86. Band Heft 2
ausgegeben am 18. 4. 1984

DMV

# Jahresbericht

## der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1984

# Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

**Manuskripte**

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende dieses Heftes zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

**Bezugsinformationen**

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 84,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz


Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

# Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Inhalt Band 86, Heft 2

### 1. Abteilung



### 2. Abteilung

## In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

**D. Gaier**: Approximation im Komplexen
**J. Heinhold; A. Kerber**: Dem Andenken an Hermann Boerner
**P. Henrici**: Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei formalen Potenzreihen
**D. Jungnickel**: Lateinische Quadrate, ihre Geometrien und ihre Gruppen
**R. Tijdeman**: On the Fermat-Catalan Equation
**E. Viehweg**: Zur Klassifikationstheorie drei(und höher)dimensionaler projektiver Mannigfaltigkeiten

---

**Anschriften der Herausgeber**

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

**Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 86 (1984) 37–68 

# Topologie und Geometrie von 3-Mannigfaltigkeiten

K. Johannson, Bielefeld

Dies ist ein Bericht über die Theorie der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Ich meine, ein solcher Bericht, oder besser Zwischenbericht, ist gerade heute durchaus gerechtfertigt, haben doch die letzten Jahre einige allgemein interessierende Einsichten in die Struktur der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten gebracht. Einige der klassischen Fragestellungen konnten beantwortet werden und für andere erscheinen neue Methoden als vielversprechend. So konnte z. B. das Klassifikationsproblem für Haken-3-Mannigfaltigkeiten gelöst, die Bedeutung der Fundamentalgruppe für Haken-3-Mannigfaltigkeiten völlig geklärt und die Smith-Vermutung bewiesen werden. Insbesondere sind damit alle Knoten klassifizierbar und das Isomorphieproblem für Knotengruppen lösbar. Dies sind gewissermaßen einige der neuen Haltepunkte in einer längeren Entwicklung, die um 1900 mit der Herausbildung des Begriffs der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit eingesetzt hat. Im folgenden möchte ich versuchen, einen kleinen, historisch orientierten, Überblick über einige der herausragenden Stationen in der bisherigen Entwicklung der Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten zu geben.

## § 1 Die Anfänge der Theorie

Wie viele mathematische Disziplinen strebt auch die Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten letztlich danach, die Reichhaltigkeit und Klassifizierbarkeit ihrer Gegenstände zu erweisen. Allerdings stand am Anfang dieser Theorie noch die Diskussion darüber, was eigentlich ihre Objekte (und Morphismen) sein sollen. Zwar bestand kein Zweifel daran, daß die Objekte „Mannigfaltigkeiten" sind, doch je nach Auffassung konnten darunter Punktmengen mit spezieller („lokal euklidischer") Topologie (mengentheoretischer Standpunkt) oder gewisse Komplexe von geometrischen Simplizes verstanden werden, deren Seiten nach einer festen Vorschrift miteinander „verheftet" sind (semi-linearer Standpunkt). Die reinen Kombinatoriker unter den Topologen (wie etwa Reidemeister) identifizierten eine Mannigfaltigkeit sogar mit dieser bloßen Vorschrift selbst, d. h. mit der Inzidenzmatrix, die angibt, welche Simplizes des Komplexes mit welchen inzident sind (vgl. zu dieser Diskussion [Dehn-Heegaard, 1907, S. 170/71], [van der Waerden, 1930], [Alexander, 1932]). Es ist bekannt, welchen Aufschwung die mengentheoretische Betrachtungsweise in der Topologie, insbesondere nach der Entdeckung der simplizialen Approximation, durchgemacht hat. Es ist aber auch bekannt, welch wichtigen Platz in der jüngsten

Topologie der höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten erneut ein simplizialer Standpunkt einnimmt.

Die niedrigdimensionale Topologie hat dagegen immer sehr viel stärker den semi-linearen Standpunkt beibehalten, obwohl erst 1952 und zwar von Moise [Moise, 1952] die Triangulierbarkeit aller 3-Mannigfaltigkeiten nachgewiesen wurde (für alternative Beweise siehe [Bing, 1959], [Shalen, 1971], [Moise, 1977], [Hamilton, 1976]). Dies ist ein Resultat, das für Flächen schon in [Rado, 1924] bewiesen wurde und das bekanntlich für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten im allgemeinen falsch ist [Kirby-Siebenmann, 1969]. Der semi-lineare Standpunkt hat seine Wurzeln in den Bemühungen der Polyedertheorie des 19. Jahrhunderts, den Eulerschen Polyedersatz zu verallgemeinern [Scholz, 1980]. Gerade hieran aber zeigt sich sowohl Nachteil als auch Vorzug des semi-linearen Standpunktes: Einerseits ist es schwierig für simpliziale Mannigfaltigkeiten die Invarianz solcher Größen, wie etwa die Euler-Charakteristik, zu zeigen. Andererseits bietet gerade der simpliziale Standpunkt überhaupt erst eine Möglichkeit, Invarianten wirklich zu berechnen, oder gar einen Ansatz, um die Klassifikation von Mannigfaltigkeiten anzugreifen. Dabei verstehe ich hier mit Papakyriakopoulos [Papakyriakopoulos, 1958] unter der Klassifikation von 3-Mannigfaltigkeiten die Angabe einer vollständigen (nicht notwendig endlichen )Aufzählung ohne Wiederholung.

Von nun an soll, wenn nichts anderes gesagt ist, unter einer 3-Mannigfaltigkeit eine kompakte, orientierbare, simpliziale 3-dimensionale Mannigfaltigkeit verstanden sein. In diesem Sinne lassen sich nun 3-Mannigfaltigkeiten zumindest aufzählen. Man erzeugt zu diesem Zweck einfach – durch eine Rekursion über die Anzahl der verwendeten 3-Simplizes – alle möglichen 3-Komplexe und sortiert in jedem Schritt aus diesen die aus, die keine Mannigfaltigkeiten sind. 3-Mannigfaltigkeiten sind ja (zusammen mit den 1- und 2-Mannigfaltigkeiten) dadurch ausgezeichnet, daß man den letzten Schritt für sie wirklich ausführen kann: Ein n-Komplex, $n \leqslant 3$, ist nämlich genau dann eine n-Mannigfaltigkeit, wenn der Umgebungsrand jeder Ecke (0-Simplex) eine $(n - 1)$-Sphäre ist, und die Klassifikation von Flächen wurde ja schon im 19. Jahrhundert von Möbius und Jordan gelöst [Scholz, 1980]. Mit der Möglichkeit einer Aufzählung (evtl. mit Wiederholung) aber ist das Klassifikationsproblem für 3-Mannigfaltigkeiten im Prinzip gleichbedeutend mit dem Homöomorphieproblem für 3-Mannigfaltigkeiten, das ich des einheitlichen Sprachgebrauches wegen auch als das Isomorphieproblem für 3-Mannigfaltigkeiten bezeichnen werde (siehe hierzu den Übersichtsartikel [Waldhausen, 1978]). Das Isomorphieproblem einer wohldefinierten Klasse von mathematischen Objekten verlangt bekanntlich die Angabe eines Algorithmus, der für je zwei vorgelegte Gegenstände aus dieser Klasse in endlich vielen Schritten entscheidet, ob sie „isomorph“ sind.

In § 3 und § 5 werde ich etwas genauer auf den heutigen Stand dieses und anderer Entscheidungsprobleme für 3-Mannigfaltigkeiten eingehen. Hier möchte ich zuvor kurz die Ansätze der ersten Jahrzehnte behandeln.

Ein erstes Programm zur Lösung des Isomorphieproblems für 3-Mannigfaltigkeiten besteht darin, möglichst viel „überflüssige“ Information der Präsentation einer 3-Mannigfaltigkeit als simplizialer Komplex zu vergessen, d. h. diese Präsentation durch einfachere zu ersetzen. Eine ganze Reihe solcher Präsentationen ist heute bekannt. So sind schon die Polyeder-Präsentation und die Heegaard-Diagramme, wie sie sich in dem Standardwerk [Seifert-Threlfall, 1934] dargestellt finden, zwei Präsentationen von 3-Mannigfaltigkeiten, die auf den ersten Blick recht übersichtlich wirken. Weiter zeigte Alexander [Alexander, 1920] (siehe auch [Lickorish, 1973]), daß jede 3-Mannigfaltigkeit auf ähnliche Weise eine verzweigte Überlagerung der $S^3$ ist, wie jede orientierbare Fläche verzweigte Überlagerung der $S^2$ (= 2-dim. Sphäre) ist. Nur ist die Verzweigungsmenge nicht mehr eine endliche Menge von Punkten, sondern ein System von miteinander verschlungenen, geschlossenen Kurven (d. h. eine Verschlingung) in der $S^3$. Diese Verzweigungsmengen wurden vor einigen Jahren intensiv studiert und darüber hinaus wurde von verschiedenen Autoren gleichzeitig und unabhängig gezeigt, daß jede 3-Mannigfaltigkeit die $S^3$ sogar dreiblättrig verzweigt überlagert [Montesinos, 1974], [Hilden, 1974], [Hirsch, 1974]. Es zeigte sich, daß dies eine Folge der oben erwähnten Möglichkeit einer Heegaard-Präsentation von 3-Mannigfaltigkeiten ist. Als eine andere Folge ergibt sich die Chirurgie-Präsentation von 3-Mannigfaltigkeiten. Die geometrische Konstruktion, die wir heute Chirurgie nennen, wurde seinerzeit von Dehn in der für die Herausbildung einer Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten so wichtigen Arbeit [Dehn, 1910], eingeführt. Dehn macht dort darauf aufmerksam, daß durch Ausbohren einer kleinen, tubenartigen Umgebung eines Knotens in der $S^3$, d. h. eines Vollringes in der 3-Sphäre, und durch anschließendes, aber verändertes Wiedereinsetzen dieses Vollringes (d. h. „durch Chirurgie am Knoten") wieder eine 3-Mannigfaltigkeit entsteht, die jetzt aber i. a. verschieden ist von der $S^3$. Viele dieser so entstehenden 3-Mannigfaltigkeiten $M^3$ sind Homologiesphären (d. h. $H_k(M^3, \mathbf{Z}) \cong H_k(S^3, \mathbf{Z})$, für alle $k \geqslant 0$), und so sah man in der Chirurgie zunächst eine Methode, um konkrete Beispiele zu konstruieren. Dehn hatte aber alle Mittel in der Hand, um darüber hinaus zu zeigen, daß alle 3-Mannigfaltigkeiten durch eine solche Chirurgie (evtl. an einer Verschlingung statt an einem einzelnen Knoten) erhalten werden können (siehe hierzu auch § 2), und dennoch wurde diese Tatsache (die Chirurgie-Präsentation) erst 1962 von Lickorish ausgesprochen (und bewiesen) [Lickorish, 1962].

Die bisher beschriebene Situation hat formal eine gewisse Ähnlichkeit mit der kombinatorischen Gruppentheorie. Auch dort werden die Objekte, die Gruppen, durch ein Schema und zwar in diesem Fall durch Angabe von Erzeugenden und Relationen präsentiert. Tatsächlich kann man nun aus den Präsentationen von 3-Mannigfaltigkeiten eine solche der zugehörigen Fundamentalgruppen bestimmen, und es bestand umgekehrt die Hoffnung, durch ein rein algebraisches Studium der Gruppen und ihrer Präsentationen genaueres auch über die 3-Mannigfaltigkeiten selbst zu erfahren. Wir wissen zwar heute, daß sich eine ganze Reihe von topologischen Eigenschaften von 3-Mannigfaltigkeiten tatsächlich konkret durch Eigenschaften der entsprechenden Fundamentalgruppen beschreiben lassen, aber in bezug auf das Isomorphieproblem hat sich die obige Hoffnung bisher nicht erfüllt.

Immerhin weiß man für Gruppen, daß Präsentationen von isomorphen Gruppen durch endliches Anwenden von elementaren Transformationen (Tietze-Transformationen) auseinander hervorgehen. Entsprechendes ist in bezug auf die Präsentationen von 3-Mannigfaltigkeiten lediglich für die Präsentation als simplizialer Komplex (Hauptvermutung für 3-Mannigfaltigkeiten [Moise, 1952]) und neuerdings für die Chirurgie-Präsentation (Kirby-moves [Kirby, 1978]) bekannt. Aber leider löst diese Kenntnis, wie bei den Gruppen, noch nicht das Isomorphieproblem.

Um das Isomorphieproblem wenigstens für Fundamentalgruppen von 3-Mannigfaltigkeiten zu lösen, war es Ziel, aus den Präsentationen der Fundamentalgruppen noch weitere Größen herauszupräparieren, die 1. berechnet werden konnten, für die 2. das Isomorphieproblem gelöst werden konnte und deren Lösung schließlich 3. auch das der Gruppen impliziert [Reidemeister, 1927]. Ein drastisches Verfahren bestünde etwa darin, die zur Sprache stehenden Gruppen abelsch zu machen. Dies Verfahren erfüllt zwar die Bedingungen 1. und 2., doch ist andererseits die abelsch gemachte Fundamentalgruppe immer gleich der ersten Homologiegruppe der Mannigfaltigkeit, und schon Poincaré wußte [Scholz, 1980], daß durch die erste Homologiegruppe allein noch nicht einmal die Torus-Bündel über der $S^1$ (= Kreis) charakterisiert sind. (Wegen der Poincaré-Dualität sind übrigens auch alle höheren Homologiegruppen für 3-Mannigfaltigkeiten wenig interessant).

Abgesehen vom Isomorphieproblem für Fundamentalgruppen stellt sich aber auch schon die Frage, ob die Fundamentalgruppen selbst wirklich in dem Sinne „fundamental" sind, daß sie den Homöomorphietyp von 3-Mannigfaltigkeiten bestimmen (Poincaré warf die Frage auf, ob dies wenigstens für die $S^3$ zutrifft – eine Frage, die seitdem als Poincarésche Vermutung bekannt und ungelöst ist [Poincaré, 1904]). Dieses Problem wiederum schien seinerseits die Lösung des Homöomorphieproblems vorauszusetzen (siehe aber § 4 und § 5). In dieser Situation wurde zunächst das Ziel verfolgt, statt 3-Mannigfaltigkeiten und ihre Präsentationen in voller Allgemeinheit zu betrachten, vielmehr erst solche konkreten Beispiele zu suchen, denen zusätzliche geometrische Informationen entnommen werden können, um so für spezielle Klassen von 3-Mannigfaltigkeiten das Klassifikationsproblem zu lösen und – als Nebenprodukt – die Funktion der Fundamentalgruppe zu testen. Hierfür boten sich insbesondere die Knoten und die Raumformen an.

Die Theorie der Knoten (d. h. der semi-linearen Einbettungen von $S^1$ in $S^3$) hatte in dieser Zeit schon eine gewisse Tradition, die mit Untersuchungen von Gauß begann und insbesondere von der britischen Schule (Tait, Listing usw.) im 19. Jahrhundert betrieben wurde (z. T. motiviert durch Fragen aus der E-Dynamik und der Theorie der Wirbelatome, siehe hierfür [Dehn-Heegaard, 1907]. Die Knotentheorie ist auch heute ein eigenständiges Gebiet mit spezifischen Fragestellungen und einer ausgiebigen Literatur, die wir hier natürlich nicht darstellen können (siehe z. B. [Crowell-Fox, 1977], [Neuwirth, 1965], [Rolfsen, 1976] und die dort gegebene Literatur). Hier interessiert uns nur der Zusammenhang der Knoten mit den 3-Mannigfaltigkeiten. Dehn war der erste, der diesen Zusammenhang herstellte und Knoten konsequent als 3-Mannigfaltigkeiten betrachtete [Dehn, 1910]. Genauer betrachtete er statt des Knotens selbst das Komplement einer kleinen tubenartigen Umgebung in der $S^3$, den sog. Knoten-Außenraum. Seitdem gehören die Knoten zum wichtigsten Reservoir an konkreten Beispielen für 3-Mannigfaltigkeiten, an denen sich Vermutungen aufstellen und testen lassen. Dehn selbst gab einen einfachen Algorithmus an, um aus der Knoten-Projektion die Fundamentalgruppe des Knoten-Außenraumes, d. h. die Knotengruppe, abzulesen [Dehn, 1910]. So wie die $S^3$ gewissermaßen die „einfachste" 3-Mannigfaltigkeit ist, so ist der triviale

Knoten (≅ Einheitskreis in der Einpunkt-Kompaktifizierung des $\mathbf{R}^3$) der „einfachste" Knoten, allerdings mit dem Unterschied, daß der triviale Knoten wirklich eine einfache geometrische Charakterisierung hat, die mit der Fundamentalgruppe eng zusammenhängt. Er ist nämlich der Knoten, der Rand einer nicht-singulären 2-Scheibe, bzw. dessen Außenraum ein Vollring ist. Die Gruppe des trivialen Knotens ist also isomorph zu $\mathbf{Z}$. Für die Umkehrung machte Dehn die Beobachtung, daß ein Knoten zumindest eine singuläre 2-Scheibe berandet, deren Inneres den Knoten nicht trifft, falls seine Gruppe isomorph ist zu $\mathbf{Z}$. Die Frage, ob die Fundamentalgruppe wenigstens den trivialen Knoten charakterisiert, ist so in ein geometrisches Problem übersetzt, nämlich in die Frage, ob die Existenz einer solchen singulären Scheibe in einer 3-Mannigfaltigkeit immer auch die einer nicht-singulären Scheibe mit gleichem Rand impliziert. Dies ist der Inhalt des berühmten „Dehnschen Lemmas" [Dehn, 1910], doch stellten sich bald Zweifel an der Richtigkeit seines Beweises ein, die dann in [Kneser, 1929] offiziell ausgesprochen wurden. Erst rund ein halbes Jahrhundert nach der Formulierung des Dehnschen Lemmas wurde dieses dann wirklich bewiesen ([Papakyriakopoulos, 1957] nach Vorarbeiten in [Johansson, 1935]). Bis dahin waren all die Arbeiten unsicher, die sich auf das Dehnsche Lemma bezogen. Welche Bedeutung diese Situation für das Studium der 3-Mannigfaltigkeiten hatte, wird wohl am ehesten durch die Tatsache beleuchtet, daß die Herausbildung einer umfassenden Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten erst in den 60er Jahren, also nach dem Beweis des Dehnschen Lemmas einsetzte (siehe § 4).

Was die 3-dim. Raumformen betrifft, so wurden diese zwar nicht mit semi-linearen Methoden studiert, hatten und haben aber gleichwohl einen großen Einfluß auf die Entwicklung der Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten. Sie stellten die Antwort auf die Frage dar, welche Gestalt unser physikalischer Raum hat. Bekanntlich wurde von Riemann [Riemann, 1867] und unabhängig von ihm von Helmholtz [Helmholtz, 1868] herausgearbeitet, daß die empirischen Daten eine (evtl. nicht kompakte) 3-Mannigfaltigkeit als Modell des physikalischen Raumes erzwingen, die darüber hinaus versehen ist mit einer vollständigen Riemannschen Metrik von konstanter Krümmung. Eine solche Mannigfaltigkeit heißt euklidische, sphärische oder hyperbolische Raumform, je nachdem, ob keine, eine positive oder eine negative Krümmung vorliegt. Alle Versuche zu entscheiden, welche von diesen Arten auf den physikalischen Raum zutrifft, scheiterten bisher an den Meßgenauigkeiten (vgl. hierzu auch [Klein, 1928]). Dafür konnten aber bereits in den 30er Jahren sowohl die 3-dimensionalen euklidischen als auch die sphärischen Raumformen fast vollständig klassifiziert werden, und es kamen dabei, auch im Hinblick auf ihre Fundamentalgruppe, einige bemerkenswerte Eigenschaften zutage. So sind z. B. der euklidische, sphärische und hyperbolische Raum die einzigen Raumformen mit trivialer Fundamentalgruppe und somit ist die universelle Überlagerung von Raumformen bekannt. (Dies ist besonders deshalb bemerkenswert, weil nicht-kompakte 3-Mannigfaltigkeiten mit trivialer Fundamentalgruppe keineswegs immer homöomorph zum $\mathbf{R}^3$ sein müssen, für ein Gegenbeispiel siehe [Whitehead, 1935]). Die Fundamentalgruppe von Raumformen operiert, wie man es von den Riemannschen Flächen her kennt, als diskontinuierliche Bewegungsgruppe auf diesen Modellräumen. Hopf beginnt das Studium der Raumformen über diese Operationen. Waren bis dahin an 3-Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe lediglich die Linsenräume (entstehen aus der Verheftung der Ränder zweier Vollringe) und Poincarés Homologiesphäre (bisher die einzige bekannte Homologiesphäre mit endlicher Fundamentalgruppe) bekannt, so konnte Hopf in seiner Dissertation [Hopf, 1925] über die Raumformen hierfür eine ganze Reihe neuer Beispiele gewinnen. In einem ganz anderen Zusammenhang und einige Jahre später machte Hopf darüber hinaus die Beobachtung, daß sich die $S^3$ in eine Schar von disjunkten Kreisen zerlegen läßt (Hopf-Faserung) und daß durch die Kontraktion jedes dieser Kreise zu einem Punkt das für die Topologie so folgenreiche Beispiel einer nicht-zusammenziehbaren stetigen Abbildung $S^3 \to S^2$ entsteht [Hopf, 1931]. Threlfall und Seifert [Threlfall und Seifert, 1930 und 1932] greifen die Hopfschen Methoden für das Studium von sphärischen Raumformen auf und zeigen u. a. die bemerkenswerte Tatsache, daß es zu jeder endlichen, fixpunktlosen, sphärischen Bewegungsgruppe eine Zerlegung der $S^3$ in disjunkte Kreise (Seifert-Faserung) gibt, die unter der Gruppe in sich überführt wird. Insbesondere hat dann auch jede sphärische Raumform eine solche Zerlegung, ist also mit einer Seifert-Faserung versehen (siehe [Epstein, 1972] dafür, daß diese Beschreibung der Seifert-Faserung als codim 1 Blätterung für orientierbare, kompakte 3-Mannigfaltigkeiten zu der ursprünglich von Seifert in [Seifert, 1932] gegebenen Definition äquivalent ist). Diese ist, abgesehen von den Ausnahmen: Prismenräume und Linsenräume, auch eindeutig [Threlfall-Seifert, 1932]. Seifert führt dann in einer eigenen Arbeit [Seifert, 1932] die Klasse der 3-Mannigfaltigkeiten ein, die eine Zerlegung in Kreisen, d. h. eine Seifert-Faserung, zulassen. Diese 3-Mannigfaltigkeiten heißen heute *Seifertsche Faserräume*. Kontrahiert man jeden der Kreise (= Faser der Seifert-Faserung) zu einem Punkt, so entsteht, wie in dem Hopfschen Beispiel, eine 2-Mannigfaltigkeit, die sog. Zerlegungsfläche. Seifert zeigt wie deshalb i. w. aus der Klassifikation der Flächen (plus einiger zusätzlicher Daten) auch die der Seifertschen Faserräume und zwar bzgl. fasertreuer Homöomorphie folgt. (In [Orlik-Vogt-Zieschang, 1967] und [Waldhausen, 1967′] wird später gezeigt, daß dies für „genügend große" Seifertsche Faserräume auch eine Homöomorphie Klassifikation ist). Da die sphärischen Raumformen in der Klasse der Seifertschen Faserräume (echt) enthalten sind, sind jene, abgesehen von den obigen Ausnahmen, mit diesen ebenfalls klassifiziert. Es zeigt sich auch, daß jene (abgesehen von den Ausnahmen) bereits durch die Fundamentalgruppe charakterisiert sind. Für Linsenräume ist dies allerdings falsch! Dennoch konnten auch diese, und zwar von Reidemeister, mittels einer neuartigen Invariante, der Reidemeister-Torsion, vollständig klassifiziert werden [Reidemeister, 1935], [Franz, 1935], [Milnor, 1966], [Cohen, 1973]. Für Prismenräume siehe [Rubinstein, 1979′] und [Wolf, 1967]. Damit sind die sphärischen Raumformen i. w. erledigt. Die 3-dim. euklidischen Raumformen wurden, wenig später als die Arbeit von Threlfall und Seifert, klassifiziert [Hantzsche-Wendt, 1935]. Abgesehen von der Möglichkeit ihrer Klassifikation, ist schon die Entdeckung des Begriffs des Seifertschen Faserraumes allein ein wichtiges Resultat des Studiums der 3-dim. (euklidischen und sphärischen) Raumformen. Auch wenn die Seifertschen Faserräume in der Menge der 3-Mannigfaltigkeiten insgesamt recht selten sind (z. B. sind die Torusknoten die einzigen Knoten, deren Außenräume Seifertsche Faserräume sind), so spielen sie doch neuerdings auch für die allgemeine Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten eine wichtige Rolle (siehe § 5).

Was allerdings die 3-dim. hyperbolischen Raumformen angeht, so kannte man hiervon in den 30er Jahren nur wenige Beispiele (siehe [Threlfall, 1932]). Das Studium der Flächen zeigte aber, daß 1. fast alle Flächen 2-dim. hyperbolische Raumformen sind und daß sich 2. gerade die hyperbolische Struktur besonders gut zum Studium der Flächen eignet.

## § 2 Flächentheorie

Wie bereits hervorgehoben, konnten, im Gegensatz zu den 3-Mannigfaltigkeiten, die kompakten Flächen schon früh vollständig klassifiziert werden und „haben sich daher frühzeitig für tieferdringende Problemstellungen dargeboten" (Nielsen). Hierzu gehört vor allem das Studium der Homöomorphismen und der Gruppen von Homöomorphismen beliebiger, kompakter Flächen. Um aber die Einheitlichkeit der Darstellung nicht stören zu müssen, betrachten wir in diesem Paragraphen generell nur orientierbare, geschlossene Flächen $M^2$ vom Geschlecht $\geqslant 2$.

Der Homotopietyp der topologischen Gruppe $H(M^2)$ aller Homöomorphismen von Flächen $M^2$ ist heute völlig bekannt: Die Komponenten dieser Gruppe sind die Isotopieklassen von Homöomorphismen und diese sind (unter obiger Voraussetzung an $M^2$) zusammenziehbar [Scott, 1970], [Hatcher, 1976]. Wird $H(M^2)$ durch den Normalteiler aller zur Identität isotopen (= homotopen) Homöomorphismen dividiert, so entsteht die Abbildungsklassengruppe, $\mathrm{Abb}(M^2)$. Diese Gruppe mit ihren vielen interessanten Untergruppen ist in der Flächen-Topologie (und bekanntlich auch in der Funktionentheorie) besonders intensiv studiert worden. Da ich hierauf nicht weiter eingehen kann, verweise ich auf [Birman, 1974], [Zieschang-Vogt-Coldewey, 1980], [Zieschang, 1981] und die dort angegebene Literatur. Hier sei nur erwähnt, daß Dehn schon 1938 gezeigt hat [Dehn, 1938], daß $\mathrm{Abb}(M^2)$ von sog. *Dehn-Twists*, d. h. von solchen Flächen-Homöomorphismen erzeugt wird, die außerhalb der Umgebung einer einfachen geschlossenen Kurve die Identität sind. Lickorish hat hervorgehoben [Lickorish, 1964], daß hierfür endlich viele Dehn-Twists einer Fläche ausreichen, die man darüber hinaus explizit und ganz kanonisch wählen kann. Dies ist, wie so manches Resultat über Flächen, eine Tatsache, die auch in der Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten Anwendungen gefunden hat, und insbesondere der Chirurgie-Präsentation und der Präsentation von 3-Mannigfaltigkeiten als dreiblättrige, verzweigte Überlagerung zugrunde liegt (siehe § 1, und § 5 für weitere Anwendungen). Was aber $\mathrm{Abb}(M^2)$ betrifft, so war lange Zeit die Frage offen, ob $\mathrm{Abb}(M^2)$ nicht nur endlich erzeugt, sondern auch endlich präsentiert ist, bis Hatcher und Thurston diese Frage schließlich positiv beantworten konnten [Hatcher-Thurston, 1980].

Wir kommen nun zum Studium der Flächen-Homöomorphismen. Hierbei ist zu unterscheiden zwischen den Homöomorphismen selbst und ihren Isotopieklassen. Dabei ist anzumerken, daß zwei Flächen-Homöomorphismen immer genau dann isotop sind, wenn sie homotop sind (dies ist eine Folgerung aus dem Satz von Baer, der dies für nicht-singuläre Kurven auf Flächen behauptet [Baer, 1928]). Die Isotopieklassen von Flächen-Homöomorphismen wurden in den 30er und 40er Jahren besonders von Nielsen und Teichmüller und in jüngster Zeit auch von Thurston (und Bers) studiert. Wegen der besonderen Beziehung, die die Flächen ja von Anfang an zur Funktionentheorie hatten, ist es nicht verwunderlich, daß für das topologische Studium von Flächen-Homöomorphismen auch andere als rein semi-lineare Techniken herangezogen wurden. Eine qualitative Theorie der Flächen-Homöomorphismen wurde dadurch besonders gefördert oder gar erst ermöglicht, weil früh auch schon die Existenz von geometrischen Strukturen für Flächen bekannt war. Im Gegensatz zu den 3-Mannigfaltigkeiten (siehe hierfür § 6) ist für Flächen die bloße Existenz von hyperbolischen Metriken bekanntlich leicht einzusehen: Jede Fläche vom Geschlecht $g \geqslant 2$ entsteht nämlich aus einem 4g-seitigen Polygon durch Verheften geeigneter Seitenpaare. Somit geht es, für die Existenz von hyperbolischen Strukturen auf Flächen, lediglich darum, derartige Polygone so als reguläre, geodätische Polygone in der hyperbolischen Ebene zu realisieren, daß die Summe ihrer Innenwinkel gleich $2\pi$ ist. Daß dies immer möglich ist, folgt nun aber aus dem Zwischenwertsatz, denn die Winkelsumme von hyperbolischen Polygonen ist $(4g - 2)\pi$ minus dem Flächeninhalt des Polygons. Solche hyperbolischen Polygone sind nun bei weitem nicht eindeutig und so auch nicht die hyperbolischen Strukturen auf Flächen. Vielmehr bilden sie, wie aus der Funktionentheorie bekannt, eine topologische Mannigfaltigkeit, deren universelle Überlagerung der sog. Teichmüller-Raum ist, von dem Teichmüller zeigen konnte, daß er homöomorph ist zum $\mathbf{R}^{6g-6}$ (für die moderne Fassung des Teichmüllerschen Beweises siehe [Bers, 1960]).

Sowohl die Wahl einer festen hyperbolischen Struktur für die gegebene Fläche als auch die Betrachtung ihres ganzen Teichmüller-Raumes, ergeben starke Hilfsmittel. Insbesondere liefern sie eine Möglichkeit, für Flächen-Homöomorphismen Eigenschaften des Isotopietyps zu formulieren. So zeigt Nielsen, unter Ausnutzung einer festen hyperbolischen Struktur, daß ein zur universellen Überlagerung gelifteter Flächen-Homöomorphismus immer auch auf das durch den Einheitskreis kompaktifizierte Poincaresche Modell der hyperbolischen Ebene fortgesetzt werden kann. Auf diese Weise induziert also jeder Flächen-Homöomorphismus einen (bis auf Konjugation mit einer Deckbewegung) eindeutig gegebenen Homöomorphismus des Kreises. Darüber hinaus induzieren zwei Flächen-Homöomorphismen genau dann zwei (bis auf Konjugation) gleiche Kreis-Homöomorphismen, wenn sie isotop sind. Damit können die dynamischen Eigenschaften dieser induzierten Kreis-Homöomorphismen als Eigenschaften der ganzen Isotopieklasse der entsprechenden Flächen-Homöomorphismen aufgefaßt werden. Nielsens ausdrücklich formuliertes Programm für Flächen-Homöomorphismen besteht nun genau darin, die Eigenschaften der Isotopieklassen aus denen der zugehörigen Kreis-Homöomorphismen abzulesen, und in einer breit angelegten Arbeit [Nielsen, 1927, 1929, 1936] studiert er die qualitativen Eigenschaften dieser Kreis-Homöomorphismen (wie etwa Stabilität ihrer Fixpunktmengen). Mostow [Mostow, 1968] verallgemeinert diesen Ansatz später auf höherdimensionale hyperbolische Raumformen mit endlichem Volumen und erhält Resultate, die auch für die Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten relevant sind (siehe § 6). Teichmüller dagegen fixiert, für das Studium der Isotopieklassen von Flächen-Homöomorphismen, nicht eine feste hyperbolische Struktur, sondern studiert diese Isotopieklassen über die von diesen induzierten Homöomorphismen des Teichmüller-Raumes [Teichmüller, 1939 und 1943], [Bers, 1960]. Der Teichmüller-Raum ähnelt in mancher Beziehung der universellen Überlagerung von hyperbolischen Flächen, und Thurston hat vor einigen Jahren sogar eine Kompaktifizierung des Teichmüller-Raumes gefunden, die aus diesem einen $(6g-6)$-dim. Ball macht, auf den darüber hinaus die von den Flächen-Homöomorphismen induzierten Homöomorphismen fortgesetzt werden können [Thurston, 1978], [Fathi-Laudenbach-Poenaru, 1979]. So induziert jeder Flächen-Homöomorphismus, oder besser seine Isotopieklasse, jetzt auch einen (bis auf Konjugation) eindeutig gegebenen Homöomorphismus der Randsphäre des so kompaktifizierten Teichmüller-Raumes. Ganz im Sinne von Nielsen, lassen sich nun auch aus der Dynamik dieser Homöomorphismen von $S^{6g-7}$ Rückschlüsse auf die der Isotopieklasse von Flächen-Homöomorphismen ziehen (siehe unten und für Einzelheiten die obige Literatur).

Eine weitere Möglichkeit für das Studium der Isotopieklassen von Flächen-Homöomorphismen bietet sich, wenn den Flächen-Homöomorphismen, ähnlich wie den Mannigfaltigkeiten, Invarianten und zwar diesmal Invarianten des Isotopietyps zugeordnet werden. Ist $\tau : H(M^2) \to \mathbf{R}^+$ eine Abbildung, dann läßt sich durch

$$\tau_*[h] = \inf \{\tau(h') \,|\, h' \text{ isotop zu } h\}$$

sofort eine Abbildung $\tau_* : \mathrm{Abb}(M^2) \to \mathbf{R}$ und so eine Invariante des Isotopietyps definieren. Ist eine solche Invariante etabliert, stellt sich die Frage ihrer Berechenbarkeit, und hat sie Werte in $\mathbf{R}$, die Frage ihrer Realisierbarkeit. Dabei heißt $\tau$ realisierbar, wenn es zu jedem Flächen-Homöomorphismus h einen solchen Homöomorphismus g (derselben Fläche) gibt mit $\tau_*[h] = \tau(g)$. Besonders interessant ist dabei der Fall der eindeutigen Realisierbarkeit. In diesem Fall heißt die Realisierung g ein *extremaler Homöomorphismus* (bzgl. $\tau$), und die qualitativen Eigenschaften von extremalen Homöomorphismen können nun auch als Eigenschaften der ganzen Isotopieklasse aufgefaßt werden. Diese Eigenschaften hängen aber natürlich von der Definition von $\tau$ ab.

Die folgenden Beispiele für $\tau$ und $\tau_*$ haben sich als besonders wichtig für Flächen-Homöomorphismen h herausgestellt (man beachte unsere Voraussetzung an Flächen):

**1. Beispiel** $\tau_1(h)$ := topologische Entropie von h (für die Definition von topologischer Entropie siehe z. B. [Fathi-Laudenbach-Poenaru, 1979, S. 182]).

**2. Beispiel** Die Menge der Fixpunkte eines Flächen-Homöomorphismus h ist i. a. natürlich nicht endlich. Deshalb führt Nielsen in [Nielsen, 1927] den Begriff der Fixpunktklassen ein und zeigt, daß wenigstens die Menge dieser Klassen immer endlich ist. Dabei gehören nach Nielsen zwei Fixpunkte von h genau dann zur selben Klasse, wenn es einen Verbindungsweg k zwischen ihnen gibt, so daß der verknüpfte Weg $k * (h \circ k)^{-1}$ zusammenziehbar ist. Erfüllt h eine gewisse technische Nebenbedingung, die im übrigen immer durch eine Isotopie von h erreicht werden kann, dann kann, wieder nach Nielsen, jeder Fixpunktklasse von h ein Index zugeordnet werden (dieser kann aber leider auch negativ sein). Somit können wir definieren:

$\tau_2''(h)$ := Anzahl der Fixpunktklassen von h,

$\tau_2'(h)$ := Anzahl der Fixpunktklassen von h, deren Index von Null verschieden ist.

$\tau_2(h) :=$ Summe der Indizes der Fixpunktklassen.

Zwar sind $\tau_2'$ und $\tau_2$ nur für gewisse Teilmengen von $H(M^2)$, dafür aber $(\tau_2'')_*$, $(\tau_2')_*$ und $(\tau_2)_*$ auf ganz $\mathrm{Abb}(M^2)$ definiert.

3. **Beispiel** Sei $F_\sigma$ eine Fläche mit fester hyperbolischer Struktur $\sigma$. Diese Fläche kann eindeutig mit einer Riemannschen Fläche identifiziert werden, und da wir nur kompakte Flächen betrachten, ist jeder Flächen-Homöomorphismus $h : F_\sigma \to F_\sigma$ eine quasi-konforme Abbildung [Lehto-Virtanen, 1965]. Somit kann h eine Dilatation $K_\sigma(h) \geqslant 0$ zugeordnet werden (ist diese etwa Null, dann ist h eine Isometrie und damit ein periodischer Homöomorphismus [Lehto-Virtanen, 1965], [Bers, 1960]. Die Zahl $K_\sigma(h)$ hängt zwar von der komplexen Struktur $\sigma$ ab, aber durch $K(h) = \inf K_\sigma(h)$ kann hieraus eine rein topologische Größe gemacht werden. Wir können also definieren:

$\tau_3(h) := K(h).$

Die Fixpunktmengen von Flächen-Homöomorphismen wurden besonders in den 20er und 30er Jahren von verschiedenen Autoren wie Brouwer, Alexander, Birkhoff, Hopf und vor allem Nielsen intensiv studiert. Insbesondere interessierte sich Nielsen für die Berechnungen von $(\tau_2'')_*$, $(\tau_2')_*$ und $(\tau_2)_*$. In der schon oben erwähnten Arbeit [Nielsen, 1927] wird bewiesen, daß $\mathrm{Abb}(M^2) \cong \mathrm{Out}\, \pi_1 M^2$, wobei $\mathrm{Out}\, \pi_1 M^2$ der Quotient der Gruppe der Automorphismen von $\pi_1 M^2$ modulo den inneren Automorphismen ist (elementare Hindernistheorie zeigt, daß für asphärische simpliziale Komplexe, wie etwa die hier betrachteten Flächen, jeder Isomorphismus der Fundamentalgruppe immer durch eine, bis auf Homotopie eindeutige, Homotopieäquivalenz induziert wird). Somit können die Isotopieklassen [h] von Flächen-Homöomorphismen durch e n d l i c h viele Daten gegeben werden, nämlich durch die Wirkung der entsprechenden Isomorphismen von $\pi_1 M^2$ auf den Erzeugenden von $\pi_1 M^2$. Ziel ist es, $(\tau)_*$ [h] aus diesen Daten zu berechnen. Nielsen vermutet in [Nielsen, 1927], daß bereits $\tau_2$ und besonders auch $\tau_2'$ Isotopie-Invarianten sind und hebt hervor, daß in diesem Fall die Alexandersche Formel [Alexander, 1923′] eine Berechnung von $(\tau_2)_*$ liefert. Nielsen selbst entwickelt eine Methode, die zwar keine allgemeine Formel, aber doch Abschätzungen für $\tau_2''$ und $\tau_2'$ und die Berechnung von $(\tau_2')_*$ und $(\tau_2)_*$ für viele Einzelfälle liefert. Sind $\tau_2'$ und $\tau_2$ definiert, dann gilt nach Nielsen

$$\tau_2''(h) \geqslant \tau_2'(h) \geqslant \begin{cases} \tau_2(h), & \text{falls} \quad 0 \leqslant \tau_2(h) \\ 1, & \text{falls} \quad -4(g-1) \leqslant \tau_2(h) < 0 \\ |\tau_2(h)| - 4(g-1), & \text{falls} \quad \tau_2(h) < -4(g-1) \end{cases}$$

Weiter lassen sich $(\tau_2')_*$ und $(\tau_2)_*$ für alle solche Homöomorphismen bestimmen, die entweder das Produkt von Dehn-Twists entlang von paarweise disjunkten Kurven sind, oder einen Isomorphismus endlicher Ordnung in $\mathrm{Out}\, \pi_1 M^2$ induzieren. In einer weiteren Arbeit [Nielsen, 1942] formuliert Nielsen den Satz, daß die letzteren Homöomorphismen immer isotop sind zu Homöomorphismen endlicher Ordnung – doch enthält nach Zieschang der diesbezügliche (umfangreiche) Beweis eine Lücke. Der Satz selbst bleibt aber richtig, wie Fenchel mit Hilfe der Teichmüller-Theorie zeigen konnte (siehe hierzu [Zieschang-Vogt-Coldewey, 1980]) und hieraus entwickelte sich allgemeiner die Frage, ob überhaupt jede endliche Untergruppe von Out $\pi_1 M^2$ von einer endlichen Untergruppe von $H(M^2)$ induziert wird (Nielsensches Realisierungsproblem). In [Kerckhoff, 1980] [Kerckhoff, 1983] beantwortet Kerckhoff diese Frage, mit Hilfe von Teichmüller-Theorie und Resultaten von Thurston, positiv (siehe auch [Zieschang, 1981]).

Die von Teichmüller initiierten Methoden zum Studium von Flächen-Homöomorphismen kulminieren schließlich in den Arbeiten von Thurston und Bers [Thurston, 1978], [Bers, 1978] (siehe auch [Miller, 1982] für den Zusammenhang dieser Arbeiten mit denen von Nielsen). Es zeigt sich, daß für alle solche Homöomorphismen h, die weder zu periodischen noch zu reduzierbaren Homöomorphismen isotop sind, die Zahl $(\tau_3)_*$ [h] eindeutig realisierbar ist (dabei heißt ein Homöomorphismus reduzierbar, wenn er ein nicht-triviales System von Kurven invariant läßt). Der entsprechende extremale Homöomorphismus g in [h] läßt eine sehr übersichtliche, globale Beschreibung zu, aus der eine Reihe von Informationen zur Dynamik von Flächen-Abbildungen entnommen werden können (siehe [Fathi-Laudenbach-Poenaru, 1979]). Insbesondere ergibt sich, daß der bzgl. $\tau_3$ extremale Homöomorphismus g nicht nur $(\tau_3)_*$, sondern auch $(\tau_2'')_*$ und $(\tau_1)_*$ realisiert (hierfür vgl. [Thurston, 1978]. Für eine tatsächliche Berechnung der Entropie von extremalen Homöomorphismen vgl. [Fathi-Laudenbach-Poenaru, 1979, Exposé 10]).

Flächentheorie und Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten sind eng verknüpft. Insbesondere wurden in der Flächentheorie schon früh Fragen herausgearbeitet (und z. T. beantwortet), die sich ebenso auch für 3-Mannigfaltigkeiten stellen lassen und an denen sich die 3-Mannigfaltigkeitstheorie orientieren konnte. Ich kehre nun wieder zu den 3-Mannigfaltigkeiten zurück, indem ich, entsprechend der historischen Entwicklung, im nächsten Paragraphen einige Resultate über Flächen in 3-Mannigfaltigkeiten diskutiere.

## § 3 Entscheidungsprobleme

In den 30er Jahren wurde von den Logikern der Begriff „Algorithmus“ geklärt und die ersten Unentscheidbarkeitsresultate gewonnen. Aber erst in den 50er Jahren zeigten Novikov, Adjan, Rabin u. a., daß selbst solche Probleme der kombinatorischen Gruppentheorie wie das Wortproblem, das Trivialitätsproblem und schließlich sogar das Isomorphieproblem für endlich präsentierte Gruppen allgemein nicht algorithmisch lösbar sind [Novikov, 1958], [Rabin, 1958]. Dies mußte auch einen Einfluß haben auf die Formulierung des Klassifikationsprogramms für 3-Mannigfaltigkeiten – insbesondere nachdem Markov [Markov, 1958] bewies, daß jede endlich präsentierte Gruppe auftritt als Fundamentalgruppe einer kompakten 4-dim. Mannigfaltigkeit und damit zeigte, daß das Homöomorphieproblem für Mannigfaltigkeiten der Dimension $\geqslant 4$ allgemein unlösbar ist. Eine bloße Übersetzung einer topologischen Frage in Algebra war somit allein keine Lösung mehr. Es war zwar nicht ausgeschlossen, daß die gruppentheoretischen Entscheidungsprobleme wenigstens für die spezielle Klasse von Gruppen lösbar sind, wie sie die Fundamentalgruppen von 3-Mannigfaltigkeiten darstellen, aber um dies zu zeigen, wird man nicht umhin können, die speziellen Eigenschaften dieser Gruppen und damit stärker die Geometrie der 3-Mannigfaltigkeiten heranzuziehen.

Unabhängig hiervon begann Schubert schon 1949 Verfahren zu studieren, „die es gestatten, aus einem oder mehreren Knoten neue, ‚kompliziertere' Knoten abzuleiten" (Schubert) und schlägt mit dem Begriff des „Begleitknotens" einen Kompliziertheitsbegriff vor, dem sich die bis dahin bekannten Knotenbildungen, wie Schlauchknoten, Schlingknoten und Produktknoten als Spezialfälle unterordnen [Schubert, 1949 und 1953]. Entsprechend kann man auch für 3-Mannigfaltigkeiten nach Kompliziertheitsbegriffen suchen. Obwohl Schuberts Resultate für Knoten formuliert wurden, sind doch die verwendeten Beweistechniken im Grunde Methoden der 3-Mannigfaltigkeitstheorie. Insbesondere wurde der von Dehn benutzte Prozeß der „Umschaltung" wieder aufgegriffen. Weiter ist die Bildung von Produktknoten eine 3-Mannigfaltigkeitskonstruktion, nämlich ein Sonderfall der Bildung der zusammenhängenden Summe [Hempel, 1976]. Schubert zeigte für Knoten [Schubert, 1949], daß die entsprechende Zerlegung eines Knotens in Primknoten eindeutig ist. Was nun die 3-Mannigfaltigkeiten betrifft, hatte Kneser schon 1929 bewiesen, daß es in jeder 3-Mannigfaltigkeit höchstens endlich viele, disjunkte und nicht-parallele, wesentliche 2-Sphären geben kann [Kneser, 1929]. Haken [Haken, 1961′] (unabhängig davon auch [Milnor, 1962]) zeigte weiter, daß ein solches m a x i m a l e s System von 2-Sphären immer eindeutig ist, zwar i. a. nicht bis auf Isotopie, aber jedenfalls bis auf Homöomorphie. Damit zerfällt also auch jede 3-Mannigfaltigkeit eindeutig in Primfaktoren, d. h. in eine zusammenhängende Summe von solchen 3-Mannigfaltigkeiten, die keine zerlegende, wesentliche 2-Sphäre enthalten. Solche Mannigfaltigkeiten sind entweder $S^2$-Bündel über der $S^1$ oder i r r e d u z i b e l in dem Sinne, daß sie überhaupt keine wesentlichen 2-Sphären enthalten. (An dieser Stelle merken wir noch an, daß für berandete 3-Mannigfaltigkeiten diejenigen 3-Mannigfaltigkeiten $M^3$ rand-irreduzibel genannt werden, die keine wesentlichen 2-Scheiben D enthalten mit $D \cap \partial M = \partial D$). Abgesehen von den offensichtlichen Ausnahmen sind die $S^3$ [Alexander, 1924], alle Knotenräume [Alexander, 1924], alle Seifertschen Faserräume, alle I-Bündel über einer Fläche und alle Flächenbündel über der $S^1$ [Waldhausen, 1967] Beispiele für irreduzible (und rand-irreduzible) 3-Mannigfaltigkeiten. Die mit dem Resultat von Haken nun mögliche Reduktion des Studiums der 3-Mannigfaltigkeiten auf irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten hat ihren Vorzug z. B. darin, daß Homotopiesphären als Primfaktoren vermieden und so die ungelöste Poincarésche Vermutung vorläufig umgangen werden kann. – Wir kommen auf die Bedeutung der irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten noch zurück. Weiter werden wir in § 5 noch eine andere kanonische Aufspaltung von 3-Mannigfaltigkeiten betrachten müssen, nämlich die an Kreisringen und Tori statt wie bisher an Scheiben und 2-Sphären.

Nicht nur, wie oben, für die 3-Mannigfaltigkeiten selbst, sondern auch für die in ihnen enthaltenen Unterobjekte, wie Flächen, kann man nach einem kanonischen „Vereinfachungsprozeß" suchen. Schon Dehn hatte ja versucht [Dehn, 1910], durch seinen „Umschaltungsprozeß" Selbstschnitte von singulären 2-Scheiben zu beseitigen, d. h. die „Komplexität" von singulären Scheiben durch ein kanonisches Verfahren soweit zu reduzieren, bis schließlich eine nicht-singuläre Scheibe entsteht. Auch wenn Dehns Anwendung dieses Prozesses auf singuläre Scheiben (Dehnsches Lemma) gescheitert war, so ist er doch inzwischen, von Schubert ausgehend, für die Betrachtung von nicht-singulären Flächen in 3-Mannigfaltigkeiten sehr wichtig geworden. Für zwei Flächen $F_1$, $F_2$ in $M^3$ mit $F_i \cap \partial M = \partial F_i$, $i = 1, 2$ ($\partial$ = Rand), die sich in Kurven schneiden, besagt „Umschaltung" nichts weiter als Aufschneiden der Flächen an jeweils einer Schnittkurve und das anschließende, paarweise Neuverheften der vier entstehenden Randkurven. Auf diese Weise kann unter Umständen aus zwei verschiedenen Flächen $F_1$, $F_2$ eine einzige Fläche F entstehen. Da beim Umschaltungsprozeß die Euler-Charakteristik erhalten bleibt, d. h. $\chi F = \chi F_1 + \chi F_2$, ist F „komplizierter" als $F_1$ oder $F_2$, falls $\chi F_i > 0$, $i = 1, 2$. Es stellt sich umgekehrt die Frage, ob „komplizierte" Flächen immer aus einem geeigneten Paar „einfacherer" Flächen durch Umschalten entstehen, und ob schließlich sogar die Menge aller (für die Topologie einer 3-Mannigfaltigkeit relevanten) Flächen der 3-Mannigfaltigkeit aus einem endlichen Vorrat von Flächen mit Hilfe der Umschaltung erzeugt werden kann. Diese Fragen wurden von Haken untersucht, und es entstanden die Hakenschen Algorithmen für die Entscheidungsprobleme der Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten wie ich sie hier besprechen möchte.

Wie schon angedeutet, ging es Haken darum, die Menge aller der Flächen in einer 3-Mannigfaltigkeit $M^3$ in den Griff zu bekommen, die für diese 3-Mannigfaltigkeit vom topologischen Standpunkt aus irgendwie charakteristisch sind. Dies war ja auch das ursprüngliche Anliegen der Homologietheorie, nur hat sich eben die Homologierelation für 3-Mannigfaltigkeiten als viel zu schwach erwiesen. Haken schlug deshalb in seiner grundlegenden Arbeit [Haken, 1961] vor, die Homologierelation durch eine viel stärkere Relation (die der Isotopie) zu ersetzen und dafür nur solche Flächen zu betrachten, die sich bzgl. einer festen Triangulation von $M^3$ (und mod Isotopie) in eine „schöne" Lage bringen lassen. Derartige Flächen in $M^3$ nennt er N o r m a l f l ä c h e n und zeigt, daß jedenfalls die Menge $\mathcal{N}(M)$ der Normalflächen in $M^3$ tatsächlich immer durch sukzessives Umschalten, aus einer e n d l i c h e n und darüber hinaus k o n s t r u i e r b a r e n Teilmenge $\mathcal{F}(M)$ von Normalflächen (den sog. Fundamentalflächen) erzeugt werden kann (mod Isotopie). Dieses Ergebnis von Haken ist die Grundlage für die Lösung einer ganzen Reihe von Entscheidungsproblemen in der Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten geworden. So hat Haken insbesondere zeigen können, daß sich die Trivialität von Knoten algorithmisch entscheiden läßt. Um hier kurz das entsprechende Entscheidungsverfahren anzudeuten, beachte man zunächst, daß für die Trivialität eines Knotens k allein die Menge $\mathcal{D}$ der wesentlichen (d. h. nicht rand-parallelen) 2-Scheiben seines Außenraumes M(k) relevant ist (§ 1). Entscheidend ist dann, daß sich für diese Menge $\mathcal{D}$ die beiden folgenden Eigenschaften nachprüfen lassen:

I. Normalisierungs-Eigenschaft: Die Menge $\mathcal{D}$ ist Teilmenge der Menge $\mathcal{N}(M)$ der Normalflächen.

II. Reduktions-Eigenschaft: Ist F eine Fläche aus $\mathcal{D}$, die durch Umschalten aus zwei Normalflächen $F_1$ und $F_2$ entsteht, dann ist $F_1 \in \mathcal{D}$ oder $F_2 \in \mathcal{D}$.

Der Knoten k ist genau dann trivial, wenn $\mathcal{D} \neq \emptyset$ und wegen I, II und Hakens obigem Ergebnis überzeugt man sich leicht, daß dies wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\mathcal{F}(M) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Nach Hakens Ergebnis ist aber weiter $\mathcal{F}(M)$ eine endliche und konstruierbare Menge und somit läßt sich in endlich vielen Schritten algorithmisch testen, ob $\mathcal{D} \cap \mathcal{F}(M)$ leer ist oder nicht. Dies ist das gesuchte Entscheidungsverfahren für die Trivialität von Knoten, und nach diesem Muster wurden noch eine Reihe weiterer Entscheidungsprobleme gelöst (siehe [Haken, 1961 und 1961'] und [Schubert, 1961]).

Wir sehen, wie wichtig Flächen und besonders Normalflächen in Hakens Programm sind. Es sei aber in diesem Zusammenhang angemerkt, daß (bzgl. einer festen Triangulation von $M^3$) keineswegs alle Flächen einer 3-Mannigfaltigkeit $M^3$ Normalflächen sind. Dies ist aber auch weder unbedingt nötig noch wünschenswert, denn es interessieren ja nur die Flächen, die relevant sind für eine je spezifische, topologische Fragestellung und es genügt, wenn diese Flächen Normalflächen sind. Dies ist oft der Fall. Haken selbst hat als solche „topologisch relevante" Flächen die inkompressiblen und rand-inkompressiblen Flächen einer 3-Mannigfaltigkeit herausgestellt. Dabei heißt eine Fläche F in $M^3$ mit $F \cap \partial M^3 = \partial F$ k o m p r e s s i b e l , wenn sie entweder eine 2-Sphäre ist oder wenn es eine 2-Scheibe D in $M^3$ gibt mit $D \cap F = \partial D$, so daß $\partial D$ nicht in F zusammenziehbar ist. Diese technisch etwas aufwendige Definition soll nichts weiter besagen, als daß eine inkompressible Fläche weder eine 2-Sphäre ist noch irgendwelche in $M^3$ triviale Henkel hat. Ähnliches gilt für rand-inkompressible Flächen [Waldhausen, 1967']. Eine Fläche F in $M^3$ mit $F \cap \partial M^3 = \partial F$ nenne ich kurz w e s e n t l i c h , wenn sie inkompressibel, rand-inkompressibel und nicht parallel ist zu einer Fläche aus $\partial M$, denn diese Flächen sind für die Topologie von 3-Mannigfaltigkeiten wesentlich. Irreduzible und rand-irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten, die wenigstens eine wesentliche Fläche enthalten, werden heute H a k e n - 3-M a n n i g f a l t i g k e i t e n genannt. Diese Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten hat sich inzwischen als besonders wichtig herausgestellt und ist intensiv studiert worden. Davon soll im folgenden berichtet werden. Von besonderer Bedeutung (für die Klassifikation von Haken-3-Mannigfaltigkeiten) ist dabei die Tatsache, daß alle wesentlichen Flächen in einer Haken-3-Mannigfaltigkeit Normalflächen sind. Insbesondere gilt also

**Satz** (Haken) *Die Menge der wesentlichen Flächen einer Haken-3-Mannigfaltigkeit kann (bis auf Isotopie), durch sukzessives Umschalten, aus einer endlichen, konstruierbaren Menge von (Fundamental-)Flächen erhalten werden.* (Achtung: Die Fundamentalflächen müssen selbst nicht wesentlich sein. Dies ist also k e i n Test dafür, ob eine 3-Mannigfaltigkeit eine Haken-3-Mannigfaltigkeit ist).

**Korollar** *Ist* $M^3$ *eine Haken-3-Mannigfaltigkeit und enthält* $M^3$ *keine wesentlichen Kreisringe oder Tori, dann hat* $M^3$ *zu vorgegebenem* $n \geqslant 0$ *(bis auf Isotopie) nur* e n d l i c h *viele wesentliche Flächen* F *mit* $\chi(F) \leqslant n$ [Haken, 1961], siehe auch [Hemion, 1976].

Haken benutzt dieses Ergebnis, um auch ein Programm für die Klassifikation von Haken-3-Mannigfaltigkeiten zu formulieren. Dabei ist die Klasse der Haken-3-Mannigfaltigkeiten sehr groß. Sie enthält z. B. alle irreduziblen und rand-irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten deren erste Homologiegruppe $H_1(M, \mathbf{Z})$ nicht endlich ist, also insbesondere alle berandeten 3-Mannigfaltigkeiten (sofern sie irreduzibel und rand-irreduzibel sind), speziell die Knoten-Außenräume von allen nicht-trivialen Knoten.

Hakens Klassifikationsprogramm besteht nun darin, statt lediglich Flächen in $M^3$, ganze „Hierarchien" von solchen Flächen zu betrachten. Der einfachste Weg sich solche H i e r a r c h i e n vorzustellen, besteht vielleicht in der folgenden rekursiven Definition: Ist F eine wesentliche Fläche in $M_1 = M^3$, spalten wir $M_1$ an F auf und erhalten eine 3-Mannigfaltigkeit $M_2$. Diese ist entweder ein 3-dim. Ball, oder man findet in ihr (da $\partial M_2 \neq \emptyset$) entweder eine wesentliche Scheibe oder eine andere wesentliche Fläche $F_2$ usw. Unter Benutzung einer ebenfalls von Haken stammenden und für alle Haken-3-Mannigfaltigkeiten gültigen Verallgemeinerung des Endlichkeitssatzes von Kneser auf alle wesentlichen Flächen [Haken, 1968] kann man leicht zeigen, daß der obige Prozeß immer abbrechen, eine Haken-3-Mannigfaltigkeit, also immer eine Hierarchie endlicher Länge haben muß (siehe z. B. [Hempel, 1976]). Eine Hierarchie definiert so eine endliche Folge von Flächen, die wir auch als Flächen in $M^3$ auffassen können, und deren Komplement dort aus 3-dim. Bällen besteht.

Nicht eine einzelne Hierarchie, aber – wie Haken betont – die Menge aller Hierarchien (mod Isotopie) in $M^3$ bildet eine Homöomorphie-Invariante für 3-Mannigfaltigkeiten, die sich mit dem Endlichkeits-Satz von Haken kontrollieren lassen sollte. Das von Haken formulierte Programm läßt sich tatsächlich realisieren. Da sich aber heute dieses Klassifikations-Programm etwas bequemer in der Sprache der charakteristischen Untermannigfaltigkeiten formulieren läßt, will ich erst in § 5 hierauf etwas näher eingehen. Zuvor ist aber Waldhausens Anwendung des Begriffes der Hierarchie auf das Studium der Homotopie-Äquivalenzen von Haken-3-Mannigfaltigkeiten zu besprechen.

## § 4 Homotopie-Äquivalenzen

1957 bewies Papakyriakopoulos [Papakyriakopoulos, 1957 und 1957′] das Dehnsche Lemma, den Schleifensatz und den Sphärensatz, ein Ereignis von großer Bedeutung für die Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten. Kurz danach wurde die dabei verwendete Beweismethode (der berühmte „Turm") ausgebaut, um noch etwas weitergehende Resultate zu erzielen. So bewies Stallings eine Verfeinerung des Schleifensatzes [Stallings, 1960], Shapiro und Whitehead eine Verallgemeinerung des Dehnschen Lemmas auf beliebige planare Flächen [Shapiro-Whitehead, 1958], und Waldhausen verallgemeinerte schließlich in [Waldhausen, 1967″] den Schleifensatz auf planare Flächen. Für uns sind hier der ursprüngliche Sphärensatz und Schleifensatz am wichtigsten, und zwar in der folgenden Fassung:

**Sphärensatz** (Papakyriakopoulos) *In einer irreduziblen* (§ 3) 3-*Mannigfaltigkeit* $M^3$ *ist jede Abbildung* $S^2 \to M^3$ *zusammenziehbar.*

**Schleifensatz** (Papakyriakopoulos) *Ist* D *eine* 2-*Scheibe und* $M^3$ *eine randirreduzible* (§ 3) 3-*Mannigfaltigkeit, dann ist für jede Abbildung* $f: D \to M^3$ *mit* $f(\partial D) \subset \partial M^3$ *die Einschränkung* $f|\partial D$ *in* $\partial M^3$ *zusammenziehbar.* (Für Verallgemeinerungen dieser Sätze konsultiere man die oben gegebene Literatur.)

Als unmittelbare Folgerungen hieraus ergeben sich:

1. Ein Knoten ist genau dann trivial, wenn seine Knotengruppe frei abelsch ist. (Wegen Hakens Algorithmus (§ 3) ist somit die Frage algorithmisch entscheidbar, ob eine gegebene Knotengruppe abelsch ist.)

2. Die Fundamentalgruppe einer irreduziblen und rand-irreduziblen 3-Mannigfaltigkeit $M^3$ ist kein nicht-triviales freies Produkt, d. h. aus $\pi_1 M^3 \cong A * B$ folgt, daß A oder B trivial ist [Stallings, 1959]. (Damit ist die Frage algorithmisch u n - entscheidbar, ob eine gegebene Gruppe G die Fundamentalgruppe einer irreduziblen, rand-irreduziblen 3-Mannigfaltigkeit, insbesondere die, ob G eine Knotengruppe ist. Zum Beweis beachte man nur, daß dies andernfalls auch für $G * \mathbf{Z}$ entschieden werden könnte und man so ein Entscheidungsverfahren für die Trivialität von Gruppen hätte.)

3. Irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten mit unendlicher Fundamentalgruppe sind asphärisch, d. h. alle Homotopiegruppen $\pi_i M^3$ verschwinden, für $i \geqslant 2$. Insbesondere sind alle Haken-3-Mannigfaltigkeiten (§ 3) asphärisch [Waldhausen, 1967]. Wie bereits erwähnt, werden die Isomorphismen der Fundamentalgruppen von asphärischen simplizialen Komplexen von Homotopie-Äquivalenzen induziert. Somit hängen für Haken 3-Mannigfaltigkeiten die Fundamentalgruppen mit den Homotopie-Äquivalenzen eng zusammen. Daneben verdienen die Homotopie-Äquivalenzen aber auch ein durchaus unabhängiges, eigenständiges Interesse und Schleifen- sowie Sphärensatz eröffnen die Möglichkeit ihres Studiums. So folgt aus dem Schleifensatz, neben den obigen Tatsachen, auch noch:

4. Eine (orientierbare) Fläche F in $M^3$ mit $F \cap \partial M^3 = \partial F$ ist genau dann inkompressibel (§ 3) in $M^3$, wenn F keine 2-Sphäre ist und die Inklusion $F \subset M^3$ einen Monomorphismus der Fundamentalgruppen induziert.

Hieraus wiederum folgt sofort (die schon Alexander bekannte Tatsache [Alexander, 1924]), daß der 3-Ball und die 3-Sphäre keine inkompressiblen Flächen enthalten können. Dies aber impliziert seinerseits die Tatsache, daß das Komplement einer inkompressiblen Fläche in $M^3$ irreduzibel ist, falls $M^3$ irreduzibel ist [Waldhausen, 1967]. In einer Haken-3-Mannigfaltigkeit ist also das Komplement einer inkompressiblen Fläche asphärisch. Dies ist nun die Grundlage für eine (auf Stallings zurückgehende) Technik, die auch als C h i r u r g i e v o n A b i l d u n g e n bezeichnet wird.

Die Chirurgie ist ein lokal definierter Prozeß, mit dem es möglich wurde, Abbildungen $f : M^3 \to N^3$ zwischen Haken-3-Mannigfaltigkeiten so zu deformieren, daß danach das Urbild einer gegebenen inkompressiblen Fläche G in $N^3$ unter f ein System von inkompressiblen Flächen ist [Stallings, 1962], [Waldhausen, 1967]. Ein seitdem häufig benutztes Verfahren für das Studium von Abbildungen zwischen Haken 3-Mannigfaltigkeiten vom semi-linearen Standpunkt aus.

Der Vorteil der so erreichbaren Inkompressibilität der Flächen $F_i$ aus $f^{-1}G$ besteht darin, daß dann für solche Abbildungen $f : M^3 \to N^3$, die einen Monomorphismus der Fundamentalgruppen induzieren, automatisch auch die Einschränkungen $f|F_i : F_i \to G$ einen solchen Monomorphismus induzieren. Bildet eine derartige Flächenabbildung z u s ä t z l i c h noch den Rand in den Rand ab (z. B. wenn die Flächen geschlossen sind), dann besagt eine Verschärfung des Satzes von Nielsen [Waldhausen, 1968], daß diese homotop ist (mod $\partial$) zu einer Überlagerungsabbildung – es sei denn $F_i$ ist eine Scheibe oder ein Kreisring.

Die letzte Einschränkung ist der Grund dafür, daß die weitere Behandlung von Homotopie-Äquivalenzen und Abbildungen von 3-Mannigfaltigkeiten in zwei

Fälle zerfällt, je nachdem, ob die betrachteten 3-Mannigfaltigkeiten einen leeren Rand haben oder nicht.

Wir halten fest: Ist $f : M^3 \to N^3$ eine Homotopie-Äquivalenz zwischen geschlossenen Haken-3-Mannigfaltigkeiten, dann ist $f^{-1}G$, nach einer geeigneten Homotopie von f, inkompressibel und $f|F_i : F_i \to G$ eine Überlagerungsabbildung, für alle Komponenten $F_i$ von $f^{-1}G$. Spalten wir also $M^3$ an $f^{-1}G$ und $N^3$ an G auf (ganz ähnlich wie Flächen an Kurven aufgeschnitten werden), dann induziert f eine Abbildung zwischen den so entstehenden 3-Mannigfaltigkeiten $\tilde{M}^3$ und $\tilde{N}^3$. Diese Abbildung ist nun zwar i. a. keine Homotopie-Äquivalenz mehr, aber sie induziert ihrerseits immerhin noch einen Monomorphismus der Fundamentalgruppen. Also können wir das Verfahren iterieren, indem wir eine inkompressible Fläche $\tilde{G}$ in $\tilde{N}^3$ wählen. Dies geht jedenfalls dann, wenn unter den Komponenten von $f^{-1}G$ keine Scheiben oder Kreisringe vorkommen (was für den 1. Schritt wegen der vorausgesetzten Geschlossenheit gewährleistet ist). In den anderen Fällen gibt es ein Problem. Waldhausen zeigte aber, wie man auch diese Spezialfälle umgehen und den obigen Prozeß somit solange wiederholen kann, wie man inkompressible Flächen in den jeweils aufgespaltenen Mannigfaltigkeiten findet [Waldhausen, 1968]. Diese Wahl von Flächen definiert aber genau eine Hierarchie (von $N^3$) im Sinne von Haken (§ 3) und muß daher nach endlich vielen Schritten abbrechen. Eine Abbildung einer irreduziblen 3-Mannigfaltigkeit in einen 3-Ball, die 1. einen Monomorphismus der Fundamentalgruppen induziert, 2. den Rand in den Rand abbildet und 3. deren Einschränkung auf den Rand bereits, wie in unserem Fall, eine Überlagerungsabbildung ist, ist selbst, bis auf Homotopie (rel $\partial$) eine Überlagerung (sogar ein Homöomorphismus. Nach einem Satz von Alexander [Alexander, 1923]). Damit ist die Ausgangsabbildung f homotop zu einer Überlagerungsabbildung. Die Abbildung f sollte aber eine Homotopie-Äquivalenz sein, speziell hat also $f_*(\pi_1 M)$ den Index 1 in $\pi_1 N^3$. Eine Überlagerung ist aber unter dieser Voraussetzung bekanntlich ein Homöomorphismus. Auf diese Weise hat Waldhausen den wichtigen Satz gezeigt:

**Satz** (Waldhausen) *Homotopie-Äquivalenzen zwischen geschlossenen Haken 3-Mannigfaltigkeiten sind immer homotop zu Homöomorphismen.* [Waldhausen, 1968].

Insbesondere sind geschlossene Haken-3-Mannigfaltigkeiten völlig durch ihre Fundamentalgruppe bestimmt! Dieser Satz ist deshalb so bemerkenswert, weil für gewisse andere Mannigfaltigkeiten, wie die Linsenräume, hierfür schon früh Gegenbeispiele auftauchten (§ 1). Auch für berandete 3-Mannigfaltigkeiten ist dieser Satz i. a. falsch, wie gewisse Knoten-Außenräume zeigen [Fox, 1952]. Was die Homotopie-Äquivalenzen $f : M^3 \to N^3$ zwischen berandeten Haken-3-Mannigfaltigkeiten betrifft, so liefert die obige Methode von Waldhausen, daß auch diese noch homotop sind zu Homöomorphismen, falls zusätzlich $f(\partial M^3) \subset \partial N^3$. Diese zusätzliche Bedingung wird man aber i. a. nicht von Homotopie-Äquivalenzen erwarten können. Insbesondere läßt sich schwerlich testen, ob ein Isomorphismus $\varphi : \pi_1 M^3 \to \pi_1 N^3$ von einer Homotopie-Äquivalenz induziert wird, die den Rand respektiert oder nicht. Dennoch läßt sich auch diese Situation vollständig analysieren (§ 5).

Der Satz von Waldhausen über Homotopie-Äquivalenzen ist in verschiedene Richtungen verallgemeinert worden. So auf gewisse nichtorientierbare 3-Mannigfaltigkeiten [Heil, 1969], [Boehme, 1972], auf rand-reduzible [Tucker, 1974] und schließlich auch auf reduzible 3-Mannigfaltigkeiten [Hendriks-Laudenbach, 1973]. Für die genauen Voraussetzungen unter denen Waldhausens Satz auch in diesen Fällen noch gilt, verweise ich den interessierten Leser auf die angegebene Literatur.

Weiter wurde der Satz von Waldhausen auf parametrisierte Familien von Homotopie-Äquivalenzen ausgedehnt [Waldhausen, 1968], [Laudenbach, 1974] und schließlich von Hatcher der abschließende Satz bewiesen, daß die Inklusion $H(M, \partial M) \subset G(M, \partial M)$ eine Homotopie-Äquivalenz ist. Dabei ist M eine Haken-3-Mannigfaltigkeit und $H(M, \partial M)$ resp. $G(M, \partial M)$ der Raum aller (semi-linearen) Homöomorphismen resp. Homotopie-Äquivalenzen $f: M \to M$ mit $f|\partial M = \mathrm{id}|\partial M$ [Hatcher, 1976].

## § 5 Die charakteristische Untermannigfaltigkeit

In verschiedenen Zusammenhängen hatte sich im Verlaufe der Entwicklung die besondere Bedeutung solcher Objekte wie Kreisringe, Tori, I-Bündel (über orientierbaren oder nicht-orientierbaren Flächen) und Seifertsche Faserräume in 3-Mannigfaltigkeiten $M^3$ gezeigt (siehe z. B. [Schubert, 1953], [Haken, 1962], [Waldhausen, 1969′]). Dabei sind Kreisringe und Tori, oder vielmehr deren reguläre Umgebungen in $M^3$, selbst nichts weiter als spezielle I-Bündel oder Seifertsche Faserräume. Bezeichnen wir ein System von I-Bündeln und Seifertschen Faserräumen in $M^3$ als *gefaserte Mannigfaltigkeit* (in $M^3$), dann zeigt sich, daß je zwei wesentliche gefaserte Mannigfaltigkeiten immer so durch eine isotope Deformation justiert werden können, daß sie zusammen wieder eine gefaserte Mannigfaltigkeit ergeben ([Johannson, 1979′] siehe dort auch für den Begriff „wesentlich"). Infolge dieser Beobachtung macht es also Sinn, nicht nur einzelne gefaserte Mannigfaltigkeiten in $M^3$, sondern vielmehr die Gesamtheit aller wesentlichen, gefaserten Mannigfaltigkeiten in $M^3$ zu betrachten, und es ergibt sich so das in [Johannson, 1975 und 1979′] eingeführte Konzept der charakteristischen Untermannigfaltigkeit. Genauer wird dort bewiesen, daß die Menge

$$\mathcal{M}(M^3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Isotopieklassen von wesentlichen, gefaserten,} \\ \text{Mannigfaltigkeiten in } M^3 \end{array} \right\}$$

bzgl. der von der Inklusion induzierten Halbordnung nicht nur bloß ein maximales, sondern sogar ein größtes Element hat. Dieses größte Element wird als *charakteristische Untermannigfaltigkeit* bezeichnet. Zu den wichtigsten Eigenschaften der charakteristischen Untermannigfaltigkeit gehören ihre Eindeutigkeit, die Einschließungs-Eigenschaft, sowie die Spaltungs-Eigenschaft, deren Bedeutung für die Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten in diesem Paragraphen diskutiert werden soll.

Die *Eindeutigkeit* der charakteristischen Untermannigfaltigkeit (mod Isotopie) ist eine unmittelbare Folge ihrer obigen Definition. Sie eröffnet die Möglichkeit, neben der Kneser-Haken-Milnor-Aufspaltung von 3-Mannigfaltigkeiten an 2-Sphären, einen weiteren Aufspaltungsprozeß zu definieren. Wegen der

Eindeutigkeit der charakteristischen Untermannigfaltigkeit V von $M^3$ definiert $(\partial V - \partial M^3)^-$ ein (sogar bis auf Isotopie) eindeutiges System von wesentlichen Kreisringen und Tori. Während eine 3-Mannigfaltigkeit (bis auf Homöomorphie) eindeutig an einem maximalen System von wesentlichen 2-Sphären zu primen Mannigfaltigkeiten aufgespalten wird (§ 3), wird eine Haken-Mannigfaltigkeit an dem eindeutigen System von wesentlichen Kreisringen und Tori zu I-Bündeln (über Flächen), Seifertschen Faserräumen und einfachen Mannigfaltigkeiten aufgeschnitten. Dabei nenne ich eine Haken-3-Mannigfaltigkeit e i n f a c h , wenn ihre charakteristische Untermannigfaltigkeit trivial, d. h. höchstens eine Umgebung von Randkomponenten ist.

Die einfachen 3-Mannigfaltigkeiten spielen für die Theorie der Haken-3-Mannigfaltigkeiten eine besondere Rolle. So besagt z. B. der Endlichkeitssatz für Flächen bei Haken (siehe § 3), daß es in einfachen 3-Mannigfaltigkeiten nur endlich viele wesentliche Flächen minimaler Euler-Charakteristik geben kann (mod Isotopie). Dies kann man nun seinerseits zum Anlaß nehmen, um Hakens Begriff der Hierarchie etwas zu modifizieren: Statt Systeme von Flächen, sollen von nun ab Systeme von Flächen u n d gefaserten Mannigfaltigkeiten betrachtet werden, die wie folgt verschachtelt sind. Beginnend mit $M_1 = M^3$, wählen wir als erste gefaserte Mannigfaltigkeit die charakteristische Untermannigfaltigkeit $V_1$ von $M_1$. Die Hierarchie bricht hier ab, oder wir finden in $M_2 = (M_1 - V_1)^-$ eine wesentliche Fläche $F_2$ von minimaler Euler-Charakteristik (oder eine wesentliche 2-Scheibe). Mit $M_3$ bezeichnen wir die Mannigfaltigkeit, die wir aus $M_2$ durch Aufschneiden an $F_2$ erhalten. In $M_3$ wählen wir wieder die charakteristische Untermannigfaltigkeit usw. Dieser Prozeß endet, wieder nach Hakens Argument, in endlich vielen Schritten. Das entstehende, derartig verschachtelte System vom Flächen und gefaserten Mannigfaltigkeiten in $M^3$ nenne ich eine g r o ß e H i e r a r c h i e von $M^3$. Eine Besonderheit der großen Hierarchien ist, daß die Menge aller großen Hierarchien (mod Isotopie) für jede Haken-3-Mannigfaltigkeit endlich ist. Damit bieten sich die großen Hierarchien sowohl für das Studium der Abbildungsklassen-Gruppe als auch als Sprechweise für das Klassifizierungs-Problem von 3-Mannigfaltigkeiten an.

Die Abbildungsklassen-Gruppe Abb($M^3$) operiert auf der Menge der großen Hierarchien, die, wie gesagt, endlich ist. Also hat der Normalteiler aller derjenigen Homöomorphismen von Abb($M^3$), die auf dieser Menge trivial operieren, einen endlichen Index in Abb($M^3$). Daraus folgt aber nicht unbedingt die Endlichkeit von Abb($M^3$) selbst, denn es kann durchaus nicht-triviale Homöomorphismen von $M^3$ geben, die jede große Hierarchie in sich überführen. Ähnlich verhält es sich mit dem Klassifikations-Problem für 3-Mannigfaltigkeiten: Haben zwei vorgelegte 3-Mannigfaltigkeiten gleiche, große Hierarchien, dann folgt daraus noch nicht notwendig die Homöomorphie dieser Mannigfaltigkeiten. Zur Illustration dieses Phänomens sei zunächst als ein nicht-triviales Beispiel die Klasse der einfachen Flächenbündel über der $S^1$ betrachtet. Diese haben eine besonders einfache, große Hierarchie und stehen so gewissermaßen am Beginn einer allgemeinen Theorie der Haken-3-Mannigfaltigkeiten.

Eine große Hierarchie eines einfachen Flächenbündels $M^3$ ist gegeben durch eine Wahl der Faserung und besteht aus der Faser F (= Fläche) und dem Produkt F x I (= Komplement der Faser). Wir erhalten $M^3$ aus F x I zurück, indem wir die

Deckel von F x I, mittels eines Homöomorphismus f : F → F, verheften. $M^3$ ist also in unserem Fall durch das Paar (F, f) gegeben, d. h. $M^3$ ist der Abbildungstorus von f. Diese Darstellung ist aber nicht eindeutig. Für zwei gegebene Flächenbündel $M^3$ und $N^3$ läßt sich zwar mit Hakens Algorithmus für Flächen (§ 3) testen, ob beide die gleiche Faser haben können, d. h. Darstellungen (F, f) resp. (F, g) haben, aber dies ist für die Homöomorphie von $M^3$ und $N^3$ lediglich notwendig und nicht hinreichend. Setzen wir nun voraus, daß $M^3$ und $N^3$ gleiche Fasern, d. h. gleiche, große Hierarchien haben. Dann ist es nicht schwer einzusehen, daß ein Homöomorphismus $M^3 \to N^3$, der diese großen Hierarchien ineinander überführt, einen Flächen-Homöomorphismus $h : F \to F$ mit $hgh^{-1} \simeq f$ induziert und umgekehrt. Das Klassifikations-Problem für Flächenbündel reduziert sich somit auf ein Flächenproblem, nämlich auf ein Konjugationsproblem für die Abbildungsklassen-Gruppe von F. Dieses Problem aber wurde von Hemion gelöst [Hemion, 1979] (Thurston hat angekündigt, daß dieses Problem auch mit seiner Theorie der Flächen-Homöomorphismen lösbar ist), und er gibt damit die Lösung für das Klassifikations-Problem für einfache Flächenbündel (über $S^1$).

Mit der Klassifikation der einfachen Flächenbündel durch Hemion ist aber genau der Schritt ausgeführt, der nun endgültig die Durchführung des Hakenschen Klassifikationsprogramms für die Menge aller Haken 3-Mannigfaltigkeiten ermöglicht. (Waldhausen hat in dem Übersichtsartikel [Waldhausen, 1978] etwas näher beschrieben, wie dieses Programm bequem in der Sprache der charakteristischen Untermannigfaltigkeiten dargestellt werden kann). Damit ist das Klassifikations-Problem für Haken-3-Mannigfaltigkeiten gelöst. Da Knoten-Außenräume für nichttriviale Knoten immer Haken-3-Mannigfaltigkeiten sind, läßt sich insbesondere für je zwei Knoten immer entscheiden, ob sie äquivalent sind – und zwar für jede der hierbei bekannten Äquivalenz-Relationen (allerdings ist das Entscheidungsverfahren vom praktischen Standpunkt nicht besonders effektiv).

Hemions Art der Lösung des Konjugations-Problems für Abb($M^2$) entnimmt man aber auch, daß es nur endlich viele Homöomorphismen (bis auf Isotopie) geben kann, die eine große Hierarchie eines einfachen Flächenbündels in sich überführen. In [Johannson, 1979] wird gezeigt, wie sich diese Tatsache auf alle einfachen 3-Mannigfaltigkeiten verallgemeinern läßt. Damit ist Abb($M^3$) zumindest für einfache 3-Mannigfaltigkeiten endlich. Für nicht-einfache Haken-3-Mannigfaltigkeiten ist dies dagegen nicht immer der Fall. Nennen wir einen Homöomorphismus einer 3-Mannigfaltigkeit $M^3$ (im Anschluß an die entsprechende Bezeichnung für Flächen) einen D e h n - T w i s t , wenn er außerhalb der regulären Umgebung eines wesentlichen Kreisrings oder Torus in $M^3$ die Identität ist, dann werden solche Dehn-Twists i. a. unendliche Ordnung in Abb($M^3$) haben. In [Johannson, 1979′] wird, unter Ausnutzung der Eindeutigkeit der charakteristischen Untermannigfaltigkeit, gezeigt, daß dies im wesentlichen die einzigen Beispiele sind und daß die Dehn-Twists für jede Haken-3-Mannigfaltigkeit $M^3$ einen Normalteiler von endlichem Index in Abb($M^3$) erzeugen (dies nutzt auch die von Waldhausen bewiesene Tatsache aus, daß Homöomorphismen von genügend großen Seifertschen Faserräumen in fasererhaltende deformiert werden können [Waldhausen, 1967′]). Für gewisse 3-Mannigfaltigkeiten kann sogar eine Art Berechnung der ganzen Abb($M^3$) gegeben werden [Riley, 1979], [Johannson, 1983]. Schließlich sei noch erwähnt, daß die Eindeutigkeit der charakteristischen Untermannigfaltigkeit auch eine erste Möglichkeit für das Studium der Kobordismengruppe $\Delta_2$ von Flächen-Homöomorphismen eröffnet hat [Johannson, 1979'], [Johannson-Johnson, 1980], [Scharlemann, 1980], die dann schließlich (unter Heranziehung weiterer Hilfsmittel) zu $\mathbf{Z}^\infty \oplus \mathbf{Z}_2^\infty$ berechnet wurde [Bonahon, 1980], [Edmonds-Ewing, 1982].

Neben der Eindeutigkeit ist, als weitere wichtige Eigenschaft der charakteristischen Untermannigfaltigkeit, nun die sog. Einschließungs-(enclosing-)Eigenschaft hervorzuheben. Diese besagt, daß jede „wesentliche" Abbildung eines Kreisrings oder Torus in eine Haken-3-Mannigfaltigkeit $M^3$ (beispielsweise jede Abbildung des Torus in $M^3$, die einen Monomorphismus der Fundamentalgruppen induziert), in die charakteristische Untermannigfaltigkeit von $M^3$ deformiert werden kann (mod $\partial$) [Johannson, 1975 und 1979']. Modulo proper Homotopie enthält demnach die charakteristische Untermannigfaltigkeit von $M^3$ nicht nur (gemäß ihrer Definition) alle nicht-singulären, sondern ebenso auch alle s i n g u l ä r e n , wesentlichen Kreisringe und Tori in $M^3$. Ähnliches läßt sich dann auch für alle wesentlichen I-Bündel und Seifertschen Faserräume in $M^3$ sagen [Johannson, 1975 und 1979']. Dies hat zwei unmittelbare Konsequenzen. Zum einen folgt sofort eine Verallgemeinerung des Schleifen- und Sphärensatzes auf Flächen mit verschwindender Euler-Charakteristik (d. h. der von Waldhausen in [Waldhausen, 1969] angekündigte „Kreisring-" und „Torus-Satz", siehe auch [Feustel, 1976] und [Cannon-Feustel, 1976]) und zum anderen die Tatsache, daß für alle einfachen 3-Mannigfaltigkeiten, deren Ränder aus Tori bestehen, alle Abbildungen $f : M^3 \to N^3$, die einen Monomorphismus der Fundamentalgruppen induzieren, in eine Abbildung g deformierbar sind mit $g(\partial M^3) \subset \partial N^3$. Nach dem Satz von Waldhausen (§ 4) sind somit d i e s e einfachen 3-Mannigfaltigkeiten durch ihre Fundamentalgruppen bestimmt. Aber es läßt sich in dieser Richtung noch mehr sagen.

Wir bemerken zunächst, daß eine Homotopie in $M^3$, die eine Kurve aus $\partial M^3$ in eine Kurve aus $\partial M^3$ deformiert, nichts weiter ist als ein singulärer Kreisring (und umgekehrt). Ebenso ist ein Kommutator in $\pi_1 M^3$ durch einen singulären Torus repräsentiert, und diese Korrespondenz zwischen Geometrie (von $M^3$) und Algebra (von $\pi_1 M^3$), und damit auch die Einschließungs-Eigenschaft der charakteristischen Untermannigfaltigkeit ist verschiedentlich für ein geometrisches Studium der Fundamentalgruppen von Haken-3-Mannigfaltigkeiten ausgenutzt worden. Ich gehe hierauf nicht weiter ein, da ich mich hier auf rein topologische Probleme beschränken möchte (der interessierte Leser konsultiere [Johannson, 1979'], [Jaco-Shalen, 1979]). Uns interessiert hier, daß sich die obige Beobachtung für einfache 3-Mannigfaltigkeiten ausnutzen läßt. Sind nämlich F und G zwei Flächen in $M^3$ mit $F \cap \partial M^3 = \partial F$ und $G \cap \partial M^3 = \partial G$, die zueinander homotop sind, dann sind ja insbesondere auch die Ränder $\partial F$ und $\partial G$ in $M^3$ zueinander homotop und diese Homotopie definiert eine Reihe von singulären Kreisringen, auf die sich wiederum die Einschließungs-Eigenschaft der charakteristischen Untermannigfaltigkeit anwenden läßt. Ist $M^3$ eine einfache 3-Mannigfaltigkeit und sind F und G wesentliche Flächen, so folgt, daß die Homotopie zwischen F und G so gewählt werden kann, daß $\partial F$ während der ganzen Deformation von F in $\partial M^3$ verbleibt. Nach [Waldhausen, 1968] besagt dies aber, daß zwei homotope, wesentliche Flächen in $M^3$ proper isotop sind in $M^3$. Sind diese Flächen darüber hinaus disjunkt, dann sind sie parallel. Diese

Tatsache hat nun Konsequenzen für die Homotopie-Äquivalenzen $f: M^3 \to N^3$ zwischen einfachen 3-Mannigfaltigkeiten. Bei geeigneter Wahl einer wesentlichen Fläche G in $N^3$ (und diese Wahl läßt sich immer treffen) sind nämlich die Komponenten von $f^{-1}G$ (mod Homotopie von f) wieder wesentliche Flächen, die paarweise homotop und damit parallel sind. Nach einem Trick von Stallings kann man in diesem Fall f weiter so deformieren, daß $f^{-1}G$ zusammenhängend ist [Johannson, 1979′]. Mit anderen Worten, Homotopie-Äquivalenzen zwischen einfachen 3-Mannigfaltigkeiten lassen sich an Flächen „spalten".

Die Spaltungs-Eigenschaft der charakteristischen Untermannigfaltigkeit besagt nun schließlich, daß sich Homotopie-Äquivalenzen zwischen Haken-3-Mannigfaltigkeiten an den charakteristischen Untermannigfaltigkeiten spalten lassen. Genauer: Seien $M_1$ und $M_2$ zwei Haken-3-Mannigfaltigkeiten und $V_1$ resp. $V_2$ ihre charakteristischen Untermannigfaltigkeiten. Dann läßt sich jede Homotopie-Äquivalenz $f: M_1 \to M_2$ so in eine Abbildung g deformieren, daß

$$g(V_1) = V_2 \quad \text{und} \quad g(\overline{M_1 - V_1}) = \overline{M_2 - V_2}.$$

Diese beiden Spaltungs-Eigenschaften (an charakteristischen Untermannigfaltigkeiten und an Flächen in einfachen 3-Mannigfaltigkeiten) ermöglichen nun die Verwendung der großen Hierarchien für Homotopie-Äquivalenzen. Es folgt, daß die charakteristische Untermannigfaltigkeit gewissermaßen das Hindernis dafür ist, daß Homotopie-Äquivalenzen zwischen Haken-3-Mannigfaltigkeiten nicht immer in einen Homöomorphismus deformierbar sind. Es gilt der

**Satz** (Johannson) *Ist* $f: M^3 \to N^3$ *eine Homotopie-Äquivalenz zwischen beliebigen Haken 3-Mannigfaltigkeiten (d. h. mit oder ohne Rand) und sind* $V_1$ *resp.* $V_2$ *die charakteristischen Untermannigfaltigkeiten in* $M_1$ *resp.* $M_2$*, dann ist* f *homotop zu einer Abbildung* g *mit*

1. $g(V_1) = V_2$ *und* $g(\overline{M_1 - V_1}) = \overline{M_2 - V_2}$, *und*
2. $g|V_1 : V_1 \to V_2$ *ist Homotopie-Äquivalenz und*
 $g|\overline{M_1 - V_1} : \overline{M_1 - V_2} \to \overline{M_2 - V_2}$ *ist Homöomorphismus.*

Insbesondere sind alle einfachen 3-Mannigfaltigkeiten durch ihre Fundamentalgruppe bestimmt. Als eine weitere Folgerung des Satzes ergibt sich, daß der Homotopietyp einer Haken 3-Mannigfaltigkeit nur endlich viele Haken 3-Mannigfaltigkeiten enthält und diese können alle konstruiert werden [Johannson, 1979′]. Zusammen mit der Lösung des Homöomorphie-Problems für Haken-3-Mannigfaltigkeiten, läßt sich somit auch die Frage entscheiden, ob zwei vorgelegte Haken-3-Mannigfaltigkeiten homotopie-äquivalent sind. Insbesondere läßt sich entscheiden, ob zwei Fundamentalgruppen von Haken-3-Mannigfaltigkeiten isomorph sind. Damit ist speziell auch das Isomorphie-Problem für Knotengruppen gelöst [Johannson, 1979′].

(Die Mehrzahl der obigen Ergebnisse sind in [Johannson, 1975] angekündigt und in [Johannson, 1979′] bewiesen. Später wurden einige Resultate aus [Johannson, 1979′] auch mit anderen Methoden angegangen, siehe hierfür z. B. [Swarup, 1978], [Jaco-Shalen, 1979], [Jaco, 1980]).

## § 6 Erweiterungen der Theorie

Nach den guten Erfahrungen, die sich im Umgang mit Haken-3-Mannigfaltigkeiten machen ließen, drängt sich die Frage auf, inwieweit die Klasse aller 3-Mannigfaltigkeiten schon durch die der Haken-3-Mannigfaltigkeiten erfaßt wird. In § 3 wurden Kriterien genannt, die sicherstellen, daß eine vorgelegte 3-Mannigfaltigkeit wirklich eine Haken-3-Mannigfaltigkeit ist. Leider gibt es aber auch eine Reihe von Beispielen von Nicht-Haken-3-Mannigfaltigkeiten. Neben den reduziblen 3-Mannigfaltigkeiten z. B. auch alle die 3-Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe, sowie einige spezielle Seifertsche Faserräume. Tatsächlich wird es aber neuerdings immer deutlicher, daß es noch sehr viel mehr derartige Beispiele geben muß, denn es zeigt sich, daß z. B. für gewisse Knoten, fast alle Chirurgien an diesem Knoten (§ 1) zu Nicht-Haken-3-Mannigfaltigkeiten mit unendlicher Fundamentalgruppe führen, die auch keine Seifertschen Faserräume sind [Thurston, 1979], [Hatcher-Thurston, 1979], [Hatcher, 1982]. Darüber hinaus sind noch weitere Beispiele bekannt. Dennoch bleibt die Hoffnung bestehen, wenigstens alle 3-Mannigfaltigkeiten mit unendlicher Fundamentalgruppe schließlich doch durch ein genaues Studium der Haken-3-Mannigfaltigkeiten mitzuerfassen. Zwei Wege zeichnen sich hierzu ab.

Der erste Weg ist ein Ansatz zu einer äquivarianten Theorie der Haken-3-Mannigfaltigkeiten. Schon Waldhausen stellte die Frage [Waldhausen, 1968′], ob nicht jede irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit unendlicher Fundamentalgruppe endlich-blättrig von einer Haken-3-Mannigfaltigkeit überlagert wird. In diesem Fall wäre die vorgelegte 3-Mannigfaltigkeit der Quotient (Orbitraum) einer Haken-3-Mannigfaltigkeit unter der fixpunktfreien Operation einer endlichen Gruppe, und es bietet sich an, die Konstruktionen der 3-Mannigfaltigkeits-Theorie dahingehend zu überprüfen, ob sie sich äquivariant bzgl. einer solchen Gruppenoperation ausführen lassen. Abgesehen von sehr speziellen Fällen, wie z. B. $\mathbf{Z}_2$-Operationen [Boehme, 1972], [Tollefson, 1981], konnte hierzu lange Zeit kaum ein Fortschritt erzielt werden. Neuerdings wird aber von Meeks und Yau vorgeschlagen, hierzu neue Methoden, nämlich die aus der Differentialgeometrie bekannte Theorie der Minimalflächen, heranzuziehen. Es gelang ihnen tatsächlich, mit dieser Methode die äquivariante Version des ja für die Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten so zentralen Schleifen- und Sphärensatzes zu beweisen [Meeks-Yau, 1979 und 1982]. Scott greift diesen Vorschlag auf und erweitert Boehmes oben zitiertes Resultat dahingehend, daß *jede* irreduzible (geschlossene) 3-Mannigfaltigkeit mit unendlicher Fundamentalgruppe bereits homöomorph ist zu einem Seifertschen Faserraum, wenn ihre Fundamentalgruppe isomorph ist zu der eines Seifertschen Faserraumes [Scott, 1983].

Der zweite Weg besteht in der Heranziehung *geometrischer Strukturen* von 3-Mannigfaltigkeiten, d. h. ihre Betrachtung als Raumformen (sofern möglich). Ich habe schon darauf hingewiesen, daß bereits früh euklidische und sphärische Raumformen der Dimension 3 betrachtet wurden und daß für Flächen speziell die Existenz von hyperbolischen Strukturen ausgesprochen nützlich ist. Die hyperbolischen Strukturen auf 3-Mannigfaltigkeiten, sind aber schwerer zu sehen. Erst zögernd wurden einige Beispiele gefunden [Threlfall, 1932], [Gieseking, 1912], und in neuerer Zeit [Riley, 1975], [Joergensen, 1977] bis schließlich Thurston (unter Verwendung seiner Ergebnisse über Flächen-Homöomorphismen) zeigte, daß alle Flächenbündel über der $S^1$ entweder einen wesentlichen Torus enthalten, ein Seifertscher Faserraum sind oder eine vollständige, hyperbolische Metrik mit endlichem Volumen zulassen [Thurston, 1980], [Sullivan, 1980]. In einem wichtigen Punkt verhalten sich die hyperbolischen Raumformen (mit endlichem Volumen) ähnlich wie die, im letzten Paragraphen diskutierten, einfachen 3-Mannigfaltigkeiten: Jeder Isomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen solcher Raumformen ist von einem Homöomorphismus (sogar von einer eindeutig gegebenen Isometrie) induziert [Mostow, 1968], [Prasad, 1973] und ihre Abbildungsklassen-Gruppe ist endlich (siehe z. B. [Riley, 1979]). In einer Reihe von Ankündigungen wurde nun von Thurston der Satz aufgestellt, daß nicht nur das Innere aller einfachen 3-Mannigfaltigkeiten, sondern überhaupt aller der Haken-3-Mannigfaltigkeiten $M^3$, die keinen wesentlichen Torus enthalten und nicht das I-Bündel über der Kleinschen Flasche sind, eine vollständige, hyperbolische Struktur hat (siehe z. B. [Thurston, 1982]). Diese hat genau dann ein endliches Volumen, wenn $\partial M^3$ aus Tori besteht (siehe etwa [Marden, 1974]), also nach Thurston insbesondere genau dann, wenn $M^3$ einfach ist. In jedem Fall aber impliziert die Existenz einer vollständigen, hyperbolischen Struktur von $(M^3)^0$, die Existenz einer diskreten, treuen und torsionsfreien Darstellung $\pi_1(M^3) \to PSL_2\mathbf{C}$. Die Fundamentalgruppe von $M^3$ operiert nämlich fixpunktfrei, als Gruppe von Isometrien, auf der universellen Überlagerung, und diese ist ja der 3-dim. hyperbolische Raum. Nehmen wir als Modell des hyperbolischen Raumes das bekannte Poincarésche Modell des Inneren E der Einheitskugel im $\mathbf{R}^3$, dann entsprechen den Kreisen in der Randsphäre $\partial\bar{E} = S^2 = \mathbf{C} \cup \infty$ umkehrbar eindeutig die geodätischen Ebenen des hyperbolischen Raumes. Jede Isometrie des hyperbolischen Raumes muß also eine eindeutig gegebene konforme Abbildung von $S^2$ (und so von $\mathbf{C}$) induzieren, und eine solche Abbildung ist bekanntlich umkehrbar eindeutig durch ein Element von $PSL_2\mathbf{C}$ gegeben (z. B. [Ford, 1929]). Also ist $\pi_1M^3$ isomorph zu einer Untergruppe von $PSL_2\mathbf{C}$ (und diese ist diskret). Mit der Existenz der Darstellung $\pi_1M^3 \to PSL_2\mathbf{C}$ wird nun das Studium von $M^3$ (d. h. der Haken-3-Mannigfaltigkeiten) sowohl den Methoden der Theorie der Kleinschen Gruppen (wie sie von Ahlfors, Bers und ihren Schülern entwickelt wurden) als auch tiefliegenden algebraischen Methoden und Methoden der algebraischen Geometrie zugänglich (siehe hierzu z. B. [Shalen, 1979], [Culler-Shalen, 1983]). So impliziert beispielsweise die aus der Algebra bekannte Tatsache, daß alle endlich erzeugten Untergruppen von $Gl_n\mathbf{C}$ residuell endlich sind, daß dies zumindest auch für die Fundamentalgruppen von hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeiten gilt. Weiter wird sich besonders der Algebraiker dafür interessieren, ob sich die Darstellung $\pi_1M^3 \to PSL_2\mathbf{C}$ (evtl. auch für spezielle Klassen von $M^3$) nicht noch verschärfen läßt, um so noch genauere Aussagen über $\pi_1M^3$ machen zu können. Dies ist ein eigenes Forschungsprogramm, das ich aber hier nicht weiter behandeln kann. Ich möchte daher nur auf den Struktursatz von Bass für Untergruppen von $PSL_2\mathbf{C}$ hinweisen [Bass, 1979], weil er für die Lösung der Smith-Vermutung eine wesentliche Rolle spielt (siehe unten) und auch in diesem Zusammenhang entdeckt wurde.

Abgesehen von der Algebra zeigt Thurston in seinen Notes [Thurston, 1979] aber auch wie man die interne Geometrie der hyperbolischen Raumformen direkt benutzen kann, um rein topologische Sätze über 3-Mannigfaltigkeiten zu beweisen.

Als Beispiel sei hier nur Thurstons neuer Beweis von Hakens Endlichkeitssatz für wesentliche Flächen in (einfachen) 3-Mannigfaltigkeiten erwähnt [Thurston, 1979, 8.49]. Beschränkt man sich auf hyperbolische Raumformen mit endlichem Volumen, dann bietet sich das Volumen als eine neue Invariante für 3-Mannigfaltigkeiten an. Thurston zeigt, daß die Volumenfunktion für 3-Mannigfaltigkeiten sehr viel reichhaltiger ist als für Mannigfaltigkeiten anderer Dimensionen (ich verweise hierfür und für Berechnungen auf [Thurston, 1979 und 1982] und auf den Übersichtsartikel [Gromov, 1980].

Bisher haben wir erst von der Existenz von hyperbolischen Strukturen für Haken-3-Mannigfaltigkeiten gesprochen. Tatsächlich nutzt der eigentliche Beweis für die Existenz von hyperbolischen Strukturen auf 3-Mannigfaltigkeiten (jedenfalls soweit er mir bisher bekannt ist) die Existenz einer Hierarchie aus (und läuft auf eine induktive Kombination von Kleinschen Gruppen hinaus, die weit über das hinausgeht, was Klein seinerzeit anvisiert hatte). Ist aber erst einmal die hyperbolische Struktur für Haken-3-Mannigfaltigkeiten (ohne wesentliche Tori) etabliert, kann die Klasse der 3-dim. hyperbolischen Raumformen durch einen einfachen Prozeß noch erweitert werden. Thurston zeigt nämlich, daß sogar fast alle Dehn-Chirurgien (§ 1) an einem System k von Kurven in einer 3-Mannigfaltigkeit $M^3$ zu hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeiten führen, sofern $M^3 - k$ hyperbolisch ist [Thurston, 1979 und 1982]. Dies gilt nun insbesondere auch für Knoten k in der $S^3$. Wie wir am Anfang dieses Paragraphen erwähnt haben, liefern gerade die Chirurgien an Knoten in vielen Fällen Nicht-Haken-3-Mannigfaltigkeiten. Bis heute ist aber hierfür kein Beispiel bekannt, das nicht entweder ein Seifertscher Faserraum oder hyperbolisch ist. Dies und andere Hinweise gaben Anlaß für sehr weitgehende Vermutungen über die geometrische Struktur von 3-Mannigfaltigkeiten (siehe [Thurston, 1982]).

Ganz ähnlich wie bei Flächen bieten die hyperbolischen Strukturen eine Möglichkeit, Homöomorphismen von 3-Mannigfaltigkeiten zu studieren. Wie bereits erwähnt, ist für hyperbolische Raumformen $M^3$ mit endlichem Volumen jedes Element von Out $\pi_1 M^3$ von einer Isometrie induziert (insbesondere die hyperbolische Struktur für diese $M^3$ eindeutig!), und dies löst sofort das Nielsensche Realisierungs-Problem für einfache $M^3$: Jede endliche Untergruppe von Out $\pi_1 M^3$ wird von einer (isomorphen) endlichen Untergruppe von $H(M^3)$ induziert (vgl. § 2). Andererseits gibt es Haken-3-Mannigfaltigkeiten (genauer: gewisse Seifertsche Faserräume) für die das Nielsensche Realisierungs-Problem i. a. nicht lösbar ist [Raymond-Scott, 1977] (für weitere Beispiele siehe [Heil-Tollefson, 1978], [Zieschang-Zimmermann, 1979]). Mit Hilfe der charakteristischen Untermannigfaltigkeiten läßt sich das Hindernis für Haken-3-Mannigfaltigkeiten aber völlig verstehen [Zimmermann, 1982].

Wir können festhalten, daß die bisher betrachteten Methoden der 3-Mannigfaltigkeits-Theorie schon einen relativ guten Einblick in die Struktur der Abbildungsklassengruppe $\mathrm{Abb}(M^3)$ von Haken-3-Mannigfaltigkeiten gestatten. Dabei war ja Abb(M) als der Quotient H(M)/I(M) definiert (§ 2), wobei I(M) der Normalteiler der zur Identität isotopen Homöomorphismen ist. Nun sind zwar H(M) und I(M) selbst hoffnungslos kompliziert, aber die Frage nach ihren möglichen, endlichen Untergruppen ist durchaus noch sinnvoll und interessant. Für Haken-3-Mannigfaltigkeiten $M^3$ haben Freedman und Yau unter Benutzung der Existenz von Minimalflächen gezeigt, daß sich eine nicht-triviale, endliche Untergruppe von $I(M^3)$ immer in eine Torus-Aktion von $M^3$ einbetten läßt [Freedman-Yau, 1983], und nur Seifertsche Faserräume lassen Torus-Aktionen zu. Für Nicht-Haken-3-Mannigfaltigkeiten ist dagegen die diesbezügliche Frage ungelöst. Doch konnten immerhin für die 3-Sphäre einige wichtige Fortschritte erzielt werden. Im Falle der 3-Sphäre $S^3$ ist $I(S^3)$ die volle $H^+(S^3)$ der (orientierungserhaltenden) Homöomorphismen von $S^3$. Unter den Gruppen von linearen Homöomorphismen von $S^3$ (d. h. diejenigen Homöomorphismen der Einheitssphäre im $\mathbf{R}^4$, die Einschränkungen von linearen Homöomorphismen des $\mathbf{R}^4$ sind), finden sich eine ganze Reihe von Beispielen von endlichen Untergruppen von $H^+(S^3)$. Darüber hinaus gibt es in der topologischen Kategorie noch sehr viel mehr Beispiele. Was aber die semi-lineare Kategorie betrifft, so besagt eine berühmte Vermutung, daß alle endlichen Gruppen von semi-linearen Homöomorphismen der $S^3$ konjugiert sind zu solchen von linearen Homöomorphismen. Bezüglich dieser Vermutung ist zu unterscheiden zwischen den Homöomorphismen mit und ohne Fixpunkten. Während im letzten Fall so gut wie nichts bekannt ist (abgesehen von Spezialfällen [Waldhausen, 1969], [Ritter, 1973], [Rubinstein, 1979]), kann man im ersten Fall das Problem über die Struktur der Fixpunktmenge Fix(h) der Homöomorphismen h anzugehen versuchen.

Betrachten wir den Fall eines einzigen, periodischen (semi-linearen) Homöomorphismus h auf $S^3$. Schon Smith zeigte, daß Fix(h) homöomorph zu einer Sphäre sein muß. Ist h homotop zur Identität (d. h. orientierungs-erhaltend, wie wir jetzt weiter voraussetzen wollen), dann ist diese Sphäre eine in die $S^3$ eingebettete $S^1$, d. h. ein Knoten. Die Vermutung von Smith besagt, daß dieser Knoten trivial ist (in diesem Fall wäre h konjugiert zu einem linearen Homöomorphismus). Dies war lange Zeit eins der großen Probleme in der Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten, bis es 1978 gelöst wurde. Im Jahre 1979 wurde in einem Symposium zur Smith-Vermutung zusammengestellt, wie all die in diesem Paragraphen angedeuteten neuen Entwicklungen in der Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten zu einer positiven Lösung der Smith-Vermutung führen. Für eine ausführliche Darstellung verweise ich auf den geplanten Bericht [Smith, 1979] und beschränke mich im folgenden auf eine Andeutung. Wir betrachten dafür sowohl die Quotientenabbildung $p: S^3 \to S^3/h$ als auch den Quotienten $M = (S^3 - \mathring{U}(k))/h$ des Außenraumes von $k = \mathrm{Fix}(h)$. Dann ist sowohl $S^3/h$ als auch M eine 3-Mannigfaltigkeit. M enthält entweder eine *geschlossene* wesentliche Fläche oder nicht, und die weitere Argumentation ist in diesen beiden Fällen wesentlich verschieden. Im ersten Fall betrachten wir $\tilde{F} = p^{-1}F$. Dies ist eine wesentliche Fläche in $\tilde{M} = S^3 - \mathring{U}(k)$. Trivialerweise ist Kern $(\pi_1\tilde{F} \to \pi_1 S^3) = 0$, und so folgt aus dem äquivarianten Schleifensatz die Existenz eines Systems D von 2-Scheiben in $S^3$ mit $D \cap \tilde{F} = \partial D$, so daß 1. die reguläre Umgebung $U(\tilde{F} \cup D)$ aus einer Kopie von $\tilde{F}$ und einem System von 2-Sphären besteht und 2. $h(\partial U(\tilde{F} \cup D)) = \partial U(\tilde{F} \cup D)$ ist. Nun gilt die Smith-Vermutung für 2-Sphären und daraus folgt, daß jede der 2-Sphären von $\partial U(\tilde{F} \cup D)$ den Knoten $k = \mathrm{Fix}(h)$ in genau zwei Punkten trifft. Da der Knoten k o.B.d.A. als Primknoten (§ 3) vorausgesetzt werden darf, trennen alle diese 2-Sphären einen unverknoteten Bogen von k ab. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, daß F und so $\tilde{F}$ wesentlich (d. h. insbesondere nicht rand-parallel) in $S^3 - \mathring{U}(k)$ ist. Somit kann M keine geschlossene wesentliche Fläche enthalten. Insbesondere enthält sie keinen wesentlichen Torus, d. h. M ist eine einfache 3-Mannigfaltigkeit. Nach Thurston hat dann M eine hyperbolische Struktur. Die Existenz einer solchen hyperbolischen Struktur sichert, wie erwähnt, eine diskrete, treue Darstellung $\pi_1 M \to PSL_2\mathbf{C}$, und wir können den Struktursatz von Bass über diskrete Untergruppen von $PSL_2\mathbf{C}$ anwenden [Bass, 1979]. In unserem Kontext impliziert dieser [Shalen, 1979] eine Darstellung $\pi_1 M \to PSL_2 A$, wobei A der Ring der ganzen algebraischen Zahlen ist, und, nach einem einfachen algebraischen Argument von Shalen, führt dies in der sehr speziellen Situation der Smith-Vermutung zum Widerspruch (siehe auch [Morgan, 1981]). Fix(h) ist also notwendig unverknotet.

Für Operationen von endlichen Gruppen auf $S^3$ verweise ich auf [Milnor, 1957], [Morgan, 1981], [Davies-Morgan, 1979], [Thomas, 1978 und 1980] und für eine Verallgemeinerung der Smith-Vermutung auf beliebige 3-Mannigfaltigkeiten auf [Thurston, 1982].

Damit möchte ich meinen Bericht schließen. Ich hoffe, mit meinen Ausführungen einige der wesentlichen Entwicklungen in der Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten zum Ausdruck gebracht zu haben.

## Literatur

Alexander, J. W. (1920): Note on Riemann Spaces. BAMS **26**, 370–372.

Alexander, J. W. (1923): On the deformation of an n-cell. Proc. Nat. Acad. Sci. **9**, 406–407

Alexander, J. W. (1923'): Invariant points of a surface transformation of given class. Transaction AMS **25**, 173–184

Alexander, J. W. (1924): On the subdivision of 3-space by a polyhedron. Proc. Nat. Acad. Sci. **10**, 6–8

Alexander, J. W. (1932): Some problems in topology. Verh. Int. Math.-Kongr. **1**, 249–257

Baer, R. (1928): Isotopien auf Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen, J. Reine Angew. Math. **159**, 101–116

Bass, H. (1979): Finitely generated subgroups of $Gl_2$. In: [Smith, 1979]

Bers, L. (1960): Quasi-conformal mappings and Teichmüller's theorem. In: Analytic functions, 89–120, Princeton Univ. Press

Bers, L. (1978): An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston. Acta math. **141**, 73–98.

Bing, R. H. (1959): An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated. Ann. of Math. **69**, 37–65

Birman, J. S. (1974): Braids, links, and mapping class groups. Ann. of Math. Studies. Princeton Univ. Press

Boehme, H. (1972): Fast genügend große irreduzible 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Inv. math. **17**, 303–316

Bonahon, F. (1980): Cobordisme des diffeomorphismes des surfaces. C.R. Acad. Sci. Paris Série A–B **290**, A 765–A 767

Cannon, J. W. – Feustel, C. D. (1976): Essential embeddings of annuli and Möbius bands in 3-manifolds. Trans. AMS **215**, 219–239

Cohen, M. M. (1973): A course in simple-homotopy theory. Springer

Crowell, R. H. – Fox, R. H. (1977): Introduction to knot theory. Springer

Culler, M. – Shalen, P. B. (1982): Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. Ann. of Math. **117**, 109–146

Davies, M. – Morgan, J. (1979): Finite group actions on homotopy 3-spheres. In: [Smith, 1979]

Dehn, M. – Heegaard, P. (1907): Analysis Situs. Enz. Math. Wiss. III, AB3. Leipzig, 153–200

Dehn, M. (1910): Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. Math. Ann. **69**, 137–168

Dehn, M. (1938): Die Gruppe der Abbildungsklassen. Acta math. **69**, 135–206

Edmonds, A. L. – Ewing, J. H. (1982): Remarks on the cobordism group of surface diffeomorphisms. Math. Ann. **259**, 497–504

Epstein, D. B. A. (1972): Periodic flows on 3-manifolds. Ann. of Math. **95**, 68–82

Fathi, A. – Laudenbach, F. – Poénaru, V. (1979): Travaux de Thurston sur les surfaces. Astérisque 66–67

Feustel, C. D. (1976): On the torus theorem and its applications. Trans. AMS **217**, 1–43

Ford, L. R. (1929): Automorphic functions. Chelsea

Fox, R. H. (1952): On the complementary domains of a certain pair of inequivalent knots. Ned. Akad. Wetensch. Indag. Math. **14**, 37–40

Franz, W. (1935): Über die Torsion einer Überdeckung. J. Reine Angew. Math. **173**, 245–254

Freedman, M. – Yau, S.-T. (1983): Homotopically trivial symmetries of Haken manifolds are toral. Topology **22**, 179–189

Gieseking, H. (1912): Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen, Diss. Univ. Frankfurt

Gromov, M. (1980): Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jørgensen. Seminaire Bourbaki, 32 anée, n° 546

Haken, W. (1961): Theorie der Normalflächen. Acta math. **105**, 245–375

Haken, W. (1961′): Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **76**, 427–467

Haken, W. (1962): Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten I. Math. Z. **80**, 89–120

Haken, W. (1968): Some results on surfaces in 3-manifolds. In: Studies in modern topology, 39–98, Prentice Hall

Hamilton, A. J. S. (1976): The triangulation of 3-manifolds. Quart. J. Math. Oxford Ser. **27**, 63–70

Hantzsche, W. – Wendt, H. (1935): Dreidimensionale euklidische Raumformen. Math. Ann. **110**, 593–611

Hatcher, A. (1976): Homeomorphisms of sufficiently large $P^2$-irreducible 3-manifolds. Topology **15**, 343–347

Hatcher, A. (1982): On the boundary curves of incompressible surfaces. Pacific J. of Math. **99** (2), 373–377

Hatcher, A. – Thurston, W. (1979): Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements. Preprint

Hatcher, A. – Thurston, W. (1980): A presentation for the mapping class group of closed orientable surfaces. Topology **19**, 221–237

Heil, W. (1969): On $P^2$-irreducible 3-manifolds. BAMS **75**, 772–775

Heil, W. – Tollefson, J. L. (1978): Deforming homotopy involutions of 3-manifolds to involutions. Topology **17**, 349–365

Helmholtz, H. v. (1868): Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie. Verh. nat. hist. med. Ver. Hd. **4**, 197–202

Hemion, G. (1976): Equivalence relations for incompressible surfaces. Topology **15**, 41–50

Hemion, G. (1979): On the classification of homeomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds. Acta math. **142**, 123–155

Hempel, J. (1976): 3-manifolds. Princeton Univ. Press

Hendriks, H. – Laudenbach, F. (1973): Scindement d'une êquivalence d'homotopie en dimension 3. C. R. Acad. Sci. Paris **276**, série A, 1275–1278

H i l d e n , H. M. (1974): Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of $S^3$. BAMS **80**, 1243–1244

H i r s c h , U. (1974): Über offene Abbildungen auf die 3-Sphäre. Math. Z. **140**, 203–230

H o p f , H. (1925): Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik von Mannigfaltigkeiten. Diss. Berlin. Teilweise in: Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. Math. Ann. **95**, 313–339

H o p f , H. (1931): Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. **104**, 637–665

J a c o , W. H. (1980): Lectures on three-manifold topology. AMS 43

J a c o , W. H. – S h a l e n , P. B. (1979): Seifert fibered spaces in 3-manifolds. Memoirs AMS **21**, 220

J ø r g e n s e n , T. (1977): Compact 3-manifolds of constant negative curvature fibering over the circle. Ann. of Math. **106**, 61–72

J o h a n n s o n , K. (1975): Êquivalences d'homotopie des varietés de dimension 3. C. R. Acad. Sci. Paris **281**, Serie A, 1009–1010

J o h a n n s o n , K. (1979): On the mapping class group of simple 3-manifolds. In: Topology of low-dimensional manifolds. Proceedings, Sussex 1977, (R. Fenn, ed.). Springer LNM 722, 48–66

J o h a n n s o n , K. (1979'): Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries. Springer LNM 761

J o h a n n s o n , K. (1983): On the mapping class group of knot spaces. Preprint

J o h a n n s o n , K. – J o h n s o n , D. (1980): Non-bording diffeomorphisms of surfaces which act trivially on homology. Preprint

J o h a n s s o n , I. (1935): Über singuläre Elementarflächen und das Dehnsche Lemma. Math. Ann. **110**, 312–330.

K e r c k h o f f , S. P. (1980): The Nielsen realization problem. BAMS **2**, 452–454

K e r c k h o f f , S. P. (1983): The Nielsen realization problem. Ann. of Math. **117**, 235–265

K i r b y , R. (1978): A calculus for framed links in $S^3$. Inv. math. **45**, 35–56

K i r b y , R. – S i e b e n m a n n , L. C. (1969): On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, BAMS **75**, 742–749

K l e i n , F. (1928): Nicht-euklidische Geometrie. Springer

K n e s e r , H. (1929): Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Jber. d. dt. Math.-Verein. **38**, 248–260

L a u d e n b a c h , F. (1974): Topologie de la dimension trois-homotopie et isotopie. Astérisque **12**, Société mathématique de france

L e h t o , O. – V i r t a n e n , K. I. (1965): Quasikonforme Abbildungen. Springer

L i c k o r i s h , W. B. R. (1962): A presentation of orientable combinatorial 3-manifolds. Ann. of Math. **76**, 531–538

L i c k o r i s h , W. B. R. (1964): A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. Proc. Camb. Phil. Soc. **60**, 769–778

L i c k o r i s h , W. B. R. (1973): Three-manifolds as branched covers. Proc. Camb. Phil. Soc. **74**, 449–451

M a r d e n , A. (1974): The geometry of finitely generated Kleinian groups. Ann. of Math. **99**, 383–462

M a r k o v , A. A. (1958): Insolubility of the problem of homeomorphy. Proc. Inter. Congress. Math., 300–306, Cambridge Univ. Press (in russisch)

M e e k s , W. H. – Y a u , S. T. (1979): Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory. In: [Smith, 1979].

M e e k s , W. H. – Y a u , S. T. (1982): The classical plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds. Topology **21** (4), 409–442

M i l l e r , R. T. (1982): Geometric laminations from Nielsen's viewpoint. Advances in Math. **45**, 189–212

M i l n o r , J. (1962): A unique factorization theorem for 3-manifolds. Amer. J. Math. **84**, 1–7

Milnor, J. (1966): Whitehead torsion. BAMS **72**, 358–426

Milnor, J. (1957): Groups which act on $S^n$ without fixed points. Amer. J. Math. **79**, 623–630

Moise, E. E. (1952): Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. Ann. of Math. **56**, 96–114

Moise, E. E. (1977): Geometric topology in dimension 2 and 3. Springer

Morgan, J. (1981): Actions des groupes finis sur $S^3$: La conjucture de P. A. Smith (d'apres Thurston et Meeks-Yau). Seminaire Bourbaki, anée 33, 578, 277–289

Montesinos, J. M. (1974): A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched covers of $S^3$. BAMS **80**, 845–846, und in: (1976) Three manifolds as 3-fold branched covers of $S^3$. Quart. J. Math. **27**, 85–94

Mostow, G. D. (1968): Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms. Publ. Math. IHES **34**, 53-104

Neuwirth, L. P. (1965): Knot groups. Ann. of Math. Studies. Princeton

Nielsen, J. (1927): Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. I. Acta math. **50**, 189–358; (1929) II. Acta math. **53**, 1–76; (1936) III. Acta math. **58**, 87–167

Nielsen, J. (1942): Abbildungsklassen endlicher Ordnung. Acta math. **75**, 23–115

Novikov, P. S. (1958): Über einige algorithmische Probleme der Gruppentheorie. Jber. d. dt. Math.-Verein. **61**, 88–92

Orlik, P. – Vogt, E. – Zieschang, H. (1967): Zur Topologie gefaserter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Topology **6**, 49–64

Papakyriakopoulos, C. D. (1957): On Dehn's Lemma and the asphericity of knots. Ann. of Math. **66**, 1–26

Papakyriakopoulos, C. D. (1957'): On solid tori. Proc. London Math. Soc. **VII**, 281–299

Papakyriakopoulos, C. D. (1958): Some problems on 3-dimensional manifolds. BAMS **64**, 317–335

Poincaré, H. (1904): Cinquième complément à l'analysis situs. Rend. Circ. Mat. Palermo. **18**, 45–100; oder : Oevres, t. VI, 435–498

Prasad, G. (1973): Strong rigidity of Q-rank 1 lattices. Inv. math. **21**, 255–286

Rabin, M. O. (1958): Recursive unsolvability of group theoretic problems. Ann. of Math. **67**, 172–194

Rado, T. (1924): Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta. Litt. Sci. Szeged. **2**, 101–121

Raymond, F. – Scott, L. (1977): The failure of Nielsen's theorem in higher dimensions. Archiv Math. **29**, 643–654

Reidemeister, K. (1927): Knoten und Gruppen, Abhandl. Math. Sem. Hamburg **5**, 7–23

Reidemeister, K. (1935): Homotopieringe und Linsenräume. Abhandl. Math. Sem. Hamburg **11**, 102–109

Riemann, B. (1867): Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (Habil. Vortrag 1854). Abhandl. d. Kgl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen **13**

Riley, R. (1975): A quadratic parabolic group. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77**, 281–288

Riley, R. (1979): An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structures. In: Topology of low-dimensional manifolds. Proceedings, Sussex 1977 (R. Fenn, ed.). Springer LNM 722, 99–133

Ritter, G. (1973): Free actions of $\mathbf{Z}_8$ on $S^3$. Trans. AMS **181**, 195–212

Rolfsen, D. (1976): Knots and links. Publish or Perish

Rubinstein, J. H. (1979): Free actions of some finite groups on $S^3$. I. Math. Ann. **240**, 165–175

Rubinstein, J. H. (1979'): On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles. Trans AMS **251**, 129–137

Scharlemann, M. (1980): The subgroup of $\Delta_2$ generated by automorphisms of tori. Math. Ann. **251**, 263–268

Scholz, E. (1980): Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré. Birkhäuser Verlag

Schubert, H. (1949): Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl. 3. Abh.

Schubert, H. (1953): Knoten und Vollringe. Acta math. **90**, 131–286

Schubert, H. (1961): Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen. Math. Z. **76**, 116–148

Scott, P. (1970): The space of homeomorphisms of a 2-manifold. Topology **9**, 97–109

Scott, P. (1983): There are no fake Seifert fibre spaces with infinite $\pi_1$. Ann. of Math. **117**, 35–70

Seifert, H. (1932): Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume. Acta math. **60**, 147–238

Seifert, H. – Threlfall, W. (1934): Lehrbuch der Topologie. Teubner

Shalen, P. B. (1971): A "piecewise linear" proof of the triangulation theorem for 3-manifolds. Diss. Harvard Univ.

Shalen, P. B. (1979): Separating, incompressible surfaces in 3-manifolds. Invent. math. **52**, 105–126

Shalen, P. B. (1979'): The case of no incompressible surface. In: [Smith, 1979]

Shapiro, A. – Whitehead, J. H. C. (1958): A proof and extension of Dehn's Lemma. BAMS **64**, 174–178

Smith (1979): Proceedings of the Smith conjecture at Columbia University, in preparation

Stallings, J. R. (1959): Some topological proofs and extensions of Grushko's theorem. Thesis. Princeton Univ.

Stallings, J. R. (1960): On the loop theorem. Ann. of Math. **72**, 12–19

Stallings, J. R. (1962): On fibering certain 3-manifolds. Topology of 3-manifolds, Prentice Hall, 95–100

Sullivan, D. (1980): Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur $S^1$. Seminaire Bourbaki, année 32, 554, 196–214

Swarup, A. (1978): On a theorem of Johannson. J. London Math. Soc. II. Ser. **18**, 560–562

Teichmüller, O. (1939): Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. Abhandl. d. Preuss. Akad. d. Wiss. **22**, 1–197

Teichmüller, O. (1943): Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossenen, orientierten Riemannschen Flächen. Abhandl. d. Preuss. Akad. d. Wiss. (math.-naturw. Kl.) 4

Thomas, C. B. (1978): Free actions by finite groups on $S^3$. Proc. Sympos. Pure Math. 32 part I. Amer. Math. Soc., Providence R.I., 125–130

Thomas, C. B. (1980): Homotopy classification of free actions by finite groups on $S^3$. Proc. London Math. Soc. (3) **40**, 284–297

Threlfall, W. (1932): Dreidimensionale Raumformen. Verh. Int. Math. Kongr. Zürich 1932, 198–199

Threlfall, W. – Seifert, H. (1930): Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes I. Math. Ann. **104**, 1–70; (1932) II. Math. Ann. **107**, 543–586

Thurston, W. (1978): On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, I. Preprint

Thurston, W. (1979): The geometry and topology of 3-manifolds. Preprint

Thurston, W. (1980): Hyperbolic structures on 3-manifolds, II. Surface groups and 3-manifolds which fibre over the circle. Preprint

Thurston, W. (1982): Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. BAMS (new series) **6** (3), 357–381

Tollefson, J. L. (1981): Involutions of sufficiently large 3-manifolds. Topology **20**, 323–352

Tucker, T. W. (1974): Boundary-reducible 3-manifolds and Waldhausen's theorem. Michigan Math. J. **20** (4), 321–327

Waerden, B. L. van der (1930): Kombinatorische Topologie. Jber. d. dt. Math.-Verein. **39**, 121–139

Waldhausen, F. (1967): Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Topology **6**, 505–517

Waldhausen, F. (1967'): Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I. Inv. math. 3, 308–333, II. Inv. math. **4**, 87–117

Waldhausen, F. (1967''): Eine Verallgemeinerung des Schleifensatzes. Topology **6**, 501–504

Waldhausen, F. (1968): On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. Ann. of Math. **87**, 56–88

Waldhausen, F. (1968'): The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible 3-manifolds. Ann. of Math. **88**, 272–280

Waldhausen, F. (1969): Über Involutionen der 3-Sphäre. Topology **8**, 81–91

Waldhausen, F. (1969'): On the determination of some bounded 3-manifolds by their fundamental groups alone. Proc. Sympos. on Topology and its Applications, Herceg Nowi 1968, Beograd, 331–332

Waldhausen, F. (1978): Recent results on sufficiently large 3-manifolds. Proc. of Symp. in Pure Math. AMS **32**, 21–38

Whitehead, J. H. C. (1935): A certain open manifold whose group is unity. Quart. J. of Math. (2) **6**, 268–279

Wolf, J. A. (1967): Spaces of constant curvature. Mc Graw Hill

Zieschang, H. (1981): Finite groups of mapping classes of surfaces. Springer LNM 875

Zieschang, H. – Zimmermann, B. (1979): Endliche Gruppen von Abbildungsklassen gefaserter 3-Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **240**, 41–62

Zieschang, H. – Vogt, E. – Coldewey, H. D. (1980): Surfaces and planar discontinuous groups. Springer LNM 835

Zimmermann, B. (1982): Das Nielsensche Realisierungsproblem für hinreichend große 3-Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **180**, 349–359

Dr. Klaus Johannson
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
4800 Bielefeld

(*Eingegangen 3. 5. 1983*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein
86 (1984) 69–82
AMS subject classification: 03B60, 03C90, 12L99


# Modelltheorie – topologische Modelltheorie[1)]

J. Flum, Freiburg i. Br.

Was ist Modelltheorie? Man kann es kurz so fassen: Die Modelltheorie ist das Gebiet der Mathematik, in dem *Strukturen* und *Klassen von Strukturen* unter Einbeziehung einer *formalen Sprache* untersucht werden. Hierzu gehört etwa das Studium der Zusammenhänge zwischen der sprachlichen Gestalt von Axiomensystemen und den Eigenschaften ihrer Modelle. Die *klassische* Modelltheorie beschäftigt sich mit *algebraischen* Strukturen wie Gruppen, Körper, . . .; die eingesetzte formale Sprache ist die sogenannte *Sprache der ersten Stufe.* In der *topologischen* Modelltheorie, ein etwa 10 Jahre alter Zweig der Modelltheorie, werden topologische Strukturen wie topologische Gruppen, topologische Körper mit Hilfe der sog. *invarianten Sprache* untersucht.

In diesem Artikel möchte ich zunächst auf die Natur der Ergebnisse der klassischen Modelltheorie eingehen. Danach läßt sich besser das Ziel der topologischen Modelltheorie verdeutlichen, auf Probleme bei ihrer Entstehung hinweisen und eine Wertung der erzielten Ergebnisse vornehmen. Dabei sind wir in erster Linie an einem Vergleich von Methoden und Ergebnissen der klassischen und der topologischen Modelltheorie interessiert.

## 1 Klassische Modelltheorie

Anhand von Beispielen führen wir zunächst einige Grundbegriffe der Logik ein (Struktur, Ausdruck, Modellbeziehung). Den an exakten Definitionen interessierten Leser verweisen wir auf [8].

Unter einer algebraischen *Struktur* $\mathfrak{A}$ verstehen wir ein Tupel

$$\mathfrak{A} = (A, f^A, g^A, \ldots, c^A, d^A, \ldots, R^A, S^A, \ldots)$$

bestehend aus einer nicht-leeren Menge A, dem *Träger* von $\mathfrak{A}$, aus ein- oder mehrstelligen Funktionen $f^A, g^A, \ldots$ über A, aus ausgezeichneten Elementen $c^A, d^A, \ldots$ in A und aus ein- oder mehrstelligen Relationen $R^A, S^A, \ldots$ über A. So läßt sich etwa eine geordnete Gruppe auffassen als Struktur des Typs

(1) $(A, \circ^A, e^A, <^A)$.

[1)] Vortrag, gehalten am 23. 9. 1982 auf der DMV-Tagung in Bayreuth.

Die *Ausdrücke der Sprache* $L_1$ *der ersten Stufe* sind Zeichenreihen, die in fest vorgeschriebener Weise aus den folgenden Zeichen zusammengesetzt sind:

– Variablen x, y, z, . . . zur Bezeichnung beliebiger Elemente des Trägers;
– den „logischen" Zeichen $\neg$ (nicht), $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\rightarrow$ (wenn – so), $\leftrightarrow$ (gdw), $\forall$ (für alle), $\exists$ (es gibt);
– dem Gleichheitszeichen =;
– den Klammern (,);

und für jeden Typ von Struktur die entsprechenden Zeichen, also etwa im Falle von Strukturen vom Typ (1) einer geordneten Gruppe

– ein zweistelliges Funktionszeichen $\circ$, ein Konstantenzeichen e und ein zweistelliges Relationszeichen $<$.

Beispiele für Ausdrücke sind etwa

$$\forall x\, \forall y \quad x \circ y = y \circ x, \qquad \exists x(e < x \wedge \forall y(e < y \rightarrow (x = y \vee x < y))).$$

Abweichend von der üblichen Festlegung fordern wir, daß in einem Ausdruck jede Variable im Wirkungsbereich eines Quantors steht. In natürlicher Weise läßt sich dann für eine Struktur $\mathfrak{A}$ und eine Formel $\varphi$ definieren, ob $\varphi$ in $\mathfrak{A}$ *gilt.* Man sagt dafür auch, $\mathfrak{A}$ ist ein *Modell* von $\varphi$, und schreibt $\mathfrak{A} \models \varphi$. So gilt z. B. für eine geordnete Gruppe $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \models \forall x\, \forall y \quad x \circ y = y \circ x \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A} \text{ ist abelsch,}$$

und $\quad \mathfrak{A} \models \exists x(e < x \wedge \forall y(e < y \rightarrow (x = y \vee x < y))) \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A}$ ist diskret geordnet.

Die Bezeichnungen „Sprache der ersten Stufe" und „elementare Sprache" für $L_1$ weisen darauf hin, daß in dieser Sprache nur über Objekte erster Stufe quantifiziert werden kann, d. h. nur über Elemente des Trägers und nicht über Teilmengen. So lassen sich etwa Aussagen der Gestalt

„Für alle Untergruppen . . ."

in dieser Sprache nicht wiedergeben, wohl dagegen die Axiome für Ordnungen, Gruppen, Körper, reell abgeschlossene und algebraisch abgeschlossene Körper.

Wir gehen nun auf die Ergebnisse der klassischen Modelltheorie ein; dabei können wir jedoch keinen systematischen Überblick geben, sondern nur anhand von Beispielen einen Eindruck von der Natur modelltheoretischer Ergebnisse gewinnen. So werden wir etwa sehen, daß modelltheoretische Begriffsbildungen und Methoden

– den Rahmen zur Formulierung allgemeiner mathematischer Sachverhalte liefern,
– zu Teillösungen des Isomorphieproblems der Algebra führen,
– auf die besondere Bedeutung gewisser Strukturen für die Mathematik hinweisen.

Zunächst wenden wir uns Ergebnissen zu, die Auskunft über die Existenz und die Anzahl von Modellen in verschiedenen Mächtigkeiten geben. Die Aussagen 1.1 und 1.3 sind im sog. Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski (vgl. [5]) enthalten.

**1.1 Satz** *Hat die Menge $\Phi$ von Ausdrücken erster Stufe ein unendliches Modell, so hat $\Phi$ beliebig große Modelle (d. h. zu jeder Kardinalzahl $\kappa$ gibt es ein Modell $\mathfrak{A}$ von $\Phi$, dessen Träger* A *eine Mächtigkeit $\geqslant \kappa$ hat).*

Sei etwa $\Phi$ die Menge der Gruppenaxiome. Da es unendliche Gruppen gibt, erhalten wir mit 1.1 die Existenz von beliebig großen Gruppen. Entsprechend zeigt man mit 1.1, daß es beliebig große Ordnungen und beliebig große reell abgeschlossene Körper gibt. Für jede einzelne der genannten Theorien läßt sich die entsprechende Behauptung sehr leicht mit algebraischen Mitteln beweisen. *Die Modelltheorie, genauer die Sprache der ersten Stufe; liefert in diesem Fall – und dasselbe gilt für viele andere Situationen – den Rahmen, in dem so ein Ergebnis allgemein formuliert und bewiesen werden kann.* Die Bedeutung der modelltheoretischen Formulierung liegt dann häufig nicht so sehr in der erzielten Verallgemeinerung, sondern wohl eher darin, wie sie die allgemeine Natur eines Problems klärt, wie sie das Allgemeine vom Besonderen unterscheidet (vgl. [21], S. 184).

Hierzu ein weiteres Beispiel: Ein Axiomensystem $\Phi$ ist *in einer Mächtigkeit kategorisch,* falls $\Phi$ bis auf Isomorphie genau ein Modell dieser Mächtigkeit hat. Eine scharfsinnige Analyse und Verallgemeinerung der algebraischen Theorie der Körpererweiterungen ermöglichte es, das Kategorizitätsverhalten von in der Sprache der 1. Stufe formulierten Axiomensystemen zu untersuchen (vgl. [26], [35]), und u. a. den folgenden Satz zu beweisen (für den die algebraisch abgeschlossenen Körper einer festen Charakteristik wohl das bekannteste algebraische Beispiel sind).

1.2 **Satz** *Ist $\Phi$ in einer überabzählbaren Mächtigkeit kategorisch, so ist $\Phi$ in jeder überabzählbaren Mächtigkeit kategorisch.*

An dieser Stelle sei bemerkt, daß eine Reihe von Begriffen und Methoden der algebraischen Theorie der Körper auf modelltheoretischer Ebene verallgemeinert wurden und zu fruchtbaren Theorien führten (vgl. [1], [33], [36]). Hier sei nur noch der Begriff der existentiell abgeschlossenen Struktur erwähnt. Auf die Theorie der existentiell abgeschlossenen Strukturen trifft im besonderen Maße zu, was Macintyre in [25] von modelltheoretischen Untersuchungen fordert: „*I want to see model theory taking constructions from mathematics, generalizing them, and giving back applications*". Die existentiell abgeschlossenen Strukturen sind eine Verallgemeinerung der algebraisch abgeschlossenen Körper und der algebraisch abgeschlossenen Gruppen. Im modelltheoretischen Rahmen lassen sich allgemeine Existenz- und Einbettungssätze für existentiell abgeschlossene Strukturen beweisen. Für eine konkrete Klasse von Strukturen gilt es dann, die existentiell abgeschlossenen Strukturen algebraisch zu charakterisieren, um für diese Klasse aus dem allgemeinen Einbettungssatz eine rein algebraische Aussage zu gewinnen (vgl. [16], [24]).

Ein Ergebnis, das 1.1 entspricht und die Existenz „kleiner unendlicher" Modelle liefert, lautet:

1.3 **Satz** *Jede unendliche Struktur $\mathfrak{B}$ hat eine Substruktur $\mathfrak{A}$ mit abzählbarem Träger, die zu $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent ist.*

Dabei heißen zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *elementar äquivalent* (kurz: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), wenn in ihnen dieselben Ausdrücke der ersten Stufe gelten, wenn also für jeden Ausdruck $\varphi$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Elementar äquivalente Strukturen haben somit dieselben in der elementaren Sprache (formulierbaren) Eigenschaften.

Der Begriff der elementaren Äquivalenz ist von zentraler Bedeutung in der Modelltheorie. In der Algebra steht der Begriff der Isomorphie im Vordergrund. Ein Ziel z. B. der Gruppentheorie besteht darin, sich einen Überblick über alle Isomorphietypen von Gruppen zu verschaffen. Dies gelingt etwa für endlich erzeugte abelsche Gruppen. Jede solche Gruppe bestimmt gewisse natürliche Zahlen (Invarianten); und für je zwei endlich erzeugte abelsche Gruppen gilt:

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B} \quad \text{haben dieselben Invarianten.}$$

Die Invarianten bestimmen also die strukturellen Eigenschaften der Gruppe. – In vielen anderen Fällen, etwa für beliebige abelsche Gruppen, gelingt eine solche Klassifikation nicht. Manchmal ist es dann aber möglich eine Klassifikation nach der elementaren Äquivalenz an Stelle der Isomorphie vorzunehmen, also nicht *alle* sondern nur *elementare* strukturelle Eigenschaften zu berücksichtigen. Zum Beispiel bestimmt jede abelsche Gruppe „elementare Invarianten", und für je zwei abelsche Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B} \quad \text{haben dieselben elementaren Invarianten.}$$

Eine Bemerkung zur Natur dieser Invarianten: Jede abelsche Gruppe ist zu einer Gruppe elementar äquivalent (vgl. [10], [37]), die aus den folgenden Bausteinen aufgebaut ist:

- $\mathbf{Z}(p^n)$, der zyklischen Gruppe der Ordnung $p^n$ (p Primzahl, $n \geqslant 1$),
- $\mathbf{Z}(p^\infty)$, der p-ten Prüfergruppe,
- $\mathbf{Q}_p$, der additiven Gruppe der rationalen Zahlen mit zu p teilerfremdem Nenner,
- $\mathbf{Q}$, der additiven Gruppe der rationalen Zahlen.

Und zwar gilt

$$\mathfrak{A} \equiv \bigoplus_{\text{p Primzahl}} \Big( \big( \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathbf{Z}(p^n)^{\nu(p,n)} \big) \oplus \mathbf{Z}(p^\infty)^{d(p)} \oplus \mathbf{Q}_p^{t(p)} \Big) \oplus \mathbf{Q}^\delta$$

wobei $\nu(p, n), d(p), t(p) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $\delta \in \{0, 1\}$ und $\delta = 1$, falls $\mathfrak{A}$ nicht von beschränkter Ordnung ist. Diese Zahlen sind durch $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt, sie sind die $\mathfrak{A}$ zugeordneten elementaren Invarianten. *Hier führen also Begriffsbildungen der Modelltheorie zu Teillösungen des allgemeinen Isomorphieproblems der Algebra.*

Es wurden algebraische Methoden entwickelt, mit denen man die elementare Äquivalenz von Strukturen nachweisen kann (vgl. [5] und [11] für rein algebraische Charakterisierungen der elementaren Äquivalenz mit Ultraprodukten bzw. partiellen Isomorphismen). In einigen Fällen hilft bereits der folgende Satz.

**1.4 Satz** *Sei $\Phi$ eine Menge von Ausdrücken der 1. Stufe, die nur unendliche Modelle besitzt. Ist $\Phi$ in einer unendlichen Mächtigkeit kategorisch, so sind je zwei Modelle von $\Phi$ elementar äquivalent.*

Insbesondere erhalten wir:

*Je zwei algebraisch abgeschlossene Körper derselben Charakteristik sind elementar äquivalent.*

Man kann dieses Resultat als eine erste Präzisierung eines heuristischen Prinzips ansehen, das auf Lefschetz zurückgeht und das Weil in [38] so formulierte:

*There is but one algebraic geometry of characteristic* p *for each value of* p.

Anhand der elementaren Äquivalenz machen wir noch auf einen weiteren Aspekt modelltheoretischer Untersuchungen aufmerksam. Mit 1.1 läßt sich zeigen, daß ein echter geordneter Erweiterungskörper $\mathfrak{R}^*$ des geordneten Körpers $\mathfrak{R}$ der reellen Zahlen mit $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{R}^*$ existiert. Als echte Erweiterung von $\mathfrak{R}$ enthält $\mathfrak{R}^*$ – wie man sich leicht überlegt – auch unendlich kleine sog. infinitesimale Elemente, d. h. positive Zahlen, die kleiner als jede reelle Zahl sind. Da $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^*$ elementar äquivalent sind, hat $\mathfrak{R}^*$ dieselben elementaren Eigenschaften wie $\mathfrak{R}$, man kann daher in $\mathfrak{R}^*$ so rechnen wie in $\mathfrak{R}$. In $\mathfrak{R}^*$ läßt sich in sehr intuitiver Weise die gewöhnliche Analysis (Infinitesimalrechnung) aufbauen (vgl. [18], [32]). Treiben wir Analysis in $\mathfrak{R}^*$, so sprechen wir von *Nichtstandardanalysis*, ein etwa 25 Jahre altes Gebiet der Mathematik. Der Übergang zu $\mathfrak{R}^*$ erweitert das mathematische Rüstzeug des Analytikers. Mit Nichtstandardmethoden wurden in den letzten Jahren klassische Probleme aus verschiedenen Gebieten der Analysis wie z. B. der Funktionalanalysis ([4], [15]) und der stochastischen Analysis (vgl. [17], [19]) gelöst (vgl. darüber hinaus [30], [32], in denen auch auf Anwendungen von Nichtstandardmethoden in anderen Gebieten der Mathematik eingegangen wird). In diesem Fall, aber auch im Fall der existentiell abgeschlossenen Strukturen, *haben erst modelltheoretische Untersuchungen auf die besondere Bedeutung gewisser Strukturen für die Mathematik aufmerksam gemacht.*

Bekanntlich ist $\mathfrak{R}$ bis auf Isomorphie der einzige vollständig geordnete Körper. Die Axiome für geordnete Körper lassen sich in der Sprache der 1. Stufe formulieren, nicht jedoch das Vollständigkeitsaxiom: Jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen hat ein Supremum. „Jede nach oben beschränkte Menge . . ." – hier handelt es sich um einen Quantor über Teilmengen des Trägers; er läßt sich in der sog. *Sprache* $L_2$ *der zweiten Stufe* wiedergeben. In dieser Sprache haben wir noch zusätzliche Variable X, Y, Z, . . . für Teilmengen des Trägers, d. h. ein Quantor $\forall X\varphi$ bzw. $\exists X\varphi$ wird in einer Struktur $\mathfrak{A}$ gelesen als

„Für alle $X \subset A$ gilt $\varphi$" bzw. „Es gibt ein $X \subset A$, so daß $\varphi$ gilt".

Die Sprache der 2. Stufe ist sehr ausdrucksstark; in ihr lassen sich viele Strukturen – etwa der geordnete Körper der reellen Zahlen – bis auf Isomorphie charakterisieren. Die Isomorphie und die Äquivalenz in der Sprache der 2. Stufe fallen also für viele interessante Strukturen zusammen (dabei sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $L_2$ äquivalent, wenn für alle $L_2$-Ausdrücke $\varphi$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw $\mathfrak{B} \models \varphi$). Die Einbeziehung der Sprache der 2. Stufe führt daher zu wenig neuen Ergebnissen, mit anderen Worten die Modelltheorie der 2. Stufe ist sehr arm (vgl. aber etwa [27], [29], in denen sich Fragmente der 2. Stufe als nützlich erweisen).

## 2 Topologische Modelltheorie

Die vorangehenden Ausführungen machen auf die Bedeutung der Wahl der „richtigen" Sprache für modelltheoretische Untersuchungen aufmerksam. Und die topologische Modelltheorie ist eine so junge Disziplin, da es schwer war, eine für modelltheoretische Untersuchungen bei topologischen Strukturen adäquate Sprache zu finden. Das Ziel, das man dabei im Auge hatte, formulierte A. Robinson in [34] wie folgt: „. . . *to develop topological model theory. What I have in mind is a theory which is related to algebraic-topological structures, such as topological groups and fields, as ordinary model theory is related to algebraic structures*".

Unter einer topologischen Struktur verstehen wir ein Tupel $(\mathfrak{A}, \sigma)$ bestehend aus einer algebraischen Struktur $\mathfrak{A}$ (wie bisher) und einer Topologie $\sigma$ auf dem Träger A ($\sigma$ sei die Menge der offenen Mengen). Beispiele topologischer Strukturen sind neben den topologischen Gruppen und Körpern auch topologische Räume: dann besteht der algebraische Teil nur aus dem Träger A und wir schreiben kurz $(A, \sigma)$. Als formale Sprache bietet sich zunächst die Sprache der 2. Stufe an, wobei jetzt die (Mengen-)Quantoren, etwa in $\exists X\varphi$ und $\forall X\varphi$, nur über offene Mengen laufen sollen. Wir benutzen die Abkürzungen $\exists X \ni y\varphi$ und $\forall X \ni y\varphi$ für $\exists X(y \in X \wedge \varphi)$ bzw. $\forall X(y \in X \rightarrow \varphi)$, also für Ausdrücke, die besagen „Es gibt eine offene Umgebung X von y, für die $\varphi$ gilt" bzw. „Für alle offene Umgebungen X von y gilt $\varphi$". Dann beinhalten die folgenden Ausdrücke $\varphi_{\text{haus}}$, $\varphi_{\text{zshg}}$, $\varphi_{\text{disk}}$, $\varphi_{T_3}$ und $\varphi_{\text{stetig}}$ die Eigenschaft „Hausdorffsch", „zusammenhängend", „diskret", „$T_3$" der Topologie bzw. die Stetigkeit der Funktion f:

$$\varphi_{\text{haus}}\colon\quad \forall x\, \forall y(\neg\, x = y \rightarrow \exists X \ni x\ \exists Y \ni y\ \forall z(\neg\, z \in X \vee \neg\, z \in Y))$$

$$\varphi_{\text{zshg}}\colon\quad \neg\, \exists x\, \exists y\, \exists X \ni x\ \exists Y \ni y(\forall z(z \in X \vee z \in Y) \wedge \forall z \neg\,(z \in X \wedge z \in Y))$$

$$\varphi_{\text{disk}}\colon\quad \forall x\, \exists X \ni x\ \forall y(y \in X \rightarrow x = y)$$

$$\varphi_{T_3}\colon\quad \varphi_{\text{haus}} \wedge \forall x\, \forall X \ni x\ \exists Y \ni x\ \forall y(y \in X \vee \exists W \ni y\ \forall z(\neg\, z \in W \vee \neg\, z \in Y))$$

$$\varphi_{\text{stetig}}\colon\quad \forall x\, \forall y(y = f(x) \rightarrow \forall Y \ni y\ \exists X \ni x\ \forall z(z \in X \rightarrow f(z) \in Y)).$$

In Strukturen $(\mathfrak{A}, \sigma)$, die Modell von $\varphi_{\text{disk}}$ sind, d. h. in denen $\sigma$ die diskrete Topologie ist, laufen quantifizierte Mengenvariablen über alle Teilmengen von A. Wir haben also für den algebraischen Teil die volle Ausdrucksstärke der Sprache der 2. Stufe zur Verfügung, was nach den obigen Anmerkungen keine reichhaltige Modelltheorie erwarten läßt.

Es lag daher nahe, nach einer Teilsprache von $L_2$ zu suchen, die

1) nicht zu umfassend ist, damit in ihr noch allgemeine Sätze gelten (wie etwa das Analogon von 1.1),

und 2) nicht zu ausdrucksschwach ist, damit für topologische Strukturen relevante Begriffe in ihr formulierbar sind (auf die man dann die allgemeinen Sätze (vgl. 1)) anwenden kann).

Nach einigen Fehlschlägen gelangte man schließlich zu einer adäquaten Sprache durch die Beschränkung auf eine Klasse von Ausdrücken, die durch einen in der Topologie, mindestens implizit, schon stets vorhandenen Begriff bestimmt wird, den Begriff der *invarianten Eigenschaft*: Ein Raum ist genau dann hausdorffsch, wenn zu je zwei Elementen auch in einer vorgelegten Basis disjunkte Umgebungen existieren. Entsprechendes gilt für die Stetigkeit einer Funktion. Auch hier braucht man beim Nachweis, daß das Urbild einer offenen Menge offen ist, nur die offenen

Mengen einer Basis zu berücksichtigen. In beiden Fällen können wir uns auf die offenen Mengen einer Basis beschränken; in diesem Sinne sprechen wir von invarianten Eigenschaften. Einen $L_2$-Ausdruck $\varphi$ nennen wir invariant, wenn er eine invariante Eigenschaft wiedergibt, d. h.:

**2.1 Definition** $\varphi$ ist *invariant*, wenn für alle topologischen Strukturen $(\mathfrak{A}, \sigma)$ und jede Basis $\sigma_0$ von $\sigma$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi \quad \text{gdw} \quad (\mathfrak{A}, \sigma_0) \models \varphi$$

(die in $\varphi$ quantifizierten (Mengen-)Variablen laufen auf der linken Seite der Äquivalenz über alle offene Mengen, auf der rechten Seite nur über die offenen Mengen der Basis $\sigma_0$).

Die obigen Bemerkungen zeigen, daß $\varphi_{\text{haus}}$ und $\varphi_{\text{stetig}}$ invariant sind, dagegen ist $\varphi_{\text{zshg}}$ nicht invariant: man wähle etwa als $\sigma$ die diskrete Topologie auf einer mindestens dreielementigen Menge A und als $\sigma_0$ die aus den Einermengen bestehende Basis. $\sigma$ ist nicht zusammenhängend, d. h. nicht $(A, \sigma) \models \varphi_{\text{zshg}}$, aber $(A, \sigma_0) \models \varphi_{\text{zshg}}$. – Für eine Funktion f ist die Eigenschaft „f ist offen" invariant, dagegen ist „f ist abgeschlossen" nicht invariant (vgl. [13]).

Das erste Ergebnis der topologischen Modelltheorie bestand in der Feststellung, daß es ein recht einfaches Kriterium gibt, mit dem man nachweisen kann, daß eine in $L_2$ formulierbare Eigenschaft topologischer Strukturen invariant ist. Dies ist nämlich genau dann der Fall, wenn sie sich auch durch einen $L_2$-Ausdruck $\varphi$ wiedergeben läßt, welcher folgender syntaktischer Bedingung genügt (eine präzise Formulierung dieser Bedingung findet der Leser in [13]):

> Ist $\exists X \ni y \psi$ ein Teilausdruck von $\varphi$, so enthält $\psi$ die Zeichen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ nicht und jedes Vorkommen von X in $\psi$ steht im Wirkungsbereich eines Negationszeichens (inhaltlich gesprochen, die Gültigkeit von $\psi$ bleibt erhalten, wenn X durch eine kleinere Menge, etwa eine Basismenge ersetzt wird). Dementsprechend wird für einen Teilausdruck $\forall X \ni y \psi$ gefordert, daß jedes Vorkommen von X in $\psi$ nicht im Wirkungsbereich eines Negationszeichens steht.

Zum Beispiel erfüllt der Ausdruck $\varphi_{T_3}$ (s. o.) diese syntaktische Bedingung. Somit ist „$\sigma$ ist eine $T_3$-Topologie", eine invariante Eigenschaft.

Die Menge der $L_2$-Ausdrücke, die obiger syntaktischer Bedingung genügen, bezeichnet man mit $L_t$; wir sprechen von der *invarianten Sprache* und verstehen hier unter topologischer Modelltheorie die Untersuchung topologischer Strukturen mit Hilfe der Sprache $L_t$.

Eine Reihe von Ergebnissen der klassischen Modelltheorie haben ihr Analogon in der topologischen Modelltheorie. Wir führen hierzu einige Beispiele vor und gehen auf Anwendungen ein, die verdeutlichen, daß Fragestellungen und Methoden der klassischen und der topologischen Modelltheorie verwandter Natur sind. Wir beginnen mit den Aussagen 1.1 und 1.3 des Satzes von Löwenheim-Skolem-Tarski. $L_t$ liefert nun den Rahmen, in dem die Existenz beliebig großer topologischer Strukturen mit vorgegebenen invarianten Eigenschaften, etwa topologische Gruppen, Körper, . . . allgemein formuliert und bewiesen werden kann. Es gilt nämlich:

**2.2 Satz** *Hat die Menge $\Phi$ von $L_t$-Ausdrücken ein unendliches Modell, so hat $\Phi$ Modelle mit beliebig großem Träger.*

Das 1.3 entsprechende Ergebnis lautet:

**2.3 Satz** *Zu jeder topologischen Struktur $(\mathfrak{B}, \tau)$ mit unendlichem Träger gibt es eine abzählbare Struktur $(\mathfrak{A}, \sigma)$, die zu $(\mathfrak{B}, \tau)$ $L_t$-äquivalent ist.*

Wir sagen, daß $(\mathfrak{A}, \sigma)$ *abzählbar* ist, wenn A abzählbar ist und $\sigma$ eine höchstens abzählbare Basis besitzt. Und $(\mathfrak{A}, \sigma)$ und $\mathfrak{B}, \tau)$ heißen *$L_t$-äquivalent* (oder *invariant äquivalent*; kurz $(\mathfrak{A}, \sigma) \equiv_t (\mathfrak{B}, \tau)$), wenn für alle $L_t$-Ausdrücke $\varphi$:

$$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi \quad \text{gdw} \quad (\mathfrak{B}, \tau) \models \varphi,$$

d. h. wenn $(\mathfrak{A}, \sigma)$ und $(\mathfrak{B}, \tau)$ dieselben invarianten Eigenschaften besitzen.
Als Anwendung von 2.3 zeigen wir:

**2.4 Bemerkung** *Die Eigenschaft „normal" von topologischen Räumen ist nicht invariant.*

B e w e i s. Andernfalls gäbe es eine $L_t$-Formel $\varphi$ mit

$$(B, \tau) \models \varphi \quad \text{gdw} \quad \tau \text{ ist normal.}$$

Sei nun $(B, \tau)$ ein $T_3$-Raum, der nicht normal ist. Dann gilt $(B, \tau) \models \varphi_{T_3} \wedge \neg \varphi$. Nach 2.3 gibt es einen abzählbaren Raum $(A, \sigma)$ mit $(A, \sigma) \equiv_t (\mathfrak{B}, \tau)$. Dann ist auch $(A, \sigma)$ ein $T_3$-Raum, der nicht normal ist; $(A, \sigma)$ ist aber als abzählbarer $T_3$-Raum metrisierbar und damit normal, ein Widerspruch □

Die folgenden Ausführungen zeigen – am Beispiel der $T_3$-Räume und einer Klasse von topologischen Gruppen –, wie sich die Sprache $L_t$ zur Untersuchung und Klassifikation von Strukturen einsetzen läßt.

Jeder $T_3$-Raum ist wegen 2.3 zu einem abzählbaren $T_3$-Raum $L_t$-äquivalent. Aus der Topologie wissen wir, daß jeder abzählbare $T_3$-Raum mit einer Ordnungstopologie versehen ist (vgl. [23]), d. h.:

> Zu jedem abzählbaren $T_3$-Raum $(A, \sigma)$ gibt es eine Ordnung $<$ auf A mit $\sigma = \sigma_<$. Dabei bezeichnet $\sigma$ die durch $<$ auf A induzierte Topologie.

Insgesamt erhalten wir also:

**2.5 Satz** *Zu jedem $T_3$-Raum $(B, \tau)$ gibt es eine Ordnung $(A, <)$ mit $(A, \sigma_<) \equiv_t (B, \tau)$.*

Somit können wir uns beim Studium invarianter Eigenschaften von $T_3$-Räumen auf Ordnungstopologien beschränken. – Da man die elementaren Eigenschaften von Ordnungen „gut" kennt, gilt aufgrund des vorangehenden Satzes das entsprechende für die invarianten Eigenschaften von $T_3$-Räumen. Wir wollen diese vagen Bemerkungen präzisieren. Die Menge

(1) $\{\varphi \mid \varphi\ L_1\text{-Ausdruck}, \varphi \text{ gilt in allen Ordnungen}\}$

heißt *elementare Theorie der Ordnungen*, und ein Ausdruck $\varphi$, der zu dieser Menge gehört, heißt *elementarer Satz der Theorie der Ordnungen.* Entsprechend bezeichnet man

(2) $\{\varphi | \varphi$ $L_t$-Ausdruck, $\varphi$ gilt in allen $T_3$-Räumen$\}$

als *invariante Theorie der* $T_3$*-Räume.* – Nun kann man in der klassischen Modelltheorie zeigen (vgl. [22]), daß die elementare Theorie der Ordnungen *entscheidbar* ist. Damit meint man, daß es einen Algorithmus (ein Verfahren) gibt, mit dessen Hilfe man für jeden $L_1$-Ausdruck entscheiden kann, ob er zur Menge (1) gehört, d. h. ob er in allen Ordnungen gilt. Aus der Entscheidbarkeit der elementaren Theorie der Ordnungen erhält man mit 2.5 die Entscheidbarkeit der invarianten Theorie der $T_3$-Räume, d. h. der Menge in (2).

Ein Verfahren, das die Zugehörigkeit zu einer Theorie entscheidet, ist häufig von geringem praktischen Nutzen (das Verfahren ist vielleicht zu zeitaufwendig oder zu wenig „problemorientiert"). Da aber die Existenz eines solchen Verfahrens besagt, daß wir für jede (in der Sprache formulierbaren) Eigenschaft deren Gültigkeit in den Modellen der Theorie systematisch prüfen können, weist die Entscheidbarkeit darauf hin, daß eine Klassifikation der Modelle möglich sein sollte. Konkret: Die Entscheidbarkeit der invarianten Theorie der $T_3$-Räume fordert eine Klassifikation der $T_3$-Räume nach ihren invarianten Eigenschaften heraus; wir hätten damit eine Teillösung des Isomorphieproblems (Homöomorphieproblems) für $T_3$-Räume gewonnen.

Wie erhält man eine Klassifikation der $T_3$-Räume nach ihren invarianten Eigenschaften? Hier führt uns eine allgemeine modelltheoretische Methode, die sogenannte Hin- und Hermethode, in natürlicher Weise auf den entscheidenden topologischen Begriff, den Begriff des n-Typs eines Punktes. Bei der Hin- und Hermethode, auf die ich hier nicht näher eingehen will (vgl. [2]), handelt es sich um eine modelltheoretische Verallgemeinerung einer Technik, die Cantor angewendet hat, um zu zeigen, daß je zwei abzählbare dichte Ordnungen isomorph sind. Die Hin- und Hermethode ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Herleitung sowohl von theoretischen Sätzen als auch von konkreten Anwendungen der klassischen und der topologischen Modelltheorie (wir erinnern: „I want to see model theory taking constructions from mathematics, generalizing them, and giving back applications"). Eine solche konkrete Anwendung führte zu den folgenden Begriffsbildungen und dem nachfolgenden Ergebnis:

Die Menge $\mathfrak{T}_n$ der n-*Typen* wird induktiv definiert durch: $\mathfrak{T}_0 = \{*\}$ und $\mathfrak{T}_{n+1} = P(\mathfrak{T}_n)$, die Potenzmenge von $\mathfrak{T}_n$. Zum Beispiel gibt es nur einen 0-Typ, $*$, zwei 1-Typen, $\{*\}$ und $\emptyset$, vier 2-Typen $\{\{*\}, \emptyset\}$, $\{\{*\}\}$, $\{\emptyset\}$ und $\emptyset$, usw. Ist a ein Punkt des topologischen Raumes $(A, \sigma)$, so wird der n-*Typ von* a, $t_n(a) \in \mathfrak{T}_n$, induktiv wie folgt definiert:

$$t_0(a) = *$$

$$t_{n+1}(a) = \{\alpha \in \mathfrak{T}_n \mid \text{in jeder Umgebung von a gibt es einen Punkt b mit } b \neq a \text{ und } t_n(b) = \alpha\},$$

So ist z. B.

| | | |
|---|---|---|
| $t_{n+1}(a) = \emptyset$ | gdw | a ist isoliert, |
| $t_1(a) = \{*\}$ | gdw | a ist Häufungspunkt, |
| $t_2(a) = \{\{*\}, \emptyset\}$ | gdw | a ist Häufungspunkt von Häufungspunkten und von isolierten Punkten. |

Nun gilt:

**2.6 Satz** *Für $T_3$-Räume* $(A, \sigma)$ *und* $(B, \tau)$ *sind äquivalent:*

(i) $(A, \sigma) \equiv_t (B, \tau)$, *d. h.* $(A, \sigma)$ *und* $(B, \tau)$ *haben dieselben invarianten Eigenschaften.*

(ii) *Für jedes* n *und jeden* n*-Typ* $\alpha$ *gibt es in* $(A, \sigma)$ *und in* $(B, \tau)$ *gleichviele Elemente vom Typ* $\alpha$, *wobei wir zwischen unendlichen Mächtigkeiten nicht unterscheiden.*

Dieser Satz zeigt zum Beispiel, daß es bis auf invariante Äquivalenz nur einen abzählbaren $T_3$-Raum mit genau einem Häufungspunkt und abzählbar vielen isolierten Punkten gibt, während drei paarweise nicht homöomorphe solche Räume existieren (man wähle etwa als Träger $A_0 = \{0\} \cup \{{}^1/_n \mid n \geqslant 1\}$, $A_1 = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ und $A_2 = \{0\} \cup \{{}^1/_n \mid n \geqslant 1\} \cup (\mathbf{Q} \cap [1, 2])$ und richte die Topologie in jedem der $A_i$ so ein, daß der Punkt 0 der einzige Häufungspunkt ist und eine Umgebungsbasis hat, die aus den Mengen $U_a = \{b \in A_i \mid b < a\}$ für $a \in A_i$, $a \neq 0$, besteht).

Kein Punkt in einem $T_3$-Raum kann den 3-Typ $\{\{\emptyset\}\}$ haben. Denn wäre $t_3(a) = \{\{\emptyset\}\}$, so wäre a Häufungspunkt von Punkten, die wiederum Häufungspunkte von isolierten Punkten sind. Dann wäre aber auch a ein Häufungspunkt von isolierten Punkten, d. h. $\emptyset \in t_3(a)$, ein Widerspruch. Wir sagen, der 3-Typ $\{\{\emptyset\}\}$ ist nicht *erfüllbar.* Läßt sich stets auf so einfache Weise feststellen, ob ein n-Typ $\alpha$ erfüllbar ist? Die Aussage

„Es gibt keinen Punkt mit n-Typ $\alpha$“

läßt sich in $L_t$ durch einen Ausdruck $\varphi_\alpha^n$ wiedergeben. $\alpha$ ist somit genau dann erfüllbar, wenn $\varphi_\alpha^n$ nicht in allen $T_3$-Räumen gilt, d. h. kein Satz der invarianten Theorie der $T_3$-Räume – der Menge in (2) – ist. Aus einem Entscheidungsverfahren für diese Theorie gewinnt man also einen Algorithmus, mit dem man für jeden vorgelegten Typ entscheiden kann, ob er erfüllbar ist. Dieser „logische“ Algorithmus führte dazu, daß man ein rein topologisches Kriterium für die Erfüllbarkeit suchte und auch fand (vgl. [13]).

Also bereits für $T_3$-Räume, einer Klasse von Strukturen die nur eine topologische und keine algebraische Struktur tragen und damit am „weitesten entfernt“ von den Strukturen der klassischen Modelltheorie sind, führt die Sprache $L_t$ zu interessanten Begriffsbildungen und Klassifikationsmöglichkeiten. Man sollte andererseits aber nicht übersehen, daß in diesem extremen Fall die invariante Sprache $L_t$ von sehr beschränkter Ausdrucksstärke ist. So sind etwa wegen Satz 2.6 je zwei unendliche $T_3$-Räume ohne isolierte Punkte invariant äquivalent.

Wir betrachten nun Fälle, bei denen sowohl eine algebraische als auch eine topologische Struktur vorliegt. Bis jetzt sind in erster Linie Klassen von topologischen Gruppen, Körpern und Vektorräumen untersucht worden (vgl. [13]). Wir schildern zunächst einige Ergebnisse über topologische Gruppen. Dabei verstehen wir unter Gruppe stets eine abelsche Gruppe und unter topologischer Gruppe stets eine hausdorffsche topologische Gruppe.

Jede geordnete Gruppe ist eine topologische Gruppe, wenn sie mit der Ordnungstopologie versehen wird. Welche topologischen Gruppen haben dieselben invarianten Eigenschaften wie ordenbare Gruppen, d. h. wann gibt es zu einer topologischen Gruppe $(\mathfrak{A}, \sigma)$ eine geordnete Gruppe $(\mathfrak{B}, \lhd)$ mit $(\mathfrak{A}, \sigma) \equiv_t (\mathfrak{B}, \sigma_<)$? Eine solche topologische Gruppe muß natürlich torsionsfrei sein; weiterhin muß in ihr für jedes $n \geqslant 1$ die partielle Funktion der Division durch n stetig sein. Eine beliebige topologische Gruppe heiße *lokal rein*, wenn sie für jedes $n \geqslant 1$ die folgende in $L_t$ formulierbare Eigenschaft besitzt:

Zu jeder Umgebung U von Null gibt es eine Umgebung V von Null, so daß

$$\forall x((x \in U \wedge \exists z\, n \cdot z = x) \to \exists y(y \in V \wedge n \cdot y = x)).$$

Man überzeugt sich leicht, daß dies in torsionsfreien Gruppen gerade die Stetigkeit der Division durch n beinhaltet. Nun gilt:

2.7 **Satz** *Sei* $(\mathfrak{A}, \sigma)$ *eine topologische Gruppe und* $\sigma$ *nicht die diskrete Topologie. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt eine geordnete Gruppe* $(\mathfrak{B}, \lhd)$ *mit* $(\mathfrak{A}, \sigma) \equiv_t (\mathfrak{B}, \sigma_<)$.
(ii) $(\mathfrak{A}, \sigma)$ *ist torsionsfrei und lokal rein.*

Beim Beweis der Richtung (ii) ⇒ (i) zeigt man zunächst, daß jede torsionsfreie und lokal reine topologische Gruppe zu einer topologischen Gruppe invariant äquivalent ist, die eine aus reinen Untergruppen bestehende Umgebungsbasis des neutralen Elementes besitzt. Die zugehörigen Faktorgruppen sind torsionsfrei und damit ordenbar. Aus Ordnungen der Faktorgruppen läßt sich dann eine die Topologie induzierende Ordnung der Gruppe konstruieren.

Sei $\mathfrak{Z}$ die Gruppe der ganzen Zahlen und habe die Null in der Topologie $\sigma$ eine Umgebungsbasis bestehend aus den Mengen $n\mathbf{Z} := \{nz \mid z \in \mathbf{Z}\}$ mit $n \geqslant 1$. Dann ist $(\mathfrak{Z}, \sigma)$ torsionsfrei und lokal rein. $\sigma$ ist keine Ordnungstopologie; aufgrund des vorangehenden Satzes hat aber $(\mathfrak{Z}, \sigma)$ die invarianten Eigenschaften von ordenbaren topologischen Gruppen. – Versehen wir $\mathfrak{Z}$ dagegen mit der Topologie $\tau$, die $\{(2 \cdot 3^n)\mathbf{Z} \mid n \geqslant 1\}$ als Umgebungsbasis der Null hat, so ist $(\mathfrak{Z}, \tau)$ ein Beispiel einer nicht lokal reinen Gruppe.

Aus dem Ergebnis der klassischen Modelltheorie, daß die elementare Theorie der geordneten Gruppen entscheidbar ist (vgl. [14]), erhalten wir mit dem vorangehenden Satz die Entscheidbarkeit der invarianten Theorie der torsionsfreien und lokal reinen topologischen Gruppen. Und wiederum ist es möglich eine Klassifikation dieser Gruppen nach ihren invarianten Eigenschaften vorzunehmen (vgl. [6]). Daß damit in gewissem Sinne ein optimales Ergebnis erzielt worden ist, zeigen die Behauptungen des folgenden Satzes.

2.8 **Satz** a) *Die invariante Theorie der torsionsfreien topologischen Gruppen ist nicht entscheidbar.*

b) *Die invariante Theorie der lokal reinen topologischen Gruppen ist nicht entscheidbar.*

Bei einigen Untersuchungen der klassischen Modelltheorie – etwa beim Studium der elementaren Theorie der Vektorräume – ist es vorteilhaft mit sogenannten *mehrsortigen Strukturen* zu arbeiten, d. h. mit Strukturen, die mehrere Träger besitzen, etwa zwei im Beispiel der Vektorräume, nämlich den Bereich der Vektoren und den Bereich der Skalare. Die zugehörige Sprache der ersten Stufe besitzt dann für jede Sorte, d. h. für jeden Träger, verschiedene Variable. Entsprechendes gilt für die topologische Modelltheorie; hier kann man aber auch die invarianten Eigenschaften von Strukturen der Gestalt $(\mathfrak{A}, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ mit Topologien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ auf A untersuchen. Wir erwähnen abschließend ein Ergebnis, das in diesem mehrsortigen Rahmen formuliert ist (vgl. [28]).

Sei $(\mathfrak{A}, \sigma)$ ein topologischer Körper. Mit $\sigma_0$ bezeichnen wir den Umgebungsfilter der Null. Eine Teilmenge S von K heißt *beschränkt*, wenn es zu jedem $U \in \sigma_0$ ein $V \in \sigma_0$ gibt mit $V \cdot S \subset U$. $\sigma$ ist eine *V-Topologie*, wenn jede Teilmenge S von $K \setminus \{0\}$, zu der es ein $U \in \sigma_0$ gibt mit $U \cap S^{-1} = \emptyset$, beschränkt ist. Kowalsky und Dürbaum haben gezeigt, daß jede V-Topologie von einem Absolutbetrag oder einer Bewertung induziert wird. Als modelltheoretische Folgerung ergibt sich hieraus:

**2.9 Satz** *Sei* $\mathfrak{A}$ *ein Körper und* $\sigma_1, \ldots \sigma_n$ *Topologien auf* A. *Dann sind äquivalent:*

(i) $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *sind* V-*Topologien auf* $\mathfrak{A}$.

(ii) $(\mathfrak{A}, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *ist zu einer Struktur* $(\mathfrak{B}, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ *invariant äquivalent, bei der die Topologien* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *von Bewertungen des Körpers* $\mathfrak{B}$ *induziert werden.*

Sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ V-Topologien, so hat also $(\mathfrak{A}, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ dieselben invarianten Eigenschaften wie ein mit Bewertungstopologien versehener Körper. Als Anwendung erhalten wir aus dem Approximationssatz für Bewertungen den folgenden Approximationssatz für V-Topologien, indem wir beachten, daß sich die Aussage dieses Approximationssatzes in der (entsprechenden mehrsortigen) invarianten Sprache formulieren läßt.

**2.10 Satz** *Seien* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *verschiedene* V-*Topologien auf dem Körper* $\mathfrak{A}$. *Dann gibt es zu* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *und Nullumgebungen* $U_1 \in \sigma_1, \ldots, U_n \in \sigma_n$ *ein* $b \in A$ *mit* $b - a_1 \in U_1, \ldots, b - a_n \in U_n$.

## 3 Schluß

Wir haben in diesem Artikel einen Einblick in die Begriffsbildungen und Ergebnisse der klassischen und der topologischen Modelltheorie gegeben und dabei gesehen, daß die Natur der Fragestellungen und der gewonnenen Sätze in beiden Gebieten vergleichbar ist, oder anders formuliert, daß die Rolle, welche die Sprache der ersten Stufe im Bereich der algebraischen Strukturen spielt, bei den topologischen Strukturen von der Sprache $L_t$ übernommen wird. Indem man also die Bedeutung des topologischen Begriffes der invarianten Eigenschaft erkannte und ihn im Rahmen einer formalen Sprache präzisierte, war es möglich, das oben erwähnte Programm von Robinson in Angriff zu nehmen. Die Feststellung, daß $L_t$ im Bereich der topologischen Strukturen die Rolle der Sprache der ersten Stufe übernimmt, läßt sich durch gewisse metamathematische Sätze, die Sätze von Lindström und Ziegler, untermauern. Wir gehen hier auf diese Ergebnisse nicht näher ein (vgl. etwa [7], [12]), erwähnen nur noch, daß sie auch verdeutlichen, warum die Sprache der ersten Stufe für algebraische Strukturen eine ausgezeichnete Stellung einnimmt.

Andererseits sollte man die Augen nicht vor der Tatsache verschließen, daß in vielen Fällen für das Studium algebraischer und topologischer Strukturen andere formale Sprachen geeigneter sind. So bietet sich etwa für modelltheoretische Untersuchungen bei Torsionsgruppen eine Sprache an, in der man (abzählbar) unendliche Konjunktionen und Disjunktionen bilden kann (vgl. [3]). Auch das in dieser Arbeit erwähnte heuristische Prinzip von Lefschetz findet erst im Rahmen dieser unendlichen Sprachen eine zufriedenstellende Präzisierung (vgl. [9]).

Darüber hinaus hat sich in den letzten Jahren gezeigt, daß formale Sprachen auch bei der Untersuchung anderer Typen von Strukturen nützlich sind, etwa bei Strukturen der Gestalt $(\mathfrak{A}, \mu)$, wo $\mu$ ein Maß auf dem Träger A ist (vgl. [20]). Es gibt sogar Modelltheoretiker die bereits so weit gehen und behaupten, „the building of logics [in unserer Terminologie: Sprachen] has become a way of life". Man solle also jeweils für den zu untersuchenden Typ von Strukturen eine entsprechende formale Sprache einführen. Es wäre dann vornehmlich die Aufgabe der Modelltheoretiker, Kriterien zu entwickeln und Wege zu finden, die uns in jedem Einzelfall zeigen, wie man die geeignete Sprache findet.

## Literatur

[1] Baldwin, J. T.; Lachlan, A. H.: On strongly minimal sets. J. Symb. Logic **36** (1971) 79–96
[2] Barwise, J.: Back and forth through infinitary logic. In: Morley, M.: Studies in Model Theory 1973
[3] Barwise, J.; Eklof, P.: Infinitary properties of abelian groups. Ann. Math. Logic **2** (1970) 25–68
[4] Bernstein, A. R.; Robinson, A.: Solution of an invariant subspace problem of P. R. Halmos and K. T. Smith. Pac. J. Math. **16** (1966) 421–431
[5] Chang, C. C.; Keisler, H. J.: Model Theory. Amsterdam 1973
[6] Cherlin, G.; Schmitt, P.: Locally pure topological abelian groups: elementary invariants. Erscheint demnächst
[7] Ebbinghaus, H.-D.: Modelltheorie und Logik. Jber. Dt. Math.-Verein. **76** (1975) 165–182
[8] Ebbinghaus, H.-D.; Flum, J.; Thomas, W.: Einführung in die mathematische Logik. Darmstadt 1978
[9] Eklof, P.: Lefschetz's principle and local functors. Proc. Amer. Math. Soc. **37** (1973) 333–339
[10] Eklof, P.; Fischer, E. R.: The elementary theory of abelian groups. Ann. Math. Logic **4** (1972) 115–171
[11] Flum, J.: First-order logic and its extensions. In: Müller, G. H. u. a.: Logic Conference Kiel 1974
[12] Flum, J.: Characterizing logics. In: Barwise, J; Feferman, S: Model-Theoretic Logics. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo 1984
[13] Flum, J.; Ziegler, M.: Topological Model Theory. Berlin – Heidelberg – New York 1980
[14] Gurevich, Y.: Elementary properties of ordered abelian groups. Amer. Math. Soc. Trans. **46** (1965) 165–192
[15] Henson, C. W.; Moore, L. C.: Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces. Erscheint demnächst
[16] Hirschfeld, J.; Wheeler, W.: Forcing, Arithmetic, Division Rings. Berlin – Heidelberg – New York 1975
[17] Hoover, D.; Perkins, E.: Nonstandard constructions of the stochastic integral and applications to stochastic differential equations I, II. Erscheint demnächst
[18] Keisler, H. J.: Foundations of infinitesimal calculus. Boston 1976
[19] Keisler, H. J.: An infinitesimal approach to stochastic analysis. Erscheint in: Memoirs Amer. Math. Soc.

[20] K e i s l e r , H. J.: Probability quantifiers. In: B a r w i s e , J; F e f e r m a n , S: Model-Theoretic Logics. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo 1984
[21] K r e i s e l , G.; K r i v i n e , J.-L.: Modelltheorie. Berlin – Heidelberg – New York 1972
[22] L ä u c h l i , H.; L e o n h a r d t , J.: On the elementary theory of linear order. Fund. Math. **59** (1966) 109–116
[23] L y n n , I. L.: Linearly orderable spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **113** (1964) 189–218
[24] M a c i n t y r e , A.: Model competeness. In: B a r w i s e , J.: Handbook of Mathematical Logic 1977
[25] M a c i n t y r e , A.: Model theory. In: A g a z z i , E.: Modern Logic – A Survey 1980
[26] M o r l e y , M.: Categoricity in power. Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965) 518–538
[27] M o s c h o v a k i s , Y. N.: Elementary Induction on Abstract Structures. Amsterdam 1974
[28] P r e s t e l , A.; Z i e g l e r , M.: Model-theoretic methods in the theory of topological fields. J. reine u. angew. Math. **299/300** (1978) 318–341
[29] R a b i n , M.: Automata on infinite objects and Church's problem. Providence 1972
[30] R i c h t e r , M.: Ideale Punkte, Monaden und Nichtstandard-Methoden. Braunschweig 1982
[31] R o b i n s o n , A.: Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra. Amsterdam 1963
[32] R o b i n s o n , A.: Non-Standard Analysis. Amsterdam 1966
[33] R o b i n s o n , A.: Model theory as a framework for algebra. In: M o r l e y , M.: Studies in Model Theory 1973
[34] R o b i n s o n , A.: Metamathematical problems. J. Symb. Logic **38** (1973) 500–516
[35] S h e l a h , S.: Solution of Łos'conjecture for uncountable languages (abstract). Notices Amer. Math. Soc. **17** (1970) 1968
[36] S h e l a h , S.: Classification Theory. Amsterdam 1978
[37] S z m i e l e w , W.: Elementary properties of abelian groups. Fund. Math. **41** (1955) 203–271
[38] W e i l , A.: Foundations of algebraic geometry. Baltimore 1946

Jörg Flum
Mathematisches Institut
der Albert-Ludwigs-Universität
Abteilung für mathematische Logik
und Grundlagen der Mathematik
Albertstr. 23b
7800 Freiburg

(*Eingegangen: 10. 3. 1983*)

# Buchbesprechungen

**Weil, A., Collected Papers** (3 Bände), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1979, Bd. I 878 S., Bd. II 561 S., Bd. III 465 S., insges. DM 199,–

André Weil ist einer der prominenten und einflußreichen Mathematiker der Gegenwart und unmittelbaren Vergangenheit. Wer sich für die Ideengeschichte der Mathematik in unserer Zeit interessiert, der kann an dem Werk von A. Weil nicht vorbeigehen. Es erscheint daher angebracht, seine wissenschaftlichen Arbeiten gesammelt herauszugeben; dies liegt gleichermaßen im Interesse der Mathematiker wie der Historiker.

Die vorliegenden drei Bände enthalten alle mathematischen Publikationen von A. Weil in chronologischer Reihenfolge bis zum Jahre 1978 – mit Ausnahme seiner Bücher. Die Auslassung der Buchpublikationen ist vielleicht verständlich, aber doch zu bedauern. Denkt man etwa an die „Foundations of Algebraic Geometry" oder an das Buch zur Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper, so erkennt man, daß diese Bücher eine Reihe von Ideen und Resultaten enthalten, die nicht schon – auch nicht partiell – in anderen Publikationen zu finden sind. Dasselbe gilt für seine anderen Bücher. Als Trost für den Leser sind in dieser Sammlung wenigstens die Einleitungen zu den Büchern des Autors abgedruckt.

Die Sammlung enthält ferner eine Reihe von kleineren Gelegenheitspublikationen, einige bislang unpublizierte Briefe, Vorträge, Rezensionen etc.

Fast alle Beiträge der Sammlung sind durch den Autor mit Kommentaren versehen, welche die Umstände der Entstehung und die Intentionen des Autors erläutern, gelegentlich auch die Wirkung der Arbeit auf die weitere wissenschaftliche Entwicklung. Diese Kommentare geben den „Gesammelten Abhandlungen" einen ganz eigenen, unverwechselbaren Charakter. Nicht nur der Mathematiker sondern auch der Historiker oder der Biograph wird die vorliegenden Bände schon allein der Kommentare wegen mit Interesse zur Hand nehmen.

Nehmen wir zum Beispiel die Thèse des Autors aus dem Jahre 1928, in der sich u. a. der berühmte *Satz von Mordell-Weil* findet, über die endliche Erzeugbarkeit der Divisorklassengruppe einer algebraischen Kurve, definiert über einem algebraischen Zahlkörper. In den Kommentaren dazu erfahren wir, welche Literatur der damals junge Autor zuvor gelesen hatte (*Riemann*, *Fermat*, *F. Klein*, *Poincaré*, vielleicht auch *Hilbert* und *Hurwitz*), inwieweit er durch den Kontakt mit der italienischen Geometrie (*Enriques*, *Severi*) beeinflußt worden war, und vor allem die entscheidende Rolle, die die Bekanntschaft mit der heute klassischen Arbeit von *Mordell* am Zustandekommen der Thèse spielte. Mordell selbst pflegte ja gegen die Bezeichnung „Satz von Mordell-Weil" Einwände zu erheben; er meinte, daß er (Mordell) und Weil zwei ganz verschiedene, nur locker miteinander zusammenhängende Sätze bewiesen hätten, die somit auch getrennt zu zitieren wären: „Satz von Mordell" und „Satz von Weil". Liest man jedoch hier, daß der Satz von Weil von vorneherein als direkte Verallgemeinerung des Satzes von Mordell auf Kurven höheren Geschlechts konzipiert, und auch die Beweismethode der descente infinie bei Weil unmittelbar durch die bei Mordell beeinflußt worden war, dann erscheint es jedenfalls aus historischer Sicht durchaus gerechtfertigt, von dem „Satz von Mordell-Weil" zu sprechen, wie es heutzutage ja auch allgemein geschieht. – Aus den Kommentaren erfahren wir ferner, daß der junge Autor in Göttingen versucht hatte, den Kreis um *Emmy Noether* für seine Ideen zu interessieren, jedoch ohne großen Erfolg. Dagegen hat er offenbar bei *Siegel* Resonanz, Verständnis und Anregung gefunden, und bei Siegel fand dann ja auch der Mordell-Weilsche Satz seine erste wichtige Anwendung. – Die Fertigstellung der Thèse wurde dadurch sehr verzögert, daß der Autor zunächst auch noch die *Mordellsche Vermutung* beweisen wollte, über die Endlichkeit der Anzahl der rationalen Punkte auf Kurven höheren Geschlechts. Dazu hatte ihm insbesondere *Hadamard* geraten. Nach mehreren Anläufen mußte dieser Plan jedoch schließlich aufgegeben werden (und die Mordellsche Vermutung mußte daher bis zum Jahre 1983 auf ihren Beweis durch *Faltings* warten). – Interessant ist auch die Reaktion von *Severi* auf die Mitteilung über den Mordell-Weilschen Satz: Severi sah sofort einen engen Zusammenhang mit seinem „Basissatz" für algebraische Flächen; seine Intuition wurde jedoch erst mehr als 20 Jahre später durch *Néron* bestätigt. – Wir erfahren auch einen der Gründe, weshalb sich die Thèse in Diktion und Stil so sehr von dem unterscheidet, was wir aus den späteren Publikationen von A. Weil kennen. Nämlich: die französische Tradition, mit *E. Picard* als bedeutendstem Repräsentanten, hielt eine vollkommene Präzision nicht für erforderlich. Daher glaubte sich auch der Autor berechtigt, einige Passagen seiner Thèse nur skizzenhaft auszuführen; die Jury nahm jedenfalls keinen Anstoß an dem Fehlen der Präzision. Und in der Folge stellte es sich ja in der Tat heraus, daß der wesentliche Kern der Arbeit solide ist.

Alle Kommentare sind bewußt subjektiv gehalten, bezogen auf die eigene Person des Autors und seine Beziehung zu dem betreffenden Problem. Eine Bemühung um Objektivität ist nicht zu erkennen. (Vgl. z. B. die Reaktion des Autors auf ein Referat von *H. L. Schmid* aus dem Jahre 1940, in welchem eine Comptes Rendus-Note des Autors anscheinend nicht gebührend gewürdigt worden war: Band I, S. 550.) Diese Subjektivität mindert jedoch den Informationswert der Kommentare nicht, wie ich meine. Nicht nur wird dadurch eine gewisse Lebendigkeit erreicht, die das Interesse wachhält, sondern der Leser erfährt auf diese Weise auch etwas über die ganz persönlichen Triebkräfte und Motivationen, die unsere Wissenschaft weiter geführt haben.

Eine ähnliche Bedeutung besitzt für uns der Brief des Autors an seine Schwester *Simone Weil*, geschrieben im Jahre 1940 aus dem Militärgefängnis „Bonne Nouvelle" von Rouen. Wohl kaum jemand, der diesen Brief liest, wird sich dem Eindruck entziehen können, hier ein bedeutendes biographisches Zeugnis vor sich zu haben. Im ersten Moment wird man an den berühmten Brief von *Galois* an seinen Freund *Chevalier* erinnert; bei näherem Zusehen bemerkt man jedoch, daß es sich hier um eine Schrift ganz anderer Art handelt. Während im Galoisschen Brief neue mathematische Ideen zur Sprache kommen (u. a. das Ideengebäude der heute so genannten Galoisschen Theorie), so handelt es sich im Weilschen Brief um ein historisches Exposé (subjektiv, aus der Sicht des Autors), verbunden mit einem Essay über die Rolle der Analogie und der Intuition als Triebkraft für die mathematischen Entdeckungen. Die ungeschriebenen Gesetze der modernen Mathematik, so schreibt der Autor, verbieten es absolut, daß man in schriftlicher Form Ansichten äußert, die nicht präzise formulierbar sind, geschweige denn einer strengen Nachprüfung zugänglich. Jedoch gebe es erlaubte Ausnahmen, wofür *Hilbert* zitiert wird. Auch der gesamte, nunmehr publizierte Brief des Autors ist offenbar als eine solche Ausnahme anzusehen. Es gibt Passagen, die man fast lyrisch nennen könnte, in denen, unter Bezugnahme auf die *Gîtâ*, die Situation eines Mathematikers auf dem Weg zur Erkenntnis geschildert wird. An einer anderen Stelle des Briefes vergleicht der Autor seine eigene mathematische Aktivität mit der Entzifferung eines dreisprachigen Textes, wobei die drei Sprachen den drei mathematischen Gebieten (1) *Zahlentheorie*, (2) *Riemannsche Funktionentheorie*, (3) *Algebraische Funktionentheorie über endlichem Konstantenkörper*, entsprechen. Es geht dem Autor darum, die Analogien zwischen diesen Gebieten zu erkennen und zu erklären, aber auch die Unterschiede zu berücksichtigen, um schließlich zu einer einheitlichen Interpretation zu gelangen. Bei der Lektüre wird der Leser an die „drei Gaußschen A" erinnert: (1) Arithmetik, (2) Analysis, (3) Algebra. Im Grunde äußert der Autor also keine besonders originelle Idee, wenn er die drei klassischen Gebiete benennt, deren Erforschung, insbesondere in bezug auf die gegenseitigen Zusammenhänge, viele Mathematikergenerationen immer wieder von neuem fasziniert haben. Bemerkenswert ist jedoch hier der programmatische Charakter der Ausführungen des Autors. Möglicherweise können wir in diesem Gleichnis mit dem dreisprachigen Text den Schlüssel zu seinem gesamten wissenschaftlichen Werk finden, dessen Vielseitigkeit und Vielgestaltigkeit von daher die Motivierung und Erklärung in einem einheitlichen Rahmen findet. Daß es sich nicht um eine Äußerung des Augenblicks handelte, sondern daß wir hier tiefergehenden Vorstellungen begegnen, darauf deutet die Tatsache, daß der Autor viel später noch einmal denselben Faden aufnimmt, nämlich in einem 1960 erschienenen Artikel mit dem Titel „Über die Methaphysik der Mathematik". Dort finden sich wörtlich längere Passagen des Briefes an Simone Weil abgedruckt.

In dem Brief an Simone Weil spricht der Autor davon, daß er (damals) gerade an demjenigen Teil des dreisprachigen Textes arbeite, der dem Gebiet (3) entspricht, also an der Theorie der algebraischen Funktionen mit endlich vielen Konstanten. Damit ist offenbar die Arbeit an dem Beweis der „*Riemannschen Vermutung für Kurven*" gemeint. Der Fall des Geschlechts 1 war damals bereits von Hasse erledigt worden, und dem Autor sollte es später gelingen, den Beweis für beliebiges Geschlecht zu erbringen. (Die mathematische Öffentlichkeit spricht jedoch in diesem Falle nicht von dem „Satz von Hasse-Weil", sondern die Bezeichnung „Riemannsche Vermutung für Kurven" bzw. „für Funktionenkörper" wurde beibehalten.) Zu dieser „Riemannschen Vermutung" findet sich in dem vorliegenden Werk eine ganze Serie von Artikeln: je eine vorläufige Version aus den Comptes Rendus de l'Academie des Sciences (1940) und den Proceedings National Academy of Sciences (1941), ein bisher unpublizierter Brief an *Artin* (1942), das Buch über den Kalkül der Schnittmultiplizitäten (1946), sowie schließlich die beiden Bücher bei Hermann über Algebraische Kurven bzw. Abelsche Mannigfaltigkeiten (1948). (Von den Büchern ist jedoch, wie bereits oben gesagt, nur jeweils das Vorwort hier abgedruckt.) Die drei vorbereitenden Schriftstücke 1940–42 waren wie es scheint angefertigt worden, um evtl. entstehenden Prioritätsfragen zu begegnen. Für uns heute besitzen sie deshalb Interesse, weil sie uns zusammen mit den Kommentaren des Autors zeigen, wie sich der Beweis im Laufe der Zeit entwickelt hat. Diese Möglichkeit, die einzelnen Stadien im Auffinden des Beweises beobachten zu können, ist von ganz besonderem Reiz. Obwohl die wesentliche Beweisidee aufgrund der Severischen Theorie zumindest bei der zweiten Note (1941) feststand, so gab es doch bei der Übertragung auf Charakteristik p Schwierigkeiten im Detail, die offenbar zunächst unerwartet waren. Es bedurfte der gewaltigen Anstrengung der „*Foundations of Algebraic Geometry*" (1946), um die Beweisgrundlage für die „Riemannsche Vermutung" sicherzustellen. Zurückblickend stellt der Autor zwar fest, daß allein für die „Riemannsche Vermutung für Kurven" diese Anstrengung vielleicht nicht unbedingt notwendig gewesen wäre. Denn man kommt dabei mit einfacheren Definitionen der Schnittmultiplizität aus, wofür er die (unpublizierte) Thesis seines Schülers *F. Quigley* (Chicago 1953) zitiert. Andererseits sind ja die „Foundations" ein klassisches Werk geworden und haben die Entwicklung der Algebraischen Geometrie stark beeinflußt, ja diese Entwicklung in vielen Bereichen erst ermöglicht. Die Bedeutung der „Foundations" wird keineswegs herabgesetzt durch die Feststellung, daß es sich in diesem Buch nicht um die Gewinnung neuer Erkenntnisse handelt, sondern um die Konsolidierung, die Absicherung der Erkenntnisse der abzählenden Geometrie mit Methoden der Algebra. Es geht also eigentlich um eine Art Übersetzertätigkeit, um das Wiederauffinden bekannter Sätze der Geometrie in der Sprache der modernen Algebra (unter Einschluß des Falles von Primzahlcharakteristik). Es entbehrt nicht einer gewissen Ironie, daß der Autor sich hier einer Art von Arbeit unterzogen hat – und mit glänzendem Erfolg, wie wir wissen –, die er noch wenige Jahre vorher bei anderen Autoren abqualifiziert hat. (Vgl. die Bemerkungen in dem Brief an Simone Weil über die Arbeiten von Deuring zur Korrespondenzentheorie; Bd. I, S. 253.) – Eine Entwicklungsrichtung, die an die „Foundations" anschließt und durch sie ermöglicht wurde, mündet schließlich in die *Weilsche Vermutung* (1949) über die Zetafunktion einer beliebigen Varietät mit endlichem Konstantenkörper; diese Vermutung wurde bekanntlich inzwischen durch *Deligne* bewiesen. Allein schon das Auffinden der Formulierung dieser „Weil-Vermutung" ist ein herausragender Erfolg bei der „Entzifferung des dreisprachigen Textes".

Es ist hier nicht unsere Aufgabe, das wissenschaftliche Werk von A. Weil zu beschreiben. Wir können auch nicht alle diesen Bänden beigegebenen Kommentare des Autors besprechen; das würde den uns vorgegebenen Rahmen sprengen. Die obigen Ausführungen sollen nur exemplarisch den Inhalt und den Charakter dieser Bände vorstellen. Der interessierte Leser wird darüber hinaus eine Fülle von weiteren beachtenswerten und informativen Kommentaren entdecken. Zum Beispiel über die Rolle des Autors bei dem Unternehmen *Bourbaki*, in welchem er von Anfang an aktiv mitgearbeitet hat. Im Kommentar zu der Schöpfung der Grundbegriffe der Topologie (1936) sagt der Autor mit einiger Skepsis: Wer hätte damals gedacht, daß eines Tages die übereifrigen Reformatoren auf den Gedanken verfallen werden, die Begriffe Filter und Filterbasis in den Schulunterricht einzuführen?

Wir erfahren, daß ein beträchtlicher Teil der *historischen Notizen Bourbakis* aus der Feder des Autors stammt. Die Beschäftigung mit der Geschichte unserer Wissenschaft ist bei ihm nicht, wie es von manch anderen bekannten Mathematikern gesagt wird, eine Alterserscheinung. Der Autor hat seit seinen jungen Jahren Gefallen daran gefunden, sich mit den Ideen der großen Klassiker unserer Wissenschaft bekannt zu machen, und er hat daraus Inspiration gezogen. Seine eigentliche Einführung in die Mathematikgeschichte kam, so berichtet er, bei seinen Besuchen im Frankfurter Seminar zustande, in den Jahren 1926–33. Wesentlich wurde er dort durch *Max Dehn* beeinflußt, dessen beeindruckende Persönlichkeit er in bewegten Worten schildert. Von Dehn hat der Autor neben der Vorliebe für die Geschichte auch die hohen intellektuellen Maßstäbe übernommen, die er sich und anderen, die sich mit Mathematikgeschichte auseinandersetzen, angelegt hat. Dies führte einerseits zu brillianten und kritischen Buchbesprechungen (über *Mahoney*, *J. E. Hofmann*), aber andererseits auch zu einer Reihe schöner und informativer Aufsätze des Autors selbst. Auch diese historischen Aufsätze sind hier abgedruckt (bis zum Jahre 1978), einschließlich der Einführung zu den Gesammelten Werken von *Kummer*, sowie zu seinem Buch über *Eisenstein* und *Kronecker*.

Zum Schluß noch die bei solchen Werken anscheinend obligate Feststellung, daß diese Ausgabe *zu teuer* ist – in dem Sinne, daß angesichts des Preises die Bände wohl fast ausschließlich von institutionellen Bibliotheken erworben werden. Sie werden kaum auf dem privaten Bücherregal eines Mathematikers zu finden sein, wo sie eigentlich ihrer Natur nach hingehören. Ist das unabänderlich? Von den Verlagen wird uns berichtet, daß die Herausgabe von „Gesammelten Werken" in der Regel keinen Ertrag bringt und oft auch Verlust. Wäre es nicht mit Hilfe der heutigen Kopiertechniken möglich, die „Gesammelten Werke" durch das Angebot z. B. von billigen Taschenbuchausgaben einem weiteren Leserkreis zugänglich zu machen? Damit könnte nicht nur vielleicht der Ertrag der Verlage verbessert werden, sondern gewiß auch der Wirkungsgrad der Bücher im Interesse der Mathematik und der Mathematiker. Und die Förderung der Wissenschaft ist ja das eigentliche Ziel solcher Editionen, nicht etwa die Ehrung berühmter Mathematiker. Dies gilt natürlich nicht nur für das vorliegende Werk von A. Weil, sondern ganz allgemein für alle „Gesammelten Abhandlungen"; demgemäß richtet sich mein Vorschlag nicht nur an den Springer-Verlag, sondern an alle Verlage, die sich mit der Herausgabe solcher Werke befassen.

Heidelberg P. Roquette

**Halmos, P. R., Selecta, Research Contributions,** Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, 432 S., DM 88,–

**Halmos, P. R., Selecta, Expository Writings,** Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1982, 256 S., DM 54,–

Seit den ersten Nachkrigsjahren ist der Name P. R. Halmos für Mathematiker ein Synonym für prägnante, durchschlagende Forschungsresultate, genußreich zu lesende Überblicksartikel, Forschungs- und Lehrbücher, sowie glänzend geschriebene Artikel, in denen Fragen, die die gesamte Mathematikerschaft bewegen, abgehandelt werden. Die „Lectures on Ergodic Theory" (1956) haben über zwei Jahrzehnte lang maßgebenden Einfluß auf die Forschung in diesem Spezialgebiet ausgeübt, zu der Halmos selbst z. B. in Gestalt seiner Kategorie-Resultate grundlegende Beiträge geleistet hatte. Das Buch „Measure Theory" (1950) ist bis heute das dominierende Lehrbuch auf seinem Gebiet, vieler anderer exzellent geschriebener und eben dadurch wirksamer Monographien auf anderen Gebieten bis hin zur algebraischen Logik nicht zu gedenken. Es ist angesichts solch vielfältiger Wirkung sehr zu begrüßen, wenn einerseits die Forschungsbeiträge, andererseits die Artikel allgemeineren Inhalts von P. R. Halmos nun in einer repräsentativen Auswahl vorgelegt werden.

Band I der vorliegenden Ausgabe vereinigt 38 forschungsbezogene Arbeiten aus den Jahren 1939 bis 1982: Hilbertraum- und Operatorentheorie, Ergodentheorie, Maßtheorie. D. E. Sarason hat eine Einleitung zu den operatorentheoretischen, N. A. Friedman eine über die ergodentheoretischen Arbeiten von P. R. Halmos beigesteuert. Eine Gesamt-Publikationsliste führt 142 Titel auf.

Band II bringt, gegliedert in 4 Abteilungen, 27 Überblicksartikel (z. T. „invited addresses" der AMS) und Essays für ein breites mathematisches Publikum. Vor allem die Artikel über N. Bourbaki und J. v. Neumann sind weithin bekannt geworden. L. Gillman hat zu diesem Band einen einführenden Text geliefert.

Die hiermit vorliegenden „Selecta P. R. Halmos" halten für jeden Mathematiker Genüsse bereit, die man sich nicht entgehen lassen sollte.

Erlangen K. Jacobs

**Motzkin, Th. S., Selected Papers,** Edited by David Cantor, Basil Gordon and Bruce Rothschild, Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1983, XXVI + 556 S., DM 179,–

Theodore Samuel Motzkin (1908–1970) war ein Mathematiker von ungewöhnlich vielseitiger Wirkung, die u. a. auf der außerordentlich vielfacettierten Geschliffenheit seiner Intellektualität beruhte. Nach Studien in Göttingen, Paris und Berlin promovierte Motzkin, dessen Vater übrigens ebenfalls mathematisch talentiert gewesen war, 1934 bei Alexander Ostrowski in Basel. 1935–1948 wirkte er an der Hebrew University in Jerusalem. 1948 siedelte er in die USA über und fand eine neue Heimstatt in Los Angeles (UCLA), wo er 1960 zum Professor für Mathematik ernannt wurde.

Die vorliegende Ausgabe vereinigt 49 Abhandlungen von T. S. Motzkin. Eine beigefügte Gesamt-Publikationsliste führt 139 Titel auf. Die 49 hier vorgelegten Abhandlungen verteilen sich auf die Arbeitsgebiete Lineare Ungleichungen und Lineares Programmieren, Konvexität, Algebra, Kombinatorik und Graphentheorie, Potenzreihen, Approximationstheorie, Vermischtes. Hieraus ist die enorme Vielseitigkeit Motzkins klar zu ersehen. Die Herausgeber haben dem Bande eine Einleitung vorangestellt, in der a) die persönliche Einzigartigkeit des Mathematikers Motzkin deutlich herausgearbeitet und b) einzelne seiner bedeutendsten Arbeiten genauer gewürdigt werden.

Die Dissertation von Motzkin behandelte das damals soeben wieder aktuell werdende Gebiet der linearen Ungleichungssysteme originell und unter Einbeziehung der gesamten geschichtlichen Entwicklung seit Newton. Sie ist hier in einer Übersetzung von D. R. Fulkerson wiedergegeben, die 1952 zu zirkulieren begann. Motzkin ist zu allen Zeiten seiner Laufbahn auf dies Thema mit bedeutenden Beiträgen zurückgekommen. Ebenfalls aus Motzkins Frühzeit stammt eine andere hier abgedruckte Untersuchung über die Mindestzahl der Singularitäten einer Potenzreihe vom Konvergenzradius 1 auf dem Einheitskreis, wenn man Voraussetzungen über das Verschwinden von Koeffizienten längs arithmetischer Progressionen macht; das erste Resultat dieser Art war von Mandelbrojt 1923 gewonnen worden. Auch auf dies Thema ist Motzkin z. B. 1960 wieder zurückgekommen. Mit einer Arbeit über die Berechnung der Werte von Polynomen mit möglichst geringem Rechenaufwand hat Motzkin 1955 Pionierarbeit auf dem Gebiet der Berechnungskomplexitäten geleistet. Seine kombinatorischen und algebraischen Arbeiten weisen Motzkin zudem als reinen Mathematiker hohen Ranges aus.

Der Band gehört zur von G.-C. Rota herausgegebenen Serie „Contemporary Mathematicians". Die Möglichkeit, sich mit dem Werk und der Eigenart bedeutender zeitgenössischer Mathematiker näher bekannt zu machen, bestand auch bisher durch Editionen anderer Verlage, doch ist die sich hier anbahnende Erweiterung lebhaft zu begrüßen.

Erlangen K. Jacobs

**Die Werke von Daniel Bernoulli. Bd. 2: Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Bearbeitet und kommentiert von L. P. Bouckaert, B. L. van der Waerden unter Benützung von Vorarbeiten von H. Straub †. Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1982. 403 S., Leinen, DM 138,–

Unter den Mathematikereditionen stellen „Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli", in deren Rahmen der vorliegende Band erscheint, nicht zuletzt wegen des Gesamtumfangs ein besonderes Problem dar. Allein die Veröffentlichung der Werke ohne die wissenschaftshistorisch höchst bedeutsamen Briefwechsel wird mindestens 30 Bände erfordern. Dabei entfallen voraussichtlich je rund 8 Bände auf Jakob I, Johann I und Daniel Bernoulli. Nach dem Tod von Hans Straub (1972) und J. O. Fleckenstein (1980) übernahm David Speiser (Louvain-la-Neuve) die Verantwortung für die Werke Daniels. Dank der Mitarbeit der im Titel genannten Kollegen kann er als erstes den zweiten Band vorlegen – Band 1 soll die Jugendschriften und die Medizin enthalten, die Bände 3 bis 8 werden die physikalischen und technologischen Arbeiten umfassen. Von den frühen Abhandlungen abgesehen, enthält also der vorliegende Band die rein mathematischen Arbeiten, hier gruppiert in die beiden Abteilungen Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit Ausnahme der wenigen französisch geschriebenen Texte wurden die Aufsätze in der zumeist von Daniel Bernoulli verwendeten lateinischen Sprache wieder abgedruckt.

Die Bearbeitung der Abhandlungen zur Analysis wurde von L. P. Bouckaert vorgenommen. In einer 25seitigen französischen Einleitung gibt er einen Überblick über diese Schriften, die in drei Gruppen „Rekurrente Reihen", „Summierung divergenter Reihen" und „Kettenbrüche" zusammengefaßt sind. Von besonderem Interesse mag sein, daß D. Bernoulli bereits die Summationsmethode von Cesàro zu entwickeln begann und daß er für bestimmte Fälle zeigte, daß Eulers Methode der Konvergenzfaktoren zum gleichen Ergebnis führt. Ferner dehnte Bernoulli diese Untersuchungen auf trigonometrische Reihen aus und gewann dabei auf neue Weise einige damals schon bekannte Werte der Zeta-Funktion. Auch die Abhandlungen über Kettenbrüche, in denen er u. a. den Brounckerschen Kettenbruch für $4/\pi$ studierte, hängen mit den Betrachtungen über Reihen zusammen.

Die Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung – mit einer Ausnahme erst ab 1760 entstanden – hat B. L. van der Waerden auf ebenfalls ca. 25 Seiten in deutscher Sprache kommentiert, unter Verwendung von Vorarbeiten von H. Straub und Verweisen auf I. Todhunters „A history of the mathematical theory of probability" (Cambridge 1865). Die frühe Schrift scheint durch das Petersburger Paradoxon angeregt worden zu sein, zu dessen Erledigung Bernoulli den Begriff der moralischen Erwartung einführte. Die späteren Arbeiten versuchen u. a., die Vorteile der Pockenimpfung und andere bevölkerungsstatistische Fragen mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden quantitativ zu erfassen. Dabei zieht Daniel Bernoulli auch die Differentialrechnung heran. In einer in das Gebiet der Fehlertheorie fallenden Arbeit formuliert er zum ersten Mal das Maximum-Likelihood-Prinzip.

Wie D. Speiser im Vorwort ausführt, ist es das erste Ziel der Ausgabe, die Werke Daniels dem heutigen Leser wieder zugänglich zu machen. Deshalb wurde auf eine über die beiden genannten Einführungen hinausgehende Kommentierung einzelner Stellen und eine wissenschaftshistorische Analyse, wie sie etwa in D. T. Whitesides Edition „The Mathematical Papers of Isaac Newton“ Seite für Seite vorgenommen wurde, verzichtet. Alle Publikationen wurden neu und sehr übersichtlich gesetzt (störend nur das Heranrücken mancher Formeln an den rechten Seitenrand, wenn ein oder mehrere Wörter vorangehen, z. B. auf Seite 161, Zeile 3 oder Seite 284 und 285) unter stillschweigender Verbesserung kleiner Druckfehler. Da man aber nie weiß, welche Druckversehen des Originals seinerzeit zu Mißverständnissen und ggfs. zu Kontroversen geführt haben könnten, sollte man konsequent zu allen Verbesserungen in einer Fußnote die Originalfassung angeben. Für ungeschickt halte ich auch das Nachsetzen der Numerierung der Stücke in sehr kleiner Type unter die Überschrift, denn es werden doch in Zukunft diese Nummern sein, auf die man sich beim Zitieren beziehen wird. Vielmehr wäre es wünschenswert, daß generell in Editionen die jeweilige Nummer um des raschen Nachschlagens willen auch in der Kopfleiste erscheint. Einige Inkonsequenzen beim Zitieren oder Mängel im Register (Fehlen von Publikationsort und -jahr bei Nachschlagewerken, von Seitenzahlen bei Zeitschriftenaufsätzen) sollten sich bei den weiteren Bänden leicht vermeiden lassen. Den drucktechnisch hervorragend ausgestatteten Band ziert als Frontispiz das von J. N. Grooth um 1750/55 gemalte Porträt Daniel Bernoullis.

Hamburg C. J. Scriba

**Moore, G. H., Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence** (Studies in the History of Math. and Phys. Sciences, 8), New York – Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag 1982, XIV + 410 S., DM 108,–

Im Jahre 1904 veröffentlichte Ernst Zermelo in den Mathematischen Annalen eine kurze Arbeit unter dem Titel „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)“. In ihr bewies er zum ersten Mal den Wohlordnungssatz, allerdings unter Benutzung eines Axioms, dem zufolge „es auch für eine unendliche Gesamtheit von Mengen (deren jede mindestens ein Element enthält) immer Zuordnungen gibt, bei denen jeder Menge eines ihrer Elemente entspricht“. Damit gab er zugleich die erste explizite Formulierung des Auswahlaxioms.

Anwendungen des Axioms findet man schon früher, so bei Baire, Borel, Cantor und Dedekind, und sein inkonstruktiver Charakter hatte auch bereits vereinzelt zu Kritik geführt. Doch erst die allgemeine Formulierung und die bewußte und weittragende Anwendung in der Zermeloschen Arbeit ließen eine intensive und kontroverse Diskussion entbrennen. 1908 antwortete Zermelo mit einer Arbeit, in der er sich gründlich mit den vorgebrachten Einwänden auseinandersetzte. Gleichzeitig veröffentlichte er sein bahnbrechendes Axiomensystem der Mengenlehre, sah er doch ein weiteres Mittel der Verteidigung darin, die ebenfalls in der Diskussion stehenden Prinzipien der Cantorschen Mengenlehre auf eine axiomatische Basis zu stellen und durch den Einbau des Auswahlaxioms in ein solches System zugleich dessen Stellung zu stärken. Auch setzten Untersuchungen ein, die, frei von erkenntnistheoretischen Intentionen, danach trachteten, die Stärke des Auswahlaxioms und seiner Varianten durch den Nachweis der Äquivalenz mit anderen mathematischen Aussagen zu messen. Führend wurde hier nach dem ersten Weltkrieg die Warschauer Schule um Sierpinski. Parallel dazu verhalfen zahlreicher werdende Anwendungen – durch Hamel, Steinitz, Artin, Schreier, Tychonoff und andere – dem Axiom zu methodischem Einfluß. Dieser konnte sich voll entfalten, als mit den Maximalprinzipien, insbesondere dem auf Hausdorff (1909) und Kuratowski (1922) zurückgehenden Zornschen Lemma (1935) handliche Versionen in das Bewußtsein der Mathematiker traten, die den Gebrauch von Wohlordnungen und transfiniten Induktionen unnötig machten. In den folgenden Jahrzehnten gelang es dann, die Stellung des Auswahlaxioms beweistheoretisch abzuklären durch den Nachweis der Unabhängigkeit von den übrigen Axiomen: Gödel (1938/1940) zeigte die relative Widerspruchsfreiheit, Cohen (1963) die volle Unabhängigkeit.

G. H. Moore stellt in seinem Buch ausführlich die Geschichte des Auswahlaxioms mit all ihren methodischen, technischen und erkenntnistheoretischen Bezügen dar. Der Hauptteil behandelt der Reihe nach die Zeiträume vor 1904, 1904–1908, 1908–1918, 1918–1940 und die Zeit nach 1940. In Anhängen folgen eine englische Wiedergabe des Briefwechsels zum Auswahlaxiom zwischen Baire, Borel und Hadamard aus dem Jahre 1905 und eine Reihe von Tabellen, in denen Varianten und Äquivalente des Axioms mit ihren Beziehungen untereinander zusammengestellt sind. Ein Literaturverzeichnis mit etwa 850 Einträgen und ein umfangreiches Register runden das Buch ab.

Der Autor hat eine beeindruckende Fülle von Informationen mit Quellen, Zitaten und Beweisskizzen zusammengestellt, die bis in die jüngste Vergangenheit reichen und die mit zuweilen neuen Sichtweisen oder wenig bekannten Einzelheiten auch den Kenner erfreuen. Zahlreiche Wiederholungen und Zusammenfassungen sollen dazu dienen, das Geflecht der Entwicklungslinien klarer zu sehen. Sie erleichtern aber auch ein „lokales" Lesen. Nur an erstaunlich wenigen Stellen finden sich Thesen, die zum Hinterfragen herausfordern, oder sachliche Unstimmigkeiten. Zu einigen Punkten allerdings möchte man sich präzisere Informationen wünschen, z. B. im Zusammenhang mit intuitionistischen Aspekten. Zuweilen führt die geraffte Beschreibung diffiziler Überlegungen in ihrer Verkürzung zu Unklarkeiten oder Formulierungen, die nur der Kenner durchblickt. Man vergleiche hierzu etwa die Skizze der von Neumannschen Kategorizitätsüberlegungen auf Seite 267. Natürlich bleibt in diesen Fällen die (vom Autor sicherlich intendierte) Hinwendung zum jeweiligen Original.

Das Buch ist zu Beginn weitgehend voraussetzungslos geschrieben und gibt Fragen philosophischen Charakters viel Raum. Eine schärfere Trennung zwischen intuitiven Überlegungen und mathematischen Beweisen für die Notwendigkeit des Auswahlaxioms in bestimmten Argumentationen wäre allerdings hilfreich. Später verengen sich die dargestellten Aspekte stärker auf solche mathematisch-technischer Natur, entsprechend der These des Autors, daß die philosophisch-erkenntnistheoretische Aufarbeitung mit der mathematischen Entwicklung nicht Schritt gehalten habe. Doch in allen Teilen findet der Leser guten Zugang zu einer Klärung der ihn interessierenden Fragen – Möglichkeiten, die das Buch zu einem Standardnachschlagewerk machen werden. Darüber hinaus entfaltet sich gerade in den ersten Teilen die erregende Epoche, in welcher der methodische Rahmen der Mathematik um so viel weiter gespannt wurde, und der Leser wird Zeuge der großen begrifflichen und erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten, die dabei Pate gestanden haben – vielleicht mit neu erwachender Sensibilität für deren Problematik.

Freiburg H.-D. Ebbinghaus

**Chandler, B.; Magnus, W., History of Combinatorial Group Theory: A Case Study in the History of Ideas** (Studies in the History of Math. and Physical Science 9), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, VI + 234 S., DM 128,–

Kombinatorische Gruppentheorie betrachtet Gruppen beschrieben durch Erzeugende und Relationen. Lie-Gruppen und abelsche Gruppen hoher Mächtigkeit liegen daher außerhalb des Bereichs. Das vorliegende Buch besteht aus zwei Teilen, wobei der erste die Zeit vor 1918, der zweite vor allem 1918–1945 behandelt. Die Autoren begründen diese Einteilung so: 1918 machte sich die kombinatorische Gruppentheorie selbständig, indem sie erstmals Fragen behandelte, die nicht direkt aus anderen Gebieten angeregt waren, 1945 begann die Flut der Arbeiten in diesem Gebiet ins Unübersichtliche zu steigen. Im ersten Teil finden sich daher viele Abschnitte, die die Anregungen beschreiben, die andere Gebiete gaben. Zum Beispiel wird hier die Rolle der

Fundamentalgruppen topologischer Räume, die sich aus geometrischen Konstruktionen ergebenden Fuchsschen Gruppen und der Betrachtungen in Verbindung mit Differentialgleichungen näher beleuchtet. Im zweiten Teil werden entsprechend beispielhaft sieben Fragenkreise der kombinatorischen Gruppentheorie und ihre Entwicklung vorgestellt wie zum Beispiel freie Gruppen und freie Produkte, Gruppen mit einer Relation, metabelsche Gruppen, nilpotente Gruppen, Varietäten. Es wird jeweils auch die weitere Entwicklung nach 1945 kurz behandelt. Fragen, die zur mathematischen Logik reichen wie das Wortproblem, wurden erst mit größerem Erfolg nach 1950 behandelt. Der Abschnitt darüber berichtet daher im Wesentlichen über die Entwicklung zwischen 1950 und 1970. Auf diese Abschnitte in den beiden Teilen, die mehr den mathematischen Fragen selbst und ihrer Entwicklung gewidmet sind, folgen Abschnitte über Formen der Kommunikation und über die geographische Verteilung gruppentheoretischer Forschung, wobei die erzwungene Wanderung vieler Wissenschaftler mit eingeht. Die Hinweise auf Biographien in Teil I wie auch die Bibliographie am Schluß des Buches (etwa 500 Titel mit Rückverweis in den Text) sind neben Namens- und Sachverzeichnis eine große Hilfe.

Dem Mathematiker gibt dieses flüssig geschriebene Buch eine Übersicht über Zusammenhänge der kombinatorischen Gruppentheorie mit anderen mathematischen Disziplinen. Neben der Entwicklung von Begriffsbildungen kann er verfolgen, welche Bedeutung diesen Begriffen und den daraus erwachsenden Problemen von den handelnden Forschern beigemessen wurde – ein Gesichtspunkt, der in den einzelnen ursprünglichen Artikeln selten durchscheint. Fast erzählerisch wird ein Reichtum von Einzeltatsachen geordnet vor dem Leser ausgebreitet. Ein empfehlenswertes Buch.

Würzburg H. Heineken

**Lander, E. S., Symmetric Designs: An algebraic approach** (London Math. Soc. Lect. Note Ser. 74), Cambridge Univ. Press. 1983, 175 S., paper, £ 15

Das vorliegende Buch ist die erste Monographie über eine der interessantesten Klassen spezieller endlicher Inzidenzstrukturen. Zur Erinnerung: Ein *symmetrischer* $(v, k, \lambda)$-*Blockplan* besteht aus einer Menge von v *Punkten* und v Teilmengen der Punktmenge (den *Blöcken*), so daß (i) jeder Punkt auf genau k Blöcken liegt und jeder Block genau k Punkte hat und (ii) je zwei Punkte genau $\lambda$ Verbindungsblöcke haben und je zwei Blöcke sich in genau $\lambda$ Punkten schneiden. Die $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$-Blockpläne sind dann genau die projektiven Ebenen der Ordnung n; andere wichtige Beispiele erhält man, indem man die Punkte und Hyperebenen eines endlichen projektiven Raumes als Punkte und Blöcke wählt.

Im ersten Kapitel führt der Autor kurz in die wichtigsten Grundbegriffe ein und erwähnt einige Klassen von Beispielen sowie einige weitere Begriffsbildungen der endlichen Geometrie (Blockpläne allgemein, t-Designs, Hadamard-Matrizen, affine Blockpläne). Bereits dieses Kapitel, das naturgemäß mehr oder weniger Routine-Charakter hat, enthält mit den „Supplementary problems" einen neuen Beitrag, nämlich eine sehr reizvolle Anwendung von Methoden der algebraischen Geometrie über endlichen Körpern auf die Paley-Hadamard-Blockpläne. Im zweiten Kapitel wird zunächst der berühmte Nichtexistenz-Satz von Bruck, Chowla und Ryser bewiesen. Danach werden mit jedem symmetrischen Blockplan gewisse Moduln assoziiert sowie (über geeigneten Körpern von Primzahlordnung) selbst-duale Codes, d. h. Unterräume U eines Vektorraums über GF(p), die bezüglich einer geeigneten nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearform mit ihrem orthogonalen Komplement übereinstimmen. (Die Sprache der Codierungstheorie mag hier zwar ganz nützlich sein, ist im Grunde aber nicht erforderlich. Die eigentlichen Methoden des Verfassers stammen aus der linearen Algebra und der Darstellungstheorie.) Insbesondere erhält man so eine neue, interessante Interpretation von Teilen der Existenzbedingungen aus dem Satz von Bruck, Chowla und Ryser.

Die im zweiten Kapitel eingeführten Ideen werden in den Kapiteln 3 bis 5 zum Studium von Automorphismengruppen symmetrischer Blockpläne verwendet. Nach einigen vorbereitenden Ergebnissen über Fixpunkte und Fixblöcke sowie einem Überblick über die bekannten Klassen von symmetrischen Blockplänen mit zweifach transitiver Gruppe werden im dritten Kapitel zunächst Automorphismen von Primzahlordnung untersucht. Die Moduln und Codes aus Kapitel 2 erweisen sich als Darstellungsmoduln der entsprechenden Gruppe; die Existenz selbstdualer Untermoduln erlaubt dann interessante Schlußfolgerungen über die Vielfachheiten der Kompositionsfaktoren (z. B. müssen selbstkontragrediente Faktoren mit gerader Vielfachheit auftreten). Daraus ergeben sich notwendige Existenzbedingungen, die die in den fünfziger Jahren von D. R. Hughes bewiesenen Sätze etwas verstärken.

In den Kapiteln 4 und 5 werden dann symmetrische Blockpläne mit regulären Automorphismengruppen studiert; äquivalent dazu sind bekanntlich „Differenzenmengen". Zur Erinnerung: Eine $(v, k, \lambda)$-Differenzenmenge ist eine Menge von k Elementen einer (additiv geschriebenen) Gruppe der Ordnung v, für die die $k(k-1)$ Differenzen $\neq 0$ von je zwei dieser Elemente jedes Gruppenelement $\neq 0$ genau $\lambda$-mal enthalten. Die vorher eingeführten Methoden werden dann (zusammen mit weiteren Sätzen der Darstellungstheorie und der algebraischen Zahlentheorie) zum Nachweis zahlreicher Existenzbedingungen verwendet; in jedem Fall werden ausführlich Beispiele von Parametertripeln und Gruppen angeführt, für die eine Differenzenmenge aufgrund des entsprechenden Kriteriums nicht existieren kann. Dabei ist Kapitel 5 ganz dem Beweis von Multiplikator-Sätzen gewidmet; diese geben Kriterien an, wann ein Automorphismus der betrachteten Gruppe gleichzeitig einen Automorphismus des zugehörigen Blockplans induziert. Beide Kapitel enthalten neben bekannten Resultaten viele neue Ergebnisse. In Kapitel 6 werden schließlich einige offene Probleme vorgestellt und Tabellen von Differenzenmengen gegeben.

Die wesentlichen Methoden des Buches stammen alle aus der Oxforder Dissertation des Autors (1980). Ihre Bedeutung kann meiner Meinung nach kaum überschätzt werden. Wenn der erste Multiplikatorsatz von M. Hall (1947) zu Recht als klassisch gilt und heute als das erste große Ergebnis algebraischer Methoden in der Blockplan-Theorie erscheint, so bedeutet die Dissertation von Lander in meinen Augen den zweiten Durchbruch auf diesem Gebiet. Die ursprünglichen Beweise der Multiplikatorsätze waren technisch derartig verwickelt, daß der eigentliche Grund für die Gültigkeit dieser Sätze verschleiert blieb. Durch die Arbeit von Lander wird endlich der darstellungstheoretische Grund für diese Sätze klar sichtbar. Zudem eröffnen seine Methoden den Weg zu neuen, stärkeren Resultaten. Das vorliegende Buch ist für mich – gerade auch im Zusammenhang mit Arbeiten von Ott, die sich in ähnlicher Weise algebraischer Methoden bedienen – ein weiteres Indiz dafür, daß die Durchdringung der endlichen Geometrie mit algebraischen, insbesondere darstellungstheoretischen Verfahren zur Zeit wohl die interessanteste und aussichtsreichste Entwicklung auf diesem Gebiet ist. Auf diesem Wege sollte – wie das in ähnlicher Weise auf anderen Teilgebieten der Kombinatorik schon geschehen ist – die Entwicklung einer in sich geschlossenen Theorie möglich sein (während zur Zeit doch vieles noch eher zufälliger Bastelei ähnelt).

Erfreulicherweise entspricht auch die Darstellung des Stoffes der eben begründeten inhaltlichen Relevanz. Das Buch ist zwar knapp, aber trotzdem flüssig und gut lesbar geschrieben. Die benötigten algebraischen Vorkenntnisse sind in 7 Anhängen kurz und klar dargestellt. Ohne eigene Arbeit wird der Text sich dem Leser allerdings nicht erschließen. Für Leser, die noch keinerlei Erfahrung auf diesem Gebiet der Kombinatorik haben, mag das einführende erste Kapitel vielleicht zu knapp sein; diese Schwierigkeit ließe sich aber etwa durch Lektüre der einschlägigen Kapitel in dem wunderschönen Buch von Ryser (Combinatorial Mathematics, Carus Mathematical Monographs No. 14, 1963) leicht beheben.

Einige Kritikpunkte bleiben dennoch: Manche der nicht allzu häufigen Druckfehler sind störend (z. B. muß in Problem 23 auf S. 110 von einem (v, k, 2)-Blockplan, nicht von einem (v, k, λ)-Blockplan die Rede sein; und auf S. 98 ist in Theorem 3.22 nicht eine „symmetric", sondern eine „semi-standard" Gruppe gemeint). Auch ist die Aufmachung des Textes nicht immer erfreulich; so sind etwa die Indizes auf S. 13 schlecht lesbar. Schließlich ist die auf S. 178 angedeutete Lösungsmethode für Problem 3.(v) unmöglich, da die Existenz eines „partial spread" mit p Komponenten in $D_{2p} \times D_{2p}$ für Primzahlen $p > 3$ einem Satz von Sprague (Translation nets. Mitt. Math. Sem. Gießen **157** (1982)) widerspricht. Ob die vom Autor gewünschten Differenzenmengen in diesen Gruppen überhaupt existieren, ist mir unbekannt.

Trotzdem sind diese Kritikpunkte im Vergleich zur Wichtigkeit und Eleganz des Buches absolut zweitrangig. Ich möchte dieses Werk jedem Mathematiker, der sich für endliche Algebra und ihre Anwendungen interessiert, wärmstens empfehlen.

Gießen D. Jungnickel

**Rademacher, H., Higher Mathematics from an Elementary Point of View** (ed. D. Goldfeld), Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1982, 138 S., gebd. DM 66,–

Die vorliegende Ausarbeitung einer Vorlesung von Rademacher an der Stanford University im Jahre 1947 ist für mathematische Laien gedacht, denen ein erster Eindruck von (hauptsächlich) zahlentheoretischen Fragestellungen, Ideen und Beweismethoden vermittelt werden soll (Kapitel: Primzahlen. Primzerlegung. Brüche. Farey-Brüche. Dezimal-Brüche. Prinzip der Ein- und Ausschließung. Approximation von Irrationalzahlen. Ford-Kreise. Linear-gebrochene Abbildungen. Modulfunktionen. Gestänge). Das Büchlein ist lebendig und mitreißend geschrieben, ohne Formalitäten und mit einem Minimum an Technik, auch für interessierte Schüler mit Gewinn lesbar. Von den mathematischen Kenntnissen der gymnasialen Mittelstufe ausgehend führt der Autor in eine reichhaltige zahlentheoretische Welt und ihre Verbindung zur Geometrie ein. Das letzte, etwas aus dem Rahmen fallende, Mathematikern weniger vertraute Kapitel behandelt verschiedene mechanische Hilfsmittel für Konstruktion von Kreisverwandtschaften, so z. B. exakte Lösungen des Wattschen Problems, lineare Bewegung in Drehbewegung zu verwandeln.

Der Herausgeber hat einigen Kapiteln nützliche Anhänge gegeben, die den Leser auf Weiterentwicklungen seit 1947 aufmerksam machen. Ein sensibler Leser wird sich vielleicht wundern, daß Rademacher im Jahre 1947 erzählt, D. N. Lehmer hätte im Jahre 1956 eine Liste der Primzahlen $< 10^7$ berechnet (daß die erste Auflage dieser Liste aus dem Jahr 1913 stammt, erfährt man nicht). Hat Rademacher den Königsberger Pfarrerssohn Christian Goldbach, Sekretär der Petersburger Akademie, wirklich „a Russian named Goldback" apostrophiert? Doch das sind minore Fragen am Rande.

Dem Birkhäuser-Verlag ist zu danken, daß er an die Seite des seit 1930 vorliegenden Klassikers „Von Zahlen und Figuren" von H. Rademacher und O. Toeplitz (Nachdruck: Springer 1968) eine zweite Kostprobe von Rademachers Fähigkeit gestellt hat, gehaltvolles mathematisches Denken in elementarer Form exemplarisch auszubreiten. Leider wird der jetzige Preis der wünschenswerten Verbreitung des Büchleins (z. B. bei Schülern) im Wege stehen.

Erlangen W.-D. Geyer

**Jones, W. B.; Thron, W. J., Continued Fractions: Analytic Theory and Applications** (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 11), Reading, Mass.: Addison-Wesley 1980, XXVIII + 428 S., £ 22.50

Die beiden Autoren Jones und Thron sind seit langer Zeit und mit einer großen Zahl von Beiträgen auf dem Felde der Kettenbrüche aktiv. Ihr Buch hier steht jetzt als letztes Glied in einer Reihe mit drei verbreiteten Monographien über die analytische Theorie der Kettenbrüche aus den letzten Jahrzehnten: H. S. Wall, Continued Fractions [4] von 1948, die (inzwischen ebenfalls nachgedruckte) dritte Auflage aus dem Jahre 1957 der Lehre von den Kettenbrüchen von O. Perron [3] und die englische Übersetzung des reizvollen Büchleins [2] von A. N. Khovanskii aus dem Jahre 1963. Wie in den Büchern von Wall und Khovanskii ist der Stoff bei Jones und Thron bewußt beschränkt; anders als dort werden über weite Passagen keine Beweise mehr gebracht. Der auf Durchdringung bedachte Leser wird dafür an den entsprechenden Stellen auf weitere Literatur verwiesen, so oft auf die genannten Monographien und auf das Werk [1] von P. Henrici, dessen zweiter Band als Schlußkapitel eine knappe und dicht geschriebene Darstellung der Kettenbruchmethoden einschließlich vollständiger Beweise enthält. Sie kann eine Kontrastlektüre bilden zu vorliegendem Buch.

Die Autoren wenden sich mit diesem Buch – der vollständige Titel deutet es ebenso an wie die Serie, in der es erscheint – an ein breites Publikum: Mathematiker der reinen und der anwendenden Seite, theoretische Physiker, Chemiker und Ingenieure. Das hat Konsequenzen für den Stil des Buches und für die Geduld des Lesers. Ausdrücklich mit in der Absicht der Autoren liegt es, die Brücke zwischen reiner und angewandter Mathematik zu festigen: Betonung des Algorithmischen, Verfolgung von Abschätzungen aus Existenzsätzen bis zu konkreten numerischen Resultaten in Spezialfällen, Einbeziehung von Fehleranalyse und Konvergenzbeschleunigung.

Das Buch ist unterteilt in zwölf Kapitel von sehr unterschiedlicher Länge, Intention und Dichte. Die drei ersten Kapitel sind einführend. Eine Fülle historischer Notizen im ersten Kapitel und auch in den Einleitungen fast aller weiteren Kapitel verdeutlicht dem Leser, wie die Kettenbrüche die Entwicklung der Analysis seit einigen Jahrhunderten begleiten. Grundlegende Definitionen werden im zweiten Kapitel gebracht (leider sind den gewöhnlichen regulären Kettenbrüchen nur zwei Seiten gewidmet). Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit periodischen Kettenbrüchen. Bis hier wird beim Leser nur Elementarmathematik vorausgesetzt; weder der Begriff des Eigenwertes einer Matrix noch die Kenntnis der Klassifizierung der gebrochenlinearen Transformation wird erwartet. Das Hauptgewicht des Buches liegt auf den Konvergenzfragen. Ihrer Behandlung sind gewidmet die Kapitel 4 (Konvergenz), 8 (Fehleranalyse) und 10 (Numerische Stabilität). Den verschiedenartigen Beziehungen von Kettenbrüchen und rationalen Approximationen formaler Potenzreihen sowie der damit gegebenen Verbindung zu den analytischen Funktionen über Laurentreihen bzw. asymptotische Entwicklungen gehören die Kapitel 5 (Rationale Approximationen und Drei-Term-Rekursionen), 6 (Der Gaußsche Kettenbruch zur hypergeometrischen Reihe), 7 (Typen korrespondierender Kettenbrüche) und vielleicht Kapitel 9, welches eine Skizze des Themas Kettenbrüche und Momentenprobleme enthält, allerdings ohne jeden Beweis. Die beiden Kapitel 4 und 7 füllen übrigens nahezu die Hälfte des Buches.

Ein Kettenbruch ist nichts anderes als die Wertefolge $(S_n(0))_{n \geqslant 1}$ einer durch sukzessive Komposition

$$S_n = s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_n$$

von gebrochenlinearen Transformationen $s_k(x) = a_k/(x + b_k)$ entstandenen Abbildungsfolge. Seine „Elemente" $a_k \neq 0$, $b_k$ gehören einem bewerteten Körper an (hier entweder dem Körper der rationalen Funktionen einer Variablen über $\mathbf{C}$ mit Grad- bzw. Untergradbewertung oder dem Körper $\mathbf{C}$ selbst).

Im ersten Fall entstehen die Typen korrespondierender Kettenbrüche, die durch Einsetzung zu Kettenbrüchen über $\mathbf{C}$ führen. Während die Konvergenzfragen im ultrametrischen Fall vergleichsweise harmlos sind, ergeben sich für die Kettenbrüche über $\mathbf{C}$ bekanntlich vielfältige Probleme. Nirgendwo sonst wird eine solche Fülle dieser Probleme behandelt wie im vierten Kapitel dieses Buches. Der berühmte Parabelsatz, das Cardiodtheorem oder auch Theorem 4.46 über Zwillingskonvergenzgebiete zeigen, wie vertrackt die Beweise sein können. Die Autoren lenken wiederholt das Interesse des Lesers auf ein vom Grundkörper unabhängiges Konvergenzkriterium, auf den Satz von Pincherle, nach dem der Kettenbruch $(S_n(0))_{n \geq 1}$ dann und nur dann konvergiert, wenn die Drei-Term-Rekursion

$$y_{n+1} = a_n y_n + b_n y_{n-1}$$

eine Minimallösung $y_n = h_n$ besitzt; und wenn das der Fall ist, so gilt $\lim_{n \to \infty} S_n(0) = -h_1/h_0$. Die Bedeutung dieses Satzes auch für numerische Fragestellungen wird unterstrichen durch die Aufnahme von Appendix B mit Resultaten über Minimallösungen von P. Henrici. Es mag zum Schluß erwähnt sein, daß Kapitel 7 in seinem letzten Abschnitt eine glatte und elementare Darstellung einer Variante des Hurwitzschen Stabilitätskriteriums bringt für Polynome über **C**. Die zugehörigen Behauptungen und Beweise können ganz ohne die Sprache der Kettenbrüche formuliert werden. Nach meiner Erfahrung ist dieser Abschnitt geeignet, auch bei Ingenieurstudenten das Interesse an den Möbiustransformationen zu wecken.

[1] Henrici, P.: Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1,2. J. Wiley & Sons 1974, 1977
[2] Khovanskii, A. N.: The Application of Continued Fractions and their Generalizations to Problems in Approximation Theory. P. Noordhoff, Groningen 1963
[3] Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Bd. II. Teubner, Stuttgart 1977 (reprographischer Nachdruck der 3. Auflage von 1957)
[4] Wall, H. S.: Analytic Theory of Continued Fractions. van Nostrand, New York 1948

München A. Leutbecher

**Fröhlich, A., Galois module structure of algebraic integers** (Ergebnisse der Math., Neue Serie Bd. 1), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1983, 320 S., DM 88,–

Wohl viele werden auf dieses Buch mit Ungeduld gewartet haben! Und zwar deswegen: Um sich endlich zusammenhängend und aus einer Quelle über eine tiefe und überraschende Theorie informieren zu können, die da in den letzten zehn bis fünfzehn Jahren aus dem Zusammenspiel von Analytischer und Algebraischer Zahlentheorie entstand und in der Verbindung zweier scheinbar unabhängiger Invarianten einer galoisschen, zahm-verzweigten Zahlkörpererweiterung L/K ihren Höhepunkt fand; diese sind einmal die Struktur des Ganzheitsringes $O_L$ von L als Modul über dem ganzzahligen Gruppenring **Z**G der Galoisgruppe G von L/K und zum anderen die aus der Funktionalgleichung der Artinschen L-Reihen zu den symplektischen Charakteren von G resultierenden Wurzelzahlen. Wie ist die Beziehung dieser Invarianten zueinander aufgedeckt worden? Damit genau beginnt das Buch; es wird zunächst rekapituliert, was geschehen ist. Auf der einen Seite steht die Suche nach der Antwort auf die Frage, wann L/K eine Ganzheitsnormalbasis besitzt (wofür schon E. Noether die zahme Verzweigung als notwendige Bedingung erkannte), auf der anderen Seite steht das Problem der Vorzeichenbestimmung der Wurzelzahlen. Im einzelnen wird nun die Entwicklung beschrieben, die auf der jeweiligen Seite durch Arbeiten von hauptsächlich Martinet, Armitage, Serre und dem Autor selbst eingeleitet wurde, bis hin zu dem, was als „grazy idea" von Serre (1971) zitiert wird, nämlich daß das Vorzeichen der Wurzelzahl Einfluß auf die mögliche Existenz einer Ganzheitsnormalbasis haben könnte – hier zunächst nur für die von Martinet gerechneten Fälle mit K = Q und $G = H_8$ = achtelementige Quaternionengruppe. Die folgenden Paragraphen des 1. Kapitels sind nun der Reihe nach den Grundbausteinen der Theorie zugeordnet: der von Fröhlich entwickelten Beschreibung der Klassengruppe von $O_K G$ über die sogenannten Hom-Gruppen und der Angabe von $O_L$ hierin mittels seiner verallgemeinerten Lagrangeschen Resolventen, sowie den Galois-Gauß-Summen, die die Verbindung zu den Wurzelzahlen ermöglichen. Im Grunde liegt damit die ganze Theorie schon vor, vieles ist auch schon bewiesen, alle Hauptsätze sind formuliert und verständlich gemacht; wir haben aber gerade die ersten 50 Seiten gelesen! Die nächsten Kapitel sind dann, sozusagen, den Feinheiten gewidmet. Im zweiten Kapitel, Classgroups and Determinants, erscheint erstmals Taylors Logarithmus für Gruppenringe, der die Haupthilfe seines Beweises von Fröhlichs Vermutung war, daß nämlich nur die Vorzeichen der Wurzelzahlen der symplektischen Charaktere der Existenz einer Ganzheitsnormalbasis im Wege stehen können. Im dritten und vierten Kapitel finden die wichtigen Rechnungen mit Galois-Gauß-Summen statt, so daß jetzt die Beweise der Hauptsätze der Theorie vollendet werden können. Es schließen sich noch zwei weitere Kapitel an: Das fünfte behandelt die Frage der expliziten Bestimmung der Vorzeichen der Wurzelzahlen (immer im zahmen Fall) und die Frage nach ihrer Verteilung; hier wird also G festgehalten, nicht aber die Körpererweiterung selbst. I. w. handelt es sich bei diesem Kapitel um die Wiedergabe der Arbeit [Proc. London Math. Soc. (3) **46** (1983) 83–99] des Autors. Das letzte Kapitel schließlich besteht aus dem Studium von $O_L$ als $O_K G$-Modul (anstatt als $\mathbb{Z}G$-Modul). Genauer: gegeben K und G, welches sind die Klassen $O_L$ in der Klassengruppe von $O_K G$, wenn L/K zahm und galoissch mit Gruppe G ist? Hier werden einmal die schönen Resultate von Brinkhuis wiedergegeben, der diese Frage im Zusammenhang mit Einbettungsproblemen behandelt hat, zum anderen die von McCulloh, die vielleicht am besten unter der Überschrift „Stickelberger-Relationen auf der Klassengruppe eines Gruppenringes" zusammengefaßt werden. In einem Anhang wird schließlich auf die neuesten Entwicklungen und Forschungsrichtungen hingewiesen; hier findet auch Cassou-Noguès und Taylors sogenannte Umkehrung des Hauptsatzes der Theorie Erwähnung, nämlich daß die Wurzelzahlen alle = 1 sind, wenn $O_L$ trivial in der von Fröhlich eingeführten Hermiteschen Klassengruppe von $\mathbb{Z}G$ ist; hier ist des weiteren auf Queyruts Diskussion des Falles, in dem L/K nicht unbedingt mehr zahm-verzweigt ist, eingegangen.

Das Buch ist außerordentlich lebendig geschrieben. Es scheint dadurch mit ziemlicher Leichtigkeit in diese doch sehr tiefliegende Theorie mit ihrer ganzen Vielfalt von neuen Ideen hineinzuführen.

Ihm gehört darüber hinaus eine Besonderheit dadurch, daß es den Leser zu einem Begleiter der Entwicklung dieser ganzen faszinierenden Geschichte macht und ihm ständig das Gefühl gibt, als wäre er eigentlich mit im Geschäft – anstatt daß es ihm nur das fertige Gebäude vorstellt. Und das ist wohl deshalb so, weil hier der, der die Theorie so maßgeblich beeinflußt hat und der sozusagen ihr Vater ist, das Buch schrieb und nicht ein Außenstehender.

Augsburg J. Ritter

**Dauns, I., A Concrete Approach to Division Rings,** Berlin: Heldermann Verlag 1982, 417 S., DM 78,–

Auf der Rückseite des Bucheinbandes ist u. a. folgendes zu lesen:

This is the first book which treats all types of division rings. Traditionally, the theory of division rings has been based on heavy algebra, . . . In contrast, the first objective of this book is to develop the important basic facts quickly in as straightforward a manner as possible. . . . Thus this book provides a vehicle with which the non-expert can easily and quickly reach the frontiers of the subject.

Leider muß ich schon hier sagen, daß all diese Ansprüche *nicht annähernd* erfüllt werden. Insbesondere sollte man dieses Buch Nichtexperten tunlichst vorenthalten; diese würden dadurch nur gründlich verwirrt.

Zur Begründung meiner herben Kritik wird man Vergleiche mit vorhandenem ziehen müssen, etwa mit (das ist natürlich keine vollständige Aufzählung):

[1] Deuring, M.: Algebren. Springer 1935
[2] Albert, A. A.: Structure of Algebras. AMS Coll. Publ. **24** (1939)
[3] Artin, E.; Nesbitt, C. J.; Thrall, R. M.: Rings with Minimum Condition. Univ. of Michigan Press 1948
[4] Blanchard, A.: Les corps non commutatifs. Collection SUP (1972)
[5] Jacobson, N.: PI-Algebras. Springer Lecture Notes 441, 1975
[6] Cohn, P. M.: Skew Field Constructions. LMS Lecture Note 27, 1977
[7] Draxl, P. K.: Skew Fields. LMS Lecture Note 81 (1983)

Alle 7 Bücher sind für Nichtexperten geeignet und benutzen in ihrem algebraischen Teil keine „heavy algebra". [1], [2] und [4] haben einen arithmetischen Teil, [6] ist *das* Buch für den unendl.-dim. Fall (als Algebra über dem Zentrum betrachtet), die anderen 6 behandeln vorwiegend den endl.-dim. Fall. [4] kommt in der Bibliographie unseres Buches nicht vor, [7] ist danach erschienen.

Unser Buch behandelt etwa zu gleichen Teilen den endl.- und unendl.-dim. Fall, die sich von den Methoden her zum Teil erheblich unterscheiden (etwa wie endl. und unendl. Gruppen). Es beginnt in Ch. I (17 S.) mit den reellen Quaternionen und deren Relevanz für die Geometrie. Solch ein Beginn ist nie verkehrt ([4] beginnt genauso, nur deutlich eleganter), doch hätte man sich auch eine Darstellung als komplexe Matrizen gewünscht. Diese bringt Ch. II (12 S.) implizit: dort ist von „verallgemeinerten" Quaternionenalgebren die Rede, womit de facto Tensorprodukte üblicher Quaternionenalgebren mit gewissen Schiefkörpern gemeint sind. Hier findet sich auch das Köthesche Beispiel eines unendl.-dim. Schiefkörpers. Dieses Kapitel gefällt noch am ehesten, schon wegen seiner Kürze.

Nun kommt der Kern des endl.-dim. Teils des Buches, Ch. III (153 S.) über „zentral endliche Divisionsalgebren", womit endl.-dim. Schiefkörper gemeint sind. (Die Terminologie des Autors ist oft sektiererisch: z. B. ist „einfacher Ring" nicht das aus [3] her geläufige und „zentrale einfache Algebra" nicht das allgemein übliche.) Dieses Kapitel ist in jeder Hinsicht abschrekkend! In den ersten 8 (von 11) §en wird die Theorie der zentralen einfachen Algebren (im üblichen Sinne, also die Theorie der Brauergruppen) mit großer Sorgfalt verschleiert: da wird der Gegenstand nicht in vernünftiger Reihenfolge behandelt, wodurch das bestimmende Prinzip, wonach praktisch alles auf den Wedderburnschen Struktursatz und den Satz von Skolem/Noether zurückgeht, noch weniger zur Geltung kommt, als es sowieso schon deswegen der Fall ist, weil der Leser durch zu viele (oft unbedeutende) Details in den zahlreichen endlosen Rechnungen vom Kern der Dinge abgelenkt wird. Ferner wird zu oft aus der Theorie zitiert und nichts bzw. halbes bewiesen; dabei hätte man fast immer mit geringerem verbalen Gesamtaufwand komplette Beweise liefern können; Beispiele: Struktursatz von Wedderburn, Satz von Wedderburn, Satz von Skolem/Noether, Zentralisatorsätze. Anderes – z. B. Dichtigkeitssatz (pp. 77/78), Satz von Köthe (pp. 100–102) – wird zwar vollständig durchexerziert, jedoch oft kolossal umständlich. Auch die Beispielaufzählung dieses wichtig(st)en Kapitels ist weder spektakulär noch vollständig: man vermißt explizite Konstruktionen von H. L. Schmid, Teichmüller (beide Namen kommen im Buch nicht vor) und Witt in Sachen p-Algebren, den ganzen Fragenkreis der Potenzrestalgebren inkl. Satz von Rosset und Zusammenhang mit der K-Theorie (der Satz von Merkur'ev/Suslin kam wohl zu spät), Schiefkörper mit Involutionen (Scharlau kommt im Buch nicht vor) und eine Beschreibung der wichtigen funktoriellen Eigenschaften der Brauergruppen. Andererseits wird oft wichtiges en passant kommentarlos mitgeteilt: was denkt wohl der Nichtexperte, wenn er liest, daß über Zahlkörpern alle endl.-dim. Schiefkörper zyklische Algebren mit „Index = Exponent" sind? Dahinter steckt Klassenkörpertheorie! Bleiben die §§ 9–11 dieses Kapitels. Dabei ist § 10 der wichtigste: er soll zeigen, wie man zum Amitsurschen Satz über Schiefkörper kommt, die nicht verschränkte Produkte sind. Hier wird dauernd auf [5] verwiesen, und man kann dem Leser nur empfehlen, gleich [5] (114 S.) zu studieren.

Bleiben der unendl.-dim. Teil und die Anhänge. In Ch. IV (57 S.) werden schiefe Polynom- und Potenzreihenringe (inkl. Quotientenschiefkörperbildung) diskutiert; die 29 S. von

Ch. 1/2 in [6] sind besser. Nun kommt Ch. V über Schiefkörpererweiterungen; dieses (hochinteressante) Gebiet kommt eher zu kurz (trotz der 35 S.). Man hätte sich vieles aus [6] gewünscht, so ein Beispiel einer Erweiterung mit unterschiedlichem Links- und Rechtsgrad. Bleiben Ch. VI/VII (zus. 45 S.); namentlich das letzte gefällt wieder besser; es handelt von Halbgruppenpotenzreihenringen und enthält neues Beispielmaterial. Dort fließt auch einiges aus anderen Veröffentlichungen des Autors ein.

Nun die Anhänge: A-I (7 S.) ergänzt Ch. I/II, A-II (6 S.) ergänzt ein Beispiel in Ch. III, A-III (11 S.) gibt einen Überblick über (nullteilerfreie) nichtassoziative Ringe (z. B. Cayleysche Zahlen) und A-IV (27 S.) diskutiert Fragen der Faktorisierung von Elementen gewisser nichtkommutativer Ringe.

Das Buch schließt mit einer (nützlichen) Liste der Symbole u. ä. (geordnet nach Kapiteln), der Bibliographie, einem Autor- und einem Sachindex.

Die Bibliographie mit ca. 409 Titeln gibt (wenn möglich) auch Hinweise auf die entsprechenden Kommentare im Zbl. f. Math. Es fällt auf, daß nur ungefähr 134 (also knapp ein Drittel) dieser Titel im Buchtext erwähnt werden; umgekehrt geistert das nicht aufgeführte [Cohn 63] durch ganz A-IV. Daß man andererseits etliches vermißt, ist weiter oben schon dargelegt worden. Solch eine aufgeblasene Bibliographie kann natürlich durchaus von Wert sein, doch bleibt es fraglich, ob es sinnvoll ist, auf Fragenkreise hinzuweisen, welche im Buchtext *überhaupt nicht* erwähnt werden; Beispiel: die Arbeiten von Platonov oder Rehmann (der Begriff „reduzierte Norm" kommt nirgends im Buche vor, was an sich ein deutliches Manko ist).

Was bringt das Buch nun eigentlich? Nun ja, der Experte wird aus manchem Beispiel doch einiges lernen (und wird das Durcheinander überwinden können) und auch so manchen Hinweis auf die Literatur entdecken. Der Nichtexperte sollte *beispielsweise* zunächst die ersten 72 S. von [6], sodann die ersten 95 S. von [3] (resp. die ersten 111 S. von [7]) und schließlich die 114 S. von [5] lesen; dann ist er (nach insgesamt 278 resp. 297 leicht verdaulichen Seiten – gegenüber den 370 Textseiten des vorliegenden Buches) Experte genug, so daß fortan für ihn das oben für Experten gesagte gilt.

Bielefeld P. K. Draxl (†)

**Draxl, P. K., Skew Fields** (London Mathematical Society Lecture Note Series 81), Cambridge Univ. Press, 1983, 182 p., £ 10.95

Bei einem Buch mit dem Titel „Skew Fields" stellt sich als erstes die Frage: endlich-dimensionale oder unendlich-dimensionale, denn es ist wohlbekannt, daß diesen beiden Fällen zwei Theorien entsprechen, die in ihren Methoden und Resultaten fast nichts gemeinsam haben. Hier handelt es sich ganz überwiegend um die Theorie *endlich-dimensionaler* zentraler einfacher Algebren, also um einen wesentlichen Teil der klassischen Wedderburn-Noether-Brauer-. . .-Artin-Theorie. Derjenige, der etwas von der Entwicklung der letzten zwei Jahre mitbekommen hat, wird dann als nächstes wissen wollen: Erfährt man etwas über die sensationellen neuen Ergebnisse von Merkurjev und Suslin? Die Antwort ist: ein wenig. Diese Sätze werden (nicht in allen Versionen) formuliert, aber zum Beweis wird nichts und zu Anwendungen fast nichts gesagt. Daraus kann man dem Verfasser keinen Vorwurf machen: Die Zeit war zu kurz, und er hat einfach Pech gehabt, daß sein Buch gerade in dem Zeitpunkt erscheint, da nach fast fünfzigjähriger ziemlicher Stagnation die ganze Theorie wieder in Bewegung gerät.

Der Kern des Buches ist also die klassische Theorie der endlich-dimensionalen zentralen einfachen Algebren (§§ 2, 3, 7, 8, 9, 12, 22). Dieser Stoff ist sehr geschickt und effektiv organisiert. Natürlich kann man in der Darstellung keine großen Überraschungen mehr erwarten, aber es ist dem Verfasser durchaus gelungen, gegenüber früheren Büchern neue Aspekte zu betonen,

z. B. die frühzeitige Einführung und systematische Verwendung der Corestriktion (nach Riehm). Der Experte wird ganz besonders begrüßen, daß er nicht die Mühe gescheut hat, in § 22 die wichtigen und für viele Beweise nützlichen Schachtelungsformeln für reduzierte Norm und Spur zu beweisen, die man bisher in den gängigen Büchern vergeblich suchte. Einige Paragraphen (§ 4, 5, 6, 13) enthalten mehr technische Hilfsmittel, insbesondere über Tensor-Produkte und Galois-Cohomologie, wobei auch hier die Darstellung öfter vom gewohnten abweicht. Schließlich finden sich noch einige Ergänzungen und vor allem die Diskussion wichtiger Klassen einfacher Algebren. Es geht um zyklische Algebren, Normrest-Algebren, Quaternionen-Algebren, p-Algebren und Involutionen. Hier stehen die formalen und funktoriellen Eigenschaften dieser Algebren (aufgefaßt als Funktionen ihrer definierenden Daten) im Vordergrund. Zum Beispiel werden die neuen Ergebnisse von Rosset und Tate über das Verhalten von Potenzrest- und Quaternionen-Algebren bei Verlagerung bewiesen.

Das Thema des letzten Teiles des Buches (Reduced $K_1$-Theory of Skew Fields) ist die Struktur der allgemeinen und speziellen linearen Gruppen. Diese Theorie hat einen anderen Charakter als die im Hauptteil des Buches behandelte, so daß der behandelte Stoff sich nicht ganz harmonisch und bruchlos an das frühere anschließt. Es geht zunächst um folgende Ergebnisse: Bruhatsche Normalform für Matrizen über beliebigen Schiefkörpern, die (originellerweise) benutzt wird, um die Dieudonné-Determinante zu definieren, Charakterisierungen der speziellen linearen Gruppen (als von den Elementarmatrizen erzeugt, bzw. als Kommutatorgruppe), Einfachheit der projektiven linearen Gruppe. Dann kommt der Verfasser zu dem, was ihn wohl eigentlich interessiert: Er beschränkt sich wieder auf den Fall endlich-dimensionaler Schiefkörper und untersucht die Gruppen $K_1(D)$ und insbesondere $SK_1(D)$, die reduzierte Whitehead-Gruppe, die als Kern der von der reduzierten Norm induzierten Abbildung definiert ist. Aus den formalen Eigenschaften der reduzierten Norm folgt sofort, daß $SK_1(D)$ Torsions-Gruppe ist, deren Exponent den Index i(D) teilt. Als Hauptergebnis wird das wesentlich auf den Verfasser zurückgehende Resultat bewiesen: $SK_1 = 1$ für „vernünftiges" Zentrum k. Dieses Resultat enthält den rein algebraischen Teil des Wangschen Satzes $SK_1 = 1$ für lokale und globale Körper. Das Buch schließt mit den bekannten Beispielen des Verfassers für D mit $SK_1(D) \neq 1$ und einigen Bemerkungen zum unitären $SK_1(D)$.

Insgesamt handelt es sich um eine gelungene Darstellung in ein gerade wieder aktuell gewordenes klassisches Teilgebiet der (linearen) Algebra. Jedem, der sich schnell und gründlich über die Theorie der endlich-dimensionalen einfachen Algebren informieren will, kann man das Buch als präzise und inhaltsreiche Informationsquelle empfehlen. Es eignet sich auch als Vorlage für ein Seminar oder eine Spezialvorlesung im Anschluß an eine einführende Algebra-Vorlesung und wird Studenten nützlich sein, die sich für eine Examensarbeit in dieses Gebiet einarbeiten wollen.

Münster W. Scharlau

**Weil, A., Adeles and Algebraic Groups,** Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1982, 138 S., DM 30,–

Die Vorlesungsausarbeitung der Vorlesungen von Weil über Adele und algebraische Gruppen, die etwa für zwei Jahrzente nur als Ausarbeitung vom Institute for Advanced Study zu beziehen war, ist hier vom Birkhäuser Verlag neu aufgelegt worden. Die Ausarbeitung zählte zu den Werken der Mathematik, die von sehr unscheinbarem Äußeren sind, aber dennoch allergrößten Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik haben.

Dies Buch ist ein unveränderter Abdruck der Vorlesung. Nach zwei einführenden Kapiteln, in denen die Adele, die adelewertigen Punkte auf algebraischen Mannigfaltigkeiten und die

Tamagawamaße auf Adelegruppen behandelt werden, werden in den Kapiteln III und IV die Tamagawazahlen der sogenannten klassischen Gruppen bestimmt. Wenn der Referent sich nicht täuscht, ist dies immer noch die einzige Referenz für die Bestimmung dieser Tamagawazahlen. Im Appendix I berechnet Demazure die Tamagawazahl der Gruppen vom Typ $G_2$. In einem zweiten Appendix, der neu aufgenommen wurde, berichtet T. Ono über die weiteren Fortschritte in dieser Fragestellung. Für meinen Geschmack ist dieser Überblick sehr knapp, aber er enthält auch eine Fülle von Anregungen, insbesondere den Hinweis auf die Verbindung zu den Birch- und Swinnerton-Dyer-Vermutungen.

Ich glaube, daß A. Weils einleitende Bemerkung noch immer Gültigkeit hat: "... much work remains to be done before this very promising topic reaches some degree of completion". Onos Appendix zeigt, daß inzwischen viel getan ist, und es wäre zu begrüßen, wenn die Veröffentlichung dieser Noten Anregung für weitere Arbeiten geben würde.

Bonn G. Harder

**Lang, S., Fundamentals of Diophantine Geometry**, Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1983, 370 S., DM 132,–

Das Buch ist eine verbesserte Version der zwanzig Jahre alten „Diophantine Geometry" des Autors. Es behandelt somit die alten Themenkreise (Höhen, Sätze von Mordell-Weil, Thue-Siegel-Roth und Siegel, Irreduzibilitätssatz von Hilbert), und einige neuere Gebiete sind hinzugekommen (Weil-Funktionen, Néron-Funktionen und Divisoren). Der Autor legt wieder Wert darauf, Zahl- und Funktionenkörper parallel zu behandeln. Insgesamt ist die Auswahl des Stoffes vertretbar, wobei ich allerdings nicht verstehe, warum die Ergebnisse von Manin, Grauert, Parshin, Arakelov, Szpiro, Tate und Zarhin über den Funktionenkörperfall der Vermutungen von Mordell, Shafarevich und Tate keine Aufnahme gefunden haben. Zwar kam der Beweis der Mordell-Vermutung zu spät für das Buch, doch hätten zumindest einige dieser Resultate gut hinein gepaßt.

Im Ganzen habe ich den folgenden Eindruck: Serge Lang hat ein altes Gebäude modernisiert, und dies ist so gut gelungen, wie es der beschränkte Ansatz erlaubte. Ein vollständiger Abriß und Neuaufbau wäre aber besser gewesen. Die „Diophantine Geometry" stellte vor 20 Jahren einen großen Fortschritt dar, weil der Themenkreis zum ersten Male aus der Sicht der algebraischen Geometrie à la Weil behandelt wurde. (Die im Buch abgedruckte Besprechung von Mordell dokumentiert das totale Unverständnis eines Teils der älteren Generation dafür). Inzwischen hat sich jedoch die algebraische Geometrie weiterentwickelt (à la Grothendieck). Ein heute erscheinendes Buch über diophantische Geometrie sollte dem Rechnung tragen. Zum Beispiel ist das Werk von Lang über abelsche Varietäten inzwischen veraltet. Als generelle Referenz könnte viel besser das Buch von Mumford dienen.

Alles in allem ist das Buch gut lesbar, und kann dem Interessierten als erste Einführung in die Theorie dienen. Ein tieferes Verstehen setzt aber die Lektüre der neueren Original-Arbeiten voraus. Eine befriedigende Darstellung der diophantischen Geometrie aus moderner Sicht steht noch aus.

Wuppertal G. Faltings

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Hinweise für Autoren

Für den Abdruck vorgesehene Manuskripte sind in einwandfrei leserlicher und völlig satzfertiger Form (einseitig beschriebenes Manuskript, Schreibmaschinenschrift 1 1/2-zeilig) und entsprechend den nachstehenden Richtlinien ausgezeichnet einzureichen.

Der Beginn von Absätzen oder neuen Abschnitten sollte deutlich durch Einrücken gekennzeichnet sein. In jedem Fall sollte ein Hinweis für den Setzer, in dem alle Besonderheiten aufgeführt sind, beigefügt werden.

Ferner sollten die Manuskripte entsprechend dem Subject Classification Schemes der Mathematical Reviews (AMS/MOS) klassifiziert sein. Am Ende der Manuskripte sollte die genaue Anschrift des oder der Verfasser angegeben werden. Zuschriften sowie die Versendung der Korrekturabzüge erfolgen, sofern nicht anders vermerkt, immer an den erstgenannten Autor.

Zeichnungen sollten fortlaufend numeriert werden und auf gesonderten Blättern in Form von klaren Bleistiftzeichnungen im richtigen maßstäblichen Verhältnis möglichst in doppelter Größe dem Manuskript beigefügt werden. Am linken Rand des Textes sollte ein Hinweis auf die jeweils einzufügende Figur angebracht werden.

Fußnoten sollten auf der jeweiligen Seite, auf die sie Bezug nehmen, angebracht werden (nicht am Ende des Textes). Literatur sollte in folgender Weise zitiert [1] und dann am Ende des Textes in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt werden. Verweise sollten in folgender Form vorgenommen werden:

[1] N e v e n , J.: Martingale Problems. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **79** (1957) 175–180

[2] W i t t e n b u r g , J.: Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner 1977. = Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 33.

Um eine rasche Veröffentlichung zu erreichen, erhalten die Autoren nur einen Korrekturabzug. Die Autoren werden gebeten, nur Druckfehler zu korrigieren. Sollten weitere Korrekturen wie Einfügungen oder Streichungen vorgenommen werden, müssen diese dem Autor berechnet werden. Die von den Autoren durchgesehenen Korrekturabzüge sind umgehend an den Herausgeber zurückzusenden.

Die Autoren erhalten von ihren Arbeiten nach Veröffentlichung 75, von Buchbesprechungen 2 Sonderdrucke unentgeltlich. Zusätzliche Sonderdrucke können gegen entsprechende Berechnung zum Zeitpunkt der Rückgabe der Korrekturen bestellt werden.

# Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Auszeichnungen für den Satz

Die im Manuskript enthaltenen Formelbuchstaben werden generell steil gesetzt. Besondere Schriftarten sind entsprechend den folgenden Richtlinien farblich auszuzeichnen.

| | |
|---|---|
| gestrichelte schwarze Unterstreichung | – S p e r r u n g |
| doppelte schwarze Unterstreichung | – **halbfett** (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in Formeln) |
| grüne Unterstreichung | – *kursiv* (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in den Formeln) |
| doppelte grüne Unterstreichung | – **halbfette lateinische Buchstaben** (in Formeln) |
| rote Unterstreichung | – griechische Buchstaben |
| lila Unterstreichung | – Groteskbuchstaben |
| doppelte lila Unterstreichung | – halbfette Groteskbuchstaben z. B. für **R, N, C** usw. |
| blaue Unterstreichung*) | – Fraktur |
| gelbe Unterstreichung | – Großbuchstabe O (zur Unterscheidung von der Ziffer Null) |
| gelb eingekastelt*) | – Skript |
| lila eingekastelt | – logische und mengentheoretische Symbole wie z. B. $\exists$, $\forall$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, Malkreuz $\times$, Verknüpfungszeichen $\circ$, $\cap$, $\cup$, $\bigcap$, $\bigcup$, $\in$, $\subset$, Laplace-Operator $\Delta$, Nabla $\nabla$ |
| grün eingekastelt | – Kleinbuchstabe $\ell$ (zur Unterscheidung zur Ziffer eins (1)) |

Die Bezeichnungen Theorem, Lemma, Korollar, Proposition, Definition usw. werden üblicherweise halbfett gesetzt. Der danach folgende Text (bis auf Formelbuchstaben) wird kursiv gesetzt. Die Bezeichnungen Beweis, Bemerkung, Hinweis usw. werden normal gesetzt, jedoch gesperrt. Der nachfolgende Text wird in normaler Schrift gesetzt.

Mathematische Formeln sollten so deutlich geschrieben werden, daß kein Mißverständnis möglich ist. Die Autoren werden gebeten, insbesondere deutlich zu unterscheiden zwischen Großbuchstaben und Kleinbuchstaben, Null sowie kleinem o oder großem O, griechischen Buchstaben $\varphi$, $\phi$, $\Phi$, $\kappa$, K, $\vartheta$, $\theta$, $\Theta$, Strich (z. B. Ableitungsstrich) und Apostroph. Ferner sollte darauf geachtet werden, daß keine Verwechslung zwischen k, K, r, u, v (lateinisch) und $\kappa$, $\mu$, $\nu$ (griechisch) sowie $\in$ und $\epsilon$ (griechisch) möglich ist.

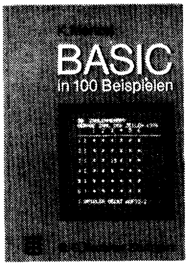
---

*) Von der Verwendung dieser Schriftarten ist beim Composersatz nach Möglichkeit abzusehen.

B. G. Teubner, Postfach 80 10 69, D-7000 Stuttgart 80

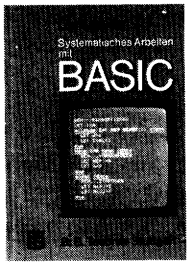
# MikroComputer-Praxis

**Die erfolgreiche Teubner-Buchreihe für Ausbildung, Beruf, Freizeit und Hobby**

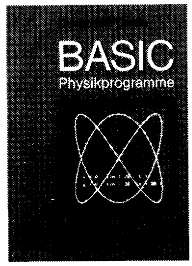



Menzel
**BASIC in 100 Beispielen**
4. Aufl., 244 Seiten mit 99 Aufgaben, 100 BASIC-Programmen mit Testbeisp., 41 Illustr. u. einem Anhang mit Datei-Befehlen. DM 24,80
**– mit Diskette I:**
Alle BASIC-Programme in APPLESOFT (DOS 3.3) DM 62,—
**– mit Diskette II:**
Alle BASIC-Programme für CBM 8050/8250 Floppy. DM 62,—

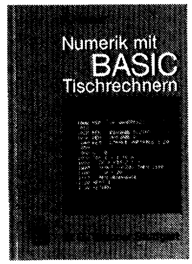

Menzel
**Dateiverarbeitung mit BASIC**
237 Seiten mit 6 BASIC-Programm-Bausteinen. DM 28,80
**– mit Diskette:**
Alle BASIC-Programme in CP/M-Version und APPLE-DOS 3.3-Version sowie eine Testdatei. DM 62,—




Löthe/Quehl
**Systematisches Arbeiten mit BASIC**
Problemlösen – Programmieren 188 Seiten mit 22 Übungen und 56 Beispielen. DM 19,80

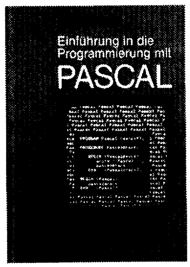



Duenbostl/Oudin
**BASIC-Physikprogramme**
142 Seiten mit zahlr. Flußdiagrammen, Programmausdrucken u. einem Farbtafelanhang. DM 23,80



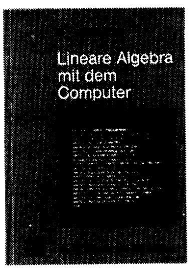

Hainer
**Numerik mit BASIC-Tischrechnern**
251 Seiten mit 51 Algorithmen u. struktur. BASIC-Programmen zur Numerischen Mathematik mit ausführl. Progr.-Beschreibungen u. Testbeisp. DM 26,80

Haase/Stucky/Wegner
**Datenverarbeitung heute**
**mit Einführung in BASIC**
2. Aufl., 284 Seiten mit 145 Abb., zahlr. Beisp. u. 125 Übungen. DM 23,80




Erbs/Stolz
**Einführung in die Programmierung mit PASCAL**
232 Seiten mit zahlr. Abb., Illustr., Beisp. u. Übungen. DM 23,80


Erbs
**33 Spiele mit PASCAL**
**und wie man sie (auch in BASIC) programmiert**
326 Seiten mit zahlr. Abb., Illustr. u. Anleitungen zum Weiterbasteln. DM 32,—

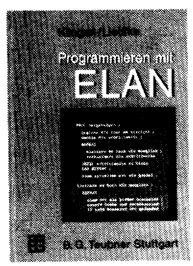




Lehmann
**Lineare Algebra mit dem Computer**
285 Seiten mit 76 Abbildungen u. 181 Aufgaben. DM 23,80


Ottmann/Schrapp/Widmayer
**PASCAL in 100 Beispielen**
259 Seiten. DM 24,80
**– mit Diskette:**
UCSD-Pascal-Programme für den APPLE II Computer. DM 72,—

Klingen/Liedtke
**Programmieren mit ELAN**
207 Seiten mit zahlr. Abb., Beisp. und Übungen. DM 23,80

Nievergelt/Ventura
**Die Gestaltung interaktiver Programme**
Mit Anwendungsbeispielen für den Unterricht
124 Seiten. DM 23,80
**– mit Diskette:** UCSD-Pascal-Programme für den APPLE II Computer. DM 59,80


Postfach 80 10 69
7000 Stuttgart 80
Telefon (07 11) 7 80 30 76

**B. G. Teubner Stuttgart**