85. Band Heft 3
ausgegeben am 20. 7. 1983

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1983

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 85/1 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 84,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 85, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

R. Beran: Bootstrap Methods in Statistics
B. Hornfeck: Hans-Heinrich Ostmann 1913–1959
K. Johannson: Topologie und Geometrie von 3-Mannigfaltigkeiten
H. Klingen: Das Werk C. L. Siegels in der Funktionentheorie
H. Rüßmann: Das Werk von C. L. Siegel in der Himmelsmechanik
Th. Schneider: Das Werk C. L. Siegels in der Zahlentheorie

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

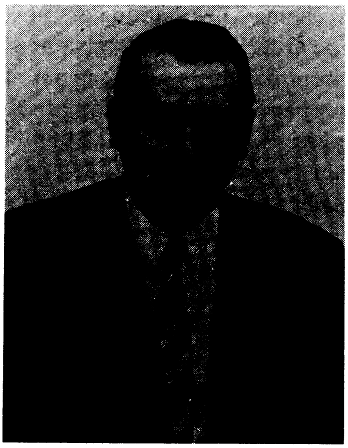
Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 85 (1983) 107–112
AMS subject classification: 01 A 70

Rolf Lingenberg, Mensch und Forscher

F. Bachmann†* und W. Nolte, Darmstadt



Von der älteren Generation als Lehrer, von der jüngeren als Schüler gedenken wir des am 5. Dezember 1978 kurz vor Vollendung seines 50. Lebensjahres jäh aus dem Leben und Schaffen in Karlsruhe abberufenen Professors Dr. Rolf Lingenberg. Während seines Studiums (1949–1955 in Kiel) und in seiner Assistenten- und Hochschullehrertätigkeit (1955–1963 in Hannover, 1963/64 in Freiburg, 1964–1972 in Darmstadt, 1972–1978 in Karlsruhe) entwickelte sich zwischen jedem von uns und ihm eine Verbindung, die seinen Tod überdauert und die uns bestimmt, auch an dieser Stelle seiner in Dankbarkeit zu gedenken. Unser Gedenken gilt seiner ausgeprägten Persönlichkeit und seiner wissenschaftlichen Leistung.

Rolf Lingenberg wurde am 2. Januar 1929 in Danzig-Langfuhr als dritter Sohn des Oberstudienrates Kurt Lingenberg und seiner Ehefrau Berta, geb. Weusmann, geboren. Der Vater war Mathematiker. Von ihm erbte Rolf Lingenberg nicht nur die mathematische und musikalische Begabung, sondern auch das pädagogische Talent, das ihn als Hochschullehrer auszeichnete. Die Mutter stammte aus einer alten evangelischen Pfarrfamilie der Grafschaft Bentheim. Sie erzog ihre Kinder im christlichen Glauben. Ihrem Einfluß ist es zuzuschreiben, daß Lingenberg sich gern und intensiv mit theologischen Problemen beschäftigte und sich in all

*) Prof. Dr. F. Bachmann, Kiel, gestorben am 1. Oktober 1982

seinem Tun und Handeln als bewußter Christ verstand. Mit seinen drei Brüdern verband ihn eine enge Freundschaft, die ihn durch sein Leben begleitete.

Mit Kriegsende mußte die Familie aus Danzig flüchten; sie baute in Kiel eine neue Existenz auf. Hier an der Universität studierte er Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie. Es war eine glückliche Fügung, daß er in Kiel im gleichen Haus mit dem Wissenschaftler zusammen wohnte, der ihm bei der mathematischen Arbeit der hervorragende Mentor wurde. Der sehr begabte Student wurde in die Studienstiftung des Deutschen Volkes aufgenommen.

Im Jahre 1953 fertigte er für seinen akademischen Lehrer F. Bachmann eine Vorlesungsausarbeitung über die ebene Spiegelungsgeometrie an und promovierte 1955 bei ihm mit einer Arbeit über das Thema „Begründung der absoluten Geometrie der Ebene". Im gleichen Jahr wurde er in Hannover Assistent von Th. Kaluza. Nach der in seiner Dissertation vorgenommenen Begründung der absoluten Geometrie ist Lingenberg bemüht, den gruppentheoretisch-axiomatischen Aufbau der Spiegelungsgeometrie zu verallgemeinern. E. Sperner hatte 1954 ein Axiomensystem studiert, aus dem Lingenberg seinen zentralen Begriff, den der S-Gruppe, erwachsen läßt. Seine Untersuchungen münden im Jahr 1958 in die Habilitationsschrift „Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt". Er betrachtet involutorisch erzeugte Gruppen (G, S), d. h. Paare (G, S) aus einer Gruppe G und einem aus Involutionen bestehenden Erzeugendensystem S von G. Er nennt ein solches Paar (G, S) eine S-Gruppe, wenn in ihr der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. Einer S-Gruppe wird kanonisch eine geometrische Struktur, die S-Gruppenebene E(G, S), zugeordnet: Deren Geraden sind die Elemente a, b, c, . . . von S, die Punkte sind die Geradenbüschel $\{c \in S : abc \in S\}$ für $a \neq b$. Verschiedene Punkte haben höchstens eine Gerade gemeinsam. Ein Punkt heißt eigentlich, wenn er mit jedem anderen eine Gerade gemeinsam hat. Lingenberg beweist, daß jede S-Gruppenebene mit wenigstens einem eigentlichen Punkt in eine projektiv-metrische Ebene einbettbar ist, falls gewisse Reichhaltigkeitsvoraussetzungen erfüllt sind.

Als junger Dozent in Hannover war Lingenberg einer der ersten, die an einer Technischen Hochschule Grundvorlesungen in Infinitesimalrechnung speziell für Mathematikstudenten hielten – zu Anfang sehr zum Mißfallen der naturwissenschaftlichen Mitglieder der Fakultät.

Nach vorübergehender kurzer Tätigkeit an der Universität Freiburg begann für ihn 1964 in Darmstadt eine sehr erfüllte Zeit: Er erhielt seinen ersten Lehrstuhl, er heiratete Frau Annegret, geb. Venske und hatte in ihr eine wichtige Gesprächspartnerin auch auf mathematischem Gebiet. Er erlebte das Heranwachsen seiner drei Kinder Bertina, Wilfried und Rolf-Dietrich.

In diesen Jahren befaßte er sich mit mehreren Themen. Er untersuchte die Kollineationsgruppe einer projetiven Ebene, welche zu einer projektiven Dualität gehört; er gab eine Kennzeichnung der ternären orthogonalen Gruppen an, und er bewies Algebraisierungssätze für S-Gruppen mit dreiseitverbindbaren Punkten. Den Begriff „dreiseitverbindbar" benutzte Lingenberg zur Formulierung eines abgeschwächten Verbindbarkeitsbegriffs, der auch in seinen späteren Arbeiten eine entscheidende Rolle spielte. Als eines der Resultate nennen wir: Die elliptischen, hyperbolisch-metrischen, euklidischen, minkowskischen und strubeckerschen Ebenen lassen sich gemeinsam kennzeichnen als S-Gruppenebenen mit nur dreiseitverbindbaren Punkten.

Schon seit Beginn seiner Hochschullehrertätigkeit in Darmstadt führte er zusammen mit anderen Kollegen gemeinsame Wochenendtagungen über Geometrie durch (Rhein-Main-Kolloquium), die seit dieser Zeit regelmäßig stattfinden und zu einem ständigen wissenschaftlichen Gedankenaustausch führen.

Im Selbstverwaltungsbereich der Universität mehrten sich seine Verpflichtungen. Er wurde in der unruhigen Zeit 1969/70 Dekan und 1970/71 Rektor in Darmstadt. Nach langen und oft turbulenten Sitzungen des Großen Senats der Technischen Hochschule führte man 1969 in Darmstadt die „Drittelparität" für die zentralen Hochschulgremien ein – Lingenberg hatte dagegen gestimmt –, schaffte sie aber schon bald aufgrund eines Gerichtsurteils wieder ab. Daraufhin besetzte man die Hochschulorgane kommissarisch. Lingenberg leitete in seiner Dekanatszeit ein „Notkommitee", das aus Dekan, Prodekan, zwei wissenschaftlichen Mitarbeitern und zwei Studenten bestand und das die Angelegenheiten der Fakultät führte. In dieser Zeit des Umbruchs hatte er eine besondere Verantwortung zu tragen. Sein ausgleichendes Wesen und seine persönlich integre Art halfen ihm, die Schwierigkeiten zwischen Studenten und Hochschullehrern zu klären und zu einem Ausgleich zu führen, wiewohl er die für ihn geltenden Grundsätze seines Handelns, die im letzten in seinem christlichen Glauben begründet sind, stets beachtete.

Lingenberg war der letzte amtierende Rektor der TH Darmstadt; 1971 wurde ein Präsident an die Hochschulspitze berufen.

1972 nahm er einen Ruf an die Technische Universität Karlsruhe an. Hier baute er einen neuen Wirkungskreis auf und übernahm wichtige Ämter der Universität. Leider waren ihm dort nur noch wenige Lebensjahre vergönnt.

Eine wissenschaftliche Freundschaft verband ihn mit Professor Dr. P. Scherk, Toronto. Mit ihm zusammen schrieb er eine Einführung in die affine Geometrie: „Rudiments of affine geometry". Gastprofessuren an den Universitäten Toronto und Regina, Kanada in den Jahren 1971, 1974, 1977 ermöglichten ihm intensive Kontakte zu ausländischen Fachkollegen. Im Jahre 1974 war er einer der Hauptvortragenden auf der internationalen Tagung „Foundations of Geometry" in Toronto. Aus dieser Vortragsreihe ist sein 1979 erschienenes Buch „Metric planes and metric vector spaces" hervorgegangen, in dem einige seiner wichtigsten Resultate systematisch dargestellt sind.

Lingenbergs Interessen waren nicht auf den mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich beschränkt. Insbesondere galt seine Zuneigung der Musik. Er spielte besonders gern Violine; regelmäßig musizierte er im Streichquartett und komponierte auch für die von ihm gepflegte Hausmusik. Auf seinen Auslandsreisen, z. B. als Gastprofessor in Toronto, gehörte die Violine zu seinem selbstverständlichen Reisegepäck.

Lingenberg setzte sich immer wieder mit dem Grenzbereich Mathematik/Philosophie auseinander. So hat er sich zusammen mit Professor Lenk in Karlsruhe über mehrere Semester hinweg in Seminaren und Kolloquien mit Fragen aus der Philosophie des Raumbegriffs befaßt. Daß er bei den Kollegen der Philosophie geachtet und geschätzt wurde, beweist die Tatsache, daß er auf dem Weltkongreß über Philosophie in Düsseldorf 1978 eine Untersektion über die Philosophie der Mathematik geleitet hat.

Viele Mathematikstudenten erfuhren durch Lingenberg eine intensive Förderung. Für die Bewertung eines Studenten waren ihm aber nicht nur dessen fachliche Fähigkeiten wichtig, sondern die ganze Persönlichkeit. Dies bewies er auch in seiner Tätigkeit als Auswahlausschußmitglied der Deutschen Studienstiftung, eine Aufgabe, die er fast Jahr für Jahr übernahm.

Bei den anerkannten mathematischen Fachzeitschriften „Journal für die reine und angewandte Mathematik" und „Journal of Geometry" war Lingenberg als Mitherausgeber beteiligt.

Auch in seinen letzten Jahren in Karlsruhe hielt er die Beziehungen zu seinem Darmstädter Wirkungskreis aufrecht. Besonders gern zog er sich in sein Wochenendhaus in Beerfelden-Falkengesäß zurück, um sich zu erholen oder in Ruhe und ungestört zu arbeiten. Hier, auf dem Friedhof dieser kleinen Gemeinde, fand er seine letzte Ruhestätte.

Schriftenverzeichnis

1. Begründung der absoluten Geometrie der Ebene. Diss. Kiel 1955
2. Synthetische und analytische Geometrie. Der Math.-Unterr. 1/1957, 5–25
3. Zur Einführung von Koordinaten in einer projektiven Ebene mit Hilfe von Endomorphismen transitiver Translationsgruppen. Math. Z. **67** (1957) 332–360
4. Euklidische Pseudoebene über einer metrischen Ebene. Abh. math. Sem. d. Univ. Hamburg 22 (1958) 114–130
5. Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. I, II. Math. Ann. **137** (1959) 26–41 und 83–106
6. Zur Kennzeichnung der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen über einem Körper von Charakteristik $\neq 2$. Arch. d. Math. **10** (1959) 344–347
7. Einführung in die Nichteuklidische Geometrie. Vorlesung, gehalten im WS 1957/58. Ausgearbeitet von U. Grabow und H. Pfeiffer, photomechanisch vervielfältigt. Hannover 1960
8. Der synthetische und der analytische Standpunkt in der Geometrie. In: Grundzüge der Mathematik, 1960, Kap. IV des 2. Bandes (Geometrie), 95–137. Gemeinsam mit A. Baur
9. Die orthogonalen Gruppen $O_3(K, Q)$ über Körpern von Charakteristik 2. Math. Nachr. **21** (1960) 371–380
10. Einbettung projektiv-metrischer Teilstrukturen in projektiv-metrische Ebenen. Math. Z. **74** (1960) 367–386
11. Kennzeichnung von Translationsebenen. Praxis d. Math. **2**, H. 6 (1960) 117–121
12. Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. III Math. Ann. **142** (1961) 184–224
13. Algebraische Kennzeichnung von Translationsebenen. Praxis d. Math. **3**, (1961) 169–174
14. Konstruktion der metrischen Form in der absoluten Geometrie. Archiv d. Math. **12** (1961) 470–476
15. Verallgemeinerte metrische Ebenen und orthogonale Gruppen. Algebraical and topological foundations of geometry (1962) 109–122

16. Kennzeichnung der ternären orthogonalen Gruppen. J. f. d. reine angew. Math. **209** (1962) 105–143 (Kaluza gewidmet)
17. Über Gruppen projektiver Kollineationen, welche eine perspektive Dualität invariant lassen. Archiv d. Math. **13** (1962) 385–400 (Baer gewidmet)
18. Über die Gruppe einer projektiven Dualität. Math. Z. **83** (1964) 367–380
19. Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt IV. Math. Ann. **158** (1965) 297–325
20. Metrische Geometrie der Ebene und S-Gruppen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **69** (1966) 9–50 (Reidemeister gewidmet)
21. Absolute Geometrie der Ebene. Math. Phys. Sem.-Ber. N. F. **14** (1967) 68–78
22. Metrische Ebenen mit dreiseitverbindbaren Punkten I, II. Math. Z. **100** (1967) 314–350 und 351–372
23. zusammen mit A. Baur: Affine und projektive Ebenen. Grundzüge der Mathematik, Göttingen 1967, 66–118
24. Lineare Algebra. Mannheim 1969. = Hochschultaschenbuch
25. Grundlagen der Geometrie I. Mannheim 1969. = Hochschultaschenbuch. (Neuauflage Mannheim 1976)
26. Hyperbolisch-metrische Ebenen mit freier Beweglichkeit. Symposia Math. **XI** (1973) 397–412
27. Endliche metrische Ebenen mit Polardreiseit. Arch. d. Math. **25** (1974) 405–410
28. Charakterisierung minkowskischer Ebenen durch Beweglichkeitsaxiome. Sitz.-Ber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. Math.-naturw. Kl. (1974), 15–34
29. Geometrie – ein lebendiges Forschungsgebiet. Der math. und naturw. Unterr. **27** (1974) 193–198
30. Endliche minkowskische Ebenen von Charakteristik $\neq 2$. J. f. d. reine angew. Math. **274/275** (1975) 299–309 (Hasse gewidmet)
31. zusammen mit P. Scherk: Rudiments of affine geometry. Toronto 1975: Univ. of Toronto Press
32. Einführung in die Lineare Algebra. Mannheim 1976: Bibl. Institut. = Hochschultaschenbuch
33. Quadratische Formen für S-Gruppenebenen mit vollverbindbaren Punkten. Festband für Prof. Dr. H. Lenz zum 60. Geburtstag. Berlin 1976
34. Parabolische Ebenen. Beiträge zur geometrischen Algebra. Basel 1977, 217–225
35. Zu den philosophischen Grundlagen der Geometrie. Logik, Ethik und Sprache. Festschrift für Rudolf Freundlich. Wien, München 1981, 140–153
36. Vollständige metrische Ebenen. Abh. math. Sem. d. Univ. Hamburg **48** (1979) 241–263
37. Metric planes and metric vector spaces. New York 1979: Wiley

Liste der bei R. Lingenberg entstandenen Dissertationen

1. Ulrich Grabow, Hannover, 19. 11. 1965
   Beiträge zur unitären Geometrie
2. Wolfgang Nolte, Hannover, 19. 11. 1965
   Zur Begründung der absoluten Geometrie des Raumes
3. Jürgen Hellmund, Hannover, 26. 1. 1968
   2-dreiseitverbindbare Punkte in metrischen Ebenen
4. Bodo Bollow, Darmstadt, 24. 2. 1967
   Modelle der metrisch-euklidischen Geometrie
5. Heinz Dalicho, Darmstadt, 8. 7. 1966
   Beiträge zu einer Theorie der assoziativen Kompositionssysteme

6. Udo Ott, Darmstadt, 8. 2. 1969
   Gruppentheoretische Kennzeichnung Pappusscher affiner Ebenen von Charakteristik ≠ 2
7. Wolfgang Hoyer, Darmstadt, 6. 11. 1969
   Zur Geometrie der unitären Gruppen
8. Karl Jakob Dienst, Darmstadt, 18. 12. 1969
   Projektiv-metrische Homomorphismen von metrischen Ebenen mit dreiseitverbindbaren Punkten
9. Jose A. Marasigan, Darmstadt, 7. 9. 1971
   Kennzeichnung metrischer Ebenen durch Beweglichkeitsaxiome
10. Gerlinde Stoll, Darmstadt, 20. 4. 1971
    Über involutorische perspektive Kollineationen und projektive Kollineationen in projektiven Ebenen
11. Hermann Axt, Darmstadt, 8. 3. 1972
    Über Gruppen singulärer projektiver Dualitäten eines n-dimensionalen projektiven Raumes
12. Dietrich Hoffmann, Karlsruhe, 12. 6. 1974
    Richtungsaffine Ebenen
13. Heinz Müller, Karlsruhe, 5. 12. 1974
    Kennzeichnung unitär-minkowskischer Ebenen durch Beweglichkeitsaxiome
14. Allhard Häußler, Karlsruhe, 19. 12. 1975
    Charakterisierung einer Klasse verallgemeinerter hyperbolisch-metrischer Bewegungsgruppen
15. Martin Gebhardt, Aachen, 9. 7. 1977
    Mittelpunkte und Spiegelungen in Translationsebenen von Charakteristik ≠ 2

Prof. Dr. W. Nolte
Fachbereich Mathematik
der Technischen Hochschule Darmstadt
Schloßgartenstr. 7
6100 Darmstadt

(Eingegangen 14. 10. 82)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
85 (1983) 113–128
AMS subject classification: 01–01

Die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung von Schülern und Lehrern*)

Christoph J. Scriba, Hamburg

0

Kann die Geschichte der Mathematik etwas beitragen zur Verbesserung des Mathematikunterrichts und der Mathematikerausbildung? Diese Frage, so nehme ich an, stand hinter der Aufforderung des Präsidiums der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, das als Titel formulierte Thema auf der Jahrestagung in Bayreuth zu behandeln. Verursacht wurde sie wohl durch die verbreitete Beobachtung, daß nicht nur – wie wohl zu allen Zeiten – viele Schüler Schwierigkeiten mit dem Mathematikunterricht haben, sondern daß auch vielen Studenten, die sich aus eigener Entscheidung zu einem Studium der Mathematik entschlossen haben, das Durchhalten schwer fällt, und daß in der Mathematik die Abbrechquote im Vergleich zu anderen Fachrichtungen besonders hoch ist. Da liegt es offenbar nahe zu fragen, ob die Mathematikgeschichte einen Beitrag zur Verbesserung der Ausbildung von Schülern und Lehrern leisten kann, ob sie jenen Studierenden den Zugang zur Mathematik erleichtern kann, die sich nicht schon allein durch ihre logische Exaktheit und ästhetische Schönheit zu ihr hingezogen fühlen.

Im ersten Teil des Vortrages werde ich meine Ansicht zu der hinter dem Thema stehenden Problematik in Form von drei Thesen darlegen, um meinen Standpunkt besser zu verdeutlichen. Im zweiten Teil werde ich einen knappen Überblick darüber geben, wie man sich (vorwiegend in den letzten Jahren) in einigen anderen Ländern darum bemühte, der Mathematikgeschichte bei der Ausbildung von Schülern und Lehrern „eine Rolle" zuzuweisen. Der Vortrag endet mit einigen zusammenfassenden Schlußbemerkungen (Teil 3).

1

These 1 *Die Frage, ob die Geschichte der Mathematik etwas zur Verbesserung des mathematischen Unterrichts beitragen kann – gleich ob im Schul- oder im Hochschulunterricht – ist falsch gestellt. Es muß vielmehr heißen: Ist Mathe-*

---

*) Überarbeitete Wiedergabe eines auf der DMV-Tagung 1982 in Bayreuth am 23. September gehaltenen Vortrages.

matik ohne Geschichte der Mathematik überhaupt möglich? Alles weitere folgt aus der Antwort, die nur lauten kann: Nein, es gibt keine Mathematik ohne ihre Geschichte.

Was ist mit dieser These gemeint? Zunächst dies: Die heutige Mathematik fußt ganz selbstverständlich in Inhalt, Methode und Fragestellung immer auf derjenigen von gestern, diese auf der von vorgestern, und sofort. Selbst wo mit neuen Methoden ein scheinbar ganz neues Gebiet erschlossen wird, ergeben sich meist rasch, gelegentlich später vermehrt, Berührungspunkte und Beziehungen zu schon vorhandenen Teilen dieser Wissenschaft, denn letztlich gibt es keine völlig isolierte Insel des Wissens in dieser Disziplin. Der Zustand der Mathematik ist also in jedem Augenblick ein Produkt der Vergangenheit, ein Ergebnis der Mathematik von gestern. In diesem sicher von niemandem geleugneten Sinn gibt es keine Mathematik ohne ihre Geschichte.

Nun kann man hören, die eben vorgetragene Ansicht sei zwar richtig, bedeute aber nicht, daß über das in den Zeitschriftenaufsätzen, Monographien und Lehrbüchern niedergelegte mathematische Wissen hinaus noch irgendeine Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik notwendig sei. Denn da es in der Mathematik – im Gegensatz zu den Geistes-, Sozial- und Naturwissenschaften – keine Irrtümer gebe, keine wirklich falschen Theorien, die eines Tages völlig umgestoßen und durch abweichende oder entgegengesetzte Auffassungen ersetzt werden, so sei doch eigentlich die gesamte geschichtliche Entwicklung der Mathematik in ihrem jeweiligen Ist-Zustand enthalten. Wer sich also heute mit Mathematik beschäftige, finde alle wesentlichen Ergebnisse, die je erzielt wurden, in der modernen mathematischen Fachliteratur. Zwar werde da oft nicht gesagt, wann und von wem zuerst ein bestimmter Satz gefunden oder eine bestimmte Theorie entwickelt worden sei, aber Namen und Jahreszahlen seien ja schließlich nicht das Wichtige an der Mathematik, sondern ihr sachlicher Inhalt. Und da gehe doch letztlich nichts verloren, während die Chemie, die Physik, die Medizin und jede andere Wissenschaft dem Streit der Ansichten und Meinungen unterworfen sei, so daß heute gültige Theorien oft nach einigen Jahren oder Jahrzehnten als überholt verworfen werden. So lasse sich noch einsehen, daß man die Geschichte dieser Wissenschaften beachte, weil die heutige Theorie keineswegs die gesamte Vergangenheit in sich beschließe. Aber bei der Mathematik sei das doch überflüssig. Mit seiner Wissenschaft nehme der Mathematiker automatisch deren Geschichte auf – jedenfalls alles, was davon zu kennen notwendig sei. Da die Mathematik auf diese Weise ihre Geschichte bewahre, brauche man sich mit dieser also nicht eigens zu beschäftigen – so könnte man die geschilderte Ansicht kurz zusammenfassen. Sie ist nicht geschichtsfeindlich, aber doch indifferent gegenüber der Geschichte. Sie mißversteht auch, was Geschichte bedeutet. Dazu später noch etwas.

Neben dieser indifferenten Haltung gegenüber meiner Behauptung, daß es keine Mathematik ohne ihre Geschichte gibt, existiert auch eine ausgesprochen feindselige Einstellung. Sie ist außer in der Mathematik auch in vielen Naturwissenschaften und nicht zuletzt in der Technik weit verbreitet. Dabei wird folgendermaßen argumentiert: Naturwissenschaft und Technik sind ihrem Wesen nach auf Fortschritt hin orientiert. Jeder Wissenschaftler, jeder Ingenieur hat die Verpflichtung, das Wissen und Können der Gegenwart zu mehren und zu erweitern. Dies könne immer nur auf der Ausgangsbasis des letzten erreichten Standes geschehen. Die Grenzen der Forschung könne nur derjenige erweitern, neue Erfindungen nur derjenige machen, der alle Möglichkeiten des heutigen Wissens und Könnens überschaut und beherrscht. Vertrautheit mit veralteten Methoden oder einem inzwischen überholten Kenntnisstand sei dabei nicht von Nutzen, sondern könne nur Schaden anrichten. Historische Kenntnisse seien wertlos, ja ein Hemmnis; sie würden den Blick auf zukunftsträchtige Entwicklungen verstellen. Der Historiker blicke nach hinten, der kreative Forscher dagegen nach vorn, in die Zukunft. Eine ausgesprochen geschichtsfeindliche Ansicht also, die offensichtlich im Widerspruch steht zu meiner ersten These: Es gibt keine Mathematik ohne ihre Geschichte.

Doch auch die zuvor beschriebene indifferente, gleichgültige Haltung gegenüber der Geschichte der Mathematik steht im Widerspruch zu meiner These, daß Mathematik ohne ihre Geschichte undenkbar ist. Denn beide Einstellungen, die gleichgültige wie die feindselige, übersehen eine ganz entscheidende Tatsache. Die gesamte menschliche Kultur ist in einem langen Evolutionsprozeß gewachsen. Im Laufe dieses Prozesses lernte der Mensch immer besser, die Welt zu begreifen, in die er hineingestellt ist; die Naturgesetze aufzudecken, welche das Naturgeschehen beherrschen; aber auch: sich seiner selbst bewußt zu werden und über seine Herkunft nachzudenken. Das Reflektieren über den eigenen Weg, das Fragen nach der Geschichte ist ganz wesentlicher Bestandteil der menschlichen Kultur. Geschichtliches Bewußtsein zu besitzen, ist eines der entscheidenden Merkmale, die den Menschen gegenüber dem Tier auszeichnen. Auf historische Betrachtungen zu verzichten, bedeutet, die dem Menschen von Natur aus mitgegebenen Erfahrungsmöglichkeiten in unnötiger, ja gefährlicher Weise einzuengen; es bedeutet den Verzicht auf Erkenntnismöglichkeiten; kurz, es bedeutet eine Einengung, eine Verstümmelung unseres Menschseins. Denn im Gegensatz zum Tier kann der Mensch sich selbst und die Welt nicht nur aus der unmittelbaren Gegenwart heraus erleben, sondern er ist befähigt – und damit doch auch verpflichtet! – sein heutiges Dasein und Sosein zu erkennen und zu verstehen als das Ergebnis einer jahrtausendelangen Entwicklung.

Besteht aber diese Verpflichtung zu historischer Reflektion, wie sie zum Ausdruck kommt in den von der Natur dem Menschen verliehenen Gaben des Bewußtseins und des Denkens, so können davon keinerlei Teile der Kultur und Zivilisation ausgenommen werden. Je höher entwickelt, je spezialisierter auch eine Ausprägungsform der Kultur ist, umso mehr muß sie sich ihres historischen Weges und ihres geschichtlichen Auftrags bewußt bleiben, will sie den Zusammenhang mit den übrigen Teilen der Kultur nicht verlieren und will sie die ihr gebotenen Möglichkeiten voll ausschöpfen. Dies gilt ebenso für die Mathematik als einer Ausprägungsform der Kultur wie für jede andere Wissenschaft wie nicht zuletzt auch für die Technik.

Gesehen unter diesem Aspekt, greifen sowohl die der Mathematikgeschichte feindlich wie die ihr indifferent gegenüberstehende Auffassung zu kurz. Indem sie einen Teil – nämlich den gegenwärtigen Zustand und Umfang mathematischer Erkenntnis – für das Ganze nehmen, übersehen sie wesentliche Bereiche.

Hierin liegt aber auch die Erklärung dafür, wie es zu diesen ahistorischen Haltungen kommen konnte. Absolute Konzentration auf den Inhalt des gegenwärtigen mathematischen Wissensgebäudes und auf die Erweiterung seiner Grenzen, wie sie sicher für fruchtbare Forschung in vielen Fällen notwendig ist, hat den Blick auf darüber hinausgehende Zusammenhänge verstellt.

Genau dies aber scheint mir der kritische Punkt zu sein. Was der einzelne Mathematiker, aktiv in der Forschung engagiert, vor seinem Gewissen vielleicht noch zu rechtfertigen vermag, nämlich die Konzentration aller geistigen Anstrengungen auf ein bestimmtes mathematisches Problem oder eine Theorie, das kann für die Mathematik als Ganzes nicht gelten. Es vermag vor allen Dingen zu einer Zeit, in der eine große Zahl von Studenten Mathematik als Studienfach wählt, nicht zu befriedigen, da unter diesen Studenten nur ein kleiner Bruchteil Mathematik als Selbstzweck sieht oder sich selbst als zukünftigen Forscher versteht. Das Mathematikstudium ist für viele zu einem Brotstudium geworden, das leider oft mit wenig Begeisterung und Wissensdurst, mehr schlecht als recht, mehr mürrisch als zielstrebig absolviert wird. Von den Dozenten wird nicht nur eine kompetente Vermittlung des Lehrstoffs und der zugehörigen Methoden erwartet, sondern vor allen Dingen Motivation.

Unvergeßlich bleibt mir die Bemerkung einer Mathematikstudentin in einem Seminar. Wir sprachen über den bedeutenden Renaissancemathematiker und Astronomen Regiomontan, und der Referent erwähnte, dieser habe sich oft in seiner Freizeit noch mit mathematischen Aufgaben beschäftigt. Der Einwurf der Studentin lautete: „Das verstehe ich nicht. Wieso hat er sich in seiner Freizeit mit mathematischen Aufgaben beschäftigt, wenn er dafür nicht bezahlt wurde?“ Niemand protestierte. Daß Wissensdurst und der Wunsch, die geistigen Kräfte zu üben und ein gestelltes Problem zu durchdringen und zu lösen, Motivation genug sein kann für höchste Anstrengungen, daß die Freude über eine geglückte Lösung mehr innere Befriedigung vermitteln kann als jede Bezahlung, davon schien niemand etwas zu ahnen, dies schien keinem der Studenten in diesem Seminar je in den Sinn gekommen zu sein, das hatte offenbar keiner je an sich selbst erfahren.

Kann es verwundern, wenn solche Studenten der Motivation zum Mathematikstudium bedürfen? Heute der Motivation zum eigenen Studium bedürfen und morgen, wenn sie als Lehrer vor der Klasse stehen, der Motivation, ihr Fach mit Interesse und Engagement zu lehren. Mir scheint, solche Motivation kann nicht in ausreichendem Maß mit innermathematischen Argumenten geliefert werden, weil sie dann in der Regel bei der Mehrzahl der Studenten nicht ankommt. In bestimmten Fällen wird es helfen, auf Anwendungsmöglichkeiten einer mathematischen Theorie zu verweisen, weil dann wenigstens die Nützlichkeit einer ungeliebten Theorie einen kleinen Ansporn zu liefern vermag, sich mit ihr zu beschäftigen – und sei es auch leider nur das Argument, das vorhin anklang: Man kann, wenn man dieses oder jenes Teilgebiet der Mathematik beherrscht, damit in der Wirtschaft, in der Industrie oder beim Staat seine Brötchen verdienen.

Doch es wäre traurig, hätten die Mathematiker als Argument für die Sinnhaftigkeit eines Mathematikstudiums nur Anwendungen und Nützlichkeit vorzubringen.

Meine **zweite These** lautet: *Mathematik darf nicht als isolierte Wissenschaft und reines Erkenntnisgebilde verstanden werden, sondern sie muß – insbesondere* *im Unterricht – in ihren wissenschaftlichen, kulturellen und sozialen Zusammenhängen und Verflechtungen gesehen und vorgestellt werden.*

Der amerikanische Mathematiker Morris Kline, bekannt geworden unter anderem durch seine heftige Kritik an einer verfrühten und übertrieben rigorosen Einführung der Mengenlehre in den Schulunterricht, hat vor 20 Jahren einem seiner Bücher den Titel gegeben: "Mathematics – a cultural approach", Mathematik als Kulturerscheinung, könnte man vielleicht etwas frei übersetzen. Wenn es sich auch nicht unmittelbar auf unsere Verhältnisse anwenden läßt, deutet das Buch doch die Richtung an, die ich im Sinn habe: Der Schüler, der Student der Mathematik sollte im Unterricht bzw. in den Vorlesungen spüren, daß der Lehrer bzw. Professor kein Fachidiot ist, um es hart zu formulieren, der nicht über seine Formeln und Lehrsätze hinausblickt. Der Unterricht sollte über die Vermittlung des rein mathematischen Lehrstoffs hinaus wenigstens hie und da exemplarisch verdeutlichen, in welchem Zusammenhang gewisse Fragestellungen entstanden sind, wann und warum es zur Ausbildung bestimmter mathematischer Theorien kam, wie sie im Lauf der Zeit umgebildet, in größere Zusammenhänge gestellt, in Anwendungen erprobt und in abstrakt-axiomatische Fassung gegossen wurden. Eine solche, über die bloße Stoffvermittlung hinausgehende Betrachtungsweise spricht den Schüler und Studenten nicht nur an als ein Wesen, das – hoffentlich – mathematisch-logischen Deduktionen zu folgen vermag, sie entkräftet zugleich die heute weit verbreitete Kritik an den Fachwissenschaftlern und Spezialisten, die angeblich im Elfenbeinturm arbeiten und sich über Wert und Folgen ihres Tuns keine Gedanken machen. A cultural approach, Mathematik verstanden als Bestandteil der Kultur, wie man die zweite These auf eine Kurzform bringen könnte, möchte also die Mathematik aus der Isolation, der bloß fachspezifischen Sicht herausnehmen und sie einbetten in das Geflecht der zahllosen Beziehungen zu anderen Wissenschaften und zu anderen Ausprägungsformen der Zivilisation und Kultur. Jene Verbindungen, die auch der Fachmathematiker in der Regel gar nicht leugnet, die aber notgedrungen bei der fortgeschrittenen Spezialisierung der Wissenschaften immer stärker in den Hintergrund treten, sollen wieder stärker in das Blickfeld des Lernenden gerückt werden.

Damit ist meine dritte These bereits vorgezeichnet, die uns zur Geschichte der Mathematik zurückführt:

These 3 *Mathematik als kulturelles Phänomen ist ohne historische Betrachtung nicht zu begreifen.*

Diese These schlägt den Bogen zurück zur Ausgangsfrage, ob die Mathematikgeschichte etwas zur Verbesserung des Mathematikunterrichts beitragen kann. Die Antwort muß nach dem bisher Gesagten anders ausfallen, als man zunächst erwarten könnte. Denn es kann nicht – jedenfalls nicht ausschließlich oder in erster Linie – darum gehen, zu untersuchen, wo bei der Vermittlung von Mathematik an einzelnen Stellen besondere Schwierigkeiten auftreten, um dann zu fragen, ob hier die Mathematikgeschichte helfend einspringen kann, mit historischen Beispielen etwa, die einen Gedankengang klarer machen oder eine abstrakte Formulierung durch ein konkretes Exempel aufhellen können. Dies wären gleichsam sekundäre Nebeneffekte, im Einzelfall nicht zu verachten, aber nicht das Wesentliche darstellend, was Mathematikgeschichte leisten könnte und leisten sollte. Ihre Hauptaufgabe muß es sein, das Wachsen mathematischer Erkenntnis, mathematischer Ideen und Theorien aus dem allgemeinen kulturellen Urgrund durch das schöpferische Werk von Menschen aus Fleisch und Blut, die ihrer Zeit vielfältig verhaftet sind, zu beschreiben und womöglich zu erklären. Mathematik als ein kulturelles und soziales Phänomen im weitesten Sinne vorzustellen, sollte ihr Ziel sein.

Ich glaube, das ist für die Anfänge mathematischen Denkens offenkundig. Wenn Herodot behauptet, die Ägypter hätten die Geometrie erfunden, da die jährlichen Überschwemmungen des Nils sie gezwungen hätten, stets von neuem ihre Felder zu vermessen und abzustecken, so mag dies historisch nur bedingt zutreffen, zeigt aber die Richtung an. Astronomische Kalkulationen, kaufmännische Rechnungen, Buchführungsaufgaben für den Nahrungsmittel- und Materialbedarf der Höfe und der großen antiken Stadtstaaten stehen am Anfang mathematischen Denkens; hinzu mögen rituelle Vorschriften treten über die Gestaltung von Altären und Tempeln oder die günstigsten Zeiten für Opfergaben und ebenso das spielerische Interesse an symmetrisch gestalteten Figuren und Ornamenten.

Mit fortschreitender Entwicklung verselbständigt sich mathematisches Denken mehr und mehr, so daß es nicht so offensichtlich wie in der Frühphase möglich zu sein scheint, kulturelle Bezüge nachzuweisen. Darum zur Verdeutlichung einige Beispiele. In der Geometrie hatten die Griechen im wesentlichen zwei Lehrgebiete entwickelt: die Dreiecks- und Kreisgeometrie (einschließlich der Parallelenlehre) in den „Elementen" Euklids, und die Theorie der Kegelschnitte, die sich in den „Conica" des Apollonios findet. Als Kepler nach jahrelangem Bemühen die Astronomie dadurch revolutionierte, daß er an die Stelle der traditionellen Kreisbewegungen die Ellipsenbewegungen der Planeten um die Sonne setzte, griff er zurück auf praktisch die einzige alternative mathematische Theorie, die sich damals anbot. Man kann sich fragen, was er getan hätte, wenn er dreihundert Jahre früher gelebt und sich damals das gleiche Ziel gesetzt hätte, nämlich die Planetenbahnen mit größtmöglicher Genauigkeit mathematisch zu beschreiben. Denn die Theorie des Apollonios war ja dem europäischen Mittelalter nicht bekannt. Hätte sie Kepler für seine Zwecke neu entwickelt, wäre also unter dieser hypothetischen und anachronistischen Annahme die Theorie der Kegelschnitte aus astronomischem Anlaß heraus geschaffen worden, so wie sich die Babylonier zur Vorhersage von periodischen Erscheinungen wie den Mond- und Venusphasen bestimmte arithmetische Rechenverfahren ersonnen haben?

Eine andere Frage: Hätte sich Leibniz überhaupt das Ziel setzen können, einen Infinitesimalkalkül zu erfinden, wenn nicht in der Mathematik der vorangegangenen hundertfünfzig Jahre einerseits in Italien Verfahren für die Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen, andererseits unter den Händen von Viète und Descartes in Frankreich eine symbolische Algebra geschaffen worden wäre, die überhaupt die Hoffnung auf einen sozusagen automatisch arbeitenden Kalkül hätte wecken und rechtfertigen können? Hier liegen, wie man sieht, die konzeptionellen Ursprünge für eine neue Teildisziplin der Mathematik bereits in der Mathematik selbst, doch auch diese ist, so meine ich, Teil des kulturellen Hintergrundes.

Oder hätte Bourbaki sein Fernziel, die Mathematik als eine Wissenschaft von den Strukturen zu interpretieren und aufzubauen, überhaupt anvisieren können, wenn nicht eine lange Reihe von Mathematikern von Euklid bis Hilbert Vorarbeiten in dieser Richtung geleistet hätten, wenn aber nicht auch Philosophen von Aristoteles über Leibniz und Kant und viele andere zum Beispiel den Systemcharakter von Wissenschaft herausgearbeitet hätten?

Das Unternehmen der Gruppe Bourbaki ist zugleich ein schönes Beispiel aus unseren Tagen dafür, wie Mathematik ohne historische Betrachtung nicht zu begreifen ist. Einerseits konnte der Bourbakismus nur entstehen, nachdem im neunzehnten und frühen zwanzigsten Jahrhundert an vielen Beispielen aus der Geometrie, der Algebra und der Analysis klar geworden war, daß Strukturen gleicher oder ähnlicher Art in den verschiedensten Teilen der Mathematik und ihren Anwendungen auftreten und ineinander wirken. Es mußte sich schließlich die Frage nach der Struktur an sich, ohne Bezugnahme auf den konkreten Inhalt, für den eine Theorie zunächst geschaffen worden war, einfach aufdrängen. Indem eine anfangs kleine Gruppe von Mathematikern diesen Gedanken aufgriff, ihn für ihre Arbeit aufs Panier schrieb und ihm in besonders wirksamer Weise zum Durchbruch verhalf, setzte sich schließlich bei den Mathematikern weithin die Vorstellung durch, moderne Mathematik sei praktisch gleichzusetzen mit der Untersuchung abstrakter Strukturen und Abbildungen. Eine Generation später hatten diese Vorstellungen dann auch bei den Pädagogen Eingang gefunden mit den bekannten Auswirkungen, der radikalen Reform des Unterrichts im Sinne der sogenannten Mengenlehre.

In den letzten Jahren aber mehren sich die Stimmen, die sich gegen das Absolutsetzen der Auffassung von Mathematik, wie sie von Bourbaki vertreten wird, zur Wehr setzen. In einem 1979 geschriebenen Übersichtsartikel über die mathematische Forschung der vergangenen zehn Jahre stellte Christian Houzel fest[1]): „Nachdem die vorangegangene Periode die Entwicklung der großen und mächtigen allgemeinen theoretischen Maschinerien wie die Homologiealgebra, die Algebraisierung der Topologie, die geometrische Algebra von Grothendieck (die Theorie der Schemata) erlebt hatte, sind die letzten zehn Jahre vielmehr gekennzeichnet durch eine Rückkehr zu den speziellen Problemen, zum Konkreten, häufig im Anschluß an ältere Untersuchungen. Diese Tendenz macht sich selbst schon im Mathematikstudium bemerkbar, wo das Zeitalter von Bourbaki und der fundamentalen Strukturen zu Ende gegangen ist."

Bereits einige Jahre zuvor, 1975, wandte sich etwa F. E. Brouwder[2]) gegen die „utopische Idee, nach der die Mathematik ausschließlich oder auch nur hauptsächlich aus Strukturen im abstrakten Sinn besteht." Brouwder betonte, man dürfe das Studium der mathematischen Techniken und Methoden nicht trennen von den Zielen, um derentwillen man sie letztlich untersuche, man dürfe sie nicht herauslösen aus dem Gesamtzusammenhang mathematischer Forschung. Um diesen aber überblicken zu können, bedürfe man der geschichtlichen Betrachtung der Mathematik. In diesem Sinn sei Mathematikgeschichte weder ein separates For-

[1]) Actes du Colloque Histoire et Enseignement des Mathématiques, Pacy sur Eure – 5 et 6 Juin 1981. I.R.E.M. de Rouen 1982. S. 13. (Alle Zitate wurden von mir ins Deutsche übersetzt.)

[2]) Actes [1]), S. 14.

schungsgebiet noch eine „dekorative Disziplin"; sie sei vielmehr zu verstehen als ein Instrument, das zur Erkenntnis der in der Forschung verfolgten Tendenzen und zur Orientierung über den Lauf ihrer Entwicklung beitrage[3]).

In ähnlicher Weise hat André Weil, einst führendes Mitglied der Gruppe Bourbaki, diese Auffassung in seinem 1978 auf dem internationalen Kongreß in Helsinki gehaltenen Vortrag zum Ausdruck gebracht[4]). Weil unterschied zwischen Taktik und Strategie in der mathematischen Forschung. Als Taktik bezeichnete er den täglichen Umgang mit den zu einem gegebenen Zeitpunkt zur Verfügung stehenden mathematischen Methoden; die Taktik erlerne man am besten von einem guten Lehrer unter Studium der zeitgenössischen Literatur. Im Gegensatz zur Taktik sei Strategie die Kunst, die wesentlichen Probleme zu erkennen, sie an ihren Schwachstellen anzugreifen und zukunftsträchtige Entwicklungslinien aufzuzeigen. Bei der Strategie gehe es um Fernziele; Strategie erfordere ein tiefes Verständnis für Entwicklungstendenzen und das Hervortreten bestimmender Ideen für lange Perioden. Dieses Studium der mathematischen Hauptideen, historisch gesehen, sei auch die wichtigste Aufgabe der Mathematikgeschichte. Damit sei der wesentliche Aspekt mathematikhistorischer Forschung zugleich von höchster Bedeutung für den Mathematiker, der über das tägliche Geschäft seines Handwerks hinausblicken möchte. Der Mathematiker, der sich aus diesem Grund in den Werken der großen Klassiker umsehe, unterscheide sich insofern nicht prinzipiell vom Mathematikhistoriker, wenngleich der letztere vielleicht auch stärker an weiter zurückliegenden Zeiten interessiert sei. Doch das wesentliche Geschäft beider sei die Bemühung um die Erkenntnis mathematischer Leitideen – jenen der Vergangenheit, jenen der Gegenwart und, soweit überhaupt möglich, jenen der Zukunft. Weil schloß seinen Vortrag, den er unter die Frage „Wozu Geschichte der Mathematik?" gestellt hatte, mit der Bemerkung, diese Frage reduziere sich also auf diejenige „Wozu Mathematik?". Letztere aber zu behandeln, so schloß er in Helsinki, sei er nicht aufgefordert worden.

Damit genug der Argumente zur Stützung der drei Thesen, die ich noch einmal wiederhole:

1. Es gibt keine Mathematik ohne ihre Geschichte;

2. Mathematik darf nicht als isolierte Wissenschaft und reines Erkenntnisgebilde verstanden, sondern muß im wissenschaftlichen, kulturellen und sozialen Gesamtzusammenhang gesehen und vermittelt werden;

3. Mathematik als wissenschaftliches und kulturelles Phänomen ist ohne historische Betrachtung nicht zu begreifen.

Die Rolle der Geschichte der Mathematik im Unterricht für Schüler und Studenten ist damit hinreichend umschrieben, ihre Aufgabe im Grundsätzlichen vorgezeichnet. Was zu diskutieren bleibt, ist die Frage, wie der Lehrer in der Schule, der Professor an der Universität das skizzierte Programm verwirklichen kann. Welche Voraussetzungen müßten erfüllt sein, welche Hilfsmittel stehen zur

---

[3]) Actes [1]), S. 15.

[4]) André Weil: History of Mathematics: Why and How. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki 1978. Vol. 1: Helsinki 1980. S. 227–236.

Verfügung, was könnte von seiten der Historiker der Mathematik bereitgestellt werden – dies wären einige der Fragen, die im einzelnen zu untersuchen und zu beantworten wären.

2

Im nun folgenden zweiten Teil des Vortrags berichte ich über einige Überlegungen, die in den letzten Jahren in verschiedenen Ländern in dieser Richtung angestellt wurden. Ich beginne mit einem Blick auf eine Nachbarwissenschaft, die Physik. Im Jahre 1970 trafen sich am MIT zweiunddreißig Physiker, Professoren wie Lehrer der Physik mit einigen Physikhistorikern zu einem einwöchigen Seminar über die Rolle der Geschichte der Physik in der Physikausbildung[5]). Das Seminar wurde auf Anregung einer Kommission der Internationalen Union für Reine und Angewandte Physik (IUPAP) veranstaltet und von Vertretern aus zwölf Ländern verschiedener Erdteile besucht. Der international bekannte Physiker, Philosoph und Physikhistoriker Max Jammer aus Israel, unter anderem Autor verschiedener Bücher über die Entwicklung des Begriffs der Masse, des Raumes und der Zeit in der Physik, hielt eines der Hauptreferate[6]). Er berichtete von seinen Erfahrungen, die er in vielen Jahre bei Vorlesungen, Seminaren und Vorträgen zur Physik und Physikgeschichte in drei Kontinenten gesammelt hat. Jammer, der es für selbstverständlich hält, daß der Physikstudent während des Studiums auch mit der Geschichte der Physik vertraut gemacht wird, erwähnte verschiedene Möglichkeiten, wie dies bewerkstelligt werden kann. Der heutige Stand der Physik erlaube nicht, in den Vorlesungen den historischen Entwicklungsgang zu wiederholen, also die genetische Methode anzuwenden, wie sie oft genannt wird. Denn häufig müßten heute allgemeine Prinzipien methodisch an den Anfang gestellt werden, die sich historisch erst als Erkenntnis eines langen Entwicklungsprozesses klar formulieren ließen. Folglich können nach Jammers Ansicht im Physikstudium historische Betrachtungen nur ergänzend angebracht werden – entweder in Verbindung mit einzelnen Abschnitten der Physik, wo sich diese in geeigneter Form einflechten lassen, oder, was er für das Günstigste hält, in besonderen Vorlesungen. Jammer schlägt als Ideallösung für den Physikstudenten vor: Im ersten Studienjahr eine Übersichtsvorlesung über die Geschichte der Naturwissenschaften im Allgemeinen und in einem späteren Semester (wir würden heute sagen: während des Hauptstudiums), wenn die zum Verständnis erforderlichen physikalischen Kenntnisse bei den Hörern vorausgesetzt werden können, eine Spezialvorlesung über die Entwicklung der klassischen und der modernen Physik.

Ich hatte selbst Gelegenheit, eine mehrstündige von Herrn Jammer gehaltene Veranstaltung dieser Art zu besuchen; es ging damals um die Entwicklung der

---

[5]) Report of the International Working Seminar on the Role of the History of Physics in Physics Education, held at M.I.T., July 13–17, 1970. (Maschinenschriftlich, verfaßt und verteilt von einem Komitee unter Vorsitz von S. G. Brush, University of Maryland, College Park, Md., USA, 1970. 9 S.)

[6]) Max Jammer: In what Ways can Historians of Science offer Guidance to Physics Teachers concerning the Use of History in their Teaching. (Vortragsmanuskript zum Seminar[5]), 17 S.)

Quantenmechanik, und wirklich folgen konnte nur, wer diese Theorie zuvor intensiv studiert hatte. – Das Seminar am Massachusetts Institute of Technology, auf dem Jammer seine Vorschläge vorlegte, endete vor zwölf Jahren mit der Verabschiedung einer Reihe von Empfehlungen[5, 7]). Darunter befand sich die Empfehlung, der zukünftige Physiklehrer solle wenigstens eine Vorlesung über Physikgeschichte besuchen und in einem Seminar den Umgang mit historischer Literatur, mit Quellen und insbesondere mit sogenannten *case studies,* Fallstudien, erlernen. Weitere Empfehlungen bezogen sich auf die Durchführung von historisch orientierten Fortbildungskursen und auf die Bereitstellung geeigneter Literatur und didaktischer Hilfsmittel für Physiklehrer und Physikdozenten; aus Zeitgründen kann ich das nicht im einzelnen besprechen. Es sollte dieses Beispiel auch nur zeigen, daß auch die Internationale Union für Reine und Angewandte Physik das gleiche Problem sieht und in Angriff genommen hat, das wir hier für die Mathematik betrachten. Im folgenden beschränke ich mich auf Beispiele aus unserem Fachgebiet.

Im vergangenen Jahr fand in Bukarest der sechzehnte internationale Kongreß für Geschichte der Naturwissenschaften statt, veranstaltet von der Internationalen Union für Geschichte und Philosophie der Naturwissenschaften (IUHPS). Zu diesem Anlaß legten die Kollegen aus Polen und der Tschechoslowakei in einem gemeinsam herausgegebenen, über fünfhundert Seiten starken Band Berichte und Diskussionspapiere über die Gestaltung des Unterrichts in der Geschichte der Naturwissenschaften, der Medizin und der Technik vor[8]). Bei der Lektüre dieser Beiträge fallen bemerkenswerte Unterschiede in der Auffassung auf. In Polen gibt es eine lange, noch bis vor den Ersten Weltkrieg, also vor die neue Staatsgründung zurückreichende Tradition von Lehrveranstaltungen zur Kulturgeschichte im weitesten Sinn, die auch die Wissenschaftsgeschichte der verschiedenen Fachdisziplinen in ihren Grundzügen einschließt. Wahrscheinlich hat das so wechselhafte politische Schicksal dieser Nation ein besonderes Gespür verliehen für Fragen der kulturellen Identifikation, für Fragen nach dem, was Kultur ausmacht, wie sie unter vielfältigen Einflüssen entsteht und sich entwickelt – Probleme, die in weniger zerrissenen oder umstrittenen Gebieten eher als selbstverständlich hingenommen und kaum hinterfragt werden. Neben einem breiten und vielfältigen Angebot an Vorlesungen und Seminaren, die eine kulturelle Gesamtschau anstreben, spielen dann auch in Polen Fachvorlesungen über die Geschichte einzelner Wissenschaften einschließlich der Geschichte der Mathematik nur eine sehr untergeordnete Rolle. In den zwanziger Jahren führte der Algebraiker und Statistiker Samuel Dickstein (1851–1939) Lehrveranstaltungen zur Geschichte der Mathematik an der Universität Warschau durch, in den dreißiger Jahren nahm Jan Łukasiewicz (1878–1956), der bekannte Logiker, obligatorische Vorlesungen über die Geschichte der mathematischen Logik vom Alterum bis zur Neuzeit in das Programm auf. Beim Wiederaufbau des Universitätswesens nach dem Krieg griff man zunächst stark auf die Tradition allgemein

---

[5]) Siehe Seite 121.

[7]) S. G. Brush and Allan L. King (Editors): History in the Teaching of Physics. Hanover, New Hampshire, 1972. XI, 116 S.

[8]) Problems of Teaching the History of Science. Studies of Czechoslovak and Polish Historians of Science for the 16th International Congress of the History of Science (= Acta Historiae Rerum Naturalium Necnon Technicarum, Special Issue 11). Prague 1981, 554 S.

kulturgeschichtlicher Veranstaltungen zurück, und erst seit etwas über einem Jahrzehnt bemüht man sich auf zentraler Ebene, einerseits Vorlesungen zur Wissenschaftsgeschichte im allgemeinen, andererseits solche über die Entwicklung einzelner Disziplinen in den Studienplänen der Hochschulen zu verankern. Als Begründung dafür wird die wachsende Einsicht genannt, „daß die Geschichte der einzelnen Disziplinen nicht eine Sammlung von antiquarischen Merkwürdigkeiten ist, sondern daß es Glieder sind, die die Vergangenheit mit der Zukunft verbinden.“[9]) Obwohl der Begriff nicht gebraucht wird, ist doch klar, daß als Leitbild einer solchen Disziplingeschichte die Darstellung der Entwicklung der wesentlichen Begriffe, Ideen und Theorien gesehen wird. So schrieb 1974 Professor Andrzej Mostowski über seine an der Universität Warschau gehaltenen Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik[10]):

> Die Lösung, die ich gewählt habe, ... sollte eine Kombination von zwei Zielen sein: erstens wollte ich die Hörer mit der historischen Entwicklung gewisser ausgewählter mathematischer Begriffe bekanntmachen, zeigen, wie sie sich von den einfachen und fast greifbaren mathematischen Begriffen zu den immer mehr abstrakten herausbildeten, die den Gegenstand zeitgenössischer Forschungen darstellen; zweitens wollte ich vor diesem Hintergrund den Hörern einige historisch wichtige mathematische Lehrsätze zeigen, mit denen sich nicht alle Hörer in den Kursvorlesungen bekanntmachen, und bei Gelegenheit über die Biographien der großen Mathematiker erzählen, von denen diese Theoreme stammen (...). Die historische Vorlesung ist für den Mathematiker äußerst schwierig. Eine gute Vorlesung aus der Geschichte der Wissenschaft kann nicht nur eine trockene Zusammenstellung von Fakten sein oder ein Register von Biographien bekannter Menschen. Sie sollte den Sinn der Entwicklung des gegebenen Gebiets der Wissenschaft erläutern und erklären, warum sie auf diese, und nicht auf eine andere Weise verlief. Eine solche Begründung wird dabei immer eine zweifache Natur haben. Teilweise wird sie Argumente historischer Natur berühren, dabei den allgemeinen kulturellen, gesellschaftlichen, ökonomischen und politischen Stand berücksichtigend, der im gegebenen Zeitabschnitt herrschte. In vielen Fällen jedoch muß sie aus dem erörterten Gebiet der Wissenschaft entnommene Argumente gebrauchen und erläutern, daß die innere Logik der Entwicklung dieses Gebietes auf natürliche Weise zu diesen oder anderen Arbeiten geführt hat ... .

Ein ganz anderes Bild als Polen bietet die Tschechoslowakei dar. Nicht Lehrveranstaltungen zur allgemeinen Kulturgeschichte, sondern fachbezogenen historischen Kursen gilt in diesem Land die besondere Aufmerksamkeit, und das in einzelnen Wissenschaftszweigen, unter anderem der Medizin, schon seit dem neunzehnten Jahrhundert. Die 1849 erfolgte Habilitation von Jan Josef Partl (1802 bis 1869) an der Karls-Universität in Prag für Geschichte der Mathematik ist, so vermute ich, die erste Habilitation in Mathematikgeschichte überhaupt in irgendeinem Land, blieb freilich damals ein Ausnahmefall. In den zwanzig Jahren zwischen den beiden Weltkriegen hielt Quido Vetter (1881–1960) an dieser Universität regelmäßig mathematikhistorische Lehrveranstaltungen, die er auch nach dem letzten Krieg noch einige Jahre fortsetzte. Wie Vetter in Prag, so legte auch eine kleine

---

[9]) Problems[8]), S. 132.
[10]) Problems[8]), S. 135.

aktive Gruppe an der Universität Brünn großes Gewicht auf die Geschichte der Elementarmathematik, mit der ihrer Ansicht nach die zukünftigen Lehrer während des Studiums vertraut gemacht werden sollten.

Seit etwa zwanzig bis fünfundzwanzig Jahren konzentriert sich in der Tschechoslowakei die wissenschaftshistorische Forschung bei der Akademie der Wissenschaften in Prag. Die dort tätigen Vertreter der Geschichte der Mathematik unterrichten zugleich seit 1962 im Rahmen des Lehrplanes für die Studenten der Mathematik und Physik an der Universität im dritten bzw. vierten Studienjahr Mathematikgeschichte und haben auch die Möglichkeit, Staatsexamensarbeiten in diesem Fach zu vergeben. Darüber hinaus führten sie, ähnlich wie das in Polen und der DDR geschieht, Fortbildungskurse in Geschichte der Mathematik für Lehrer und Studienräte durch, da früher – im Gegensatz zu heute – die zukünftigen Fachlehrer der Mathematik nicht verpflichtet waren, an mathematikhistorischen Lehrveranstaltungen teilzunehmen. Zugleich hat sich der Inhalt dieser Veranstaltungen sehr gewandelt. Stand lange, wie gesagt, die Entwicklung der Elementarmathematik im Mittelpunkt, so ist das Ziel heute[11]): „Einen Gesamtüberblick über die Entwicklungen der Mathematik zu vermitteln in ihren Beziehungen zur Entwicklung der Gesellschaft, ihrer Wirtschaft und ihren philosophischen Ansichten und zur Entwicklung jener Disziplinen, in denen Mathematik zur Anwendung kommt (wie Technik, Physik, Astronomie, Ökonomie, Biologie).“ Natürlich tritt in Prag die Aufgabe hinzu, die Einzeltatsachen der Geschichte der Mathematik in das marxistische Weltbild einzuordnen und aus der Sicht des dialektischen und historischen Materialismus zu interpretieren. Das Bestreben der gegenwärtig tätigen Mathematikhistoriker, den historischen Stoff möglichst fachbezogen zu vermitteln und sich nicht auf allgemeine kulturelle Bezüge zu beschränken, fand in der noch in Gang befindlichen Reform der Studienordnung für die Lehramtskandidaten in der Mathematik in der Tschechoslowakei darin seinen Ausdruck, daß jetzt für die beiden letzten Studiensemester (im 9. und 10. Semester) der Besuch einer zweistündigen Vorlesung und eines zugehörigen Seminars über Geschichte der Mathematik zur Pflicht gemacht worden ist. Dann ist also die mathematische Ausbildung der zukünftigen Studienräte schon weit fortgeschritten. Dies gilt nicht nur für die Universität Prag, sondern auch für die weiteren Landesuniversitäten Brünn und Preßburg sowie für die Pädagogischen Hochschulen des Landes. Um auch für diese qualifizierte Dozenten heranzuziehen, wurden in den großen Semesterferien der letzten drei Jahre von der Akademie der Wissenschaften in Prag spezielle Sommerkurse durchgeführt. Genau diesen Studienordnungen angepaßte Lehrbücher, Anleitungshefte für die Dozenten und audiovisuelle Hilfsmittel befinden sich in Vorbereitung, denn der Inhalt der Vorlesungsstunden (dreißig pro Semester, also zwei pro Woche) ist ebenso genau festgelegt wie das Gesamtziel dieser Veranstaltung. Dabei stehen Probleme der mathematischen Logik und Grundlagen sowie philosophische Fragen und die Beziehungen zwischen Mathematik und dialektischem Materialismus jetzt sehr im Vordergrund; beim Studium der Entwicklungen der Mathematik soll nach der neuen Studienordnung insbesondere der Entwicklung im eigenen Land, in der

---

[11]) Problems[8]), S. 153.

Sowjetunion und in den sozialistischen Ländern Aufmerksamkeit gezollt werden[12]). Als übergeordnete Ziele werden genannt die Vermittlung der Befähigung, die Bedeutung der Wissenschaft richtig einzuschätzen, ihre Entwicklungstendenzen für die nächste Generation erkennen sowie im Schulunterricht das Interesse der Schüler in diesem Bereich menschlicher Aktivität wecken zu können. In dieser Hinsicht sei besonders wichtig[13]), „die historische Interpretation der Bedingungen des Ursprungs bestimmter Forschungsprobleme; das Herausarbeiten der konkreten Möglichkeiten, die zu ihrer Lösung unter den tatsächlich gegebenen historischen Bedingungen angewandt wurden; die Beschreibung des Weges von der ersten Forschungshypothese zur Formulierung des wissenschaftlichen Ergebnisses, seiner Interpretation und seiner Anwendung in der Praxis." Zur Erläuterung wird in dem Bericht, auf den ich mich beziehe, noch festgestellt – bezogen auf die Geschichte einzelner Naturwissenschaften, nicht nur diejenige der Mathematik[14]): „In den naturwissenschaftlichen Disziplinen besteht der Ablauf ihrer Entwicklung nur scheinbar in der Abfolge der erzielten Resultate. In Wirklichkeit ist evident, daß ein führender Wissenschaftler oder eine Arbeitsgruppe, die ein wissenschaftliches Teilgebiet anführt, notwendigerweise die gesamte Dynamik dieser Disziplin erkennen muß; solche Erkenntnis kann aber nicht gewonnen werden ohne Einsicht in die langfristigen Trends. Nur unter dieser Voraussetzung [des Einblicks in die Gesamtdynamik und der langfristigen Tendenzen also] kann man die relative Bedeutung und Wahrheit wissenschaftlicher Erkenntnisse beurteilen und die möglicherweise falsch formulierten früheren Ziele und Methoden aufdecken." Wen würde dies nicht erinnern an André Weils Ausführungen über die Rolle der Strategie in der Mathematik, des Herausarbeitens von Leitideen, das Aufgabe des forschenden Mathematikers wie des Mathematikhistorikers sei?

Die französische Gesellschaft für Geschichte der Wissenschaften und der Technik veranstaltete vor zwei Jahren ihr erstes Spezial-Kolloquium. Bezeichnenderweise stand es unter dem Thema „Unterricht in der Geschichte der Naturwissenschaften für Studenten in naturwissenschaftlichen Fachrichtungen"[15]). Bei der Eröffnung führte der Präsident, Jacques Roger, aus[16]), daß unter den französischen Naturwissenschaftlern ein starkes Anwachsen des Interesses an der Geschichte der Wissenschaften zu beobachten sei. Dabei gehe es nicht um pädagogische Tricks, mit denen man die Unterrichtsatmosphäre auflockern und durch die Schilderung von Eigenheiten großer Vorfahren die Schüler und Studenten zum Lachen bringen könne. Vielmehr handele es sich um die Hoffnung, daß sich die Geschichte des Faches in den Fachunterricht integrieren lasse, um ihm jenen kulturellen Tiefgang zu vermitteln, der so oft fehle, und um zugleich dem Dogmatismus zu wehren, der ein Feind des forschenden Geistes ist. Die Geschichte der Wissenschaften solle nicht dem Fachunterricht zur Seite gestellt werden, sondern solle ihn durchdringen und von innen heraus transformieren.

---

12) Problems[8]), S. 189.

13) Problems[8]), S. 198/99.

14) Problems[8]), S. 199.

15) Actes du Colloque Enseignement de l'Histoire des Sciences aux Scientifiques, Nantes, 9–10–11 Octobre 1980. Edité par J. Dhombres (Université de Nantes). Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques, Paris [1981]. 180 S.

16) Actes[15]), S. 2.

Ein Teilnehmer bemerkte in der Diskussion[17]), daß sich vor allem Mathematiker vom Thema der Tagung angesprochen fühlten, und fragte, ob die Unterrichtsreformen der vorausgegangenen Jahre hier zu einer Art Gegenbewegung geführt haben. Ein anderer Teilnehmer ergänzte[18]), mathematische und naturwissenschaftliche Theorien würden im Unterricht fälschlicherweise als fertige, abgeschlossene, sozusagen letzte Wahrheiten vorgetragen. Da der Schüler oder Student nicht sehe, wie sie entstanden sind, könne er oft ihren Sinn nicht begreifen. In Wirklichkeit seien sie das Resultat einer Modellbildung und würden in Annäherung an die wahren Verhältnisse immer mehr verfeinert. Die Konstruktion verbesserter Modelle, die Weiterbildung und der Ausbau von Theorien unterliegen also einem historisch-dynamischen Prozeß, wobei sich jede Zeit die ihr angemessenen theoretischen Werkzeuge schaffe. Da das Verständnis des Heranwachsenden eine ähnliche Abfolge vom Einfachen zum Komplexen durchlaufe, mache sich ein guter Pädagoge diese Tatsache zunutze. Er greife an geeigneten Stellen des Unterrichts auf frühere Beispiele oder ältere Modelle zurück, wobei er auf die historische Situation hinweise, in der sie entstanden sind. – Der Anklang an die oben erwähnte historisch-genetische Methode ist in diesen Ausführungen unüberhörbar.

Schließlich möchte ich noch kurz erinnern an den sehr interessanten Versuch, den man in England im Rahmen der Open University unternommen hat[19]). Die Open University entspricht ungefähr unserem Fernstudium im Medienverbund. Man hat in England jedoch nicht nur rein mathematische Vorlesungen im Fernseh- und Rundfunkprogramm übertragen, sondern seit sechs Jahren auch Sendefolgen, in denen mathematische Lehrgegenstände in ihrer historischen Entwicklung dargeboten werden. Hierzu gehört eine Einführung in die historisch gewachsenen Zahlsysteme – unser eigenes wie solche, die in anderen Kulturen entstanden und heute weitgehend vom indisch-arabischen dezimalen Positionssystem verdrängt worden sind; die Herausarbeitung der verschiedenen Zahlbegriffe, auf die die Mathematiker im Lauf der Entwicklung stießen und die sie dann präzisierten und formalisierten; hierzu gehört auch eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung mit starken historischen Bezügen. An der Vorbereitung dieser Sendungen und dem Verfassen der zugehörigen schriftlichen Begleitmaterialien haben übrigens nicht nur britische Mathematiker und Mathematikhistoriker mitgewirkt, sondern z. B. auch Prof. van der Waerden aus Zürich, Prof. Folkerts aus München und Dr. Bos aus Utrecht. Im sog. Undergraduate-Bereich sind solche Kurse jedenfalls bei den Teilnehmern an mathematischen Programmen der Open University sehr gut angekommen.

Zum Abschluß dieser aus Zeitgründen lückenhaften Übersicht seien noch zwei auf internationaler Ebene sich anbahnende Bemühungen um eine Integration der Mathematikgeschichte in den Mathematikunterricht mit je einem Satz vorgestellt. Mit Blickrichtung auf den Unterricht an höheren Schulen bildete sich vor ei-

---

[17]) Actes[15]), S. 40/41.

[18]) Actes[15]), S. 28.

[19]) The Open University. Draft Outlines for History of Mathematics Course (Course Team Chairman: H. G. Flegg). Milton Keynes 1973. – Inzwischen sind etwa 25 Begleithefte bzw. Bücher und 20 Filme, Video- und Audiotapes über Themen aus der Geschichte der Mathematik von der Open University herausgegeben worden.

nigen Jahren die International Study Group for the History and Pedagogy of Mathematics, die z. B. auf dem Internationalen Kongreß für Mathematischen Unterricht 1976 in Karlsruhe hervortrat und über deren Bestrebungen man sich u. a. aus einer Reihe von Aufsätzen orientieren kann, die die Kollegen Otte und Stowasser 1977 und 1978 im Zentralblatt für Didaktik der Mathematik herausgaben[20]). Vorwiegend an Dozenten und Professoren, die in nordamerikanischen Colleges und Universitäten Mathematik lehren und dabei auch Erfahrungen mit der Einbeziehung mathematikhistorischer Aspekte gesammelt haben, richtet sich eine unter meiner Beteiligung in Vorbereitung befindliche Summer School, die 1983 von der International Commission on the History of Mathematics in Toronto durchgeführt werden soll[21]).

3

Ich habe versucht, in diesen Vortrag Beispiele für verschiedene Ansichten darüber einfließen zu lassen, welche Bedeutung die Geschichte der Mathematik für die Mathematik hat oder haben sollte und wie sie unter bestimmten Bedingungen in die Ausbildung einbezogen werden kann. Es ist klar: wie in der Mathematik selbst, so gibt es auch hier keinen Königsweg, kein Patentrezept.

Ich denke, das Wichtigste ist die Verbreitung der Einsicht – und hieran kann jeder von uns mitwirken –, daß im Sinne meiner Thesen Mathematik sowohl als abstrakte Wissenschaft als auch als historisch gewachsenes und sich entwickelndes soziales und kulturelles Phänomen gesehen werden muß. Wenn sich diese Einsicht verbreitet, kann nicht mehr passieren, was keiner anderen Wissenschaft in diesem Maß widerfährt: daß gebildete Menschen sich damit brüsten, von Mathematik nie etwas verstanden zu haben, während sie ihre etwa vorhandene Ahnungslosigkeit oder ihr Unverständnis auf fast allen anderen Kulturgebieten lieber schamvoll verschweigen.

C. P. Snow hat das inzwischen geflügelte Wort von den zwei Kulturen geprägt: der klassisch-humanistischen einerseits, der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen andererseits, die in Gefahr sind auseinanderzufallen, weil sie sich gegenseitig nicht mehr verstehen. Auch wir als Mathematiker können etwas dazu tun, den Wahnsinn einer solchen Entwicklung einzudämmen – einer Entwicklung, deren Folgen die irrationalen Ängste vieler junger Menschen hervorrufen und Ursache ihrer bedrohlichen Wissenschafts- und Technikfeindlichkeit sind.
Da wir als Mathematiker wissen, daß fachliche Spezialisierung und abstraktes mathematisches Denken unentbehrlich sind bei der Gestaltung unserer Gegenwart und Zukunft, können und dürfen wir es nicht einfach hinnehmen, wenn sich Gleichgültigkeit oder gar Feindseligkeit der Mathematik gegenüber ausbreitet.
Nicht jeder ist zum Mathematiker geboren; doch jeder, der eine höhere Schule durchlaufen hat, sollte imstande sein zu verstehen, daß die mathematische Forschung –

---

[20]) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. **9** (1977) H. 4, und **10** (1978), H. 2: Historische Aspekte für Mathematik-Didaktik und -Unterricht. (Enthält zahlreiche Literaturhinweise)

[21]) Historia Mathematica **9** (1982) 207, 210.

die Grundlagenforschung wie die angewandte – integraler Bestandteil unserer Zivilisation und Kultur ist. Ich sehe nicht, wie die Vermittlung und Verbreitung dieser Einsicht ohne eine historische Betrachtungsweise der Mathematik überhaupt möglich ist. Darin liegt, um auf die Formulierung des Themas zurückzukommen, die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung[22]).

Wie sie diese Aufgabe konkret wahrnehmen kann, welche Maßnahmen und Hilfsmittel dafür erforderlich wären, sollte vielleicht einmal in Arbeitskreisen oder Seminaren unter Beteiligung aller Betroffenen und unter Auswertung der in anderen Ländern gesammelten Erfahrungen beraten werden. Ich glaube, auch dies könnte eine Aufgabe der DMV sein.

---

[22]) Erst im Oktober erhielt ich Kenntnis von einem in einer neuen Zeitschrift veröffentlichten Aufsatz von Dirk J. Struik: Why Study the History of Mathematics? Undergraduate Mathematics and its Applications (UMA) **1** (1981) 3–28. Darin vertritt der Autor verwandte Ansichten, die er zum Schluß in sechs Punkten zusammenfaßt:

> Now, what do the reasons I have given for making the study of the history of mathematics attractive amount to? Let me summarize: 1) It satisfies the desire that many of us have to know how things in mathematics have originated and developed. 2) The study of classical authors may offer great satisfaction in itself, but also can be of help in teaching and research. 3) It helps to understand our cultural heritage, not only through the applications mathematics has had and still has to astronomy, physics and other sciences, but also because of the relation it has had and still has to such varied fields as art, religion, philosophy, and the crafts. 4) It may provide a common ground where specialists in mathematics and other fields of science can pleasantly meet. 5) It offers background for the understanding of trends in mathematical education of past and present. 6) You can spice your teaching and conversation with anecdotes.

Prof. Dr. C. J. Scriba
Universität Hamburg
Institut für Geschichte der Naturwissenschaften,
Mathematik und Technik
Bundesstraße 55, 2000 Hamburg 13

(*Eingegangen 9. 11. 1982*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
85 (1983) 129–145

Partielle Differentialgleichungen und Differentialgeometrie[1)]

S. Hildebrandt, Bonn

1 Einführung

Länge, Flächeninhalt, Volumen und Krümmung sind die grundlegenden Begriffe der Differentialgeometrie, und demgemäß erfreuen sich Probleme, die mit diesen Begriffen in Verbindung stehen, seit altersher großen Interesses. Denken wir nur an die berühmte isoperimetrische Aufgabe oder an das Plateausche Problem für Minimalflächen. Die in diesem Zusammenhang auftretenden Differentialgleichungen verdienen folglich besondere Aufmerksamkeit.

So hat schon Euler[2)] [12] im Jahre 1729 die Differentialgleichungen angegeben, denen die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf einer Fläche genügt. Diese Gleichungen folgen am einfachsten aus der Tatsache, daß jede Schmiegebene einer Kürzesten die Flächennormale enthält[3)], was dem Verschwinden der geodätischen Krümmung der Kürzesten entspricht. Jede Kurve, die diesem System von Differentialgleichungen genügt, wird gewöhnlich eine Geodätische genannt. Die Gleichungen einer Geodätischen $u(t) = (u^1(t), u^2(t), \ldots, u^n(t))$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit N mit lokalen Koordinaten $(u^1, \ldots, u^n)$ und mit dem Linienelement

$$(1) \qquad ds = \sqrt{g_{ik}(u)\, du^i du^k}$$

lauten in der heute üblichen Form

$$(2) \qquad \frac{d^2u^\ell}{dt^2} + \Gamma^\ell_{ik}(u)\, \frac{du^i}{dt}\, \frac{du^k}{dt} = 0, \qquad 1 \leqslant \ell \leqslant n,$$

wobei $\Gamma^\ell_{ik} = \frac{1}{2}\{g_{i\ell,k} + g_{\ell k,i} - g_{ik,\ell}\}$ die Christoffelsymbole zweiter Art zur positiv definiten, symmetrischen Matrix (g_{ik}) bezeichnen. Bekanntlich ist (1) gerade das

1) Hauptvortrag auf der Jahrestagung der DMV in Bayreuth 1982.

2) Eulers Abhandlung [12] ist auf das Jahr 1728 datiert, doch dürfte sie erst 1729 entstanden sein; vgl. [6], S. 96 und S. 117. Wie mir Herr Fellmann freundlicherweise mitgeteilt hat, lassen jedoch neuere historische Untersuchungen auch das Jahr 1728 als Entstehungsjahr möglich erscheinen.

3) Es kann wohl als gesichert gelten, daß bereits Johann Bernoulli diese Bedingung im Jahre 1698 entdeckt und Leibniz mitgeteilt hat, vgl. Virorum Celeber. G. G. Leibnitii et Joh. Bernoulli Commercium Philosophicum et Matematicum, Lausanne & Genevae, 1745, Tom. I, Seite 393, Epist. LXXVI, sowie Carathéodory [6], S. 117.

System der Eulerschen Gleichungen für das Variationsintegral

$$(3)\qquad \int_{t_1}^{t_2} g_{ik}(u)\,\frac{du^i}{dt}\,\frac{du^k}{dt}\,dt.$$

Eine andere wohlbekannte Gleichung ist die von Lagrange [58] aufgestellte Minimalflächengleichung. Sie ist die Eulersche Gleichung zum Flächeninhalt

$$(4)\qquad \int_\Omega \sqrt{1+|Dz|^2}\,dx, \qquad |Dz|^2 = D_\alpha z D_\alpha z,$$

für nichtparametrisch gegebene Hyperflächen

$$z = z(x), \qquad x = (x^1, \ldots, x^m) \in \Omega$$

im (m + 1)-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbf{R}^{m+1}$, wobei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbf{R}^m$ ist, und lautet

$$(5)\qquad \operatorname{div} \frac{Dz}{\sqrt{1+|Dz|^2}} = 0$$

oder

$$(5')\qquad D_\alpha[(1+|Dz|^2)^{-1/2} D_\alpha z] = 0, \qquad D_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Die Gleichung (5) besagt gerade, daß die mittlere Krümmung H einer Fläche $z = z(x)$, $x \in \Omega$, die dem Flächeninhalt (4) bei vorgegebenen Randwerten auf $\partial\Omega$ einen kleinsten oder jedenfalls einen stationären Wert verleiht, notwendigerweise verschwinden muß. Üblicherweise nennt man Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung Minimalflächen.

Zweidimensionale Minimalflächen im $\mathbf{R}^3$ mit einer Parameterdarstellung

$$u(x) = (u^1(x), u^2(x), u^3(x)), \qquad x = (x^1, x^2) \in B,$$

sind die kritischen Punkte des Flächeninhalts

$$(6)\qquad \mathscr{A}(u) = \int_B |u_{x^1} \wedge u_{x^2}|\,dx^1 dx^2.$$

Wenn die Parameter x^1, x^2 konform sind, d. h. wenn

$$(7)\qquad |u_{x^1}|^2 = |u_{x^2}|^2, \qquad u_{x^1} \cdot u_{x^2} = 0 \quad \text{in } B$$

gilt, so ist die Relation $H = 0$ an allen regulären Stellen der Fläche gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$(8)\qquad \Delta u = 0 \quad \text{in } B, \qquad \Delta = D_1^2 + D_2^2.$$

Damit sind wir zur von Monge und Weierstraß gewonnenen Auffassung gelangt, wonach eine Minimalfläche im $\mathbf{R}^3$ nichts anderes als ein Tripel harmonischer Funktionen u^1, u^2, u^3 auf einem Gebiet $B \subset \mathbf{R}^2$ ist, deren erste Ableitungen den Konformalitätsbedingungen (7) genügen. Dementsprechend bestehen enge Beziehungen zwischen der Funktionentheorie und der Theorie der Minimalflächen, auf die H. A. Schwarz seine großartigen Untersuchungen über Minimalflächen gegründet hat, die auch heute nichts von ihrer Anziehungskraft und Bedeutung verloren haben.

Dieser Zusammenhang ist immer noch wesentlich für einen umfangreichen Teil der Minimalflächentheorie[4]).

Bekanntlich sind die Gleichungen (8) die Eulergleichungen des Dirichletintegrals

(9) $$\mathscr{D}(u) = \int_B |Du|^2 dx^1 dx^2,$$

und die Relationen (7) ergeben sich, wie Courant [9] gezeigt hat, bei gewissen geometrischen Randbedingungen als notwendige Variationsbedingungen für (9).

Ersetzen wir den dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbf{R}^3$ durch eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit N mit einem Linienelement (1), so lautet das Dirichletintegral für zweidimensionale Flächen $u : B \to N$, die auf einem Gebiet B des $\mathbf{R}^2$ parametrisiert sind,

(10) $$\mathscr{E}(u) = \int_B g_{ik}(u) D_\alpha u^i D_\alpha u^k dx^1 dx^2,$$

und die notwendigen Bedingungen (7) und (8) für einen kritischen Punkt u von (10) sind nunmehr durch

(11) $$g_{ik}(u) u^i_{x^1} u^k_{x^1} = g_{ik}(u) u^i_{x^2} u^k_{x^2}, \qquad g_{ik}(u) u^i_{x^1} u^k_{x^2} = 0 \quad \text{in } B$$

(12) $$\Delta u + \Gamma^\varrho_{ik}(u) D_\alpha u^i D_\alpha u^k = 0 \quad \text{in } B$$

zu ersetzen. Die den Gleichungen (11) und (12) genügenden Abbildungen $u : B \to N$ sind die zweidimensionalen Minimalflächen in der Mannigfaltigkeit N.

Man sieht übrigens ohne Mühe, daß sich auch auf dem $\mathbf{R}^3$ das Integral (9) beim Übergang von cartesischen Koordinaten u auf beliebige krummlinige Koordinaten in ein Integral der Form (10) transformiert. Daher formen sich (7), (8) in die Gleichungen (11), (12) um. Will man also nichtlineare geometrische Randbedingungen für Minimalflächen in $\mathbf{R}^3$ durch geeignete Aufbiegetransformationen lokal linearisieren, so hat man anschließend statt des linearen Systems (8) das nichtlineare elliptische System (12) in Kauf zu nehmen.

Noch allgemeiner können wir Abbildungen $U : M \to N$ einer m-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M in eine ebensolche von n Dimensionen betrachten. Wir denken uns lokale Koordinaten $x = (x^1, \ldots, x^m)$ und $u = (u^1, \ldots, u^n)$ auf M und N, bezüglich deren die Linienelemente $d\sigma$ und ds von M bzw. N die Form $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta$ bzw. $ds^2 = g_{ik}(x) du^i du^k$ haben mögen (bezüglich doppelt auftretender griechischer bzw. lateinischer Indizes werde von 1 bis m bzw. n summiert). Wird nun die Abbildung $U : M \to N$ hinsichtlich dieser Koordinaten lokal durch $u(x) = (u^1(x), \ldots, u^m(x))$ gegeben, so lautet das Analogon von (9) bzw. (10) nunmehr

(13) $$\mathscr{E}(U) = \int_M \gamma^{\alpha\beta}(x) g_{ik}(u) D_\alpha u^i D_\beta u^k \sqrt{\gamma(x)}\, dx,$$

---

[4]) Man vgl. hierzu die Vorlesungen [69] von J. C. C. Nitsche. Hinsichtlich neuerer Entwicklungen verweisen wir auf den Vortrag [3] von R. Böhme im Séminaire Bourbaki.

und die zugehörigen Eulergleichungen sind

(14) $\Delta_M u + \Gamma^{\varrho}_{ik}(u)\gamma^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i D_\beta u^k dx = 0,$

wobei $(\gamma^{\alpha\beta}) = (\gamma_{\alpha\beta})^{-1}$, $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$ gesetzt ist, und Δ_M bezeichnet den Laplace-Beltrami-Operator auf M:

(15) $$\Delta_M v = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} D_\beta\{\sqrt{\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha v\}.$$

Die Lösungen v der Gleichung

(16) $\Delta_M v = 0$

sind die harmonischen Funktionen auf M, also die kritischen Punkte des Funktionals

(17) $$\int_M \gamma^{\alpha\beta}(x) D_\alpha v D_\beta v \sqrt{\gamma(x)}\, dx.$$

Die kritischen Punkte von (13), die durch die Eulergleichungen (14) beschrieben werden, heißen harmonische Abbildungen von M in N. Als Spezialfälle harmonischer Abbildungen ergeben sich

(i) die Geodätischen, wenn $m = 1$ und $\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ist;

(ii) die auf konforme Parameter bezogenen Minimalflächen im $\mathbf{R}^3$: $m = 2$, $n = 3$, $M = B \subset \mathbf{R}^2$, $N = \mathbf{R}^3$, $\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{ik} = \delta_{ik}$;

(iii) die auf konforme Parameter bezogenen 2-dimensionalen Minimalflächen in einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit: $m = 2$, $M = B \subset \mathbf{R}^2$, $\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$;

(iv) die harmonischen Funktionen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M : $n = 1$, $N = \mathbf{R}$, $g_{ik} = \delta_{ik}$.

Sei jetzt M eine nichtparametrisch in der Form

$$z = z(x), \qquad x \in \Omega,$$

gegebene m-dimensionale Hyperfläche im $\mathbf{R}^{m+1}$. Sie trägt die vom umgebenden $\mathbf{R}^{m+1}$ induzierte Metrik $d\sigma$ mit

(18) $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta, \qquad \gamma_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} + z_{x^\alpha} z_{x^\beta}.$

Demgemäß können wir M als Riemannsche Mannigfaltigkeit $\{\Omega, d\sigma\}$ auffassen.

Es zeigt sich, daß die Hyperfläche M genau dann minimal in $\mathbf{R}^{m+1}$ ist und somit z(x) die Gleichung (5) auf Ω erfüllt, wenn z(x) eine harmonische Funktion auf $M = \{\Omega, d\sigma\}$ ist, d. h. wenn z(x) der Gleichung (16) zur Metrik (18) genügt. Dieser merkwürdige Zusammenhang zwischen Minimalflächen und harmonischen Funktionen (d. h. Lösungen von (16)) läßt sich auch auf den Fall höherer Kodimension übertragen. Wir nennen eine nichtparametrisch gegebene m-dimensionale Fläche $M = \{(x, z(x)) : x \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, z(x) = (z^{m+1}(x), \ldots, z^{m+p}(x))\}$ Minimalfläche in $\mathbf{R}^{m+p}$, wenn die erste Variation des Flächeninhalts

$$V(M) = \int_\Omega \sqrt{\gamma(x)}\, dx$$

verschwindet, wobei $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$ und

$$(19) \qquad d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta \quad \text{mit } \gamma_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} + D_\alpha z \cdot D_\beta z$$

gesetzt ist ($D_\alpha z \cdot D_\beta z = \sum_{i=m+1}^{m+p} D_\alpha z^i D_\beta z^i$).

Osserman [71] hat gezeigt, daß M genau dann minimal ist, wenn jede der p Funktionen $z^{m+1}(x), \ldots, z^{m+p}(x)$ eine harmonische Funktion auf $M \cong \{\Omega, d\sigma\}$ ist, d. h. wenn

$$(20) \qquad \Delta_M z^i := \frac{1}{\sqrt{\gamma}} D_\beta\{\sqrt{\gamma}\, \gamma^{\alpha\beta} D_\alpha z^i\} = 0$$

auf Ω gilt für $m + 1 \leqslant i \leqslant m + p$, wobei $\gamma_{\alpha\beta}$ durch (19) definiert ist. Neben diesen Beziehungen zwischen Minimalflächen und harmonischen Funktionen gibt es auch einen interessanten Zusammenhang zwischen Minimalflächen und harmonischen Abbildungen. Es ist wohlbekannt, daß das Gaußsche Normalenbild (die sogenannte Gaußabbildung) einer zweidimensionalen Minimalfläche M im $\mathbf{R}^3$ eine konforme und damit insbesondere harmonische Abbildung von M in die zweidimensionale Sphäre S^2 liefert. Eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses haben Ruh und Vilms [74] entdeckt. Um dieses Resultat zu beschreiben, erwähnen wir zunächst, daß die Graßmannsche Mannigfaltigkeit G(m, p) der orientierten m-dimensionalen Ebenen im $\mathbf{R}^{m+p}$ als Quotient

$$G(m, p) = SO(m + p)/SO(m) \times SO(p)$$

geschrieben und somit nach E. Cartan und Leichtweiß [60] bis auf den Fall $m = p = 2$ mit einer im wesentlichen eindeutigen invarianten Riemannschen Metrik versehen werden kann. Es ist nicht schwer zu sehen[5]), daß der Tangentialraum an G(m, p) in einem Punkt P_0 durch m x p-Matrizen $X = (x^i)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$, $m + 1 \leqslant i \leqslant m + p$ beschrieben werden kann derart, daß das innere Produkt $\langle X, Y\rangle$ zweier Tangentialvektoren X, Y in P_0 durch

$$\langle X, Y\rangle = \text{spur } X \cdot Y^*$$

gegeben wird, wobei Y^* die Transponierte von Y bezeichnet. Bei dieser Normierung der invarianten Metrik von G(m, p) gilt für die Schnittkrümmung K(X, Y) von G(m, p) das Folgende, wenn wir $\ell = \min\{m, p\}$ setzen:

$$(21) \qquad \begin{array}{ll} K(X, Y) \equiv 1 & \text{falls } \ell = 1, \\ 0 \leqslant K(X, Y) \leqslant 2 & \text{falls } \ell \geqslant 2. \end{array}$$

Weiterhin ist G(m, p), ausgerüstet mit der Cartanschen Metrik, ein symmetrischer, homogener und vollständiger Raum der Dimension mp, einfach zusammenhängend für $m + p \geqslant 3$, und S^m kann mit G(m, 1) und G(1, m) identifiziert werden.

Sei jetzt M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbf{R}^{m+p}$. Dann definieren wir die Gaußabbildung $\mathscr{G}: M \to G(m, p)$ von M als diejenige Abbildung, die jedem Punkt $Q \in M$ den Tangentialraum $T_Q M$ an M in Q zuordnet. Nunmehr gilt nach Ruh und Vilms:

---

[5]) Vgl. [37].

Die Gaußabbildung von M *ist genau dann harmonisch, wenn das Vektorfeld der mittleren Krümmung von* M *bezüglich* $\mathbf{R}^{m+p}$ *parallel ist. Insbesondere ist sie also harmonisch, wenn* M *eine minimale Untermannigfaltigkeit von* $\mathbf{R}^{m+p}$ *ist.*

Bei der Frage, ob man zu einer vorgeschriebenen Funktion $K > 0$ des Ortes oder der Normalenrichtung eine konvexe Hyperfläche im $\mathbf{R}^{m+1}$ finden kann, die K als Gaußsche Krümmung besitzt, tritt die Monge-Ampère Gleichung

$$\det(Z_{x^\alpha x^\beta}) = f(x, Z, DZ) \tag{22}$$

für eine reellwertige konvexe Funktion $Z = Z(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^m$, auf. Es steht zu vermuten, daß zwischen dieser völlig nichtlinearen Gleichung und den zuvor erwähnten Differentialgleichungen ebenfalls ein enger Zusammenhang besteht, doch wurde ein solcher bisher nur in Fall $m = 2$ gefunden. Ist nämlich $z = z(x^1, x^2)$ eine Lösung der zweidimensionalen Minimalflächengleichung (5), die wir auch in die Form

$$(1 + z_{x^2}^2) z_{x^1x^1} - 2z_{x^1} z_{x^2} z_{x^1x^2} + (1 + z_{x^1}^2) z_{x^2x^2} = 0 \tag{23}$$

bringen können, so kann man auf jedem einfach zusammenhängenden Teilgebiet des Definitionsbereiches von $z(x^1, x^2)$ eine Funktion $Z(x^1, x^2)$ finden, die der Gleichung

$$Z_{x^1x^1} Z_{x^2x^2} - Z_{x^1x^2}^2 = 1 \tag{24}$$

genügt und mit $z(x^1, x^2)$ durch die Integrabilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} &Z_{x^1x^1} = \frac{1 + z_{x^1}^2}{W}, \qquad Z_{x^1x^2} = \frac{z_{x^1} z_{x^2}}{W}, \qquad Z_{x^2x^2} = \frac{1 + z_{x^2}^2}{W}, \\ &W = \sqrt{1 + z_{x^1}^2 + z_{x^2}^2}\,, \end{aligned} \tag{25}$$

verknüpft sind.

In dem nun folgenden zweiten Teil des Vortrags wollen wir zeigen, wie sich aus einer genauen Kenntnis der Lösungen der gerade besprochenen Differentialgleichungen interessante differentialgeometrische Einsichten gewinnen lassen. Dabei ist es unmöglich, der Fülle der in der Literatur vorhandenen Ergebnisse an dieser Stelle in irgendeiner Weise gerecht zu werden. Wir beschränken uns stattdessen auf die Erörterung einiger Untersuchungen, die mit klassischen Resultaten von Liouville und S. Bernstein verbunden sind und an denen wir das Wechselspiel zwischen den verschiedenen fundamentalen Differentialgleichungen einerseits und der Differentialgeometrie andererseits besonders gut demonstrieren können. Weitere Resultate in dieser Richtung finden sich in unserem Bericht [39]. Darüber hinaus geben die Übersichtsartikel [92], [94] von Yau mitsamt der Aufgabensammlung [93] einen sehr guten Eindruck von der Rolle, welche die partiellen Differentialgleichungen heute in der Differentialgeometrie spielen.

Die soweit von uns behandelten Probleme befassen sich ausschließlich mit Differentialgleichungen vom elliptischen Typ. Daher werden wir zum Abschluß noch zwei Fragen streifen, die auf hyperbolische Gleichungen führen. Dagegen bleiben Aufgaben wie beispielsweise Verbiegungsprobleme, die Gleichungen vom gemischten Typ entsprechen, gänzlich unberührt. Hier findet sich noch ein weites Feld für Untersuchungen, das bisher nur selten betreten worden ist.

2 Über die Sätze von Bernstein und Liouville

Wir wollen jetzt an Hand einiger Beispiele sehen, wie sich die Beziehungen zwischen den verschiedenen Differentialgleichungen, die wir im Abschnitt 1 betrachtet haben, zur Gewinnung geometrischer Resultate benutzen lassen.

Das folgende berühmte Ergebnis stammt von S. Bernstein [2]:

Eine ganze (d. h. auf ganz $\mathbf{R}^2$ *gegebene) Lösung* $z(x^1, x^2)$ *der Minimalflächengleichung* (23) *ist notwendigerweise eine affin lineare Funktion:*

$$z(x^1, x^2) = \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma; \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}.$$

Bernsteins Entdeckung zeigt den bemerkenswerten Unterschied zwischen den Lösungen linearer und nichtlinearer Differentialgleichungen. Bekanntlich haben die Lösungen der Potentialgleichung (8) nur für $m = 1$ die oben genannte einfache Gestalt, während für $m \geqslant 2$ das Lösungsgebilde von (8) viel größer ist.

Einen interessanten Beweis des Bernsteinschen Satzes leitete Jörgens aus dem folgenden schönen, von ihm entdeckten Ergebnis her ([50], [51]):

Jede ganze Lösung $Z(x^1, x^2)$ *der Monge-Ampèreschen Gleichung* (24) *ist notwendig ein Polynom zweiten Grades in den Variablen* x^1 *und* x^2.

Ist nun $z(x^1, x^2)$ eine Lösung von (23), so kann man, wie oben bemerkt, eine Funktion $Z(x^1, x^2)$ finden, die auf $\mathbf{R}^2$ sowohl der Gleichung (24) als auch den Relationen (25) genügt. Wegen des Jörgensschen Satzes sind dann die zweiten Ableitungen von Z konstante Funktionen auf $\mathbf{R}^2$, was vermöge (25) die Konstanz der ersten Ableitungen von z und somit die Behauptung des Bernsteinschen Satzes nach sich zieht.

Pogorelov [72] hat – nach Vorarbeit von Flanders und Calabi – das Jörgenssche Ergebnis auf höhere Dimensionen verallgemeinert. Es gilt:

Jede auf $\mathbf{R}^m$ *definierte Lösung der Gleichung*

$$\det (Z_{x^\alpha x^\beta}) = 1$$

ist notwendig ein quadratisches Polynom in $x^1, \ldots, x^m$.

Bisher ist nicht bekannt, ob eine Verwandtschaft zwischen den Lösungen der Monge-Ampèreschen Gleichung (22) und denen der Minimalflächengleichung (5) besteht, die den Relationen (25) ähnelt. Gewiß ist nur, daß man – falls überhaupt eine Beziehung bestehen sollte – jedenfalls nicht die Gültigkeit des Bernsteinschen Satzes für höhere Raumdimensionen herleiten kann, denn Bombieri, De Giorgi und Giusti [4] haben für $m \geqslant 8$ die Existenz ganzer nichtlinearer Lösungen von (5) auf $\mathbf{R}^m$ nachgewiesen. Hingegen ist jede ganze Lösung von (5) auf $\mathbf{R}^m$ affin linear für $m \leqslant 7$. Dies wurde für $m = 3$ von De Giorgi [10], für $m = 4$ von Almgren [1] und für $m = 5, 6, 7$ von Simons [78] bewiesen. Andererseits hatte Moser [68] bereits 1961 die folgende „schwache" Version des Bernsteinschen Satzes gefunden, die für alle Raumdimensionen gilt:

Jede ganze (d. h. auf ganz $\mathbf{R}^m$ *definierte) Lösung der Minimalflächengleichung ist eine affin lineare Funktion, falls ihr Gradient gleichmäßig auf* $\mathbf{R}^m$ *beschränkt ist.*

Es zeigt sich, daß dieses Ergebnis auf ganze Lösungen des durch (19) und (20) gegebenen *Minimalflächensystems* übertragen werden kann, falls man noch eine geeignete quantitative Bedingung an den Gradienten Dz hinzufügt. In der Tat haben Hildebrandt-Jost-Widman [37] bewiesen:

Sei $z(x) = (z^{m+1}(x), \ldots, z^{m+p}(x))$, $x \in \mathbf{R}^m$, *eine ganze* C^2*-Lösung des Minimalflächensystems*

$$\Delta_M z^i = 0 \quad \textit{auf} \quad \mathbf{R}^m, \qquad i = m+1, \ldots, m+p,$$

wobei M *die Mannigfaltigkeit* $\{\mathbf{R}^m, d\sigma\}$ *und* $d\sigma$ *die Metrik* $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$ *mit*

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} + z_{x^\alpha}(x) \cdot z_{x^\beta}(x) \quad \textit{und} \quad \gamma(x) = \det(\gamma_{\alpha\beta}(x))$$

bezeichne. Weiterhin gebe es eine Konstante c *mit*

$$c < \frac{1}{\cos^{\ell}\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\kappa\ell}}\right)}, \qquad \ell = \min\{m, p\}, \kappa = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad \ell = 1 \\ 2 & \quad \ell \geqslant 2 \end{cases},$$

so daß $\sup_{\mathbf{R}^m} \gamma(x) \leqslant c^2$

ausfällt. Dann sind die Funktionen $z^{i+1}, \ldots, z^{i+p}$ *affin linear.*

Offenbar liefert dieses Resultat den Moserschen Satz im Spezialfall p = 1. Es ist uns nicht bekannt, ob die quantitativen Annahmen des obigen Satzes wirklich erforderlich sind (außer für m = 3, wo Fischer-Colbrie [13] ihre Entbehrlichkeit nachgewiesen hat), doch dürfte dies in der Tat der Fall sein, wenn man an das irreguläre Verhalten der Lösungen des Minimalflächensystems denkt, das von Lawson und Osserman [59] aufgedeckt worden ist.

Der Beweis des genannten Satzes beruht auf der Tatsache, daß die Gaußsche Abbildung $\mathscr{G}: M \to G(m, p)$ der minimalen Untermannigfaltigkeit M von $\mathbf{R}^{m+p}$ in die Graßmannmannigfaltigkeit G(m, p) wegen des Satzes von Ruh-Vilms harmonisch ist und ferner, daß das Bild $\mathscr{G}(M)$ von M aufgrund der Voraussetzungen des Satzes in einer „*regulären Kugel*“ von G(m, p) liegt. Wegen des nachfolgenden „*Liouville-Satzes*“ liefert dies aber, daß $\mathscr{G}$ eine konstante Abbildung und somit M eine affin lineare Untermannigfaltigkeit von $\mathbf{R}^{m+p}$ ist.

Der besagte Liouville-Satz, auf den sich der Beweis stützt und der ebenfalls in [37] bewiesen wurde, lautet:

Sei $U: M \to N$ *eine harmonische Abbildung einer simplen Riemannschen Mannigfaltigkeit* M *in eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit* N. *Dann ist* U *eine konstante Abbildung, falls das Bild* U(M) *von* M *in einer regulären Kugel von* N *enthalten ist.*

Hierbei heißt M *simpel*, wenn es homöomorph zum $\mathbf{R}^m$ ist und wenn man M durch Koordinaten $x \in \mathbf{R}^m$ beschreiben kann, bezüglich deren die Metrik

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$$

von M gleichmäßig elliptisch ist, d. h. es gibt positive Zahlen λ und μ, so daß

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \gamma_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta \leqslant \mu|\xi|^2$$

für alle $x, \xi \in \mathbf{R}^m$ gilt.

Weiterhin heißt eine (geodätische) Kugel $B_R(Q)$ aus N mit dem Radius $R > 0$ und dem Mittelpunkt $Q \in N$ *regulär*, wenn $B_R(Q)$ nicht den Schnittort C(Q) von Q trifft und wenn $\sqrt{\kappa_N} R < \pi/2$ gilt, wobei

$$\kappa_N = \max\{0, \sup_{B_R(Q)} K_N\}$$

ist und K_N die Schnittkrümmung von N bezeichnet.

Wegen der Voraussetzung

$$\sqrt{\gamma} \leqslant c < \cos^{-\ell}(\pi/(2\sqrt{\kappa\ell}))$$

ist $M = \{\mathbf{R}^m, d\sigma\}$ im obigen Bernsteinsatz simpel, und zum anderen ist $\mathscr{G}(M)$ in einer regulären Kugel enthalten. Ersteres ist evident, und letzteres ergibt sich aus der Abschätzung (21), die für N = G(m, p) die Beziehung

$$\kappa_N = \kappa = \begin{cases} 1 & \text{für } \ell = 1 \\ 2 & \phantom{\text{für }} \ell \geqslant 2 \end{cases}$$

liefert, in Verbindung mit einer bekannten Betrachtung des Schnittorts von G(m, p) durch Crittenden (vgl. [37] für eine eingehende Beschreibung), wenn man noch Rechnungen von Fischer-Colbrie [13] heranzieht.

Da nun die Gaußabbildung $\mathscr{G} : M \to G(m, p)$ genau dann harmonisch ist, wenn das Vektorfeld der mittleren Krümmung von M parallel ist (für p = 1 bedeutet dies, daß $\mathscr{G} : M \to \mathbf{R}^{m+1}$ genau dann harmonisch ist, wenn die mittlere Krümmung von M konstant ausfällt), so gilt der obige Bernsteinsatz nicht nur für minimale Graphen

$$\{(x, z(x)) : x \in \mathbf{R}^m, z(x) \in \mathbf{R}^p\},$$

sondern auch für Graphen, deren Feld der mittleren Krümmung parallel ist. Im Fall m = 2 ist das folgende, von Hoffman-Osserman-Schoen [43] gefundene schärfere Resultat richtig:

(i) *Sei* M *eine vollständige orientierte Fläche konstanter mittlerer Krümmung in* $\mathbf{R}^3$. *Dann ist* M *eine Ebene, wenn das Gaußsche Bild von* M *in einer offenen Halbsphäre von* S^2 *liegt. Ist das Gaußbild von* M *in einer abgeschlossenen Halbsphäre enthalten, so ist* M *entweder eine Ebene oder ein Zylinder.*

(ii) *Sei* M *eine vollständige orientierte Fläche in* $\mathbf{R}^4$, *deren mittlerer Krümmungsvektor parallel und nicht Null ist. Weiter sei* G(2, 2) *als Produkt von 2-Sphären* $S_1 \times S_2$ *dargestellt. Hat nun das Bild von* M *unter der Gaußabbildung die Eigenschaft, daß eine seiner Projektionen auf* S_1 *oder* S_2 *in einer abgeschlossenen Halbsphäre liegt, so ist* M *eine Ebene, ein Zylinder in einem* $\mathbf{R}^3 \subset \mathbf{R}^4$ *oder ein Produkt von Kreisen.*

Der Beweis hiervon benutzt unter anderem funktionentheoretische Hilfsmittel, die Osserman entwickelt hat, sowie ein bemerkenswertes Ergebnis von Fischer-Colbrie und Schoen [14].

Den oben genannten Liouville-Satz für harmonische Abbildungen gewinnt man aus der folgenden a priori Abschätzung, die ebenfalls in [37] bewiesen ist:

Sei $U : M \to N$ *eine harmonische Abbildung einer simplen Riemannschen Mannigfaltigkeit* M *in eine reguläre Kugel von* N. *Dann gibt es zwei Zahlen* $c > 0$

und $\sigma > 0$ *derart, daß für jedes* $d > 0$ *und für alle Punkte* $P_0, P_1, P_2 \in M$ *mit* $\mathrm{dist}_M(P_i, P_0) \leqslant \delta \leqslant d$, $i = 1, 2$, *die Ungleichung*

$$\frac{\mathrm{dist}_N(U(P_1), U(P_2))}{\mathrm{dist}_M^\sigma(P_1, P_2)} \leqslant \frac{c}{d^\sigma}$$

besteht.

Hält man nun P_0 und δ fest und läßt d gegen unendlich streben, so folgt

$$U(P) \equiv \text{const} \quad \text{für alle P mit } \mathrm{dist}_M(P, P_0) \leqslant \delta.$$

Da aber P_0 und $\delta > 0$ ganz beliebig gewählt werden können, so sehen wir, daß U eine konstante Abbildung ist.

Wir bemerken, daß in der Arbeit [18] von Giaquinta-Hildebrandt a priori Abschätzungen für harmonische Abbildungen $U : M \to N$ und deren Ableitungen im Inneren und am Rand von M hergeleitet werden, die nur von geometrischen Kenngrößen von M und N abhängen. Die wesentlichen Ideen für diese Abschätzungen wurden in den Arbeiten [32], [33], [35], [36], [83], [84], [85] von Hildebrandt-Widman und Wiegner über quasilineare elliptische Systeme in Diagonalform und in der Abhandlung [34] von Hildebrandt-Kaul-Widman über harmonische Abbildungen entwickelt. Ein wesentliches Werkzeug bei der Behandlung von Systemen in Diagonalform ist die Greensche Funktion (vgl. [61], [81], [20]), für die mittels der Harnackschen Ungleichung [68] präzise Abschätzungen aufgestellt werden können. Bei den harmonischen Abbildungen kann man sich allerdings auch mit einfacheren Hilfsmitteln behelfen, wie Sperner [79] neuerdings erkannt hat, da der Laplace-Beltrami-Operator Δ_M linear ist.

Aufbauend auf $C^{0,\alpha}$-Abschätzungen von [18] haben kürzlich Jost und Karcher [55] sehr nützliche „geometrische" Abschätzungen von U, DU, $D^2U, \ldots$ gewonnen durch Verwendung neuartiger Koordinatensysteme, die günstiger als die Riemannschen Normalkoordinaten sind.

Es ist hier nicht der Ort, die nicht ganz einfachen Überlegungen darzustellen, die zu Abschätzungen für die Lösungen quasilinearer elliptischer Systeme in Diagonalform führen, zumal sie in den Vorlesungen [39] mit der gebotenen Ausführlichkeit entwickelt sind. Vielmehr wollen wir noch einige Resultate beschreiben, die in den von uns betrachteten Themenkreis gehören.

Wir erinnern zunächst an das bekannte Resultat von Bers, wonach isolierte Singularitäten der Minimalflächengleichung (23) stets hebbar sind. Nach Finn gilt das analoge Ergebnis für (5) in jeder Dimension $m \geqslant 2$, und Nitsche ($m = 2$) sowie De Giorgi-Stampacchia ($m \geqslant 2$) haben gezeigt, daß sogar kompakte Singularitätenmengen mit verschwindendem (m-1)-dimensionalen Hausdorffschen Maß hebbar sind (vgl. [69], pp. 539–560). Für Lösungen des Minimalflächensystems (19), (20) ist diese Behauptung nicht mehr richtig, wie Lawson und Osserman [59] entdeckt haben. Wie sie bemerken, wird durch

$$z(x) = \frac{\sqrt{5}}{2} |x| \eta\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{für } x \neq 0$$

eine Lipschitzstetige Funktion $z : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definiert, die (19), (20) in $\mathbf{R}^4 - \{0\}$ löst, wenn $\eta(w_1, w_2) = (|w_1|^2 - |w_2|^2, 2w_1\overline{w}_2)$ die Hopfabbildung $\eta : S^3 \to S^2$

bezeichnet. Dieses instruktive Beispiel zeigt übrigens auch, daß eine schwache Lösung z eines gleichmäßig elliptischen nichtlinearen Systems in Divergenzform nicht unbedingt regulär sein muß, wenn sie von der Klasse $C^{0,1}$ ist, während nach Morrey [67] die Annahme $z \in C^1$ notwendig die Regularität von z nach sich zieht. Ein ganz andersgeartetes Beispiel, welches dasselbe Phänomen demonstriert, hat etwas früher Nečas angegeben.

Vor kurzen hat nun M. Meier [64] eine Verallgemeinerung des Bers-Finnschen Ergebnisses auf das Minimalflächensystem (19), (20) gefunden, deren Beweis auf den Überlegungen von [37] und auf dem Regularitätssatz von [34] beruht. Es gilt:

Sei $z(x) = (z^{m+1}(x), \ldots, z^{m+p}(x))$ *eine* C^2*-Lösung des Minimalflächensystems* (19), (20) *in* $\Omega - \Sigma$, *wobei* Ω *eine offene Menge in* $\mathbf{R}^m$ *und* Σ *eine kompakte Teilmenge von* Ω *mit verschwindender 2-Kapazität bezeichnet*, $m \geqslant 2$ (*beispielsweise könnte* Σ *aus endlich vielen isolierten Punkten von* Ω *bestehen*). *Weiterhin gelte*

$$\sup_{\Omega - \Sigma} \gamma(x) \leqslant c^2,$$

wobei c *eine Zahl mit*

$$c < \cos^{-\ell}(\pi/(2\sqrt{\kappa\ell})), \qquad \ell = \min\{m, p\}, \qquad \kappa = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad \ell = 1 \\ 2 & \phantom{\textit{für}} \quad \ell \geqslant 2 \end{cases}$$

bezeichnet. Dann kann z(x) *zu einer reell-analytischen Lösung von* (19), (20) *auf ganz* Ω *fortgesetzt werden.*

Der wesentliche Schritt in Meiers Beweis besteht darin zu zeigen, daß die Gaußabbildung $\mathscr{G} : M \to G(m, p)$ von $M = \{\Omega - \Sigma, d\sigma\}$ ein endliches Dirichletintegral $\mathscr{E}(\mathscr{G})$ besitzt und somit zu einer schwach harmonischen Abbildung $\tilde{\mathscr{G}}$ von $\tilde{M} = \{\Omega, d\sigma\}$ in G(m, p) fortgesetzt werden kann. Der Regularitätssatz von [34] liefert dann die Stetigkeit von $\tilde{\mathscr{G}}$, was die stetige Fortsetzbarkeit von z(x) auf Ω nach sich zieht, und Morreys Regularitätssatz gibt schließlich die obige Behauptung.

Ein anderer Liouville-Satz für harmonische Abbildungen stammt von Choi [8]:

Seien M *und* N *vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten, wobei die Ricci-Krümmung von* M *durch* $-A$ *von unten beschränkt sei*, $A \geqslant 0$. *Ferner bezeichne* $U : M \to N$ *eine harmonische Abbildung derart, daß* U(M) *in einer regulären Kugel von* M *enthalten ist. Dann ist* U *eine konstante Abbildung.*

Mit anderen Worten: die oben benutzte Bedingung „M sei simpel" kann durch „$\mathrm{Ricc}_M \geqslant -A$, $A \geqslant 0$" ersetzt werden. Es stellt sich die Frage, welche anderen Voraussetzungen an M ausreichen, die Konstanz einer harmonischen Abbildung $U : M \to N$ zu beweisen, deren Bild U(M) in einer regulären Kugel von N liegt.

Wir bemerken, daß Chois Satz offenbar nicht geeignet ist, um andere Bernsteinsätze für minimale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbf{R}^{m+p}$ zu gewinnen. Übrigens verallgemeinert er vorangehende Liouvillesätze von Yau ($N = \mathbf{R}$, vgl. [90]) und S.-Y. Cheng ($K_N \leqslant 0$, vgl. [7]).

Für zweidimensionale Minimalflächen stehen besondere Hilfsmittel zur Verfügung, um das Wechselspiel zwischen Minimalflächen und konformen Abbildungen auszunutzen. Neben den Vorlesungen [69] von Nitsche möchten wir die Aufmerksamkeit des Lesers besonders auf die Berichte [40], [41] und [70] von Hoffman und Osserman lenken, aus denen sich ein klares Bild über die neuesten Entwicklungen gewinnen läßt.

Wir wollen noch einige Ergebnisse über harmonische Abbildungen erwähnen, die in den letzten Jahren gefunden wurden. Neben den Regularitäts- und Existenzresultaten von [34] und dem Eindeutigkeitssatz [48] dürften besonders die Ergebnisse zur Existenz harmonischer Diffeomorphismen $U : M \to N$ im Fall $\dim M = \dim N = 2$ bemerkenswert sein, die in [52], [53] und [56] bewiesen wurden und die sowohl auf den Abschätzungen von [33], [34], [37] als auch auf den tiefliegenden unteren Schranken für die Funktionaldeterminante beruhen, die Heinz in [29] und [30] aufgestellt hat.

Isolierte Singularitäten P harmonischer Abbildungen $U : M - \{P\} \to N$ mit endlichem Dirichletintegral sind nach einem bekannten Satz von Sacks-Uhlenbeck hebbar, wenn $\dim M = 2$ ist. Dies gilt nicht mehr für $\dim M \geqslant 3$, denn nach [34] kann man mit Hilfe der Funktion $u(x) = x/|x|$, $x \in M = \{y \in \mathbf{R}^m : |y| \leqslant 1\}$, $m \geqslant 3$, eine harmonische Abbildung U von $M - \{0\}$ in die m-Sphäre S^m konstruieren, die in $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle hat und deren Dirichletintegral $\mathscr{E}(U)$ für $m \geqslant 3$ endlich ist.

Jäger und Kaul [49] haben kürzlich bewiesen, daß diese Abbildung für $m \geqslant 7$ ein absolutes Minimum von $\mathscr{E}$ unter Dirichletschen Randbedingungen liefert, während sie für $3 \leqslant m \leqslant 6$ instabil ist (d. h. die zweite Variation $\delta^2 \mathscr{E}(U, \Phi)$ von $\mathscr{E}$ fällt negativ aus für gewisse Variationen Φ mit Randwerten Null). Man könnte darum spekulieren, daß die Hausdorffdimension der Singularitätenmenge Σ der (beschränkten) absoluten Minima von $\mathscr{E}$ höchstens $m - 7$ ist.[6]) Ein solches Ergebnis ließe auch einen ganz neuen Zugang zum Bernsteinschen Satz erwarten. Vorläufig ist nur $\dim \Sigma \leqslant m - 3$ bewiesen worden in den bemerkenswerten Arbeiten von Giaquinta-Giusti [16], [17] und Schoen-Uhlenbeck [76].

3 Zwei hyperbolische Probleme

Wir wollen jetzt die Gleichungen (14) und (16) betrachten unter der Voraussetzung, daß $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$ eine Lorentz-Metrik bezeichnet. Wir nehmen an, daß $(\gamma_{\alpha\beta})$ eine symmetrische Matrix mit der Signatur $+ - \ldots -$ ist. Die harmonischen Abbildungen $U: M \to N$ einer Lorentzmannigfaltigkeit M in eine Riemannsche oder Lorentzsche Mannigfaltigkeit N sind wiederum durch (14) definiert, doch ist das Gleichungssystem nunmehr hyperbolisch. Von den Untersuchungen [21], [22] von Gu abgesehen, die den Fall $m = 2$ betreffen, gibt es keine Resultate zu diesem Problem. Allgemeiner sollten hyperbolische Systeme der Form

$$(26) \qquad -D_\beta\{A^{\alpha\beta}(x, u)D_\alpha u^\ell\} = f^\ell(x, u, Du), \qquad \ell = 1, \ldots, m,$$

[6]) Neue Ergebnisse, die Herr Baldes gefunden hat, scheinen jedoch anzuzeigen, daß diese Spekulation – jedenfalls in der hier angegebenen Form – nicht richtig ist (6.12.82). Man vgl. hierzu: A. Baldes, „Stability properties of the equator map from a ball into an ellipsoid". Preprint, Februar 1983. Weitere Ergebnisse finden sich in dem Preprint „Regularity of minimizing harmonic maps into the sphere" von R. Schoen und K. Uhlenbeck, den ich im Mai 1983 erhalten habe.

betrachtet werden, also Systeme „in Diagonalgestalt", bei denen die rechte Seite quadratisch von den ersten Ableitungen Du der Lösung u(x) abhängt. Bekanntlich lassen sich auch die Einsteinschen Feldgleichungen

$$(27) \qquad R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = -\kappa T^{\alpha\beta}$$

im Vakuum in der Art (26) schreiben, wenn man harmonische Koordinaten benutzt (vgl. [15], S. 218–220).

Betrachten wir jetzt den viel einfacheren Fall einer skalaren Gleichung (16) zu einer Lorentzmetrik $d\sigma$. Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Wellengleichung, also um eine normalhyperbolische Differentialgleichung.

Hadamard [28] hatte die Frage aufgeworfen, unter welchen Bedingungen an die Metrik $d\sigma$ das Huygenssche Prinzip im engeren Sinne (Hadamards „minor premise" [28], pp. 53–57) gilt, d. h. wann eine Welle, die eine willkürliche, räumliche beschränkte Anfangsstörung fortpflanzt, schalenförmig von einer vorderen und hinteren Wellenfront begrenzt wird derart, daß die Dicke der Wellenschale beliebig klein wird, wenn der Durchmesser des Anfangsstörungsgebietes gegen Null strebt. Mit anderen Worten: unter welchen Annahmen an $\gamma_{\alpha\beta}$ sind die durch (16) beschriebenen „pseudoharmonischen" Funktionen diffusionsfrei (die Wellenausbreitung vollziehe sich ohne „Nachhall")?

Hadamard hatte erkannt, daß dafür notwendig m gerade und $\geqslant 4$ sein muß. Ferner entdeckte er als notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Grundlösung von (16) keinen logarithmischen Anteil besitzen darf. Wie E. Hölder [44] gezeigt hat, kann dies nur dann der Fall sein, wenn die Skalarkrümmung R von $\gamma_{\alpha\beta}$ identisch verschwindet.

Allgemeiner betrachtet man homogene lineare Gleichungen

$$(28) \qquad \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta u + A^\alpha \nabla_\alpha u + Cu = 0 \quad (\nabla_\alpha = \text{kovariante Ableitungen})$$

vom normalhyperbolischen Typ, für die P. Günther [23] eine notwendige Bedingung zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips angegeben hat, die sich im Fall $A^\alpha \equiv 0$, $C \equiv 0$ auf die Höldersche Bedingung $R \equiv 0$ reduziert.

Hadamards Problem, diejenigen Gleichungen (28) zu charakterisieren, bei denen Huygens' Prinzip gilt, ist auch heute noch nicht vollständig gelöst, obwohl P. Günther und seine Schüler wichtige Teilresultate gefunden haben (vgl. [23–27], [75], [86–88]). Übrigens hatte Hadamard vermutet, daß sich alle derartigen Gleichungen (kurz: „Huygenssche Wellengleichungen") auf die spezielle Wellengleichung

$$(D_1^2 - D_2^2 - \ldots - D_m^2)u = 0$$

transformieren lassen vermöge der folgenden Elementartransformation:

(i) Koordinatentransformation
(ii) Multiplikation von (28) mit einer Funktion σ
(iii) Eichtransformation $u = \lambda u'$.

Stellmacher [80] zeigte, daß diese Vermutung falsch ist für $m = 2\ell \geqslant 6$, doch war der physikalisch wichtige Fall m = 4 offen geblieben. Erst P. Günther [25] gelang es, die Hadamardsche Vermutung in diesem Fall zu widerlegen. Er zeigte, daß gewisse ebensymmetrische Metriken (plane wave metrics)

(29) $d\sigma^2 = dx^1 dx^2 - a_{\mu\nu}(x^1) dx^\mu dx^\nu$,

(Summation über μ und ν von 3 bis $m = 2\ell \geqslant 4$, $(a_{\mu\nu}(x^1))$ positiv definit und nur von der Variablen x^1 abhängig), Gegenbeispiele zur Hadamardschen Vermutung liefern. Schimming [75] bewies, daß das Huygenssche Prinzip auch für Maxwellsche Gleichungen

(30) $d\omega = 0, \quad \delta\omega = 0$

zur Metrik (29) gilt. Weitere interessante Ergebnisse zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips finden sich in den Arbeiten [27], [63], [86–88].

Danach gilt es beispielsweise nicht bei skalarer Wellenausbreitung im Schwarzschildschen Feld [63], während sich elektromagnetische Wellen bei Erfülltsein der Einsteingleichungen $R_{\alpha\beta} = 0$ genau dann nach dem Huygensschen Prinzip fortpflanzen, wenn die Metrik $d\sigma$ vom Typ (29) ist.

In dem gerade besprochenen Fragenkreis dürften sich noch viele interessante Ergebnisse finden lassen, die gerade für Differentialgeometer reizvoll sein sollten. Wir erwähnen nur den von Günther [26] entdeckten Zusammenhang zwischen dem Huygensschen Prinzip und den Bachschen Feldgleichungen, die von Bach im Rahmen der konforminvarianten Weylschen Relativitätsheorie als Ersatz für die Einsteingleichungen vorgeschlagen wurden. Sie sind die Eulergleichungen zum Variationsintegral

$$\int C^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{-\gamma}\, dx,$$

wobei $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ die Komponenten des konformen Krümmungstensors bezeichnen. Weiterhin sind die Bemerkungen von E. Hölder im Abschnitt 3 der Arbeit [45] bedenkenswert.

Literaturverzeichnis

[1] Almgren, F. J.: Some interior regularity theorem for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. Annals of Math. (2), **84** (1966) 277–292

[2] Bernstein, S. N.: Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Z. **26** (1927) 551–558

[3] Böhme, R.: New results on the classical problem of Plateau on the existence of many solutions. Séminaire Bourbaki (1981/82), no. 579, 20 p

[4] Bombieri, E.; de Giorgi, E.; Giusti, E.: Minimal cones and the Bernstein theorem. Inventiones Math. **7** (1969) 243–269

[5] Bonnesen, T.; Fenchel, W.: Theorie der konvexen Körper. Erg. der Math., Berlin – Heidelberg: Springer 1934

[6] Carathéodory, C.: Gesammelte Mathematische Schriften, Band II. München: Beck 1955

[7] Cheng, S.-Y.: Liouville theorem for harmonic maps. Preprint

[8] Choi, H. J.: On the Liouville theorem for harmonic maps. Preprint 1981

[9] Courant, R.: Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. New York: Interscience 1950

[10] De Giorgi, E.: Una estensione del teorema di Bernstein. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **19** (1965) 79–85

[11] Eells, J.; Lemaire, L.: A report on harmonic maps. Bull. London Math. Soc. **10** (1978) 1–68

[12] E u l e r , L.: De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tom. III, 110–124 (1728)
[13] F i s c h e r - C o l b r i e , D.: Some rigidity theorems for minimal submanifolds of the sphere, Acta Math. **145** (1980) 29–46
[14] F i s c h e r - C o l b r i e , D.; S c h o e n , R.: The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980) 199–211
[15] F o c k , V.: Theorie von Raum, Zeit und Materie. Berlin: Akademie-Verlag 1960
[16] G i a q u i n t a , M.; G i u s t i , E.: On the regularity of the minima of variational integrals. Acta Math. **148** (1982) 31–46
[17] G i a q u i n t a , M.; G i u s t i , E.: The singular set of the minima of certain quadratic functionals. Annali Scuola Norm. Pisa, erscheint demnächst
[18] G i a q u i n t a , M.; H i l d e b r a n d t , S.: A priori estimates for harmonic mappings. J. Reine u. Angew. Math. **336** (1982) 124–164
[19] G a r b e r , W.-D.; R u i j s e n a a r s , S. N. M.; S e i l e r , E.; B u r n s , D.: On finite action solutions of the nonlinear σ-model. Ann. of Physics **119** (1979) 305–325
[20] G r ü t e r , M.; W i d m a n , K. - O.: The Green function for uniformly elliptic equations. Man. math. **37** (1982) 303–342
[21] G u , C h.: On the Cauchy problem for harmonic maps defined on two-dimensional Minkowski space. Preprint ITP-SB-79-85
[22] G u , C h.: On the initial-boundary value problem for harmonic maps from the 2-dimensional Minkowski space. Manuscripta math. **33** (1980) 51–58
[23] G ü n t h e r , P.: Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei partiellen Differentialgleichungen vom normalen hyperbolischen Typ. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Kl. **100**, H. 2 (1952)
[24] G ü n t h e r , P.: Über einige spezielle Probleme aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Kl. **102**, H. 1 (1957)
[25] G ü n t h e r , P.: Ein Beispiel einer nichttrivialen Huygensschen Differentialgleichung mit vier unabhängigen Veränderlichen. Arch. Rat. Mech. Anal. **18** (1965) 103–106
[26] G ü n t h e r , P.: Über das Cauchysche Problem für die Bachschen Feldgleichungen. Math. Nachr. **69** (1975) 39–56
[27] G ü n t h e r , P.; W ü n s c h , V.: Maxwellsche Gleichungen und Huygenssches Prinzip I. Math. Nachr. **63** (1974) 97–121
[28] H a d a m a r d , J.: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New York: Dover 1952 (Original edition: Yale Univ. Press, 1923)
[29] H e i n z , E.: On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. Analyse math. **5** (1956/57) 197–272
[30] H e i n z , E.: Existence theorems for one-to-one mappings associated with elliptic systems of second order, I, II. J. Analyse math. **15** (1965) 325–352; **17** (1966) 145–184
[31] H i l d e b r a n d t , S.; K a u l , H.: Two-dimensional variational problems with obstructions, and Plateau's problem for H-surfaces in a Riemannian manifold. Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972) 187–223
[32] H i l d e b r a n d t , S.; W i d m a n , K. - O.: Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order. Math. Z. **142** (1975) 67–86
[33] H i l d e b r a n d t , S.; W i d m a n , K. - O.: On the Hölder continuity of weak solutions of quasilinear elliptic systems of second order. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV), **4** (1977) 145–178
[34] H i l d e b r a n d t , S.; K a u l , H.; W i d m a n , K. - O.: An existence theory for harmonic mappings of Riemannian manifolds. Acta Math. **138** (1977) 1–16
[35] H i l d e b r a n d t , S.; W i d m a n , K. - O.: Variational inequalities for vector-valued functions. J. für Reine u. Angew. Math. **309** (1979) 191–220
[36] H i l d e b r a n d t , S.; W i d m a n , K. - O.: Sätze vom Liouvilleschen Typ für quasilineare elliptische Gleichungen und Systeme. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys. Kl., Nr. 4, Jahrgang 1979, 41–59
[37] H i l d e b r a n d t , S.; J o s t , J.; W i d m a n , K. - O.: Harmonic mappings and minimal submanifolds. Inventiones math. **62** (1980) 269–298
[38] H i l d e b r a n d t , S.; Liouville theorems for harmonic mappings and an approach to Bernstein theorems. Ann. of Math. Studies, Seminar on Differential Geometry, Princeton University Press 1982

[39] Hildebrandt, S.: Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings. Proc. 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Vol. I. Beijing: Science Press 1982, 481–615

[40] Hoffman, D. A.; Osserman, R.: The geometry of the generalized Gauss map. Mem. of the Amer. Math. Sco. Vol. **28**, 1980

[41] Hoffman, D. A.; Osserman, R.: The area of the generalized Gaussian image and the stability of minimal surfaces in S^n and $\mathbf{R}^n$

[42] Hoffman, D. A.: When is a map a Gauß map? Preprint 1982

[43] Hoffman, D. A.; Osserman, R.; Schoen, R.: On the Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature in $\mathbf{R}^3$ and $\mathbf{R}^4$. Preprint 1982

[44] Hölder, E.: Poissonsche Wellenformel in nichteuklidischen Räumen. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Kl. **99** (1939)

[45] Hölder, E.: Mit harmonischen Feldern verwandte Differentialformen unter Rand- und Anfangsbedingungen. Ann. Acad. Sci. Fenn. 336/7 (1963)

[46] Ivert, P. A.: On quasilinear elliptic systems in diagonal form. Math. Z. **170** (1980) 283–286

[47] Jäger, W.: Ein Maximumprinzip für ein System nichtlinearer Differentialgleichungen. Göttinger Nachr. Nr. 11, Jahrgang 1976

[48] Jäger, W.; Kaul, H.: Uniqueness and stability of harmonic maps and their Jacobi fields. Manuscripta math. **28** (1979) 269–291

[49] Jäger, W.; Kaul, H.: Vortrag in Oberwolfach, Konferenz über „Variationsrechnung", Juli 1982

[50] Jörgens, K.: Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. Math. Ann. **127** (1954) 130–134

[51] Jörgens, K.: Harmonische Abbildungen und die Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. Math. Ann. **129** (1955) 330–344

[52] Jost, J.: Eineindeutigkeit harmonischer Abbildungen. Diplomarbeit Bonn (1979). Eine gekürzte Fassung erschien in: J. für Reine u. Angew. Math. **324** (1981) 141–153

[53] Jost, J.: Eine geometrische Bemerkung zu Sätzen über harmonische Abbildungen, die ein Dirichletproblem lösen. Manuscripta math. **32** (1980) 51–57

[54] Jost, J.: Existence proofs for harmonic mappings with the help of a maximum principle. Preprint 1982

[55] Jost, J., und Karcher, H.: Geometrische Methoden zur Gewinnung von a-priori-Schranken für harmonische Abbildungen. Man. math. **40** (1982) 27–77

[56] Jost, J.; Schoen, R.: On the existence of harmonic diffeomorphisms between surfaces. Inventiones math. **66** (1982) 353–359

[57] Ladyzenskaya, O. A.; Ural'Ceva, N. N.: Linear and quasilinear elliptic equations. New York and London: Academic Press 1968 (English translation of the first Russian edition 1964)

[58] Lagrange, J. L.: Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indefinies. Miscellanea Taurinensia **2** (1760–61) 173–195; abgedruckt in: Oeuvres de Lagrange, Vol. I, Paris: Gauthier-Villars 1867

[59] Lawson, H. B.; Osserman, R.: Non-existence, non-uniqueness and irregularity of solutions to the minimal surface system. Acta Math. **139** (1977) 1–17

[60] Leichtweiß, K.: Zur Riemannschen Geometrie in Graßmannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **76** (1961) 334–366

[61] Littman, W.; Stampacchia, G.; Weinberger, H. F.: Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. fis. mat. III. Ser. **17** (1963) 43–77

[62] Mathison, M.: Le problème de M. Hadamard relatif à la diffusion des ondes. Acta Math. **71** (1939) 249–282

[63] McLenaghan, R. G.: An explicit determination of the empty space-time, on which the wave equation satisfies Huygens' principle. Proc. Cambridge Phil. Soc. **65** (1969) 139–155

[64] Meier, M.: Removable singularities of bounded harmonic mappings and minimal submanifolds. Preprint 1982

[65] Minkowski, H.: Gesammelte Abhandlungen. Leipzig 1911 (Wiederabdruck: New York: Chelsea 1967)

[66] Morrey, C. B.: The problem of Plateau on a Riemannian manifold. Ann. of Math. **49** (1948) 807–851

[67] M o r r e y , C. B.: Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1968
[68] M o s e r , J.: On Harnack's theorem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961) 577–591
[69] N i t s c h e , J. C. C.: Vorlesungen über Minimalflächen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975
[70] O s s e r m a n , R.: Minimal surfaces, Gauss maps, total curvature, eigenvalue estimates and stability. The Chern Symposium 1979. New York – Heidelberg – Berlin: Springer 1980
[71] O s s e r m a n , R.: Minimal varieties. Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969) 1092–1120
[72] P o g o r e l o v , A. V.: On the improper convex affine hyperspheres. Geometriae dedicata **1** (1972) 33–46
[73] P o g o r e l o v , A. V.: The Minkowski multidimensional problem. New York: Wiley 1978
[74] R u h , E. A.; V i l m s , J.: The tension field of the Gauss map. Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970) 569–573
[75] S c h i m m i n g , R.: Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei einer speziellen Metrik. ZAMM **51** (1971) 201–208
[76] S c h o e n , R.; U h l e n b e c k , K.: A regularity theory for harmonic maps. J. Diff. Geom. **17** (1982) 307–335
[77] S c h w a r z , H. A.: Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. I. Berlin: Springer 1890
[78] S i m o n s , J.: Minimal varieties in Riemannian manifolds. Ann. of Math. **88** (1968) 62–105
[79] S p e r n e r , E., j r.: A priori gradient estimates for harmonic mappings. Preprint no. 513, SFB 72, Bonn 1982
[80] S t e l l m a c h e r , K. L.: Eine Klasse von Huygensschen Differentialgleichungen. Math. Ann. **130** (1955) 219–233
[81] W i d m a n , K. - O.: The singularity of the Green Function for non-uniformily elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients. Uppsala University 1970
[82] W i d m a n , K. - O.: Hölder continuity of solutions of elliptic systems. Manuscripta mathematica **5** (1971) 299–308
[83] W i e g n e r , M.: Über die Regularität schwacher Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Manuscripta math. **15** (1975) 365–384
[84] W i e g n e r , M.: Ein optimaler Regularitätssatz für schwache Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Math. Z. **147** (1967) 21–28
[85] W i e g n e r , M.: A-priori Schranken für Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Manuscripta math. **18** (1976) 279–297
[86] W ü n s c h , V.: Über selbstadjungierte Huygenssche Differentialgleichungen mit vier unabhänigen Variablen. Math. Nachr. **47** (1970) 131–154
[87] W ü n s c h , V.: Maxwellsche Gleichungen und Huygenssches Prinzip II. Math. Nachr. **73** (1976) 19–36
[88] W ü n s c h , V.: Cauchy-Problem und Huygenssches Prinzip bei einigen Klassen spinorieller Feldgleichungen I, II. Beiträge zur Analysis **12** (1978) 47–76; **13** (1979) 147–177
[89] X a v i e r , F.: The Gauss map of the complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere. Ann. of Math. **113** (1981) 211–214
[90] Y a u , S. T.: Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. Comm. Pure Appl. math. **28** (1975) 201–228
[91] Y a u , S. T.: Some function theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. Indiana U. Math. J. **25** (1976) 659–670
[92] Y a u , S. T.: The role of partial differential equations in differential geometry. Proc. International Congress of Math., Helsinki 1978, 237–250
[93] Y a u , S. T.: Seminar on Differential Geometry. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1982. Problem Section, 669–706
[94] Y a u , S. T.: Survey on partial differential equations in differential geometry. Manuskript

Prof. Dr. S. Hildebrandt
Mathematisches Institut der
Universität
Wegelerstr. 10
5300 Bonn

(*Eingegangen 28. 12. 1982*)

Buchbesprechungen

Bouvier, A., La mystification mathématique (Collection: Formation des enseignants et formation continue) Paris: Hermann 1981, 152 p., 62 FF.

Das Buch ist ein hübsches Beispiel für mathematischen Journalismus und kann sich neben dem breiter angelegten Buch Davis-Hersh „The Mathematical Experience" sehen lassen, u. a. wegen seiner speziell didaktischen Note. Der Verfasser behandelt die vier Themen: I. die mathematische Tätigkeit, II. Der Beweis, III. Leistungsmessung, IV. Pädagogische Methoden in ebensovielen Kapiteln. Erfrischend sind die vielen respektlosen Fragen, denen weit weniger Antworten gegenüberstehen. In Kap. I geht der Verfasser von einem kleinen zahlentheoretischen Problem aus, auf das jeder kommen kann, der überhaupt den Mut hat, mit der Mathematik nicht bloß rezeptiv umzugehen. Es wird geschildert, wie jemand dies Problem anpacken könnte. Reizvoll ist die Schilderung der Versuche eines 14jährigen Mädchens, ein magisches Quadrat zu konstruieren. Anschließend geht der Verfasser rasant die berühmten elementar formulierbaren Probleme der Zahlentheorie durch und gibt weitere Anleitungen zu eigenem Tun. Zum Abschluß des Kapitels werden 50 Aufgaben gestellt. Lehrer werden – und dies wiederholt sich am Schluß eines jeden Kapitels – ermuntert, in ihrem Umkreis gewisse Beobachtungen, in diesem Falle über die Art, wie Leute mit mathematischen Problemen umgehen, anzustellen. – Kap. II. beschäftigt sich mit der Problematik des mathematischen Beweises. Es wird festgestellt, daß weder historisch noch gegenwärtig der Drang der Berufsmathematiker nach strengen Beweisen von der Mitwelt geteilt wird; auch unter Mathematikern war er zu verschiedenen Zeiten verschieden stark. Die Frage, wie die Berufsmathematiker zu ihren Beweisen gelangen, wird sorgsam diskutiert und mit einem zahlentheoretischen Beispiel erläutert. Ausführlich wird das Phänomen, daß auch in der Mathematik immer wieder Beweise sich als falsch erweisen, dokumentiert. In diesem Zusammenhang tauchen die Computer-Beweise auf, dem Appel-Haken-Kochschen Beweis der Vierfarbenvermutung wird besonderes Augenmerk gewidmet. Eine Diskussion des Begriffs „Strenge" in Forschung und Unterricht schließt das Kapitel ab. – Kap. III betrifft die Leistungsmessung und damit ein vor allem die Studenten und die Verwaltungen in Atem haltendes Problem. U. a. wird über Bewegungen und Praktiken in verschiedenen Hochschulen und Verwaltungen berichtet. – Kap. IV beschäftigt sich mit pädagogischen Methoden und der Frage nach den Zielen des mathematischen Unterrichts. Wozu soll man Mathematik lernen? – Das Buch steht deutlich im Zeichen des allgemeinen Trends in der Mathematik der achtziger Jahre: weg von der Architektur der großen Strukturen, hin zu den alten und neuen originellen Fragestellungen; die Etatkürzungen (nach der Mondlandung, sowie im Zeichen verschlechterter wirtschaftlicher Verhältnisse) haben die Mathematiker veranlaßt, über die Rechtfertigung ihrer Tätigkeit vor den sozialen Instanzen laut nachzudenken und diejenigen Kollegen, die das besonders geschickt tun, in die Feuerlinie zu schicken. Seit langem ruhig gepflegte Forschungsstile stehen auf diese Weise plötzlich im Rampenlicht: wir leben in einem Fröhlichkeit vorzeigenden Mathematik-Jahrzehnt, dessen Hausheilige György Pólya und Paul Erdös heißen; vielleicht wird man es einmal das „Ungarische Jahrzehnt" nennen. – Das Buch ist aktuell, aber nicht nur aktuell, und anregend geschrieben. Die Lektüre macht Spaß.

Erlangen K. Jacobs

Cannon, J. T., Dostrovsky, S., The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742 (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol. 6) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1981, 10 figs., ix + 184 p., cloth, DM 98,–

Mit diesem Buch haben die Autoren eine gründliche vergleichende Studie über die historischen Arbeiten von Newton, Taylor, Sauveur, Herrmann, Cramer, Euler, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli und Johann II Bernoulli erstellt, die in den gut fünfzig Jahren ab dem Erscheinen von Newtons „Principia" zur Schwingungstheorie verfaßt wurden. Die in den verschiedenen Arbeiten behandelten Probleme betreffen Druckwellen in elastischen Medien, Saitenschwingungen, das Mehrfachpendel und die hängende Kette, sowie die Schwingungen eines schwimmenden Körpers und eines Biegebalkens.

Es ist spannend zu verfolgen, wie zunächst lediglich mit der „Pendelbedingung" Frequenzen berechnet wurden und wie dann später, bei den Schwingungen einer schweren Kette, Laguerresche Polynome und Besselfunktionen auftauchen. Hierbei wurden auch die höheren Eigenschwingungsformen mathematisch entdeckt. Lange hat es offensichtlich gedauert, bis das Superpositionsprinzip klar erkannt wurde: Taylor (1713) nahm noch an, daß alle freien Schwingungen einer Saite asymptotisch gegen die Fundamentalschwingung gehen. Die Autoren zeigen außerdem, daß die Energieverfahren schon sehr früh verwendet wurden.

Das Buch gliedert sich in 15 Kapitel und einen Anhang. In jedem Kapitel sind jeweils einige zusammenhängende Arbeiten eines Autors beschrieben, die etwa zum gleichen Zeitpunkt entstanden. Dadurch handeln zum Beispiel drei Kapitel von Arbeiten Eulers, die jeweils 1727, 1735 und 1742 entstanden. Im Anhang ist Daniel Bernoullis Arbeit über die hängende Kette und über das Mehrfachpendel in der Originalfassung (Latein) reproduziert und auch in einer englischen Übersetzung wiedergegeben. Eine ausführliche Bibliographie und ein Stichwortverzeichnis vervollständigen das Buch. Druck und Aufmachung sind ansprechend gestaltet.

Dieses Buch ist ein ins Detail gehender wertvoller Beitrag zur Geschichte der mathematischen Physik und kann allen an diesem Thema interessierten Lesern ohne Einschränkung empfohlen werden.

Darmstadt P. Hagedorn

The Collected Letters of Colin MacLaurin (Stella Mills, ed.) Nantwich (Cheshire): Shiva Publ. Ltd. 1982, xx + 496 p., hardback, £15.00

Die vorliegende Edition umfaßt die derzeit bekannte Korrespondenz des „vielleicht größten schottischen Mathematikers" (S. XX) und Newtonanhängers Colin MacLaurin (1698–1746). Sie basiert auf Vorarbeiten von John Carnegie Eaton und veröffentlicht 218 Briefe von und an (67 Briefe) MacLaurin aus den Jahren 1714 bis 1745.

Dem Abdruck der Briefe geht eine kurze historische Einführung voraus, die MacLaurins Genealogie untersucht, insbesondere um zu zeigen, daß MacLaurin seinen sozialen Aufstieg eigener wissenschaftlicher Leistung verdankte. Sie charakterisiert seine mathematischen Interessen (Geometrie) und hebt einige wichtige Erkenntnisse hervor, die die Briefe vermitteln. Dazu zählen die enge geistige Beziehung zwischen Schottland und England nach deren politischem Zusammenschluß im Jahre 1707, das Eindringen aufklärerischen Gedankengutes nach Schottland mit Hilfe von MacLaurin, dessen Rolle als Sekretär der Philosophical Society von Edinburgh, die Abfassung des als Antwort auf Berkeleys Kritik gedachten „Treatise of fluxions" im Jahre 1739 (1742 publiziert). Mills betont, daß mit MacLaurins Tod ein Niedergang der britischen Mathematik verstärkt einsetzte, der schon mit dem Tode von James Stirling, Thomas Simpson und Robert Simson begonnen hatte und bis ins 19. Jahrhundert anhielt.

Mills hat die Korrespondenz zweigeteilt in einen Abschnitt „allgemeine" (115 Briefe) und „wissenschaftliche Korrespondenz" (103 Briefe). Sie sagt selbst, daß diese Einteilung zum Teil notwendigerweise willkürlich war. Ein solches Vorgehen erscheint aber auch deshalb wenig glücklich, weil so viele Korrespondenzen auseinandergerissen wurden, u. a. diejenigen mit Archibald Campbell of Knockby, Martin Folkes, Francis Hutcheson, dem Earl of Morton und Hans Sloane. Der Band enthält Briefe an 34 verschiedene Korrespondenten und von 25 verschiedenen Briefpartnern. Im Falle von 20 Briefen ließ sich der Absender oder Empfänger nicht mehr feststellen. Die Anordnung ist chronologisch, die insgesamt 28 undatierten Briefe sind jeweils an den Schluß gestellt. Die Länge der Briefe reicht von vierzeiligen, belanglosen Mitteilungen bis zu bald neunzehn Druckseiten umfassenden, wissenschaftlichen Abhandlungen (Nr. 134).

21 Briefe waren bereits veröffentlicht, darunter Briefe der Korrespondenz Martin Folkes, John Johnstoun, Andrew Mitchell, Robert Smith, insbesondere aber alle 15 Briefe an und von James Stirling (Gleichungstheorie) und die beiden Briefe an und von Isaac Newton. Daher war ein großer Teil der wissenschaftlich zweifellos interessantesten Briefe schon bekannt. Dies muß einschränkend gesagt werden, auch wenn bisher unbekannte Briefwechsel mit so bedeutenden Gelehrten wie Edmund Halley, Dortous de Mairan, J. T. Desaguliers, Alexis Clairault, Hans Sloane, James Jurin oder Voltaire (Aufnahme in die Philosophical Society of Edinburgh) hinzugekommen sind.

Zu den wissenschaftlichen Themen gehören nicht nur mathematische, sondern auch astronomische, physikalische und hydraulische Fragen. Von besonderem Interesse dürfte der Brief Nr. 204 sein, der vermutlich MacLaurins Briefentwurf als Antwort auf die Kritik Berkeleys an Newtons Fluxionsmethode darstellt. Wissenschaftlich weniger ergiebig scheinen mir die über hundert „allgemeinen" Briefe zu sein. Sie enthalten viel Banales, Alltägliches, Menschlich-Allzumenschliches wie Reiseerlebnisse, Rechtfertigungen gegenüber Verleumdungen, Empfehlungen, Angaben zu Wetter und Umgebung, persönliche Ratschläge, Äußerungen zu politischen Affären oder auch kurze Besprechungen eingesandter Manuskripte. Freilich zeichnen sie ein lebendiges Bild vom Leben und Umgang MacLaurins, insbesondere wenn er von familiären Begebenheiten spricht, wie der Krankheit seines Sohnes oder – in ergreifender Weise – vom Tode seiner kleinen Tochter (Nr. 75).

Die Editorin hat den zehn französischen Briefen an Voltaire bzw. von M. J. Hanneken, de Mairan und Clairault eine englische Übersetzung beigegeben, ebenso lateinischen Zitaten. Die zahlreichen Namensanspielungen sind soweit wie möglich aufgeschlüsselt, die betreffenden Personen kurz vorgestellt, allerdings nicht die Dichterzitate verifiziert, wie etwa S. 4, 9, 14 (S. 9 wird auf Horaz, Epistulae I, 2, 35–37 angespielt). Die Erläuterungen zu den Personen wie den mathematischen Problemen sind bewußt möglichst kurz gehalten. Allerdings können sie nicht immer zufriedenstellen und wirken teilweise deplaziert. Was soll z. B. S. 39 die Fußnote „Presumably Samuel Clarke and Gottfried Wilhelm Leibniz", wenn im Text von „Clark's and Leibnitz's letters" die Rede ist, die Erläuterung von „Leibnitz" durch „Gottfried Wilhelm Leibniz", die Bemerkung zu „Euler" (S. 305) „the great Swiss mathematician, who spent much of his life in Russia"? Unnötige Wiederholungen stören ebenso wie an falscher Stelle auftretende Erläuterungen. So heißt es Nr. 142 ebenso wie Nr. 150 zu Robert Simson „Professor of Mathematics at Glasgow University", und dies, obwohl dazwischen mehrere Briefe an Simson veröffentlicht sind. In Nr. 163 wird Robert Smith als Autor einer Veröffentlichung vorgestellt, die aber bereits in Nr. 141 genannt ist.

Diese Bemerkungen berühren jedoch nicht die große Sorgfalt und Mühe der Editorin beim Sammeln und Herausgeben der Briefe selbst. Der Band schließt mit einer Bibliographie, einer Handschriftenliste, die auch die Fundorte nennt, sowie mit einem sehr hilfreichen Namens- und Sachverzeichnis.

Berlin E. Knobloch

Burckhardt, J. J., Die Mathematik an der Universität Zürich 1916–1950 unter den Professoren R. Fueter, A. Speiser, P. Finsler (Elemente der Mathematik, Beiheft 16) Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1980, 48 S., sfr. 18,–

Die sich durch gediegene Kürze auszeichnenden Mathematiker-Biographien in den Beiheften zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik" haben durch den Bericht von Herrn Burckhardt (der bereits 1948 eine vita von Ludwig Schläfli beisteuerte) über das mathematische Leben an der Universität Zürich in den Jahren 1916–1950 (d. h. bis 1946 Nevanlinna und 1951 van der Waerden berufen wurden) eine interessante Bereicherung erfahren. Die in den Semesterferien ungeheizte Seminarbibliothek („für die Anschaffung von Zeitschriften reichte der Kredit von einigen 100 Franken nicht", man war auf die Bestände der Zentralbibliothek und die Bibliothek der ETH angewiesen) ist uns heute nicht mehr so fremd wie noch vor 10 Jahren, die Studentenstatistik (gut 2 Examenskandidaten und 2 Doktoranden pro Jahr) scheint einigen Neugründungen unserer Zeit als teilweises Vorbild gedient zu haben. Der Schwerpunkt des Heftes aber liegt bei den drei Persönlichkeiten, die die Mathematik an der Universität Zuriich in den 35 Jahren prägten: Karl Rudolf Fueter, Zahlen- und Funktionentheoretiker, Mitbegründer der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft, Generalherausgeber der Commentarii Mathematici Helvetici, Präsident des Internationalen Mathematikerkongresses 1932 in Zürich, Oberst der Schweizer Miliz. Dann Andreas Speiser, ebenfalls aus Basel stammend, Algebraiker und Zahlentheoretiker mit einem einmaligen Sinn für die Beziehungen der Mathematik zu den Künsten (wovon nicht nur seine schöne Einführung in die Gruppentheorie zeugt) und mit ausgeprägten philosophischen Neigungen (die sich nicht nur in seinem Parmenides-Kommentar niederschlugen). Beide, Fueter und (in größerem Umfang) Speiser, waren wesentliche Motoren bei der Herausgabe der Opera Omnia Eulers. Schließlich Paul Finsler, der jüngste und sensibelste der drei, Differentialgeometer („Finsler-Räume") mit astronomischen und zahlentheoretischen Interessen, mit dem Speiser das mathematisch-philosophische Seminar gründete; er litt stark darunter, daß seine Grundlegung der Mengenlehre (nach seiner Ansicht der einzig gangbare Weg gegenüber den Antinomien) kaum Anerkennung oder Verständnis fand.

Das Heft ist mit einer ziemlich vollständigen Bibliographie versehen, d. h. Gelegenheitsartikel werden nur im Text genannt bzw. es wird auf andere Verzeichnisse verwiesen. Auch die Vorlesungs- und Seminarthemen jener Zeit sind genannt. Wenn das Heft dazu anreizt, sich in manche der Arbeiten oder Bücher der so verschiedenartigen und eigenwillig farbigen Mathematiker zu vertiefen, hat es seinen Zweck sicher am besten erfüllt.

Erlangen W.-D. Geyer

Beller, A., Jensen, R. B., Welch, P., Coding the Universe (London Math. Soc. Lecture Note Series 47) Cambridge – London: Cambridge University Press 1982, 353 pp., £17.50

Das Universum aller Mengen sei mit V bezeichnet und L sei das Universum aller konstruktiblen Mengen im Sinne von K. Gödel. Die Hypothese, daß V und L identisch sind, hat beeindruckend starke Konsequenzen in der Mengenlehre, Algebra und Topologie. Viele sind daher geneigt, $V = L$ als mengentheoretisches Axiom zu akzeptieren. Aus mathematisch-philosophischen Gründen möchten andere jedoch lieber $V \neq L$ vertreten. Dann entsteht die Frage, „wie sehr" V von L verschieden ist. Es gibt die folgenden Möglichkeiten: $V = L[a]$ für eine Menge a, $V = L[K]$ für eine Klasse K, und $V \neq L[K]$ für alle Klassen K.

Das vorliegende Buch ist im Wesentlichen dem Beweis eines einzigen (bisher unpublizierten) Satzes gewidmet:

Satz (Jensen): *Sei $\mathfrak{M}$ ein transitives Modell von* ZF + GCH. *Dann gibt es eine generische Erweiterung $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ derart, daß $\mathfrak{N}$ ein Modell von* ZF + GCH + $V = L[\alpha]$ *für eine Menge $\alpha \subseteq \omega$, $\alpha \in \mathfrak{N}$ ist. Ferner haben $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ dieselben Kardinalzahlen, Konfinalitäten und Ordinalzahlen. Eine Kardinalzahl, die im Sinne von $\mathfrak{M}$ Mahlosch (oder schwach-kompakt, π^1_m-unbeschreibbar, ineffable, subtle oder α-Erdös (für $\alpha < \omega_1$)) ist, ist es auch im Sinne von $\mathfrak{N}$.*

Man weiß, daß jede Erweiterung $\mathfrak{N}$ eines Modelles $\mathfrak{M}$ von $V \neq L$ ebenfalls $V \neq L$ erfüllt, sofern $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ dieselben Ordinalzahlen haben. J. Barwise bewies 1969, daß $\mathfrak{M}$ jedoch stets eine Enderweiterung $\mathfrak{N}$ hat, in der V = L gilt. Das eigentlich erstaunliche am Satz von Jensen ist, daß man das ZF-Modell $\mathfrak{M}$ zu einem Modell von V = L[a] erweitern kann, ohne neue Ordinalzahlen hinzufügen zu müssen. Erstaunlich ist auch, daß man die Erweiterung $\mathfrak{N}$ so konstruieren kann, daß sie die konstruktible Hülle einer Menge ist, gleichgültig wie stark V = L im Grundmodell $\mathfrak{M}$ verletzt ist. Der Begriff „a kodiert b" ist durch $b \in L[a]$ definiert. Das Universum von $\mathfrak{N}$ wird daher durch eine einzige reelle Zahl a kodiert (dies erklärt auch den Titel des Buches).

Der Beweis des Satzes verteilt sich im Wesentlichen auf sieben Kapitel. In den ersten vier Kapiteln wird der Satz unter der zusätzlichen Voraussetzung $O^{\#} \notin \mathfrak{M}$ bewiesen; im Kapitel 8 folgt der Beweis für den Fall $O^{\#} \in \mathfrak{M}$.

Um die Klasse **P** der Bedingungen zu konstruieren, werden drei Typen von forcing kunstvoll zusammengesetzt. Es sind forcing à la Easton (‚vorwärts gerichtetes' Easton-forcing: der Kodierungs-Schritt für größere Kardinalzahlen muß vor dem für kleinere Kardinalzahlen ausgeführt werden), Solovays ‚almost disjoint forcing' und schließlich eine neue forcing-Methode, um den Limeszahl-Fall zu behandeln.

Das Buch ist nicht frei von Druckfehlern. Auf S. 2, Zeile 9, sollte es ‚onto' statt ‚into' heißen, S. 19, Zeile 2, lies p statt f. Die anderen Druckfehler sind aber wie die genannten leicht zu entdecken.

Das Buch wendet sich ausschließlich an Personen, die mit der forcing Technik (insbesondere Easton forcing), den kombinatorischen Prinzipien $\Diamond$ und $\Box_\beta$ und der Fein-Struktur von L vertraut sind. Für diesen Personenkreis ist das Buch jedoch ein faszinierender Essay über die forcing Technik.

Tübingen U. Felgner

Aigner, M., Combinatorial Theory (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 234) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1979, viii + 483 p., cloth, DM 79,50

Dieses schöne Buch ist die englische Version der in den Springer Hochschultexten erschienen Bände Kombinatorik I, Grundlagen und Zähltheorie, Berlin 1975, und Kombinatorik II, Matroide und Transversaltheorie, Berlin 1976 des gleichen Autors. Gründlich überarbeitet, erscheint es nun in einem Gewand, wie es sich für ein solches Buch gebührt: richtig gesetzt und gebunden, so daß es auch von der Aufmachung her eine Freude ist, es zu lesen.

Da die deutsche Version in diesen Jahresberichten schon ausführlich besprochen wurde (**80** (1978) *8–9*; **81** (1979) *25*), genügt es hier wohl, auf die beiden wesentlichen Veränderungen hinzuweisen. Der Abschnitt über die Matroidinvarianten (Tutte-Polynome, Tutte-Grothendieck-Ring) wurde weggelassen. Neu aufgenommen wurde ein Abschnitt über Ramsey-Sätze, wo einige seit dem Erscheinen der deutschen Fassung bekanntgewordene, hochaktuelle Ergebnisse vorgestellt werden.

Selbst fleißiger Bücherschreiber, weiß ich, was es an Arbeit bedeutet, ein Stück Mathematik zu organisieren und darzustellen. Hier kommt hinzu, daß Vorbilder fehlten, so daß es dem Autor umso mehr zu danken ist, daß er sich der Mühe unterzog, ein in den letzten Jahren so rapide gewachsenes, wichtiges Teilgebiet der Mathematik in Buchform darzustellen.

Ein gelungenes Werk, welches weite Verbreitung und Beachtung verdient.

Inhaltsverzeichnis: Preliminaries. 1. Sets 2. Graphs 3. Posets 4. Miscellaneous Notation. – Chapter I. Mappings 1. Classes of Mappings 2. Fundamental Orders 3. Permutations 4. Patterns. – Chapter II. Lattices 1. Distributive Lattices 2. Modular and Semimodular Lattices 3. Geometric Lattices 4. The Fundamental Examples. – Chapter III. Counting Functions 1. The Elementary Counting Coefficients 2. Recursion and Inversion 3. Binomial Sequences 4. Order Functions. – Chapter IV. Incidence Functions 1. The Incidence Algebra 2. Möbius Inversion

3. The Möbius Function 4. Valuations. – Chapter V. Generating Functions 1. Ordered Structures 2. Unordered Structures 3. G-patterns 4. G,H-patterns. – Chapter VI. Matroids: Introduction 1. Fundamental Concepts 2. Fundamental Examples 3. Construction of Matroids 4. Duality and Connectivity. – Chapter VII. Matroids: Further Theory 1. Linear Matroids 2. Binary Matroids 3. Graphic Matroids 4. Transversal Matroids. – Chapter VIII. Combinatorial Order Theory 1. Maximum-Minimum Theorems 2. Transversal Theorems 3. Sperner Theorems 4. Ramsey Theorems. – Bibliography. – List of Symbols. – Subject Index.

Jedes Kapitel schließt mit Bemerkungen und Hinweisen ab.

Kaiserslautern H. Lüneburg

Greene, D. H., Knuth, D. E., Mathematics for the Analysis of Algorithms (Progress in Computer Science, vol. 1) Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1981, 144 p., Hardcover, DM 24,–

Hier findet sich auf 80 Seiten eine attraktive Zusammenstellung von Formeln, Methoden, durchgerechneten Beispielen und weiterführender Literatur zur quantitativen Analyse kombinatorischer und rekursiver Beziehungen.

Inhaltsverzeichnis: 1. Binomial Identities (Summary of useful Identities, Deriving the Identities, Inverse Relations, Operator Calculus, Identities with the Harmonic Numbers). – 2. Recurrence Relations (Linear Recurrence Relations, Finite History, Constant Coefficients, Variable Coefficients, Full History, Differencing, By Repertoire, Nonlinear Recurrence Relations, Relations with Maximum or Minimum Functions, Continued Fractions, Doubly Exponential Sequences). – 3. Operator Methods (The Cookie Monster, Coalesced Hashing, Open Addressing: Uniform Hashing, Open Addressing: Secondary Clustering). – 4. Asymptotic Analysis (Basic Concepts, Notation, Bootstrapping, Dissecting, Limits of Limits, Summary of useful asymptotic expansions, An Example, Stieltjes Integration, O-notation and Integrals, Euler's Summation Formula, A Number Theory Example, Asymptotics from generating functions, Darboux's method, Residue calculus, The Saddle Point method).

Zunächst ist das Buch gedacht als Sammlung von Mathematik zur Analyse von Computeralgorithmen, hervorgegangen aus Handzetteln zu einer fortgeschrittenen Vorlesung in Computerscience an der Standford Universität. Wie das Inhaltsverzeichnis ahnen läßt, sind Teile ohne Kenntnis in Computerscience nicht verständlich. Teile des Buches sind dem 3bändigen Werk „D. E. Knuths: The Art of Computer Programming" entnommen, was so weit geht, daß man sich bei der Angabe von Übungen auf Hinweise wie „5.2.2-7 M 28" beschränkt.

(Der folgende Scherz findet sich unter solution to problem 3: The exact probability turns out to be:

$$\frac{2999609859061393872672851275099904646499040221\sqrt{399} - 59877588713530290411629940237569556287667865416}{93355082549464520980187663115368403895040545354710},$$

which is approximately .0000004238793706620676.)

Für ein gründliches Nachvollziehen der teilweise gepfefferten Rechnungen ist es sicher nötig, die angegebene Spezialliteratur heranzuziehen. Gleichwohl bringt es der äußerst knappe, elegante und witzige Stil des Büchleins mit sich, daß der Leser eine Fülle von Anregung und Orientierung erfährt, ohne den Kalkül im einzelnen nachzuvollziehen.

Frankfurt M. Sieveking

Nöbauer, W., Wiesenbauer, J., Zahlentheorie. Eisenstadt: Prugg Verlag 1981, 176 S., S. 270,–

Nachdem E. Hlawka und J. Schoissengeier 1979 im Wiener Manz-Verlag eine schlichte Einführung in die Zahlentheorie herausgaben, erscheint hier eine zweite „Wiener" Zahlentheorie. Beide Büchlein sind aus Einführungsvorlesungen hervorgegangen. Während das ältere maschinengeschriebene Werk den Weg in die klassische Zahlentheorie mit Liebe zum Detail, behutsam, ausführlich und doch mit Disziplin vorwärtsdrängend vor dem Leser ausbreitet und benötigte Hilfsmittel gerade so weit wie notwendig entwickelt, hat das vorliegende Buch eine etwas andere Zielrichtung: Die Zahlentheorie wird hier als Fleisch für algebraische Begriffsbildungen herangezogen, die dann auch etwas über die Zahlentheorie hinaus behandelt werden.

Die ersten 5 Kapitel (Teilbarkeitstheorie. Kongruenzen. Quadratische Reste. Kettenbrüche. Diophantische Gleichungen) enthalten etwa den Inhalt des Buches von Hlawka/Schoissengeier. Das Bemühen der Autoren, teilweise von vielbegangenen Pfaden abzuweichen, führt zu stärker algebraischer Durchdringung einiger Sachverhalte, wobei isolierte zahlentheoretische Resultate etwas kurz kommen bzw. ohne Beweis mitgeteilt werden. Die sich ergebende Darstellung erreicht m. E. die klare Einfachheit einer klassischen Einführung nicht ganz, ist andererseits aber auch nicht so unorthodox wie bisweilen H. Lüneburg in seiner ähnlich motivierten Zahlentheorie (Birkhäuser-Verlag 1978). Zu loben sind die anregenden Aufgaben zu jedem Kapitel, zu warnen ist der Leser vor der Definition der Klassenzahl in V. § 4: Da die Autoren bei der Transformation von Formen auch Substitutionen mit Determinante -1 zulassen, also die formae oppositae bei Gauß identifizieren, zerstören sie die (nicht behandelte) Gruppenstruktur auf den Klassen quadratischer Formen und gelangen zu einer neuen Klassenzahl.

Kap. VI (Funktionen auf Restklassenringen) behandelt Polynomfunktionen und Permutationen auf $\mathbf{Z}/m$, ein Spezialgebiet der Autoren. Das letzte Kapitel (Einige Anwendungen der Zahlentheorie) enthält 4 Einzelthemen: Zahlendarstellungen, magische Quadrate, Anzahlsätze über endliche Ringe, Codieren und Kryptographie. Der Appetit auf tieferes Eindringen in die Themen wird geweckt (aber nicht gestillt). Das Literaturverzeichnis ist ein Ärgernis: Das einzige Zitat zum letzten Thema ist ein Artikel im Spektrum der Wissenschaft; im Buch werden zahlreiche ältere und neuere Resultate der Zahlentheorie ohne Beweis und ohne Zitat mitgeteilt – zu mehreren dieser Resultate findet man an keiner Stelle des Literaturverzeichnisses einen Beweis. Hier hätten sich die Autoren etwas die (ebenfalls algebraisch ansetzende, aber tiefergehende) Einführung in die Zahlentheorie von W. Schwarz (Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt 1975) als Vorbild nehmen sollen, die bei häufigem Verzicht auf Beweise doch sehr gut informiert.

Erlangen W.-D. Geyer

Ireland, K., Rosen, M., A Classical Introduction to Modern Number Theory (Graduate Texts in Mathematics 84), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, xiii + 341 S., DM 72,–

Das vorliegende Buch ist eine revidierte und stark erweiterte Fassung der 1972 publizierten „Elements of Number Theory". Die ersten 5 Kapitel (Unique Factorization. Application of Unique Factorization. Congruence. The Structure of $U(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Quadratic Reciprocity) bringen das Minimum jeder Zahlentheorie in elementarer, ansprechender Darstellung mit vielen historischen Bemerkungen und Hinweisen auf weiterführende und offene Probleme, sorgfältig dokumentiert (das Gesamt-Literaturverzeichnis zählt 248 Titel). Hat der historische Impetus auch nicht die Dimension der Einführungen in die algebraische Zahlentheorie von Edwards („Fermat's Last Theorem", Springer 1977) oder Scharlau/Opolka („Von Fermat bis Minkowski", Springer 1980), durchzieht er doch verständnisfördernd das ganze Buch. Die weiterführenden Hinweise gleichen etwas die Tatsache aus, daß in einem solchen Buch die Breite etwa des klassischen Werkes von Hardy/Wright („An Introduction to the Theory of Numbers", 5th ed. Oxford UP 1979) nicht erreicht werden kann. Die Autoren scheuen nicht davor zurück, manche Beweise (bei sich verallgemeinernder Situation) zu wiederholen, um zunächst die einfache Form des Satzes vorzustellen. Gerne werden auch Resultate mehrfach auf verschiedenen Wegen bewiesen. Die einleitende Übersicht zu Beginn jeden Kapitels und die zahlreichen Aufgaben am Ende jeden Kapitels tragen ebenfalls zum leichten Arbeiten mit diesem Buch bei.

Die nächsten 4 Kapitel (Quadratic Gauss Sums. Finite Fields. Gauss and Jacobi Sums. Cubic and Biquadratic Reciprocity) und Kap. 14 (The Stickelberger Relation and the Eisenstein Reciprocity Law) variieren das quadratische Reziprozitätsgesetz und bereiten gleichzeitig die Betrachtung gewisser diophantischer Gleichungen in Kap. 10/11 (Equations over Finite Fields. The Zeta Function) vor. Hier wird Weils Arbeit „Number of solutions of equations over finite fields" aus dem Jahre 1948 dargestellt, die wesentlichen Einfluß auf die Entwicklung der algebraisch-geometrischen Zahlentheorie hatte. Diese Richtung der Zahlentheorie ist mit dem Beiwort „Modern" im Titel angesprochen. Nach zwei klassischen Kapiteln (Algebraic Number Theory. Quadratic and Cyclotomic Fields) wird dann das Steuer in die algebraisch-geometrische Richtung gelenkt mit der Zetafunktion als Leitstern. Die letzten 4 Kapitel (Bernoulli Numbers. Dirichlet L-functions. Diophantine Equations. Elliptic Curves) dringen an Hand ausgewählter Beispiele bis an den Rand der aktuellen Forschung vor, ohne allerdings die tieferen allgemeinen Methoden zu entwickeln. Die Rationalität der Zetafunktion einer allgemeinen Varietät über endlichem Grundkörper oder gar Delignes Resultate über die Nullstellen wird man hier ebensowenig bewiesen finden wie Heckes Fortsetzungssätze für seine L-Reihen oder die Resultate über globale Zetafunktionen allgemeiner elliptischer Kurven (mit komplexer Multiplikation). Dennoch ist es eindrucksvoll, wie weit elementare Methoden bei bestimmten Beispielen führen und Probleme und anstehende Vermutungen illustrieren. Wer hier Feuer fängt, wird von den Autoren auf die relevante Literatur verwiesen.

Obwohl ich das Buch für eine wertvolle Ergänzung der einführenden Literatur in die elementare und algebraische Zahlentheorie halte, kann ich eine kritische Äußerung nicht unterdrücken. Für den halben Preis erhält man im gleichen Verlag die höher ansetzende und (in anderer Richtung) weitergehende Einführung von Cohn („A Classical Invitation To Algebraic Numbers and Class Fields", 1978) oder die solide Einführung von Marcus („Number Fields", 1977). Das Buch von Ireland-Rosen ist sicher von anderer Art und bringt andere Anregungen, aber ist der doppelte Preis angemessen?

Erlangen W.-D. Geyer

Burris, S., Sankappanavar, H. P., A Course in Universal Algebra (Graduate Texts in Mathematics, vol 78), New York – Heidelberg – Berlin: Springer Verlag 1981, 276 p., cloth DM 72,–

Dieses neue Buch über Allgemeine Algebra ist einzigartig in seiner Anlage, sowohl als Einführungstext für den Anfänger als auch als weiterführender Text für den Spezialisten.

In den ersten zwei Kapiteln werden die verbandstheoretischen Hilfsmittel bereitgestellt und eine direkte und vergleichsweise schnelle Einführung in die Grundlagen der Allgemeinen Algebra gegeben, bis hin zu Malcev-Bedingungen und dem Zentrumsbegriff. Kapitel III gibt einen kurzen Einblick in Verbindungen zur Kombinatorik und Automatentheorie und stellt damit neue Anwendungsgebiete der Allgemeinen Algebra vor. Die zweite Hälfte des Buches (Kapitel IV und V) stellt in geschlossener Form einen hochaktuellen Zweig der Forschung in der Allgemeinen Algebra dar. Es startet mit einer Untersuchung der Booleschen

Algebra und benutzt dann das Werkzeug der Booleschen Gerben-Darstellung um wesentliche Eigenschaften der Booleschen Algebra auch auf andere Varietäten zu übertragen, eine herausragende Rolle spielen hier die sogenannten Diskriminator-Varietäten. Das abschließende Kapitel V behandelt modelltheoretische Fragen der Allgemeinen Algebra und gipfelt in der Behandlung der Fragen nach endlichen Gleichungsbasen und Unentscheidbarkeitsfragen. Dieses Buch ist noch mit einem Anhang versehen, der einen kurzen Abriß über neuere Entwicklungen und offene Probleme sowie ein Literaturverzeichnis und ein ausgezeichnetes Stichwortverzeichnis enthält.

Insgesamt kann man dieses Buch als eine höchst willkommene und nützliche Ergänzung der bereits vorhandenen Bücher über Allgemeine Algebra ansehen. Die Autoren widerstanden zum großen Nutzen des Lesers der Versuchung, in diesem Buch enzyklopädisch die gesamte Allgemeine Algebra abzuhandeln; dadurch wird es zu einem gut lesbaren Buch, das den Leser schnell an die heute relevanten Probleme der Allgemeinen Algebra heranführt.

Kassel H. Werner

Knebusch, M., Kolster, M., Wittrings (Aspekte der Mathematik, Band E2), Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg 1982, xii + 96 S., kart., DM 28,–

Die algebraische Theorie der quadratischen Formen erfreut sich seit etwa zwei Jahrzehnten besonderer Beliebtheit – sowohl in der Forschung als auch im Universitätsunterricht. Außer vielen schönen Sätzen mit oft sehr eleganten Beweisen und interessanten Beziehungen zu anderen Gebieten (z. B. geordneten Körpern) hat dazu zweifellos auch die gute Zugänglichkeit dieser Theorie beigetragen: es werden für den Einstieg nur relativ geringe Vorkenntnisse aus der Algebra benötigt. Sie hat sich somit als ein ideales Thema für Seminare und Examensarbeiten erwiesen; und es ist sicher kein Zufall, daß sowohl die Reihe der jetzt regelmäßig stattfindenden DMV-Seminare als auch die Reihe „Aspekte der Mathematik" des Vieweg-Verlages mit Darstellungen aus der Theorie der quadratischen Formen miteröffnet wurden. Entsprechend der Attraktivität des Gebietes ist aber auch die Produktion einführender Darstellungen: seit 1970 ist fast in jedem Jahr eine neue Einführung erschienen; fast alle sind aus Vorlesungsausarbeitungen entstanden.

Trotzdem erscheint die Veröffentlichung des vorliegenden Bändchens nicht überflüssig. Es findet seine ökologische Nische in der Beschränkung auf die sogenannten schwachen Methoden in der Theorie der quadratischen Formen und die Untersuchung der abstrakten Wittringe. Wie die Autoren zu Recht hervorheben, ergibt sich so – mit Witts Beschreibung des Wittringes durch Erzeugende und Relationen als Ausgangspunkt – ein besonders einfacher Zugang zu wesentlichen Teilen der algebraischen Theorie der quadratischen Formen über Körpern, der insbesondere zur Theorie über lokalen Ringen führt und somit für den weiteren Ausbau der Theorie über beliebigen Ringen und Schemata unentbehrlich ist. Zudem stellte sich wiederholt heraus, daß die schwachen Methoden weiter reichen als ursprünglich angenommen (etwa in Marshalls Arbeiten über die Beschreibung des reduzierten Wittringes von Becker und Bröcker). Der Inhalt des Büchleins ist ungefähr mit folgenden Stichworten beschrieben: Grundlagen der Theorie der symmetrischen Bilinearformen, Wittringe, Struktur der Wittringe und der abstrakten Wittringe (Torsion, Primideale, Nilradikal, Nullteiler), reduzierter Wittring, Zusammenhang mit Anordnungen, SAP-Eigenschaft, Nullstellensatz. Die Darstellung ist durchweg klar und gut verständlich; ergänzende Bemerkungen und Hinweise auf die Literatur werden gegeben.

Der auf dem Gebiet der quadratischen Formen arbeitende Mathematiker braucht auf diesen Band wohl nicht besonders aufmerksam gemacht zu werden. Aber jeder, der nach einer einführenden Algebra-Vorlesung in einer Spezialvorlesung oder einem Seminar schnell bis zu aktuellen Problemen der Forschung kommen möchte, sei auf ihn besonders hingewiesen. Zu befürchten ist nur, daß der verhältnismäßig sehr hohe Preis einer weiten Verbreitung nicht förderlich sein wird.

Münster W. Scharlau

Tannenbaum, A., Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects (Lecture Notes in Mathematics, vol 845), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1981, x + 161 p., DM 21,50

A linear dynamical system (Σ) is a set of equations $\dot{x} = Fx + Gu$, $y = Hx$ (continuous time) or $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$, $y(t) = Hx(t)$ (discrete time). Here $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^p$ and the $u(.)$ are interpreted as input or control functions and the $y(.)$ as output functions. Thus such a system $\Sigma = (F, G, H)$ gives rise to an input-output map (operator) $V(\Sigma) : u(.) \to y(.)$. (In the continuous time case $y(t) = \int_0^t H \exp((t-\tau)F)Gu(\tau)d\tau$ if $x(0) = 0$). Many systems in nature, human affairs and industry can be modelled well by such equations, whence their importance.

For quite a few, if not most, purposes a system is simply an input/output operator which can be represented in this form, where it should be noted that in many circumstances (Kalman-Bucy filtering, stabilization by feedback, disturbance regulation, design, . . .) it is important to have such a representation. Now note that if $S \in GL_n(\mathbf{R})$ and $(\Sigma)^S = (F, G, H)^S = (SFS^{-1}, SG, HS^{-1})$ (by definition), then $V(\Sigma^S) = V(\Sigma)$; moreover, generally, i.e. for an open dense subset of triples (F, G, H) this is also the only redundancy. This leads naturally to the study of the 'quotient space' of all matrix triples modulo this action of $GL_n(\mathbf{R})$ and leads naturally to a vigorous interplay between parts of algebraic geometry, notably invariant theory and the theory of coarse and fine moduli spaces and linear system theory. This is what this book is about and to date it is the only reasonably selfcontained introduction to this vigorously developing area of inquiry. It is also, within certain limitations, definitely a good and well written introduction (the non system theorists could have done, I feel, with some more motivation as to why certain questions are interesting, c. q. important; and the non-algebraic geometer may have occasional difficulties getting through the more abstract parts). Together with the material contained in [1] (which is also fairly self-contained), [2], [3], this volume will give the interested non-specialist and prospective researcher in this area a very good overview of what is going on and a good idea of the many open problems in this field of *linear* system theory.

The contents of the volume are roughly as follows. Chapter I contains the basic algebraic geometry needed in system theory (so far) with the exception of intersection theory (not needed in this volume). Chapter II is a very brief introduction to (linear) system theory. Chapter III and IV deal with invariants and coarse and fine moduli schemes and some applications such as the nonexistence in general of global continuous canonical forms (a matter which is of some importance when one tries to identify a system (i.e. determine some F, G, H) on the basis of uncertain input/output data). Chapter V deals with local moduli and versal deformations (including some of the author's own work). Chapter VI treats of 'realization theory'; that is, given $V(\Sigma)$ how does one find (F, G, H). Chapter VII deals with the topology of the space of all systems in the one input/one output case and finally Chapter VIII deals with feedback and stabilization of systems which are partially uncertain. This concerns certain aspects (to which the author has made a nice contribution) of the – in this reviewer's opinion – most important open field in linear system theory, namely the systematic study of which constructions and design techniques in system and control theory are continuous in the parameters and can be used to deal with families of systems and uncertain systems.

References

[1] Byrnes, C. I.; Martin, C. F. (eds.): Geometric methods for the theory of linear systems. Reidel Publ Cy. 1980
[2] Byrnes, C. I.; Martin, C. F. (eds.): Algebraic and geometric methods in linear systems theory. Amer. Math. Soc. 1980
[3] Hazewinkel, M.: A partial survey of the uses of algebraic geometry in system theory. Symposia Matematica INDAM Vol. **24**, Acad. Press 1981, 245–292

Amsterdam/Rotterdam M. Hazewinkel

Kurke, H., Algebraische Flächen (Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 43) Leipzig: BSB B. G. Teubner 1982, 209 S., Kart., 19,– M

Die Theorie der algebraischen Flächen ist ein so umfangreiches Gebiet, daß in jeder Vorlesung hierüber eine Auswahl getroffen werden muß. Die vorliegende Ausarbeitung zählt 200 Seiten und die Darstellung ist sehr gestrafft. Der Autor formuliert sein Auswahlprinzip wie folgt: „In einer in sich abgeschlossenen Form werden die Grundlagen zum Studium der neueren Arbeiten von Kodaira, Šafarevič und seinen Mitarbeitern, Mumford, Bombieri u. a. entwickelt, so daß auch Lesern mit geringen Spezialkenntnissen eine schnelle Einarbeitung in dieses sehr attraktive Gebiet ermöglicht wird."

Der ideale Leser in diesem Sinn hat Kenntnisse aus der (lokalen) Algebra und Erfahrung mit Schemata und (quasi-)kohärenten Garben, die er nun im 2-dimensionalen Fall anwenden möchte. Für ihn ist das Buch geschrieben und er wird voll auf seine Kosten kommen. Das Buch wird ihn vertraut machen mit Enriques' Klassifikation, mit der klassischen Terminologie und mit informativen Beispielen. Aber auch für Leser mit klassischem geometrischen Hintergrund wird dies Buch nützlich sein, wenn sie an einem formal-algebraischen Aufbau der Theorie interessiert sind, insbesondere an den Schwierigkeiten in Charakteristik $p > 0$.

Für eine geschlossene Darstellung von den algebraischen Grundlagen bis zur Klassifizierungstheorie, wie sie dieses Buch gibt, sind 200 Seiten äußerst knapp bemessen. In der Tat erwartet der Verfasser vom Leser auch eine intensive Beschäftigung mit dem angebotenen Material. Zum Überfliegen, um einen groben Eindruck von der Theorie zu bekommen, ist dieser Text weniger geeignet.

Der Inhalt der 9 Paragraphen ist in kurzen Stichworten: 1. Grundbegriffe (Schemata usw.). 2. Eigentliche Morphismen. 3. Bertini, allgemeine Projektion von Flächen in den $\mathbf{P}_3$ (Doppelpunkte, Tripelpunkte, Pinchpoints). 4. Serre-Grothendieck-Dualität auf projektiven Cohen-Macaulay-Schemata, Riemann-Roch auf Kurven. 5. Schnitt-Theorie, Faserungen (Anwendung: Auflösung der Kurvensingularitäten, algebraischer Indexsatz, minimale Modelle, Castelnuovos Rationalitäts-Kriterium). 6. Auflösung der Flächensingularitäten (nach Albanese-Zariski). 7. Riemann-Roch für Bündel auf Flächen, Noetherformel (nach R. Piene). 8. Komplex-analytischer Fall. 9. Klassifikation.

So hoch auch das abstrakte algebraische Niveau ist, es wird doch großer Wert auf konkrete Beispiele gelegt. Zum Beispiel finden sich die berühmten 27 Geraden der kubischen Fläche schon auf Seite 36, in Zusammenhang mit Zariskis Hauptsatz. Dies Buch stellt eine echte Bereicherung der vorhandenen Literatur dar und zumindest im deutschen Sprachraum ist es bisher das erste in dieser Art zu diesem Gebiet.

Erlangen W. P. Barth

Szpiro, L., Lectures on Equations Defining Space Curves (Notes by N. Mohan Kumar) (Tata Institute Lectures on Mathematics), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1979, 6 figs., viii + 81 p., soft cover, DM 18,–

Dem klassischen Thema der projektiven algebraischen Raumkurven, dem schon 1882 G. Halphen [1] und Max Noether [2] zwei preisgekrönte Arbeiten von je 200 Seiten Länge gewidmet haben, ist in jüngerer Zeit wieder große Aufmerksamkeit zuteil geworden. So haben vor kurzem Gruson und Peskine [3] ein seit Halphen bestehendes Problem gelöst und gezeigt, daß es zu jedem Zahlenpaar (g, d) mit $0 \leqslant g \leqslant \frac{1}{6} d(d-3) + 1$ eine glatte Kurve in $\mathbf{P}^3$ gibt, die das Geschlecht g und den Grad d besitzt und daß eine solche Kurve auf einer geeigneten Fläche 4. Grades gefunden werden kann (Halphen hatte behauptet, daß man sie sogar auf einer Fläche 3. Grades finden könne, jedoch ist sein Beweis falsch).

In den Vorlesungen Szpiros aus dem Jahre 1975/76, über die hier berichtet werden soll, werden Resultate bewiesen, die von Szpiro, Ferrand, Gruson und Peskine seit dem Erscheinen der Arbeit [4] erzielt worden sind. Die einzelnen Kapitel enthalten teilweise voneinander unabhängige Ergebnisse, wobei Fragen nach der Beschreibung von Kurven in $\mathbf{P}^3$ und allgemeiner von Unterschemata der Kodimension 2 in $\mathbf{P}^n$ durch möglichst wenig Gleichungen einen Schwerpunkt bilden. Allen Kapiteln ist gemeinsam, daß die Ergebnisse vom Standpunkt der lokalen und globalen Kohomologietheorie und der Dualitätstheorie her entwickelt werden. Die Kenntnis der entsprechenden Kapitel etwa bei Altman-Kleiman [5] und Hartshorne [6] wird dabei vorausgesetzt.

Nach einem Abriß über die Sprache, die verwendet werden soll, bringt Kap. I bereits das erste Ergebnis zum Hauptthema des Buches: Eine Kurve in $\mathbf{P}^3$, die lokal vollständiger Durchschnitt ist, kann immer durch 4 Gleichungen beschrieben werden (drei reichen i. a. nicht aus, wie schon in [4] gezeigt wurde). Kap. II enthält die Herleitung klassischer Sätze über die Adjungierten algebraischer Kurven in $\mathbf{P}^2$ aus der Dualitätstheorie und in Kap. III werden zwei Sätze Castelnuovos [7] über Linearsysteme auf projektiven Kurven (in Räumen beliebiger Dimension) als kohomologische Verschwindungssätze formuliert und bewiesen.

Am Anfang von Kap. IV wird als eine der Grundlagen für das Weitere ein Satz von Serre bewiesen, der ein Kriterium dafür gibt, wann ein Unterschema X der Kodimension 2 eines regulären Schemas Y als Nullstellenschema eines Schnitts in einem Vektorbündel vom Rang 2 auf Y dargestellt werden kann (eine Abschwächung der Frage, ob X mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt in Y ist). Es folgt der Beweis eines Satzes von Horrocks über die Existenz von unzerlegbaren Vektorbündeln vom Rang 2 auf $\mathbf{P}^3$ mit vorgegebenen Chern-Zahlen. Dann wird eines der Hauptergebnisse der Abhandlung gezeigt: Es sei X ein abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 2 eines glatten quasiprojektiven Schemas Y der Dimension 3. X sei lokal vollständiger Durchschnitt. Dann ist X mengentheoretisch Nullstellenschema eines Schnitts in einem Vektorbündel vom Rang 2 auf Y. Da im Affinen Vektorbündel trivial sind, folgt hieraus, daß Kurven in $\mathbf{A}^3$, die lokal vollständige Durchschnitte sind, mengentheoretisch als Durchschnitt zweier Flächen dargestellt werden können. Dieses Resultat ist inzwischen durch Mohan Kumar [8] auf den Fall von Kurven in $\mathbf{A}^n$ verallgemeinert worden.

Ein Teil der Ergebnisse der früheren Kapitel wird im letzten Kapitel dazu verwendet, um zu beweisen: Ist k ein Körper der Charakteristik 0 und $X \subset \mathbf{P}^n(k)$ eine glatte Untervarietät der Kodimension 2, für deren Grad d gilt: $2d \leqslant n$, so ist X (idealtheoretisch) ein vollständiger Durchschnitt. (Charakteristik 0 wird vorausgesetzt, um Kodairas Verschwindungssatz anwenden zu können.)

Die Vielzahl konkreter und hochinteressanter Ergebnisse können für den Leser eine ausgezeichnete Motivation dafür sein, sich auch mit den verwendeten kohomologischen Techniken vertraut zu machen. Leider läßt die äußere Form des Buches zu wünschen übrig. Man hat über weite Strecken den Eindruck, daß die Notizen des Autors für seine Vorlesungen unredigiert abgetippt worden sind und daß Korrekturen nicht gelesen wurden. Dies macht die Lektüre natürlich oft mühsam. Für einen Leser, der sich in die Theorie projektiver Raumkurven einarbeiten will, sollte dies aber kein Hinderungsgrund sein, das Buch zu studieren, da ihm reicher Gewinn versprochen werden kann.

[1] Mémoire sur la classification des courbes gauches algebriques. J. Ec. Polyt. **52** (1882) 1–200.
[2] Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven. Verlag der königlichen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1883.
[3] Genre de courbes de l'espace projectif II (Preprint 1981).
[4] Peskine, C.; Szpiro, L.: Liaison des varietés algebriques I. Inv. Math. **26** (1974) 271–302.
[5] Introduction to Grothendieck Duality Theory. Springer Lecture Notes 146 (1970).
[6] Algebraic Geometry. Springer 1977.
[7] Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica. Rend. Circ. Mat. Palermo VII (1893) (auch enthalten in: Castelnuovo. Memorie scelte, 95–113).
[8] On two Conjectures about Polynomial Rings. Inv. Math. 46 (1978), 225–236.

Regensburg E. Kunz

Huppert, B., Blackburn, N., Finite Groups II (Grundlehren, Band 242), **Finite Groups III** (Grundlehren, Band 243), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, 531 p., 470 p., Cloth, DM 138,–, DM 128,–

These books constitute the long awaited continuation of the famous first volume. All together they present a comprehensive introduction and survey of the basic ideas and methods of the theory of finite groups. Moreover, the extremely high standards of exposition and attention to detail, that the first volume is so noted for, have been maintained. This is a work that is sure to be a classic, one that every group theorist will own and use.

Volume II is devoted to representation theory and its applications to the structure of finite groups by "internal" means, that is, the systematic use of the fundamental observation that an elementary abelian p-subgroup can be viewed as a vector space over the field of p elements. For this reason, the first part of this book is a module-theoretic treatment of representation theory over fields of arbitrary characteristic. This is followed by a very comprehensive chapter on linear methods in nilpotent groups which contains many important results in book form for the first time. In particular, the topics of Suzuki 2-groups and regular automorphisms of p-groups are well covered. The final chapter of this volume turns to linear methods for solvable groups. The famous Theorem B of Hall and Higman is the starting point. This result showed definitively how theorems on the structure of p-solvable groups could be proved using modular representations of specific solvable groups. The remainder of the chapter is largely devoted to applications of the Hall-Higman theorem and to similar problems.

Volume III deals with simple groups and starts, quite properly, with the local theory of finite groups, which is the main tool for studying and classifying simple groups. All of the basic ideas are introduced and some are dealt with in a comprehensive way. The reader will find fine treatments of characteristic functors, fusion, transfer applications and the generalized Fitting subgroup. The next chapter of this volume is spent on the classification of Zassenhaus groups, one of the first things one must do in classifying all simple groups. This is the first treatment in book form and it is well done. However, by using more recent character-theoretic results, the exposition could be significantly shortened. The final chapter deals with multiply transitive groups and begins with the famous Mathieu groups discovered over a century ago. Much of the rest is spent on various characterizations of multiply transitive groups and the connection between the classification of simple groups and the classification of these permutation groups.

These volumes set a standard that group theorists – and all mathematicians – would do well to aspire to in their expositions. Reading these books is a pleasure, not the task that most books present.

Chicago J. L. Alperin

Robinson, D. J. S., A Course in the Theory of Groups (Graduate Texts in Mathematics, vol. 80) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, xvii + 481 p., cloth, DM 98,–

"This book is intended as an introduction to the general theory of groups. Its aim is to make the reader aware of some of the main accomplishments of group theory while at the same time providing a reasonable coverage of basic material. This book is adressed primarily to the student who wishes to learn the subject, but it is hoped that it will prove useful to specialists in other areas as a work of reference."

Mit diesen Worten umreißt der Verfasser seine Absichten. Als Übersicht seien die Kapitelüberschriften, ergänzt in Klammern durch Angaben des Referenten, angegeben: Grundlegende Begriffe – Freie Gruppen und Präsentierungen (mit Einführung von Varietäten) – Zerlegungen – Abelsche Gruppen (Kriterien von Kulikov und Pontriagin) – Auflösbare und nilpotente Gruppen (Hall's Nilpotenzkriterium, Sätze von Malcev und Hirsch) – Freie Produkte (residuelle Eigenschaften, Untergruppensatz von Kurosch) – Endliche Permutationsgruppen (schließt mit Matthieugruppen) – Gruppendarstellungen (behandelt Gruppen der Ordnung $p^a q^b$ und die Nichteinfachheitsaussagen von Frobenius und Wielandt) – Endliche auflösbare Gruppen (schließt mit Formationen und Fittingklassen) – Die Verlagerung und seine Anwendung (behandelt das Kriterium für p-Nilpotenz und Frobeniusgruppen) – Gruppenerweiterungen (Einführung und Anwendung von Homologietheorie) – Verallgemeinerungen nilpotenter und auflösbarer Gruppen (beschreibt u. a. die Hierarchie der Klassen lokal nilpotenter Gruppen) – Subnormalteiler (hinreichende Bedingungen für Verbandseigenschaft, T-Gruppen, Automorphismentürme) – Endlichkeitsbedingungen (lokal endliche Gruppen, Verallgemeinerung des Satzes von Schur auf Glieder der Zentralreihe) – Unendliche auflösbare Gruppen (lineare Gruppen, Erkennbarkeit an abelschen Untergruppen, Maximalbedingung für Normalteiler). Jeder Abschnitt schließt mit einer großzügigen Auswahl von Aufgaben.

Das Buch gibt eine ausführliche Einführung in die Entwicklung der Gruppentheorie bei Betonung der allgemeinen Richtung Auflösbarkeit. Eine Behandlung der endlichen einfachen Gruppen, die etwas tiefer geht, hätte den Rahmen dieses Buches sprengen müssen, der Leser des Buches wird daher nach kurzer Behandlung auf die Literatur verwiesen. Es handelt sich um ein gut durchdachtes, übersichtlich geschriebenes Buch, das den Absichten des Verfassers gerecht wird: Es ist geeignet für Studenten mit Grundkenntnissen, die sich weiterbilden wollen, sicher auch als Nachschlagewerk. Eine weite Verbreitung wäre nicht verwunderlich.

Würzburg H. Heineken

Hiller, H., Geometry of Coxeter Groups (Research Notes in Mathematics, Nr. 54) Boston – London – Melbourne: Pitman 1982, 211 p., pbk, DM 44,30

Unter einer Fahne in einem komplexen Vektorraum $\mathbf{C}^m$ versteht man eine Folge $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{m-1} \subset \mathbf{C}^m$ echt ineinander enthaltener Unterräume. Die Gruppe $G = GL_m(\mathbf{C})$ operiert transitiv auf der Menge Flag $(\mathbf{C}^m)$ aller Fahnen von $\mathbf{C}^m$. Der Stabilisator der Fahne $0 \subset \mathbf{C}e_1 \subset \mathbf{C}e_1 + \mathbf{C}e_2 \subset \ldots \subset \mathbf{C}^m$, $e_1, \ldots, e_m$ eine kanonische Basis, ist die Gruppe B aller oberen Dreiecksmatrizen. Flag $(\mathbf{C}^m)$ kann in offensichtlicher Weise mit der Struktur einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit versehen werden, so daß wir einen Isomorphismus $G/_B \simeq$ Flag $(\mathbf{C}^m)$ erhalten.

Bezeichnet W die Untergruppe der Permutationsmatrizen von G, das heißt die Weilgruppe von G, so besagt die Bruhatzerlegung: G = B W B. Faktorisiert man diese Gleichung nach B, so erhält man eine Zerlegung von $G/_B$ in Zellen B_w, $w \in W$. Der Abschluß einer solchen Zelle heißt eine Schubertvarietät. Ihre Dualen X_w, $w \in W$ in der Kohomologie erzeugen den Kohomologiering $H^*(G/_B)$ additiv. Um die Beschreibung von $H^*(G/_B)$ zu vervollständigen, benötigt man nur noch eine Multiplikationstabelle für die X_w, und das ist der Inhalt der klassischen Formeln von Pieri und Giambelli. Diese Beschreibung von $H^*(G/_B)$ bezeichnet man, etwas ungenau, als Schubertkalkül.

Es gibt andere Zugänge zum Kohomologiering $H^*(G/_B)$, zum Beispiel den folgenden: Es bezeichne $S[\mathbf{C}^n]$ die Algebra der Polynomfunktionen auf $\mathbf{C}^n$ und I_W das Ideal von $S[\mathbf{C}^n]$, das erzeugt wird von den elementarsymmetrischen Funktionen. Dann gibt es einen kanonischen, geometrisch definierten Isomorphismus c von $H^*(G/_B)$ auf die Koinvariantenalgebra $S_W = S[\mathbf{C}^n]/I_W$ von W. Der Schubertkalkül kann dann auf algebraischem Wege aus S_W hergeleitet werden.

Beachtet man, daß in der Definition von S_W nur die Weilgruppe W eingeht, so suggeriert dies die Möglichkeit, für die Koinvariantenalgebra einer beliebigen endlichen Coxetergruppe W einen Schubertkalkül herzuleiten. Die Durchführung dieses Beweises ist das Hauptanliegen des Buches.

Sein Reiz besteht in dem Zusammenspiel verschiedener Gebiete der Mathematik: Kapitel 1 gibt eine Einführung in die Theorie der Coxetergruppen, ihre geometrische Realisierung als Wurzelsysteme. Kapitel 2 entwickelt die Invariantentheorie der endlichen Coxetergruppen bzw. etwas allgemeiner der komplexen Spiegelungsgruppen. Kapitel 3 enthält den klassischen Schubertkalkül von Grassmann-Mannigfaltigkeiten. Kapitel 4 benützt die Kapitel 1 und 2 zum Beweis sowie das Kapitel 3 als Motivation für den Schubertkalkül einer beliebigen endlichen Coxetergruppe. Zum Abschluß werden ohne Beweis in Kapitel 5 die kombinatorischen Aspekte der Bruhatordnung der Coxetergruppen diskutiert.

Das Buch ist sowohl als eine Einführung in ein interessantes und im Moment sehr populäres Gebiet als auch als Darstellung neuerer Ergebnisse zu empfehlen. Sehr erfreulich sind die sich jedem Kapitel anschließenden Komplemente, wo der historische Werdegang des jeweiligen Gebietes beschrieben sowie auf weiterführende Ergebnisse hingewiesen wird. Weiter hervorzuheben ist die Darlegung der ersten 3 Kapitel, in die eine Reihe von neueren Beweisen und Ergebnissen aufgenommen wurde, die der Klarheit und Kürze dienlich sind. Als Nachteil empfand ich, daß der oben erwähnte Isomorphismus $c : H^*(G/_B) \to S_W$ nur im Anhang zu Kapitel 4 erwähnt und nicht zu Anfang des Kapitels bewiesen wird. Das läßt das gesamte Kapitel etwas formal erscheinen. Insgesamt wird jedoch das Zusammenspiel von Kombinatorik, algebraischer Geometrie und Darstellungstheorie sehr gut deutlich gemacht.

Erlangen H. Lange

Springer, T. A., Linear Algebraic Groups (Progress in Mathematics, vol 9), Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1981, x + 304 p., hardcover, DM 42,–

Dieses Buch enthält eine Einführung in die Theorie der algebraischen Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Das Ziel dabei ist die Strukturtheorie der reduktiven Gruppen und deren Klassifikation. Dieser Band steht damit in einer Tradition, die von

C. Chevalley 1957/58 mit seinem „Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques" begründet wurde und die dann A. Borel (1969) und J. E. Humphreys (1975) in Büchern fortsetzten, die denselben Titel wie dieses hier haben. In diese Reihe gehört im Grunde auch die erste Hälfte von R. Steinbergs „Conjugacy Classes in Algebraic Groups" (1974).

Allen diesen Werken gemeinsam ist ein gewisses Gerüst beim Aufbau der Theorie. Nachdem die (affinen) algebraischen Gruppen definiert und erste allgemeine Eigenschaften (einschließlich der Jordan-Zerlegung) bewiesen worden sind, betrachtet man: Diagonalisierbare Gruppen, Tori, Auflösbare Gruppen, Borel-Untergruppen, Cartan-Untergruppen, Wurzeln, Weylgruppen, Struktur der reduktiven Gruppen, Bruhat-Zerlegung, Parabolische Untergruppen. Etwas Freiheit bleibt noch bei der Frage, wo einige grundlegende Konstruktionen (wie die von Quotienten nach abgeschlossenen Untergruppen oder die Einführung der Lie-Algebra) plaziert werden.

Hier wie auch bei vielen Detailfragen geht der Autor mit großem Geschick vor. Besonders hervorzuheben ist aber, daß es ihm gelingt, die benötigten Definitionen und Sätze aus der algebraischen Geometrie in den Text zu integrieren. Sie bilden nicht mehr wie in den früheren Büchern ein langes Anfangskapitel, sondern sind auf verschiedene Stellen verteilt, nahe ihren ersten Anwendungen. Auch kann Springer hier den Umfang des Stoffs gegenüber seinen Vorgängern weiter reduzieren, vor allem indem er eine hier oft gegebene Homogenität ausnutzt.

Im Vergleich zu dem Buch von Humphreys fallen die Beweise hier in der Regel etwas knapper aus. Der Leser wird gut daran tun, die Übungen als ebenso wichtig wie den übrigen Text einzustufen.

Gegenüber den früheren Büchern wird der Leser hier manche Resultate über den Zusammenhang zwischen einer algebraischen Gruppe und ihrer Lie-Algebra im Fall der Charakteristik 0 vermissen und sich dafür über die Aufnahme eines Existenzbeweises für reduktive Gruppen mit vorgegebenen Wurzeldaten freuen. Weitere begrüßenswerte Zutaten sind die (im Vergleich zu Humphreys) genauere Beschreibung der Bruhat-Zellen als Varietäten und die Angabe der Inklusionen zwischen den Schubert-Zellen, die bisher nur in R. Steinbergs „Lectures on Chevalley Groups" (1967) greifbar war.

Alle diese Vorzüge des vorliegenden Bandes können aber nicht vergessen machen, daß eigentlich ein oder zwei andere Bücher über diesen Gegenstand geschrieben werden sollten. Zum einen hört die Theorie der reduktiven Gruppen nicht mit den hier angegebenen Struktursätzen auf. Ich will hier nur einige Stichwörter nennen, die in einem weiterführenden Band zu behandeln wären: Darstellungstheorie, Geradenbündel auf Fahnen-Mannigfaltigkeiten und ihre Kohomologie, Invariantentheorie (Geometrische Reduktivität), Klassifikation und Geometrie der Konjugiertenklassen, Kohomologie der Schubert-Zellen. Zum anderen fehlt eine Einführung in die Theorie der (reduktiven) algebraischen Gruppen über einem beliebigen (also nicht algebraisch abgeschlossenen) Grundkörper. Zwar arbeitet Borel zu Anfang über beliebigen Körpern, dies ändert sich jedoch, wenn er zu den reduktiven Gruppen kommt. Dagegen gehen M. Demazure und P. Gabriel in ihren „Groupes Algébriques I" von 1970 (auch über beliebigen Körpern) nicht über die auflösbaren Gruppen hinaus; auch ist ihr Werk wegen seines Umfangs nicht so gut als Einführung geeignet. Dieselbe inhaltliche Beschränkung findet sich auch in der 1981 erschienenen „Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras" von G. Hochschild, der darüber hinaus Varietäten über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper in einer Weise definiert, die weder sinnvoll noch allgemein üblich ist.

Wir wollen also hoffen, daß der nächste hier zu rezensierende Band über algebraische Gruppen nicht eine weitere Einführung ist, sondern in einer der oben angedeuteten Richtungen darüber hinaus geht.

Bonn J. C. Jantzen

Vogan, David A., Jr., Representations of Real Reductive Lie Groups (Progress in Mathematics, vol. 15) Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1981, 776 pp., hardcover, DM 86,–

Dieses umfangreiche Buch bietet eine gute Übersicht über den heutigen Stand der Theorie nichtunitärer unendlichdimensionaler Darstellungen reeller reduktiver Liegruppen (deren Zusammenhangskomponente endlichen Index hat). Obgleich im Kapitel 0 die zum Lesen des Buches benötigten Voraussetzungen fleißig gesammelt worden sind, wendet sich der Text nach meiner Meinung in erster Linie an diejenigen, die bereits über ausreichende Erfahrungen in der Theorie unitärer Darstellungen verfügen. Der Verfasser selbst verweist für die Tatsachen, die er nicht beweist, etwa auf die Werke G. Warner: Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups I. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1972 und T. A. Springer: Reductive Groups in Automorphic forms, representations, and L-functions, part 1, Proceedings of Symposia in Pure Math., vol. 33, Am. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1979.

Im ersten Kapitel werden ausführlich die Darstellungen von solchen Gruppen besprochen, die ein kompaktes Zentrum haben und deren Zusammenhangskomponente als nichtabelsche zusammenhängende Normalteiler nur fastdirekte Produkte zu $SL_2(\mathbf{R})$ lokal isomorpher Gruppen enthält; das in diesem Kapitel angesammelte Material dient im späteren insbesondere zur Illustration der diskutierten Sätze. Ein großer Teil des Buches ist der ausführlichen Diskussion der Langlandschen Theorie irreduzibler Darstellungen reduktiver Liegruppen gewidmet, die im Kapitel 2 anhebt. Als wichtigstes, technisches Hilfsmittel zum Studium von Darstellungen dienen dem Autor die Kohomologiegruppen des Nilradikal einer parabolischen Untergruppe mit Koeffizienten in einer Darstellung; sie werden im dritten Kapitel eingeführt, welches außerdem zwei grundlegende kohomologische Ergebnisse enthält: den Satz von Casselman-Osborne, der die Kohomologie zum Zentrum der Einhüllenden in Beziehung setzt und die Konstantsche Fassung des Bott-Borel-Weil-Theorems. Im vierten Kapitel wird derjenige Teil der Klassifikation irreduzibler Darstellungen erörtert, der aus den gewöhnlichen Darstellungen der Hauptreihe gewonnen werden kann; außer den Standardtechniken benutzt der Autor dort die Bernstein-Gelfand-Gelfand Theorie feiner Darstellungen, die er im Abschnitt 4.3 umreißt. Die Kapitel 5 und 6 vervollständigen die Klassifikation irreduzibler Darstellungen. Die benutzte Methode ist eine Verallgemeinerung der höchsten Gewichte aus der Theorie endlichdimensionaler Darstellungen; die höchsten Gewichtsvektoren werden durch Kohomologieklassen der Darstellung ersetzt. Das Hauptproblem besteht darin, eine Konstruktion von Darstellungen zu finden, die das Induzieren von Darstellungen verallgemeinert und mit der Kohomologie natürlich korrespondiert. Das siebte Kapitel ist den Problemen um das Jantzen-Zuckermansche „Translationsprinzip" gewidmet. Mit ihm folgt, daß alle irreduziblen Darstellungen in vernünftigen Familien auftreten (wie etwa die Hauptreihe oder die endlich dimensionalen Darstellungen). Technisch erlaubt dieses Prinzip Reduktionen auf Darstellungen „in allgemeiner Lage". Außerdem stellt dieses Prinzip einen Zusammenhang zwischen der Struktur irreduzibler Darstellungen und der kombinatorischen Struktur der Weylgruppe her. Im achten Kapitel wird ausgerechnet, daß die Standarddarstellungen (insbesondere solche mit nichtsingulärem infinitesimalem Charakter) reduzibel sind; um dieses Ergebnis zu erhalten, werden dort Tensorprodukte von Standarddarstellungen mit endlichdimensionalen Darstellungen studiert. Im neunten (und letzten) Kapitel des Buches wird ein Algorithmus beschrieben, der unter der Annahme einer technischen Vermutung (die bisher allerdings nur für Liegruppen kleinen Ranges bewiesen wurde und deren Richtigkeit mit den Weil-Vermutungen sowie der Deligne-Goresky-MacPherson-Schnitthomologietheorie zusammenhängt) die Berechnung der Kompositionsreihen von Standarddarstellungen erlaubt. Dieser Algorithmus ist eine Verallgemeinerung eines von Kazhdan und Lusztig angegebenen Algorithmus für Verma-Moduln. Der Verfasser zeigt, daß die mutmaßlichen Charakterformeln für beliebige irreduzible Darstellungen eine Interpretation in Termen der Goresky-MacPherson-Kohomologie gestatten; die geometrische Interpretation dieser Formeln wird deshalb möglich, weil (bereits im Kapitel 2) eine garbentheoretische Fassung der Kazhdan-Lusztig-Vermutung entwickelt wird. Für Darstellungen mit ganzzahligem irreduziblem Charakter haben Lusztig und der Verfasser die Kompositionsreihen inzwischen ohne jede zusätzliche Hypothese berechnen können.

Es ist klar, daß eine so technische Theorie wie die der unendlichdimensionalen Darstellungen Liescher Gruppen den Leser fordert und keine leichte Kost sein kann. Doch dem Verfasser muß bescheinigt werden, daß er bemüht ist, durch zahlreiche motivierende Hinweise und beweiserläuternde Bemerkungen dem Leser das Studium seines Buches zu erleichtern.

Erlangen K. Strambach

Jordan, C., Fonctions Elliptiques, Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1981, VI + 236 S., DM 76,–

Dem verdienstvollen Unterfangen, ältere, über längere Zeit vergriffene mathematische Fachbücher neu abzudrucken – bisher fast ausschließlich die Domäne darauf spezialisierter, vor allem amerikanischer Verlage wie Chelsea und Johnson – scheint sich in zunehmendem Maße auch der Springer-Verlag zu widmen. Während sich die amerikanischen Verlage aber vorwiegend der älteren deutschen Literatur um die Jahrhundertwende wie etwa Webers „Algebra I–III" annahmen, schien sich der Springer-Verlag mehr auf den Neuabdruck jüngerer englisch-sprachiger Werke wie Zariski-Samuels „Commutative Algebra I, II" oder Jacobsons „Algebra I–III" eingerichtet zu haben. Mit der Herausgabe des vorliegenden Bändchens dringt jedoch auch der Springer-Verlag bis ins vorige Jahrhundert vor. Es handelt sich um den Neuabdruck des elliptischen Funktionen gewidmeten VI. Kapitels des zweiten Bandes von Camille Jordans mehrbändigem Werk „Cours d'Analyse de l'École Polytechnique".

In diesem Bändchen wird auf gut 200 Seiten die gesamte klassische Theorie der elliptischen Funktionen fast im Umfang etwa vergleichbarer Bücher wie Frickes zweibändigem Klassiker „Elliptische Funktionen" oder Webers vielzitierter „Algebra III" abgehandelt. Dies ist durch eine sehr komprimierte Darstellung des Stoffes möglich geworden, in der Zwischenrechnungen meistens weggelassen werden und sich statt detaillierter Beweise für die aufgestellten Behauptungen oft nur eine Skizze der Vorgehensweise findet. Das Buch ist in durchnumerierte kurze Abschnitte mit den Nummern 304–504 gegliedert, die ihrerseits zu zehn größeren Teilen I–X zusammengefaßt werden. In jedem dieser Teile I–X tragen die allerwichtigsten Formeln wiederum laufende Nummern. Dabei verzichtet der Autor weitgehend auf das Satz-Beweis-Schema und zitiert stattdessen je nach Bedarf entweder die entsprechenden Abschnittsnummern oder die Nummern der benötigten Formeln.

Wir geben eine kurze Inhaltsübersicht. Zunächst wird die Theorie der doppelt-periodischen meromorphen, also der elliptischen Funktionen und hier insbesondere der Weierstraßschen $\wp$-Funktion nebst ihrem Zusammenhang mit der Weierstraßschen Sigma- und Zetafunktion dargestellt. Anschließend folgen Ausführungen über die abgewandelten Sigmafunktionen und die verschiedenen Thetafunktionen sowie deren Reihen- und Produktdarstellungen. Als aus diesen zusammengesetzte Funktionen werden sodann die doppelt-periodischen Funktionen zweiter und dritter Art im Sinne von Hermite und ihre Reihenentwicklungen behandelt. Der nächste Teil ist den elliptischen Modulfunktionen gewidmet und hier insbesondere der Diskriminante Δ und der absoluten Invariante j, zudem der Multiplikation (einschließlich der komplexen) und Division der $\wp$-Funktion und – damit im Zusammenhang – der Modulgleichung. Der abschließende Teil besteht aus Anwendungen auf die Integration elliptischer Funktionen.

In der Darstellung der Theorie schlägt Jordan durchaus originelle, von der übrigen Literatur abweichende Wege ein. So benutzt er etwa zur Herleitung der Tatsache, daß es zu jeder elliptischen Kurve $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ über den komplexen Zahlen $\mathbf{C}$ ein Periodengitter Ω gibt, das sie mittels der Weierstraßschen $\wp$-Funktion parametrisiert, die Theorie der Differentialgleichungen, statt den sonst üblichen Weg über die absolute Invariante j als Modulfunktion zu gehen. Zusätzlich wird im Anschluß an den entsprechenden Abschnitt 334 dann in Abschnitt 393 noch ausgeführt, wie man aus gegebenen Zahlen $g_2, g_3 \in \mathbf{C}$ mit $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$ zugehörige Fundamentalperioden $2\omega_1, 2\omega_2$ von Ω berechnet. Oder der Autor geht in Abschnitt 394 darauf ein, wie aus dem gegebenen Wert $\wp(u) \in \mathbf{C}$ die Argumente $u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ $(m_i \in \mathbf{Z})$ zurückgewonnen werden können. Diese Beispiele mögen genügen.

Angesichts der kurzen und eleganten, dabei doch vollständigen Darstellung des Gegenstandes erscheint der Neuabdruck des Buches durch den Springer-Verlag voll gerechtfertigt. Dies gilt auch noch, wenn man die mächtige Konkurrenz durch andere ältere Werke über elliptische Funktionen wie die bereits genannten von Fricke und Weber oder überhaupt die umfangreiche Literatur aus dem vorigen Jahrhundert auf diesem Gebiet in Rechnung stellt. Zu berücksichtigen ist dabei weiter, daß es keine vergleichbaren neueren Fachbücher dieses Umfangs über elliptische Funktionen, etwa unter Einschluß der p-adischen Theorie, gibt, trotz entsprechender Abschnitte in Hurwitz und Courants „Funktionentheorie" oder in S. Langs „Elliptic Functions" und trotz des neueren Erscheinungsdatums von P. du Vals „Elliptic Functions and Elliptic Curves".

Ob allerdings die auf der Rückseite des Buches aufgestellte Behauptung „This chapter can still be considered to be the best introduction to elliptic functions" haltbar ist, erscheint dem Referenten fraglich. Dazu reicht der bloße Abdruck des Textes wohl doch nicht aus. Dieser ist nämlich in gewissem Sinne schwer zu lesen. Man mag von Schwierigkeiten mit dem möglicherweise etwas altertümlichen Französisch absehen und läuft auch nicht Gefahr, das Buch in die Rubrik Nonstandard-Analysis einzuordnen, wenn darin z. B. von „unendlich kleinen" Größen die Rede ist, denn diese wurde erst später erfunden. Aber störend macht sich doch bemerkbar, daß kein Index vorhanden ist, daß keine durchnumerierten Sätze formuliert werden und daß wichtige Formeln ohne Nummern aufgeführt sind. Dadurch hat es der Leser schwer, bereits früher bewiesene Tatsachen im Text wiederzufinden, zumal Rückverweise oft fehlen. Außerdem ist die Liste der Errata unvollständig. Schließlich erweist es sich als Nachteil, daß das Kapitel VI des Gesamtwerks „Cours d'Analyse" separat abgedruckt worden ist, denn in diesem Kapitel wird anstandslos auf die nicht neu veröffentlichten früheren Kapitel verwiesen. Hier wäre es Aufgabe des Verlages gewesen, Abhilfe zu schaffen. Durch geringfügige Investition von Mehrarbeit hätte der Wert des vorliegenden Bändchens erheblich gesteigert werden können. Dies gilt besonders dann, wenn es als Nachschlagewerk benutzt werden soll.

Jedoch wird Jordans „Fonctions Elliptiques" aufgrund der geschilderten Vorzüge seinen Platz in der mathematischen Fachliteratur sicher behaupten können. Die Lektüre des Buches macht Freude und ist – trotz seines Alters – immer noch sehr zu empfehlen.

Saarbrücken H. G. Zimmer

Fresnel, J., van der Put, M., Géométrie analytique rigide et applications (Progress in Mathematics, vol. 18) Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1981, 227 p., hardcover, DM 35,–

Die Theorie der analytischen Funktionen über nicht-archimedischem Grundkörper hat sich in den vergangenen 20 Jahren zu einem respektablen Gebiet entwickelt. Das Interesse hieran wurde besonders gefördert durch die Arbeiten von Tate, Mumford und Raynaud zur analytischen Uniformisierung algebraischer Kurven sowie abelscher Mannigfaltigkeiten. Inzwischen erscheint die Zeit reif, einige der in Originalarbeiten enthaltenen Ergebnisse und Methoden unter einheitlichem Gesichtspunkt zusammenzustellen und sie so einem breiteren Publikum zugänglich zu machen. Dieser Aufgabe versucht das Buch von Fresnel und van der Put gerecht zu werden. Es bringt im ersten Teil (Kapitel I–III) eine Einführung in die Theorie der analytischen Räume und beschäftigt sich im zweiten Teil (Kapitel IV–VI) mit Anwendungen algebraisch-geometrischer Art.

Der Inhalt im einzelnen: Kapitel I liefert – sozusagen als Vorübung – eine ad-hoc-Behandlung der analytischen Funktionen auf Teilbereichen von $\mathbf{P}^1$, also der analytischen Funktionen einer Variablen. Im übrigen werden bereits an dieser Stelle einige tragende Begriffsbildungen wie Grothendieck-Topologie und Kohomologietheorie erläutert, die zur Diskussion globaler analytischer Räume unerläßlich sind. Kapitel II behandelt die wichtigsten Eigenschaften affinoider Algebren, und in Kapitel III schließlich wird auf die Konstruktion globaler Räume eingegangen. Es werden der Tatesche Azyklizitätssatz sowie das Cartansche Heftungslemma für kohärente Moduln bewiesen. Der zweite Teil des Buches beginnt in Kapitel IV mit der (nunmehr bereits „klassischen") Uniformisierung elliptischer Kurven. Für die Uniformisierung von Kurven höheren Geschlechts werden einige Hilfsmittel entwickelt sowie die erzielbaren Resultate vorgestellt. Kapitel V behandelt Drinfelds invertierbare Moduln auf Unterräumen von $\mathbf{P}^1$, und Kapitel VI untersucht (als Verallgemeinerung der Theorie elliptischer Kurven) den Zusammenhang zwischen analytischen Tori und abelschen Mannigfaltigkeiten.

Die Autoren entwickeln die Theorie der analytischen Räume von den Anfangsgründen an so weit, wie dies im Hinblick auf die beabsichtigten Anwendungen notwendig ist. In Anbetracht des Umfangs des Buches waren hierbei notwendigerweise einige Kompromisse zu schließen. So ist die Darstellung insgesamt sehr komprimiert. Teilweise wird auf Übungsaufgaben verwiesen; einige Sachverhalte werden nur vereinfacht dargestellt. Im Falle der Grothendieck-Topologie etwa ergeben sich auch Komplikationen: die gewählte Version ist zu schwach und leistet nicht das, was an vielen Stellen behauptet und dem Leser zur Verifikation empfohlen wird. Dennoch erreichen die Autoren auf knappem Raum eine Einführung in die rigid analytische Geometrie, die eine gute Orientierung ermöglicht. Bei der anschließenden Diskussion der Anwendungen wird im zweiten Teil des Buches, abweichend vom ersten Teil, keine lückenlose Darstellung mehr angestrebt. Hilfsresultate aus der algebraischen Geometrie werden ohne Beweis übernommen. Hingegen wird der analytischen Interpretation algebraischer Sachverhalte besondere Aufmerksamheit geschenkt.

Das Buch ist in erster Linie zu empfehlen für Interessenten mit gutem algebraisch-geometrischem Hintergrund, die einen Überblick über die Anwendungsmöglichkeiten der rigid analytischen Geometrie sowie deren Grundlagen gewinnen möchten. In dieser Hinsicht ist den Autoren ein schöner Beitrag gelungen, der einen interessanten Einblick vermittelt. Für den mehr oder weniger unbedarften Leser wird jedoch ein systematisches Studium des Buches nicht ganz ohne Schwierigkeiten sein.

Münster S. Bosch

Švec, A., Global Differential Geometry of Surfaces, Dordrecht – London: D. Reidel Publ. 1982, 154 p., cloth, Dfl. 65.00

Bei dem Buch von A. Švec handelt es sich um eine zweite Monographie über die globale Differentialgeometrie nach den Lecture Notes von H. Huck, R. Roitzsch, U. Simon, W. Vortisch, R. Walden, B. Wegner und W. Wendland über die „Beweismethoden der Differentialgeometrie im Großen" 1973. Sie unterscheidet sich von der letztgenannten Monographie ganz wesentlich von der Stoffauswahl und den verwandten Methoden her. Während der Band der Lecture Notes im – wie Verf. im Vorwort schreibt – „tensor slang" abgefaßt und besonders um Systematik in der Anwendung der Beweismethoden (Indexmethode, Integralformelmethode, Maximummethode) bemüht ist, benutzt Verf. den Kalkül von É. Cartan, den er zu einer regelrechten „Maschinerie" ausbaut. Dieselbe liefert ihm durch Betrachtung des Transformationsverhaltens gegenüber Drehung der Cartanschen beweglichen Dreibeine invariante Differentialformen, die zur Bildung von

Integralformeln mit Hilfe des Satzes von Stokes sowie zur Bildung von Systemen partieller Differentialgleichungen zwecks Anwendung der Sätze von I. Vekua über pseudoanalytische Funktionen herangezogen werden. (Die Maximummethode tritt beim Verf. mehr in den Hintergrund, die Indexmethode wird nicht erwähnt.) Wie Verf. auf S. 52 durchblicken läßt, ist die beste Art der Auffindung passender solcher Differentialformen die des Erratens. Hiermit gelingen ihm Resultate über die globale Differentialgeometrie berandeter W-Flächen nebst verwandter Flächen (Kap. V) und der (I, II, III-)Isometrie von berandeten Flächen (Kap. VI), die fast alle neu, aber naturgemäß teilweise sehr ausgefallen sind. Die ersten vier Kapitel haben vorbereitenden Charakter und dienen dazu, daß das Buch für sich allein verständlich ist; Kap. VII und Kap. VIII bieten einen Ausblick auf verwandte Probleme in höheren Dimensionen. – Das Buch ist sehr sorgfältig und anregend geschrieben und die in ihm steckende enorme Rechenleistung ist zu bewundern. Allerdings teilt Ref. nicht die im Vorwort angedeutete Meinung des Verf., daß der Cartansche Kalkül gegenüber dem Tensorkalkül schlechthin die besseren Resultate liefert. Hierfür ein Beispiel: Aus dem der Art nach völlig neuen Theorem VI, 3.3. des Verf. folgt der bekannte Satz über die II-Starrheit einer Eifläche mit $\delta f(H, K) = 0$ (f = gleichsinnig monotone Funktion zweier Variabler, H = mittlere Krümmung, K = Gaußsche Krümmung) nur in den in dem Buch erwähnten Spezialfällen von K. Voss und V. Grove, wie von E. Glässner und K. Voss gezeigt werden konnte.

Stuttgart K. Leichtweiss

Moise, E. E., Geometric Topology in Dimensions 2 and 3 (Graduate Texts, vol 47), New York – Heidelberg – Berlin: Springer 1977, x + 262 p, cloth, DM 47,30

„Geometrische" Topologie, was ist das? Mengentheoretische Topologie, analytische Topologie, algebraische Topologie, stückweis lineare Topologie; immer gibt das Adjektiv einen Hinweis auf die Methoden, die zur Beschreibung topologischer – das heißt aber doch: geometrischer – Phänomene herangezogen werden. Was sind dann aber geometrische Methoden, ist Topologie nicht eo ipso geometrisch? Nun, der Begriff „geometrische Topologie" taucht seit einigen Jahren immer wieder auf und er meint wohl Problemstellungen, die stark der Anschauung, sozusagen der Elementargeometrie, entnommen sind und sich mit mengentheoretischen oder analytischen oder algebraischen oder stückweis linearen Methoden nur teilweise behandeln lassen. Der anschauliche Charakter kommt bei der Beschränkung auf die Dimensionen 2 und 3 besonders deutlich zum Vorschein und gerade die unterschiedlichen Verhältnisse in diesen beiden Dimensionen bilden ein reizvolles mathematisches Thema.

Edwin E. Moise, der Verfasser des vorliegenden *Graduate Text* schränkt das Gebiet noch etwas mehr ein. Für ihn ist geometrische Topologie in etwa der Zweig der Topologie der Mannigfaltigkeiten, der sich mit Fragen der Existenz von Homöomorphismen befaßt. Damit wird sofort deutlich, daß zumindest die elementaren Methoden der algebraischen Topologie nicht viel beitragen können, sie liefern ja im allgemeinen nur Homotopieaussagen und höchstens negative Ergebnisse in bezug auf Homöomorphie.

Zum Inhalt des Buches: Dieser kann kaum besser dargestellt werden, als es der Verfasser in seinem Vorwort getan hat. Wir können es natürlich hier nicht abschreiben, aber wir empfehlen dem interessierten Leser die Lektüre, die ihn auch etwas über die historische Entwicklung aufklärt. Die dargestellten Ergebnisse sind nicht neu, sondern eigentlich schon als klassisch zu bezeichnen; es handelt sich ja um ein Lehrbuch und nicht um eine Abhandlung. Die Auswahl hängt natürlich von den Interessen des Autors ab und hat ihren Schwerpunkt in seinen eigenen Beiträgen. Sie gipfelt in den wohl ersten syntaktisch wirklich vollständigen Beweisen der Triangulierbarkeit von 3-Mannigfaltigkeiten und der Hauptvermutung für triangulierte 3-Mannigfaltigkeiten. Der Weg dahin ist jedoch ziemlich lang. Er führt über positive und negative Aussagen.

Zu ersteren gehören

die Triangulierbarkeit und Klassifikation von 2-Mannigfaltigkeiten,

der Jordansche Kurvensatz und der Satz von Schönflies, daß jede 1-Sphäre in der reellen Ebene eine 2-Zelle berandet,

der stückweis lineare Schönflies-Satz in $\mathbf{R}^3$, daß jede polyedrale 2-Sphäre im Raum eine stückweis lineare 3-Zelle berandet,

das Loop Theorem von Papakyriakopoulos, daß sich zu jeder Schleife im Rand einer orientierbaren, berandeten 3-Mannigfaltigkeit, die sich in der Mannigfaltigkeit, aber nicht in ihrem Rand zusammenziehen läßt, eine abgeschlossene 2-Zelle finden läßt, deren Rand die gleichen Eigenschaften hat wie die gegebene Schleife,

seine Erweiterung auf zweiseitig eingebettete 2-Mannigfaltigkeiten und

die Berechnung von Knotengruppen.

Demgegenüber steht auf der negativen Seite die Diskussion von wilden Einbettungen. (Ein triangulierbarer Teilraum M in $\mathbf{R}^n$ ist *wild* eingebettet, wenn es keinen Homöomorphismus $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ gibt, derart daß h(M) ein Unterpolyeder des $\mathbf{R}^n$ ist.) Man findet die wilden Bögen und Sphären von Antoine, Wilder, Fox und Artin. Es wird gezeigt, daß man nicht – wie man auf Grund der Beispiele von Antoine vermuten könnte – zur Feststellung der Wildheit mit einer Untersuchung des Komplements auskommt. Erwähnenswert ist die Begründung dafür, daß das wohl berühmteste derartige Beispiel, die „gehörnte Sphäre" von Alexander nicht im Detail behandelt wird (S. 133): „[It] appeared after the work of Antoine. Pictorially it is easier to describe . . ., but mathematically it is harder to investigate. – Antoine was blind". Als zusätzliches negatives Ergebnis, das nicht mit der Wildheit zusammenhängt, ist das Beispiel von Stallings zu nennen, das mit Hilfe des Linsenraumes L(6, 1) zeigt, daß auf die Voraussetzung der Zweiseitigkeit im erweiterten Loop Theorem nicht verzichtet werden kann.

Die Beweise sind alle sorgfältig, vollständig und verständlich durchgeführt. Es werden soweit wie möglich stückweis lineare Methoden verwandt. Die algebraische Topologie spielt – wie schon gesagt – eine untergeordnete Rolle. Es wird Vertrautheit mit der elementaren Homologie von Komplexen vorausgesetzt, die Konstruktion der Fundamentalgruppe wird skizziert (einschließlich des Zusammenhangs mit H_1) und die Euler-Charakteristik wird in einer zwar unüblichen, aber für die hier vorkommenden niederdimensionalen Anwendungen sehr geschickten Weise entwickelt.

Natürlich erfordert ein Lehrbuch, das für einen Gebrauch zur Vorlesung gedacht ist, eine Beschränkung des Stoffes; diese hat der Autor doch ziemlich radikal vorgenommen. Man würde sich einige Ergänzungen wünschen, etwa eine ausführlichere Behandlung der Linsenräume, über deren Homöomorphismen es eine Reihe recht interessanter neuer Ergebnisse gibt, oder eine Darstellung der doch vielfach verwendbaren Heegard-Zerlegungen, oder auch die Schottenkappe, das Standardbeispiel für ein zusammenziehbares Polyeder, das nicht kollabiert; Ringvermutung und Streifenvermutung sind ebenfalls nicht erwähnt. Manchmal wäre ein Hinweis auf mögliche bzw. unmögliche Verallgemeinerungen der dargestellten Sätze in höheren Dimensionen direkt notwendig, so z. B. die Widerlegung der allgemeinen Hauptvermutung, die Theorie der Henkelkörper und das h-Cobordismus Theorem (Diese Aufzählung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit; selbstverständlich handelt es sich um eine zufällige und subjektive Auswahl des Referenten).

Aber in dem, was geboten wird, ist das Buch perfekt. Die Präzision geht hin bis zu dem Nachweis, daß das Einheitsintervall tatsächlich eine 1-Mannigfaltigkeit mit Rand im Sinne der abstrakten Definition ist (S. 19), und dabei bleibt – wohl infolge der Stoffbeschränkung – alles übersichtlich und verständlich! Es wird ganz deutlich, wieviel schwieriger die Fragen nach Homöomorphie sind als die nach Homotopieäquivalenz, worauf man in den üblichen Topologievorlesungen nur selten eingeht. Jedem Topologen sind die dargestellten Sachverhalte zwar irgendwann begegnet, aber er hat sich kaum die Mühe gemacht, die oft sehr straff gehaltenen Originalarbeiten zu verstehen. Es ist ein besonderes Verdienst des Autors, diese Beweise dem forschenden Mathematiker leichter zugänglich gemacht zu haben.

Was den Gebrauch durch Studenten anbetrifft, so ist dieses für mittlere Semester sicherlich möglich. Man kann eine einführende Vorlesung darauf aufbauen, es aber auch zum Selbststudium empfehlen. Für das letztere hat sich der Verfasser einen besonderen didaktischen Trick überlegt. Jedes der 36 Kapitel wird durch eine Serie von Aufgaben abgeschlossen; diese bestehen im allgemeinen aus Behauptungen, die zu beweisen oder zu *widerlegen* sind! Einem Studenten, der dieses Buch durchgeackert und verstanden hat, fällt es sicherlich leicht, weiterführende Literatur zu verarbeiten, und damit hat er eine solide Basis für eine Vertiefung in Richtung Diplom- oder Staatsexamensarbeit.

München R. Fritsch

Greenberg, M. J., Harper, J. R., Algebraic Topology: A First Course (Mathematics Lecture Notes Ser., vol 58), Reading: Addison Wesley 1981, xii + 311 p., hardbound $ 31.50, paper $ 19.50

Was soll man noch viel sagen? Es genügt wohl denen, die es noch nicht wissen, zu verraten: Nach „dem Greenberg" haben die meisten Kollegen bisher ihre Vorlesung über Algebraische Topologie gehalten, und mit Recht. Man findet sonst nicht so leicht das Wichtigste so kurz gefaßt und flott nacheinander, ohne Exkurse und Abwege, ohne geheime Tücken und Lücken.

Der Greenberg ist wohl immer noch – wenn man eine Vorlage für eine erste Topologie-Vorlesung sucht – das Buch, das man am ehesten nennen wird. Es war also eine gute Tat, es wieder vorzulegen. Die Überarbeitung hat den ursprünglichen Charakter der Lecture Notes nicht beeinträchtigt, und der Gesamtplan ist geblieben. Hinzugekommen sind einige Figuren, viele Übungsaufgaben, klassische Anwendungen. Einiges ursprünglich nur Skizzierte ist genauer durchgeführt worden. Der Text ist ausführlicher mit Einleitungen und Erklärungen.

Auch gewisse Schwächen sind geblieben: Zum Beispiel das Kapitel „Products" kommt immer noch lange nach dem Kapitel „Cup and Cap Products". Es wirkt doch sehr aufklärend im Gewirr der mancherlei Produktbildungen, wenn man sich erst einmal klarmacht, daß alles aus zwei natürlichen Transformationen hervorgeht: der Diagonalen $X \to X \times X$ und der Eilenberg-Zilber-Abbildung $SX \times SY \cong SX \otimes SY$.

Und wenn einmal die grundlegenden Definitionen der allgemeinen Kohomologietheorie kanonisiert werden, so scheint mir, man sollte als definierende Axiome an den Anfang stellen: Homotopieinvarianz und die Mayer-Vietoris-Sequenz, beides nur für absolute Gruppen. Das ist einfacher und gerade den Konstruktionen auf Mannigfaltigkeiten und den Verfahrensweisen der Algebraischen Geometer und Analytiker näher als die Eilenberg-Steenrod-Axiome.

Dies Buch also wird sicher noch vielen helfen, und es läßt auch Raum genug für neue Bücher.

Regensburg Th. Bröcker

Bott, R., Tu, L. W., Differential Forms in Algebraic Topology (Graduate Texts in Mathematics, vol. 82) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, xiv + 331 p., cloth, DM 74,–

Nach manchen etwas trockenen Strecken der Anfängervorlesungen sehen unsere Studenten wohl in der Funktionentheorie zum ersten Mal etwas von dem Zusammenwirken von

Analysis und Geometrie, und wir wollen hoffen, daß ihnen dieses wunderbare Gebiet nicht zu einem Sammelsurium von Rechentricks des Residuenkalküls verkümmert wird und daß ihnen der Satz von Stokes nicht nur als ein halb anschaulich begründetes Hilfsmittel der Strömungs- und Elektrizitätslehre begegnet. Hier nämlich liegt ja eigentlich der Ursprung der Homologietheorie, die heute überall in der Mathematik eine wichtige Rolle spielt, und schon lange hätte man sich ein Lehrbuch gewünscht, das von der Integrationstheorie der Differentialformen ausgehend, ohne Umwege einen Zugang zur Algebraischen Topologie aufzeigt. Hier ist es: Flott und munter geschrieben, mit nicht mehr als Anfängerkenntnissen beginnend, führt das Buch auf 300 Seiten zu durchaus schwierigen Techniken und zentralen Ergebnissen: Die Mayer-Vietoris-Sequenz der de-Rham-Kohomologie als wesentliches Hilfsmittel, die Poincaré-Dualität, der Thom-Isomorphismus, der Indexsatz für Vektorfelder von Hopf und die Lefschetz-Fixpunktformel, Eilenberg-MacLane-Räume, Postnikov-Zerlegung, Morse-Theorie, Charakteristische Klassen, Spektralfolgen mit der typischen Jagd der Elemente über ein doppelindiziertes Schema, alles kommt vor; und manches kommt mehrfach vor, so daß man verfolgen kann, wie zum Beispiel die Mayer-Vietoris-Folge eine erste Approximation für die Technik der Doppelkomplexe und Spektralfolgen ist.

Freilich ist auch ein Preis zu zahlen: Ungenauigkeiten gibt es fast auf jeder Seite, vieles bleibt skizzenhaft oder so kurz, daß man doch anderswoher wissen muß, was gemeint ist. Einige Beispiele:

The *tangent space* to M at p, written T_pM, is the vector space over $\mathbf{R}$ spanned by the operators $\partial/\partial x_1(p), \ldots, \partial/\partial x_n(p), \ldots$ (S. 21), das ist alles, was man als Erklärung darüber findet, was man sich unter dem Tangentialraum vorzustellen hat, und auch sonst müssen gelegentlich irgendwelche explizit angegebenen Elemente einen Vektorraum aufspannen, ohne daß man erfährt, in welchem Raum sie das tun. Wo von Orientierungen die Rede ist, werden zur Justierung Koordinaten vertauscht (S. 29), was in Dimensionen < 2 nicht geht, und man wählt einen orientierungserhaltenden lokalen Diffeomorphismus auf den „oberen Halbraum" (S. 31), was das abgeschlossene Intervall an einem Randpunkt nicht zuläßt. Auf S. 44 stehen zwei nicht äquivalente Definitionen dafür, daß eine Bilinearform $V \otimes W \to \mathbf{R}$ nicht ausgeartet ist; auf S. 47 ist in der Definition der Faserung vergessen, daß die Karten fasernweise Abbildungen sein sollen und ähnliche noch größere Mängel hat die Definition der Tubenumgebungen S. 65 und das Beispiel für eine Kurve in $\mathbf{R}^3$, S. 66. Die Gruppe Diff(F) tritt als topologische Gruppe auf, ohne daß man erfährt, was ihre Topologie ist (S. 48). Zur Reduktion der Strukturgruppe eines Vektorbündels E führt man eine Metrik auf E ein und betrachtet die Karten – that send orthonormal frames of E to orthonormal frames of $\mathbf{R}^n$ (S. 55) –, ohne ein Wort darüber zu verlieren, warum es solche gibt. Bei der Definition der „compact vertical cohomology" S. 61 ff. genügt es nicht zu fordern, daß die betrachteten Formen auf jeder Faser kompakten Träger haben, sondern man muß verlangen, daß die Projektion der Träger auf die Basis eigentlich ist, sonst entsteht durch Integration über die Faser nicht einmal eine stetige Form auf der Basis. In den späteren Teilen wird das Buch naturgemäß noch flüchtiger, manches allgemeine Argument ist so allenfalls für kompakte Räume haltbar (Existenz guter Überdeckungen simplizialer Komplexe unter einer vorgegebenen Überdeckung (S. 190), oder Existenz differenzierbarer Approximationen (S. 213)). In der Definition der CW-Komplexe S. 219 fehlt der Hinweis, daß man beim „successive attaching of cells" in der Reihenfolge der Dimensionen der Zellen vorgehen muß.

Auf all sowas muß man gefaßt sein, und doch bleibt das Buch in seiner Anlage ein gutes, ein ausgezeichnetes, lang erwartetes und gewünschtes Buch, und viel Arbeit ist daran gewandt worden. Allein der reichhaltige Index mit über tausend Kennwörtern spricht für sich. Die mancherlei kleinen Mängel kann jeder gebildete Mathematiker beheben, die großen Probleme, die sich bei diesem Weg auftun, verlangten den Experten, der hier am Werke war.

Regensburg Th. Bröcker

A. Fröhlich

Galois Module Structure of Algebraic Integers

1983. X, 262 pages.
(Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 1)
Cloth DM 88,–
ISBN 3-540-11920-5

Contents: Introduction. – Notation and Conventions. – Survey of Results. – Classgroups and Determinants. – Resolvents, Galois Gauss Sums, Root Numbers, Conductors. – Congruences and Logarithmic Values. – Root Number Values. – Relative Structure. – Appendix. – Literature List. – List of Theorems. – Some Further Notation. – Index.

Galois Module Structure of Algebraic Integers is the first volume of the newly launched 3rd sequence of the well known "Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete". The author gives a systematic account of the theory of Galois module structure for rings of algebraic integers and its connection with Artin L-functions. This theory has experienced sudden and rapid growth over the last ten to twelve years and has most notably aquired major significance in algebraic number theory.
The central topic of the book is Galois module structure of algebraic integers and particular emphasis is given to a discussion of new problems, directions of research and to the historical background of this subject area. The first chapter takes the form of a survey, and, in a self-contained account, it describes the salient features of the theory.

Since until now only original papers and brief reports of survey lectures have been published in this field, this comprehensive monograph will be unquestionably of great value to researchers in this area, including graduate students, both as a study aid and as a reference work.