906], Morse [1921], Hedlund-Morse [1944], Gottschalk-Hedlund [1964], Keane [1968], Jacobs [1969])

0110100110010110 . . .

nach folgendem unmittelbar einleuchtenden Schema:

0
01
0110
01101001
. . . .

Hier bilden sowohl die mit 0 als auch die mit 1 besetzten Plätze eine schöne Menge.

Der Beweis sei dem Leser als Übung überlassen. Auch der „Mephisto-Walzer"

001001110001001110110110001 ...

(Bildung: 0, 001, 001001110, ...) hat die analoge Eigenschaft.

§ 2 Der Satz von van der Waerden (1926)

Im Jahre 1926 formulierte der später jung verstorbene holländische Mathematiker Baudet eine Vermutung, deren Bestätigung im selben Jahre dem damals 23jährigen Bartel Leendert van der Waerden gelang. Der folgende Satz gehört zu jenen mathematischen Ergebnissen des 20. Jahrhunderts, die durch Einfachheit der Formulierung und Tiefe der im Beweis angesprochenen Ideen die Fachwelt begeistert und eine lange Kette von vertiefenden und erweiternden Untersuchungen in Gang gesetzt haben.

Satz 2.1 (van der Waerden [1927]) *Überdeckt man die Menge* $\mathbf{N}$ *der natürlichen Zahlen mit endlichvielen Mengen, so ist mindestens eine dieser Mengen schön.*

Van der Waerden selbst hat die Geschichte der Entdeckung des ersten Beweises für dies Theorem überaus reizvoll, in fairer Anerkennung des Anteils von Emil Artin (1898–1962) und Otto Schreier (1901–1929), sowie mit zahlreichen Ausblicken auf die Psychologie der mathematischen Forschung – auch unter Bezug auf berühmte Mitteilungen von Henri Poincaré (1854–1912) und Jacques Hadamard (1865–1963) zu diesem allgemeinen Thema – niedergeschrieben (van der Waerden [1973]).

Wie sieht nun der ursprüngliche Beweis von van der Waerden [1927] ungefähr aus? Wer die Originalabhandlung nicht zur Hand hat, findet in dem bekannten Büchlein „Drei Perlen der Zahlentheorie" von A. J. Chintschin 1951 eine Variante; eine in moderne Systematik eingebaute Version liest man bei Graham-Rothschild-Spencer [1980] (vorveröffentlicht in Graham-Rothschild [1974]). Es handelt sich dabei stets um einen *finitären* Beweis, d. h. man zeigt

Aussage W *Zu jedem Paar* (r, k) *von natürlichen Zahlen gibt es eine kleinste natürliche Zahl* $w(r, k)$ *mit folgender Eigenschaft: Überdeckt man eine Menge* M *von* $w(r, k)$ *aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit* r *Mengen, so enthält mindestens eine dieser* r *Mengen eine arithmetische Progression der Länge* k.

Beim Beweis dieser Aussage verwendet man

a) Induktion nach k

b) das Dirichletsche Schubfachprinzip.

Man darf die r überdeckenden Mengen als disjunkt annehmen und sich r verschiedene Farben zur Einfärbung ihrer Elemente vorstellen. Gesucht sind monochrome arithmetische Progressionen. Blöcke von d aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen aus M stellen dann Farbmuster dar, und bei festem d werden diese Blöcke nach den r^d möglichen Mustern in Klassen eingeteilt. Die Induktionsannahme sichert dann $k - 1$ gleichgemusterte Blöcke in arithmetischer Progression und damit d monochrome arithmetische Progressionen der Länge $k - 1$; nach dem Schubfachprinzip kann man mindestens eine davon zu einer monochromen Progression der Länge k fortsetzen – wenn man alles richtig gemacht hat. Diese Beweistechnik liefert für die Zahlen w(r, k) keine praktikable obere Abschätzung. Von L. Moser [1960] stammt die untere Abschätzung

$$w(r, k) \geqslant \sqrt{2k\, r^{k-1}}\,(1 - o(1)).$$

Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang ferner die Arbeit Witt [1952], in der das zweidimensionale Analogon zur Aussage W bewiesen wird.

§ 3 Erdös' 1000-$-Vermutung und Szemerédis Theorem

Der Satz von van der Waerden [1927] gibt keine Auskunft darüber, *welche* der r zur Überdeckung von N verwendeten Mengen schön ist. In unserem Beispiel 1.1 sind es beide, wie man durch Symmetriebetrachtungen sieht. Gesucht ist eine Eigenschaft E, die

a) bei einer Überdeckung von $\mathbf{N}$ mit r Mengen mindestens einer dieser r Menge automatisch zukommt und

b) Schönheit im Gefolge hat.

Gelingt es, E so zu fassen, daß in vielen konkreten Fällen die Beantwortung der Frage „welche ist schön“ erheblich leichter wird als vorher, so hat man den Satz von van der Waerden erheblich verbessert. E. Szemerédi [1975] gelang es 1973, pünktlich zu Paul Erdös' 60. Geburtstag, eine 1000-$-Vermutung von Erdös zu beweisen; aus seinem Ergebnis folgt, daß für die Eigenschaft

$$E_{\mathrm{Szem}}(M): \qquad \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n}\,|M \cap \{1, \ldots, n\}| > 0 \qquad (M \subseteq \mathbf{N})$$

„positive obere Dichte“ (wie üblich, bezeichnet |A| *die Mächtigkeit der Menge* A)

a) und b) gelten. a) ist hier trivial, b) ist der springende Punkt:

Satz 3.1 (Szemerédi [1975]) *Hat* M ⊆ **N** *positive obere Dichte, so ist* M *schön.*

Dieser Satz erledigt Fälle wie Beispiel 1.1 im Handumdrehen.

Satz 3.1 ist nur ein Corollar der Erdösschen Vermutung, die wir jetzt vorstellen wollen. Für beliebige k, n ∈ **N** sei $r_k(n) \in \mathbf{N}$ die kleinste Zahl mit folgender Eigenschaft: wählt man in einer Menge von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine beliebige Teilmenge A mit mindestens $r_k(n) + 1$ Elementen, so enthält A eine arithmetische Progression der Länge k.

Drückt man die letztere Eigenschaft von A mit den Worten „A ist k-schön“ aus, so kann man

$$r_k(n) = \max\{\, |A| \mid A \subseteq \{1, \ldots, n\},\ A \text{ ist nicht k-schön}\}$$

schreiben. Man sieht sofort

$$r_1(n) = 0,\ r_2(n) = 1$$

$$r_k(m + n) \leqslant r_k(m) + r_k(n) \qquad (m, n, k \in \mathbf{N})$$

und aus der letzteren Subadditivität folgt sofort die Existenz von

$$r_k = \lim_{n \to \infty} \frac{r_k(n)}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$r_1 = r_2 = 0$ ist klar. Klaus Friedrich Roth widmete der Untersuchung von $r_3(n)$ und $r_4(n)$ mehrere bedeutende Arbeiten (Roth [1952], [1953/4], [1967]), nachdem F. A. Behrend [1938], [1946] die Alternative

$$r_3 = r_4 = \ldots = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{k \to \infty} r_k = 1$$

bewiesen hatte. Roth gelang der Beweis von $r_3 = r_4 = 0$. Erdös' 1000-\$-Vermutung lautete nun $r_5 = r_6 = \ldots = 0$. Sie wurde 1973 von E. Szemerédi bewiesen:

Satz 3.2 (Szemerédi [1975]) $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = 0$.

Satz 3.1 ist in der Tat ein Corollar von Satz 3.2. Hat $M \subseteq \mathbf{N}$ positive obere Dichte, so braucht man nur $\epsilon > 0$ und n so zu bestimmen, daß

$$\frac{r_k(n)}{n} < \epsilon \quad \text{und} \quad \frac{|M \cap \{1, \ldots, n\}|}{n} > \epsilon$$

gilt (das geht dann offenbar), und schon enthält $M \cap \{1, \ldots, n\}$ eine arithmetische Progression der Länge k:

$$r_k(n) < |M\{1, \ldots, n\}|,$$

d. h. $M \cap \{1, \ldots, n\}$ ist zu dick, um nicht k-schön zu sein.

Wie beweist Szemerédi sein Theorem? Diese Frage ist für mich nur mit dem Verweis auf die Originalabhandlung Szemerédi [1975] zu beantworten. Diese stellt in meinen Augen eine der bewundernswürdigsten Mathematik-Partituren dar, die je komponiert wurden, aber sie ist kaum zum Klingen zu bringen. Im Sommer 1975 gelang der Kombinatorikergruppe um Klaus Leeb und Volker Strehl in Erlangen eine Art von Aufführung. Sie dauerte ein ganzes Semester, ich hörte zu und traute meinen Ohren nicht so recht. Übrigens verwendet Szemerédi ständig den Satz 2.1 von van der Waerden, um sein schärferes Resultat zu beweisen.

§ 4 Die Furstenberg-Katznelson-Weiss-Saga

Weihnachten 1975 hatte ich bei einem Vortrag in Jerusalem Gelegenheit, den Satz von Szemerédi vorzuführen. Man war mitten im sog. „Ergodentheorie-Jahr Jerusalem 1975/76" und hatte sich aus anderen Gründen bereits intensiv mit Mengen positiver oberer Dichte beschäftigt. Hillel Furstenberg nahm sich nun des Szemerédi-Theorems auf seine Weise an und produzierte in wenigen Monaten folgenden

Satz 4.1 (Furstenberg [1977]) *Sei* $(\Omega, \mathfrak{B}, m, T)$ *ein normiertes dynamisches System (d. h.:* $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ *ist ein auf* $\Omega \in \mathfrak{B}$, $m(\Omega) = 1$ *normierter Maßraum, und* $T : \Omega \to \Omega$ *ist eine* m*-treue* $\mathfrak{B}$*-meßbare Abbildung:* $m(T^{-1}B) = m(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$). *Sei* $B \in \mathfrak{B}$, $m(B) > 0$. *Dann gibt es zu jedem* $k \in \mathbf{N}$ *ein* $d \in \mathbf{N}$ *mit*

(1) $\quad m(B \cap T^{-d} B \cap \ldots \cap T^{-(k-1)d} B) > 0.$

Dieser Satz bedeutete bereits innerhalb der Ergodentheorie einen gewaltigen Fortschritt: Er enthält den klassischen Wiederkehrsatz von Poincaré [1899] als extremen Spezialfall k = 2. Vor allem aber enthält er den Satz 3.1 von Szemerédi als Anwendung. Für die Spezialisten war es aber vor allem verblüffend zu sehen, wie eine im wesentlichen qualitative Theorie – eben die Ergodentheorie – plötzlich fähig wurde, der additiven Zahlentheorie unter die Arme zu greifen. (1) impliziert, daß $B \cap T^{-d} B \cap \ldots \cap T^{-(k-1)d} B \neq \emptyset$ ist. Nehmen wir einen Punkt ω aus dieser Menge; er erfüllt per definitionem

(2) $\qquad \omega \in B, T^d \omega \in B, \ldots, T^{(k-1)d} \omega \in B,$

d. h. er befindet sich, wenn man die Folge $\omega, T\omega, \ldots$ wie üblich als *Pfad* von ω interpretiert, zu k-mal periodisch wiederkehrenden Zeiten, also längs einer arithmetischen Progression, in der Menge B. Die Ableitung von Satz 3.1 (Szemerédi) aus Satz 4.1 verlangt lediglich einen geschickten, für den Kenner auf der Hand liegenden, Ausbau dieses Gedankens.
Man geht dabei so vor: Als erstes wählt man für Ω denjenigen kompakten Hausdorffraum, der sich seit jeher als Brücke zwischen dem Diskreten und dem Kontinuierlichen bewährt hat, nämlich den sog. 2-shift-Raum

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$$

aller zweifach-unendlichen 0-1-Folgen $\omega = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots)$. Natürlich nimmt man für T den sog. shift:

$$(T\omega)_t = \omega_{t+1} \qquad (\omega = (\omega_t)_{t \in \mathbf{Z}} \in \Omega)$$

(„Schiebung um 1 nach links".) Eine Teilmenge M von $\mathbf{Z}$ wird in Ω durch ihre Indikatorfunktion $\omega^M = (\omega_t^M)_{t \in \mathbf{Z}}$ mit

$$\omega_t^M = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \in M \\ 0 & \text{für} \quad t \in \mathbf{Z} \setminus M \end{cases}$$

wiedergegeben: M trägt Einsen, das Komplement Nullen. Wir bilden nun die Menge B aller $\omega = (\omega_t)_{t \in \mathbf{Z}}$ mit $\omega_0 = 1$. Was bedeutet, für $\omega = T^a \omega^M$ die Aussage (2)? $T^{a+jd}\omega^M \in B$ heißt nach der Definition von T und B soviel wie: In ω^M steht an der Stelle a + jd eine Eins. (2) besagt dies für j = 0, . . ., k − 1. Und dies heißt nach der Definition von ω^M: in M befindet sich eine arithmetische Progression (mit Beginn bei a und Schrittweite d). Also handelt es sich nur noch darum, mit Hilfe von Satz 4.1 von „M hat positive obere Dichte" zu (1) bzw. (2) zu gelangen. Hier greift nun die Maßtheorie ein. Der Kenner weiß, wie man aus einem Punkt $\omega^M \in \Omega$ ein T-invariantes Maß m gewinnt: man bildet für n = 1, 2, . . . die arithmetischen Mittel

(3) $\qquad \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_F(T^j \omega^M)$

und sorgt per Teilfolgenbildung für sog. schwache Konvergenz. In unserer speziellen Situation hat man dazu nur für die Konvergenz der Folgen (3) zu sorgen, die man für eine gewisse abzählbare Menge von Mengen F ähnlicher Bauart wie B (sog. Zylinder) erhält. Das geht mittels eines Diagonalverfahrens. Die sich ergebenden Teilfolgenlimites von Folgen (3) nennt man m(F). Sie fügen sich zu einem T-invarianten Maß zusammen. Man kann wegen „M hat positive obere Dichte" die Teilfolgen-Bildung so steuern, daß sich

(4) $\quad m(B) > 0$

ergibt. Für F = B ist nämlich (3) wegen der Bedeutung von (3) gerade gleich

$$\frac{1}{n}\,|M \cap \{0, \ldots, n-1\}|.$$

Aus Satz 4.1 ergibt sich nun ein ω mit (2). Wegen der Offenheit von B in der Topologie von Ω und wegen der Konstruktion von m aus ω^M heraus kann man dies ω in der speziellen Gestalt $T^a\omega^M$ wählen. Damit schließt sich die Kette unserer Schlüsse und der Satz 3.1 von Szemerédi ist aus Satz 4.1 hergeleitet. Wegen dieser Herleitung nennt man Satz 4.1 auch „das ergodische Szemerédi-Theorem".

Wie beweist nun Furstenberg [1977] seinen Satz 4.1? Nun, in Wahrheit beweist man heute einen allgemeineren Satz, nämlich

Satz 4.2 (Furstenberg-Katznelson [1978]) *Sei* $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ *ein normierter Maßraum und* $T_1, \ldots, T_k$ *kommutierende* m*-treue Abbildungen in* Ω. *Sei* $A \in \mathfrak{B}$, $m(A) > 0$. *Dann gibt es ein* $d \in \mathbf{N}$ *mit*

$$m(T_1^{-d}A \cap \ldots \cap T_k^{-d}A) > 0.$$

Satz 4.1 ergibt sich als Spezialfall, wenn man für $T_1, \ldots, T_k$ die – natürlich kommutierenden – Potenzen $T^0 = \mathrm{id}_\Omega, T, \ldots, T^{k-1}$ einer einzelnen m-treuen Abbildung T setzt. Satz 4.2 hat den Vorteil, daß man aus ihm einen „mehrdimensionalen Szemerédi" herleiten kann. Für den Satz 2.1 von van der Waerden hatte schon Gallai die analoge Leistung vollbracht. Im Falle des Szemerédi-Theorems bot der Beweis von Szemerédi [1975] keine Hoffnung auf mehrdimensionale Verallgemeinerung. Wie also beweist Furstenberg [1977] seinen Satz 4.2? Es liegt nahe, in den Raum $\Omega^k = \Omega \times \ldots \times \Omega$ (k cartesische Faktoren) zu gehen und dort die einzelne Abbildung $T : (\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}) \to (T_1\omega^{(1)}, \ldots, T_k\omega^{(k)})$ zu betrachten. Von entscheidender Bedeutung werden dann die Punkte $(\omega, \ldots, \omega)$ der Diagonale Δ^k von Ω^k. Für den Maßtheoretiker ist das mißlich, denn Δ^k ist – bezüglich der Produktmaßes $m \times \ldots \times m$ – eine Nullmenge, außer in trivialen Ausnahmefällen. Manchmal kommt einem jedoch eine Topologie in Ω zuhilfe. Hat man z. B. Ω = kompakte Gruppe und $T_1 : g \to g_1 g, \ldots, T_k : g \to g_k g$ $(g \in \Omega)$ für passende $g_1, \ldots, g_k \in \Omega$, und wählt man für m das Haar-Maß von Ω, so kann man für eine stetige Funktion $f \geqslant 0$ auf Ω das Integral

$$h(g_1, \ldots, g_k) = \int f(gg_1)f(gg_2) \ldots f(gg_k)m(dg)$$

bilden. Das hängt in G^k stetig von $g_1, \ldots, g_k$ ab. Wenn f nicht identisch verschwindet, ist – die Gruppen-Eins in G sei mit e bezeichnet –

$$h(e, \ldots, e) = \int f^k(g)m(dg) > 0,$$

also $\quad \int h(g_1, \ldots, g_k)m(dg_1) \ldots m(dg_k) > 0.$

Sehen wir uns nun einmal den Fall einer kompakten Gruppe G mit Einselement e, Haar-Maß m, und einem $g_0 \in G$ mit in G dichten Potenzen, für das $T_1 : g \to g$,

$T_2 : g \to gg_0, \ldots, T_k : g \to gg_0^{k-1}$ gilt an. Wir wählen eine stetige Funktion $f \geqslant 0$ auf G mit $f(e) > 0$ und $f(g) = 0$ für alle g außerhalb einer Umgebung U von e. Die Funktion

$$h(g) = \int f(x) f(xg) \ldots f(xg^{k-1}) m(dx)$$

ist stetig und $\geqslant 0$ mit $h(e) > 0$. Also gilt $\int h(g) m(dg) > 0$. Dies Integral kommt aber nach dem Ergodensatz auch in der Form

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} h(g_0^j)$$

zustande. Also kommt $h(g_0^j) > 0$ vor. Es folgt die Existenz eines $x \in G$ mit

$$f(x) f(xg_0) \ldots f(xg_0^{k-1}) > 0,$$

d. h. $x, xg_0, \ldots, xg_0^{k-1} \in U$, was bedeutet, daß $xg_0, \ldots, xg_0^{k-1}$ nahe bei x liegen: das erwünschte Resultat.

Furstenberg stand vor der Aufgabe, sich von solchen relativ einfachen Spezialfällen zum allgemeinen Fall durchzukämpfen. Er setzte dazu eine starke Maschinerie aus Ergodentheorie und topologischer Dynamik in Gang, die er z. T. in eigenen älteren Arbeiten (z. B. Furstenberg [1963]) vorfand, überwiegend aber eigens konstruieren mußte. Die Fülle des dabei Entstandenen ist in dem Buch Furstenberg [1981] zusammenfassend dargestellt.

Zusammenfassend kann man sagen: Furstenberg's Szemerédi-Beweis ist rein massemäßig nicht leichter als der Beweis in Szemerédi [1975], aber er besteht aus organisch gewachsenen Bausteinen, die auch anderweitig verwendbar sind; man zieht aus diesem Beweis umfassendere mathematische Belehrung. Darüber sollte man die Unglaublichkeit von Szemerédis Leistung nicht vergessen.

§ 5 Der topologische Beweis des van-der-Waerden-Theorems

Szemerédis tiefliegende Erweiterung des van-der-Waerden'schen Resultats ist mit tiefliegenden topologisch-maßtheoretischen Methoden bewiesen worden. Frage: läßt sich das van-der-Waerden-Theorem mit einfacheren Mitteln aus diesem Methodenkreis beweisen? Die positive Antwort haben Furstenberg-Weiss [1978] gegeben. Sie leiten das Theorem aus dem folgenden neuen Wiederkehrsatz der topologischen Dynamik her.

Satz 5.1 (Furstenberg-Weiss [1978]) *Sei Ω ein kompakter metrischer Raum, seien $T_1, \ldots, T_k$ kommutierende stetige Abbildungen von Ω in sich. Dann gibt es einen Punkt $\omega_0 \in \Omega$ und eine Folge $n_1 < n_2 < \ldots$ von natürlichen Zahlen, derart, daß*

$$T_1^{n_\nu} \omega_0 \to \omega_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_k^{n_\nu} \omega_0 \to \omega_0$$

für $\nu \to \infty$.

Nach den Ausführungen des § 4 liegt es auf der Hand, wie man van der Waerdens Resultat hieraus ableitet: man geht in den shift-Raum, nimmt für die T_i die ersten k Potenzen des shifts und sucht sich ω_0 in der Bahnhülle des einer Zerlegung im Sinne von van der Waerden entsprechenden Punkts ω im shift-Raum.

Beim Beweis von Satz 5.1 bildet man, mit Hilfe des Zornschen Lemmas, minimal-invariante Mengen. Die Diagonale von cartesischen Produkten von Exemplaren von Ω spielt eine besondere Rolle. Eine geschickte Ersatzkonstruktion für die Poincaréschen Transversalschnitte in der qualitativen Mechanik überwindet die in der Kleinheit der Diagonale begründeten Schwierigkeiten.

Gegen einen solchen Beweis kann man einwenden, die Schranken für die w(r, k) im ursprünglichen Beweis von van der Waerden seien zwar riesig, aber immer noch besser als reine Existenzaussagen im Sinne des Zornschen Lemmas. Nun weiß man aber, daß sich das Zornsche Lemma praktisch immer durch relativ konstruktive Methoden ersetzen läßt, wenn man genügend viel Abzählbarkeits- oder Endlichkeitsannahmen zusätzlich ins Spiel bringen kann. Dies hat Girard [1981] getan. Die bei einem derartigen Umbau des Beweises von Furstenberg-Weiss sich ergebenden Schranken für die w(r, k) sind zwar noch erheblich schlechter als die nach van der Waerden erreichbaren, aber eine passende Modifikation des Furstenberg-Weissschen Arguments führt auf die alten Schranken von van der Waerden zurück.

§ 6 Die Sätze von R. Rado und W. Deuber

1933 gab Richard Rado der Aussage, „$\{x_1, \ldots, x_k\}$ ist eine arithmetische Progression" die Form

$$(0)\qquad \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & & = x_0 \\ -x_2 + x_3 & & = x_0 \\ \cdots\cdots & & \\ & -x_{k-1} + x_k & = x_0 . \end{array}$$

Er nannte ein lineares Gleichungssystem

$$(1)\qquad \begin{array}{c} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k0}x_0 + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = 0 \end{array}$$

mit ganzzahligen a_{ij}, bzw. die Matrix

$$(3)\qquad A = \begin{bmatrix} a_{10}, \ldots, a_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k0}, \ldots, a_{kk} \end{bmatrix}$$

partitionsregulär, wenn es zu jeder Überdeckung $\mathbf{N} = M_1 \cup \ldots \cup M_r$ mindestens ein $\rho \in \{1, \ldots, r\}$ gibt, derart, daß (1) eine Lösung $x_0, x_1, \ldots, x_k \in M_\rho$ besitzt. Rado bewies den

Satz 6.1 (Rado [1933]) *Eine Matrix* A *(vgl.* (3)*) ist genau dann partitionsregulär, wenn sie sich nach geeigneter Permutation der Spalten auf die Form*

A =	$A^{(0)}$	$A^{(1)}$	...	$A^{(s)}$

so bringen läßt, daß folgendes gilt: die Spalten von $A^{(0)}$ *haben den Nullvektor als Summe; die Spaltensumme von* $A^{(\sigma)}$ *ist eine rationale Linearkombination der Spalten aus* $A^{(0)}, \ldots, A^{(\sigma-1)}$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$.

Offenbar ist dies Kriterium für die Matrix von (0) erfüllt, womit sich Satz 2.1 (van der Waerden [1927]) mit einer leichten Verschärfung ergibt: mindestens eine von **N** überdeckenden Mengen $M_1, \ldots, M_r$ ist *besonders schön* in dem Sinne, daß sie arithmetische Progressionen beliebiger Länge *samt deren Schrittweiten* enthält.

Auch für Rados Theorem gibt es inzwischen einen topologischen Beweis (Furstenberg [1981]).

Es liegt auf der Hand, daß mit partitionsregulären Matrizen A(1), A(2), ..., A(r) auch die Matrix

$$(4)\qquad A = \begin{bmatrix} A(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A(2) & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A(r) \end{bmatrix}$$

partitionsregulär ist. Dies ist der Anfang folgender Überlegung: eine *Menge* $M \subseteq \mathbf{N}$ heißt *partitionsregulär*, wenn in ihr *jedes* Gleichungssystem (2) mit partitionsregulärer Matrix A lösbar ist. Man erhält sofort den

Satz 6.2 *Ist* $\mathbf{N} = M_1 \cup \ldots \cup M_r$, *so ist mindestens eine der Mengen* M_ρ *partitionsregulär.*

B e w e i s. Wäre keine der Mengen M_ρ partitionsregulär, so bekäme man zu jedem M_ρ eine partitionsreguläre Matrix $A(\rho)$, derart, daß das zugehörige Gleichungssystem (2) in M_ρ nicht lösbar ist. Nun bilde man A gemäß (4). Es folgt, daß (2) mit dieser Matrix A in *keinem* M_ρ lösbar ist, im Widerspruch zur Partitions-Regularität von A.

Auf Anregung von E. Specker und in Beantwortung einer Frage aus Rado [1933] bewies W. Deuber 1973 folgenden

Satz 6.3 (Deuber [1973]) *Sind* $M, N \subseteq \mathbf{N}$ *und ist* $M \cup N$ *partitionsregulär, so ist mindestens eine der Mengen* M, N *partitionsregulär.*

§ 7 Vorspiel und Nachspiel

Dem Satz 2.1 von van der Waerden gehen historisch Untersuchungen von I. Schur [1916] voraus, die ihrerseits vom Fermat-Problem angeregt waren. Schurs Ergebnis lautete, in der Sprache der Radoschen Theorie: die Matrix $(-1, 1, 1)$ ist partitionsregulär. Der Beweis ist einfach, vgl. Graham-Rotschild-Spencer [1980].

Eine weitgehende Verallgemeinerung von van der Waerdens Satz 2.1 ist das sog. Hales-Jewett-Theorem (Hales-Jewett [1963], vgl. etwa Graham -Rotschild-

Spencer [1980], Jacobs [1983]), auf dessen Formulierung und Beweis wir hier verzichten. Gleich Satz 2.1 erlaubt das Hales-Jewett-Theorem neuerdings einen topologischen Beweis.

Eine Menge $A \subseteq \mathbf{N}$ heißt eine IP-Menge, wenn es eine Folge $n_1 < n_2 < \ldots$ von natürlichen Zahlen mit

$$A = \{n_{k_1} + \ldots + n_{k_r} \mid r, k_1, \ldots, k_r \in \mathbf{N}\}$$

gibt. Eine Menge $M \subseteq \mathbf{N}$ heißt *hübsch*, wenn sie eine IP-Menge enthält. Es gilt der

Satz 7.1 (Hindman [1974]) *Von* r *Mengen, die zusammen* **N** *überdecken, ist mindestens eine hübsch.*

Dieser Satz, ursprünglich kombinatorisch bewiesen, läßt sich heute mit relativ einfachen Methoden aus der Theorie der halbtopologischen Halbgruppen gewinnen (Furstenberg-Weiss [1978]). Bellow-Furstenberg [1979] enthält eine überraschende Anwendung von Satz 7.1.

Literatur

Behrend, F. A. [1938]: On sequences of integers containing no arithmetic progression. Čas. mat. fys. **67** (1938) 235–238

Behrend, F. A. [1946]: On sets of integers which contain no three in arithmetic progression. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **23** (1946) 331–332

Bellow, A.; Furstenberg, H. [1979]: An application of number theory to ergodic theory and the construction of uniquely ergodic models. Isr. J. Math. **33** (1979) 231–240

Chintschin, A. I. [1951]: Drei Perlen der Zahlentheorie. Berlin 1951: Akademie-Verlag

Deuber, W. [1973]: Partitionen und lineare Gleichungssysteme. Math. Z. **133** (1973) 109–123

Furstenberg, H. [1963]: The structure of distal flows. Amer. J. Math. **85** (1963) 477–515

Furstenberg, H. [1977]: Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. J. Anal. Math. **31** (1977) 204–256

Furstenberg, H. [1981]: Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory, Princeton 1981: Univ. Press

Furstenberg, H.; Katznelson, Y. [1978]: An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. J. Anal. Math. **34** (1978) 275–291

Furstenberg, H.; Weiss, B. [1978]: Topological dynamics and combinatorial number theory. J. Anal. Math. **34** (1978) 61–85

Girard, J.-Y. [1981]: L'Analyse du théorème de van der Waerden et de sa démonstration topologique à l'aide de la théorie de la démonstration. Prepr. Paris 1981

Gottschalk, W. H.: Hedlund, G. [1964]: A characterization of the Morse minimal set. Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964) 70–74

Graham, R. L.; Rothschild, B. L. [1974]: A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions. Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974) 385–386

Graham, R. L.; Rothschild, B. L., Spencer, J. H. [1980]: Ramsey Theory. New York 1980: Wiley-Interscience

Hales, A. W.; Jewett, R. I. [1963]: Regularity and positional games. Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963) 222–229

Hedlund, G.; Morse, M. [1944]: Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semigroups. Duke Math. J. **11** (1944) 1–7

Hindman, N. [1974]: Finite sums from sequences within cells of a partition of N. J. Comb. Th. Ser. **A17** (1974) 1–11

J a c o b s , K. [1969]: Maschinenerzeugte 0-1-Folgen. Selecta Math. **I** (1969) 1–27

J a c o b s , K. [1983]: Einführung in die Kombinatorik, Berlin 1983: de Gruyter

K e a n e , M. [1968]: Generalized Morse sequences. Zf. Wahrscheinlichk.-theor. **10** (1968) 335–353

M o r s e , M. [1921]: Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. Trans. Amer. Math. Soc. **22** (1921) 84–100

M o s e r , L. [1960]: On a theorem of van der Waerden, Canad. Math. Bull. **3** (1960) 23–25

P o i n c a r é , H. [1899]: Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste, tome **III**. Paris 1899

R a d o , R. [1933]: Studien zur Kombinatorik. Math. Z. **36** (1933) 424–480

R a d o , R. [1943]: Note on combinatorial analysis. Proc. London Math. Soc. **48** (1943) 122–160

R o t h , K. F. [1952]: Sur quelques ensembles d'entiers. C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952) 388–399

R o t h , K. F. [1953/54]: On certain sets of integers, London Math. Soc. I: **28** (1953) 104–109; II: **22** (1954), 20–26

R o t h , K. F. [1967]: Irregularities of sequences relative to arithmetic progressions II. Math. Ann. **174** (1967) 41–52

S c h u r , I. [1966]: Über die Kongruenz $x^m + y^m = z^m$ (mod p). Jber. d. Dt. Math.-Verein. **25** (1916) 114–117

S z e m e r é d i , E. [1975]: On sets of integers containing no k in arithmetic progression. Acta Arith. **27** (1975) 199–245

T h u e , A. [1906]: Über unendliche Zeichenreihen, Selected Mathematical papers. Oslo 1977: Universitetsforlaget

W a e r d e n , B. L. van der [1927]: Beweis einer Baudetschen Vermutung. Nieuw Art. Wisk **15** (1927) 212–216

W a e r d e n , B. L. van der [1973]: Einfall und Überlegung. Basel 1973: Birkhäuser

W i t t , E. [1952]: Ein kombinatorischer Satz der Elementargeometrie. Math. Nachr. **6** (1952) 261–262

Prof. Dr. K. Jacobs
Math. Institut
Bismarckstr. 1 1/2
8520 Erlangen

(*Eingegangen* 23. 7. 82)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 85 (1983) 66–85
AMS subject classification: 05 02/05 A 10

Der Satz von van der Waerden über arithmetische Progressionen

W. Deuber und B. Voigt, Bielefeld

Herrn van der Waerden zum 80. Geburtstag gewidmet

§ 0 Einleitung

Leitthema dieses Berichtes ist folgendes, 1926 von dem damals 23jährigen B. L. van der Waerden bewiesenes Resultat, das heutzutage „der Satz von van der Waerden über arithmetische Progressionen" genannt wird:

0.1 Satz [55] (van der Waerden) *Zu jedem Paar* k *und* r *von positiven ganzen Zahlen gibt es eine positive ganze Zahl* $n = \mathrm{vdW}(k, r)$ *so, daß es zu jeder Färbung* $\Delta : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ *der nichtnegativen ganzen Zahlen kleiner als* n *mit* r *Farben eine einfarbige arithmetische Progression* $a, a+d, \ldots, a+(k-1)\cdot d$ *bestehend aus* k *Termen gibt, d. h.* $\Delta(a) = \Delta(a + i \cdot d)$, $0 \leqslant i < k$.

Die zentrale Bedeutung dieses Satzes für die kombinatorische Zahlentheorie wurde rasch erkannt, vgl. etwa [5], und gab Anlaß zu weiteren Untersuchungen. Ein erster Höhepunkt wurde schon in den 30er Jahren mit der Dissertation von Rado [42] erreicht. In den 60er Jahren setzte eine weitere starke Entwicklung ein, die auch heute noch nicht abgeschlossen ist.

Es kann nicht das Anliegen dieses Berichtes sein, einen vollständigen Überblick über all die Fragen, Entwicklungen und Resultate zu geben, zu denen der Satz von van der Waerden den Anstoß gegeben hat. Vielmehr werden wir uns auf einige Aspekte konzentrieren, die uns besonders bemerkenswert erscheinen. Um weitere Informationen zu erhalten, kann der Leser etwa Kapitel 2 von [17], Kapitel 3 und 4 von [35], sowie [29], [22], [32] konsultieren.

§ 1 Der Satz von Hales und Jewett

Beweise für den Satz von van der Waerden findet man außer bei van der Waerden [55] selbst, etwa bei Chintchin [9] in seinem hübschen Büchlein, bei Witt [58] oder auch bei Graham und Rothschild [28]. In all diesen Beweisen wird die additive Struktur der natürlichen Zahlen ausgenutzt. Hales und Jewett [30] bewiesen 1963 ein Resultat, das vordergründig nichts mit arithmetischen Strukturen zu tun hat. Bei näherem Hinsehen bemerkt man jedoch, daß dieses Resultat eine rein kombinatorische, auf arithmetische Struktur keinen Bezug nehmende Version des Satzes von van der Waerden darstellt. Es verwundert daher nicht, daß heutzutage viele Verallgemeinerungen des Satzes von van der Waerden sich leicht mit Hilfe des Satzes von Hales und Jewett beweisen lassen.

Der Grundgedanke von Hales und Jewett besteht darin, anstelle der natürlichen Zahlen die cartesische Potenz A^n einer endlichen Menge A mit geeignetem n als die zu färbende Grundmenge zu betrachten und hierzu eine einfarbige „Parametermenge" zu finden. Mit $A = \{0, \ldots, k-1\}$ sowie mit der Abbildung $F : A^n \to \mathbf{N}$, die durch $F(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$ definiert ist, kann dann die arithmetische Struktur wieder ins Spiel gebracht werden, um damit den Satz von van der Waerden zu erhalten.

1.1 Definition *Es sei* A *eine endliche Menge.* A^n *bezeichnet das* n-*fache cartesische Produkt* $A \times \ldots \times A$. *Ein* m-F u n k t i o n a l f i n A^n *ist ein* n-*tupel* $f = (f_0, \ldots, f_{n-1}) \in (A \cup \{\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}\})^n$, *in dem jeder der „Parameter"* $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ *mindestens einmal auftaucht. Dabei ist es vernünftig zu vereinbaren, daß* $A \cap \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots\} = \emptyset$. *Zu* $(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in A^m$ *sei* $f(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in A^n$ *dasjenige* n-*Tupel, das aus* f *entsteht, indem man überall* λ_i *durch* a_i *ersetzt. Mengen der Gestalt* $f \cdot A^m = \{f(a_0, \ldots, a_{m-1}) \mid (a_0, \ldots, a_{m-1}) \in A^m\} \subseteq A^n$ *heißen* m-P a r a m e t e r m e n g e n i n A^n.

1.2 Beispiel Es sei $A = \{0, 1, 2\}$. Die Menge

$$M = \{(0, 1, 0, 2), (1, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 2)\}$$

ist eine 1-Parametermenge. Hierzu gehört das 1-Funktional $f = (\lambda_0, 1, \lambda_0, 2)$. Die oben definierte Abbildung F liefert die arithmetische Progression $F(M) = \{3 + 2 \cdot \lambda_0 \mid \lambda_0 \in \{0, 1, 2\}\}$. Die Menge

$$N = \{(1, 2, 1, 0), (2, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0)\}$$

ist keine 1-Parametermenge.

Faßt man die Menge $A = \{0, 1, 2\}$ als den Körper Z_3 auf, so sind sowohl M als auch N affine Geraden in $(\mathbf{Z}_3)^4$. Allgemein ist jede m-Parametermenge in $(GF(q))^n$ ein m-dimensionaler affiner Unterraum von $(GF(q))^n$, aber wie das obige Beispiel zeigt, gilt im allgemeinen nicht die Umkehrung.

Die Möglichkeit, Parametermengen einmal als arithmetische Progressionen, einmal als affine Unterräume oder sogar noch anders zu interpretieren, ist einer der großen Vorteile dieses Ansatzes.

1.3 Satz [30] (Hales und Jewett) *Sei* A *eine endliche Menge und seien* m, r *positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine Zahl* $n = HJ(|A|, m, r)$ *so, daß es zu jeder Färbung* $\Delta : A^n \to \{0, \ldots, r-1\}$ *ein* m-*Funktional* f *in* A^n *derart gibt, daß* $\Delta \upharpoonright f \cdot A^m = constant$, *d. h.* $\Delta(f(a_0, \ldots, a_{m-1})) = \Delta(f(b_0, \ldots, b_{m-1}))$ *gilt für alle* $(a_0, \ldots, a_{m-1}), (b_0, \ldots, b_{m-1}) \in A^m$.

B e w e i s von 1.3. Seien t, m, r positive ganze Zahlen. Man zeigt:

(1) $HJ(t, m+1, r) \leqslant HJ(t, 1, r) + HJ(t, m, r^{t^{HJ(t,1,r)}})$, und

(2) $HJ(t+1, 1, r+1) \leqslant HJ(t, 1 + HJ(t+1, 1, r), r+1)$.

Zusammen mit dem trivialen Induktionsanfang „HJ(1, m, r) = m" bekommt man sofort einen Beweis von (1.3) durch Induktion über t, m und r.

ad (1): Es sei $\Delta : A^{n'+n''} \to \{0, \ldots, r-1\}$ eine Färbung, wobei $|A| = t$, $n' = HJ(t, 1, r)$ und $n'' = HJ(t, m, r^{t^{HJ(t,1,r)}})$. Für $\bar{b} = (b_0, \ldots, b_{n''-1}) \in A^{n''}$ sei die Färbung $\Delta_{\bar{b}} : A^{n'} \to r$ definiert durch $\Delta_{\bar{b}}(a_0, \ldots, a_{n'-1}) = \Delta(a_0, \ldots, a_{n'-1}, b_0, \ldots, b_{n''-1})$. Nach Wahl von n'' findet man ein m-Funktional g in $A^{n''}$ so, daß $\Delta_{g(\bar{b})} = \Delta_{g(\bar{b}')}$ für alle $\bar{b}, \bar{b}' \in A^m$. Betrachte also die Färbung $\Delta' : A^{n'} \to r$ mit $\Delta'(a_0, \ldots, a_{n'-1}) = \Delta_{g(\bar{b})}(a_0, \ldots, a_{n'-1})$, wobei nach Konstruktion $\bar{b} \in A^m$ beliebig ist. Nach Wahl von n' findet man ein 1-Funktional f in $A^{n'}$ so, daß $\Delta' \upharpoonright (f \cdot A) =$ constant. Offensichtlich ist dann $\Delta \upharpoonright (f \cdot A \times g \cdot A^m)$ konstant, und $f \cdot A \times g \cdot A^m$ ist eine $(1 + m)$-Parametermenge in $A^{n'+n''}$.

ad (2): Sei $\Delta : (A \cup \{b\})^n \to \{0, \ldots, r\}$ eine Färbung, wobei $|A| = t$, $b \notin A$ und $n = HJ(t, 1 + HJ(t+1, 1, r), r+1)$. Es bezeichne Δ_A die Restriktion $\Delta \upharpoonright A^n : A^n \to \{0, \ldots, r\}$. Nach Wahl von n findet man ein $(1 + m)$-Funktional g in A^n so, daß $\Delta_A \upharpoonright g \cdot A^{1+m} =$ constant mit $m = HJ(t+1, 1, r)$; ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $\Delta_A \upharpoonright g \cdot A^{1+m}$ konstant in der Farbe r ist. Falls nun $\Delta(g(b, a_0, \ldots, a_{m-1})) = r$ für ein $(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in (A \cup \{b\})^m$ ist, so ersetze alle in $(b, a_0, \ldots, a_{m-1})$ vorkommenden b's durch λ_0 und bezeichne das so entstehende 1-Funktional in A^{1+m} mit h. Offensichtlich ist dann $\Delta \upharpoonright g \cdot h \cdot (A \cup \{b\}) =$ constant. Andernfalls betrachte die Färbung $\Delta_b : (A \cup \{b\})^m \to \{0, \ldots, r-1\}$, die durch $\Delta_b(a_0, \ldots, a_{m-1}) = \Delta(g(b, a_0, \ldots, a_{m-1}))$ definiert ist. Nach Wahl von m findet man ein einfarbiges 1-Funktional $h = (h_0, \ldots, h_{m-1})$ in $(A \cup \{b\})^m$. Dann ist aber $g(b, h_0, \ldots, h_{m-1})$ ein 1-Funktional in $(A \cup \{b\})^n$ und $\Delta \upharpoonright g(b, h_0, \ldots, h_{m-1}) \cdot (A \cup \{b\}) =$ constant. □

1.4 **Bemerkungen** (1) Unter den Zahlen vdW(k, r), HJ(t, m, r) usw. wollen wir stets die kleinste Zahl mit der entsprechenden Eigenschaft verstehen. Die oberen Schranken, die man aus dem Beweis für die Funktion HJ(t, m, r) erhält, sind riesig und bereits für HJ(t, 1, 2) nicht mehr primitiv rekursiv. Ebenso sind alle derzeit bekannten oberen Schranken für die van der Waerden Funktion vdW(k, 2) nicht primitiv rekursiv. Die beste derzeit bekannte untere Schranke stammt von Berlekamp [3] und besagt, daß $vdW(k+1, 2) > k \cdot 2^k$ für Primzahlen k.

(2) Schon Artin wies auf die Tatsache hin, daß es zum Beweis des Satzes von van der Waerden hilfreich sei, die Anzahl r der benutzbaren Farben variabel zu halten. Im obigen Beweis kommt dies etwa durch die Ungleichung (1) zum Ausdruck.

In [11] wurde erstmals ein Beweis für die Sätze von van der Waerden und von Hales und Jewett gegeben, in welchem die Farbzahl r konstant gehalten wird. Dabei ist die Ungleichung (1) natürlich nicht mehr verwendbar.

Aus dem Satz von Hales und Jewett können nun unmittelbar einige Korollare gewonnen werden, die ursprünglich eigenständige Beweise erforderten. Die folgende multidimensionale Version des Satzes von van der Waerden geht unabhängig voneinander auf Gallai (vgl. [42]) und Witt [58] zurück:

1.5 **Korollar** (Gallai, Witt) *Es sei* $X = \{x_0, \ldots, x_{t-1}\} \subseteq E^\ell$ *eine endliche Menge von Punkten im* ℓ*-dimensionalen, euklidischen Raum. Dann hat die Menge*

$X^* = \{ \sum_{i=0}^{t-1} m_i \cdot x_i \mid m_i \in \mathbf{N}, \sum_{i=0}^{t-1} m_i = HJ(t, 1, r)\}$ *folgende Eigenschaft:*

Zu jeder Färbung $\Delta : X^* \to \{0, \ldots, r-1\}$ *der Punkte in* X^* *mit* r *Farben gibt es einen Punkt* $a \in E^\ell$ *sowie eine positive ganze Zahl* d, *so daß* $\Delta(a + d \cdot x_0) = \Delta(a + d \cdot x_i)$ *für alle* $i = 0, \ldots, t-1$. *Insbesondere ist also* $a + d \cdot x_i \in X^*$ *für jedes* $0 \leqslant i < t$.

Beweis von (1.5). Setze $A = X$. Zu $\Delta^* : X^* \to \{0, \ldots, r-1\}$ und $n = HJ(t, 1, r)$ betrachte die durch $\Delta(y_0, \ldots, y_{n-1}) = \Delta^*(\sum_{i=0}^{n-1} y_i)$ definierte Färbung $\Delta : A^n \to \{0, \ldots, r-1\}$. Nach Wahl von n gibt es ein 1-Funktional $f = (f_0, \ldots, f_{n-1})$ in A^n so, daß $\Delta \upharpoonright f \cdot A^n$ = constant. Setze

$$a = \sum \{f_i \mid 0 \leqslant i < n, f_i \neq \lambda_0\} \quad \text{und} \quad d = |\{i \mid 0 \leqslant i < n, f_i = \lambda_0\}|.$$

Offensichtlich haben a und d die gewünschten Eigenschaften. □

Geometrisch gesprochen ist die Abbildung $H : E^\ell \to E^\ell$ mit $H(x) = a + d \cdot x$ eine Homothetie (Translation plus Streckung), d. h. die Bildmenge von X ist eine homothetische Kopie von X. Korollar (1.5) besagt also insbesondere, daß es zu jeder Färbung des ℓ-dimensionalen euklidischen Raumes E^ℓ mit endlich vielen Farben stets eine einfarbige homothetische Kopie von X gibt, wo X eine beliebige endliche Konfiguration in E^ℓ ist.

Setzt man $A = GF(q)$, so erhält man

1.6 Korollar *Die Zahl* $n = HJ(q, m, r)$ *hat folgende Eigenschaft: Zu jeder Färbung* $\Delta : (GF(q))^n \to \{0, \ldots, r-1\}$ *der Punkte des* n*-dimensionalen affinen Raumes über dem Körper* GF(q) *gibt es einen* m*-dimensionalen affinen Unterraum* $A \subseteq (GF(q))^n$, *dessen Punkte alle dieselbe Farbe bekommen haben, d. h.* $\Delta \upharpoonright A$ = *constant.*

In Anlehnung an den Satz von Ramsey [43] über Färbungen von Mengen, der ja neben van der Waerdens Satz den anderen historischen Eckpfeiler dieses Teils der Kombinatorik bildet, könnte man versucht sein, k-elementige arithmetische Progressionen auch für $k > 1$ zu partitionieren. Wenn auch für k-elementige arithmetische Progressionen mit $k > 1$ kein Einfarbigkeitsresultat gilt (man betrachte zum Beispiel die Abbildung $\Delta(\{x, y\}) = 1$ genau wenn $|x - y| = 2^m \cdot z$ mit $m \equiv z \equiv 1 \pmod 2$, die jeder 2-elementigen arithmetischen Progression einen der Werte 0,1 zuordnet), so war ein solcher Ansatz für Parametermengen um so fruchtbarer. Es gelang nämlich Graham und Rothschild zu zeigen, daß nicht nur für 0-Parametermengen, sondern auch für k-Parametermengen mit $k > 0$ ein Einfarbigkeitsresultat gilt:

1.7 Satz [27] (Graham und Rothschild) *Es sei* A *eine endliche Menge und* m, k, r *seien positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine Zahl* $n = GR(|A|, m, k, r)$ *so, daß es zu jeder Färbung* $\Delta : \{g \cdot A^k \mid g$ *ist* k*-Funktional in* $A^n\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ *der* k*-Parametermengen in* A^n *mit* r *Farben eine* m*-Parametermenge in* A^n *gibt, deren* k*-Parametermengen alle gleich gefärbt sind.*

Ebenso wie (1.7) den Satz von Ramsey für endliche Mengen auf Parametermengen überträgt, vermutete Rota schon früher ein entsprechendes geometrisches Analogon für endliche affine bzw. projektive Räume. Durch geschickte Verallgemeinerung des Beweises von (1.7) gelang schließlich ein Beweis dieser Vermutung, der von Graham, Leeb und Rothschild gemeinsam publiziert wurde:

1.8 **Satz** [26] (Graham, Leeb und Rothschild (*vgl. auch* [15], [49])) *Es sei* q *eine Primzahlpotenz und* m, k, r *seien positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine Zahl* n = GLR(q, m, k, r) *so, daß es zu jeder Färbung der* k*-dimensionalen affinen (bzw. projektiven) Unterräume des* n*-dimensionalen affinen (bzw. projektiven) Raumes über* GF(q) *mit* r *Farben einen* m*-dimensionalen affinen (bzw. projektiven) Unterraum gibt, dessen* k*-dimensionale Unterräume alle gleichgefärbt sind.*

§ 2 Rados Arbeit über partitionsreguläre Gleichungssysteme

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem Ergebnis von Schur aus dem Jahre 1916 beginnen.

2.1 **Satz** [46] (Schur) *Es sei* r *eine positive ganze Zahl. Dann gibt es eine Zahl* $n = S(r)$ *so, daß es zu jeder Färbung* $\Delta : \{1, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ *stets Zahlen* $0 < x, y, z \leqslant n$ *gibt mit* $x + y = z$ *und* $\Delta(x) = \Delta(y) = \Delta(z)$.

Schur zeigt sogar, daß $(3^r - 1)/2 \leqslant S(r) \leqslant e \cdot r!$, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Mit Hilfe von (2.1) gibt Schur einen kurzen Beweis für die Tatsache, daß die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$ für hinreichend große Primzahlen p, d. h. $p > e \cdot m! + 1$, stets lösbar ist.

Schon 1928 fand Schur eine gemeinsame Verallgemeinerung von (2.1) und dem Satz von van der Waerden (vgl. dazu auch [5]);

2.2 **Satz** [4] (Schur) *Es seien* k, r *positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine Zahl* $n = Sch(k, r)$ *so, daß zu jeder Färbung* $\Delta : \{1, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ *stets eine* k*-elementige arithmetische Progression* $a + i \cdot d$ *existiert mit* $\Delta(d) = \Delta(a + i \cdot d)$ *für alle* $0 \leqslant i < k$; *d. h. nicht nur die arithmetische Progression ist einfarbig, sondern man kann stets auch die Differenz* d *in derselben Farbe erhalten.*

Bevor wir zu dem allgemeineren Resultat von Rado kommen, wollen wir einen weiteren Spezialfall angeben, den sogenannten Summensatz:

2.3 **Satz** [42] (Rado) *Es seien* m *und* r *positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine Zahl* $n = R(m, r)$ *mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jeder Färbung $\Delta : \{1, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ *findet man* m *Zahlen* $x_0, \ldots, x_{m-1} \in \{1, \ldots, n\}$ *so, daß* $\Delta(x_0) = \Delta(\sum_{i \in I} x_i)$ *für alle nichtleeren Teilmengen* $I \subseteq \{0, \ldots, m-1\}$; *d. h alle Summen ohne Wiederholung, die man aus den* x_i *bilden kann, sind gleichgefärbt.*

Man kann (2.3) durch geschickte Anwendung des Satzes von van der Waerden beweisen:

B e w e i s von (2.3). Es sei $R_{r \cdot (m-1)} = 1$ und für $r \cdot (m-1) \geqslant i > 0$ sei $R_{i-1} = vdW(1 + R_i, r)$. Wir behaupten, daß $R(m, r) \leqslant R_0$. Es sei $\Delta : \{1, \ldots, R_0\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ eine Färbung. Zunächst sei $a_0 + i \cdot d_0$, $0 \leqslant i \leqslant R_1$, eine für Δ einfar-

bige arithmetische Progression. Sei für $t < r \cdot (m-1) - 1$ die arithmetische Progression $a_t + i \cdot d_t$, $0 \leqslant i \leqslant R_{t+1}$, bereits derart gefunden, daß (i) $a_t + i \cdot d_t$ ist einfarbig für Δ und (ii) $a_t + i \cdot d_t \in d_{t-1} \cdot \{1, \ldots, R_t\}$, wobei man $d_{-1} = 1$ setzt. Betrachte dann die Menge $d_t \cdot \{1, \ldots, R_{t+1}\}$, nach Wahl von R_{t+1} findet man eine arithmetische Progression $a_{t+1} + i \cdot d_{t+1}$, $0 \leqslant i \leqslant R_{t+2}$, in $d_t \cdot \{1, \ldots, R_{t+1}\}$, die einfarbig für Δ ist. Schließlich setze $a_{r\cdot(m-1)} = d_{r\cdot(m-1)-1}$.
Dann gilt $\Delta(\sum_{i \in I} a_i) = \Delta(a_{\min I})$ für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{0, \ldots, r \cdot (m-1)\}$.
Nach dem Schubfachprinzip gibt es Zahlen $x_0, \ldots, x_{m-1} \in \{a_i \mid 0 \leqslant i \leqslant r \cdot (m-1)\}$, die alle gleichgefärbt sind und damit die gewünschten Eigenschaften besitzen. □

Dieser Satz, der tatsächlich nur ein Spezialfall des noch zu erwähnenden Satzes (2.5) von Rado ist, wurde des öfteren neu entdeckt und bewiesen. Interessant ist die Anwendung, die Arnautov [2] daraus zieht. Mit Hilfe von (2.3) zeigt er, daß es zu jedem unendlichen Ideal I eines abzählbaren Ringes R eine nichtdiskrete Ringtopologie gibt, in der I ein offenes Ideal ist.

Um nun die Radoschen Untersuchungen zu motivieren, betrachten wir die folgenden Gleichungssysteme:

(i) $x_{i+1} - x_i = x_0$ für $i = 1, \ldots, k-1$

(ii) $\sum_{i \in I} x_i = x_I$ für $I \subseteq \{0, \ldots, m-1\}$, $I \neq \emptyset$

(iii) $x_2 + x_1 = 3 \cdot x_0$

Die ersten beiden haben folgende Eigenschaft: Zu jeder Zerlegung der positiven ganzen Zahlen in endlich viele Klassen gibt es in einer der Klassen Zahlen $x_0, \ldots, x_k$, die eine Lösung von (i) bilden. Ebenso gibt es in einer Klasse Zahlen $x_0, \ldots, x_{m-1}$ sowie Zahlen x_I für jedes nichtleere $I \subseteq \{0, \ldots, m-1\}$, die eine Lösung von (ii) bilden. Dies folgt sofort aus (2.2) bzw. (2.3).

Gleichungssystem (iii) besitzt eine solche Eigenschaft nicht: Schreibt man jede positive ganze Zahl n als $n = 5^{n'} \cdot n''$ mit $n'' \not\equiv 0 \pmod 5$, so erhält man eine Färbung $\Delta_5 : \mathbf{N} \to \{1, 2, 3, 4\}$ durch $\Delta_5(n) = i \Leftrightarrow n'' \equiv i \pmod 5$. Man rechnet leicht nach, daß es keine 3 Zahlen x_0, x_1, x_2 gibt, die (iii) erfüllen und unter Δ_5 alle gleichgefärbt sind.

2.4 Definition *Eine ganzzahlige Matrix* A (*bzw. das durch* A *beschriebene homogene lineare Gleichungssystem* $A \cdot x = 0$) *ist* p a r t i t i o n s r e g u l ä r, *genau wenn zu jeder Zerlegung der positiven ganzen Zahlen in endlich viele Klassen stets in einer dieser Klassen Elemente* $x_0, \ldots, x_{n-1}$ *existieren mit* $A \cdot (x_0, \ldots, x_{n-1})^T = 0$, *d. h. eine der Klassen enthält eine Lösung von* $A \cdot x = 0$.

Rado gelang in seiner Dissertation die folgende schöne Charakterisierung der partitionsregulären Matrizen:

2.5 Satz [42] (Rado) *Eine Matrix* A *bestehend aus den Spalten* $(a^0, \ldots, a^{n-1})$ *ist partitionsregulär, genau wenn sie die* S p a l t e n e i g e n s c h a f t *besitzt, d. h. für eine positive Zahl* ℓ *gibt es eine Zerlegung von* $\{0, \ldots, n-1\}$ *in paarweise disjunkte Mengen* $I_0, \ldots, I_{\ell-1}$ *derart, daß*

(i) $\sum_{i \in I_0} a^i = 0$, *d. h. die Summe der Spalten, die zur Spaltenklasse* 0 *gehören, ist der Nullvektor,*

(ii) $\sum_{i \in I_{j+1}} a^i = \sum \{\lambda_{i,j+1} a^i \mid i \in I_0 \cup \ldots \cup I_j\}$ *für geeignete rationale Zahlen* $\lambda_{i,j+1}$, *d. h. die Summe der Spalten in der Spaltenklasse* j + 1 *läßt sich als rationale Linearkombination der Spalten früherer Spaltenklassen darstellen.*

Um zeigen zu können, daß partitionsreguläre Matrizen die im Satz angegebene „Spalteneigenschaft" besitzen, benützt Rado Färbungen $\Delta_p : \mathbf{N} \to \{1, \ldots, p-1\}$, die analog der oben angegebenen Färbung Δ_5 definiert sind. Um zu zeigen, daß die Spalteneigenschaft die Partitionsregularität nach sich zieht, kommt der Satz von van der Waerden ins Spiel, der Beweis von (2.3) mag einen Eindruck davon vermitteln. Noch deutlicher wird der Zusammenhang zwischen partitionsregulären Gleichungssystemen und arithmetischen Progressionen, wenn man anstelle der Matrizen solcher Systeme Mengen von natürlichen Zahlen charakterisiert, die als Lösungsmengen für partitionsreguläre Gleichungssysteme in Frage kommen.

2.6 Definition *Es seien* m, p, c *positive ganze Zahlen. Eine Teilmenge* $M \subseteq \mathbf{N}$ *heißt* (m, p, c)-*Menge, genau wenn es positive ganze Zahlen* $d_0, \ldots, d_m$ *derart gibt, daß* M *genau aus den Zahlen besteht, die in folgender Liste auftauchen:*

$$\begin{array}{r}
cd_0 + \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \ldots + \lambda_m d_m \\
cd_1 + \lambda_2 d_2 + \ldots + \lambda_m d_m \\
cd_2 + \ldots + \lambda_m d_m \\
\vdots \\
cd_m
\end{array}$$

$$\lambda_i \in \mathbf{Z}, -p \leqslant \lambda_i \leqslant p \qquad i = 1, \ldots, m$$

Für c = 1, m = 1 und p = k − 1 enthalten (1, k − 1, 1)-Mengen Lösungen des Gleichungssystems (i), während für c = 1 und p = 1 die (m, 1, 1)-Mengen Lösungen des Gleichungssystems (ii) enthalten. Intuitiv sind (m, p, c)-Mengen „m-fach iterierte arithmetische Progressionen mitsamt den c-fachen Differenzen".

2.7 Satz [10] (Deuber) (1) *Eine ganzzahlige Matrix* A (*bzw. das Gleichungssystem* $A \cdot x = 0$) *ist partitionsregulär, genau wenn es positive ganze Zahlen* m, p, c *gibt, so daß jede* (m, p, c)-*Menge eine Lösung von* $A \cdot x = 0$ *enthält. Insbesondere sind* (m, p, c)-*Mengen selbst Teilmengen von Lösungen partitionsregulärer Gleichungssysteme.*

(2) *Zu jeder Wahl von positiven ganzen Zahlen* m, p, c *und* r *gibt es Zahlen* n, q, d, *daß zu jeder Färbung* $\Delta : N \to \{0, \ldots, r-1\}$ *einer* (n, q, d)-*Menge* N *eine einfarbige* (m, p, c)-*Menge* $M \subseteq N$ *existiert.*

Teil (2) dieses Satzes wurde ursprünglich mit Hilfe des Satzes von van der Waerden bewiesen. Später bemerkte dann Leeb [33], [34], daß man durch Benutzung des Satzes von Hales und Jewett einen kürzeren Beweis erhalten kann.

Mit Hilfe von (2.7) gelang es, eine alte Vermutung von Rado zu lösen: Nennt man eine Menge von natürlichen Zahlen *partitionsregulär*, falls in ihr alle partitionsregulären Gleichungssysteme lösbar sind, so besagt (2.7.1): M ist partitionsregulär, genau wenn M zu jedem Tripel (m, p, c) mindestens eine (m, p, c)-Menge enthält. Aus (2.7.2) folgt dann die Vermutung von Rado [42]:

2.8 Satz [10] *Ist* $M \subseteq \mathbf{N}$ *partitionsregulär und* $\Delta : M \to \{0, \ldots, r-1\}$ *eine Färbung von* M, *dann gibt es eine einfarbige partitionsreguläre Teilmenge von* M.

Erwähnt sei eine weitere alte Vermutung von Rado, die noch immer unbewiesen ist: Eine Matrix A heiße r-regulär, wenn es zu jeder Zerlegung der positiven ganzen Zahlen in r Klassen in einer dieser Klassen eine Lösung von $A \cdot x = 0$ gibt. Zum Beispiel ist das Gleichungssystem (iii) 2-regulär (aber natürlich nicht regulär).

2.9 Vermutung [42] (Rado) *Zu jedem* n *gibt es ein* r(n) *so, daß jede* r(n)-*reguläre Matrix* A *mit höchstens* n *Spalten* (d. h. $A \cdot x = 0$ *besitzt höchstens* n *Unbekannte) sogar regulär ist.*

Es ist immer noch nicht bekannt, welche unendlichen homogenen Gleichungssysteme partitionsregulär sind.

Das unendliche Gleichungssystem

(i*) $\quad x_{i+1} - x_i = x_0, \qquad i > 0$

ist nicht partitionsregulär. Dies zeigt die Färbung $\Delta : \mathbf{N} \to \{0, 1\}$ mit $\Delta(m) = 0$, genau wenn $2^k \leqslant m < 2^{k+1}$ und $k \equiv 0 \pmod 2$.

Dagegen ist das unendliche Gleichungssystem

(ii*) $\quad \sum_{i \in I} x_i = x_I \quad$ für $I \subseteq \mathbf{N}, I \neq \emptyset, |I| < \infty$

partitionsregulär. Dies ist die Aussage des Satzes von Hindman [31], der eine starke Verallgemeinerung des Radoschen Summensatzes darstellt.

Das „größte" derzeit bekannte unendliche partitionsreguläre Gleichungssystem besteht aus der Vereinigung aller endlichen partitionsregulären Gleichungssysteme mit dem Hindmanschen System (ii*):

2.10 Satz [24] (Fürstenberg und Weiss) *Zu jeder Zerlegung der natürlichen Zahlen in endlich viele Klassen gibt es in einer dieser Klassen Lösungen für* (ii*) *sowie für jedes endliche partitionsreguläre Gleichungssystem.*

Es ist nicht klar, ob es – abgesehen von Subsystemen des Systems aus 2.10 – überhaupt weitere unendliche partitionsreguläre (lineare, homogene) Gleichungssysteme gibt. Ein Kandidat dafür könnte das in der folgenden Frage angegebene System sein:

2.11 Frage *Ist das Gleichungssystem* $x_{i+1}^{\ell} - x_i^{\ell} = x_0$ *für* $\ell = 1, 2, \ldots$, $i = 0, \ldots, \ell - 1$, *in den Unbekannten* x_i^{ℓ} *und* x_0 *(beliebig lange arithmetische Progressionen, alle mit derselben Differenz) partitionsregulär?*

§ 3 Induzierte und restringierte Versionen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Verallgemeinerungen der bisher vorgestellten Sätze beschäftigen. Zunächst werden induzierte Versionen vorgestellt. Dazu erinnern wir daran, daß ein Graph G mit der Knotenmenge V zum Beispiel durch eine Abbildung $\Gamma : [V]^2 \to \{0, 1\}$ der zweielementigen Teilmengen von V in die Menge $\{0, 1\}$ gegeben ist. Dabei bildet $\{x, y\}$ eine Kante, genau wenn $\Gamma(\{x, y\}) = 1$ ist. $G = (V, \Gamma)$ ist ein Subgraph von $G^* = (V^*, \Gamma^*)$, wenn $V \subseteq V^*$ gilt, und $\Gamma(\{x, y\}) = 1$ stets auch $\Gamma^*(\{x, y\}) = 1$ impliziert. Man nennt G einen *induzierten Subgraphen*, falls auch die Umkehrung gilt, d. h. Γ ist die Restriktion von Γ^* auf $[V]^2$, also $\Gamma = \Gamma^* \upharpoonright [V]^2$. Induzierte Substrukturen respektieren also die durch Γ^* aufgeprägte Struktur in einem sehr strengen Sinne.

Spencer [48] und Nesetril und Rödl [38] zeigen, daß man arithmetischen Progressionen eine zusätzliche Struktur aufprägen kann und trotzdem noch ein zu dem Satz von van der Waerden ähnliches Resultat erhält.

3.1 **Satz** ([38], [48]) *Es sei* $\Gamma : \{0, \ldots, k-1\} \to \{0, 1\}$ *eine Abbildung. Ferner sei* r *eine positive ganze Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* n *und eine Abbildung* $\Gamma^* : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, 1\}$ *so, daß es zu jeder Färbung* $\Delta : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ *eine arithmetische Progression* $a + i \cdot d$ *mit* $i = 0, \ldots, k-1$ *derart gibt, daß*

(i) $\Gamma(i) = \Gamma^*(a + i \cdot d)$ *für alle* $0 \leqslant i < k$, *d. h. die arithmetische Progression* $a + i \cdot d$ *trägt, als induzierte Substruktur von* (n, Γ^*), *die durch* Γ *geforderte Struktur, und*

(ii) $\Delta(a + i \cdot d) = \Delta(a + j \cdot d)$ *für alle* $0 \leqslant i, j < k$ *mit* $\Gamma(i) = \Gamma(j)$.

In [14] gelang es Rothschild und den Autoren dieses Berichtes einen allgemeineren induzierten Partitionssatz zu beweisen, nämlich eine induzierte Version des Satzes von Hales und Jewett. Als Korollar erhält man eine Verallgemeinerung von (3.1), und zwar eine induzierte Version des Satzes von Gallai und Witt:

3.2 **Satz** *Es sei* $X = \{x_0, \ldots, x_{t-1}\} \subseteq E^\ell$ *eine endliche Menge von Punkten im* ℓ*-dimensionalen euklidischen Raum und* $\Gamma : X \to \{0, 1\}$ *sei eine Abbildung. Außerdem sei* r *eine positive ganze Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* n *und eine Abbildung* $\Gamma^* : X^* \to \{0, 1\}$, *wobei*

$$X^* = \{\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_i \cdot x_i \mid \lambda_i \in \mathbf{N}, \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_i = n\}$$

so, daß folgendes gilt:
Zu jeder Färbung $\Delta : X^* \to \{0, \ldots, r-1\}$ *gibt es eine homothetische Kopie* $a + d \cdot X \subseteq X^*$, *d. h. es gibt* $a \in E^\ell$ *und eine positive ganze Zahl* d, *so daß*

(i) $\Gamma(x_i) = \Gamma^*(a + d \cdot x_i)$ *für alle* $x_i \in X$

(ii) $\Delta(a + d \cdot x_i) = \Delta(a + d \cdot x_j)$ *für alle* $0 \leqslant i, j < t$ *mit* $\Gamma(x_i) = \Gamma(x_j)$.

Mit etwas Arbeit erhält man als weiteres Korollar aus der induzierten Version des Satzes von Hales und Jewett eine induzierte Version von (2.7.2), d. h. einen induzierten Partitionssatz für (m, p, c)-Mengen.
Der Einfachheit halber wollen wir hier lediglich einen wichtigen Spezialfall explizit vorstellen, nämlich $c = 1$ und $p = 1$. Dieser Fall ergibt eine induzierte Version des Radoschen Summensatzes (2.3). Dieses Resultat ist unabhängig auch von Nesetril und Rödl gefunden worden:

3.3 Satz [14], [37] *Es sei* $\Gamma : P(m) \to \{0, 1\}$ *eine Abbildung, die jeder Teilmenge* I *von* $\{0, \ldots, m-1\}$ *den Wert* $\Gamma(I) \in \{0, 1\}$ *zuordnet. Außerdem sei* r *eine positive ganze Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* n *und eine Abbildung* $\Gamma^* : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ *mit folgender Eigenschaft:*
Zu jeder Färbung $\Delta : \{1, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ *findet man Zahlen* $x_0, \ldots, x_{m-1} \in \{1, \ldots, n\}$ *so, daß gilt:*

(i) $\Gamma(I) = \Gamma^*(\sum_{i \in I} x_i)$ *für jede nichtleere Teilmenge* $I \in P(m)$

(ii) $\Delta(\sum_{i \in I} x_i) = \Delta(\sum_{i \in J} x_i)$ *für alle nichtleeren Teilmengen* $I, J \in P(m)$ *mit* $\Gamma(I) = \Gamma(J)$.

Prömel [40] zeigte kürzlich, daß für den Partitionssatz für Parametermengen von Graham und Rothschild und den Partitionssatz für endliche affine und projektive Räume von Graham, Leeb und Rothschild induzierte Analoga gelten. Dabei beobachtete er, daß induzierte Versionen nicht nur für Strukturabbildungen Γ gelten, die auf Punkten wirken, sondern sogar für Strukturabbildungen auf höherdimensionalen Objekten.

Als nächstes wollen wir uns mit restringierten Versionen des Satzes von van der Waerden beschäftigen. Ausgangspunkt ist folgende Frage von Erdös [16]: Gibt es Mengen A positiver ganzer Zahlen, die einerseits arm an langen arithmetischen Progressionen sind, d. h. keine arithmetische Progression der Länge k + 1 enthalten, die andererseits aber reich an kurzen arithmetischen Progressionen sind, d. h. zu jeder Zerlegung von A in Teilmengen X und Y enthält einer der beiden Teile (d. h. X oder Y) eine arithmetische Progression der Länge k? Spencer sowie Nesetril und Rödl zeigten unabhängig voneinander, daß dies der Fall ist, nämlich

3.4 Satz [48], [38] *Es seien* k *und* r *positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine endliche Menge* $A \subseteq \mathbf{N}$ *positiver ganzer Zahlen derart, daß*

(i) A *enthält keine arithmetische Progression der Länge* k + 1,

(ii) *aber zu jeder Färbung* $\Delta : A \to \{0, \ldots, r-1\}$ *existiert eine einfarbige arithmetische Progression* $a + i \cdot d$, $0 \leqslant i < k$, *der Länge* k, *d. h. es gilt* $\Delta(a) = \Delta(a + i \cdot d)$ *für jedes* $0 \leqslant i < k$.

Wie schon im induzierten Fall, so zeigt sich auch hier, daß Eigenschaften von arithmetischen Progressionen auch für den Satz von Hales und Jewett gelten:

3.5 Satz [13] *Es sei* A *eine endliche Menge, und es seien* m *und* r *positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine positive Zahl* n *und eine Menge* $S \subseteq A^n$ *so, daß gilt:*

(i) S *enthält keine* (m + 1)*-Parametermenge, d. h.* $f \cdot A^{m+1} \cap (A^n \setminus S) \neq \emptyset$ *für jedes* (m + 1)*-Funktional* f *in* A^n, *aber*

(ii) *zu jeder Färbung* $\Delta : S \to \{0, \ldots, r-1\}$ *gibt es eine einfarbige* m*-Parametermenge, die ganz in* S *enthalten ist, d. h. es gibt ein* m*-Funktional* f *in* A^n *so, daß* $f \cdot A^m \subseteq S$ *und* $\Delta \upharpoonright f \cdot A^m = constant$.

3.6 Bemerkung Zur Verdeutlichung dieser Aussage wollen wir den Fall $A = \{0, 1\}$ noch einmal explizit angeben. Wenn man die Elemente von $\{0, 1\}^n$ als charakteristische Funktionen von Teilmengen von $n = \{0, \ldots, n-1\}$ interpretiert,

so gehört zu jedem m-Funktional f in A^n genau ein P(m)-Subverband L von P(n), (wobei P(n) den Verband der Teilmengen von $n = \{0, \ldots, n-1\}$ bezeichnet), so daß $L = f \cdot A^m$. Wie man leicht sieht, gilt auch die Umkehrung, d. h. zu jedem P(m)-Subverband L von P(n) gehört genau ein m-Funktional f in A^n mit $f \cdot A^m = L$. (3.5) besagt dann:
Zu m und r gibt es eine Menge $S \subseteq P(n)$ von Elementen des Potenzmengenverbandes einer n-elementigen Menge, die keinen P(m + 1)-Subverband enthält, doch zu jeder Färbung $\Delta : S \to \{0, \ldots, r-1\}$ enthält S einen einfarbigen P(m)-Subverband.

Mit einem etwas geschickteren Ansatz als beim Beweis von 1.5 erhält man eine simultan induzierte und restringierte multidimensionale Version des Satzes von van der Waerden:

3.7 Satz *Es sei* $\Gamma : \{0, \ldots, k-1\}^\ell \to \{0, 1\}$ *eine Strukturabbildung des* ℓ*-dimensionalen Würfels der Größe* k, *außerdem sei* r *eine positive ganze Zahl. Dann gibt es eine endliche Menge* $X^* \subseteq \mathbf{N}^\ell$ *des* ℓ*-dimensionalen Gitters, und es gibt eine Strukturabbildung* $\Gamma^* : X^* \to \{0, 1\}$ *so, daß folgendes gilt:*

(i) X^* *enthält keine homothetische Kopie von* $\{0, \ldots, k\}^\ell$, *des* ℓ*-dimensionalen Würfels der Größe* $k + 1$,

(ii) *zu jeder Färbung* $\Delta : X^* \to \{0, \ldots, r-1\}$ *gibt es ein* $a \in \mathbf{N}^\ell$ *und eine positive ganze Zahl* d *so, daß*

(iia) $\Gamma(b) = \Gamma^*(a + d \cdot b)$ *für alle* $b \in \{0, \ldots, k-1\}^\ell$, *d. h.* $a + d \cdot \{0, \ldots, k-1\}^\ell$ *ist eine induzierte homothetische Kopie des* ℓ*-dimensionalen Würfels der Größe* k, *die ganz in* X^* *liegt,*

(iib) $\Delta(a + d \cdot b) = \Delta(a + d \cdot c)$ *für alle* $b, c \in \{0, \ldots, k-1\}^\ell$ *mit* $\Gamma(b) = \Gamma(c)$.

Für die Situation des Satzes von Hales und Jewett ist es ein noch ungelöstes Problem, ob simultan induzierte und restringierte Versionen gelten oder nicht. Jedenfalls für den einfachsten Fall, nämlich m = 1, ist dies der Fall [13].
Abschließend wollen wir noch zwei weitere restringierte Partitionssätze angeben, der erste stellt eine restringierte Version von 1.6 dar:

3.8 Satz [13] *Es sei* q *eine Primzahl, und es seien* m *und* r *positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine Menge* $S \subseteq (GF(q))^n$ *von affinen Punkten im* n*-dimensionalen Raum über* GF(q), *wobei* n *hinreichend groß ist, mit folgender Eigenschaft:*

(i) S *enthält keinen* (m + 1)*-dimensionalen affinen Unterraum von* $(GF(q))^n$

(ii) *zu jeder Färbung* $\Delta : S \to \{0, \ldots, r-1\}$ *enthält* S *einen einfarbigen* m*-dimensionalen affinen Unterraum.*

Der nächste Satz stammt von Nesetril und Rödl. Hierbei handelt es sich um eine restringierte Fassung des Radoschen Summensatzes:

3.9 Satz [37] (Nesetril und Rödl) *Es seien* m *und* r *positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine endliche Menge* $S \subseteq \mathbf{N}$ *von positiven ganzen Zahlen derart, daß*

(i) *für alle* $x_0, \ldots, x_m \in S$ *gibt es eine nichtleere Menge* $I \subseteq \{0, \ldots, m\}$ *so, daß* $\sum_{i \in I} x_i \notin S$, *d. h.* S *enthält nicht* m + 1 *Zahlen und alle deren Summen, aber*

(ii) *zu jeder Färbung* $\Delta : S \to \{0, \ldots, r-1\}$ *gibt es* m *Zahlen* $x_0, \ldots, x_{m-1} \in S$ *so, daß für alle nichtleeren Teilmengen* $I \subseteq \{0, \ldots, m-1\}$ *die Summen* $\sum_{i \in I} x_i$ *in* S *liegen und alle gleichgefärbt sind, d. h.* $\Delta(x_0) = \Delta(\sum_{i \in I} x_i)$.

Spencer betrachtet eine weitere Verallgemeinerung des van der Waerdenschen Satzes, bei der Ideen aus der Graphentheorie einfließen.

Wir bezeichnen mit AP_k^n die Menge der k-elementigen arithmetischen Progressionen in $\{0, \ldots, n-1\}$, d. h. wenn $\{a_0, \ldots, a_{k-1}\} \in AP_k^n$, so ist (eventuell nach umnumerieren) $a_i = a_0 + i \cdot d$ für eine positive ganze Zahl d. AP_k^n bildet die Kantenmenge eines k-uniformen Hypergraphen auf der Knotenmenge $\{0, \ldots, n-1\}$. Wie üblich bezeichnet die chromatische Zahl $\chi(AP_k^n)$ die kleinste natürliche Zahl r so, daß es eine Färbung $\Delta : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ derart gibt, daß keine Kante $\{a_0, \ldots, a_{k-1}\} \in AP_k^n$ einfarbig ist. Der Satz von van der Waerden besagt, daß $\chi(AP_k^{vdW(k,r)}) = r + 1$.
Ein Kreis der Länge g im Hypergraphen AP_k^n besteht aus g Kanten $A_0, \ldots, A_{g-1} \in AP_k^n$ und g Zahlen $a_0, \ldots, a_{g-1}$ derart, daß $a_i \in A_i \cap A_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, g-1$, wobei man natürlich $A_0 = A_g$ setzt. Offensichtlich besitzt AP_k^n jede Menge kurzer Kreise, im allgemeinen sogar schon Kreise der Länge 2. Mit Hilfe von probabilistischen Methoden zeigte Spencer:

3.10 Satz [48] (Spencer) *Es seien* k, r *und* g *positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* n *und eine Menge* $H \subseteq AP_k^n$ *von arithmetischen Progressionen der Länge* k *in* $\{0, \ldots, n-1\}$ *derart, daß gilt:*

(i) $\text{girth}(H) > g$, *d. h. der kürzeste Kreis in* H *besitzt mindestens* g + 1 *Kanten,*

(ii) $\chi(H) > r$, *d. h. zu jeder Färbung* $\Delta : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ *gibt es eine einfarbige arithmetische Progression* $\{a_0, \ldots, a_{k-1}\} \in H$.

Es ist immer noch ungelöst, ob sogar folgende Verschärfung von Satz (3.10) gilt:

3.11 Frage [48] *Es seien* k, r *und* g *positive ganze Zahlen. Gibt es dann eine (endliche) Menge* S *von positiven ganzen Zahlen derart, daß die Menge* AP_k^S *der arithmetischen Progressionen der Länge* k, *die in* S *enthalten sind, die Bedingungen*

(i) $\text{girth}(AP_k^S) > g$ *und*

(ii) $\chi(AP_k^S) > r$ *erfüllt?*

Jedenfalls für g = 2 ist die Antwort bejahend [48].

Wieder stellt sich die Frage, ob ein ähnliches Resultat auch für den Satz von Hales und Jewett gilt. In der Tat ist das der Fall, wie Rödl kürzlich, ebenfalls mit probabilistischen Methoden, zeigen konnte:

3.12 Satz [44] (Rödl) *Es sei* A *eine endliche Menge und* m, r *und* g *seien positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* n *und eine Menge* F *von* m*-Funktionalen in* A^n *so, daß der Hypergraph* $H = \{f \cdot A^m \mid f \in F\}$ *der* m*-Parametermengen, die durch* F *gegeben sind, erfüllt:*

(i) girth $H > g$ *und*

(ii) $\chi(H) > r$.

Wie schon oben stellt sich die Frage, ob nicht sogar folgende Verschärfung gilt:

3.13 Frage *Es sei* A *eine endliche Menge und* m, r *und* g *seien positive ganze Zahlen. Gibt es eine Menge* $S \subseteq A^n$, *für ein genügend großes* n *so, daß der Hypergraph* HJ_m^S *aller in* S *enthaltenen* m*-Parametermengen* $f \cdot A^m$, *die Bedingungen*

(i) girth $HJ_m^S > g$ *und*

(ii) $\chi(HJ_n^S) > r$ *erfüllt?*

Für den Fall $A = \{0, 1\}$, $m = 1$, $r = 2$ und $g = 3$ erhält man schnell eine negative Antwort, doch schon für $m = 2$ ist nicht klar, ob die Antwort positiv oder negativ ausfällt. Ebenso verhält es sich mit dem Fall mindestens 3-elementiger Mengen A und $m = 1$.

3.14 Problem Man finde konstruktive Beweise für (3.10) und (3.12). Man gebe also eine (rekursive) Konstruktionsvorschrift für die Hypergraphen H, etwa so, wie Lovász [36], Nesetril und Rödl [39] konstruktive Beweise für die Existenz von k-uniformen Hypergraphen mit hohem girth und großer chromatischer Zahl gaben, nachdem ein Existenzbeweis für derartige Hypergraphen vorher von Erdös und Hajnal [18] mit probabilistischen Methoden geführt wurde.

§ 4 Dichtheit und kanonisierende Versionen

Die Ausführungen zu den Dichtheitsversionen, d. h. den Resultaten von Szemerédi und Furstenberg und Katznelson werden wir sehr knapp halten. Der Leser sei hier auf den Artikel von Jacobs [32] verwiesen. 1973 gelang es Szemerédi, eine berühmte Vermutung von Erdös und Turán zu beweisen, nämlich:

4.1 Satz [52] (Szemerédi) *Es sei* k *eine positive ganze Zahl und sei* $\epsilon > 0$ *eine (beliebig kleine) reelle Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* $n_0 = Sz(k, \epsilon)$ *so, daß alle positiven ganzen Zahlen* $n \geqslant n_0$ *folgende Eigenschaft besitzen:*
Jede Menge $S \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$ *mit* $|S| > \epsilon \cdot n$ *enthält eine arithmetische Progression der Länge* k.

Später gelang Furstenberg [21] ein Beweis von 4.1 mit ergodentheoretischen Methoden. Außerdem bewiesen Furstenberg und Katznelson folgende Verallgemeinerung von (4.1):

4.2 Satz [23] (Furstenberg und Katznelson) *Seien* k *und* ℓ *positive ganze Zahlen und sei* $\epsilon > 0$ *eine (beliebig kleine) reelle Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* $n_0 = FK(k, \ell, \epsilon)$ *so, daß alle positiven ganzen Zahlen* $n \geqslant n_0$ *folgende Eigenschaft besitzen:*
Jede Menge $S \subseteq \{0, \ldots, n-1\}^\ell$ *von Punkten im* ℓ*-dimensionalen Würfel der Größe* n *mit* $|S| > \epsilon \cdot n^\ell$ *enthält eine homothetische Kopie von* $\{0, \ldots, k-1\}^\ell$, *dem* ℓ*-dimensionalen Würfel der Größe* k.

Es liegt nun wieder nahe zu fragen, inwieweit auch der Satz von Hales und Jewett eine Dichtheitsversion zuläßt. Für das Alphabet $A = \{0, 1\}$ konnte Rödl [45] zeigen, daß dies der Fall ist. Gemäß Bemerkung (3.6) läßt sich dieses Ergebnis als Eigenschaft von Booleschen Verbänden interpretieren:

4.3 Satz [45] (Rödl) *Es sei* m *eine positive ganze Zahl und sei* $\epsilon > 0$ *eine (beliebig kleine) reelle Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* n_0 *so, daß alle positiven ganzen Zahlen* $n \geqslant n_0$ *folgende Eigenschaft besitzen:*
Zu jeder Menge $S \subseteq P(n)$ *von Punkten im Booleschen Verband* $P(n)$ *mit* $|S| > \epsilon \cdot 2^n$ *gibt es einen* $P(m)$*-Subverband von* $P(n)$, *der ganz in* S *enthalten ist.*

Für m = 1 folgt dies aus dem Satz von Sperner [51], der ja besagt, daß im $P(n)$ eine maximale Antikette $\binom{n}{n/2} \approx \frac{2^n}{\sqrt{n}}$ Elemente besitzt. Der Fall m = 2 wurde von Erdös und Kleitmann bewiesen [19].

Es liegt nahe zu vermuten, daß eine Dichtheitsversion für den Satz von Hales und Jewett nicht nur für das 2-elementige Alphabet, sondern für jedes endliche Alphabet A gilt ([17], [25]). Doch schon für m = 1 und $|A| = 3$ ist derzeit nichts bekannt. Graham [25] bietet (U.S.) \$ 100 für die Lösung dieses Problems:

4.4 Frage [25] *Gibt es zu jedem* $\epsilon > 0$ *eine positive ganze Zahl* n_0 *so, daß für alle* $n \geqslant n_0$ *gilt:*
Wenn $S \subseteq \{0, 1, 2\}^n$ *mit* $|S| > \epsilon \cdot 3^n$, *so gibt es ein* 1*-Funktional* f *in* $\{0, 1, 2\}^n$ *mit* $f \cdot \{0, 1, 2\} \subseteq S$, *d. h.* S *enthält eine* 1-Parametermenge?

Untere Schranken für MAX $\{|S|/|A|^n \mid S \subseteq A^n$, S enthält keine 1-Parametermenge$\}$ findet man in [1], [6] und [47].

Ein ganz wenig mehr ist über die Dichtheitsversion von Satz 1.6 bekannt. Zunächst einmal folgt aus 4.3 die entsprechende Dichtheitsversion für GF(2). Brown und Buhler ([7] und [8]) haben das entsprechende Dichtheitsresultat für GF(3) bewiesen. Etwas allgemeiner konnten sie für ungerade Primzahlpotenzen q zeigen, daß jede Menge $S \subseteq (GF(q))^n$, mit $|S| > \epsilon \cdot q^n$ und $n \geqslant BB(\epsilon, q)$ hinreichend groß, wenigstens 3 kollineare Punkte enthält. Für GF(4) hingegen ist derzeit nichts bekannt.

Man beachte schließlich noch, daß aus einem eventuellen Dichtheitsresultat für die Hales und Jewett Situation ein solches für affine Punkte folgen würde, aber aus den Arbeiten von Brown und Buhler keine Antwort auf Frage 4.4 zu erhalten ist.

Im folgenden wollen wir uns mit kanonisierenden Partitionssätzen beschäftigen. In den bisher zitierten Sätzen sind stets Färbungen betrachtet worden, bei denen die Anzahl der benützbaren Farben vorab beschränkt ist. Die Frage, welche Phänomene bei Färbungen mit unbeschränkt vielen Farben auftreten, wurde für die Situation des Satzes von Ramsey schon 1950 durch Erdös und Rado [20] beschrieben.

Für arithmetische Progressionen wurden die entsprechenden Untersuchungen erst viel später angegangen. Dies vielleicht deshalb, weil bisher in die Beweise die entsprechenden Dichtheitsresultate wesentlich eingehen. Das erste Beispiel ist eine Verallgemeinerung des Satzes von van der Waerden, die von Erdös und Graham stammt:

4.5 Satz (siehe [12], Erdös und Graham) *Zu jeder positiven ganzen Zahl* k *gibt es eine positive ganze Zahl* n *mit der folgenden Eigenschaft:*

Zu jeder Färbung $\Delta : \{0, \ldots, n-1\} \to \mathbf{N}$ *gibt es eine* k*-elementige arithmetische Progression* $a + i \cdot d$, $i = 0, \ldots, k-1$ *so, daß entweder* $\Delta(a + i \cdot d) = \Delta(a + j \cdot d)$ *für alle* $0 \leqslant i, j < k$ (d. h. $a + i \cdot d$ *ist eine einfarbige arithmetische Progression*) *oder* $\Delta(a + i \cdot d) \neq \Delta(a + j \cdot d)$ *für alle* $0 \leqslant i < j < k$ (d. h. $a + i \cdot d$ *ist eine injektiv gefärbte arithmetische Progression*).

Derzeit ist kein elementarer kombinatorischer Beweis für (4.5) bekannt, trotzdem ist der Beweis kurz, allerdings macht er entscheidenden Gebrauch von Szemerédis Satz (4.1):

B e w e i s von (4.5). Sei $n \geqslant Sz(k, \epsilon)$, wobei ϵ hinreichend klein gewählt ist, $\epsilon = (3 \cdot k^4)^{-1}$ etwa, und sei $\Delta : \{0, \ldots, n-1\} \to \mathbf{N}$ eine beliebige Färbung. Angenommen, es gibt keine injektiv gefärbte arithmetische Progression der Länge k. Es gibt mindestens $c' \cdot n^2$ viele arithmetische Progressionen der Länge k in $\{0, \ldots, n-1\}$, wobei c' eine Konstante ist, die nur von k abhängt. Jede zweielementige Menge kommt in höchstens $\binom{k}{2}$ vielen arithmetischen Progressionen der Länge k vor. Also gibt es mindestens $c \cdot n^2$ viele zweielementige Teilmengen von $\{0, \ldots, n-1\}$, die einfarbig sind, wobei c eine Konstante ist, die wiederum nur von k abhängt. Angenommen, es gibt auch keine einfarbige arithmetische Progression der Länge k. Da $n \geqslant Sz(k, \epsilon)$, ist dann $|\Delta^{-1}(i)| < \epsilon \cdot n$ für jedes $i \in \mathbf{N}$. Da $\sum_{i \in \mathbf{N}} |\Delta^{-1}(i)| = n$, folgt durch einfache Überlegungen, daß $\sum_{i \in \mathbf{N}} \binom{|\Delta^{-1}(i)|}{2} \leqslant \frac{1}{\epsilon} \binom{\epsilon \cdot n}{2} \leqslant \epsilon \cdot n^2$.

Es gibt also höchstens $\epsilon \cdot n^2$ viele einfarbige zweielementige Teilmengen, Wählt man nun $\epsilon < c$, so bekommt man einen Widerspruch. □

Eine unmittelbare Verallgemeinerung der kanonisierenden Version des Satzes von van der Waerden auf den Satz von Hales und Jewett gilt nicht. Das liegt daran, daß es längst nicht soviele 1-Parametermengen gibt wie arithmetische Progressionen. Wählt man nämlich für $\underline{k} = \{0, \ldots, k-1\}$ die Codierung $\underline{k}^n \ni (a_0, \ldots, a_{n-1}) \Leftrightarrow a_0 + a_1 k + \ldots + a_{n-1} k^{n-1} \in \{0, \ldots, k^n - 1\}$, so gehört zu jeder arithmetischen Progression der Länge k in $\{0, \ldots, k^n - 1\}$ höchstens eine 1-Parametermenge in $\underline{k}^n$. Es gibt nun mindestens $c \cdot (k^2)^n$ viele arithmetische Progressionen der Länge k in $\{0, \ldots, k^n - 1\}$, wobei $c > 0$ nur von k abhängt, aber nur $(k+1)^n - k^n$ viele 1-Parametermengen in $\underline{k}^n$.

Für den Satz von Hales und Jewett gilt folgende kanonische Version:

4.6 **Satz** [41] *Es sei* A *eine endliche Menge und* m *eine positive ganze Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* n *mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jeder Färbung $\Delta : A^n \to \mathbf{N}$ *gibt es eine Äquivalenzrelation* $\equiv$ *auf der Menge* A, *und es gibt ein* m*-Funktional* f *in* A^n *so, daß für alle* $(a_0, \ldots, a_{m-1})$ *und* $(b_0, \ldots, b_{m-1})$ *in* A^m *gilt:*

(*) $\Delta(f(a_0, \ldots, a_{m-1})) = \Delta(f(b_0, \ldots, b_{m-1})) \Leftrightarrow a_i \equiv b_i$ *für jedes* $0 \leqslant i < m$.

Man kann sich leicht überlegen, daß dieses Resultat bestmöglich ist, d. h. daß alle Färbungen (*) auch wirklich auftreten können.

Im allgemeinen wird man also für den Satz von Hales und Jewett kein „einfarbig" oder „injektiv" Resultat für Färbungen mit beliebig vielen Farben erwarten können. Lediglich für den Fall zweielementiger Alphabete folgt dies aus (4.6). In der Interpretation von 3.6 heißt das:

4.7 Korollar [41] *Zu jeder positiven ganzen Zahl* m *gibt es eine positive Zahl* n *mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jeder Färbung $\Delta : \mathsf{P}(n) \to \mathbf{N}$ *des Booleschen Verbandes* $\mathsf{P}(n)$ *mit beliebig vielen Farben gibt es einen* $\mathsf{P}(m)$*-Subverband* L *so, daß* $\Delta \upharpoonright L$ = *constant oder* $\Delta \upharpoonright L$ *injektiv ist.*

Ebenfalls ein „einfarbig" oder „injektiv" Resultat bekommt man für Färbungen von affinen Punkten:

4.8 Satz [57] *Es sei* q *eine Primzahlpotenz und* m *sei eine positive ganze Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* n *mit folgender Eigenschaft:*
Zu jeder Färbung $\Delta : (GF(q))^n \to \mathbf{N}$ *der Punkte des* n*-dimensionalen affinen Raumes über* GF(q) *gibt es einen* m*-dimensionalen Unterraum* $A \subseteq (GF(q))^n$ *so, daß entweder* $\Delta \upharpoonright A$ = *constant oder* $\Delta \upharpoonright A$ *injektiv ist.*

Bevor wir zu arithmetischen Progressionen zurückkehren, sollen noch zwei kanonisierende Resultate im Zusammenhang mit dem Radoschen Summensatz bzw. der unendlichen Verallgemeinerung von Hindman Erwähnung finden. Die kanonisierende Version des Hindmanschen Satzes stammt von Taylor:

4.9 Satz [54] (Taylor) *Zu jeder Färbung* $\Delta : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *der positiven ganzen Zahlen findet man stets unendlich viele Zahlen* $x_0 < x_1 < x_2 \ldots$ *derart, daß einer der folgenden* 5 *Fälle für alle endlichen, nichtleeren Teilmengen* $I, J \subseteq \mathbf{N}$ *gilt*

(1) $\Delta(\sum_{i \in I} x_i) = \Delta(\sum_{i \in J} x_i)$

(2) $\Delta(\sum_{i \in I} x_i) = \Delta(\sum_{i \in J} x_i) \Leftrightarrow \min I = \min J$

(3) $\Delta(\sum_{i \in I} x_i) = \Delta(\sum_{i \in J} x_i) \Leftrightarrow \max I = \max J$

(4) $\Delta(\sum_{i \in I} x_i) = \Delta(\sum_{i \in J} x_i) \Leftrightarrow \min I = \min J$ *und* $\max I = \max J$

(5) $\Delta(\sum_{i \in I} x_i) = \Delta(\sum_{i \in J} x_i) \Leftrightarrow I = J$.

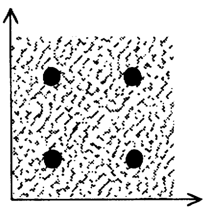
Man kann sich leicht überlegen, daß tatsächlich alle 5 Fälle notwendig sind, d. h. man kann keinen der Fälle (1) bis (5) weglassen. Anders verhält sich die Situation beim Radoschen Summensatz, d. h. bei der endlichen Version von (4.9). Hier kann man sich auf (1), (2) und (5) beschränken, ebenso sieht man schnell, daß (1) und (5) (d. h. „einfarbig" oder „injektiv") nicht ausreichen:

4.10 Satz [41] *Zu jeder positiven ganzen Zahl* m *gibt es eine positive ganze Zahl* n *mit folgender Eigenschaft:*
Zu jeder Färbung $\Delta : \{0, \ldots, n-1\} \to \mathbf{N}$ *gibt es* m *Zahlen* $x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1}$

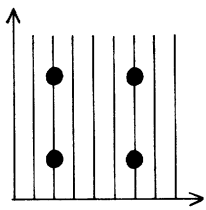
so, daß einer der Fälle (4.9.1), (4.9.2) *oder* (4.9.5) *für alle nichtleeren Teilmengen* $I, J \subseteq \{0, \ldots, m-1\}$ *gilt.*

Nun kommen wir noch einmal direkt zu arithmetischen Progressionen, nämlich zu einer kanonisierenden Version des Satzes von Gallai und Witt. Da „Homothetie" ein geometrischer Begriff ist (nämlich „Streckung plus Translation"), liegt es nahe zu vermuten, daß man eine geometrische Beschreibung der möglichen Fälle erhält; tatsächlich ist dies der Fall.

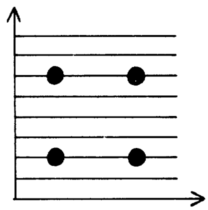
Um dieses schöne Resultat besser verstehen zu können, studieren wir zunächst einen Spezialfall. Betrachte die 6 Äquivalenzrelationen auf E^2, die im folgenden Bild skizziert sind:



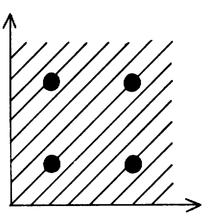
1. $W = E^2$



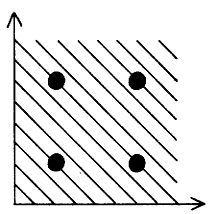
2. $W = \{(x, y) \mid x = 0\}$



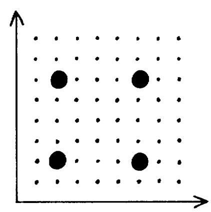
3. $W = \{(x, y) \mid y = 0\}$



4. $W = \{(x, y) \mid x = y\}$



5. $W = \{(x, y) \mid x = -y\}$



6. $W = \{(0, 0)\}$

Die Konstruktion der 6 genannten Äquivalenzrelationen besteht darin, Nebenklassen gewisser linearer Unterräume W von E^2 als Äquivalenzklassen zu nehmen.

Der Spezialfall des Satzes besagt nun: Zu jeder Färbung $\Delta : Z^2 \to N$ des Quadratgitters mit beliebig vielen Farben gibt es eine homothetische Kopie K des Einheitsvierecks $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ (im obigen Bild jeweils durch die 4 fetten Punkte angedeutet), so daß $\Delta \upharpoonright K$ von einer der 6 oben skizzierten Typen ist. Offensichtlich kann man keinen dieser 6 Fälle weglassen.

Damit ist aber schon die allgemeine Situation erreicht:

4.11 Satz [12], [50] *Es sei* $X = \{x_0, \ldots, x_{t-1}\} \subseteq E^\ell$ *eine endliche Menge von Punkten im* ℓ*-dimensionalen euklidischen Raum. Dann gibt es eine endliche Menge* $X^* \subseteq E^\ell$ *mit folgender Eigenschaft:*
Zu jeder Färbung $\Delta : X^* \to N$ *gibt es einen linearen Unterraum* $W \subseteq E^\ell$ *sowie eine homothetische Kopie* $a + d \cdot X \subseteq X^*$, $a \in E^\ell$, $d \in N$, *von* X *so, daß für alle* x_i,

$x_j \in X$ *gilt:*

(*) $\Delta(a + d \cdot x_i) = \Delta(a + d \cdot x_j) \Leftrightarrow x_i - x_j \in W$,

d. h. x_i *und* x_j *liegen in derselben Nebenklasse von* W.

Zunächst konnten Graham, Prömel und die Autoren dieses Berichtes den Fall, daß $X \subseteq \mathbf{N}^\ell$ im Gitternetz liegt, erledigen. Spencer zeigte anschließend, wie man den allgemeinen Fall darauf zurückführt.

Der erste Teil dieses Satzes (nämlich der Fall $X \subseteq \mathbf{N}^\ell$) wird mit Hilfe eines Zählargumentes aus dem Satz von Fürstenberg und Katznelson gewonnen. Wie bei der kanonisierenden Version des Satzes von van der Waerden stellt sich also die Frage, ob man (4.11) nicht direkt, d. h. ohne Zurückführung auf ein Dichtheitsresultat, beweisen kann.

Zum Schluß wollen wir noch zwei weitere Spezialfälle von 4.11, die auch für sich von Interesse sind, explizit angeben:

4.12 Korollar (1) *Es sei* $X \subseteq E^2$ *eine endliche Menge von Punkten im zweidimensionalen Raum, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann gibt es zu jeder Färbung* $\Delta : E^2 \to \mathbf{R}$ *eine homothetische Kopie* K *von* X *so, daß einer der folgenden* $2 + \binom{|X|}{2}$ *Fälle gilt:*

$\Delta \restriction K =$ *constant,*

es gibt zwei Punkte $x, y \in K$ *mit* $\Delta(x) = \Delta(y)$, *aber sonst ist* $\Delta \restriction K \backslash \{y\}$ *injektiv,*

$\Delta \restriction K$ *ist injektiv.*

(2) *Es sei* $X \subseteq E^\ell$ *eine Menge von affinen unabhängigen Punkten. Dann gibt es zu jeder Färbung* $\Delta : E^\ell \to \mathbf{R}$ *eine homothetische Kopie* K *von* X *und eine Teilmenge* $Y \subseteq K$ *so, daß* $\Delta \restriction Y$ *konstant, aber* $\Delta \restriction K \setminus Y$ *injektiv ist.*

Im Zusammenhang mit den Ergebnissen von Abschnitt 2 ergeben sich zahlreiche, bisher noch ungelöste Probleme. Der Einfachheit halber formulieren wir die Fragen für arithmetische Progessionen:

4.13 Fragen (1) *Gibt es zu jeder positiven ganzen Zahl* k *eine (endliche) Menge* $S \subseteq \mathbf{N}$ *positiver ganzer Zahlen, die keine arithmetische Progression der Länge* $k + 1$ *enthält, d. h.* $AP^S_{k+1} = \emptyset$, *welche aber zu jeder Färbung* $\Delta : S \to \mathbf{N}$ *eine arithmetische Progression* $a + i \cdot d$ *der Länge* k *enthält, die entweder einfarbig oder injektiv gefärbt ist?*

(2) *Gibt es zu je zwei positiven ganzen Zahlen* g *und* k *eine positive ganze Zahl* n *und eine Menge* $H \subseteq AP^n_k$ *von arithmetischen Progressionen der Länge* k *mit* girth $H > g$, *welche zu jeder Färbung* $\Delta : \{0, \ldots, n-1\} \to \mathbf{N}$ *eine arithmetische Progression der Länge* k *enthält, die entweder einfarbig oder injektiv gefärbt ist?*

Literatur

[1] Alspach, B.; Brown, T. C.; Hell, P.: On the density of sets containing no k-element arithmetic progression of a certain kind. J. London Math. Soc. **13** (1976) 226–234
[2] Arnautov, V. I.: Nondiscrete Topologizability of Countable Rings. Soviet Math. Dokl. **11** (1970) 423–426
[3] Berlekamp, E.: A construction for partitions avoiding long arithmetic progressions. Canad. Math. Bull. **11** (1968) 409–414
[4] Brauer, A.: Über Sequenzen von Potenzresten. Sitz.-Ber. d. Preuß. Akad. der Wiss., math.-phys. Kl., 1928, 9–16
[5] Brauer, A.: Gedenkrede auf Issai Schur. In: I. Schur, Gesammelte Abhandlungen. Berlin 1973, V–XIV
[6] Brown, T. C. Behrends theorem for sequences containing no k-element arithmetic progression of a certain type. JCT (A) **18** (1975) 352–356
[7] Brown, T. C.; Buhler, J. P.: A density version of a geometric Ramsey theorem. JCT (A) **32** (1982) 20–34
[8] Brown, T. C.; Buhler, J. P.: Lines imply spaces in density Ramsey Theory. Prepr.
[9] Chintchin, A. J.: Drei Perlen der Zahlentheorie. Berlin 1951: Akademie-Verlag
[10] Deuber, W.: Partitionen und lineare Gleichungssysteme. Math. Z. **133** (1973) 109–123
[11] Deuber, W.: On van der Waerden's theorem on arithmetic progressions. JCT (A) **32** (1982) 115–118
[12] Deuber, W.; Graham, R. L.; Prömel, H. J.; Voigt, B.: A canonical partition theorem for equivalence relations on Z^t. To appear in JCT (A)
[13] Deuber, W.; Rothschild, B. L.; Prömel, H. J.; Voigt, B.: A restricted version of Hales-Jewett's theorem. To appear
[14] Deuber, W.; Rothschild, B. L.; Voigt, B.: Induced Partition Theorems. JCT (A) **32** (1982) 225–240
[15] Deuber, W.; Voigt, B.: Partitionseigenschaften endlicher affiner und projektiver Räume. To appear in Eur. J. of Combinatorics
[16] Erdös, P.: Problems and Results in Combinatorial Number Theory. Asterisque, Soc. Math. de France **24–25** (1975) 295–310
[17] Erdös, P.; Graham, R. L.: Old and new Problems and Results in Combinatorial Number Theory. L'Enseign. Math. Geneve 1980
[18] Erdös, P.; Hajnal, A.: On chromatic number of graphs and set systems. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **17** (1966) 61–69
[19] Erdös, P.; Kleitman, D.: On collections of subsets containing no 4-member Boolean algebra. Proc. AMS **28** (1971) 87–90
[20] Erdös, P.; Rado, R.: A combinatorial theorem. J. London Math. Soc. **25** (1950) 249–255
[21] Furstenberg, H.: Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. J. d'Analyse Math. **31** (1977) 204–256
[22] Furstenberg, H.: Recurrence in Ergodic Theory and combinatorial Number Theory. Princeton 1981: University Press
[23] Furstenberg, H.; Katznelson, Y.: An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. J. d'Anal. Math. **34** (1978) 275–291
[24] Furstenberg, H.; Weiss, B.: Topological dynamics and combinatorial number theory. J. d'Anal. Math. **34** (1978) 61–85
[25] Graham, R. L.: Rudiments of Ramsey Theory AMS 1979. = Regional conference series in Math., Vol. 45
[26] Graham, R. L.; Leeb, K.; Rothschild, B. L.: Ramsey's theorem for a class of categories. Adv. in Math. **8** (1972) 417–433
[27] Graham, R. L.; Rothschild, B. L.: Ramsey's theorem for n-parameter sets. Trans. AMS **159** (1971) 257–292
[28] Graham, R. L.; Rothschild, B. L.: A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions. Proc. AMS **42** (1974) 385–386
[29] Graham, R. L.; Rothschild, B. L.; Spencer, J. H.: Ramsey Theory. New York 1980: John Wiley
[30] Hales, A.; Jewett, R. I.: Regularity and positional games. Trans. AMS **106** (1963) 222–229

[31] H i n d m a n , N.: Finite sums from sequences within cells of a partition of N. JCT (A) **17** (1974) 1–11
[32] J a c o b s , K.: Arithmetische Progressionen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **85** (1983) 55–65
[33] L e e b , K.: A full Ramsey theorem for the Deuber category. In: Infinite and Finite Sets, Vol. II (A. Hajnal, ed.), Amsterdam 1975: Elsevier 1043–1049
[34] L e e b , K.: Vorlesungen über Pascaltheorie. Erlangen 1973
[35] L o t h a i r e , M.: Combinatorics on words, Encyclopedia of Math., Vol. 17, 1982
[36] L o v á s z,, L.: On chromatic number of finite set systems. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **19** (1968) 59–67
[37] N e s e t r i l , J.; R ö d l , V.: Dual Ramsey Type Theorems. Proc. of the VIIIth Winterschool on abstract analysis. Prag 1980, 121–123
[38] N e s e t r i l , J.; R ö d l , V.: Van der Waerden Theorem for Sequences of Integers not containing an Arithmetic Progression of k Terms. Comm. Math. Univ. Carolinae **17** (1976) 675–688
[39] N e s e t r i l , J.; R ö d l , V.: A short proof of highly chromatic graphs without short cycles. JCT (B) **27** (1979) 225–227
[40] P r ö m e l , H. J.: Induzierte Partitionssätze. Diss. Bielefeld 1982
[41] P r ö m e l , H. J.; V o i g t , B.: Canonical partition theorems for parameter sets. Prepr.
[42] R a d o , R.: Studien zur Kombinatorik. Math. Z. **36** (1933) 424–480
[43] R a m s e y , F. P.: On a problem of formal Logic, Proc. London Math. Soc. 30, 1930, 264–286
[44] R ö d l , V.: On Ramsey families of sets. Manuscript 1981
[45] R ö d l , V.: A note on finite Boolean algebras. Acta Polytech., Práce CVUT v Praze, Vedecká Konference 1982
[46] S c h u r , I.: Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m$ (mod p). J. d. Dt. Math.-Verein (1917) 114–117
[47] S c h m i d t , F. W.: On sets not containing arithmetic progressions of a certain kind. JCT (A) **33** (1982) 30–35
[48] S p e n c e r , J.: Restricted Ramsey Configurations. JCT (A) **19** (1975) 278–286
[49] S p e n c e r , J.: Ramsey's theorem for spaces, Trans. AMS **249** (1979) 363–371
[50] S p e n c e r , J.: Canonical configurations. To appear in JCT (A)
[51] S p e r n e r , E.: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. Math. Z. **27** (1928) 544–548
[52] S z e m e r é d i, E.: On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Acta Arith. **27** (1975) 199–245
[54] T a y l o r , A. D.: A canonical partition relation for finite subsets of ω. JCT (A) **21** (1976) 137–146
[55] v a n d e r W a e r d e n , B. L.: Beweis einer Baudet'schen Vermutung. Nieuw Arch. Wisk. **15** (1927) 212–216
[57] V o i g t , B.: Canonization theorems for finite affine and linear spaces. Prepr.
[58] W i t t , E.: Ein kombinatorischer Satz der Elementargeometrie. Math. Nachr. **6** (1951) 261–262

W. Deuber
B. Voigt
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
4800 Bielefeld

(*Eingegangen:* 27. 10. 1982)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
85 (1983) 86–105
AMS subject classification: 16 A 46, 16 A 64

Unzerlegbare Darstellungen endlich-dimensionaler Algebren*)

C. M. Ringel, Bielefeld

Im folgenden Bericht möchte ich die Grundzüge der Darstellungstheorie endlich-dimensionaler Algebren skizzieren, wie sie in den letzten zehn Jahren entwickelt wurde. Ich erinnere daran, daß das Grundproblem der Darstellungstheorie die Klassifikation der unzerlegbaren Darstellungen einer Algebra ist. Dabei gehen wir von folgender Situation aus: Gegeben ist ein Körper k, oft werden wir voraussetzen, daß k algebraisch abgeschlossen ist, und dann genügt es für alle Überlegungen, an den Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen zu denken. Wenn hier von k-Algebren die Rede ist, so handelt es sich immer um assoziative Algebren, fast immer werden wir voraussetzen, daß sie endlich-dimensional sind, und endlich-dimensionale Algebren sollen ein Einselement besitzen. Ist eine solche Algebra A gegeben, so fragen wir nach allen möglichen Darstellungen von A, nach den A-M o d u l n , das sind k-Vektorräume, auf denen A von links operiert, mit den üblichen Distributivgesetzen. Bei Moduln werden wir immer voraussetzen, daß sie endlich-dimensional sind. Unter einer direkten Zerlegung des A-Moduls M versteht man eine Vektorraumzerlegung $M = M' \oplus M''$, wobei M' und M'' beides A-Untermoduln sind; sie heißt trivial, falls $M' = 0$ oder $M'' = 0$. Ist $M \neq 0$, und besitzt M keine nicht-trivialen Zerlegungen, so spricht man von einem u n z e r l e g b a r e n Modul. Natürlich kann jeder (endlich-dimensionale) Modul als direkte Summe unzerlegbarer Moduln geschrieben werden, und der klassische Satz von Krull-Schmidt besagt, daß eine solche Zerlegung bis auf Isomorphie eindeutig ist. Um also alle Moduln zu kennen, genügt es, die unzerlegbaren Moduln zu beschreiben. Im allgemeinen wird es unendlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln geben, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei I das von den Polynomen X^2, XY, Y^2 erzeugte Ideal des Polynomrings $\mathbf{C}[X, Y]$, und $A_0 = \mathbf{C}[X, Y]/I$. Dann ist A_0 eine 3-dimensionale kommutative Algebra, und wir erhalten für jede komplexe Zahl λ einen 2-dimensionalen A_0-Modul M_λ, indem wir als zugrundeliegenden Vektorraum $\mathbf{C}^2$ wählen, und die Operation von X auf $\mathbf{C}^2$ durch die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, die von Y auf $\mathbf{C}^2$ durch $\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ festsetzen (offensichtlich liefert dies eine Operation von $\mathbf{C}[X, Y]$ auf $\mathbf{C}^2$, und man rechnet leicht nach, daß I den Modul annulliert). Alle diese Moduln M_λ sind unzerlegbar, und sie sind paar-

*) Dies ist der ziemlich wörtliche Text eines Vortrages, gehalten auf der DMV-Tagung in Dortmund, 1980. Eingearbeitet wurde lediglich der Satz von Ovsienko [17], und Hinweise auf die neuen Arbeiten [4], [7], [12], [19].

weise nicht-isomorph. Besitzt eine endlich-dimensionale Algebra nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln, so nennen wir sie d a r s t e l l u n g s e n d l i c h. Ein wichtiger Satz von Rojter [23] besagt nun, daß eine endlich-dimensionale Algebra entweder darstellungsendlich ist, oder aber unzerlegbare Darstellungen beliebig großer Dimension besitzt. Die entsprechende Vermutung war in den vierziger Jahren von Brauer und Thrall formuliert worden [21]. Für unsere Algebra A_0 erhalten wir große unzerlegbare Moduln, indem wir X und Y auf $\mathbf{C}^{2n}$ vermöge der Matrizen

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{und} \quad \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

operieren lassen. Ich sollte betonen, daß ein A_0-Modul offensichtlich nichts anderes ist als ein $\mathbf{C}$-Vektorraum, mit zwei Endomorphismen α, β, für die $\alpha^2 = \beta^2 = \alpha\beta = \beta\alpha = 0$ gilt – dabei ist α durch die Operation von X, und β durch die von Y gegeben, die ja die entsprechenden Relationen erfüllen. Die vollständige Klassifikation aller unzerlegbaren A_0-Moduln geht zurück auf Kronecker, sie folgt direkt aus seiner Klassifikation aller Matrizenbüschel [15], [10], also der Paare von nicht-notwendig quadratischen Matrizen. Wir schreiben dafür symbolisch

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \circ \end{tikzcd}$$

um auszudrücken, daß zwei Vektorräume V, W und zwei lineare Abbildungen $\gamma, \delta : V \to W$ gegeben sind, also

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & W, \end{tikzcd}$$

und daß wir nun geeignete Basen in V und W suchen, um γ und δ in eine relativ einfache Form zu bringen. Die Probleme der Darstellungstheorie sind Matrizenprobleme, auch wenn im allgemeinen ein basisfreier Zugang gewählt wird.

Ich möchte im weiteren besonders das folgende Beispiel diskutieren:

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, "\alpha"] & \circ \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

wir haben es mit zwei Vektorräumen U, V, einer Abbildung $\alpha : U \to V$, und einem Endomorphismus $\beta : V \to V$ zu tun. Dabei können wir voraussetzen, daß α eine Inklusionsabbildung ist, denn andernfalls spalten wir den Kern von α ab (die einzige unzerlegbare Darstellung, für die α nicht injektiv ist, ist $k \to 0 \circlearrowright$). Zu untersuchen haben wir deshalb einen Vektorraum V, mit einem Endomorphismus β und einem Unterraum U. Wenn wir keine weiteren Voraussetzungen machen würden, so wäre dies ein ziemlich hoffnungsloses Unterfangen: Es gibt viel zu viele unzerlegbare Darstellungen, als daß man eine Klassifikation erwarten könnte. (Man kann recht leicht zeigen, daß es zu jeder endlich-dimensionalen Algebra A einen Vektorraum V, einen Endomorphismus $\beta : V \to V$ und einen Unterraum U von V gibt, so daß A isomorph zum Ring aller Endomorphismen von V, die mit β kommutieren, und U in sich abbilden, ist; man sagt daher, daß man es mit einem „wilden" Problem der Darstellungstheorie zu tun hat [6]). Wir werden zusätzlich noch voraussetzen, daß die Relationen

$$\beta^4 = 0 \quad \text{und} \quad \beta^2\alpha = 0$$

gelten: Gesucht sind also Tripel (V, U, β), mit V ein Vektorraum, β ein nilpotenter Endomorphismus von V mit Nilpotenzindex $\leqslant 4$, und U ein Unterraum von V, der im Kern von β^2 enthalten ist. In diesem Fall, so werden wir sehen, gibt es 27 unzerlegbare derartige Tripel, also, zusammen mit $k \to 0 \circlearrowleft$, erhalten wir genau 28 unzerlegbare Moduln, wir sind im darstellungsendlichen Fall. – Ich sage „Moduln", und sollte noch einmal herausarbeiten, daß die Quadrupel

$$U \xrightarrow{\alpha} V \circlearrowleft \beta \quad \text{mit } \beta^4 = \beta^2\alpha = 0$$

gerade den Moduln über einer 7-dimensionalen Algebra A_1 entsprechen, die man auf folgende Weise erhält: man betrachtet die „Wege-Algebra" zum Köcher $\circ \xrightarrow{\alpha} \circ \circlearrowleft \beta$, und faktorisiert das von den Relationen β^4 und $\beta^2\alpha$ erzeugte Ideal heraus [8]; in unserem Fall besitzt A_1 eine kanonische k-Basis, nämlich zwei Idempotente, die den beiden Punkten des Köchers entsprechen, und die (Restklassen der) Wege $\alpha, \beta, \beta^2, \beta^3, \beta\alpha$ – die übrigen Monome liegen in dem von β^4 und $\beta^2\alpha$ erzeugten Ideal und sind daher null gesetzt. Der $U \xrightarrow{\alpha} V \circlearrowleft \beta$ zugeordnete A_1-Modul ist gegeben durch den Vektorraum $U \oplus V$, mit der offensichtlichen Operation von A_1 auf $U \oplus V$.

Wenn man die unzerlegbaren Moduln einer Algebra klassifizieren möchte, so braucht man „Etiketten", mit denen man sie bezeichnen kann, also irgendwelche Invarianten, die man einerseits leicht bestimmen kann, die andererseits den Modul bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen. Als erste und wichtigste Invariante erweist sich der sogenannte Dimensionsvektor $\underline{\dim}$ M. Eine endlich-dimensionale Algebra A hat nur endlich viele Isomorphieklassen einfacher (= irreduzibler) Moduln, etwa $S_1, \ldots, S_n$. Für einen A-Modul M bezeichnet $\underline{\dim}$ M das n-Tupel, dessen i-te Koordinate $(\underline{\dim}\, M)_i$ angibt, wie oft S_i in einer Kompositionsreihe von M als Faktor auftritt. Nach dem klassischen Satz von Jordan-Hölder sind diese Anzahlen Invarianten des Moduls. Im Fall der Algebra A_1 gibt es die beiden einfachen Moduln

$$S_1 = (k \to 0 \circlearrowleft) \quad \text{und} \quad S_2 = (0 \to k \circlearrowleft),$$

und es ist

$$\underline{\dim}\,(U \xrightarrow{\alpha} V \circlearrowleft \beta) = (\dim U, \dim V).$$

Im allgemeinen wird der Dimensionsvektor nicht ausreichen, um die unzerlegbaren Moduln zu klassifizieren, selbst wenn wir es mit einer darstellungsendlichen Algebra zu tun haben. So gibt es im Fall der Algebra A_1 drei Isomorphieklassen von unzerlegbaren Moduln mit Dimensionvektor (2, 6), nämlich die folgenden:

$$k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} k^6 \circlearrowright \left[\begin{array}{cccc:cc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ \hdashline & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array}\right]$$

$$k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} k^6 \circlearrowright \left[\begin{array}{cccc:cc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ \hdashline & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array}\right]$$

$$k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} k^6 \circlearrowright \left[\begin{array}{cccc:cc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ \hdashline & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array}\right]$$

Es stellt sich also das Problem, für welche Algebren die unzerlegbaren Moduln durch ihren Dimensionsvektor charakterisiert werden, und wir werden sehen, daß jedem Modul M über einer darstellungsendlichen Algebra ein Modul $\widetilde{M}$ über einer verwandten Algebra zugeordnet werden kann, der durch seinen Dimensionsvektor charakterisiert wird, und der viele Eigenschaften von M widerspiegelt.

Soweit zu den Fragestellungen. Als erstes, grundlegendes Hilfsmittel der neueren Darstellungstheorie möchte ich den sogenannten Auslander-Reiten-Köcher vorstellen.

1 Der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A)$

Ein Köcher, dieser Sprachgebrauch hat sich eingebürgert, ist nichts anderes als eine Sammlung von Punkten und Pfeilen, wobei jedem Pfeil sein Anfangs- und sein Endpunkt zugeordnet ist (also ein orientierter Graph, möglicherweise mit Doppelpfeilen und Schleifen). Unser Interesse gilt der Menge der Isomorphieklassen der unzerlegbaren A-Moduln einer vorgegebenen endlich-dimensionalen Algebra A, und wir werden sogleich sehen, wie wir diese Menge als Punktmenge eines Köchers auffassen können, der vielfach Aufschluß über die Struktur sowohl von A als auch der A-Moduln gibt. Wir brauchen dazu den Begriff einer irreduziblen Abbildung, wie er von Auslander und Reiten [2] eingeführt wurde: Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt *irreduzibel*, wenn f einerseits weder zerfallender Monomorphismus, noch zerfallender Epimorphismus ist, und wenn f andererseits nur triviale Faktorisierungen besitzt. (Natürlich kann man f immer auf folgende Weisen faktorisieren

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "{[1\ \ 0]}"'] & & N \\ & M \oplus Z \arrow[ur, "{\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "{[f\ \ h]}"'] & & N \\ & N \oplus Z \arrow[ur, "{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}"'] & \end{tikzcd},$$

wobei Z ein beliebiger Modul, und $g: Z \to N$, $h: M \to Z$ beliebige Abbildungen sind, und man sagt, daß eine Faktorisierung $f = f'f''$ trivial ist, falls f' ein zerfallender Monomorphismus oder f'' ein zerfallender Epimorphismus ist.) Der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A)$ von A hat als Punkte die Isomorphieklassen [M] der unzerlegbaren A-Moduln M, und es gibt einen Pfeil $[M] \to [N]$ genau dann, wenn es eine irreduzible Abbildung $M \to N$ gibt (Oft notiert man noch über den Pfeilen entsprechende Vielfachheiten [21], doch werden wir im folgenden darauf verzichten).
Die Existenz genügend vieler irreduzibler Abbildungen ist nur für darstellungsendliche Algebren offensichtlich: wenn wir eine vorgegebene nicht-invertierbare Abbildung f zwischen zwei unzerlegbaren Moduln immer weiter faktorisieren, es aber nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln gibt, so sieht man leicht, daß dieser Vorgang stationär wird, daß sich also f als Summe von Produkten von irreduziblen Abbildungen schreiben läßt. Im allgemeinen ist dies keineswegs so. Allerdings gibt es auch dann immer noch viele irreduzible Abbildungen. Zu jedem unzerlegbaren Modul Z gibt es nämlich eine sogenannte *minimale rechts-fast-zerfallende* Abbildung $g: Y \to Z$ (das soll folgendes heißen: Erstens, g ist kein zerfallender Epimorphismus; zweitens, ist $g': Y' \to Z$ eine Abbildung, die kein zerfallender Epimorphismus ist, so gibt es g'' mit $g' = g''g$; und drittens hat Y für alle derartigen Abbildungen $g: Y \to Z$ die kleinst-mögliche Länge), und eine solche Abbildung ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt – ein wichtiger, grundlegender Satz von Auslander und Reiten. Wie ist nun der Zusammenhang mit irreduziblen Abbildungen? Zerlegen wir $Y = \oplus Y_i$ als Summe von unzerlegbaren Moduln, und schreiben wir $g = (g_i)_i$ mit $g_i: Y_i \to Z$, so sind diese Abbildungen g_i irreduzibel, und man erhält auf diese Weise im wesentlichen alle irreduziblen Abbildungen mit Ziel Z und unzerlegbarer Quelle. Es gilt auch das Duale: Zu jedem unzerlegbaren Modul X gibt es eine, und bis auf Isomorphie auch nur eine, minimale links-fast-zerfallende Abbildung $f: X \to Y$, und zerlegen wir $Y = \oplus Y_i$ mit unzerlegbaren Moduln Y_i und $f = (f_i)_i$, so sind die Abbildungen $f_i: X \to Y_i$ irreduzibel, und dies sind im wesentlichen alle irreduziblen Abbildungen mit Quelle X und unzerlegbarem Ziel. Wir sehen also, daß der Auslander-Reiten-Köcher lokal-endlich ist (jeder Punkt ist Ziel oder Quelle von nur endlich vielen Pfeilen), insbesondere sind die Zusammenhangskomponenten von $\Gamma(A)$ endlich oder abzählbar. Endliche Zusam-

menhangskomponenten treten nur im darstellungsendlichen Fall auf, wie die folgende Verschärfung des Satzes von Rojter zeigt:

Satz (Auslander [1]) *Sei* A *zusammenhängend (also nicht direktes Produkt zweier echter Unteralgebren). Sind die Moduln einer Zusammenhangskomponente von* $\Gamma(A)$ *von beschränkter Länge, so ist* A *darstellungsendlich und* $\Gamma(A)$ *ist zusammenhängend.*

Wir wollen noch etwas genauer nach den minimalen fastzerfallenden Abbildungen fragen. Ist Z unzerlegbar und projektiv (also ein unzerlegbarer direkter Summand der regulären Darstellung ${}_AA$), so hat Z genau einen maximalen Untermodul Y, und die Inklusionsabbildung $Y \to Z$ ist gerade die minimale rechts-fast-zerfallende Abbildung mit Ziel Z. Ist Z unzerlegbar, aber nicht projektiv, so ist die minimale rechts-fast-zerfallende Abbildung $g : Y \to Z$ surjektiv, der Kern X von g ist wieder unzerlegbar, und die Inklusionsabbildung $f : X \to Y$ ist minimal links-fast-zerfallend. Wir erhalten also eine (nicht zerfallende) exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0,$$

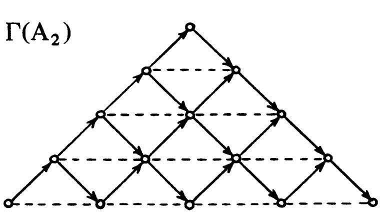
mit unzerlegbaren Moduln X, Z, einer minimalen links-fast-zerfallenden Abbildung f, und einer minimalen rechts-fast-zerfallenden Abbildung g, eine sogenannte Auslander-Reiten-Sequenz. Im Auslander-Reiten-Köcher führt dies zu folgender Pfeilkonfiguration (einer „Masche"):

$$\begin{tikzcd}
 & {[Y_1]} \arrow[dr] & \\
{[X]} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & {[Y_2]} \arrow[r] & {[Z]} \\
 & \vdots & \\
 & {[Y_r]} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

wobei $Y_1, \ldots, Y_r$ eine maximale Menge paarweise nicht-isomorpher unzerlegbarer direkter Summanden von Y ist. Wie wir oben gesehen haben, ist [X] eindeutig durch[Z] bestimmt (und umgekehrt), wir schreiben $[X] = \tau[Z]$, und nennen τ die Auslander-Reiten-Translation. Sie ist auf der Menge der Isomorphieklassen nicht-projektiver unzerlegbarer Moduln definiert, und hat als Bild die Menge der Isomorphieklassen der nicht-injektiven unzerlegbaren Moduln. Wie wir ebenfalls schon gesehen haben, gilt folgendes: die Anfangspunkte der Pfeile mit Endpunkt [Z] sind gerade die Endpunkte der Pfeile mit Anfangspunkt $\tau[Z]$; der Auslander-Reiten-Köcher ist ein sogenannter Translationsköcher.

Es sollen nun einige Beispiele von Auslander-Reiten-Köchern betrachtet werden. Sei A_2 die Algebra der oberen 5 x 5-Dreiecksmatrizen über dem Körper k. Als Auslander-Reiten-Köcher erhalten wir

$\Gamma(A_2)$



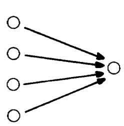
Die Auslander-Reiten-Translation τ ist gestrichelt angegeben (jeweils von rechts nach links). Die Moduln am linken Rand sind die unzerlegbar projektiven Moduln, die am rechten Rand die unzerlegbar injektiven (ein einziger Modul ist sowohl projektiv als auch injektiv). Die Moduln am unteren Rand sind die einfachen Moduln, und offensichtlich kann man hier für jeden Punkt die Kompositionsfaktoren des zugehörigen Moduls ablesen, indem man die entsprechenden Auslander-Reiten-Sequenzen verwendet.

Gabriel und Riedtmann haben vorgeschlagen, Translationsköcher als 2-dimensionale Simplizialkomplexe aufzufassen: Als 0-Simplizes nimmt man die Punkte des Köchers, als 1-Simplizes nimmt man neben den Pfeilen zusätzlich noch die Elemente des Graphen der Translation τ, und als 2-Simplizes (= Dreiecke) nimmt man die Tripel $(\tau z, y, z)$, wobei z ein Punkt ist, für den τ definiert ist, und $y \to z$ ein Pfeil. Wie man sieht, ist die geometrische Realisierung des Simplizialkomplexes $\Gamma(A_2)$ gerade ein großes Dreieck.

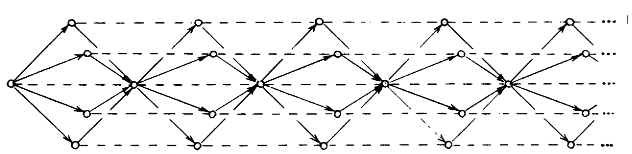
Als zweites Beispiel betrachten wir eine Unteralgebra von A_2, nämlich

$$A_3 = \begin{bmatrix} k & k & k & k & k \\ & k & & 0 & \\ & & k & & \\ & 0 & & k & \\ & & & & k \end{bmatrix}$$

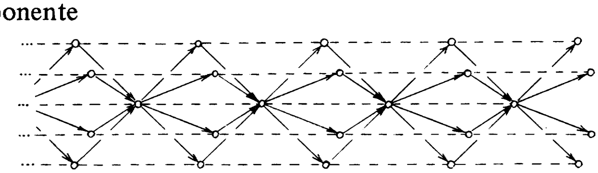
(also die Algebra aller 5 x 5-Matrizen, die höchstens an den angegebenen Stellen Koeffizienten $\neq 0$ haben). Die A_3-Moduln entsprechen gerade den Darstellungen des Köchers



sie sind also gegeben durch Vektorräume U_1, U_2, U_3, U_4, V und lineare Abbildungen $\alpha_i : U_i \to V$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. Wir können wieder voraussetzen, daß die Abbildungen α_i alles Inklusionsabbildungen sind, das heißt, wir untersuchen Vektorräume mit vier Unterräumen. Dieses Klassifikationsproblem wurde von Nazarova [16] und von Gelfand-Ponomarev [11] gelöst. Die Algebra A_3 ist nicht mehr darstellungsendlich, alle Komponenten von $\Gamma(A_3)$ müssen also abzählbar sein. Es gibt zwei spezielle Komponenten: die sogenannte präprojektive Komponente

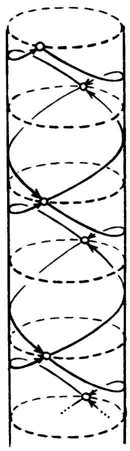


enthält ganz links die fünf unzerlegbaren projektiven Moduln, die präinjektive Komponente

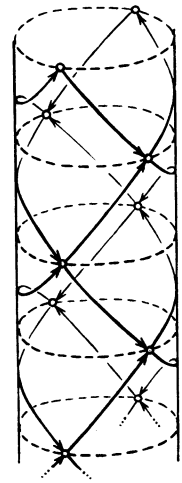


enthält ganz rechts die unzerlegbaren injektiven Moduln. Die übrigen Komponenten sind (für algebraisch abgeschlossenes k) durch die Elemente λ der projektiven Geraden $\mathbf{P}_1(k)$ indiziert, es sind alles Röhren, die im allgemeinen einen einzigen Modul auf dem Rand liegen haben, nur für drei spezielle Werte von λ liegen jeweils zwei Moduln auf dem Rand:

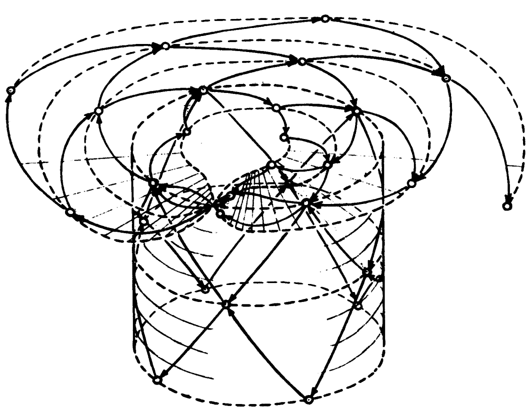
für $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$:



für $\lambda = 0, 1, \infty$:



Als letztes Beispiel zeige ich Ihnen noch den Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A_1)$ unseres Ausgangsproblems $\circ \xrightarrow{\alpha} \circ \circlearrowright \beta$, $\beta^4 = \beta^2\alpha = 0$. (Dieser Auslander-Reiten-Köcher wurde von G. D'Este berechnet, noch bevor die Überlagerungstechniken zur Verfügung standen; für die Überlassung dieses Beispiels bin ich ihr zu Dank verpflichtet.)



Hier also sind die 28 unzerlegbaren A_1-Moduln. Man sieht einen Zylinder, dessen Oberkante mit der Mittellinie eines Möbiusbandes (mit Auswüchsen) verheftet ist. Woher kommen die Auswüchse? Ist M ein unzerlegbarer Modul, so erhält man im allgemeinen zwei neue Moduln τM, $\tau^{-1}M$, und so weiter:

$$\tau^i M, \ldots, \tau M, M, \tau^{-1}M, \ldots, \tau^{-j}M.$$

Das Verfahren bricht links ab, wenn $\tau^i M$ projektiv ist, und rechts, wenn $\tau^{-j}M$

injektiv ist. Im darstellungsendlichen Fall gibt es nun nur zwei Möglichkeiten für M: entweder, das Verfahren bricht sowohl rechts, als auch links nach endlich vielen Schritten ab, dann heißt M *transjektiv*, oder aber $\tau^i M$ ist isomorph zu M für ein i, dann heißt M *periodisch*. Offensichtlich verschwinden die Auswüchse, wenn wir nur den periodischen Teil von $\Gamma(A_1)$ betrachten, und wir werden dies gleich noch genauer untersuchen.

Zuvor sollte aber noch angemerkt werden, daß sich die transjektiven Moduln einer Algebra (jedenfalls im Prinzip) effektiv berechnen lassen: wir gehen davon aus, daß die Algebra A und damit auch die unzerlegbaren projektiven Moduln (als direkte Summanden von ${}_AA$) und entsprechend die unzerlegbaren injektiven Moduln (als duale Moduln von direkten Summanden des Rechtsmoduls A_A) bekannt sind. Ist nun M unzerlegbar und nicht projektiv, so berechnet man τM wie folgt: nimm eine minimale projektive Auflösung

$$P_1 \xrightarrow{p} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

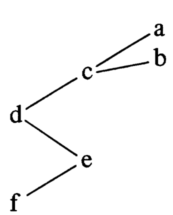
von M, dann ist

$$\tau M = \mathrm{Hom}(\mathrm{Cok}(\mathrm{Hom}_A(p, {}_AA)), k),$$

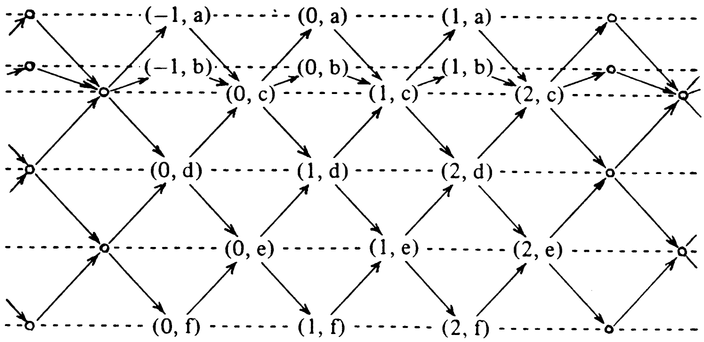
wie Auslander und Reiten [2] gezeigt haben. Eine entsprechende Formel erhält man auch für τ^{-1}. Die Auslander-Reiten-Translation τ und ihr Inverses τ^{-1} sind sicher das wichtigste Hilfsmittel zur Konstruktion neuer unzerlegbarer Moduln, wenn schon andere unzerlegbare Moduln bekannt sind.

2 Periodische Moduln

Wir haben gesehen, daß die transjektiven Moduln einer Algebra A (jedenfalls im Prinzip) konstruierbar sind, da die entsprechenden τ-Orbiten projektive und injektive Moduln enthalten. Für die periodischen Moduln gibt es kein so einfaches Konstruktionsverfahren. Andererseits stellt sich heraus, daß der volle Unterköcher $\Gamma_p(A)$ des Auslander-Reiten-Köchers, der aus den periodischen Moduln besteht, eine besonders einfache Struktur besitzt. Dazu wollen wir geeignete Modelle von Translationsköchern bereitstellen. Für jeden Baum Δ konstruieren wir einen Translationsköcher $\mathbf{Z}\Delta$ wie folgt: Als Punkte von $\mathbf{Z}\Delta$ nehmen wir die Paare (z, a), mit $z \in \mathbf{Z}$ und a Punkt von Δ. Um die Pfeile von $\mathbf{Z}\Delta$ zu definieren, wählen wir zuerst eine feste Orientierung auf Δ, und nehmen dann für jeden Pfeil $a \to b$ in Δ Pfeile der Form $(z, a) \to (z, b)$ und $(z, b) \to (z + 1, a)$, für alle $z \in \mathbf{Z}$. Schließlich setzen wir $\tau(z, a) = (z - 1, a)$, für alle $z \in \mathbf{Z}$ und alle a. Es ist leicht zu sehen, daß $\mathbf{Z}\Delta$ nicht von der auf Δ gewählten Orientierung abhängt. Wenn wir zum Beispiel mit dem Baum

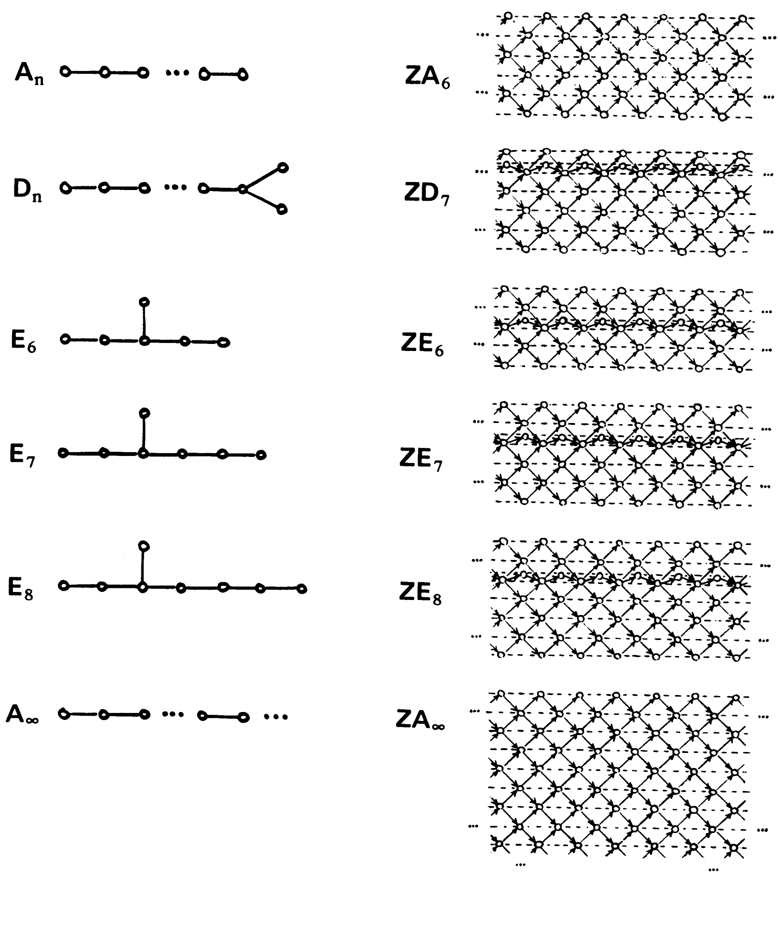


beginnen, so erhalten wir als **Z**Δ den folgenden Translationsköcher:



Satz *Sei* A *eine endlich-dimensionale Algebra. Jede Zusammenhangskomponente von* $\Gamma_p(\mathrm{A})$ *ist von der Form* **Z**Δ/G, *wobei* G *eine nicht-triviale Automorphismengruppe von* **Z**Δ *ist, und* Δ *einer der Bäume* $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{D}_n$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$, *oder* $\mathbf{A}_\infty$.

Dabei sind $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{D}_n$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$ die wohlbekannten Dynkin-Diagramme, und wir zeigen rechts einige **Z**Δ:

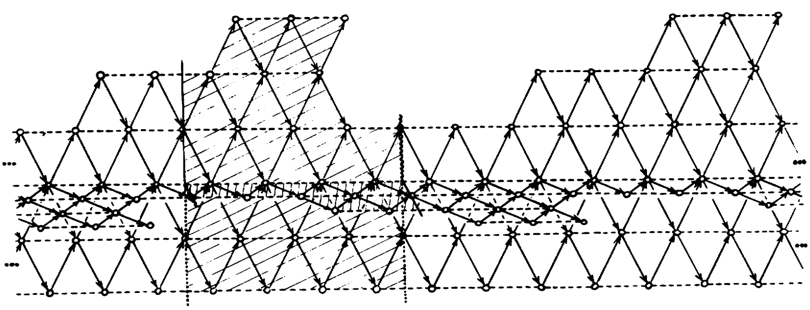


Ist A darstellungsendlich, so kann natürlich der Fall $\mathbf{A}_\infty$ nicht auftreten. In unserem Beispiel A_1 ist $\Gamma_p(A_1)$ zusammenhängend und von der Form $\mathbf{Z}\mathbf{D}_5/G$. Beim Vier-Unterraum-Problem A_2 entsteht $\Gamma_p(A_2)$ aus $\Gamma(A_2)$ durch Weglassen der präprojektiven und der präinjektiven Komponente; die Komponenten von $\Gamma_p(A_2)$ sind von der Form $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty/\langle\tau\rangle$ oder $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty/\langle\tau^2\rangle$.

Die Konstruktion von $\mathbf{Z}\Delta$, und der Satz im Fall einer darstellungsendlichen Algebra gehen auf Riedtmann [18] zurück; der allgemeine Fall wurde zuerst von Todorov [24] betrachtet, das vollständige Ergebnis ist einer gemeinsamen Arbeit mit Happel und Preiser [13] entnommen. Der Beweis des Satzes kann rein kombinatorisch geführt werden. Betrachtet werden sogenannte additive oder subadditive Funktionen auf Bäumen, und man erhält auf diese Weise eine Charakterisierung sowohl der Dynkin-Diagramme als auch der erweiterten Dynkin-Diagramme.

3 Universelle Überlagerung

Wir haben implizit schon Überlagerungen verwendet: es ist klar, daß $\mathbf{Z}\Delta$ gerade die universelle Überlagerung von $\mathbf{Z}\Delta/G$ ist. Ich erinnere daran, daß wir jeden Translationsköcher als Flächenkomplex auffassen können. Zu jedem zusammenhängenden Flächenkomplex C gibt es einen einfach-zusammenhängenden Flächenkomplex $\tilde{C}$, die universelle Überlagerung von C, auf dem die Fundamentalgruppe G von C operiert, sodaß $C = \tilde{C}/G$ gilt. Falls nun C zu einem Translationsköcher gehört, so ist klar, daß man auch $\tilde{C}$ wieder als Translationsköcher auffassen kann, so daß die Überlagerungsabbildung $\tilde{C} \to C$ eine Abbildung von Translationsköchern wird [18], [5]. Ist also A eine endlich-dimensionale Algebra, so können wir die universelle Überlagerung $\tilde{\Gamma}(A)$ des Auslander-Reiten-Köchers $\Gamma(A)$ konstruieren. Im Fall der Algebra A_1 erhalten wir für $\tilde{\Gamma}(A_1)$



Links ist ein Fundamentalbereich angedeutet. Es gilt nun:

Satz (Bongartz-Gabriel) *Ist* A *eine darstellungsendliche Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so ist* $\tilde{\Gamma}(A)$ *der Auslander-Reiten-Köcher einer lokal-beschränkten Algebra* $\tilde{A}$.

Dabei verstehen wir unter einer lokal-beschränkten Algebra B eine Algebra mit einer Menge $\{e_i \mid i \in I\}$ von Idempotenten, so daß $B = \bigoplus_{i,j \in I} e_i B e_j$ gilt, und daß alle Ideale Be_iB $(i \in I)$ endlich-dimensional sind. Offensichtlich besitzt B nur dann ein Einselement, wenn B selbst endlich-dimensional ist. Für einen B-Modul M setzen wir voraus, daß $M = \bigoplus_{i \in I} e_i M$ gilt (und natürlich, daß M endlich-dimensional ist). Es ist nicht schwer zu sehen, daß auch für lokal-beschränkte Algebren die Auslander-Reiten-Verschiebung τ definiert ist, so daß man auch hier den Auslander-Reiten-Köcher betrachten kann.

Wir setzen jetzt voraus, daß A eine darstellungsendliche Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist. Wie erhält man nun $\tilde{A}$ aus $\tilde{\Gamma}(A)$? Für jeden Translationsköcher Γ kann man nach Riedtmann die sogenannte Maschenkategorie $k(\Gamma)$ definieren: Objekte der Kategorie seien die Punkte von Γ. Wir bilden zuerst die Wegekategorie zu Γ, hier ist die Menge der Morphismen vom Punkt a zum Punkt b durch den k-Vektorraum mit Basis die Menge aller Wege von a nach b gegeben. Für jede Masche

$$\begin{tikzcd}
 & y_1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
\tau z \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_r"'] & \vdots & z \\
 & y_r \arrow[ur, "\alpha_r"'] &
\end{tikzcd}$$

betrachten wir die Maschenrelation $\sum_{i=1}^{r} \beta_i \alpha_i = 0$. Die Maschenkategorie $k(\Gamma)$ entsteht nun aus der Wegekategorie, in dem wir alle Maschenrelationen herausfaktorisieren. Für eine darstellungsendliche Algebra A hat die Maschenkategorie $k(\Gamma(A))$ offensichtlich sehr viel Ähnlichkeit zur Kategorie ind(A) der unzerlegbaren A-Moduln; allerdings sind Beispiele (in Charakteristik 2) bekannt, wo die Kategorien $k(\Gamma(A))$ und ind(A) nicht äquivalent sind [19]. Es ist leicht zu sehen, daß $k(\Gamma(A))$ und ind(A) zumindest dann äquivalent sind, wenn es keine orientierten Kreise in $\Gamma(A)$ gibt. Um $\tilde{A}$ zu konstruieren, nimmt man nun Idempotente e_a für alle projektiven Punkte a von $\tilde{\Gamma}(A)$ (dabei heißt ein Punkt eines Translationsköchers projektiv, falls für ihn τ nicht definiert ist), und setzt für $e_a \tilde{A} e_b$ den Raum aller Homomorphismen von a nach b in $k(\tilde{\Gamma}(A))$. Dies definiert, mit der offensichtlichen Multiplikation, eine Algebra $\tilde{A} = \oplus e_a \tilde{A} e_b$, und man muß nun zeigen, daß $\tilde{A}$ lokal-endlich-dimensional ist, und daß wirklich $\tilde{\Gamma}(A) = \Gamma(\tilde{A})$ gilt.

Ein direktes Verfahren, um $\tilde{A}$ aus A zu gewinnen, ist kürzlich von Bretscher und Gabriel [7] vorgestellt worden. Falls A die Wegealgebra eines Köchers Σ modulo eines von Monomen erzeugten Ideals ist, so erhält man $\tilde{A}$ ganz einfach dadurch, daß man die universelle Überlagerung $\tilde{\Sigma}$ von Σ bildet, und mit den entsprechenden Relationen versieht [9]. Dies können wir im Fall unserer Algebra A_1 anwenden: sie ist die Wegealgebra des Köchers $\begin{tikzcd}\circ \arrow[r, "\alpha"] & \circ \arrow[loop right, "\beta"]\end{tikzcd}$ modulo des von den Monomen β^4 und $\beta^2\alpha$ erzeugten Ideals, also ist $\tilde{A}$ die Wegealgebra der universellen Überlagerung

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \cdots \\
 & \circ & \circ \arrow[l, "\beta"] & \circ \arrow[l, "\beta"] & \circ \arrow[l, "\beta"] & \circ \arrow[l, "\beta"] & \circ \arrow[l, "\beta"] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

mit den Relationen $\beta^4 = \beta^2\alpha = 0$.

Was passiert mit einem unzerlegbaren A-Modul M beim Übergang zur universellen Überlagerung? Wohlgemerkt, wir haben ja nur den Translationsköcher $\Gamma(A)$ überlagert, dem Modul M entspricht in $\Gamma(A)$ ein einziger Punkt, nämlich [M], und unter der Überlagerungsabbildung $\pi:\tilde{\Gamma}(A) \to \Gamma(A)$ ist [M] das Bild einer Reihe von Punkten, nämlich gerade der Punkte in einer Bahn der Überlagerungsgruppe, also der Fundamentalgruppe von $\Gamma(A)$. Jedes solche Urbild kann, nach dem Satz von Bongartz und Gabriel, wieder als Isomorphieklasse eines unzerlegbaren Moduls, nämlich eines $\tilde{A}$-Moduls, aufgefaßt werden, und wir wählen nun einen derartigen unzerlegbaren $\tilde{A}$-Modul $\tilde{M}$, also mit $\pi([\tilde{M}]) = [M]$. Wir wollen nun die beiden Moduln M und $\tilde{M}$ miteinander vergleichen. Es erscheint vorteilhaft, feste Repräsentanten der Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln zu wählen, und als Punkte der Auslander-Reiten-Köcher diese Moduln selbst zu nehmen; wenn wir im weiteren von unzerlegbaren Moduln sprechen, meinen wir diese Repräsentanten. Ist nun neben M ein weiterer unzerlegbarer A-Modul N gegeben, so gibt es funktorielle Isomorphismen

$$\bigoplus_X \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(X, \tilde{M}) \to \mathrm{Hom}_A(N, M), \quad \text{und}$$

$$\bigoplus_X \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}\ X) \to \mathrm{Hom}_A(M, N),$$

wobei links die Summe jeweils über alle Urbilder X von N unter π zu bilden ist. Wir wollen den ersten Isomorphismus im Fall, daß N projektiv ist, näher betrachten. Wir können, entsprechend den klassischen Morita-Sätzen, voraussetzen, daß sowohl ${}_AA$, als auch ${}_{\tilde{A}}\tilde{A}$ direkte Summen von paarweise nicht-isomorphen unzerlegbaren Moduln sind. Sei etwa ${}_AA = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, mit P_i unzerlegbar (und projektiv). Dann sind die Urbilder der verschiedenen P_i unter π gerade die projektiven Punkte von $\tilde{\Gamma}(A) = \Gamma(\tilde{A})$, also die unzerlegbaren projektiven $\tilde{A}$-Moduln. Wir können M mit $\mathrm{Hom}_A({}_AA, M) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_A(P_i, M)$ identifizieren, also erhalten wir Vektorraum-Isomorphismen

$$M \approx \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_A(P_i, M) \approx \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{\pi(X)=P_i} \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(X, \tilde{M}) \approx \tilde{M}.$$

Die Räume $\mathrm{Hom}_A(P_i, M)$ sind die sogenannten isotypischen Komponenten des Moduls M, ihre Dimension ist nichts anderes als $(\underline{\dim}\, M)_i$, wenn wir mit S_i den einfachen Restklassenmodul von P_i bezeichnen. Wir sehen also, daß M als Vektorraum mit $\tilde{M}$ identifiziert werden kann, und daß dabei jede isotypische Komponente von M der direkten Summe gewisser isotypischer Komponenten von $\tilde{M}$ entspricht.

Betrachten wir als Beispiel die drei in der Einleitung angegebenen unzerlegbaren A_1-Moduln mit Dimensionsvektor (2, 6). Urbilder dieser drei Moduln unter der Überlagerungsabbildung π sind, in der angegebenen Reihenfolge, die $\tilde{A}_1$-Moduln

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & k \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]}"] & k \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}"] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[l, dash] & k^2 \arrow[l] & k^2 \arrow[l, "{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]}"'] & k \arrow[l, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"'] & k \arrow[l, "{[1]}"'] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & k \arrow[d, "{[1]}"] & k \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]}"] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[l, dash] & k \arrow[l] & k^2 \arrow[l, "{[1\ 0]}"'] & k^2 \arrow[l, "{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]}"'] & k \arrow[l, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"'] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & k \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]}"] & k \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}"] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[l, dash] & k \arrow[l] & k^2 \arrow[l, "{[1\ 0]}"'] & k^2 \arrow[l, "{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]}"'] & k \arrow[l, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"'] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Wir sehen, daß die drei $\tilde{A}_1$-Moduln schon durch ihre Dimensionsvektoren unterschieden sind. Wie erhält man aus einem unzerlegbaren $\tilde{A}_1$-Modul $\tilde{M}$ den A_1- Modul $\pi(\tilde{M})$? Der Modul $\tilde{M}$ ist gegeben durch Vektorräume und lineare Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
 & U_{-1} \arrow[d, "\alpha_{-1}"] & U_0 \arrow[d, "\alpha_0"] & U_1 \arrow[d, "\alpha_1"] & U_2 \arrow[d, "\alpha_2"] & \\
\cdots & V_{-1} \arrow[l] & V_0 \arrow[l, "\beta_{-1}"'] & V_1 \arrow[l, "\beta_0"'] & V_2 \arrow[l, "\beta_1"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

wobei natürlich nur endlich viele dieser Vektorräume $\neq 0$ sind. Bilde $U = \oplus U_i$, $V = \oplus V_i$, $\alpha = \oplus \alpha_i : U \to V$, und $\beta : V \to V$ sei die durch die verschiedenen β_i definierte Abbildung. Wir erhalten auf diese Weise $U \xrightarrow{\alpha} V \circlearrowright \beta$, und dies ist natürlich ein A_1-Modul.

Wir wollen abschließend eine ziemlich offensichtliche, aber äußerst wichtige Eigenschaft der universellen Überlagerung $\tilde{\Gamma}(A)$ herausstellen: $\tilde{\Gamma}(A)$ besitzt keine orientierten Kreise, ist also gerichtet. Die Untersuchung einer darstellungsendlichen Algebra A hat uns zu einer Algebra $\tilde{A}$ geführt, deren Auslander-Reiten-Köcher gerichtet ist. Nun ist zwar $\tilde{A}$ selbst nicht endlich-dimensional, aber beim Studium einzelner $\tilde{A}$-Moduln $\tilde{M}$ können wir statt $\tilde{A}$ die sogenannte Trägeralgebra $\tilde{A}(\tilde{M}) = \tilde{A}/\langle e \mid e^2 = e, e\tilde{M} = 0\rangle$ von $\tilde{M}$ betrachten, die endlich-dimensional und darstellungsendlich ist, und deren Auslander-Reiten-Köcher wie der von $\tilde{A}$ gerichtet ist. Die Trägeralgebra der beiden ersten soeben betrachteten $\tilde{A}_1$-Moduln ist die Wegealgebra des Köchers

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[d] & \circ \arrow[d] & & \\
\circ & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(ohne Relationen), die des dritten ist gegeben durch den Köcher

$$\begin{tikzcd}
& \circ \arrow[d] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \\
\circ & \circ \arrow[l, "\beta_1"'] & \circ \arrow[l, "\beta_2"'] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd} \quad \text{mit } \beta_1\beta_2\alpha = 0.$$

4 Algebren mit gerichtetem Auslander-Reiten-Köcher

Wir betrachten eine endlich-dimensionale darstellungsendliche Algebra A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, und setzen nun zusätzlich voraus, daß der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A)$ gerichtet ist, also keine orientierten Kreise besitzt. Als erstes sehen wir, daß in diesem Fall jeder unzerlegbare A-Modul durch seinen Dimensionsvektor $\underline{\dim}$ M, also die Vielfachheiten der einzelnen Kompositionsfaktoren eindeutig charakterisiert ist:

Satz *Sind* M, M′ *unzerlegbare* A-*Moduln mit* $\underline{\dim}\, M = \underline{\dim}\, M'$, *so sind* M *und* M′ *isomorph.*

Dies wurde gemeinsam mit Happel [14] mit Hilfe der sogenannten Kipptheorie bewiesen; ein analoges Ergebnis steht bei Bautista-Larrion [3]. Mittlerweile gibt es einen direkten Beweis von Happel [12].

Wir wollen nun die Menge der Dimensionsvektoren der unzerlegbaren A-Moduln kombinatorisch beschreiben, und daraus Folgerungen über die Struktur der unzerlegbaren Moduln ziehen. Wir gehen davon aus, daß unsere Algebra A genau n einfache Moduln $S_1, \ldots, S_n$ besitzt, die Dimensionsvektoren sind also n-Tupel ganzer Zahlen. Die Menge $\mathbf{Z}^n$ aller ganzzahligen n-Tupel können wir als die Grothendieck-Gruppe $G_0(A)$ auffassen, die folgendermaßen definiert ist: wir bilden die freie abelsche Gruppe F mit Basis die Menge aller A-Moduln, und betrachten die von den Elementen $M' - M + M''$, mit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Folge von A-Moduln, erzeugte Untergruppe R. Es ist $G_0(A) = F/R$, und nach dem Satz von Jordan-Hölder bilden die Restklassen $S_i + R$ der einfachen Moduln eine Basis von $G_0(A)$. Unter Verwendung dieser Basis wollen wir $G_0(A)$ mit $\mathbf{Z}^n$ identifizieren; die Restklasse des Moduls M in $G_0(A)$ ist dann gerade $\underline{\dim}$ M. Die nicht-trivialen n-Tupel nicht-negativer ganzer Zahlen nennen wir positiv, es sind dies die Dimensionsvektoren der Moduln $\neq 0$. Da wir voraussetzen, daß A einen gerichteten Auslander-Reiten-Köcher besitzt, hat A endliche globale Dimension gl. dim A, und wir können auf $G_0(A)$ eine Bilinearform vermöge

$$\langle \underline{\dim}\, M, \underline{\dim}\, N \rangle = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(M, N)$$

definieren (dabei steht Ext^0 für Hom, und die langen exakten Hom-Sequenzen zeigen, daß dieses Produkt wohldefiniert und bilinear ist). Wir bezeichnen mit q_A die zugehörige quadratischen Form, also $q_A(x) = \langle x, x \rangle$. Für die im letzten Abschnitt betrachteten Trägeralgebren notieren wir deren quadratische Form: zur Wegealgebra des Köchers (ohne Relationen)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & 2 \arrow[d] & & \\ 3 & 4 \arrow[l] & 5 \arrow[l] & 6 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

gehört die quadratische Form

$$\sum_{i=1}^{6} X_i^2 - X_1X_3 - X_2X_4 - X_3X_4 - X_4X_5 - X_5X_6,$$

zum Köcher

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d] & 2 \arrow[d, "\alpha"] & \\ 3 & 4 \arrow[l, "\beta_1"'] & 5 \arrow[l, "\beta_2"'] & 6 \arrow[l] \end{tikzcd} \quad \text{mit } \beta_1\beta_2\alpha = 0$$

gehört die quadratische Form

$$\sum_{i=1}^{6} X_i^2 - X_1X_4 - X_2X_5 - X_3X_4 - X_4X_5 - X_5X_6 + X_2X_3.$$

Da wir voraussetzen, daß $\Gamma(A)$ gerichtet ist, ist offensichtlich für jeden unzerlegbaren Modul M einerseits $\mathrm{End}(M) = k$, andererseits $\mathrm{Ext}^i(M, M) = 0$ für $i \geq 1$, also ist $\underline{\dim}\, M$ eine positive Wurzel von q_A (dabei nennen wir jede Lösung von $q_A(x) = 1$ eine Wurzel von q_A). Im allgemeinen ist nicht jede positive Wurzel auch Dimensionsvektor eines unzerlegbaren Moduls. Setzen wir jedoch einschränkend voraus, daß die globale Dimension von A klein ist, so haben wir:

Satz *Falls* gl. dim. $A \leq 2$, *so ist* q_A *schwach positiv, und die Dimensionsvektoren der unzerlegbaren Moduln sind genau die positiven Wurzeln von* q_A.

Dabei heißt eine quadratische Form q schwach positiv, falls für alle positiven x gilt $q(x) > 0$. Der Beweis dieses Satzes aus [14] soll hier kurz angedeutet werden. Sei ein positives $x \in \mathbf{Z}^n$ gegeben. Wähle einen Modul X mit $\underline{\dim}\, X = x$ und kleinst-möglicher Dimension von End(X). Sei $X = \oplus X_i$, mit X_i unzerlegbar. Nach [20] gilt wegen der Minimalität von dim End(X), daß $\mathrm{Ext}^1(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$. Da wir auch wissen, daß $\mathrm{Ext}^1(X_i, X_i) = 0$ für alle i gilt, haben wir $\mathrm{Ext}^1(X, X) = 0$. Also ist

$$q_A(x) = \dim \mathrm{End}(X) + \dim \mathrm{Ext}^2(X, X) > 0,$$

und aus $q_A(x) = 1$ folgt, daß $\mathrm{End}(X) = k$ (und $\mathrm{Ext}^2(X, X) = 0$) gilt, also ist X unzerlegbar.

Die Voraussetzung des Satzes ist nicht so einschneidend, wie sie erscheinen mag. Es gilt nämlich:

Lemma *Falls* A *einen unzerlegbaren Modul* M *besitzt, der jeden einfachen Modul als Kompositionsfaktor enthält (einen sogenannten aufrichtigen Modul), so ist* gl. dim. $A \leqslant 2$.

B e w e i s. Angenommen, $\mathrm{Ext}^3(X, Y) \neq 0$ für gewisse unzerlegbare Moduln X, Y. Wähle exakte Sequenzen $0 \to X' \to P \to X \to 0$ und $0 \to Y \to I \to Y' \to 0$ mit P projektiv, I injektiv. Dann ist $\mathrm{Ext}^1(X', Y') = \mathrm{Ext}^3(X, Y) \neq 0$, also gibt es eine nichtzerfallende exakte Sequenz $0 \to Y' \to Z \to X' \to 0$. Es ist nun leicht, einen orientierten Kreis in $\Gamma(A)$ zu konstruieren, indem man Abbildungen

$$M \to I \to Y' \to Z \to X' \to P \to M$$

betrachtet, und zu geeigneten direkten Summanden der angegebenen Moduln übergeht, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\Gamma(A)$ gerichtet ist.

Wir sehen also, daß man beim Studium einzelner unzerlegbarer A-Moduln M immer voraussetzen kann, daß gl. dim. $A \leqslant 2$ gilt, indem man A durch die Trägeralgebra A(M) ersetzt.

Wir können nun den folgenden, ziemlich überraschenden Satz von Ovsienko [17] über ganze quadratische Formen anwenden (dabei heißt eine quadratische Form q auf $\mathbf{Z}^n$ ganz, falls sie ganzzahlige Werte annimmt, und zusätzlich die kanonischen Basisvektoren von $\mathbf{Z}^n$ Wurzeln sind; unsere quadratische Form q_A ist natürlich ganz, denn die kanonischen Basisvektoren von $\mathbf{Z}^n$ sind gerade die Dimensionsvektoren der einfachen Moduln):

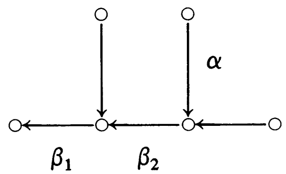
Satz (Ovsienko) *Ist* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *positive Wurzel einer schwach positiven ganzen quadratischen Form, so gilt* $x_i \leqslant 6$ *für alle* i.

Daß der Wert 6 wirklich angenommen wird, sieht man an der längsten Wurzel der quadratischen Form zum Dynkin-Diagramm $\mathbf{E}_8$.

Folgerung *Ist* M *ein unzerlegbarer* A*-Modul, so ist die Vielfachheit jedes einfachen* A*-Moduls als Kompositionsfaktor von* M *durch* 6 *nach oben beschränkt.*

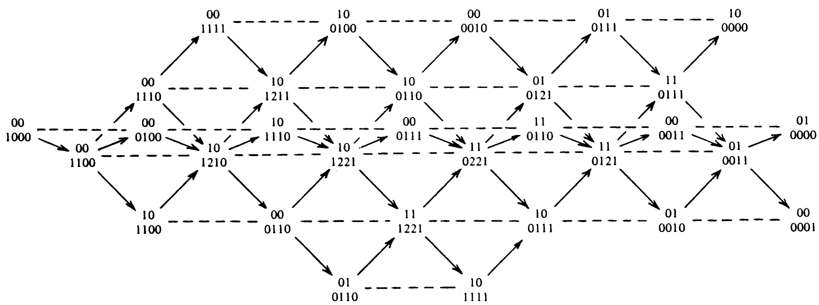
Ohne Verwendung des Satzes von Ovsienko wurde dies von Bongartz in [4] bewiesen. Es folgt ziemlich unmittelbar, daß es zu vorgegebenem n nur endlich viele Morita-Äquivalenzklassen endlich-dimensionaler darstellungsendlicher Algebren mit gerichtetem Auslander-Reiten-Köcher und n einfachen Moduln geben kann [5], denn einerseits ist eine solche Algebra durch ihren Auslander-Reiten-Köcher bis auf Morita-Äquivalenz eindeutig bestimmt, andererseits gibt es nur endlich viele Translationsköcher mit höchstens 7^n Punkten.

Abschließend bemerken wir, daß sich der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A)$ sehr einfach berechnen läßt, man kann ihn von links nach rechts mühelos „stricken“. Dabei bildet man induktiv für jede Masche den entsprechenden Cokern, und fügt, falls ein gerade neu konstruierten Modul direkter Summand des Radikals eines unzerlegbaren projektiven Moduls P ist, diesen Modul P ein. Begonnen wird mit den einfachen projektiven Moduln, dies sind gerade die Quellen von $\Gamma(A)$. Da die unzerlegbaren Moduln schon durch ihren Dimensionsvektor eindeutig charakterisiert sind, genügt es, statt mit Moduln mit Dimensionsvektoren zu arbeiten; die Cokernbildung wird also ersetzt durch eine leichte Subtraktionsaufgabe. Zum Beispiel erhalten wir für



mit $\beta_1 \beta_2 \alpha = 0$

den folgenden Auslander-Reiten-Köcher:



und man sieht, daß dies ein voller Unterköcher von $\mathbf{Z}\mathbf{E}_6$ ist.

5 Ausblick

Ich fasse zusammen: ausgehend von einer endlich-dimensionalen darstellungsendlichen Algebra A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k konstruiert man eine lokal-beschränkte Algebra $\tilde{A}$, auf der eine Gruppe G operiert, so daß man den Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A)$ als $\Gamma(\tilde{A})/G$ erhält. Da man den Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(\tilde{A})$ von $\tilde{A}$ völlig mühelos berechnen kann, erhält man auf diese Weise ein effektives Hilfsmittel zur Bestimmung auch von $\Gamma(A)$ selbst. Jedem unzerlegbaren A-Modul M entspricht auf diese Weise eine G-Bahn unzerlegbarer $\tilde{A}$-Moduln $\tilde{M}$, und man kann an $\tilde{M}$ viele Eigenschaften des Moduls M ablesen. Um $\tilde{M}$ zu studieren, wird man üblicherweise zur Trägeralgebra $\tilde{A}(\tilde{M})$ übergehen, und es zeigt sich, daß die möglichen Trägeralgebren $\tilde{A}(\tilde{M})$ vollständig klassifiziert werden können [4].

In diesem Bericht habe ich versucht, einen kleinen Einblick in die Methoden und Ergebnisse der neueren Darstellungstheorie zu geben. Ich habe mich dabei im wesentlichen auf darstellungsendliche Algebren über algebraisch abgeschlossenen Grundkörpern beschränkt, doch auch hier mußte ich vieles ausklammern, was von Interesse gewesen wäre, wie weitergehende Strukturaussagen für die Auslander-Reiten-Köcher, das Zurückführen der Moduln über Algebren mit gerichtetem Auslander-Reiten-Köcher auf Moduln über erblichen Algebren, und die Frage nach multiplikativen Basen für Algebren und Moduln. Auch ist für spezielle Klassen von darstellungsendlichen Algebren, zum Beispiel für die selbstinjektiven, mittlerweile eine vollständige Klassifikation sowohl der Algebren, als auch ihrer Moduln bekannt. Nicht erwähnt habe ich die Probleme, die auftreten, wenn der Grundkörper nicht algebraisch abgeschlossen ist, oder wenn man allgemeiner Moduln über artinschen Ringen betrachtet: hier spielen Schiefkörpererweiterungen vom Index 2 und 3 eine wichtige Rolle. Entfernt man sich vom darstellungsendlichen Fall, so treten völlig andersartige Phänomene auf, die gegenwärtig intensiv studiert werden. Doch auch hier ist die Struktur des Auslander-Reiten-Köchers von größtem Interesse, auch hier reduzieren sich viele Fragestellungen letztendlich auf kombinatorische Probleme.

Literaturverzeichnis

[1] Auslander, M.: Applications of morphisms determined by objects. Proc. Conf. Rep. Theory, Philadelphis 1976. Marcel Dekker 1978, 245–327

[2] Auslander, M.; Reiten, I.: Representation theory of artin algebras. III. Comm. Algebra **3** (1975) 239–294; IV. Comm. Algebra **5** (1977) 443–518

[3] Bautista, R.; Larrion, F.: Auslander-Reiten quivers for certain algebras of finite representation type. Erscheint in J. London Math. Soc.

[4] Bongartz, K.: Treue einfach zusammenhängende Algebren I. Comment. Math. Helv. **57** (1982) 282–330

[5] Bongartz, K.; Gabriel, P.: Covering spaces in representation theory. Invent. math. **65** (1982) 331–378

[6] Brenner, S.: Decomposition properties of some small diagrams of modules. Symposia Math. Ist. Naz. Alta Mat. **13** (1974) 127–141

[7] Bretscher, O.; Gabriel, P.: The standard form of a representation finite algebra. Prepr.

[8] Gabriel, P.: Auslander-Reiten sequences and representation finite algebras. Representation theory I. Springer 1980. = LNM 831, 1–71

[9] Gabriel, P.: The universal cover of a representation finite algebra. Representations of algebras, Springer 1982. = LNM 903, 68–105

[10] Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung II. Berlin 1966

[11] Gelfand, I. M.; Ponomarev, V. A.: Problems of linear algebra and classification of quadruples in a finite dimensional vector space. Coll. Math. Soc. Bolyai **5**, Tihany (1970) 163–237

[12] Happel, D.: Composition factors for indecomposable modules. Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982) 29–32

[13] Happel, D.; Preiser, U.; Ringel, C. M.: Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with application to DTr-periodic modules. Representation theory II. Springer 1980. = LNM 832, 280–294

[14] Happel, D.; Ringel, C. M.: Tilted algebras. Erscheint in Trans. Amer. Math. Soc.

[15] Kronecker, L.: Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen. Sitzungsber. Akad. Berlin (1890), 1225–1237

[16] Nazarova, L. A.: Representations of quadruples. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **31** (1967) 1361–1377

[17] Ovsienko, S. A.: Integral weakly positive forms. Schur matrix problems and quadratic forms. Preprint Kiev 1978, 3–17

[18] Riedtmann, Chr.: Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück. Comment. Math. Helv. **55** (1980) 199–224

[19] Riedtmann, Chr.: Many algebras with the same Auslander-Reiten quiver. Preprint.

[20] Ringel, C. M.: The rational invariants of tame quivers. Invent. math. **58** (1980) 217–239

[21] Ringel, C. M.: Report on the Brauer-Thrall conjectures: Rojter's theorem and the theorem of Nazarova and Rojter. Representation theory I. Springer 1980. = LNM 831, 104–136

[22] Ringel, C. M.: Tame algebras. Representation theory I. Springer 1980. = LNM 831, 137–287

[23] R o j t e r , A. V.: The unboundedness of the dimension of the indecompasable representation of algebras that have an infinite number of indecomposable representations. Izv. Acad. Nauk SSR **32** (1968) 1275–1282

[24] T o d o r o v , G.: Almost split sequences for TrD-periodic modules. Representation Theory II. Springer 1980. = LNM 832, 600–631

Claus Michael Ringel
Fakultät für Mathematik
Universität
Postfach 8640
D-4800 Bielefeld

(*Eingegangen*: 16. 7. 1982)

Buchbesprechungen

Jacobs, K., Measure and Integral (with an appendix by Kurzweil, J.) (Probability and Mathematical Statistics, A Series of Monographs and Textbooks) New York – San Francisco – London: Academic Press 1978, xv + 575 pp, cloth, $ 55.00

A standard upper level introductory course in measure and intergration theory as offered today in numerous universities around the world contains, generally, as its core, the following chapters: (1) Construction of measures and integrals and their convergence properties (e.g. Lebesgue's dominated convergence theorem); (2) the so-called Radon-Nikodým type theorems; (3) measures in product spaces and Fubini-Tonelli typę theorems. The core is usually completed by discussions of (4) L^p-spaces, (5) properties of Lebesgue measure in $\mathbf{R}^n$ and often (6) Haar measure on general locally compact groups. This is, in most cases, more than sufficient material to take up the time allotted for the course. Beyond this, there is a vast and varied list of themes that can be (and that are) studied in advanced seminars and specialized courses. Some of these, in arbitrary order, are: lifting theory, differentiation theory, vector valued measures, measurable selection and section theory, capacitability, Choquet theory, Lusin and Souslin spaces, finitely additive measures, cylinder measures, projective limits, weak convergence theory, ergodic theory, stochastic integrals, surface area theory, Hausdorff measures, Denjoy-Perron integrals etc. Certain other topics in probability theory, potential theory, harmonic analysis and functional analysis can also be considered as specialized chapters of measure and integration theory. Thus, the prospective writer for a new book in this area has „un embarras de choix" both as regards material and the manner of presentation. Strangely enough, however, most (but fortunately, not all) of the recent books in measure and integration theory restrict themselves to the much trodden route described by (1)–(6) above. One merit of the present volume by Prof. Jacobs is to have gone much beyond and to have tried to incorporate some of the relatively recent material in his text.

A brief description of the contents of the book can be given as follows. Three chapters each are devoted to (1) and (2) and one to each one of the topics (3), (4), and (6). Two chapters deal with special properties of measures in topological spaces (regularity, weak convergence) and one chapter is devoted to each one of the following: ergodic theorem, capacitability and analytic sets, entropy, Choquet and Krein-Milman theorems, lifting. These sixteen chapters are preceded by chapter 0 on basic notions and notations and two appendices, one written by Prof. Kurzweil on "The Perron-Ward integral and related concepts" and the other by the author himself on "Contents with given marginals". The first appendix gives a concise introduction to a subject which has not been very popular these days; it, however, does not mention Denjoy who was, one of the pioneers in this area. The second appendix is quite novel and describes a recent method for treating the problem mentioned in its title. The special theory in $\mathbf{R}^n$ is somewhat slighted throughout; it is used only in exercises as illustration and its deeper results are left entirely untouched.

As is well-known, measure theory can be treated from the point of view of set functions (a barbarous and absurd expression, unfortunately, so widely used in English that it would be hopeless on our part to try to banish it) or from that of linear functionals. The two are now equally well accepted in general as being two complementary and useful aspects of the same theory and Prof. Jacobs treats each in considerable detail. The presentation of this as well as the other material is geared to be helpful to those who want to start doing research in probability theory and ergodic theory. For example, conditional expectations, martingale convergence theory and the construction of Markov processes are presented in fair detail; weak convergence theory is made to yield a theorem of Skorohod establishing a relation between almost everywhere convergence and convergence in law and lifting theory is led to give a theorem on separable modifications of stochastic processes. A novel feature is the treatment of entropy theory by a method due to Hanen and Neveu and which has the advantage of being more general than the usual theory via finite or denumerable partitions.

The above tries to give the general flavour of the contents. As regards readability, we have the impression that the neophyte for whom the book is intended will find it very heavy going. Measure theory is notorious for its innumerable special definitions and technicalities and although the author promises in the preface to arrange things so that the reader knows "quickly" "where he is" the terse style of writing and elaborate cross references (of the type proposition I.4.7.5, exercise III.6.5.6, remark 12.12.3.3) will demand extremely attentive and certainly laborious reading on the part of the readers. In our opinion, the notation is often heavy (e.g. loc mble^b $(\Omega, \mathscr{B}^{00}, \mathbf{R})$) and sometimes inappropriate (e.g. the ω_0 and ω_1 sections of a set $F \subset \Omega_0 \times \Omega_1$ are denoted by $F_{\omega_0}, F_{\omega_1}, \omega_0 \in \Omega_0, \omega_1 \in \Omega_1$, p. 220 (2)). The terminology is also sometimes unusual e.g. σ-content prespace for a positive, countably additive measure on a ring of sets. Further, the author innovates the convention of using systematically the word measure for the linear functional situation and content for the set function one. With all regards that one may have for the Daniell-Bourbaki-Stone approach, this usurpation of the word "measure" seems unwarranted and certainly contrary to much current usage including that of the author himself in his well-known book „Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie" (Springer-Verlag, 1960).

In a book of this size and technicality, printing mistakes are not unexpected, howsoever disconcerting they may be to the inexperienced reader. It is not our intention to make a list of them here but we must point out a few flaws which go beyond the printer's devil. On p. 73, line 3, the equality $\tilde{m}(E) = m(E)$ is an error ($\tilde{m}$ being the outer measure induced by a finitely additive measure m on a ring and E being in the latter ring) which is corrected in theorem 2.2 p. 271 (which yields as corollary, theorem 2.6 p. 273 – a decomposition of the Bauer-Hewitt-Yoshida type). Corollary 1.12 p. 411 does not follow from theorem 1.11 p. 410 since the class of closed sets of an arbitrary topological space does not form a σ-compact class in general. The Vitali-Hahn-Saks theorem on p. 277 is proven for positive measures only whereas the full theorem is valid for complex valued (indeed Banach space valued) set functions and the proof required is quite different. We do not claim to have read the whole book with this much vigilant care but we point out these flaws to signal warnings to the potential readers as well as to the author for his future editions.

We must now come to our last important criticism of the book viz. its lack of historical remarks and organized guidance to the further literature. The selected bibliography itself at the end of the book is extensive and contains references to important papers, both recent and old. However, very little of it is actually cited in the text itself. Thus the above-mentioned Bauer-Hewitt-Yoshida theorem is given simply as theorem 2.6 on p. 273 with no references whatsoever to any of the three authors although the relevant articles appear in the bibliography. References to von Neumann on p. 433 for theorem 5.2 seem inappropriate; the relevant article is one that is not cited. No mention is made of Denjoy in the bibliography although Perron is there as also Henstock who however is nowhere referred to in the text. Brevity forbids me from multiplying such examples which however must be extremely misleading to the beginning research student who intends to learn his measure theory from here.

It is not an easy task to write a readable text on measure theory which at the same time covers new ground. Prof. Jacobs has made a heroic attempt to do so; the neophyte for whom the work is intended should profit from its careful perusal under the supervision of an experienced tutor.

Lausanne S. D. Chatterji

Krickeberg, K., Ziezold, H., Stochastische Methoden (Hochschultext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1979 (2te korrigierte Auflage), x + 201 S., DM 32,–

Dies Buch hat verdientermaßen rasch die 2. Auflage erreicht. Neben gediegener, anregender Stoffdarstellung bietet es einen Themenkanon, der zwischen theoretischer Gründlichkeit und Praxisnähe hervorragend ausgewogen ist. – Man kann „diskrete Stochastik" exakt als denjenigen Zweig der mathematischen Statistik definieren, der mit höchstens abzählbaren Wahrscheinlichkeitsräumen auskommt. Das vorliegende Buch bietet nicht reingezüchtete diskrete Stochastik, doch kann man die ersten 6 Kapitel (I. Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume II. Drei Grundverfahren der mathematischen Statistik III. Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit IV. Momente V. Statistische Inferenz über unbekannte Wahrscheinlichkeiten. VI. Grenzwertsätze) als einen auf etwas über 100 Seiten konzentrierten Grundkurs in diskreter Stochastik ansehen. Schon der dem I. Kapitel voraufgehende Einführungsparagraph schlägt gleichzeitig mit dem wahrscheinlichkeitstheoretischen das statistische Thema an, eine Kompositionsweise, von der das gesamte Buch profitiert. Monieren ließe sich: die Markoff-Modelle fehlen, von Informationstheorie wird zu wenig, über Momente fast zuviel gebracht. – Mit Kap. VII. Allgemeine Wahrscheinlichkeitstheorie. VIII. Statistik normalverteilter zufälliger Variabler. IX. Regressions- und Varianzanalyse stellt das Buch den Anschluß an die weiterführende, auf maßtheoretischer Grundlage arbeitende Literatur so her, daß der Leser mit einem praxisbezogenen Einstieg an sie herangehen kann. – Die Themen „Fluktuationstheorie", „Stochastische Felder", „nichtparametrische Statistik" werden, obwohl in der diskreten Stochastik weitgehend darstellbar, soweit ich sehe, gar nicht, das Thema „Shannon'sche Informationstheorie" nur andeutungsweise berührt. So bleibt Raum für andere Behandlungen der Aufgabe, die sich die Verfasser gestellt haben. Jede solche andere Behandlung kann aber nur profitieren, wenn sie sich die Darstellungsweise des vorliegenden Buches, insbesondere das Geschick, mit dem die Übungsaufgaben gewählt wurden, zum Vorbild nimmt. Ein rundum empfehlenswertes Kurz-Lehrbuch.

Erlangen K. Jacobs

Eberl, W., Moeschlin, O., Mathematische Statistik (de Gruyter Lehrbuch) Berlin – New York: de Gruyter 1982, viii + 294 S., gebunden, DM 58,–

Die Autoren behandeln grundlegende Fragestellungen aus der Mathematischen Statistik, das Schätzen (von Parametern) und das Testen (von Hypothesen über Parameter) betreffend, unter ausgiebiger Verwendung der Maßtheorie. Dabei werden die maßtheoretischen Hilfsmittel vorausgesetzt, wobei die benötigten Aussagen über bedingte Erwartungswerte und bedingte Verteilungen in einem Anhang zusammengestellt sind. Bemerkenswert ist, daß neben den klassischen (parametrischen) Schätz- und Testmethoden auch die Bayessche Theorie des Schätzens und Testens ausführlich behandelt wird. In diesem Zusammenhang wird auch auf Fragen der Zulässigkeit und Minimax-Verfahren eingegangen. Die Brücke zwischen Test- und Schätzmethoden schlagen die Autoren im Kapitel über Bereichsschätzungen, wobei hier auch das Konzept der minimalen mittleren Längen unter Verwendung von Korrespondenzen behandelt wird. Die dazu benötigten mathematischen Hilfsmittel sind in einem Anhang über Korrespondenzen (mit meßbarem Graphen) zusammengestellt. Den Spezialisten wird sicherlich interessieren, daß darüber hinaus auch die folgenden Resultate, die neuere oder zu Unrecht in der Lehrbuchliteratur bisher noch unberücksichtigte Ergebnisse darstellen, behandelt werden:

Existenz optimaler Tests im nicht dominierten Fall, das Kriterium von Neyman für Suffizienz im nicht dominierten Fall für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen sowie die Charakterisierung der Normalverteilung (Gaußverteilung) im nicht dominierten Fall durch Suffizienz des Stichprobenmittels für Translationsklassen. Ferner wird die Ungleichung von Chapman und

Robbins in Verallgemeinerung der Ungleichung von Fréchet, Cramèr und Rao behandelt und eine exakte Untersuchung der Frage nach der Gültigkeit des Gleichheitszeichens der letztgenannten Ungleichung dargestellt. Interessant sind auch die Ergebnisse zur Fraktilbestimmung bei gleichmäßig besten unverfälschten Tests in einparametrischen Exponentialfamilien für zweiseitige Testprobleme. Gleichmäßig beste unverfälschte Tests in mehrparametrischen Exponentialfamilien werden einem vorgegebenen begrenzten Umfang Rechnung tragend nicht behandelt. Ihre Untersuchung mit Hilfe „bedingter Tests" findet man in der zitierten Lehrbuchliteratur.

Das Buch ist allen mathematisch orientierten Lesern zu empfehlen, die an einer mathematischen Fundierung der Statistik interessiert sind.

Münster D. Plachky

Dinges, H., Rost, H., Prinzipien der Stochastik (Teubner Studienbücher) Stuttgart: Teubner Verlag 1982, 294 S., Kart., DM 34,–

Eine hervorragende Studentin sagte mir kürzlich: „Seit ich mich bei meiner Examensvorbereitung mit dem Nebenfach X beschäftige, weiß ich erst, was ich an der Mathematik habe". Einen ähnlichen Stoßseufzer wird vermutlich mancher maßtheoretisch trainierte Stochastiker gen Himmel senden, wenn er dies Buch liest: es wimmelt von mathematisch unsauberen Definitionen, Sätzen und sonstigen Aussagen (wie „Faustregeln", „Sprechweisen" u. dgl.), die allerdings löblicherweise praktisch stets als solche gekennzeichnet sind. Eine fatale Ausnahme: auf S. 41 kommt in einer Definition der für das ganze Buch fundamentale Begriff „Zufallsgröße" vor, der erstmals auf S. 11 in einem Nebensatz unter Bezugnahme auf die Vorstellung „Zufallsmechanismus" erwähnt wurde.

Wie man dem Vorwort, sowie zahlreichen, den Text begleitenden Anmerkungen entnehmen kann, haben sich die Autoren diesen Misch-Stil mit voller Absicht zueigen gemacht. Es kommt ihnen darauf an, daß der Leser „stochastisch denken" lernt und „Vorstellungen von der Reichweite stochastischer Argumente entwickelt". Die Verfasser betrachten „den Bezug auf einen bestimmten Bereich von Objekten als wesentlich" und suchen immer wieder „die Wege von der Modellbildung zur statistischen Prüfung von Hypothesen zu gehen"; „vormathematische Ideen und außermathematische Problemstellungen werden deshalb in unserem Buch in viel weiterem Umfange ernstgenommen, als es in Mathematikbüchern sonst üblich ist". Besondere Beachtung verdient ein Zitat aus einer didaktischen Arbeit von D. W. Müller. Auf S. 262 heißt es:

> Damit (scil. mit distanzierter Rationalität) ist ein Verhalten gegenüber Sachgegebenheiten gemeint, das sich nicht von deren etwaigen oder vermeintlichen Eigengesetzlichkeiten leiten läßt, sondern ihnen mit Entwürfen des Verstandes in Form von Modellen, Hypothesen, Arbeitshypothesen, Definitionen, Folgerungen, Alternativen, Analogien, also sozusagen aus der Distanz in der Weise partiellen, vorläufigen, approximativen Begreifens gegenübertritt. (Müller, D. W.: Thesen zur Didaktik der Mathematik. Math. phys. Sem.-Ber. **21** (1974) 164–169)

Die Autoren fahren dann fort:

> Wir sehen mit Müller die distanzierte Rationalität als einen generellen Grundzug anwendungsbezogenen mathematischen Denkens an. Wir wollen mathematische Theorien nicht als ein Resultat der Formalisierung von Eigengesetzlichkeiten eines Sachgebiets sehen, sondern als eigenständigen Entwurf in der Distanz zum Phänomen. Die Sachebene und die Entwurfsebene sind im mathematischen Denken als zwei Schichten zu trennen. Die distanzierte Rationalität verbietet ein Verschmelzen dieser Schichten; sie bewährt sich im Herstellen von vielfältigen Verbindungen. Auf der Sachebene muß eine präzise Wahrnehmung, auf der Entwurfsebene eine flexible eigengesetzliche Sprache gepflegt werden.

Nach meiner Meinung verlangt die Durchführung derartiger Programme ein geistiges Virtuosentum, das ich den Verfassern ohne weiteres zusprechen möchte. Die Frage ist, wer von diesem Virtuosentum lesend profitieren kann. Man sollte das ausprobieren. Meine vorläufige Meinung hierzu ist die folgende: das Buch ist ein vielseitiges und geistig hoch-anspruchsvolles Buch für Stochastik-Dozenten. Von der Zielsetzung her stößt es in eine im westdeutschen Stochastik-Leben von mir als bedauerlich empfundene Lücke hinein. Die historischen Anmerkungen und Klassiker-Zitate machen den Text zu einer Fundgrube für bildungshungrige Stochastiker. Dagegen glaube ich, daß nur wenige studentische Leser besagter Virtuosität lesend gewachsen sein werden; ein junger Mensch, der sich mit der Mathematik, und insbesondere mit der Stochastik erst vertraut machen will, wird es nur schwer ertragen, wenn ihm ständig jede vermeintliche Klarheit wieder aus der Hand geschlagen wird.

Das Inhaltsverzeichnis: Kap. I: Vom Abzählen zur Wahrscheinlichkeit, Kombinatorische Ansätze, Normalapproximation der Binomialverteilungen, Besetzungszahlen, Folgen von Zufallsentscheidungen, Anhang (einige allgemeine Zählprinzipien, 4 Tafeln); Kap. II: Wahrscheinlichkeiten als Maße: Wahrscheinlichkeitsräume, Erwartungswerte, Entropie, Meßbarkeit und Integration, bedingte Wahrscheinlichkeiten. Der Text ist auch vom Stoff her sehr vielseitig, geht allerdings – absichtlich – technisch nie besonders weit.

Ein Buch, mit dem sich jeder Stochastiker auseinandersetzen sollte.

Erlangen K. Jacobs

Liptser, R. S., Shiryayev, A. N., Statistics of Random Processes, vol I: General Theory, vol II: Applications (Application of Mathematics 5, 6), New York – Heidelberg – Berlin: Springer 1977, 1978, vol I: x + 394 p, cloth, DM 68,–, vol II: x + 339 p, cloth, DM 66,–

Die vorliegende umfassende Monographie beschäftigt sich mit einem Problemkreis, in dessen Mittelpunkt die Aufgabe des optimalen Filterns steht. Sie läßt sich wie folgt skizzieren: Gegeben sei ein zweikomponentiger stochastischer Prozeß $(\theta_t, \xi_t)_{t \geqslant 0}$ mit diskreter oder kontinuierlicher Zeit. Aus Beobachtungswerten des Teilprozesses $(\xi_t)_{t \geqslant 0}$ sollen optimale Schätzwerte für den als unbeobachtbar angesehenen Prozeß $(\theta_t)_{t \geqslant 0}$ gewonnen werden. Dies Problem hat eine allgemeine Lösung in Form von bedingten Erwartungen, doch sind bedingte Erwartungen oft nur schwer rechnerisch handhabbar. Man sucht daher unter speziellen Annahmen über die Natur des Gesamtprozesses entweder eine rechnerisch einigermaßen zu erfassende Darstellung des schätzenden Prozesses oder aber einen relativ optimalen Schätzer in einer unter rechnerischen Gesichtspunkten eingeschränkten Klasse von Prozessen, die nur von $(\xi_t)_{t \geqslant 0}$ abhängen. Die Vorhersage-Theorie (prediction theory) ordnet sich als Spezialfall ein. Der Bereich der Prozesse, in dem sich die Theorie heute abspielt, ist durch die Stichworte „Wiener-Prozeß, Markov-Prozesse, Martingale" gekennzeichnet. Generell dient die Untersuchung des zeitkontinuierlichen Falles als Schrittmacher für Untersuchungen im zeit-diskreten Falle. Die technischen Stichworte lauten „stochastische Integrale", „stochastische Differentialgleichungen". So stellt das zentrale Theorem der Filterungstheorie für den Fall einer stochastischen Integraldarstellung des zu schätzenden Prozesses eine stochastische Differentialgleichung für den schätzenden Prozeß bereit. Grundlegend für die gesamte Theorie sind z. B. Arbeiten von Kiyoshi Ito (jetzt Kyoto), aber auch den Autoren der vorliegenden Monographie verdankt man wesentliche Beiträge.

Das seinen Gegenstand sorgfältig und umfassend darstellende Werk zerfällt in einen theoretischen Teil (Band I) und eine Darstellung von Anwendungen (Band II). Die Überschriften der durch beide Bände hindurch fortlaufend numerierten Kapitel lauten:

1. Essentials of probability theory and mathematical statistics, 2. Martingales and semimartingales; discrete time, 3. Martingales and semimartingales: continuous time, 4. The Wiener

process, the stochastic integral over the Wiener process, and stochastic differential equations, 5. Square integrable martingales, and structure of the functionals on a Wiener process. 6. Nonnegative supermatingales and martingales, and the Girsanov theorem, 7. Absolute continuity of measures corresponding to the Ito processes and processes of the diffusion type. 8. General equations of optimal nonlinear filtering, interpolation and extrapolation of partially observable random processes, 9. Optimal filtering, interpolation and extrapolation of Markov processes with a countable number of states, 10. Optimal linear nonstationary filtering, 11. Conditionally Gaussian processes, 12. Optimal nonlinear filtering: interpolation and extrapolation of components of conditionally Gaussian processes, 13. Conditionally Gaussian sequences: filtering and related problems, 14. Application offiltering equations to problems of statistics of random sequences, 15. Linear estimation of random processes, 16. Application of optimal nonlinear filtering equations to some problems in control theory and information theory, 17. Parameter estimation and statistical hypotheses for diffusion type processes. 18. Random point processes: Stieltjes stochastic integral, 19. The structure of local martingales, absolute continuity of measures for point processes, and filtering.

Das Werk wendet sich an Stochastiker mit hochkarätiger maßtheoretischer Vorbildung. Für die einschlägigen Spezialisten dürfte es zu einem Standardwerk werden.

Erlangen K. Jacobs

Benoussan, A., Lions, J.-L., Applications of Variational Inequalities in Stochastic Control (Studies in Mathematics and its Applications, vol. 12) Amsterdam: North-Holland Publ. 1982, xii + 564 p., Dfl. 175.00 (Übersetzung von: Benoussan/Lions: Applications des inéqualitions variationelles en contrôle stochastique, Paris: Bordas (Dunod) 1978)

Die Autoren machen in dem vorliegenden Buch den Versuch, die Verbindung zwischen einer Theorie der Variationsungleichungen und der stochastischen Kontrolltheorie, insbesondere Stopproblemen aufzuweisen. Solche Probleme der stochastischen Kontrolltheorie wurden anfangs hauptsächlich mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden angegangen, so daß der analytische Zugang mit Hilfe von Variationsungleichungen hier neu ist: während der Wert wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden in der Theorie partieller Differentialgleichungen hinlänglich bekannt ist, werden hier analytische Methoden zur Lösung wahrscheinlichkeitstheoretischer Probleme entwickelt.

Ein typisches Stopproblem ist gegeben durch eine stochastische Differentialgleichung

(i) $$dy = g(y)dt + \sigma(y)dw_t$$
$$y(0) = x$$

(ii) $$u(\theta) = \inf J_x(\theta)$$
$$J_x(\theta) = E \int_0^{\theta \wedge \tau_x} f(y(s))ds + \psi(y_x(\theta))\chi_{\{\theta < \tau_x\}}$$

wo θ eine Stopzeit und τ_x die Austrittszeit aus einer offenen Menge O des Raumes ist, in dem die Dynamik (i) des Systems lebt. Methoden der dynamischen Programmierung liefern die folgenden analytischen Charakterisierungen der Funktion u in (ii):

Für z. B. $\sigma \equiv \mathrm{id}$, $g \equiv 0$ ist u Lösung des Problems

$$\text{(iii)}\qquad \begin{aligned} &-\frac{1}{2}\Delta u \leqslant f \\ &u \leqslant \psi \\ &(u-\psi)\left(-\frac{1}{2}\Delta u - f\right) = 0 \\ &u_{|\partial O} = 0 \end{aligned}$$

das umgeschrieben werden kann in die von Stampaccia und Lions eingeführte Variationsungleichungsform:

$$\text{(iv)}\qquad \begin{aligned} &a(u, v-u) \geqslant \langle f, v-u\rangle \qquad (u, v \in H_0^1(O)) \\ &v \leqslant \psi \\ &u \leqslant \psi \end{aligned}$$

wo $a(u, v) := \frac{1}{2} \int_O Du\, Dv\, dx$.

Die Untersuchung von Variationsungleichungen wie in (iv) zur Charakterisierung der Funktion u und somit zur Lösung des Stopproblems (ii) und zur Charakterisierung optimaler Stopzeiten ist Gegenstand des Hauptteils des vorliegenden Buches (Kapitel 3). Dabei werden stationäre Probleme wie oben und als Erweiterung evolutionäre Probleme betrachtet, wobei eine Reihe von neuen Resultaten sowohl zur Theorie der Variationsungleichungen als auch zur Behandlung von Stopproblemen vorgestellt werden. Die hierbei benutzten Begriffe des stochastischen Kalküls und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen sind in Kapitel 2 gesammelt, was dieses Buch leichter lesbar macht für Leser, die in der einen oder anderen Theorie nicht unbedingt Experten sind.

Das letzte Kapitel 4 betrachtet ein kombiniertes Stop- und Kontrollproblem. In das Problem (i), (ii) wird zusätzlich eine Kontrollvariable eingeführt. Mit ähnlichen analytischen Methoden wie in Kapitel 3 wird dieses Problem untersucht, wobei nun der in (iii) auftretende Operator nichtlinear ist.

Für den Fall, daß keine Stopzeit in dem Problem auftritt, wird aus der Variationsungleichung zu diesem allgemeinen Problem die bekannte Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung. Deren Beziehung zu Kontrollproblemen ist z. B. schon in dem Buch von W. Fleming und R. Rishel, Optimal deterministic and stochastic control, Springer Verlag 1975, dargestellt und dieses sei zum Verständnis von Kapitel 4 des vorliegenden Buches als grundlegende Lektüre empfohlen.

Dieses Buch rückt zwei Gebiete der Mathematik unter einem anwendungsbezogenen Aspekt näher, die sich lange Zeit unabhängig voneinander entwickelt haben, womit es interessant wird für Mathematiker der beiden Teilgebiete der Mathematik: Ein – leider auch vom Preis her – wertvolles Buch.

Bei der Benutzung des Buches in Seminaren war das fehlende alphabetische Inhaltsverzeichnis ein erheblicher Mangel. In jedem Fall jedoch eignet sich dieses Buch nicht unbedingt zum Einstieg in die Theorie. Zu diesem Zweck – insbesondere zur Benutzung in Seminaren – sei vielmehr das Buch [B e n s o u s s a n , A.: Stochastic control by functional analysis methods. Studies in Mathematics And Its Applications 11, North-Holland Publishing Co 1982, XV + 410p, US $ 58,25] empfohlen.

Hamburg M. Kohlmann

Berger, J. O., Statistical Decision Theory; Foundations, Concepts and Methods (Springer Series Statistics), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980, 20 figs, 4 tab., xv + 425 p., cloth, DM 45,–

Das vorliegende Buch will eine Einführung in die wesentlichen Ideen der Statistischen Entscheidungstheorie geben. Daß dieses Ziel erreicht worden ist, kann allerdings nur mit Vorbehalten bejaht werden. Man beobachtet heute zwei gegensätzliche Strömungen der Statistik: einerseits die von A. Wald begründete Statistische Entscheidungstheorie, die sich zum Ziele setzt, statistische Methoden ausschließlich mit mathematischen Mitteln zu klassifizieren. Die Grundlage bildet dabei John v. Neumanns Spieltheorie. Andererseits sind immer noch Vorstellungen verwurzelt, die die Brauchbarkeit von statistischen Methoden nach außermathematischen „Prinzipien" beurteilen wollen. Die Vielfalt dieser „Prinzipien" sollte eigentlich durch die Statistische Entscheidungstheorie überwunden werden. Dies ist aber offenbar nicht gelungen. Bücher wie das vorliegende verwenden Terminologie und Apparat der Entscheidungstheorie hauptsächlich zur Formulierung und Bekräftigung von „Prinzipien" wie dem „Likelihood principle", „Bayesian principle", Conditionality principle", usw.

Die klassische Testtheorie, in der entscheidungstheoretische Kriterien besonders erfolgreich sind und dabei zu so eindeutigen Resultaten führen, daß Kontroversen über „Prinzipien" überflüssig sind, wird nicht behandelt. Auch scheint der Anspruch auf mathematische Genauigkeit eher gering zu sein. Seit ungefähr 40 Jahren werden Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Statistischen Entscheidungstheorie mit Erfolg eingesetzt und haben zu berühmten Resultaten geführt. Dieser gesamte Bereich der Asymptotischen Entscheidungstheorie wird im vorliegenden Buch leider ignoriert. Was bleibt, ist eine mathematisch eher magere Diskussion, die allerdings mit Beispielen reich illustriert ist. Als Einführung ist dieser Text für Studenten, die sich in Statistische Entscheidungstheorie einarbeiten wollen, nur mit Vorbehalten zu empfehlen.

Bayreuth H. Strasser

Lienert, G. A., Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik (zweite, völlig neu bearbeitete Auflage in 3 Bänden), Meisenheim am Glan: Verlag Anton Hain
Band 1 (1973): 736 S, 127 Tab., kt. DM 81,50, geb. DM 93,50
Band 2 (1978): 1276 S, 501 Tab., kt. DM 198,–, geb. DM 216,–
Tafelband (1975): 686 S. 151 Tab., kt. DM 59,–, geb. DM 68,–

Soweit ich sehe, schlägt dies dreibändige Werk im Bereich der nichtparametrischen Statistik sämtliche Rekorde. Man kann sich kaum etwas Gründlicheres, Umfassenderes denken, als praktischer Ratgeber wird dies Buch durch kaum ein erfahrungswissenschaftlich vorgegebenes Problem in Verlegenheit zu bringen sein. Es ist lediglich zu erwarten, daß die durch Tukeys „Exploratory Data Analysis (EDA)" dokumentierte Entwicklung auf eine eventuelle 3. Auflage Auswirkungen haben wird. Der Stochastik-Dozent wird in diesem Werk eine Fülle gut aufgearbeiteten konkreten Materials vorfinden; er steht vor dem Problem für seine jeweiligen Zwecke die nötige Auswahl, Straffung – die erläuternden Texte sind sehr breit geschrieben – und ggf. Modernisierung des Stils vorzunehmen. Um einen Eindruck von der Fülle des ausgebreiteten Materials zu vermitteln, geben wir im folgenden die Inhaltsverzeichnisse von Bd. I und Bd. II, jeweils um ca. 98% gekürzt wieder: Kap. 1 Einführung, Kap. 2 Beobachtunge, Hypothesen und Tests, Kap. 3 Messen und Testen, Kap. 4 Verteilungsfreie und klassische Tests, Kap. 5 Testmethoden, die auf Häufigkeitsinformationen beruhen, Kap. 6 Testmethoden, die auf Ranginformationen beruhen, Kap. 7 Methoden, die auf Meßwertinformationen beruhen, Kap. 8 Zufallsmäßigkeit, Unabhängigkeit und Homogenität von Sukzessivbeobachtungen, Kap. 9 Verteilungsfreie Korrelationsmethoden, Kap. 10 Quantitative Methoden der sukjektiven Merkmalsbeurteilung, Kap. 11 Verteilungsfreie Schätzmethoden, Kap. 12 Verteilungsfreie Sequenzanalyse, Kap. 13 Verteilungsfreie Zeitreihenanalyse, Kap. 14 Verteilungsfreie Zeitreihentests, Kap. 15 Analyse zweidimensionaler Kontingenztafeln: Globalauswertung, Kap. 16 Spezifizierte Kontingenzprüfung in Mehrfeldertafeln, Kap. 17 Analyse dreidimensionaler Kontingenztafeln, Kap. 18 Mehrdimensionale Kontingenztafeln, Kap. 19 Verteilungsfreie Auswertung uni- und multivariater Versuchspläne, Kap. 20 Analyse von Richtungs- und Zyklusmaßen.

Das Buch dürfte vor allem als praktisches Arbeitsbuch wertvoll sein. Ihm ist weite Verbreitung zu wünschen.

Erlangen K. Jacobs

Martin, N. F. G., England, J. W., Mathematical Theory of Entropy (Encyclopedia of Mathematics and its Application, vol. 12) London – Amsterdam: Addison-Wesley 1981, xxii + 257 p., hardbound, $ 29.50

Die Autoren streben das folgende Ziel an:

> "Our intent in this book is to give a rather complete and selfcontained development of the entropy function and its extension that is understandable to a reader with a knowledge of abstract measure theory as it is taught in most first-year graduate courses and to indicate how it has been applied to the subjects of information theory, ergodic theory, and topological dynamics."

Das Buch enthält sechs Kapitel. Im ersten Kapitel werden einige Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie wiederholt, im wesentlichen Wahrscheinlichkeitsräume, Zufallsvariable, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit, bedingte Erwartungen und stochastische Prozesse, wobei die Autoren die durch die russische Schule entwickelte Sprache der meßbaren Zerlegungen und Lebesgue-Räume einführen und benutzen. Am Ende des Kapitels werden Standardbeweise für den individuellen Ergodensatz und den Martingalkonvergenzsatz gegeben.

Das zweite Kapitel enthält eine vollständige mit vielen Beispielen angereicherte Darstellung der Begriffe „Entropie" und „Information". (Gegeben ein Zufallsexperiment mit höchstens abzählbar vielen Elementarereignissen 1, 2, 3, . . ., mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots$, ist die Entropie des Experiments durch die Zahl

$$h = - \Sigma_i \, p_i \log p_i$$

definiert. Diese Zahl quantifiziert im gewissen Sinne die dem Experiment inhärente Unsicherheit oder, was auf dasselbe hinauskommt, die in der Kenntnis des Resultats enthaltene Information.) Ein Beweis des Shannon-McMillan-Breiman-Satzes wird gegeben.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit Anwendungen des Entropiebegriffs in der Informationstheorie. (In diesem Gebiet wird Entropie gebraucht, um die Quantität von Information, die man durch einen gegebenen Kanal schicken kann, zu messen, und dabei die Kapazität des Kanals zu definieren. Diese Ideen ermöglichen die Entwicklung von Methoden, deren Anwendungen zu einem effektiven Gebrauch des Kanals führen.) Neuere Resultate von Gray, Neuhoff und Ornstein werden behandelt.

In Kapitel 4 wird der Ornsteinsche Beweis der Isomorphie von Bernoulli-Schemata mit der gleichen endlichen Entropie ausgeführt. Die neueren Entwicklungen dieses Zweigs der Ergodentheorie, u. a. „finitely determined" Partitionen eines dynamischen Systems, die sogenannte relative Isomorphietheorie, sowie jüngere Resultate zur Kakutani-Äquivalenz, werden ohne Beweise zitiert.

Kapitel 5 enthält eine kurze Einführung zur topologischen Entropie. Kapitel 6 diskutiert den Gebrauch des Entropiebegriffs in der Gleichgewichtstheorie für Gittersysteme der klassischen statistischen Mechanik.

Soweit der Inhalt des Buchs. Die sprachliche Darstellung ist sorgfältig und in dieser Hinsicht ist das Buch angenehm und gut lesbar. Leider kann ich aus folgenden Gründen das Buch weder als Einführung noch für den Spezialisten empfehlen.

Erstens wirkt die Idee einer einheitlichen Entropietheorie künstlich; als Leitfaden durch die angesprochenen Anwendungsgebiete ist sie ungeeignet. Zweitens läßt sich die Wahl der meßbaren Zerlegungen und Lebesgue-Räume nur rechtfertigen und mit dem angekündigten Ziel der Autoren vereinigen, wenn man eine ausführliche Darstellung der Rokhlin-Theorie vorlegt, denn diese Theorie ist in der ursprünglichen Fassung schwer lesbar und sie ist (meines Wissens) nirgendswo zugänglicher präsentiert. Drittens werden allzu viele Sätze ohne Beweis zitiert, für meinen Geschmack oft gerade die interessantesten.

Von dieser Kritik möchte ich das zweite Kapitel ausnehmen; dort werden die Begriffe „Entropie" und „Information" ausführlich und sorgfältig behandelt. Hier sind Konzeption und Gewichte dem Stoff angemessen.

Das Buch ist mit einem guten Literatur- und einem ausreichenden Stichwortverzeichnis versehen. Der Preis (257 Seiten, US $ 29.50 z. Z. ungefähr DM 70,–) ist normal.

Delft M. Keane

Csiszàr I., Körner, J., Information Theory, Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems, Budapest: Akadémiai Kiadó 1981, 452 S., 65,– DM

Seit dem Erscheinen der fundamentalen Arbeiten von Claude Shannon (* 1916) im Jahre 1948 hat die stochastische Informationstheorie eine interessante Geschichte durchgemacht, in die Shannon zu verschiedenen Zeiten selbst noch eingegriffen hat. Das zu lösende Problem war a) die Quellencodierung mit minimaler Verlustrate b) die Korrektur von stochastischen Störungen (Rauschen) in einem Übertragungskanal. Die Theorie bediente sich zeitweilig einiger Methoden, die die Ergodentheorie bereitstellte; die in dieser Richtung gehenden Untersuchungen sind seit langem zum Stillstand gekommen; man kann eher sagen, daß die Ergodentheorie im Ganzen der Informationstheorie mehr zu verdanken hat als umgekehrt. Das Typische an der Ergodentheorie ist der Schritt „weg von der Unabhängigkeit", noch über die Markoffsche Abhängigkeit hinaus. Gerade im Falle unabhängiger Nachrichtensymbole („gedächtnislose Systeme") ermöglichte eine geschickte Verbindung kombinatorischer Überlegungen mit Abschätzungen vom Typ der Tschebyschev-Ungleichung Ergebnisse von einer weit über alle ergodentheoretisch gewonnenen Resultate hinausgehenden Schärfe. Dementsprechend hat sich die Forschung am erfolgreichsten und ausgiebigsten mit dem gedächtnislosen Fall beschäftigt. Das vorliegende Buch liefert eine systematische Darstellung der auf diesem Gebiet bis ca. 1980 gewonnenen Resultate. Während das Quellencodierungs-Problem für den gedächtnislosen Fall mit einer frühen Arbeit von V. Strassen 1964 zu einem gewissen krönenden Abschluß gelangte, hält die Entwicklung bei der Kanalcodierung heute unvermindert an, typisch ist die Untersuchung von Kanälen mit mehrfachem Zugang und von Netzwerken von Kanälen. Methodisch zeichnet sich ein verstärkter Rückgriff auf kombinatorische Ideen ab, von dem man auch in den nächsten Jahren schöne Ergebnisse erhoffen darf. Die Autoren bilden, mit R. Ahlswede und anderen, selbst den Mittelpunkt dieser Forschungsrichtung, die in der algebraischen Codierungstheorie einen in der informationstheoretischen Praxis reicher mit Erfolg gesegneten Konkurrenten neben sich hat. – Das überaus sorgfältig gearbeitete Buch besteht aus drei Kapiteln (1. Information measures in simple coding problems. 2. Two-terminal systems. 3. Multi-terminal systems). Die einzelnen, trocken und systematisch geschriebenen Paragraphen (insgesamt 15) münden stets in eine längere Serie von „problems" aus, in denen z. T. nicht einfache Forschungsresultate verpackt sind; den Abschluß bildet stets eine „story of the results". – Das Buch dürfte für jeden, der sich ernstlich mit stochastischer Informationstheorie befaßt, ein grundlegendes Arbeitsbuch werden.

Erlangen K. Jacobs

Konheim, A. G.: Cryptography: A Primer. (Wiley-Interscience) New York: Wiley, 1981 xiv + 432 pp., Cloth, $ 36.95

Dies ist der erste als mathematische Einführung in die Kryptographie anzusehende Text, der in Lehrbuchform erschienen ist.
Das Buch ist aus einer Vorlesung hervorgegangen, die der Autor am Courant Institut gehalten hat. Im Gegensatz zu vielen anderen Autoren (vgl. etwa: Ryska, N.; Herda, S.: Kryptographische Verfahren in der Datenverarbeitung, (Informatik-Fachbericht 24), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980) beschreitet Konheim den wichtigen und interessanten Weg, den Leser vom Gesichtspunkt der Kryptanalyse, d. h. aus der Position des „Codebrechers" in das Gebiet einzuführen.

Hier ist zunächst ein Wort über die Bedeutung der modernen Kryptographie am Platze: Wurde bis vor wenigen Jahren noch dieser Zweig der Mathematik beinahe als Geheimwissenschaft vorwiegend militärischer Ausrichtung angesehen, so wird durch die in allen Lebensbereichen zunehmende Bedeutung elektronischer Speicherungs- und Übertragungstechniken der Einsatz kryptographischer Verfahren für Datenschutzzwecke zur praktischen Notwendigkeit, die gerade an den Einfallsreichtum der Mathematiker große Anforderungen stellt. Unter diesem Gesichtspunkt muß das vorliegende Buch betrachtet werden.

Nach einer kurzen Einführung in die Problematik und Sprechweise der Kryptographie werden in den ersten Kapiteln wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle und Methoden im Sinne der auf Shannon zurückgehenden Beschreibung kryptographischer Systeme entwickelt. Mit diesen Werkzeugen führt der Autor dann vollständige Kryptanalysen einiger klassischer Chiffre-Verfahren (wie z. B. CAESAR) durch. Aus historischen und mathematisch-didaktischen Gründen ist das anschließende Kapitel über Rotor-Chiffren besonders beachtenswert:
Nach einer ausführlichen Beschreibung der von deutschen Militärs während des 2. Weltkriegs als „absolut sicher" eingestuften Chiffriermaschine ENIGMA wird eine vollständige Kryptanalyse dieses Geräts vorgeführt. Bis auf kleinere Vereinfachungen – so hat eine 3-Rotor ENIGMA in der Realität die Periode $26 \cdot 25 \cdot 26$ und nicht 26^3 – ist das vorgeführte Analyseverfahren wohl kombinatorisch anspruchsvoll, aber ohne zusätzliche Arbeit nachvollziehbar.

Das nächste Kapitel behandelt ausführlich den heute von vielen Seiten als sicher angesehenen Data Encryption Standard (DES), der von U.S.-Behörden und großen Computerherstellern als Norm-Chiffrierverfahren angeboten wird. Mit vielerlei statistischen Testverfahren – und ihrem Versagen bei der Analyse des DES – versucht der Autor die relative Sicherheit dieses Algorithmus zu manifestieren.

Die zweite Hälfte des Buches bietet eine breit angelegte Einführung in die mannigfachen Anwendungsmöglichkeiten kryptographischer Verfahren (z. B. bei elektronischen Abbuchungsverfahren). Hier nimmt der Autor die Gelegenheit wahr, den Leser an die anspruchsvolleren, algebraisch interessanten Kryptosysteme (z. B. von Rivest-Shamir-Adleman oder Merkle-Hellman) heranzuführen.

Der Rezensent hat das Buch als Begleittext für eine vierstündige Vorlesung über Kryptographie benutzt. Dabei fiel auf, daß der gleiche Text mit etwas anderer Gewichtung auch für

Zwecke einer äußerst attraktiven Vorlesung über Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie oder über Probabilistische Algorithmen der Zahlentheorie verwendet werden könnte.

Das Buch verfügt über eine befriedigend ausführliche Bibliographie und bietet in einem Anhang ausgewählte Lösungen zu Übungsaufgaben, die in umfangreichem Maße gestellt werden.

Dem Buch fehlt eine angemessene Behandlung folgenmäßiger Chiffrierung mittels Pseudozufallsgeneratoren. Dieses wichtige Teilgebiet der mathematischen Kryptographie, dessen enger Zusammenhang mit der klassischen Algebra über die Theorie der Schieberegisterfolgen (vgl. etwa: Lüneburg, H.: Galoisfelder, Kreisteilungskörper und Schieberegisterfolgen. Mannheim, BI 1979) gegeben ist, wird ausführlich in dem gerade erschienenen Buch „The Protection of Communications" von H. Beker and F. Piper (London: Northwood 1982) behandelt. Weitere Nachteile des vorliegenden Bandes sollen nicht verschwiegen werden: Für eine mathematische Vorlesung müssen viele der benutzten Konzepte, insbesondere in vielen Beispielen, präziser gefaßt werden.
Die Ausstattung des Buches – Einband, Abbildungen, Tabellen, Diagramme – leidet bei näherem Hinsehen unter den vielen Druckfehlern, die zu korrigieren dem künftigen Leser als kryptanalytische Übung empfohlen sei.

Erlangen Th. Beth

Cassels, J. W. S., Economics for Mathematicians (London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol 62) Cambridge – London – New York – Melbourne: Cambridge University Press 1981, xi + 145 pp., paper, £ 7.50

Diese erweiterten Vorlesungsnotizen des bekannten Zahlentheoretikers sind ein beispielhaftes Dokument für die in letzter Zeit gewaltig gestiegene Bereitschaft reiner Mathematiker, sich mit angewandten Problemen zu beschäftigen. Das Büchlein hat für den mathematisch vortrainierten Leser (Vordiplomkenntnisse genügen) den unschätzbaren Vorteil rasanter Kürze und kennerischer Vielseitigkeit. Nirgendwo sonst wird der Leser in solchem Tempo mitten in die aktuelle Entwicklung der mathematischen Ökonomie hineingeführt. Auf knappstem Raum erfährt man das Nötigste über Gleichgewichte, den Diktator-Satz von Arrow, das Turnpike-Theorem, die Marxschen Ansätze, den Keynes'schen Multiplikator etc. Weiteren Ausbau, weitere Vertiefung bringen die zahlreichen Übungsbeispiele. Die Kapitel: 1. Utility, Indifference Surfaces, 2. Pure Exchange Economy, 3. Theory of the Firm, 4. Welfare Economics, 5. Linear Economic Models, 6. Simple Macroeconomic Models. Hinzu kommen drei Anhänge A. Convex Sets, B. The Brouwer Fixed Point Theorem, C. Non-negative Matrices. Das Thema „Konjunkturschwankungen" wird, soweit ich sehe, nicht berührt. – Das Büchlein ist jedem Mathematiker, der sich über mathematisch-ökonomische Probleme informieren will, zum Studium zu empfehlen.

Erlangen K. Jacobs

Progress in Mathematics

Edited by J. Coates
and S. Helgason

Volume 20:
Glenn Stevens
Arithmetic on Modular Curves
1982. 240 pages, Hardcover
sFr. 36.–/DM 42.–

Volume 21:
Anatole Katok (Ed.)
Ergodic Theory and Dynamical Systems II
1982. 230 pages, Hardcover
sFr. 36.–/DM 42.–

Volume 22:
Marie-José Bertin (Ed.)
Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1980–1981
1982. 341 pages, Hardcover
sFr. 44.–/DM 53.–

Volume 23:
André Weil
Adeles and Algebraic Groups
1982. 136 pages, Hardcover
sFr. 26.–/DM 30.–

Volume 24:
Patrick Le Barz/Yves Hervier (Eds.)
Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry
1982. 259 pages, Hardcover
sFr. 48.–/DM 56.–

Volume 25:
Philip A. Griffith
Exterior Differential Systems and the Calculus of Variations
1982. 449 pages, Hardcover
sFr. 68.–/DM 78.–

Volume 26:
Neal Koblitz (Ed.)
Number Theory Related to Fermat's Last Theorem
1982. 465 pages, Hardcover
sFr. 68.–/DM 78.–

Volume 27:
Roger W. Brockett/ Richard S. Millman/
Hector J. Sussmann (Eds.)
Differential Control Theory
1983. 349 pages, Hardcover
sFr. 62.–/DM 70.–

Volume 28:
David Mumford with the assistance of C. Musili, M. Nori, E. Previato and M. Stillmann
TATA Lectures on Theta
Volume I
1983. 254 pages, Hardcover
sFr. 54.–/DM 62.–
Volume II will be published in Spring 1983

Volume 29:
Robert Friedman/David R. Morrison (Eds.)
The Birational Geometry of Degenerations
1983. 401 pages, Hardcover
sFr. 70.–/DM 79.–

Volume 30:
Kentaro Yano/Masahiro Kon
CR Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds
1983. 223 pages, Hardcover
sFr. 44.–/DM 49.–

Please order from your bookseller
or Birkhäuser Verlag, P.O. Box 34,
CH-4010 Basel/Switzerland
or Birkhäuser Boston Inc.,
380 Green Street, Cambridge,
MA 02139/USA

Prices are subject to change
without notice 1/83

Birkhäuser Verlag
Basel · Boston · Stuttgart