86. Band Heft 4
ausgegeben am 19. 10. 1984

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1984

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 86/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 84,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

86. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1984

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, Schwetzingen

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 86, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

V. Bangert: Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten
J.-P. Bourguignon: Analytical Problems Arising in Geometry: Examples from Yang-Mills Theory
S. D. Chatterij: A Subsequence Principle in Probability Theory
S. Koppelberg: Booleschwertige Logik
R. Tijdeman: On the Fermat-Catalan Equation

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein
86 (1984) 115–134

Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei formalen Potenzreihen

P. Henrici, Zürich

§ 1 Einführung

Für natürliche Zahlen n sei Z^n die Menge der *Indexvektoren* $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ mit ganzzahligen Komponenten k_i, und Z_+^n die Menge der Indexvektoren $\mathbf{k} \in Z^n$, deren Komponenten k_i sämtlich nichtnegativ sind. Es bezeichne ferner

$$|\mathbf{k}| := k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

das *Gewicht* des Indexvektors **k**.

Sei $\mathcal{F}$ ein Körper. Eine *formale Potenzreihe* (fPR) über $\mathcal{F}$ in n Unbestimmten ist eine Abbildung

$$P : Z_+^n \to \mathcal{F}$$

welche unter Verwendung des Vektors der Unbestimmten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in suggestiver Weise wie folgt beschrieben wird: Für $\mathbf{k} \in Z^n$ wird

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} := x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \tag{1.1}$$

gesetzt. Mit $p_{\mathbf{k}} := P(\mathbf{k})$ wird dann

$$P = \sum_{\mathbf{k} \in Z_+^n} p_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \tag{1.2}$$

geschrieben. Die $p_{\mathbf{k}}$ heißen die *Koeffizienten* von P. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}_n$ die Menge der fPR in n Unbestimmten über $\mathcal{F}$; da die Abhängigkeit von $\mathcal{F}$ im folgenden keine besondere Rolle spielt, scheint es unnötig, diese in der Notation besonders hervorzuheben.

Durch die Schreibweise (1.1), (1.2) wird in natürlicher Weise eine Addition und eine Multiplikation von Reihen in $\mathcal{P}_n$ suggeriert. Mit diesen Operationen bildet $\mathcal{P}_n$ bekanntlich einen *Integritätsbereich*. Erklären wir die *Ordnung* einer fPR P durch

$$\operatorname{ord} P := \min \{ |\mathbf{k}| : p_{\mathbf{k}} \neq 0 \}, \tag{1.3}$$

so sind die *Einheiten* des Integritätsbereichs $\mathcal{P}_n$ genau die fPR P mit Ord P = 0, d. h. mit $p_{\mathbf{0}} \neq 0$; hier ist $\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0)$ gesetzt.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}_n^m$ die Menge aller m-Tupel $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$ von Elementen $P_i \in \mathcal{P}_n$. Sind die Elemente eines n-Tupels $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_n^n$ Nicht-Einheiten und ist

$$Q = \sum_{\mathbf{k} \in Z_+^n} q_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$$

eine beliebige fPR aus $\mathcal{P}_n$, so kann die *Zusammensetzung* $Q \circ \mathbf{P}$ von Q mit $\mathbf{P}$ algebraisch wie folgt erklärt werden: Man setzt

$$\mathbf{P}^{\mathbf{k}} := P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_n^{k_n},$$

bildet

$$\sum_{\mathbf{k} \in Z_+^n} q_{\mathbf{k}} \mathbf{P}^{\mathbf{k}}$$

und faßt Glieder mit gleichem Exponenten $\mathbf{m}$ zusammen. Wegen ord $P_i \geqslant 1$, $i = 1, \dots, n$, ist

$$\text{ord } \mathbf{P}^{\mathbf{k}} \geqslant |\mathbf{k}|,$$

und es fallen bei der letzten Operation für eine feste Potenz $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$ nur die endlich vielen Summanden $\mathbf{k} \in Z_+^n$ mit $|\mathbf{k}| \leqslant |\mathbf{m}|$ in Betracht. – Für Systeme $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_n^m$ ist die Zusammensetzung $\mathbf{Q} \circ \mathbf{P}$ komponentenweise definiert.

Eine fPR $P \in \mathcal{P}_n$ mit ord $P = 1$ heißt *Fasteinheit.* Ein System $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ von Fasteinheiten

$$P_i = \sum_{|\mathbf{k}| \geqslant 1} p_{i,\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$$

heißt *nichtsingulär*, falls die Matrix $(p_{i,\mathbf{e}_j})$ ($\mathbf{e}_j$:= j-ter Einheitsvektor) nicht singulär ist. Es ist leicht zu sehen, daß die nichtsingulären Systeme $\mathbf{P}$ von Fasteinheiten, $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_n^n$, unter der Operation der Zusammensetzung eine Gruppe bilden. Wir bezeichnen diese Gruppe mit $\mathcal{G}_n$. Neutrales Element von $\mathcal{G}_n$ ist das System $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ der Fasteinheiten

$$X_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zu gegebenem $\mathbf{P} \in \mathcal{G}_n$ existiert demnach genau ein $\mathbf{P}^{[-1]} \in \mathcal{G}_n$ mit

$$\mathbf{P}^{[-1]} \circ \mathbf{P} = \mathbf{P} \circ \mathbf{P}^{[-1]} = \mathbf{X}.$$

Wir nennen $\mathbf{P}^{[-1]}$ das zu $\mathbf{P}$ *inverse* System. Sind die Koeffizienten der Reihen des Systems $\mathbf{P}$ gegeben, so ist die Bestimmung der Koeffizienten der Reihen von $\mathbf{P}^{[-1]}$ im Prinzip eine elementare, durch Induktion nach $|\mathbf{k}|$ und Koeffizientenvergleich lösbare Aufgabe. Jedoch ist dieses Verfahren rechnerisch sehr umständlich.

Im Falle n = 1 ermöglicht dagegen eine klassische Formel von Lagrange [1770], die von Bürmann um 1799 wiederentdeckt, neu bewiesen und etwas erweitert wurde, die Koeffizienten der Reihe $P^{[-1]}$ oder allgemeiner diejenigen von $R \circ P^{[-1]}$ bei beliebigem $R \in \mathcal{P}_1$, rekursionsfrei durch die Koeffizienten von P auszudrücken. In der vorliegenden Arbeit werden Verallgemeinerungen der Lagrange-Bürmannschen Formel nach den folgenden drei Richtungen betrachtet:

(i) $n > 1$;

(ii) die vorkommenden Potenzreihen sind lediglich formal;

(iii) die Reihe R in der Lagrange-Bürmannschen Formel darf singulär sein.

Auf Beziehungen zu historisch gewachsenen Resultaten wird an Ort und Stelle eingegangen. Hier sei lediglich auf die Bedeutung von (ii) hingewiesen. Die Beschränkung auf formale Reihen zwingt uns, auch abgesehen von ihrem formalen Interesse, zur Konzentration auf das zur Bestimmung von $\mathbf{P}^{[-1]}$ oder $R \circ \mathbf{P}^{[-1]}$ zu lösende *Rechenproblem.* Unser eigentliches Ziel ist die Bereitstellung eines transparenten Kalküls, dessen vielseitige Anwendbarkeit durch eine Reihe von Beispielen belegt werden kann. In diesem Sinne möge die vorliegende Arbeit als ein Beitrag zur algorithmischen Mathematik verstanden werden.

Der Autor dankt H. Bass, J. Hofbauer, M. Knus, G. Meyer, R. Remmert und St. Ruscheweyh für Anregungen und ergänzende Angaben. Für die historischen Notizen am Ende jedes Paragraphen ist der Autor stark der Dissertation von M.-L. Henrici [1976] verpflichtet.

Historische Notizen zu § 1 Nach einer von Brill und M. Noether [1892] geäußerten Ansicht, der sich Osgood [1901] anschließt, bildete die berühmte Lagrangesche Arbeit [1770] den Ausgangspunkt für die Cauchysche Theorie der analytischen Funktionen. Aber auch Rouchés Arbeit [1862] (mit dem „Satz von Rouché") ist noch durch die Lagrangesche Reihe motiviert. Der Bürmannsche Beitrag wird von Laplace und Legendre [1799] gewürdigt. Von Bürmann, der sich um 1807 vergeblich um eine Stelle als Mathematiklehrer am neugeschaffenen Lyceum in Mannheim bemühte, ist nicht einmal der Vorname bekannt; siehe Cantor [1872], Caspari [1873].

§ 2 Der Fall n = 1

Zur Herausstellung der Methode scheint es zweckmäßig, auf den Fall $n = 1$ gesondert einzugehen. Hier kann auf die Vektor- und Multiindexschreibweise verzichtet werden; auch schreiben wir $\mathcal{P}$ anstelle von $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_1^1$, etc. Eine fPR $P \in \mathcal{P}$ erscheint deshalb jetzt in der Form

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k;$$

die Elemente der Gruppe $\mathcal{G}$ sind die Fasteinheiten in $\mathcal{P}$,

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x^k, \qquad p_1 \neq 0.$$

Die Schlüsselbegriffe zur formalen Lagrange-Bürmann-Formel im Falle $n = 1$ sind formale Laurentreihen und ihr Residuum. Eine formale Laurentreihe (fLR) in einer Unbestimmten ist eine Abbildung $R : Z \to \mathcal{F}$, geschrieben als

$$(2.1) \qquad R = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k x^k,$$

mit der Auflage, daß nur endlich viele r_k mit $k < 0$ von Null verschieden sind. Aufgrund der letzten Bedingung kann das Produkt zweier fLR in algebraischer Weise definiert werden. Die fLR in einer Unbestimmten bilden somit einen Integritätsbereich. Dieser ist aber sogar ein Körper. Jede fLR $R \neq 0$ kann nämlich in der Form

$$R = X^m Q$$

dargestellt werden, wo m eine passende ganze Zahl und Q eine Einheit in $\mathcal{P}$ ist; sie besitzt also die Reziproke

$$R^{-1} = X^{-m} Q^{-1}.$$

Wir bezeichnen den Körper der fLR in einer Unbestimmten mit L. L ist isomorph zum Quotientenkörper des Integritätsbereichs P.

Ist $R \in L$ und ist $Q \neq 0$ eine Nichteinheit in P, so kann offensichtlich die Zusammensetzung $R \circ Q$ in rein algebraischer Weise gebildet werden, und das Resultat ist wieder in L.

Die *Ableitung* der fLR (2.1) ist formal durch

$$R' := \sum_{k=-\infty}^{\infty} k r_k x^{k-1} \tag{2.2}$$

definiert, wo wie üblich kr_k für $k > 0$ als $r_k + r_k + \ldots + r_k$ (k Summanden) und für $k < 0$ als $-|k| r_k$ zu verstehen ist. Offenbar ist $R' \in L$. Man verifiziert leicht, daß die üblichen Regeln der Differentialrechnung, wie z. B. $(RS)' = R'S + RS'$, gelten.

Ist $R = \sum r_k x^k \in L$, so heißt r_{-1} das *Residuum* von R, und wir schreiben

$$r_{-1} = \operatorname{Res} R.$$

Aus (2.2) folgt sofort, daß die Ableitung einer fLR das Residuum 0 hat. Hat außerdem, wie wir von jetzt an voraussetzen wollen, F die Charakteristik 0, so gilt offenbar auch die Umkehrung. Trotz der Trivialität des Resultates halten wir fest:

Lemma 2.1 *Das Residuum einer* fLR R *in einer Unbestimmten über einem Körper der Charakteristik* 0 *ist dann und nur dann* 0, *wenn* R *eine Ableitung ist, d. h. wenn es ein* $S \in L$ *gibt mit* $S' = R$.

Wegen $(RS)' = R'S + RS'$ ergibt sich sofort

Korollar 2.2 *Für beliebige* $R, S \in L$ *gilt*

$$\operatorname{Res}(R'S) = -\operatorname{Res}(RS'). \tag{2.3}$$

Eine formale Version der klassischen Lagrange-Bürmann-Formel kann jetzt fast sofort angegeben werden. Sei $R \in L$, und sei P eine Fasteinheit in P, $Q := P^{[-1]}$. Es handelt sich um die Bestimmung der Koeffizienten c_k in der Reihe

$$R \circ Q = \sum c_k x^k.$$

Durch Zusammensetzung mit $P = Q^{[-1]}$ erhalten wir

$$R = \sum c_k P^k.$$

Sei $m \in Z$. Wir multiplizieren mit der fLR $P^{-m-1}P'$. Rechts darf die Multiplikation gliedweise erfolgen, da nur endlich viele Glieder zu einer festen Potenz x^k beitragen können:

$$RP^{-m-1}P' = \sum c_k P^{k-m-1}P'.$$

Wir bilden das Residuum. Für $k \neq m$ ist

$$P^{k-m-1}P' = \frac{1}{k-m}(P^{k-m})',$$

eine Ableitung; das Residuum ist also 0. Es verschwinden also auf der rechten Seite alle Glieder mit $k \neq m$. Für $k = m$ stellt man leicht fest:

$$\operatorname{Res} P^{-1}P' = 1.$$

Es folgt

$$c_m = \operatorname{Res}(RP^{-m-1}P'),$$

und da m beliebig war, haben wir bewiesen:

Satz 2.3 *Sei* F *ein Körper der Charakteristik* 0, *sei* R *eine* fLR *in einer Unbestimmten über* F, *sei* P *eine Fasteinheit im Integritätsbereich der* fPR *über* F, *und sei* $Q := P^{[-1]}$. *Dann gilt*

$$R \circ Q = \sum_k \operatorname{Res}(RP^{-k-1}P')x^k. \tag{2.4}$$

Wegen Korollar 2.2 ist für $k \neq 0$

$$\operatorname{Res}(RP^{-k-1}P') = \frac{1}{k}\operatorname{Res}(R'P^{-k});$$

das Resultat kann also auch

$$R \circ Q = \operatorname{Res}(RP^{-1}P') + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k}\operatorname{Res}(R'P^{-k})x^k \tag{2.5}$$

geschrieben werden.

Wir gewinnen aus (2.5) leicht die in den Lehrbüchern zu findende Gestalt der Lagrange-Bürmann-Formel. Sei $F = \mathbf{C}$, und seien P und R *konvergente Potenzreihen*, die also in einer gewissen Umgebung von 0 analytische Funktionen darstellen:

$$w = P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \qquad R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k.$$

Da P Fasteinheit ist, gilt $P'(0) \neq 0$, und es existiert in einer Umgebung von 0 die Umkehrfunktion $z = P^{[-1]}(w) = Q(w)$. Die nach z zu lösende Gleichung $w = P(z)$ wird nun in der Form $z = wH(z)$ geschrieben, so daß also

$$P(z) = \frac{z}{H(z)}$$

gesetzt ist, $H(0) \neq 0$. Damit wird

$$\operatorname{Res}(R'P^{-k}) = \operatorname{Res}(R'z^{-k}H^k).$$

Das Residuum ist also gleich dem Koeffizienten von z^{k-1} in der Entwicklung von $R'H^k$. Dieser kann als Ableitung geschrieben werden:

$$\operatorname{Res}(R'z^{-k}H^k) = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{R'(z)[H(z)]^k\}_{z=0},$$

und es ergibt sich die Lagrange-Bürmann-Formel in der herkömmlichen Gestalt

$$R(Q(w)) = R(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{R'(z)[H(z)]^k\}_{z=0}w^k,$$

siehe z. B. Polya und Szegö [1925], p. 125. Die Darstellung des Lagrange-Bürmannschen Resultates vermittels Ableitungen ist nicht nur recht umständlich, sondern sie versagt, wenn R eine echte Laurentreihe ist, da dann die Residuen nicht durch Ableitungen ausgedrückt werden können.

Von den zahlreichen bekannten Anwendungen zu Satz 2.3 erwähnen wir den prinzipiell wichtigen Fall $R = X^m$, $m \in Z$. Wir schreiben für Fasteinheiten $P \in \mathcal{P}$ und $k \in Z$

$$P^k = \sum_{h=k}^{\infty} a_h^{(k)} x^h.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(R'P^{-k}) &= m \operatorname{Res}(x^{m-1}P^{-k}) \\ &= m \cdot \text{Koeffizient von } x^{-m} \text{ in } P^{-k} = m a_{-m}^{(-k)}, \end{aligned}$$

und es folgt

Satz 2.4 *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt für* $m \in Z$, $m > 0$

$$Q^m = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{m}{k} a_{-m}^{(-k)} x^k. \tag{2.6}$$

Die gleiche Formel gilt für $m \leqslant 0$, *wenn das Glied mit* $k = 0$ *durch*

$$\operatorname{Res}(X^m P^{-1} P')$$

ersetzt wird.

Historische Notizen zu § 2 Für den hier gegebenen Beweis von Satz 2.3 siehe Henrici [1983], aber der Beweis bei Jacobi [1830] beruht im Grunde auf dem gleichen Gedanken, obgleich dort natürlich nicht scharf zwischen konvergenten und formalen Reihen unterschieden wird. Auch die noch unpublizierten Arbeiten von Garsia [1980] und Hofbauer [1982] bringen diesen Beweis. Henrici [1964, 1974] beweist zuerst Satz 2.4 mittels eines Matrix-Isomorphismus von $\mathcal{G}$ und darauf aufbauend Satz 2.3 für $R \in \mathcal{P}$, ähnlich Tyrrell [1962] für $R = X$. Raney [1960] gibt einen kombinatorischen Beweis von Satz 2.3 für $R = X$ durch Verallgemeinerung der Cayleyschen Abzählung nichtassoziativer Produkte. Mittels eines „lifting theorem" von Bender [1974] kann die Richtigkeit von Satz 2.3 für formale Reihen auch aus der Richtigkeit für konvergente Reihen geschlossen werden; auch Tyrrell [1962] bemerkt dies. Für Satz 2.4 im Falle konvergenter Reihen siehe Schur [1947] ($m > 0$) und Jabotinsky [1953] ($m \in Z$). Beispiele zu Satz 2.3 im konvergenten Fall, die aber auch vom formalen Standpunkt aus von Interesse sind, bei Schlömilch [1865], S. 96–111; Polya und Szegö [1924], S. 124–127; Whittaker und Watson [1927], S. 128–133; Hurwitz und Courant [1929], S. 135–145; und, auf die formale Theorie zugeschnitten, Henrici [1974], S. 55–64. Der Fall singulärer Reihen wurde im Rahmen der analytischen Theorie zuerst von Teixeira [1900] betrachtet. Hofbauer [1982] erwähnt q-Analoga der Lagrange-Bürmann-Formel, mit zahlreichen Literaturangaben.

§ 3 Formale Laurentreihen in n Unbestimmten

Der Schlüssel zur mehrdimensionalen Lagrange-Bürmann-Formel liegt in folgender Definition: Eine *formale Laurentreihe in* n *Unbestimmten* über dem Körper $\mathcal{F}$ ist eine Funktion

$$R : Z^n \to \mathcal{F},$$

geschrieben als

(3.1) $$R = \sum_{k \in Z^n} r_k x^k,$$

mit der Auflage, daß für jedes $m \in Z$ nur endlich viele r_k mit $|k| < m$ von Null verschieden sind. Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser fLR mit L_n.

Beispiele Sei $n = 2$; wir schreiben $x := x_1$, $y := x_2$. Die Reihe

$$1 + xy^{-1} + x^2y^{-2} + \ldots$$

ist nicht in L_2, da sie unendlich viele Glieder vom Gewicht 0 hat. Dagegen ist die Reihe

(3.2) $$1 + x^2y^{-1} + x^4y^{-2} + \ldots$$

in L_2, da sie für jedes $m \in Z$ nur endlich viele, nämlich max $(0, m)$ Glieder vom Gewicht $< m$ besitzt. –

Wir sehen am zweiten Beispiel, daß im Falle $n > 1$ bei einer fLR keine untere Schranke für die Exponenten der einzelnen Unbestimmten zu existieren braucht. (In dieser Hinsicht unterscheidet sich unsere Definition von derjenigen von Garsia [1980].) Dagegen ist wegen unserer Endlichkeitsvoraussetzung für jedes $R \in L_n$, $R \neq 0$

$$\text{ord } R := \min \{|k| : r_k \neq 0\} > -\infty.$$

Wir nennen diese ganze Zahl (die negativ sein kann) die *Ordnung* von R.

Durch die Schreibweise (3.1) werden Summe und Produkt von Reihen in L_n in natürlicher Weise erklärt. Es ist leicht zu sehen, daß L_n unter beiden Operationen abgeschlossen ist und daß L_n sogar ein Integritätsbereich ist.

Welches sind nun die Einheiten dieses Integritätsbereiches? Im Falle $n = 1$ sahen wir, daß jedes von der Nullreihe verschiedene $R \in L = L_1$ Einheit ist und daß L_1 daher ein Körper ist. Diese Aussage gilt jedoch nicht für $n > 1$: Beispielsweise ist die Reihe

$$R = x^{-1} - y^{-1} \in L_2$$

keine Einheit; ihr formal berechnetes Reziprokes ist entweder

$$x + x^2y^{-1} + x^3y^{-2} + \ldots \quad \text{oder} \quad -y - y^2x^{-1} - y^3x^{-2} - \ldots,$$

und keine dieser Reihen ist in L_2, da sie beide unendlich viele Glieder vom Gewicht 1 haben.

Satz 3.1 *Die Menge der Einheiten in* L_n *besteht aus denjenigen* $R \neq 0$, *die genau ein Glied niedrigsten Gewichtes besitzen.*

B e w e i s. Wie im obigen Beispiel zeigt man leicht, daß eine fLR mit mehreren Gliedern niedrigsten Gewichtes keine Reziproke in L_n besitzt. Es besitze nun die fLR

$$R = \sum r_k x^k$$

genau ein Glied niedrigsten Gewichtes, und es sei r_{k_0} dessen Koeffizient. Dann ist

$$R = r_{k_0} x^{k_0}(1 - P),$$

wo $\quad P := \sum_{|k| > |k_0|} r_{k_0}^{-1} r_k x^{k-k_0}$

eine fLR mit ord $P > 0$ ist. Wir behaupten, daß die zu R reziproke Reihe durch

$$R^{-1} := r_{k_0}^{-1} x^{-k_0}(1 + P + P^2 + \ldots)$$

gegeben ist. Hier ist die geometrische Reihe wohldefiniert, da wegen ord $P^k \geqslant k$ jeweils nur endlich viele Glieder einen Beitrag zu einer festen Potenz x^m leisten können. Aus dem gleichen Grunde kann das Produkt RR^{-1} formal berechnet werden; sein Wert ist natürlich die fLR 1.

Bei der *Zusammensetzung* einer fLR $R \in L_n$ mit einem System $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ von Nichteinheiten in P_n gemäß

$$R \circ \mathbf{P} = \sum_{k} r_k \mathbf{P}^k \tag{3.3}$$

ist Vorsicht am Platze, da auch Potenzen $P_i^{k_i}$ mit negativen Exponenten k_i auftreten können. Die Zusammensetzung ist also i. A. sicher nur dann möglich, wenn jedes P_i Einheit in L_n ist, wenn es also genau ein Glied niedrigsten Gewichtes hat. Aber auch diese Bedingung ist noch nicht hinreichend dafür, daß (3.3) in L_n ist. Setzen wir nämlich die Reihe (3.2) mit dem System der Einheiten

$$P_1 = x, \qquad P_2 = y^2$$

zusammen, so ergibt sich die Reihe

$$1 + x^2y^{-2} + x^4y^{-4} + \ldots$$

mit unendlich vielen Gliedern vom Gewicht 0. Dagegen gilt:

Satz 3.2 *Die Zusammensetzung* (3.3) *ist für beliebige* $R \in L_n$ *sinnvoll und ergibt eine Reihe in* L_n *für Systeme* $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$, *deren Komponenten* P_i *Einheiten in* L_n *sind mit* ord $P_i = 1$. (Dagegen wird nicht verlangt, daß die P_i auch in P_n sind.)

B e w e i s. Bei Systemen mit der verlangten Eigenschaft gilt ord $P_i^{k_i} = k_i$ für beliebige $k_i \in Z$, folglich ord $\mathbf{P}^k = |\mathbf{k}|$ für beliebige $k \in Z^n$. Zu jeder festen Potenz x^m mit $m \in Z^n$ können in (3.3) also nur die endlich vielen Glieder mit $|\mathbf{k}| \leqslant |\mathbf{m}|$ einen Beitrag leisten.

Beispiel Die Zusammensetzung der Reihe (3.2) mit dem System der Reihen der Ordnung 1,

$$P_1 = x, \qquad P_2 = x^{-1}y^2,$$

ergibt die Reihe

$$1 + x^3y^{-2} + x^6y^{-4} + x^9y^{-6} + \ldots,$$

die offenbar in L_2 ist.

Wir haben schließlich die *Differentiation* von Reihen in L_n zu betrachten. Sei

$$R = \sum r_k x^k \tag{3.4}$$

in L_n. Die partielle Ableitung von R nach x_i ist formal durch

$$D_i R := \sum_{\mathbf{k}} k_i r_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}-\mathbf{e}_i}$$

definiert, wo $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ gesetzt ist und $\mathbf{e}_i$ den i-ten Einheitsvektor bedeutet. Offensichtlich ist $D_i R \in L_n$, und es gelten die üblichen Differentiationsregeln.

Wir benötigen nun ein Analogon zu Lemma 2.1, welches besagt, daß das Residuum der Ableitung einer fLR in L_1 Null ist. Zunächst gilt es, den Begriff des Residuums einer Reihe in L_n zu definieren. Unter dem *Residuum* der Reihe (3.4) verstehen wir den Koeffizienten

$$\operatorname{Res} R := r_{-\mathbf{e}}$$

mit $\mathbf{e} := (1, 1, \ldots, 1)$. Es ist dann klar, daß für $i = 1, \ldots, n$

$$\operatorname{Res} D_i R = 0 \tag{3.5}$$

gilt, da nach der Differentiation nach x_i alle Glieder, bei denen x_i in der Form x_i^{-1} vorkommt, und mit ihnen also auch $x_1^{-1} x_2^{-1} \ldots x_n^{-1}$, verschwunden sind. Wir benötigen jedoch ein etwas weniger triviales Resultat.

Satz 3.3 *Sei* $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_n)$ *ein System von fLR in* L_n *und sei*

$$\mathbf{R}' := \det (D_i R_j)$$

seine (formal gebildete) *Jacobische Determinante. Dann ist*

$$\operatorname{Res} \mathbf{R}' = 0.$$

Beweis. Sei

$$R_j = \sum_{\mathbf{k}} r_{j,\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Nach dem Additionssatz für Determinanten ist $\mathbf{R}'$ gleich der Summe der Determinanten

$$\det (D_i r_{j,\mathbf{k}(j)} \mathbf{x}^{\mathbf{k}(j)}), \tag{3.6}$$

erstreckt über alle n-Tupel von Indexvektoren $(\mathbf{k}(1), \ldots, \mathbf{k}(n))$. Nach Ausführung der Differentiationen und Herausziehen gemeinsamer Faktoren ergibt (3.6)

$$\mathbf{x}^{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{k}(j) - \mathbf{e}} \prod_{j=1}^{n} r_{j,\mathbf{k}(j)} \det (k_{ij}),$$

wo $\mathbf{k}(j) = (k_{1j}, k_{2j}, \ldots, k_{nj})$ gesetzt ist. Ein Beitrag zum Residuum wird nur von den Summanden mit

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{k}(j) = \mathbf{0} \tag{3.7}$$

geleistet. Für diese ist aber $\det (k_{ij}) = 0$, da wegen (3.7) die Kolonnen offensichtlich linear abhängig sind. Also sind die betreffenden Determinanten (3.6) sämtlich 0.

Historische Notizen zu § 3 Zum hier verwendeten Begriff der formalen Laurentreihen in n Unbestimmten vgl. Henrici [1983]. Während jedoch die Reihen in P_n für die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher grundlegend sind, spielen, laut einer Mitteilung von R. Remmert, die Reihen in L_n für $n > 1$ in dieser Theorie keine Rolle. (Für n = 1 stellen sie meromorphe Funktionen dar.) Satz 3.2 korrigiert eine ungenaue Aussage bei Henrici [1983]. Jacobi [1830] beweist eine spezielle Version von Satz 3.4 für n = 1, 2, 3. Unser Beweis schließt sich an M.-L. Henrici [1976] an, wo allerdings speziellere Laurentreihen betrachtet werden. Siehe auch Garsia [1980], Hofbauer [1982]. Die meisten Autoren sehen keinen Anlaß, die spezielle Rolle des Residuums von Reihen in L_n besonders herauszustellen; eine Ausnahme bildet Goldstein [1975].

§ 4 Das Hauptresultat

Die Werkzeuge zur Durchführung des in § 1 angekündigten Programms sind jetzt bereitgestellt. Dort betrachteten wir die Gruppe G_n von nichtsingulären Systemen von Fasteinheiten in P_n, und es wurde die Aufgabe betrachtet, das inverse System $\mathbf{P}^{[-1]}$ eines Systems $\mathbf{P} \in G_n$ durch $\mathbf{P}$ auszudrücken. Nun erfordert die Lagrange-Bürmannsche Formel aber schon im Falle n = 1 die Bildung beliebiger Potenzen von P. Damit dies im Fall $n > 1$ möglich ist, müssen wir verlangen, daß die Komponenten P_j des Systems $\mathbf{P}$ Einheiten in L_n sind, d. h. genau ein Glied des Gewichtes 1 haben. Bei geeigneter Numerierung der Unbestimmten müssen also die P_j für $j = 1, \ldots, n$ die Form

$$(4.1) \quad P_j = c_j x_j + S_j, \qquad S_j \in P_n, \qquad \operatorname{ord} S_j \geqslant 2$$

mit $c_j \neq 0$ haben. Systeme $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ mit der Eigenschaft (4.1) nennen wir *diagonal.* Ein diagonales System ist nichtsingulär genau dann, wenn alle $c_j \neq 0$ sind. Es ist klar, daß die nichtsingulären diagonalen Systeme $\mathbf{P}$ eine Untergruppe $G_n^{(d)}$ von G_n bilden. Für Systeme $\mathbf{P} \in G_n^{(d)}$ könnte nun eine Lagrange-Bürmann-Formel leicht hergeleitet werden.

Jedoch ist ohne große Mühe noch eine Verallgemeinerung möglich, die wichtige zusätzliche Anwendungen erschließt (vgl. § 5.4). Bei näherem Zusehen zeigt sich nämlich, daß in (4.1) die Bedingung $S_i \in P_n$ durch $S_i \in L_n$ ersetzt werden kann. Wir betrachten demnach Systeme $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ von formalen Laurentreihen mit

$$(4.2) \quad P_i = c_i x_i + S_i, \qquad c_i \neq 0, \qquad S_i \in L_n, \qquad \operatorname{ord} S_i \geqslant 2.$$

Solche Systeme nennen wir *zulässig.* Im Falle n = 2 ist also nicht nur das System

$$u = x - y^2, \qquad v = y + x^5$$

zulässig, sondern etwa auch

$$u = x - y^3 x^{-1}, \qquad v = y - x^4 y^{-2}.$$

Wir bezeichnen die Gesamtheit der zulässigen Systeme mit G_n^*.

Satz 4.1 *G_n^* bildet unter der Operation $\circ$ eine Gruppe.*

Schwierigkeiten beim Beweis macht einzig die Existenz des inversen Elementes. Sei also $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in G_n^*$,

$$P_i = \sum_{|\mathbf{k}| \geqslant 1} p_{i,\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

wir suchen $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ mit $P \circ Q = X$. Wenn wir

$$Q_j = \sum_{|k| \geq 1} q_{j,k} x^k$$

ansetzen, so ist klar, daß in der Schreibweise (4.2)

$$q_{j,e_i} = \begin{cases} c_j^{-1}, & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sein muß. Seien nun für ein $w \geq 2$ die Koeffizienten $q_{i,k}$ mit $|k| < w$ bestimmt, und es seien nur endlich viele dieser $q_{j,k}$ von Null verschieden. Sei nun $|m| = w$; wir vergleichen in

$$P_i \circ Q = \sum_{|k| \geq 1} p_{i,k} Q^k = x_i \tag{4.3}$$

die Koeffizienten von x^m. Ist $|k| > 1$, so hängt in Q^k der Koeffizient von x^m nur von den $q_{i,k}$ mit $|k| < w$ ab, ist also bereits bekannt. Es folgt also aus (4.3) unter Berücksichtigung von (4.2)

$$c_i q_{i,m} = -\text{Koeffizient von } x^m \text{ in } \sum_{|k| \geq 2} p_{i,k} Q^k,$$

was wegen $c_i \neq 0$ sofort nach $q_{i,m}$ aufgelöst werden kann. Als Folge der Induktionsannahme sind auf der rechten Seite nur endlich viele Koeffizienten mit $|m| = w$ von Null verschieden. Dasselbe gilt also auch für die $q_{i,m}$, und es folgt $Q_i \in L_n$. –

Sei nun $P \in G_n^*$, sei $Q := P^{[-1]}$, und sei $R \in L_n$. Wir suchen die Koeffizienten c_k in

$$R \circ Q = \sum_k c_k x^k. \tag{4.4}$$

Zusammensetzung mit P gibt

$$R = \sum_k c_k P^k.$$

Sei $m \in Z^n$ beliebig. Multiplikation mit $P^{-m-e}P'$ gibt

$$RP^{-m-e}P' = \sum_k c_k P^{k-m-e}P'.$$

Wir nehmen auf beiden Seiten das Residuum. Kann gezeigt werden, daß

$$\operatorname{Res} P^{k-m-e}P' = \begin{cases} 1, & k = m; \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \tag{4.5}$$

so folgt sofort

$$c_m = \operatorname{Res}(RP^{-m-e}P'),$$

und wir erhalten

Satz 4.2 (Hauptsatz) *Für* $R \in L_n$ *und* $P \in G_n^*$ *gilt mit* $Q := P^{[-1]}$

$$R \circ Q = \sum_k \operatorname{Res}(RP^{-k-e}P')x^k. \tag{4.6}$$

Zum Beweis von (4.5) darf o. B. d. A. $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ angenommen werden. Mit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ ist

$$\mathbf{P}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}}\mathbf{P}' = \prod_{j=1}^{n} P_j^{-k_j-1} \det(D_i P_j)$$

oder, indem wir die Faktoren $P_j^{-k_j-1}$ auf die Kolonnen der Determinante verteilen,

$$(4.7) \quad \mathbf{P}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}}\mathbf{P}' = \det(P_j^{-k_j-1} D_i P_j).$$

Im Hinblick auf Satz 3.3 versuchen wir, die Determinante als Jacobideterminante zu schreiben. Es gilt daher, für jedes j eine fLR F_j mit

$$(4.8) \quad P_j^{-k_j-1} D_i P_j = D_i F_j$$

zu finden. Dies ist problemlos möglich im Falle $k_j \neq 0$, denn dann gilt (4.8) offenbar für

$$F_j = -\frac{1}{k_j} P_j^{-k_j};$$

einmal mehr wird die Annahme benützt, daß $\mathcal{F}$ Charakteristik 0 hat.

Im Falle $k_j = 0$ ist eine etwas kompliziertere Konstruktion erforderlich. Wir lassen uns vom klassischen Fall konvergenter Reihen leiten und haben also den Logarithmus einer Einheit in L_n zu definieren. Nach (4.2) kann

$$P_j = c_j x_j (1 + T_j)$$

mit $T_j \in L_n$, ord $T_j \geqslant 1$ geschrieben werden. Sei

$$F_j := T_j - \frac{1}{2} T_j^2 + \frac{1}{3} T_j^3 - \frac{1}{4} T_j^4 + \ldots .$$

(Wieder wird char $\mathcal{F} = 0$ benützt.) Es gilt

$$D_i F_j = (1 - T_j + T_j^2 - T_j^3 + \ldots) D_i T_j = (1 + T_j)^{-1} D_i T_j.$$

Mit dem Kroneckersymbol δ_{ij} folgt

$$\begin{aligned} D_i P_j &= \delta_{ij} c_j (1 + T_j) + c_j x_j D_i T_j \\ &= \delta_{ij} c_j (1 + T_j) + c_j x_j (1 + T_j) D_i F_j = P_j (\delta_{ij} x_j^{-1} + D_i F_j) \end{aligned}$$

und damit also

$$P_j^{-1} D_i P_j = \delta_{ij} x_j^{-1} + D_i F_j,$$

womit das Ziel (4.8) beinahe, aber nicht ganz, erreicht ist. Sei

$$\epsilon_j = \begin{cases} 1, & k_j = 0; \\ 0, & k_j \neq 0. \end{cases}$$

Dann ist

$$\det(P_j^{-k_j-1} D_i P_j) = \det(\delta_{ij} \epsilon_j x_j^{-1} + D_i F_j).$$

Wir setzen $W := \{1, 2, \ldots, n\}$, $V := \{j \in W : \epsilon_j = 1\}$. Nach dem Additionssatz ist dann der Wert der Determinante

$$(4.9)\qquad \sum_{U\subset V}\prod_{i\in U} x_i^{-1}\det(D_iF_j)_{i,j\in W\setminus U}$$

wobei die Summe über alle Teilmengen U von W zu erstrecken ist. Wir berechnen das Residuum von (4.9) gliedweise. In jedem Summanden mit $U \neq W$ ist der Koeffizient von $\mathbf{x}^{-\mathbf{e}}$ wegen des Faktors

$$\prod_{i\in U} x_i^{-1}$$

gleich dem Residuum von

$$\det(D_iF_j)_{i,j\in W\setminus U}$$

in bezug auf die Unbestimmten x_i mit $i \in W\setminus U$. Wegen Satz 3.3 ist dieses Residuum aber 0. Ein von Null verschiedenes Residuum kann also nur für U = W auftreten. Dieser Fall kann nur für V = W, d. h. für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ eintreten. In diesem einen Fall ist also das Residuum

$$\operatorname{Res}(\mathbf{P}^{-\mathbf{e}}\mathbf{P}') = \operatorname{Res}\prod_{j=1}^{n} x_j^{-1} = 1.$$

Relation (4.5) und der Hauptsatz sind damit bewiesen.

Historische Notizen zu § 4 Satz 4.2 ist bekannt für Systeme $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ mit

$$P_i = x_iS_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

S_i eine Einheit in $\mathcal{P}_n$. Solche Systeme nennen wir *normal.* Bei normalen Systemen konvergenter Reihen wird gewöhnlich $S_i = T_i^{-1}$ geschrieben, und die Residuen in (4.6) werden durch Ableitungen der T_i ausgedrückt. Spuren davon bei Laplace [1780], S. 332; sehr deutlich bei Jacobi [1830] ($R = x_i$, formaler Beweis), Darboux [1869] (n = 2, kein Beweis), Stieltjes [1885] (Beweis durch „Residuentransformationsformel", siehe § 5.1), Goursat [1925] (Beweis mittels Cauchyscher Formel). Auch Good [1960], Perkus [1962], Sack [1965a, b; 1966] behandeln nur normale Systeme konvergenter Reihen.

Für normale Systeme *formaler* Reihen ist Satz 4.2 bewiesen bei Goldstein [1975] (Beweis durch Residuentransformationsformel), Tutte [1975] (kombinatorische Argumente, $R = x_i$), M.-L. Henrici [1976] (Matrixisomorphismus der Gruppe normaler Systeme), Hofbauer [1979], Garsia [1980] (nur $R = x_i$), und für nicht notwendig normale Systeme $\mathbf{P}$ beliebiger Reihen $P_i \in \mathcal{P}_n$ bei Henrici [1983] (siehe auch Joni [1978]). Satz 4.2 ist neu.

§ 5 Anwendungen

Aus Raumgründen verbietet sich die Darstellung spezieller Rechenbeispiele zu Satz 4.2. Wir beschränken uns auf einige theoretische Anwendungen.

5.1 Residuentransformationsformel

Satz 5.1 *Sei* $R \in \mathcal{L}_n$, *und sei* $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}_n^*$. *Dann gilt*

$$(5.1)\qquad \operatorname{Res} R = \operatorname{Res}(R \circ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}').$$

B e w e i s. Sei $\mathbf{P} := \mathbf{Q}^{[-1]}$. Aus

$$\mathbf{P} \circ \mathbf{Q} = \mathbf{X}$$

folgt durch Bildung der Funktionaldeterminante

(5.2) $\quad \mathbf{P}' = (\mathbf{Q}' \circ \mathbf{P})^{-1}.$

Wir ersetzen in (4.6) R durch $\mathrm{R}\mathbf{P}'^{-1}$. Wegen (5.2) ergibt sich links $(\mathrm{R}\mathbf{P}'^{-1}) \circ \mathbf{Q} = (\mathrm{R} \circ \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{P}'^{-1} \circ \mathbf{Q}) = (\mathrm{R} \circ \mathbf{Q})\mathbf{Q}'$, und es folgt die auch an sich bemerkenswerte Beziehung

$$(\mathrm{R} \circ \mathbf{Q})\mathbf{Q}' = \sum_{\mathbf{k}} \operatorname{Res}(\mathrm{R}\mathbf{P}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}})\mathbf{x}^{\mathbf{k}}.$$

Betrachtung des Residuums ($\mathbf{k} = -\mathbf{e}$) ergibt (5.1) –

Aus Satz 5.1 kann die Lagrange-Bürmann-Formel (Satz 4.2) leicht zurückgewonnen werden. Nach Definition des Residuums ist

$$\mathrm{R} \circ \mathbf{Q} = \sum_{\mathbf{k}} \operatorname{Res}(\mathrm{R} \circ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}})\mathbf{x}^{\mathbf{k}}.$$

Nach Satz 5.1 folgt, indem wir $\mathbf{Q}$ durch $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{[-1]}$ ersetzen,

$$\operatorname{Res}(\mathrm{R} \circ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}}) = \operatorname{Res}(\mathrm{R} \circ \mathbf{Q} \circ \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}}\mathbf{P}') = \operatorname{Res}(\mathrm{R}\mathbf{P}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}}\mathbf{P}'),$$

und es ergibt sich (4.6). –

Als weitere Anwendung von Satz 5.1 beweisen wir eine formale Verallgemeinerung eines Resultates von Ruscheweyh [1973].

Satz 5.2 *Seien* $\mathrm{R}, \mathrm{S} \in L_{\mathbf{n}}, \mathbf{P} \in G_{\mathbf{n}}^{*}$. *Dann gilt*

(5.3) $\quad \operatorname{Res}(\mathrm{RS}) = \sum_{\mathbf{k}} \operatorname{Res}(\mathrm{R}\mathbf{P}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}}\mathbf{P}') \operatorname{Res}(\mathrm{S}\mathbf{P}^{\mathbf{k}}).$

B e w e i s. Aus Satz 5.1 folgt mit $\mathbf{Q} := \mathbf{P}^{[-1]}$

$$\operatorname{Res}(\mathrm{RS}) = \operatorname{Res}\{(\mathrm{R} \circ \mathbf{Q})(\mathrm{S} \circ \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q}'\}.$$

Wir berechnen den Koeffizienten von $\mathbf{x}^{-\mathbf{e}}$ wie in einem Cauchyprodukt. Dies gibt

$$\sum_{\mathbf{k}} \operatorname{Res}\{(\mathrm{R} \circ \mathbf{Q})\mathbf{X}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}}\} \operatorname{Res}\{(\mathrm{S} \circ \mathbf{Q})\mathbf{Q}'\mathbf{X}^{\mathbf{k}}\}.$$

Benützung der Residuentransformationsformel mit $\mathbf{P} := \mathbf{Q}^{[-1]}$ anstelle von $\mathbf{Q}$ in jedem der beiden Faktoren rechts gibt

$$\sum_{\mathbf{k}} \operatorname{Res}\{\mathrm{R} \circ \mathbf{Q} \circ \mathbf{P})\mathbf{P}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}}\mathbf{P}'\} \operatorname{Res}\{(\mathrm{S} \circ \mathbf{Q} \circ \mathbf{P})(\mathbf{Q}' \circ \mathbf{P})\mathbf{P}^{\mathbf{k}}\mathbf{P}'\},$$

was sich wegen (5.2) zu (5.3) vereinfacht.

5.2 Die Formel von Abhyankar

Wir definieren Potenzen der partiellen Differentialoperatoren D_i wie üblich als

$$\mathrm{D}^{\mathbf{m}} := \mathrm{D}_1^{m_1}\mathrm{D}_2^{m_2} \ldots \mathrm{D}_n^{m_n}.$$

Für $\mathrm{P} \in P_{\mathbf{n}}$,

$$\mathrm{P} = \sum_{\mathbf{k} \in Z_+^n} p_{\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{k}},$$

sei $(\mathrm{D}^{\mathbf{m}}\mathrm{P})_0$ das konstante Glied der Reihe $\mathrm{D}^{\mathbf{m}}\mathrm{P}$, d. h.

(5.4) $(D^m P)_0 := m!p_m$

mit

(5.5) $m! := m_1!m_2! \ldots m_n!.$

Die Taylorsche Formel,

(5.6) $$P = \sum_{m \in Z_+^n} \frac{1}{m!}(D^m P)_0 x^m,$$

ist dann eine Tautologie.

Mit den obigen Bezeichnungen gestattet Satz 4.2 einen kurzen Beweis einer Formel von Abhyankar [1974], die sich kürzlich in einer Diskussion der „Jacobivermutung" (Bass, Connell, Wright [1982]) als nützlich erwiesen hat.

Satz 5.3 (Abhyankar) *Es sei* $R \in \mathcal{P}_n$, *und es sei* $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ *ein System von Fasteinheiten in* $\mathcal{P}_n$ *der speziellen Form* $\mathbf{P} = \mathbf{X} - \mathbf{H}$ *mit* $\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_n) \in \mathcal{P}_n^n$ *und* ord $H_i \geqslant 2$. *Dann gilt mit* $\mathbf{Q} := \mathbf{P}^{[-1]}$

(5.7) $$R \circ \mathbf{Q} = \sum_{m \in Z_+^n} \frac{1}{m!} D^m(R\mathbf{P}'\mathbf{H}^m).$$

Es handelt sich bei (5.7) also nicht um eine Entwicklung von $R \circ \mathbf{Q}$ nach Potenzen der Unbestimmten, sondern nach einem andern Reihensystem. Das System $\mathbf{P}$ ist nicht als normal vorausgesetzt, jedoch sind die Reihen P_i in $\mathcal{P}_n$ und nicht bloß in $\mathcal{L}_n$.

B e w e i s von Satz 5.3. Nach dem Hauptsatz gilt

(5.8) $$R \circ \mathbf{Q} = \sum_{k \in Z_+^n} \operatorname{Res}(R\mathbf{P}^{-k-e}\mathbf{P}')\mathbf{x}^k.$$

Wir schreiten zur Berechnung der Residuen. Aus $P_i = x_i - H_i$ folgt

$$P_i^{-k_i-1} = x_i^{-k_i-1}(1 - x_i^{-1}H_i)^{-k_i-1}.$$

Es ist $x_i^{-1}H_i$ eine Reihe positiver Ordnung in $\mathcal{L}_n$. Es kann also der binomische Lehrsatz angewandt werden mit dem Resultat

$$(1 - x_i^{-1}H_i)^{-k_i-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k_i + 1)_m}{m!} x_i^{-m}H_i^m.$$

[Es wurde wie üblich

$$(k_i + 1)_m = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ (k_i + 1)(k_i + 2) \ldots (k_i + m), & m > 0 \end{cases}$$

gesetzt.] Damit folgt

$$\mathbf{P}^{-k-e} = \mathbf{x}^{-k-e} \sum_{m \in Z_+^n} \frac{(k + e)_m}{m!} \mathbf{x}^{-m}\mathbf{H}^m$$

mit $$(k + e)_m := \prod_{i=1}^{n} (k_i + 1)_{m_i}.$$

Wir setzen in (5.8) ein und berechnen in der resultierenden Reihe das Residuum gliedweise. (Dies ist erlaubt, da nur endlich viele Glieder zum Residuum beitragen können.) Es ergibt sich

$$\sum_k \operatorname{Res}(RP^{-k-e})x^k$$

$$(5.9) \quad = \sum_k \left\{ \operatorname{Res}\left[RP'x^{-k-e} \sum_m \frac{(k+e)_m}{m!} x^{-m}H^m \right] \right\} x^k$$

$$= \sum_k \sum_m \frac{(k+e)_m}{m!} \{\operatorname{Res} x^{-k-m-e}RP'H^m\} x^k.$$

Nun ist $\operatorname{Res} x^{-k-m-e}RP'H^m$ der Koeffizient von x^{k+m} in $RP'H^m$, d. h. gleich

$$\frac{1}{(k+m)!} \{D^{k+m}(RP'H^m)\}_0.$$

Wegen $\dfrac{(k+e)_m}{(k+m)!} = \dfrac{1}{k!}$

ist die Reihe (5.9) also

$$\sum_k \sum_m \frac{1}{m!\,k!} \{D^{k+m}(RP'H^m)\}_0 x^k.$$

Für jedes feste k erstreckt sich die Summation bezüglich m nur über endlich viele von Null verschiedene Glieder. Es darf deshalb auch in umgekehrter Reihenfolge summiert werden, mit dem Resultat

$$\sum_m \frac{1}{m!} \sum_k \frac{1}{k!} \{D^{k+m}(RP'H^m)\}_0 x^k.$$

Nach der Taylorschen Formel (5.6) ist die innere Summe gleich

$$D^m(RP'H^m),$$

womit (5.7) bewiesen ist. –

5.3 Eine Entwicklung von H. Schmidt

Hermann Schmidt [1936] gab eine Verallgemeinerung der Lagrange-Bürmannschen Reihe auf $n > 1$ Veränderliche an, die auf den ersten Blick von der hier betrachteten verschieden ist. Den allgemeinen von Schmidt behandelten Fall in unseren Kalkül einzuspannen ist uns noch nicht gelungen; jedoch ist dies in einem wichtigen Spezialfall möglich. Seien f_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) in einer Umgebung von 0 analytische Funktionen einer einzigen Variablen $x \in \mathbf{C}$ mit $f_i(0) \neq 0$, und sei $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{C}^n$. Dann besitzt die Gleichung

$$(5.10) \quad x = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + \ldots + y_n f_n(x)$$

für genügend kleine $|y_i|$ genau eine Lösung $x = x(y)$, die analytisch von y abhängt mit $x(\mathbf{0}) = 0$. Sei nun g eine weitere bei 0 analytische Funktion einer Variablen. Schmidt betrachtet die Aufgabe, $g(x(y))$ nach Potenzen der y_i zu entwickeln.

Zur Lösung betrachten wir das normale System $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}_n^n$ mit

$$P_i(x) = \frac{x_i}{f_i(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ist $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n) := \mathbf{P}^{[-1]}$, $x_i = Q_i(y)$, so ist $x := x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ offenbar die bei $y = 0$ analytische Lösung von (5.10). Wird g durch die Reihe R dargestellt, so kann die gesuchte Reihe für $R \circ \mathbf{Q}$ nach Satz 4.2 sofort angegeben werden. Man kann dabei noch

$$\mathbf{P}' = \frac{1}{f_1 f_2 \ldots f_n}\left(1 - \frac{x_1 f_1'}{f_1} - \ldots - \frac{x_n f_n'}{f_n}\right)$$

benützen. Die Schmidtschen Formeln ergeben sich, indem die Residuen durch Ableitungen ausgedrückt werden.

5.4 Eine Aufgabe von A. P. Južakov

Wir betrachten zwei Systeme komplexer Variablen, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ und $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_q)$, und ein System von p bei $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ analytischen Funktionen $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mit $f_i(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$, $i = 1, \ldots, p$. Wir setzen $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_p)$ und bezeichnen mit $\mathbf{f}'$ die Jacobische Determinante der f_i nach den x_i, wobei die y_j als Parameter betrachtet werden. Ist $\mathbf{f}'(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \neq 0$ und sind die $|y_i|$ genügend klein, so besitzt das Gleichungssystem

(5.11) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$

genau eine in $\mathbf{y}$ analytische Lösung $\mathbf{x}(\mathbf{y})$ mit $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Sei g eine in $\mathbf{x}$ analytische Funktion. Južakov [1975] betrachtet die Aufgabe, $g(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$ nach Potenzen der y_j zu entwickeln. Ohne Verlust an Allgemeinheit wird dabei

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \delta_{ij}$$

(Kroneckerdelta) angenommen. Diese Južakovsche Aufgabe soll nun mittels unseres Hauptsatzes gelöst werden.

In der Potenzreihendarstellung von $\mathbf{f}$ seien $\mathbf{By}$ die in den y_j linearen Glieder. ($\mathbf{B}$ ist eine Matrix mit p Zeilen und q Kolonnen, und wir denken uns $\mathbf{y}$ als Kolonnenvektor.) Wir betrachten die durch

$$(5.12) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{By} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

definierte analytische Abbildung einer Umgebung des Punktes $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbf{C}^{p+q}$. Das diese Abbildung darstellende System von Potenzreihen in $\mathcal{P}_n (n := p + q)$ ist diagonal und nicht singulär. Es existiert daher das inverse System

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{pmatrix},$$

welches für genügend kleine $|u_i|$ und $|v_j|$ die zu (5.12) inverse Abbildung darstellt.

(Natürlich ist $\mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}$.) Es ist nun

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

genau dann, wenn $\mathbf{u} = -\mathbf{B}\mathbf{y}$, d. h. $\mathbf{u} = -\mathbf{B}\mathbf{v}$ ist. Ist nun $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ eine beliebige Reihe in P_n, so liefert unser Satz 4.2 die Reihe für $R(\mathbf{X}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v})$. Berücksichtigen wir, daß die Funktionaldeterminante der Abbildung (5.12) durch $\mathbf{P}'$ gegeben ist und setzen wir $\mathbf{u} = -\mathbf{B}\mathbf{v}$ und $\mathbf{v} = \mathbf{y}$, so ergibt sich die gesuchte Reihendarstellung als

$$(5.13)\quad R(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \sum_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbf{Z}_+^p \\ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^q}} \operatorname{Res}\{R(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{P}^{-\mathbf{h}-\mathbf{e}}\mathbf{y}^{-\mathbf{k}-\mathbf{e}}\mathbf{P}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \cdot (-\mathbf{B}\mathbf{y})^{\mathbf{h}}\mathbf{y}^{\mathbf{k}}.$$

Alle bei Južakov gebrachten Beispiele können mit der Formel (5.13) in bequemer Weise behandelt werden.

Über die Resultate von Južakov hinausgehend, bemerken wir, daß die Formel (5.13) gemäß ihrer Herleitung auch für $R \in L_n$ und $P_i \in L_n$ gilt, sofern die P_i die Form $P_i = c_i x_i$ + Reihe der Ordnung $\geqslant 2$ haben ($c_i \neq 0$). Zur Illustration betrachten wir die Aufgabe, die Potenzreihe des zur y-Achse tangentialen Zweiges des Descartesschen Blattes

$$(5.14)\quad y^3 - 3xy + x^3 = 0$$

zu finden. (Auch dieses Beispiel wird bei Južakov betrachtet; wegen $f' = 0$ ist dazu aber eine Sonderbetrachtung nötig.) Wir schreiben (5.14) als

$$x - \frac{1}{3}(x^3y^{-1} + y^2) = 0.$$

Es ist $p = q = 1$,

$$P = x - \frac{1}{3}(x^3y^{-1} + y^2), \qquad Q = y,$$

$\mathbf{B} = \mathbf{O}$. Mit $R = x$ ergibt also (5.13)

$$x(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}\left\{x \frac{P_x}{P} y^{-k-1}\right\} y^k.$$

Mit $P = x\hat{P}$, $\hat{P} = 1 - \frac{1}{3}(x^2y^{-1} + y^2x^{-1})$ ergibt sich unter Verwendung von (3.5)

$$\operatorname{Res}\left\{x \frac{P_x}{P} y^{-k-1}\right\} = -\operatorname{Res}\{y^{-k-1} \log \hat{P}\}$$
$$= \operatorname{Res} y^{-k-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{3^p p}(x^2y^{-1} + y^2x^{-1})^p.$$

Nur das Glied mit $p = k - 1$ kann einen Beitrag zum Residuum leisten, und damit dieser von Null verschieden ist, muß $k = 3m + 2$ und $p = 3m + 1$ sein, $m = 0, 1, \ldots$. Mittels des binomischen Lehrsatzes errechnet sich das gewünschte Residuum zu

$$\frac{1}{3m+1} 3^{-3m-1} \binom{3m+1}{2m+1},$$

und die gesuchte Entwicklung ist

$$x(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3m)!}{m!(2m+1)!\,3^{3m+1}} y^{3m+2}.$$

Historische Notizen zu § 5 Die Quellen unserer Anwendungen sind schon im Haupttext hervorgehoben. Für R, S, P $\in \mathcal{P}_1$ ist (5.3) das formale Gerippe des Satzes von Ruscheweyh [1973]; dort verschiedene Anwendungen. Interessante Beispiele zur H. Schmidtschen Reihe finden sich bei Meyer [1975], H. Schmidt und Meyer [1977].

§ 6 Schlußbemerkungen

(i) So wie oben formuliert scheint der Hauptsatz 4.2 stark „koordinatenabhängig". Sind die Reihen des Systems $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ konvergent, $P_i \in \mathcal{P}_n$, so besagt die Voraussetzung der Zulässigkeit, daß das Koordinatenkreuz in **O** bei der durch **P** definierten Abbildung in sich übergeht. Jedoch kann der Fall einer beliebigen Abbildung mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante durch Vorschaltung einer affinen Transformation sofort auf den Fall einer zulässigen Abbildung zurückgeführt werden.

(ii) Ist $\mathcal{F} = \mathbf{C}$ und sind die Reihen des Systems $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ konvergent, so kann aus Satz 4.2 mittels einer Majorantenmethode leicht gefolgert werden, daß auch die Reihen des inversen Systems $\mathbf{P}^{[-1]}$ konvergent sind. Auf diese Weise kann die Analytizität der inversen Abbildung ohne Integralformeln bewiesen werden.

Literaturverzeichnis

A b h y a n k a r , S. S. [1974]: Lectures in algebraic geometry. Notes by Chris Christensen. Purdue University

B a s s , H.; C o n n e l l , E. H.; W r i g h t , D. [1982]: The Jacobian conjecture: Reduction of degree and formal expansion of the inverse. Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) 7, 287–330

B e n d e r , E. A. [1974]: A lifting theorem for formal power series. Proc. Amer. Math. Soc. **42**, 16–22

C a n t o r , M. [1872]: Bürmann. Z. Math. Physik **17**, 428–430

C a s p a r i , F. [1873]: Zur Biographie Bürmanns (aus einem Brief an M. Cantor). Z. Math. Physik **18**, 120–122

D a r b o u x , G. [1869]: Sur la série de Laplace. C. R. Acad. Sci. Paris **68**, 324–327

G a r s i a , A. M. [1980]: The Lagrange-Good inversion formula revisited. Unpublished manuscript, 4 p.

G o l d s t e i n , A. J. [1975]: A residue operator in formal power series. Computing Sci. Tech. Rep. No. 26, Bell Laboratories, Murray Hill

G o o d , I. J. [1960]: Generalizations to several variables of Lagrange's expansion, with applications to stochastic processes. Proc. Cambridge Phil. Soc. **56**, 367–380

G o u r s a t , E. [1925]: Cours d'Analyse, Tome II, 5ème éd. Paris: Gauthiers-Villars

H e n r i c i , M.-L. [1976]: Die Lagrange-Bürmann-Formel bei Systemen von formalen Potenzreihen. Diss. ETH 5773. Zürich: Juris-Verlag

H e n r i c i , P. [1964]: An algebraic proof of the Lagrange-Bürmann formula. J. Math. Anal. Appl. **8**, 218–224

H e n r i c i , P. [1974]: Applied and Computational Complex Analysis, vol. I. New York: Wiley

Henrici, P. [1983]: Topics in computational complex analysis, IV: The Lagrange-Bürmann formula for systems of formal power series. Computational Aspects of Complex Analysis. H. Werner et al., eds. S. 193–216

Hofbauer, J. [1979]: A short proof of the Lagrange-Good formula. Discrete Math. **25**, 135–139

Hofbauer, J. [1982]: Lagrange-Inversion. Inst. f. Math. Univ. Wien

Hurwitz, A.; Courant, R. [1929]: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 2. Aufl. Berlin: Springer

Jabotinsky, E. [1953]: Representation of functions by matrices. Applications to Faber polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 546–553

Jacobi, C. G. J. [1830]: De resolutione aequationium per series infinitas. J. reine angew. Math. **6**, 257–286

Joni, S. A. [1978]: Lagrange inversion in higher dimensions and umbral operators. J. Lin. Multilin. Algebra **6**, 111–121

Južakov, A. P. [1975]: On an application of the multiple logarithmic residue to the expansion of implicit functions in power series. Math. Sbornik **26**, 165–179

Lagrange, J. L. [1770]: Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin **24**, 5–73

Laplace, P. S. [1780]: Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théorie de suites Mémoire de l'Académie royale des Sciences de Paris. = Oeuvres, tome 9ème, 1893, p. 313–335

Laplace, P. S., Legendre, A. M. [1799]: Rapport sur deux mémoires d'analyse du professeur Burman. Mémoires de l'institut national des sciences et arts; sciences et arts; sciences mathématiques et physiques; tome second. Paris, an VII

Meyer, G. P. [1975]: Konvergente und asymptotische Reihenentwicklungen von Nullstellenfolgen und nichtalgebroiden Umkehrelementen von Exponentialsummen. Diss. Würzburg

Poincaré, H. [1887]: Sur les résidues des intégrales doubles. Acta Math. **9**, 321–380

Polya, G.; Szegö, G. [1924]: Aufgaben und Lehrsätze der Analysis, Band I. Berlin: Springer

Raney, G. N. [1960]: Functional composition patterns and power series reversion. Trans. Amer. Math. Soc. **94**, 441–451

Ruscheweyh, St. [1973]: Eine Verallgemeinerung der Leibnitzschen Produktregel. Math. Nach. **58**, 241–245

Schlömilch, O. [1865]: Compendium der höheren Analysis, 2. Band, 2. Aufl. Braunschweig: Vieweg

Schmidt, H. [1936]: Über die Reihendarstellung implizit gegebener Funktionen von endlich oder unendlich vielen Veränderlichen. Math. Z. **40**, 266–278

Schmidt, H.; Meyer, G. [1977]: Zur Existenz und analytischen Darstellung von Nullstellenfolgen bei Exponentialsummen. Sitz. ber. Bayr. Akad. Wiss., math.-natw. Klasse 1977, 125–133

Schur, I. [1947]: Identities in the theory of power series. Amer. J. Math. **59**, 14–26

Stieltjes, T. J. [1885]: Sur une généralisation de la série de Lagrange. Ann. scient. éc. norm. sup., 3ème sér., **2**, 93–98

Teixeira, F. G. [1900]: Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée. J. für Math. **122**, 97–123

Tutte, W. T. [1975]: On elementary calculus and the Good formula. J. Comb. Theory (B) **18**, 97–137

Tyrrell, J. A. [1962]: Reversion of a formal power series. Mathematica **9**, 88–94

Whittaker, E. T.; Watson, G. N. [1927]: A course of modern analysis, 4th ed. Cambridge: University Press

P. Henrici
ETH – Zentrum
CH-8092 Zürich

(Eingegangen: 3. 10. 1983)

Jber. d. Dt. Math.-Verein 86 (1984) 135–150
AMS subject classification: Primary: 14 J 10, 14 J 15; secondary: 14 D 99, 14 E 30, 32 J 99, 32 L 99

Zur Klassifikationstheorie drei (und höher) dimensionaler projektiver Mannigfaltigkeiten

Eckart Viehweg*) (Paris)

Dieser Artikel versucht den heutigen Stand unserer Kenntnisse über die birationale Geometrie drei-dimensionaler projektiver Mannigfaltigkeiten zu skizzieren, die Ansatzpunkte für den höherdimensionalen Fall zu nennen und die wichtigsten offenen Probleme zu diskutieren.

Ein Teil des vorliegenden Materials diente als Grundlage eines Übersichtsvortrages auf der DMV-Tagung 1983 in Köln. Ich danke der DMV und den Organisatoren der Tagung für die Möglichkeit, diesen Vortrag zu halten und durch diesen Übersichtsartikel zu ergänzen.

Wir betrachten projektive Varietäten über dem Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen, das heißt die Nullstellenmengen endlich vieler homogener Polynome in einem projektiven Raum $\mathbf{P}^r(\mathbf{C})$, und wir nennen eine solche eine projektive Mannigfaltigkeit (oder kurz Mannigfaltigkeit), wenn sie irreduzibel und nicht singulär ist.

Mannigfaltigkeiten der Dimension eins, mit anderen Worten projektive Kurven oder Riemannsche Flächen (im Folgenden mit C bezeichnet), kann man „vollständig" klassifizieren: Man definiert das Geschlecht g(C) als maximale Anzahl linear unabhängiger, globaler, holomorpher Differentialformen (oder auch als die Anzahl der Henkel bei der Darstellung von C als topologische Mannigfaltigkeit). Das Geschlecht teilt die Menge der Kurven in Klassen ein, und jede natürliche Zahl kommt als Geschlecht einer Kurve vor. David Mumford konstruiert in [5] quasiprojektive Varietäten M_g, deren Punkte in natürlicher Weise alle Kurven vom Geschlecht g parametrisieren.

Eine ähnlich schöne Beschreibung aller projektiver Flächen kann nicht existieren. Durch Aufblasen von Punkten (siehe [2], Seite 28) kann man aus einer vorgegebenen Fläche S beliebig viele andere Flächen konstruieren. Dies legt es nahe, beim Versuch zwei oder höher dimensionale Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren, zwei Mannigfaltigkeiten V und V′ als „gleich" zu betrachten, wenn sie birational sind ($V \sim V'$), das heißt, wenn die Funktionenkörper $\mathbf{C}(V)$ und $\mathbf{C}(V')$ isomorph sind (siehe [2], Seite 25).

---

*) Heisenberg-Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft

0.1. Das Geschlecht einer Kurve können wir für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit V ersetzen durch

$$g_i(V) = \dim_{\mathbf{C}}(H^0(V, \Omega_V^i)), \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Dabei bezeichnet Ω_V^1 die Garbe der holomorphen 1-Differentiale und $\Omega_V^i = \overset{i}{\Lambda}\, \Omega_V^1$. Wie üblich schreiben wir ω_V statt Ω_V^n und nennen diese invertierbare Garbe die *kanonische Garbe.*

Es ist $g_0(V) = 1$. Oft wird in der Literatur $g_1(V)$ als *Irregularität* bezeichnet und mit q(V) abgekürzt. Die Symmetrie der Hodge-Zahlen (siehe [1], Seite 117) gibt insbesondere, daß $g_i(V) = \dim_{\mathbf{C}}(H^i(V, O_V))$ ist, und dementsprechend wird die Euler-Poincaré-Charakteristik der Strukturgarbe gegeben durch

$$\chi(O_V) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot g_i(V).$$

0.2. Die globalen Schnitte der Tensorpotenzen der kanonischen Garbe geben die **C**-Algebra

$$R(V) = \bigoplus_{\nu \geq 0} H^0(V, \omega_V^\nu),$$

bezeichnet als *kanonischer Ring* von V. Die Kodaira Dimension ist

$$\kappa(V) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } R(V) = \mathbf{C} \\ \operatorname{trz} \operatorname{grd}_{\mathbf{C}}(R(V)) - 1 & \text{falls } R(V) \neq \mathbf{C} \end{cases}.$$

Falls für genügend großes ν $\dim_{\mathbf{C}}(H^0(V, \omega_V^\nu))$ durch ein Polynom beschrieben wird (leider wissen wir dies nicht – siehe 2.1), ist $\kappa(V)$ der Grad dieses Polynoms, wobei wir $-\infty$ als den Grad des Null-Polynoms betrachten.

Die Kodaira Dimension kann die Werte $-\infty, 0, \ldots, n$ annehmen. Für Kurven ist sie durch das Geschlecht festgelegt:

$\kappa(C)$	$g(C) = g_1(C)$	Bemerkungen
1	≥ 2	
0	1	elliptische Kurve
$-\infty$	0	$\mathbf{P}^1$

Sowohl die Kodaira Dimension als auch die g_i sind invariant unter birationaler Äquivalenz (siehe [22], Seite 67 und 114).

Als „Leit-Problem" für den Teil der Klassifikationstheorie, über den wir berichten wollen, kann man die folgenden drei Fragen betrachten:

I) Welche Werte können die *Invarianten* $\kappa(V), g_1(V), \ldots, g_n(V)$ annehmen?

II) Für welche Werte der Invarianten ist V birational zu einer wohlbekannten Mannigfaltigkeit (zum Beispiel birational zum $\mathbf{P}^n$ oder zu einer abelschen Mannigfaltigkeit oder zum Totalraum einer Familie solcher Mannigkeiten)?

III) Wie findet man zu einer Mannigfaltigkeit V ein besonders „gutes" Modell V', birational zu V (mit einer Konstruktion, die abhängig sein darf vom Wert der Invarianten)?

Selbst wenn man diese Fragen nach dem diskreten Teil der Klassifikation beantworten könnte, bliebe das Hauptproblem, der stetige Teil der Klassifikation:

IV) Kann man alle birationalen Äquivalenzklassen von Mannigfaltigkeiten mit vorgegebenen Invarianten durch die Punkte einer quasiprojektiven Varietät in natürlicher Weise parametrisieren, eventuell nach Hinzunahme weiterer Invarianten?

Für dim (V) $\geqslant 3$ ist wenig über diese letzte Frage bekannt (siehe die Anhänge in [5]). Eine Antwort auf IV) ist kaum vorstellbar ohne die Kenntnis eines „guten" Modelles in III). Andererseits spielt die Parametrisierung von r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten für $r < n$ eine Rolle im diskreten Teil der Klassifikation (siehe § 5).

In den Paragraphen 2, 3, 4, 7 und 8 werden wir versuchen, mit absteigendem Wert von $\kappa(V)$, die Fragen I, II und III zu präzisieren und die bekannten Ergebnisse anzugeben. In § 1 diskutieren wir die Versuche, ein singuläres kanonisches Modell zu konstruieren, in § 5 fassen wir die Ergebnisse über die Kodaira Dimension von Faserräumen zusammen und in § 6 wiederholen wir, in welcher Weise die Ergebnisse aus § 5 Anwendung finden.

Antworten auf die gestellten Fragen I, II und III für projektive Flächen waren bereits der italienischen Schule der Geometrie zu Beginn dieses Jahrhunderts bekannt. Zu Beginn der ersten vier Paragraphen gehen wir kurz auf die Theorie der Flächen ein, jedoch nur in dem Umfang, der als Motivation für die Fragestellungen im höherdimensionalen Fall sinnvoll ist. Für umfassende Darstellungen der Theorie der Flächen verweisen wir auf [3] und [4]. Auch auf die Klassifikation nicht algebraischer Mannigfaltigkeiten gehen wir nicht ein in diesem Artikel. Einen Überblick erhält der Leser in den Artikeln von Akira Fujiki und Kenji Ueno in [35].

Der vorliegende Bericht baut auf auf der Arbeit vieler Mathematiker. Ihnen allen sei gedankt für das Zusenden ihrer Manuskripte und für zahllose Diskussionen. Die meisten der angeführten offenen Probleme sind „wohlbekannt", und wir haben darauf verzichtet, in allen Fällen den Urheber aufzuspüren und anzugeben. Viele Anregungen entnahmen wir der „Liste der offenen Probleme", die in [36] erscheinen wird.

Wir benutzen die üblichen Begriffe und Notationen der algebraischen Geometrie, wie sie zum Beispiel in [2] zu finden sind. C wird immer eine Kurve und S eine Fläche bezeichnen.

§ 1 Gute Modelle

Definition 1.1. Eine invertierbare Garbe L auf einer Varietät X heißt *numerisch positiv*, wenn für jede Kurve C in X gilt grd $(L|_C) \geqslant 0$.

1.2. Zu jeder Fläche S mit $\kappa(S) \geqslant 0$ existiert eine ausgezeichnete Fläche S', birational zu S, das *minimale Modell* (siehe [2], Seite 418). Mit Hilfe der Klassifikation der Flächen (für $0 \leqslant \kappa(S) \leqslant 1$) und mit Hilfe des Hodge-Index-Theorems (für $\kappa(S) = 2$; siehe Mumfords Anhang zu [14]) kann man zeigen, daß $\omega_{S'}$ numerisch positiv ist und die Kurven C mit grd $(\omega_S|_C) = 0$ genau beschreiben.

Für Mannigfaltigkeiten der Dimension größer oder gleich drei existiert jedoch weder ein minimales Modell, noch ein Modell V' mit numerisch positivem $\omega_{V'}$ (siehe [23]). Mori deutet in seinem bahnbrechenden Artikel [7] (siehe auch [8]) einen möglichen Ausweg aus diesem Dilemma an:

Problem 1.3. *Sei* V *eine* n *dimensionale Mannigfaltigkeit,* $\kappa(V) \geqslant 0$ (*oder schwächer:* V *keine Uni-Regelmannigfaltigkeit; siehe* 7.2). *Existiert dann eine normale projektive Varietät* X, *birational zu* V, *so daß für ein* $r > 0$ *gilt:*

1) *Die reflexive Hülle* $\omega_X^{[r]} = (\omega_X^r)^{\vee\vee}$ *ist invertierbar.*
2) *Für jede Desingularisierung* $\rho : V' \to X$ *ist* $\rho^*\omega_X^{[r]}$ *enthalten in* $\omega_{V'}^r$.
3) $\omega_X^{[r]}$ *ist numerisch positiv.*

Man sagt, daß X nur *kanonische Singularitäten* hat, falls die Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind für ein $r > 0$. Hat Problem 1.3 eine positive Antwort, so nennt man die Varietät X, die alle drei Bedingungen erfüllt ein *kanonisches Modell* von V.

Ausgehend von einer Mannigfaltigkeit V der Dimension drei, gab Mori den ersten Schritt zur Konstruktion eines kanonischen Modelles an:

A) Ist ω_V nicht numerisch positiv, so existiert eine „extreme" Familie rationaler Kurven C_t mit grd $(\omega_V|_{C_t}) < 0$. Alle diese Kurven C_t liegen auf einem irreduziblen Divisor E und spannen diesen auf.

B) Der Divisor E kann zusammengeblasen werden, das bedeutet: Es existiert eine singuläre Varietät X_1, mit explizit angebbaren kanonischen Singularitäten, und ein birationaler Morphismus $\eta : V \to X_1$, so daß codim $(\eta(E)) \geqslant 2$ ist und $\eta|_{V-E}$ ein Isomorphismus.

Leider funktioniert Moris Methode nur, wenn man von einer Mannigfaltigkeit ausgeht, sie kann also nicht wiederholt werden, um „Schritt für Schritt" alle schlechten Kurven zu beseitigen. M. Reid hat in [9] dieses Programm präzisiert. Er vermutet, daß man in 1.3 sogar fordern kann, daß X spezielle kanonische Singularitäten hat, die terminalen, $\mathbb{Q}$-faktoriellen Singularitäten. Versucht man Schritt A) für eine solche Varietät durchzuführen, tritt das Phänomen auf, daß die Menge der extremen rationalen Kurven endlich sein kann. Dies bedeutet, daß man nicht mit „Zusammenblasen" in B) auskommen kann.

Y. Kawamata hat kürzlich in [6] Moris Methoden vereinfacht und verallgemeinert. Er zeigt, daß man den Schritt B) in der Klasse der drei dimensionalen Varietäten mit terminalen, $\mathbb{Q}$-faktoriellen Singularitäten durchführen kann, falls die extremen rationalen Kurven einen Divisor E aufspannen. Damit ist in gewissem Sinne die Hälfte des Mori-Reid-Programmes zur Konstruktion kanonischer Modelle durchgeführt und die Hoffnung unterstützt, daß 1.3 eine positive Antwort hat.

Problem 1.3 steht in engem Zusammenhang mit der Frage nach der *Zariski-Zerlegung* des kanonischen Divisors. In [14] zeigt O. Zariski, daß jeder effektive Divisor D auf einer Fläche S in eindeutiger Weise zerlegt werden kann in einen numerisch positiven und einen negativen Anteil. Es existieren also effektive Divisoren P und N und eine natürliche Zahl r, so daß

1) $r \cdot D = P + N$

2) $O_S(P)$ ist numerisch positiv.

3) Die Schnittform auf S, eingeschränkt auf die Primdivisoren von N, ist negativ definit.

4) grd $(O_S(P)|_E) = 0$ für jeden Primdivisor E von N.

Für Divisoren auf höher dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist eine entsprechende Zerlegung unbekannt (siehe [10], [11], Fujitas Artikel in [36]). Trotzdem hofft man eine solche Zerlegung wenigstens für die kanonische Garbe zu finden:

Problem 1.4. *Es sei* V *eine* n *dimensionale Mannigfaltigkeit,* $\kappa(V) \geqslant 0$ (*oder schwächer:* V *keine Uni-Regelmannigfaltigkeit*). *Existiert eine Mannigfaltigkeit* V', *birational zu* V, *so daß* $\omega_{V'}$ *eine Zariski-Zerlegung besitzt? Präziser fragt man nach der Existenz einer natürlichen Zahl* r *und einer numerisch positiven invertierbaren Untergarbe* $\mathcal{P}$ *von* $\omega_{V'}^r$, *so daß gilt:*

1) *Für alle* $m > 0$ *ist* $H^0(V', \mathcal{P}^m) = H^0(V', \omega_{V'}^{r \cdot m})$.

2) *Für* $\mathcal{N} = \omega_{V'}^r \otimes \mathcal{P}^{-1}$ *und für jede invertierbare Garbe* $\mathcal{L}$ *existiert eine Konstante* c, *so daß* $\dim(H^0(V', \mathcal{L} \otimes \mathcal{N}^m)) \leqslant c$ *ist für alle* $m > 0$.

Die Eigenschaften 1) und 2) sollen – in einer etwas plumpen Art und Weise – ausdrücken, daß $\mathcal{N}$ ein „negativer" Anteil ist.

Bekannterweise liegt jede invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ in einer hohen Potenz einer vorgegebenen Garbe $\mathcal{L}'$ mit $\kappa(\mathcal{L}') = \dim(V')$ (siehe z. B. [30], 6.3). Daher reicht es, die Eigenschaft 2) in 1.4 für alle Potenzen einer festen invertierbaren Garbe $\mathcal{L}'$ mit $\kappa(\mathcal{L}') = \dim(V')$ nachzuprüfen.

Bemerkung 1.5. Eine positive Antwort auf 1.3 impliziert eine positive Antwort auf 1.4:

Tatsächlich wählen wir X und r wie in 1.3 und $\rho : V' \to X$ als Desingularisierung. Setzt man $\mathcal{P} = \rho^* \omega_X^{[r]}$, $\mathcal{N} = \omega_{V'}^r \otimes \mathcal{P}^{-1}$ und $\mathcal{L} = \rho^* H$ für eine ample Garbe $\mathcal{H}$ auf X, so ist $\rho_* \mathcal{N}^m = O_X$ und 1.4, 1) und 2) folgen direkt aus der Projektionsformel ([2], Seite 124).

§ 2 $\kappa(V) = \dim(V)$ und der kanonische Ring

In Zusammenhang mit Nagatas Gegenbeispiel zu Hilberts 14. Problem zeigte Zariski in [14], daß bereits für invertierbare Garben $\mathcal{L}$ auf einer Fläche S der Ring

$$\bigoplus_{\nu \geqslant 0} H^0(S, \mathcal{L}^\nu)$$

im allgemeinen nicht endlich erzeugt ist. Als Grund kann gesehen werden, daß, selbst wenn $\mathcal{L}$ numerisch positiv ist, nicht notwendigerweise eine Potenz von $\mathcal{L}$ von globalen Schnitten erzeugt wird. (In [11] und [18] findet man eine Diskussion des Zusammenhanges zwischen der Existenz eines Basisortes und der endlichen Erzeugbarkeit des angegebenen Ringes auf Mannigfaltigkeiten höherer Dimension.) Ist die Fläche S ein minimales Modell und $\kappa(S) \geqslant 0$, so ist jedoch eine Potenz der kanonischen Garbe ω_S von globalen Schnitten erzeugt (siehe Mumfords Anhang zu [14]) und die folgende Frage für $n = 2$ bejaht.

Problem 2.1. *Es sei* V *eine* n *dimensionale Mannigfaltigkeit. Ist der kanonische Ring* R(V) *endlich erzeugt?*

Ist V nicht algebraisch oder erlaubt man V Gorenstein-Singularitäten zu haben, so lautet die Antwort auf 2.1 „nein" (siehe [18]). Besonders wichtig wäre eine Antwort auf 2.1 für Mannigfaltigkeiten von *allgemeinem Typ*, das heißt, falls $\kappa(V) = \dim(V)$ ist. Wäre R(V) endlich erzeugt, so könnte man Proj (R(V)) als singuläres „gutes" Modell in der birationalen Äquivalenzklasse von V wählen. Ohne ein solches eindeutig bestimmtes Modell scheinen kaum Möglichkeiten zur genaueren Untersuchung der Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ zu bestehen – geschweige denn eine Antwort auf den stetigen Teil der Klassifikation (Frage VI in der Einleitung).

Satz 2.2 (Benveniste-Kawamata und Reid). *Ist* V *eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit und* $\kappa(V) = 3$, *so sind die Probleme* 1.3, 1.4 *und* 2.1 *äquivalent.*

Zum Beweis. M. Reid zeigt in [17], daß – falls R(V) endlich erzeugt ist – $X = \mathrm{Proj}\,(R(V))$ nur kanonische Singularitäten hat. Per Konstruktion ist eine Potenz von $\omega_X^{[r]}$ von globalen Schnitten erzeugt und daher $\omega_X^{[r]}$ numerisch positiv. Also ist X das in 1.3 gesuchte kanonische Modell. Nach 1.5 finden wir eine Mannigfaltigkeit V' und die Zariski-Zerlegung von $\omega_{V'}$. X. Benveniste und Y. Kawamata beweisen in [15] und [16], daß die Existenz einer Zariski-Zerlegung $P \otimes N = \omega_V^r$, impliziert, daß P^μ von globalen Schnitten erzeugt wird für ein $\mu > 0$, und damit, daß R(V) endlich erzeugt ist.
Der Beweis von Benveniste und Kawamata beruht auf einer sehr geschickten Anwendung des Verschwindungssatzes für ganze Anteile von $\mathbb{Q}$-Divisoren ([12] und [13]):

Satz 2.3. *Es sei* V *eine* n*-dimensionale Mannigfaltigkeit und* $D = \sum \nu_j \cdot E_j$ *ein effektiver Divisor mit nicht singulären Primkomponenten* E_j, *die sich transversal schneiden.*
Es sei L *eine invertierbare Garbe und* $N > 0$, *so daß* $L^N \otimes O_V(-D)$ *numerisch positiv ist.*
Dann ist für festes $i > 0$ *und* $p > 0$

$$H^p\left(V, L^i \otimes O_V\left(-\sum \left[\frac{\nu_j \cdot i}{N}\right] \cdot E_j\right) \otimes \omega_V\right) = 0,$$

falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) *Die Selbstschnittzahl* $c_1(L^N \otimes O_V(-D))^n > 0$.
b) *Die L-Dimension* $\kappa(V, L^N \otimes O_V(-D)) = n$.
c) *Die L-Dimension* $\kappa\left(V, L^{i'} \otimes O_V\left(-\sum \left[\frac{\nu_j \cdot i'}{N}\right] \cdot E_j\right)\right) = n$

für ein $i' > 0$ *mit* $i + i' \equiv 0 \bmod N$.

Dabei bedeutet [b] der ganze Anteil der reellen Zahl b.

Ein möglicher Beweis von 2.3 beruht auf der Konstruktion einer Überlagerung $\tau : T \to V$ durch Wurzelziehen aus der rationalen Funktion, die dem allgemeinen Schnitt von $L^N \otimes O_V(-D)$ entspricht, und dem Vergleich der Theorie der Differentialformen von T und von V. ist $L = \omega_V$ so finden wir hier zum ersten

Mal eine Konstruktion, die trotz ihrer Einfachheit in der Klassifikationstheorie zu einem sehr wesentlichen Hilfsmittel geworden ist: Das Wurzelziehen aus multikanonischen Divisoren.

§ 3 $0 < \kappa(V) < n$ und der Satz von Iitaka

Jede Fläche S mit $\kappa(S) = 1$ kann dargestellt werden als elliptische Fläche, das heißt als Familie elliptischer Kurven über einer Kurve. S. Iitaka (siehe [20] oder [22]) konnte dieses Ergebnis in der folgenden Weise verallgemeinern.

Definition 3.1. Wir nennen einen Morphismus $f : V \to W$ von Mannigfaltigkeiten *einen Faserraum*, wenn f surjektiv ist und die allgemeine Faser $V_w = V \times_W \operatorname{Spec}(\overline{\mathbf{C}(W)})$ zusammenhängend ist.

Satz 3.2 (Iitaka). *Es sei* V *eine* n *dimensionale Mannigfaltigkeit*, $\kappa(V) \geqslant 0$. *Dann existiert eine Mannigfaltigkeit* V′, *birational zu* V, *und ein Faserraum* $f : V' \to W$, *so daß*

1) $\dim(W) = \kappa(V)$.

2) $\kappa(V'_w) = 0$.

3) *Für beliebig große* m *ist* $f : V' \to W$ *birational zur* m-*kanonischen Abbildung, das heißt zu der Abbildung, die durch eine Basis von* $H^0(V, \omega_V^m)$ *gegeben wird.*

Natürlich ist die Aussage des obigen Satzes nur dann nicht-trivial, wenn $0 < \kappa(V) < n$ ist.

Bemerkung 3.3. Es ist nicht bekannt, ob die Aussage 2) in 3.2 impliziert, daß $\kappa(f^{-1}(x)) = 0$ ist für alle Punkte x aus einer Zariski-offenen Teilmenge von W, zumindest falls die Dimension der Faser echt größer als zwei ist. Die Invarianz der Kodaira-Dimension unter glatten Deformationen wird vermutet, konnte jedoch bisher nur für Deformationen von Kurven oder Flächen bewiesen werden (siehe [28] für die weitreichensten Ergebnisse in dieser Richtung).

Angewandt auf den Fall $n = 3$ erhalten wir:

Korollar 3.4. a) *Jede drei dimensionale Mannigfaltigkeit* V *mit* $\kappa(V) = 2$ *ist birational zum Totalraum eines Faserraumes elliptischer Kurven über einer Fläche.*

b) *Jede drei dimensionale Mannigfaltigkeit* V *mit* $\kappa(V) = 1$ *ist birational zum Totalraum eines Faserraumes von Flächen der Kodaira-Dimension Null über einer Kurve.*

Die in 3.4 angegebene Faserraum-Struktur kann nun benutzt werden, um diese drei dimensionalen Mannigfaltigkeiten genauer zu studieren. So besteht die Hoffnung, daß man die Frage nach dem guten Modell (1.3) oder die nach dem kanonischen Ring (2.1) beantworten kann, indem man in a) die Theorie der elliptischen Kurven und in b) die guten Kenntnisse über Flächen der Kodaira-Dimension Null (siehe § 4) und ihrer Degeneration ausnutzt. Tatsächlich hat Fujita in seinem Artikel in [36] Ergebnisse in dieser Richtung angekündigt.

§ 4 $\kappa(V) \leqslant 0$ und die Albanese-Abbildung

4.1. Nach Wahl eines Basispunktes p_0 erhält man eine Abbildung

$$\alpha : V \to A(V) = H^0(V, \Omega_V^1)^\vee / H_1(V, \mathbf{Z})$$

indem man $\alpha(p)$ auf eine Differentialform φ wirken läßt als $\int_{p_0}^{p} \varphi$. α heißt die *Albanese-Abbildung* und A(V) die *Albanese-Mannigfaltigkeit*. A(V) ist eine abelsche Mannigfaltigkeit der Dimension $g_1(V)$ (siehe [22]).

Definition 4.2. Ein Faserraum $f : V \to W$ heißt *étales Faserbündel* (mit Faser F), falls eine étale Überlagerung $W' \to W$ existiert, so daß $pr_2 : V \times_W W' \to W'$ isomorph zu $pr_2' : F \times W' \to W'$ ist.

Die Flächen mit $\kappa(S) \leqslant 0$ waren den italienischen Geometern zu Beginn des Jahrhunderts wohlbekannt:

4.3. a) Es sei S eine Fläche, $\kappa(S) = 0$ und S ein minimales Modell. Dann gilt

i) $g_1(S) \leqslant 2$.

ii) Es ist $g_1(S) = 2$ genau dann, wenn S eine abelsche Mannigfaltigkeit ist.

iii) Ist $g_1(S) = 1$, so ist die Albanese Abbildung ein étales Faserbündel elliptischer Kurven.

iv) Die Flächen mit $\kappa(S) = g_1(S) = 0$ sind wohlbekannt (K 3 Flächen und Enriques Flächen).

b) Es sei S eine Fläche, $\kappa(S) = -\infty$. Dann gilt

i) Ist $g_1(S) \geqslant 1$, so ist S birational zu $\mathbf{P}^1 \times C$ für eine Kurve C vom Geschlecht $g_1(S)$.

ii) Ist $g_1(S) = 0$, so ist S birational zum $\mathbf{P}^2$.

Die Aussagen a), i), ii) und iii) und die Aussage b), i) können wir auch so formulieren:

Satz 4.4. A) *Jede Fläche* S *mit* $\kappa(S) = 0$ *ist birational zu einer Fläche* S', *so daß* $\alpha : S' \to A(S')$ *ein étales Faserbündel ist mit Faser* F, $\kappa(F) = 0$.

B) *Es sei* S *eine Fläche mit* $\kappa(S) = -\infty$ *und* $f : S' \to W$ *ein Faserraum, birational zur Steinfaktorisierung der Albanese-Abbildung* $\alpha : S \to \alpha(S)$. *Dann ist* $\kappa(S_w') = -\infty$ *für die allgemeine Faser* S_w' *von* f *und* $\kappa(W) \geqslant 0$ *und* $g_1(W) = g_1(S)$.

Aufbauend auf Ergebnissen und Teilresultaten von K. Ueno konnte der Autor in [29] den entsprechenden Satz für drei-dimensionale Varietäten beweisen (ersetze in 4.4 die „Fläche S" durch die „drei-dimensionale Varietät V"). Y Kawamata erhielt in [25] und [26] eine teilweise Verallgemeinerung auf den n dimensionalen Fall:

Satz 4.5. *Es sei* V *eine* n*-dimensionale Mannigfaltigkeit,* $\kappa(V) = 0$. *Dann ist die Albanese-Abbildung* $\alpha : V \to A(V)$ *ein Faserraum.*
Ist $g_1(V) = 1$, *so hat die allgemeine Faser* V_a *von* α *die Kodaira-Dimension Null.*

Neuere Ergebnisse Kawamatas und des Autors über die Kodaira-Dimension von Faserräumen ergeben als Folgerung (siehe [30]):

Satz 4.6. A) *Es sei* V *eine* n*-dimensionale Mannigfaltigkeit,* $\kappa(V) = 0$ *und* $g_1(V) \geqslant \dim(V) - 2$. *Dann ist* V *birational zu einer Mannigfaltigkeit* V', *so daß* $\alpha : V' \to A(V')$ *ein ètales Faserbündel ist mit Faser* F, $\kappa(F) = 0$.

B) *Es sei* V *eine* n*-dimensionale Mannigfaltigkeit,* $n \leqslant 4$ *und* $\kappa(V) = -\infty$. *Es sei* $f : V' \to W$ *ein Faserraum, birational zur Steinfaktorisierung der Albanese-Abbildung* $\alpha : V \to \alpha(V)$. *Dann ist* $\kappa(V'_w) = -\infty$ *für die allgemeine Faser* V'_w *von* f, $\kappa(W) \geqslant 0$ *und* $g_1(W) = g_1(V)$.

Daß man in Teil A) von 4.6 die Bedingung $g_1(V) \geqslant \dim(V) - 2$ benötigt, das heißt nach 4.5 die Bedingung, daß die Faser von α eine Fläche oder Kurve ist, ist nicht so sehr verblüffend. Wie wir gerade in § 7 und § 8 sehen werden, ist unsere Kenntnis bereits über eine einzelne Mannigfaltigkeit der Dimension drei oder mehr recht gering. Wie könnten wir da vollständige Ergebnisse über Familien solcher Mannigfaltigkeiten erwarten?

Bevor wir in § 7 auf einige Folgerungen aus den Sätzen 4.5 und 4.6 eingehen, wollen wir in den beiden folgenden Paragraphen auf einige der zum Beweis nötigen Schritte eingehen. In [19] findet man eine ausführlichere Darstellung der in diesem Abschnitt aufgeführten Ergebnisse und eine vollständige Literaturliste (bis 1981).

§ 5 Iitakas Vermutung $C_{n,m}$

Beim Versuch Aussagen, wie 4.5 oder 4.6 zu beweisen, erweist es sich als wesentlichste Schwierigkeit, das Verhalten der Kodaira-Dimension unter Morphismen abzuschätzen. Im Verlauf dieses Paragraphen bezeichnet $f : V \to W$ einen Faserraum, $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$ und V_w die allgemeine Faser von f. Leicht zu beweisen ist ([20] oder [22]):

5.1. $\kappa(V) \leqslant \dim(W) + \kappa(V_w)$.

Als Abschätzung in der anderen Richtung hofft man, daß gilt:

5.2. Vermutung $C_{n,m}$: *Gilt* $\kappa(V) \geqslant \kappa(W) + \kappa(V_w)$?

Faßt man Ergebnisse Kawamatas und des Autors zusammen ([25], [26], [27], [29], [30], [31]), so erhält man:

Satz 5.3. *Die Vermutung* $C_{n,m}$ *ist richtig in jedem der folgenden Fälle*

I) $m = 1$ *(d. h.* W *eine Kurve)*
II) $m = n - 1$ *(d. h.* V_w *eine Kurve)*
III) $m = n - 2$ *(d. h.* V_w *eine Fläche)*
IV) $\kappa(W) = \dim(W)$
V) $\kappa(V_w) = 0$ *und für ein* V'_w, *birational zu* V_w, *und ein* $\mu > 0$ *ist* $\omega^{\mu}_{V'_w} = O_{V'_w}$.
VI) $\kappa(V_w) = \dim(V_w)$ *und für ein* V'_w, *birational zu* V_w, *und ein* $\mu > 0$ *ist* $\omega^{\mu}_{V'_w}$ *erzeugt von globalen Schnitten.*

In den Beweisen einiger der Fälle von 5.3 benutzt man den in der Einleitung angeführten stetigen Teil der Klassifikationstheorie für die Fasern von f. Es zeigt sich dabei, daß $\kappa(V)$ größer sein kann als in 5.2 gefordert, falls die Fasern von f stark variieren.

Definition 5.4. Die *Variation* von f, Var (f), ist die kleinste Zahl k für die ein Körper L existiert, $\mathbf{C} \subseteq L \subseteq \overline{\mathbf{C}(W)}$, mit trz $\mathrm{grd}_{\mathbf{C}}$ (L) = k, und eine Varietät F über L, so daß $F \times_{\mathrm{Spec}(L)} \mathrm{Spec}\,(\overline{\mathbf{C}(W)})$ birational zu V_w ist.

5.5. Vermutung $C^+_{n,m}$. *Für jeden Faserraum mit* $\kappa(W) \geqslant 0$ *gilt (hoffentlich)* $\kappa(V) \geqslant \mathrm{Max}\,\{\kappa(W), \mathrm{Var}\,(f)\} + \kappa(V_w)$.

Satz 5.6. *Die Vermutung* $C^+_{n,m}$ *ist richtig, falls* m = 1 *und* n $\leqslant$ 3 *ist und in den in* 5.3 *angegebenen Fällen* II), V) *und* VI). *Insbesondere gilt* $C^+_{n,m}$ *falls* V_w *eine Fläche ist mit* $\kappa(V_w) \neq 1$.

Die in 5.3 und 5.6 zusammengefaßten Ergebnisse wurden im Verlauf der letzten acht Jahre wirklich Schritt für Schritt bewiesen. Für eine präzisere Darstellung der Entwicklung (z. B. für die Rolle der Arbeiten Fujitas und Uenos) verweisen wir auf [19] und auf Kawamatas Übersichtsartikel in [35]. Wir wollen im folgenden nur auf den Teil der Theorie der Faserräume eingehen, der ohne jede Voraussetzung über die allgemeine Faser bewiesen werden konnte. Wir schreiben $\omega_{V/W} = \omega_V \otimes f^*\omega_W^{-1}$ und bezeichnen mit $S^\beta(\mathcal{F})$ und det $(\mathcal{F})$ die reflexive Hülle des symmetrischen Produktes (bzw. der Determinantengarbe) einer torsionsfreien kohärenten Garbe $\mathcal{F}$.

Definition 5.7. Eine torsionsfreie kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf W heißt *schwach positiv,* wenn zu jeder amplen invertierbaren Garbe $\mathcal{H}$ auf W und zu jedem $\alpha > 0$ ein $\beta > 0$ existiert, so daß die Abbildung

$$O_W \otimes_{\mathbf{C}} H^0(W, S^{\alpha\cdot\beta}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{H}^\beta) \to S^{\alpha\cdot\beta}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{H}^\beta$$

surjektiv ist über einer nicht leeren offenen Menge.

Satz 5.8. *Für jedes* $\mu > 0$ *ist die Garbe* $f_*\omega^\mu_{V/W}$ *schwach positiv.*

Für $\mu = 1$ ist dieser Satz eine direkte Folge der Ergebnisse, die Fujita ([24], n = 1) und Kawamata ([25]) mit Hilfe der Theorie der Variation der Hodge-Struktur (P. Griffiths und W. Schmid) herleiten. Der Fall $\mu > 1$ kann mit Hilfe von Überlagerungskonstruktionen (siehe § 2) auf den Fall $\mu = 1$ zurückgeführt werden (siehe [30] für den Beweis). Hat die Variation des betrachteten Faserraums den maximalen Wert, erhofft man sich mehr.

Problem 5.9. *Es sei* $f' : V' \to W'$ *ein Faserraum mit* Var (f') = dim (W'). *Gibt es ein* $\eta > 0$, *so daß gilt: Für jede invertierbare ample Garbe* $\mathcal{H}$ *auf* W' *existiert eine Zahl* $\gamma > 0$ *und eine Inklusion*

$$\oplus\, \mathcal{H} \to S^\gamma(f'_*\omega^\eta_{V'/W'})$$

surjektiv über einer nicht leeren offenen Menge.

Problem 5.10. *Es sei* $f' : V' \to W'$ *wie in* 5.9. *Ist dann für ein* $\eta > 0$

$$\kappa(W, \det\,(f'_*\omega^\eta_{V'/W'})) = \dim\,(W')?$$

Man kann sich leicht überlegen, daß eine positive Antwort auf 5.9 eine positive Antwort auf 5.10 impliziert. Verblüffenderweise kann man unter Ausnutzung von 5.8 mit Hilfe weiterer Überlagerungskonstruktionen beweisen (siehe [30] und [31]):

Satz 5.11. *Die Probleme* 5.9 *und* 5.10 *sind äquivalent.*

Es scheint, daß 5.9 oder 5.10 die richtige geometrische Interpretation der Iitaka-Vermutung $C_{n,m}$ ist. Man kann zeigen ([30], [31]):

Satz 5.12. *Hat* 5.9 (*oder* 5.10) *eine positive Antwort für jeden Faserraum* $f' : V' \to W'$ *mit* $\mathrm{Var}(f') = \dim(W')$, $\mathbf{C}(W') \subseteq \overline{\mathbf{C}(W)}$ *und* $V_w = V'_w \times_{\mathrm{Spec}(\overline{\mathbf{C}(W')})} \mathrm{Spec}(\overline{\mathbf{C}(W)})$, *so gilt* $C^+_{n,m}$ *für den Faserraum* $f : V \to W$.

Obgleich $C^+_{n,m}$ schwächer ist als die in 5.9 angeführte Frage, zeigt es sich bei der Betrachtung der Beweise von $C^+_{n,m}$, in allen Fällen, in denen man diese führen kann (5.6), daß man in Wirklichkeit 5.10 beweist und in irgendeiner Form die Äquivalenz von 5.10 und 5.9 benutzt. Die Frage 5.10 nach der L-Dimension von $\det(f_* \omega^{\eta}_{V/W})$ hängt zusammen mit dem stetigen Teil der Klassifikation für n-m-dimensionale Mannigfaltigkeiten.
Ist $n \leqslant m + 2$ so kann man die Moduli-Theorie für Kurven bzw. Flächen benutzen (siehe [30]), die auf Mumford und Gieseker zurückgeht ([5]). In den in 5.3 angegebenen Fällen V und VI liefern lokale Torelli-Sätze für endliche Überlagerungen von V_w, das heißt die lokale Parametrisierung, die benötigte Information (siehe [27] und [31]). Die zur Beantwortung von 5.10 entwickelten Methoden erlauben zu sagen:

Kennt man n-m-*dimensionale Mannigfaltigkeiten gut genug* (*z. B. die Antworten auf die Probleme* 1.3 *und* 1.4), *so bestehen sehr gute Chancen* 5.10 *und* $C^+_{n,m}$ *zu beantworten.*

§ 6 Zum Beweis von 4.5 und 4.6

Nach dem etwas technischen Ausflug in die Theorie der Kodaira-Dimension von Faserräumen wollen wir in diesem Abschnitt wiederholen, wie $C_{n,m}$ und $C^+_{n,m}$ mit der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten der Kodaira-Dimension Null oder $-\infty$ zusammenhängen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $C_{n,m}$ und $C^+_{n,m}$ beide richtig sind und überlassen es dem Leser nachzuprüfen, daß die in 5.3 und 5.6 angegebenen Fälle tatsächlich ausreichen, um 4.5 und 4.6 zu beweisen . (Um den ersten Teil von 4.5 mit Hilfe von 5.3, IV) zu beweisen, muß man etwas geschickter argumentieren als wir es hier andeuten; siehe [25] oder [19]).

Wir faktorisieren die Albanese-Abbildung von V in der folgenden Weise:

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\tau} \alpha(V) \hookrightarrow A(V),$$

wobei wir (nach Aufblasen von V) annehmen, daß τ generisch endlich und f ein Faserraum projektiver Mannigfaltigkeiten ist.

Ueno hat in [22] Untervarietäten abelscher Mannigfaltigkeiten untersucht und gezeigt:

6.1. Es ist $\kappa(W) \geqslant 0$ und $\kappa(W) = 0$ impliziert, daß $\alpha(V) = A(V)$ ist.

Kawamata und der Autor studierten Überlagerungen abelscher Mannigfaltigkeiten in [21] und zeigten:

6.2. Es ist $\kappa(W) = 0$ genau dann, wenn W birational zu A(V) ist, das heißt, genau dann, wenn α selbst ein Faserraum ist.

6.1 und $C_{n,m}$ geben die Ungleichungen

$$\kappa(V) \geqslant \kappa(W) + \kappa(V_w) \geqslant \kappa(V_w).$$

Ist $\kappa(V) = -\infty$, so muß $\kappa(V_w)$ ebenfalls $-\infty$ sein und man erhält 4.6, B). Ist $\kappa(V) = 0$, so folgt aus (5.1), daß $\kappa(V_w) \geqslant 0$ ist. Die obige Ungleichung ist also nur möglich, falls $\kappa(W) = \kappa(V_w) = 0$ ist. Nach 6.2 ist α selbst ein Faserraum und wir können annehmen, daß wir $W = A(V)$ gewählt haben. Aus $C^+_{n,m}$ folgt, daß die Variation $\mathrm{Var}(\alpha) = 0$ ist. Die in 4.6, A) angegebene Aussage folgt nun, wenn immer das folgende Problem eine positive Antwort hat.

Problem 6.3. *Es sei* V *eine* n-*dimensionale Mannigfaltigkeit*, $\kappa(V) = 0$, *und* A *eine abelsche Mannigfaltigkeit.*
Es sei $f : V \to A$ *ein Faserraum mit* $\mathrm{Var}(f) = 0$.
Existiert dann eine Mannigfaltigkeit V', *birational zu* V, *so daß die induzierte Abbildung* $f' : V' \to A$ *ein étales Faserbündel ist?*

In [30] geben wir eine positive Antwort auf diese Frage, falls die allgemeine Faser V_a von f eine Kurve oder Fläche ist. Diese Bedingung wird nur benutzt, um die folgende Aussage zu beweisen: Die Menge der birationalen Abbildungen $\mathrm{Bir}(V_a)$ von V_a auf sich selbst kann keine Untermenge enthalten, die von einer rationalen Kurve parametrisiert wird.
Es ist ein offenes Problem – zumindest für den Autor – ob eine solche Aussage auch für höher-dimensionale Mannigfaltigkeiten der Kodaira-Dimension größer gleich Null gilt.

§ 7 Einige Folgerungen aus 4.5 und 4.6

Beginnen wir auch diesen Abschnitt mit der Vorstellung einiger offener Fragen, die für n = 2 aus der Klassifikationstheorie der Flächen Antworten finden.

Problem 7.1. *Es sei* V *eine* n-*dimensionale Mannigfaltigkeit und* $\mathcal{L}$ *eine invertierbare Garbe auf* V. *Existiert eine Konstante* a, *so daß für* $\nu \gg 0$ *gilt:*

$$\dim (H^0(V, \mathcal{L} \otimes \omega_V^\nu)) \leqslant a \cdot \nu^{\kappa(V)}?$$

Dabei soll $\nu^{-\infty} = 0$ *sein.*

Für $\kappa(V) = -\infty$ ist 7.1 nicht anderes als das klassische offene Problem „Does adjunction terminate". In diesem Falle würde 7.1 eine direkte Folgerung sein aus einer positiven Antwort auf:

Problem 7.2. *Ist jede* n-*dimensionale Mannigfaltigkeit* V *mit* $\kappa(V) = -\infty$ *eine Uni-Regelmannigfaltigkeit?*
Dies bedeutet, daß eine $n-1$-*dimensionale Mannigfaltigkeit* W *existiert und eine generisch endliche Abbildung von* $W \times \mathbf{P}^1$ *auf* V.

Selbst wenn man annimmt, daß das Problem 1.3 bejaht werden kann, also daß jede Mannigfaltigkeit, die keine Uni-Regelmannigfaltigkeit ist, ein kanonisches Modell besitzt, kennt man die Antwort auf 7.2 nicht. So kann man bisher nicht entscheiden, ob eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit der Kodaira-Dimension $-\infty$ existiert, deren kanonische Garbe numerisch positiv ist. Benutzt man die Theorie der Flächen (4.3, b)) so erhält man aus 4.6, B)

Folgerung 7.3. *Ist* V *eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit,* $\kappa(V) = -\infty$ *und* $g_1(V) \geqslant 1$, *so haben* 7.1 *und* 7.2 *eine positive Antwort.*

Eine entsprechende Folgerung für vier-dimensionale Mannigfaltigkeiten können wir nicht hinschreiben, da wir die Antwort auf 7.2 nicht für *alle* drei-dimensionalen Mannigfaltigkeiten kennen.

Für den Fall der Kodaira-Dimension Null erhalten wir aus 4.6, A)

Folgerung 7.4. *Ist* V *eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit,* $\kappa(V) = 0$ *und* $g_1(V) \geqslant \dim(V) - 2$, *so existiert eine Mannigfaltigkeit* V', *birational zu* V, *und ein* $\mu > 0$, *so daß* $\omega_{V'}^{\mu} = O_{V'}$ *ist.*

Damit ist das in 1.3 gesuchte kanonische Modell in diesem Spezialfall gefunden – sogar in der Menge der Mannigfaltigkeiten. Auch 7.1 ist in diesem Fall trivialerweise richtig. Bemerken wir noch, daß eine positive Antwort auf 7.1 für Mannigfaltigkeiten der Kodaira-Dimension Null gerade sagt, daß eine Zariski-Zerlegung der kanonischen Garbe (1.4) existiert, deren positiver Teil $P = O_V$ ist.

Wir beenden diesen Paragraphen mit Kawamatas Charakterisierung abelscher Mannigfaltigkeiten, die direkt aus 4.5 folgt.

Folgerung 7.5. *Es sei* V *eine* n*-dimensionale Mannigfaltigkeit der Kodaira-Dimension Null. Dann ist* $g_1(V) \leqslant n$ *und* $g_1(V) = n$ *genau dann, wenn* V *birational zu einer abelschen Mannigfaltigkeit ist.*

§ 8 Höhere Differentialformen

In den bisherigen Abschnitten haben wir über die Kodaira-Dimension und die Irregularität geredet, das heißt, über Multi-n-Formen und Eins-Formen. Beide sind mit Abbildungen verbunden, mit Iitakas Faserung (3.2) und mit der Albanese-Abbildung (4.1). Wie kann man die höheren Differentialformen betrachten, zum Beispiel Zwei-Formen auf einer drei-dimensionalen Mannigfaltigkeit der Kodaira-Dimension Null? Beginnen wir mit dem folgenden Lemma, welches man aus der Serre-Dualität und dem Verhalten der Euler-Poincaré-Charakteristik unter étalen Morphismen erhält.

Lemma 8.1. *Es sei* V *eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit (oder eine Varietät mit nur rationalen Gorenstein-Singularitäten), so daß* $\omega_V^{\mu} = O_V$ *ist für ein* $\mu > 0$. *Dann ist* $\chi(O_V) = 0$.

Bemerkt man, daß ein Faserbündel elliptischer Kurven über einer abelschen Fläche trivial ist, falls seine kanonische Garbe einen Schnitt hat, so erhält man die folgende Tabelle der möglichen Werte der g_i aus 7.4 und 8.1 (siehe [23]).

Proposition 8.2. *Jede drei-dimensionale Mannigfaltigkeit* V *mit* $\kappa(V) = 0$ *und* $g_1(V) > 0$ *ist birational zu einer der folgenden:*

g_1	g_2	g_3	Struktur
3	3	1	abelsche Mannigfaltigkeit
2	1	0	étales Faserbündel elliptischer Kurven über einer abelschen Fläche
1	1	1	étales Faserbündel abelscher Flächen oder von K 3-Flächen über einer elliptischen Kurve
1	0	0	étales Faserbündel über einer elliptischen Kurve mit Faser F, $\kappa(F) = 0$

P. Wilson hat vor kurzem in [33] folgende Verallgemeinerung von 8.1 erhalten.

Satz 8.3. *Es sei* V *eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit (oder eine Varietät mit nur terminalen Gorenstein-Singularitäten),* $\kappa(V) = 0$ *und* ω_V *sei numerisch positiv.*
Dann ist $\chi(O_V) = 0$. *Insbesondere folgt aus* $g_1(V) = 0$, *daß* $g_2(V) = 0$ *und* $g_3(V) = 1$ *ist.*

Diese Ergebnisse, ebenso wie der erste Teil von 7.5, beantworten in Spezialfällen eine Vermutung Uenos ([23]).

Problem 8.4. *Es sei* V *eine* n*-dimensionale Mannigfaltigkeit der Kodaira-Dimension Null und* $E \subseteq \Omega^i_V$ *eine Untergarbe vom Rang* r. *Ist dann* $\dim(H^0(V, E)) \leqslant r$?

Tatsächlich hat Ueno nur den Fall $E = \Omega^i_V$ betrachtet, aber die Versuche, 8.4 für drei-dimensionale Mannigfaltigkeiten zu behandeln, legen obige Präzisierung nahe. T. Mabuchi hat in [32] 8.4 im positiven Sinne beantwortet für $n = 3$, $i = 2$ und $r = 1$. Damit bleibt (für drei-dimensionale Mannigfaltigkeiten) das Problem, Rang zwei Untergarben von Ω^2_V zu behandeln. Man kann sich überlegen, daß eine positive Antwort auf das Adjunktionsproblem 7.1 auch in diesem Fall eine Antwort auf 8.4 geben würde.

In entsprechender Weise stellt sich die Frage nach der geometrischen Bedeutung von Zwei-Formen auf Mannigfaltigkeiten der Kodaira-Dimension $-\infty$. Erste Ergebnisse in dieser Richtung findet man in [32].

Literatur

Grundlagen der Geometrie

[1] Griffiths, P.; Harris, J.: Principles of Algebraic Geometry. New York: Wiley-Interscience 1978

[2] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. New York – Heidelberg – Berlin: Springer 1977

Zur Klassifikationstheorie der Flächen

[3] Beauville, A.: Surfaces Algébriques Complexes. astérisque 54. Société Mathématique de France 1978

[4] B o m b i e r i , E.; H u s e m o l l e r , D.: Classification and Embeddings of Surfaces. In: Algebraic Geometry, Arcta 1974. Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. **29** (1975) 329–420

Zum stetigen Teil der Klassifikation

[5] M u m f o r d , D.; F o g a r t y , J.: Geometrie Invariant Theory. 2nd ed. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1982. = Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34

Zur Konstruktion des kanonischen Modelles

[6] K a w a m a t a , Y.: Elementary contractions of algebraic 3-Folds. Manuskript 1983

[7] M o r i , S.: Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. Ann. of Math. **116** (1982) 133–176

[8] M o r i , S.: Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. In: [34] 155–190

[9] R e i d , M.: Minimal models of canonical 3-Folds. In: [35] 131–180

Numerisch positive Garben und die Zariski-Zerlegung

[10] B e n v e n i s t e , X.: Sur la décomposition de Zariski en dimension 3. Notes aux C. R. Acad. Sci. **295** (Sept. 1982) 107–110

[11] F u j i t a , T.: Semipositive line bundles. Manuskript 1982

[12] K a w a m a t a , Y.: A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem. Math. Ann. **261** (1982) 43–46

[13] V i e h w e g , E.: Vanishing theorems. J. reine u. angew. Math. **335** (1982) 1–8

[14] Z a r i s k i , O.: The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. Ann. of Math. **76** (1962) 560–615

Zur Struktur des kanonischen Ringes

[15] B e n v e n i s t e , X.: Sur l'anneau canonique de certaines variétés de dimension 3. Inventiones math. **73** (1983) 157–164

[16] K a w a m a t a , Y.: On the finiteness of generators of a pluri-canonical ring for a 3-fold of general type. Manuskript 1982.

[17] R e i d , M.: Canonical 3-folds. In: Géométrie Algébrique. Angers: Sijthoff & Noordhoff Int. Publishers 1979, 273–310

[18] W i l s o n , P.: On the canonical ring of algebraic varieties. Compositio Math. **43** (1981) 365–385

Grundlagen der Klassifikationstheorie und die Struktur der Albanese-Abbildung (siehe auch die Literaturangaben in [19])

[19] E s n a u l t , H.: Classification des variétés de dimension 3 et plus. Séminaire Bourbaki (Fév. 1981) n^0 568. In: Lecture Notes in Math. 901. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1981, 111–131

[20] I i t a k a , S.: On D-dimension of algebraic varieties. J. Math. Soc. Japan **23** (1971) 356–373

[21] K a w a m a t a , Y.; V i e h w e g , E.: On a characterization of an abelian variety in the classification theory of algebraic varieties. Compositio Math. **41** (1980) 355–359

[22] U e n o , K.: Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975. = Lecture Notes in Math. 439.

[23] U e n o , K.: Birational geometry of algebraic threefolds. In: Géométrie Algébrique. Angers: Sijthoff & Noordhoff Int. Publishers 1979, 311–323

Zur Kodaira-Dimension von Faserräumen (siehe auch die Literaturangaben in [19])

[24] F u j i t a , T.: On Kähler fiber spaces over curves. J. Math. Soc. Japan **30** (1978) 779–794

[25] K a w a m a t a , Y.: Characterization of abelian varieties. Composition Math. **43** (1981) 253–276

[26] K a w a m a t a , Y.: Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves. inventiones math. **66** (1982) 57–71

[27] K a w a m a t a , Y.: Kodaira dimension of certain algebraic fiber spaces. J Fac. Sci. Univ. Tokyo **30** (1983) 1–24

[28] L e v i n e , M.: Pluri-canonical divisors on Kähler manifolds. Inventiones math. **74** (1983) 293–303

[29] V i e h w e g , E.: Klassifikationstheorie algebraischer Varietäten der Dimension drei. Compositio Math. **41** (1980) 361–400

[30] V i e h w e g , E.: Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces. In: [35] 329–353

[31] V i e h w e g , E.: Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension, II: The local Torelli map. Manuskript 1982. In: [36] 567–589

Differentialformen auf drei-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

[32] M a b u c h i , T.: Invariant β and uniruled threefolds. J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982) 503–554

[33] W i l s o n , P.: On regular threefolds with $\kappa = 0$. Manuskript 1983

Tagungsberichte, die sich mit der Klassifikationstheorie befassen

[34] Algebraic Threefolds. Proceedings, Varenna 1981. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1982. = Lecture Notes in Math. 947

[35] Algebraic Varieties and Analytic Varieties. Proceedings, Tokyo 1981. Kinokuniya Comp. & North-Holland Pub. Comp. 1983. = Advanced Studies in Pure Math. 1

[36] Classification of Algebraic and Analytic Manifolds. Proceedings, Katata 1982. Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1983. = Progress in Math. 39

Eckart Viehweg
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

(*Eingegangen: 10. 10. 1983*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein
86 (1984) 151–159
AMS subject classification: 30 E 10

Approximation im Komplexen*)

D. Gaier, Gießen

Das Thema meines Vortrags ist in letzter Zeit Gegenstand mehrerer Tagungen gewesen, sei es im Rahmen von Funktionentheorie-Tagungen (Oberwolfach, Durham, Quebec), sei es (wie z. B. in osteuropäischen Ländern) innerhalb größerer Tagungen über das Gesamtgebiet der Approximationstheorie. Man kann wohl sagen, daß dieses Gebiet in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit einer wachsenden Zahl von Mathematikern gefunden hat.
Meine Aufgabe ist es hier, Ihnen in einer Stunde einen knappen Überblick über die wichtigsten Tatsachen zu geben. Das bedeutet, daß ich hauptsächlich über Ergebnisse berichte, weniger über Beweise, und vor allen Dingen, daß sich mein Vortrag ausdrücklich an die Nichtspezialisten wendet, die sich kurz über das Wichtigste informieren wollen. Mein Vortrag soll gewissermaßen ein Fortbildungsvortrag über Approximation im Komplexen sein.

1 Approximation durch Polynome – Weierstraß 1885

Das erste Hauptproblem stellt sich so: Es sei K kompakt in $\mathbf{C}$, und f sei eine auf K erklärte komplexwertige Funktion. Gibt es eine Folge $\{P_n\}$ von Polynomen so, daß $P_n(z) \rightrightarrows f(z)$ $(n \to \infty;\ z \in K)$? Ist letzteres der Fall, so sagen wir, es sei $f \in P(K)$.
Es ist klar, daß *notwendig* für $f \in P(K)$ ist, daß f auf K stetig und in K^0, den inneren Punkten von K, analytisch ist; hierfür sagen wir, es sei $f \in A(K)$. Es ist also $P(K) \subset A(K)$, und die obige Frage lautet, leicht verschärft: *Für welche Kompakta* K *gilt* $P(K) = A(K)$?
Man sieht leicht, daß dafür das Komplement K^c von K zusammenhängen muß. Andernfalls hat K^c eine beschränkte Komponente g. Wir wählen $z_0 \in g$, setzen $d = \max\{|z - z_0| : z \in K\}$, und betrachten die auf K reguläre Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$. Wäre $f \in P(K)$, so gäbe es ein Polynom P mit

$$|f(z) - P(z)| < \frac{1}{d} \quad (z \in K), \quad \text{folglich} \quad |1 - (z - z_0)P(z)| < \frac{|z - z_0|}{d} \leqslant 1 \quad (z \in K).$$

*) Nur unwesentlich erweiterte Fassung eines Vortrags, den der Verfasser im September 1983 bei der DMV-Tagung in Köln gehalten hat.

Da der Abschluß $\bar{g}$ von g kompakt ist, nimmt $1-(z-z_0)P(z)$ sein Maximum auf $\partial g \subset K$ an. Die letzte Ungleichung gilt also auch für $z = z_0$, was nicht zutrifft.

Bei unserer Frage, wann $P(K) = A(K)$ gilt, kann man sich demnach auf solche K beschränken, für die K^c zusammenhängt. Bekannte Fälle sind:

a) $K = [a, b]$: Satz von Weierstraß 1885. Hier ist eine f approximierende Polynomfolge sogar leicht explizit angebbar: Bernstein-Polynome.

b) $K = \bar{\mathbf{D}}$: Hier ist f im Einheitskreis $\mathbf{D}$ analytisch, in $\bar{\mathbf{D}}$ stetig. Gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $(z \in \mathbf{D})$, so kann man die Fejér-Polynome $\sigma_n(z) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(z)$ bilden, mit $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, und man hat $\sigma_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $(z \in \bar{\mathbf{D}})$. Oder aber man approximiert f erst durch f_r, mit $f_r(z) := f(rz)$, $(z \in \bar{\mathbf{D}}, 0 < r < 1)$. Da f_r in $\bar{\mathbf{D}}$ analytisch ist, läßt es sich durch die Teilsummen seiner Potenzreihe approximieren.

c) $K = \bar{G}$, wo ∂G eine Jordankurve ist: Satz von Walsh 1926. Es bezeichne φ die konforme Abbildung von G auf $\mathbf{D}$, mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$. $C_R (R > 1)$ sei eine äußere Niveaulinie von G, und φ_R bilde das Innere von C_R (normiert) auf $\mathbf{D}$ ab. Um $f \in A(\bar{G})$ durch ein Polynom zu approximieren, wird zuerst $f(\varphi^{-1}(w)) \in A(\bar{\mathbf{D}})$ durch ein Polynom P(w) approximiert, d. h. es ist f(z) in $\bar{G}$ durch $P(\varphi(z))$ approximiert. Es reicht demnach aus, die Abbildungsfunktion φ durch Polynome zu approximieren.

Mit Sätzen über variable Gebiete wird nun gezeigt, daß $\varphi_R(z) \rightrightarrows \varphi(z) (R \to 1; z \in \bar{G})$ gilt, und daher genügt es, φ_R auf $\bar{G}$ zu approximieren. Daß dies möglich ist, zeigt zum Beispiel der Kleine Satz von Runge (§ 2), weil φ_R auf $\bar{G}$ analytisch ist.

d) $K^0 = \emptyset$: Satz von Lavrentieff 1934.

Nachdem sich also verschiedene Autoren mit Sonderfällen abgemüht hatten, zog Mergelyan 1951 einen Schlußstrich unter die Entwicklung.

Satz von Mergelyan (1951) *Es sei* K *kompakt in* $\mathbf{C}$ *und* K^c *zusammenhängend, ferner* $f \in A(K)$. *Dann gibt es zu* $\epsilon > 0$ *ein Polynom* P *mit* $|f(z) - P(z)| < \epsilon$, $(z \in K)$.

Einen ausführlichen Beweis findet man z. B. bei Gaier [2], S. 92 ff. Seine Hauptschritte sind: (i) f wird mit einem Glättungsoperator behandelt, wodurch eine nicht-analytische Funktion Φ nahe f entsteht; (ii) Φ wird durch ein Integral mit Cauchy-Kern dargestellt

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{(\bar{\partial}\Phi)(\zeta)}{\zeta - z}\, db_\zeta,$$

und der Kern wird durch ein stückweises Polynom approximiert.

2 Approximation durch rationale Funktionen – Runge 1885

Auch beim zweiten Problem ist K kompakt in $\mathbf{C}$ und f auf K erklärt, doch fragen wir jetzt: Wann gibt es eine Folge $\{R_n\}$ von rationalen Funktionen mit Polen in K^c so, daß $R_n(z) \rightrightarrows f(z)$ $(n \to \infty, z \in K)$? Ist letzteres der Fall, so sagen wir, es sei $f \in R(K)$.

Wie oben ist $R(K) \subset A(K)$. Der erste Satz in umgekehrter Richtung, und der erste Satz der allgemeinen Approximationstheorie im Komplexen überhaupt, ist der

Satz von Runge (1885) *Es sei* K *kompakt in* $\mathbf{C}$ *und* f *analytisch auf* K. *Dann ist* $f \in R(K)$.

Man beachte, daß f sogar in einer Umgebung von K analytisch vorausgesetzt ist. – Runges Beweisidee ist die Darstellung von f als Integral $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, mit geeigneten Wegen $\Gamma \subset K^c$, und die Approximation des Integrals durch Riemannsche Summen. Dies ergibt als Näherung $\sum \frac{c_j}{\zeta_j - z}$ mit gewissen $\zeta_j \in K^c$. Runge hat aber auch schon erkannt, daß es möglich ist, mehrere Polstellen ζ_j zusammenzulegen. Angenommen, $K^c = g_\infty \cup \{\cup g_k\}$ sei die Zerlegung der Menge K^c in ihre Komponenten (mit $\infty \in g_\infty$), so wählen wir Punkte $z_k \in g_k$ beliebig. Alle Pole ζ_j in der Komponente g_k können dann nach z_k bzw. ∞ „verschoben" werden, und es entsteht eine approximierende rationale Funktion R mit Polen der Ordnungen $\geqslant 1$ in den z_k bzw. ∞. In dem *Sonderfall*, daß K^c zusammenhängend ist, also $K^c = g_\infty$ ist, liegen alle Pole von R in ∞, und es entsteht der

Kleine Satz von Runge *Es sei* K *kompakt in* $\mathbf{C}$ *und* K^c *zusammenhängend, ferner* f *auf* K *analytisch. Dann ist* $f \in P(K)$.

Dieser Satz ist natürlich schwächer als der von Mergelyan, jedoch lassen sich mit ihm schon viele Anwendungen beweisen. Es sei etwa $K_n = K_n^{(1)} \cup K_n^{(2)} \cup K_n^{(3)}$ mit

$$K_n^{(1)} = \{z \in \bar{\mathbf{D}}\colon \operatorname{Im} z \leqslant 0\}, \qquad K_n^{(2)} = \left\{z \in \bar{\mathbf{D}}\colon \operatorname{Im} z = \frac{1}{n}\right\},$$
$$K_n^{(3)} = \left\{z \in \bar{\mathbf{D}}\colon \operatorname{Im} z \geqslant \frac{2}{n}\right\}.$$

Wir setzen $f = 0$ auf $K_n^{(1)} \cup K_n^{(3)}$ und $f = 1$ auf $K_n^{(2)}$. Der Kleine Satz von Runge liefert dann eine Folge von Polynomen P_n mit $P_n(z) \to 0$ $(n \to \infty)$ für jedes feste $z \in \bar{\mathbf{D}}$, jedoch ist die Konvergenz in keiner Umgebung von $x_0 \in (-1, +1)$ gleichmäßig.

Das Ziel weiterer Bemühungen war es nun, die starke Forderung „f analytisch auf K" im Satz von Runge abzuschwächen und nur $f \in A(K)$ zu verlangen. Um das Ergebnis formulieren zu können, benötigt man den Begriff der AC-*Kapazität einer Menge* $M \subset \mathbf{C}$. Es sei $\mathbb{K}(M)$ die Klasse aller in $\mathbf{C}$ stetigen Funktionen f mit $f(z) \to 0$ $(z \to \infty)$ und $|f(z)| \leqslant 1$ $(z \in \mathbf{C})$, die im Komplement einer kompakten Teilmenge von M analytisch sind. Jedes $f \in \mathbb{K}(M)$ hat folglich an ∞ eine Entwicklung der Form

$$f(z) = \frac{c_1(f)}{z} + \text{fallende Potenzen.}$$

Dann heißt $\alpha(M) = \sup\{|c_1(f)| : f \in \mathbb{K}(M)\}$ die AC-Kapazität von M. Eine Charakterisierung der Kompakta K, für die $R(K) = A(K)$ gilt, gibt dann der

Satz von Vitushkin (1966) *Es ist* $R(K) = A(K)$ *genau dann, wenn*

$$\alpha(K^c \cap D) = \alpha(K^{0c} \cap D)$$

gilt für jede Kreisscheibe D.

Die Bedingung ist nicht leicht nachzuprüfen. Grob gesprochen bedeutet sie, daß K^c und K^{0c} überall „gleich dick" sind. Doch wird man versuchen, zu einfacheren *hinreichenden* Kriterien für den Schluß $f \in A(K) \Rightarrow f \in R(K)$ zu gelangen. Dabei kommt uns zugute der

Lokalisationssatz von Bishop *Es sei* K *kompakt in* **C** *und* f *auf* K *erklärt. Zu jedem* $z \in K$ *gebe es eine Umgebung* U_z *so, daß mit* $K_z := K \cap \overline{U}_z$ *gilt* $f|_{K_z} \in R(K_z)$. *Dann ist* $f \in R(K)$.

Mit anderen Worten: Die rationale Approximierbarkeit von f auf K ist eine „lokale Eigenschaft"; ist sie *überall lokal* möglich, so auf ganz K. Mit Hilfe dieses schönen, kräftigen Satzes zeigt man leicht die

Folgerung *Haben alle Komponenten von* K^c *einen Durchmesser* $\geqslant \delta > 0$, *so ist* $R(K) = A(K)$.

Dies gilt also insbesondere dann, wenn K^c nur endlich viele Komponenten hat, aber auch dann, wenn man etwa aus einem abgeschlossenen Rechteck unendlich viele offene Rechtecke fester Höhe herausnimmt.
Der einfachste Zugang zum Satz von Bishop führt über das

Fusionslemma von Alice Roth (1976) *Gegeben seien drei kompakte Mengen* K_1, K_2, k *in* **C** *mit* $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. *Dann gibt es eine Konstante* $A = A(K_1, K_2) > 0$ *mit folgender Eigenschaft. Sind* R_1, R_2 *rationale Funktionen mit* $|R_1(z) - R_2(z)| < \epsilon$, $(z \in k)$, *so gibt es eine rationale Funktion* R *mit*

$$|R_1(z) - R(z)| < A \cdot \epsilon \quad (z \in K_1 \cup k) \quad \textit{und}$$
$$|R_2(z) - R(z)| < A \cdot \epsilon \quad (z \in K_2 \cup k).$$

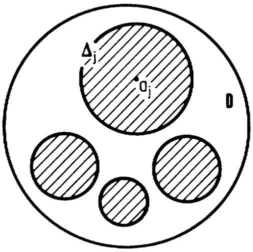
Über die Lage der Pole ist nichts angenommen. Wesentlich ist nur der Fall, daß k die Mengen K_1 und K_2 trifft. Die rationale Funktion R verbindet dann R_1 mit R_2 über die „Brücke" k. Näheres in [2], S. 113ff.

Wie können wir nun ein Kompaktum K finden, für das R(K) *echt* in A(K) liegt? Die Folgerung oben zeigt, daß wir auf ein K zurückgreifen müssen, für das K^c unendlich viele Komponenten hat; K hat unendlich viele Löcher. Zu diesem Zweck wurde von der Schweizerin Alice Roth schon 1938 der sog. *Schweizer Käse* erfunden. Ihn gewinnen wir, indem wir aus **D** abzählbar viele offene Scheiben Δ_j mit Radien r_j herausnehmen, so daß gilt:

1) $\overline{\Delta}_j$ sind paarweise fremd;

2) $\sum_j r_j < 1$;

3) $\overline{\mathbf{D}} \setminus \bigcup_j \Delta_j$ enthält keine Kreisscheibe.



Dann ist $K := \overline{\mathbf{D}} \setminus \bigcup_j \Delta_j$ Roth's Schweizer Käse.

Fig. 1. Schweizer Käse

Hier ist tatsächlich R(K) echt in A(K). Denn $f(z) = \bar{z}$ ist in A(K) (weil $K^0 = \emptyset$), aber man zeigt leicht, daß sich f nicht beliebig gut rational approximieren läßt.

3 Approximation durch ganze Funktionen – Carleman 1927

Beim dritten Fragenkomplex, den wir behandeln wollen, ist F abgeschlossen in $\mathbf{C}$, und $f \in A(F)$, das heißt f stetig auf F und analytisch in F^0. Wir fragen: Gibt es eine Folge $\{g_n\}$ ganzer Funktionen so, daß $g_n(z) \Rightarrow f(z)$ $(n \to \infty, z \in F)$? Ausgangspunkt für diese Frage war der

Satz von Carleman (1927) *Es sei* f *stetig auf* $\mathbf{R}$, $\epsilon(x)$ *stetig und positiv auf* $\mathbf{R}$. *Dann gibt es eine ganze Funktion* g *mit*

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Man bemerkt, daß sogar Approximation *mit Geschwindigkeit* (für $x \to \pm\infty$) ausgesagt wird. Indessen folgt die allgemeine Behauptung leicht aus der speziellen (mit $\epsilon(x) \equiv 1$) wie folgt. Zunächst wähle man eine ganze Funktion g_1 so, daß $|\log \epsilon(x) - g_1(x)| \leqslant 1$, $(x \in \mathbf{R})$. Dann ist $h = \exp(g_1 - 1)$ ganz und nullstellenfrei, und g_2 wählbar so, daß $\left|\dfrac{f(x)}{h(x)} - g_2(x)\right| \leqslant 1$, $(x \in \mathbf{R})$. Folglich gilt

$$|f(x) - h(x)g_2(x)| \leqslant |h(x)| = \exp \operatorname{Re}\,(g_1(x) - 1) \leqslant \epsilon(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

womit der allgemeine Fall erledigt ist. – Diese Reduktionsidee ist übrigens immer anwendbar, wenn $F^0 = \emptyset$ ist.

Schon Carleman hat neben $\mathbf{R}$ noch allgemeinere Mengen F in $\mathbf{C}$ betrachtet, doch studieren wir gleich eine *Verallgemeinerung des Problems.* Es sei G ein Gebiet in $\mathbf{C}$ und $F \subset G$ abgeschlossen in G.

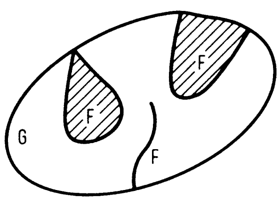


Fig. 2. F abgeschlossen in G

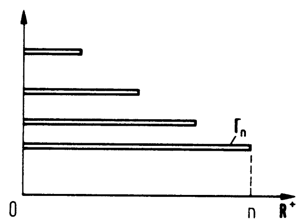


Fig. 3. Beispiel eines F in $\mathbf{C}$

Es heißt F *Weierstraß-Menge in* G, wenn für jedes $f \in A(F)$ und $\epsilon > 0$ ein $g \in \mathrm{Hol}(G)$ existiert so, daß $|f(z) - g(z)| < \epsilon$ gilt für alle $z \in F$.

Die allgemeinere Frage lautet: Wie lassen sich Weierstraß-Mengen topologisch charakterisieren? Sofort sieht man wieder: F darf keine Löcher aufweisen. Aber diese Bedingung reicht nicht aus, wie das Beispiel von Fig. 3 zeigt. Hier ist $G = \mathbf{C}$ und $F = (\cup\, \Gamma_n) \cup \mathbf{R}^+$; f wird stetig auf Γ_n angenommen, wobei $f = 0$ auf den horizontalen Teilen von Γ_n und $\int_{\Gamma_n} f = n$ sein soll. Setzt man noch $f = 0$ auf $\mathbf{R}^+$, so wird f stetig auf F: $f \in A(F)$. Angenommen, es gäbe eine ganze Funktion g mit $|f(z) - g(z)| \leqslant c < 1/2$, $(z \in F)$. Dann wäre $\int_{\Gamma_n} g = \int_{\Gamma_n} (g - f) + \int_{\Gamma_n} f$.

Die linke Seite ist $0 + o(1)$, während rechts $\int_{\Gamma_n} f = n$ steht und

$$\int_{\Gamma_n} (g - f) \text{ vom Betrag} \leqslant c \cdot (2n + o(1))$$

ist. Dies ergibt einen Widerspruch wegen $c < 1/2$.

Bezeichnet G^* die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von G, so wird die Charakterisierung von Weierstraß-Mengen in G gegeben durch den

Satz von Arakeljan (1968) *Es ist* F *Weierstraß-Menge in* G *genau dann, wenn gilt:*

(1) $G^* \setminus F$ *ist ein zusammenhängender Raum;*

(2) $G^* \setminus F$ *ist an* ∞ *lokal zusammenhängend.*

In F und G ausgedrückt heißt dies: (1) Jede Zusammenhangskomponente von $G \setminus F$ hat einen Häufungspunkt auf $\partial_{\hat{\mathbf{C}}} G$, dem bezüglich $\hat{\mathbf{C}}$ genommenen Rand von G. (2) Zu jeder Umgebung U von ∞ gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von ∞ so, daß jeder Punkt $z \in V \setminus F$ mit ∞ durch einen Weg verbunden werden kann, der in $(G \setminus F) \cap U$ liegt. Wie man sieht, ist gerade diese Bedingung (2) im Beispiel der Figur 3 verletzt.
Der Satz von Arakeljan wurde erst in mehreren Etappen erreicht. A. Roth hatte 1938 den Fall $G = \mathbf{C}$ und F vom Flächenmaß 0 behandelt. Spätere Autoren waren Keldych und Lavrentieff, und Arakeljan selbst hatte 1964 zuerst den Fall $G = \mathbf{C}$ vollständig erledigt. Der bei Gaier ([2], S. 129) gewählte Zugang – über die meromorphe Approximation – wurde bei Roth 1973 angedeutet, verwendet das Fusions-Lemma, und führt den Satz von Arakeljan letztlich auf den von Mergelyan zurück.

Wir stellen noch eine durch den Satz von Carleman nahegelegte *Zusatzfrage:* Kann man vielleicht erreichen, daß neben $|f(z) - g(z)| < \epsilon$, $(z \in F)$ noch gilt $|f(z) - g(z)| \to 0$, $(z \in F,\ z \to \infty)$? Dabei ist natürlich wie oben ∞ der ideale Punkt in G^*.
Die Antwort fällt nicht immer positiv aus. Wir nehmen etwa $G = \mathbf{D}$ und $F = G \cap \{z : \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$. Ist dann $f \in A(F)$ und $g \in \operatorname{Hol}(\mathbf{D})$ mit $f(z) - g(z) \to 0$ $(z \in F,\ z \to \infty)$, so hat die in F^0 analytische Funktion $f - g$ auf dem rechten Halbkreisbogen Randwerte Null. Nach einem Satz von Lusin und Priwalow muß folglich $f = g$ sein, f muß notwendig nach $\mathbf{D}$ analytisch fortsetzbar sein.

Jedoch gibt es solche Sätze, wenn $G = \mathbf{C}$ ist. Wir erwähnen als Beispiel:
Ist F *Weierstraß-Menge in* $\mathbf{C}$ *und* $f \in A(F)$, *so gibt es zu* $\epsilon > 0$ *eine ganze Funktion* g *mit*

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon \quad (z \in F) \quad \textit{und} \quad |f(z) - g(z)| < \frac{1}{|z|} \quad (z \in F).$$

4 Approximation mit Geschwindigkeit – Nersesjan 1971

Vergleicht man die Sätze von Carleman und Arakeljan miteinander, so erscheint es wünschenswert, jene in $\mathbf{C}$ oder in einem Gebiet $G \subset \mathbf{C}$ abgeschlossenen Mengen F zu charakterisieren, auf denen Approximation mit beliebiger Geschwindigkeit möglich ist. Es heißt $F \subset G$ *Carleman-Menge in* G, wenn für jedes $f \in A(F)$ und jede Fehlerfunktion ϵ ein $g \in \operatorname{Hol}(G)$ existiert so, daß $|f(z) - g(z)| < \epsilon(z)$ gilt für alle $z \in F$.
Wie oben schon angedeutet, fallen die Begriffe Carleman-Menge und Weierstraß-Menge zusammen, falls F keine inneren Punkte besitzt. Im allgemeinen Fall tritt

jedoch zu den Bedingungen (1) und (2) im Satz von Arakeljan noch eine dritte Bedingung hinzu. Wir sagen, F erfülle die *Bedingung* (A), wenn es zu jedem kompakten Teil K von G eine Umgebung U von ∞ in G^* gibt so, daß keine Zusammenhangskomponente von F^0 gleichzeitig K und U trifft. Damit lautet der

Satz von Nersesjan (1971) *Es ist* F *Carleman-Menge in* G *genau dann, wenn* F *die Bedingungen* (1) *und* (2) *im Satz von Arakeljan sowie die Bedingung* (A) *erfüllt.*

Wie man sieht, ist die Bedingung (A) schon für einfache Mengen verletzt; man wähle etwa $G = \mathbf{C}$ und F als abgeschlossenen Winkelraum. Es stellt sich dann die Frage, für welche Funktionen $f \in A(F)$ und für welche Fehlerfunktionen ϵ eine Approximation möglich ist. Diesen Fragenkomplex hat erstmals Keldych 1945 behandelt; man findet oft, daß das Wachstum von f mit dem von ϵ gekoppelt werden muß. Näheres bei Gaier [2], S. 144ff.

5 Anwendung von Approximationssätzen

Die Approximationssätze eignen sich hervorragend dazu, holomorphe Funktionen zu konstruieren, die ein gewisses Randverhalten zeigen. Dafür bringen wir drei Beispiele.

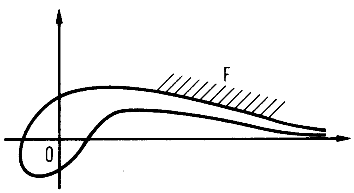


Fig. 4

a. Wir wählen $G = \mathbf{C}$ und F entsprechend Fig. 4. Dann ist F Weierstraß-Menge in $\mathbf{C}$, und der am Ende von § 3 genannte Satz liefert, auf $f(z) = 1/z$ angewandt, eine ganze Funktion g mit

$$\left|g(z) - \frac{1}{z}\right| < \frac{1}{|z|} \qquad (z \in F).$$

Für diese ganze Funktion g verschwinden alle radialen Randwerte: $\lim\limits_{r \to \infty} g(re^{i\varphi}) = 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Im Einheitskreis $\mathbf{D}$ ist dies nicht möglich, denn aus $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\varphi}) = 0$ für φ aus einer Menge von positivem Maß folgt $f = 0$.

b. Gegeben sei eine F_σ-Menge $E \in \partial\mathbf{D}$ von 1. Kategorie: $E = \cup E_n$, wo E_n abgeschlossen und nirgends dicht auf $\partial\mathbf{D}$. Weiter sei f in $\mathbf{D}$ stetig. Dann gibt es eine in $\mathbf{D}$ analytische Funktion g so, daß

$$f(re^{i\varphi}) - g(re^{i\varphi}) \to 0 \qquad (r \to 1),$$

für alle $\varphi \in E$. Das radiale Randverhalten jeder *stetigen* Funktion f kann (auf E) mitgemacht werden durch eine in $\mathbf{D}$ *analytische* Funktion g. Nimmt man für E_n Cantor-Mengen vom Maß $2\pi - \frac{1}{n}$, so wird E vom Maß 2π, und die Aussage oben gilt dann für fast alle φ.

Wir skizzieren den Beweis. Dazu setzen wir

$$F_n = \left\{ re^{i\varphi} : 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant r < 1 ; e^{i\varphi} \in E_n \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Diese Mengen sind abgeschlossen in $\mathbf{D}$ mit $F_n^0 = \emptyset$, ihre Union $F = \cup F_n$ ist ebenfalls abgeschlossen in $\mathbf{D}$ mit $F^0 = \emptyset$; daher ist $f \in A(F)$. Außerdem ist unschwer zu sehen, daß F die Bedingungen (1) und (2) des Satzes von Arakeljan erfüllt. F ist daher sogar eine Carleman-Menge, und zu jeder Fehlerfunktion $\epsilon(r)$ gibt es eine Funktion $g \in \mathrm{Hol}(\mathbf{D})$ mit

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon(|z|) \qquad (z \in F).$$

Jeder zu einem Punkt von E hinführende Radius liegt aber von einer Stelle an in F, und daraus folgt unsere Behauptung.

c. Es sei f eine ganze Funktion, für die $\lim\limits_{r \to \infty} f(re^{i\varphi}) =: F(e^{i\varphi})$ für alle φ als endlicher oder unendlicher Grenzwert existiere. Welche Funktionen F können dabei vorkommen? A. Roth hat 1938 diese Frage vollständig beantwortet und diese „Strahlengrenzwert-Funktionen" durch zwei Eigenschaften charakterisiert:

(1) F ist auf $E = \partial\mathbf{D}$ von der 0. oder der 1. Baireschen Klasse;

(2) Es gibt abzählbar viele fremde offene Kreisbögen $b_k \subset E$ so, daß
  a) $\cup\, b_k$ dicht liegt auf E, und daß
  b) F auf jedem dieser Bögen b_k konstant ist.

Jede Strahlengrenzwert-Funktion F hat die Eigenschaften (1) und (2), und zu jeder (1) und (2) erfüllenden Funktion F gibt es eine ganze Funktion f, welche F als Strahlengrenzwert-Funktion hat. Hier, im zweiten Teil der Aussage, kommt die Approximationstheorie zum Zuge, die von A. Roth eigens zu diesem Zweck entwickelt worden ist. Ähnlich war übrigens auch für Arakeljan das Motiv zur Entwicklung seiner Sätze; mit ihrer Hilfe wurde die Untersuchung des sog. Umkehrproblems der Nevanlinna-Theorie wesentlich vorangebracht.

6 Abschließende Bemerkungen

Unser Überblick hat sich auf die theoretischen Aspekte der Approximation im Komplexen beschränkt. Dieses Material ist ausführlich im Buch des Referenten [2] dargestellt; dort hätte ein weitergehendes Literaturstudium einzusetzen. Wer sich näher für *konstruktive Gesichtspunkte* interessiert, mag etwa die neueren Arbeiten von Ellacott [1], Gutknecht [4] und Trefethen [7] konsultieren; dort finden sich auch Hinweise auf weitere Literatur. Bei der Approximation auf *Riemannschen Flächen* lassen sich manche Ergebnisse übertragen, doch zeigen sich auch gewisse interessante Unterschiede zu den Verhältnissen in $\mathbf{C}$; siehe Gauthier-Hengartner [3] und Scheinberg [6].

Literatur

[1] E l l a c o t t , S. W.: Computation of Faber series with application to numerical polynomial approximation in the complex plane. Math. Comp. **40** (1983), 575–587
[2] G a i e r , D.: Vorlesungen über Approximation im Komplexen. Basel: Birkhäuser 1980
[3] G a u t h i e r , P. M.; H e n g a r t n e r , W.: Approximation uniforme qualitative sur des ensembles non bornés. Montréal: Les presses de l'Université 1982
[4] G u t k n e c h t , M. H.: On complex rational approximation. Parts I and II. Computational aspects of complex analysis (Proc. Conf. Braunlage, 1982), 79–132. Dordrecht: Reidel Publ. Comp. 1983
[5] K o r e v a a r , J.: Polynomial and rational approximation in the complex domain. Aspects of contemporary complex analysis (Proc. Conf. Durham, 1979), 251–292. New York: Academic Press 1980
[6] S c h e i n b e r g , S.: Approximation and non-approximation on Riemann surfaces. Complex approximation (Proc. Conf. Quebec, 1978), 110–118. Boston: Birkhäuser 1980. = Progress in Math. 4
[7] T r e f e t h e n , L. N.: Chebyshev approximation on the unit disk. Computational aspects of complex analysis (Proc. Conf. Braunlage, 1982), 309–323. Dordrecht: Reidel Publ. Comp. 1983

Prof. Dr. D. Gaier
Mathematisches Institut der Universität
Arndtstraße 2
6300 Gießen

(*Eingegangen: 13. 12. 1983*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein
86 (1984) 160–165

Othmar Baier zum Gedenken

O. Giering, München[1])

Am 2. April 1980 verstarb im 75. Lebensjahr Dr. d. techn. Wiss. Othmar Baier, em. o. Professor der Geometrie an der Technischen Universität München. Mit ihm verlor die Mathematik einen Repräsentanten der anschaulichen Geometrie und die Technik einen Mitwegbereiter des NSU-Wankel-Motors.

Othmar Baier wurde am 16. November 1905 in Augsburg geboren. Er entstammte von Seiten beider Eltern in der dritten Generation einem Lehrergeschlecht. Sein Vater war Richard Baier, damals Studienprofessor in Augsburg; seine Mutter war Paula Baier, geb. Krämer. Er legte 1924 an der Oberrealschule in Augsburg mit hervorragendem Erfolg die Reifeprüfung ab und begann im Sommersemester desselben Jahres – obwohl auch zu humanistischen Studienrichtungen neigend – das Studium der Mathematik und Physik an der Universität und der Technischen Hochschule in München. Baier hat beide Fächer durchaus gleichberechtigt studiert. Nach Ablegung der 1. Staatsprüfung im Frühjahr 1928 war sein Berufsziel, Physi-

[1]) Lebensdaten und andere Details über O. Baier haben freundlicherweise dessen Sohn Ulrich Baier sowie Prof. Dr. Dr. h. c. Walther Baier (der Bruder von Othmar Baier) zur Verfügung gestellt.

ker zu werden. Er erwog längere Zeit, in Experimentalphysik bei W. Wien oder in theoretischer Physik bei A. Sommerfeld zu promovieren; beide Wege standen ihm offen. Aus Gründen der beruflichen Sicherung gab er 1929 zunächst der 2. Staatsprüfung den Vorzug und promovierte schließlich 1931 bei S. Finsterwalder mit einer Arbeit über die Flächen, auf welchen die Darbouxschen Linien Dreiecksnetze bilden (siehe [1]). Finsterwalders mathematische Arbeit „galt immer denjenigen Problemen und Gebieten der Mathematik, wo nicht das Formale und der Kalkül, sondern das im geometrischen Sinne Anschauliche im Vordergrund stand".[2]) Diese Haltung Finsterwalders fiel bei Baier auf fruchtbaren Boden. Er hat sie zeit seines Lebens zu seiner eigenen gemacht und in Vorlesungen, Arbeiten und Diskussionen stets vertreten. In O. Perron, bei dem Baier an der Universität München hörte, findet man eine zweite Wurzel für Baiers Geometrie-Verständnis. Perron setzte als Motto über eine seiner Arbeiten[3]) „Es gibt ausgezeichnete Bücher über die ‚Grundlagen der Geometrie', nur ist der Titel falsch. Denn die einzige Grundlage der Geometrie, das heißt das, was aller Geometrie z u G r u n d e l i e g t, ist die Anschauung". Auch diese Auffassung hat Baier – mit Hinweis auf Perron – später immer wieder vertreten.

Die Jahre 1931 bis 1937 waren für Baier Assistentenjahre an den Technischen Hochschulen in München und (im Wintersemester 1931/32) in Karlsruhe. In dieser Zeit entstanden die Arbeiten [2]–[6], zunächst gemeinsam mit R. Sauer die Arbeit [2] über Dreiecksnetze aus Kegelschnitten. In seinen letzten Lebensjahren hat Baier dieses Thema wieder aufgegriffen. Gesprächsweise erwähnte er hübsche Beispiele, die er noch fand; eine weitere Publikation über diesen Gegenstand ist jedoch nicht mehr entstanden. In [3] gab Baier einen geometrischen Beweis des folgenden Satzes von Beltrami-Enneper: Die Windungen der durch einen Flächenpunkt P gehenden Asymptotenlinien sind in P entgegengesetzt gleich; ihr Betrag ist gleich der Wurzel aus der negativ genommenen Gauß-Krümmung in P. Dieser Satz läßt sich als Satz über das lineare Streckungsverhältnis einer Asymptotenlinie bei sphärischer Abbildung aussprechen und in dieser Form überraschend leicht gewinnen. Der Beweis entstand aus Baiers Bedürfnis heraus, geometrische Aussagen „möglichst anschaulich und mit einfachen Hilfsmitteln zur Evidenz zu bringen".[4]) In [4] zeigt sich erstmals die kinematisch-technische Komponente Baiers, die er später besonders gepflegt hat. Baier beschreibt in dieser Arbeit eine darstellend-geometrische Konstruktion zur Ermittlung eines Fräsers, der eine gegebene Schraubfläche erzeugt. Baier war in seiner Wissenschaft kein Systematiker. Es waren Einzelprobleme, die ihn anzogen und für die er elementare, konstruktive und möglichst anschauliche Lösungen suchte. Dies gilt auch für seine Habilitationsschrift [5], in der er sich die Aufgabe stellte, eine räumliche Konstruktion zu finden, welche die allgemeinen quadratischen Abbildungen zweier Ebenen

---

[2]) Zitat aus R. Sauer: Sebastian Finsterwalder †. Nachr. d. Österr. Math. Ges. (1952) S. 30.

[3]) O. Perron: Miszellen zur hyperbolischen Geometrie. S.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., Abt. II (1965) 157–176.

[4]) Dieses Zitat stammt aus [9], wo der Meusniersche Satz mit sehr anschaulichen Hilfsmitteln bewiesen wird. Insbesondere die Arbeiten [4] [8] [9] [10] [12] zeigen dasselbe methodische Vorgehen.

erzeugt und frühere Konstruktionen (etwa aus [2]) als Sonderfälle umfaßt. Baier habilitierte 1934 an der Technischen Hochschule München; von 1935 bis 1937 war er Dozent dieser Hochschule.

Noch im Jahr 1937 übernahm Baier an der Technischen Hochschule Stuttgart zunächst vertretungsweise den Lehrstuhl für Darstellende Geometrie und Angewandte Mathematik. Ein Jahr später heiratete er Dr. phil. Erna Zurl. Seine Gattin war Lehrerin, hatte in Mathematik promoviert und war bis zur Eheschließung an mehreren Schulen tätig. Den Ehegatten waren nicht nur fachliche Interessen, sondern auch eine entschiedene Oppositionshaltung zum Nationalsozialismus und eine bewußt religiöse Einstellung gemeinsam. Jeden Sonn- und Festtag und auch zu anderen Anlässen spielte Baier die Orgel in der katholischen Kirchengemeinde in Fellbach, wo die Familie bis 1952 wohnte. Während der Stuttgarter Zeit kam es jede Woche zu einem Kammermusikabend, bei dem Baier die Bratsche spielte. Einige Mitglieder der Stuttgarter Besetzung kamen später gelegentlich nach München, um mit ihm alte Stücke wieder zu spielen. Dem Ehepaar Baier wurden zwei Söhne und zwei Töchter geboren. Jedem seiner Kinder schenkte Baier jährlich zweckgebunden 100,– DM, die sie für Notfälle anderer einzusetzen hatten. Er spendete gern für Notleidende, war aber an sich äußerst sparsam. Geselligkeit und ähnliche Aktivitäten überließ er eher seiner Frau. Er liebte die Beschaulichkeit von Haus und Heim. Er empfand keine besondere Reiselust, abgesehen von kürzeren Fahrten in die Nachbarländer, besonders nach Italien. Wohl aber fuhr er mit seinen Kindern durch Süddeutschland, wo er in Bayern, Franken und Schwaben bei nahezu jeder Kirche Altarbilder, Maler, Stukkateure und Baumeister kannte. Er hatte ein ausgeprägtes ästhetisches Empfinden, das nicht nur in Musik und Architektur, sondern auch bei der Gestaltung von Übungs- und Prüfungsaufgaben zu seinen Vorlesungen über Darstellende Geometrie zum Ausdruck kam. Mancher seiner Assistenten wird sich an die Vielzahl umfangreicher Aufgaben zur Darstellenden Geometrie einschließlich Perspektive und Photogrammetrie erinnern, die immer wieder neu entworfen, abgeändert, öfter mit zahlreichen Details ausgeschmückt und einwandfrei in Tusche ausgeführt werden mußten. Mit dieser Bemerkung wende ich mich wieder der beruflichen Laufbahn Baiers zu.

Baier wurde 1945 außerordentlicher, 1952 ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Er war Inhaber des Lehrstuhls für Darstellende Geometrie und Angewandte Mathematik. Als solcher hielt er regelmäßig die Standardvorlesungen über Darstellende Geometrie für Ingenieur- und Mathematikstudenten sowie eine Standardvorlesung über graphische und numerische Methoden, gelegentlich auch Vorlesungen über Elementargeometrie, nichteuklidische Geometrie und Nomographie. In diese Zeit fallen die Arbeiten [7] bis [16]. Die einfache Herleitung der Hurwitzschen Bedingungen über die Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten in [11] kann zusammen mit der Vorlesung „Graphische und numerische Methoden" gesehen werden, und die Betrachtungen in [15] über die Konstruktion von Parallelen mit Hilfe eines Lineals und ortsfester rechter Winkel tangieren Baiers Vorlesung über Elementargeometrie. Die Arbeiten [13] und [14] sind der Geometrie der Verzahnungen gewidmet, und [16] ist der Abdruck eines Vortrags über die Kinematik der Drehkolben- und Kreiskolbenmaschinen und ihre Fertigungsmöglichkeiten. Diese Schrift entstand aus der intensiven Mitarbeit Baiers an der Entwicklung des NSU-Wankel-Motors; auch die Patente [22] bis [24] geben über den nicht geringen Anteil Baiers Aufschluß. Zu F. Wankel entstand aus den zunächst fachlichen Beziehungen eine aufrichtige und durch gegenseitige Besuche gepflegte Verbundenheit.

Im Jahr 1960 folgte Baier einem Ruf an die Technische Hochschule München. Als Nachfolger von F. Löbell übernahm er das Institut für Geometrie und leitete es bis zu seiner Emeritierung (1971). In diesen Jahren hat Baier noch die Noten [17] und [18] verfaßt; 1974 schrieb er (zusammen mit W. Vinzenz) seine letzte Arbeit [19], die hübsche, elementare Beweise eines Satzes von S. Finsterwalder enthält und diesen Satz mit allgemeinen Sätzen der Raumgeometrie verknüpft. Auch an der TH München hielt Baier die Standardvorlesungen über Darstellende Geometrie für Ingenieur- und Mathematikstudenten, zeitweise auch für Architekten; „Kinematik" war eine seiner Spezialvorlesungen. Der Brückenschlag zwischen Mathematik und Ingenieurwissenschaften war ihm ein besonderes Anliegen. Davon zeugen auch die unter Baier in München entstandenen Dissertationen. 1966 wurde er in die Bayerische Kommission für die internationale Erdmessung berufen. Im April 1973 verlor Baier seine Gattin. Er hat unter dem Tod seiner Lebensgefährtin bis zu seinem eigenen Tod, dem er gefaßt entgegensah, außerordentlich gelitten.

Ich schließe mit einem Zitat aus einem an mich gerichteten Brief von Herrn W. Baier[1]). In der Schilderung des Arbeits- und Studierzimmers seines verstorbenen Bruders Othmar schreibt er: „Im Zentrum übermäßig gefüllter Regale die Totenmaske von Pascal! Sie und die Werke von Kardinal Newman könnten wohl als Angelpunkt einer weiteren Orientierung durch die im ganzen doch gut überschaubare Interessenssphäre eines Mannes mit linearem, nie unsicherem Verfolg seiner Lebensziele gelten."

Verzeichnis der Veröffentlichungen von Othmar Baier

Wissenschaftliche Arbeiten

[1] Über die Flächen, auf welchen die Darbouxschen Linien Dreiecksnetze bilden. Diss. TH München 1931, 33 S.

[2] (mit R. Sauer) Über besondere Dreiecksnetze aus Kegelschnitten. Jber. Dt. Math.-Verein. **43** (1933) 153–162

[3] Geometrischer Beweis des Satzes von Beltrami-Enneper über die Windung der Asymptotenlinien. S.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Abt. (1934) 83–86

[4] Konstruktion eines Fräsers, der eine gegebene Schraubenfläche erzeugt. Z. angew. Math. u. Mech. **14** (1934) 248–250

[5] Zur Theorie der allgemeinen ebenen quadratischen Abbildungen. Math. Ann. **112** (1936) 630–651. (Habilitationsschrift)

[6] Zwei Beispiele zur Annäherung von Kurven. Z. math. naturw. Unterricht **68** (1937) 312–313

[7] Ein Approximationsproblem. Math. Z. **44** (1938) 293–305

[8] Elementarer Beweis der Dreiecksungleichung in der Poincaréschen Halbebene. Math. Z. **48** (1942) 527–529

[1]) Siehe Fußnote 1, S. 160.

[9] Zum Meusnierschen Satz. Math. Z. **49** (1943) 148–150
[10] Ein Satz über Eibereiche mit polygonalem Schatten. Jber. Dt. Math.-Verein. **53** (1943) *38–40*
[11] Die Hurwitzschen Bedingungen. Z. angew. Math. u. Mech. 28 (1948) 153–157
[12] Eine geometrische Ableitung des Gauß-Bonnetschen Integralsatzes. Arch. Math. **2** (1950) 105–109
[13] Zur Geometrie der Verzahnungen. Jahrb. dt. Ges. f. Chronometrie **1** (1952) 22–26
[14] Über die Abstandsempfindlichkeit ebener Verzahnungen. Konstruktion **5** (1953) 242–245
[15] Über die Konstruktion von Parallelen mit Hilfe des Lineals und ortsfester rechter Winkel. Math. Z. **71** (1959) 94–98
[16] Die Kinematik der Dreh- und Kreiskolbenmaschinen und ihre Fertigungsmöglichkeiten. VDI-Ber. Nr. 45 (1960) 31–37
[17] Ein Beweis des Pascalschen Satzes. Elem. Math. **19** (1964) 111–112
[18] Zur Rytzschen Achsenkonstruktion. Elem. Math. **22** (1967) 107–108
[19] (mit W. Vinzenz) Der „gefährliche" Ort beim räumlichen Rückwärtseinschnitt. Elem. Math. **29** (1974) 81–84

Nachrufe und Gelegenheitsschriften

[20] (mit A. Lotze) Rudolf Mehmke zum Gedenken. Technische Hochschule Stuttgart, Reden u. Aufsätze, Nr. 19. Stuttgart 1953: W. Kohlhammer, S. 30–40
[21] (mit H. Lenz) Frank Löbell zum Gedenken. Jber. Dt. Math.-Verein. **70** (1967) 1–15
[22] Der Mathematiker und Physiker Pascal. Nachwort zu: Blaise Pascal, Vermächtnis eines großen Herzens. Die kleinen Schriften. Übertragen u. hrsg. von W. Rüttenauer. Leipzig 1938: Dieterichsche Verlagsbuchhandlung Leipzig

Patentschriften[5])

[23] (mit E. Hoeppner) Innenachsige Rotationskolbenmaschine. DBP 961 709, Kl. 14b, Gruppe 1103 (internat. Kl. F 01c). Ausgabe der Patentschrift: 17. 10. 1957
[24] Vorrichtung zum Bearbeiten trochoidenförmiger Läufer und Gegenläufer. DBP 1 012 802, Kl. 49b (internat. Kl. B 23c) Ausgabe der Patentschrift: 2. 1. 1958
[25] Vorrichtung zum Bearbeiten von zylindrischen Läufern mit trochoidenförmigem Querschnitt und deren Gegenläufern. (Zusatz zum Patent 1 012 802) DBP 1 050 149, Kl. 49b (internat. Kl. B 23c). Ausgabe der Patentschrift: 30. 7. 1959

Im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" sind von O. Baier etwa 80 Referate erschienen; zwei Referate erschienen in „Werkstatt und Betrieb".

Liste der bei O. Baier entstandenen Dissertationen

Technische Hochschule Stuttgart

1. Ernst Schwarz (1958): Über Geflechte krummer Flächen. S.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl. (1958) 81–109
2. Hermann Schaal (1958): Über Regelflächen mit ähnlichen Lieschen Schmiegflächen 2. Ordnung und die Spitzen der scheinbaren Umrisse von Regelschraubenflächen bei Parallelprojektion. S.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl. (1959) 111–182
3. Gerhard Jauch (1959): Meridiankonstruktion rotierender Werkzeuge zur Herstellung von Schraubenflächen. Österr. Ing. Arch. **14** (1960) 1–23

[5]) Die Patente [23] bis [25] wurden patentiert für die NSU-Werke AG, Neckarsulm (Württ.) und F. Wankel, Lindau (Bodensee). Erfinder ist O. Baier bzw. O. Baier und E. Hoeppner.

Technische Hochschule München

4. Peter Gmeindl (1962): Konstruktive Verfahren zur Behandlung des Totlagenproblems bei räumlichen Getrieben. Konstruktion **15** (1963) 418–425.
5. Stefan Lange (1967): Untersuchung von Helicon- und Spiroid-Getrieben mit abwickelbaren Schneckenflanken (Evolventenschnecken) nach der Hertzschen und nach der hydrodynamischen Theorie. Diss. TH München 1967, 34 S.
6. Dietrich Schwägerl (1967): Untersuchung von Helicon- und Spiroid-Getrieben mit trapezförmigem Schneckenprofil nach der Hertzschen und nach der hydrodynamischen Theorie. Diss. TH München 1967, 26 S.
7. Hans Dieter Schulz (1970): Untersuchung über Tragfähigkeiten und Verlustleistung von Schneckengetrieben mit trapezförmigem Schneckenprofil und kegeliger Schnecke. Diss. TU München 1970, 71 S.

Prof. Dr. O. Giering
Mathematisches Institut
der Technischen Universität
Arcisstr. 21
8000 München 2

(*Eingegangen: 6. 6. 1984*)

Buchbesprechungen

Comfort, W. W.; Negrepontis, S., Chain Conditions in Topology (Cambridge Tracts in Mathematics **79**), Cambridge University Press 1982, 300 S., £ 22,50

The chain conditions considered here grew out of the "ccc" (countable chain condition), asserting the countability of each system of pairwise disjoint open subsets of the space considered. According to the authors, the ccc was first observed by Cantor (as a property of Euclidean spaces). It was popularized by Souslin's problem (roughly, whether the only ccc ordered space without gaps is the real line), and it arises naturally from measure theory. There are also less obvious connections with Banach space theory. Perhaps the most significant question for later developments was: need the product of two ccc spaces be ccc? The answer was long in coming. Meanwhile this problem led to Shanin's "calibres" and Knaster's "Property (K)"; and these and their generalizations have then been studied for their own sakes. The present monograph gives up-to-date coverage on what is known – and that is a great deal. Many of the results are classical; many are due to the authors and their students. This review can provide only a brief sampling.

The monograph begins with a preparatory chapter on infinitary combinatorics, deriving results of Erdös and Rado neatly from two fundamental theorems. Chapter 2 introduces the main protagonists. The authors say that a space has "calibre (α, β, γ)" if (roughly) every (indexed) collection of α open sets has a subcollection of β sets of which every γ have a common point. The classical case, in which $\alpha = \beta = \gamma$, is abbreviated to "calibre α". If the conclusion is weakened in certain ways one speaks of "compact-calibre" and "precalibre". The "λ-Souslin number" $S_\lambda(X)$ of a space X is the least α such that X has calibre $(\alpha, \lambda, \lambda)$; $S_2(X)$ is the "Souslin number" S(X), a more convenient modification of the usual "cellularity" of X. Calibre $(\omega^+, \omega^+, 2)$ is "property (K)". Some generalized forms of pseudocompactness are also defined. (A few more chain conditions will appear later, in Chapter 6.) The elementary implications between these notions are derived, and it is shown that for many purposes an arbitrary space is equivalent to a compact one, its Gleason compactification.

Chapter 3 studies chain conditions in product spaces and powers, considering not only the usual product topology but also various types of box topology. The typical theorems assert: if all subproducts of "few" factors have a certain property, then so does the full product. Chapter 4 answers a natural question: which classes of infinite cardinals can arise as the class of calibres of a Hausdorff space? Actually it is neater to specify the complementary classes, of non-calibres. The constructions of the necessary spaces employ a generalization of Corson's Σ-products, and enable the authors to improve an earlier result of Shelah by making these spaces completely regular. The characterization of the calibres (or, rather, of the non-calibres) of compact spaces is more delicate, and is studied in Chapter 5.

Chapter 6, on strictly positive measures, is the longest. It begins with an unorthodox (but convenient) definition of strictly positive measure. Kelley's criterion is formulated as "Property (**)"; it is implied by the existence of a strictly positive measure, and implies property (K), which implies the ccc. In the converse direction, for a compact Hausdorff space, (**) implies the existence of a strictly positive measure (even a regular Borel one). The chapter includes a number of remarkable counterexamples, beginning with an accessible treatment (following Fremlin) of Gaifman's celebrated example, here presented as an extremally disconnected compact Hausdorff space which (inter alia) satisfies (K) and ccc but does not have (**), and hence has no strictly positive measure.

Chapter 7 (together with the notes that follow it) includes results showing that the question, whether products of ccc spaces are necessarily ccc, cannot be answered in usual set theory (ZFC); the answer is "no" on CH, "yes" assuming Martin's axiom and the negation of

CH. Chapters 8 and 9 are concerned with compact-calibres and pseudocompactness numbers; the techniques exploit the "types" of ultrafilters on discrete spaces. The tenth, and last, chapter is concerned with elaborations of classical results asserting (roughly) that a continuous function defined on a large product space will often depend on relatively few coordinates. An unexpected consequence is a generalization of a theorem of van der Slot asserting (before generalization) that two compact subsets of $\mathbf{R}^\alpha$ (with α uncountable) are homeomorphic if and only if their complements are homeomorphic – which contrasts sharply with the situation when $\alpha = \omega$.

The book concludes with an Appendix, giving a brief survey of the main background results in set theory, cardinal arithmetic, topology, Boolean algebra and measure theory, that are taken for granted in the body of the work. This is a very useful feature, though this method of organization does sometimes lead to a concept or symbol appearing in the main text before it has been defined. Since there is a good index, and a good list of symbols, this causes the reader little trouble. There is also an extensive list of references.

Nearly all the results are given full proofs, expressed in symbols rather than words; this makes the arguments, and the statements of the theorems, brisk, unambiguous and unperspicuous. But the authors' comments before and between proofs make the direction and motivation clear. Many open questions are listed throughout. The chapters end with notes supplying historical information and mentioning related results and applications. Though the multiplicity of results can hardly help being somewhat confusing, the situation is mitigated by a table (p. 68) and a diagram of implications (pp. 199, 200).

This monograph will be a valuable reference for all mathematicians interested in the general area it touches, and indispensable for specialists.

Rochester, NY — A. H. Stone

Ziegler, H. J. W., Vector-valued Nevanlinna Theory (Research Notes in Math. 73), Boston – London – Melbourne: Pitman 1982, 201 S., £ 9.95

In diesem Buch legt der Autor eine Darstellung seiner Theorie der meromorphen Kurven $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ mit f_j meromorph in $\mathbf{C}$ vor, die sich grundlegend von der Theorie der meromorphen Kurven im Sinne von Weyl-Ahlfors und deren Verallgemeinerungen unterscheidet. In enger Anlehnung an die von R. Nevanlinna geschaffene Theorie der meromorphen Funktion, die man für $n = 1$ in der hier vorgelegten Theorie wiederfindet, werden die Lösungen der Gleichung $f(z) = a$ für $a \in \mathbf{C}^n$ betrachtet. f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m genau dann, wenn jede Funktion f_j in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m_j hat und $m = \min m_j$ ist. Nach dieser Definition lassen sich nun leicht die Anzahlfunktion der a-Stellen von f und ebenso die Schmiegungsfunktion erklären. Aus einer Verallgemeinerung der Poisson-Jensen-Formel erhält man dann den 1. Hauptsatz dieser Theorie, der für $n > 1$ allerdings einen Zusatzterm aufweist. Eine geometrische Interpretation dieses Terms sowie viele Analogien des „elementaren Teils" der Nevanlinna-Theorie sind Gegenstand der ersten vier Kapitel dieses Buches. Die ausführlich durchgeführten Beispiele erleichtern dem Leser den Umgang mit dieser Verallgemeinerung der Theorie der meromorphen Funktionen sehr. Im fünften Abschnitt wird der 2. Hauptsatz der Werteverteilungstheorie und die daraus resultierende Defektrelation auf den vorliegenden Sachverhalt übertragen. Wie schon beim 1. Hauptsatz tritt für $n > 1$ ein Zusatzterm auf, der geometrisch mit Hilfe der Gaußschen Krümmung gedeutet wird und zu neuen Größen, den „Ricci-Index" und „volume deficiency" (aus dem 1. Hauptsatz), in der Defektrelation führt. Beispiele und Analogien zur Nevanlinna-Theorie runden dieses Kapitel ab. Nicht nur das Auftreten neuer Terme in den beiden Hauptsätzen wirft eine Reihe interessanter Fragen auf.

Das Buch ist gut lesbar geschrieben und setzt als Vorkenntnisse einen Kurs über Funktionentheorie voraus. Die notwendigen Hilfsmittel aus der Theorie der Mannigfaltigkeiten und der Differentialgeometrie des komplexen projektiven Raumes sind in einem Anhang aufgeführt. Zum besseren Verständnis der Ideen des Verfassers kann die Kenntnis der Grundlagen der Nevanlinna-Theorie nur nützlich sein.

Dortmund G. Frank

Dwork, B., Lectures on p-adic Differential Equations (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 253), New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1982, 310 S., DM 118,–

In diesem Buch werden nicht, wie man nach dem etwas unglücklich gewählten Titel annehmen könnte, allgemeine Methoden zur Behandlung p-adischer Differentialgleichungen dargestellt. Lediglich in der Einleitung findet man einen kurzgefaßten Bericht über in den letzten Jahren erzielte Ergebnisse allgemeiner Natur. Es werden vielmehr fast ausschließlich p-adische Eigenschaften der Lösungen y(x) der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [c(1-x) + (c-1-a-b)x]\frac{dy}{dx} - aby = 0$$

für rationale, p-ganze Parameter a, b, c studiert, indem die zugehörige sogenannte Frobeniusstruktur konstruiert wird. Das Buch wendet sich in erster Linie an Leser, die an zahlentheoretischen Fragen und insbesondere an Problemen der arithmetischen Algebraischen Geometrie interessiert sind.

Die subtile Methode, die ausführlich geschildert wird, gründet sich darauf, daß die hypergeometrische Funktion

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}, \qquad (a)_n := \prod_{i=0}^{n-1}(a+i),$$

als Periode eines Differentials auf der algebraischen Kurve zum Funktionenkörper $\mathbb{Q}(x, x^{b-1}(1-x)^{c-b}(1-\lambda x)^{-a})$ aufgefaßt werden kann. Wenn man modulo einer Primzahl p reduziert, induziert die Frobeniusabbildung eine Transformation dieses Differentials in ein Differential einer zugehörigen Kurve. Liftet man die Frobeniusabbildung zu einer Transformation über einem Körper der Charakteristik 0, wozu man p-adische Grenzwerte benötigt, erhält man eine Abbildung zwischen Perioden. Diese wird durch eine 2 x 2-Matrix $B(\lambda)$ beschrieben, welche die Eigenschaft hat, daß Lösungen (u_1, u_2) des Gleichungssystems $L_{a',b',c'}$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(u_1, u_2) = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} -\dfrac{c'}{\lambda} & \dfrac{c'-a'}{1-\lambda} \\ \dfrac{c'-b'}{\lambda} & \dfrac{a'+b'-c'}{1-\lambda} \end{pmatrix}$$

im Punkt λ_0^p abgebildet werden auf Lösungen des Gleichungssystems $L_{a,b,c}$ im Punkt λ_0 durch

$$(u_1, u_2) \to (u_1, u_2)(\lambda^p) \cdot B(\lambda).$$

Dabei ist a′ (und entsprechend b′, c′) wie folgt bestimmt: $a' = \dfrac{a-a_0}{p}$ und a_0 ist der kleinste positive Rest von a_0 modulo p.

Ist (v_1, v_2) eine Lösung des Gleichungssystems $L_{a,b,c}$, so ist v_1 (bzw. v_2) eine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung von F(a, b, c + 1; x) (bzw. von F(a, b, c; x)), wie man durch leichte Rechnung bestätigen kann.

Indem man einen Galoisautomorphismus auf die Koeffizienten von u_1, u_2 anwendet, erhält man eine semi-lineare Transformation des Lösungsraums von $L_{a',b',c'}$ im Punkt λ_0 in den Lösungsraum von $L_{a,b,c}$ im selben Punkt λ_0. Durch Iteration erhält man, da die Abbildung $a \to a'$ endliche Ordnung hat, eine semi-lineare Transformation des Lösungsraums von $L_{a,b,c}$ im Punkt λ_0 in sich. Der Hauptgegenstand der Untersuchung sind die Eigenvektoren dieses Operators.

Man kann auf diese Weise die bemerkenswerte und verblüffende Eigenschaft nachweisen, daß $F(a, b, c; x)/F(a, b, c; x^p)$ für genügend allgemein gewählte Werte a, b, c analytisch fortgesetzt werden kann auf das Komplement von endlich vielen Restklassen.

Dies kann man als Starrheitseigenschaft für die lokalen Lösungen einer linearen Differentialgleichung ansehen. Die Bedeutung dieses Resultats wird man erkennen, wenn man sich bewußt macht, daß das im klassischen Fall zur Verfügung stehende Kreiskettenverfahren zur analytischen Fortsetzung lokaler Lösungen im p-adischen nicht vorhanden ist.

Das Buch enthält eine Fülle von bedeutenden Ergebnissen in einer Theorie, die noch ziemlich am Anfang steht und in der durch den Autor der Weg zu neuen Gestaden gewiesen wurde. Obwohl zumeist durch direkte und weitgehend elementare Rechnung vorangeschritten wird, ist es nicht ganz leicht zu lesen. Es eignet sich nicht für denjenigen, der sich schnell einen Eindruck von dieser Theorie verschaffen will. Nachdrücklich kann man es jedem Leser empfehlen, der sich in einer größeren Anstrengung in dieses neue Forschungsgebiet einarbeiten möchte.

Bedauerlich ist es meines Erachtens, daß der Autor zu oft darauf verzichtet hat, ausreichende Hilfen zur allgemeinen Orientierung für den noch nicht versierten Leser zu geben. Nicht selten werden Zusammenhänge oder Querverbindungen nur in einer Abschnittsüberschrift angedeutet. Der begrüßenswerte Vorsatz, stets möglichst konkret, explizit und elementar zu argumentieren, führt dazu, daß abstraktere Begriffsbildungen und Zusammenhänge nicht genügend berücksichtigt werden. Diese Darstellungsmethode bringt den Vorteil mit sich, daß der Text für den Anfänger noch verständlich und auch für den Kenner interessant ist. Wenn man zu einem tieferen Verständnis kommen möchte, wird man ohne zusätzliches Studium der Originalarbeiten aber nicht auskommen.

Bochum L. Gerritzen

Stevens, G., Arithmetic on modular curves (Progress in Math. 20), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1982, 214 S., DM 42,–

Der Birkhäuser-Verlag bezeichnet seine neu gegründete Reihe „Progress in Mathematics" als „A collection of research-oriented monographs, reports, notes" und nennt als Ziel der Reihe „Reporting research developments combining original results with an expository treatment of the particular subject area". Dieser Zielsetzung entspricht die vorliegende Monographie ziemlich genau. Ihr Grundthema ist der Zusammenhang zwischen der Arithmetik abelscher Varietäten und gewissen speziellen Werten von L-Funktionen etwa im Sinne des Ausspruchs von Hecke, „daß die genaue Kenntnis des Verhaltens einer analytischen Funktion in der Nähe ihrer singulären Stellen eine Quelle von arithmetischen Sätzen ist". In dem Buch von Stevens kommt allerdings hauptsächlich der mehr analytische Aspekt der speziellen Werte zum Zuge, während die arithmetischen Implikationen vorwiegend der Motivation zur Beschäftigung mit speziellen Werten dienen. Als wohl schlagendstes Beispiel für den genannten Zusammenhang führt der Autor die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer für elliptische Kurven und deren Verallgemeinerung auf beliebige abelsche Varietäten durch Tate an.

Ausgangspunkt der Monographie ist eine fundamentale Arbeit von Mazur [1] über den „algebraischen Teil" $\Lambda_f(\chi)$ des speziellen Wertes $L(f, \chi, 1)$ der L-Funktion $L(f, \chi, s)$ zu einer Neuform f vom Gewicht 2 für die Kongruenzgruppe $\Gamma_0(N)$ der Primzahlstufe N mit dem Twist durch einen nichttrivialen primitiven Dirichletcharakter χ vom zu N primen Führer m. Mazur leitet für $\Lambda_f(\chi)$ Kongruenzrelationen her und beweist dann mit Hilfe eines „descent"-Arguments ein in Richtung auf die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer gehendes arithmetisches Resultat. Die Kongruenzrelationen und das „descent"-Argument konnten von Kamienny und Stevens auf die Kongruenzgruppe $\Gamma_1(N)$ der Primzahlstufe N ausgedehnt werden.

In dem vorliegenden Buch gelingt nun die Übertragung von Mazurs Kongruenzformeln auf sog. Kongruenzgruppen $\Gamma \subset SL_2(\mathbf{Z})$ *vom Typ* (N_1, N_2) und zur Stufe $N = $ g. g. T. (N_1, N_2) mit natürlichen Zahlen N_1 und N_2. Die Kongruenzgruppen Γ sind in gewissem Sinne als Verallgemeinerungen der Gruppen $\Gamma_0(N)$ und $\Gamma_1(N)$ anzusehen und führen auf die Modulkurven $X = X(\Gamma)$ zu Γ anstelle der bekannten Modulkurven $X_0(N)$ und $X_1(N)$ zu $\Gamma_0(N)$ bzw. $\Gamma_1(N)$. Für Γ besteht die entsprechende Zerlegung des $\mathbf{C}$-Vektorraumes der Modulformen vom Gewicht 2

$$\mathfrak{M}_2(\Gamma) = \mathfrak{E}_2(\Gamma) \oplus \mathfrak{S}_2(\Gamma)$$

in die Vektorräume der Eisensteinreihen bzw. Spitzenformen vom Gewicht 2. Für eine parabolische Eigenform $f \in \mathfrak{S}_2(\Gamma)$ und eine als Eigenfunktion von Heckeoperatoren gegebene Eisensteinreihe $E \in \mathfrak{E}_2(\Gamma)$ der Signatur (ϵ_1, ϵ_2) mit Dirichletcharakteren $\epsilon_1, \epsilon_2 : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ der Führer N_1, N_2 wird nun unter gewissen Voraussetzungen eine Kongruenzbeziehung zwischen den „algebraischen Teilen" $\Lambda_f(\chi)$ und $\Lambda_E(\chi)$ (s. S. 117) der speziellen Werte bei $s = 1$ der durch einen nichttrivialen primitiven Dirichletcharakter $\chi : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ vom zu N primen Führer m getwisteten L-Funktionen $L(f, \chi, s)$ und $L(E, \chi, s)$ hergeleitet (Theorem 4.2.3). Der algebraische Wert $\Lambda_E(\chi)$ steht dann seinerseits bis auf eine Periode $\Omega_E \in \mathbf{C}^*$ von E in Kongruenz zu dem als cap-Produkt des „universellen speziellen Wertes" $\Lambda(\chi) \in H_1(X, \mathbf{Z}[\chi])$ mit der Kohomologieklasse $\varphi_E \in H^1(X, A(E))$ gebildeten Element $\Lambda(\varphi_E, \chi) = \varphi_E \cap \Lambda(\chi)$ des $\mathbf{Z}[\chi]$-Moduls $A(E)[\chi]$ über dem durch die Perioden von E gegebenen $\mathbf{Z}$-Modul $A(E)$ (Theorem 3.1.2 und S. 117). Der Ausdruck $\Lambda(\varphi_E, \chi)$ schließlich ist im wesentlichen kongruent zum Produkt

$$-\chi(N_1)\,\bar{\chi}(N_2)\,\epsilon_1(m)\,B_1(\bar{\epsilon}_1\bar{\chi})\,B_1(\epsilon_2\chi)$$

aus Charakterwerten und verallgemeinerten Bernoullizahlen (Corollary 3.4.3). Auf diese Weise kommt die angestrebte Verallgemeinerung der Mazurschen Kongruenzen zustande. Dabei gelingt übrigens nicht die volle Verallgemeinerung der Resultate Mazurs. So bleibt z. B. offen (§ 4.1), ob das Eisensteinideal I(E) zu $E \in \mathfrak{E}_2(\Gamma)$ der volle Annullator der E vermöge der konstanten Terme der Fourierentwicklungen von E an den Spitzen von Γ zugeordneten Spitzengruppe C_E ist (§ 1.8). Hingegen läßt sich die von Mazur und Swinnerton-Dyer [2] für $\Gamma_0(N)$ vermittels p-adischer Maße durchgeführte Konstruktion p-adischer L-Funktionen auf die betrachteten KongruenzgruppemΓ ausdehnen (§ 5). Dazu wählt man geeignete p-adische Dirichletcharaktere $\epsilon_1, \epsilon_2, \chi : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}_p$ der Führer N_1, N_2, m mit g. g. T. $(m, N) = 1$ und die durch einen festen Isomorphismus $\kappa : \mathbf{C} \to \mathbf{C}_p$ auf die Komplettierung des algebraischen Abschlusses $\overline{\mathbf{Q}}_p$ gegebenen zugehörigen komplexen Charaktere $\epsilon_{1,\infty} = \kappa^{-1} \circ \epsilon_1$, $\epsilon_{2,\infty} = \kappa^{-1} \circ \epsilon_2$, $\chi_\infty = \kappa^{-1} \circ \chi : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$, definiert zu $f \in \mathfrak{S}_2(\Gamma)$ und $E \in \mathfrak{E}_2(\Gamma)$ mit Signatur $(\epsilon_{1,\infty}, \epsilon_{2,\infty})$ die durch χ getwisteten p-adischen L-Funktionen $L_p(f, \chi, s)$ und $L_p(E, \chi, s)$ und beweist zwischen ihnen in Verallgemeinerung von [2] unter gewissen Bedingungen eine Kongruenzbeziehung (Corollary 5.6.8 und S. 150 unten). Da $L_p(E, \chi, s)$ das Produkt zweier Kubota-Leopoldtscher p-adischer L-Funktionen $L_p(\bar{\epsilon}_1\chi\omega, 1-s)$ und $L_p(\epsilon_2\bar{\chi}\omega, s-1)$, gebildet mit dem Teichmüllercharakter ω, ist (S. 150), vererbt sich diese Eigenschaft durch die Kongruenz auf $L_p(f, \chi, s)$. Entsprechendes gilt ebenso für die Tatsache, daß der spezielle Wert $L_p(E, \chi, 1)$ analog zum komplexen Falle das Produkt von Charakterwerten und verallgemeinerten Bernoullizahlen ist (Example 5.4.3). Der Isomorphismus κ setzt übrigens bei $s = 1$ auch die p-adische L-Funktion $L_p(f, \chi, s)$ zur komplexen $L(f, \bar{\chi}_\infty, s)$ in Beziehung (Theorem 5.3.3). Das Buch schließt (§ 6) mit Tabellen der speziellen Werte $\Lambda_f(\chi)$ für einige Kongruenzgruppen $\Gamma_0(N)$ und $\Gamma_1(13)$.

Diese ausführliche Darlegung der Gedankenführung der Monographie ist für den Leser sicher nützlich, geht sie doch trotz in der Einleitung gegebener Inhaltsübersicht und der jedem Paragraphen vorangestellten Zusammenfassungen nicht so ohne weiteres daraus hervor. Überspitzt ausgedrückt ist das Buch nämlich eine äußerst knapp gefaßte Aneinanderreihung aufeinander bezogener Einzeltatsachen, deren Zusammensetzung und Interpretation weitgehend dem Leser überlassen bleiben. Diese Darstellungsart ermöglicht einen sehr eleganten Stil und hat durchaus auch sonst ihre Meriten, indem sie z. B. die Übersicht über den sehr klar in Satz/Definition/

Bemerkung gegliederten Stoff erleichtert, aber sie erschwert doch auch das Lesen beträchtlich, zumal die Voraussetzungen oft nicht klar aufgeführt, die Bezeichnungen stellenweise zu spät oder gar nicht erklärt werden (wie etwa beim cap-Produkt in Definition 1.6.4, dessen Name nicht einmal fällt), Rückverweise manchmal fehlen und kein Index vorhanden ist. Die Beweise zu den Sätzen werden großenteils ausgeführt (für Theorem 1.8.2 sogar zwei), teilweise jedoch auch durch Literaturhinweise ersetzt. Dabei stellt das Buch von Shimura [3] die Hauptreferenz dar. Die Grundideen entstammen allerdings – wie bereits erwähnt – der Arbeit von Mazur [1]. (Der Leser tut überhaupt gut daran, sich an [1] zu orientieren.) Wichtig für den p-adischen Teil der Monographie ist dann noch die Arbeit von Mazur und Swinnerton-Dyer [2]. Ansonsten ist das Buch bis auf wenige Ausnahmen wie etwa bei der Einführung der $f \in S_2(\Gamma)$ zugeordneten abelschen Varietät $A_f \subset \mathrm{Pic}^0(X)$, wo auf Shimura verwiesen wird (§ 4.1), in sich selbst abgeschlossen.

Das Verdienst des vorliegenden Bandes liegt gewiß darin, den Interessenten an der Arithmetik von Modulkurven schnell und ohne Umschweife an den betrachteten Problemkreis heranzuführen. Zudem kann der Progress-Report als Grundlage für weitere Verallgemeinerungen dienen, als welche etwa die vom Autor antizipierten auf Modulformen höheren Gewichts oder auf Hilbertsche Modulformen genannt seien, wofür es im letzteren Falle wohl auch erste Ansätze von Grunewald und Mennicke gibt. Wünschenswert wäre zudem ein weiterer Ausbau in Richtung auf die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer auf der Grundlage der Arbeit von Mazur [1], wobei sich insbesondere interessante neue Aspekte des Zusammenhangs zwischen dem Wert der L-Funktion bei $s = 1$ und der kanonischen Néron-Tate-Höhe ergeben, wie sie zur Zeit gerade von Gross und Zagier in Verbindung mit Heegnerpunkten auf elliptischen Kurven verfolgt werden.

Es ist eine Kunst für sich, das behandelte Teilgebiet der Arithmetik von Modulkurven mit seinen vielfältigen Methoden und weitreichenden Implikationen in dieser Kürze und Eleganz darzustellen, und darin besteht – bei wohl unvermeidbaren kleineren Schönheitsfehlern – der Reiz der Monographie. (Leider erfordert das kurze Buch jedoch ein langes Referat.)

[1] Mazur, B.: On the arithmetic of special values of L-functions. Inv. Math. **55** (1979), 207–240

[2] Mazur, B.; Swinnerton-Dyer, H. P. F.: Arithmetic of Weil curves. Inv. Math. **25** (1974), 1–16

[3] Shimura, G.: Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions. Princeton Univ. Press 1971

Saarbrücken H. G. Zimmer

Petersson, H., Modulfunktionen und Quadratische Formen (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 100), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, VII + 307 S., DM 168,–

Man kann zunächst sagen: Der Inhalt des 100. Bandes in der Reihe „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" besteht in der eingehenden Darstellung und Erläuterung derjenigen Methoden und Resultate aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, welche die explizite Berechnung der Darstellungsanzahlen natürlicher Zahlen durch positive ganzzahlige quadratische Formen betreffen.

Zu jeder solchen quadratischen Form gehört eine Thetafunktion, in deren Fourierreihe die gesuchten Anzahlen als Koeffizienten auftreten. Diese Funktion erweist sich als eine ganze Modulform f zu einer Kongruenzgruppe Γ in der elliptischen Modulgruppe, von einem Grad $-r$ und mit einem Multiplikatorsystem v. Ein klassisches Reduktionstheorem erlaubt es, f mit Hilfe geeigneter Eisensteinreihen (zu Γ, $-r$ und v) linear auf eine ganze Spitzenform φ zurückzuführen, wonach in jedem konkreten Fall ein Vergleich der Fourierkoeffizienten die gewünschte Anzahlformel liefert. Das einfachste Beispiel hierzu ist die berühmte Formel von C. G. J. Jacobi für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl m als eine Summe von 4 Quadraten ganzer Zahlen, als 8-fache Summe der nicht durch 4 teilbaren positiven Teiler von m. Hier verschwindet überdies die erwähnte Spitzenform; der Autor spricht von einer Jacobischen Identität „im engeren Sinne".

Die Herleitung Jacobischer Identitäten erfordert einen hochentwickelten analytischen Apparat, in dem der Einfluß Erich Heckes deutlich bleibt und dessen gegenwärtige Gestalt entscheidend vom Autor geprägt wurde. Davon legt das vorliegende Buch beredtes Zeugnis ab. Hier zeigt sich aber umgekehrt auch, wie außerordentlich umfangreich die konkreten Resultate sind, die sich rein analytisch-mathematisch erzielen lassen.

Die Einzelheiten der benötigten Theorie findet man in Kapitel I, einschließlich des in diesem Zusammenhang unentbehrlichen Riemann-Rochschen Satzes für Modulformen. Die Heckesche Operatorentheorie gehört nicht dazu. Längere Beweise oder solche von grundsätzlicher Bedeutung werden in einem der Anhänge A bis G untergebracht. Diese beanspruchen zusammen mit Kapitel I fast die Hälfte des Buches. Bemerkenswert erscheinen (in § 3) die nachher ständig benutzten Formeln zur Berechnung der Fourierkoeffizienten von Eisensteinreihen über Werte von L-Reihen und Gaußsche Summen.

Mit diesen Mitteln werden sodann in den Kapiteln II bis V viele, zumeist neue Jacobische Identitäten bewiesen. Dies geschieht so erfreulich ausführlich, daß sich alle Schlüsse bis in die Details leicht nachvollziehen lassen. Die behandelten quadratischen Formen sind außer in Kapitel V von gerader Variablenzahl und führen insoweit auf Modulformen eines ganzzahligen Grades. Sie umfassen fortschreitend vom Einfachen zum Schwierigen binäre und quaternäre Formen, Diagonalformen mit oder ohne Kongruenzbedingungen, Vorzeichenfaktoren oder unter Auszeichnung der Primzahlen 2, 3 oder 5. Die Besonderheiten bei der Anwendung der skizzierten Methode werden jeweils deutlich hervorgehoben und kommentiert. Die Formen ungerader Variablenzahl erfordern und erhalten eine eigene Behandlung der verwendeten Eisensteinreihen.

In diesem Teil des Buches steckt ein kaum abzuschätzendes Maß an schierer Rechenarbeit. In jedem behandelten Fall sind einige Eisensteinreihen der betreffenden Formenklasse zu konstruieren und gegebenenfalls eine Basis der Linearschar der zugehörigen Spitzenformen aufzustellen. Für letzteres eignen sich Jacobische Thetafunktionen und ihre Verallgemeinerungen; die vielfältigen Relationen unter ihnen werden sorgfältig registriert.

In den Anhängen sind große Teile der Theorie untergebracht. Das betrifft zunächst ein- und mehrfache Thetareihen, deren Verhalten unter Modulsubstitutionen sich mit einer Methode von Hecke ergibt. Das liefert die Formeln für gewisse Multiplikatoren. Besonders bemerkenswert sind die Anhänge D und E, in denen die Theorie der Riemann-Dedekindschen Funktion η vollständig abgehandelt wird: Deren Multiplikatoren lassen sich nach Untersuchung des Verhaltens von $\log \eta$ wie in Dedekinds „Erläuterungen" durch Dedekindsche Summen und sodann nach Rademacher in der Art explizit beschreiben, wie sie als Formeln in § 4 erscheinen. Daß aber η überhaupt eine Modulform ist, beruht ganz wesentlich auf der Transformationsformel $\eta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i}\,\eta(\tau)$, für die zahlreiche Beweise bekannt sind. Der Autor gibt dafür einen bemerkenswerten neuen Beweis, der den Zusammenhang mit Legendres Relation aus der Theorie der elliptischen Funktionen aufdeckt.

Dieser Ergebnisband ist – zusammenfassend – sowohl ein wertvolles Handbuch als auch eine hohe Schule in der Kunst der klassischen mathematischen Analysis.

Heidelberg K. Wohlfahrt

Mumford, D., Tata Lectures on Theta (Progress in Math. 28), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1983, 235 S., DM 62,–

In dem vorliegenden ersten Band über Thetafunktionen wird die klassische analytische Theorie der Thetafunktionen dargestellt. Im ersten Kapitel werden Thetafunktionen einer Veränderlichen untersucht. Es wird gezeigt, wie man mittels Thetafunktionen elliptische Kurven und Modulmannigfaltigkeiten elliptischer Kurven in projektive Räume einbetten kann und daß die Thetarelationen die Gleichungen dieser algebraischen Kurven beschreiben. Den Thetarelationen wird breiter Raum gewidmet. Schließlich wird im ersten Kapitel noch eine Einführung in die Theorie der elliptischen Modulgruppe, Eisensteinreihen, Heckeoperatoren mit zahlentheoretischen Anwendungen gegeben.

Im zweiten Kapitel werden Thetafunktionen mehrerer Veränderlicher behandelt. Ausgangspunkt ist die Jacobische Varietät einer kompakten Riemannschen Fläche und deren Studium mittels Thetafunktionen. In Lehrbüchern wird diese Theorie meist ohne Thetafunktionen durchgeführt. In jüngster Zeit tritt die Bedeutung der Thetafunktionen – vor allem auch durch die Arbeiten Mumfords – wieder stärker hervor. Der klassische Zugang zur Theorie der kompakten Riemannschen Flächen und ihrer Jacobischen über die Thetafunktionen gewinnt daher neue Aktualität.

Das zweite Kapitel enthält außerdem eine kurze Einführung in die Theorie der symplektischen Modulgruppe und Modulfunktionen. Schließlich werden noch die Riemannschen Thetarelationen und am Ende des Buches auch noch Thetafunktionen mit harmonischen Koeffizienten behandelt.

Das Buch Mumfords stellt eine kurze – selbstverständlich unvollständige – Einführung in die klassische Theorie der Thetafunktionen dar. Es ist eine ausgezeichnete Vorlage für Vorlesungen und Seminare und hat – trotz seines elementaren Charakters – auch Experten auf diesem Gebiet noch einiges zu bieten. Man darf auf die Fortsetzung dieses ausgezeichneten Werkes gespannt sein.

Heidelberg E. Freitag

Mumford, D.; Fogarty J., Geometric Invariant Theory (Ergebnisse der Math. 34), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1982, 220 S., DM 78,–

Im Jahre 1965 erschien D. Mumfords fundamentales Buch „Geometric Invariant Theory". In Zusammenarbeit mit J. Fogarty entstand nun eine zweite erweiterte Ausgabe. In dieser wurde die erste Auflage im wesentlichen unverändert übernommen, neu sind eine ganze Reihe von Anhängen (S. 145–205), in welchen die zwischenzeitliche Entwicklung der Theorie dargelegt wird. Das Buch ist somit ein auf den neuestens Stand gebrachtes Standardwerk der geometrischen Invariantentheorie. Der Wert und die Bedeutung dieses Werkes sind kaum zu überschätzen.

Einiges zum Inhalt: Nach Riemann hängt eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geqslant 2$ von $3g-3$ „Moduln" ab, d. h. es gibt eine $3g-3$-dimensionale (komplexe) „Mannigfaltigkeit" M_g, deren Punkte umkehrbar eindeutig den Isomorphieklassen kompakter Riemannscher Flächen vom Geschlecht g entsprechen. Mumford ist es als erstem gelungen, diese und andere Modulmannigfaltigkeiten durch universelle Eigenschaften zu charakterisieren und ihre Existenz zu beweisen. Mumfords Konstruktionen sind „schematisch", d. h. er benutzt die Sprache der Schemata, darstellbaren Funktoren, . . ., wie sie von Grothendieck geschaffen wurde. Mumford gibt zwei verschiedene Existenzbeweise für das grobe Modulschema M_g, wir wollen uns darauf beschränken, den ersten zu skizzieren, der zweite führt über die „Periodenabbildung", die Existenz von M_g wird zurückgeführt auf die Existenz der feinen Modulschemata abelscher Varietäten mit gewissen Zusatzstrukturen. Jede glatte vollständige algebraische Kurve (= kompakte Riemannsche Fläche im Falle des Grundkörpers **C**) vom Geschlecht $g \geqslant 2$ läßt sich mit einer geeigneten Potenz des kanonischen Bündels in einen projektiven Raum P^N einbetten. Die Gesamtheit dieser Kurven in P^N wird durch ein gewisses Hilbertschema $\mathscr{H}^{(g)}$ parametrisiert, Mumford stützt sich hierbei auf Grothendiecks Theorie des Hilbertschemas, eine schematisch verfeinerte Theorie der „Chowpunkte". Das Modulschema $\mathscr{M}^{(g)}$ wird dann als Quotient

$$\mathscr{M}^{(g)} = \mathscr{H}^{(g)}/G$$

dieses Hilbertschemas nach einer geeigneten projektiven Gruppe konstruiert. Das Hauptproblem im Existenzbeweis ist die Konstruktion eines derartigen geometrischen Quotienten. Man kann sich leicht an Beispielen klarmachen, daß der Konstruktion eines „geometrischen Quotienten" H/G einer algebraischen Mannigfaltigkeit H, auf welcher eine reduktive Gruppe G operiert, gewisse „schlechte Punkte" von H (bezüglich der Operation von G) im Wege stehen. Solche Punkte werden von Mumford „instabil" genannt. Eine seiner großen Leistungen besteht darin, den Begriff eines „stabilen Punktes" zu schaffen und die Existenz geometrischer Quotienten zu beweisen, wenn alle Punkte von H stabil sind. Der Begriff der Stabilität ist linearer Natur, man betrachtet auf H noch ein amples G-äquivariantes Geradenbündel $\mathscr{L}$, die G-Invarianten von $\mathscr{L}$ definieren ein amples Geradenbündel auf H/G. Es ist ein wesentlicher Gesichtspunkt der geometrischen Invariantentheorie, daß man quasiprojektive Quotienten konstruiert, die Modulmannigfaltigkeiten erweisen sich insbesondere als quasiprojektiv.

Wie schon eingangs erwähnt, ist die soeben sehr grob geschilderte Theorie Mumfords aus dem Jahre 1965 inzwischen weiterentwickelt worden. Mumford und Fogarty haben diese Entwicklungen in einigen Anhängen – meist ohne ausführliche Beweise, aber mit sorgfältigen Literaturverweisen – dargelegt.

In diesen Anhängen wird der Beweis der geometrischen Reduktivität reduktiver Gruppen im Charakteristik p-Fall dargelegt. Es wird ausführlich auf die bisherigen Ansätze zur Konstruktion von Modulmannigfaltigkeiten für Objekte höherer Dimension eingegangen. Die Kompaktifizierung von M_g durch die „stabilen Kurven" wird diskutiert. Schließlich wird Mumfords algebraische Theorie der Thetafunktionen auf wenigen Seiten skizziert. Im letzten Anhang wird das Schottky-Problem diskutiert.

Auch durch diese Anhänge wird dieses Buch zu einem unverzichtbaren Werk für den Spezialisten auf diesem Gebiet. Es ist jedoch ausführlich und „lehrbuchmäßig" genug geschrieben, um Interessenten einen Einstieg in diese wichtige Theorie zu bieten.

Heidelberg E. Freitag

Hochschild, G. P., Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras (Graduate Texts in Math. 75), New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1981, 267 S., DM 72,–

Das Buch von Hochschild enthält eine Einführung in die Theorie der algebraischen Gruppen und sollte im Vergleich mit den bereits erschienenen Lehrbüchern von A. Borel [B], J. E. Humphreys [H], T. A. Springer [S] (alle drei mit dem Titel „Linear Algebraic Groups"), von M. Demazure und P. Gabriel [DG] („Goupes Algébriques I"; wir warten immer noch auf Band 2!) und W. C. Waterhouse [W] („Introduction to Affine Group Schemes") betrachtet werden.

Es ist die erklärte Hauptabsicht des Autors, in diesem Lehrbuch das Zusammenspiel von multilinearer Algebra, Körpertheorie, kommutativer Ringtheorie, algebraischer Geometrie und

Darstellungstheorie von Gruppen und Liealgebren aufzuzeigen. Aus diesem Grunde wird die benötigte kommutative Algebra und algebraische Geometrie, wie auch die Theorie der Liealgebren im Laufe des Textes von Grund auf entwickelt, und zwar über einem beliebigen Grundkörper, aufbauend auf den einfachsten Grundlagen der Algebra. Dies unterscheidet das Werk von [B], [H] und [DG], wo jeweils ein Kapitel über algebraische Geometrie vorangestellt ist mit mehr oder weniger vollständigen Beweisen auf der Basis einer fortgeschrittenen kommutativen Algebra. (In [W] hat es einen entsprechenden Anhang.) Die Zielsetzung „selfcontained" zu sein hat notwendigerweise zur Folge, daß das 260 Seiten starke Lehrbuch nicht sehr weit führt. Es fehlen etwa Wurzelsysteme und Klassifikation der halbeinfachen Gruppen, parabolische Untergruppen, Bruhat-Zerlegung und Darstellungstheorie reduktiver Gruppen. Dafür werden ein paar Einzelthemen behandelt, welche man sonst nicht findet: lineare Reduktivität der reduktiven Gruppen in Charakteristik 0 und Levizerlegung, Kennzeichnung quasiaffiner und affiner homogener Räume, Automorphismengruppen algebraischer Gruppen und ihre Algebraisierung und die Frage, welche Liealgebren von algebraischen Gruppen herkommen.

Das Lehrbuch scheint mir allerdings an einigen Stellen recht fragwürdig; ich habe grundsätzliche Bedenken gegen die Art, wie darin algebraische Geometrie und algebraische Gruppen präsentiert werden. Der Autor geht nämlich von einer Definition der F-Varietät aus (F ist der Grundkörper), welche zum Vorneherein „genügend viele" F-rationale Punkte verlangt: Der Koordinatenring ist per definitionem Unteralgebra des Ringes der F-wertigen Funktionen! Damit schließt er viele Beispiele und fast alle interessanten Rationalitätsfragen aus der Betrachtung aus. So ist etwa bei endlichem Grundkörper F jede F-Varietät endlich und folglich die einzige zusammenhängende F-Gruppe die triviale! Für die interessanten Probleme wird dann meist F algebraisch abgeschlossen (und sogar von Charakteristik 0) vorausgesetzt; man fragt sich, wozu der ganze Aufwand eines allgemeinen Grundkörpers dienen soll.

Ein weiterer problematischer Punkt besteht darin, daß der Autor bei den algebraischen Gruppen die Hopfalgebra-Struktur des Koordinatenringes in den Vordergrund rückt, ein Standpunkt, welcher meines Erachtens unanschaulich und für den Anfänger ziemlich ungeeignet ist. Die oft sehr länglichen Beweise werden dadurch noch undurchsichtiger und beinahe unlesbar.

Auch im Detail findet man einige erhebliche Mängel. Neu eingeführte Begriffe werden nicht motiviert, Resultate werden weder kommentiert noch angewendet, und Beispiele fehlen vollständig (mit Ausnahme von ein paar Gegenbeispielen und vereinzelten historischen Bemerkungen in den „Notes" am Ende jedes Kapitels). Es werden unübliche Bezeichnungen benutzt (maximal toroid, strict G-variety, properly normal subgroup, . . .) und mehrfach neue Notationen im Laufe von Beweisen eingeführt (simple root, positive root, . . .). Es kommen auch grobe Fehler vor, so etwa an mehreren Stellen die Behauptung, daß eine konstruierbare Teilmenge eine Varietät sei, oder die Bemerkung, daß nicht jede maximale auflösbare Untergruppe eine Borel-Untergruppe ist (zusammen mit einem Beispiel!). Das Literaturverzeichnis ist sehr dünn: alle 18 Titel bis auf [H] sind vor 1969 erschienen, [DG] und [S] fehlen, ebenso SGA und Lehrbücher zur kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie. Das Stichwortverzeichnis ist ebenfalls recht kurz und ein Verzeichnis der Notationen und Symbole fehlt. Von einem Lehrbuch in dieser Aufmachung und Preisklasse dürfte man mehr erwarten.

Zusammenfassend scheint mir dieser Graduate Text nicht gelungen und weder für Anfänger als Einführung noch für Fortgeschrittene als Nachschlagewerk geeignet. Wer nicht schon bei den ersten Seiten von der weiteren Lektüre abgeschreckt wird, erhält ein ziemlich einseitiges Bild von der Theorie der algebraischen Gruppen.

Basel H. Kraft

Beardon, A. F., The Geometry of Discrete Groups (Graduate Texts in Mathematics 91), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1983, xii + 337 S., DM 108,–

Mit den im Titel vorkommenden diskreten Gruppen sind Gruppen von Möbiustransformationen gemeint. Das Buch gibt eine ausführliche und systematische Darstellung der Geometrie der Fuchsschen Gruppen, also der diskreten Gruppen von Möbiustransformationen der kompaktifizierten Ebene, die eine Kreisscheibe invariant lassen. Bei den bisher erschienenen Büchern zu diesem Thema, vgl. etwa die Klassiker von Ford und Lehner, standen immer die zu den Gruppen gehörigen automorphen Funktionen im Vordergrund. Hiermit beschäftigt sich das vorliegende Buch nicht. Andererseits geht es über den Stoff, der in den alten Büchern an Geometrie der Operationen vorkam, weit hinaus. Es enthält neben den klassischen eine Reihe von Ergebnissen der letzten Jahre, die erstmals in Buchform erscheinen und wohl nur den Spezialisten bekannt waren. Insofern füllt es eine Lücke und ist nicht, wie heute so viele Bücher, eine weitere Darstellung bekannter Ergebnisse.

Zum Inhalt im einzelnen: Nachdem einige grundlegende Hilfsmittel zusammengestellt sind, werden im dritten Kapitel die Operationen der Möbiusgruppe auf der Einpunktkompaktifizierung $\hat{\mathbf{R}}^n$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes, sowie die von Poincaré eingeführten erweiterten Operationen auf $\hat{\mathbf{R}}^{n+1}$ eingeführt und untersucht. Kapitel 4 behandelt den Spezialfall $n = 2$, der im folgenden ausschließlich interessiert, also die üblichen komplexen Möbiustransformationen, ihre Beschreibungen durch Matrizen und Quaternionen, sowie ihre Klassifikation. In Kapitel 5 werden die Bahnen der Operationen diskreter Gruppen von Möbiustransformation in $\hat{\mathbf{R}}^2$ und $\hat{\mathbf{R}}^3$ untersucht. Es enthält die üblichen Ergebnisse über diskontinuierliche Gruppen, Grenzpunkte etc., aber auch neuere Sätze, zum Beispiel Jørgensens Ungleichung. Im folgenden Kapitel wird kurz der Zusammenhang zu den Riemannschen Flächen beschrieben. Kapitel 7 ist eine detaillierte Darstellung der analytischen (nicht axiomatischen) hyperbolischen Geometrie. Sie wird mit Hilfe der Euklidischen Geometrie beschrieben. Insbesondere werden nicht nur die Poincaréschen Modelle der hyperbolischen Geometrie benutzt, sondern auch das Kleinsche Modell, d. h. der Einheitskreis mit Euklidischen Geradensegmenten als Geodätischen.

Nachdem die ersten Kapitel mehr einführenden Charakter haben, folgt mit Kapitel 8 bis 11 der wesentliche Teil des Buches, die Beschreibung der Geometrie der Operationen von Fuchsschen Gruppen, deren Klassifikation, Fundamentalbereiche, endliche Erzeugtheit, sowie eine Reihe von universellen Ungleichungen. Es wird eine Fülle von Ergebnissen, zum Großteil neueren Datums, bewiesen, die hier nicht im Einzelnen aufgeführt werden können. Sie lassen jedoch den Satz in der Einleitung, das Buch solle als Einführung in das Gebiet dienen, als fast zu bescheiden erscheinen. Bezieht man allerdings diese Aussage darauf, daß das Buch mit geringen Vorkenntnissen verstanden werden kann, so muß ich dem Autor recht geben: Es ist sehr gut durchdacht, der Inhalt klar und verständlich aufgeschrieben. Die zahlreichen Übungen liefern weiteres Beispielmaterial, die „Notes“ am Ende jedes Kapitels Literaturhinweise zum weiteren Studium.

Nebenbei sei bemerkt, daß Kapitel 3 als Einführung in Thurstons Geometrie und Topologie der 3-Mannigfaltigkeiten dienen kann. Darüber hinaus beziehen sich einige der Ergebnisse aus dem Kapitel über die hyperbolische Geometrie direkt auf die 3-Mannigfaltigkeiten. Sie werden im Text selbst nicht benötigt.

Das Buch kann allen an Geometrie und Funktionentheorie interessierten Lesern uneingeschränkt empfohlen werden.

Erlangen H. Lange

Brown, K. S., Cohomology of Groups (Graduate Texts in Math. 87), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, X + 306 S., DM 74,–

Dieses Buch hat bestimmt schon eine ganze Reihe von Freunden gefunden! Liegt doch hier eine äußerst lebendig geschriebene Abhandlung über ein Gebiet vor, das schon deshalb zur Allgemeinbildung eines Mathematikers gehört, weil es in so vielen mathematischen Disziplinen zur Formulierung und Bearbeitung konkreter Aufgaben herangezogen wird; ich weiß auch von keinem anderen Buch, das dieses Gebiet so ausführlich behandelt wie das vorliegende. Und so ist es gleichermaßen zu empfehlen: dem Studenten, der immer mehr erkennt, wie nützlich die kohomologische Sprache bei der Diskussion manniglicher Probleme ist, seien sie aus Topologie, Geometrie, Funktionentheorie oder aus der Zahlentheorie, und der sich deshalb hier gezielt einarbeiten möchte; aber auch dem fertigen Mathematiker, der in dem Buch zunächst ein gutes Nachschlagewerk vorfindet, und der hier wohl manchmal auch auf Zusammenhänge angesprochen wird, die ihm bisher nicht bekannt waren. Die Argumentationsweise des Autors ist es, die sein Buch so lebendig macht und insbesondere empfehlenswert für Studenten; er führt die Beweise nicht formal, oft algebraisch, wenn es sich so anbietet, genauso oft aber auch aus topologischer oder aus geometrischer Sicht, wenn ihm das nun angemessen erscheint. Viele nützliche Beispiele und Übungsaufgaben begleiten den Text. In den anspruchsvolleren Kapiteln, den letzten drei des Buches, Finiteness Conditions, Euler Characteristics, Farrell Cohomology Theory, werden zu den dort vorgestellten Hauptsätzen vielfach auch Perspektiven angesprochen, die eigentlich schon außerhalb der Kohomologietheorie selbst liegen, die aber einmal mehr zeigen, wie wichtig die kohomologische Sprache in der Mathematik geworden ist. So wird auf die Kohomologie arithmetischer Gruppen eingegangen (Borel-Serre) und auf den Zusammenhang der Bernoulli-Zahlen mit der Euler Charakteristik, hier z. B. auf die Formel $\chi(SL_n(\mathbf{Z})) = \prod_{k=2}^{n} \zeta(1-k)$ (Harder). So wird bei der Diskussion vom Hattori-Stallings-Rang in die Ganzzahlige Darstellungstheorie endlicher Gruppen übergeleitet und auf den grundlegenden Satz von Swan hingewiesen, nämlich daß $P \otimes \mathbf{Q}$ ein Vielfaches der regulären Darstellung von G ist, wenn nur P projektiv über $\mathbf{Z}G$ ist.

Gewünscht hätte sich der Referent noch einen Paragraphen über Galoiskohomologie, sozusagen der Hauptanwendung der Kohomologietheorie in der Algebraischen Zahlentheorie. Brauergruppe, Kummertheorie und Hinweise zur Klassenkörpertheorie hätten sicher gut in die Philosophie des Buches hineingepaßt und es eben noch abgerundeter erscheinen lassen.

Augsburg J. Ritter