86. Band Heft 3
ausgegeben am 23. 7. 1984

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1984

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 86/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 84,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 86, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

V. Bangert: Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten
S. D. Chatterji: A Subsequence Principle in Probability Theory
D. Gaier: Approximation im Komplexen
O. Giering: Othmar Baier zum Gedenken
P. Henrici: Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei formalen Potenzreihen
S. Koppelberg: Booleschwertige Logik
R. Tijdeman: On the Fermat-Catalan Equation
E. Viehweg: Zur Klassifikationstheorie drei(und höher)dimensionaler projektiver Mannigfaltigkeiten

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein
86 (1984) 69–108
AMS subject classification:

Lateinische Quadrate, ihre Geometrien und ihre Gruppen*)

D. Jungnickel, Gießen

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Hanfried Lenz, in Dankbarkeit gewidmet

Cuentan que Ulises, harto de prodigios,
Lloró de amor al divisar su Itaca
Verde y humilde. El arte es esa Itaca
De verde eternidad, no de prodigios.
(Jorge Luis Borges)

Die endliche Geometrie kann, grob gesprochen, als der Schnitt von Algebra, Geometrie, Kombinatorik und Zahlentheorie beschrieben werden. Hieraus werden bereits einige ihrer Wurzeln sichtbar:

1. Die endlichen affinen und projektiven Geometrien sind Analoga der entsprechenden klassischen Strukturen; außerdem sind endliche Ebenen als Beispiele bei axiomatischen Untersuchungen in den Grundlagen der Geometrie wichtig. Diese Standpunkte finden sich wohl zuerst bei Veblen/Bussey [116] bzw. bei Veblen/Wedderburn [117].

2. Endliche projektive und affine Ebenen können auch rein kombinatorisch als spezielle Blockpläne definiert werden; Blockpläne tauchen bereits um 1845 zunächst im Rahmen der Unterhaltungsmathematik auf, vgl. Woolhouse [129], Kirkman [76] und Steiner [112].

3. In jüngerer Zeit werden auch (analog zum Kleinschen Standpunkt) die Transformationsgruppen endlicher Geometrien studiert, was oft wesentlich zum besseren Verständnis gewisser endlicher Gruppen beiträgt. Die bahnbrechenden Arbeiten in dieser Richtung sind die von Witt [126], [127], der so die Mathieugruppen verständlicher machte (für neuere Darstellungen dieses Themas mit Hilfe der endlichen Geometrie siehe etwa Lüneburg [78] und Beth/Jungnickel [4]). Auch bei der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen haben geometrische Betrachtungen eine wichtige Rolle gespielt, vgl. Gorenstein [51].

---

*) Dies ist eine ausführliche Ausarbeitung eines Vortrages, der auf der DMV-Tagung in Köln (1983) gehalten wurde.

Hinzu kommen als Motivationen zahlreiche Verbindungen zu den Anwendungen. Wir erwähnen hier nur zwei Aspekte:

4. Die eigentliche Entwicklung der Blockplan-Theorie hat ihren Ausgangspunkt in statistischen Anwendungen; die bahnbrechenden Arbeiten hierzu stammen von Yates [130], [131], und Bose [12]; man vergleiche auch die Bücher von Fisher [48] und Raghavarao [95].

5. In neuerer Zeit sind insbesondere die Zusammenhänge zur Nachrichtentechnik und Datenverarbeitung von großer Bedeutung. Z. B. hat Pless [94] als erste die Beziehungen zwischen den Witt-Designs, den Mathieugruppen und den Golay-Codes beschrieben (siehe auch [4]). Wir erwähnen noch das fundamentale Lehrbuch der Codierungstheorie von MacWilliams/Sloane [81], sowie Harwit/Sloane [56]. Eine elementare Einführung in die Zusammenhänge zwischen endlicher Geometrie, linearer Algebra, Gruppentheorie, Codierungstheorie und Darstellungstheorie am Beispiel der projektiven Ebene der Ordnung 2 findet sich bei Beth/Jungnickel [5].

In diesem Übersichtsartikel möchte ich die angesprochenen Themen anhand der Theorie der Lateinischen Quadrate erläutern. Die speziellen Aspekte der eben durchgeführten Überlegungen sind hier wie folgt:

1. Den Lateinischen Quadraten entspricht geometrisch eine Verallgemeinerung der affinen (bzw. projektiven) Ebenen, die sogenannten Netze (vgl. § 1).

2. Die rein kombinatorische Definition der Lateinischen Quadrate (als einer neuen Art magischer Quadrate) hat bereits Euler [47] im Jahre 1782 gegeben.

3. Abgesehen von den Translationsnetzen (die die Translationsebenen verallgemeinern) ist über Gruppen von Netzen nicht allzuviel bekannt.

4. Für Anwendungen der Lateinischen Quadrate in der Statistik vergleiche man Yates [130] und Dénes/Keedwell [38].

5. Zusammenhänge zur Codierungstheorie sind bei Dénes/Keedwell beschrieben.

Das Buch von Dénes/Keedwell umfaßt über 500 Seiten und ist durchaus nicht vollständig; es dürfte daher klar sein, daß ich mich im folgenden auf die exemplarische Erörterung einiger weniger Themen beschränken muß. Insbesondere bleiben die Anwendungen ganz ausgeklammert. Ferner sage ich nichts über affine Ebenen, sondern nur über echte Netze; die Theorie der affinen Ebenen (bzw. der projektiven Ebenen) ist gut entwickelt und wohlbekannt (vgl. etwa die Bücher von Pickert [91], Hughes/Piper [61], Lüneburg [79] und Kallaher [74]). Zudem erscheint mir die Theorie der endlichen Ebenen in einer Phase der Konsolidierung befindlich; wesentliche Durchbrüche sind wohl in den letzten Jahren nicht mehr erzielt worden (für topologische Ebenen sieht die Lage dagegen ganz anders aus). Auch das Literaturverzeichnis enthält nur einen kleinen Bruchteil der möglichen Zitate; bereits Dénes/Keedwell haben 1974 eine Bibliographie von ca. 50 Seiten benötigt! Weiterhin werde ich nur gelegentlich auf die historische Entwicklung des betrachteten Gebiets eingehen. Für ausführlichere Informationen über das betrachtete Thema sei der Leser auf Dénes/Keedwell [38] sowie (auch für die endliche Geometrie im allgemeinen) auf Dembowski [37] und Beth/Jungnickel/Lenz [6] verwiesen.

Im Rest dieses Artikels werde ich die folgenden Einzelthemen behandeln:
1. Grundlagen; 2. Existenzsätze; 3. Komplettierung; 4. Geometrische Konfigurationen; 5. Translationsnetze; 6. Gruppen auf TD's und Netzen; 7. Verallgemeinerungen; 8. Ausblick und einige offene Fragen.

1 Grundlagen

Im ersten Teil dieses Abschnitts will ich die kombinatorisch-algebraische und im zweiten Teil die geometrische Seite meines Themas einführen.

1.1 Lateinische Quadrate, Quasigruppen und OA's

Die folgende Definition dürfte den meisten Lesern vertraut sein.

1.1.1 **Definition.** Es sei S eine Menge von s *Symbolen.* Ein *lateinisches Quadrat* über S ist eine (s x s)-Matrix Q mit Einträgen aus S, für die jedes Symbol in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt. Zwei lateinische Quadrate $Q = (q_{ij})$ und $Q' = (q'_{ij})$ über S heißen *orthogonal*, wenn gilt:

$$\{(q_{ij}, q'_{ij}) : i, j = 1, \ldots, s\} = S \times S.$$

Sind $Q_1, \ldots, Q_n$ lateinische Quadrate über S und sind Q_i und Q_j für $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ stets orthogonal, so sprechen wir von einer Menge von n *paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten* der *Ordnung* s, kurz von n MOLS (für „mutually orthogonal Latin squares“) der Ordnung s.

1.1.2 **Beispiele.** Im allgemeinen wählt man $S = \{1, \ldots, s\}$.

2 MOLS der Ordnung 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3 MOLS der Ordnung 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Dagegen gibt es zu dem folgenden Quadrat der Ordnung 4 kein orthogonales Quadrat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Der Leser wird bemerkt haben, daß jeweils das erste angegebene Quadrat einfach eine Gruppentafel ist. Dies muß nicht notwendig der Fall sein; jedoch kann jedes lateinische Quadrat als Verknüpfungstafel bzgl. einer Multiplikation auf S aufgefaßt werden, für die Gleichungen der Form ax = b bzw. ya = b stets eindeutig lösbar sind. Derartige algebraische Strukturen heißen *Quasigruppen*; spezielle Typen von Quasigruppen sind vielfach untersucht worden, vgl. Bruck [22] und Dénes/Keedwell [38]. Zwei Quasigruppen G und G′ auf derselben Trägermenge S heißen *orthogonal*, wenn ihre Verknüpfungstafeln orthogonal sind. Wir haben also trivialerweise das folgende Resultat.

1.1.3 **Lemma.** Genau dann gibt es n MOLS der Ordnung s, wenn es n paarweise orthogonale Quasigruppen auf einer s-elementigen Trägermenge gibt.

Wir werden im nächsten Abschnitt eine Anwendung dieser „algebraischen" Interpretation kennenlernen, siehe 2.3.6. Als nächstes betrachten wir eine kombinatorische Umformulierung der lateinischen Quadrate.

1.1.4 **Definition.** Es sei wieder S eine s-elementige Symbolmenge. Ein OA(s, r) (für „orthogonal array") ist eine $(r \times s^2)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit Einträgen aus S, für die gilt:

$$\{(a_{ij}, a_{kj}) : j = 1, \ldots, s^2\} = S \times S$$

für je zwei verschiedene Indizes i und k mit $i, k \in \{1, \ldots, r\}$.

Jedes OA kann in eine „Normalform" gebracht werden: Da die ersten beiden Zeilen jedes geordnete Paar von Elementen von S genau einmal enthalten, können wir nach Spaltenpermutation annehmen, daß die ersten beiden Zeilen von A wie folgt aussehen (mit $S = \{1, \ldots, s\}$):

$$\begin{matrix} 1 \ldots 1 & 2 \ldots 2 & \ldots & s \ldots s \\ 1 \ldots s & 1 \ldots s & \ldots & 1 \ldots s \end{matrix}$$

Man sieht dann leicht, daß man aus jeder weiteren Zeile ein lateinisches Quadrat über S erhält, indem man die s Blöcke von je s Einträgen in dieser Zeile als die Zeilen des Quadrates wählt. Es sei also für $i = 1, \ldots, r-2$ die Matrix Q_i definiert durch

$$Q_i = \begin{pmatrix} a_{i+2,1} & \cdots & a_{i+2,s} \\ a_{i+2,s+1} & \cdots & a_{i+2,2s} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{i+2,s^2-s+1} & \cdots & a_{i+2,s^2} \end{pmatrix}.$$

Dann sind $Q_1, \ldots, Q_{r-2}$ paarweise orthogonal. Umgekehrt erhält man aus r − 2 MOLS über S durch „Hintereinanderschreiben" der Zeilen ein OA(s, r − 2), welches durch Hinzufügen der beiden Zeilen

$$\begin{matrix} 1 \ldots 1 & 2 \ldots 2 & \ldots & s \ldots s \\ 1 \ldots s & 1 \ldots s & \ldots & 1 \ldots s \end{matrix}$$

zu einem OA(s, r) erweitert werden kann. Es gilt also:

1.1.5 **Lemma.** Ein OA(s, r) ist äquivalent zu r − 2 MOLS der Ordnung s.

Es sei jetzt A ein OA(s, r), dessen erste beiden Zeilen wie beschrieben normalisiert sind. Offenbar überführt eine Permutation der Symbole $\{1, \ldots, s\}$ in einer gegebenen Zeile A wieder in ein OA. Daher kann man noch erreichen, daß die ersten s

Einträge der Zeilen 3, ..., r jeweils 1 ... s sind. Dann enthält aber jedes Paar von Zeilen, bei dem die erste Zeile nicht vorkommt, bereits alle Symbolpaare (1, 1), ..., (s, s). Somit müssen in der (s + 1)-ten Spalte die Einträge der Zeilen 2, ..., r paarweise verschieden sein. Insbesondere gilt sicherlich $r - 1 \leqslant s$. Wir haben also bewiesen:

1.1.6 **Lemma.** Es gibt höchstens s − 1 MOLS der Ordnung s.

1.1.7 **Notation.** Für eine natürliche Zahl sei N(s) die Maximalzahl von MOLS der Ordnung s. Per Konvention setzt man $N(0) = N(1) = \infty$.

1.1.6 schreibt sich dann als $N(s) \leqslant s - 1$. Trotz größter Anstrengungen ist über die Funktion N(.) wenig bekannt; wir werden diese Frage in Abschnitt 2 betrachten. Zunächst wollen wir uns aber der geometrischen Interpretation von MOLS zuwenden.

1.2 Netze und TD's

Unendliche Analoga der jetzt zu behandelnden „Netze“ wurden Mitte der zwanziger Jahre von Blaschke, Thomsen und Reidemeister unter dem Namen „Gewebe“ eingeführt und für topologische Untersuchungen in der Differentialgeometrie verwendet (siehe etwa Blaschke/Bol [10] und Blaschke [9]). Endliche Netze (mit 3 Parallelklassen) sind wohl zuerst 1929 von Reidemeister [97] betrachtet worden.

1.2.1 **Definition.** Ein *Netz* der *Ordnung* s und des *Grades* r (kurz: ein (s, r)-Netz) besteht aus einer nicht-leeren Menge P von *Punkten* und einer Menge $\mathcal{G}$ von Teilmengen von P, den *Geraden*. Ferner gelten folgende Axiome:

(N_1) Je zwei Punkte haben höchstens eine Verbindungsgerade.

(N_2) Es gibt eine Äquivalenzrelation auf der Geradenmenge $\mathcal{G}$ (die *Parallelität* $\parallel$), für die jede Äquivalenzklasse die Punktmenge P zerlegt. Mit anderen Worten: $\parallel$ erfüllt das euklidische Parallelenaxiom.

(N_3) Nichtparallele Geraden schneiden sich.

(N_4) Es gibt $r \geqslant 3$ Parallelklassen und mindestens eine Parallelklasse enthält genau s Geraden.

1.2.2 **Lemma.** Es sei $\mathcal{N} = (P, \mathcal{G})$ ein (s, r)-Netz. Dann hat $\mathcal{N}$ genau s^2 Punkte, jeder Punkt ist auf genau r Geraden, jede Gerade hat genau s Punkte und jede Parallelklasse enthält genau s Geraden.

B e w e i s. Sei v die Zahl aller Punkte und seien 3 Parallelklassen mit jeweils s, s′ und s″ Geraden gegeben. Da jedes Paar nichtparalleler Geraden genau einen Schnittpunkt hat, folgt wegen (N_2) leicht $v = ss' = ss'' = s's''$. Daraus ergibt sich sofort $v = s^2$ und $s = s' = s''$.
Der Rest der Behauptung ist nun eine leichte Übung.

1.2.3 **Beispiel.** Jede affine Ebene der Ordnung s ist ein (s, s + 1)-Netz. Wählt man aus einer affinen Ebene der Ordnung s beliebige $r \geqslant 3$ Parallelklassen aus, so erhält man ein (s, r)-Netz. Wir werden bald sehen, daß aber nicht jedes Netz so erhalten werden kann, nicht einmal, wenn eine Ebene der entsprechenden Ordnung existiert.

Der Leser zeige als Übungsaufgabe, daß jedes (s, s + 1)-Netz eine affine Ebene ist. (Hinweis: Man zähle die Zahl der mit einem gegebenen Punkt verbundenen Punkte.) Nun zum Zusammenhang zwischen Netzen und lateinischen Quadraten:

1.2.4 Lemma. Ein OA(s, r) existiert genau dann, wenn es ein (s, r)-Netz gibt.

B e w e i s. Sei $\mathcal{N}$ ein (s, r)-Netz mit Parallelenklassen $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_r$. Ferner sei $S = \{1, \ldots, s\}$. Wir numerieren die Geraden in jedem $\mathcal{G}_i$ beliebig mit den Zahlen in S. Ferner seien $p_1, \ldots, p_{s^2}$ die Punkte von $\mathcal{N}$. Die Matrix $A = (a_{ij})$ $(i = 1, \ldots, r;$ $j = 1, \ldots, s^2)$ wird nun wie folgt definiert: $a_{ij} = k$ genau dann, wenn der Punkt p_j auf der k-ten Geraden in $\mathcal{G}_i$ liegt. Da die Punkte bijektiv den Geradenpaaren (G, H) mit $G \in \mathcal{G}_i$ und $H \in \mathcal{G}_j$ entsprechen (für $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, r$), erhält man so ein OA(s, r). Diese Konstruktion läßt sich leicht umkehren.

In 1.1.2 haben wir ein lateinisches Quadrat der Ordnung 4 angegeben, zu dem es kein orthogonales Quadrat gibt. Mit 1.1.5 und 1.2.4 erhält man hieraus ein (4,3)-Netz, das nicht Teil einer affinen Ebene ist. Fragen der „Einbettbarkeit" oder „Erweiterbarkeit" von Netzen werden wir in Abschnitt 3 betrachten. Mit 1.1.3 und 1.2.4 hat man allgemein die Möglichkeit, jeder beliebigen Quasigruppe ein Netz mit 3 Parallelklassen zuzuordnen. Diese algebraischen Strukturen erfahren damit eine geometrische Deutung, die interessante Konsequenzen haben kann. Z. B. ist die volle Automorphismengruppe (oder auch Gruppen spezieller Automorphismen) eine interessante Invariante für die betrachtete Quasigruppe. Sehr schöne Ergebnisse in dieser Richtung sind kürzlich von Barlotti/Strambach [2] erzielt worden, vgl. auch Strambach [113]. Als erster hat Reidemeister [97] mit einer beliebigen Gruppe ein Netz assoziiert; weitere wichtige Untersuchungen dieser Art stammen von Thomsen [115], Bol [11] und Baer [1]. Ich werde einige dieser Ergebnisse in Abschnitt 4 behandeln. Manchmal ist es vorteilhaft, statt der Netze die „dualen" Strukturen zu betrachten, die sogenannten TD's. Man erhält diese, indem man in den Axiomen die Rollen von Punkten und Geraden vertauscht (man muß dann natürlich auch den Begriff der Parallelität entsprechend neufassen). Wir kombinieren gleich 1.2.1 und 1.2.2:

1.2.5 Definition. Ein (s, r)-TD (kurz für „transversal design") besteht aus sr *Punkten*, die in r *Punktklassen* von je s Punkten aufgeteilt sind, und aus s^2 *Geraden*. Punkte in derselben Punktklasse sind unverbunden, während Punkte in verschiedenen Klassen genau eine Verbindungsgerade haben. Jede Gerade enthält einen Punkt aus jeder Punktklasse.

Wir bemerken schließlich noch, daß ein (s, r)-Netz in der Sprache der Design-Theorie nichts anderes als ein affines 1-Design $S_r(1, s; s^2)$ ist, vgl. Beth/Jungnickel/Lenz [6]. Fassen wir schließlich noch einmal alle unsere äquivalenten Darstellungen von lateinischen Quadraten zusammen:

1.2.6 Satz. Die Existenz jeder der folgenden Strukturen impliziert die aller anderen:

(i) $r - 2$ MOLS der Ordnung s;

(ii) $r - 2$ paarweise orthogonale Quasigruppen der Ordnung s;

(iii) ein OA(s, r);
(iv) ein (s, r)-Netz;
(v) ein affines $S_r(1, s; s^2)$;
(vi) ein (s, r)-TD.

2 Existenzsätze

In diesem Abschnitt betrachten wir das Existenzproblem für lateinische Quadrate, d. h. wir untersuchen die Funktion N(.) aus 1.1.7. Uns interessieren hier untere Schranken; außer der trivialen oberen Schranke $N(s) \leqslant s - 1$ gibt es nur einen allgemeinen Nichtexistenzsatz, den wir im Zusammenhang mit Einbettungsfragen im nächsten Abschnitt betrachten werden.

2.1 Direkte Konstruktionen

Für kleine Werte von s kann man Existenzaussagen nur durch direkte Konstruktionen gewinnen; wir werden in den Abschnitten 2.2 bis 2.4 für größere Werte von s dann mit Gewinn rekursive Methoden heranziehen.
Sei zunächst s > eine Primzahlpotenz. Dann gibt es bekanntlich eine affine Ebene der Ordnung s, nämlich die affine Ebene über dem Körper GF(s) mit s Elementen. Nach 1.2.3 und 1.2.6 folgt also $N(s) \geqslant s - 1$ und wegen 1.1.6:

2.1.1 **Satz.** Es gilt $N(s) = s - 1$ für Primzahlpotenzen s.

Wir geben gleich noch einen anderen Beweis für 2.1.1. Dazu benötigen wir einen weiteren Begriff, der von vielen Autoren unabhängig entdeckt wurde. Zum ersten Mal ist er wohl bei Bose/Bush [13] aufgetreten.

2.1.2 **Definition.** G sei eine additiv geschriebene Gruppe der Ordnung s. Eine (s, r; G)-Differenzenmatrix über G ist eine (r x s)-Matrix $D = (d_{ij})$ mit Einträgen aus G, für die gilt:

$$\{d_{hj} - d_{ij} : j = 1, \ldots, s\} = G \quad \text{für alle} \quad h, i = 1, \ldots, r \quad \text{mit} \quad h \neq i.$$

Die Differenz zweier beliebiger Zeilen von D enthält also jedes Element von G genau einmal.

2.1.3 **Satz.** Die Existenz einer (s, r; G)-Differenzenmatrix impliziert $N(s) \geqslant r - 1$.

B e w e i s. Es sei $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$. Man sieht unmittelbar ein, daß $(D + g_1, \ldots, D + g_s)$ ein OA(s, r) ist. Aber dieses OA kann durch die Zeile $(g_1 \ldots g_s \ldots g_1 \ldots g_s)$ zu einem OA(s, r + 1) erweitert werden.

Wegen des Distributivgesetzes ist offenbar die Multiplikationstafel von GF(q) eine (q, q; (GF(q), +))-Differenzenmatrix. Mit 2.1.3 liefert dies den angekündigten Alternativbeweis für 2.1.1. Wir nennen einige weitere Beispiele:

2.1.4 **Beispiele.** a) Die folgende $(12,6; \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_6)$-Differenzenmatrix stammt von Dulmage/Johnson/Mendelsohn [46] (wir schreiben kurz xy statt (x, y)):

$$D = \begin{pmatrix} 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 01 & 02 & 03 & 04 & 05 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 00 & 03 & 10 & 01 & 13 & 15 & 02 & 12 & 05 & 04 & 11 & 14 \\ 00 & 12 & 01 & 15 & 05 & 13 & 03 & 14 & 02 & 11 & 10 & 04 \\ 00 & 04 & 15 & 14 & 02 & 11 & 12 & 10 & 13 & 01 & 03 & 05 \\ 00 & 10 & 12 & 02 & 11 & 01 & 13 & 15 & 04 & 14 & 05 & 03 \end{pmatrix}$$

b) Die Matrix $D = (A \quad -A \quad 0)$ ist eine $(15, 4; \mathbf{Z}_{15})$-Differenzenmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 12 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 14 & 10 & 7 & 13 & 4 \\ 10 & 6 & 1 & 11 & 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

(Schellenberg/van Rees/Vanstone [99]).

Näheres über Differenzenmatrizen findet man bei Beth/Jungnickel/Lenz [6, VIII. § 3 und X. § 12] sowie bei Jungnickel [64]. Interessante weitere Beispiele stammen von Mills [86]. Leider benötigt man in der Praxis für viele Werte von s wesentlich kompliziertere direkte Konstruktionen. Zwei besonders wichtige Verfahren stammen von Wilson [124] und von Wang [120]. Diese Verfahren benutzen ebenfalls Differenzenmethoden in geeigneten Gruppen und lassen sich gut mit Hilfe sogenannter „Quasi-Differenzenmatrizen" und „partieller Quasi-Differenzenmatrizen" beschreiben. Eine ausführliche Darstellung dieser Thematik einschließlich zahlreicher Beispiele findet der Leser in [6, VIII. § 7]. Wir wenden uns jetzt den rekursiven Methoden zu.

2.2 Der Satz von MacNeish

Die einfachste rekursive Konstruktion für lateinische Quadrate wurde im 1922 von MacNeish [80] angegeben.

2.2.1 **Satz.** Es gilt $N(ss') \geqslant \min \{N(s), N(s')\}$.

B e w e i s. Es seien $Q_1, \ldots, Q_r$ und $Q'_1, \ldots, Q'_r$ paarweise orthogonale Quasigruppen der Ordnungen s bzw. s'. Dann sind auch die direkten Produkte $Q_1 \times Q'_1, \ldots, Q_r \times Q'_r$ paarweise orthogonal.

2.2.2 **Korollar.** Es sei $s = q_1 \ldots q_n$ die Primzahlpotenzzerlegung von s. Dann gilt $N(s) \geqslant \min \{q_i - 1 : i = 1, \ldots, n\}$.

Lange Zeit war die in 2.2.2 angegebene Schranke das beste bekannte Ergebnis. MacNeish hatte vermutet, daß stets sogar Gleichheit in 2.2.2 gelten müßte (und in der Tat einen inkorrekten Beweis dafür publiziert). Insbesondere wäre hierin die Gültigkeit der berühmten *Eulerschen Vermutung* $N(s) = 1$ für $s \equiv 2 \bmod 4$ enthalten gewesen. Beide Vermutungen wurden um 1960 widerlegt. In 2.1.4 haben wir bereits Gegenbeispiele zur MacNeishschen Vermutung gesehen. Die Eulersche Vermutung ist in etwa so falsch, wie man es sich nur wünschen könnte, wie der folgende berühmte Satz von Bose/Shrikhande/Parker [15] zeigt, für den wir in 2.4.3 einen kurzen Beweis angeben werden.

2.2.3 **Satz.** Es gilt $N(s) \geqslant 2$ für $s \neq 2,6$.

Zum Beweis wurden neben direkten Konstruktionen vor allem rekursive Methoden herangezogen, in denen erstmals Blockpläne und Verallgemeinerungen von Blockplänen zur Konstruktion lateinischer Quadrate dienten. Diese Verfahren sollen im nächsten Teilabschnitt erläutert werden.

2.3 Die Konstruktion von Bose und Shrikhande

Wir benötigen zunächst eine Definition:

2.3.1 **Definition.** Es sei V eine v-elementige Punktmenge, $\mathcal{P}$ eine Zerlegung von V und $\mathcal{G}$ eine Menge von Teilmengen von V (die Elemente von $\mathcal{P}$ heißen *Punktklassen*[1]) und die von $\mathcal{G}$ *Geraden*). $\mathcal{D} = (V, \mathcal{G}, \mathcal{P})$ heißt ein GDD[K, L; v] (für „group divisible design"), wenn gilt:

(G_1) Je zwei Punkte aus verschiedenen Punktklassen haben genau eine Verbindungsgerade; je zwei Punkte aus derselben Punktklasse sind unverbunden.

(G_2) Es gilt $|G| \in K$ für jedes $G \in \mathcal{G}$ und $|P| \in L$ für jedes $P \in \mathcal{P}$.

Sind alle Elemente von $\mathcal{P}$ einelementig (also je 2 Punkte in V verbunden), so heißt $\mathcal{D}$ ein PBD oder genauer ein B[K; v] (für „pairwise balanced design"). Ist noch $K = \{k\}$ einelementig, erhält man einen *Blockplan* B[k; v].

2.3.2 **Beispiele.** a) Eine affine Ebene der Ordnung s ist ein $B[s; s^2]$. Eine projektive Ebene der Ordnung s ist ein $B[s + 1; s^2 + s + 1]$. Allgemeiner bilden die Punkte und Geraden eines endlichen affinen oder projektiven Raumes einen Blockplan.

b) Ein (s, k)-TD ist ein $GDD[\{k\}, \{s\}; ks]$, und umgekehrt.

c) Entfernt man aus einem B[k; v] einen Punkt und alle mit ihm inzidenten Geraden, so erhält man ein $GDD[\{k\}, \{k-1\}; v-1]$. Die Beispiele in a) liefern also die Existenz von $GDD[\{s\}, \{s-1\}; s^2-1]$ und von $GDD[\{s+1\}, \{s\}; s^2+s]$ für Primzahlpotenzen s.

Bevor wir das Verfahren von Bose und Shrikhande erläutern können, brauchen wir noch eine weitere Definition:

2.3.3 **Definition.** a) Eine *Parallelklasse* eines (s, r)-TD ist eine Menge von s Geraden, die die Punktmenge überdecken (und dann aus Anzahlgründen paarweise diesjunkt sein müssen).

b) Ein lateinisches Quadrat heißt *idempotent*, wenn es Verknüpfungstafel einer idempotenten Quasigruppe ist (d. h. einer Quasigruppe Q, in der $xx = x$ für alle $x \in Q$ gilt).

c) $N^*(s)$ sei die Maximalzahl von paarweise orthogonalen idempotenten lateinischen Quadraten der Ordnung s.

Der Leser möge sich als Übung von der Gültigkeit des folgenden Lemmas überzeugen.

---

[1]) In der Literatur findet sich unglücklicherweise häufig der Term „Gruppe" statt „Punktklasse", obwohl kein Zusammenhang zum algebraischen Gruppenbegriff besteht.

2.3.4 Lemma. Ein (s, r)-TD mit einer Parallelklasse existiert genau dann, wenn es $r - 2$ idempotente MOLS der Ordnung s gibt.

2.3.5 Korollar. Es gilt stets $N^*(s) \geqslant N(s) - 1$.

B e w e i s. Man entferne aus einem (s, r)-TD eine Punktklasse P; dann erhält man ein $(s, r - 1)$-TD und jeder Punkt in P bestimmt eine Parallelklasse dieses kleineren TD's. Die Behauptung folgt nun aus 2.3.4 und 1.2.6.

2.3.6 Satz (Bose/Shrikhande [14]). Es sei ein GDD[K, L; v] $\mathcal{D}$ gegeben. Wenn für jedes $k \in K$ und für jedes $\ell \in L$ die Ungleichung $N^*(k) \geqslant n$ bzw. $N(\ell) \geqslant n$ gilt, so gilt auch $N(v) \geqslant n$. Ist $\mathcal{D}$ ein B[K; v], so gilt sogar $N^*(v) \geqslant \min\{N^*(k) : k \in K\}$.

B e w e i s. Wir wollen hier den etwas technischen Beweis für den allgemeinen Fall nicht durchführen und verweisen z. B. auf Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. 1.1]. Der Spezialfall von PBD's erlaubt jedoch einen transparenten Beweis über Quasigruppen. Nach Voraussetzung können wir auf jeder Geraden G von $\mathcal{D}$ paarweise orthogonale idempotente Quasigruppen $Q_1^G, \ldots, Q_n^G$ erklären. Wir definieren nun Operationen $o_1, \ldots, o_n$ auf der gesamten Punktmenge wie folgt: Es sei stets $x o_i x = x$; für verschiedene Punkte y und z sei $y o_i z$ das Produkt von y mit z in der Quasigruppe Q_i^G, wobei G die eindeutige Verbindungsgerade von y und z sei. Es ist nicht schwer einzusehen, daß man so n paarweise orthogonale idempotente Quasigruppen $Q_1, \ldots, Q_n$ erhält.

2.3.7 Beispiele. a) Nach 2.3.2.c) gibt es für jede Primzahlpotenz q ein $GDD[\{q\}, \{q-1\}; q^2 - 1]$. Nach 2.3.3 gilt also $N(q^2 - 1) \geqslant \min\{N^*(q), N(q-1)\} \geqslant N(q-1)$, da nach 2.1.1 und 2.3.5 $N^*(q) \geqslant N(q) - 1 = q - 2 \geqslant N(q-1)$ ist. Z. B. erhält man so $N(24) \geqslant 3$ und $N(80) \geqslant 7$.

b) Entfernen von 3 nicht auf einer Geraden gelegenen Punkten eines B[k; v] liefert ein $GDD[\{k, k-1\}, \{1, k-2\}; v-3]$, also $N(v-3) \geqslant \min\{N^*(k), N^*(k-1), N(k-2)\}$. Wählt man die projektive Ebene der Ordnung 4 bzw. 8 für unser B[k; v], erhält man $N(18) \geqslant 2$ und $N(70) \geqslant 6$; aus der affinen Ebene der Ordnung 5 bzw. 9 ergibt sich $N(22) \geqslant 2$ und $N(78) \geqslant 6$.

c) Die projektive Ebene der Ordnung q liefert $N^*(q^2 + q + 1) \geqslant N^*(q + 1)$, z. B. $N^*(21) \geqslant 3$, $N^*(57) \geqslant 6$.

Auch rekursive Konstruktionen mit Verwendung von Differenzen- oder Quasidifferenzenmatrizen sind sehr nützlich. So kann man etwa Beispiel 2.3.7.c zu $N(q^2 + q + 1) \geqslant N(q + 1)$ für Primzahlpotenzen q verfeinern, ein weiteres Resultat von Bose/Shrinkhande [14]: der einfachste Beweis dafür dürfte Differenzenmatrizen verwenden. Man vergleiche etwa Beth/Jungnickel/Lenz [6, IX. § 1] und Jungnickel [64], [66] für Beispiele derartiger rekursiver Verfahren. Schließlich sei noch bemerkt, daß 2.3.6 zeigt, daß die Menge der $v \in \mathbf{N}$, für die eine Menge von n idempotenten MOLS existiert, im Sinne der Wilsonschen Theorie PBD-abgeschlossen ist, vgl. Wilson [121], [122], [125]. Der nächste wesentliche Fortschritt in den rekursiven Methoden wurde 1974 von Wilson [123] erzielt und soll im folgenden skizziert werden.

2.4 Wilsons Konstruktion

Die folgende Konstruktion von Wilson ist recht kompliziert, aber zum Verständnis neuerer Entwicklungen unentbehrlich. Für den Beweis sei der Leser auf Beth/Jungnickel/Lenz [6, X.3.1] verwiesen.

2.4.1 **Satz** (Wilson [123]). Es sei $\mathcal{D} = (V, \mathcal{G}, \mathcal{P})$ ein $(s, k + \ell)$-TD mit $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_\ell\}$. Ferner sei T eine t-Teilmenge von $Q_1 \cup \ldots \cup Q_\ell$. Für jede Gerade $G \in \mathcal{G}$ sei $u_G := |G \cap T|$. Ferner seien die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Es gibt ein (t_i, k)-TD mit $t_i := |T \cap Q_i|$ für $i = 1, \ldots, \ell$.
(ii) Es gibt ein $(m + u_G, k)$-TD mit u_G paarweise disjunkten Blöcken für jede Gerade G.

Dann gibt es auch ein $(ms + t, k)$-TD.

Wir werden zwei Anwendungen als Beispiele durchführen. Zunächst:

2.4.2 **Korollar.** Es sei $0 \leqslant t \leqslant s$. Dann gilt für jede natürliche Zahl m:

$$N(ms + t) \geqslant \min \{N(m), N(m + 1), N(s) - 1, N(t)\}.$$

B e w e i s. Es sei $k - 2$ das in der Behauptung genannte Minimum. Dann gibt es also ein $(s, k + 1)$-TD. Wir wenden 2.4.1 mit $\ell = 1$ an und wählen dazu irgendeine t-Teilmenge von Q_1 als T. Dann sind die beiden Bedingungen in 2.4.1 nach Voraussetzung erfüllt; man beachte dabei, daß hier stets $u_G = 0$ oder 1 ist.

2.4.3 **Beispiel.** Es sei $s \equiv 1, 5, 7, 9, 11, 13$ oder 17 mod 18. Mit 2.2.2 folgt $N(s) \geqslant 4$. Sei ferner $t \leqslant s$ ungerade, also nach 2.2.2 $N(t) \geqslant 2$. Mit $m = 3$ erhalten wir aus 2.4.2 dann $N(3s + t) \geqslant 2$, z. B. $N(18) \geqslant 2$ wegen $18 = 3 \cdot 5 + 3$ und $N(22) = N(3 \cdot 7 + 1) \geqslant 2$. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß man so $N(4n + 2) \geqslant 2$ für alle $n \geqslant 4$ erhalten kann. Zusammen mit 2.2.2 liefert das einen sehr kurzen Beweis für Satz 2.2.3, allerdings mit Ausnahme der Werte $s = 10$ und 14, die man dann noch durch direkte Konstruktion lösen muß.

Dieses Beispiel dürfte bereits klarmachen, wie stark der Wilsonsche Satz ist. Ähnlich wie 2.4.2 zeigt man noch das folgende Korollar. (Der Leser überzeuge sich, daß jedes TD zwei disjunkte Blöcke enthält: dies wird für die Bedingung (ii) aus 2.4.1 benötigt.)

2.4.4 **Korollar.** Es sei $0 \leqslant t \leqslant s$ und $0 \leqslant u \leqslant s$. Dann gilt für jede natürliche Zahl m:

$$N(ms + t + u) \geqslant \min \{N(m), N(m + 1), N(m + 2), N(s) - 2, N(u), N(t)\}.$$

2.4.5 **Übung.** Man zeige $N(51) \geqslant 4$, $N(62) \geqslant 4$, $N(58) \geqslant 5$ sowie $N(s) \geqslant 6$ für $s = 84, 85, 86, 87, 92, 93, 94, 95, 98$ und $N(96) \geqslant 7$.

Wir erwähnen schließlich noch die zur Zeit bekannten Resultate über die Existenz von k orthogonalen lateinischen Quadraten für $k \leqslant 6$. Alle diese Ergebnisse können mit dem Wilsonschen Satz 2.4.1 und einigen direkten Konstruktionen für kleine Werte von s bewiesen werden. Die Beweise sind leider sämtlich recht langwierig; eine verhältnismäßig einfache Darstellung dieser Ergebnisse findet der Leser in Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 3 und § 4].

2.4.6 Satz

(i) Es gilt $N(s) \geqslant 3$ für $s \neq 2, 6, 10, 14$ (Wang [120]),
(ii) Es gilt $N(s) \geqslant 4$ für $s \geqslant 53$ (Guérin [52]).
(iii) Es gilt $N(s) \geqslant 5$ für $s \geqslant 63$ (Hanani [54]).
(iv) Es gilt $N(s) \geqslant 6$ für $s \geqslant 77$ (Wilson [124], Wojtas [128]).

2.5 Die Zahlen n_k

Mit Wilsons Methode ist der folgende Satz von Chowla/Erdös/Straus [34] ebenfalls leicht zu beweisen, vgl. Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 5].

2.5.1 Satz. Es gilt $N(s) \to \infty$ für $s \to \infty$.

Genauer konnten Chowla, Erdös und Straus zeigen, daß für hinreichend große s stets $N(s) \geqslant s^a$ mit $a = 1/91$ gilt. Der Wert für a wurde danach mehrfach verbessert; der beste zur Zeit bekannte Exponent ist $a = 1/14{,}8$ (Beth [3]). Diese Resultate benutzen die Siebmethoden der Zahlentheorie und Satz 2.4.1. Wegen Satz 2.5.1 ist die folgende Definition möglich:

2.5.2 Definition. Für $k \in \mathbb{N}$ sei n_k die größte natürliche Zahl mit $N(n_k) < k$.

Die Ergebnisse aus 2.2.3 und 2.4.6 lassen sich dann als $n_2 = 6$, $n_3 \leqslant 14$, $n_4 \leqslant 52$, $n_5 \leqslant 62$ und $n_6 \leqslant 76$ schreiben. Wir geben im folgenden alle weiteren bekannten Resultate an. Zum Nachweis dieser Sätze werden komplizierte Verallgemeinerungen der Wilsonschen Konstruktion 2.4.1 benötigt. Außerdem braucht man weitere direkte Konstruktionen; auch scheint die Verwendung eines Computers unvermeidlich.

2.5.3 Satz (Brouwer [19], Brouwer/van Rees [20]). Es gilt $n_7 \leqslant 780$, $n_8 \leqslant 4738$, $n_9 \leqslant 5842$, $n_{10} \leqslant 7222$, $n_{11} \leqslant 7478$, $n_{12} \leqslant 9286$, $n_{13} \leqslant 9476$, $n_{14} \leqslant n_{15} \leqslant 10632$, $n_{30} \leqslant 65278$.

Eine Tabelle mit den besten bekannten unteren Schranken für N(s) mit $s \leqslant 100$ findet sich im Anhang von Beth/Jungnickel/Lenz [6]. Schranken für $s \leqslant 10000$ findet man bei Brouwer [17]; seit dieser Tabellierung haben sich einige Verbesserungen ergeben, vgl. Brouwer [18], [19], Brouwer/van Rees [20] und Jungnickel [66].
Insgesamt kann man wohl feststellen, daß seit 1960 deutliche quantitative Verbesserungen in den uns bekannten Schranken erzielt worden sind, wobei die Wilsonsche Arbeit [123] von 1974 als weiterer Durchbruch gelten kann. Trotzdem bleibt der Grad unserer Unkenntnis über die genaueren Eigenschaften von N(.) beachtlich; z. B. ist der exakte Wert für N(s) nur für Primzahlpotenzen s und für $s = 6$ bekannt. Schon Tarry (um 1900) zeigte $N(6) = 1$; ein einfacher Beweis dafür stammt von Betten [7], vgl. auch Beth/Jungnickel/Lenz [6, XII. § 13].

3 Komplettierung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, wann ein Netz in ein „größeres“ Netz (möglichst in eine affine Ebene) „eingebettet“ werden kann.

3.1 Der Brucksche Komplettierungssatz

Der in der folgenden Definition eingeführte Parameter d gibt ein Maß dafür, wie weit ein Netz davon entfernt ist, eine affine Ebene zu sein:

3.1.1 **Definition.** Die *Defizienz* eines (s, r)-Netzes ist die Zahl $d = s + 1 - r$.

Die affinen Ebenen sind also gerade die Netze der Defizienz 0.

3.1.2 **Definition.** Ein (s, r)-Netz heißt t-*erweiterbar*, wenn es möglich ist, die Geradenmenge um st Geraden so zu erweitern, daß das Resultat ein (s, r + t)-Netz ist. Ist ein Netz d-erweiterbar für die Defizienz d, heißt es *komplettierbar* (oder *einbettbar*).

Man könnte vermuten, daß einerseits Netze mit sehr kleinem d komplettierbar sein sollten (eine affine Ebene sollte rekonstruierbar sein, wenn man nur sehr wenige Parallelklassen wegläßt) und daß andererseits Netze mit sehr kleinem r (also sehr großem d) mindestens 1-erweiterbar sein sollten (zu jedem Punkt gibt es noch sehr viele unverbundene Punkte, also eine große „Auswahl" für neue Geraden). Die erste dieser Vermutungen ist die Aussage des berühmten Komplettierungssatzes von Bruck [23], den wir gleich beschreiben werden. Die zweite Vermutung ist dagegen falsch, wie wir im Abschnitt 3.3 sehen werden.

3.1.3 **Satz** (Bruckscher Komplettierungssatz). Das Polynom p sei definiert durch $p(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x$. Dann ist jedes (s, r)-Netz der Defizienz d komplettierbar, falls $p(d - 1) < s$ ist.

Der Beweis benutzt graphentheoretische Methoden und ist recht umfangreich. Der interessierte Leser sei auf die Originalarbeit von Bruck [23] oder auf [6, X. § 7] verwiesen. Nach 3.1.3 ist z. B. jedes Netz der Defizienz 1 komplettierbar und jedes Netz der Defizienz 2 für $s > 4$, der Defizienz 3 für $s > 23$, etc. Kombiniert man 3.1.3 mit dem bekannten Nichtexistenzsatz von Bruck und Ryser [25] für projektive Ebenen, so erhält man die einzige bekannte nicht-triviale obere Schranke für die Funktion N(.):

3.1.4 **Korollar.** Es sei s eine natürliche Zahl, für die es keine projektive Ebene der Ordnung s gibt, z. B. $s \equiv 1$ oder 2 mod 4 und s nicht die Summe zweier Quadrate. Dann gilt $N(s) \leqslant s - d - 2$, wobei d die größte natürliche Zahl mit $p(d - 1) < s$ sei.

Z. B. ergibt sich $N(s) \leqslant s - 4$ für s = 6, 14, 21, 22 und $N(s) \leqslant s - 5$ für s = 30, 33, 38, 42, 46, 54, 57, 62, ... Als nächstes stellt sich natürlich die Frage nach der Eindeutigkeit einer eventuellen Komplettierung. Dazu benötigen wir einen weiteren Begriff:

3.1.5 **Definition.** $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz. Eine *Transversale* von $\mathcal{D}$ ist eine Menge T von s Punkten, die jede Gerade von $\mathcal{D}$ in genau einem Punkt schneidet.

Offenbar sind die neuen Geraden einer t-Erweiterung eines Netzes Transversalen. Z. B. ist ein Netz genau dann 1-erweiterbar, wenn es eine Menge von s paarweise disjunkten Transversalen gibt. Wir kommen nun zur Eindeutigkeitsfrage, die ebenfalls von Bruck [23] beantwortet wurde.

3.1.6 Satz (Bruckscher Eindeutigkeitssatz). $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz der Defizienz d mit $s > (d-1)^2$. Dann schneiden sich je zwei Transversalen von $\mathcal{D}$ in höchstens einem Punkt und $\mathcal{D}$ hat höchstens sd Transversalen. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\mathcal{D}$ komplettierbar ist; in diesem Fall erhält man die Komplettierung durch Hinzunahme sämtlicher Transversalen. Insbesondere ist die Komplettierung, falls überhaupt möglich, eindeutig.

Der Beweis dieses Satzes ist ziemlich einfach und sei dem Leser überlassen. Schon Bruck [23] hat gezeigt, daß die Schranke in 3.1.6 bestmöglich ist; die Qualität der Schranke in 3.1.3 werden wir im Abschnitt 3.2 untersuchen. Netze mit $s = (d-1)^2$ sind von Ostrom [87] untersucht worden, der zeigte, daß ein derartiges Netz höchstens 2sd Transversalen hat und höchstens 2 nicht-isomorphe Komplettierungen gestattet. Der Fall der Gleichheit liefert genau die Theorie der Ableitungen projektiver Ebenen, vgl. etwa Hughes/Piper [61]. Eine noch allgemeinere Konstruktionsmethode für Ebenen ist die Theorie des „net replacement". Diese Ideen stammen sämtlich von Ostrom; sein Buch [89] ist eine gute Referenz hierfür. Aufgrund der Ergebnisse dieses Abschnitts bietet sich noch folgende nützliche Sprechweise an:

3.1.7 Definition. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz. $\mathcal{D}$ heißt ein Netz mit *kritischer* Defizienz, falls $s = (d-1)^2$ ist. $\mathcal{D}$ heißt ein Netz mit (*sehr*) *kleiner* Defizienz, falls $s > (d-1)^2$ gilt (bzw. falls $p(d-1) < s$ ist).

3.2 Maximale Netze mit kleiner Defizienz

In diesem Abschnitt betrachten wir, wie angekündigt, die Güte der Schranke in Satz 3.1.3. Zunächst eine Definition:

3.2.1 Definition. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz mit Defizienz $d \neq 0$. $\mathcal{D}$ heißt *transversalfrei*, wenn $\mathcal{D}$ keine Transversale besitzt. $\mathcal{D}$ heißt *maximal*, wenn $\mathcal{D}$ nicht 1-erweiterbar ist.

Man beachte, daß in dieser (nicht unbedingt üblichen) Terminologie die affinen Ebenen keine maximalen Netze sind, da sie d = 0 haben. Ich spreche in diesem Fall lieber von einem *vollständigen* Netz. Die bekannten Beispiele maximaler Netze mit kleiner Defizienz sind sogar sämtlich transversalfrei. Die ersten Beispiele stammen von Bruen [26], [27] (vgl. Jungnickel [71]) und werden aus Faserungen in projektiven Räumen konstruiert (siehe auch Abschnitt 5.4).

3.2.2 Satz. Für jede Primzahl p gibt es ein maximales Netz der Ordnung p^2 und der Defizienz p. Für Primzahlen $\geqslant 5$ gibt es auch ein maximales Netz der Ordnung p^2 und der Defizienz $p-1$.

Der Beweis dieses Satzes ist recht kompliziert, insbesondere für den Fall $d = p-1$; die Methode werde ich in § 5.4 beschreiben. Kürzlich hat Dow [39] für die erste Hälfte von 3.2.2 einen verblüffend einfachen und kurzen Beweis gegeben, der nur die Ableitung projektiver Ebenen benötigt und auf den Ideen von Ostrom [87] aufbaut. Gleichzeitig konnte Dow sogar noch Bruens Resultat verallgemeinern:

3.2.3 Satz (Dow). Für jede Primzahlpotenz q gibt es ein maximales Netz der Ordnung q^2 und der Defizienz q.

Dagegen ist eine Verallgemeinerung etwa auf Defizienz $q - 1$ bislang nicht bekannt. Die angegebenen Beispiele haben offenbar kleine Defizienz (für $s = q^2$ ist die kritische Defizienz $d = q + 1$). Allerdings liegt die Defizienz in der Größenordnung von $\sqrt{s}$, während die Schranke in 3.1.3 die Größenordnung $\sqrt[4]{s}$ hat. Trotzdem zeigen diese Beispiele, daß die Schranke in 3.1.3 zumindest einigermaßen vernünftig ist. Im Spezialfall $s = 9$ bzw. $s = 25$ von 3.2.2 wird die Schranke von 3.1.3 sogar bestmöglich. Es wäre jedoch sehr interessant, weitere Beispiele von Netzen (sehr) kleiner Defizienz zu finden. Insbesondere kennt man kein einziges Beispiel, falls s keine Primzahlpotenz ist: das relativ beste Beispiel ist dann $s = 12$, $d = 6$ (vgl. 2.1.4).

3.3 Maximale Netze mit großer Defizienz

In diesem Abschnitt geben wir einige Beispiele für maximale Netze mit sehr wenigen Parallelklassen an. Insbesondere gibt es viele transversalfreie Netze mit nur 3 Parallelklassen, wie der folgende Satz von Hall und Paige [53] zeigt.

3.3.1 **Satz.** $\mathcal{D}$ sei das (s, 3)-Netz, das zu der Gruppentafel einer Gruppe G der Ordnung s gehört. Wenn s gerade ist und die 2-Sylowgruppe von G zyklisch ist, dann ist $\mathcal{D}$ transversalfrei. Insbesondere gibt es für jede gerade Ordnung s ein maximales (s, 3)-Netz.

Eine wesentliche Verallgemeinerung (bei gleichzeitiger Beweisvereinfachung) dieses Satzes stammt von Drake [40]. Hall und Paige haben ihr Resultat ursprünglich mit sogenannten „complete mappings" formuliert. Eine ausführliche Diskussion dieser Fragen findet der Leser in Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 12]. Weitere maximale (s, 3)-Netze liefert das folgende Resultat von Mann [82]:

3.3.2 **Satz.** Für jede Zahl $s = 4n + 1$ gibt es ein lateinisches Quadrat der Ordnung s mit einem lateinischen Unterquadrat der Ordnung 2n. Jedes derartige Quadrat liefert ein maximales (s, 3)-Netz.

Den Beweis findet man in [6, X. 8.5]. Die Existenzfrage für maximale (s, 3)-Netze für $s \equiv 3 \bmod 4$ ist bislang ungelöst; ein Beispiel für $s = 7$ stammt von Sade [98]. Wir erwähnen noch die folgende Konstruktion von Bruck [21], die u. a. zeigt, daß es stets maximale Netze gibt, die die MacNeish-Schranke aus 2.2.2 mit Gleichheit erfüllen. Ein wesentlich einfacherer Beweis stammt von Drake [40], vgl. auch [6, X. 8.9].

3.3.3 **Satz.** Wenn es eine affine Ebene der Ordnung s sowie ein (t, s + 1)-Netz gibt für eine nicht durch s teilbare Zahl t, dann gibt es ein transversalfreies (st, s + 1)-Netz.

Die Existenzfrage für maximale Netze mit kleinem s ($s \leqslant 10$) wird bei Drake [40] und in [6, X. 8.13] diskutiert.

4 Geometrische Konfigurationen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige geometrische Bedingungen (Schließungssätze) für Netze. Diese Bedingungen stellen dann z. B. die Existenz gewisser Automorphismen oder die Gültigkeit algebraischer Bedingungen für die zugehörigen Quasigruppen sicher.

4.1 Loops und Netze mit 3 Parallelenklassen

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Netze mit 3 Parallelenklassen. Jedes solche Netz ist zu einer gewissen Menge von Quasigruppen äquivalent; umgekehrt liefert jede Quasigruppe ein Netz mit 3 Parallelenklassen nach 1.2.6. Man kann noch erreichen, daß die Quasigruppe ein neutrales Element hat, also eine *Loop* ist. Einer additiv geschriebenen Loop L ordnet man üblicherweise ein Netz auf L x L zu, indem man als Parallelenklassen wählt:

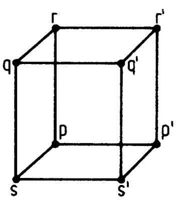
alle Geraden der Form $\{(x, y) : x = c\}$;
alle Geraden der Form $\{(x, y) : y = c\}$;
alle Geraden der Form $\{(x, y) : y = x + c\}$.[1])

Dieses Netz wollen wir $\mathcal{D}$(L) nennen. Dieses Verfahren geht im wesentlichen auf Reidemeister [97] zurück. Es gilt der folgende interessante Satz von Baer [1]:

4.1.1 Satz. Es seien L und L′ Loops. Genau dann sind $\mathcal{D}$(L) und $\mathcal{D}$(L′) isomorph, wenn L und L′ *isotop* sind, d. h., wenn es Bijektionen $\rho, \sigma, \tau : L \to L'$ gibt mit $(x + y)^\rho = x^\sigma + y^\tau$ für alle $x, y \in L$.

Wohl die wichtigste geometrische Konfiguration für Netze mit 3 Parallelenklassen ist die Reidemeister-Konfiguration:

4.1.2 Definition. $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ seien die Parallelenklassen des Netzes $\mathcal{D}$(L). Die folgende Bedingung heißt die *Reidemeister-Bedingung*: Wenn die Geraden pp′, qq′, rr′, ss′, sämtlich zu $\mathcal{G}_1$, die Geraden pr, p′r′, qs, q′s′ sämtlich zu $\mathcal{G}_2$, und die Geraden ps, p′s′, qr sämtlich zu $\mathcal{G}_3$ gehören, so gehört auch q′r′ zu $\mathcal{G}_3$.



Man kann zeigen, daß diese unsymmetrisch formulierte Bedingung in Wirklichkeit symmetrisch in $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ ist, siehe Pickert [91, pp. 52–53]. Die Reidemeister-Bedingung stellt die Existenz bestimmter Automorphismen von $\mathcal{D}$(L) sicher. Wir benötigen eine Definition:

4.1.3 Definition. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz. Ein *Automorphismus* von $\mathcal{D}$ ist eine Bijetion der Punktmenge auf sich, die jede Gerade in eine Gerade überführt. Eine *strikte Translation*[2]) ist ein Automorphismus α, der jede Parallelenklasse insgesamt sowie die Geraden einer bestimmten Parallelenklasse $\mathcal{G}_0$ einzeln festläßt. $\mathcal{G}_0$ heißt

[1]) Manche Autoren verwenden stattdessen die Geraden $\{(x, y) : x + y = c\}$.

[2]) Oft auch nur „Translation" genannt. Da dann eine Verwechslungsgefahr mit den Translationen aus Abschnitt 5 bestünde, ziehe ich den Term „strikte Translation" vor.

die *Richtung* von α. $\mathcal{D}$ heißt *transitiv* bzgl. der Richtung $\mathcal{G}_0$, wenn es für je zwei Punkte p, q, die auf einer Geraden aus $\mathcal{G}_0$ liegen, eine strikte Translation α mit Richtung $\mathcal{G}_0$ gibt, für die $p^\alpha = q$ ist.

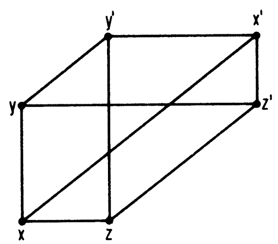
Der folgende Satz stammt im wesentlichen von Reidemeister [97], vgl. auch Pickert [91].

4.1.4 Satz. L sei eine Loop. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) L ist assoziativ, also eine Gruppe.
(ii) In $\mathcal{D}(L)$ gilt die Reidemeister-Bedingung.
(iii) $\mathcal{D}(L)$ ist transitiv bzgl. jeder der drei Richtungen.

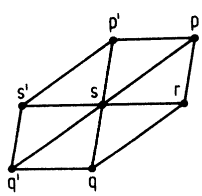
Wir erwähnen noch zwei weitere wichtige Konfigurationen.

4.1.5 Definition. $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ seien die Parallelenklassen des Netzes $\mathcal{D}(L)$. Die folgende Bedingung heißt die *Thomsen-Bedingung*: Wenn die Geraden xx′, yy′, zz′ sämtlich zu $\mathcal{G}_1$, die Geraden xy, y′z, x′z′ sämtlich zu $\mathcal{G}_2$ und die Geraden xz und yz′ zu $\mathcal{G}_3$ gehören, so gehört auch x′y′ zu $\mathcal{G}_3$.



4.1.6 Satz (Thomsen [115]). L sei eine Loop. Genau dann ist L eine kommutative Gruppe, wenn in $\mathcal{D}(L)$ die Thomsen-Bedingung gilt. Insbesondere folgt aus der Thomsen-Bedingung die Reidemeister-Bedingung für $\mathcal{D}(L)$.

4.1.7 Definition. Die *Sechseck-Bedingung* für $\mathcal{D}(L)$ ist die Bedingung, die für r′ = s aus der Reidemeister-Bedingung hervorgeht. Man beachte, daß dann p, q′, s sowie p′, q, s und r, s, s′ jeweils kollinear werden.



4.1.8 Satz (Bol [11], Pickert [90]). L sei eine Loop. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) In $\mathcal{D}(L)$ gilt die Sechseck-Bedingung.
(ii) Jede zu L isotope Loop ist *potenz-assoziativ*, d. h. jedes Element x erzeugt eine assoziative Unter-Loop.
(iii) In jeder zu L isotopen Loop gilt die Identität $(x + x) + x = x + (x + x)$.

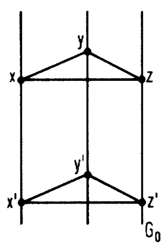
(iv) In jeder zu L isotopen Loop L′ gibt es zu jedem Element x ein Inverses −x, d. h. es gilt x + (−x) = (−x) + x = 0 mit 0 als dem neutralen Element von L′.

Eine ausführliche Diskussion dieser sowie weiterer Bedingungen und Beweise der aufgeführten Sätze findet man bei Pickert [91], vgl. auch Bruck [24].

4.2 Geometrische Konfigurationen in Netzen mit mehr als 3 Parallelenklassen

Die große geometrische und algebraische Bedeutung von Schließungssätzen in affinen (bzw. projektiven) Ebenen ist wohlbekannt, vgl. etwa Pickert [91] und Hughes/Piper [61]. Wir wollen hier nur ganz kurz auf Konfigurationen in Netzen mit mindestens 4 Parallelenklassen eingehen.

4.2.1 Definitionen. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz und $\mathcal{G}_0$ eine Parallelenklasse von $\mathcal{D}$. Die *Desargues-Bedingung* bzgl. $\mathcal{G}_0$ ist die folgende Bedingung: Sind xx′, yy′, zz′ Geraden von $\mathcal{G}_0$, sind weiter xy und x′y′ sowie xz und x′z′ jeweils parallele Geraden und ist yz eine Gerade, so gibt es auch eine Gerade y′z′, und es gilt yz ∥ y′z′.



4.2.2 Satz. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $\mathcal{D}$ ist transitiv bzgl. der Richtung $\mathcal{G}_0$.
(ii) $\mathcal{D}$ erfüllt die Desargues-Bedingung bzgl. $\mathcal{G}_0$ und die Reidemeister-Bedingung bzgl. $\mathcal{G}_0$ und je zweier anderer Richtungen.
(iii) Zu $\mathcal{D}$ gehört eine Menge $Q_1, \ldots, Q_{r-2}$ von orthogonalen lateinischen Quadraten, für die Q_1 eine Gruppentafel ist und für die jedes Q_i mit $i > 1$ aus Q_1 durch eine geeignete Spaltenpermutation hervorgeht.

Einen ausführlichen Beweis hierfür findet man bei Pickert [92]. Interessant ist auch die folgende Aussage, die sich bisher nur implizit in der Literatur findet und im wesentlichen von Jungnickel [64] stammt, vgl. auch [6, X. 12.8].

4.2.3 Satz. Ein (s, r)-Netz $\mathcal{D}$ mit G als einer Gruppe von auf einer Richtung $\mathcal{G}_0$ transitiv operierenden strikten Translationen existiert genau dann, wenn es eine (s, r − 1; G)-Differenzenmatrix gibt.

B e w e i s s k i z z e. $D = (d_{ij})$ sei eine (s, r − 1; G)-Differenzenmatrix. Wir definieren eine Struktur $\mathcal{D}$ wie folgt:
Punkte seien die Paare (j, x) mit j = 1, …, s und $x \in G$; Parallelenklassen von Geraden sind gegeben durch $\mathcal{G}_i = \{B_{ix} : x \in G\}$ für i = 1, …, r − 1 sowie $\mathcal{G}_r = \{B_{rj} : j = 1,$

$\{B_{rj} : j = 1, \ldots, s\}$, wobei $B_{ix} = \{(j, x + d_{ij}) : j = 1, \ldots, s\}$ und $B_{rj} = \{(j, x) : x \in G\}$ ist.
Offenbar hat man so wirklich Parallelenklassen definiert. Ferner schneidet jede Gerade B_{rj} jede Gerade B_{ix} $(i < r)$ genau einmal. Seien schließlich Geraden B_{ix} und $B_{i'x'}$ $(i \neq i' < r)$ gegeben. Dann ist (j, y) genau dann ein Schnittpunkt dieser beiden Geraden, wenn $x + d_{ij} = x' + d_{i'j} = y$ ist. Da D eine Differenzenmatrix ist, gibt es aber genau ein j mit $-x + x' = d_{ij} - d_{i'j}$, d. h. es existiert genau 1 Schnittpunkt. Schließlich operiert G transitiv als Gruppe strikter Translationen mit der Richtung $\mathcal{G}_r$ gemäß $g : (i, x) \to (i, x + g)$.
Die Umkehrung ist ähnlich und sei dem Leser überlassen.

Man kann übrigens zeigen, daß für eine maximale $(s, r - 1; G)$-Differenzenmatrix das eben konstruierte Netz transversalfrei ist, siehe [6, X. 12.8]. Zum Abschluß erwähnen wir noch, daß bestimmte, in der Ostromschen Theorie [89] wichtige Netze, die man aus Vektorräumen konstruiert, von Thiele [114] geometrisch charakterisiert worden sind.

5 Translationsnetze

Nachdem sich schon im letzten Abschnitt Zusammenhänge zu gewissen Automorphismen von Netzen ergeben haben, sollen in diesem und im nächsten Abschnitt Automorphismengruppen von Netzen betrachtet werden. Diese Frage wird noch nicht sehr lange behandelt; eine allgemeine Theorie, wie sie etwa für affine Ebenen vorliegt, kann man also noch nicht erwarten. Die bisher am besten untersuchte Klasse dürften die Translationsnetze sein, die wir in diesem Abschnitt behandeln.

5.1 Grundlagen

Allgemeine Translationsnetze sind explizit zuerst in einem erst einige Jahre später publizierten Manuskript von Sprague [111] um 1979 eingeführt worden; implizit waren sie im Kontext der „Klingenberg-Strukturen" bereits in Drake/Jungnickel [43] behandelt worden. Da das Studium einzelner „Translationen" gewisse Schwierigkeiten bereitet, wählt man die folgenden Definitionen.

5.1.1 **Definition.** $\mathcal{D}$ sei ein Netz und $G \leqslant \operatorname{Aut} \mathcal{D}$. (Aut $\mathcal{D}$ bezeichnet die Gruppe alle Automorphismen von $\mathcal{D}$, vgl. 4.1.3.) $\mathcal{D}$ heißt ein *Translationsnetz* mit *Translationsgruppe* G, wenn G regulär (= scharf transitiv) auf den Punkte von $\mathcal{D}$ operiert und wenn weiter jede Parallelenklasse von $\mathcal{D}$ unter G festbleibt.

Offenbar hat man so den gründlich untersuchten Begriff der affinen Translationsebene (vgl. etwa Lüneburg [79]) verallgemeinert. Leider kann ein Netz bzgl. nichtisomorpher Gruppen Translationsnetz sein; auch kann eine Gruppe als Translationsgruppe auf nicht-isomorphen Netzen operieren. Schließlich können auch nicht-abelsche Gruppen als Translationsgruppen auftreten. Beispiele für diese unerfreulichen Tatsachen findet man bei Sprague [111, p. 56–57]. Wir werden daher ab jetzt ein Translationsnetz stets als ein Paar $(\mathcal{D}, G)$ (mit G als Translationsgruppe von $\mathcal{D}$) an-sehen. Als erstes wollen wir den Begriff „Translationsnetz" in die Sprache der Gruppentheorie übersetzen.

5.1.2 **Definition.** G sei eine Gruppe*) der Ordnung s^2 und $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ mit $r \geqslant 3$ eine Menge von Untergruppen von G der Ordnung s. $\mathcal{U}$ heißt eine (s, r)-PCP in G (für „partial congruence partititon"), wenn stets $|U_i \cap U_j| = 1$ gilt (für $i \neq j$). Die U_i heißen die *Komponenten* von $\mathcal{U}$.

Äquivalent zur letzten Bedingung ist natürlich die Forderung $U_iU_j = G$ für $i \neq j$. Man beachte, daß die (s, s + 1)-PCP's genau die Kongruenzpartitionen sind, mit denen André in seiner Arbeit [0] aus dem Jahre 1954 die Translationsebenen beschrieben hat. PCP's wurden erstmals unter dem Namen „uniforme Klingenberg-Matrizen" von Drake/Jungnickel [43] verwendet. Wie im Fall von Translationsebenen beweist man ohne Mühe des folgende Resultat.

5.1.3 **Satz.** $\mathcal{U}$ sei eine (s, r)-PCP in der Gruppe G. Dann ist die Struktur $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ mit Punktmenge G und Geradenmenge $\{Ug : U \in \mathcal{U}, g \in G\}$ ein (s, r)-Netz mit G als Translationsgruppe. Umgekehrt läßt sich jedes Translationsnetz so beschreiben.

Beispiele von echten Translationsnetzen kann man natürlich einfach durch Weglassen einiger Parallelenklassen aus einer Translationsebene erhalten; dann ist die Translationsgruppe elementar-abelsch. (Leser, die mit den im folgenden auftretenden gruppentheoretischen Grundbegriffen nicht vertraut sind, seien auf das Buch von Huppert [62] verwiesen.) Wir wollen jetzt einige weniger triviale Beispiele angeben, indem wir in einigen nicht-abelschen Gruppen PCP's finden.

5.1.4 **Beispiele.** a) H sei eine beliebige Gruppe der Ordnung s und $G := H \times H$. Dann bilden $U_1 = H \times \{1\}$, $U_2 = \{1\} \times H$ und $U_3 = \{(h, h) : h \in H\}$ eine (s, 3)-PCP in G.

b) Es sei $G = \langle a, b, c, x, y, w\rangle$, wobei das Quadrat jedes Erzeugers und sämtliche Kommutatoren zweier Erzeuger gleich 1 seien, mit den beiden Ausnahmen $[x, y] = a$ und $[x, w] = b$. Die Untergruppen $\langle x, y\rangle$, $\langle cx, w\rangle$, $\langle ac, by, aw\rangle$ und $\langle c, xyw\rangle$ bilden eine (8, 4)-PCP in G. Diese Untergruppen sind der Reihe nach zu D_4, D_4, C_2^3 und $C_4 \times C_2$ isomorph (Sprague [111]).

c) G sei die metazyklische Gruppe der Ordnung p^4 vom Exponenten p^2 (p Primzahl), d. h. $G = \langle a, b\rangle$ mit $a^{p^2} = b^{p^2} = 1$ und $a^b = a^{p+1}$ (siehe Huppert [62, III. 12.6]). Dann bilden die Untergruppen $U_i = \langle ba^i\rangle$ $(i = 1, \ldots, p)$ und $U_{p+1} = \langle a\rangle$ eine $(p^2, p + 1)$-pcp in G (Jungnickel [65]).

d) Bestimmte kombinatorische Objekte in den endlichen projektiven Räumen, nämlich die „t-Teilfaserungen", liefern eine spezielle Klasse von PCP's, die schon seit 1967 untersucht wird; hier ist G stets elementar abelsch. Wir werden diese PCP's in den Abschnitten 5.3 und 5.4 betrachten.

Es sei angemerkt, daß die PCP's aus b) und c) maximal sind. Leider muß hieraus nicht unbedingt die Maximalität der zugehörigen Netze folgen. Trotzdem lassen sich unter Zusatzvoraussetzungen aus PCP's oft interessante maximale Netze kon-

---

*) In diesem Abschnitt werden die Gruppen multiplikativ geschrieben.

struieren, siehe Abschnitt 5.4. Als nächstes wollen wir eine einfache rekursive Konstruktion für PCP's betrachten, die analog zur MacNeish-Konstruktion aus 2.2.1 ist.

5.1.5 Lemma. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ und $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_r\}$ seien (s, r)- bzw. (t, r)-PCP's in G bzw. H. Dann ist $\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{U_1 \times V_1, \ldots, U_r \times V_r\}$ eine (st, r)-PCP in G x H.

Ich bezeichne im folgenden mit T(G) die Maximalzahl von Komponenten einer PCP in G, falls G quadratische Ordnung hat. Weiter sei T(s) die Maximalzahl von Komponenten einer PCP in irgendeiner Gruppe der Ordnung s^2. Man beachte, daß $T(q) = q + 1$ für Primzahlpotenzen q gilt. Aus 5.1.5 folgt dann sofort:

5.1.6 Korollar. Es sei $s = q_1 \ldots q_n$ die Primzahlpotenzzerlegung von s. Dann gilt $T(s) \geqslant \min \{q_i + 1 : i = 1, \ldots, n\}$.

Ich vermute, daß in 5.1.6 stets Gleichheit gilt. Für die Klasse der nilpotenten Gruppen trifft das jedenfalls zu, wie wir in 5.2.2 sehen werden. Zum Abschluß dieser einführenden Betrachtungen wollen wir noch den Zusammenhang zwischen Translationen und strikten Translationen betrachten. Man zeigt ohne Mühe:

5.1.7 Lemma. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ sei eine (s, r)-PCP in G. Dann operiert $U_i^g = g^{-1} U_i g$ regulär auf der Geraden $U_i g$ von $\mathcal{D}(\mathcal{U})$. Insbesondere besteht U_i aus strikten Translationen ($\mathcal{D}(\mathcal{U})$ ist dann transitiv bzgl. der Richtung von U_i), wenn und nur wenn U_i normal in G ist.

Sprague [111] nennt dann die Richtung von U_i „normal". Die beiden folgenden Sätze von Sprague [111] zeigen, daß die Existenz normaler Komponenten in einer PCP die Struktur von G stark einschränkt.

5.1.8 Satz. $\mathcal{U}$ sei eine (s, r)-PCP in G, für die mindestens 3 Komponenten normal in G sind. Dann ist G abelsch und $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ bzgl. jeder Richtung transitiv.

5.1.9 Satz. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ sei eine (s, r)-PCP in G. Wenn $U_1 \lhd G$ ist, folgt $U_2 \cong \ldots \cong U_r$. Ist auch noch $U_2 \lhd G$, folgt $G \cong U_1 \times U_2$ und $U_1 \cong U_2$.

Die Sätze 5.1.8 und 5.1.9 können als Nichtexistenzsätze angesehen werden. Im folgenden sollen weitere derartige Sätze behandelt werden.

5.2 Nichtexistenzsätze

Wir beginnen mit dem folgenden, leicht zu beweisenden Lemma von Sprague [111].

5.2.1 Lemma. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ sei eine (s, r)-PCP in G. Es sei p eine s teilende Primzahl. Falls die p-Sylowgruppe P von G normal ist, gilt

$$r \leqslant \min \{T(P), T(G/P)\}.$$

B e w e i s. $\{U_i \cap P : i = 1, \ldots, r\}$ und $\{U_i P/P : i = 1, \ldots, r\}$ sind PCP's in P bzw. G/P.

Direkt aus 5.2.1 und 5.1.5 folgt:

5.2.2 Korollar (Drake/Jungnickel [43]). G sei eine nilpotente Gruppe der Ordnung s^2. Dann gilt: $T(G) = \min \{T(P_i) : i = 1, \ldots, n\}$, wobei $P_1, \ldots, P_n$ die Sylowgruppen von G seien. Insbesondere folgt

$$T(G) \leqslant \min \{q_i + 1 : i = 1, \ldots, n\},$$

wobei $s = q_1 \ldots, q_n$ die Primzahlpotenzzerlegung von s sei.

Sehr nützlich ist auch das folgende Lemma von Sprague [111]:

5.2.3 Lemma. G sei eine Gruppe der Ordnung s^2, wobei $s = p^a m$ sei für eine Primzahl p mit $m < p$. Wenn G zwei Untergruppen U, V der Ordnung s mit G = UV besitzt, ist die p-Sylowgruppe von G normal in G.

Kombiniert man 5.2.1 und 5.2.3, so folgt wegen $T(p^a) = p^a + 1$:

5.2.4 Satz. Es sei $s = p^a m$ für eine Primzahl p mit $m < p$. Dann gilt $T(s) = T(m) \leqslant m + 1$.

Insbesondere ist $T(2q) = 3$ für ungerade Primzahlpotenzen q. Dieses Resultat läßt sich (auf dem Umweg über Differenzenmatrizen) verstärken (Jungnickel [65]).

5.2.5 Satz. Es gilt $T(s) = 3$ für $s \equiv 2 \bmod 4$.

Der folgende Satz von Jungnickel [65] zeigt, daß eine nichtabelsche Gruppe keine allzugroßen PCP's gestatten kann:

5.2.6 Satz. G sei eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung s^2 und p sei die kleinste s teilende Primzahl. Dann gilt:

$$T(G) \leqslant \left[\frac{2s-2}{p+1}\right] + 2,$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqslant x$ bezeichnet.

Schränkt man sich auf nilpotente Gruppen G ein, so reduziert sich die Bestimmung von T(G) nach 5.2.2 auf die Bestimmung von T(P) für p-Gruppen P. Ebenfalls aus [65] stammt die folgende Schranke:

5.2.7 Satz. P sei eine Gruppe der Ordnung p^{2n}. Wenn P nicht elementar-abelsch ist, gilt $T(P) \leqslant p^{n-1} + \ldots + p + 1$.

Für n = 2 ist diese Schranke nach Beispiel 5.1.4.b) bestmöglich. Falls P als abelsch vorausgesetzt wird, gibt es wesentlich bessere Schranken, die wieder aus [65] stammen.

5.2.8 Satz. P sei eine abelsche Gruppe der Ordnung p^{2n} und $\mathcal{U}$ eine (p^n, r)-PCP in P. Ferner sei U der Isomorphietyp der Komponenten von $\mathcal{U}$, vgl. 5.1.9. Wenn der Exponent p^a von U genau h-mal unter den Invarianten von U auftritt, gilt $T(P) \leqslant p^h + 1 \leqslant p^{[n/a]} + 1$. Insbesondere gilt stets $T(P) \leqslant p^{[n/2]} + 1$, sofern P nicht elementar abelsch ist.

Wir wollen noch einige Folgerungen aus 5.2.7 und 5.2.8 betrachten. 5.2.6 und 5.2.8 zusammen ergeben:

5.2.9 Korollar. G sei eine Gruppe der Ordnung s^2 und p die kleinste s teilende Primzahl. Wenn $T(G) > [(2s-2)/(p+1)] + 2$ ist, ist s eine Potenz von p und G elementar-abelsch.

Aus 5.2.2 und 5.2.8 folgt

5.2.10 **Korollar.** G sei eine abelsche Gruppe der Ordnung s^2 und $T(G) > \sqrt{s} + 1$. Dann ist s eine Primzahlpotenz und G elementar-abelsch.

Schließlich folgt aus 5.2.7 noch

5.2.11 **Korollar.** G sei eine nilpotente Gruppe der Ordnung s^2. Genau dann nimmt T(G) die in 5.2.2 angegebene Schranke an, wenn jede Sylowgruppe von G elementar-abelsch ist.

Alles in allem geben die aufgeführten Resultate einigen Anlaß für die folgende Vermutung:

5.2.12 **Vermutung.** Es sei $s = q_1 \ldots q_n$ die Primzahlpotenzzerlegung von s. Dann gilt $T(s) = \min\{q_i + 1 : i = 1, \ldots, n\}$.

Wir wenden uns nun den in 5.1.4.d) erwähnten t-Teilfaserungen von endlichen projektiven Räumen und den zugehörigen Translationsnetzen zu.

5.3 Maximale t-Teilfaserungen

In diesem Abschnitt beschreibe ich einige Resultate über die schon erwähnte Klasse spezieller PCP's.

5.3.1 **Definition.** Eine Menge $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_r\}$ von paarweise disjunkten t-dimensionalen Unterräumen des projektiven Raumes PG(2t + 1, q) heißt eine *t-Teilfaserung.*

Faßt man $\mathcal{F}$ als eine Menge von (t + 1)-dimensionalen linearen Unterräumen des (2t + 2)-dimensionalen Vektorraums über GF(q) auf, so erhält man eine (p^{t+1}, r)-PCP in der elementar-abelschen Gruppe $EA(q^{2t+2})$. Ist q eine Primzahl, so liefert natürlich jede PCP in $EA(q^{2t+2})$ eine t-Teilfaserung von PG(2t + 1, q); ist q dagegen eine echte Primzahlpotenz, so muß nicht jede PCP auch eine Teilfaserung liefern, da ja dann nicht jede Untergruppe der Ordnung q^{t+1} schon ein Unterraum von PG (2t + 1, q) ist. Selbstverständlich kann aber jede PCP in einer elementar-abelschen Gruppe als t-Teilfaserung für ein geeignetes t aufgefaßt werden.

5.3.2 **Definition.** Eine *t-Faserung* von PG(2t + 1, q) ist eine t-Teilfaserung, deren Komponenten alle Punkte von PG(2t + 1, q) überdecken. Eine t-Teilfaserung $\mathcal{F}$ heißt *maximal*, wenn sie keine t-Faserung ist und wenn jeder nicht in ihr enthaltene t-dimensionale Unterraum von PG(2t + 1, q) mindestens eine Komponente von $\mathcal{F}$ trifft.

Resultate über t-Faserungen findet man z. B. in Dembowski [37]. Man sieht leicht ein, daß jede t-Faserung genau $q^{t+1} + 1$ Komponenten hat. Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

5.3.3 **Definition.** Die *Defizienz* einer t-Teilfaserung von PG(2t + 1, q) mit r Komponenten ist die Zahl $d = q^{t+1} + 1 - r$. Die Begriffe „kleine Defizienz", „sehr kleine Defizienz" und „kritische Defizienz" sind analog zu 3.1.7 erklärt.

Wir betrachten jetzt zunächst den Fall t = 1. Die folgenden Schranken für die

Komponentenzahl einer maximalen 1-Teilfaserung stammen von Glynn [50], Mesner [85] und Bruen [28].

5.3.4 **Satz.** F sei eine maximale 1-Teilfaserung von PG(3, q) mit r Komponenten. Dann gilt $2q \leqslant r \leqslant q^2 - \sqrt{q}$. Falls q kein Quadrat ist, kann die obere Schranke zu $p(d-1) > q^2$ verbessert werden, wobei p das in 3.1.3 definierte Polynom sei.

Alle bekannten Beispiele von maximalen 1-Faserungen kleiner Defizienz (also $d \leqslant q$) haben die folgenden Parameter:

5.3.5 **Beispiele.** Für $q \geqslant 3$ existiert stets eine maximale 1-Teilfaserung mit Defizienz $d = q$ in PG(3, q) (Bruen [26]). Für $q \geqslant 4$ existiert auch eine maximale 1-Teilfaserung mit $d = q - 1$ (Bruen [26], Bruen/Thas [33], Freeman [49]).

Die Beweise hierfür sind ziemlich kompliziert. Bruens Methode besteht darin, aus einer 1-Faserung spezieller Art zunächst $q + 1$ Geraden zu entfernen und dann durch Hinzufügen von 1 oder 2 geschickt gewählten anderen Geraden eine maximale 1-Faserung zu erhalten. Der verhältnismäßig einfache Fall $d = q$ wird nach dieser Methode auch in [6, X. § 9] behandelt. Besonders schwierig ist der Fall $d = q - 1$ für eine gerade Primzahlpotenz q; hier findet man bei Jungnickel [71] einen verhältnismäßig einfachen Alternativbeweis. Für Beispiele maximaler 1-Faserungen mit $d > q$ (ein Fall, der uns hier nicht weiter interessiert, weil man nicht weiß, ob man so maximale Netze erhalten kann) verweisen wir etwa auf Beutelspacher [8]. Wir wollen schließlich noch kurz den Fall $t > 1$ betrachten. Zunächst erwähnen wir wieder die bekannten Schranken, die hier von Beutelspacher [8] und Bruen [29] stammen.

5.3.6 **Satz.** F sei eine maximale t-Teilfaserung mit r Komponenten in PG(2t + 1, q). Dann gilt $q + \sqrt{q} \leqslant r \leqslant q^{t+1} - \sqrt{q}$; für $q \geqslant 4$ kann die untere Schranke zu $r \geqslant q + \sqrt{q} + 1$ verbessert werden.

5.3.7 **Beispiele.** Es sei $t = 2a + 1$ mit $a \geqslant 1$. Dann gibt es für $q \geqslant 4$ stets eine maximale t-Teilfaserung der Defizienz $d = q^{a+1}$ in PG(2t + 1, q) (Beutelspacher [8]). Ist q keine Primzahl, so gibt es auch eine maximale t-Teilfaserung mit $d = q^{a+1} - 1$ in PG(2t + 1, q) (Jungnickel [71]).

Interessante Beispiele maximaler 2-Teilfaserungen in PG(5, q) findet man bei Bruen/Freeman [31]. Sonst scheinen keine Beispiele maximaler t-Teilfaserungen mit geradem t bekannt zu sein.

5.4 Maximale Translationsnetze kleiner Defizienz

Wir wollen nun untersuchen, wann maximale Teilfaserungen maximale (Translations-)Netze liefern. Dazu betrachten wir zunächst allgemein Automorphismen von komplettierbaren Netzen kleiner Defizienz. Da ein Automorphismus eines Netzes Transversalen wieder auf Transversalen abbildet, erhält man mit 3.1.6 sofort das folgende nützliche Resultat.

5.4.1 **Lemma.** $\mathcal{D}$ sei ein komplettierbares Netz kleiner Defizienz und $\mathcal{E}$ die Komplettierung von $\mathcal{D}$. Dann gilt $\mathrm{Aut}\,\mathcal{D} \leqslant \mathrm{Aut}\,\mathcal{E}$.

Der folgende Satz zeigt, daß Translationsnetze kleiner Defizienz fast immer durch t-Teilfaserungen beschrieben werden können.

5.4.2 Satz (Jungnickel [71]). $\mathcal{D}$ sei ein Translationsnetz kleiner Defizienz mit Translationsgruppe G. Falls die Ordnung von $\mathcal{D}$ nicht 2 oder 4 ist, ist G elementar-abelsch.

Für Ordnungen $\geqslant 16$ folgt Satz 5.4.2 aus Korollar 5.2.9; für kleinere Ordnungen sind detaillierte Überlegungen notwendig. Satz 5.4.2 ist insofern wichtig, als die Beweise der folgenden Sätze im Allgemeinen die Kommutativität von G verwenden. Mit 5.4.1 und 5.4.2 konnte ich in [71] den folgenden Satz beweisen.

5.4.3 Satz. $\mathcal{D}$ sei ein komplettierbares Translationsnetz kleiner Defizienz mit Translationsgruppe G und $\mathcal{E}$ die Komplettierung von $\mathcal{D}$. Dann ist $\mathcal{E}$ eine Translationsebene und G die Translationsgruppe von $\mathcal{E}$.

Mit dem Bruckschen Komplettierungssatz 3.1.3 erhält man sofort ein Ergebnis, das zuerst von Bruen [28] unter stärkeren Voraussetzungen bewiesen worden ist.

5.4.4 Korollar. $\mathcal{D}$ sei ein Translationsnetz sehr kleiner Defizienz. Dann kann $\mathcal{D}$ zu einer Translationsebene komplettiert werden.

Aus 5.4.3 folgt auch unmittelbar, daß jede maximale t-Faserung kleiner Defizienz in PG(2t + 1, p) für Primzahlen p ein nicht komplettierbares Netz liefert. Für genauere Untersuchungen ist das folgenden Lemma von Ostrom [88] sehr nützlich:

5.4.5 Lemma. $\mathcal{U}$ sei eine PCP mit mindestens einer normalen Komponente. Dann ist $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ maximal, wenn und nur wenn es transversalfrei ist.

Sei jetzt $\mathcal{U}$ eine maximale (s, r)-PCP kleiner Defizienz. Mit den bereits erwähnten Resultaten kann man nun verhältnismäßig einfach beweisen, daß $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ x-erweiterbar ist, wobei $x \neq 1$ ein Teiler von s ist. Wenn $s = p^2$ für eine Primzahl p gilt, muß also $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ komplettierbar sein im Widerspruch zu Satz 5.4.3. Also gilt (Jungnickel [71]):

5.4.6 Satz. $\mathcal{F}$ sei eine maximale 1-Teilfaserung kleiner Defizienz in PG(3, p), wobei p eine Primzahl ist. Dann ist das Netz $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ transversalfrei.

Einen anderen Beweis für diesen Satz hat Bruen [28] angedeutet. Mit den Beispielen in 5.3.5 erhält man nun aus Satz 5.4.6 einen Beweis für Satz 3.3.2 über die Existenz maximaler Netze kleiner Defizienz. Für echte Primzahlpotenzen versagen die eben skizzierten Methoden. Immerhin kann man dann noch das folgende Resultat erzielen:

5.4.7 Satz (Jungnickel [71]). $\mathcal{F}$ sei eine maximale (2a + 1)-Teilfaserung der Defizienz $d = q^{a+1}$ in PG(4a + 3, q). Dann ist $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ nicht komplettierbar.

Zum Beweis verwendet man Lemma 5.4.1 (damit werden die von GF(q) induzierten „Dilatationen" von $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ auf eine hypothetische Komplettierung übertragen) und den bekannten Satz von Zsigmondy [132], ein zahlentheoretisches Resultat, das viele Anwendungen in der endlichen Geometrie hat. Für Defizienz $d = q^{a+1} - 1$ gilt die zu 5.4.7 analoge Aussage nicht; wie ich in [71] gezeigt habe, kann man oft aus Translationsebenen der Dimension 2 über ihrem Kern maximale t-Teilfaserungen erhalten, für die das zugehörige Netz in eine aus der ursprünglichen Ebene durch Ableitung entstandene Translationsebene einbettbar ist. Die in 5.3.7 erwähnten Beispiele sind so konstruiert worden.

5.5 Weitere Komplettierungssätze

Abschließend möchte ich noch zwei Resultate über die Komplettierung von Translationsnetzen erwähnen. Wie schon in Abschnitt 3.1 ausgeführt, hat Ostrom [87] gezeigt, daß ein Netz mit kritischer Defizienz (also Ordnung q^2, Defizienz $q + 1$) höchstens zwei nicht-isomorphe Komplettierungen besitzt. Für Primzahlen p ist in diesem Zusammenhang das folgende Resultat von Bruen/Silverman [32] interessant:

5.5.1 Satz. $\mathcal{D}$ sei ein Netz der Ordnung p^2 (p Primzahl) und der Defizienz $d < 2p - 2$. Dann gibt es höchstens zwei nicht-isomorphe Translationsebenen, die Komplettierungen von $\mathcal{D}$ sind.

Sei jetzt $\mathcal{D}$ ein Netz der Ordnung p (p Primzahl). Wenn $\mathcal{D}$ ein Translationsnetz ist, kann man $\mathcal{D}$ natürlich in die desarguessche affine Ebene AG(2, p) einbetten. Weitere Einbettungen sind nur für kleine Netze denkbar:

5.5.2 Satz (Bruen [28]). $\mathcal{D}$ sei ein Translationsnetz der Ordnung p (p Primzahl) und der Defizienz $d < \frac{p+3}{2}$. Dann ist AG(2, p) die einzige Komplettierung von $\mathcal{D}$ und es gilt Aut $\mathcal{D} \leqslant$ Aut AG(2, p).

Dieser Satz wäre natürlich trivialerweise richtig, wenn die bekannte Vermutung zutrifft, daß jede Ebene von Primzahlordnung desarguessch ist. Als letztes sei noch der interessante Übersichtsartikel von Bruen [30] erwähnt.

6 Gruppen auf TD's und Netzen

Nachdem ich bereits im vorigen Kapitel ziemlich ausführlich Netze mit einer auf der Punktmenge regulären Translationsgruppe behandelt habe, will ich in diesem Abschnitt einige weitere Arten von Automorphismengruppen von Netzen bzw. TD's behandeln. Hier handelt es sich allerdings mehr um Klassen von Beispielen als um eine theoretische Einordnung.

6.1 Klassenreguläre TD's

6.1.1 Definition. $\mathcal{T}$ sei ein (s, r)-TD und $G \leqslant$ Aut $\mathcal{T}$. Dann heißt $\mathcal{T}$ *klassenregulär* bzgl. G, wenn G die Punktklassen von $\mathcal{T}$ invariant läßt und auf jeder Punktklasse regulär operiert (vgl. 1.2.5).

Man sieht leicht die Gültigkeit des folgenden Lemmas ein.

6.1.2 Lemma. $\mathcal{T}$ sei ein bzgl. der Gruppe G klassenreguläres TD. Dann operiert G semiregulär auf der Geradenmenge von $\mathcal{T}$ (d. h., nur die Identität hat Fixgeraden). Die Bahnen von G auf der Geradenmenge sind Parallelklassen von $\mathcal{T}$, d. h., $\mathcal{T}$ ist *auflösbar* (vgl. 2.3.3).

6.1.3 **Satz** (Jungnickel [63]). Ein bzgl. der Gruppe G klassenreguläres (s, r)-TD existiert genau dann, wenn es eine (s, r; G)-Differenzenmatrix gibt (vgl. 2.1.2).

Der Beweis ist im wesentlichen dual zu dem von Satz 4.3.3. Der weiteren Parallelenklasse des dort konstruierten Netzes entspricht hier die Auflösbarkeit des TD's, aus der man eine weitere Punktklasse erhalten kann. Die geometrische Deutung über Reidemeister- und Desargueskonfigurationen habe ich schon in Satz 4.2.3 vorgenommen; selbstverständlich kann man diesen Satz dualisieren und für TD's aufschreiben. Differenzenmatrizen und klassenreguläre TD's sind also eine Verallgemeinerung des Begriffs der (p, L)-Transitivität einer projektiven Ebene (für $p \in L$)*), wie man über die duale Interpretation von Satz 4.2.3 leicht einsieht. Man kann dies auch direkt zeigen, vgl. Jungnickel [63]. Die Theorie der Differenzenmatrizen ist noch am Anfang; abgesehen von Konstruktionsmethoden ist das einzige allgemeine Resultat der schon in 3.3.1 zitierte Satz von Hall/Paige [53].

6.2 Netze mit Singergruppe

Bekanntlich besitzt jede endliche desarguessche projektive Ebene eine sowohl auf den Punkten als auch auf den Geraden regulär operierende, zyklische Automorphismengruppe (Singer [108]). Es ist daher üblich, jede auf den Punkten wie auf den Geraden einer Struktur reguläre Gruppe als *Singergruppe* zu bezeichnen. Dazu muß natürlich insbesondere die Anzahl der Punkte gleich der Anzahl der Geraden sein. Bei (s, r)-Netzen bedeutet das s = r; ein solches Netz ist aber äquivalent zu einer affinen Ebene der Ordnung s, aus der eine Parallelenklasse entfernt wurde. Insbesondere ist es gleichzeitig ein (s, s)-TD (die Punktklassen sind die Geraden der entfernten Parallelenklasse). Wir definieren nun:

6.2.1 **Definition.** Ein *symmetrisches* Netz der Ordnung s ist ein (s, s)-Netz $\mathcal{D}$. Eine Gruppe G von Automorphismen von $\mathcal{D}$ heißt eine *Singergruppe* von $\mathcal{D}$, wenn G auf den Punkten wie auf den Geraden von $\mathcal{D}$ regulär operiert.

Eine bekannte Vermutung besagt, daß jede endliche projektive Ebene mit einer Singergruppe desarguessch ist. Für symmetrische Netze gibt es hingegen viele Beispiele, die zu nicht-desarguesschen Ebenen gehören. Die folgende Konstruktion geht auf Hughes [60] zurück.

6.2.2 **Satz** (Hughes [60], Jungnickel [69]). $\mathcal{E}$ sei eine affine Ebene der Ordnung q über einem Divisionsring K (= distributiver Quasikörper), vgl. etwa Hughes/Piper [61]. Dann besitzt das durch Entfernen einer Parallelenklasse aus $\mathcal{D}$ entstehende symmetrische Netz eine Singergruppe G. Genau dann ist G abelsch, wenn K es ist. In diesem Fall ist G isomorph zu $EA(q^2)$, falls q ungerade ist, bzw. zu $\mathbf{Z}_4 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_4$, falls q gerade ist.

Den Beweis dieses Satzes findet man in [69, § 3]. Symmetrische Netze mit Singergruppe lassen sich kombinatorisch durch spezielle „relative Differenzenmengen" beschreiben, vgl. [69].

*) Eine analoge Verallgemeinerung für $p \notin L$ wird durch bestimmte „generalized balanced weighing matrices" erzielt, die dann aber nicht auf Netze, sondern auf andere Sorten von GDD's führen, vgl. Jungnickel [69, § 6].

6.3 Punkt- und fahnenreguläre TD's

Vor einigen Jahren fragte Lenz nach der Existenz von TD's mit punktregulärer Automorphismengruppe. Satz 6.2.2 gibt Beispiele hierfür im symmetrischen Fall s = r. Weitere Beispiele erhält man aus Frobeniusgruppen:

6.3.1 Satz (Jungnickel [68]). G sei eine Frobeniusgruppe des Gerades s mit Frobeniuskern N und Frobeniuskomplement A der Ordnung r. Dann ist $\mathcal{D}(G)$ mit Punktmenge G und Geradenmenge $\{mAn : m, n \in N\}$ ein (s, r)-TD mit G als punktregulärer Automorphismengruppe (G operiert durch Rechtstranslation).

Man kann zeigen, daß $\mathcal{D}(G)$ sogar eine fahnenreguläre (also auf inzidenten Punkt-Geraden-Paaren reguläre) Automorphismengruppe isomorph zum halbdirekten Produkt von A mit N x N zuläßt. Außerdem habe ich in [68] gezeigt, daß die Singergruppen aus Satz 6.2.2 ebenfalls in eine fahnenreguläre Gruppe eingebettet werden können. Frobeniusgruppen existieren insbesondere für jede Primzahlpotenz s (als Grad) und jeden Teiler r von s − 1 (als Ordnung des Frobeniuskomplements). Für jedes solche Paar (s, r) gibt es jedoch noch mindestens ein weiteres, nichtisomorphes (s, r)-TD mit einer punktregulären Gruppe, die ebenfalls in eine fahnenreguläre Gruppe eingebettet werden kann, siehe [68]. Vor kurzem hat Schulz [101] eine weitere Klasse von TD's aus Frobeniusgruppen konstruiert; wie in 6.3.1 operiert auch hier die Frobeniusgruppe durch Rechtstranslation. Schulz konnte auch beachtliche Fortschritte hinsichtlich einer Klassifikation aller TD's, die eine Frobeniusgruppe als Translationsgruppe zulassen, erzielen. Dagegen scheint eine Klassifikation aller fahnenregulären TD's in Anbetracht der verschiedenartigen Beispielklassen zur Zeit noch aussichtslos.

Wir wollen schließlich noch die aufgrund der Sätze 6.2.2 und 6.3.1 bekannten Parameter von fahnenregulären TD's vermerken:

6.3.2 Beispiele. Ein fahnenreguläres (s, r)-TD existiert mindestens in den folgenden Fällen:

a) s Primzahlpotenz, s = r;
b) r teilt $q_i - 1$ für jeden Faktor q_i in der Primzahlpotenzzerlegung $a = q_1 \ldots q_n$ von s.

7 Verallgemeinerungen

Die bisher behandelten (s, r)-Netze haben eine natürliche Verallgemeinerung zu sogenannten „(s, r; μ)-Netzen", bei denen sich nicht-parallele Geraden (dann meist „Blöcke" genannt) in genau μ Punkten schneiden (bisher war also stets $\mu = 1$). In diesem Abschnitt will ich einige Verallgemeinerungen bisher dargestellter Ergebnisse auf diese größere Klasse von Netzen behandeln; es werden sich aber auch einige neuartige Probleme ergeben.

7.1 Grundlagen

7.1.1 Definition. P sei eine Menge von $s^2\mu$ *Punkten* und $\mathcal{B}$ eine Menge von $s\mu$-Teilmengen von P, die man *Blöcke* nennt. Ferner gebe es eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{B}$ (die *Parallelität* $\|$), für die jede Äquivalenzklasse eine Zerlegung der Punktmenge ist. Schließlich sollen sich je zwei nicht-parallele Blöcke in genau μ Punkten schneiden. Wenn $\mathcal{B}$ in r Parallelenklassen zerfällt, heißt $\mathcal{D} = (P, \mathcal{B}, \|)$ ein (s, r; μ)-Netz (ausführlicher: ein *Netz* der *Ordnung* s, des *Grades* r und vom *Index* μ).

In der Sprache der Design-Theorie sind die (s, r; μ)-Netze genau die affinen 1-Designs, vgl. Beth/Jungnickel/Lenz [6]. Die duale Struktur zu einem (s, r; μ)-Netz heißt ein (s, r; μ)-TD. Ich erwähne zunächst eine Schranke für r, die von vielen Autoren in verschiedenen äquivalenten Situationen (z. B. für eine entsprechende Verallgemeinerung der OA's aus 1.1.3) gefunden worden ist. Zum ersten Mal wurde sie wohl von Plackett/Burmann [93] bewiesen.

7.1.2 Satz. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r; μ)-Netz. Dann gilt $r \leqslant \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ mit Gleichheit genau dann, wenn je zwei Punkte von $\mathcal{D}$ auf genau $\lambda = \frac{s\mu - 1}{s - 1}$ Blöcken liegen (d. h., wenn $\mathcal{D}$ ein Blockplan ist).

Einen Beweis hierfür findet man z. B. in [6, II.8.8]. Falls $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ ist, muß natürlich $s - 1$ ein Teiler von $\mu - 1$ sein. Andernfalls läßt sich die Schranke aus 7.1.2 etwas verbessern:

7.1.3 Satz (Bose/Bush [13]). $\mathcal{D}$ sei ein (s, r; μ)-Netz mit $\mu - 1 = a(s - 1) + b$ für ein b mit $0 < b < s - 1$. Dann gilt $r \leqslant s\mu + \mu + a - \rho$, wobei $\rho = -(s - b - \frac{1}{2}) + \sqrt{s(s - 1 - b) + \frac{1}{4}}$ ist.

Einen Beweis für diesen Satz und einige Beispiele, für die die angegebene Schranke für r angenommen wird, findet man in [6, X. § 6]. Die Konstruktion dieser Beispiele werde ich in 7.2.7 skizzieren. Wenn es in einem Netz unverbundene Punktepaare gibt, können diese Schranken weiter verstärkt werden. Das folgende Resultat stammt von Hine/Mavron [58], siehe auch [6, II.8.18].

7.1.4 Satz. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r; μ)-Netz. Wenn es in $\mathcal{D}$ unverbundene Punktepaare gibt, gilt $r \leqslant s\mu$. Im Falle der Gleichheit induziert das Unverbundensein auf der Punktmenge eine Äquivalenzrelation (die Äquivalenzklassen seien als *Punktklassen* bezeichnet).

7.1.5 Definition. Ein *symmetrisches* (s, sμ; μ)-Netz ist ein Netz, dessen duale Struktur ebenfalls ein (s, sμ; μ)-Netz ist. Mit anderen Worten: Die Punktklassen aus 7.1.4 haben alle die Größe s und je zwei Punkte in verschiedenen Klassen haben genau μ Verbindungsblöcke.

Man kann noch zeigen, daß die zweite Bedingung automatisch erfüllt ist, wenn die Punktklassen Größe s haben (Hine/Mavron [58], Jungnickel [63]).

7.2 Existenzsätze

Der einzige bekannte Satz, der den Ergebnissen aus 2.4.6 und 2.5.3 für $\mu > 1$ entspricht, stammt von Hanani [55]; einen vereinfachten Beweis findet man in Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 2].

7.2.1 **Satz.** Es sei $\mu > 1$. Dann gibt es für jedes s ein (s, 7; μ)-Netz.

Es sind jedoch einige weitere Klassen von Netzen mit großem r bekannt. Zunächst erwähne ich alle bekannten Parameter, für die r die Schranke aus 7.1.2 annimmt.

7.2.2 **Beispiele.** Es gibt ein (s, r; μ)-Netz mit $r = \frac{s^2\mu - 1}{s-1}$ mindestens in den folgenden Fällen:

a) s Primzahlpotenz, $\mu = s^{d-2}$ für eine natürliche Zahl $d \geqslant 2$. (Beispiele erhält man, indem man die Punkte und Hyperebenen im affinen Raum AG(d, q) betrachtet; es gibt jedoch weitere Beispiele. Vor kurzem haben Jungnickel/Vedder [73] gezeigt, daß für $q \neq 2$ stets mindestens 3 nicht-isomorphe Beispiele existieren, vgl. auch Mavron [84].)

b) s = 2 und 2μ Ordnung einer Hadamard-Matrix. (Eine Einführung in die Theorie der Hadamard-Matrizen findet man z. B. in [6, I. § 9]. Eine bekannte Vermutung besagt, daß derartige Matrizen für jede durch 4 teilbare Ordnung existieren. Ein neuerer Übersichtsartikel ist der von Hedayat/Wallis [57].)

Man vermutet, daß hiermit bereits alle möglichen Parameter aufgeführt sind; ein sehr interessanter Übersichtsartikel über die hier vorliegenden „affinen Blockpläne" stammt von Shrikhande [104].
Weitere Beispiele von Netzen mit großem r erhält man aus den symmetrischen Netzen. Hier ist folgendes bekannt:

7.2.3 **Beispiele.** Ein symmetrisches (s, sμ; μ)-Netz existiert mindestens in den folgenden Fällen:

a) p Primzahl, $s = p^i$, $\mu = p^j$ ($i \geqslant 1, j \geqslant 0$ beliebig) (Bose/Bush [13]);
b) s Primzahlpotenz, $\mu = 2$ (Jungnickel [63]);
c) s Primzahlpotenz, $\mu = s - 1$ Primzahlpotenz (Rajkundlia [96], Seberry [102]);
d) s = 3, $\mu = 4$ (Raukunklia [96]).

Dazu kommt folgende rekursive Konstruktion: Aus der Existenz für (s, μ) und für (s, μ') folgt die für (s, s$\mu\mu'$) (Shrikhande [103]).

Diese Konstruktionen erfolgen am einfachsten über eine Verallgemeinerung der Differenzenmatrizen aus 2.1.2:

7.2.4 **Definition.** G sei eine Gruppe der Ordnung s. Eine (s, r; μ)-*Differenzenmatrix* über G ist eine ($r \times s\mu$)-Matrix $D = (d_{ij})$ mit Einträgen aus G, so daß für $h \neq i$ ($h, i = 1, \ldots, r$) stets unter den Differenzen $d_{hj} - d_{ij}$ ($j = 1, \ldots, s$) jedes Element von G genau μ-mal vorkommt.

Dann gilt (Jungnickel [63]):

7.2.5 **Satz.** D sei eine (s, r; μ)-Differenzenmatrix. Dann gilt $r \leqslant s\mu$ mit Gleichheit genau dann, wenn auch $-D^T$ eine Differenzenmatrix ist (D heißt dann eine *verallgemeinerte Hadamard-Matrix*). Aus der Existenz von D folgt die Existenz eines (s, r + 1; μ)-Netzes und für $r = s\mu$ eines symmetrischen (s, sμ; μ)-Netzes.

Den Beweis findet man in [63] oder in [6, VIII. § 3]. Ich will kurz zeigen, wie man nun etwa die Beispiele 7.2.3.a) leicht konstruieren kann. Wie in § 2.1 erläutert, ist die Multiplikationstafel M von $GF(p^{i+j})$ eine $(p^{i+j}, p^{i+j}; 1)$-Differenzenmatrix über $EA(p^{i+j}) =: H$. Sei N eine Untergruppe der Ordnung p^j von H. Dann ist das Bild von M unter dem kanonischen Epimorphismus von H auf $G := H/N$ eine $(p^i, p^{i+j}; p^j)$-Differenzenmatrix.

Oft kann man aus einem symmetrischen Netz noch wesentlich größere Netze erhalten. Dazu ist der folgende Satz von Jungnickel/Sane [72] wichtig, dessen Grundidee auf Shrikhande [103] zurückgeht:

7.2.6 Satz. $\mathcal{D}$ sei ein symmetrisches $(s, s\mu; \mu)$-Netz. Genau dann läßt sich $\mathcal{D}$ durch Hinzufügen von $r \geqslant 3$ Parallelenklassen zu einem $(s, s\mu + r; \mu)$-Netz $\mathcal{D}'$ erweitern, wenn s ein Teiler von μ ist und wenn es ein $(s, r; \mu/s)$-Netz $\mathcal{E}$ gibt.

Beweisskizze. Man wählt eine Bijektion α von der Punktmenge von $\mathcal{E}$ auf die Menge der Punktklassen von $\mathcal{D}$. Als neue Blöcke fügt man zu $\mathcal{D}$ die Mengen $B^\alpha = \bigcup_{p \in B} p^\alpha$ für jeden Block B von $\mathcal{D}$ hinzu. Dies zeigt den konstruktiven Teil. Für Einzelheiten und die Umkehrung verweise sich auf [6, X.11.4].

Man überlegt sich leicht, daß das Netz $\mathcal{D}'$ aus 7.2.6 genau dann maximal*) ist, wenn dies für $\mathcal{E}$ gilt. Es ist ebenfalls leicht einzusehen, daß jedes symmetrische Netz mit $s \nmid \mu$ sich um eine, aber nicht um 2 Parallelenklassen erweitern läßt. Durch rekursive Anwendung von 7.2.6 folgt daher

7.2.7 Satz (Jungnickel/Sane [72]). s und t seien natürliche Zahlen mit $s \geqslant 2$ und $s \nmid t$. Falls für jedes $n \geqslant 0$ eine symmetrisches $(s, ts^{n+1}; ts^n)$-Netz existiert, gibt es ein maximales $(s, t(s^{n+1} + s^n + \ldots + s) + 1; ts^n)$-Netz (für alle n).

Wegen 7.2.3 kann man in 7.2.7 wenigstens die folgenden Fälle erreichen: a) $s = p^i$, $t = p^j$ (p Primzahl, $i > j$); b) s ungerade Primzahlpotenz, $t = 2$; c) s und $t = s - 1$ Primzahlpotenzen; d) $s = 3$, $t = 4$. Man beachte, daß die in 7.2.7 konstruierten Netze nie die Schranke aus 7.1.2 erreichen; die eben in b) genannten Beispiele erreichen aber die Bose-Bush-Schranke aus 7.1.3. In den angegebenen Beispielen ist auch $s - 1$ kein Teiler von $\mu - 1$; große maximale Netze, die diese Bedingung erfüllen, behandle ich im nächsten Teilabschnitt.

7.3 Komplettierung

In diesem Teilabschnitt sei $\mathcal{D}$ stets ein $(s, r; \mu)$-Netz, für welches $s - 1$ ein Teiler von $\mu - 1$ ist. Wegen 7.1.2 ist die folgende (zu 3.1.1 analoge) Definition sinnvoll:

7.3.1 Definition. Die *Defizienz* von $\mathcal{D}$ ist die Zahl $d = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1} - r$. Wenn $\mathcal{D}$ durch Hinzufügen von d Parallelenklassen zu einem $(s, r + d; \mu)$-Netz erweitert werden kann, heißt $\mathcal{D}$ *komplettierbar*.

Das Komplettierungsproblem für Netze mit $\mu > 1$ ist offenbar sehr viel schwieriger als das im Fall $\mu = 1$. Vollständig gelöst sind nur die Fälle $d = 1$ und $d = 2$.

7.3.2 Satz. Für $d = 1$ ist $\mathcal{D}$ stets komplettierbar (Shrikhande/Bhagwandas [105]). Für $d = 2$ und $s \neq 4$ ist $\mathcal{D}$ ebenfalls komplettierbar (Shrikhande/Singhi [106]).

---

*) Dieser Begriff ist analog zu 3.2.1 zu definieren.

Einen verhältnismäßig einfachen (aber immer noch umfangreichen) Beweis für diesen Satz, der im wesentlichen von Jungnickel/Sane [72] stammt, findet man in Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 10]. Bereits der folgende Satz benötigt zum Beweis „stark reguläre Multigraphen“:

7.3.4 **Satz** (Shrinkhande/Singhi [107]). Für $d = 3$ und $s \geqslant 104$ ist $\mathcal{D}$ komplettierbar.

Im übrigen ist für $d \geqslant 4$ nur noch bekannt, daß $\mathcal{D}$ für $d \leqslant 6$ und $s = 2$ komplettierbar ist (Verheiden [119]). Der folgende Satz von Jungnickel/Sane [72] zeigt, daß das Komplettierungsproblem für $\mu > 1$ in der Tat mindestens so schwer ist wie das für $\mu = 1$:

7.3.4 **Satz.** Es sei s eine Primzahlpotenz. Wenn es ein maximales Netz der Ordnung s und der Defizienz d für den Index $\mu_0 = 1$ gibt, so gilt das auch für jeden Index μ der Form $\mu = s^n$.

Zum Beweis verwendet man wieder 7.2.6. Beispiele erhält man nun mit den Resultaten aus Abschnitt 3; z. B. können wir für $s \equiv 0$ oder 1 mod 4 stets $d = s - 2$ wählen (3.3.1 und 3.3.2). Insbesondere gibt es für $s = 4$ ein maximales Netz der Defizienz 3 und des Index 4^n für alle n; die Ausnahme in Satz 7.3.2 ist also notwendig.

7.4 Charakterisierungen

Geometrische Konfigurationen (mit denen man ja für $\mu = 1$ z. B. die „klassischen“ affinen Ebenen, also die desarguesschen, charakterisiert) scheinen für allgemeine Netze noch nicht untersucht zu sein. Man hat hier aber Charakterisierungen „klassischer“ Beispiele durch kombinatorische Bedingungen oder Transitivitätseigenschaften ihrer Automorphismengruppen. Wir benötigen eine Definition:

7.4.1 **Definition.** p und q seien zwei verbundene Punkte in einer Inzidenzstruktur $\mathcal{D}$. Die *Gerade* durch p und q ist der Schnitt aller mit p und q inzidenten Blöcke.

Man beachte, daß diese Definition für Netze mit $\mu = 1$ mit der alten Terminologie übereinstimmt. Ferner erhält man für die Netze, die aus den affinen Räumen AG(d, q) wie in 7.2.2.a) konstruiert sind, tatsächlich den üblichen Geradenbegriff. Der Leser überzeuge sich, daß je zwei verbundene Punkte auf einer eindeutig bestimmten Geraden liegen, falls die Anzahl der Verbindungsblöcke für je zwei verbundene Punkte in $\mathcal{D}$ konstant ist. Die affinen Räume können nun wie folgt charakterisiert werden:

7.4.2 **Satz** (Dembowski [35]). $\mathcal{D}$ sei ein $(s, r; \mu)$-Netz mit $r = \dfrac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ und $s > 2$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $\mathcal{D}$ besteht aus den Punkten und Hyperebenen eines affinen Raumes AG(d, q).
(ii) Jede Gerade von $\mathcal{D}$ hat genau s Punkte.
(iii) Aut $\mathcal{D}$ operiert transitiv auf nicht-kollinearen Punktetripeln.

Die Voraussetzungen von 7.4.2 können noch etwas abgeschwächt werden; außerdem gibt es weitere äquivalente Bedingungen (z. B. über „Ebenen“). Auch der Fall

$s = 2$ kann behandelt werden (Dembowski [76]). Eine ausführliche Darstellung dieses Themas findet man in Beth/Jungnickel/Lenz [6, XII. § 3]. Ich will jetzt noch einen analogen Satz für symmetrische Netze angeben. Die klassischen Beispiele erhält man hier, indem man aus dem projektiven Raum PG(d, q) eine Hyperebene H mit allen ihren Punkten und einen Punkt $p \in H$ mit allen seinen Hyperebenen entfernt und die übrigen Punkte und Hyperebenen als Punkte und Blöcke wählt*). Dann gilt der folgende Satz, den ich der Einfachheit halber wieder nur für $s > 2$ angebe:

7.4.3 Satz (Mavron [83]). Ein symmetrisches $(s, s\mu; \mu)$-Netz $\mathcal{D}$ mit $s > 2$ ist genau dann aus einem projektiven Raum PG(d, q) konstruiert (wie eben beschrieben), wenn jede Gerade von $\mathcal{D}$ genau s Punkte hat.

Für weitere äquivalente Eigenschaften (z. B. Transitivitätsforderungen) verweise ich auf Jungnickel [67]. Allgemeine Aussagen über die Anzahl nichtisomorpher Netze mit den Parametern aus 7.4.2 bzw. 7.4.3 findet man bei Mavron [84].

7.5 Translationsnetze

In diesem und dem nächsten Teilabschnitt will ich Gruppen von $(s, r; \mu)$-Netzen betrachten und wieder mit *Translationsnetzen* beginnen, die genau wie in 5.1.1 definiert sind. Wie in 5.1.3 sind Translationsnetze und PCP's äquivalent, wenn man definiert:

7.5.1 Definition. G sei eine Gruppe der Ordnung $s^2\mu$. Eine Menge $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ von Untergruppen der Ordnung $s\mu$ von G heißt eine $(s, r; \mu)$-PCP in G, wenn stets $|U_i \cap U_j| = \mu$ gilt (für $i \neq j$).

Beispiele erhält man gemäß 7.2.2.a), da die affinen Räume offenbar Translationsnetze ergeben. Einige rekursive Verfahren, die es unter anderem gestatten, symmetrische $(p^i, p^{i+j}; p^j)$-Translationsnetze (i, j beliebig) sowie Translationsnetze mit den Parametern aus 7.2.7 für $s = p^i$ und $t = p^j$ $(i > j)$ für Primzahlen p zu konstruieren, findet man bei Jungnickel [65]. Weiter gilt eine Analogon von Satz 5.2.2 (Drake/Jungnickel [43]), das die Existenzfrage für PCP's in nilpotenten Gruppen wieder auf den Fall von p-Gruppen zurückführt. Von besonderem Interesse ist dann die folgende Verallgemeinerung von Satz 5.2.7:

7.5.2 Satz (Jungnickel [65]). $\mathcal{U}$ sei eine $(p^i, r; p^j)$-PCP in einer Gruppe G. Wenn G nicht elementar-abelsch ist, gilt $r \leqslant p^{i+j-1} + \ldots + p + 1$.

Schulz [100] hat gezeigt, daß ein Translationsnetz mit $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ notwendigerweise als Translationsgruppe eine p-Gruppe hat. Mit 7.5.2 folgt dann:

7.5.3 Satz. Ein $(s, r; \mu)$-Translationsnetz mit $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ und Translationsgruppe G existiert genau dann, wenn s eine Primzahlpotenz, μ eine Potenz von s und $G = EA(s^2\mu)$ ist.

---

*) Die analoge Situation für $p \notin H$ liefert bestimmte GDD's, die von Jungnickel/Vedder [73] charakterisiert worden sind.

Ähnlich gilt auch

7.5.4 Satz (Jungnickel [70]). Ein symmetrisches (s, sμ; μ)-Translationsnetz mit Translationsgruppe G existiert genau dann, wenn s und μ Potenzen derselben Primzahl p sind und G elementar-abelsch ist.

Die Beweise von 7.5.3 und 7.5.4 verwenden (außer 7.4.2) die Klassifikation der endlichen Gruppen mit Partition. Alternativbeweise, die ohne dieses recht tiefliegende Hilfsmittel auskommen, wurden kürzlich von Hine/Mavron [59] gegeben. Abschließend sei noch erwähnt, daß man einen Zusammenhang zwischen PCP's und einer Verallgemeinerung der in § 5.3 betrachteten t-Teilfaserungen in endlichen projektiven Räumen bei Drake/Freeman [42] findet.

7.6 Gruppen auf TD's und Netzen

Zum Abschluß dieses Kapitels will ich noch kurz auf andere Typen von Gruppen auf TD's bzw. Netzen eingehen. Wie in 6.1.1 kann man *klassenreguläre* (s, r; μ)-TD's definieren; diese sind dann (analog zu 6.1.3) zu (s, r; μ)-Differenzenmatrizen äquivalent. Abgesehen von Satz 7.2.5 und einigen Konstruktionsmethoden (siehe Jungnickel [63]) ist das einzige allgemeine Resultat die folgende Verallgemeinerung des Hall-Paige-Theorems 3.3:

7.6.1 Satz (Drake [41]). D sei eine (s, r; μ)-Differenzenmatrix über einer Gruppe G. Wenn s gerade, μ ungerade und die 2-Sylowgruppe von G zyklisch ist, folgt $r \leqslant 2$.

Den Beweis findet man in [41] oder in [6, X. 12.2]. Als nächstes komme ich zu symmetrischen Netzen mit Singergruppe, die analog zu 6.2.1 erklärt sind. Aus den Beispielen in 6.2.2 erhält man in geeigneten Faktorgruppen Beispiele für alle Paare (s, μ), bei denen s und μ Potenzen derselben Primzahl sind. Im übrigen scheinen nur noch einige Beispiele für s = 2 und ein Nichtexistenzsatz (ebenfalls für s = 2) bekannt zu sein. Für diese Ergebnisse und den Zusammenhang zu verallgemeinerten Hadamard-Matrizen (vgl. 7.2.5) verweise ich auf Jungnickel [69, § 3 und § 7]. Weitere Beispiele von punkt- bzw. fahnenregulären TD's sind für $\mu > 1$ bislang anscheinend nicht gefunden worden (abgesehen von Translationsnetzen).

Wie schon in § 7.4 angedeutet, sind symmetrische Netze bzw. Netze mit $r = \dfrac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ und einer hochgradig transitiven Gruppe automatisch klassisch. Im übrigen kennt man eine weitere Klasse von symmetrischen Netzen mit ziemlich großer Gruppe, die von Jungnickel [67] stammt:

7.6.2 Satz. s und μ seien Potenzen derselben Primzahl p. Dann gibt es ein symmetrisches (s, μ)-Netz mit einer Gruppe G, die auf Paaren verbundener Punkte transitiv operiert.

8 Ausblick

Zum Abschluß dieser Übersicht möchte ich noch kurz einige verwandte Themen erwähnen und auf einige offene Fragen hinweisen.

8.1 Weitere Themen

In der Literatur sind viele spezielle Typen von lateinischen Quadraten untersucht worden. Mit am interessantesten scheinen mir die *selbst-orthogonalen* lateinischen Quadrate (kurz: SOLS), d. h. lateinische Quadrate L, die zu ihrem transponierten Quadrat L^T orthogonal sind. Es gilt die folgende Verstärkung von Satz 2.2.3:

8.1.1 Satz (Brayton/Coppersmith/Hofman [16]). Ein SOLS der Ordnung s existiert für alle $s \neq 2, 3, 6$.

Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen SOLS und PBD's (siehe 2.3.1), deren Blöcke sämtlich Länge $\neq 2, 3, 6$ haben, vgl. Drake/Larson [44]. Auch über SOLS mit Unter-SOLS sind interessante Ergebnisse erzielt worden, vgl. Drake/Lenz [45]. Ich möchte noch zwei weitere Klassen von lateinischen Quadraten kurz erwähnen: „Sequenzierbare“ Gruppen führen auf einen in statistischen Anwendungen nützlichen Spezialfall von lateinischen Quadraten, vgl. Dénes/Keedwell [38] und Keedwell [75]. Schließlich heißt eine Menge von lateinischen Quadraten „spaltenorthogonal“ (kurz: eine Menge von COLS), wenn je zwei Spalten verschiedener Quadrate höchstens in einer Zeile denselben Eintrag haben. Die Existenz von affinen Ebenen der Ordnung s ist dann äquivalent zur Existenz von s COLS der Ordnung $s - 1$, vgl. Vedder [118].
Eine Verallgemeinerung der Netze auf höhere Dimensionen geht auf Laskar [77] zurück. Ähnlich wie in der klassischen Geometrie sind alle Netze der Dimension $\geqslant 3$ aus projektiven Räumen konstruierbar, vgl. Sprague [109], [110].

8.2 Offene Fragen

Ich möchte jetzt einige m. E. besonders wichtige offene Probleme angeben:

1) Gibt es Nicht-Primzahlpotenzen s mit $N(s) = s - 1$? (Das ist die berühmte, lange offene Frage nach Ebenen, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist.)

2) Verbesserung der Schranken für die n_k aus § 2.5.

3) Verbesserung des Exponenten a in der asymptotischen Existenzaussage nach 2.5.1.

4) Gibt es unendliche Folgen von Nicht-Primzahlpotenzen s mit $N(s) \geqslant \sqrt{s}$ oder vielleicht sogar $N(s) \geqslant cs$ (für eine Konstante c)? Insbesondere: Gilt die Vermutung $N(4p) \geqslant 2p - 1$ für Primzahlen p?

5) Weitere Beispiele von maximalen Netzen kleiner Defizienz, insbesondere auch für Werte $s = p^{2a+1}$ (p Primzahl).

6) Gilt Vermutung 5.2.12?

7) Sind die Schranken in 5.2.7 bestmöglich?

8) Ebenso für 5.2.8. Kann man vielleicht T(G) für abelsche p-Gruppen exakt bestimmen?

9) Alle bekannten maximalen 1-Faserungen haben Defizienz $\geqslant q - 1$. Gilt die oft geäußerte Vermutung, daß die Schranke aus 5.3.4 in der Tat $r \leqslant q^2 - q + 2$ lauten sollte?

10) Die analoge Frage für t-Teilfaserungen.

11) Unter welchen Bedingungen ist das zu einer t-Teilfaserung (oder zu einer PCP) gehörende Netz maximal?

12) Muß eine (s, s)-Differenzenmatrix stets über einer elementar-abelschen Gruppe definiert sein? Ist die zu einer (p, p)-Differenzenmatrix (p Primzahl) gehörende affine Ebene stets desarguessch?

13) Weitere Nicht-Existenzsätze für Differenzenmatrizen.

14) Klassifikation der symmetrischen Netze mit Singergruppe (oder wenigstens der auftretenden Parameter).

15) Klassifikation der fahnenregulären TD's.

16) Weitere Beispiele (oder Nichtexistenz-Sätze) für verallgemeinerte Hadamardmatrizen.

17) Gilt die Vermutung, daß jedes (s, r; μ)-Netz mit $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ Parameter wie in 7.2.2 hat? Wie groß ist die Anzahl der nichtisomorphen Beispiele für gegebene Parameter?

18) Komplettierung von (s, r; μ)-Netzen mit Defizienz $d \geqslant 4$.

19) Bessere Schranken für die PCP's aus § 7.5.

20) Klassifikation der symmetrischen Netze mit einer Gruppe, die auf Paaren verbundener Punkte transitiv operiert (vgl. 7.6.2).

Insgesamt hoffe ich, mit diesem Übersichtsartikel gezeigt zu haben, daß die Geometrien und Gruppen, die zu lateinischen Quadraten gehören, ein umfangreiches und interessantes Thema darstellen. Von besonderem Reiz erscheint mir dabei die Verknüpfung kombinatorischer, algebraischer, geometrischer und zahlentheoretischer Methoden. Obwohl die Literatur zu diesem Thema umfangreich ist und schon viele interessante Ergebnisse erzielt worden sind, bleiben doch noch sehr viele Probleme offen. Es sollte mich freuen, wenn einer meiner Leser dazu angeregt würde, etwa eines der zwanzig oben genannten Probleme zu lösen.

Ach, Luise, laß ... das ist ein *zu* weites Feld.
(Fontane)

Literatur

[0] André, J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60** (1954) 156–186

[1] Baer, R.: Nets and groups I. Trans. Amer. Math. Soc. **46** (1939) 110–141

[2] Barlotti, A.; Strambach, K.: The geometry of binary systems. Erscheint in Adv. Math.

[3] Beth, T.: Einige Bemerkungen zur Abschätzung der Anzahl der orthogonalen lateinischen Quadrate mittels Siebverfahren. Abh. Math. Sem. Hamburg **53** (1983) 284–288

[4] Beth, T.; Jungnickel, D.: Mathieu groups, Witt designs, and Golay codes. In: Geometries and groups. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1981. = Lecture Notes in Mathematics **893**, 157–179

[5] Beth, T.; Jungnickel, D.: Variations on 7 points. An introduction to the scope and methods of Coding Theory and Finite Geometries. Aequat. Math. **23** (1982) 153–176

[6] Beth, T.; Jungnickel, D.; Lenz, H.: Design Theory. Mannheim: B. I. Wissenschaftsverlag 1984

[7] Betten, D.: Zum Satz von Euler-Tarry. Math. Nat. Unt. **36** (1983) 449–453

[8] Beutelspacher, A.: Blocking sets and partial spreads in finite projective spaces. Geom. Ded. **9** (1980) 425–449

[9] Blaschke, W.: Einführung in die Geometrie der Waben. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1955

[10] Blaschke, W. / Bol, G.: Geometrie der Gewebe. Berlin: Springer 1938
[11] Bol, G.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie, 65. Gewebe und Gruppen. Math. Ann. **114** (1937) 414–431
[12] Bose, R. C.: On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. Eugenics **9** (1939) 353–399
[13] Bose, R. C. / Bush, K. A.: Orthogonal arrays of strength two and three. Ann. Math. Stat. **23** (1952) 508–524
[14] Bose, R. C. / Shrikhande, S. S.: On the construction of sets of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of a conjecture of Euler. Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960) 191–209
[15] Bose, R. C. / Shrikhande, S. S. / Parker, E. T.: Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture. Canad. J. Math. **12** (1960) 189–203
[16] Brayton, R. K. / Coppersmith, D. / Hoffman, A. J.: Self-orthogonal Latin squares. In: Coll. Internazianale sulle Teorie Combinatorie, Roma 1973. Atti del convegni Lincei **17**, Tomo II (1976) 509–517
[17] Brouwer, A. E.: The number of mutually orthogonal Latin squares. Math. Centrum Amsterdam Report ZW 123/79 (1979)
[18] Brouwer, A. E.: A series of separable designs with application to pairwise orthogonal Latin squares. Europ. J. Comb. **1** (1980) 39–41
[19] Brouwer, A. E.: On the existence of 30 mutually orthogonal Latin squares. Math. Centrum Amsterdam Report ZW 136/80 (1980)
[20] Brouwer, A. E. / Van Rees, G. H.: More mutually orthogonal Latin squares. Dicr. Math. **39** (1982) 263–281
[21] Bruck, R. H.: Finite nets I. Numerical invariants. Canad. J. Math. **3** (1951) 94–107
[22] Bruck, R. H.: A survey of binary systems. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1958
[23] Bruck, R. H.: Finite nets II. Uniqueness and embedding. Pacific J. Math. **13** (1963) 421–457
[24] Bruck, R. H.: What is a loop? In: Studies in modern algebra. Math. Assoc. of America (1963) pp. 59–99
[25] Bruck, R. H. / Ryser, H. J.: The nonexistence of certain finite projective planes. Canad. J. Math. **1** (1949) 88–93
[26] Bruen, A. A.: Partial spreads and replaceable nets. Canad. J. Math. **23** (1971) 381–391
[27] Bruen, A. A.: Unembeddable nets of small deficiency. Pacific J. Math. **43** (1972) 51–54
[28] Bruen, A. A.: Collineations and extensions of translation nets. Math. Z. **145** (1975) 243–249
[29] Bruen, A. A.: Blocking sets and skew subspaces of projective space. Canad. J. Math. **32** (1980) 628–630
[30] Bruen, A. A.: Blocking sets and translation nets. In: Finite Geometries (eds. N. L. Johnson, M. H. Kallaher, C. T. Long). New York – Basel: Marcel Dekker 1983, pp. 77–92
[31] Bruen, A. A. / Freeman, J. W.: Intersections of t-reguli, rational curves, and orthogonal Latin squares. Lin. Alg. Appl. **46** (1982) 103–116
[32] Bruen, A. A. / Silverman, R.: Switching sets in PG(3, q). Proc. Amer. Math. Soc. **43** (1974) 176–180
[33] Bruen, A. A. / Thas, J. A.: Partial spreads, packings and Hermitian manifolds in PG(3, q). Math. Z. **151** (1976) 207–214
[34] Chowla, S. / Erdös, P. / Straus, E. G.: On the maximal number of pairwise orthogonal Latin squares of given order. Canad. J. Math. **12** (1960) 204–208
[35] Dembowski, P.: Eine Kennzeichnung der endlichen affinen Räume. Arch. Math. **15** (1964) 146–154
[36] Dembowski, P.: Berichtigung und Ergänzung zu „Eine Kennzeichnung der endlichen affinen Räume". Arch. Math. **18** (1967) 111–112
[37] Dembowski, P.: Finite geometries. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1968
[38] Dénes, J. / Keedwell, A. D.: Latin squares and their applications. London: English Universities Press 1974

[39] Dow, S.: Transversal-free nets of small deficiency. Arch. Math. **41** (1983) 472–474
[40] Drake, D. A.: Maximal sets of Latin squares and partial transversals. J. Stat. Planning Inf. **1** (1977) 143–149
[41] Drake, D. A.: Partial λ-geometries and generalized Hadamard matrices over groups. Canad. J. Math. **31** (1979) 617–627
[42] Drake, D. A. / Freeman, J. W.: Partial t-spreads and group constructible (s, r, μ)-nets. J. Geom. **13** (1979) 210–216
[43] Drake, D. A. / Jungnickel, D.: Klingenberg structures and partial designs II. Regularity and uniformity. Pacific J. Math. **77** (1978) 389–415
[44] Drake, D. A. / Larson, J. A.: Pairwise balanced designs whose line sizes do not divide six. J. Comb. Th. (A) **34** (1983) 266–300
[45] Drake, D. A. / Lenz, H.: Orthogonal Latin squares with orthogonal subsquares. Arch. Math. **34** (1980) 565–576
[46] Dulmage, A. L. / Johnson, D. / Mendelsohn, N. S.: Orthomorphisms of groups and orthogonal Latin squares. Canad. J. Math. **13** (1961) 356–372
[47] Euler, L.: Recherches sur une nouvelle espèce des quarrés magiques. In: Leonardi Euleri opera omnia, Ser. I., Vol 7 Berlin – Leipzig: Teubner 1923, pp. 291–392
[48] Fisher, R. A.: The design of experiments. Edinburgh 1949 (5th ed.)
[49] Freeman, J. W.: Reguli and pseudo-reguli in PG(3, s^2). Geom. Ded. **9** (1980) 267–280
[50] Glynn, D. G.: A lower bound for maximal partial spreads in PG(3, q). Ars. Comb. **13** (1982) 39–40
[51] Gorenstein, D.: Finite simple groups. An introduction to their classification. New York: Plenum 1982
[52] Guérin, R.: Existence et proprietés des carrés Latins ortogonaux II. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **15** (1966) 215–293
[53] Hall, M. / Paige, L. J.: Complete mappings of finite groups. Pacific J. Math. **5** (1955) 541–549
[54] Hanani, H.: On the number of orthogonal Latin squares. J. Comb. Th. **8** (1970) 247–271
[55] Hanani, H.: On transversal designs. In: Combinatorics. Amsterdam: Mathematisch Centrum 1974. = Math. Centre Tracts 55, 42–52
[56] Harwit, M. / Sloane, N. J. A.: Hadamard transform optics. New York – San Francisco – London: Academic Press 1979
[57] Hedayat, A. / Wallis, W. D.: Hadamard matrices and their applications. Ann. Stat. **6** (1978) 1184–1238
[58] Hine, T. C. / Mavron, V. C.: Embeddable transversal designs. Discr. Math. **29** (1980) 191–200
[59] Hine, T. C. / Mavron, V. C.: Translations of symmetric and complete nets. Math. Z. **182** (1983) 237–244
[60] Hughes, D. R.: Partial difference sets. Amer. J. Math. **78** (1956) 650–674
[61] Hughes, D. R. / Piper, F. C.: Projective planes. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973
[62] Huppert, B.: Endliche Gruppen I. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1967
[63] Jungnickel, D.: On difference matrices, resolvable transversal designs and generalized Hadamard matrices. Math. Z. **167** (1979) 49–60
[64] Jungnickel, D.: On difference matrices and regular Latin squares. Abh. Math. Sem. Hamburg **50** (1980) 219–231
[65] Jungnickel, D.: Existence results for translation nets. In: Finite geometries and designs. Cambrigde University Press 1981. = London Math. Soc. Lecture Notes **49**, 172–196
[66] Jungnickel, D.: Einige neue Differenzenmatrizen. Mitt. Math. Sem. Gießen **149** (1981) 47–57
[67] Jungnickel, D.: Transitive symmetric nets. Arch. Math. **36** (1981) 92–96
[68] Jungnickel, D.: Transversal designs associated with Frobenius groups. J. Geom. **17** (1981) 140–154
[69] Jungnickel, D.: On automorphism groups of divisible designs. Canad. J. Math. **34** (1982) 257–297
[70] Jungnickel, D.: Symmetric translation nets. J. Reine Ang. Math. **235** (1982) 216–220

[71] Jungnickel, D.: Maximal partial spreads and translation nets of small deficiency. Erscheint im J. Alg.

[72] Jungnickel, D.; Sane, S. S.: On extensions of nets. Pacific J. Math. **103** (1982) 437–455

[73] Jungnickel, D. / Vedder, K.: Symmetric divisible designs with $k = (n + 1)\mu$. Erscheint in Arch. Math.

[74] Kallaher, M. J.: Affine planes with transitive collineation groups. Amsterdam – New York – Oxford: North Holland 1981

[75] Keedwell; A. D.: On the existence of super P-groups. J. Comb. Th. (A) **35** (1983) 89–97

[76] Kirkman, T. P.: Query, Lady's and Gentleman's diary (1850) p. 48

[77] Laskar, R.: Finite nets of dimension 3. J. Alg. **32** (1974) 8–25

[78] Lüneburg, H.: Transitive Erweiterungen endlicher Permutationsgruppen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1969. = Lecture Notes in Mathematics 84

[79] Lüneburg, H.: Translation planes. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980

[80] MacNeish, H. F.: Euler squares. Ann. Math. **23** (1922) 221–227

[81] MacWilliams, F. J. / Sloane, N. J. A.: The theory of error-correcting codes. Amsterdam – New York – Oxford: North Holland 1978

[82] Mann, H. B.: The construction of orthogonal Latin squares. Ann. Math. Stat. **13** (1942) 418–423

[83] Mavron, V. C.: A characterization of some symmetric substructures of projective and affine geometries. Arch. Math. **36** (1981) 281–288

[84] Mavron, V. C.: Translations and constructions of generalized nets. J. Comb. Th. (A) **33** (1982) 316–339

[85] Mesner, D. M.: Sets of disjoint lines in PG(3, q). Canad. J. Math. **19** (1967) 273–280

[86] Mills, W. H.: Some mutually orthogonal Latin squares. In: Proc. 8th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing Baton Rouge 1977, pp. 473–487

[87] Ostrom, T. G.: Nets with critical deficiency. Pacific J. Math. **14** (1964) 1381–1387

[88] Ostrom, T. G.: Replaceable nets, net collineations, and net extensions. Canad. J. Math. **18** (1966) 666–672

[89] Ostrom, T. G.: Finite translation planes. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970. = Lecture Notes in Mathematics 158

[90] Pickert, G.: Sechseckgewebe und potenzassoziative Loops. Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam **2** (1954) 245–246

[91] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1955

[92] Pickert, G.: Einführung in die endliche Geometrie Stuttgart: Klett 1974

[93] Plackett, R. L. / Burman, J. P.: The design of optimum multi-factorial experiments. Biometrika **33** (1945) 305–325

[94] Pless, V.: On the uniqueness of the Golay Codes. J. Comb. Th. **5** (1968) 215–228

[95] Raghavarao, D.: Constructions and combinatorial problems in design of experiments. New York: Wiley 1971

[96] Rajkundlia, D.: Some techniques for constructing new infinite families of balanced incomplete block designs. Ph. D. Dissertation, Queen's Univ. Kingston, Canada 1978

[97] Reidemeister, K.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie, V. Gewebe und Gruppen. Math. Z. **29** (1929) 427–435

[98] Sade, A.: An omission in Norton's list of 7 x 7 squares. Ann. Math. Stat. **22** (1951) 306–307

[99] Schellenberg, P. J. / van Rees, G. M. J., / Vanstone, S. A.: Four pairwise orthogonal Latin squares of order 15. Ars. Comb. **6** (1978) 141–150

[100] Schulz, R.-H.; Über Blockpläne mit transitiver Dilatationsgruppe. Math. Z. **98** (1967) 60–82

[101] Schulz, R.-H.: Transversal designs and partitions associated with Frobenius groups. Erscheint.

[102] Seberry, J.: A construction for generalized Hadamard matrices. J. Stat. Planning Inf. **4** (1980) 365–368

[103] Shrikhande, S. S.: Generalized Hadamard matrices and orthogonal arrays of strength strength two. Canad. J. Math. **16** (1964) 736–740

[104] Shrikhande, S. S.: Affine resolvable balanced incomplete block designs: A survey. Aequat. Math. **14** (1976) 251–269

[105] Shrikhande, S. S. / Bhagwandas: On embeddings of orthogonal arrays of strength two. In: Combinatorial mathematics and its applications. University of North Carolina Press 1976, pp. 256–273
[106] Shrikhande, S. S. / Singhi, N. M.: A note on embeddings of orthogonal arrays of strength two. J. Stat. Planning Inf. **3** (1979) 267–271
[107] Shrikhande, S. S. / Singhi, N. M.: Embedding of orthogonal arrays of strength two and deficiency greater than two. J. Stat. Planning Inf. **3** (1979) 367–379
[108] Singer, J.: A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938) 377–385
[109] Sprague, A. P.: A characterization of 3-nets. J. Comb. Th. (A) **27** (1979) 223–253
[110] Sprague, A. P.: Incidence structures whose planes are nets. Europ. J. Comb. **2** (1981) 193–204
[111] Sprague, A. P.: Translation nets. Mitt. Math. Sem. Gießen **157** (1982) 46–68
[112] Steiner, J.: Combinatorische Aufgabe. J. Reine Ang. Math. **45** (1853) 181–182
[113] Strambach, K.: Geometry and loops. In: Geometries and Groups. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1981. = Lecture Notes in Mathematics 893, 111–147
[114] Thiele, J.: Gewebe, deren Ternärkörper aus einem Vektorraum hervorgeht. Mitt. Math. Sem. Gießen **140** (1979)
[115] Thomsen, G.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. XII. Schnittpunktsätze in ebenen Geometrien. Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930) 99–106
[116] Veblen, O. / Bussey, N. J.: Finite projective geometries. Trans. Amer. Math. Soc. **7** (1906) 242–259
[117] Veblen, O. / Wedderburn, J. H. M.: Non-Desarguesian and non-Pascalien geometries. Trans. Amer. Math. Soc. **8** (1907) 379–388
[118] Vedder, K.: Affine planes and Latin squares. Ann. Discr. Math. **18** (1983) 761–768
[119] Verheiden, E.: Integral and rational completion of combinatorial matrices. J. Comb. Th. (A) **25** (1978) 267–276
[120] Wang, S. P.: On self-orthogonal Latin squares and partial transversals of Latin squares. Ph.D. Dissertation, Ohio State Univ. 1978
[121] Wilson, R. M.: An existence theory for pairwise balanced designs I. Composition theorems and morphisms. J. Comb. Th. (A) **13** (1972) 220–245
[122] Wilson, R. M.: An existence theory for pairwise balanced designs II. The structure of PBD-closed sets and the existence conjectures. J. Comb. Th. (A) **13** (1972) 246–273
[123] Wilson, R. M.: Concerning the number of mutually orthogonal Latin squares. Discr. Math. **9** (1974) 181–198
[124] Wilson, R. M.: A few more squares. In: Proc. 5th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing 1974, pp. 675–680
[125] Wilson, R. M.: An existence theory for pairwise balanced designs III. Proof of the existence conjectures. J. Comb. Th. (A) **18** (1975) 71–79
[126] Witt, E.: Die fünffach transitiven Gruppen von Mathieu. Abh. Math. Sem. Hamburg **12** (1938), 256–264
[127] Witt, E.: Über Steinersche Systeme. Abh. Math. Sem. Hamburg **12** (1938) 265–275
[128] Wojtas, M.: A note on mutually orthogonal Latin squares. Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej 1978, Kommunikat No. 236
[129] Woolhouse, W. S. B.: Lady's and Gentleman's Diary (1844)
[130] Yates, F.: The formation of Latin squares for use in field experiments. Empire J. exper. agric. **1** (1933) 235–244
[131] Yates, F.: Incomplete randomized blocks. Ann. Eugenics 7 (1936) 121–140
[132] Zsigmondy, K.: Zur Theorie der Potenzreste. Monatsh. f. Math. u. Phys. **3** (1892) 265–284

Dieter Jungnickel
Mathematisches Institut
Justus-Liebig-Universität Gießen
Arndtstr. 2
6300 Gießen

(*Eingegangen: 12. 9. 1983*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein
86 (1984) 109–114

Dem Andenken an Hermann Boerner

J. Heinhold, München, und A. Kerber, Bayreuth

Am 3. Juni 1982 starb in Göttingen im Alter von 75 Jahren der o. Professor für Mathematik an der Universität Gießen Dr. Hermann Boerner an einer Gehirnblutung als Folge eines Sturzes.

Hermann Boerner wurde am 11. 7. 1906 in Leipzig geboren als ältestes Kind des international hochangesehenen Kunsthändlers Dr. h. c. Hans Boerner, Inhaber des von seinem Großvater 1826 gegründeten Kunstantiquariats C. G. Boerner in Leipzig (heute Düsseldorf), und seiner Ehefrau Frida geb. Gensel. Da er die Kunsthandlung seines Vaters aus Desinteresse am Kaufmännischen weder übernehmen wollte noch sollte, wandte er sich nach anfänglichem Studium der Kunstgeschichte der Mathematik und der Theoretischen Physik zu. Dieses begann er 1925 an der Universität München, wo er – wie er schrieb – „die wunderbare Differential- und Integralrechnungsvorlesung von Perron hörte". Ostern 1926 ging er zu weiterem Studium an die Universität Leipzig und schloß dort (nach Semestern in Göttingen und Berlin) sein Studium mit der Dissertation „Über einige Eigenwertprobleme und ihre Anwendung in der Variationsrechnung" bei Lichtenstein ab.

Da seine Dissertation zur Hälfte aus Variationsrechnung bestand, schickte ihn Lichtenstein für das Sommersemester 1931 zu Carathéodory nach München. Freimütig berichtete er später: „Zu meiner Schande muß ich gestehen, daß ich damals mehr Bergsteigerei als Mathematik getrieben habe". Anfang Mai 1933, dem Beginn der Hitler-Diktatur, kam Boerner für längere Zeit wieder nach München. Zuerst noch von seinem Vater finanziert, wurde er dann Ende 1933 Hilfsassistent (einziger Assistent war Lettenmeyer) bei Perron, der, selbst passionierter Bergsteiger, Boerner nicht nur als Mathematiker, sondern auch als Gefährten auf manch schwieriger Berg- und Klettertour schätzte. Boerner verstand es auch in vorbildlicher Weise, sich der Studierenden anzunehmen und so Freundschaften zu gewinnen, die Zeit seines Lebens angehalten haben. Auch mit dem Ehepaar Lettenmeyer hat Boerner einige schwierige Klettertouren im Wetterstein gemacht.

1934 habilitierte sich Boerner bei Carathéodory mit der Arbeit „Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale" und wurde im Februar 1935 zum Dr. habil. ernannt, ein Verfahren, das seinerzeit unter Hitler eingeführt wurde und das man heute wieder übernommen hat. Um Dozent zu werden, mußte man damals erst noch einige Hürden überwinden, ein Dozentenlager und anschließend eine Dozentenakademie absolvieren. So war Boerner nach der Ernennung zum Dr. habil. zehn Wochen auf einem Dozentenlager erst in Neuhöfe bei Marburg, dann in Schloß Tännich in Thüringen und schließlich auf einer Dozentenakademie in Weichselmünde bei Danzig. (Nach Beginn des Krieges wurden diese Dozentenhürden wieder abgeschafft.) Anschließend erfolgte Boerners Ernennung zum Dozenten, so daß er nun eigene Vorlesungen halten konnte. Im Wintersemester 1936/37 hatte er dann gleich zwei große Vorlesungen zu halten, eine davon war „Grundlagen der Geometrie", in Vertretung von Carathéodory, der sich für ein Semester in den USA aufhielt. Im gleichen Jahr bekam er die Assistentenstelle Lettenmeyers, der einem Ruf an die Universität Kiel gefolgt war.

Bei Kriegsausbruch 1939 erfolgte Boerners Einberufung als Meteorologe, zunächst auf verschiedene Fliegerhorste in Deutschland, sodann bis 1941 auf Grund einer freiwilligen Meldung zu einer Wettererkundungsstaffel bei Versailles, die täglich einen Wettererkundungsflug in das Seegebiet zwischen England und Irland zu machen hatte (hierfür erhielt er das EK 1). Anschließend war er zwei Jahre am Fliegerhorst Fürstenfeldbruck. In dieser Zeit konnte er zweimal eine zweistündige Vorlesung an der Universität München halten. 1943 erfolgte seine Ernennung zum apl. Professor. Anfang April 1943 bis Anfang März 1944 war er „Deutscher Leiter des Institut Royal Météorologique" in Belgien, sodann Geschwadermeteorologe bei einem Zerstörergeschwader in der Bretagne. Nach der Invasion kam das Geschwader ins Schloß Haut Brion bei Bordeaux und schließlich Ende Juli 1944 nach Deutschland zurück und Boerner auf den Fliegerhorst Hailfingen in Württemberg, wo er einmal, aus 4000 m mit dem Fallschirm abspringend, sich aus dem brennenden Flugzeug retten konnte. Nach einem kurzen Aufenthalt in Fürstenfeldbruck und in Schleißheim wurde er kurz vor Weihnachten 1944 auf Anforderung von Süss (Freiburg) aus der Wehrmacht für das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach entlassen. Dort blieb er bis zur Wiedereröffnung der Universität München, an der im September 1948 der Vorlesungsbetrieb wieder aufgenommen wurde. Nach einer Lehrstuhlvertretung in Göttingen im WS 1948/49 holte ihn Ullrich nach Gießen auf eine Diätendozentur, aus der im Zuge des Wiederaufbaus der Universität Gießen schließlich ein Ordinariat wurde, auf dem Boerner bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1971 blieb.

Neben seiner Liebe zu den Bergen dürfen seine musikalischen Interessen und Fähigkeiten nicht unerwähnt bleiben. Er spielte ausgezeichnet Klavier. Wiederholt konnte der eine der Unterzeichneten mit ihm zusammen die klassischen Violinsonaten spielen. Seine zweite Frau war von Beruf Geigerin, so daß sich auch im häuslichen Kreise reichlich Gelegenheit zum Musizieren ergab. In Gießen betätigte sich Boerner u. a. auch als Veranstalter von Konzerten.

Wie aus dem Lebensbericht Boerners ersichtlich, machten die langen Kriegsjahre und die Verhältnisse im sog. „Dritten Reich" dem wissenschaftlichen Nachwuchs die wissenschaftliche Arbeit und die Hochschullaufbahn schwer, selbst wenn er, wie Boerner, heil aus dieser Zeit hervorging.

Will man die Spuren verfolgen, die seine wissenschaftlichen Ergebnisse hinterlassen haben, dann beginnt man am besten, in den Werken Carathéodorys zu graben. Dort findet man als ersten Hinweis am Ende des berühmten Buches „Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung" (1935) zum Abschluß der Anmerkungen unter Nr. 9 („Mehrdimensionale Variationsprobleme") die Bemerkung

> „. . . der Beweis, daß man jede reguläre Extremalfläche in ein geodätisches Feld einbetten kann, wurde von H. Boerner erbracht, ist aber noch nicht veröffentlicht . . ."

Zu diesen Ursprüngen seiner eigenen Entwicklung kehrte Boerner mit seinem letzten wissenschaftlichen Werk zurück, dem 44 Seiten langen Artikel „Variationsrechnung à la Carathéodory und das Zermelo'sche Navigationsproblem", in Selecta Mathematica V, 1979.

Die Funktionentheorie war ein weiteres Forschungsgebiet Boerners, auch in der Lehre gehörte sie zu seinen Lieblingsvorlesungen. Als Hinweis zu seinen Arbeiten auf diesem Gebiet erwähnen wir Bieberbachs „Analytische Fortsetzung" (1955, S. 91 ff.) Dort schreibt er unter § 4 über die Häufigkeit der fortsetzbaren und der nicht fortsetzbaren Reihen:

> „E. Fabry und E. Borel haben 1896 der Meinung Ausdruck gegeben, daß die Nichtfortsetzbarkeit über den Konvergenzkreis die Regel, die Fortsetzbarkeit die Ausnahme ist . . . Borel faßt die Frage als eine Aussage über Wahrscheinlichkeiten auf. . . . H. Boerner hat auf diesen durch die Heranziehung von Maßbegriffen charakterisierten Standpunkt eine volle Theorie gegründet . . .".

Diese Hinweise auf seine Arbeiten aus den Bereichen Variationsrechnung und Funktionentheorie mögen genügen.

Seine späteren Bemühungen um die Darstellungstheorie von Gruppen wurden vermutlich bereits während seiner Göttinger Studienzeit angeregt, denn damals hatte diese Theorie durch ihre großen Erfolge in den Anwendungen auf die Physik einen ersten Höhepunkt mit den Büchern von H. Weyl erreicht. Präziser kann man die intensive Bemühung Boerners um diese Theorie anhand des Vortragsbuches Nr. 1 (24. 9. 1944 – 3. 4. 1949) im Institut in Oberwolfach datieren. Dieses für die historische Betrachtung der Nachkriegsentwicklung auf unserem

Fachgebiet hochinteressante Heft enthält auf 9 verschiedenen Seiten zahlreiche Eintragungen Boerners. Unter anderem wird auf den Seiten 13/14 ein Kolloquium über kontinuierliche Gruppen erwähnt, das im ersten Abschnitt vom Februar bis Juni 1945 dauerte, Vortragender war Seifert. Es wird im Oktober durch Boerner und Seifert fortgesetzt. Boerners Eintragung liest sich so:

> „Fortsetzung des vorigen Kolloquiums:
> Darstellungstheorie der halbeinfachen kontinuierlichen Gruppen nach H. Weyl.
> I. Kap. Allgemeine Sätze über die Darstellungen. Eindeutige Bestimmtheit einer irreduziblen Darstellung durch das höchste Gewicht.
> II. Kap. Die Darstellungen der speziellen linearen Gruppe. Beziehung zur Tensorrechnung."

Im April 1946, gleich nach Ostern, geht es weiter mit Vorträgen über die Zerlegung des Gruppenrings in Linksideale und dem von Weyl aufgedeckten Zusammenhang zwischen den Darstellungen der linearen Gruppen und der Permutationsgruppen. Jetzt ist Boerner also schon „mittendrin".

Diese Seite 20 des Vortragsbuches hält aber auch noch andere bemerkenswerte Vorträge Boerners fest. 2 Tage zuvor, am 21. 4. 1946 (Ostern) findet sich der Eintrag:

> „Violinsonaten:
> Beethoven op. 23 a-moll
> Mozart B-dur K.-V. 454
> Schubert Sonatine a-moll
> Beethoven, Frühlingssonate",

vorgetragen von L. von Werzebe und H. Boerner. Wenn man dann noch liest, daß am Tag darauf die Kreutzersonate folgte, ist es nicht überraschend, daß neben dem Eintrag am 30. 3. 1947 (Schubert: Sonatinen D und A für Violine und Klavier) steht: L. und H. Boerner.

1955 erschien sein Buch „Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik" in der Gelben Reihe des Springer-Verlags. Wie der Titel bereits andeutet, war das Ziel eine Einführung in diese Theorie, die hinführt zu der konkreten Berechnung von Charakteren und Matrixdarstellungen. Die Tatsache, daß dieses Buch in zwei Auflagen und beide auch in englischer Übersetzung erschienen, zeigt, daß dieses Ziel erreicht wurde.

Diesem Buch, das auch heute noch jedem empfohlen werden kann, der rasch einen Überblick über die gewöhnliche Darstellungstheorie endlicher und unendlicher Gruppen gewinnen will und deren Anwendung in der Physik im Auge hat, steht als zweites Hauptwerk sein Enzyklopädieartikel „Darstellungstheorie der endlichen Gruppen" gegenüber, der primär den Wissenschaftler anspricht. Er erschien 1967 in der Reihe „Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften" des Verlags B. G. Teubner, Stuttgart, und dort im Band I über Algebra und Zahlentheorie. Er gibt auf 80 Seiten in 484 Fußnoten mit mehr als 500 Literaturzitaten eine Übersicht vom damaligen Stand der Dinge. Insbesondere Kapitel C über modulare und ganzzahlige Darstellungen war damals wohl das wichtigste, zumal es direkt an den voraufgegangenen Enzyklopädieartikel von van der Waerden (1935) anschloß.

Später kehrte Boerner – wie bereits erwähnt – noch einmal zu seinen Anfängen zurück mit einem Artikel über Variationsrechnung „à la Carathéodory". Dieser Münchener Zeit verdankte er auch die Freundschaft mit N. Terzioglu, der damals ebenfalls Schüler von Carathéodory gewesen war. Kontakte zur Türkei nahm er dann während eines Forschungsfreisemesters in Trabzon wieder auf und dann wieder während einer Tagung im türkischen Forschungsinstitut von Silivri, das von Terzioglu als Pendant zu Oberwolfach intendiert war. Die Tagung wurde von Boerner und seinen Schülern Pahlings, Roggenkamp und Kerber bestritten.

In seinen Vorlesungen, die bis zu seiner Emeritierung immer wieder neue Themen zum Inhalt hatten, verstand es Boerner in ganz außerordentlicher Weise, die elegante und ästhetische Seite der Mathematik zu vermitteln. Sie waren stets sehr gut vorbereitet und wurden völlig frei vorgetragen, selbst wenn sie einen alptraumhaften Bezeichnungsaufwand erforderten, wie etwa die Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen. Nur ganz schwierige Formeln wurden gelegentlich anhand kleiner Zettel nachgeprüft.

Seine Mitarbeiter schätzten ihn als einen im besten Sinne liberalen Hochschullehrer, der stets offen war für Wünsche und Anregungen und der bei aller Zurückhaltung, die ihm eigen war, auch ein offenes Herz für ihre Nöte und Anliegen erkennen ließ.

Schriftenverzeichnis

1. Über einige Eigenwertprobleme und ihre Anwendung in der Variationsrechnung. Dissertation, Leipzig 1932
2. Das Eigenwertproblem der selbstadjungierten linearen Differentialgleichung vierter Ordnung. Math. Z. **34** (1931) 293–319
3. Über einige Variationsprobleme. Math. Z. **35** (1932) 161–189
4. Ein „belastetes" Variationsproblem. J. f. d. reine u. angew. Math. **171** (1934) 120–127
5. Zur Theorie der zweiten Variation. Math. Z. **39** (1935) 492–500
6. Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale. Math. Ann. **112** (1936) 187–220
7. Über die Häufigkeit der nicht analytisch fortsetzbaren Potenzreihen. S.-B. math.-nat. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München (1938) 165–174; Forts. **64** (1938) II., 1053
8. Variationsrechnung. In: Naturforschung Medizin in Deutschland 1939–1946. Band 2, Reine Mathematik, T. II, 53–65
9. Über die Legendresche Bedingung und die Feldtheorien in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale. Math. Z. **46** (1940) 720–742
10. Variationsrechnung aus dem Stokesschen Satz. Math. Z. **46** (1940), 709–719
11. Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe. Arch. d. Math. **1** (1948) 52–55
12. (mit H. Hönl) Zur de Broglieschen Theorie der Elementarteilchen. Z. Naturforsch. **5a** (1950) 353–366
13. Carathéodory's Eingang zur Variationsrechnung. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **56** (1953) 31–58
14. Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1955; 2nd ed. 1967, 287 S.
15. Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Stuttgart: Teubner 1967. = Enzyklopädie der Math. Wiss. I 1, 15, pp. 1–80

16. Representations of Groups. Amsterdam: North-Holland 1967; 2nd ed. 1970
17. Carathéodory und die Variationsrechnung. The Greek Mathematical Society. C. Carathéodory Symposium, Sept. 3–7, 1973, 80–90
18. Aus der Geschichte der Darstellungstheorie. Istanbul: Silivri 1973. = Lecture Notes on the Representation Theory of Finite Groups, 1–10.
19. Variationsrechnung à la Carathéodory und das Zermelo'sche Navigationsproblem. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1979. = Selecta Mathematica V, 23–67, Heidelberger Taschenbücher Bd. 201
20. Ludwig Schlesinger (1864–1933). In: Gießener Gelehrte in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, Lebensbilder aus Hessen Bd. 2, 1982, 836–846

Dissertationen seiner Schüler

1. Velte, Waldemar: Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale in Parameterdarstellung. Mitt. Math. Sem. Gießen **45** (1953)
2. Krafft, Günther: Die stetigen Darstellungen der reellen Formen der komplexen unimodularen, orthogonalen und symplektischen Gruppen. Mitt. Math. Sem. Gießen **53** (1955)
3. Kerber, Adalbert: Zur modularen Darstellungstheorie symmetrischer und alternierender Gruppen. Mitt. Math. Sem. Gießen **68** (1966)
4. Mangold, Ruth: Beiträge zur Theorie der Darstellungen endlicher Gruppen durch Kollineationen. Mitt. Math. Sem. Gießen **69** (1966)
5. Roggenkamp, Klaus W.: Darstellungen endlicher Gruppen in Polynombereichen. Mitt. Math. Sem. Gießen **71** (1967)
6. Pahlings, Herbert: Beiträge zur Theorie der projektiven Darstellungen endlicher Gruppen. Mitt. Math. Sem. Gießen **77** (1968)
7. Bayar, Ergün: Eine neue Einführung in die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen. Mitt. Math. Sem. Gießen **81** (1969)
8. Gündüzalp, Yavuz: Über die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere der symmetrischen Gruppe. Mitt. Math. Sem. Gießen **81** (1969)

Prof. Dr. J. Heinhold
Römerstr. 49
8035 Gauting

A. Kerber
Schloßhof Birken 21
8580 Bayreuth

(Eingegangen: 19. 3. 1984)

Buchbesprechungen

Barner, M.; Flohr, F., Analysis II, Berlin: deGruyter 1983, 452 S., DM 48,–

Mit dem Erscheinen des zweiten Bandes wird nun das Gesamtwerk über die reelle Analysis abgeschlossen; es entspricht etwa einem dreisemestrigen Vorlesungszyklus der Anfangssemester, weist jedoch in manchen Punkten weit darüber hinaus. Während der erste Band (Bespr. s. Jber. d. Dt. Math.-Verein. DMV 1972, Heft 2) im wesentlichen die Differential- und Integralrechnung der Funktionen e i n e r Veränderlichen enthält, ist der vorliegende Teil den Funktionen mehrerer Variablen gewidmet. Diese werden als Abbildungen aus dem $\mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^m$ aufgefaßt, wobei von deren Vektorraumstruktur konsequent Gebrauch gemacht wird. Kap. 13 (fortlaufende Numerierung über Bd. I hinaus) bringt die Topologie des $\mathbf{R}^n$ und die Theorie der Stetigkeit bis hin zum Stone-Weierstraßschen Approximationssatz. Das nächste Kapitel behandelt die Differenzierbarkeit, die über eine Abschätzung des Fehlers gegenüber ihrer Linearisierung eingeführt wird. Die Stichworte Mittelwertsatz, Taylorformel und Banachscher Fixpunktsatz charakterisieren den weiteren Inhalt. Zahlreiche Anwendungen einschließlich des Existenzsatzes von Picard-Lindelöf für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen oder der Satz von der lokalen Umkehrbarkeit vertiefen die Einsicht in dessen Tragweite. Man durfte gespannt sein, wie die Integralrechnung weitergeführt werde, nachdem sie im ersten Band auf den Regelfunktionen aufgebaut worden war. Die Autoren haben sich für die Lebesguesche Integrationstheorie entschieden. Den damit gesetzten hohen Ansprüchen steht die ausgezeichnete Didaktik, mit der dies durchgeführt wird, gegenüber. In Kap. 15 wird das Lebesguesche Maß im $\mathbf{R}^n$ behutsam aus dem Volumenbegriff für Quader heraus entwickelt, in dem es über die σ-Additivität zunächst nur für offene und kompakte Mengen eingeführt wird. Das Integral wird nun (Kap. 16) nicht etwa über das $(n + 1)$-dim. Maß der Ordinatenmenge sondern – analog zum Vorgehen bei Regelfunktionen – als Grenzwert der (zuvor definierten) Integrale von e i n f a c h e n Funktionen g_n eingeführt; dabei müssen die Konvergenz $g_n \to f$ gleichmäßig, alle g_n integrabel sein und „einfach" bedeutet, daß die Wertemenge $g(M)$ a b z ä h l b a r , alle Urbilder $M_i = g^{-1}(y_i)$ für $y_i \in g(M)$ meßbar und die Reihe $\sum_i \mu(M_i)$ absolut konvergent ist. Dies hat den Vorteil, daß Vorzeichenfragen vermieden und von vornherein auch unbeschränkte Funktionen zugelassen werden können. Mit diesem Ansatz lassen sich die Hauptsätze der Lebesgueschen Integrationstheorie beinahe mühelos herleiten. Es fehlen dabei keineswegs Approximationsfragen wie z. B. der Glättungsprozeß und die Folgerung $\overline{C^\infty(K)} = C(K)$ für ein Kompaktum $K \subset \mathbf{R}^n$. Die Vektoranalysis (Kap. 17) wird mit einem Abschnitt über Kurvenintegrale eingeleitet und mittels alternierender Differentialformen auf p-dim. Mannigfaltigkeiten des $\mathbf{R}^n$ durchgeführt; sie gipfelt im Integralsatz von Stokes, enthält aber als Folgerungen z. B. auch die Aussage, daß es keine glatte Retraktion von G auf ∂G (G offen in $\mathbf{R}^n$, ∂G glatt) gibt, sowie den Brouwerschen Fixpunktsatz.

Der Stil des gesamten Werkes bevorzugt eine sehr natürliche Betrachtungsweise, bei längeren Beweisen wird der Aufbau oder der wesentliche Punkt kurz umrissen und in der Durchführung werden technische Details fast völlig vermieden; allerdings verlangt diese Art der Darstellung, bei der – unter Betonung des Wesentlichen – übliche Techniken lediglich verbal apostrophiert und sofort das Ergebnis genannt wird, vom Leser ein ordentliches Maß an mathematischer Erfahrung und Reife. Auch soll hier nicht verschwiegen werden, daß viele (und durchaus nichttriviale) inhaltliche Ergänzungen in die zahlreichen Aufgaben gepackt wurden, so daß manche von diesen wohl schwerlich von Studienanfängern ohne Anleitung bewältigt werden können.

Stuttgart W. Degen

Reid, W. T., Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations (Applied Mathematical Sciences 31), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1980, 559 S., DM 59,–

Die vorliegende, breit angelegte und ins einzelne gehende Darstellung beschränkt sich im wesentlichen auf die Sturmsche Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen; die dem Eigenwertproblem typischen Fragen der Entwicklung nach Eigenfunktionen und der Vollständigkeit werden eher am Rande behandelt (konsequenterweise fehlt der Name Liouville im Titel). Der wesentliche Zweck der Monographie ist die Darstellung eines historischen und umfassenden Überblicks über die Sturmsche Theorie für selbstadjungierte Differentialsysteme; so formuliert es der 1977 verstorbene Autor im Vorwort. Er hat dieses Gebiet durch gewichtige eigene Beiträge bereichert, und es ist nur natürlich, daß er seine zum Teil wenig bekannten eigenen Forschungen hier einer größeren mathematischen Öffentlichkeit vorstellen will. Das Manuskript war bereits 1975 fertiggestellt, die Herausgeber haben jedoch die Bibliographie an einigen Stellen erweitert.

Die erste Frage, an welchen Leser sich das Buch wohl richten mag, beantwortet sich nicht leicht. Der Student ertrinkt in der Fülle des Materials, auch dem Dozenten wird für eine Vorlesung nur wenig konkrete Hilfe zuteil, zumal die Beweise vielfach nur angedeutet oder durch Literaturverweise ersetzt sind. Mit größtem Gewinn wird man die eingehende Darstellung der historischen Entwicklung lesen.

In den ersten vier Kapiteln wird der skalare Differentialoperator

$$\ell[u](t) = [r(t)u'(t) + q(t)u(t)]' - [q(t)u'(t) + p(t)u(t)]$$

untersucht. Stichworte: klassische Oszillations- und Vergleichssätze, Transformationen, insbesondere auf Polarkoordinaten, quadratische Funktionale und Variationseigenschaften, konjugierte Punkte, Fokalpunkte, Randwertprobleme für kompakte Intervalle, Oszillationstheorie für nichtkompakte Intervalle (die Weylsche Theorie von singulären Differentialoperatoren wird nur gestreift). Die Kapitel V bis VII behandeln unter entsprechenden Gesichtspunkten Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, jenes Gebiet, auf welchem der Autor selbst vielfach publiziert hat. Hier werden u. a. die Hamiltonschen Systeme, Matrix Riccati-Differentialgleichungen, die Fundamentalformen von Morse, die verschiedenen Begriffe von Selbstadjungiertheit, Normalität und Definitheit besprochen. Unter den Erweiterungen und speziellen Gegenständen im letzten, achten Kapitel findet man auch einen Abschnitt über die Weinsteinsche Methode der intermediären Probleme. Die Beschreibung ist typisch für das Buch: sie enthält die wesentlichen Ideen und Ergebnisse, Literaturhinweise, einige Beweisandeutungen.

Der Leser findet in dem Buch wohl alle wichtigen Ergebnisse und Methoden der Sturmschen Theorie bis 1975 eingehend beschrieben und mit Literaturzitaten belegt, jedoch meist ohne Beweise. Die Historie ist eine Stärke des Buches. Im umfangreichen Literaturverzeichnis werden die gängigen Zeitschriften durch vier Buchstaben abgekürzt. Wer die Liste nach MTAN befragt, erhält Mathematische Annalen zur Antwort, und dann fällt MTZT auch nicht mehr schwer. Auch sonst ist der Autor in den Bezeichnungen manchmal etwas eigenwillig. Der Experte und der auf dem Gebiet wissenschaftlich Arbeitende wird das Werk mit Gewinn zu Rate ziehen.

Karlsruhe W. Walter

Fenyö, S.; Stolle H. W., Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen (I und II), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1981, Bd. I 272 S., DM 88,–, Bd. II 304 S., DM 96,–

Zur Besprechung liegen die bisher erschienenen beiden ersten Bände eines vierbändigen Gesamtwerks vor. Breit angelegt ist der erste Band weitgehend eine Darstellung der Theorie der linearen Operatoren. Die einzelnen Kapitel behandeln: Spektraltheorie in Banachräumen; Grundlagen der Theorie der linearen Operatoren; beschränkte Operatoren im Hilbert-Raum; Integraloperatoren. Der zweite Band, der wohl das Kernstück der vier Bände bildet, enthält die Theorie der linearen Integralgleichungen zweiter Art, gegliedert in die folgenden Kapitel: Auflösung von linearen Integralgleichungen zweiter Art; Theorie der Fredholmschen Determinanten; der lösende Operator in der Umgebung eines Pols; Eigenwerte und Eigenfunktionen, Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen bei symmetrischen Integraloperatoren; Theorie der nichtsymmetrischen Integraloperatoren.

Ein Buch über lineare Integralgleichungen ist in dieser Breite seit Schmeidlers Standardwerk nicht mehr erschienen; wie man dem Vorwort entnimmt, gehen die Bände 1 und 2 auf den erstgenannten Verfasser zurück. Mit dem Hinweis, daß fast alle Sätze vollständig bewiesen werden, wird dort auch vom lehrbuchartigen Charakter des Buches gesprochen; es ist jedoch eher auf einem höheren Niveau einzuordnen. Die Referenzen in den beiden Bänden sind kurz gefaßt und verweisen teilweise auf Sekundärliteratur. Ein ausführliches Literaturverzeichnis soll am Ende des Gesamtwerks folgen.

Den Inhalt von Band 3 werden lineare Integralgleichungen erster Art sowie spezielle Typen von Integralgleichungen bilden. Band 4 ist für numerische Methoden zur Lösung linearer Integralgleichungen und für einige Anwendungen von Integralgleichungen, insbesondere auf physikalische Probleme, vorgesehen.

Breite und Tiefe der Darstellung, die in den beiden ersten Bänden zu erkennen ist, sowie die Anlage aller vier Bände lassen ein Standardwerk erwarten, das gehobenes Lehrbuch und Nachschlagwerk darstellt. Sowohl Dozenten wie auch Studenten werden immer wieder nach dem Buch greifen.

München G. Hämmerlin

Rempel, S., Schulze, B.-W., Index Theory of Elliptic Boundary Problems (Mathematische Lehrbücher und Monographien, Abt. II, Band 55), Berlin: Akademie-Verlag 1982, 393 S., Leinen, DDR 75,– M

Dieses Buch bietet mehr, als der Titel verspricht, nämlich erstmalig eine systematische Behandlung der „modernen" Theorie elliptischer Randwertaufgaben. „Modern" soll hier bedeuten, daß eine Behandlung der Randwertprobleme nach dem „Modell" der Indextheorie elliptischer Operatoren über geschlossenen Mannigfaltigkeiten angestrebt wird, wie sie von M. F. Atiyah und I. M. Singer [2] 1963 skizziert und seither in einer Vielzahl von Arbeiten der globalen reellen und komplexen Analyse ausgearbeitet, weiterentwickelt und auf zutiefst nicht-triviale Probleme, wie das Riemann-Roch-Hirzebruch-Problem der algebraischen Geometrie, die Bestimmung der Anzahl der Instantone in der eichinvarianten Feldtheorie und jüngst darauf aufbauend S. K. Donaldsons Bestimmung der Struktur vierdimensionaler, differenzierbarer Mannigfaltigkeiten angewandt wurde. Vom Standpunkt der Analysis dürfte der durchschlagende Erfolg der quantitativen Behandlung ellliptischer Differentialoperatoren über unberandeten Mannigfaltigkeiten auf zwei besondere Umstände zurückzuführen sein:

(1.1) Es gibt eine genügend reichhaltige „Algebra" von Pseudodifferentialoperatoren, die neben den elliptischen Differentialoperatoren auch ihre Quasiinversen (Parametrices) modulo Operatoren niedrigerer Ordnung enthält und darüber hinaus vielfältige Deformationen zuläßt.

(1.2) Ein symbolischer Kalkül erlaubt es auf weiten Strecken der Theorie, mit über der Mannigfaltigkeit X (genauer dem kovarianten Sphärenbündel S*X) parametrisierten Familien von invertierbaren Matrizen – also mit Objekten der endlich-dimensionalen linearen Algebra – statt mit Operatoren, d. h. Objekten der unendlich-dimensionalen Funktionalanalysis, zu rechnen.

In den zurückliegenden zwanzig Jahren hat es nun eine Folge von Versuchen gegeben, dieses „Erfolgsrezept" auf die Behandlung elliptischer Randwertprobleme zu übertragen. Dabei stieß man auf zwei Schwierigkeiten:

(2.1) Nicht alle elliptischen Operatoren lassen elliptische Randwertbedingungen zu.

(2.2) Randwertprobleme sind ihrer Form

$$\begin{pmatrix} P_X \\ T \end{pmatrix} : \quad C^\infty(X,E) \to \begin{matrix} C^\infty(X,F) \\ \oplus \\ C^\infty(Y,H) \end{matrix}$$

nach „asymmetrisch" und passen nicht unmittelbar in das Schema einer Operatoralgebra; hierbei sei X eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit mit Rand Y; E und F Vektorraumbündel über X; H ein Vektorraumbündel über Y; P_X die Beschränkung auf X eines auf einer X einschließenden Nachbarmannigfaltigkeit definierten elliptischen Pseudodifferentialoperators und T ein die Randwert-bedingungen ausdrückender „Spuroperator".

(2.1) war schon in [1] bemerkt worden und führte zur Bestimmung der topologischen Hindernisse für die Existenz elliptischer Randwertbedingungen, wodurch die volle Bedeutung der Elliptizitätsbedingungen von Shapiro-Lopatinski aufgedeckt wurde. (2.2) wurde sukzessiv durch Ausweitung des analytischen Apparates überwunden, indem zunächst von M. I. Wischik und G. I. Eskin in [8] eine einheitliche Behandlung von Randwert- und Potentialproblemen in einer Operatorenklasse der Form

$$\begin{pmatrix} P_X & K \\ T & S \end{pmatrix} : \quad \begin{matrix} C^\infty(X,E) \\ \oplus \\ C^\infty(Y,J) \end{matrix} \to \begin{matrix} C^\infty(X,F) \\ \oplus \\ C^\infty(Y,H), \end{matrix}$$

wo K ein „Poissonoperator" und S ein Pseudodifferentialoperator über Y ist, erreicht wurde. Dadurch wird garantiert, daß die Bildung der Formal-Adjungierten nicht aus dieser Klasse verallgemeinerter Randwertprobleme herausführt. L. Boutet de Monvel zeigte dann in [3], daß man auch Abschließung unter Komposition erreichen kann, wenn man P_X durch $P_X + G$ ersetzt, wo der Korrekturterm G ein „singulärer Greenscher Operator" ist, der rechnerisch mit Faltungen über der Halbgeraden, d. h. singulären Integralgleichungen vom Typ der Wiener-Hopf-Gleichung, kontrolliert werden kann. Hierbei muß allerdings vorausgesetzt werden, daß der Operator P die sogenannte Transmissionsbedingung längs Y erfüllt; das ist eine Symmetriebedingung für das Hauptsymbol σ_P in der konormalen Richtung, die für polynomiale Symbole, d. h. für Differentialoperatoren, stets erfüllt ist und z. B. im Fall von Pseudodifferentialoperatoren der Ordnung 0 einfach

$$\sigma_P(x', 0; \xi' = 0, \nu = 1) = \sigma_P(x', 0; \xi' = 0, \nu = -1), \qquad x' \in Y, (\xi', \nu) \in (S^*X)_{x'}$$

bedeutet.

Die Untersuchung dieser Klasse $\mathscr{G}(X, Y)$ von Operatorsystemen ist der wahre Gegenstand der Monographie. Gewiß finden sich schon bei Boutet de Monvel [3] die grundlegenden Rechenregeln in $\mathscr{G}(X, Y)$; der symbolische Kalkül, der neben das „innere Symbol" σ_P ein Randsymbol

$$\sigma_Y(\mathscr{A}): \quad \begin{matrix} p^*E \oplus L^2(\mathbf{R}_+) \\ \oplus \\ p^*J \end{matrix} \to \begin{matrix} p^*F \oplus L^2(\mathbf{R}_+) \\ \oplus \\ p^*H \end{matrix}, \qquad \mathscr{A} \in \mathscr{G}(X,Y)$$

p: $S^*Y \to Y$ Projektion, setzt; und schließlich die K-theoretische Interpretation der globalen Bedeutung dieser Symbole, einerseits, und die Deformationen in $\mathscr{G}(X, Y)$ andererseits, die das ursprüngliche Randwertproblem $\mathscr{A}$ durch zwei unberandete Probleme, nämlich einen elliptischen Operator R auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit Y und einen elliptischen Operator $\hat{P}$ auf X, der in der Nähe von Y die Identität ist, ersetzen, woraus die Indexformel für elliptische Randwertprobleme folgt.

Tatsächlich wurden in [3] aber nur die Ideen gegeben und die Beweise, wenn überhaupt, allein für die einfachsten Fälle skizziert. So wurde die wichtige Kompositionsregel, daß die Hintereinanderschaltung von $\mathscr{A}, \mathscr{A}' \in \mathscr{G}(X, Y)$, vorausgesetzt daß die Bündel zueinander passen, wieder ein Element in $\mathscr{G}(X, Y)$ ergibt, nur für den Fall konstanter Koeffizienten in 9 Zeilen gezeigt [3; S. 32], während die genaue Nachrechnung insbesondere der delikaten Aussage, daß $(P \circ Q)_X - P_X \circ Q_X$ für Pseudodifferentialoperatoren P, Q ein singulärer Greenscher Operator ist, in der vorliegenden Monographie gut und gern 13 Seiten (S. 99–107, 149–153, 175) beansprucht.

Die Fülle dieser konkreten Berechnungen macht den eigentlichen Wert der Monographie aus. Damit werden nicht nur Lücken in der allgemeinen Theorie elliptischer pseudodifferentialer Randwertaufgaben geschlossen, sondern viele, für sich interessante, neue Details über Struktur und Algorithmik elliptischer Randwertprobleme zu Tage gefördert. Zugleich weisen die Autoren nach, daß man mit der eleganten Theorie von Boutet de Monvel wirklich rechnen kann – gewiß mühsam das erste Mal, solange alle Nebenrechnungen noch neu zurechtgelegt werden müssen, aber leichter und effektiver nun, wo man mit diesem Buch zugleich einen Leitfaden und ein Nachschlagwerk für diesen modernen, leistungsfähigen Kalkül hat.

Das Buch ist in 4 Kapitel gegliedert. Das erste Kapitel gibt in bewundernswerter Kürze eine umfassende Einführung in die Theorie der oszillierenden Integrale und Pseudodifferentialoperatoren sowie die Elemente der K-Theorie. Das zweite, besonders wichtige Kapitel definiert die „Algebra“ $\mathscr{G}(X, Y)$, behandelt ihre Grundeigenschaften und führt in den symbolischen Kalkül ein. Das dritte und vierte Kapitel ist dann den Anwendungen gewidmet, zunächst den allgemeinen elliptischen Randwertaufgaben und elliptischen Komplexen, dann besonderen Fällen, wie der rein analytischen Ableitung einer Indexformel nach Art von Fedosow [4], nicht-elliptischen Randwertaufgaben und Ausblicken u. a. auf Transmissionsprobleme und gemischte Randwertaufgaben, wo man in natürlicher Weise auf pseudodifferentiale Randwertbedingungen stößt. Die Darstellung berücksichtigt hier die wesentlichen Forschungsergebnisse der letzten Jahre auf diesem Gebiet, das durch eigene umfangreiche Beiträge der Autoren mitgeprägt wurde. Auch zeigt sich hier immer wieder, wie tief das Interesse der Autoren in der Analysis und letztendlich in Anwendungen der Ingenieurwissenschaften und der mathematischen Physik verwurzelt ist, für die die vorliegenden Indexberechnungen offensichtlich den Charakter einer Pilotstudie haben – um am „einfacheren“ Fall der Indexbestimmungen den modernen Kalkül der pseudodifferentialen Randwertaufgaben zu entwickeln und seine Praktikabilität und Leistungsfähigkeit zu testen.

Zu den angenehmen Vereinfachungen des Kalküls, die eine Indextheorie erlaubt, gehören nicht allein die Berechnungen modulo Operatoren niedrigerer Ordnung („Glättungsoperatoren“), die auch für andere qualitative Untersuchungen und für konstruktive und approximative Lösungsverfahren von großer Bedeutung sind, sondern vor allem die vielfältigen Homotopieargumente, mit denen man z. B. erreichen kann, daß die Koeffizienten des Operators P in einer Umgebung des Randes unabhängig von der normalen Koordinate x_n werden, was viele Rechnungen außerordentlich vereinfacht, aber dafür auch einige Anwendungen z. B. in der für Homotopien sensiblen Spektraltheorie ausschließt. Für Berechnungen, die ganz frei von Homotopieargumenten gehalten sind, muß man deshalb auf die Arbeiten von G. Grubb [5], [6] verweisen, die unabhängig von den Autoren eine Ausarbeitung wesentlicher rechnerischer Einzelheiten des Boutet-de-Monvel-Kalküls vorgenommen hat.

Das Buch ist nicht leicht zu lesen. Aber so ist auch der Stoff. Die Aufgabe, eine in Umrissen und in den Hauptergebnissen schon lange fertige, aber äußerst diffizile und deshalb in vielen Details noch ganz unfertige Theorie auszufüllen, erfordert starke Kräfte, große Ausdauer, Ehrgeiz – und eine Vision davon, welche grundlegende Bedeutung dieser Kalkül heute und zukünftig für die globale Analysis und für praktische Anwendungen hat und haben wird. Die junge Analysisgruppe an der Akademie der Wissenschaften der DDR verfügt über diese Qualitäten. Das zeigt dieses Buch wie die vielen anderen neuen Berliner Arbeiten der letzten Jahre, die den

„Standortvorteil“ der DDR-Mathematik, engste Vertrautheit mit der sowjetischen Mathematik und zugleich vielfältige, neu geschaffene Kontakte in Westeuropa, gut auszunützen verstanden.

Bedauerlich ist, daß ihr neuer, zusätzlich erweiterter Kalkül der pseudodifferentialen Randwertaufgaben *ohne* vorausgesetzte Transmissionsbedingung [7] von den Autoren nicht mehr vor Drucklegung in das Buch eingearbeitet werden konnte. Doch auch in der vorliegenden Form ist das Buch als Leitfaden und Nachschlagewerk unbedingt notwendig für jeden, der sich mit elliptischen Randwertproblemen befaßt.

[1] Atiyah, M. F., Bott, R.: The index problem for manifolds with boundary. Coll. Differential Analysis, Tata Institute Bombay, Oxford University Press, Oxford 1964, 175–186
[2] Atiyah, M. F., Singer, I. M.: The index of elliptic operators on compact manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963) 422–433
[3] Boutet de Monvel, L.: Boundary problems for pseudo-differential operators. Acta Math. **126** (1971) 11–51
[4] Fedosow, B. V. (Федосов, Б. В.): Аналитические формулы индекса эллиптических оператора. Труды Моск. мат. общ. **30** (1974) 159–241
[5] Grubb, G.: On pseudo-differential boundary problems. I, IB, IIA, IIB. Preprints 2–79, 1–80, 2–80, 7–80. Matematisk Institut, København Universitet 1979/80
[6] Grubb, G.: Singular Green operators and trace class estimates for exterior boundary problems. Preprint 16–82. Matematisk Institut, København Universitet 1982
[7] Rempel, S.; Schulze, B.-W.: Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property. Math. Nachr. **105** (1982), 45–149
[8] Wischik, M. I.; Eskin, G. I. (Вишик, М. И., Эскин, Г. И.): Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения. Успехи матем. наук **22**, I (1967) 15–76

Roskilde B. Booß

Smoller, J., Shock Waves and Reaction – Diffusion Equations (Grundlagen der mathem. Wissensch., Band 258), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1983, 162 figs., 610 p., cloth DM 128,–

Dieses Buch wurde nach Aussagen des Autors aus zwei Gründen geschrieben. Erstens sollte die Theorie „of hyperbolic conservation laws“ und die Theorie „of systems of reaction-diffusion equations“ für Interessierte leichter zugänglich gemacht werden und zweitens war die Absicht, moderne Methoden und Ideen in diesen Gebieten einem größeren Leserkreis als nur Mathematikern darzustellen. Wer in Lehrveranstaltungen über partielle Differentialgleichungen Wert auf Anwendungen in der Strömungslehre und Gasdynamik legt, wird deshalb dieses Buch erwartungsvoll zur Hand nehmen.

Das Buch enthält vier Hauptteile, wobei jeder dieser Teile nach Aussagen des Autors einem einsemestrigen Kurs entspricht und Part I auch als Einführungskurs in Partielle Differentialgleichungen gedacht ist.

Zum Inhalt: Part I (Basic Linear Theory) behandelt die Charakteristikentheorie für Anfangswertprobleme bei hyperbolischen Differentialgleichungen, Eindeutigkeitsaussagen mit der Energie-Integralmethode, bringt den Holmgrenschen Eindeutigkeitssatz und es wird gezeigt, wie mit Hilfe der Energie-Integralmethode und der Fouriertransformation globale Existenzsätze herleitbar sind. – Ein Kapitel führt in die Distributionstheorie ein und bringt die Konstruktion von Fundamentallösungen. Den Abschluß bilden die Untersuchungen linearer elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Maximum-Prinzip und für elliptische Gleichungen die Herleitung von Existenzaussagen mit der Schauder-Methode.

Part II (Reaction-Diffusion Equations) beginnt mit dem Studium einer nichtlinearen parabolischen Gleichung. Mit Hilfe des Maximum-Prinzips werden Vergleichssätze für Lösungen hergeleitet, deren asymptotisches Verhalten für $t \to \infty$ wird untersucht und es wird gezeigt, wie mit Hilfe von Ober- und Unterfunktionen Existenzaussagen gewonnen werden. Der Brouwersche Fixpunktsatz wird bewiesen, der Leray-Schauder-Grad wird definiert und gezeigt, wie topologische Methoden zum Nachweis von Lösungen partieller Differentialgleichungen verwendet werden. Nach einer Einführung in die Morse-Theorie werden Bifurcation-Probleme untersucht und (jetzt) für nichtlineare parabolische Systeme Existenzaussagen, Vergleichssätze bewiesen und asymptotisches Verhalten der Lösungen studiert.

Part III (The Theory of Shock Waves) behandelt quasilineare Systeme der Gestalt $u_t + f(u)_x = 0$ (conservation laws). Am Beispiel der Burger-Gleichung $u_t + (u^2/2)_x = 0$ wird zunächst das Auftreten unstetiger Lösungen diskutiert und dadurch bedingt, der Begriff schwache Lösung eingeführt. Die daraus folgende Konsequenz des Verlustes der Eindeutigkeit der schwachen Lösung wird diskutiert. Es wird gezeigt, wie durch eine zusätzliche Forderung einer a-priori-Abschätzung für die schwachen Lösungen (Entropy condition), die physikalisch relevante Lösung aus der Menge der schwachen Lösungen herausgefiltert wird. Im Fall einer skalaren Gleichung $u_t + f(u)_x = 0$ wird mit einem Differenzenverfahren (Beweis von O. Oleinik) die Existenz genau einer schwachen Lösung bewiesen, die der Entropie-Bedingung genügt und das asymptotische Verhalten dieser Entropie-Lösung wird untersucht. Der Übergang zu Systemen wird dadurch erleichtert, daß zunächst das Riemann Problem für das „p-System" diskutiert wird, d. h. das Problem

$$u_t - u_x = 0,$$
$$u_t + p(v)_x = 0, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad p' < 0, \quad p'' > 0$$

mit $$U(x, o) = U_0(x) = \begin{cases} U_e = (v_e, u_e) & \text{für } x < 0 \\ U_r = (v_r, u_r) & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

wo die Eigenschaften der Lösung geometrisch interpretierbar sind. Mit Hilfe dieser Überlegungen wird sodann das Riemann Problem für ein hyperbolisches System von n Gleichungen gelöst unter der Voraussetzung, daß die Differenz der Anfangswerte $|U_e - U_r|$ hinreichend klein ist. Der Existenzbeweis erfolgt mit dem Differenzenverfahren von J. Glimm. Darüber hinaus enthält dieser Part III eine Zusammenfassung von Ergebnissen, die für ein System von zwei Gleichungen bekannt sind, Oleiniks Eindeutigkeitsbeweis für das „p-System" und einen Abschnitt über quasilineare parabolische Systeme (Ya. Kanels Existenzbeweis für die isentropische Gasgleichung mit Viskosität).

Part IV (The Conley Index) bringt zunächst eine geometrische Einführung des Conley-Indexes, den Zusammenhang zum Morse-Index und illustriert an Beispielen, wie mit Hilfe dieses Indexes sowohl Existenzaussagen als auch Stabilitätsaussagen gewonnen werden. Nach einem ausführlichen Studium des Conley-Indexes werden zum Abschluß spezielle Strömungsprobleme untersucht. Zum Beispiel wird die Nagumo-Gleichung

$$u_t = \epsilon v, \qquad v_t = v_{xx} + f(v) - u, \qquad \epsilon > 0$$

dahingehend diskutiert, unter welchen Voraussetzungen periodische Lösungen existieren, die allein von $\xi = x + \Theta t$ (Θ unbekannt) abhängen (travelling waves).

Das Buch bietet eine Fülle von Material und Anregungen, was leider nur zu oft zu Lasten der Ausführlichkeit und Genauigkeit geht. Die Distributionstheorie und Fouriertransformation werden auf sieben Seiten (pg. 45–52) behandelt. Regularitätsfragen bei elliptischen Gleichungen ist eine Seite (pg. 76) gewidmet. Differentialformen werden auf knapp eineinhalb Seiten eingeführt (pg. 138/139). Sätze und Lemmata enthalten häufig nicht die notwendigen Voraussetzungen in ihrer Formulierung. Das Buch enthält darüber hinaus eine Vielzahl von „Druckfehlern", die das Lesen erschweren.

Dem Referenten ist unklar, wie Nichtmathematikern, und damit einem größeren Leserkreis, diese Materie nähergebracht und verständlich gemacht werden soll.

Der anwendungsorientierte Mathematiker dagegen wird dieses Buch, mit Hilfe der „Notes" am Ende eines Kapitels mit Hinweisen auf die Originalliteratur, mit Nutzen studieren. Sehr erleichtert wird dieses Studium durch die Einleitungen zu den einzelnen Kapiteln, in denen die zu erarbeitenden Aussagen vorgestellt und häufig physikalisch interpretiert werden.

Karlsruhe M. Schneider

Beem, J. K.; Ehrlich, P. E., Global Lorentzian Geometry (Pure and Applied Math. 67), New York – Basel: Marcel Dekker 1981, VI + 460 p., hardbound, $ 45,–

The singularity theorems of Penrose and Hawking, together with subsequent work on black holes and cosmology, have brought into general relativity ideas and techniques from global Riemannian geometry. To a physicist or an applied mathematician investigating the nature of gravitation, it is natural that these ideas should be of more interest for their applications than for the context of their development. So it is, in the view of the authors of this book, that a division has arisen between two groups working on similar geometric theories: physicists on Lorentzian geometry and mathematicians on Riemannian geometry.

The authors intention is to heal the division by presenting to mathematicians a systematic account of Lorentzian geometry as a branch of modern differential geometry. Their technique is to take familiar but fundamental theorems from Riemannian geometry and to examine the modifications that must be made to obtain results in space-time of analogous content.

The early chapters deal with geodesic completeness, motivated by a discussion of the Hopf-Rinow theorem on the equivalence of metric and geodesic completeness in Riemannian geometry. They describe the properties of the Lorentzian distance function, and prove a number of theorems on connections between different notions of completeness in space-time (timelike, null, and spacelike geodesic completeness; b-completeness; and notions of "timelike Cauchy completeness" and "finite compactness") and on the existence of geodesic rays (geodesics for which the affine parameter coincides with the Lorentz distance function, not just locally, but globally). The principal modifications are the replacement of the minimizing property of geodesics in Riemannian geometry by the maximising property of timelike geodesics in space-time and the substitution of "global hyperbolicity" for "compactness". Some results exhibit complications that are not present in Riemannian geometry. For example, it is possible for a space-time to be geodesically complete in one or two of the three possible senses (timelike, spacelike, null), but incomplete otherwise.

The authors then turn to a discussion of the timelike and null cut loci of an event in space-time, defined by analogy with the cut locus of a point p in a Riemannian manifold, which is made up of the points on the geodesics beginning at p where the geodesic ceases to minimise the distance from p. This leads to a treatment of Morse theory in Lorentzian geometry, extending the original work of K. Uhlenbeck. They prove versions of the Morse index theorem for timelike and null geodesics in arbitrary space-times and investigate the topology of the space of timelike paths joining two events in a globally hyperbolic space-time. Considerable simplifications are made by using objects called "Jacobi tensors".

Finally, they illustrate the theory by giving new proofs of some of the singularity theorems.

In all, this is a useful book which should be welcomed by everyone interested in space-time geometry. It contains new material as well as interesting proofs of familiar results. The unified treatment, based on the thorough analysis of the properties of the Lorentz distance function in the early chapters, brings fresh insights to the subject.

However, the authors' outlook does also produce some distortion. The motivation from analogies with Riemannian geometry can appear forced and can give a misleading impression of the significance of a result. An example is the treatment in ch. 6 of the stability of geodesic incompleteness in Robertson-Walker space-times. Although interesting, it is not of great physical significance that metrics near Robertson-Walker metrics are past incomplete along all timelike geodesics. The interesting question that arises from the physical analysis is: is it true that in solutions of Einstein's equation (with appropriate energy momentum tensor) that are close to a "big bang" Robertson-Walker model, in the sense of having nearby Cauchy data on some Cauchy surface, *all* past directed timelike geodesics run into a singularity? This question, which the authors do not address, is of more importance to relativity. It is, moreover, of no less interest as a mathematical problem for the fact that it is hard to motivate in terms of Riemannian anaologies. I feel that the mathematical community is more interested in being given clear statements of mathematical problems that are of physical interest than in attempts to transplant the roots of Lorentzian geometry from relativity to pure mathematics.

Oxford N. M. J. Woodhouse

Giering, O., Vorlesungen über höhere Geometrie, Wiesbaden: Vieweg-Verlag, 1982, 614 S., DM 98,–

Dieses Buch ist eine Ausarbeitung von Vorlesungen, die der Autor im Anschluß an die Grundvorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie an der Technischen Universität München mehrfach gehalten hat. Das Ziel ist es, eine bis ins Detail gehende Darstellung jener Kleinschen Geometrien zu geben, die durch eine Untergruppe der projektiven Gruppe eines endlichdimensionalen reellen oder komplexen projektiven Raumes beherrscht werden. Eine solche Untergruppe stützt sich auf die Gruppe aller automorphen Kollineationen einer regulären oder singulären quadratischen Varietät, der Absolutfigur der Geometrie. Die Ergebnisse werden durch koordinatenmäßiges Rechnen erzielt; synthetische Schlüsse sind weitgehend vermieden. Die komplexe Fortsetzung wird den klassischen Vorbildern entsprechend auch an solchen Stellen herangezogen, wo man auch ohne sie gut auskommt.

Zunächst erfolgt eine Einführung in die Theorie projektiver Räume über einem endlichdimensionalen Vektorraum zu einem kommutativen Körper, insbesondere der quadratischen Varietäten solcher Räume. Allerdings sind die Begriffe dabei nur so weit entwickelt, wie man sie für die folgende Spezialisierung auf reelle Vektorräume und ihre komplexe Fortsetzung benötigt. Die koordinatenmäßige Klassifikation reeller quadratischer Varietäten leitet über zum Studium der Cayley-Kleinschen Räume. Die zugehörigen Geometrien sind anhand ihrer projektiven und nicht projektiven Modelle ausführlich studiert. Hier finden sich neben den n-dimensionalen hyperbolischen und elliptischen Räumen unter anderem die isotropen Räume, die Räume der verschiedenen Kugelgeometrien, die Lorentz-Räume und ihre Beziehungen zur speziellen Relativitätstheorie, aber auch eine genaue Diskussion der stereographischen Projektion und der Inversion. Insbesondere wird auch auf Matrizenmodelle und kinematische Modelle eingegangen. Den Abschluß bildet eine lokale Kurven- und Hyperflächentheorie in Kleinschen Räumen.

Besonders wertvoll ist das 54 Seiten lange Literaturverzeichnis, das mit großer Sorgfalt und Mühe zusammengestellt die einschlägige Literatur bis in die letzten Jahre angibt. Schon aus diesem Grund ist das vorliegende Buch unentbehrlich für jeden Geometer, der auf einschlägigen Gebieten zu arbeiten wünscht. Obwohl das Buch nicht gesetzt ist, besitzt es ein sehr ansprechendes Satzbild, welches zusammen mit den einprägsamen Textfiguren und dem ausführlichen gut verständlichen Text das Vergnügen des Lesers erhöht. Vom Inhalt her enthält das Buch Vieles, was bisher überhaupt nicht in Lehrbuchform vorlag. Ich bin sicher, daß der Wunsch des Autors, das Buch möge „dazu anregen, die höhere Geometrie als Theorie der Räume mit Absolutfigur und die zugehörigen Geometrien auch in Zukunft weiterzuführen", in Erfüllung gehen wird.

Wien H. Brauner

Beutelspacher, A., Einführung in die endliche Geometrie II, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1983, 237 S., DM 29,80

Der zweite Band von Beutelspachers Einführung in die endliche Geometrie befaßt sich inhaltlich weitgehend unabhängig vom ersten Band mit der Kombinatorik endlicher projektiver Räume:

Im Kapitel 6 wird das System der Punkte und Hyperebenen als ein symmetrischer 2-(v, k, λ)-Blockplan gekennzeichnet, in dem mit je drei nichtkollinearen Punkten stets dieselbe Anzahl von Blöcken inzidiert (Dembowski u. Wagner 1960). Anschließend werden entsprechend die endlichen affinen Räume charakterisiert (Dembowski 1964, 1967, Kimberley 1971). Das inzidenzgeometrische Axiomensystem von Lenz für affine Räume wird benutzt, um einen Satz von Doyen und Hubaut (1971) zu beweisen: Jeder mindestens vierdimensionale lokal projektive 2-$(v, k \geqslant 3, 1)$-Blockplan ist ein projektiver oder affiner Raum.

Das Kapitel 7 handelt von Unterebenen und k-Ecken (insbesondere Ovalen) in projektiven Ebenen, von quadratischen Mengen (Ovoiden, Kegeln über Ovalen, Hyperboloiden) in dreidimensionalen projektiven Räumen und von blockierenden Mengen, Faserungen und Überdeckungen projektiver Räume.

Kapitel 8 ist dem Studium der Möbius- und Minkowski-Ebenen gewidmet. Dembowskis berühmter Satz, daß jede Möbius-Ebene gerader Ordnung als Ebenenschnitt-Geometrie eines Ovoids darstellbar ist, wird auf den geradzahligen Seiten 116 bis 156 lückenlos bewiesen. Auf den ungeradzahligen Seiten 117 bis 157 wird parallel dazu gezeigt, daß die Minkowski-Ebenen gerader Ordnung Ebenenschnitt-Geometrien von Hyperboloiden sind. Der Autor entschuldigt sich, keinen schönen gemeinsamen Beweis angeben zu können: Ein wirklich schöner gemeinsamer Beweis schlösse aber einen bislang unbekannten Nachweis der Ovoidalität der Laguerre-Ebenen gerader Ordnung mit ein.

Kapitel 9 beschäftigt sich mit den sehr allgemeinen „Linearen Räumen" (je zwei verschiedene Punkte inzidieren mit genau einer Geraden). Unter gewissen kombinatorischen Voraussetzungen lassen sich diese linearen Räume in projektive Ebenen einbetten. Ein linearer Raum, in dem jede Ebene eine affine Ebene ist, und in der jede Gerade mindestens vier Punkte enthält, ist ein affiner Raum (Buekenhout 1969, Karzel u. Pieper 1970). Der wesentliche Beweisschritt, der Nachweis der Transitivität der Parallelität, wird hier durch die Voraussetzung der Endlichkeit des linearen Raumes vereinfacht.

Ein Anhang über endliche Körper und ein Zitat von Jean Paul beschließen das Werk.

Ohne der Versuchung zu erliegen, übertriebenen Formalismus zu betreiben, schreibt Beutelspacher flüssig und amüsant. Ein großer Teil der einleuchtend motivierten Resultate stammt aus der Zeit nach Dembowskis „Finite Geometries" (1968). Das Fehlen einer aktualisierten Neubearbeitung dieses Berichtes der Ergebnisse-Serie wird durch Beutelspachers endliche Geometrie wieder einmal deutlich. Der vorliegende Band ist als Lehrbuch für Studenten konzipiert und schließt eine Literaturlücke. Der Referent empfiehlt das Buch aber auch den Kollegen, die gern abfällig über die moderne „Geometrie der Punkte und Geraden" reden und schreiben: Dieses Buch könnte ihr Vorurteil revidieren.

München W. Heise

Jacobs, K., Einführung in die Kombinatorik, Berlin – New York: de Gruyter 1983, 274 S., DM 48,–

Aus dem Vorwort des Wilhelm Maak gewidmeten Buches: „Das vorliegende Buch schließt sich soweit wie möglich an das Bändchen von Ryser [1963] an. Es wendet sich nicht so sehr an zukünftige Berufskombinatoriker, sondern vor allem an Mathematiker jeder Arbeitsrichtung, die einen knappen, vielseitigen Einblick in die Kombinatorik gewinnen und mit bescheidenem technischem Aufwand schnell an eine Vielzahl berühmter Resultate herankommen wollen. Damit sind insbesondere Studenten und auch Gymnasiallehrer angesprochen (die Kombinatorik wird wegen ihres Reizes und ihrer Direktheit in Zukunft eine wachsende Bedeutung im Schulunterricht haben). Ich habe deshalb, bildlich gesprochen, versucht, einen möglichst kleinen Kuchen mit möglichst vielen Rosinen zu backen."

Kurze Inhaltsangabe: Kapitel I: Einfache Anzahlaussagen, Ein- und Ausschließung. Kap. II. Der Heiratssatz und seine Verwandten: Heiratssatz von P. Hall 1935, Graphensatz von König 1916, Satz von Dilworth 1950 über endliche Halbordnungen, Satz von Sperner 1928 über Antiketten in endlichen Potenzmengen, Graphensatz von Menger 1927, Schnitt-Fluß-Theorem von Ford-Fulkerson 1956, Satz von Baranyai 1975. Kap. III. Orthogonale lateinische Quadrate: Der Satz von Bose-Shrikhande-Parker 1960 über die Existenz zweier orthogonaler lateinischer Quadrate jeder Ordnung $n \neq 2,6$ wird bewiesen, mittels eines von R. M. Wilson 1974 publizierten Lemmas von D. K. Ray-Chaudhuri und des Satzes von MacNeish 1922. Kap. IV. Der Satz vom Diktator (Arrows Paradoxon 1951). Kap. V. 0-1-Folgen, insbes. die Morse-Folgen. Sie sind nicht periodisch, aber fastperiodisch. Kap. VI. Der Satz von Ramsey 1930, endliche und unendliche Fassung. Kap. VII. Die Sätze von van der Waerden 1926 und Hales-Jewett 1963, mit historischen Bemerkungen. Ohne Beweis wird über Sätze von I. Schur 1916, Rado 1933, Deuber 1973 und Szemerédi 1975 berichtet (Szemerédi gewann so den von Erdös privat gestifteten Preis von 1000 Dollar). Kap. VIII. Codes: Sofort entzifferbare und eindeutig entzifferbare, fehlerentdeckende und fehlerberichtigende Codes, Elemente der algebraischen Code-Theorie. Ein Schreibfehler auf S. 137 oben führt nicht zu weiteren Fehlern. Kap. IX. Endliche projektive Ebenen: Anzahlaussagen, Existenz absoluter Punkte von Polaritäten, das Freundschaftstheorem von Erdös-Rényi-Sós 1966, der Nichtexistenzsatz von Bruck-Ryser 1949. Kap. X. Blockpläne: Über das von Kirkman 1851 gestellte Problem wird ein gedrängter Schulmädchenreport gegeben [Beweis des Existenzsatzes von Ray-Chaudhuri und Wilson 1971 für $k = 3$, Bericht über weitere Resultate]. Kap. XI. Partitionen: Grundbegriffe, erzeugende Funktionen, Eulers Pentagonalzahlentheorem. Kap. XII. Polyas Abzähltheorie (Redfield 1927, Polya 1937): Der Zyklenindex, Burnsides Lemma, Alkohole (einschl. H_2O). Kap. XIII. Kombinatorische Betrachtungen topologischen Ursprungs: Königsberger Brückenproblem und Euler-Graphen (1936), Eulerscher Polyedersatz 1752/53; Fünffarbensatz und Vierfarbenproblem mit Bericht über den Stand von 1982, insbesondere Appel, Haken und Co.[1]) 1976; Hamiltonsche Kreise, Sätze von Dirac 1952, Ore 1960 und Pósa 1962; das Spernersche Lemma 1928 mit dem vereinfachten Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes 1911. Kap. XIV. Spiele auf Graphen: Baumspiele, Kuhnsches Gleichgewichtstheorem 1950, Spiele vom Typ Nim. Kap. XV. Spezielle Folgen ganzer Zahlen: Einleitung mit Tabelle, Fibonacci-Zahlen 1202, Rencontre-Zahlen, Menage-Zahlen, Bellsche Zahlen, Partitionszahlen, Catalansche Zahlen 1869, Stirlingsche Zahlen.

Was dem Referenten besonders gefallen hat: Die Stoffauswahl umfaßt sowohl das unerläßliche Grundwissen als auch eine Einführung in viele reizvolle Problemkreise mit Ausblicken auf neuere Resultate und ungelöste Fragen. Häufig wird eine verbale Ausdrucksweise der streng formalen Schreibweise vorgezogen. Zu den vom Verfasser benützten mathematischen Begriffen gehören z. B. Dame, Freundschaft, Herr, Lattenzaun, Liebes-Einheit, mächtige Familie, Politiker, Strunk und Trauf. Besonders eingängig für Laien erscheint das Kapitel über Spiele auf Graphen.

---

[1]) ein Computer

In der Regel (mit Ausnahmen) werden die wesentlichen Begriffe vor oder gleichzeitig mit der mathematischen Definition durch Beispiele, Einkleidungen und Figuren erläutert. Die behandelten Problemkreise werden immer mit historischen Angaben und Jahreszahlen versehen. Das Lit.-Verzeichnis nennt die vollen Vornamen der Autoren und bei nicht mehr lebenden Mathematikern das Geburts- und Todesjahr.

Die vom Referenten bemerkten Druckfehler und sonstigen Ungenauigkeiten (z. B. bei der Wiedergabe asymptotischer Existenzsätze von Ray-Chaudhuri und Wilson) halten sich in dem bei mathematischen Werken üblichen Rahmen.

Berlin H. Lenz

Szép, J., Forgó, F., Einführung in die Spieltheorie, Thun – Frankfurt/M.: Verlag Harri Deutsch 1983 (© Akadémiai Kiadó, Budapest 1983), 292 S., gebd., DM 28,–

Diese Übersetzung aus dem Ungarischen ist eine sehr detaillierte Einführung in gewisse Teilgebiete der Spieltheorie. Die Autoren machen auch von vornherein gar kein Hehl daraus, daß sie eine ihren subjektiven Präferenzen entsprechende Auswahl getroffen haben. Der Schwerpunkt liegt demgemäß in erster Linie auf nichtkooperativer Theorie, weiter noch auf kooperativer (n-Personen)-Theorie und weniger auf den dynamischen/stochastischen Aspekten. Besonderes Gewicht gelegt wird stellenweise auf die konkrete Berechnung von Gleichgewichtspunkten. Hier ist das Buch außerordentlich informativ.

Nach einem einleitenden Kapitel, in dem „Systemtheorie" getrieben und eine Einbettung der Spieltheorie in jene versucht wird, behandeln die ersten Kapitel n-Personen nichtkooperative Theorie und das Konzept des Nashschen Gleichgewichtspunktes. Man findet Existenzsätze und sehr ausführliche Diskussionen zur Berechnung von Gleichgewichtspunkten (Iterationsverfahren, Scarf-Hansen-Verfahren etc.).

Dagegen kommt die extensive Form etwas zu kurz. Sie wird en passant im dritten Kapitel eingeführt, in dem Spielbäume und Informationsbezirke und andere, die „Spielregeln" wiedergebenden Konstrukte, kurz erläutert werden. Allein, dem nicht bereits vororientierten Leser ist möglicherweise die Einbettung in die Normalform, die den Hauptgegenstand der ersten Buchhälfte bildet, nicht ohne weiteres ersichtlich. Insbesondere das sehr diffizile Informationsproblem ist in dieser Kürze nicht zu verarbeiten. Vielleicht wäre es vorzuziehen, die Thematik ganz zu streichen.

Nach einigen Beispielen (Oligopolspiel) wird der Komplex Matrix/Bimatrixspiele außerordentlich ausführlich abgehandelt. Zusammenhang mit linearen Programmen wird wie üblich etabliert und die iterativen Verfahren (Brown/Robinson) sowie das kontinuierliche über eine Differentialgleichung (von Neumann) zum Auffinden eines Gleichgewichtspunktes werden in extenso diskutiert. Auch Beispiele werden gerechnet. In diesen Bereichen hat das Buch seine Stärken.

Kapitel 20 fällt etwas aus dem Rahmen. Da die „Dynamik" ohnehin nicht ein betonter Gegenstand des Buches ist, stehen die hier behandelten stochastischen Spiele etwas allein. Zudem wird nur Shapleys 1953er Resultat für den stationären Fall bei positiver Stopwahrscheinlichkeit erörtert – hier ist man ja nun inzwischen viel, viel weiter. Aber wie gesagt, dieses Kapitel ist eigentlich nicht das Thema des Buches.

Mit Kapitel 23 beginnt die Erörterung der kooperativen Theorie. Erneut wäre es etwas wünschenswerter, wenn die Zusammenhänge „kooperative/nichtkooperative Theorie" sowie „extensive Form/Normalform/charakteristische Funktion" etwas klarer herausgearbeitet würden. Dennoch hat der Leser großen Gewinn am Aufbau der bekannten Lösungskonzepte. Es werden (in englischer Terminologie) das Core, der Maschler-Davis-Kernel und der Shapley-Wert angeboten sowie in einem weiteren Kapitel Stable Payoff Configurations und Bargaining-set.

Erneut hat man Gelegenheit, die Tragweite der Theorie an netten Beispielen zu überprüfen. Marktspiele und L. P.-Spiele sind wie üblich die geeigneten Ansatzpunkte, um die kooperative Theorie im Licht klassischer ökonomischer Begriffsbildungen neu zu betrachten. Das abschließende Kapitel 28 befaßt sich (wieder?) mit dem Begriff „incomplete information". Auch hier ist in gewisser Weise der Zusammenhang offen. Das Kapitel steht etwas allein.

Das Buch bietet eine Fülle von Material auf den Gebieten, auf denen es erklärtermaßen seinen Schwerpunkt hat. Es ist in diesen Bereichen sehr gut geeignet sowohl zum Einlesen wie auch zur Vertiefung. Etwas mehr Wille zur Gliederung wäre dem Buch vielleicht noch zu wünschen.

Ein Wort zur Nomenklatur scheint notwendig: Der Rezensent ist mit der (in einigen osteuropäischen Sprachen ebenfalls üblichen) Methode, das Wort „Core" mit „(Pflanzen-) Mark" zu übersetzen und Maschlers „Kernel" einfach mit dem gut deutschen „Kern" zu bezeichnen, nur allzu einverstanden. Leider ist (gerade bei Autoren, die sich mit Gleichgewichtstheorie beschäftigen) es ebenso üblich geworden, das „Core" mit „Kern" zu bezeichnen. Nur gut, daß im vorliegenden Werk der „Nucleolus" nur in Klammern als „Kernkörper" bezeichnet wird. Die Übersetzung „Absprachenmenge" für „Bargaining-set" ist vielleicht nur etwas frei – der Begriff „extensive Form" ist aber schon recht gut etabliert und sollte nicht durch „erweiterte Form" ersetzt werden. Bei der Fülle (meist in englischer Sprache geprägten) Begriffe in der kooperativen Spieltheorie muß man im deutschsprachigen Bereich zunehmend eine Verwirrung der Nomenklatur befürchten.

Bielefeld J. Rosenmüller

Ruckle, W. H., Geometric Games and their Applications (Research Notes in Mathematics 82), Boston – London – Melbourne: Pitman 1983, 187 p., paper, $ 19.95

Geometrische Spiele sind 2-Personen-0-Summen-Spiele, im allgemeinen in Normalform angegeben, deren Strategienräume eine nette „geometrische" Struktur aufweisen. Die Interpretation der Spiele ist jedoch meist derart, daß es sich um „Suchspiele" handelt, in denen einer der Kontrahenten verschiedene Strategien hat „etwas zu verstecken" oder zu „verheimlichen", während sein Opponent unter gewissen Strategien auswählen kann, die auf die Aufdeckung oder Entdeckung eines gewissen Tatbestandes hinzielen; die Auszahlung beider hängt davon ab, ob und wieviel entdeckt wird.

Versteckt und aufgedeckt wird im allgemeinen in endlichen Mengen, im Einheitsintervall oder auch in Graphen und die „Geometrie", die hier jeweils zugrunde liegt, gibt den Spielen ihren Namen.

Der Autor ist sich darüber im klaren, daß seine Terminologie Kritik herausfordern könnte. Er rechtfertigt sie außer der offensichtlichen Analogie auch noch damit, daß es Analogien zur „Geometric measure theory" gebe: In der Tat, da die reinen Strategien oftmals in der Auswahl endlich vieler Punkte oder gewisser Intervalle bestehen, so sind gemischte Strategien oftmals als Zufallsprozesse zu sehen, deren Werte eben solche Punktmengen im Einheitsintervall oder Einheitsquadrat oder dergleichen sind (Punktprozesse).

Betrachten wir ein typisches Beispiel (s. 133), das als „Length Hider Game" (von einer Übersetzung wird Abstand genommen) bezeichnete Spiel. Die beteiligten Spieler heißen ROT und BLAU, der Zustandsraum ist etwa das Einheitsquadrat und in ihm sind die achsenparallelen Strecken $x = a_1, \dots x = a_n$ vom ersten Spieler („Spieler ROT") auszuwählen und beiden Spielern bekannt. Spieler ROT kann als Strategie jede meßbare Untermenge R der Vereinigung dieser „Spalten" auswählen, Spieler BLAU kann einen stetigen Pfad f durch das Einheitsquadrat auswählen (genauer eine Funktion von [0, 1] nach [0, 1]). Die Auszahlung an Spieler ROT ist die gesamte Länge der von ihm ausgewählten Menge, falls der von Spieler BLAU ausgewählte Pfad diese Menge nicht trifft, und 0 andernfalls.

Dieses Spiel interpretieren wir (S. 135) etwa wie folgt: Spieler ROT (der oftmals, wenn es etwas martialisch zugeht, wie es scheint, nicht ganz das Vertrauen des Lesers verdient) installiert elektrische Untergrundkabel in einem gewissen rechteckigen Feld in der finsteren Absicht, gewisse Hilfseinrichtungen für vertragswidrig installierte Raketensilos damit zu bedienen. Die Lage der Kabel wird durch gewisse Pfosten angezeigt, ihre Länge kann jedoch variiert werden und ein von der Partei BLAU legitimierter Inspektor hat das Recht, das Feld, in dem die verdächtige Installation beobachtet wird, einmal quer zu inspizieren. Nun rechnen wir Wert und optimale Strategien aus und sind für allerhand Abrüstungsgespräche bestens präpariert.

Es ist in diesem Falle vielleicht gerechtfertigt, eine Besprechung durch Beispiele zu illustrieren, denn das Buch ist im wesentlichen eine beeindruckende Sammlung solcher Beispiele mit ihren Interpretationen. Dies erklärt der Autor auch ausdrücklich in seiner Einleitung: es komme ihm nicht darauf an, eine Theorie dieser geometrischen „search and ambush" Spiele aufzustellen; es gehe ihm nur darum, die bisher erreichten Ergebnisse in ihrer ganzen Fülle vorzustellen. Diese sind im wesentlichen von dem oben vorgestellten Typ, zusammen mit den teilweise recht kniffligen Berechnungen des Wertes und der optimalen Strategien. Es folgt dann im allgemeinen ein Satz von Interpretationen zusammen mit ungelösten Problemen. Eine wahre Fundgrube für jemanden, der Beispiele, knifflige Problemchen und interessante Methoden zur Berechnung von Wert und optimalen Strategien gewisser Spiele sucht.

Das Buch ist in 5 Kapitel gegliedert, deren erstes eine Einführung und einige allgemeine Bemerkungen enthält, während die anderen vier nach dem zugrunde liegenden Zustandsraum geordnet sind. Kapitel 2 behandelt endliche Spiele, Kapitel 3 Spiele auf dem Einheitsintervall und im R^n, Kapitel 4 ebenfalls, jedoch sind die Strategienmengen von etwas anderem Typ: stetige Funktionen oder ähnliches werden als Strategien zugelassen (oft als Pfade eines Inspektors oder dergleichen zu interpretieren). Kapitel 5 schließlich befaßt sich mit Spielen auf einem zyklischen Graphen.

Das Buch ist mit Vergnügen zu lesen, die Fülle der Beispiele, kleinen und größeren Tricks und der dazu gereichten Interpretationen (oftmals lässig, hie und da vielleicht etwas zu martialisch) ist beeindruckend. Der Mangel an einer übergeordneten Theorie wird vom Autor fröhlich zugegeben. Schließlich, so meint er, habe er sein Buch ja auch nicht „die Theorie der geometrischen Spiele" genannt.

Bielefeld J. Rosenmüller

Conway, J. H., Über Zahlen und Spiele, Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg 1983, VII + 205 S., kart. DM 38,–

Conway publizierte 1976 bei Academic Press sein wundersames Buch „On Numbers and Games" (corrected reprint 1977), in dem er Früchte seiner Beschäftigung mit mannigfachen Zwei-Personen-Spielen in farbenreichen, fundierten Skizzen vor dem zum Mitspielen aufgeforderten Leser ausbreitet. Eine dieser Früchte ist ein neuer Aufbau des Zahlensystems, der Dedekinds Theorie der Schnitte, Leibniz' Ideen von den infinitesimalen Zahlen und Cantors Konstruktion der Ordinalzahlen elegant zusammenfaßt und in einem ganz eigenwilligen Ansatz verallgemeinert, der eng mit der Theorie der Spiele verwoben wird. Die Lektüre dieses Buches erfordert einen geduldigen (d. h. auf den Stil des Autors eingehenden), aktiven (z. B. manche Andeutungen ausführenden) und aufmerksamen Leser (der z. B. bei Satz 27 oder bei einigen Rechnungen in Kap. 13 zweifelt), doch ist sie gewinnbringend und ein ästhetisches Vergnügen für jeden, der unorthodoxes mathematisch-kombinatorisches Denken liebt, das anspruchsvoll und anregend ist und zugleich mit wenig Vorkenntnissen auskommt, so daß auch Amateure auf ihre Kosten kommen, wenn sie sich Zeit zur Vertiefung nehmen. Inzwischen ist eine ausführlichere zweibändige Darstellung mancher der hier behandelten Spiele erschienen (Berlekamp, Conway & Guy: Winning Ways. Acad. Press 1982).

Der Vieweg-Verlag, der schon mehr für Verbreitung der unterhaltenden Mathematik in Deutschland getan hat, hat sich Conways Buch nicht entgehen lassen und legt eine Übersetzung von B. Kunisch vor. Nicht alle Wortspiele des Autors lassen sich adäquat im Deutschen wiedergeben. Doch nicht nur aus diesem Grunde sei dem Leser der deutschen Ausgabe empfohlen, ein wenig ins Original zu sehen, denn an einer Reihe von Stellen ist die Übersetzung ärgerlich: „ineffective" muß nicht „unbrauchbar" sein, „domain" ist nicht immer ein „Integritätsbereich", sondern hier mehrmals „Grundmenge", „(binary) expansion" ist nicht „(binäre) Erweiterung" sondern „(binäre) Ziffernentwicklung" etc. Auch bei anderen Unklarheiten hilft das Original oft schneller weiter als eigenes Nachdenken.

Trotz der genannten Einschränkungen könnte und sollte diese Übersetzung Conways Ideen in Deutschland populärer machen.

Erlangen W.-D. Geyer

Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K., Winning Ways, Vol. I: Games in general, Vol. II: Games in particular, London, etc.: Academic Press 1982, 850 p., paperback price: I: £ 10.80/$ 22.50; II: £ 10.80/$ 22.50; softcover set price: $ 39.00

Back in 1971 the reviewer heard from one of the authors of Winning Ways, that he was preparing a book on games. In the last few years the rumours that Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway and Richard K. Guy were about to publish a book on games, became stronger and stronger.

Let me start of by expressing my opinion that the fifteen years of toil, of which the authors speak in their preface, have most certainly been worth it.

Of course the authors could never have predicted at that time, that their book would come from the press, around the time that Martin Gardner was retiring. They used, however, the opportunity to dedicate Winning Ways to him, with the words: to Martin Gardner, who has brought more mathematics to more millions than anyone else.

The three authors, with a rather diverse background (E. Berlekamp for instance is an electrical engineer, and is one of the worlds leading algebraic coding theorists), share a great passion for games. And as can be expected from people at their level, they are not satisfied with a simple solution (read: the optimal playing strategy) for a game. A game for them is more than just a game.

Most of the games discussed in this book are played by two persons, who each have complete information (so bridge, a two-party game, is excluded). The two players take alternate turns, making moves according to certain rules (restrictions). These restrictions are free of any chance mechanism. The first player unable to move is (normally) the loser.

The authors distinguish between partizan games, i.e. games where the two players have different options (think of chess, where each player has his own colour) and impartial games, i.e. games where each player has the same options (think of NIM).

Since the authors fear that no friend of a reader of Winning Ways wants to play with this reader anymore, they have included a number of one-person games (solitaire, puzzles, life). More about them later.

In a narrative way (holding its middle between an intuitive way and a more formal mathematical way) the authors develop for the two-person games a way to attach a certain value v to any possible situation during the game and in particular to the starting position. This value v to one player, say the left player (for the right player this value is -v) expresses the advantage that the left player has in a particular situation. Suppose that in a given situation one can make moves leading to situations with value $a_1, a_2, \ldots$ (for this left player), while the possible moves for the right player lead to situation with values $b_1, b_2, \ldots$ (again for the left player). A good way to describe this situation is

$$\{a_1, a_2, \ldots \mid b_1, b_2, \ldots\}.$$

Once you know how to attach a value to this expression, you can determine the value of any situation with a back tracking procedure. The reader should realize that this value not only expresses for which player this game is advantageous to play, but also by how much. This knowledge is needed, when you play more games at once with your opponent (you have to decide in which game you want to make your move and what that move will be).

Attaching a value to $\{a_1, a_2, \ldots \mid b_1, b_2, \ldots\}$ is not as easy as you might have wished. Indeed $\{2|3\} = 2\frac{1}{2}$ (as you would have hoped), but $\{\frac{1}{2}|2\frac{1}{2}\} = 1$. To $\{0|0\}$ the value $*$ is attached and to $\{0|*\}$ the value $\uparrow$, with the bizarre property that $\uparrow$ is positive, but less than any positive number. More of these new notions of values are introduced and the authors show how to manipulate with them.

The authors introduce these new concepts in a natural way, but that does not mean that one can quickly browse through the pages. Especially in volume I the reader needs a pen and a piece of paper to verify the statements or to develop a certain intuition for the problems.

Luckily the reader can read and appreciate most of the one-person games in volume II, without having the knowledge of how to attach a value to a given game situation. To give an idea of the intelectual interest of the authors in their games, I will discuss part of their treatment of solitaire.

First of all they give a solution to the standard version of solitaire, that you will never forget. Secondly they discuss certain packages of moves that you can „glue“ together to solve the variant of solitaire, in which not the central position is empty at the beginning and filled at the end, but any of the other positions.

In a third version the hole is in any of the possible positions and you require which peg is the last to move. It turns out that this last peg can only finish in a certain subset of the positions. To determine which positions these are, a bit of theory is introduced.

A fourth variant is playing solitaire backwards in time, a fifth variant allows moves forewards and backwards in time, etc.

It is impossible to describe the sense of humour that is omnipresent in Winning Ways. What to think of a variant of tic-tac-toe, attributed to E. Pericoloso Sporgersi? And who will ever forget the little paragraph on page 597 describing the etiquette of Sylver Coinage.

To conclude, I sincerely recommend Winning Ways to anyone who likes to play (and win) two-person games.

The much wider group of puzzle fanatics, I can truly recommend volume II, which discusses many of the puzzles that you know, in an unforgettable way.

Eindhoven H. C. A. van Tilborg

Gani, J. (Ed.), The Making of Statisticians, Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, VIII + 263 S., Cloth, DM 49,–

Autobiographische Zeugnisse bedeutender Forscher sind wissenschaftsgeschichtliche Urkunden von außerordentlichem Wert: unter der polierten Struktur der Publikationen kommt der Nährgrund, der Schwung der Ideen zum Vorschein. Der vorliegende Band vereinigt 16 solche Urkunden, deren Entstehung man der Initiative von Joe Gani verdankt. Es äußern sich die Stochastiker Bruno de Finetti, Eugene Lukacs, Gheorghe Mihoc, M. S. Bartlett, Mark Kac, Z. W. Birnbaum, R. C. Bose, Wassily Hoeffding, E. J. G. Pitman, R. L. Anderson, D. J. Finney, Tosio Kitagawa, L. H. C. Tippett, Herman Wold, B. Benjamin, Henry Oliver Lancaster auf jeweils 1 bis 2 Dutzend Druckseiten. Der Charakter der Selbstdarstellungen variiert von überwiegend biographischen Angaben bis zu kleinen fachwissenschaftlich-historischen Essays. Beispielsweise kann der Beitrag von de Finetti als flotte Einführung in die Ideenwelt der subjektiven Wahrscheinlichkeiten dienen. Jedem Beitrag ist ein Photo und eine Kurzbiographie vorangestellt und eine meist selektive Bibliographie beigegeben. Neben Lebenswegen im wohlumhegten Raum eines Landes mit traditionsbewußter Wissenschaftspflege finden sich weiträumige Lebenswanderungen, vor allem bei den Kollegen osteuropäischer Herkunft. Oft verläuft der fruchtbarste Teil der Karriere in den USA.

In der hier versammelten, kleinen, illustren Gesellschaft fehlt naturgemäß mancher bedeutende Name. Insbesondere ist der Ostblock nur mit einem Beitrag (G. Mihoc) vertreten. Ganis gelungenes Unternehmen wird man im weiteren Rahmen sehen, in dem Paul Lévys Selbstzeugnisse „Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien" (Paris 1970), Joan Fisher Box' Buch über ihren Vater Ronald Alymer Fisher und Constance Reids Buch „Neyman – from life" weitere prominente Lichtpunkte sind; auch einige Publikationen in den Uspekhi (Russian Mathematical Surveys) sind hier zu erwähnen. In dieser Landschaft von Biographien bedeutender Stochastiker wird hoffentlich auch einmal ein Selbstzeugnis von Joe Gani erscheinen. – Dem Verlag und dem Herausgeber ist zu einem schönen Werk, das alle Mathematiker interessieren dürfte, zu gratulieren.

Erlangen K. Jacobs

Roberts, F. S., Measurement Theory (Encyclopedia of Mathematics and its applications 7), Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Comp. 1979, XXII + 420 S., £ 14,70

Dieser 7. Band der „roten Rota-Enzyklopädie" setzt die Ansätze früherer Monographien (u. a. von Pfanzagl 1959, Krantz-Suppes et al. 1971, Raiffa 1968, Keeney-Raiffa 1976, Fishburn 1970) über die mathematischen Aspekte des Gegeneinander-Abwägens verwandter Phänomene durch Individuen (die Theorie der Gruppen-Entscheidungen wird nur zitierend gestreift) enzyklopädisch fort. So handelt Kap. 1 von Relationen, insbesondere Ordnungsrelationen aller Art. Kap. 2 behandelt die Möglichkeit, solche Ordnungsrelationen durch das Zuordnen von reellen Zahlen messend zu erfassen. Dabei werden insbesondere die üblichen Skalentypen und die beim jeweiligen Typus sinnvollen (d. h. skalenänderungsinvarianten) Aussagen behandelt. Die Wiedergabe von Phänomen-Kombinationen durch die Verknüpfung (z. B. Addition) zugeordneter Zahlen führt auf Funktionalgleichungen und die zugehörigen mathematischen Kennzeichnungssätze. Kap. 7 behandelt das in der ökonomischen Theorie fundamentale Problem der Entscheidung bei Ungewißheit; Kap. 8 über subjektive Wahrscheinlichkeiten schließt sich hier auf natürliche Weise an, in ihm fehlt übrigens ein Hinweis auf die grundlegenden Arbeiten von Hans Richter (Math. Annalen 1953/54). Das Buch genügt den Anforderungen mathematischer Strenge, wendet sich aber nicht nur an Mathematiker, sondern auch an Mathematik-Anwender. Dies belegen die tafelmäßigen Zusammenstellungen mathematischer Sachverhalte, vor allem aber die zahlreich beigegebenen Datentafeln aus der empirischen Forschung. So findet man z. B. auf S. 152 zahlreiche Umweltgeräusche nach Dezibeln und Schädlichkeitsgraden aufgelistet. In Kap. 8.2 wird über konkrete Experimente zur Ermittlung subjektiver Wahrscheinlichkeiten berichtet. Der Mathematiker kann von diesem Ausblick aus seinem normalen Tätigkeitsbereich enorm profitieren.

Die in diesem Buch präsentierten Theorien gehören nicht zum innermathematisch Schwierigsten; zahlreiche Übungen erleichtern die Aneignung. Als vielseitiges Lehr-, Einführungs- und Überblicksbuch sei der gewichtige Band einschlägig interessierten Mathematikern warm empfohlen.

Erlangen K. Jacobs

Heyer, H., Theory of Statistical Experiments, Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, X + 289 S., DM 48,–

Das Buch mit dem ungewöhnlichen Titel (eine erweiterte Version des Springer-Hochschultexts) ist zu mehr als der Hälfte eine Darstellung klassischer Kapitel der Mathematischen Statistik (z. B. erschöpfende Sigma-Algebren, Vollständigkeit, Tests bei monotonen Likelihood-Quotienten, exponentielle Familien, erwartungstreue Schätzung). Daran schließen sich vier Kapitel über die Theorie des „Vergleichs von Experimenten" an, in denen außer den Grundlagen vor allem Resultate von Torgersen wiedergegeben werden (hier erstmalig in der Lehrbuch-Literatur). Der entscheidungstheoretische Ansatz der Statistik, auf den sich der Verfasser im Vorwort beruft, wird schon in Kapitel I vorgestellt, und zwar zunächst in der verwandten spieltheoretischen Situation. An diesem Ansatz hält der Verfasser nicht fest. So bezeichnet er im Kapitel VI die Suche nach erwartungstreuen Schätzern mit minimaler Varianz als „obvious aim of an optimal decision process". Dieses Prinzip der erwartungstreuen Schätzung läßt sich jedoch mit der Entscheidungstheorie nicht vereinbaren.

Die eigenwillige Terminologie des Buches weicht vielfach vom Gebräuchlichen ab: so heißt der von LeCam eingeführte Begriff „epsilon-deficient" hier „Blackwell more informative at level epsilon". Zuweilen werden feinste begriffliche Unterscheidungen vorgenommen, z. B. zwischen „exponential experiment" und „exponential family" (§ 14). Bei der erklärenden Prosa nimmt der Verfasser eher Mehrdeutigkeiten in Kauf: der Begriff „experiment", laut Vorwort „the procedure of drawing a sample with the intention of making a decision", ist im § 3 „a triple $\mathscr{X} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$"; dieses heißt dann auch „model", wovon man wiederum sagen kann: „having established a model $\mathscr{X}$ the statistician in a next step performs an experiment". Diese Mehrdeutigkeit hätte in einer erläuternden Passage leicht entschärft werden können.

Eine Leitung seiner Gedanken durch hilfreiche motivierende Passagen wird der Leser auch später entbehren. So bleibt der Sinn des Epsilon-Vergleichs von Experimenten im Dunkeln, weil der Verfasser auf die für die Theorie zentralen Beispiele (Approximation komplizierter durch einfachere Experimente) verzichtet und sich auch nicht zu den Intentionen der Forschung äußert. In der Hoffnung, daß sich manches von selbst erklären möge (§ 27), gießt er das Material in eine starre Definition-Satz-Beweis-Form, in welcher tiefe wie triviale Aussagen (z. B. theorem 19.8) unterschiedslos als „theorem" erscheinen. Dabei vermißt man einprägsame Formulierungen. Die durchgängige Verwendung einer eigenwilligen Symbolik erschwert das Nachschlagen und macht es bei vielen Theoremen unmöglich, sie „auszusprechen". In einer zwölfseitigen Einführung in die Notation, ergänzt durch eine Liste von nahezu zweihundert Symbolen, stellt der Verfasser am Ende die Hilfsmittel zur Entschlüsselung des Textes zusammen.

Das Buch entstammt offenbar dem wichtigen Anliegen, in einem Kurs über Mathematische Statistik neben den klassischen Teilen auch mathematisch interessantere Theorien abzuhandeln. Hierfür ist es aber nötig, tiefer anzusetzen: bei der Kultivierung der mathematischen Probleme der Statistik und nicht nur ihrer partiellen Lösungen. Sonst entsteht die Gefahr eines orientierungslosen Eklektizismus.

Heidelberg D. W. Müller

Allgemeine Algebra und Anwendungen

Von Prof. Dr. phil. D. W. DORNINGER, Technische Universität Wien, und Prof. Dr. phil. W. B. MÜLLER, Universität für Bildungswissenschaften Klagenfurt

1984. 324 Seiten mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen und Übungen.
16,2×22,9 cm. ISBN 3-519-02030-0. Geb. DM 42,–

Aus dem Inhalt: Operationen und Relationen (mit Beispielen aus der Verkehrsplanung und Soziologie) / Verbände und Boolesche Algebren (mit Anwendungen in der Quantenmechanik, Schaltalgebra und Aussagenlogik) / Halbgruppen (Automaten, Formale Sprachen, Beispiele aus der Biologie) / Gruppen (Anwendungen in der Zähltheorie, kristallographische Gruppen, ein Beispiel aus der Ethnologie, Elemente der Darstellungstheorie) / Ringe und Körper (Konstruktion mit Zirkel und Lineal, Statistische Versuchsplanung) / Fehlerkorrigierende Codes und Kryptographie

Proceedings of the Conference

Mathematics in Industry

October 24–28, 1983 Oberwolfach

Edited by Prof. Dr. rer. nat. H. NEUNZERT, Universität Kaiserslautern

1984. 287 pages. 16,2×23,5 cm. ISBN 3-519-02610-4. Paper DM 52,–

Contents

ORGANIZED COOPERATION BETWEEN UNIVERSITY AND INDUSTRY

R. S. Anderssen and F. R. de Hoog: A Framework for Studying the Application of Mathematics in Industry / A. B. Tayler: Oxford Study Groups with Industry; 1967–1983 / H. Wacker: Hydro Energy Optimization / J. Spanier: Applied Mathematics Education at the Claremont Colleges / H. Neunzert: Mathematics in the University and Mathematics in Industry – Complement or Contrast? / K. Hoffmann: On Establishing Contacts with Industry / M. Schulz-Reese: A Report of the „Kaiserslauterer Modellversuch“: Continuing Mathematical Education / H.-E. Gross and U. Knauer: University Education as Preparation for Professional Praxis / A. M. Kempf: Mathematical Modelling in the French Grandes Ecoles. The Particular Case of the E.S.I.E.A.

INDIVIDUAL PROJECTS AT THE UNIVERSITIES

C. Cercignani: Mathematics and Fluiddynamics / M. Primicerio: Sorption of Swelling Solvents by Glassy Polymers / M. Shinbrot: Icebreaking by Hovercraft / B. Rihtarsic, F. Krmelj and I. Kuscer: Oscillations in Pipelines of Hydroelectric Power Plants / A. K. Louis: The Limited Angle Problem in Computerized Tomography / H. Frank: Computer Aided Design in Piping of Chemical Plants / W. Krüger: The Trippstadt-Problem / B. Aulbach: Trouble with Linearization

PROBLEMS POSED BY INDUSTRY

J. Bukovics: Oscillations of a Gasbody with Absorbant Walls (A Problem Occuring in Structural Acoustics of Passenger Cars) / P. Causemann: Requirements for a Calculating Program Regarding a Two-Mass Vibration System to Optimize Damping Force Characteristics for Vehicle Shock Absorbers / A. Gamst: Geometric Design of Mobile Radio Telephone Systems / U. Pallaske: Large Systems of Stiff Ordinary Differential Equations. Numerical Treatment by Systems Reduction / R. Zobel: Validation of a Vehicle Crash Model

B. G. Teubner Stuttgart

Grundwissen Mathematik

Herausgeber: **G. Hämmerlin, K. Lamotke, F. Hirzebruch, R. Remmert, M. Koecher, W. Walter**

Band 5

R. Remmert

Funktionentheorie I

1984. 65 Abbildungen. XIII, 324 Seiten. DM 44,–. ISBN 3-540-12782-8

Inhaltsübersicht: Historische Einführung. – Zeittafel. – **Elemente der Funktionentheorie:** Komplexe Zahlen und stetige Funktionen. – Komplexe Differentialrechnung. Holomorphie und Winkeltreue. – Biholomorphe Abbildungen. Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie. Potenzreihen. Elementar-transzendente Funktionen. – **Cauchysche Funktionentheorie:** Komplexe Integralrechnung. Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung. – **Cauchy-Weierstrass-Riemannsche Funktionentheorie:** Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen. Miscellanea. Isolierte Singularitäten. – Meromorphe Funktionen. Konvergente Reihen meromorpher Funktionen. Laurentreihen und Fourierreihen. Residuenkalkül. Bestimmte Integrale und Residuenkalkül. – Kurzbiographien von Abel, Cauchy, Eisenstein, Euler, Riemann und Weierstrass. – Literatur. – Symbolverzeichnis. – Namenverzeichnis. – Sachverzeichnis. – Porträts berühmter Mathematiker.

In lebendiger und anschaulicher Art und Weise, gut motiviert durch Beispiele und Übungsaufgaben, wird der Stoff der Funktionentheorie bis zum Residuenkalkül entwickelt. Darüber hinaus ist vieles an historischer Motivierung und Erläuterung, an Notizen zur Person und Originalzitaten von Klassikern eingestreut, ohne daß das Buch dabei zu einer Geschichte der Funktionentheorie wird. Kenner werden Neues oder lang Vergessenes entdecken, z.B. Eisenstein's Zugang zu den Kreisfunktionen.

Dieses Buch wird viele Studierende auf ihrem Weg in dieses klassische Gebiet der Mathematik begleiten, das bis heute wohl das fruchtbarste Beispiel des innigen Zusammenhangs zwischen Analysis und Algebra darstellt. Bei Prüfungsvorbereitungen hat man schnell die wesentlichen Resultate zur Verfügung und erhält eine Fülle von interessanten Anregungen. Auch der Lehrer und der Mathematiker in der Wirtschaft und Industrie wird dieses Buch mit großem Gewinn lesen und immer wieder gerne hierauf zurückgreifen.

7231/5/1

Springer-Verlag
Berlin
Heidelberg
New York
Tokyo

Tiergartenstr. 17, D-6900 Heidelberg 1,
175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA,
37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan