

86. Band Heft 1
ausgegeben am 23. 1. 1984

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer



B. G. Teubner Stuttgart 1984

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 85/1 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 84,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69

D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1984 – Verlagsnummer 2899/1

Printed in Germany – ISSN 0012–0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim

Druck: Schwetzingen Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 86, Heft 1

1. Abteilung

G. Faltings: Die Vermutungen von Tate und Mordell	1
R. Beran: Bootstrap Methods in Statistics	14
B. Hornfeck: Hans-Heinrich Ostmann 1913–1959	31

2. Abteilung

Davis, Ph. J., Hersh, R., The Mathematical Experience (<i>M. Otte</i>)	1
Morse, M., Selected Papers (<i>W. Klingenberg</i>)	1
Beltrametti, E. G., Cassinelli, G., The Logic of Quantum Mechanics (<i>G. Kalmbach</i>)	2
Lutz, R., Goze, M., Nonstandard Analysis. A Practical Guide with Applications – Richter, M. M., Ideale Punkte, Monaden und Nichtstandard-Methoden (<i>D. Laugwitz</i>)	3
Lützen, J., The Prehistory of the Theory of Distributions (<i>J. Wloka</i>)	4
Dieudonné, J., Grundzüge der modernen Analysis, Band 7 (<i>D. Poguntke</i>)	5
Kubert, D. S., Lang, S., Modular Units (<i>G. Frey</i>)	6
Freitag, E., Siegelsche Modulformen (<i>H. Klingen</i>)	7
James, G., Kerber, A., The Representation Theory of the Symmetric Group (<i>G. Michler</i>)	9
Klemm, M., Symmetrien von Ornamenten und Kristallen (<i>W. Plesken</i>)	10
Rees, E. G., Notes on Geometry (<i>H. Lenz</i>)	12
Griffiths, P. A., Morgan, J. W., Rational Homotopy Theory and Differential Forms (<i>T. tom Dieck</i>)	13
Brauner, K., Differentialgeometrie (<i>R. Schneider</i>)	14
Jarchow, H., Locally Convex Spaces (<i>R. Meise</i>)	15
Kirillov, A. A., Gvishiani, A. D., Theorems and Problems in Functional Analysis (<i>H. H. Schaefer</i>)	17
Singer, I., Bases in Banach Spaces, vol. II (<i>H. H. Schaefer</i>)	17
Helgason, S., Topics in Harmonic Analysis of Homogeneous Spaces (<i>G. Schlichting</i>)	18
Palis, J., Jr., de Melo, W., Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction (<i>Th. Bröcker</i>)	19
Chow, S.-N., Hale, J. K., Methods of Bifurcation Theory (<i>F. Klok, G. Vegter</i>)	20
Vanderbauwhede, A., Local bifurcation and symmetry (<i>H. Grabmüller</i>)	21
Wloka, J., Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertaufgaben (<i>J. Batt</i>)	23
Fucik, S., Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems (<i>H. Amann</i>)	25
Clements, D. L., Boundary Value Problems Governed by Second Order Elliptic Systems (<i>K. Habetha</i>)	25
Chung, K. L., Lectures from Markov Processes to Brownian Motion (<i>H. Hering</i>)	26
Cornfeld, I. P., Fomin, S. V., Sinai, Ya. G., Ergodic Theory (<i>K. Jacobs</i>)	26
Pötschke, D., Sobik, F., Mathematische Informationstheorie (<i>K. Jacobs</i>)	28

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

J. Flum: Modelltheorie – topologische Modelltheorie

P. Henrici: Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei formalen Potenzreihen

K. Johansson: Topologie und Geometrie von 3-Mannigfaltigkeiten

D. Jungnickel: Lateinische Quadrate, ihre Geometrien und ihre Gruppen

E. Viehweg: Zur Klassifikationstheorie drei(und höher)dimensionaler projektiver
Mannigfaltigkeiten

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1¹/₂, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1¹/₂, 8520 Erlangen

Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Die Vermutungen von Tate und Mordell

G. Faltings, Wuppertal

§ 1 Vorwort

Der folgende Aufsatz verfolgt das Ziel, die neueren Entwicklungen zu beschreiben, welche kürzlich zum Beweis der im Titel auftauchenden Vermutungen geführt haben. Dabei soll aber nicht der Inhalt der Arbeit [9] wiederholt werden. Vielmehr ist daran gedacht, auch dem Nichtspezialisten eine Vorstellung davon zu geben, wie und warum die Beweise funktionieren, und welche Entwicklungen ihnen vorausgingen. Allerdings ist ein gewisses Verständnis der algebraischen Geometrie im folgenden recht nützlich. Ich werde zunächst einen kurzen historischen Abriss geben und dabei die auftretenden Probleme und Lösungsversuche zu erklären versuchen. Danach folgen einige Erläuterungen über Höhen und zum Schluß Beweisskizzen der Vermutungen von Tate, Shafarevich und Mordell.

Allgemein läßt sich sagen, daß die Beweismethoden aus der algebraischen Geometrie stammen und schon in den sechziger Jahren von J. Tate und der russischen Schule um I. R. Shafarevich (insbesondere Parshin, Arakelov und Zarhin) entwickelt worden sind. Neu hinzugekommen ist in den letzten Jahren nur die Theorie der Kompaktifizierung von Modulräumen, welche wir hauptsächlich Mumford verdanken. Es scheint jedoch, als ob die Tragweite dieser Entwicklungen von vielen Zahlentheoretikern nicht voll erkannt worden ist. Es zeigt sich hier einmal mehr, daß die Zahlentheorie zwar zu Recht die Königin der Mathematik genannt wird, sie aber ihren Glanz, wie auch Königinnen sonst, nicht so sehr aus sich selbst als vielmehr aus den Kräften ihrer Untertanen zieht.

Endlich sei erwähnt, daß die vorliegenden Resultate einen weiteren Erfolg der von A. Grothendieck vorgenommenen Umformulierung der algebraischen Geometrie darstellen. Dies muß hier um so mehr betont werden, als diese Umwälzung gerade in Deutschland auf mancherlei ungerechtfertigte Ablehnung gestoßen ist, und weil auch in jüngster Zeit manche eine Abkehr von ihr zu „konkreter“ Mathematik propagieren. Diese beklagen, daß man heute zu viel abstrakte Mathematik lernen muß, bevor man sinnvoll arbeiten kann. Diese Entwicklung ist zwar zu bedauern, doch darf man nicht übersehen, daß sie uns andererseits mächtige Hilfsmittel in die Hand gibt, und es erlaubt, komplizierte Sachverhalte einfach und klar darzustellen. Wer diese Methoden ablehnt, wird bei seinen Forschungen meist an der Oberfläche bleiben müssen. Er wird dabei vielleicht eine große Masse von Beispielen und Sätzen anhäufen, doch wird dieser Masse der

innere Zusammenhang fehlen, der nur von der allgemeinen Theorie geliefert werden kann.

Man muß die Anhänger dieser Richtung auch fragen, warum sie die abstrakte Theorie unseres Jahrhunderts ablehnen, die des letzten aber fleißig benutzen. Denen, die heute Mathematik studieren, rate ich deshalb, lieber die abstrakten Theorien zu lernen, als schnelle Erfolge in der „konkreten“ Mathematik zu suchen.

Die Entwicklung der Mathematik vollzieht sich im Zusammenspiel von Theorie und Beispiel. Auf sich allein gestellt sind diese beiden Zweige nicht lebensfähig.

§ 2 Historischer Abriss

Ganzzahlige oder rationale Lösungen von Gleichungen wurden schon im klassischen Altertum untersucht. In der Neuzeit wurde dies zum Beispiel von Fermat fortgeführt, der uns auch sein berühmtes Problem hinterlassen hat. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf algebraische Kurven, zum Beispiel die Kurven

$$a) \quad y = x^2$$

$$b) \quad y^2 = x^3 - x$$

$$c) \quad y^2 = x^5 - x$$

Eine erste Einteilung der Kurven erfolgt durch ihr Geschlecht. Dies ist eine ganze Zahl, und in den Beispielen ist ihr Wert 0, 1 bzw. 2. Im allgemeinen weiß man, daß Kurven sich ziemlich verschieden verhalten, je nachdem ob das Geschlecht 0, 1 oder größer als 1 ist. Wir haben also oben je einen Vertreter dieser drei Klassen angegeben.

Das uns interessierende Problem besteht darin, rationale Punkte auf Kurven zu finden, das heißt, Paare (x, y) von rationalen Zahlen, welche zum Beispiel eine der Gleichungen a), b) oder c) erfüllen. Man kann statt der rationalen Zahlen auch einen beliebigen Zahlkörper wählen, doch bleiben wir der Einfachheit halber bei \mathbf{Q} . Für Kurven vom Geschlecht 0 sind die rationalen Punkte stets sehr leicht zu finden, wie man auch am Beispiel a) sieht. Wenn es überhaupt welche gibt, so erhält man sie als rationale Funktion eines Parameters. Dies liegt daran, daß jede Kurve vom Geschlecht 0, welche einen rationalen Punkt besitzt, isomorph zur projektiven Geraden ist.

Schwieriger wird es schon bei Kurven vom Geschlecht 1. Bekanntlich tragen diese eine Gruppenstruktur, wobei man als neutrales Element einen beliebigen rationalen Punkt wählen kann. Die Multiplikation wird dann durch rationale Funktionen in den Koordinaten gegeben, und die \mathbf{Q} -rationalen Punkte erhalten damit natürlicherweise die Struktur einer abelschen Gruppe. L. J. Mordell bewies nun 1922 ([15]), daß diese Gruppe stets endlich erzeugt ist, also von der Form

$$\mathbf{Z}^r \oplus (\text{endliche Gruppe}).$$

Es können somit unendlich viele rationale Punkte auftreten, wobei der Rang r der

obigen Gruppe ein Maß für ihre Anzahl ist. Es wird vermutet, daß r beliebig groß werden kann.

In seiner Arbeit stellte Mordell auch die Frage, ob auf Kurven vom Geschlecht größer als Eins vielleicht immer nur endlich viele rationale Punkte liegen. Dies wurde unter dem Namen Mordell-Vermutung bekannt, und schien lange unangreifbar zu sein. Den ersten Fortschritt erzielte 1928 A. Weil in seiner Promotionschrift ([32]). Er verallgemeinerte den Satz von Mordell auf abelsche Varietäten. Das Resultat heißt heute Satz von Mordell-Weil, und einen sehr schönen Beweis kann man zum Beispiel in [18] oder [12] finden.

Für algebraische Kurven X enthält dieser Satz die folgende Information:
Manbettet X in die Jacobische

$$J = J(X)$$

ein. Dann bilden die rationalen Punkte auf J eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Die Mordell-Vermutung besagt, daß diese Gruppe nur einen endlichen Durchschnitt mit X hat, falls das Geschlecht von X größer als Eins ist, also falls X echte Teilmenge von J ist.

Man hat versucht, die Mordell-Vermutung auf diese Weise zu zeigen, doch ist dies meines Wissens noch niemandem gelungen. Es gab zum Beispiel die Vermutung, daß für eine beliebige komplexe Kurve X vom Geschlecht größer als Eins jede endlich erzeugte Untergruppe von J endlichen Durchschnitt mit X hat. Dies ist in der Tat richtig, und daraus folgt auch die Mordell-Vermutung. Leider braucht man aber diese schon zum Beweis der obigen Tatsache.

Den nächsten Fortschritt erzielte 1929 C. L. Siegel ([26]). Er zeigte, daß auf einer affinen Kurve vom Geschlecht mindestens Eins nur endlich viele ganze Punkte liegen. Bei unserem Beispiel heißt das, daß für b) und c) nur endlich viele Lösungen (x, y) mit ganzen x und y existieren. Der Beweis benutzt diophantische Approximation und ist daher nicht effektiv, das heißt, man kann nicht abschätzen, wie groß x und y maximal sein können. Das Ergebnis wurde später von K. Mahler ([13]) auf den Fall ausgedehnt, daß x und y rationale Zahlen sind, in deren Nenner nur endlich viele vorgegebene Primfaktoren aufgehen dürfen. Einen Beweis dieses Resultats findet man zum Beispiel in [12].

Wesentliche Fortschritte gab es dann erst wieder in den sechziger Jahren, als Yu. I. Manin ([14]) und H. Grauert ([10]) 1963 bzw. 1965 die Mordell-Vermutung für Funktionenkörper bewiesen. Dabei mußten sie benutzen, daß die Basis eine algebraische Struktur über einem kleineren Körper besitzt, so daß man Differentialrechnung betreiben kann. Außerdem ergeben sich Komplikationen durch die konstanten Kurven. Alles dies führt dazu, daß man die Beweise nicht auf Zahlkörper übertragen kann.

Jedoch gaben sie Anlaß zu weiteren Forschungen, und A. N. Parshin bewies 1968 ([22]), daß die Mordell-Vermutung aus der Shafarevich-Vermutung folgt. Außerdem bewies er einen Teil der Shafarevich-Vermutung, welcher ausreichte, einen neuen und gut zu verstehenden Beweis der Mordell-Vermutung für Funktionenkörper der Charakteristik Null zu geben. Die Shafarevich-Vermutung wurde für solche Körper 1971 von S. Arakelov gezeigt ([1]), und in positiver

Charakteristik von L. Szpiro 1978 ([27]). Diese Beweise benutzen entweder Hodge-Theorie oder Frobenius und eignen sich daher nicht für Zahlkörper.

Bei der Shafarevich-Vermutung geht es um Kurven mit vorgegebenem Reduktionsverhalten. Wir erläutern dies kurz für Kurven über \mathbf{Q} :

Sei X/\mathbf{Q} eine glatte Kurve. Dann kann man nach allgemeinen Grundsätzen X zu einer Kurve X/\mathbf{Z} über den ganzen Zahlen ausdehnen, wobei für fast alle Primzahlen p die Reduktion von X/\mathbf{Z} modulo p wieder glatt ist. Die endlich vielen p , für die das nicht gilt, heißen Stellen schlechter Reduktion. Die Menge der Stellen schlechter Reduktion hängt ab von der Ausdehnung X/\mathbf{Z} , doch gibt es stets ein minimales Modell von X , für das diese Ausnahme-Menge so klein wie möglich wird.

Die Shafarevich-Vermutung besagt nun, daß es nur endlich viele Isomorphie-Klassen von Kurven X/\mathbf{Q} vorgegebenen Geschlechts gibt, falls man nur endlich viele vorgegebene Primzahlen als Stellen schlechter Reduktion für das minimale Modell zuläßt. Sie wurde von I. Shafarevich auf dem internationalen Kongreß in Stockholm 1962 aufgestellt ([25]), und er bewies sie für hyperelliptische Kurven. Man kann statt Kurven auch prinzipal polarisierte abelsche Varietäten betrachten. Man erhält dann eine zweite Version der Shafarevich-Vermutung, welche nach dem Satz von Torelli die erste impliziert. Es sei jedoch bemerkt, daß für Funktionenkörper die zweite Version im Gegensatz zur ersten nicht gilt.

Warum folgt nun die Mordell-Vermutung aus der Shafarevich-Vermutung? Das Argument von Parshin geht wie folgt: Für eine Kurve X/\mathbf{Q} und einen rationalen Punkt $x \in X(\mathbf{Q})$ von X konstruiert man eine Überlagerung $Y(x)$ von X , welche genau über x verzweigt ist. Außerdem kann $Y(x)$ nur dort schlechte Reduktion haben, wo dies für X gilt, mit Ausnahme einer zusätzlichen, frei wählbaren Primzahl (etwa $p = 2$). Die Shafarevich-Vermutung liefert die Endlichkeit der vorkommenden $Y(x)$, und daraus folgt sofort die Endlichkeit der Menge der $x \in X(\mathbf{Q})$. Mit einer ähnlichen Konstruktion kann man übrigens auch den Satz von Siegel über ganze Punkte aus der Shafarevich-Vermutung ableiten (dies ist natürlich nur von Interesse für Geschlecht Eins).

Es stellte sich nun die Frage, ob man diese Ergebnisse auf Zahlkörper übertragen kann. Arakelov hat in [2] eine Methode entwickelt, mit der man Ergebnisse aus der algebraischen Geometrie in die Sprache der Zahlkörper übertragen kann. Leider reichte dies aber nicht aus. Der Erfolg stellte sich überraschenderweise erst ein, als man diese Überlegungen auf die Tate-Vermutung anwandte. Die dabei entwickelten Methoden reichten, auch die Shafarevich-Vermutung für Zahlkörper zu zeigen.

Wovon handelt nun die Tate-Vermutung? Zunächst geht es um ein Analogon zur Hodge-Vermutung, nämlich daß der von algebraischen Zyklen erzeugte Unterraum der Kohomologie einer Varietät so groß ist, wie es die Galois-Operation gestattet ([29]). Ein Spezialfall davon ist die folgende Aussage:

Sei K ein Körper, A/K eine abelsche Varietät über K , ℓ eine Primzahl $\neq \text{Char}(K)$.

Sei $T_{\ell}(A) = \varprojlim A[\ell^n](\bar{K})$

der Tate-Modul zu A , auf dem die absolute Galois-Gruppe

$$\pi = \text{Gal}(\bar{K}/K)$$

operiert.

Für „geeignete“ Körper gilt dann:

- a) $T_{\ell}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}$ ist halbeinfacher π -Modul.
 b) Die natürliche Abbildung

$$\text{End}_K(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\ell} \rightarrow \text{End}_{\pi}(T_{\ell}(A))$$

ist ein Isomorphismus.

J. Tate bewies dies 1966 für endliche Körper K ([31]), und J. G. Zarhin behandelte 1974 Funktionenkörper über endlichen Körpern ([33], [34]). Die angewandte Beweismethode ist etwa diese:

$$\text{Sei } W \subseteq V = T_{\ell}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}$$

ein π -invarianter Unterraum. Dann sucht man ein Idempotent

$$e \in \text{End}_K(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{\ell},$$

dessen Bild genau W ist.

Wenn man stets ein solches e finden kann, so folgt unmittelbar die Aussage a), und b) ist auch nicht mehr schwierig. Zur Konstruktion von e muß man „genügend viele“ Endomorphismen von A finden. Dazu betrachtet man die zu W gehörige ℓ -divisible Untergruppe

$$G_{\infty} = \bigcup_n G_n \subseteq A[\ell^{\infty}]$$

und die abelschen Varietäten

$$A_n = A/G_n.$$

Wenn unendlich viele dieser A_n zueinander isomorph sind, so kann man leicht die gewünschten Endomorphismen von A konstruieren.

Schließlich reduziert man leicht auf den Fall, daß A prinzipal polarisiert ist, und W ein maximal isotroper Teilraum von V . Dann sind auch die A_n prinzipal polarisiert, und liefern K -rationale Punkte im Modulraum der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten. Da der Modulraum die Isomorphieklassen solcher abelschen Varietäten parametrisiert, reicht es, wenn wir auf diese Weise nur endlich viele Punkte erhalten.

Für endliche Körper K ist dies klar, da der Modulraum als algebraische Varietät überhaupt nur endlich viele K -rationale Punkte besitzt. Für Funktionen- oder Zahlkörper muß man sich mehr Arbeit machen. Man zeigt, daß die Höhe der zu den A_n gehörigen Modulpunkte konstant ist. Es folgt daher ein kurzer Exkurs über Höhen.

§ 3 Höhen

Die klassische Definition der Höhe eines Punktes $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ ist folgende:
 Schreibe

$$x = (x_0 : \dots : x_n), \quad \text{mit } x_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad \text{ggT.}(x_i) = 1.$$

Dann setze

$$H(x) = \sqrt{x_0^2 + \dots + x_n^2} \text{ (Höhe),}$$

$$h(x) = \log(H(x)) \text{ (logarithmische Höhe).}$$

Aus der Definition folgt sofort, daß für $c \in \mathbf{R}$ die Menge der Punkte $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$ mit $h(x) \leq c$ endlich ist.

Wie schon erwähnt, hat S. Arakelov eine Theorie entwickelt ([2]), wie man Ergebnisse aus der algebraischen Geometrie in die Zahlentheorie überträgt. Dabei entspricht $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ einer affinen algebraischen Kurve. Es ist aber bekannt, daß man am besten komplette Kurven betrachten muß. Dies heißt, daß man nur dann eine befriedigende Theorie erhält, wenn man zu $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ noch einen unendlichen Punkt hinzu nimmt, entsprechend der archimedischen Bewertung von \mathbf{Q} . Die algebraische geometrischen Objekte auf $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ müssen also mit einer Struktur im Unendlichen versehen werden. Es zeigt sich, daß diese Struktur sich als Metrik darstellt.

Zum Beispiel ist ein Geradenbündel auf $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ nichts anderes als ein projektiver \mathbf{Z} -Modul P vom Rang 1. P ist notwendigerweise frei, also

$$P = \mathbf{Z} \circ m$$

mit einem Erzeugenden $m \in P$.

Die Struktur im Unendlichen besteht darin, daß man zu einem metrisierten Geradenbündel übergeht, das heißt, man wählt eine hermitesche Metrik $\| \cdot \|$ auf $P \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$. Man kann dann zum Beispiel den Grad von $(P, \| \cdot \|)$ definieren:

$$\text{grad}(P, \| \cdot \|) = -\log(\| m \|).$$

Die Definition der Höhe ordnet sich hier sofort ein: Auf $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}$ existiert das universelle Geradenbündel $\mathcal{O}(1)$, und es gibt eine Surjektion

$$\mathcal{O}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}(1).$$

Wenn man \mathcal{O}^{n+1} mit der Standardmetrik versieht, erhält man so eine hermitesche Metrik auf $\mathcal{O}(1)$ (auf $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$).

Ein Punkt $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$ definiert einen Morphismus

$$\phi: \text{Spec}(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}.$$

Dann ist $\phi^*(\mathcal{O}(1))$ ein metrisiertes Geradenbündel auf $\text{Spec}(\mathbf{Z})$, und

$$h(x) = \text{grad}(\phi^*(\mathcal{O}(1))).$$

Wir haben hier nur den Fall \mathbf{Q} -wertiger Punkte behandelt, doch überträgt sich alles auf beliebige Zahlkörper.

Man kann auch für ein beliebiges eigentliches \mathbf{Z} -Schema X , ein Geradenbündel \mathcal{L} auf X und eine hermitesche Metrik auf $\mathcal{L} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ jedem Punkt $x \in X(\mathbf{Q})$ eine Höhe zuordnen, indem man wieder die zu x gehörige Abbildung

$$\phi: \text{Spec}(\mathbf{Z}) \rightarrow X$$

betrachtet, und definiert:

$$h_{\mathcal{L}}(x) = \text{grad}(\phi^*(\mathcal{L})).$$

Dies ist übrigens im Wesentlichen unabhängig von der gewählten Metrik. Das bedeutet, daß sich beim Wechsel der Metrik die Differenz der beiden Höhenfunktionen beschränkt. Dies liegt daran, daß der Quotient der beiden Metriken auf $X(\mathbf{C})$ beschränkt ist, denn $X(\mathbf{C})$ ist kompakt.

Es ist nun klar, daß für ein amples Geradenbündel \mathcal{L} wieder die Menge der $x \in X(\mathbf{Q})$ mit $h_{\mathcal{L}}(x) \leq c$ endlich ist. Wir wollen diese Überlegungen anwenden auf

$$X = A_g,$$

den groben Modulraum der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten der Dimension g . Dieser ist leider nicht komplett, so daß man eine Kompaktifizierung \bar{A}_g wählen muß. Solche Kompaktifizierungen wurden von W. L. Baily und A. Borel ([5]), zum anderen von A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport und Y. Tai ([4]) konstruiert. Leider lassen sich diese Kompaktifizierungen nicht modultheoretisch charakterisieren, und es gibt auch einige andere technische Schwierigkeiten. Wir bringen daher nur das Resultat dieser Überlegungen, das heißt, wir geben eine Formel für die Höhe des Modulpunktes zu einer abelschen Varietät, wobei die Höhe mit Hilfe eines amples Geradenbündels auf einer geeigneten Kompaktifizierung von A_g definiert wird.

Sei dazu A/\mathbf{Q} eine prinzipal polarisierte abelsche Varietät. Wir nehmen an, daß A semistabile Reduktion hat, was heißt, daß sich A zu einer semiabelschen Varietät

$$\pi : A \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$$

ausdehnt. (Die Fasern von π sind Erweiterungen von abelschen Varietäten mit Tori.)

Dann ist $\pi_*(\Omega_{A/\mathbf{Z}}^g)$ ein Geradenbündel auf $\text{Spec}(\mathbf{Z})$, welches auf eine natürliche Weise eine hermitesche Metrik erhält:

$$\pi_*(\Omega_{A/\mathbf{Z}}^g) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \cong \Gamma(A(\mathbf{C}), \Omega_{A/\mathbf{C}}^g)$$

ist der Raum der holomorphen Differentiale höchsten Grades auf dem komplexen Torus $A(\mathbf{C})$. Für ein solches Differential α sei $\|\alpha\|$ definiert durch

$$\|\alpha\|^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^g \cdot \int_{A(\mathbf{C})} \alpha \wedge \bar{\alpha}$$

Dann erfüllt

$$h(A) = \text{grad}(\pi_*(\Omega_{A/\mathbf{Z}}^g), \|\cdot\|)$$

die Voraussetzungen an eine Höhe. Es gibt also nur endlich viele Isomorphieklassen von A 's mit $h(A) \leq c$. Alles dies verallgemeinert sich auf beliebige Zahlkörper.

§ 4 Die Tate-Vermutung

Sei A eine abelsche Varietät über einem Zahlkörper K , $T_{\mathbf{Q}}(A)$ ihr Tate-Modul, $\pi = \text{Gal}(\bar{K}/K)$.

Wir wollen zeigen:

- a) $T_{\mathbf{Q}}(A) \otimes_{\mathbf{Z}_{\mathbf{Q}}} \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}}$ ist halbeinfacher π -Modul,

b) Die Abbildung

$$\text{End}_K(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \rightarrow \text{End}_n(T_\ell(A))$$

ist ein Isomorphismus.

Man darf annehmen, daß A semistabile Reduktion hat. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen ist. Es läßt sich aber auch alles für beliebige K 's zeigen.

Nach den vorhergehenden Bemerkungen reicht es, die folgende Aussage zu beweisen:

$$\text{Sei } G_\infty \subseteq A[\ell^\infty] \text{ eine } \ell\text{-divisible Untergruppe, } A_n = A/G_n.$$

Dann ist

$$h(A_n) = h(A)$$

(Die A_n haben wieder semistabile Reduktion).

Dazu untersucht man zunächst allgemein das Verhalten von $h(A)$ bei einer Isogenie

$$\begin{array}{ccc} \phi : A & \longrightarrow & B = A/G \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & \text{Spec}(\mathbb{Z}) & \end{array}$$

Diese induziert eine Abbildung

$$\phi^* : \pi_{2,*}(\Omega_{B/\mathbb{Z}}^1) \rightarrow \pi_{1,*}(\Omega_{A/\mathbb{Z}}^1)$$

ϕ^* verändert die Metriken um den Faktor $\sqrt{\text{grad}(\phi)}$ und braucht außerdem kein Isomorphismus zu sein, falls ϕ nicht étale ist. Die Abweichung davon wird gemessen durch die Gruppe

$$s^*(\Omega_{G/\mathbb{Z}}^1), \quad s : \text{Spec}(\mathbb{Z}) \rightarrow G$$

der Nullschnitt.

Insgesamt ergibt sich die Formel ($\#$ = Ordnung)

$$h(B) - h(A) = \frac{1}{2} \log(\text{grad}(\phi)) - \log(\#s^*(\Omega_{G/\mathbb{Z}}^1))$$

Falls $G = G_n$ Teil einer ℓ -divisiblen Untergruppe ist, so haben die dabei auftretenden Invarianten von G_n eine einfache Form: Eine ℓ -divisible Gruppe hat zwei Invarianten, nämlich die Dimension d und die Höhe h .

Es ist

$$\#(G_n) = \ell^{nh}, \quad \#s^*(\Omega_{G_n}^1) = \ell^{nd}$$

und somit

$$h(A_n) - h(A) = n \cdot \log(\ell) \cdot \left(\frac{h}{2} - d \right)$$

Aus der Theorie der ℓ -divisiblen Gruppen (vgl. [24], [30]) erhält man folgende Zusammenhänge zwischen h , d , und der π -Aktion auf

$$V = T_\ell(A) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell.$$

Sei $W \subseteq V$ der zu $G_\infty = \bigcup_n G_n$ gehörige Unterraum von V . Dann ist

$$h = \dim(W).$$

Sei weiter

$$\chi = \det_W : \pi \rightarrow \mathbf{Z}_\ell^*$$

der Charakter, mit dem π auf $\Lambda^h W$ operiert. Wenn

$$I \subseteq \pi$$

die Trägheitsgruppe zu ℓ bezeichnet, so ist

$$\chi|I = \chi_0^d.$$

Dabei sei

$$\chi_0 : \pi \rightarrow \mathbf{Z}_\ell^*$$

der zyklotomische Charakter.

Weiter weiß man (semistabile Reduktion), daß χ unverzweigt außerhalb ℓ ist. Damit ist notwendigerweise auch auf ganz π

$$\chi = \chi_0^d.$$

Nach dem bereits von A. Weil bewiesenen Teil der Weil-Vermutungen ist aber $\Lambda^h W$ „rein vom Gewicht $h/2$ “, das heißt, für fast alle Primzahlen p hat ($F_p = \text{Frobenius}$)

$$\chi(F_p) = \chi_0(F_p)^d = p^d$$

Betrag $p^{h/2}$. Somit muß gelten

$$d = h/2,$$

und wir sind fertig.

Als Korollar aus der Tate-Vermutung folgt sofort:

Zwei abelsche Varietäten A_1 und A_2 sind genau dann isogen, falls ein Isomorphismus

$$T_\ell(A_1) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \cong T_\ell(A_2) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$$

von π -Moduln existiert.

Es gibt zwischen ihnen genau dann eine Isogenie vom Grad prim zu ℓ , falls ihre Tate-Moduln selbst isomorph sind, also falls

$$T_\ell(A_1) \cong T_\ell(A_2).$$

§ 5 Die Shafarevich-Vermutung

Sei K ein Zahlkörper, S eine endliche Menge von Stellen von K , $g \geq 1$. Wir wollen zeigen: Es gibt nur endlich viele Isomorphieklassen prinzipal polarisierter abelscher Varietäten A/K der Dimension g , welche außerhalb S gute Reduktion haben. Wir wissen schon, daß daraus die Mordell-Vermutung folgt.

Der Beweis geht so, daß zunächst die Endlichkeit bis auf Isogenie gezeigt wird. Darauf folgen Argumente ähnlich wie beim Beweis der Tate-Vermutung, nur daß man mit Kongruenzen statt mit Gleichungen arbeiten muß. Man kann sich leicht auf den Fall semistabiler A 's beschränken, und wie immer sei $K = \mathbf{Q}$.

Um die Endlichkeit bis auf Isogenie zu erhalten, muß man nach der Tate-Vermutung die Isomorphie-Klassen der π -Moduln $T_\ell(A) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ betrachten. Diese sind halbeinfach und unverzweigt außerhalb S und ℓ . Sie werden dann bekanntlich schon bis auf Isomorphie bestimmt durch die Spuren der Frobenius-Elemente F_p . Eine genaue Betrachtung zeigt, daß man endlich viele Primzahlen p_1, \dots, p_r finden kann, so daß $T_\ell(A) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ schon bis auf Isomorphie bestimmt ist durch die Spuren der Elemente F_{p_1}, \dots, F_{p_r} .

Dies sind ganze Zahlen, und nach der Weil-Vermutung (bzw. Satz von Weil) ist ihr absoluter Betrag nicht größer als $2g\sqrt{p_i}$. Es gibt also nur jeweils endlich viele mögliche Werte für die Spuren, und es folgt die Endlichkeit bis auf Isogenie.

Um von „bis auf Isogenie“ auf „bis auf Isomorphie“ zu kommen, reicht es nun, prinzipal polarisierte abelsche Varietäten B/\mathbf{Q} zu betrachten, welche isogen zu einem festen A/\mathbf{Q} sind. Aus der Formel für die Änderung von $h(B)$ bei Isogenien folgt dann leicht, daß

$$\exp(2(h(B) - h(A))) \in \mathbf{Q}^*$$

eine positive rationale Zahl ist. Weiter ergibt sich, daß für zwei abelsche Varietäten B_1 und B_2 , für die $T_\ell(B_1)$ und $T_\ell(B_2)$ isomorph sind, dieselbe ℓ -Potenz in den so für B_1 und B_2 gebildeten Zahlen aufgeht. Da es nur endlich viele Möglichkeiten für die Isomorphieklasse des Gitters

$$T_\ell(B) \subseteq T_\ell(B) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \cong T_\ell(A) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$$

gibt, ist die ℓ -Potenz in

$$\exp(2(h(B) - h(A)))$$

gleichmäßig beschränkt. Wir sind also fertig, wenn wir zeigen, daß „große“ Primzahlen ℓ nicht in der obigen Zahl aufgehen, da wir dann eine obere Schranke für $h(B)$ erhalten.

Es reicht nun, wenn für eine ℓ -Isogenie (ℓ „groß“)

$$\phi : B_1 \rightarrow B_2 = B_1/G$$

$h(B_1)$ und $h(B_2)$ übereinstimmen. Dazu darf man voraussetzen, daß G von ℓ annulliert wird.

Es ist wieder

$$h(\mathbf{B}_2) - h(\mathbf{B}_1) = \log(\ell) \left(\frac{h}{2} - d \right),$$

wobei h die Dimension des \mathbf{F}_ℓ -Vektorraumes

$$W = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{O}}) \subseteq \mathbf{B}_1[\ell](\bar{\mathbf{O}}) \cong T_\ell(\mathbf{B}_1)/\ell \cdot T_\ell(\mathbf{B}_1)$$

bezeichnet, und

$$\ell^d = \#(s^*(\Omega_{\mathbf{G}/\mathbf{Z}}^1)).$$

Wenn wieder

$$\chi = \det_W : \pi \rightarrow \mathbf{F}_\ell^*$$

den Charakter bezeichnet, mit dem π auf $\Lambda^h W$ operiert, so ist wie vorher (man muß [24] benutzen)

$$\chi = \chi_0^d.$$

Man wählt nun eine feste Primzahl p . Dann ist

$$\chi_0^d(\mathbf{F}_p) = p^d$$

ein Eigenwert von \mathbf{F}_p auf $\Lambda^h(T_\ell(\mathbf{B}_1)/\ell \cdot T_\ell(\mathbf{B}_1))$. Wenn $P_h(T)$ das charakteristische Polynom der Aktion von \mathbf{F}_p auf $\Lambda^h T_\ell(\mathbf{B}_1)$ oder auch $\Lambda^h T_\ell(\mathbf{A})$ bezeichnet, so ist ℓ ein Teiler von $P_h(p^d)$.

Nun ist $P_h(T)$ unabhängig von ℓ , und hat Wurzeln vom Betrag $p^{h/2}$ (Weil-Vermutungen).

Da $0 \leq h \leq 2g$, $0 \leq d \leq g$,

muß $d = h/2$ gelten, falls ℓ so groß ist, daß es keine der (von Null verschiedenen) Zahlen

$$\begin{aligned} & 0 \leq h \leq 2g \\ P_h(p^d), & \quad 0 \leq d \leq g \\ & d \neq h/2 \end{aligned}$$

teilt.

Damit sind alle Behauptungen gezeigt.

§ 6 Hinweise zur Literatur

Als allgemeine Einführung in die algebraische Geometrie empfiehlt sich [11]. Die Theorie der abelschen Varietäten wird sehr gut in [18] dargestellt. Für die Theorie der Modulräume sind [3], [6], [17] und [19] gute Referenzen. Ihre Kompaktifizierungen werden behandelt in [4], [5], [20] und [21]. Eine Einführung in die klassische diophantische Geometrie liefert [12], und die Theorie der p -divisiblen Gruppen findet man in [24] und [30]. [28] enthält eine gute Zusammenfassung der Verhältnisse über Funktionenkörpern.

Literatur

- [1] Arakelov, S.: Families of curves with fixed degeneracies. *Math. USSR Izv.* **5** (1979) 1277–1302
- [2] Arakelov, S.: An intersection theory for divisors on an arithmetic surface. *Math. USSR Izv.* **8** (1974) 1167–1180
- [3] Artin, M.: Algebraisation of formal moduli I. In: *Global Analysis*. Tokio: Univ. Tokyo Press 1969, 21–71
- [4] Ash, A.; Mumford, D.; Rapoport, M.; Tai, Y.: *Smooth compactification of locally symmetric varieties*. Brookline: Math. Sci. Press 1975
- [5] Baily, W. L.; Borel, A.: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. *Ann. of Math.* **84** (1966) 442–528
- [6] Dèlignè, P.; Mumford, D.: The irreducibility of the space of curves of a given genus. *Publ. math. IHES* **36** (1968) 75–110
- [7] Faltings, G.: Calculus on arithmetic surfaces. Eingereicht bei *Ann. of Math.*
- [8] Faltings, G.: Arakelov's theorem for abelian varieties. *Invent. math.* **73** (1983) 337–347
- [9] Faltings, G.: Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. math.* **73** (1983) 349–366
- [10] Grauert, H.: Mordells Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper. *Publ. math. IHES* **25** (1965) 131–149
- [11] Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*. New York: Springer Verlag 1977
- [12] Lang, S.: *Diophantine geometry*. New York: Interscience 1962
- [13] Mahler, K.: Über die rationalen Punkte auf Kurven vom Geschlecht 1. *J. reine u. angew. Math.* **170** (1934) 168–178
- [14] Manin, Yu. I.: Rational points on an algebraic curve over function fields. *Transl. AMS* **50** (1966) 189–234
- [15] Mordell, L. J.: On the rational solutions of the indeterminate equation of third and fourth degrees. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **21** (1922) 179–192
- [16] Moret-Bailly, L.: Variétés abéliennes polarisées sur les corps de fonctions. *C. R. Acad. Paris* **296** (1983) 267–270
- [17] Mumford, D.: *Geometric invariant theory*. Berlin: Springer Verlag 1965
- [18] Mumford, D.: *Abelian varieties*. Oxford: Oxford Univ. Press 1974
- [19] Mumford, D.: Stability of projective varieties. *l'Ens. Math.* **23** (1977) 39–100
- [20] Mumford, D.: Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case. *Invent. math.* **42** (1977) 239–272
- [21] Namikawa, Y.: Toroidal compactification of Siegel spaces. *Springer Lecture Notes* 812 (1980)
- [22] Parshin, A. N.: Algebraic curves over function fields I. *Math. USSR Izv.* **2** (1968) 1145–1170
- [23] Parshin, A. N.: Quelques conjectures de finitude en géométrie diophantienne. *Actes congrès intern. math. Nizza* (1970) I, 467–471
- [24] Raynaud, M.: Schémas en groupes de type (p, \dots, p) . *Bull. Soc. Math. France* **102** (1974) 241–280
- [25] Shafarevich, I. R.: *Algebraic number fields*. *Transl. AMS* **31** (1963) 25–39
- [26] Siegel, C. L.: Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. *Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* 1929, Nr. 1
- [27] Szpiro, L.: Sur le théorème de rigidité de Parsin et Arakelov. *Asterisque* **64** (1974) 169–202
- [28] Szpiro, L.: Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux. *Asterisque* **86** (1981)
- [29] Tate, J.: Algebraic cycles and poles of zeta functions. In: *Arithmetical algebraic geometry*. New York: Harper and Row 1965, 93–110
- [30] Tate, J.: p -divisible groupes. In: *Proc. Conference on local fields*, Berlin: Springer-Verlag 1967, 158–183
- [31] Tate, J.: Endomorphisms of abelian varieties over fields of finite characteristics. *Invent. math.* **2** (1966) 134–144
- [32] Weil, A.: L'arithmétique sur les courbes algébrique. *Acta Math.* **52** (1928) 281–315

- [33] Z a r h i n , J. G.: Isogenies of abelian varieties over fields of finite characteristics. Math. USSR Sbornik 24 (1974) 451–461
- [34] Z a r h i n , J. G.: A remark on endomorphisms of abelian varieties over function fields of finite characteristics. Math. USSR Izv. 8 (1974) 477–480

Gerd Faltings
Fachbereich Mathematik
Bergische Universität-
Gesamthochschule Wuppertal
Gaußstraße 20
5600 Wuppertal 1

(Eingegangen 30. 8. 1983)

Bootstrap Methods in Statistics*

R. Beran, Berkeley

The bootstrap is a recently developed direct technique for estimating the sampling distribution of a centered statistic. Bootstrap distribution estimates are usually computed by Monte Carlo resampling of the data. Statistical applications of the bootstrap include the construction of confidence regions for parameters of interest and the estimation of bias or variance of parameter estimates. The direct, nonasymptotic character of bootstrap procedures is an important practical advantage. Mathematical properties of bootstrap estimates and links with an earlier resampling procedure, the jackknife, are surveyed in this paper.

1 Introduction

Suppose X_1, X_2, \dots, X_n are independent identically distributed random vectors with unknown cumulative distribution function F . The usual estimate of F

is the empirical c.d.f. $\hat{F}_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x)$, when $I(A)$ is the indicator func-

tion which equals 1 when A occurs and equals 0 otherwise. Let $\|\cdot\|$ denote the supremum norm. It is well-known that $\|\hat{F}_n - F\| \rightarrow 0$ with probability one as $n \rightarrow \infty$ and that \hat{F}_n is an asymptotically minimax estimate of F . If V is a functional defined on \mathcal{F} , the set of all c.d.f.'s on the euclidean sample space, it is natural to estimate $V(F)$ by $V(\hat{F}_n)$. When V is $\|\cdot\|$ continuous, then $V(\hat{F}_n) \rightarrow V(F)$ w.p. 1 as n increases. If V is suitably differentiable, then $V(\hat{F}_n)$ is also an asymptotically minimax estimate of $V(F)$.

Bootstrap methods extend these familiar ideas to certain statistically interesting functionals which fail to have simple closed form expressions. Typical of such functionals are the distributions of quantities computed from the $\{X_i; 1 \leq i \leq n\}$. Traditionally, such sampling distributions have been estimated in a two-stage process: first find a large sample approximation to the sampling distribution; then replace F by \hat{F}_n , wherever F occurs in the asymptotic approximation. This traditional process does not work well when the asymptotic distribution from step one is complicated. The bootstrap avoids this difficulty by proceeding directly to the second step; that is, by replacing F with \hat{F}_n before calculating the desired exact sampling distribution. The feasibility and possible validity of the bootstrap approach were first clearly recognized by Efron [5].

*) Supported in part by National Science Foundation Grant MCS 80-02698. This paper was written while I was a guest of Sonderforschungsbereich 123 at Universität Heidelberg.

Example 1 Suppose the $\{X_i; 1 \leq i \leq n\}$ are i.i.d. k -dimensional random vectors with unknown c.d.f. F . Let

$$(1.1) \quad J_n(x, F) = P_F [n^{1/2} \|\hat{F}_n - F\| \leq x]$$

be the c.d.f. of the Kolmogorov-Smirnov statistic. If we regard $J_n(x, F)$ as a c.d.f.-valued functional of F , it is natural to estimate $J_n(x, F)$ by $J_n(x, \hat{F}_n)$. This is the bootstrap estimate of $J_n(x, F)$. Observe that $J_n(x, \hat{F}_n)$ is the c.d.f. of the Kolmogorov-Smirnov statistic if we pretend that the actual c.d.f. of each observation is \hat{F}_n rather than F and modify the Kolmogorov-Smirnov statistic accordingly.

Since \hat{F}_n is a discrete distribution, it is possible, in principle, to calculate $J_n(x, \hat{F}_n)$ by enumeration. For larger values of n , this is not practical. Monte Carlo approximations to $J_n(x, \hat{F}_n)$ can be obtained as follows: Let $\{(X_{j,1}^*, X_{j,2}^*, \dots, X_{j,n}^*); 1 \leq j \leq M\}$ be M pseudo-random samples of size n drawn (with replacement) from the empirical c.d.f. \hat{F}_n . Let $F_{j,n}^*(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I(X_{j,i}^* \leq x)$ be the empirical c.d.f. of the j -th pseudo-random sample. Then

$$(1.2) \quad J_{n,M}^*(x) = M^{-1} \sum_{j=1}^M I[n^{1/2} \|F_{j,n}^* - \hat{F}_n\| \leq x]$$

is the Monte Carlo approximation to $J_n(x, \hat{F}_n)$. As $M \rightarrow \infty$, $\|J_{n,M}^*(x) - J_n(x, \hat{F}_n)\| \rightarrow 0$ for almost all realizations of the Monte Carlo process. Note that $J_{n,M}^*$ is calculated by *resampling* the data (X_1, X_2, \dots, X_n) to generate the M pseudo-random samples. Efron [5] introduced the term “bootstrap” to describe this reflexive feature in the calculation. In what follows, we will discuss $J_n(x, \hat{F}_n)$ and related estimates, recognizing tacitly that $J_{n,M}^*(x)$ is a practical approximation to $J_n(x, \hat{F}_n)$.

A plausible statistical application of $J_n(x, \hat{F}_n)$ is the construction of confidence regions. In Example 1, let

$$(1.3) \quad D_n(\alpha) = \{G \in \mathcal{F} : n^{1/2} \|\hat{F}_n - G\| \leq c_n(\alpha, \hat{F}_n)\}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

where $c_n(\alpha, \hat{F}_n)$ lies between $\inf \{x : J_n(x, \hat{F}_n) \geq 1 - \alpha\}$ and $\sup \{x : J_n(x, \hat{F}_n) \leq 1 - \alpha\}$. A natural conjecture is that

$$(1.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_F [F \in D_n(\alpha)] = 1 - \alpha$$

for every $F \in \mathcal{F}$; that is, $D_n(\alpha)$ is a confidence region of asymptotic level $1 - \alpha$ for the unknown c.d.f. F .

The validity of statements like (1.4) and the consistency of $J_n(x, \hat{F}_n)$ as an estimate of $J_n(x, F)$ will be discussed, in a more general setting, in Section 2. Section 3 will describe some higher order asymptotics for $J_n(x, \hat{F}_n)$, including what is known about the asymptotic optimality of $J_n(x, \hat{F}_n)$ as an estimate of $J_n(x, F)$. The close connection between bootstrap and jackknife methods is the subject of Section 4.

Our survey of current knowledge about the bootstrap will seek to make the following points: First, bootstrap methods provide a theoretically sound way of estimating out nuisance parameters in many common statistical situations. Secondly, the user of the bootstrap needs only to know that the method is valid and how to perform the appropriate resampling; he does not need to be mathe-

matically sophisticated. Thirdly, the bootstrap solves certain problems for which the traditional approach – asymptotic approximation followed by estimation of unknown nuisance parameters – fails to work satisfactorily. Fourthly, the bootstrap draws new attention to an old question: to what extent can information in the data be used in selecting good statistical procedures?

2 Consistency

Do bootstrap estimates converge appropriately as sample size n increases? Is the level of a bootstrap confidence region close to the desired level, when sample size is large? For a variety of examples, relatively direct considerations suffice to answer these questions.

As in the previous section, let X_1, X_2, \dots, X_n be i.i.d. random vectors with unknown c.d.f. F . Let $R_n(X, F)$ be a real-valued function of X_1, X_2, \dots, X_n and F whose c.d.f. is $J_n(x, F) = P_F[R_n(X, F) \leq x]$. For $\alpha \in (0, 1)$, let

$$(2.1) \quad \begin{aligned} c_{n,L}(\alpha) &= \inf \{x : J_n(x, F) \geq 1 - \alpha\} \\ c_{n,U}(\alpha) &= \sup \{x : J_n(x, F) \leq 1 - \alpha\} \end{aligned}$$

Suppose the $\{F_n^* \in \mathcal{F}; n \geq 1\}$ are estimates of F , F_n^* being a function of (X_1, X_2, \dots, X_n) , and suppose the $\{c_n(\alpha, F_n^*); n \geq 1\}$ are random variables such that

$$(2.2) \quad c_{n,L}(\alpha, F_n^*) \leq c_n(\alpha, F_n^*) \leq c_{n,U}(\alpha, F_n^*).$$

In other words, $c_n(\alpha, F_n^*)$ is a “smallest” point beyond which the bootstrap distribution $J_n(x, F_n^*)$ assigns probability less than or equal to α .

Theorem 1 *Let \mathcal{C}_F be a set of sequences $\{F_n \in \mathcal{F}; n \geq 1\}$ such that $P_F[\{F_n^*\} \in \mathcal{C}_F] = 1$. Suppose that for every sequence $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$, the sequence $\{J_n(x, F_n)\}$ converges weakly to a limit c.d.f. $J(x, F)$ which depends only on \mathcal{C}_F . Then, $\{J_n(x, F_n^*)\}$ converges weakly to $J(x, F)$ with probability one. Moreover*

$$(2.3) \quad \begin{aligned} J[c_L(\alpha, F) -, F] &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_F[R_n(X, F) \leq c_n(\alpha, F_n^*)] \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P_F[R_n(X, F) \leq c_n(\alpha, F_n^*)] \\ &\leq J[c_U(\alpha, F), F] \end{aligned}$$

where

$$(2.4) \quad c_L(\alpha, F) = \inf \{x : J(x, F) \geq 1 - \alpha\}, \quad c_U(\alpha, F) = \sup \{x : J(x, F) \leq 1 - \alpha\}.$$

In particular, if $J(x, F)$ is continuous in x , then

$$(2.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_F[R_n(X, F) \leq c_n(\alpha, F_n^*)] = 1 - \alpha$$

for every $\alpha \in (0, 1)$.

The weak convergence asserted for $J_n(x, F_n^*)$ is, of course, obvious under the theorem assumptions. The point is that these assumptions hold in many interesting examples. Weak convergence of $J_n(x, F_n^*)$ was treated by Efron [5] for finite

sample spaces and, more generally, by Bickel and Freedman [3]. The latter paper metrizes the convergences that correspond to our \mathcal{C}_F . Also related are arguments in Shorack [11] and in Singh [12].

The inequalities (2.3) may be proved as follows. Let $\{F_n\}$ be any sequence of c.d.f.'s in \mathcal{C}_F . Let $\epsilon > 0$ be such that both $c_L(\alpha, F) - \epsilon$ and $c_U(\alpha, F) + \epsilon$ are continuity points of $J(x, F)$. Since $J_n(x, F_n)$ converges weakly to $J(x, F)$,

$$(2.6) \quad J_n[c_L(\alpha, F) - \epsilon, F_n] < 1 - \alpha < J_n[c_U(\alpha, F) + \epsilon, F_n]$$

for all sufficiently large n . Consequently

$$(2.7) \quad c_L(\alpha, F) - \epsilon < c_{n,L}(\alpha, F_n) \leq c_{n,U}(\alpha, F_n) \leq c_U(\alpha, F) + \epsilon$$

for all sufficiently large n .

Let $A_n = \{c_L(\alpha, F) - \epsilon < c_n(\alpha, F_n^*) \leq c_U(\alpha, F) + \epsilon\}$. From (2.7) and the hypothesis $P_F\{F_n^* \in \mathcal{C}_F\} = 1$, we conclude that $P_F[\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n] = 1$ and therefore $\lim_{n \rightarrow \infty} P[A_n] = 1$. Consequently

$$(2.8) \quad \begin{aligned} P_F[R_n(X, F) \leq c_n(\alpha, F_n^*)] &\leq J_n[c_U(\alpha, F) + \epsilon, F_n] + o(1) \\ P_F[R_n(X, F) \leq c_n(\alpha, F_n^*)] &\geq J_n[c_L(\alpha, F) - \epsilon, F_n] + o(1). \end{aligned}$$

Letting first n tend to infinity and then ϵ tend to zero yields (2.3).

In general, $J[c_L(\alpha, F) - \epsilon, F] \leq 1 - \alpha$ while $J[c_U(\alpha, F) + \epsilon, F] \geq 1 - \alpha$. When $J(x, F)$ is continuous in x , then

$$(2.9) \quad J[c_L(\alpha, F) - \epsilon, F] = J[c_U(\alpha, F) + \epsilon, F] = 1 - \alpha$$

for every $\alpha \in (0, 1)$. This implies (2.5).

Example 1 (continued). Define \mathcal{C}_F as follows: $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$ if and only if $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n - F\| = 0$. Let $H_k(x) = (F^{1/k}(x), \dots, F^{1/k}(x))$ take values in R^k . For every sequence $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$,

$$(2.10) \quad J_n(x, F_n) \Rightarrow J(x, F) = P\{\|B_k \cdot H_k\| \leq x\},$$

where $B_k(t)$ is a gaussian process on $[0, 1]^k$ with mean zero and covariance function

$$\text{Cov}[B_k(s), B_k(t)] = \prod_{i=1}^k \min(s_i, t_i) - \prod_{i=1}^k (s_i t_i). \text{ To prove (2.10), observe}$$

that for distributional purposes under F_n , the random variable $n^{1/2} \|\hat{F}_n - F_n\|$ can be represented as $\|B_{k,n} \cdot H_{k,n}\|$; here $H_{k,n}(x) = (F_n^{1/k}(x), \dots, F_n^{1/k}(x))$ and $B_{k,n}$ is the empirical process

$$(2.11) \quad B_{k,n}(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n [I(U_i \leq t) - \prod_{i=1}^k t_i], \quad t \in [0, 1]^k,$$

where U_1, U_2, \dots, U_n are i.i.d. random vectors uniformly distributed over $[0, 1]^k$. By Skorokhod's Theorem, there exist versions of $\{B_{k,n}\}$ and B_k such that $\|B_{k,n} - B_k\| \rightarrow 0$ with probability one. For these versions $\|B_{k,n} \cdot H_{k,n} - B_k \cdot H_k\| \rightarrow 0$ w.p. 1 because $\{F_n\} \in \mathcal{C}_k$ entails $\|H_{k,n} - H_k\| \rightarrow 0$ and B_k is continuous w.p. 1. The weak convergence (2.10) follows.

The sequence $\{\hat{F}_n; n \geq 1\}$ of empirical c.d.f.'s belongs to \mathcal{C}_F with probability one, according to the Glivenko-Cantelli Theorem. By Theorem 1 and (2.10),

$$(2.12) \quad J_n(x, \hat{F}_n) \Rightarrow P[\|B_k \cdot H_k\| \leq x] \quad \text{w.p. 1} \quad \text{and}$$

$$(2.13) \quad \begin{aligned} J[c_L(\alpha, F)-, F] &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_F[F \in D_n(\alpha)] \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P_F[F \in D_n(\alpha)] \leq J[c_U(\alpha, F), F] \end{aligned}$$

for $D_n(\alpha)$ defined by (1.3). When $k = 1$, the limit c.d.f. $J(x, F)$ is known to be continuous in x , whether or not F is continuous. This can be seen by direct evaluation of $J(x, F)$ (Schmid [9]) or by indirect arguments (Bickel and Freedman [3], Lemma 8.11). In this case, at least,

$$(2.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_F[F \in D_n(\alpha)] = 1 - \alpha$$

as was conjectured in the Introduction.

We emphasize the validity of (2.13), (2.14) for every c.d.f. F on the respective domains. The classical asymptotic construction of fixed width confidence bands for F is feasible only when $k = 1$ and F is assumed continuous. Otherwise, $J(x, F)$ depends on F in a way that appears too complex to deal with, practically speaking. In this instance, the bootstrap construction of the confidence band has a clear advantage.

The argument used in this example also shows that the bootstrap estimate for the distribution of the empirical process $n^{1/2}(\hat{F}_n - F)$ converges weakly in $D^k[-\infty, \infty]$ to the distribution of the process $B_k \cdot H_k$. For $k = 1$, this fact was proved by Bickel and Freedman [3] and by Shorack [11].

Example 2 Suppose we observe two independent samples, (X_1, X_2, \dots, X_m) i.i.d. random k -vectors with unknown c.d.f. F and (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) i.i.d. random k -vectors with unknown c.d.f. G . Let \hat{F}_m, \hat{G}_n be the empirical c.d.f.'s associated with the two samples and let

$$(2.15) \quad J_{m,n}(x, F, G) = P_{F,G}[\{mn(m+n)^{-1}\}^{1/2} \|(\hat{F}_m - \hat{G}_n) - (F - G)\| \leq x].$$

Suppose $\mathcal{C}_{F,G}$ consists of all double sequences $\{(F_m, G_n) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}\}$ such that $\lim_{m \rightarrow \infty} \|F_m - F\| = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n - G\| = 0$. If $\{(F_m, G_n)\} \in \mathcal{C}_{F,G}$ and $m(m+n)^{-1} \rightarrow \lambda$ while $\min(m, n) \rightarrow \infty$, then by the method of example 1

$$(2.16) \quad J_{m,n}(x, F_m, G_n) \Rightarrow J(x, F, G) = P[\|(1 - \lambda)^{1/2} B_k \cdot H_k + \lambda^{1/2} \tilde{B}_k \cdot \tilde{H}_k\| \leq x]$$

where B_k and H_k are as in Example 1, \tilde{B}_k is an independent copy of B_k , and $\tilde{H}_k(x) = (G^{1/k}(x), \dots, G^{1/k}(x))$. An obvious extension of Theorem 1 shows that $J_{m,n}(x, \hat{F}_m, \hat{G}_n) \Rightarrow J(x, F, G)$ with probability one and justifies the bootstrap confidence band for $F - G$ based on $J_{m,n}(x, \hat{F}_m, \hat{G}_n)$.

Example 3 Suppose the $\{X_i; 1 \leq i \leq n\}$ are random $k \times 1$ vectors with mean $\mu(F)$ and finite positive definite covariance matrix $\Sigma(F)$. Let $J_n(x, F)$ be the c.d.f. of the quantity $R_n(X, F) = |S_n^{-1} \cdot n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu(F))|$, where $|\cdot|$ is any metric on R^k ,

\bar{X}_n is the average of the $\{X_i\}$, and $S_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(X_i - \bar{X}_n)'$ is the sample covariance matrix. When the metric $|\cdot|$ is euclidean, $R_n^2(X, F)$ is a multiple of Hotelling's T^2 -statistic. Define \mathcal{C}_F as follows: $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$ if and only if $F_n \Rightarrow F$ and

$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma(F_n) = \Sigma(F)$. For every sequence $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$,

$$(2.17) \quad J_n(x, F) \Rightarrow J(x, F) = P\{|Z| \leq x\},$$

where Z is a k -dimensional normal random vector with mean zero and identity covariance matrix. Indeed, the distribution under F_n of $n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu(F_n))$ converges weakly to $N(0, \Sigma(F))$, by the Lindeberg central limit theorem; and S_n converges in probability to $\Sigma(F)$, by Khintchine's weak law of large numbers applied to a triangular array.

The sequence $\{\hat{F}_n; n \geq 1\}$ of empirical c.d.f.'s belongs with probability one to \mathcal{C}_F . The Glivenko-Cantelli theorem implies that $\hat{F}_n \Rightarrow F$ w.p. 1, while the strong law of large numbers ensures that $S_n \rightarrow \Sigma(F)$ w.p. 1. By Theorem 1, $J_n(x, \hat{F}_n) \Rightarrow J(x, F)$ w.p. 1. The limit distribution $J(x, F)$, defined in (2.17), is continuous in x because the set $\{z \in R^k : |z| = c\}$ has Lebesgue measure zero for every metric $|\cdot|$ on R^k . Thus, if $D_n(\alpha)$ is the bootstrap confidence region for $\mu(F)$,

$$(2.18) \quad D_n(\alpha) = \{\nu \in R^k : |S_n^{-1} \cdot n^{1/2}(\bar{X}_n - \nu)| \leq c_n(\alpha, \hat{F}_n)\},$$

then

$$(2.19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_F[\mu(F) \in D_n(\alpha)] = 1 - \alpha.$$

The bootstrap approach handles all metrics $|\cdot|$ on R^k with equal ease. A similar discussion can be given for bootstrap confidence regions based on $|n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu(F))|$. The case $k = 1$ was treated in [3].

Equation (2.17) and the subsequent discussion imply that

$$(2.20) \quad \|J_n(x, \hat{F}_n) - J_n(x, F)\| \rightarrow 0 \quad \text{w.p. 1}$$

Interestingly, a related weaker result – convergence in the Lévy-Prohorov metric rather than in supremum norm – can be proved without use of the central limit theorem.

Suppose that $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$ and $\mu(F_n) \rightarrow \mu(F)$. Let $Y_{n,1}, Y_{n,2}, \dots, Y_{n,n}$ be i.i.d. random k -vectors with c.d.f. F_n . Since $\mathcal{L}(Y_{n,i}) = F_n \Rightarrow F = \mathcal{L}(X_i)$, there exist versions $\{Y_{n,i}^*, X_i^*\}$ of the $\{Y_{n,i}, X_i\}$ such that $Y_{n,i}^* \rightarrow X_i^*$ as $n \rightarrow \infty$. This and the convergence of $(\mu(F_n), \Sigma(F_n))$ to $(\mu(F), \Sigma(F))$ imply

$$(2.21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E|(Y_{n,i}^* - \mu(F_n)) - (X_i^* - \mu(F))|_2^2 = 0, \quad i \geq 1,$$

where $|\cdot|_2$ is euclidean metric. Consequently,

$$(2.22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E|n^{1/2}(\bar{Y}_n^* - \mu(F_n)) - n^{1/2}(\bar{X}_n^* - \mu(F))|_2^2 = 0,$$

where $\bar{Y}_n^* = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_{n,i}^*$ and $\bar{X}_n^* = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^*$. On the other hand, the sample covariance matrices $S_{n,Y}^*, S_{n,X}^*$ of the $\{Y_{n,i}^*; 1 \leq i \leq n\}, \{X_i^*; 1 \leq i \leq n\}$ respectively both converge in probability to $\Sigma(F)$, by Khintchine's weak law of large numbers. From this fact, (2.22), and the tightness of $\{n^{1/2}(\bar{X}_n^* - \mu(F)); n \geq 1\}$ and $\{n^{1/2}(\bar{Y}_n^* - \mu(F_n)); n \geq 1\}$, we conclude that

$$(2.23) \quad S_{n,Y}^{*-1} \cdot n^{1/2}(\bar{Y}_n^* - \mu(F_n)) - S_{n,X}^{*-1} \cdot n^{1/2}(\bar{X}_n^* - \mu(F)) \xrightarrow{P} 0.$$

Consequently, $d_{LP}[J_n(x, F_n), J_n(x, F)] \rightarrow 0$, where d_{LP} is the Lévy-Prohorov metric. Since $P_F[\{\hat{F}_n\} \in \mathcal{C}_F, \mu(\hat{F}_n) \rightarrow \mu(F)] = 1$, it follows that

$$(2.24) \quad d_{LP}[J_n(x, \hat{F}_n), J_n(x, F)] \rightarrow 0 \quad \text{w.p. 1}$$

as was asserted above. The possibility that such Lévy-Prohorov convergence may hold when the central limit theorem does not was noted by Bickel and Freedman [4].

Example 4 Suppose the $n \times 1$ vector of observations $Y(n) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$ satisfies the linear model

$$(2.25) \quad Y(n) = A_n \beta + U(n)$$

where $A_n = \{a_{i,j,n}\}$ is the $n \times p$ matrix of non-random regressors, $\text{rank}(A_n) = p$, β is $p \times 1$, and the components of $U(n) = (U_1, U_2, \dots, U_n)'$ are i.i.d. random variables with mean 0, unknown finite variance $\sigma^2(F)$, and unknown c.d.f. F . Let $\hat{\beta}_n = (A_n' A_n)^{-1} A_n' Y(n)$ be the least squares estimate of β and let $s_n^2 = (n - p)^{-1} |Y(n) - A_n \hat{\beta}_n|_2^2$ be the associated estimate of $\sigma^2(F)$. We are interested in estimating $J_n(x, F)$, the c.d.f. of $s_n^{-1} (A_n' A_n)^{1/2} (\hat{\beta}_n - \beta)$.

The least squares residuals $\tilde{U}(n) = (\tilde{U}_{n,1}, \dots, \tilde{U}_{n,n})$ are the components of the vector $\tilde{U}(n) = Y(n) - A_n \hat{\beta}_n = U(n) - B_n U(n)$, where B_n is the idempotent matrix $A_n (A_n' A_n)^{-1} A_n'$. Let F_n^* be the empirical c.d.f. of the *recentered* residuals

$$U^*(n) = (U_{n,1}^*, \dots, U_{n,n}^*) \text{ defined by } U_{n,i}^* = \tilde{U}_{n,i} - n^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{U}_{n,i}.$$

The bootstrap estimate to be considered is $J_n(x, F_n^*)$.

For the asymptotics, we will suppose that p is fixed and that as $n \rightarrow \infty$, $\max n^{-1/2} |a_{i,j,n}| \rightarrow 0$ while $n^{-1} A_n' A_n \rightarrow A$, which is finite and positive definite. Define \mathcal{C}_F as follows: $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$ if and only if $F_n \Rightarrow F$, $\mu(F_n) = 0$, and $\sigma^2(F_n) \rightarrow \sigma^2(F)$. We will first check that, for every sequence $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$,

$$(2.26) \quad J_n(x, F_n) \Rightarrow J(x, F) = P[Z \leq x],$$

where Z is standard p -dimensional normal; and will subsequently show that

$$(2.27) \quad P_F[\{F_n^*\} \in \mathcal{C}_F] = 1.$$

It follows that $J_n(x, F_n^*)$ converges weakly to $J(x, F)$ with probability one and that bootstrap confidence regions for β based on $J_n(x, F_n^*)$ have the correct asymptotic level.

When $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$, the distribution of $(A_n' A_n)^{1/2} (\hat{\beta}_n - \beta)$ under F_n converges to that of $\sigma(F)Z$, by the Lindeberg central limit theorem. Moreover

$$(2.28) \quad s_n^2 = (n - p)^{-1} |U(n) - B_n U(n)|_2^2 = (n - p)^{-1} |U(n)|_2^2 - |B_n U(n)|_2^2 \xrightarrow{P} \sigma^2(F)$$

under F_n because $n^{-1} |U(n)|_2^2 \xrightarrow{P} \sigma^2(F)$ by Khintchine's weak law of large numbers and

$$(2.29) \quad n^{-1} E_{F_n} |B_n U(n)|_2^2 = n^{-1} p \sigma^2(F_n) \rightarrow 0.$$

The weak convergence in (2.26) follows.

Let \hat{F}_n be the empirical c.d.f. of the $\{U_i; 1 \leq i \leq n\}$ and recall that F_n^* is the empirical c.d.f. of the recentered residuals $\{U_{n,i}^*; 1 \leq i \leq n\}$. The mean of F_n^* is zero.

The prove (2.27), it remains to check that $F_n^* \Rightarrow F$ and $\sigma^2(F_n^*) \rightarrow \sigma^2(F)$ with probability one.

With probability one, $\hat{F}_n \Rightarrow F$, $\mu(\hat{F}_n) \rightarrow 0$, $\sigma^2(\hat{F}_n) \rightarrow \sigma^2(F)$, and $n^{-1} |B_n U(n)|_2^2 \rightarrow 0$. For the last convergence, see Lemma 2.4 in Freedman [7]. Consider a *fixed* realization $\{U_i; i \geq 1\}$ which is not in the null set N for which one or more of the above convergences fails. To this fixed realization correspond a realization of $\{\hat{F}_n; n \geq 1\}$, of $\{U_{n,i}^*; 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$, and of $\{F_n^*; n \geq 1\}$. Let $\{(W_n^*, W_n); n \geq 1\}$ be random vectors such that

$$(2.30) \quad P[(W_n^*, W_n) = (U_{n,i}^*, U_i)] = n^{-1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Evidently, $\mathcal{L}(W_n^*) = F_n^*$ and $\mathcal{L}(W_n) = \hat{F}_n$. Moreover,

$$(2.31) \quad E(W_n^* - W_n)^2 = \text{Var}(W_n^* - W_n) + \mu^2(\hat{F}_n) \\ \leq n^{-1} |\tilde{U}(n) - U(n)|_2^2 + \mu^2(\hat{F}_n) = n^{-1} |B_n U(n)|_2^2 + \mu^2(\hat{F}_n) \rightarrow 0.$$

Thus $W_n^* - W_n \xrightarrow{P} 0$. Since $\mathcal{L}(W_n) = \hat{F}_n \Rightarrow F$, we conclude that $F_n^* = \mathcal{L}(W_n^*) \Rightarrow F$ for every realization not in N . Equation (2.31) also implies that

$$(2.32) \quad |\sigma(F_n^*) - \sigma(\hat{F}_n)| = |\text{Var}^{1/2}(W_n^*) - \text{Var}^{1/2}(W_n)| \leq E^{1/2}(W_n^* - W_n)^2 \rightarrow 0$$

and hence that $\sigma^2(F_n^*) \rightarrow \sigma^2(F)$ for every realization not in N . This completes the argument for (2.27).

The discussion above is a less metrical variant of one given in [7]. The later paper [4] investigates asymptotic behavior of bootstrap estimates when the number p of regressors is allowed to increase with n .

Example 5 Suppose the $\{X_i; 1 \leq i \leq n\}$ are i.i.d. random row vectors of dimension $p + 1$ with unknown c.d.f. F . Let Y_i be the first component of X_i and let T_i be the p -dimensional row vector formed by the remaining components of X_i . Suppose $E_F(T_i' Y_i)$ and $V(F) = E_F(T_i' T_i)$ exist, are finite, and $V(F)$ is positive definite. The minimum mean squared error linear predictor of Y_i given T_i has the form $T_i \beta(F)$, where

$$(2.33) \quad \beta(F) = V^{-1}(F) E_F(T_i' Y_i).$$

The usual estimate of $\beta(F)$ is $\beta(\hat{F}_n)$, where \hat{F}_n is the empirical c.d.f. computed from the $\{X_i; 1 \leq i \leq n\}$. Algebraically, $\beta(\hat{F}_n)$ coincides with the least squares estimate $\hat{\beta}_n$ discussed in Example 4. However, the different models in the two examples lead to different distribution theory.

Let $J_n(x, F)$ be the c.d.f. of

$$(2.34) \quad n^{1/2} [\beta(\hat{F}_n) - \beta(F)] = V^{-1}(\hat{F}_n) n^{-1/2} \sum_{i=1}^n T_i'(Y_i - T_i \beta(F)).$$

The bootstrap estimate of $J_n(x, F)$ is $J_n(x, \hat{F}_n)$. To discuss fixed p asymptotics for $J_n(x, \hat{F}_n)$, we make the further assumptions that $A(F) = E_F[(Y_i - T_i \beta(F))^2 T_i' T_i]$ and $E_F(T_i' T_i)^2$ both exist and are finite. Define \mathcal{C}_F as follows: $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$ if and only if $F_n \Rightarrow F$, $\beta(F_n) \rightarrow \beta(F)$, $A(F_n) \rightarrow A(F)$, and $V(F_n) \rightarrow V(F)$. If $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$,

$$(2.35) \quad \mathcal{L}[T_i'(Y_i - T_i \beta(F_n)) | F_n] \Rightarrow \mathcal{L}[T_i'(Y_i - T_i \beta(F)) | F].$$

This fact, the convergence of $A(F_n)$ to $A(F)$, and the Lindeberg central limit theorem imply that $n^{-1/2} \sum_{i=1}^n T_i'(Y_i - T_i\beta(F))$ converges weakly, under F_n , to $N(0, A(F))$. By Khintchine's weak law of large numbers, $V(\hat{F}_n)$ converges in probability to $V(F)$. Thus $J_n(x, F_n)$ converges weakly to $J(x, F)$, the c.d.f. of the $N(0, V^{-1}(F) A(F) V^{-1}(F))$ distribution, whenever $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$.

Let $A_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - T_i\beta(F))^2 T_i' T_i$. By the strong law of large numbers, $\hat{F}_n \Rightarrow F$, $\beta(\hat{F}_n) \rightarrow \beta(F)$, $V(\hat{F}_n) \rightarrow V(F)$, $A_n \rightarrow A(F)$, and $n^{-1} \sum_{i=1}^n (T_i' T_i)^2 \rightarrow E_F(T_i' T_i)^2$

with probability one. To prove $P_F[\{\hat{F}_n\} \in \mathcal{C}_F] = 1$, it remains to show that $A(\hat{F}_n) \rightarrow A(F)$ w.p. 1. Consider a fixed realization $\{X_i; i \geq 1\}$ which is not in the null set N for which one or more of the already established convergences fails. Let $\{(W_n^*, W_n); n \geq 1\}$ be random vectors such that

$$(2.36) \quad \begin{aligned} P[(W_n^*, W_n) = (T_i'(Y_i - T_i\beta(\hat{F}_n)), \\ T_i'(Y_i - T_i\beta(F)))] = n^{-1}, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

For any $p \times 1$ constant vector c ,

$$(2.37) \quad \begin{aligned} E[c'(W_n^* - W_n)]^2 &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \{c' T_i' T_i [\beta(\hat{F}_n) - \beta(F)]\}^2 \\ &\leq |\beta(\hat{F}_n) - \beta(F)|_2^2 n^{-1} \sum_{i=1}^n c' (T_i' T_i)^2 c \rightarrow 0 \end{aligned}$$

which implies that $E^{1/2}(c'W_n^*)^2 - E^{1/2}(c'W_n)^2 \rightarrow 0$. Since $E(c'W_n)^2 = c'A_n c \rightarrow c'A(F)c$ and $E(c'W_n^*)^2 = c'A(\hat{F}_n)c$, we conclude that $A(\hat{F}_n) \rightarrow A(F)$, as was to be proved.

For further discussion of bootstrapping in this model, see Freedman [7].

Example 6 Suppose X_1, X_2, \dots, X_n are i.i.d. random variables with c.d.f. F and unique median $m(F)$, both unknown. Suppose further that F is continuous and has positive derivative f at $m(F)$. Let $J_n(x, F)$ be the c.d.f. of $n^{1/2}|M_n - m(F)|$, where $M_n = m(\hat{F}_n)$ is the sample median. Define \mathcal{C}_F as follows: $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$ if and only if

$$(2.38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} [F_n(m(F_n) + n^{-1/2}x) - 1/2] = xf(m(F))$$

for every real x . Then, for every sequence $\{F_n\} \in \mathcal{C}_F$,

$$(2.39) \quad J_n(x, F_n) \Rightarrow J(x, F) = P[|Z| \leq 2xf(m(F))],$$

where Z is a standard normal random variable.

Indeed, suppose n goes to infinity through odd values. Since $\{M_n \leq t\} = \{\hat{F}_n(t) \geq 1/2 + 1/2n\}$,

$$(2.40) \quad \begin{aligned} P_{F_n}[n^{1/2}(M_n - m(F_n)) \leq x] &= P_{F_n}[\hat{F}_n(m(F_n) + n^{-1/2}x) \geq 1/2 + 1/2n] \\ &= P_{F_n}[B_n \cdot F_n(m(F_n) + n^{-1/2}x) + n^{1/2}\{F_n(m(F_n) + n^{-1/2}x) - 1/2\} \geq 2^{-1}n^{-1/2}], \end{aligned}$$

where B_n is the empirical process $B_{1,n}$ defined in example 1. Using (2.38) and work-

ing with versions of the empirical processes $\{B_n\}$ and of the brownian bridge B for which $\|B_n - B\| \rightarrow 0$ w.p. 1, we see that the right side of (2.40) converges to $P[B(1/2) + xf(m(F)) \geq 0]$; this implies (2.39) because $B(1/2)$ has a $N(0, 1/4)$ distribution. The argument for even values of n is similar.

Let $W_n = n^{1/2}(\hat{F}_n - F)$ and $V_n = n^{1/2}(M_n - m(F))$. Under F , $\{(W_n, V_n); n \geq 1\}$ converges weakly to (W, V) , where W is a gaussian process on $C[-\infty, \infty]$ and V is a normally distributed random variable. By Skorokhod's theorem, there exist versions of $\{(W_n, V_n); n \geq 1\}$ and of (W, V) such that $\|W_n - W\| \rightarrow 0$ and $V_n \rightarrow V$ with probability one. To these versions correspond versions of $\{\hat{F}_n\}$ and $\{M_n\}$ defined by $\hat{F}_n = F + n^{-1/2}W_n$ and $M_n = m(F) + n^{-1/2}V_n$. These versions preserve the relation $M_n = m(\hat{F}_n)$ w.p. 1.

For these versions of $\{\hat{F}_n\}$, $P[\{\hat{F}_n\} \in \mathcal{C}_F] = 1$. Indeed,

$$(2.41) \quad \begin{aligned} & n^{1/2}[\hat{F}_n(M_n + n^{-1/2}x) - 1/2] = n^{1/2}[\hat{F}_n(M_n + n^{-1/2}x) - \hat{F}_n(M_n)] + o(1) \\ & = [W_n(M_n + n^{-1/2}x) - W_n(M_n)] + n^{1/2}[F(M_n + n^{-1/2}x) - F(m(F))] \\ & \quad - n^{1/2}[F(M_n) - F(m(F))] + o(1). \end{aligned}$$

Approximating W_n by W , whose sample paths are uniformly continuous, we see that the first term on the right side of (2.41) converges w.p. 1 to zero. The sum of the second and third terms converges w.p. 1 to $x f(m(F))$, in view of the differentiability assumption on F and the almost sure convergence of V_n to V .

Thus, for the special versions of $\{\hat{F}_n\}$ described above, $J_n(x, \hat{F}_n) \Rightarrow J(x, F)$ and $c_n(\alpha, \hat{F}_n) \rightarrow c(\alpha, F)$ w.p. 1, by Theorem 1. For the original empirical c.d.f.'s $\{\hat{F}_n\}$, these convergences can only be asserted in probability. However, this is enough to prove that the asymptotic level of the bootstrap confidence interval for the median,

$$(2.42) \quad D_n(\alpha) = \{\nu : n^{1/2} |M_n - \nu| \leq c_n(\alpha, \hat{F}_n)\},$$

is $1 - \alpha$.

Singh [12] established rate of convergence of bootstrap distributions for sample quantiles. Bickel and Freedman [3] proved consistency of the bootstrap estimate for the distribution of the quantile process. Efron [5], [6] derived a closed form for the bootstrap distribution of the sample median.

Counterexample When the weak convergence of $\{J_n(x, F)\}$ to the limit c.d.f. $J(x, F)$ is not sufficiently uniform in F , bootstrap distribution estimates need not be consistent. For instance, suppose the random variables X_1, X_2, \dots, X_n are i.i.d. with c.d.f. $\Phi(x - \theta)$, Φ being the $N(0, 1)$ c.d.f. and θ being an unknown location parameter. Let T_n be the Hodges estimate for θ ,

$$(2.43) \quad T_n = \begin{cases} b\bar{X}_n & \text{if } |\bar{X}_n| \leq n^{-1/4} \\ \bar{X}_n & \text{otherwise} \end{cases}, \quad b > 0,$$

and let $J_n(x, \theta)$ be the c.d.f. of $n^{1/2}(T_n - \theta)$. Then $\|J_n(x, \theta) - J(x, \theta)\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, with

$$(2.44) \quad J(x, \theta) = \begin{cases} \Phi(x) & \text{if } \theta \neq 0 \\ \Phi(b^{-1}x) & \text{if } \theta = 0 \end{cases}$$

Two natural "parametric bootstrap" estimates for $J_n(x, \theta)$ are $J_n(x, \bar{X}_n)$ and $J_n(x, T_n)$. Both of these estimates fail to be consistent, however. To see this, define $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ as follows: A sequence of real numbers $\{\theta_n; n \geq 1\}$ belongs to \mathcal{C}_1 if and only if $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta \neq 0$. A sequence $\{\theta_n\}$ belongs to \mathcal{C}_2 if $\lim_{n \rightarrow \infty} [\pm n^{1/4} - n^{1/2}\theta_n] = \pm \infty$. By fairly direct calculation,

$$(2.45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|J_n(x, \theta_n) - \Phi(x)\| = 0 \quad \text{if } \{\theta_n\} \in \mathcal{C}_1$$

and

$$(2.46) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|J_n(x, \theta_n) - \Phi[b^{-1}\{x - n^{1/2}\theta_n(b-1)\}]\| = 0 \quad \text{if } \{\theta_n\} \in \mathcal{C}_2.$$

In particular, these limits imply (2.44).

When $\theta \neq 0$, then $P_\theta[\{\bar{X}_n\} \in \mathcal{C}_1] = 1$ and therefore

$$(2.47) \quad \|J_n(x, \bar{X}_n) - \Phi(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{w.p. 1.}$$

However, when $\theta = 0$, then $P_0[\{\bar{X}_n\} \in \mathcal{C}_2] = 1$ and consequently

$$(2.48) \quad \|J_n(x, \bar{X}_n) - \Phi[b^{-1}\{x - n^{1/2}\bar{X}_n(b-1)\}]\| \rightarrow 0 \quad \text{w.p. 1.}$$

Comparing (2.48) with (2.44), we see that the bootstrap estimates $\{J_n(x, \bar{X}_n)\}$ are inconsistent when $\theta = 0$ and $b \neq 1$. The situation is no better for the alternative estimate $J_n(x, T_n)$. Both (2.47) and (2.48) remain valid if \bar{X}_n is replaced by T_n and convergence w.p. 1 is replaced by convergence in probability.

Other examples of bootstrap inconsistency are described in [3].

3 Asymptotic Optimality

Consistency of bootstrap estimates is a desirable but relatively weak property. Having proved consistency, we might ask: What is the rate of convergence of bootstrap estimates? What are the limiting distributions of suitably centered bootstrap estimates? Are bootstrap estimates asymptotically minimax? Singh [12] addressed the first question for the bootstrapped sample mean and sample quantiles. This section will describe some answers to the second and third questions obtained in [1] and [2].

We restrict attention to the following situation. Suppose X_1, X_2, \dots, X_n are i.i.d. random variables with unknown c.d.f. in \mathcal{F} , which now consists of all c.d.f.'s whose support lies within a fixed compact interval I . Let T be a real-valued functional defined in \mathcal{F} and satisfying the following smoothness condition.

Assumption A *The functional T is locally quadratic at every F in \mathcal{F} , in the following sense: for every $F, G \in \mathcal{F}$, there exists a function $f(x, y, F)$ such that*

$$(3.1) \quad T(G) = T(F) + \int t(x, y, F) dG(x) dG(y) + r(G, F).$$

The ratio $\|G - F\|^{-2}r(G, F)$ converges to zero as $\|G - F\|$ tends to zero and $\sup\{\|G - F\|^{-2}r(G, F); G \in \mathcal{F}\} < \infty$ for every F in \mathcal{F} . The function $t(x, y, F)$ is continuous in (x, y) on $I \times I$; $\int t(x, y, F) dF(x) dF(y) = 0$; and $\int \int t(x, y, F)$

$dF(y)]^2 dF(x) > 0$. Without loss of generality, we may assume that $f(x, y, F)$ is symmetrical in x and y .

We will consider bootstrap estimates for the normalized moments of $T_n = T(\hat{F}_n)$, where \hat{F}_n is the empirical c.d.f., and for the c.d.f. $J_n(x, F) = P_F[n^{1/2}(T_n - T(F)) \leq x]$. The framework just described covers a variety of estimates T_n that are used in statistics. Some examples:

(a) *The r-th sample moment* $n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^r$. Evidently, $T(F) = \int x^r dF(x)$ and $t(x, y, F) = 2^{-1}(x^r + y^r) - T(F)$.

(b) *The sample variance* $n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, where \bar{X}_n is the sample mean. In this case, $T(F) = 2^{-1} \int (x - y)^2 dF(x) dF(y)$ and $t(x, y, F) = 2^{-1}(x - y)^2 - T(F)$.

(c) *L-estimates of location*. Here $T(F) = \int_0^1 F^{-1}(t) J(t) dt$. If J is continuously differentiable, then Assumption A holds with

$$(3.2) \quad t(x, y, F) = -2^{-1} \int [I(x \leq z) + I(y \leq z) - 2F(z)] J \cdot F(z) dz - 2^{-1} \int [I(x \leq z) - F(z)][I(y \leq z) - F(z)] J' \cdot F(z) dz$$

(Serfling [10], p. 289).

(d) *M-estimates of location*. Let $\lambda_F(t) = \int \psi(x - t) dF(x)$, where ψ is strictly monotone with $\psi(-\infty) < 0$ and $\psi(\infty) > 0$. The functional $T(F)$ solves the equation $\lambda_F[T(F)] = 0$. If Ψ is twice continuously differentiable, then Assumption A holds with

$$(3.3) \quad t(x, y, F) = \beta_F(x, y) + \beta_F(y, x) - \{2\lambda'_F[T(F)]\}^{-1} \lambda''_F[T(F)] \alpha_F(x) \alpha_F(y)$$

where

$$(3.4) \quad \alpha_F(x) = -\{\lambda'_F[T(F)]\}^{-1} \psi[x - T(F)] \\ \beta_F(x, y) = \alpha_F(x) [1 + \{2\lambda'_F[T(F)]\}^{-1} \psi'(y - T(F))]$$

(Serfling [10], p. 256).

Let $m_n(F) = E_F(T_n)$ and let

$$(3.5) \quad b_n(F) = n[m_n(F) - T(F)] \quad s_n^2(F) = n E_F [T_n - m_n(F)]^2 \\ k_{3,n}(F) = s_n^{-3}(F) n^2 E_F [\hat{T}_n - m_n(F)]^3$$

be the normalized bias, variance, and skewness of T_n , regarded as an estimate of $T(F)$. The bootstrap estimates of $b_n(F)$, $s_n^2(F)$, $k_{3,n}(F)$ are $b_n(\hat{F}_n)$, $s_n^2(\hat{F}_n)$, $k_{3,n}(\hat{F}_n)$ respectively. In practice, these could be calculated from the moments of the bootstrap distribution estimate $J_n(x, \hat{F}_n)$, which in turn could be approximated by Monte Carlo methods.

For notational convenience in what follows, let

$$(3.6) \quad t_1(x, F) = \int t(x, y, F) dF(y) \quad t_2(x, y, F) = t(x, y, F) - t_1(x, F) - t_1(y, F)$$

By Assumption A, $\int t_1(x, F) dF(x) = 0$; $t_2(x, y, F)$ is symmetrical in the arguments

x, y ; and $\int t_2(x, y, F) dF(x) = 0$. These properties imply the orthogonality relationship $\int t_1(x, F) t_2(x, y, F) dF(x) dF(y) = 0$.

For every $F \in \mathcal{F}$, define the ball $B_n(F, c)$ as the set of all $G \in \mathcal{F}$ such that $\|G - F\| \leq n^{-1/2}c, c > 0$. Let the notation $\sup_{n,F,c}$ indicate the supremum over all c.d.f.'s in $B_n(F, c)$.

Theorem 2 *Suppose Assumption A is satisfied. Then*

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n,F,c} P_G[|b_n(\hat{F}_n) - b_n(G)| > \epsilon] = 0 \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n,F,c} P_G[|k_{3,n}(\hat{F}_n) - k_{3,n}(G)| > \epsilon] = 0 \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n,F,c} P_G[|s_n^2(\hat{F}_n) - s_n^2(G)| > \epsilon] = 0 \end{aligned}$$

for every $F \in \mathcal{F}$ and every positive c and ϵ . Moreover, under every sequence of distributions $\{G_n \in B_n(F, c)\}$, the asymptotic distribution of $\{n^{1/2}[s_n^2(\hat{F}_n) - s_n^2(G_n)]\}$ is $N(0, \sigma^2(F))$, where

$$(3.8) \quad \sigma^2(F) = 16 \int [t_1^2(x, F) + 2 \int t_2(x, y, F) t_1(y, F) dF(y) - s^2(F)]^2 dF(x)$$

and

$$(3.9) \quad s^2(F) = 4 \int t_1^2(x, F) dF(x).$$

Equation (3.7) asserts locally uniform consistency of the bootstrap moment estimates under consideration. The second part of the theorem establishes locally uniform asymptotic normality only for the bootstrap variance estimates $\{s_n^2(\hat{F}_n); n \geq 1\}$. To obtain similar results for $\{b_n(\hat{F}_n)\}, \{k_{3,n}(\hat{F}_n)\}$ requires strengthening of Assumption A.

How well does the bootstrap variance estimate $s_n^2(\hat{F}_n)$ estimate $s_n^2(F)$, the normalized variance of T_n ? Suppose u is a non-negative, monotone increasing loss function defined on R^+ . Let V_n be any estimate of $s_n^2(F)$. Because the functions $\{s_n^2(F); n \geq 1\}$ are Hellinger differentiable (see [2] for details), an application of the Hájek-Le Cam asymptotic minimax theorem yields the following lower bound on minimax risk: for every $F \in \mathcal{F}$,

$$(3.10) \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{V_n} \sup_{n,F,c} E_G u[n^{1/2} |V_n - s_n^2(G)|] \geq Eu[\sigma(F)|Z],$$

where Z is a standard normal random variable and $\sigma^2(F)$ is defined by (3.8). On the other hand, if u is also bounded, it follows from the second part of Theorem 2 that

$$(3.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n,F,c} E_G u[n^{1/2} |V_n - s_n^2(G)|] = Eu[\sigma(F)|Z]$$

for every positive c and every $F \in \mathcal{F}$. Thus, the bootstrap variance estimate $s_n^2(\hat{F}_n)$ cannot be surpassed by any other estimate in the sense that its maximum risk over $B_n(F, c)$ is as small as possible, when n and c are large.

We consider now the asymptotic behavior of $J_n(x, \hat{F}_n)$, the bootstrap estimate for the c.d.f. $J_n(x, F) = P_F[n^{1/2}(T_n - T(F)) \leq x]$. This turns out to be closely related to the asymptotic behavior of

$$(3.12) \quad J_{n,E}(x) = \Phi[(x - n^{-1/2}b_n(\hat{F}_n))/s_n(\hat{F}_n)] - n^{-1/2}k_{3,n}(\hat{F}_n)t[x/s_n(\hat{F}_n)]\varphi[x/s_n(\hat{F}_n)],$$

where $t(x) = 6^{-1}(x^2 - 1)$ and Φ, φ are the standard normal c.d.f. and density. Equation (3.12) is a first-order Edgeworth expansion for $J_n(x, F)$, with bias correction and coefficients replaced by their bootstrap estimates. Convergence of the Edgeworth expansion becomes an issue here because the ball $B_n(F, c)$ contains lattice distributions and because of the remainder term $r(G, F)$ in Assumption A. We deal with this technical problem by smoothing $J_{n,E}(x), J_n(x, \hat{F}_n)$, and $J_n(x, F)$ when making comparisons.

Let v be the symmetrical probability density

$$(3.13) \quad v(x) = a^{-1}(1 - a^{-1}|x|) \quad \text{if } |x| \leq a,$$

whose characteristic function is

$$(3.14) \quad \psi(t) = 2(at)^{-2}[1 - \cos(at)].$$

For small positive a , $v(x)$ approximates the delta function. At the same time, $\psi(t)$ tends to zero with sufficient rapidity as $|t|$ tends to infinity. The relationship $\|d\|_v = \|d * v\|$, where $*$ denotes convolution, defines a norm for real-valued functions on R .

Theorem 3 *Suppose Assumption A is satisfied. Then*

$$(3.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n,F,c} P_G [n^{1/2} \|J_n(x, \hat{F}_n) - J_{n,E}(x)\|_v > \epsilon] = 0$$

for every $F \in \mathcal{F}$ and every positive c and ϵ . Moreover, under every sequence of distributions $\{G_n \in B_n(F, c)\}$, the processes $\{n^{1/2}[J_n(x, \hat{F}_n) - J_n(x, G_n)]\}$ and the processes $\{n^{1/2}[J_{n,E}(x) - J_n(x, G_n)]\}$ converge weakly in $\|\cdot\|_v$ norm to the gaussian process

$$(3.16) \quad Y_F(x) = [2s^3(F)]^{-1} \sigma(F) Z x \varphi[x/s(F)]$$

where Z is a standard normal random variable.

This result is analogous to Theorem 2. Noteworthy are the degenerate nature of the limiting gaussian process $Y_F(x)$ and the asymptotic equivalence, up to order $n^{-1/2}$, of the bootstrap estimate $J_n(x, \hat{F}_n)$ and the Edgeworth expansion estimate $J_{n,E}(x)$. The latter property was established pointwise by Singh [12] for $T_n = \bar{X}_n$. In this case, smoothing is easily avoided.

Let u be a non-negative, monotone increasing loss function defined on R^+ . Let $H_n(x)$ be any estimate of $J_n(x, F)$. It can be shown (see [1]) that for every $F \in \mathcal{F}$,

$$(3.17) \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{H_n} \sup_{n,F,c} E_G u[n^{1/2} \|H_n(x) - J_n(x, G)\|_v] \\ \geq E u[\{2s^3(F)\}^{-1} \sigma(F) \|x \varphi[x/s(F)]\|_v | Z]$$

On the other hand, if u is also bounded, it follows from the second part of Theorem 3 that

$$(3.18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n,F,c} E_G u[n^{1/2} \|J_n(x, \hat{F}_n) - J_n(x, G)\|_v] \\ = E u[\{2s^3(F)\}^{-1} \sigma(F) \|x \varphi[x/s(F)]\|_v | Z]$$

for every positive c and every $F \in \mathcal{F}$. Thus, the bootstrap estimate $J_n(x, \hat{F}_n)$ is asymptotically minimax among all estimates for $J_n(x, G)$. The Edgeworth expansion estimate $J_{n,E}$ has the same property, because of (3.15).

However, the simpler normal approximation $\Phi[x/s_n(\hat{F}_n)]$ is *not*, in general, an asymptotically minimax estimate of $J_n(x, F)$, although it is consistent. Replacing $s_n(\hat{F}_n)$ by other efficient estimates of standard deviation does not change this fact; the bias and skewness corrections which appear in (3.12) are essential for the asymptotic minimax property of $J_{n,E}(x)$. Thus, bootstrap estimates are not only expedient, but may also be superior to traditional estimates.

4 Jackknife Estimates

The jackknife is an older resampling procedure, introduced to estimate bias and variance by Quenouille [8] and Tukey [13] respectively. Efron [5] observed that jackknife estimates of bias and variance are approximations to their bootstrap counterparts, at least in the finite sample space case. The stronger results presented in this section come from [2].

Suppose $T_n = T(\hat{F}_n)$ as in Section 3. Let

$$(4.1) \quad T_{n,i} = T_{n+1}(X_1, X_2, \dots, X_n, X_i) \quad T_{n,i,j} = T_{n+2}(X_1, X_2, \dots, X_n, X_i, X_j)$$

and let

$$(4.2) \quad D_{n,i} = (n+1)[T_{n,i} - T_n] \\ D_{n,i,j} = (n+2)[(n+2)T_{n,i,j} - (n+1)T_{n,i} - (n+1)T_{n,j} + nT_n]$$

for $1 \leq i, j \leq n$. We define the positive jackknife estimates for $b_n(F)$, $s_n^2(F)$, $k_{3,n}(F)$ to be

$$(4.3) \quad b_{n,J} = \sum_{i=1}^n D_{n,i} \quad s_{n,J}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n D_{n,i}^2 \\ k_{3,n,J} = s_{n,J}^{-3} [n^{-1} \sum_{i=1}^n D_{n,i}^3 + 3n^{-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{n,i,j} D_{n,i} D_{n,j}]$$

The adjective "positive" refers to the enlargement, in (4.1), of the original sample by replicate observations. In the original jackknife, observations are removed instead. For the results described in this section, both jackknife procedures are equivalent, asymptotically. In practice, one might wish to adjust these estimates slightly, so as to improve performance in small samples (see [2]).

Theorem 4 *Suppose Assumption A is satisfied and*

$$(4.4) \quad \sup_{\|G - F\| < d} \sup_{x,y} |t(x, y, G)| < \infty$$

for every $F \in \mathcal{F}$ and some positive d . Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n,F,c} P_G[|b_{n,J} - b_n(\hat{F}_n)| > \epsilon] = 0 \\ (4.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n,F,c} P_G[|k_{3,n,J} - k_{3,n}(F_n)| > \epsilon] = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n,F,c} P_G[|n^{1/2} |s_{n,J}^2 - s_n^2(\hat{F}_n)| > \epsilon] = 0$$

for every $F \in \mathcal{F}$ and every positive c and ϵ . Hence, the conclusions of Theorem 2 apply also to the jackknife estimates $b_{n,J}$, $k_{3,n,J}$, and $s_{n,J}^2$.

In particular, this result and the discussion following Theorem 2 imply that $s_{n,J}^2$, like its bootstrap competitor $s_n^2(\hat{F}_n)$, is asymptotically minimax among all estimates of $s_n^2(F)$. This is of practical interest because jackknife estimates are relatively easy to compute.

By analogy with the estimate $J_{n,E}(x)$, we can define the jackknife Edgeworth expansion estimate

$$(4.6) \quad J_{n,JE}(x) = \Phi[(x - n^{-1/2}b_{n,J})/s_{n,J}] - n^{-1/2}k_{3,n,J}t(x/s_{n,J})\phi(x/s_{n,J}).$$

Theorem 5 Suppose Assumption A is satisfied and (4.4) holds. Then

$$(4.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{P_{n,F,c}} P_G[n^{1/2} \|J_{n,JE}(x) - J_n(x, \hat{F}_n)\|_v > \epsilon] = 0$$

for every $F \in \mathcal{F}$ and every positive c and ϵ . Hence, the conclusions of Theorem 3 apply also to the processes $\{n^{1/2}[J_{n,JE}(x) - J_n(x, G_n)]\}$.

Theorems 3 and 5 establish the asymptotic equivalence, up to terms of order $n^{-1/2}$, of the three distribution estimates $J_n(x, \hat{F}_n)$, $J_{n,E}(x)$, and $J_{n,JE}(x)$. It follows from the discussion after Theorem 3 that each of these estimates is asymptotically minimax for $J_n(x, F)$. The jackknife estimate $J_{n,JE}(x)$ is usually the simplest to calculate.

However, the jackknife is a more specialized tool than the bootstrap; its validity depends strongly on the locally quadratic property described in Assumption A. When T_n is the sample median, $J_n(x, \hat{F}_n)$ is consistent (example 6 of Section 2). But $s_{n,J}^2$ is not consistent in this case (see [2], [5]) and the jackknife Edgeworth expansion estimate $J_{n,JE}(x)$ therefore fails. It is also evident that jackknifing will not help in dealing with Kolmogorov-Smirnov statistic, while the bootstrap does (Example 1 of Sections 1 and 2).

References

- [1] B e r a n , R.: Estimated sampling distributions: the bootstrap and competitors. *Ann. Statist.* **10** (1982) 212–225
- [2] B e r a n , R.: Jackknife approximations to bootstrap estimates. Prepr. 1982
- [3] B i c k e l , P. J.; F r e e d m a n , D. A.: Some asymptotic theory for the bootstrap. *Ann. Statist.* **9** (1981) 1196–1217
- [4] B i c k e l , P. J., F r e e d m a n , D. A.: Bootstrapping regression models with many parameters. In: *Festschrift for Erich Lehmann*, Belmont: Wadsworth 1982
- [5] E f r o n , B.: Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Ann. Statist.* **7** (1979) 1–26
- [6] E f r o n , B.: *The Jackknife, the Bootstrap, and Other Resampling Plans*. Philadelphia: SIAM 1982
- [7] F r e e d m a n , D. A.: Bootstrapping regression models. *Ann. Statist.* **9** (1981) 1218–1228
- [8] Q u e n o u i l l e , M. H.: Notes on bias in estimation. *Biometrika* **43** (1956) 353–360
- [9] S c h m i d , P.: On the Kolmogorov and Smirnov limit theorems for discontinuous distribution functions. *Ann. Math. Statist.* **29** (1958) 1011–1027
- [10] S e r f l i n g , R. J.: *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. New York: Wiley 1980

- [11] Shorack, G. R.: Bootstrapping robust regression. *Commun. Statist. Theor. Meth.* **11** (1982) 961–972
- [12] Singh, K.: On the asymptotic occurance of Efron's bootstrap. *Ann. Statist.* **9** (1981) 1187–1195
- [13] Tukey, J. W.: Bias and confidence in not-quite large samples. *Ann. Math. Statist.* **29** (1958) 614

R. Beran
Department of Statistics
University of California
Berkeley, California 94720
USA

(Eingegangen: 2. 2. 1983)

Hans-Heinrich Ostmann 1913–1959

B. Hornfeck, Clausthal-Zellerfeld

Am 16. Oktober 1913 wurde Hans-Heinrich Ostmann als Sohn des Grubenbetriebsführers Otto Ostmann und seiner Ehefrau Maria, geb. Zobel, in Beuthen in Oberschlesien geboren. Von Ostern 1920 bis Ostern 1923 besuchte er Fliegners Privatschule in Beuthen und anschließend am gleichen Ort das humanistische Hindenburg-Gymnasium bis zur Reifeprüfung, die er im Frühjahr 1932 ablegte.

Vom Sommersemester 1932 an studierte er Mathematik im Haupt- und Physik und Chemie im Nebenfach an der Universität Berlin und für ein Semester auch an der Universität München, bevor er 1935 an seine Heimatuniversität Breslau überwechselte. Einer seiner Breslauer Kommilitonen berichtet, Ostmann sei als Student ein sehr eleganter junger Mann gewesen, von Hause aus etwas besser gestellt als die meisten anderen, ohne jedoch damit aufzufallen. Seine Lebens- und Arbeitsweise sei die eines kleinen Grandseigneurs gewesen. „Vorlesungen, die früh um Punkt 8 Uhr begannen, fanden für ihn im allgemeinen nicht statt.“

Dies ergänzt das Bild, das später seine Studenten und Schüler von ihm gewannen: Sein schmaler leptosomer Körperbau harmonierte mit seinem feinen, vornehmen und anfangs eher etwas scheuen Auftreten. Er war zurückhaltend und freute sich doch sehr über die Kontakte zu seinen Studenten; waren die ersten Hemmnisse überwunden, was etwas Zeit brauchte und auch die Mithilfe der anderen, so zeigte sich ein völlig unprofessoraler sensibler und sehr liebenswerter Mensch. Seine Gewohnheit, den Vormittag zumindest teilweise zu verschlafen, hatte sich nicht geändert; dafür führte er abends mit Bekannten, die telefonisch erreichbar waren, lange Gespräche und fühlte sich zum Arbeiten wohl in der Ruhe der Nacht. Und was die Technik des Studierens betrifft, so erzählte er eines Tages, den Übungsschein zur Analysis I habe er erst im achten Semester erworben. „Das ging dann wie geschmiert!“, kommentierte er und lachte, daß er den Unbilden der Verhältnisse eins ausgewischt hatte.

Zurück nach Breslau. Dort lernte er eine elementare zahlentheoretische Vermutung kennen, die seit einigen Jahren an den mathematischen Instituten im In- und Ausland kursierte, ohne daß jemand in der Lage war, diese Vermutung zu beweisen oder zu widerlegen: Es seien A, B Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, die beide die Null enthalten, und $A + B$ die Menge aller Summen $a + b$, $a \in A$, $b \in B$; weiter sei $A(n)$ die Anzahl aller positiven a , $a \leq n$, und die Dichte $d(A) = \alpha$ das Infimum der Zahlen $\frac{A(1)}{1}, \frac{A(2)}{2}, \frac{A(3)}{3}, \dots$, entsprechend $d(B) = \beta$ und

$d(A + B) = \gamma$. Jede solche Dichte ist eine Zahl zwischen Null und Eins; also ist $\gamma \geq \alpha + \beta$ sicher nicht immer richtig; gilt aber $\gamma \geq \min(1, \alpha + \beta)$?

Etwa ab 1936 beschäftigte sich Ostmann mit dieser $(\alpha + \beta)$ -Hypothese, und diese Beschäftigung hat seinen wissenschaftlichen Werdegang geprägt. Der von dem russischen Mathematiker Schnirelmann eingeführte Dichtebegriff war noch keine zehn Jahre alt und erschien doch als wichtiges oder zumindest nützliches Hilfsmittel bei Fragestellungen der additiven Zahlentheorie wie etwa dem Goldbachschen oder dem Waring'schen Problem; angeregt durch die $(\alpha + \beta)$ -Hypothese, entstand ein neuer Zweig der Zahlentheorie, elementar, aber schwierig, und da es noch nicht allzuviel Literatur gab, konnte man mit seinem eigenen Kopf denken.

Das Thema seiner Dissertation [1] „Über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen“ hatte Ostmann also selbst gewählt; Feigl war Referent, Radon Korreferent; die mündliche Doktorprüfung fand im Sommer 1938 statt; die Promotionsurkunde wurde erst 1940 nach dem Druck der Arbeit ausgefertigt. Ostmann hat die $(\alpha + \beta)$ -Hypothese nicht beweisen können; dies ist erst 1942 H. B. Mann gelungen. Ostmanns Überlegungen betreffen direkt die Struktur der Summenmenge $C = A + B$; er betrachtet $A(n) + B(n) - n$ und stellt einen komplizierten Zusammenhang mit $C(n)$ her. Wir haben später die anschaulichen Hintergründe nie recht verstehen können, auch wenn er bei den Erklärungen Kämme zu Hilfe nahm. Er untersucht vorwiegend Anzahlfunktionen, was für sich selbst von Interesse ist, und gewinnt damit in [1] und [2] Abschätzungen für γ nach unten, die etwas schwächer sind als die gewünschte. Sein Vorgehen erlaubt es ihm auch, Aussagen über die unteren asymptotischen Dichten von A, B, C zu machen, die man erhält, indem man oben jeweils das Infimum durch den Limes inferior ersetzt.

Nach seiner Promotion arbeitete er im wesentlichen als Volontärassistent am Breslauer Mathematischen Institut weiter und unterrichtete im ersten Kriegswinter an der Staatsbauschule für Hoch- und Tiefbau in Beuthen, bevor er am 1. 4. 1940 planmäßiger wissenschaftlicher Assistent in Breslau wurde. Im Jahr 1942 habilitierte er sich mit einer erst nach dem Krieg erschienenen Arbeit [4] aus dem bereits beschriebenen Themenkreis, wurde im Sommer 1943 auch zum Dozenten für Mathematik ernannt und blieb Dozent und Assistent in Breslau bis zum Kriegsende. Ohne Anschluß an irgendeine Parteiorganisation war die akademische Laufbahn damals kaum möglich; andererseits gehörte Ostmann zu den wenigen, mit denen ein offenes Gespräch über die politischen Verhältnisse möglich war; bei den Studierenden war er beliebt und hatte in Anspielung auf seinen Vornamen den Spitznamen H_2O .

Das Wintersemester 1944/45 ist nicht mehr regulär zu Ende gegangen. Mit der Flucht nach Westen verlor Ostmann wie viele andere sein Eigentum. Er heiratete 1945; aber auch diese erste Ehe zerbrach kaum ein Jahr später. Wie wirr die Zeiten damals waren und wie irritiert das Urteilsvermögen der aus ihren Bindungen gerissenen Flüchtlinge und Vertriebenen, zeigt ein Satz aus einem seiner Lebensläufe: „Im Juni 1945 kehrte ich in Unkenntnis der politischen Lage noch einmal nach Breslau zurück, ging jedoch angesichts der vorgefundenen Verhältnisse bald wieder fort.“

Ab Juli 1946 lebte er in Oberwolfach. Weil er kein Staatsexamen hatte, konnte er nicht einmal als Lehrer tätig sein. Statt dessen zog er als Milchprüfer übers Land und erschloß sich eine weitere kleine Erwerbsquelle, indem er Einsendungen mathematischer Laien gegen ein Honorar bearbeitete. Bis zum Herbst 1948 scheint er auf diesem Gebiet eine beträchtliche Erfahrung gewonnen zu haben. Er erzählte später flüssig von Kreisquadrirern, Fermatisten und Winkeltrisektierern, wußte, wie sie aussahen, welche Fehler sie machten und kannte ihr soziologisches Umfeld. Später in Marburg und in Berlin behielt er den Ruf des zuständigen Experten; unbequeme Einsender wurden andernorts vielfach gleich an ihn als Fachmann weiterverwiesen. Das kam dann seinen Schülern zugute, die sich nun durch schriftliche Bearbeitungen ab und zu etwas Geld dazuverdienen konnten; nur die persönlich erscheinenden Kunden konnte er nicht mehr abwimmeln, worüber ergötzliche Geschichten zu erzählen wären.

Im Anschluß an die Arbeiten von Mann, Dyson und van der Corput zur Dichtetheorie entstand in Oberwolfach 1948 Ostmanns zusammenfassende Übersicht [5]. Er stellt fest, die Fragen im Zusammenhang mit der Schnirelmann-Dichte seien jetzt erledigt, und er verweist auf das ungeklärte Analogon zur $(\alpha + \beta)$ -Hypothese bezüglich der unteren asymptotischen Dichten. Es war nicht einmal klar, wie eine entsprechende Vermutung überhaupt auszusehen hatte; einfache Beispiele mit Restklassen zeigen, daß eine glatte Übertragung falsch ist. Andererseits entstehen in Oberwolfach auch die Arbeiten [6] und [7], die erstere zum asymptotischen Fall, die zweite über Zusammenhänge zwischen $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$, wobei sich im Einzelfall durchaus bessere Resultate für $C(n)$ ergeben können als die für alle n gültige Abschätzung $C(n) \geq \gamma n$ durch den Satz von Mann. Es ist vielleicht schade, daß in der Folgezeit auf derartige direkte Untersuchungen der Anzahlfunktionen von A , B , C keine größeren Anstrengungen mehr unternommen wurden.

Im Herbst 1948 gelang es Ostmann, wieder an einer Universität Fuß zu fassen. Vom 1. Oktober an vertrat er den Reidemeisterschen Lehrstuhl in Marburg und wurde am 21. 4. 1950 mit 36 Jahren endlich zum Diätendozenten in Marburg ernannt. Es muß eine Erlösung für ihn gewesen sein, und er hat sich dort offenbar wohl gefühlt. Bei den Studenten erregte er Aufsehen durch seine klaren und verständlichen Vorlesungen; er war stets bereit, Fragen zu beantworten, und er dehnte seine guten Kontakte zu seinen Hörern auch auf die Freizeit bei Wanderungen oder geselligen Zusammenkünften aus. In den Beginn seiner Marburger Tätigkeit fällt eine algebraische Arbeit [8], die gleichzeitig ein Thema für seinen ersten Doktoranden H. J. Claus abwarf. Der Aufschwung in seinem Leben und sein Hang zum Systematisieren fanden ihren Niederschlag in einem Vertragsabschluß mit dem Springer-Verlag über seinen umfangreichen Ergebnisbericht [10] über „Additive Zahlentheorie“, der später nur deswegen in zwei Teilen erschien, weil der Verlag mit einem derart umfangreichen Manuskript nicht gerechnet hatte. In Zigarettendunst gehüllt, zur Wiederbelebung reichlich mit Kaffee eingedeckt, machte er sich an die Arbeit.

Am 1. 8. 1950 folgte er einem Ruf als außerordentlicher Professor an das kaum zwei Jahre alte Mathematische Institut der neugegründeten Freien Universität Berlin. Als Studenten der ersten Semester lernten wir ihn kennen. Aber es dauerte nur wenige Monate, und ich hatte zusammen mit anderen die ersten Teile

seines Ergebnisberichts zum Korrekturlesen in der Hand. Befürchtungen, man sei doch zu jung dafür, ließ er nicht gelten; spätere Beschwerden über seine nur für Experten lesbare Handschrift nahm er meckernd zur Kenntnis; nur die Leute beim Verlag nahmen ihm das Augenpulver nicht ab. Auch auf die Textgestaltung hatten wir natürlich keinen Einfluß; wir hätten ihm gern manches ausgedrückt. Sein Hang, alles mit Begriffen zu versehen und in Schubladen zu verpacken, dominierte auch in seinen Vorlesungen, die im übrigen in Berlin den gleichen Anklang fanden wie zuvor in Marburg.

In Berlin wurden die Gründe dafür noch durch die spezielle Situation verstärkt. Der erste Ordinarius des neuen Instituts war menschlich schwierig; agil und argwöhnisch zugleich, hatte er ein starkes Dominanzbestreben. Dies führte zu Konflikten im Kollegenkreis, unter denen auch Ostmann sehr gelitten hat. Die Studenten aber zog es in Scharen zu ihm, dessen private Sorgen kaum jemand kannte. Den ständig zunehmenden Ärger im Institut deckte er seiner Veranlagung entsprechend nach außen hin zu. Aber Mitte der fünfziger Jahre zeigten sich erste Hauterscheinungen, die immer unangenehmer wurden. Die Ärzte, die er in wachsender Zahl, auch auf Veranlassung seiner späteren Frau, in Berlin und Westdeutschland konsultierte, tappten im Dunkeln.

Der Ergebnisbericht wurde 1956 gedruckt; die drei Jahre vorher gelungene komplizierte Lösung des asymptotischen Problems durch M. Kneser konnte noch mit aufgenommen werden; über achthundert Literaturstellen der klassischen wie der neueren additiven Zahlentheorie wurden ausgewertet; eine Riesenarbeit war zu Ende. Die Publikation [9], die dabei mit entstand, enthält eine sinnvolle und für Ostmann bezeichnende Verallgemeinerung zweier klassischer Partitionenformeln.

Ostmann schrieb noch die Note [11] und, gemeinsam mit H. Liermann [12], das Kapitel 6 über Zahlentheorie der „Grundzüge der Mathematik“, wobei er wiederum systematisierende algebraische Gesichtspunkte stark in den Vordergrund rückte.

Im Jahre 1958 heiratete er die medizinisch-technische Assistentin Gisela Rudzki, eine Beuthenerin, die er in Oberstdorf kennengelernt und die es wie ihn nach Berlin verschlagen hatte. Am 4. 11. 1959 starb er in einem Berliner Krankenhaus; die Todesursache Lupus erythematodes hat zu spät erst der Pathologe festgestellt; seine Tochter Sabine, im März 1960 geboren, hat er nicht mehr gesehen.

Für ihre Hilfe danke ich Frau Gisela Ostmann und den Herren H. J. Claus, W. Deylitz, H.-J. Kanold, D. Reuter und E. Wirsing.

Veröffentlichungen

- [1] Über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen. Dt. Math. 5 (1940) 177–212
- [2] Beweis einer Vermutung über die asymptotische Dichte und Verschärfung einer Abschätzung über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen. Dt. Math. 6 (1941) 213–247
- [3] Gegenbeispiel zu einer Frage über Basismengen in der additiven Zahlentheorie. Crelle J. 185 (1943) 63–64
- [4] Untersuchungen über den Summenbegriff in der additiven Zahlentheorie. Math. Ann. 120 (1948) 165–196

- [5] Über die Dichten additiver komponierter Zahlenmengen. Arch. Math. **1** (1948) 393–401
- [6] Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe. Crelle J. **187** (1950) 183–188
- [7] Über die Anzahl der Elemente von Summenmengen. Crelle J. **187** (1950) 222–230
- [8] Euklidische Ringe mit eindeutiger Partialbruchzerlegung. Crelle J. **188** (1950) 150–161
- [9] Über eine Rekursionsformel in der Theorie der Partitionen. Math. Nachr. **13** (1955) 157–160
- [10] Additive Zahlentheorie I, II. Ergebnisse der Mathematik, Springer 1956
- [11] Eine Bemerkung über quasiwachsende Funktionen. Math. Nachr. **18** (1958) 127–128
- [12] Zahlentheorie (gem. mit H. Liermann). In: Grundzüge der Math. I, Kapitel 6. Vandenhoeck & Ruprecht 1958

Hierzu:

K a n o l d , H.-J.: Das wissenschaftliche Werk von Hans-Heinrich Ostmann. S.-B. Berl. Math. Ges. 1961–1964, 51–59

Bei H.-H. Ostmann angefertigte Dissertationen

- [1] H. J. C l a u s , Die Partialbruchzerlegung in nichtkommutativen Euklidischen Ringen. FU Berlin 1952
- [2] B. H o r n f e c k , Zur Struktur gewisser Primzahlsätze. FU Berlin 1954
- [3] G. B r u n s , Einige Zerlegungssätze für Filter. FU Berlin 1956
- [4] E. W i r s i n g , Über wesentliche Komponenten. FU Berlin 1956

Prof. Dr. B. Hornfeck
 Mathematisches Institut der TU
 3392 Clausthal-Zellerfeld

(Eingegangen 12. 4. 1983)



Buchbesprechungen

Davis, Ph. J., Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1981, 440 p., hardcover, DM 67,—

Der Titel des Buches läßt eigentlich die Inhaltsfrage offen. Das Vorwort beschreibt das Buch als ein Buch über die Mathematik, welches auch die Philosophie und Geschichte der Mathematik diskutiert. Das ist es eigentlich nicht. Es handelt sich hier vielmehr um ein Buch über die Mathematiker. Dieser möglicherweise unbewußte Kunstgriff der Konstruktion wird dieses Buch mit Sicherheit zu einem großen Verkaufserfolg werden lassen. Will man allerdings wirklich etwas über die Mathematik erfahren, sei es über ihre Philosophie und Geschichte, wenn man ein Mathematiker ist, sei es über Entwicklungen innerhalb der heutigen Mathematik, wenn man das Buch als interessierter Außenstehender in die Hand nimmt, so kann man leicht enttäuscht werden. An einigen Stellen könnte man sogar ärgerlich werden, nämlich immer dann, wenn das Buch Dinge anspricht, an denen es anscheinend nicht sehr interessiert ist (beispielsweise die Philosophie der Mathematik und die mathematische Grundlagenforschung). Und wenn die Autoren dann an einer solchen Stelle, wie etwa in dem 7. Kapitel „From Certainty to Fallibility“, das sich mit der Philosophie der Mathematik seit der Antike befaßt und in dem die Passagen zu Lakatos einen unverhältnismäßig großen Raum (mehr als 35% des gesamten Kapitels) einnehmen, Engagement zeigen, dann profiliert sich dieses Engagement etwas einseitig: Lakatos' Identifikation von Heuristik und Logik, von Wissensstruktur und Beweisführung in der Mathematik kann kaum als ein realistisches Bild von Mathematik oder mathematischer Tätigkeit gelten und ist auch philosophisch unhaltbar.

Aber, wie gesagt, man kann das Buch als die spontane Niederschrift des Selbstverständnisses zweier Mathematiker lesen, und unter dieser Prämisse lassen sich sowohl die Oberflächlichkeit wie das Engagement akzeptieren. Manchmal sieht es so aus, als sollte die Mathematik gegen alle angrenzenden Bereiche, Mathematik- und Wissenschaftsgeschichte, Philosophie der Mathematik und Logik, Computerwissenschaft usw. verteidigt werden. (In diesem Sinne ist auch die Subjektivität der Reaktion auf die Lösung des Vierfarbenproblems durch Appel und Haken einzuordnen.) Man lernt also etwas über die Mathematiker und dies nicht zuletzt wegen der Brillanz und Selbstironie im Abschnitt „The Ideal Mathematician“ und man bekommt schließlich auch von der Mathematik vor allem durch die Auswahl der Themen und des Materials – beides erscheint vernünftig und mutig – einen Eindruck. Die Orientierung muß man sich allerdings vollständig selbst erarbeiten. Die Bibliographie umfaßt 378 Titel von Büchern und Zeitschriftenartikeln aus den verschiedensten Zusammenhängen.

Das Buch ist insgesamt sehr ungleichmäßig, was Stil, Ausarbeitung, Akzentuierung usw. betrifft. Aber wenn es die Fülle der darin angesprochenen Probleme gleichmäßig, systematisch hätte ausarbeiten wollen, dann hätte es mit Sicherheit ein Jahrhundertwerk werden müssen. Exzellent ist der Anfang des Buches, das 1. Kapitel und Teile des 2. (*The Mathematical Landscape; Varieties of Mathematical Experience*) insgesamt etwa 50 Seiten. Aber was folgt, entspricht diesem Beginn nicht.

Bielefeld

M. Otte

Morse, M., *Selected Papers* (ed. R. Bott), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1981, XLVi + 882 p., cloth, DM 68,—

Marston Morse gehört zweifellos zu den einflußreichsten Mathematikern dieses Jahrhunderts. Er hat einem der wichtigsten Gebiete zwischen Topologie und Analysis zu allgemeiner Anerkennung verholfen, zum einen durch eigene Beiträge, zum anderen auch dadurch, daß er

während der Jahrzehnte, in denen die algebraische Topologie enorme Erfolge erzielte und andere Entwicklungen in den Schatten stellte, unbeirrt an seinen Auffassungen festhielt.

Heute weiß man, wie recht er mit seinen Meinungen hatte. Die sog. Morse Theorie ist auch in der gegenwärtigen Forschung ein fundamentales Hilfsmittel; und es scheint, daß auch heute noch nicht das in ihr liegende Potential voll erkannt, geschweige denn erschöpft ist. Dabei denke ich unter anderem an die equivariante Fassung der Theorie, deren Entstehen erst in die Zeit nach Moses Wirken fällt, wie überhaupt die größten Erfolge der Morsetheorie nicht von Morse selber stammen.

Der vorliegende Band bringt eine Auswahl aus der 176 Titel umfassende Publikationsliste. Das meiste in diesen Arbeiten ist inzwischen weiterentwickelt und besser dargestellt worden.

Die Tragweite der Grundgedanken und Methoden in manch anderer Arbeit dürfte auch heute nicht voll erkannt worden sein. In jedem Falle faßt der vorliegende Band noch einmal die größten Leistungen Moses zusammen. Die dem Band vorangestellte Würdigung des Mathematikers und Menschen Marston Morse durch R. Bott ist vorzüglich; ihre Lektüre sei jedem empfohlen, der sich für unsere Wissenschaft interessiert.

Bonn

W. Klingenberg

Beltrametti, E. G., Cassinelli, G., The Logic of Quantum Mechanics (Encyclopedia of Mathematica and its Applications, vol 15), Amsterdam: Addison-Wesley Publ. 1983, 330 p., hardbound, \$ 39,40

Zu verschiedenartigen, axiomatischen Behandlungen der Quantenmechanik haben Physiker und Mathematiker beigetragen, unter anderem Dirac, Heisenberg, Hilbert, Jordan, von Neumann und Schrödinger. Im Anschluß an eine exakte Formulierung einiger dieser Axiomensysteme entwickelte sich eine eigene mathematische Theorie, wie zum Beispiel die von-Neumann-Algebren. Eine weitere ist die „Quantenlogik“, sie ist strukturiert nach den grundlegenden verbandstheoretischen Eigenschaften der abgeschlossenen Unterräume eines Hilbertraumes und den verallgemeinerten Maßen und Wahrscheinlichkeiten auf diesen nicht-Booleschen Verbänden.

Das vorliegende Buch ist eine mit vielen physikalischen Beispielen versehene neue Version zu [2], [4], [7] und [10] und berücksichtigt den heutigen Stand der Forschung in der „Quantenlogik“. Der Titel des Buches stammt von [1], das die Entwicklung einer neuen axiomatischen Theorie, der orthomodularen Strukturen, einleitete. Analog zur intuitionistischen Logik, die durch ihre algebraischen Modelle, die distributiven Heyting-Algebren, beschrieben werden kann, wurde eine neue Klasse \mathcal{O} von universellen Algebren gesucht, welche den nicht-distributiven Hilbertraum-Kalkül der Quantenmechanik widerspiegelt.

Ihrem physikalischen Ursprung verdankt diese neue Theorie, daß auch heute noch Physiker, Mathematiker und Philosophen hierüber publizieren. Das vorliegende Buch ist von Physikern geschrieben und enthält demgemäß viele Motivationen und schöne Beispiele aus der Physik, die ein Diplomphysikstudent verstehen kann. Bei Beweisen zu mathematischen Sätzen wird in vier von fünf Fällen auf die Originalliteratur verwiesen.

Grundlegend für \mathcal{O} ist eine Orthogonalitäts- und eine nichtdistributive Ordnungsstruktur

$$(*) \quad P \leq \mathcal{O} \text{ impliziert } P \vee (P^\perp \wedge Q) = P + (Q - P) = Q,$$

die Projektionsoperatoren P, Q in einem Hilbertraum besitzen.

Der zweite Teil des Buches behandelt die zugehörige axiomatische Theorie, – Kapitel 9 kann als eine Einführung angesehen werden. An Worten wird gelegentlich Nichtdefiniertes verwendet, bei einigen Behauptungen fehlen die korrekten Voraussetzungen (S. 109, 127, 157 etc.)

und unvollständig in der Literatur Bewiesenes wird manchmal als Resultat angegeben (S. 115, 151, 174 etc.). Zitate sind nicht immer zuverlässig, so wäre in 17.3 eine Referenz auf [5] adäquat. Die Begeisterung über diverse und simplifizierte Axiomensysteme, aus deren einfachen Annahmen eine mathematische Theorie aufgebaut werden kann oder könnte, ist oft nicht angebracht: Außerhalb der Theorie der C^* -, W^* -Algebren, der orthomodularen Theorie und der verallgemeinerten Wahrscheinlichkeitstheorie sind keine substantiellen Ergebnisse vorhanden. In diesem Sinne wirkt auch Kapitel 21, Teil III des Buches zu optimistisch, – die Hilbertraumcharakterisierung in \mathcal{O} ist nicht abgeschlossen. Die Rückverweise und Beispiele zur Quantenmechanik in Teil I und III sind meistens auf Ein-Teilchensysteme bezogen und für den Mathematiker sehr nützlich, für einen Physikstudenten möglicherweise zu formal mathematisch.

Insgesamt finde ich das Buch mit den Trends: physikalisch Beispiel-orientiert, mathematisch Ergebnis- (aber nicht Beweis)-orientiert eine gut leserliche, jedoch nicht immer zuverlässige Darstellung der „Quantenlogik“ mit ihren neuesten Entwicklungen.

Literatur

- [1] Birkhoff, G.; von Neumann, J.: The logic of quantum mechanics. Ann. of Math. 37 (1936) 823–843
- [2] Gudder, S. P.: Stochastic methods in quantum mechanics. Amsterdam: North-Holland 1979
- [3] Hilbert, D.; von Neumann, J.; Nordheim, L.: Über die Grundlagen der Quantenmechanik. Math. Ann. 98 (1927) 1–30
- [4] Jauch, J. M.: Foundations of quantum mechanics. Reading: Addison-Wesley 1968
- [5] Jónsson, B.: Lattice-theoretic approach to projective and affine geometry. In: The axiomatic method, Proc. Int. Symp., L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski (eds) Amsterdam: North-Holland 1959, 188–203
- [6] Kalmbach, G.: Orthomodular lattices. London: Academic Press 1983
- [7] Mackey, G. W.: Mathematical foundations of quantum mechanics. New York: Benjamin 1977
- [8] Maeda, S.: Lattice theory and quantum logic. (Japanisch) Tokio: Maki-shoten 1980
- [9] von Neumann, J.: On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism (Part I). Mat. Sb. 43 N.S. 1 (1936) 415–484
- [10] Varadarajan, V. S.: Geometry of quantum theory I, II. New York: Van Nostrand 1968, 1970.

Ulm

G. Kalmbach

Lutz, R., Goze, M., Nonstandard Analysis. A Practical Guide with Applications (Lecture Notes in Mathematics, 881), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1981, VIII + 261 p., DM 29,–

Richter, M. M., Ideale Punkte, Monaden und Nichtstandard-Methoden, Braunschweig – Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn 1982, VII + 264 S., paper, DM 48,–

Die beiden Bücher geben, jedes auf seine Weise, sehr brauchbare Einführungen in die Nichtstandard-Methode, die an verschiedenen Gebieten der Mathematik und ihrer Anwendungen erläutert wird.

Dem Leser möchte ich empfehlen, irgendwo in der Mitte eines der Bücher bei einem Thema mit der Lektüre zu beginnen, welches ihn interessiert. Man braucht dazu im Grunde nur zu wissen, daß für unendlich große Zahlen alles richtig ist, was für sehr große endliche natürliche Zahlen „standard“ richtig ist, und man braucht noch das eine oder andere Lemma vom folgenden Typ (Robinson): Eine interne Folge (das ist, grob gesprochen, eine solche, die sich formelmäßig hinschreiben läßt), welche für endliche Indizes stets infinitesimale Werte annimmt, hat diese Eigenschaft auch noch für gewisse unendlich große Indizes.

Diese Grundlage reicht zunächst aus, um die schönen konkreten Probleme, vor allem über Störungen, im letzten Kapitel des Texts von Lutz-Goze zu verfolgen. Hier findet man Texte zu 15 Vorlesungen mit Titeln wie „Perturbations of algebraic equations“, „Perturbations of Lie algebra structures“, „Slow-fast flows in the plane“, „Forced layers in a non autonomous problem“, und natürlich das Lieblingsthema der Straßburger Schule um Georges Reeb, „Canards“. In unserem Seminar haben sich diese Texte sehr gut bewährt, im Anschluß an eine einführende Vorlesung. Der Text ist so lebendig geschrieben, daß man manche – leicht zu behebende – Ungenauigkeit gern verzeiht.

Richter zeigt, daß die Methode nicht auf die Analysis beschränkt ist, sondern daß die allgemeinere Auffassung (ideale Elemente) es erlaubt, verschiedene Problemkreise durchsichtiger zu behandeln: Galois-Theorie, Bewertungen, Kompaktifizierung, Sätze von Arrow und Fishburn über soziale Funktionen. Die Analysis, besonders die Distributionstheorie, kommt auch nicht zu kurz. Die Darstellung ist sehr sorgfältig, aber gut lesbar.

Wie aber steht es mit der Begründung der Methode? Beide Bücher verwenden dafür sehr viel Raum und leisten in dieser Hinsicht mehr, als für die in ihnen gegebenen Anwendungen erforderlich wäre. In Übereinstimmung mit dem gegenwärtigen Trend werden die Axiomatik der hyperreellen Zahlen nach Keisler und der internen Mengen nach Nelson herausgestellt. Der Zugang über die Logik und die Modelle fehlen, mit verschiedener Gewichtung, auch nicht. Das abschließende Kapitel bei Richter, Mathematische Logik und Grundlagenfragen, 45 S., ist bewundernswert vollständig.

Hält man irgendwo einen Vortrag über Nichtstandard-Mathematik, so kommt unweigerlich die Frage in der Diskussion, was denn ein neues Resultat sei? Antwortet man ehrlich, daß man keines vorzuweisen habe und daß ja auch jeder nichtstandard-Beweis in einen standard-Beweis zu übersetzen sei, so gibt es Enttäuschung. Die Antwort geht aber weiter: Beispiele wie bei Lutz und Goze zur Analysis lassen sich in der Standard-Analysis praktisch kaum bewältigen, weil alles viel zu umfangreich wird; man braucht viele Grenzübergänge und Koordinatentransformationen während dieser Übergänge, und das läßt sich infinitesimalmathematisch einfacher formulieren. Ich empfehle dem Leser, das eine oder andere Kapitel der beiden Bücher in die Standard-Sprache zu übersetzen und dann, nach dieser Übung, ein Kapitel seines eigenen Gebiets einmal nichtstandard zu beschreiben.

Darmstadt

D. Laugwitz

Lützen, J., *The Prehistory of the Theory of Distributions* (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol 7), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, viii + 232 p, cloth, DM 118,–

Der Verfasser nennt zwar sein Buch „Prehistory“ aber – wie sollte es wohl anders sein – im Mittelpunkt stehen doch die L. Schwartzschen Distributionen. Um es gleich vorweg zu sagen, ich empfand das Kapitel 6 als besonders interessant, man findet dort die Wiedergabe eines Interviews, das dem Verfasser 1978 von Laurent Schwartz gewährt wurde (auch kann man dort Teile der wiss. Autobiographie von L. Schwartz, 1974 nachlesen). Im Lichte dieses Interviews erhalten auch die Thesen des vorliegenden Buches ihre besondere Beleuchtung: ich beginne mit dem Motto. Als Motto dient ein Zitat von Grabiner 1975 „The historian’s basic questions, . . . are: What was the past like? and, How did the present come to be? The second question . . . is the central one in the history of mathematics.“

How did the present come to be? Um diese Frage zu beantworten, reiht der Verfasser eine Fülle von mathematischen Problemstellungen und Theorien aneinander (dialektische Methode, siehe S. 14); so greift er zurück auf die Diskussion der Saitengleichung durch d’Alembert, Euler, Lagrange und Arbogast, er behandelt frühe Versuche, den Funktions- und Ableitungsbe-

griff zu verallgemeinern (Fouriersche Reihen, Variationsrechnung, Dirichlets Prinzip, Potentialtheorie, hyperbolische partielle Differentialgleichungen, das Cauchyproblem), er studiert Bochners Arbeiten zur Verallgemeinerung der Fouriertransformation (Kapitel 3), er befaßt sich mit den Arbeiten von Friedrichs, Schauder, Sobolev u. a. über die W -Räume und ihre Funktionale, er diskutiert Versuche, in Verbindung mit der Greenschen Funktion die Fundamentallösung einer Differentialgleichung exakt zu fassen, er erwähnt das „partie finie“ von Hadamard, den Heavisidekalkül, den Gebrauch der δ -Funktion (und anderer) durch die Physiker – alle diese Theorien hätten zur L. Schwartzschen Distributionstheorie (= the present) hinführen können. Laurent Schwartz lebt, wir können ihn fragen, ob dem so war, seine Antwort: Nein (Interview 1978). L. Schwartz befaßte sich 1944 mit einem funktionalanalytischen Approximationsproblem, dessen Lösung zu einer verallgemeinerten Lösung einer partiellen Differentialgleichung führte (siehe S. 150 u. w.). Um diese verallgemeinerte Lösung besser in den Griff zu bekommen, benutzte L. Schwartz zuerst die Convolution und faßte die verallgemeinerten Funktionen als Operatoren auf, Oktober 1944 (siehe S. 152); die Convolution war aber für Definitionszwecke (besonders der Fouriertransformation) schwierig zu handhaben, und nachdem sich L. Schwartz ein halbes Jahr lang mit der Convolution abgemüht hatte, kam ihm im April 1945 der Einfall, Distributionen als Funktionale aufzufassen. Da L. Schwartz mit der Dualraumtheorie (lokkonvexer Räume) wohl vertraut war, ging die weitere Entwicklung der Distributionen so rapide vor sich, daß er schon im Winter 1945/46 eine breite Vortragsreihe am Collège de France in Paris anbieten konnte.

Um wieder auf das vorliegende Buch „The Prehistory . . .“ zurückzukommen, der Verfasser benutzt in seinen Darlegungen recht häufig den Begriff der „Motivierung“, ich zitiere eine Stelle S. 10 „The problems and theories which motivated the theory of distributions and which would have given rise to a theory of generalized functions, even without the theory of duality, arose, not in functional analysis, but in concrete analysis and mathematical physics“. Gemäß dem Interview 1978 erscheinen alle diese „Motivierungen“ als völlig bedeutungslos (siehe oben); erst als die Distributionstheorie fertig war, erfuhr L. Schwartz von seinen Zuhörern am Collège de France (1946), daß man die Distributionen im Heavisidekalkül für die Elektrotechnik und Physik verwenden kann, und daß er in der „konkreten Analysis“ Vorgänger in Bochner, Carleman u. a. hatte, die u. a. versucht hatten die Fouriertransformation breiter zu fassen (siehe S. 156).

Kiel

J. Wloka

Dieudonné, J., Grundzüge der modernen Analysis, Band 7 (Logik und Grundlagen der Mathematik, Bd. 23), Wiesbaden: Vieweg Verlag 1982, 314 S., gbd., DM 68,—

Der Band 7 enthält den ersten Teil des 23. Kapitels (= Lineare Funktionalgleichungen) im Rahmen des Gesamtwerkes und handelt von der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren. Mit anderen Worten, hier werden die wesentlichen Begriffe und Werkzeuge vor- und bereitgestellt, mit welchen in den letzten Jahren ein großartiger Fortschritt auf dem Gebiete der linearen partiellen Differentialgleichungen erzielt werden konnte. Der Philosophie von der Überlegenheit der Integration gegenüber der Differentiation folgend, beginnt der Autor mit der Beschreibung und Untersuchung linearer Integraloperatoren, insbesondere Carlemanscher und Volterrascher Operatoren. Mit Blick auf die späteren Anwendungen werden die einschlägigen Begriffe in einem recht allgemeinen Rahmen eingeführt. Der nächste Abschnitt ist dem Schwartzschen Kern-Satz gewidmet. Es folgt ein Abriss (16 Seiten) der Theorie der Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten, in dessen Zentrum natürlich die Existenz von Elementarlösungen (= Fundamentallösungen) steht. Nach der Behandlung von Operatorsymbolen und oszillierenden Integralen führt der Autor den Begriff des Lax-Maslowschen Operators (meist Fourierscher Integralopera-

tor genannt) ein. Durch Spezialisieren kommt er dann zum Begriff des Pseudodifferentialoperators. Der Rest des Buches (ziemlich genau die Hälfte) befaßt sich mit dem Studium dieser Operatoren. Neben allgemeinen Betrachtungen (z. B. über das Symbol, über die Zusammensetzung, über die Bildung des Adjungierten) stehen hier die elliptischen Operatoren (auch auf Mannigfaltigkeiten) im Vordergrund, insbesondere die Konstruktion einer Parametrix und die Spektraltheorie hermitescher elliptischer Operatoren mit den sich daraus ergebenden Anwendungen. Das Buch endet mit einem Abschnitt über invariante Differentialoperatoren auf homogenen Räumen; speziell werden die Kugelfunktionen auf der Sphäre behandelt.

Wie in den anderen Bänden dieses Werkes gibt es auch hier eine ganze Reihe von Übungsaufgaben, die von recht unterschiedlichem Kaliber sind. Teils schließen sie sich eng an den vorher behandelten Stoff an, teils enthalten sie wirklich neuen Stoff wie beispielsweise die Ungleichungen von Kato und Calderón-Vaillancourt oder auch die Theorie der Huntschen Operatoren, die in eine Serie von Aufgaben verpackt ist.

Das Buch ist sehr klar geschrieben, manchmal sogar, wenn man so will, etwas zu klar, da beispielsweise die konsequent durchgehaltene Unterscheidung zwischen einer meßbaren Funktion und ihrer Äquivalenzklasse in einem L^p -Raum gelegentlich zu akrobatischen Formulierungen wie etwa der folgenden (S. 261) führt: „Wie wir in (23.33.3) gesehen haben, ist $\text{dom}(A)$ das Bild des aus den Klassen der Funktionen $g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{3n})$, für welche die Funktion $\xi \rightarrow |\xi|^4 |g(\xi)|^2$ integrierbar ist, bestehenden Teilraumes E von $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{3n})$ vermöge der Fouriertransformation.“

Einen solchen Band eines größeren Ganzen darf man nicht isoliert betrachten, sondern muß ihn im Rahmen des Gesamtprojektes sehen. Nach meiner Auffassung ist das Werk hervorragend zur Wiederholung und Vertiefung von Stoff geeignet, der bruchstückhaft bereits bekannt ist, um dabei eine Gesamtsicht der modernen reellen Analysis zu entwickeln. Es ist schon beeindruckend, die wechselseitigen Verflechtungen der verschiedenen Disziplinen der Analysis in einem einzigen Werk niedergelegt zu sehen. Auch zum Nachschlagen dieses oder jenes Begriffes eignet es sich vorzüglich, findet man doch hier alle wesentlichen Werkzeuge der modernen reellen Analysis bereitgestellt, und zwar blankgeputzt, geordnet und sortiert.

Bielefeld

D. Poguntke

Kubert, D. S., Lang, S., Modular Units (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 224), New York – Heidelberg – Berlin: Springer Verlag 1981, xiii + 358 p., cloth, DM 98,—

Modulare Einheiten der Stufe N sind Modulfunktionen der Stufe N , die auf der oberen Halbebene der komplexen Zahlen keine Null- und Polstellen haben. Die „generische“ Theorie dieser modularen Einheiten, eine explizite Beschreibung dieser Einheiten als Potenzen von Siegfunktionen (vgl. Kap. 2, § 1) und damit zusammenhängend, die Bestimmung der Ordnung der Klassengruppe, die von den „Spitzendivisoren“ erzeugt wird, wurden von D. Kubert und S. Lang in einer Serie von Arbeiten (K-L 1 bis K-L 13 im Literaturverzeichnis des vorliegenden Buches) entwickelt. Diese Arbeiten und die Spezialisierung der generischen Theorie auf Tate-Kurven und elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation (dies führt zur Theorie der elliptischen Einheiten nach G. Robert) sind der Inhalt des Buches von Kubert-Lang, außerdem findet man (in Kap. 8) hübsche Anwendungen auf diophantische Probleme, die mit Torsionspunkten elliptischer Kurven bzw. den Torsionseigenschaften von Spitzendivisorclassen zusammenhängen.

Ein sehr wichtiger Aspekt der Theorie sind die formalen und inhaltlichen Gemeinsamkeiten mit der Theorie der Einheiten und Klassengruppen in Kreisteilungskörpern; die Tiefe dieser Zusammenhänge kann man erahnen, wenn man z. B. an die Arbeit von J. Coates und A. Wiles über die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer bei elliptischen Kurven mit komplexer Mul-

tiplikation (Invent. Math. 39) und vor allem an das erfolgreiche Verknüpfen von Ideen aus dem Bereich der Modulfunktionen (Eisensteinideal) mit der Theorie der Kreisteilungskörper nach Iwasawa, das zum Beweis der Hauptvermutung über ℓ -adische L-Reihen führt, denkt. (B. Mazur und A. Wiles: Class fields of Abelian Extension of \mathbb{Q} (erscheint).) Dieser Zusammenhang wird in dem Buch von Kubert-Lang systematisch herausgearbeitet, z. B. durch eine formale algebraische Theorie von Distributionen auf toroidalen Gruppen, insbesondere durch die Einführung von „Stickelberger-Distributionen“ im 1. Kapitel und den Anwendungen auf „Stickelberger-ideale und Stickelberger-elemente“ im 5. Kapitel.

Das Studium der modularen Einheiten hat sich bereits als außerordentlich wichtig und anregend auf dem Gebiet der Zahlentheorie erwiesen; man kann erwarten, daß dies durch die Behandlung, wie sie von Kubert-Lang vorgeführt wird, noch wesentlich verstärkt wird. Es ist also sehr zu begrüßen, daß der Zugang zu den verschiedenen Originalarbeiten durch die zusammenhängende Darstellung in Buchform bequemer gemacht wurde; eine etwas abgerundete Darstellung hätte diesen Effekt zweifellos aber noch verstärken können.

Saarbrücken

G. Frey

Freitag, E., Siegelsche Modulfunktionen (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 254), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1983, x + 341 S., gbd., DM 168,—

Vor fast 50 Jahren entdeckte C. L. Siegel bei seinen Untersuchungen über quadratische Formen jene heute nach ihm benannten Modulfunktionen in mehreren Variablen. Das vorliegende Buch ist das erste, das den genauen Titel „Siegelsche Modulfunktionen“ trägt. Bislang gab es lediglich diverse Vorlesungsausarbeitungen oder umfassendere Darstellungen wie etwa das Buch von W. L. Baily, *Introductory lectures on automorphic forms*.

Das Buch beginnt mit Thetareihen zu positiv definiten quadratischen Formen. Damit wird die Bedeutung dieser Reihen für die Theorie der Modulformen von Anfang an herausgestellt. Das erste Kapitel behandelt dann zunächst die bekannte Operation der symplektischen Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ auf dem Siegelschen Halbraum H_n und die Einführung der Modulgruppe $\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$ vom Grade n . Auch die modernere Interpretation von H_n als Restklassenraum von $Sp(n, \mathbb{R})$ nach einer kompakten Untergruppe wird erwähnt. Es folgt die Konstruktion des Siegelschen Fundamentalbereichs, wobei aber die wichtigen Endlichkeitsaussagen (es handelt sich um Fundamentalmengen) auf das zweite Kapitel verschoben werden. Anschließend werden grundlegende Sätze gezeigt: Koecherprinzip, ϕ -Operator, Abschätzung der Dimension der Schar der Modulformen vom Grade n und Gewicht k durch $0(k - \frac{n(n+1)}{2})$, algebraische Abhängigkeit von je $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ Modulformen beliebigen Gewichts. Auch neuere diesbezügliche Untersuchungen von M. Eichler finden Berücksichtigung. Das erste Kapitel endet mit der Behandlung von Poincaréschen und Eisensteinschen Reihen. Erstere stellen stets Spitzenformen dar und sind besonders geeignet zum Nachweis der Punktentrennungseigenschaft, so daß sich der Körper der Modulfunktionen als algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $n(n+1)/2$ ergibt. Eisensteinsche Reihen beschreiben das Liften von Modulformen in wenigen Variablen zu solchen in vielen Variablen bezüglich des ϕ -Operators; insbesondere ergibt sich die Surjektivität des ϕ -Operators für große Gewichte $k > 2n$.

Das zweite Kapitel behandelt die Satakekompaktifizierung von H_n/Γ_n zu einem kompakten normalen Raum vom Typ

$$\overline{H_n/\Gamma_n} = H_n/\Gamma_n \dot{\cup} H_{n-1}/\Gamma_{n-1} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} H_0/\Gamma_0.$$

Nach W. L. Baily kann dieser Raum mit der Struktur einer projektiv algebraischen Varietät ver-

sehen werden. Die Hauptanwendungen der Kompaktifizierungstheorie betreffen erstens die Darstellung jeder meromorphen Γ_n -invarianten Funktion auf H_n als Quotient von Modulformen ($n > 1$) und zweitens die endliche Erzeugbarkeit des graduierten Rings aller Modulformen beliebigen Gewichts. Das erste Resultat ist auch ohne Kompaktifizierung beweisbar, das zweite dagegen bislang nicht.

Der Inhalt des dritten Kapitels betrifft Strukturaussagen über den Körper der Siegelischen Modulfunktionen. Dieser Teil des Buches ist stark geprägt von der eigenen Arbeitsrichtung des Autors. Zunächst wird die Rationalität des Funktionenkörpers für $n = 1$ und 2 elementar bewiesen; die weiteren Resultate betreffen die Nichtrationalität der Funktionenkörper. Ist K ein algebraischer Funktionenkörper, so existiert ein normales projektives Modell X von K . Die Dimension des Vektorraumes der quadratintegrierbaren holomorphen N -Formen ($N = \dim X$) auf dem regulären Ort von X ist eine erste Invariante $g_N(K)$ von K , welche im Falle der Rationalität verschwinden muß. Für die Siegelischen Modulfunktionen vom Grade n ($N = n(n+1)/2$) stimmt $g_N(K)$ überein mit der Dimension des Vektorraumes der Spitzenformen vom Gewicht $n+1$. Wenn also eine nichttriviale Spitzenform vom Gewicht $n+1$ existiert, so kann der Körper der Siegelischen Modulfunktionen nicht rational sein. Dieser Fall liegt vor für $n \equiv 0 \pmod{24}$; die betreffenden Spitzenformen werden aus Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten konstruiert. – Weitere Invarianten bekommt man mittels holomorpher Tensoren auf dem regulären Ort von X . Der Verfasser legt Wert darauf, die Hironakasche Desingularisierungstheorie zu vermeiden und fordert stattdessen gewisse Fortsetzungseigenschaften von den Tensoren. Mit Hilfe dieser Invarianten wird gezeigt, daß die Siegelischen Funktionenkörper zu Hauptkongruenzgruppen genügend hoher Stufe sogar von allgemeinem Typ sind. – Es ist besonders verdienstvoll, daß der Autor in einem Anhang zu § 5 die Skizze eines „elementaren“ neuen Beweises für jenes wichtige Resultat von Y. Tai aus jüngster Zeit aufgenommen hat, wonach die Siegelischen Funktionenkörper für jeden Grad $n \geq 9$ (sogar $n \geq 8$) von allgemeinem Typ sind. – Das Kapitel endet mit dem Nachweis der Nichtrationalität des Körpers der Siegelischen Modulfunktionen für $n \equiv 1 \pmod{8}$ ($n > 9$) nach einem relativ frühen Vorgehen des Verfassers.

Im letzten Kapitel wird Heckes Theorie für die Siegelischen Modulfunktionen entwickelt. Die Heckealgebra ist kommutativ, es werden Strukturuntersuchungen angestellt und das Gesetz für die Vertauschung von Heckeoperatoren mit dem Siegelischen ϕ -Operator hergeleitet. Für die Schar der Modulformen festen Gewichts gibt es stets Basen von Eigenformen aller Heckeoperatoren. Die Wirkung der Heckeoperatoren auf Thetareihen läßt sich explizit beschreiben. Für kleine Gewichte ($k < n/2$) ist nämlich jede Modulform als Linearkombination von Thetareihen darstellbar (Darstellungssatz für singuläre Modulformen), woraus explizite Formeln hergeleitet werden können. Der Fall großer Gewichte läßt sich vermöge des ϕ -Operators und des Vertauschungsgesetzes auf diesen Spezialfall zurückführen. – Das Buch endet mit einem Beweis des Siegelischen Hauptsatzes (in Spezialfällen) aus der Theorie der quadratischen Formen, der auf Andrianov zurückgeht. Die analytische Version des Siegelischen Hauptsatzes ist eine Identität zwischen Eisensteinreihen auf der einen Seite und einer Linearkombination von Thetareihen auf der anderen Seite. Die Gleichheit wird gefolgert aus der Tatsache, daß beide Objekte Eigenfunktionen von Heckeoperatoren und die zugehörigen Eigenräume eindimensional sind.

Es gibt insgesamt sechs Anhänge, von denen derjenige über „Singuläre Gewichte“ besonders empfehlenswert ist. Das Literaturverzeichnis deckt nur einen Teil der benutzten Originalliteratur ab. Als nützliche Ergänzung der Literatur bis ca. 1970 kann das umfangreiche Verzeichnis in C. L. Siegel, *Topics in complex function theory*, Vol. III dienen.

Das Buch erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Nach meinen Erfahrungen ist der Stoff des ersten und des letzten Kapitels geeignet für Studenten höherer Semester. Die beiden mittleren Kapitel könnten Gegenstand von Seminaren und Arbeitsgemeinschaften sein. So stellt das Buch sowohl für Studenten als auch für die in der Forschung tätigen Wissenschaftler eine wertvolle Bereicherung der mathematischen Fachliteratur dar.

James, G. and Kerber, A., *The Representation Theory of the Symmetric Group* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol.16), Reading, Mass.: Addison-Wesley 1981, 510 pp., hardbound \$ 44.50

Dieses Buch gibt einen systematischen und fast vollständigen Überblick über die bis jetzt erzielten Ergebnisse und Beweismethoden in der Theorie der gewöhnlichen und der modularen Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen. Darüber hinaus werden die Beziehungen zur Darstellungstheorie der alternierenden Gruppen, der generellen linearen Gruppen und der Kranzprodukte endlicher Gruppen behandelt. Da die Weyl-Gruppen der endlichen, nicht exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ symmetrische Gruppen bzw. Kranzprodukte sind, stellt dieses Werk auch wichtige Grundlagen für das zur Zeit in rascher Entwicklung begriffene Arbeitsgebiet der Darstellungstheorie endlicher Chevalley-Gruppen bereit.

Das Buch ist in 8 Kapitel und 2 Anhänge gegliedert. In Kapitel 1 „Symmetric groups and their Young subgroups“ werden die gruppentheoretischen und kombinatorischen Grundlagen für die in Kapitel 2 durchgeführte Klassifikation der irreduziblen gewöhnlichen Darstellungen der symmetrischen und alternierenden Gruppen behandelt. Im Falle der symmetrischen Gruppen werden im Kapitel 3 die Matrix-Darstellungen der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere angegeben. Dabei wird die auf A. Young zurückgehende direkte Zerlegung der Gruppenalgebra QS_n in einfache Linksideale verwendet. Wenn auch die Ergebnisse dieser drei Kapitel zum klassischen Bestandteil der behandelten Theorie gehören, so sind die hier dargestellten Beweise doch oft neu. Insbesondere trifft dies für die tiefliegende Littlewood-Richardson Regel und die Rekursionsformel von Murnaghan-Nakayama für die Berechnung der irreduziblen Charaktere der symmetrischen Gruppe S_n zu. Nicht alle benutzten Sätze aus der Kombinatorik werden bewiesen, wie z. B. der Satz von Gale und Ryser. Stets wird dann jedoch ein hilfreicher Literaturhinweis gegeben.

Als erste Anwendung der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe S_n wird in Kapitel 4 die Darstellungstheorie der Kranzprodukte $G2S_n$ endlicher Gruppen G mit S_n behandelt. Bei den Beweisen spielt auch die Clifford'sche Theorie der Induktion von Darstellungen eines Normalteilers zu Darstellungen der ganzen Gruppe eine wesentliche Rolle; es wird vorausgesetzt, daß der Leser hiermit vertraut ist.

Weitere Anwendungen der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe S_n in der Kombinatorik, Ringtheorie, Gruppentheorie und der Theorie der mehrfach transitiven Permutationsgruppen behandelt das Kapitel 5. Neben der Abzähltheorie von Polya sei der grundlegende Satz von Amitsur und Levitzki hier erwähnt, der besagt, daß ein $n \times n$ -Matrizenring über einem kommutativen Körper die Standard-Identität vom Grade $2n$ erfüllt. Die Theorie der Ringe, die einer Polynomidentität genügen, ist zur Zeit in rascher Entwicklung begriffen. Die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe liefert dabei äußerst hilfreiche Beweismethoden.

Im Kapitel 6 werden die modularen Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n behandelt, und zwar unter Voraussetzung der von R. Brauer begründeten allgemeinen modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Da alle benötigten Ergebnisse ausführlich im 1982 erschienenen, grundlegenden Werk „The representation theory of finite groups“ von W. Feit (Yale University) dargestellt werden, ist die von den Autoren in diesem Kapitel gewählte Darstellung für den interessierten Leser des vorliegenden Buches kein echtes Hindernis. Mittels des Brauerschen zweiten Hauptsatzes der Blocktheorie wird der auf Brauer und Robinson zurückgehende Satz über die Lösung der Nakayama Vermutung bewiesen, wodurch die Einteilung der irreduziblen Charaktere der S_n in die p -Blöcke rein kombinatorisch beschrieben wird. Darüber hinaus enthält dieses Kapitel wichtige Sätze über die Zerlegungszahlen, die verallgemeinerten Zerlegungszahlen und die Struktur der Defektgruppen eines p -Blocks der S_n . Schließlich werden effektive Methoden für die praktische Berechnung der Zerlegungszahlen angegeben.

Im Kapitel 7 „Representation theory of S_n over an arbitrary field“ wird die Theorie der Specht-Moduln dargestellt, die sowohl in der gewöhnlichen als auch in der modularen Darstellungstheorie der S_n eine wichtige Rolle spielt.

Kapitel 8 ist der Darstellungstheorie der generellen linearen Gruppe $G = GL(n, K)$ über einem Körper K gewidmet. Als Analogon zu den Specht-Moduln der S_n werden zunächst die Weyl-Moduln der $GL(n, K)$ eingeführt, deren Bedeutung zuerst Carter und Lusztig erkannt hatten. Mit ihnen werden die irreduziblen KG -Moduln konstruiert. Die wichtigsten, neueren Beiträge von Carter-Lusztig und James über die Darstellungstheorie der $GL(n, K)$ werden dann in diesem Kapitel vollständig bewiesen.

An dieses letzte Kapitel schließt sich ein über hundert Seiten langer Anhang mit vielen numerischen Ergebnissen an. So sind die Charaktertafeln der S_n für $n \leq 10$, die Klassenmultiplikationskoeffizienten bis zur S_8 , die 2-Zerlegungszahlen und die 3-Zerlegungszahlen der S_n für $n \leq 13$, sowie viele Beispiele zur Berechnung der irreduziblen Brauer-Charaktere, der Zerlegung von Tensorprodukten von Darstellungen und der Littlewood-Richardson Koeffizienten angegeben.

Der zweite Anhang enthält ausführliche Quellenangaben. Von großem Wert ist auch das sehr umfangreiche Literaturverzeichnis. Jedes Kapitel enthält am Ende Übungsaufgaben.

Die beiden Autoren haben mit dem vorliegenden Lehr- und Handbuch über die Darstellungstheorie der symmetrischen und generellen linearen Gruppen einen wichtigen Beitrag zum Buchbestand der konkreten Mathematik geliefert. In Anbetracht der vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten des behandelten Stoffes wird dieses Werk nicht nur Leser bei den Algebraikern finden.

Essen

G. Michler

Klemm, M., Symmetrien von Ornamenten und Kristallen (Hochschultext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, vii + 214 S., geheftet, DM 36,-

Laut Vorwort behandelt das vorliegende Buch die Theorie der diskreten Bewegungsgruppen in Euklidischen Räumen beliebiger Dimension und hat insbesondere die Herleitung der zwei- und dreidimensionalen Raumgruppen zum Ziel. Es ist als Proseminartext oder Begleitbuch zu einer Vorlesung gedacht.

Die historische Entwicklung der mathematischen Kristallographie bis 1950, welche die Stoffauswahl des Buches ungefähr abgrenzt, erlebte ihren ersten Höhepunkt mit der Klassifikation der diskreten Bewegungsgruppen mit beschränktem Fundamentalbereich des dreidimensionalen Euklidischen Raumes, kurz der dreidimensionalen Raumgruppen, durch Fedorow und Schoenflies (1890/91). Angeregt durch die Endlichkeit dieser Klassifikation formulierte Hilbert in Problem 18 seines berühmten Pariser Vortrags 1900 die Frage, „ob es auch im n -dimensionalen Euklidischen Raume nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit (beschränktem) Fundamentalbereich gibt“. Bereits 10 Jahre später beantwortete Bieberbach diese Frage positiv, wobei er Isomorphie als Äquivalenzbegriff zugrundelegte. Der wesentliche Schritt seines Beweises war der Nachweis, daß eine n -dimensionale Raumgruppe n linear abhängige Translationen enthält. Hieraus ergibt sich die gruppentheoretische Struktur einer Raumgruppe als Erweiterung einer endlich erzeugten frei abelschen Gruppe T mit einer endlichen Gruppe G , die treu auf T operiert. Daher konnte Bieberbach seine Endlichkeitsaussage auf den Satz von Jordan (-Zassenhaus) zurückführen, daß die volle unimodulare Gruppe $GL_n(\mathbb{Z})$ (aller ganzzahliger $n \times n$ -Matrizen mit Determinante ± 1) nur endlich viele Konjugiertenklassen endlicher Untergruppen hat. Frobenius wandte ein, daß Konjugation unter der vollen affinen Gruppe statt Isomorphie das angemessene Klassifikationsprinzip sei und wies die Endlichkeit dieser Klassifikation nach. In Beantwortung dieses Einwandes zeigte Bieberbach, daß ein Isomorphismus von Raumgruppen immer durch Konjugation mit einer affinen Abbildung induziert wird. 1948 entwickelte Zassenhaus Frobenius' Analyse weiter zu einem Algorithmus, welcher ausgehend von einem Vertretersystem der Konjugiertenklassen der endlichen

Untergruppen von $GL_n(\mathbf{Z})$ und von Erzeugendensystemen der Normalisatoren dieser Gruppen ein Vertretersystem der affinen Klassen der n -dimensionalen Raumgruppen liefert. Der Zassenhausalgorithmus reduziert das auftretende Erweiterungsproblem im wesentlichen auf das Lösen von linearen Kongruenzen. Die endliche Erzeugbarkeit des Normalisators einer endlichen Untergruppe von $GL_n(\mathbf{Z})$ ergibt sich aus einem Satz von Siegel aus dem Jahre 1943, sie bereitet jedoch keine Schwierigkeiten für $n = 3$, da die auftretenden unendlichen Normalisatoren wohlbekannte Gruppen sind. Ebenso gibt es leicht zugängliche geometrische oder algebraische Möglichkeiten die Konjugiertenklassen der endlichen Untergruppen von $GL_n(\mathbf{Z})$ für $n = 3$ herzuleiten. In den letzten Jahren sind Methoden entwickelt worden, die auch noch für größere n zum Ziele führen.

Es ist didaktisch geschickter, diesen historischen Werdegang nicht in seiner zeitlichen Reihenfolge nachzuvollziehen, sondern Raumgruppen zunächst so zu definieren, daß sie genügend viele Translationen enthalten. Dieses Konzept wird im vorliegenden Buch ein Stück weit verfolgt: Nach heuristischer Diskussion der Fries- und Flächengruppen in der Einleitung, werden in § 1 einfache Eigenschaften von Bewegungen diskutiert, in § 2 werden Gitter und in § 3 werden schließlich Raumgruppen in der eben skizzierten Weise eingeführt. Es folgt der recht technische § 4 über die Bieberbach-Frobeniussche Theorie diskreter Euklidischer Bewegungsgruppen, welcher mit der Bieberbachschen Charakterisierung von Raumgruppen endet. Auf die Rolle der Raumgruppen als Bausteine für allgemeine diskrete Euklidische Bewegungsgruppen wird weder hier noch später eingegangen. Dem unerfahrenen Leser hätte man einen Hinweis gewünscht, daß dieser Paragraph relativ unabhängig vom Rest des Buches ist. In § 5 folgt eine einführende Diskussion der endlichen Untergruppen von $GL_n(\mathbf{Z})$; das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der endlichen Untergruppen von $GL_n(\mathbf{Z})$ und die zyklischen Untergruppen bis auf Konjugation in $GL_n(\mathbf{Q})$ werden bestimmt. § 6 diskutiert die Erweiterungstheorie von Gruppen mit abelschen Normalteilern im Hinblick auf Raumgruppen. Leider wird der Zassenhausalgorithmus nicht klar formuliert, (wahrscheinlich um keine Präsentationen benutzen zu müssen). Nach Ansicht des Referenten ist nämlich die Existenz eines solchen Algorithmus, der die wirklich eingehenden Bestimmungstücke klar erkennen läßt, ein zentraler Punkt in einer Klassifikation, die nicht durch einfache Invarianten beschrieben werden kann. Es folgt eine Herleitung der zweidimensionalen Raumgruppen in den nächsten beiden Paragraphen und eine Bestimmung der Konjugiertenklassen der endlichen Untergruppen der orthogonalen Gruppe $O_3(\mathbf{R})$, für die der Verfasser eine sowohl von der in den internationalen Tabellen verwendeten Hermann-Mauguinschen Notation als auch der Schoenfliesschen abweichende Bezeichnung verwendet. (Es wird ein Rosette-Stein für die drei Notationen gegeben, den man auch braucht, da in § 14 die Raumgruppen nach Schoenflies bezeichnet werden.) Zu Anfang von § 10 werden diejenigen Gruppen des vorigen Paragraphen, die ein dreidimensionales Gitter invariant lassen, nach Kristallsystemen geordnet aufgelistet. Leider wird der Begriff Kristallsystem nur durch Angabe einer Liste im Dreidimensionalen ad hoc ausgewählter Eigenschaften erklärt und nicht – wie ohne weiteres möglich – durch ein klassifizierendes Prinzip definiert. Dies zusammen mit der ungenügenden Ausformulierung des Zassenhausalgorithmus macht die Herleitung der affinen (und kristallographischen) Klassen der dreidimensionalen Raumgruppen in § 12 und § 14 sehr mühsam nachvollziehbar. Zudem ist die Aufzählung der Raumgruppenklassen in § 14 recht unbefriedigend. Z. B. lautet der Anfang von Satz 14.11 dessen vollständige Formulierung mehr als 2 Seiten in Anspruch nimmt: „Wir bestimmen die 68 (bzw. 65) Kristallgruppen des tetragonalen Systems ...“ (Gemeint ist hier eine Namensliste und eine Vertreterliste der 68 kristallographischen bzw. 65 affinen Klassen von Raumgruppen des tetragonalen Kristallsystems. Kristallographische Äquivalenz wird als „Windungsäquivalenz“ bezeichnet.) Die nachfolgende Liste liefert über Anzahlen hinaus nähere Information nur, wenn man sich mit der Nomenklatur für Gruppen, spezielle Matrizen etc., die in vorangegangenen Paragraphen eingeführt wurden, genau auskennt. § 11 diskutiert nochmals endliche Untergruppen von $GL_n(\mathbf{Z})$ unter Berücksich-

tigung der Konjugation in $GL_n(\mathbf{Z})$ und in $GL_n(\mathbf{Q})$. Obwohl in § 12 bereits auf geometrischem Wege die Konjugiertenklassen der endlichen Untergruppen von $GL_3(\mathbf{Z})$ hergeleitet worden sind, werden in § 13 die Reduktionsungleichungen für positive definite ternäre quadratische Formen hergeleitet. Wie die allgemeine n -dimensionale Theorie zum Jordanschen Satz über die Endlichkeit der Klassenzahl führt, wird nur referiert. Das Buch endet in § 16 mit einer Analyse der irreduziblen unitären Darstellungen von Raumgruppen, allerdings ohne den letzten Schritt zu gehen, nämlich ein Konstruktionsverfahren anzugeben.

Mehr als zwei sachliche Unrichtigkeiten (Aufg. 7.2, Beweis von Folg. 16.8 auf Grund eines Druckfehlers in 16.6) an nicht sehr relevanten Stellen stören den Referenten die Kürze des Symbolverzeichnis, Abweichen von üblichen Definitionen, einige sinnentstellende Druckfehler sowie Ungenauigkeiten und unglückliche Formulierungen, die zumal den Studenten in Mißverständnisse und Schwierigkeiten führen können. So ist z. B. die Definition des Fundamentalbereiches in § 3 jedenfalls keine der üblichen; wie der Beweis zeigt, werden in Satz 5.6 die Konjugiertenklassen der endlichen zyklischen Untergruppen von $GL_n(\mathbf{Q})$ und nicht $GL_n(\mathbf{Z})$ angegeben; in 6.9 bei der grundlegenden Definition der arithmetischen Äquivalenz müßte unbedingt klarer gesagt werden, daß dies eine Äquivalenz der *Paare* (H, Γ) ist ($H \leq GL(V)$, Γ ein Gitter in V , das von H festgehalten wird); zwischen linearen Abbildungen und Matrizen wird oft nicht unterschieden.

Der Autor bemüht sich vielfach, algebraische Methoden in den Vordergrund zu stellen und geht auf einige physikalische Anwendungen ein. Trotzdem kann das Buch nur bedingt empfohlen werden. Insbesondere wird nicht hinreichend deutlich, daß ein zentraler Beitrag algebraischer Methoden in der Kristallographie darin besteht, die verschiedenen, auch historisch lange diskutierten Äquivalenzbegriffe sauber herauszuarbeiten. Das Buch ist eher geeignet, einem kritischen Dozenten der das Gebiet überblickt, Details an die Hand zu geben, als einem Neuling eine klare Vorstellung des behandelten Gebietes zu vermitteln.

Aachen, Bonn

W. Plesken

Rees, E. G., *Notes on Geometry* (Universitext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1983, viii + 109 p., soft cover, DM 28,—

Gemessen am Umfang und dem bescheidenen Preis enthält das Büchlein eine Fülle anschaulicher klassischer Geometrie. Es baut auf Oxforder Vorlesungen des Verfassers auf, die den Mangel an Anschaulichkeit in der heutigen mathematischen Grundausbildung etwas ausgleichen wollten. Es vermeidet den axiomatischen Standpunkt und geht von konkreten, algebraisch definierten Modellen aus. Die „klassischen“ Geometrien (euklidisch, projektiv und hyperbolisch) werden in Felix Kleins Erlanger Programm eingeordnet.

Der erste Teil (S. 3–49) behandelt die euklidische Geometrie des \mathbf{R}^n . Viel davon ist klassische analytische Geometrie. Besonderes Gewicht wird auf die Gruppen der linearen bijektiven Abbildungen, der Affinitäten und der Bewegungen (Isometrien) gelegt, sowie auf die Beschreibung der topologischen Struktur ausgewählter Räume und Gruppen. Z. B. wird gezeigt, daß alle Isometrien des \mathbf{R}^n affin sind. Ausführlich behandelt werden die 5 platonischen Körper und ihre Gruppen, sowie die Kristallgruppen der Ebene und des Raumes.

Der zweite Teil (S. 51–78) enthält projektive Geometrie, unter anderem: Homogene Koordinaten; Topologie der reellen projektiven Ebene; Dualität; Satz von Desargues; projektive Gruppen; die komplexe projektive Gerade als Riemannsche Zahlenkugel; Doppelverhältnisse; die elliptische Ebene; Kegelschnitte; harmonische Punktepaare; vollständiges Viereck; Pascalscher Satz.

Der dritte Teil befaßt sich mit hyperbolischer Geometrie (leider nur der Ebene) in den Modellen von Klein (nach Beltrami benannt) und Poincaré, insbesondere: Übergang von einem

Modell zum anderen durch räumliche Projektionen; hyperbolische Geraden im Poincaré-Modell, Riemannsche lokale Metrik im Poincaréschen Halbebene-Modell; Flächeninhalt und Defekt; Definition von Winkeln und Abständen im räumlichen Beltrami-Modell, d. h. auf einer Hälfte eines Hyperboloids (m. E. zu wenig motiviert); hyperbolische und elliptische Trigonometrie.

Jeder Teil enthält am Ende eine größere Anzahl Aufgaben, die mir für den Kenner reizvoll, jedoch für Lernende teilweise zu schwer erscheinen.

Der Stoff wird durch 99 überwiegend gelungene Figuren veranschaulicht. Der übliche Fehler, daß in einer Kugel der Äquator als Ellipse und trotzdem der Nordpol auf dem Umriß erscheint, tritt auch in diesem Buch wiederholt auf.

Insgesamt kann das Buch Dozenten und Studenten mittlerer Semester, natürlich neben anderen Büchern, empfohlen werden.

Berlin

H. Lenz

Griffiths, P. A., Morgan, J. W., Rational Homotopy Theory and Differential Forms

(Progress in Mathematics, vol. 16) Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1981, 256 p., hardcover, DM 38,—

Es ist ein erklärtes Ziel der algebraischen Topologie, algebraische Modelle für geometrische Objekte zu finden. Dahinter steckt die Erkenntnis und Idee, daß globale Eigenschaften von Gestalten kombinatorisch – zahlentheoretischer Art sind und die kombinatorischen Probleme am besten durch kontinuierliche Modelle und Analysis veranschaulicht und verstanden werden können. (Ein Dualismus ähnlich dem von Welle und Korpuskel.)

Wenn man auch noch weit entfernt ist, diesen Dualismus zu verstehen, so gibt es doch einige in sich abgeschlossene Teiltheorien, die einen Einblick gewähren lassen. Dazu gehört die von Sullivan angeregte Betrachtung der sogenannten rationalen Homotopietheorie unter Verwendung der Differentialformen, die – grob gesprochen – stückweise rationale Polynome als Koeffizienten haben.

Die Topologie über den rationalen Zahlen \mathbb{Q} besteht kurz gesagt darin, daß man alle Invarianten eines Raumes X , die abelsche Gruppen A sind, durch $A \otimes \mathbb{Q}$ ersetzt. Man verzichtet dabei auf Information, die in endlichen Gruppen liegt, und gewinnt bei diesem Verzicht die Möglichkeit, ein algebraisches Modell konstruieren zu können. Es gehört inzwischen zu den Zwangshandlungen, jedes genügend komplizierte topologische Problem erst einmal über den rationalen Zahlen zu betrachten.

Das vorliegende Buch gibt eine leichtverständliche Einführung in die Sullivansche Theorie. Es besteht aus drei Teilen: I. Die später benötigten Hilfsmittel aus der algebraischen Topologie werden mit kurzen Beweisen zusammengestellt. Es beginnt mit Homologie von Zellenkomplexen und führt über Spektralsequenzen zu Postnikovsystemen und rationaler Homotopietheorie. II. Das eigentliche Thema des Buches: Die rationale de Rham-Algebra. Minimale Modelle solcher Algebren und ihre algebraische Homotopietheorie. Zusammenhang zwischen minimalen Modellen und Postnikovsystemen rationaler Homotopietypen. III. Eine Sammlung von sogenannten Übungsaufgaben: Unzusammenhängende Hinweise auf interessante elementare Tatsachen der Topologie. Diese haben mit dem Thema des Buches fast nichts zu tun und dienen lediglich dazu, das Werk von 194 auf 242 Seiten zu bringen.

Ein Literaturverzeichnis und ein Sachwortregister fehlen leider.

Wenn man bedenkt, daß ein Leser schon gehörige Erfahrung mitbringen muß, um an rationaler Homotopietheorie interessiert zu sein, so ist eigentlich auch Teil I teilweise überflüssig. Stattdessen hätten die Autoren ihr eigentliches Thema sorgfältiger und ausführlicher entwickeln sollen; zum Beispiel erklären: warum gerade *rationale* Differentialformen.

Trotzdem: Das Buch ist sehr nützlich, weil alle anderen Darstellungen der Theorie wegen übertriebenen akademischen Ehrgeizes der Autoren genießbar sind wie grüne Knollenblätterpilze.

Göttingen

T. tom Dieck

Brauner, K., Differentialgeometrie, Wiesbaden: Vieweg Verlag 1981, xvii + 424 S., gbd., DM 104,—

An einführenden Lehrbüchern der Differentialgeometrie herrscht an sich, vor allem, wenn man die englischsprachigen einbezieht, kein Mangel. Das vorliegende wird aufgrund seiner durchdachten Konzeption und seines besonderen Charakters daneben seinen Platz erobern und behaupten können. Grundkonzept und Eigenheit des Buches lassen sich kurz folgendermaßen umreißen: Der Leser soll von der eher klassischen zur neueren Differentialgeometrie in einem Zuge und ohne Bruch geführt werden, wobei die später notwendigen abstrakten Begriffsbildungen und modernen Kalküle schon frühzeitig eingeführt und benutzt oder zumindest vorbereitet werden. Dabei werden auch die anschaulicheren Teilgebiete möglichst allgemein und vor allem ohne Verzicht auf begriffliche Strenge behandelt. Insgesamt handelt es sich um eine gründliche und systematische Einführung in die Differentialgeometrie der Untermannigfaltigkeiten des n -dimensionalen euklidischen Raumes und anschließend in die Riemannsche Geometrie.

Die ersten beiden Kapitel stellen die Grundlagen aus Linearer Algebra und Analysis bereit, bieten im Hinblick auf die differentialgeometrischen Erfordernisse aber schon wesentlich mehr, als dem Studenten aus den entsprechenden Anfängervorlesungen bekannt sein dürfte. So behandelt Kapitel 1 bereits Begriffe wie Tangentialbündel, Vektorfeld, Pfaffsche Form, Tensorbündel, Tensorfeld, und Kapitel 2 bringt neben einer Zusammenstellung der topologischen Grundbegriffe, der erforderlichen Sätze über differenzierbare Abbildungen und Aussagen über Differentialgleichungen auch schon Tangentialvektorräume, Derivationen, Richtungsableitungen längs Vektorfeldern, die Lie-Klammer und den kanonischen Zusammenhang des \mathbb{R}^n . Zur kalkülmäßigen Darstellung sei bereits hier gesagt, daß die heute übliche invariante Schreibweise benutzt wird, aber auch stets die koordinatenmäßige Darstellung gebührend berücksichtigt und ausführlich erklärt wird. Kapitel 3 behandelt die Differentialgeometrie der Kurven im \mathbb{R}^n in einer gründlichen Weise, die vor allem auch auf exakte und zweckmäßige Begriffsbildungen Wert legt. [Freilich scheint der Autor beim Kurvenbegriff doch etwas unentschllossen zu sein zwischen präziser Definition und heuristischer Erläuterung: Auf S. 67, Zeile 4, wird eine Kurve deutlich als eine Punktmenge definiert, zwei Zeilen weiter hat sie aber doch Eigenschaften, die der „nackten“ Punktmenge nicht zukommen; Auswege deuten sich in den Fußnoten 3) und 4) an. Ähnliche Bemerkungen wären bei Flächen und Varietäten zu machen.] In besonderer Ausführlichkeit werden Parametrisierungen, Berührungen und höhere Krümmungen behandelt. Ein Abschnitt über ebene Kurven im Großen bringt Umlaufsatz, konvexe Kurven und Vierscheitelsatz. Kapitel 4 behandelt m -dimensionale Flächen im \mathbb{R}^n , und zwar die differentialgeometrischen Grundtatsachen in ungewöhnlicher Gründlichkeit. Die in den Anfangskapiteln bereitgestellten abstrakten differentialgeometrischen Objekte werden jetzt in Aktion erlebt. Hervorzuheben ist die ausführliche Untersuchung von Berührungen einschließlich Hüllflächen sowie von Parametrisierungen. Kapitel 5 ist der inneren Geometrie von Flächen gewidmet und befaßt sich demgemäß mit metrischen Tensorfeldern, kovarianter Ableitung, geodätischer Parallelverschiebung, geodätischen Linien, geodätischen Krümmungen von Flächenkurven, und dem Krümmungsoperator des induzierten Zusammenhangs. Hier wird also am konkreten Beispiel der Untermannigfaltigkeiten euklidischer Räume schon Riemannsche Geometrie getrieben. Ein weiterer Abschnitt befaßt sich mit speziellen Abbildungen zwischen m -dimensionalen Flächen, wie isometrischen, konformen, geodätischen. Kapitel 6 behandelt dann die äußere Geometrie der Flächen. Hier werden also die zu Einheitsnormalenfeldern gehörigen zweiten Grundformen eingeführt, zusammengefaßt durch

den Gauß-Operator, die Weingartenabbildungen und die induzierten Normalzusammenhänge. Natürlich finden sich hier die Integrabilitätsbedingungen der Ableitungsgleichungen und speziell für Hyperflächen die Krümmungstheorie und der sog. Hauptsatz. Kapitel 7 über 2-Flächen im \mathbb{R}^3 enthält die klassischen Aussagen über spezielle Linien und Parametrisierungen und über spezielle Flächen und Regelflächen (besonders ausführlich), Flächen konstanter Krümmung, Minimalflächen. Kapitel 8 schließlich über Riemannsche Räume umfaßt mit den grundlegenden Begriffen und Aussagen der Riemannschen Geometrie den Stoff, den man nach den Vorbereitungen der ersten Kapitel unter dieser Überschrift erwartet. Diese schöne Einführung in die Riemannsche Geometrie schließt mit einigen der bekannten globalen Sätze über kompakte oder vollständige zweidimensionale Flächen.

Insgesamt sind bei diesem Werk hervorzuheben: der durchdachte und konsequente Aufbau mit mancherlei methodischen Neuerungen, die ungewöhnlich gründliche Behandlung der Differentialgeometrie m -dimensionaler Flächen im n -dimensionalen euklidischen Raum, die durchgehende Sorgfalt, die sich auch auf Äußerlichkeiten wie Wahl von Bezeichnungen und Symbolverzeichnis erstreckt, und die zahlreichen Aufgaben mit einer Fülle konkreten und ergänzenden Materials.

An welchen Leserkreis richtet sich nun dieses Buch? Die nicht leichte Lektüre erfordert eine gewisse mathematische Reife und verlangt Konzentration und intensive Mitarbeit und vom Leser (oder Dozenten) die Fähigkeit, heuristische Erläuterungen und Motivationen beizutragen. Das Buch erscheint dem Referenten daher eher als zweites Lehrbuch geeignet bzw. als Grundlage oder Begleittext einer Vorlesung, der schon eine elementare, anschaulichere Einführung in die Differentialgeometrie vorausging. Aus dem Buch, wie es im Vorwort vorgeschlagen wird, durch Auswahl und Umstellung kürzere Kurse unter speziellen Aspekten zusammenzustellen, dürfte nicht unproblematisch sein, vor allem, wenn ein solcher Kurs als alleinige Einführung in die Differentialgeometrie dienen soll. Die stärkste Wirkung entfaltet das Lehrbuch wohl dem, der es systematisch und vollständig durcharbeitet und sich damit eine hervorragende und sehr solide Grundlage für weitere Studien erwirbt.

Freiburg

R. Schneider

Jarchow, H., *Locally Convex Spaces*, Stuttgart: Teubner 1981, 548 S., cloth. DM 98,—

In den fünfziger Jahren hatte die Theorie der topologischen Vektorräume nach rascher Entwicklung einen Stand erreicht, der ihre Darstellung in Lehrbuchform erlaubte. Im Hinblick auf Anwendungen u. a. bei Distributionen, linearen partiellen Differentialgleichungen und Faltungsoperatoren war eine solche Darstellung auch wünschenswert. Nach Bourbakis „Espaces vectoriels topologiques“ und Grothendiecks Vorlesungsausarbeitung mit dem gleichen Titel erschienen in den sechziger Jahren eine Reihe von Lehrbüchern über topologische Vektorräume. Will man diesen heute ein weiteres hinzufügen, so stellt sich dem Autor die Frage, wie er den klassischen Bestand aus heutiger Sicht bewertet, und welche der Entwicklungen aus jüngerer Zeit er aufnimmt.

Was die Entwicklung des Gebietes angeht, so sind unterschiedliche, teils miteinander verwobene Tendenzen zu verzeichnen. Einerseits wurden eine Reihe der von Grothendieck hinterlassenen Probleme gelöst, wie etwa die Frage nach optimalen Graphensätzen, nach der Universalität der Räume s^1 für die nuklearen Räume sowie das Basis- und das Approximationsproblem in verschiedenen Variationen. Andererseits wurde die Theorie durch weitere Analyse des Bestandes und verfeinerte Begriffsbildungen immer weiter verästelt und verallgemeinert. Dies kann zu einem besseren Verständnis führen, birgt aber auch die Gefahr in sich, zum bloßen Spiel mit Begriffen zu verkommen, wenn die Relevanz der Ergebnisse für andere Bereiche nicht als Bewertungsmaßstab verwendet wird. Außerdem ist eine Entwicklungslinie zu erkennen,

welche diejenigen nuklearen Frécheträume (bzw. deren Dualräume) zum Gegenstand von Untersuchungen macht, die für Fragen aus der Analysis von Interesse sind. Aus dieser Richtung sind in jüngster Zeit schöne Ergebnisse gekommen, etwa die Charakterisierung der Unterräume bzw. der Quotienten der stabilen nuklearen Potenzreihenräume, vielseitig verwendbare Splittingbedingungen für exakte Sequenzen und Folgenraumdarstellungen für viele Räume z. B. $C^\infty(\Omega) \cong \cong s^N$ und $\mathcal{D}'(\Omega) \cong (s')^N$.

Von diesen drei hier grob skizzierten Richtungen sind in dem Buch die erste angemessen, die zweite relativ ausführlich und die dritte fast gar nicht dargestellt.

Im Einzelnen ist zu dem Buch folgendes zu bemerken: Es ist in die drei Kapitel: I Lineare Topologien, II Dualitätstheorie, III Tensorprodukte und Nuklearität eingeteilt und besteht aus 21 Abschnitten. Jeder Abschnitt beginnt mit einer Inhaltsübersicht und schließt mit Hinweisen auf Quellen, die teils eine historische Einordnung liefern, teils auf weiterführende Literatur aufmerksam machen. Die Abschnitte bestehen aus bis zu zehn Unterabschnitten, die oft losgelöst vom übrigen Text gelesen werden können und von denen einige auch für fortgeschrittene Leser interessant sind.

In dem einführenden Teil I, der fast ein Viertel des Buches füllt, werden die gängigen Grundbegriffe und Standardbeispiele bereitgestellt, substantielle Ergebnisse sind nur der Satz vom abgeschlossenen Graphen sowie der Satz von Hahn-Banach und Folgerungen hieraus. Der lange Anmarsch zu den zentralen Teilen der Theorie resultiert daraus, daß viel Wert auf topologische Vektorräume und lokal- r -konvexe Räume gelegt wird. Dieses Bestreben nach Allgemeinheit, das auch im weiteren zu beobachten ist, erschwert allerdings manchmal etwas den Blick auf das Wesentliche.

Teil II ist den klassischen Resultaten der Dualitätstheorie gewidmet. Dabei sind einige Formulierungen anders als gewohnt, da Bornologien und Kompaktologien benutzt werden. Ausführlich werden der Tonneliertheitsbegriff und seine Verallgemeinerungen behandelt, ebenso (DF)-Räume und deren Verallgemeinerungen sowie (ultra-)bornologische Räume und Schwartz-Topologien. Liebhaber von Räumen stetiger Funktionen dürften über die Vielzahl der aufgenommenen Ergebnisse aus diesem Gebiet erfreut sein. Der Unterabschnitt über diametrale Dimension und der Abschnitt über topologische Basen werden sicher allgemein als nützlich empfunden. Leider ist der klassische Satz von Dieudonné und Schwartz nicht aufgeführt, obwohl er in vielen Anwendungen die Surjektivität gewisser stetiger linearer Operatoren zwischen Frécheträumen liefert.

Der dritte Teil enthält Abschnitte über das projektive und das injektive Tensorprodukt sowie die Approximationseigenschaft. Er bringt außerdem viele schöne und klassische Resultate über spezielle Klassen stetiger linearer Operatoren zwischen Banach- bzw. Hilberträumen und eine sehr hilfreiche Einführung in die Theorie der Operatorideale. Diese wird dann auch zur Behandlung der nuklearen, der stark nuklearen und der Schwartz-Räume im letzten Abschnitt herangezogen. Leider bleibt dabei offen, warum die nuklearen Räume für viele Anwendungen interessant sind.

Trotz der hier geäußerten Kritik ist das Buch insgesamt eine begrüßenswerte Bereicherung der Lehrbuchliteratur über lokalkonvexe Räume. Es ist in einem gut lesbaren Stil geschrieben, bietet viel Service für den Leser und stellt eine ganze Reihe von neueren Ergebnissen erstmals in Buchform vor. Daher ist zu erwarten, daß es den eingeführten Lehrbüchern dieses Gebietes beträchtliche Konkurrenz machen wird.

Kirillov, A. A., Gvishiani, A. D., Theorems and Problems in Functional Analysis (Problem Books in Mathematics), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, ix + 347 p., cloth, DM 98,—

Dies ist einer der ersten Bände der neuen Springer-Reihe „Problem Books in Mathematics“. Es befaßt sich mit über 800 Aufgaben aus der Funktionalanalysis, die sich um folgende Gegenstände gruppieren: I. Begriffe aus Mengenlehre und Topologie, II. Maß und Integral, III. Lineare topologische Räume und lineare Operatoren, IV. Die Fouriertransformation und Elemente der harmonischen Analyse, V. Spektraltheorie linearer Operatoren. (Bei Kap. V handelt es sich um selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum.) Die Organisation des Werkes ist nun so angelegt, daß sich diese fünf Gebiete in der angegebenen Reihenfolge in den 3 Teilen: Theorie – Aufgaben – Lösungshinweise jeweils wiederholen. Mit „Theorie“ ist hierbei ein Abriß des relevanten Teils der zugehörigen Theorie gemeint.

Historisch geht dieses aus dem Russischen übersetzte Werk auf eine ursprünglich von A. N. Kolmogoroff gehaltene Vorlesung über Funktionalanalysis zurück; es ist eine zugehörige Aufgabensammlung, die in neuerer Zeit in verschiedenen Richtungen beträchtlich erweitert wurde. So sind wohl auch manche Unvollkommenheiten zu erklären. Beispiele: Reflexivität wird nur für B-Räume erklärt (im Index fehlt der Begriff); entsprechend kommt als Aufgabe (Nr. 286): Abgeschlossene Teilräume reflexiver Räume sind reflexiv. Später werden auch die wichtigsten Räume der Distributionentheorie behandelt, aber deren Reflexivität nicht erwähnt. Der Begriff „präkompakt“ wird im Sinne von „relativ kompakt“ verwendet. Andererseits ist bei der Fülle der angeschnittenen Themen (in Kap. III auch kompakte Operatoren und Fredholmtheorie) eine vollständige Homogenität und Abrundung nicht zu erwarten.

Was den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben angeht, findet man so ziemlich alles Denkbare; angefangen von einfachsten Übungsaufgaben (etwa über die konvexe Hülle einer Menge, Nr. 269) bis zum Kerntheorem für stetige lineare Abbildungen $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ (Nr. 505). Die zugehörigen Lösungsanleitungen sind teilweise recht spärlich. So findet sich bei Nr. 505 nur der Hinweis auf eine Eigenschaft des projektiven Tensorproduktes; freilich sind die Aufgaben nach Schwierigkeitsgrad markiert.

Für jeden, der Aufgaben aus den angegebenen Gebieten der Funktionalanalysis sucht oder zur Einübung angreifen möchte, dürfte sich hier etwas Passendes finden; wer vieles bringt, wird jedem etwas bringen. Von dem besonderen Flair und der Faszination aber, die etwa von P. Halmos „A Hilbert Space Problem Book“ (soeben in 2. Auflage erschienen) ausgeht, ist die vorliegende Sammlung weit entfernt.

Tübingen

H. H. Schaefer

Singer, I., Bases in Banach Spaces, vol. II, Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1981, viii + 880 p., cloth, DM 148,—

Der erste Band des vorliegenden Werkes erschien 1970 und enthält die Kapitel: I. The Basis Problem. Some Properties of Bases in Banach Spaces, sowie II. Special Classes of Bases in Banach Spaces. Der vorliegende zweite Band enthält nur Kapitel III: Generalizations of the Notion of a Basis. (Die Kapitel IV und V des geplanten Gesamtwerkes sind als Inhalt des dritten Bandes vorgesehen.) Der Inhalt des vorliegenden Bandes macht den Versuch, die seit 1970 erzielten Ergebnisse über verallgemeinerte Basen (dazu gehören maximale topologisch freie Familien u. v. a.) einigermaßen vollständig zusammenzustellen; wieweit dies für einen größeren, nicht stark spezialisierten Leserkreis hilfreich sein kann, ist schwer zu beurteilen. Jedenfalls erscheint es dem Ref. unmöglich, aus den auf ca. 600 Seiten vorgestellten Ergebnissen eine irgendwie repräsentative Auswahl zu treffen, so daß wir uns Einzelheiten gänzlich versagen müssen. Jedoch sei erwähnt, daß das Enflorsche Resultat (1973) über die Nichtexistenz von Basen (allgemei-

ner: über Banachräume ohne Approximationseigenschaft) in § 0 des Buches hergeleitet und ausführlich diskutiert wird. Ferner finden sich ca. 60 Seiten interessanter Bemerkungen und bibliographischer Notizen, sowie ein Anhang über Ergebnisse, die dem Autor nach Fertigstellung des Manuskriptes bekanntgeworden sind.

Es muß daher dem interessierten Leser überlassen bleiben, durch punktuelle Lektüre sich selbst ein Bild vom Typus der erzielten Resultate zu machen; sofern ihm der vorangehende erste Band nicht bekannt ist oder zur Verfügung steht, findet er in dem bekannten Ergebnisbericht (1977) von J. Lindenstrauß und L. Tzafriri „Classical Banach Spaces I“ eine gute Einführung in den Problemkreis der Basen in Banachräumen.

Tübingen

H. H. Schaefer

Helgason, S., Topics in Harmonic Analysis of Homogeneous Spaces (Progress in Mathematics, vol 13) Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1981, 152 p., hardcover, DM 33,—

Harmonische Analyse im klassischen Sinn handelt von Funktionen auf Räumen wie $X = \mathbb{R}^n$, \mathbb{Z}^n oder \mathbb{T}^n . In diesen Fällen besitzt X die Struktur einer (kommutativen) Gruppe G , und diese operiert auf X und auf Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ durch Translationen. Die Eigenfunktionen bez. G sind wohlbekannt, und die Zerlegung einer Funktion auf X in Eigenfunktionen bez. G wird gegeben durch die Fouriersche Umkehrformel. Für beliebige Räume X , auf denen eine Gruppe G transitiv operiert, tritt an die Stelle der Zerlegung in Eigenfunktionen eine Zerlegung in Komponenten, die explizit zu beschreibenden translationsinvarianten Funktionsräumen auf X angehören. Ist G eine Lie-Gruppe, so sind das in vielen Fällen Eigenräume G -invarianter Differentialoperatoren auf X .

In enger Anlehnung an den obigen klassischen Fall werden in dem vorliegenden Buch exemplarisch und ausführlich die Ergebnisse harmonischer Analyse auf den vollständigen, einfach zusammenhängenden, 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung dargestellt. Diese haben eine Realisierung als homogene Räume in der folgenden Form:

- 1) die euklidische Ebene: $X = M(2)/O(2)$ Bewegungsgruppe $M(2)$ modulo Fixgruppe $O(2)$ des Nullpunktes,
- 2) die Sphäre: $X = O(3)/O(2)$,
- 3) das Poincarésche Modell der nicht euklidischen Ebene: $X = SU(1,1)/SO(2)$ Automorphismengruppe $SU(1,1)$ des Einheitskreises modulo Fixgruppe $SO(2)$ des Nullpunktes.

Die invarianten Differentialoperatoren sind jeweils Polynome in einem Operator (Laplace Operator bzw. Laplace-Beltrami Operator). Für die Eigenfunktionen gilt eine Integraldarstellung und eine Funktionalgleichung, welche sie charakterisiert. Beantwortet wird auch die Frage nach der Irreduzibilität der Eigenräume bez. der wirkenden Gruppe G . Mit Blick auf den klassischen Fall wird die Fouriertransformation eingeführt, die Umkehrformel und der Plancherelsche Satz bewiesen. Die Fouriertransformierten unendlich oft differenzierbarer Funktionen mit kompaktem Träger werden durch Analytizitätseigenschaften, Wachstumsbedingungen und eine (im euklidischen Fall triviale) Funktionalgleichung charakterisiert, das ist das Analogon des Satzes von Paley-Wiener.

Meiner Überzeugung nach ist das vorliegende Buch in idealer Weise Vorbereitung und Motivation zum Einstieg in die allgemeine Theorie der harmonischen Analyse auf homogenen Räumen. Der interessierte Leser sei in diesem Zusammenhang hingewiesen auf die (bald?) zwei-bändige Neuauflage des Standardwerkes: S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Acad. Press, 1962 sowie bezüglich verwandter Fragestellungen und zahlreicher Querverbindungen zu anderen Gebieten der Mathematik auf: G. W. Mackey, *Unitary Group Representations in Physics, Probability and Number Theory*, Benjamin, 1978.

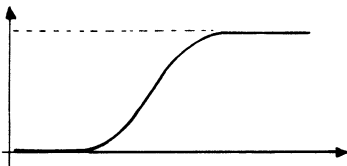
München

G. Schlichting

Palis, J., Jr.; de Melo, W., Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction, Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, xii + 198 p., cloth, DM 74,–

Aus dem Stadium der Übersichtsartikel und Lecture-Notes tritt die moderne geometrische Theorie der autonomen Differentialgleichungen im Großen jetzt in das der Lehrbücher. Erst kürzlich ist das gelungene und lebendige Lehrbuch von Irwin erschienen. Das hier vorliegende Buch ist ein ernstzunehmender Konkurrent um die Gunst des Lesers. Es handelt sich, wenn man so sagen darf, um ein Qualitätserzeugnis aus dem berühmten IMPA in Rio de Janeiro, von Manning sorgfältig ins Englische übertragen. Und die Sorgfalt und Genauigkeit bei der Anlage des Ganzen und der Durchführung im Einzelnen muß man überhaupt an diesem Buche rühmen; es ist mir nicht gelungen, mehr als einen Druckfehler zu finden (S. 22, Z. n – 7), die Beweise sind genau und vollständig, ohne unfaire Zitate, und es gibt auch viele hilfreiche, oft kunstvoll gezeichnete und fast immer ganz richtige Figuren. Das alles ist zumal bei Büchern zu diesem Thema nicht selbstverständlich. Freilich kann die Genauigkeit, das explizite Durchführen der Beweise mit jedem Epsilon und Delta, auch beschwerlich werden. Um ein Beispiel zu geben:

Auf S. 97 wird für einen Beweis im Wesentlichen nur irgendeine C^r -Funktion dieser Gestalt



gebraucht, aber das verraten die Autoren nicht, sondern sie geben eine Funktion als Polynom $(2r + 3)$ -ten Grades explizit an, was ziemlich verwirrend ist und einigen Platz beansprucht.

Ein ähnliches Beispiel bietet der Text S. 52/53, wo bewiesen wird, daß die Eigenwerte einer quadratischen Matrix stetig von den Koeffizienten der Matrix abhängen.

Eigentlich kann ich ein mathematisches Buch nur so lesen, daß ich den Text immer als Anleitung nehme, mir die Sache nacheinander selbst klar zu machen, und viele explizit formulierte Einzelheiten helfen dazu oft weniger als etwas pauschalere Argumente. Auch wird bei diesem Verfahren Einfaches zu lang und Schwieriges zu kurz erklärt und manche weniger formale Frage, die dem Anfänger sicher kommt, einfach nicht gestellt und darum auch nicht beantwortet: Warum ist das closing-lemma nicht ganz einfach? – Aber wie gesagt, gerade bei diesem Gegenstand ist Genauigkeit auch wohlthuend, und die Autoren suchen die Einsicht, Übersicht und die Anschauung des Lesers nach Kräften zu fördern.

Zum Inhalt: Kapitel 1 bringt die grundlegenden Definitionen: Mannigfaltigkeiten (nur Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n ; das ist später oft lästig, z. B. macht es auf S. 157 noch einigen Umstand, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ als Torus zu erkennen), Vektorfelder, Transversalität, strukturelle Stabilität. Die Übungsaufgaben zu diesem Kapitel sind nicht alle fair, im Gegensatz zu denen zu den späteren Kapiteln. Kapitel 2 bringt die lokale topologische Klassifikation der hyperbolischen Singularitäten, also den Satz von Hartman und Grobman als Hauptergebnis. Kapitel 3 bringt den Satz von Kupka und Smale (in der unschönen Formulierung: „K-S is residual in $\mathcal{X}^r(M)$ “), also für fast jedes Vektorfeld gilt: Die singulären Punkte und geschlossenen Orbits sind alle hyperbolisch und die jeweiligen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten schneiden sich transversal. Das 4. Kapitel über Morse-Smale-Vektorfelder enthält als Hauptergebnis den Satz von Peixoto, wonach auf einer orientierbaren kompakten Fläche die Morse-Smale-Felder generisch und strukturell stabil sind. (Hier wäre zu wünschen, daß zur Illustration ein Abschnitt über Morsefunktionen und ihre Gradientenfelder hinzukäme, denn an diesen ist ja die Theorie modelliert. Da sähe man doch gleich, was man sich z. B. unter einer Filtrierung vorstellen soll.)

Es folgen wichtige Beispiele (das Hufeisen, hyperbolische Automorphismen des Torus) und ein Ausblick auf Weiterführendes (Anosow-Diffeomorphismen) und Aporetisches.

Im Ganzen ein sehr gutes, lesbares und nützliches Buch und eine solide Grundlegung, auf die man vertrauensvoll bauen kann.

Regensburg

Th. Bröcker

Chow, S.-N.; Hale, J. K., Methods of Bifurcation Theory (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 251), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, xv + 515 p., cloth DM 128,—

The last decades show a great activity related to nonlinear eigenvalue and bifurcation problems on the one hand and the theory of dynamical systems and differential equations on manifolds on the other. People working in the first field were mainly doing nonlinear analysis (Krasnosel'skii, Rabinowitz, etc.), while researchers in the second branch were to be found among differential topologists (Arnol'd, Thom, Smale, etc.). Although many of their methods had much in common, there seemed to be little communication; this is at least the impression one gets from a quick glance at the references contained in the leading books and articles in both areas.

The book of Chow and Hale contains many hot topics from both fields. The reader will find for instance an application of bifurcation theory to the Von Kármán equations connected with the buckling of rectangular plates, which is essentially a nonlinear eigenvalue problem. On the other hand the book also contains investigations of unfoldings of singularities of vector fields with low codimension.

The book can be divided roughly into three parts. The first part contains preliminary material. Examples are given of the types of problems to be considered. After that a description of a broad variety of tools from nonlinear analysis follows, e.g. concepts of differentiability on Banach spaces, a Sobolev embedding theorem, manifolds and transversality and degree theory. These are used, for instance, to obtain the Hopf bifurcation theorem; also an ingenious proof is given of the Liapunov center theorem, based on the Hopf bifurcation theorem.

In the second part static bifurcation is treated: i.e. changes in the structure of the set of zeroes of a function when parameters, on which the function depends, are varied. A rather detailed description is given of this zero set, depending on specific properties of the function under consideration, as for instance the dimension of the null space of the linear part and certain generic properties of the quadratic and cubic terms. A chapter is devoted to applications of the obtained results to the buckling of plates, chemical reactions and Duffing's equation.

The last part deals with dynamic bifurcation: the changes that occur in the structure of limit sets of solutions of differential equations when parameters are varied. In addition to the bifurcation of equilibrium points in differential equations, this includes bifurcation of periodic orbits, homoclinic orbits and invariant tori.

Bifurcation problems are only attacked with analytic methods. For instance the study of homoclinic orbits in autonomous differential equations (vector fields) is restricted to two dimensions; the higher dimensional case, involving rather complicated dynamics related to "random" behaviour, is usually treated using methods from topological dynamics.

The methods used are constructive as far as possible. An advantage of this approach is that it gives more precise information on position of zeroes, invariant manifolds etc. On the other hand the methods are less intuitive than the more geometric methods frequently encountered in the theory of dynamical systems on manifolds. For example the way in which invariant manifolds of a saddle point are obtained involves many calculations without any appeal to geometric intuition, opposite to the well known method using graph transforms. However, as a by-product of the techniques of Chow and Hale, one obtains estimates concerning the asymptotic behaviour of orbits close to the invariant manifolds.

The book is very valuable as a source of tools which by now have become standard for anyone working somewhere in the field: the theory of invariant manifolds, especially center-manifolds and invariant tori, normal forms and averaging techniques, methods of blowing up (rescaling), Lyapunov-Schmidt reduction, etc. Despite these qualities the index is rather poor: e.g. a general reference to the meaning of the word generic is not contained in it.

The work also has its merits as a text book to be used in graduate courses. It supposes however preliminary knowledge of functional analysis and differential equations.

Each chapter is preceded by a global survey of its contents. The bibliographical notes at the end of each chapter give a good impression of the history and development of many topics. Here the authors sometimes touch related fields, which go beyond the scope of the book or demand nontrivial methods from other disciplines. Due to the very large number of references the interested reader easily finds his way to these subjects.

Finally the style of the book is very lucid, though rather technical. The reader acquainted with Hale's book on Ordinary Differential Equations will feel quite at home.

Groningen

F. Klok, G. Vegter

Vanderbauwhede, A., Local bifurcation and symmetry (Research Notes in Mathematics, Nr. 75), Boston – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program 1982, 368 pp., £ 12.95

Mit dem Erscheinen des 75. Bandes seit ihrer Gründung im Jahre 1975 stellt die Pitman-Reihe der „Research Notes“ einmal mehr ihre bedeutende Stellung unter Beweis, die sie innerhalb der mathematisch-wissenschaftlichen Produktpalette weltweit etablierter Verlagshäuser inne hat. Das erklärte Ziel der Herausgeber dieser Serie ist es, zu einer schnellen Publikation von aktuellem Forschungsmaterial beizutragen, welches naturgemäß – weil in der Entwicklungsphase steckend – nicht bereits die von einer Monographie zu erwartende abgeklärte Form des Endgültigen haben muß.

Hinsichtlich dieser Zielrichtung ist das zur Besprechung vorgelegte Buch von A. Vanderbauwhede in der Pitman-Reihe ohne Zweifel gut placiert. Es ist nach Angaben des Autors eine erweiterte Fassung seiner Habilitationsschrift, die im Jahre 1980 der Staatlichen Universität Gent vorgelegt wurde. Der Autor leistet mit seinem Werk einen weiteren Beitrag zur Bifurkationstheorie, einer Theorie, der in der zurückliegenden Dekade unseres Jahrhunderts eine erstaunliche Renaissance beschieden war. Seit dem Erscheinen der Pionierarbeit von Ruelle und Takens im Jahre 1971 hat das Verständnis der Bifurkationstheorie eine überraschende Wende genommen. Ein völlig neuer Aspekt wurde hinzugewonnen, dessen angemessene Beschreibung heutzutage im Rahmen der Katastrophentheorie und der mit ihr eng verknüpften Singularitätentheorie vorgenommen wird. Dieser Entwicklungstrend ist keineswegs abgeschlossen. Wird jedoch auf den Einsatz dieser modernen Hilfsmittel der Mathematik verzichtet – und das ist in dem vorliegenden Buch weitestgehend der Fall –, so muß schon eine Besonderheit in der Problemstellung vorliegen, die für eine Repräsentation von zum Teil klassischen Verfahren und Resultaten spricht.

In der Tat, der Autor entwickelt Bifurkationstheorie nach dem klassischen Liapunov-Schmidt-Reduktionsverfahren (vielerorts auch die „alternative Methode“ genannt), welches auf dem Satz über implizite Funktionen basiert. Das Kernproblem besteht in der Bestimmung der Lösungsmenge $\{(x, \lambda)\}$ einer nichtlinearen Gleichung $M(x, \lambda) = 0$, die von dem trivialen Element $(x, \lambda) = (0, 0)$ gelöst wird. In der allgemeinen Setzung werden x und λ als Elemente von Banachräumen X bzw. Λ gesucht; die Abbildung M nehme ihre Werte ebenfalls in einem Banachraum Z an. Das Interesse gilt ausschließlich denjenigen nichttrivialen Lösungen, die in einer hinreichend kleinen Umgebung der trivialen Lösung von dieser abzweigen. Sekundärverzweigungen

werden nicht mit einbezogen. Diese Restriktion begründet die lokale Eigenschaft der Untersuchungen, wie es im Titel des Buches ausgedrückt wird.

Bekanntlich kann es nur in denjenigen Punkten (x, λ) zu mehrdeutigen Lösungen der Gleichung $M(x, \lambda) = 0$ kommen, in denen die Fréchet-Ableitung $L = D_x M(0, 0)$ keinen injektiven Operator L liefert. Ist L ein Fredholm-Operator, so gelingt es mit Hilfe endlichdimensionaler Projektoren $P = X \rightarrow \text{Ker } L$ und $Q : Z \rightarrow Z \setminus \text{Bild } L$ die Liapunov-Schmidt-Reduktion der Gleichung $M(x, \lambda) = 0$ durchzuführen. In der resultierenden Verzweigungsgleichung $F(u, \lambda) \equiv QM(u + v^*(u, \lambda), \lambda) = 0$ ist $u = Px \in \text{Ker } L$ in Abhängigkeit von λ zu bestimmen, während $v = v^*(u, \lambda) -$ zumindest theoretisch – aus der Gleichung $(I - Q)M(u + v, \lambda) = 0$ eindeutig berechnet werden kann. Die Lösung der Verzweigungsgleichung stellt ein *endliches* Problem dar: Es liegen $n = \text{codim}(\text{Bild } L)$ skalare Gleichungen für $m = \dim(\text{Ker } L)$ Unbekannte vor, wobei die ganze Zahl $m - n$ bekanntlich den Fredholm-Index von L angibt. Obwohl nunmehr mit einem endlichen Problem konfrontiert, kann eine numerische oder gar analytische Berechnung der Verzweigungslösungen beim konkreten Beispiel eine Fülle weiterer Probleme aufwerfen. Genannt seien hier die numerischen Schwierigkeiten beim Auftreten instabiler Lösungen (es sei angemerkt, daß sich der Autor weder mit Stabilitätsfragen noch mit der Numerik von Bifurkationsproblemen auseinandersetzt).

Das Besondere der Vanderbauwhedeschen Arbeit liegt in den Untersuchungen der Gleichung $M(x, \lambda) = 0$ unter dem Aspekt möglicherweise vorhandener Symmetrien in den Daten des Problems, die sich in der Lösung x widerspiegeln können. In präziser mathematischer Terminologie: Es wird die Existenz einer kompakten topologischen Gruppe G vorausgesetzt, welche Darstellungen Γ und $\tilde{\Gamma}$ über den hier relevanten Banachräumen X bzw. Z zuläßt. Die Abbildung M sei bezüglich dieser Gruppe *äquivariant*, d. h. es gelte $M(\Gamma(s)x, \lambda) = \tilde{\Gamma}(s)M(x, \lambda)$ für alle $s \in G$. Besonderes Augenmerk (auch in den Anwendungen) wird den Gruppen $O(n)$ der orthogonalen $n \times n$ -Matrizen und den Untergruppen $SO(n)$ der Rotationen im Falle $n = 2$ und $n = 3$ gewidmet. Der Autor zeigt – und dieses Resultat darf als Kernstück der Arbeit angesehen werden –, daß sich die Äquivarianz voll und ganz auf die Verzweigungsgleichung vererbt. Die Projektoren P und Q können so gewählt werden, daß nach erfolgter Liapunov-Schmidt-Reduktion auch noch $F(\Gamma(s)u, \lambda) = \tilde{\Gamma}(s)F(u, \lambda)$ für alle $s \in G$ gilt. Man erhält mit *einer* Lösung u der Verzweigungsgleichung sofort eine ganze Lösungsfamilie $\Gamma(s)u$, sofern Γ eine nichttriviale Darstellung ist.

Das einleitende Kapitel 1 hat informellen Charakter. Kapitel 2 bringt technisches Rüstzeug aus der Funktionalanalysis, stellt insbesondere drei Problemgruppen vor, an denen die abstrakten Resultate illustriert werden, und es gibt einen recht knappen Abriss der Darstellungstheorie von Gruppen über allgemeinen Banachräumen. Dem anwendungsorientierten Leser seien hier die drei Problemgruppen genannt: Bestimmung periodischer Lösungen von autonomen Differentialgleichungen, Randwertprobleme elliptischer Differentialgleichungen (2. Ordnung) unter Dirichlet-Daten, Beulprobleme bei der von Kármánschen Plattengleichung unter Normallast. In allen Beispielen werden bekannte Ergebnisse wiedergewonnen; Neues kommt kaum hinzu. In Kapitel 3 wird das Liapunov-Schmidt-Reduktionsverfahren vorgestellt und die Vererbung der Äquivarianz gezeigt. Diese Ergebnisse werden in den folgenden Kapiteln 4 bis 7 auf ihre Verwendbarkeit hinsichtlich der genannten Problemgruppen untersucht. Kapitel 7 enthält insbesondere eine kurze Behandlung der Hopfschen Bifurkationstheorie. Darunter hat man das Abzweigen periodischer Lösungen von einer stationären Lösung einer autonomen Differentialgleichung zu verstehen. Kapitel 8 befaßt sich schließlich mit der Verzweigung einer kompakten Orbitalschar von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme. Das Buch schließt mit einem umfangreichen Literaturverzeichnis, welches 273 Titel umfaßt. Natürlich wird den Vätern der Verzweigungstheorie wie zum Beispiel A. M. Liapunov, E. Schmidt und E. Hopf der gebührende Respekt gezollt; die weitaus größere Zahl der Titel ist jedoch auf die relevanten Publikationen der letzten zehn Jahre bezogen. Hier erweist sich der Autor als kompetenter Kenner.

Dem Leser wird bei der Lektüre des Buches Sachkenntnis und Geduld abverlangt. Die Fülle der vielschichtigen Resultate läßt sich bei einem ersten Lesen kaum erfassen. Als Einführung in die Bifurkationstheorie für den Nichtfachmann ungeeignet, bietet das Buch dem Spezialisten jedoch zahlreiche Ansatzpunkte zu weiterer wissenschaftlicher Arbeit.

Erlangen

H. Grabmüller

Wloka, J., Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertaufgaben, Stuttgart: Teubner Verlag 1982, 500 pp., gbd. DM 74,—

Das vorliegende Buch, das aus einer vom Verfasser im Sommersemester 1975 an der Universität Kiel gehaltenen Vorlesung hervorgegangen ist, gliedert sich in die folgenden Kapitel: Kapitel I: Sobolevräume. — Kapitel II: Elliptische Differentialoperatoren. — Kapitel III: Stark elliptische Differentialoperatoren und die Variationsmethode. — Kapitel IV: Parabolische Differentialoperatoren. — Kapitel V: Hyperbolische Differentialoperatoren. — Kapitel VI: Differenzenverfahren zur Berechnung der Lösung einer partiellen Differentialgleichung.

Allen Kapiteln liegt als übergreifender Gesichtspunkt zugrunde die Behandlung von Randwertaufgaben, bzw. von Anfangs- und Randwertaufgaben, nach dem folgenden Schema:

a) Gewinnung „schwacher“ Lösungen mit den Hilfsmitteln der Funktionalanalysis (insbesondere Hilbertraummethoden, einer an die Belange der Differentialoperatoren in Sobolevräumen angepaßten Fredholmtheorie).

b) Nachweis von Regularitätsaussagen für die schwachen Lösungen (vom Typ eines Weylschen Lemmas bei den elliptischen Gleichungen).

Zu dieser Aufteilung bemerkt der Verfasser in der Einleitung, es sei ihm ein Anliegen gewesen, „hard analysis“ so oft als möglich durch „soft analysis“ zu ersetzen, um so die schwierige Abschätzungsmaschinerie auf ein unumgängliches Minimum zu beschränken. Die konsequente und erfolgreiche Durchführung dieser Trennung bildet eines der Merkmale, durch die sich das vorliegende Werk von anderen Büchern über partielle Differentialgleichungen unterscheidet.

Von dem 500 Seiten umfassenden Buch machen die Kapitel II und III zusammen etwa die Hälfte und inhaltlich den gewichtigsten Teil aus. Für offene, beschränkte Teilmengen Ω des \mathbf{R}^n mit hinreichend glattem Rand werden zu elliptischen Differentialoperatoren $A(x, D)$ der Ordnung $2m$ zu m Randwertoperatoren $b_j(x, D)$ der Ordnung m_j , $0 \leq m_j \leq 2m - 1$ (die mit Hilfe des Spuoperators definiert sind), $j = 1, \dots, m$ Randwertaufgaben der Form betrachtet:

$$A(x, D)u = f \quad \text{auf } \Omega$$

$$b_j(x, D)u = g_j \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, m.$$

Eine eindrucksvolle einheitliche Behandlung wird ermöglicht durch eine vom Verfasser ausgearbeitete Form einer Bedingung von Lopatinskij-Sapiro, die in einem längeren Beweis als notwendig und hinreichend dafür erkannt wird, daß der Operator $(A(x, D), b_1(x, D), \dots, b_m(x, D))$ fredholmsch ist. Zum Beispiel erfüllen für den Laplaceoperator $-\Delta$ das Dirichletproblem, das sog. dritte Randwertproblem (mit dem Spezialfall des Neumannproblems) und das Randwertproblem „mit schiefer Ableitung“ diese Bedingung.

Einen zweiten Themenkreis innerhalb der Kapitel II und III bilden die Betrachtung der V-elliptischen und V-koerziven Formen und Operatoren, die Sätze von Gårding und Agmon über die V-Koerzivität von Sesquilinearformen und ein Lösungssatz für stark elliptische Differentialoperatoren mit Hilfe der Variationsmethode.

Das grundlegende Kapitel I stellt eine Einführung in die Theorie der Sobolevräume $W_2^{\ell}(\Omega)$ für $\ell \geq 0$ dar. Aufgrund des vorgetragenen Konzeptes von Slobodeckij wird eine einheit-

liche Behandlung möglich und der Rückgriff auf die Interpolationstheorie entbehrlich. Besonders hervorgehoben seien daneben die diffizilen Darstellungen des Transformationssatzes, der Fortsetzungssätze, der Eigenschaften des Spuroperators bei den allgemeinen geometrischen Voraussetzungen an Ω .

Kapitel IV und V bringen als Hauptresultat den globalen Existenzsatz für das Anfangs- und Randwertproblem bei parabolischen und hyperbolischen Gleichungen unter Verwendung der Resultate von Kapitel II und III. In Kapitel VI hat sich der Verfasser bemüht – wie er in der Einleitung sagt – dem Leser das Gefühl zu vermitteln, daß es tatsächlich möglich ist, partielle Differentialgleichungen numerisch zu lösen. Es zeigt sich auch hier, daß sich das Konzept der schwachen Lösungen bewährt; der an numerischen Fragen stärker interessierte Leser wird jedoch die Spezialliteratur zu Rate ziehen wollen.

Die mathematische Öffentlichkeit wird es dankbar begrüßen, daß mit dem vorliegenden Werk eine geschlossene Behandlung elliptischer Randwertprobleme mit der Theorie der Sobolevräume vorliegt, welche auch wesentliche russische Beiträge verarbeitet hat. Die funktionalanalytischen Voraussetzungen, die der Autor an den Leser stellt, sind bewußt gering gehalten, so daß das Buch einer breiten Leserschaft zugänglich sein dürfte.

Einige kritische Bemerkungen müssen allerdings gemacht werden. Der Leser muß sich, vor allem im ersten Drittel des Buches, doch an einer ganzen Reihe von Unschönheiten bzw. Ungereimtheiten sprachlicher und mathematischer Natur stoßen. Einleitend zu § 4 steht z. B. auf S. 80 der folgende Satz: „Wir beweisen den Satz 4.1, den Transformationssatz, mit diesem Satz zur Verfügung ist es leicht den Raum $W_2^{\ell}(M)$, M eine (kompakte) differenzierbare Mannigfaltigkeit, zu definieren, siehe Definition 4.4.“ Auf S. 110 liest man im Zusammenhang mit dem Sobolevschen Einbettungssatz: „Falls ℓ genügend groß ist, dann besteht $W_2^{\ell}(\Omega)$ nur aus stetigen Funktionen, ja sogar aus stetigen, differenzierbaren Funktionen, sieht man von Nullmengen ab.“ Auf S. 70 findet man: „Nach Definition des Trägers $\text{supp } \varphi$, siehe Definition 1.3, ist dieser relativ abgeschlossen bezüglich Ω , er kann sich aber durchaus bis zum Rande $\partial\Omega$ hin erstrecken und eine Funktion $\varphi \in W_2^{\ell}(\Omega)$, $\ell \geq 1$, kann auf dem Rande eine scharfe Bruchstelle haben und durch 0 unfortsetzbar sein.“ Hier hätten Autor und Verlag doch besser aufpassen sollen. Die Begriffe „Convolution“ (mit C), „Support“ hätte man besser übersetzt, mit „Unterfolgen“ sind „Teilfolgen“ gemeint, „Zerlegungen“ sind oft nur „Überdeckungen“. Teilweise gibt es Inversionen bei der Definition und dem Gebrauch von Symbolen und Begriffen. Der Begriff der $C^{k,k}$ -Mannigfaltigkeit wird nirgendwo ganz richtig definiert (die auf S. 65 oben gegebene Äquivalenzrelation ist keine). Lemma 3.4 ist falsch (vgl. J. L. Lions-E. Magenes I, S. 60). Die vom Leser erwarteten funktionalanalytischen Kenntnisse sind sehr inhomogen: Einerseits wird auf S. 21 ohne Vorbereitung von der Topologie des induktiven Limes gesprochen und auf S. 169 die Spektraltheorie kompakter Operatoren zitiert, andererseits wird dem Beweis der schwachen Folgenkompaktheit der Einheitskugel im Hilbertraum ein guter Teil von § 9 gewidmet und auf S. 70 die Separabilität von Unterräumen separabler Hilberträume erneut bewiesen.

Eines sollte sich jeder, der das Buch zum ersten Male in die Hand nimmt, auch vor Augen halten: Der eigentliche Titel des Buches „Partielle Differentialgleichungen“ wie auch die Kapitelüberschriften sind etwas irreführend. Es handelt sich hier nicht um die (vielleicht langersehnte, dem ganzen Ideenreichtum des Gebietes in moderner Form möglichst gerecht werdende) Einführung in das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen als Ganzes. Der klassische Aspekt der Theorie und ihr physikalischer Hintergrund, die Herausarbeitung der Unterschiede der drei großen Typen von Gleichungen fehlen so gut wie ganz, und die Wahl des Untertitels „Sobolevräume und Randwertaufgaben“ als Haupttitel wäre angemessener gewesen.

Fucik, S., Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems (Mathematics and its Applications, vol. 4) Dordrecht – Boston – London: D. Reidel Publ. 1980, 390 p., cloth, Dfl. 60.00

Das vorliegende Buch befaßt sich in erster Linie mit dem Problem, Aussagen über die Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen der Form $Lu = Su$ zu gewinnen. Hierbei sind L ein linearer und S ein nichtlinearer Operator in einem Banachraum, wobei in den interessantesten Fällen L einen nichttrivialen Kern besitzt. Gleichungen dieser Form bilden den abstrakten Rahmen für eine Vielzahl von Problemen in der Theorie der Differentialgleichungen, nämlich z. B. für Randwertprobleme oder für das Problem der Existenz periodischer Lösungen bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Derartige Probleme sind in den letzten 10 bis 15 Jahren auf reges Interesse gestoßen und haben die Entwicklung neuer Methoden der nichtlinearen Funktionalanalysis entscheidend beeinflußt.

In dem vorliegenden Buch entwickelt der Autor einige wenige einfache abstrakte Resultate, die er auf eine Vielzahl konkreter Probleme aus der Theorie der Differentialgleichungen anwendet. Dabei legt er großen Wert auf möglichst allgemeine Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Die dabei auftretenden Probleme sind vorwiegend technischer Natur, welche für die grundlegenden Ideen von untergeordneter Bedeutung sind, dem Neuling auf diesem Gebiet jedoch die Lektüre erschweren und den Blick auf das Wesentliche verstellen. Der Rezensent hätte es begrüßt, wenn der Verfasser die abstrakten Resultate und Methoden anhand einiger ausgewählter einfacher Beispiele demonstriert und so den technischen Aufwand minimal gehalten hätte.

Das Buch ist nicht als Lehrbuch konzipiert, obwohl es aus Vorlesungen hervorgegangen ist. Viele der benötigten Hilfsmittel sind zu Beginn ohne Beweis zusammengestellt, und vom Leser wird eine gewisse Vertrautheit mit den elementaren Tatsachen der linearen und nichtlinearen Funktionalanalysis sowie mit der Theorie (schwacher Lösungen) elliptischer Randwertprobleme erwartet. Der Spezialist wird jedoch eine Vielzahl von Anregungen – insbesondere auch explizit formulierte "offene Probleme" – finden. Zu erwähnen ist auch das ausführliche, 354 Bücher und Zeitschriftenartikel umfassende Literaturverzeichnis, welches den Stand der Forschung auf diesem Gebiet bis zum Jahr 1978 ziemlich vollständig wiedergeben dürfte.

Zürich

H. Amann

Clements, D. L., Boundary Value Problems Governed by Second Order Elliptic Systems (Monographs and Studies in Mathematics, vol. 12) Boston – London – Melbourne: Pitman Publ. 1981, viii + 162 p., £21.00

Hinter dem Titel verbirgt sich eine Darstellung von relativ expliziten Lösungsmöglichkeiten für eine Reihe von speziellen Randwertaufgaben aus der Elastizitätstheorie und Wärmelehre. Dem Mathematiker wären sicher einige nähere Erläuterungen zur Bedeutung der einzelnen Probleme hilfreich. Das Buch ist neben dem Spezialisten interessant für den, der Anwendungsbeispiele für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen und/oder der Funktionentheorie sucht. Als Grundlage für ein Seminar läßt sich der Band gut vorstellen.

Nun noch einiges zum Inhalt: Kap. 1 (13 S.) nennt die behandelten elliptischen Systeme 2. Ordnung:

$$(*) \quad \sum_{k=1}^N \sum_{j, \ell=1}^2 a_{ijk\ell} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x_j \partial x_\ell} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

die Koeffizienten sind konstant und symmetrisch bei Vertauschung von (i, j) mit (k, ℓ) . Die

Lösungen werden in der Form

$$\phi_k(x_1, x_2) = A_k f(x_1 + \tau x_2)$$

mit holomorphen Funktionen f und Konstanten A_k und τ angesetzt. Der geeigneten Bestimmung dieser Konstanten gilt im Grunde das Interesse. Die Randvorgaben sind von 1., 2. und 3. Art, Integralformeln und allgemeine Aussagen über die Konstanten werden aufgestellt. Im Kap. 2 (16 S.) werden die betrachteten Probleme aus der Elastizitätstheorie und Wärmelehre in der Form (*) beschrieben. Kap. 3 (29 S.) bringt für das allgemeine System die Lösung spezieller Randwertaufgaben, meist in Form von Integralen, z. B. verschiedene Probleme für die Halbebene, geschlitzte Ebene, den Streifen usw. Im Kap. 4 (50 S.), dem Hauptteil des Buches, werden für die im Kap. 2 genannten Fragestellungen mit Hilfe von Kap. 3 spezielle Randwertaufgaben gelöst, zum Teil bis zu numerischen Resultaten. Kap. 5 (13 S.) ist der Konstruktion der Greenschen und Neumannschen Funktion in gewissen Fällen gewidmet, was im abschließenden Kap. 6 (26 S.) zur Aufstellung von Integralgleichungen für das System (*) mit von Null verschiedener rechter Seite benutzt wird. Einzelfälle werden näher diskutiert. Das Buch ist gut lesbar geschrieben, die umfangreichen Rechnungen scheinen in einem vernünftigen Umfang ausgeführt.

Aachen

K. Habetha

Chung, K. L., Lectures from Markov Processes to Brownian Motion (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 249) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, viii + 239 p., cloth DM 79,-

Der Autor gibt auf beschränktem Raum eine gut lesbare Einführung in die moderne Theorie der Markoffprozesse. Ohne mehr als gängiges wahrscheinlichkeitstheoretisches Grundwissen vorauszusetzen, führt er, Altbekanntes mit Neuem verbindend, von der elementaren Markoff-Eigenschaft, Stoppzeiten und Martingalen über Fellerprozesse, die starke Markoff-Eigenschaft, Rechtsstetigkeit, die „gemäßigte“ Markoff-Eigenschaft und Quasi-Linksstetigkeit hin zu einer ausführlichen Diskussion von Huntprozessen und einer am Geschmack des Autors orientierten Auswahl von Themen aus dem Umkreis des zentralen Beispiels der Brownschen Bewegung und der Potentialtheorie. Als interessante Besonderheit sei die Behandlung der Schrödinger-Gleichung mit Hilfe des Feynman-Kac-Funktional erwähnt. Das Buch ist aus Vorlesungen eines Jahrzehnts hervorgegangen, und es ist dem Autor trotz lehrbuchmäßiger Strenge und Systematik gelungen, die Unmittelbarkeit und Frische einer Vorlesung zu bewahren. Die Darstellung ist klar und auf das Wesentliche konzentriert, sorgfältig motiviert und ohne technischen Ballast. Der Haupttext wird durch eine Fülle von Übungsaufgaben und Anmerkungen ergänzt.

Göttingen

H. Hering

Cornfeld, I. P., Fomin, S. V., Sinai, Ya. G., Ergodic Theory (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 245), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, x + 486 p., cloth DM 118,-

Dies ist die lang-erwartete „Ergodenbibel“ aus der sowjetischen Schule. S. V. Fomin hat ihr Erscheinen nicht mehr erlebt. Zusammen mit der noch nicht erschienenen Monographie von U. Krengel über Ergodensätze dürfte sie für längere Zeit das Standardwerk über Ergodentheorie bilden. – Das erste entscheidende Ereignis in der Ergodentheorie der letzten 3 Jahr-

zehnte war die Entdeckung der Entropie-Invarianten durch Kolmogorov im Jahre 1958 bzw. kurz vorher. Sie brachte einen breiten Strom von Untersuchungen spezieller Klassen dynamischer Systeme in Gang, bei denen das Entropie- und Mischungsverhalten und das Isomorphieproblem im Mittelpunkt des Interesses standen. Das zweite entscheidende Ereignis war der Beweis für die Isomorphie von Bernoulli-Schemata gleicher Entropie durch Ornstein 1969. Er brachte einen breiten Strom von Untersuchungen spezieller Klassen dynamischer Systeme in Gang, bei dem die Frage der Isomorphie zu Bernoulli-Systemen im Mittelpunkt des Interesses stand. Die vorliegende Monographie erweist der von Ornstein initiierten Forschungsrichtung die gebührende Reverenz – das Ornsteinsche Isomorphie-Resultat wird in der verschärften Form nach Keane-Smorodinski 1979 bewiesen – breitet aber vor allem die Fülle des von der sowjetischen Schule erarbeiteten Materials über die sog. K-Eigenschaft von dynamischen Systemen aus, unter denen die mit kontinuierlichem Zeitparameter versehenen differentialgeometrischen Systeme (z. B. die „geodätische Strömung“) und das bei der Attacke auf die Ergodenhypothese erfundene „Sinai-Billard“ eine besondere Rolle spielen. Speziell „russisch“ ist ferner das Arbeiten mit den Rokhlin'schen Lebesgue-Räumen, sowie mit Partitionen statt σ -Algebren.

Das Buch ist in vier Teile gegliedert: Teil I (Kap. 1–9) handelt von Ergodizität und Mischung, Teil II (Kap. 10, 11) von grundlegenden Konstruktionen, Teil III (Kap. 12–14) von der Spektraltheorie dynamischer Systeme, Teil IV (15, 16) von der Approximation beliebiger Systeme durch periodische. Hinzu kommen vier Anhänge, die technische Hilfsmittel bereitstellen.

Kap. 1 stellt das grundlegende Handwerkszeug des Ergodikers bereit: dynamische Systeme, Ergodizität, Mischung, K-Eigenschaft, Poincarés Wiederkehrsatz, Birkhoff-Khinchin'scher Ergodensatz, mean ergodic theorem (von Neumann). Dabei werden zeit-diskrete und zeit-kontinuierliche Systeme parallel behandelt. – Kap. 2 bringt die grundlegenden Beispiele und Eigenschaften differenzierbarer dynamischer Systeme: Liouville's Theorem, Maßtreue der geodätischen Strömung. – In Kap. 3 werden Torus-Strömungen behandelt: Kronecker-Strömungen und die Denjowsche Theorie der Homöomorphismen der Kreislinie, nebst Erweiterungen maß-theoretischer Art. – Kap. 4 beschäftigt sich mit Gruppentranslationen, schiefen Produkten, Endo- und Automorphismen von topologischen Gruppen. – In Kap. 5 werden Intervall-Vertauschungs-Abbildungen behandelt und z. B. ihr Nicht-Mischen bewiesen. – Kap. 6 ist Billard-Systemen gewidmet. – In Kap. 7 wird Weylsche Gleichverteilung mod 1 behandelt; hier würde sich das bekannte Büchlein von E. Hlawka als weiterführende Lektüre anbieten. – Strikt stationäre stochastische Prozesse, insbesondere Gaußsche, bilden den Gegenstand von Kap. 8. – Systeme der statistischen Mechanik werden in Kap. 9 behandelt. – In Kap. 10 findet man u. a. das Rokhlin-Lemma, die Grundlagen der Entropie-Theorie und das Isomorphie-Theorem von Ornstein-Keane-Smorodinski, ferner die grundlegenden Tatsachen über exakte Endomorphismen und K-Systeme. – Kap. 11 handelt vom Ambrose-Kakutani-Theorem über die Darstellung von zeit-kontinuierlichen Strömungen als Strömungen unter einer Funktion („special flow“) samt der Rudolph'schen Verschärfung. – In Kap. 12 werden dynamische Systeme mit reinem Punktspektrum behandelt. – Den Kernbestand von Kap. 13 bilden Ergebnisse über das Auftreten eines abzählbaren Lebesgue-Spektrums. – Kap. 14 bringt die Spektralanalyse Gaußscher Prozesse. – In den Kapiteln 15–17 wird die Katok-Sinai-Stepin-Kushnirenko-Theorie der periodischen Approximation dynamischer Systeme ausgebreitet.

Das Buch ist ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zum gründlichen Einarbeiten in die Ergodentheorie und sollte für diesen Zweck Pflichtlektüre werden. Deswegen wird man sich andere einführende Darstellungen, wie das auf dem Markt erwartete Buch von Karl Petersen oder den Lecture Notes-Band von Peter Walters, nicht entgehen lassen. Das Buch läßt den Wunsch nach historischer Einordnung der Resultate im wesentlichen offen.

Pötschke, D., Sobik, F., Mathematische Informationstheorie, Berlin: Akademie-Verlag 1980, 253 S., DM 38,—

Die Autoren des vorliegenden Buches sind in drei Sätteln gerecht. Sie haben 1. ein vorzügliches Einführungsbuch, 2. eine Ergebnis-Monographie für den Fachmann und 3. ein Forschungsbuch in einem einzigen, noch dazu maßvoll dicken, Bande vorgelegt. Man mag sagen, daß die etwa gleichzeitig erschienene Monographie von Csiszár-Körner zukunftsweisender ist, aber man wird schwerlich ein ähnlich verständliches und gründliches Buch an die Seite des hier rezensierten stellen können. Es dokumentiert auch in gewisser Weise die Ernte, die aus der kurz nach 1960 geleisteten Übertragung der grundlegenden Überblicksartikel von A. I. Chintschin ins deutsche erwachsen ist.

Das Buch behandelt sämtliche Aspekte der Informationstheorie. Die Kapitelüberschriften: 1. Längenvariable Codes, 2. Grundbegriffe der Informationstheorie, 3. Shannonsche Informationstheorie, 4. Distorsionstheorie, 5. Topologische Entropie, 6. Nichtklassische Entropiemaße, 7. Das Codierungsproblem und grundlegende Eigenschaften algebraischer Codes, 8. Spezielle Klassen linearer Codes, 9. Volumenschranke und perfekte Codes, 10. Gleichmäßig gepackte Codes, 11. Arithmetische Codes, 12. Codierungssätze für algebraische Codes. Vielleicht sollte man die in Kap. 12 dargestellten Resultate, nach denen bei vielen Kanälen die Einschränkung z. B. auf Gruppencodes keine Erniedrigung der Kapazität bewirkt, besonders hervorheben.

Das Buch verdient weite Verbreitung bei Studenten und Dozenten, die sich im Gebiet Informationstheorie spezialisieren.

Erlangen

K. Jacobs

H. Gericke

Mathematik in Antike und Orient

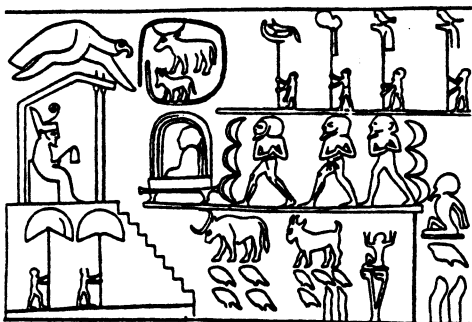
1984. Etwa 144 Abbildungen, etwa 6 Tabellen.

Etwa 335 Seiten.

Gebunden DM 98,—

ISBN 3-540-11647-8

Inhaltsübersicht: Vorgriechische Mathematik. — Griechische Mathematik. — Mathematik im Orient. — Biographisch-bibliographische Notizen. — Stichwortverzeichnis. — Kartenskizzen. — Tafeln der Zahlzeichen.



7130/5/1



Springer-Verlag
Berlin
Heidelberg
New York
Tokyo

Tiergartenstr.17, D-6900 Heidelberg 1
175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA
37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan

Mathematik in Antike und Orient führt an die Originale der Zeit heran und läßt die Art des mathematischen Denkens der Völker sichtbar werden. Der Autor strebt keine minutiöse Auflistung aller mathematischen Leistungen der jeweiligen Epoche an, sondern stellt die Durchführung wichtiger, sorgfältig ausgewählter Beispiele in den Vordergrund. Neben einer kurzen Darstellung der prähistorischen Mathematik wird die Mathematik der Babylonier und Ägypter, ausführlicher dann die Mathematik der Griechen behandelt, wobei besonders die Entwicklung der axiomatisch-deduktiven Methode besprochen wird. Dann folgt kurz die Mathematik der Chinesen, der Inder und der Länder des Islam. Ausführliche biographisch-bibliographische Notizen erleichtern die zeitliche Einordnung und geben dem Leser eine gute Orientierung in der Fülle der Originalarbeiten. Unabhängig von den anderen Kapiteln dienen sie auch als Nachschlagewerk über die großen Mathematiker der damaligen Zeit.



Die neue Lehrbuchreihe im Mathematikprogramm des Springer-Verlags

Grundwissen Mathematik

Herausgegeben von: G. Hämmerlin, F. Hirzebruch, M. Koecher,
K. Lamotke, R. Remmert, W. Walter

Das *Grundwissen Mathematik*, das jeder Mathematiker im Laufe seines Studiums erwirbt, wird erst durch die Vielfalt von Bezügen zwischen den einzelnen mathematischen Theorien zu einem einheitlichen Ganzen. Querverbindungen zwischen den Einzeldisziplinen lassen sich oft durch die historische Entwicklung aufzeigen. Es ist ein Leitgedanke dieser Reihe, dem Leser deutlich zu machen, daß Mathematik nicht aus isolierten Theorien besteht, die nebeneinander entwickelt werden, sondern daß Mathematik vielmehr als Ganzes angesehen werden muß.

In der Reihe *Grundwissen Mathematik* werden Lehrbücher eines neuen Typs erscheinen. Schon bei der Einführung und Formulierung eines Begriffes, Satzes oder Themenkomplexes kommen oft Motivation, Bedeutung und spätere Anwendungen zur Sprache. Die Darstellung der historischen Entwicklung spielt dabei eine wichtige Rolle; zeigt sie doch, wie sich die Gegenstände der modernen Mathematik aus älteren Fragestellungen entwickelt haben, die in der heutigen Formulierung oft nicht mehr ohne weiteres sichtbar sind. Beispiele und Bemerkungen machen die Bedeutung und Anwendung eingeführter Begriffe und Sätze verständlich; sie gehen an manchen Stellen über den bisher entwickelten Stoff hinaus und verweisen auf den Inhalt anderer Kapitel oder Bände.

Die Bände dieser Reihe sind als langlebige Arbeitsmittel konzipiert:

- Der Studienanfänger findet seinen Vorlesungsstoff verständlich und motivierend dargestellt.
- Bei Prüfungsvorbereitungen geben die vielen Querverbindungen gute Hilfestellung, den Stoff im Zusammenhang zu sehen und so besser zu verstehen.
- Neue Blickwinkel, durch ausgesuchte Beispiele illustriert, geben auch dem Gymnasial-Lehrer eine Fülle von Anregungen für seinen Unterricht.

Jeder, der sich mit Mathematik beschäftigt – an der Hochschule, am Gymnasium oder in der Wirtschaft und Industrie – wird die Bände dieser Reihe mit großem Gewinn lesen und immer wieder gerne zur Hand nehmen.

Band 1

Zahlen

Von H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch,
M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, R. Remmert

Redaktion: K. Lamotke

1983. Etwa 280 Seiten
DM 48,-. ISBN 3-540-12666-X
Erscheinungstermin: Oktober 1983

Erstmals werden alle interessanten Zahlensysteme in *einem* Buch ausführlich behandelt. Sieben Autoren und ein Redakteur haben in enger Zusammenarbeit dargestellt, wie sich der Zahlbegriff historisch entwickelt hat und wie er exakt begründet und erweitert werden kann.

Der erste Teil bietet zum Thema „Zahlen“ das, was jeder Mathematiker zu diesem Thema gehört und gelesen haben sollte. Die beiden anderen Teile sollen eine über das *Grundwissen* hinausgehende Neugier des Lesers stillen. Sie bieten eine Fülle von Themen auch für Proseminare oder Seminare. In diesem Sinn ist der Zahlenband für die neue Lehrbuchreihe *Grundwissen Mathematik* nicht charakteristisch; insbesondere können die anderen Bände dieser Reihe unabhängig vom Zahlenband studiert werden.

Band 2

M. Koecher

Lineare Algebra und analytische Geometrie

1983. 35 Abbildungen. XI, 286 Seiten
DM 38,-. ISBN 3-540-12572-8
Erscheinungstermin: August 1983

Das *Grundwissen* zur *Linearen Algebra und analytischen Geometrie*, Thema einer zweisemestrigen Vorlesung, wird hier von einem kompetenten Autor vermittelt.

Vom Inhalt her unterscheidet sich dieser zweite Band der Reihe *Grundwissen Mathematik* deutlich von anderen Büchern zur Linearen Algebra. Unter anderem sind zu nennen:

- Die analytische Geometrie in der Ebene und im Anschauungsraum hat neben den euklidischen Vektorräumen ihren Platz.
- Der Matrizen- und Determinantenkalkül wird in teilweise neuer Form dargestellt.
- Von Anfang an wird auf wichtige Beispiele aus der Analysis besonderer Wert gelegt.
- Nicht zuletzt werden häufig historische Bezüge aufgezeigt.
- Übungsaufgaben sind harmonisch in den Text eingearbeitet und bieten dem Leser eine ständige Kontrolle des Erlernten.

In Vorbereitung:

Band 3: W. Walter, Universität Karlsruhe

Analysis I ISBN 3-540-12780-1

Band 4: W. Walter, Universität Karlsruhe

Analysis II ISBN 3-540-12781-X

Band 5: R. Remmert, Universität Münster

Funktionentheorie I ISBN 3-540-12782-8

Band 6: R. Remmert, Universität Münster

Funktionentheorie II ISBN 3-540-12783-6



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

Tiergartenstr. 17, D-6900 Heidelberg 1 or 175Fifth Ave., New York, NY 10010, USA
or 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan

Erich Hecke

Lectures on Dirichlet Series, Modular Functions and Quadratic Forms

Edited by Bruno Schoeneberg in collaboration with Wilhelm Maak.
1983. 98 Seiten mit 10 Figuren, kart. DM 32,-

Table of Contents:

Introduction: The Riemann zeta-function; Associated Dirichlet series and power series; The Euler product; Quadratic forms / The first main theorem: The correspondence between Dirichlet series and power series; The group $\mathfrak{G}(\lambda)$. The transformation of the power series / The case $\lambda > 2$: Definition and determination of fundamental region; The local uniformising variable; Existence of automorphic forms / The case $\lambda < 2$: The finiteness of the number of solutions; The possible values of λ and k ; The number of solutions; The existence of solutions; The O -assertion; The modular case; Construction of solutions for $\lambda \neq 1$ from those $\lambda = 1$ / The case $\lambda = 2$: The region F ; The order of the forms; The number of functions $f(\tau)$; Special cases; Concluding remarks / The Euler product: Entire forms; The substitution L of order n ; The operator $T(n)$; The second main theorem; The Euler product; Eigen-function of the operator-ring; Cusp-forms; Concluding remarks / The connection with quadratic forms: The multiple theta-series; Some special cases / Generalisation to systems of Dirichlet series: The zeta-function for imaginary quadratic fields $K(\sqrt{-D})$; The general formulation; The case $\lambda = q$.

Erich Hecke

Mathematische Werke

Herausgegeben im Auftrage der Akademie der Wissenschaften in Göttingen.
3., durchgesehene Auflage 1983. 960 Seiten u. 1 Blatt Kunstdruck, im Schuber Leinen
DM 198,-

»... Es ist sehr begrüßenswert, daß dieses mathematische Lebenswerk, das so tiefliegende und noch keineswegs ausgeschöpfte Ergebnisse. Ansätze und Ideen insbesondere zur analytischen Zahlentheorie enthält und auf zahlreiche, nicht immer leicht zugängliche Zeitschriften verteilt war, in einem Sammelband vereinigt wurde. Es dürfte für die an analytischer Zahlentheorie und ähnlichen Fragen interessierten Mathematiker ein besonders anregendes und beliebtes Nachschlagewerk sein.«

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

»... Die Ausstattung des Bandes ist vorzüglich. Das Buch wird in Fachkreisen sicher mit Freude begrüßt werden...«

Internationale Mathematische Nachrichten

Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen u. Zürich

New

Leonhard Euler

Beiträge zu Leben und
Werk

Gedenkband des
Kantons Basel–Stadt



1983, 560 pages,
62 Illustrations,
1 Figure, Hardcover
sFr. 58.-/DM 68.-
ISBN 3-7643-1343-9

In German

Prices are subject to change
without notice 6/83

This collection of essays is a commemorative volume on the life and work of Leonhard Euler, Swiss mathematician and physicist. The essays present a cosmopolitan man with a breadth of vision that spanned both infinitely small numbers and the infinitely large cosmos. Between those limits of the

incomprehensible – of which Euler was a pioneer – lie the many practical applications on which he worked, among them nautical, optical and hydraulic instruments. As one of the outstanding scientists of his time, Euler contributed to the standard structures of science, and helped pave the way for the Industrial Revolution. This project, with contributions from ten nations and in three languages, was organized by Euler's home city of Basel, to mark the 200th anniversary of his death.

Please order from your bookseller
or Birkhäuser Verlag,
P.O. Box 133,
CH-4010 Basel/Switzerland
or Birkhäuser Boston Inc.,
380 Green Street, Cambridge
MA 02139/USA

**Birkhäuser
Verlag**

Basel · Boston · Stuttgart

