

87. Band Heft 1  
ausgegeben am 23. 1. 1985

**DMV**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs  
unter Mitwirkung von  
P. L. Butzer, U. Felgner,  
W.-D. Geyer, J. Stoer



**B. G. Teubner Stuttgart 1985**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## **Manuskripte**

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 86/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## **Bezugsinformationen**

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 94,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69  
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1985 – Verlagsnummer 2900/1

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim

Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Inhalt Band 87, Heft 1

### 1. Abteilung

|   |    |
|---|----|
| R. Tijdeman: On the Fermat-Catalan Equation . . . . . | 1  |
| S. Koppelberg: Booleschwertige Logik . . . . .        | 19 |

### 2. Abteilung

|   |    |
|---|----|
| Ahlfors, L. V., Collected Papers ( <i>H. Grunsky</i> ) . . . . .  | 1  |
| Littlewood, J. E., Collected Papers ( <i>R. C. Vaughan</i> ) . . . . .  | 2  |
| Magnus, W., Collected Papers ( <i>H. Zieschang</i> ) . . . . .  | 5  |
| Szegö, G., Collected Papers I, II, III ( <i>R. P. Boas</i> ) . . . . .  | 6  |
| Reid, C., Neyman – From Life ( <i>D. W. Müller</i> ) . . . . .  | 7  |
| Koblitz, A. H., A Convergence of Lives. Sofia Kovalevskaia: Scientist, Writer, Revolutionary. – Trbuhovič-Gjurič, D., Im Schatten Albert Einsteins. Das tragische Leben der Mileva Einstein-Marič ( <i>N. Schappacher</i> ) . . . . . | 7  |
| Lothaire, M., Combinatorics on Words ( <i>D. Jungnickel</i> ) . . . . .   | 10 |
| Prieß-Crampe, S., Angeordnete Strukturen: Gruppen, Körper, projektive Ebenen ( <i>H. Salzmann</i> ) . . . . .   | 11 |
| Hua, L. K., Introduction to Number Theory ( <i>G. J. Rieger</i> ) . . . . .   | 12 |
| Hua, L. K., Selected Papers ( <i>G. J. Rieger</i> ) . . . . .   | 13 |
| Schroeder, M. R., Number Theory in Science and Communication ( <i>W.-D. Geyer</i> ) . . . . .   | 13 |
| Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Prestel, A., Remmert, R., Zahlen ( <i>W.-D. Geyer</i> ) . . . . .  | 14 |
| Hecke, E., Lectures on Dirichlet Series, Modular Functions and Quadratic Forms ( <i>K.-B. Gundlach</i> ) . . . . .  | 15 |
| Suzuki, M., Group Theory I ( <i>H. Bender</i> ) . . . . .   | 16 |
| Aumann, G., Haupt, O., Einführung in die reelle Analysis, Band III: Integralrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlicher ( <i>H. Heyer</i> ) . . . . .   | 17 |
| Duren, P. L., Univalent Functions ( <i>Ch. Pommerenke</i> ) . . . . .   | 19 |
| Kaup, L., Kaup, B., Holomorphic Functions of Several Variables: An Introduction to the Fundamental Theory ( <i>K. Wolfhardt</i> ) . . . . .   | 19 |
| Field, M., Several Complex Variables and Complex Manifolds ( <i>G. Trautmann</i> ) . . . . .  | 21 |
| Baird, P., Harmonic Maps with Symmetry, Harmonic Morphisms and Deformation of Metrics ( <i>D. Ferus</i> ) . . . . .   | 22 |
| Braun, M., Differential Equations and their Applications, An Introduction to Applied Mathematics ( <i>M. Wiegner</i> ) . . . . .  | 23 |
| Amann, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen ( <i>D. Flockerzi</i> ) . . . . .  | 24 |
| Rektorsky, K., The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations ( <i>R. Lemmert</i> ) . . . . .  | 25 |

### **In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:**

**V. Bangert:** Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

**J.-P. Bourguignon:** Analytical Problems Arising in Geometry: Examples from Yang-Mills Theory

**S. D. Chatterji:** A Subsequence Principle in Probability Theory

**R. Gernet:** Drei Register über biographische Beiträge im Jahresbericht der DMV Bd. 1–83

**R. Göbel:** Wie weit sind Moduln vom Satz von Krull-Remak-Schmidt entfernt?

**F. Natterer:** Numerik des Radonschen Problems

**G. Schubring:** Die Entwicklung des Mathematischen Seminars der Universität Bonn 1864–1929

---

### **Anschriften der Herausgeber**

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, 8520 Erlangen

Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

### **Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

## On the Fermat-Catalan Equation\*)

R. Tijdeman, Leiden

Consider the diophantine equation

$$(1) \quad \xi^m - \eta^n = 1$$

in rational numbers  $\xi, \eta$  with  $\xi\eta \neq 0$  and rational integers  $m \geq 2, n \geq 2$ . Put  $\xi = x/u, \eta = y/v$  with  $u, v, x, y \in \mathbf{Z}, u \geq 1, v \geq 1, (x, u) = (y, v) = 1$ . Then (1) becomes

$$(2) \quad \left(\frac{x}{u}\right)^m = \left(\frac{y}{v}\right)^n + 1.$$

If  $m = n \geq 3$  and  $u = v$  this is the famous Fermat equation  $x^n = y^n + z^n$  dealing with the problem whether the sum of two  $n$ th powers of positive integers can be an  $n$ -th power. If  $u = v = 1$ , this is the classical Catalan equation  $x^m - y^n = 1$  which describes the problem whether two perfect powers can differ by 1. This is the reason that I have called (1) the *Fermat-Catalan equation*.

Since the conjecture of Catalan that 8 and 9 are the only consecutive positive integers which are both perfect powers, is not completely settled yet and the Fermat equation is still unsolved, the complete solution of (1) seems far away. If  $m = n = 2$ , we have the Pythagorean equation  $x^2 = y^2 + z^2$  and the parametrization of the infinite set of solutions is well known. It is very likely that (1) has only finitely many other solutions. Possibly the only further solutions are given by  $\xi = \pm 3, \eta = 2, m = 2, n = 3$ . These are the known solutions of the Catalan equation.

The following simple observations will be used in the sequel without further reference. By comparing the denominators on both sides of (2) we find  $u^m = v^n$ . Hence this number is a  $[m, n]$ th power, where  $[m, n]$  denotes the lowest common multiple of  $m$  and  $n$ . Let  $z$  be the positive integer with  $z^{[m, n]} = u^m = v^n$ . Then (1) is equivalent with

$$(3) \quad x^m - y^n = z^{[m, n]}$$

in integers  $m \geq 2, n \geq 2, x, y, z \geq 1$ . Without loss of generality we may assume that  $x$  and  $y$  are relatively prime. Namely, suppose  $p|x$  and  $p|y$  for some prime  $p$ . Then, by (3),  $p|z$  and at least two among  $x^m, y^n, z^{[m, n]}$  have the same  $p$ -part. Denote by  $\text{ord}_p(x)$  the number  $a$  such that  $p^a|x, p^{a+1} \nmid x$ . If  $\text{ord}_p(x^m) = \text{ord}_p(y^n)$ , then

---

\*) Hauptvortrag auf der Tagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung in Köln 1983.

this number is divisible by both  $m$  and  $n$  and these  $p$ -parts can be divided out. Otherwise  $z^{[m,n]}$  contains a minimal number of factors  $p$ . Since  $\text{ord}_p(z^{[m,n]})$  is divisible by both  $m$  and  $n$ , this  $p$ -part can also be divided out. After the division we have  $(x, y) = 1$ .

In this lecture I want to mention some results and techniques from the theory of diophantine equations and recurrence sequences. Often the Fermat-Catalan equation is suitable for illustrating the power of these techniques, but sometimes we shall refer to other equations. Most of the proofs of the cited results will be contained in a book written by T. N. Shorey and the author which is in preparation. I owe to F. Beukers, K. Györy, T. N. Shorey and B. M. M. de Weger for valuable remarks in connection with this paper.

## 1 Fixed bases

Let  $a$  and  $b$  be fixed integers with  $a > 1$ ,  $b > 1$ . Consider the equation

$$(4) \quad a^m - b^n = 1 \quad \text{in integers } m \geq 2, n \geq 2.$$

Already around 1300 a simple problem of this kind was posed by von Vitry and solved by Hebreus, namely to find all powers of 2 and 3 which differ by 1 (cf. Dickson [5], p. 731). It is a simple exercise to prove that (4) with  $a = 3$ ,  $b = 2$  has only the solution  $m = 2$ ,  $n = 3$  and that (4) with  $a = 2$ ,  $b = 3$  has no solution. Thus the solution of von Vitry's problem is given by  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(8, 9)$ . In 1931 Pillai [17] showed that for any fixed set of integers  $a > 1$ ,  $b > 1$ ,  $c \neq 0$  the equation  $a^m - b^n = c$  has only finitely many solutions  $(m, n)$ . In 1952 LeVeque [12] proved that (4) has at most one solution and this solution was effectively specified in terms of  $a$  and  $b$ . Cassels [3] gave a simpler proof of a slightly stronger result. In 1965 Szymiczek [29] similarly proved that for fixed integers  $a, b, c$  with  $a \geq 1$ ,  $c > b \geq 1$ ,  $(b, c) = 1$  each of the equations

$$(5) \quad a^m \pm b^n = c^n \quad \text{in integers } m \geq 2, n \geq 2$$

has at most one solution and determined the only solution rather explicitly. Since  $z^{[m,n]} = v^n$  in (3), we can apply this result to (1).

**Theorem 1** *For any rational numbers  $\xi, \eta$  with  $\xi\eta \neq 0$  equation (1) in integers  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$  has at most one solution. This solution can be effectively determined.*

**P r o o f.** Consider the equivalent equation (3). Without loss of generality we may assume  $(x, y) = 1$ . Let  $v \geq 1$  be such that  $v^n = z^{[m,n]}$ . Put  $a = x$  if  $x > 0$ ,  $a = -x$  if  $x < 0$ ,  $b = \min(|y|, |v|)$ ,  $c = \max(|y|, |v|)$ . This yields one of the equations (5) with  $a \geq 1$ ,  $c > b \geq 1$ ,  $(b, c) = 1$ . Apply Szymiczek's result. (Here it should be noted that Szymiczek considered (5) in integers  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$  and showed that each equation has at most two solutions, but that in all cases with two solutions one of them is with  $m = 1$ .) □

The proof of Szymiczek is a refinement of the method by which, in 1903/1904, Birkhoff and Vandiver proved that  $a^n - b^n$  has a primitive divisor

provided that  $a > b$ ,  $(a, b) = 1$ ,  $n > 2$  and  $(a, b, n) \neq (2, 1, 6)$ . Thus I need another equation to illustrate the striking effects of modern techniques to diophantine equations with fixed bases. Consider the equation

$$(6) \quad \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \dots + \eta_n X_n = 0$$

where  $X_1, X_2, \dots, X_n$  are integers solely composed of some fixed primes  $p_1, \dots, p_s$ . Let  $X = \max(|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|)$ . We assume that  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  are non-zero integers with  $|\eta_1 \dots \eta_n| \leq X$  and that  $(\eta_1 X_1, \eta_2 X_2, \dots, \eta_n X_n) = 1$ . Cases  $n = 1$  and  $n = 2$  are trivial. The case  $n = 3$  can be treated by the p-adic analogue of the Thue-Siegel-Roth method. In 1967 Schneider [21] improved upon earlier results of K. Mahler and A. O. Gelfond by showing that for any  $\epsilon > 0$  equation (6) with  $n = 3$  has only finitely many solutions satisfying  $|\eta_1 \eta_2 \eta_3| < X^{1-\epsilon}$ . The p-adic analogue of the extension of W. M. Schmidt of Roth's result made an extension possible to general  $n$ . Quite recently Evertse [7] improved upon earlier results of H.-P. Schlickewei, E. Dubois and G. Rhin, A. J. van der Poorten and H.-P. Schlickewei, by showing that for any  $\epsilon > 0$  equation (6) has only finitely many solutions satisfying  $|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n| < X^{1-\epsilon}$  for which no non-empty proper subsum

$$\eta_{i_1} X_{i_1} + \eta_{i_2} X_{i_2} + \dots + \eta_{i_t} X_{i_t}$$

vanishes.

Note that the  $1 - \epsilon$  is best possible in the sense that it cannot be replaced by 1. Indeed, on taking  $\eta_1 = 1, \eta_2 = -1, \eta_3 = 1 - 2^k, X = X_1 = 2^k, X_2 = X_3 = 1$  we see that  $|\eta_1 \eta_2 \eta_3| < X$  and that (6) holds for every positive integer  $k$ . The condition that no subsum vanishes is also necessary. If some subsum vanishes, we can generate infinitely many solutions by multiplying each term in the subsum by  $p_i^k$  where  $1 \leq i \leq s$  and  $k \in \mathbf{Z}, k \geq 0$ . The condition that no subsum should vanish can be recognized in Schmidt's subspace theorem from which the result is derived. It says that certain diophantine inequalities have only finitely many solutions outside a finite set of hyperplanes. The method of proof is ineffective, which means that it does not provide a way to determine all solutions effectively. Nevertheless the above result yields a good description of the structure of the solutions.

**Example** Consider the equation

$$(7) \quad 2^{x_1} 3^{x_2} + 3 \cdot 2^{x_3} + 3^{x_4} - 5 \cdot 2^{x_5} - 3^{x_6} = 0$$

in non-negative integers  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ . If some subsum vanishes, then the complement vanishes too, hence there is some vanishing 2-term. The only 2-terms which can vanish are  $2^{x_1} 3^{x_2} - 3^{x_6}, 3 \cdot 2^{x_3} - 3^{x_6}$  and  $3^{x_4} - 3^{x_6}$ . According to the above mentioned result (in this case the version of van der Poorten and Schlickewei suffices) we obtain that apart from only finitely many solutions

$$\text{either } \begin{cases} 2^{x_1} 3^{x_2} = 3^{x_6} \\ 3 \cdot 2^{x_3} + 3^{x_4} = 5 \cdot 2^{x_5} \end{cases} \quad \text{OR} \quad \begin{cases} 3^{x_4} = 3^{x_6} \\ 2^{x_1} 3^{x_2} + 3 \cdot 2^{x_3} = 5 \cdot 2^{x_5} \end{cases}$$

In the first system of equations  $x_1 = 0, x_2 = x_6, x_4 = 0, x_5 > 0, x_3 = 0, x_5 \notin \mathbf{Z}$ , a contradiction. In the second system we may assume  $\min(x_1, x_3, x_5) = 0$ . Hence  $x_4 = x_6, x_2 = 0, x_5 = 0, x_1 = 1, x_3 = 0$ . Thus all but finitely many solutions of (7)

are given by

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (k + 1, 0, k, \ell, k, \ell)$$

where  $k, \ell$  are free non-negative integer parameters. For example, parametrized solutions correspond to  $8 + 12 + 9 - 20 - 9 = 0$  and  $32 + 48 + 1 - 80 - 1 = 0$ ; non-parametrized solutions correspond to  $48 + 24 + 9 - 80 - 1 = 0$  and  $48 + 192 + 1 - 160 - 81 = 0$ .  $\square$

Both van der Poorten and Schlickewei [20] and Evertse [7] stated their results not only for rational integers, but also for arbitrary algebraic numbers. The resulting *Main Theorem on S-units* has important consequences for linear recurrence sequences. Let  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$  be rational integers with  $\nu_r \neq 0$ . Let  $u_0, u_1, \dots, u_{r-1}$  be rational integers, not all zero. We define the recurrence sequence  $\{u_m\}_{m=0}^{\infty}$  by

$$(8) \quad u_m = \nu_1 u_{m-1} + \nu_2 u_{m-2} + \dots + \nu_r u_{m-r}, \quad m = r, r+1, r+2, \dots$$

The best known recurrence sequence is the Fibonacci sequence 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... which obeys the recurrence relation  $u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$ . Recurrence sequences play an important role in combinatorics, graph theory and number theory. Put

$$(9) \quad z^r - \nu_1 z^{r-1} - \dots - \nu_r = \prod_{i=1}^n (z - \omega_i)^{e_i},$$

where  $\omega_1, \dots, \omega_n$  are distinct complex numbers and  $e_1, \dots, e_n$  are positive integers. It is well known that there exist polynomials  $P_i$  of degree less than  $e_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) such that

$$(10) \quad u_m = \sum_{i=1}^n P_i(m) \omega_i^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

It follows from the theorem of Skolem-Mahler-Lech that if  $u_m = 0$  has infinitely many solutions, then  $\omega_i/\omega_j$  is a root of unity for some  $i, j$  with  $1 \leq i < j \leq n$ . The recurrence is called *non-degenerate* if none of the quotients  $\omega_i/\omega_j$  with  $i \neq j$  is a root of unity. By applying the Main Theorem on S-units van der Poorten and Schlickewei [20] and Evertse [7] obtained some remarkable results for non-degenerate recurrences. Note that  $u_m = 0$  has the shape of (6) with  $\eta_i = P_i(m)$  and  $X_i = \omega_i^m$ .

a) Put  $\omega = \max_{1 \leq i \leq n} |\omega_i|$ . Then, by (10), for any  $\epsilon > 0$ ,

$$|u_m| < \omega^{m(1+\epsilon)} \quad \text{if } m > m_0(\epsilon).$$

Van der Poorten proved that, for any  $\epsilon > 0$ ,

$$|u_m| > \omega^{m(1-\epsilon)} \quad \text{if } m > m_1(\epsilon).$$

This implies that in the long run the cancellation of the terms  $P_i(m)\omega_i^m$  is very limited.

b) The *total multiplicity* of a recurrence sequence is the number of integers  $m_1, m_2$  with  $m_1 > m_2 \geq 0$  such that  $u_{m_1} = u_{m_2}$ . Van der Poorten proved that the total multiplicity of a non-degenerate recurrence sequence is finite.



c) If  $u_{m_1} = u_{m_2}$ , then  $u_{m_1}/u_{m_2} = 1$ . Let  $P[x]$  denote the greatest prime factor of  $x$  and put  $P[-1] = P[0] = P[1] = 1$ . Evertse proved that a non-degenerate recurrence sequence  $\{u_m\}$  satisfies

$$P[u_{m_1}/(u_{m_1}, u_{m_2})] \rightarrow \infty \quad \text{as } m_1 \rightarrow \infty, m_1 > m_2, u_{m_1} \cdot u_{m_2} \neq 0.$$

Recall that  $u_m \neq 0$  for sufficiently large  $m$ .

As noted before the proof of the Main Theorem on S-units is ineffective. Baker's method for estimating linear forms in logarithms of algebraic numbers, for short *linear form method*, has been applied to derive effective results. As to equation (6) effective results have been derived for  $n \leq 3$  or  $s \leq 2$  only. See Stroeker and Tijdeman [28]. For recurrence sequences (8) with (10) the following results have been obtained.

a), b). Mignotte, Shorey and Tijdeman [13] proved that if  $\{u_m\}$  is a non-degenerate recurrence sequence with at most three  $\omega_i$  of maximal absolute value  $\omega$ , then

$$|u_m| \geq \omega^m e^{-C_1(\log m)^2} \quad \text{for } m \geq C_2,$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are computable constants depending on the sequence  $\{u_m\}$  only. Furthermore, the total multiplicity of  $\{u_m\}$  is finite in the sense that from a computable bound of  $m$  on all values  $u_m$  are distinct.

c) Shorey [22] extended a result of C. L. Stewart by proving that for non-degenerate recurrence sequences  $\{u_m\}$  with  $r = 2$  in (8) there exist effectively computable positive constants  $C_3, C_4$  such that

$$P\left[\frac{u_{m_1}}{(u_{m_1}, u_{m_2})}\right] \geq C_3 \left(\frac{m_1}{\log m_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

whenever  $m_1 > m_2, m_1 \geq C_4, u_{m_2} \neq 0$ . In particular,

$$P[u_m] \geq C_3 \left(\frac{m}{\log m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

for  $m \geq C_4$ . There is a corresponding result for the greatest square-free part of  $u_m$ . Denote by  $Q[u_m]$  the greatest factor of  $u_m$  which is not divisible by a square  $> 1$ . Shorey [23] improved upon a result of Stewart by proving the existence of positive constants  $C_5$  and  $C_6$  such that, for the same sequence  $\{u_m\}$ ,

$$\log Q[u_m] \geq C_5 \frac{(\log m)^2}{\log \log m}$$

for  $m \geq C_6$ .

## 2 One base and one exponent fixed

It is obvious that if in (1)  $\eta$  and  $n$  are fixed, only finitely many possibilities are left for the other variables. The same holds true if  $\xi$  and  $m$  are fixed. We therefore assume that  $m$  and  $\eta$  are fixed. (The case "n and  $\xi$  fixed" is similar.) We want to show that (1) has only finitely many solutions in  $n$  and  $\xi$ .

It follows from our assumptions that in (2)  $m$ ,  $y$  and  $v$  are fixed and  $(u, x) = 1$ . Since  $u^m = v^n$ , we obtain the equation

$$(11) \quad x^m - u^m = y^n$$

where  $m$  and  $y$  are fixed,  $u$  is a power of a fixed number and  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$ ,  $(u, x) = 1$ . We are going to apply the following theorem which is proved by the linear form method.

**Theorem A** *Let  $f \in \mathbf{Z}[x, y]$  be a binary form such that among the linear factors in the factorization of  $f$  at least three are distinct. Then there exists a computable positive constant  $C_7$  depending on  $f$  only such that*

$$P[f(x, y)] \geq C_7 \log \log X$$

for all pairs of integers  $x, y$  with  $(x, y) = 1$  and  $X = \max(|x|, |y|)$ .

This theorem was proved by Shorey et al. [24]. Weaker versions had been given before by K. Mahler, M. Keates, J. Coates, V. G. Sprindžuk and S. V. Kotov. Note that all linear factors of  $x^m - u^m$  are distinct. In order to secure that we have three linear factors we apply the theorem to the linear form  $u(x^m - u^m)$ . Since  $uy^n$  is composed of fixed primes, the theorem implies that  $\max(|x|, |u|)$  is bounded. Thus there are only finitely many possibilities for  $\xi$ . For fixed  $\xi$  and  $\eta$  there is at most one solution  $m, n$  by Theorem 1. Hence (1) has only finitely many solutions.

There is a closely related problem on recurrence sequences. Wylie [31] and Cohn [4] proved that the only perfect squares in the Fibonacci sequence are given by 0, 1 and 144. Steiner [32] proved among other results that 0, 1 and 8 are the only perfect cubes in this sequence. Pethö [16] gave another proof of this fact by using the linear form method and a computer.

Suppose  $\{u_m\}_{m=0}^{\infty}$  is a recurrence sequence (8) with  $r = 2$  such that  $e_1 = e_2 = 1$  in (9). We call such a sequence a *simple binary recurrence sequence*. By (10) the problem whether  $u_m$  is an  $n$ -th power leads to the equation

$$b_1 \omega_1^m + b_2 \omega_2^m = y^n$$

with  $b_1, b_2, \omega_1, \omega_2$  and  $n$  fixed. Both Pethö [15] and Shorey and Stewart [25] proved that for every  $n$  a simple non-degenerate binary recurrence sequence  $\{u_m\}_{m=0}^{\infty}$  assumes only finitely many  $n$ th powers and that a bound for the  $m$  with  $u_m = y^n$  can be effectively computed. Hence, at least in principle, for any  $n \geq 2$  the  $n$ th powers in the Fibonacci sequence can be determined.

### 3 Fixed exponents

Suppose that  $m$  and  $n$  in (1) are fixed and  $mn \geq 6$ . The curve  $X^m - Y^n = 1$  has genus  $1 + \frac{1}{2}(mn - m - n - (m, n))$ . Only in the cases  $(m, n) = (4, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 2), (2, 3)$  the genus is less than 2. According to the striking result of Faltings [8], which will be the subject of the next lecture, there are only finitely many rational solutions  $(\xi, \eta)$  of (1) if the genus is at least two. It is known that

(1) has no solutions if  $(m, n) = (4, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 2), (2, 3)$ , except for the solutions  $(\xi, \eta) = (\pm 3, 2)$  if  $(m, n) = (2, 3)$ . Hence (1) has only finitely many solutions  $\xi, \eta$ .

Faltings' proof is ineffective and an effective proof of his result seems far away. There is not even an effective proof for the Fermat case  $m = n$ , that is, there is no proof that for every  $n \geq 3$  there is a computable bound  $C_n$  for the solutions  $x, y, z$  of  $x^n = y^n + z^n$ . The most advanced effective result in this direction is due to Kotov [11]. It indicates that the numerators and denominators of  $\xi$  and  $\eta$  cannot be composed of very small prime numbers.

**Theorem B** *For non-zero integers  $a, b, m, n$  with  $m \geq 2, n \geq 2, mn \geq 6$  there exists a computable positive constant  $C_9$  such that*

$$P[ax^m + by^n] \geq C_9(\log \log X \log \log X)^{1/2}$$

for all non-zero integers  $x, y$  with  $(x, y) = 1$  and  $X = \max(|x|, |y|)$ .

I want to make some historical remarks on the cases with genus 0 and 1. The cases  $\xi^4 - \eta^2 = 1$  and  $\xi^2 - \eta^4 = 1$  go back to Fermat who applied the method of descent (cf. Mordell [14], pp. 16–17). The case  $\xi^3 - \eta^3 = 1$  corresponds to the Fermat equation  $x^3 = y^3 + z^3$ . Euler's proof that it has no non-trivial solutions was incomplete at one point, but the gap was filled by Legendre. A proof can be found in many books on number theory, for example Hardy and Wright [10], § 13.4. The cases  $\xi^3 - \eta^2 = 1$  and  $\xi^2 - \eta^3 = 1$  are also due to Euler [6]. There are some different proofs in literature (e.g. Fueter [9], p. 80), but in the week that we commemorate that Euler died two hundred years ago, it is worthwhile to recall Euler's elegant proof by descent.

Suppose that  $(a/b)^3 \pm 1$  with  $(a, b) = 1$  is a square. Then  $a^3b \pm b^4$  is an integral square. Put  $c = a \pm b$ . Then  $(b, c) = 1$  and  $a^3b \pm b^4 = bc(c^2 \mp 3bc + 3b^2)$ . It is therefore sufficient to find all pairs of integers  $b$  and  $c$  such that  $bc(c^2 \mp 3bc + 3b^2)$  is a square. Without loss of generality we may assume that  $b$  and  $c$  are positive.

**Lemma (Euler [6])** *If  $b$  and  $c$  are positive integers with  $(b, c) = 1$  such that  $bc(c^2 \mp 3bc + 3b^2)$  is a square, then the minus sign holds and  $(b, c) = (1, 1)$  or  $(1, 3)$ .*

**P r o o f.** We prove it for the minus sign. The other proof is similar. Suppose  $bc(c^2 - 3bc + 3b^2)$  is the smallest square with  $(b, c) \neq (1, 1), (1, 3)$ . If  $c = 3d$  for some integer  $d$ , then  $db(b^2 - 3db + 3d^2)$  is a smaller square with  $(d, b) \neq (1, 1), (1, 3)$ , a contradiction. So we may assume  $3 \nmid c$ . It follows from  $(b, c) = 1$  that both  $b$  and  $c$  and  $c^2 - 3bc + 3b^2$  are squares. Put  $c^2 - 3bc + 3b^2 = (c - fb/g)^2$  with  $f > 0, g > 0, (f, g) = 1$ . Then

$$(12) \quad \frac{b}{c} = \frac{2fg - 3g^2}{f^2 - 3g^2}.$$

We distinguish two cases.

(i)  $3 \nmid f$ .

Note that  $(2fg - 3g^2, f^2 - 3g^2) = 1$ . Hence  $c = \pm(f^2 - 3g^2)$ . Since  $3g^2 - f^2$  is not a square mod. 3, we derive  $c = f^2 - 3g^2$ . By (12),  $b = 2fg - 3g^2$ . Put  $f^2 - 3g^2 = (f - kg/\ell)^2$

with  $k > 0$ ,  $\ell > 0$ ,  $(k, \ell) = 1$ . Then

$$(13) \quad \frac{f}{g} = \frac{k^2 + 3\ell^2}{2k\ell}, \quad \frac{b}{g^2} = \frac{k^2 - 3k\ell + 3\ell^2}{k\ell}.$$

This implies that  $k\ell(k^2 - 3k\ell + 3\ell^2)$  is a square. If  $(k, \ell) = (1, 1)$  or  $(3, 1)$ , then  $f/g = 2$ , hence  $b = c = 1$ , a contradiction. Note that  $(2k\ell, k^2 + 3\ell^2) | 6$ , hence, by (13),  $k\ell | 3g$  and  $k\ell(k^2 - 3k\ell + 3\ell^2) | 9b$ . Since  $c(c^2 - 3bc + 3b^2) \geq c^3/4 > 9$  for all squares  $b, c$  with  $(b, c) \neq (1, 1)$ , we find that  $k\ell(k^2 - 3k\ell + 3\ell^2)$  is a smaller square than  $bc(c^2 - 3bc + 3b^2)$ , a contradiction.

(ii)  $3 | f$ .

Put  $f = 3e$ . Then, by (12),  $b/c = (2eg - g^2)/(3e^2 - g^2)$ . Since  $(2eg - g^2, 3e^2 - g^2) = 1$  and  $3e^2 - g^2$  cannot be a square, we obtain  $b = g^2 - 2eg$ ,  $c = g^2 - 3e^2$ . Put  $c = (g - ke/\ell)^2$  with  $k > 0$ ,  $\ell > 0$ ,  $(k, \ell) = 1$ . Then

$$(14) \quad \frac{e}{g} = \frac{2k\ell}{k^2 + 3\ell^2}, \quad \frac{b}{g^2} = \frac{k^2 - 4k\ell + 3\ell^2}{k^2 + 3\ell^2}.$$

It follows that  $(k^2 - 4k\ell + 3\ell^2)(k^2 + 3\ell^2) = (k - \ell)(k - 3\ell)(k^2 + 3\ell^2)$  is a square. Note that  $(k - \ell)(k - 3\ell) > 0$ . Put  $\delta = 2$  if  $k$  and  $\ell$  are odd,  $\delta = 1$  otherwise. Further, put  $t = \delta^{-1}|k - \ell|$ ,  $u = \delta^{-1}|k - 3\ell|$ . Then  $t > 0$ ,  $u > 0$ ,  $(t, u) = 1$  and  $tu(u^2 - 3tu + 3t^2)$  is a square. It is impossible that  $(t, u) = (1, 1)$  or  $(1, 3)$ . Observe that  $(2k\ell, k^2 + 3\ell^2) | 3\delta$ , hence, by (14),  $k^2 + 3\ell^2 | 3\delta g$  and  $(k^2 + 3\ell^2)(k^2 - 4k\ell + 3\ell^2) | 9\delta^2 b$ . Since  $c(c^2 - 3bc + 3b^2) \geq c^3/4 > 9$  for all squares  $b, c$  with  $(b, c) \neq (1, 1)$ , we find that

$$\begin{aligned} tu(u^2 - 3tu + 3t^2) &= \delta^{-2}(p^2 + 3q^2)(p^2 - 4pq + 3q^2) \\ &\leq 9b < bc(c^2 - 3bc + 3b^2), \end{aligned}$$

a contradiction. □

#### 4 One base fixed

If  $\eta \neq 0$  is fixed, then (1) has only finitely many solutions  $\xi \in \mathbf{Q}$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  with  $\xi \neq 0$ ,  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$ . This is a remarkable improvement upon the result in § 2. The remarkable aspect of this result is that we have an equation in which both the base,  $\xi$ , and the exponent,  $m$ , are variable. Up to now Baker's so-called Sharpening I, [1], published in 1972, is the only general tool to deal with equations containing such variables. The method is effective, but due to the high constant in the upper bound of Sharpening I and the fact that this upper bound refers to the exponent variable and that the linear form method, with the exponent variable as parameter, has to be applied again to estimate the base variable, make that it is still impossible to solve such equations in practice.

Baker stated his Sharpening I for algebraic numbers. For our convenience we shall give a formulation for rational numbers, cf. Baker [2].

**Theorem C** *Let  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  be non-zero rational numbers. Let  $A_j$  be greater than 4 and the maximum of the absolute values of the numerator and denominator*

of  $\alpha_j$  for  $1 \leq j \leq n$ . Put  $\Omega' = \prod_{j=1}^{n-1} \log A_j$ . Let  $b_1, \dots, b_n$  be non-zero rational integers such that  $b_1 \log \alpha_1 + \dots + b_n \log \alpha_n \neq 0$ , where the logarithms have their principal values. Suppose that  $|b_j| \leq B$  for  $1 \leq j \leq n$  and  $B \geq 4$ . Then

$$\log |b_1 \log \alpha_1 + \dots + b_n \log \alpha_n| > -(16n)^{200n} \Omega' \log \Omega' \log A_n \log B.$$

The crucial point for the application is that there is a single factor  $\log A_n$  at the right-hand side. The following argument shows how this feature can be used to derive an upper bound for an exponent variable such that the bound is independent of the base variable.

Suppose  $a, b, c$  are fixed positive integers. Consider the equation

$$(15) \quad ax^m - by^m = c$$

in integer variables  $m, x, y$  with  $y \geq x > 1$ . It follows that

$$0 < \log \frac{a}{b} + m \log \frac{x}{y} < \frac{ax^m}{by^m} - 1 = \frac{c}{by^m}.$$

Hence, by Baker's Sharpening I, there exist constants  $C_{10}$  and  $C_{11}$ , depending on  $a, b$  and  $c$  only, such that

$$C_{10} - m \log y > \log \left| \log \frac{a}{b} + \log \frac{x}{y} \right| > -C_{11} \log y \log m.$$

This implies

$$m < C_{11} \log m + \frac{C_{10}}{\log y} \leq C_{11} \log m + 2C_{10}.$$

The numbers  $x$  and  $y$  have disappeared! We see that  $m < C_{12}$  for some computable constant  $C_{12}$  depending on  $a, b, c$  only.

By similar, but more complicated arguments it is possible to prove the claim made in the beginning of this section. We shall apply a result of Shorey et al. [24] which generalizes a theorem of A. Schinzel and the author.

**Theorem D** *Let  $S$  be the set of all non-zero integers composed of primes from some fixed finite set. Let  $f \in \mathbf{Q}[x, y]$  be a binary form with  $f(1, 0) \neq 0$  such that among the linear factors in the factorization of  $f$  at least two are distinct. Then the equation*

$$z^m = f(x, y)$$

*in integers  $m, x, y, z$  with  $y \in S, (x, y) = 1, |z| > 1$  implies that  $m < C_{13}$ , where  $C_{13}$  is a computable constant only depending on  $f$  and  $S$ .*

We apply this result as follows. We may rewrite (1) as

$$(16) \quad x^m = y^n + v^n, \quad y, v \text{ fixed, } (y, v) = 1, yv \neq 0.$$

We write  $y^n = ar^3, v^n = bs^3$ , where only finitely many possibilities for  $a$  and  $b$  are possible. Applying the above result to the binary form  $f(r, s) = ar^3 + bs^3$  we find that  $m$  is bounded. For each  $m$  there are only finitely many solutions by § 2. Thus the total number of solutions of (1) is finite.

The following consequence of Theorem D might have been applied instead.

**Theorem E** *Let  $S$  be as above. Let  $w_1, w_2 \in S$ . Let  $m \geq 1$  and  $x$  with  $|x| > 1$  be rational integers. If*

$$w_1 + w_2 = x^m,$$

*then  $m$  is bounded by a computable number depending only on  $S$ .*

It is obvious that this result applies to (16). Shorey and Stewart [25] proved such a result for algebraic numbers. They, as well as Pethő [15], showed that a simple binary non-degenerate recurrence sequence of rational integers contains only finitely many perfect powers. As a special case we have that the Fibonacci sequence contains only finitely many perfect powers.

Finally we give a third way to derive the wanted conclusion. Stewart [26, 27] proved the following result.

**Theorem F** *Suppose that  $A, B, x$  and  $y$  with  $|x| \neq |y|$  are non-zero rational integers. Then*

$$P[Ax^m + By^m] \geq C_{14} \left( \frac{m}{\log m} \right)^{1/2} \quad \text{for } m \geq C_{15}$$

*where  $C_{14}$  and  $C_{15}$  are positive computable numbers depending on  $A$  and  $B$  only.*

By applying this result to  $x^m - u^m = y^n$  we find that  $P[y]$  is bounded from below by an increasing unlimited function of  $m$ . Since  $y$  is fixed, this implies that  $m$  is bounded.

## 5 One exponent fixed

It has not been proved yet that (1) has only finitely many solutions if one of the exponents is fixed. On one hand, there is not even an effective proof for the case of two fixed exponents. On the other hand, the linear form method is at present the only one by which equations can be treated with both base and exponent variable.

One of the most advanced effective results in this direction shows that, for fixed  $m$ , (1) has only finitely many solutions in  $S$ -integers  $\xi \neq 0$  and  $\eta \neq 0$  and integer  $n \geq 2$  with  $mn \geq 6$ . A rational number is called an  $S$ -integer if its denominator is composed of primes from a given finite set  $S$ .

**Theorem G** *Let  $S$  be as above. Let  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $m \geq 2$ . The equation*

$$w_1 x^m + w_2 y^n = w$$

*in non-zero integers  $n \geq 2$ ,  $w_1 \in S$ ,  $w_2 \in S$ ,  $w \in S$ ,  $x \in \mathbf{Z}$ ,  $y \in \mathbf{Z}$ , with  $|x| > 1$ ,  $|y| > 1$ ,  $(w_1 x, w) = 1$  and  $mn \geq 6$  has only finitely many solutions. There is a computable bound for  $n, w_1, w_2, w, x, y$ .*

This result of Shorey et al. [24] is an effective improvement of an ineffective result of K. Mahler. Our assertion follows by applying the theorem to  $x^m - y^n = u^m$  where  $m$  is fixed and  $u \in S$ .

6 General results

In this section we shall present some results which tell that, under rather mild conditions, (1) has only finitely many solutions in rational numbers  $\xi, \eta$  with  $\xi\eta \neq 0$  and rational integers  $m \geq 2, n \geq 2$ . The first result with  $\xi, \eta, m, n$  variable was obtained by the author [30] when he proved that (1) has only finitely many solutions in integers  $m \geq 2, n \geq 2, x \geq 2, y \geq 2$ . This reduces the proof of the correctness of Catalan's conjecture that 8 and 9 are the only consecutive positive integers which are both perfect powers to a finite amount of work. Van der Poorten [18] extended this result by proving that (1) has only finitely many solutions in  $S$ -integers  $\xi, \eta$  with  $\xi\eta \neq 0$  and integers  $m \geq 2, n \geq 2$ . We shall prove a slightly more general assertion, namely that it suffices that a numerator or denominator of  $\xi$  or  $\eta$  belongs to  $S$ .

**Theorem 2** *Let  $S$  be the set of all non-zero integers composed of primes from some fixed finite set. Equation (2) has only finitely many solutions in non-zero integers  $m \geq 2, n \geq 2, u > 0, v > 0, x \neq 0, y \neq 0$  with  $mn \geq 6, (u, x) = (v, y) = 1$  such that at least one of the numbers  $u, v, x, y$  belongs to  $S$ .*

*Proof.* Suppose  $u$  or  $v$  is in  $S$ . Then  $z$  in (3) belongs to  $S$ . The assertion follows from the above mentioned result of van der Poorten [18].

Suppose  $y \in S$ . Then (2) can be written as

$$x^m - u^m = y^n \in S, \quad (x, u) = 1.$$

By applying Stewart's theorem F we see that  $m$  is bounded. Hence we may assume that  $m$  is fixed. We are going to apply theorem G to  $x^m - v^n = y^n$ . It follows that there are only finitely many solutions with  $|v| > 1, |x| > 1, (x, y) = 1$  and  $mn \geq 6$ . The case  $|x| = 1$  is excluded by (3). In the only remaining case,  $|v| = 1$ , the above mentioned result on Catalan's conjecture applies. □

It is appropriate to say something on the proofs of the author [30] and van der Poorten [18]. Suppose that (3) holds and  $z \in S$ . It then follows from a  $p$ -adic analogue of the linear form method due to van der Poorten [19] that for each prime  $p \in S$   $\text{ord}_p(z)$  is small. Since there are only finitely many primes in  $S$ , this implies that  $z$  itself is small. We factorize in two different ways. (Recall that  $u^m = v^n = z^{[m,n]}$ .)

$$y^n = x^m - u^m = (x - u)(x^{m-1} + x^{m-2}u + \dots + u^{m-1})$$

and, assuming that  $n$  is odd,

$$x^m = y^n + v^n = (y + v)(y^{n-1} - y^{n-2}v + \dots + v^{n-1}).$$

Since the factors on the right-hand side are almost coprime, it follows that  $x - u = ry_1^n$  and  $y + v = sx_1^m$  where  $r, s, x_1, y_1$  are integers and  $r, s$  almost constant. The precise estimate for  $z$  reveals that  $|x|$  is large with respect to  $u$  and  $|y|$  with respect to  $v$ . We obtain

$$(ry_1^n + u)^m - (sx_1^m - v)^n = z^{[m,n]},$$

which implies that  $(ry_1^n)^m$  is close to  $(sx_1^m)^n$ . Therefore  $r^m s^{-n} (y_1/x_1)^{mn}$  is close

to 1 and

$$\left| m \log r - n \log s + mn \log \frac{y_1}{x_1} \right|$$

is small. By an application of theorem C it can be proved that one of the numbers  $m, n$  is very small compared to the other. In order to prove that  $m$  and  $n$  are bounded another application to a more refined linear form is needed. These ideas will be worked out in the following proof. The only reason that the result is not effective is that Faltings' result is applied.

**Theorem 3** *Let  $m, n, u, v, x, y$  be rational integers with  $m \geq 2, n \geq 2, mn \geq 6, u \geq 1, v \geq 1, (x, u) = (y, v) = 1$  such that*

$$(2) \quad \left(\frac{x}{u}\right)^m - \left(\frac{y}{v}\right)^n = 1.$$

*Then*

$$(i) \quad |x| \geq u^{1-1/n}, \quad |y| \geq v^{1-1/m}.$$

$$(ii) \quad \text{if } m \text{ is even and } n > 2, \text{ then, for some absolute constants } C_{16} \text{ and } C_{17}, \\ |x| \leq C_{16} u^{1+C_{17}(\log n)/n}, \quad |y| \leq C_{16} v^{1+C_{17}(\log n)/n}.$$

$$(iii) \quad \text{if } n \text{ is even and } m > 2, \text{ then, for some absolute constants } C_{18} \text{ and } C_{19}, \\ |x| \leq C_{18} u^{1+C_{19}(\log m)/m}, \quad |y| \leq C_{18} v^{1+C_{19}(\log m)/m}.$$

$$(iv) \quad \text{if } mn \text{ is odd, then, for some absolute constants } C_{20} \text{ and } C_{21}, \\ |x| \leq C_{20} u^{1+C_{21}(\log t)^4/t^{1/2}}, \quad |y| \leq C_{20} v^{1+C_{21}(\log t)^4/t^{1/2}},$$

where  $t = \max(m, n)$ .

**R e m a r k.** By taking  $u = v = 1$ , we find that the equation  $x^m - y^n = 1$  in integers  $m > 1, n > 1, x > 1, y > 1$  implies that  $\max(x, y)$  is bounded. For each pair  $x, y$  there is at most one corresponding pair  $m, n$  according to § 1. Thus the Catalan equation has only finitely many solutions. An effective proof can be obtained as follows. Faltings' result is only applied in cases where  $m$  and  $n$  are bounded. Applying Theorem B to  $x^m - y^n$  instead, we obtain that  $|x|$  and  $|y|$  are bounded by a computable number (cf. Tijdeman [30]).

**P r o o f o f t h e o r e m 3.** By  $c_1, c_2, \dots$  we shall denote computable absolute positive constants.

(i) If (2) holds, then

$$|y|^n = |x^m - u^m| > u^m - (u-1)^m \geq u^{m-1} = (v^{(m-1)/m})^n.$$

Hence,  $|y| \geq v^{1-1/m}$ .

Similarly,

$$|x| \geq u^{1-1/n}.$$

(ii) Suppose  $|x| > 8^{2/m} u$ . Put  $x^m = x_1^2, u^m = u_1^2$  with  $x_1 > 0, u_1 > 0$ . Then  $(x_1, u_1) = 1$  and  $x_1^2 - u_1^2 = y^n$ . By Faltings' result (cf. § 3) applied to the equation



$(x_1/u_1)^2 - (y/v)^n = 1$ , we may assume that  $n \geq c_1$ , where  $c_1$  will be defined below. Since  $(x_1 - u_1, x_1 + u_1) | (2x_1, 2u_1) = 2$ , we obtain for some  $\delta \in \{-1, 0, 1\}$  and  $y_1, y_2 \in \mathbf{Z}, y_1 > 0, y_2 > 0$ ,

$$x_1 + u_1 = 2^{-\delta} y_1^n, \quad x_1 - u_1 = 2^\delta y_2^n.$$

Hence  $2^{-\delta} y_1^n - 2^\delta y_2^n = 2u_1$ . (cf. (15).)

Suppose  $\delta \geq 0$ . (The case  $\delta < 0$  is similar.) Then  $y_1^n \geq x_1$  and

$$\left| 2^{2\delta} \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^n - 1 \right| \leq \frac{4u_1}{y_1^n} < \frac{1}{2}.$$

Since  $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$  implies  $|\log(1 + \alpha)| \leq 2|\alpha|$  and  $u_1 \neq 0$ , we obtain

$$0 < \left| 2\delta \log 2 + n \log \frac{y_2}{y_1} \right| \leq \frac{8u_1}{y_1^n}.$$

By Theorem C there is a constant  $c_2 > 1$  such that

$$\left| 2\delta \log 2 + n \log \frac{y_2}{y_1} \right| \geq \exp(-c_2 \log n \log y_1).$$

The combination of these inequalities yields

$$8u_1 \geq y_1^{n-c_2 \log n}.$$

It follows that

$$8u_1^{m/2} \geq y_1^{n-c_2 \log n} \geq x_1^{1-c_2(\log n)/n} = (|x|^{1-c_2(\log n)/n})^{m/2}.$$

Hence  $8^{2/m} u \geq |x|^{1-c_2(\log n)/n}$ .

Choose  $c_1$  so large that  $(1 - c_2(\log n)/n)^{-1} \leq 1 + 2c_2(\log n)/n$  for  $n \geq c_1$ . Then

$$(17) \quad |x| \leq (8^{2/m} u)^{1+2c_2(\log n)/n} \leq 8^{c_2+1} u^{1+2c_2(\log n)/n}.$$

These inequalities are also satisfied if  $|x| \leq 8^{2/m} u$ . By (2) and (16),

$$\left( \frac{|y|}{v} \right)^n \leq \left( \frac{|x|}{u} \right)^m + 1 \leq 9^{2(1+2c_2(\log n)/n)} u^{2c_2 m(\log n)/n} \leq 9^{2c_2+2} v^{2c_2 \log n}.$$

This implies

$$(18) \quad |y| \leq 9^{c_2+1} v^{1+2c_2(\log n)/n}.$$

The inequalities (17) and (18) prove assertion (ii).

(iii) Suppose  $|x| > 4^{2/m} u$ . Put  $y^n = y_1^2, v^n = v_1^2$  with  $y_1 > 0, v_1 > 0$ . Then  $(y_1, v_1) = 1$  and  $y_1^2 + v_1^2 = x^m$ . By Faltings' result (cf. § 3) applied to the equation  $(x/u)^m - (y_1/v_1)^2 = 1$ , we may assume that  $m \geq c_3$ , where  $c_3$  will be defined below. Let  $2^{k_0} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$  be the canonical prime factorization of  $|x|$ . Since  $\mathbf{Z}[i]$  is a unique factorization domain and  $(y_1 + iv_1, y_1 - iv_1) | (2y_1, 2v_1) = 2$ , we obtain

$$(19) \quad y_1 + iv_1 = i^k (1 + i)^{\ell} (X_1 + iY_1)^m$$

and, by complex conjugation,

$$y_1 - iv_1 = i^{-k}(1-i)^\ell(X_1 - iY_1)^m$$

with  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\ell \in \{0, 1, 2\}$ ,  $X_1, Y_1 \in \mathbf{Z}$ . Since  $y_1^2 + v_1^2 = x^m$  and  $m > 2$ , we have  $\ell = 0$ . Hence

$$|(X_1 + iY_1)^m - (-1)^k(X_1 - iY_1)^m| \leq 2v_1.$$

Divide by  $|(X_1 + iY_1)^m| = |y_1 + iv_1| = x^{m/2}$ . We obtain

$$\left| (-1)^k \left( \frac{X_1 - iY_1}{X_1 + iY_1} \right)^m - 1 \right| \leq \frac{2v_1}{|x|^{m/2}} < \frac{1}{2}.$$

Hence, by  $v_1 \neq 0$ ,

$$0 < \left| h \log i + m \log \frac{X_1 + iY_1}{X_1 - iY_1} \right| \leq \frac{4v_1}{|x|^{m/2}},$$

where  $h \leq m + 3$ . By Theorem C there is a constant  $c_4 > 1$  such that

$$\left| h \log i + m \log \frac{X_1 + iY_1}{X_1 - iY_1} \right| \geq \exp(-c_4 \log m \log |x|),$$

since  $X_1 + iY_1$  and  $X_1 - iY_1$  are zeros of the polynomial  $X^2 - 2X_1X + (X_1^2 + Y_1^2)$ . The combination of both inequalities yields

$$4v_1 \geq |x|^{m/2 - c_4 \log m} = |x|^{m/2(1 - 2c_4(\log m)/m)}.$$

Choose  $c_3$  so large that  $(1 - 2c_4(\log m)/m)^{-1} \leq 1 + 3c_4(\log m)/m$  for  $m \geq c_3$ . It follows that

$$|x|^{m/2} \leq (4v_1)^{1 + 3c_4(\log m)/m} \leq 4^{2c_4 + 1} u^{m/2 + 2c_4 \log m}.$$

Hence  $|x| \leq 4^{(4c_4 + 2)/m} u^{1 + 4c_4(\log m)/m} \leq 4^{2c_4 + 1} u^{1 + 4c_4(\log m)/m}$ .

These inequalities are also satisfied if  $|x| \leq 4^{2/m} u$ . The further argument is similar to that in (ii).

(iv) By permuting the variables we may consider the equations

$$(20) \quad x^m - y^n = u^m = v^n$$

in rational integers  $m \geq 3$ ,  $n \geq 2$ ,  $u, v, x > 0$ ,  $y$  with  $m \geq n$ ,  $(x, u) = (y, v) = 1$  and  $\text{sgn}(u) = \text{sgn}(v)$  as well. We may assume  $|u| < x$  or  $|v| < |y|$ , hence  $y > 0$  and both  $|u| < x$  and  $|v| < y$ . Now it suffices to prove

$$(21) \quad x \leq C_{20} |u|^{1 + C_{21}(\log m)^4/m^{1/2}}, \quad y \leq C_{20} |v|^{1 + C_{21}(\log m)^4/m^{1/2}}.$$

The following observation shows that it suffices to prove

$$(22) \quad x \leq (C_{20} - 1) |u|^{1 + C_{21}(\log m)^4/m^{1/2}}.$$

If (22) holds true, then, by (20),

$$\begin{aligned} \left( \frac{y}{|v|} \right)^n &\leq \left( \frac{x}{|u|} \right)^m + 1 < ((C_{20} - 1)^m + 1) |u|^{C_{21}(\log m)^4/m^{1/2}} \\ &< C_{20}^m (|v|^n)^{C_{21}(\log m)^4/m^{1/2}}. \end{aligned}$$

Hence  $y < C_{20}|v|^{1+C_{21}(\log m)^4/m^{1/2}}$

contradicting the second inequality of (21). In proving (22) we may assume  $x > 4|u|$ . Hence, by (20),

$$\left(\frac{y}{|v|}\right)^n \geq \left(\frac{x}{|u|}\right)^m - 1 > \left(\frac{x}{2|u|}\right)^n.$$

Thus in the sequel we may use

$$(23) \quad \frac{|u|}{x} < \frac{1}{4}, \quad \frac{|v|}{y} < 2 \frac{|u|}{x} < \frac{1}{2}.$$

By Faltings' result applied to the equation  $(x/u)^m - (y/v)^n = 1$ , we may assume that  $m \geq c_5$ , where  $c_5$  will be defined below. By considering the possible common prime power factors of  $x - u$  and  $(x^m - u^m)/(x - u)$  and using the fact that  $mn$  is odd, we derive from (20) the existence of positive integers  $d_1, d_2, r, s$  with  $d_1|m, d_2|n$  such that

$$(24) \quad x - u = \frac{1}{d_1} r^n, \quad y + v = \frac{1}{d_2} s^m.$$

By (23) we have  $r > 1, s > 1$ . On substituting (24) into (20) we obtain

$$(25) \quad \left(\frac{r^n}{d_1} + u\right)^m - \left(\frac{s^m}{d_2} - v\right)^n = u^m = v^n.$$

By (24), (23) and (20) we have

$$s^{mn} \leq (n(y + |v|))^n \leq (2ny)^n \leq (2n)^n (x^m + |u|^m) \leq 2(2n)^n x^m.$$

Hence, by  $m \geq n$ ,

$$(26) \quad s \leq (4n)^{1/m} x^{1/n} \leq 3x^{1/n}.$$

Furthermore, by (24) and (23),

$$(27) \quad r^n \leq m(x + |u|) \leq 2mx,$$

hence

$$(28) \quad r \leq mx^{1/n}.$$

By (24), (20) and (23) we have

$$\left|\frac{r^n/d_1}{x} - 1\right| = \frac{|u|}{x} < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{x^m}{y^n} - 1\right| = \left(\frac{|v|}{y}\right)^n < \frac{1}{2}$$

and 
$$\left|\frac{s^m/d_2}{y} - 1\right| = \frac{|v|}{y} < \frac{1}{2}.$$

Hence 
$$\left|m \log \frac{r^n}{d_1} - m \log x\right| < 2m \frac{|u|}{x},$$

$$(29) \quad \left|m \log x - n \log y\right| < 2 \left(\frac{|v|}{y}\right)^n$$

and

$$(30) \quad \left| n \log y - n \log \frac{s^m}{d_2} \right| < 2n \frac{|v|}{y}.$$

This implies, by (23),

$$\left| -m \log d_1 + n \log d_2 + mn \log \frac{r}{s} \right| < 8m \frac{|u|}{x}.$$

Suppose the linear form vanishes. Then  $(r^n/d_1)^m = (s^m/d_2)^n$ . Hence, by (24),  $(x-u)^m = (y+v)^n$ . Let  $p$  be a prime divisor of  $x-u$ . Then  $p|y+v$  and, by (20),  $p|y$ . Thus  $p|v$  contradicting  $(y, v) = 1$ . Since  $x-u \neq \pm 1$ , the linear form is non-zero. By Theorem C, (26) and (28), we obtain

$$\left| -m \log d_1 + n \log d_2 + mn \log \frac{r}{s} \right| > \exp(-c_6(\log m)^4 \log(mx^{1/n})).$$

The combination of both inequalities yields

$$(31) \quad |u| > (8m)^{-1} e^{-c_6(\log m)^5} x^{1-c_6(\log m)^4/n}.$$

By (27) we have  $r^n \leq 2mx$ . Hence,  $n \log 2 \leq n \log r \leq \log 2m + \log x$ . This implies  $n \leq 3 \log m + 2 \log x$ . Suppose  $n > 6\sqrt{m} \log m$ . Then  $n \leq 4 \log x$ . We infer

$$(8m)^{-1} e^{-c_6(\log m)^5} \geq e^{-c_7(\log m)^5} \geq x^{-4c_7(\log m)^5/n}.$$

On substituting this into (31) we find

$$|u| > x^{1-c_8(\log m)^5/n}.$$

Taking  $c_5$  large enough, we obtain, by our supposition,

$$x < |u|^{1+2c_8(\log m)^5/n} \leq |u|^{1+c_8(\log m)^4/\sqrt{m}}$$

and we are ready. Therefore we may assume in the sequel that

$$(32) \quad n \leq 6\sqrt{m} \log m.$$

By (29) and (30) we have

$$\left| n \log d_2 + m \log \frac{x}{s^n} \right| \leq 3n \frac{|v|}{y}.$$

Suppose that the linear form vanishes. Then  $x^m = (s^m/d_2)^n$ . By (20) and (24) this implies  $y^n + v^n = (y+v)^n$ , which is a contradiction. Hence, by Theorem C and (26),

$$\left| n \log d_2 + m \log \frac{x}{s^n} \right| \geq \exp(-c_9(\log m)^3 \log((4n)^{n/m} x)).$$

The combination of these inequalities yields, by (26) and (32),

$$\frac{y}{|v|} \leq (4n)^{c_{10}n(\log m)^3/m} x^{c_9(\log m)^3} < x^{c_{11}(\log m)^3}.$$

By (20) and (32) we obtain

$$\left(\frac{x}{|u|}\right)^m \leq \left(\frac{y}{|v|}\right)^n + 1 \leq x^{c_{12}n(\log m)^3} \leq x^{6c_{12}m^{1/2}(\log m)^4}.$$

Hence  $x^{1-6c_{12}(\log m)^4/m^{1/2}} \leq |u|$ .

By choosing  $c_5$  sufficiently large, we obtain, for  $m \geq c_5$ ,

$$x \leq |u|^{1+7c_{12}(\log m)^4/m^{1/2}}.$$

This completes the proof.  $\square$

### References

- [1] Baker, A.: A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms. *Acta Arith.* **21** (1972) 117–129
- [2] Baker, A.: The theory of linear forms in logarithms. In: *Transcendence Theory: Advances and Applications*. London: Academic Press 1977, 1–27
- [3] Cassels, J. W. S.: On the equation  $a^x - b^y = 1$ . *Amer. J. Math.* **75** (1953) 159–162
- [4] Co hn, J. H. E.: On square Fibonacci numbers. *J. London Math. Soc.* **39** (1964) 537–540
- [5] Dickson, L. E.: *History of the theory of numbers*, Vol. II, 1920. Reprint: New York: Chelsea 1966
- [6] Euler, L.: *Theorematum quorundam arithmeticoꝝ demonstrationes*. *Comm. Acad. Sci. Petrop.* **10** (1738) 125–146. Reprinted in: *Opera Omnia*, Ser. I, Vol. II. Leipzig: Teubner 1915, 38–58
- [7] Evertse, J. H.: On sums of S-units and linear recurrences. *Compositio Math.*, to appear
- [8] Faltings, G.: Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.* **73** (1983) 349–366
- [9] Fueter, R.: Über kubische diophantische Gleichungen, *Comment. Math. Helv.* **2** (1930) 69–89
- [10] Hardy, G.; Wright, E. M.: *An introduction to the theory of numbers*. 4th ed. London: Oxford University Press 1960
- [11] K o t o v, S. V.: Über die maximale Norm der Idealteiler des Polynoms  $\alpha x^m + \beta y^n$  mit den algebraischen Koeffizienten. *Acta Arith.* **31** (1976) 219–230
- [12] Leveque, W. J.: On the equation  $a^x - b^y = 1$ . *Amer. J. Math.* **74** (1952) 325–331
- [13] Mignotte, M.; Shorey, T. N.; Tijdeman, R.: The distance between terms of an algebraic recurrence sequence. *J. reine angew. Math.* **349** (1984) 63–76
- [14] Mordell, L. J.: *Diophantine equations*. London: Academic Press 1969
- [15] Pethö, A.: Perfect powers in second order linear recurrences. *J. Number Theory* **15** (1982) 5–13
- [16] Pethö, A.: Full cubes in the Fibonacci sequence. *Publ. Math. Debrecen*, to appear
- [17] Pillai, S. S.: On the inequality  $0 < a^x - b^y \leq n$ , *J. Indian Math. Soc.* **19** (1931) 1–11
- [18] Van der Poorten, A. J.: Effectively computable bounds for the solutions of certain diophantine equations. *Acta Arith.* **33** (1977) 195–207
- [19] Van der Poorten, A. J.: Linear forms in logarithms in the p-adic case. In: *Transcendence Theory: Advances and Applications*. London: Academic Press 1977, 29–57
- [20] Van der Poorten, A. J.; Schlickewei, H. P.: The growth conditions for recurrence sequences. *Macquarie Univ. Math. Report 82-0041*, North Ryde, Australia, 1982
- [21] Schneider, T.: Anwendung eines abgeänderten Roth-Ridoutschen Satzes auf diophantische Gleichungen. *Math. Ann.* **169** (1967) 177–182
- [22] Shorey, T. N.: Linear forms in members of a binary recursive sequence. *Acta Arith.* **43** (1984) 317–331

- [23] Shorey, T. N.: The greatest square free factor of a member of a binary recursive sequence. *Hardy-Ramanujan J.* **6** (1983) 23–36
- [24] Shorey, T. N.; Van der Poorten, A. J.; Tijdeman, R.; Schinzel, A.: Applications of the Gel'fond-Baker method to diophantine equations. In: *Transcendence Theory: Advances and Applications*. London: Academic Press 1977, 59–77
- [25] Shorey, T. N.; Stewart, C. L.: On the diophantine equation  $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$  and pure powers in recurrence sequences. *Math. Scand.* **52** (1983) 24–36
- [26] Stewart, C. L.: Divisor properties of arithmetical sequences. Ph.D. Thesis. University of Cambridge 1976
- [27] Stewart, C. L.: On divisors of terms of linear recurrence sequences, *J. reine angew. Math.* **333** (1982) 12–31
- [28] Stroeker, R. J.; Tijdeman, R.: Diophantine equations. In: *Computational Methods in Number Theory, Part II*, M.C. Tract 155, Centr. Math. Computer Sci., Amsterdam 1982, 321–369
- [29] Szymiczek, K.: On the equations  $a^x \pm b^x = c^y$ . *Amer. J. Math.* **87** (1965) 262–266
- [30] Tijdeman, R.: On the equation of Catalan. *Acta Arith.* **29** (1976) 197–209
- [31] Wylie, O.: Squares in the Fibonacci series. *Amer. Math. Monthly* **71** (1964) 220–222

R. Tijdeman  
Mathematisch Instituut  
Rijksuniversiteit Leiden  
Wassenaarseweg 80  
2333 AL Leiden  
Niederlande

(Eingegangen 6. 2. 1984)

## Booleschwertige Logik

Sabine Koppelberg, Berlin

Seit Aristoteles (de interpr. IV, 17 a 1) betrachtet man in der klassischen Logik nur Aussagen, die entweder „wahr“ oder „falsch“ sind, also Aussagen, deren Wahrheitswerte in der Booleschen Algebra

$$2 = \{0, 1\}$$

liegen, wenn man „wahr“ mit 1 und „falsch“ mit 0 interpretiert. Es ist möglich und für einige Fragestellungen der mathematischen Logik zweckmäßig, Wahrheitswerte in beliebigen Booleschen Algebren zuzulassen. Genauer erhält man einerseits durch Betrachtung Booleschwertiger Modelle einen flexibleren Modellbegriff und kann andererseits von diesen zu 2-wertigen Modellen übergehen, indem man nach Ultrafiltern faktorisiert. Dabei zeigt sich eine Wechselwirkung zwischen mathematischen Sätzen über Boolesche Algebren und Resultaten der klassischen Logik bzw. Mengenlehre und Modelltheorie.

G. Boole hatte 1854 einen algebraischen Kalkül entwickelt, in dem Terme, die aus Variablen sowie  $+$ ,  $\cdot$ ,  $-$ , 0 und 1 aufgebaut waren, nach gewissen Regeln umgeformt wurden ([Bo], [Hai]). Die angestrebten Interpretationen des Kalküls waren zweifach: einerseits konnten die Variablen für die reellen Zahlen 0 und 1 und  $+$ ,  $\cdot$ ,  $-$  für die Operationen  $+$  <sub>$\mathbb{R}$</sub> ,  $\cdot$  <sub>$\mathbb{R}$</sub>  und  $x \mapsto 1 - x$  auf  $\mathbb{R}$  stehen – d. h. die Variablen für die Wahrheitswerte 0 und 1,  $+$  für die (ausschließende) Disjunktion,  $\cdot$  für die Konjunktion,  $-$  für die Negation. Zum anderen konnten die Variablen über Klassen laufen, wobei dann  $+$  mit der Vereinigung von (disjunkten) Klassen,  $\cdot$  mit ihrem Schnitt und  $-x$  mit der zu  $x$  komplementären Klasse zu interpretieren war. Die unzureichende Beschränkung der Operation  $+$  auf sich ausschließende Wahrheitswerte bzw. disjunkte Klassen wurde in späteren algebraischen Abhandlungen über Aussagenlogik aufgegeben ([Schr], [Wh]). Die Auffassung Boolescher Algebren als algebraischer *Strukturen* tritt zum erstenmal 1904 in einer Arbeit von Huntington ([Hu]) auf, in der für verschiedene Axiomensysteme die Unabhängigkeit der Axiome voneinander nachgewiesen wird, die Benennung dieser Strukturen als „Boolean Algebras“ bei Sheffer ([She]).

Soweit nicht anders angegeben, werden im folgenden nur klassische Logiken betrachtet, meist die Prädikatenlogik erster Stufe. Zu hier undefinierten Begriffen über Boolesche Algebren vergleiche man [Si] bzw. [Ha1], zur Logik [Shoe], zur Modelltheorie [ChKe], zur Mengenlehre [Je].

Für einen historischen Hinweis möchte ich U. Felgner danken.

## 1 Boolesche Algebren und der Stonesche Darstellungssatz

Wir wollen Boolesche Algebren als distributive, komplementäre Verbände  $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$  auffassen und i. a. mit ihrer Trägermenge  $B$  identifizieren. Ein spezielles Axiomensystem soll hier nicht betrachtet, sondern nur angemerkt werden, daß sich die Klasse der Booleschen Algebren durch endlich viele Gleichungen axiomatisieren läßt.

Das einfachste Beispiel einer Booleschen Algebra ist die Potenzmenge  $P(X)$  einer Menge  $X$ , mit den mengentheoretischen Operationen versehen. Für leeres  $X$  hat  $P(X)$  genau ein Element, d. h. in  $P(X)$  ist  $0 = 1 = x$  für jedes  $x$ ; dies ist die „triviale“ Boolesche Algebra. Hat  $X$  genau ein Element, so ist  $P(X)$  zur Standardalgebra  $2$  isomorph. Weitere recht trivial erscheinende Beispiele erhält man folgendermaßen. Sei  $B$  eine nichtleere Teilmenge von  $P(X)$ , die bzgl. endlicher Vereinigungen und Schnitte sowie Komplementbildung abgeschlossen ist.  $B$  ist dann, mit den mengentheoretischen Operationen versehen, eine Boolesche Algebra, eine sog. Mengenalgebra.

Die folgende Konstruktion liefert Boolesche Algebren, die im nächsten Abschnitt eine zentrale Rolle spielen werden und keine Mengenalgebren sind. In einer fest gewählten Logik  $L$  sei  $F$  eine nichtleere Menge von Formeln, die bzgl. der aussagenlogischen Verknüpfungen  $\wedge, \vee, \neg$  abgeschlossen ist; die Schreibweisen „ $\alpha \rightarrow \beta$ “ bzw. „ $\alpha \leftrightarrow \beta$ “ denke man sich hier und später als Abkürzungen für die Formeln  $\neg \alpha \vee \beta$  bzw.  $(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$ . Man betrachte einen Ableitbarkeitsbegriff „ $T \vdash \varphi$  ( $\varphi$  ist ableitbar aus  $T$ )“ für Theorien  $T$  und Formeln  $\varphi$ . Für  $T \subseteq F$  und  $\varphi, \psi \in F$  definiert man

$$\begin{aligned} \varphi \sim_T \psi & \text{ genau dann, wenn } T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi, \\ \bar{\varphi} & = \{ \psi \in F \mid \varphi \sim_T \psi \}, \\ B_T & = \{ \bar{\varphi} \mid \varphi \in F \}. \end{aligned}$$

Ist nun der Kalkül  $\vdash$  mindestens so stark, daß er die Gesetze der klassischen Aussagenlogik abzuleiten erlaubt, so wird  $\sim_T$  eine Äquivalenzrelation auf  $F$  und  $B_T$  eine Boolesche Algebra mit den Operationen

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} \wedge \bar{\psi} & = \overline{\varphi \vee \psi}, & \bar{\varphi} \vee \bar{\psi} & = \overline{\varphi \wedge \psi}, & -\bar{\varphi} & = \overline{\neg \varphi}; \\ 1 & = \overline{\varphi \rightarrow \varphi}, & 0 & = \overline{\neg(\varphi \rightarrow \varphi)}. \end{aligned}$$

Für die kanonische, durch  $(x \leq y$  genau dann, wenn  $x \wedge y = x)$  definierte Halbordnung von  $B_T$  gilt

$$\bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \text{ genau dann, wenn } T \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

$B_T$  heißt die Lindenbaum-Tarski-Algebra von  $T$ ; natürlich hängt sie noch von  $L, F$  und  $\vdash$  ab, was wir aber nicht notieren wollen. Sie ist offenbar genau dann nicht trivial, wenn nicht alle  $\varphi \in F$  aus  $T$  ableitbar sind;  $T$  heißt dann syntaktisch widerspruchsfrei.

Der wichtigste Satz in der Strukturtheorie der Booleschen Algebren wurde 1936 von M. H. Stone bewiesen ([St]):

**Stonescher Darstellungssatz** *Jede Boolesche Algebra ist zu einer Mengenalgebra isomorph.*



Wegen der Bedeutung nicht nur des Satzes, sondern auch der im Beweis benutzten Begriffsbildung für die folgenden Kapitel geben wir eine Beweisskizze.

Sei  $B$  eine Boolesche Algebra. Ein *Ultrafilter* von  $B$  ist eine Teilmenge  $p$  von  $B$  mit  $1 \in p$  und, für  $x, y \in B$ :

- aus  $x, y \in p$  folgt  $x \wedge y \in p$ ,
- aus  $x \in p$  und  $x \leq y$  folgt  $y \in p$ ,
- $\neg x \in p$  genau dann, wenn  $x \notin p$ .

Die Ultrafilter von  $B$  entsprechen den Homomorphismen von  $B$  nach  $2$  (denn  $p \subseteq B$  ist genau dann Ultrafilter, wenn die charakteristische Funktion  $\chi_p : B \rightarrow 2$  von  $p$  Homomorphismus ist) bzw. den Primidealen des zu  $B$  assoziierten Booleschen Rings. Es gilt:

**Boolescher Primidealsatz (BPI)** Für jedes  $b \in B \setminus \{0\}$  gibt es einen Ultrafilter  $p$  mit  $b \in p$ .

Zum Beweis des Stoneschen Satzes setze man

$$X = \{p \subseteq B \mid p \text{ ist Ultrafilter von } B\}$$

und  $h : B \rightarrow P(X)$

$$b \mapsto \{p \in X \mid b \in p\}.$$

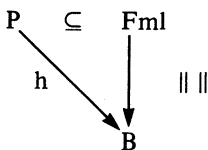
Aus der Ultrafilter-Eigenschaft der  $p \in X$  ergibt sich, daß  $h$  Homomorphismus ist, aus BPI, d. h. der Existenz genügend vieler  $p \in X$ , die Injektivität von  $h$ .

Der Boolesche Primidealsatz folgt leicht aus dem Zornschen Lemma, ist aber echt schwächer ([Hal, Le]). Andererseits läßt er sich für überabzählbare Boolesche Algebren nicht aus den üblichen Axiomen etwa der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre ohne Auswahlaxiom ableiten ([Fef]).

## 2 Modellkonstruktionen

In diesem Kapitel geben wir Zusammenhänge zwischen dem Booleschen Primidealsatz und Vollständigkeitssätzen der klassischen Logik an. Diese Sätze wurden, jeweils für abzählbare Sprachen, zuerst 1921 von Post für die Aussagenlogik und 1930 von Gödel für die Prädikatenlogik bewiesen. Die hier gegebenen algebraischen Beweise stammen von Rasiowa und Sikorski (1950); siehe [RaSi]). Wir beginnen mit dem einfachsten Beispiel, der klassischen Aussagenlogik. Hier ist der Zusammenhang zwischen BPI und Vollständigkeitssatz besonders frappierend.

Sei  $Fml$  die Menge aller Formeln über einer Menge  $P$  von Aussagenvariablen und  $B$  eine Boolesche Algebra. Eine Boolesche Bewertung von  $Fml$  in  $B$  ist dann eine Abbildung  $\| \cdot \|$  von  $Fml$  in  $B$



so daß für alle Formeln  $\alpha$  und  $\beta$

$$\begin{aligned} \|\alpha \wedge \beta\| &= \|\alpha\| \wedge \|\beta\| \\ (1) \quad \|\alpha \vee \beta\| &= \|\alpha\| \vee \|\beta\| \\ \|\neg \alpha\| &= -\|\alpha\|. \end{aligned}$$

Dabei heißt  $\|\alpha\|$  der Wahrheitswert von  $\alpha$ , und  $\alpha$  heißt „wahr“ bzgl. der Abbildung  $\|\cdot\|$ , falls  $\|\alpha\| = 1$ , „falsch“, falls  $\|\alpha\| = 0$ .

Es ist klar, daß die Abbildung  $\|\cdot\|$  durch ihre Einschränkung  $h$  auf  $P$  sowie die Forderungen (1) eindeutig bestimmt ist und zu gegebenem  $h : P \rightarrow B$  genau eine Boolesche Bewertung  $\|\cdot\|_h$  existiert, die  $h$  fortsetzt. Für den Fall  $B = 2 = \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$  entsprechen die Booleschen Bewertungen offenbar dem induktiven Berechnen von Wahrheitswerten mit Hilfe des bekannten Wahrheitstafelverfahrens; man spricht von 2-wertigen bzw. zweiwertigen Modellen.

Die Bewertung  $\|\cdot\|$  heißt ein ( $B$ -wertiges) Modell einer Theorie  $T \subseteq \text{Fml}$ , wenn alle  $\alpha \in T$  wahr bzgl.  $\|\cdot\|$  sind. Im folgenden sei  $\vdash$  ein fester, für die klassische Aussagenlogik geeigneter, Kalkül, etwa der aus [Shoe]. Der folgende, leicht zu beweisende Satz zeigt, daß der Kalkül  $\vdash$  nicht mehr ableitet, als Booleschwertig vernünftig ist.

**Korrektheitssatz der klassischen Aussagenlogik** *Gilt  $T \vdash \varphi$ , so ist  $\varphi$  in jedem Booleschwertigen Modell von  $T$  wahr – insbesondere in jedem zweiwertigen.*

Die Umkehrung des Korrektheitssatzes ist etwas weniger trivial und läßt sich bei Benutzung Booleschwertiger Modelle sehr durchsichtig beweisen:

**Vollständigkeitssatz der klassischen Aussagenlogik** *Ist  $\varphi$  in jedem zweiwertigen Modell von  $T$  wahr, so gilt  $T \vdash \varphi$ .*

**B e w e i s.** Wir nehmen an,  $\varphi$  sei nicht aus  $T$  ableitbar. Die Abbildung, die jeder Formel  $\alpha$  ihre Restklasse  $\bar{\alpha}$  bzgl.  $\sim_T$  zuordnet, ist eine Boolesche Bewertung  $\|\cdot\|_T$  in der Lindenbaum-Tarski-Algebra  $B_T$  (bzgl.  $F = \text{Fml}$  und unseres Kalküls  $\vdash$ ), und wegen  $T \not\vdash \varphi$  ist  $\|\varphi\|_T \neq 1$ , d. h.  $\|\neg \varphi\|_T \neq 0$ . Sei nach dem Booleschen Primidealsatz  $p$  ein Ultrafilter von  $B_T$ , der  $\|\neg \varphi\|_T$  enthält, und  $f : B_T \rightarrow 2$  der zu  $p$  gehörige Homomorphismus:

$$\text{Fml} \xrightarrow{\|\cdot\|_T} B_T \xrightarrow{f} 2.$$

Die Abbildung

$$\|\cdot\| = f \circ \|\cdot\|_T$$

ist Boolesche Bewertung, da  $f$  Homomorphismus ist, und Modell von  $T$ , denn für  $\alpha \in T$  gilt  $1 = \bar{\alpha} = \|\alpha\|_T$ , also  $\|\alpha\| = 1$ . Wegen  $\|\neg \varphi\|_T \in p$  ist jedoch  $\|\neg \varphi\| = 1$ , d. h.  $\|\varphi\| = 0$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes.  $\square$

Interessanterweise folgt der Boolesche Primidealsatz seinerseits ohne Benutzung des Auswahlaxioms aus dem Vollständigkeitssatz. Sei nämlich  $B$  eine Boolesche Algebra und  $b \in B$  mit  $b \neq 0$ . Man wähle die Menge  $P$  der Aussagenvariablen so groß, daß es eine surjektive Abbildung  $h : P \rightarrow B$  gibt. Insbesondere wird  $\|\cdot\|_h : \text{Fml} \rightarrow B$  surjektiv; sei  $\varphi$  eine Formel mit  $b = \|\varphi\|_h$ .  $\|\cdot\|_h$  ist  $B$ -wertiges Modell

von

$$T = \{ \alpha \in \text{Fml} \mid \|\alpha\|_h = 1 \},$$

und wegen  $b \neq 0$  folgt aus dem Korrektheitssatz, daß  $\neg \varphi$  nicht aus  $T$  ableitbar ist. Nach dem Vollständigkeitssatz wähle man ein zweiwertiges Modell  $\|\cdot\| : \text{Fml} \rightarrow 2$  von  $T$ , in dem  $\neg \varphi$  falsch,  $\varphi$  also wahr ist. Dann ist

$$p = \{ \|\alpha\|_h \mid \alpha \in \text{Fml}, \|\alpha\| = 1 \}$$

ein Ultrafilter von  $B$ , der wegen  $\|\varphi\|_h = b$  und  $\|\varphi\| = 1$   $b$  enthält.

Das bisher Gesagte zeigt vielleicht hinlänglich den sehr engen Zusammenhang zwischen klassischer Aussagenlogik und Booleschen Algebren. Dieser ist aber nicht allzu überraschend, denn das, was wir heute die Axiome für Boolesche Algebren nennen, wurde von Boole ja als eine Algebraisierung der Aussagenlogik entworfen. Interessanter wird die Benutzung von Booleschwertigen Methoden in der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe. Sei  $\mathcal{L}$  eine feste Sprache (siehe etwa [ChKe]) und  $\text{Fml}$  die Menge aller  $\mathcal{L}$ -Formeln in der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität. Eine  $B$ -wertige  $\mathcal{L}$ -Struktur ist eine Folge

$$A = (A, B, \|\cdot\|),$$

wobei  $A$  eine nichtleere Menge sei (die Trägermenge von  $A$ ),  $B$  eine Boolesche Algebra und  $\|\cdot\|$  eine Abbildung, die jeder Formel  $\varphi(x_1 \dots x_n)$  in  $\mathcal{L}$  und jeder Belegung der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit Elementen  $a_1, \dots, a_n$  von  $A$  einen Wert

$$\|\varphi[a_1 \dots a_n]\| \in B$$

zuordnet, so daß außer den Forderungen (1) gilt:

- (2)  $\|\exists x \varphi(x x_1 \dots x_n)[a_1 \dots a_n]\| = \sup^B \{ \|\varphi[aa_1 \dots a_n]\| \mid a \in A \}$   
 $\|\forall x \varphi(x x_1 \dots x_n)[a_1 \dots a_n]\| = \inf^B \{ \|\varphi[aa_1 \dots a_n]\| \mid a \in A \}$
- (3)  $\|\varphi[a_1 \dots a_n]\| = 1$  für jedes identitätslogische Axiom  $\varphi(x_1 \dots x_n)$ .

Dabei wähle man die Liste der identitätslogischen Axiome aus einem festen Kalkül  $\vdash$ , siehe etwa [Shoe].  $\sup^B M$  und  $\inf^B M$  bezeichnen Supremum bzw. Infimum einer Teilmenge  $M$  von  $B$  bzgl. der kanonischen Halbordnung von  $B$ ; Forderung (2) schließt also insbesondere die Existenz dieser Suprema bzw. Infima ein. Sie ist z. B. für vollständiges  $B$  immer gegeben. Der Grund für Forderung (2) liegt auf der Hand: der Boolesche Wert einer endlichen Disjunktion ist das Supremum der Werte der Disjunktionsglieder, und die Existenzaussage „es gibt ein  $a \in A$  mit  $\varphi[a]$ “ läßt sich als unendliche Disjunktion der Aussagen  $\varphi[a]$ ,  $a \in A$ , deuten. Eine äquivalente Beschreibungsmöglichkeit für  $A$  ist die, nur  $A$ ,  $B$  und die Werte  $\|\varphi[a_1 \dots a_n]\|$  für atomare Formeln  $\varphi$  vorzugeben. Die Wahrheitswerte beliebiger Formeln werden dann nach (1) und (2) induktiv gebildet; man beachte aber, daß bei der Vorgabe der  $\|\varphi[a_1 \dots a_n]\|$  für atomares  $\varphi$  Forderung (3) erfüllt sein muß. Man wird versuchen, Korrektheits- und Vollständigkeitssatz auf die Prädikatenlogik zu übertragen. Dabei nennt man  $\varphi(x_1 \dots x_n)$  wahr in  $A$  oder  $A$  ein Modell von  $\varphi$ , wenn  $\|\varphi[a_1 \dots a_n]\| = 1$  für jede Belegung  $a_1, \dots, a_n$  in  $A$ .  $A$  heißt Modell einer Theorie  $T$  in  $\mathcal{L}$ , falls alle  $\varphi \in T$  in  $A$  wahr sind. Der Korrektheitssatz gilt dann wörtlich wie oben. Der Vollständigkeitssatz gilt ebenfalls, läßt sich aber mit eini-

germaßen natürlichen Booleschwertigen Methoden nur für abzählbare Sprachen  $\mathcal{L}$  zeigen. Wir beweisen eine äquivalente Formulierung:

**Modellexistenzsatz** *Jede syntaktisch widerspruchsfreie Theorie in einer abzählbaren Sprache hat ein abzählbares zweiwertiges Modell.*

**B e w e i s.**  $T$  sei syntaktisch widerspruchsfrei in der abzählbaren Sprache  $\mathcal{L}$ . In einem ersten Schritt konstruieren wir ein Booleschwertiges Modell  $A = (A, B, \|\cdot\|)$  von  $T$ ; im zweiten Schritt faktorisieren wir es nach einem Ultrafilter  $p$  zu einem zweiwertigen Modell  $A/p = (A/p, 2, \dots)$ .

$B$  sei die Lindenbaum-Tarski-Algebra von  $T$  bzgl. der Menge  $F = Fml$  aller  $\mathcal{L}$ -Formeln und unseres Kalküls  $\vdash$ ,  $A$  die Menge aller Terme in  $\mathcal{L}$ , und für eine  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi(x_1 \dots x_n)$  und  $t_1, \dots, t_n \in A$  sei

$$\|\varphi[t_1 \dots t_n]\| = \overline{\varphi(t_1 \dots t_n)},$$

die Restklasse in  $B_T = B$  der Formel  $\varphi(t_1 \dots t_n)$ , die aus  $\varphi(x_1 \dots x_n)$  durch Substitution von  $t_i$  für  $x_i$  entsteht. Die Algebra  $B$  ist höchstens abzählbar und daher i. a. nicht vollständig, so daß die Gültigkeit von (2) überraschen mag. Wegen

$$\vdash \forall x \varphi \leftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi$$

und  $\inf^B M = - \sup^B \{-m \mid m \in M\}$

können wir uns im Folgenden auf die Behandlung von Existenzformeln beschränken. (2) behauptet, daß mit

$$M = M_{\varphi, t_1 \dots t_n} = \{\overline{\varphi(t t_1 \dots t_n)} \mid t \in A\}$$

gilt:  $\overline{\exists x \varphi(x t_1 \dots t_n)} = \sup^B M$ .

Aber  $\overline{\varphi(t t_1 \dots t_n)} \leq \overline{\exists x \varphi(x t_1 \dots t_n)}$

ist wegen

$$\vdash \varphi(t t_1 \dots t_n) \rightarrow \exists x \varphi(x t_1 \dots t_n)$$

trivial. Ist umgekehrt  $\bar{\psi}$  eine obere Schranke von  $M$  in  $B$ , so wähle man eine Variable  $y$ , die in  $\psi$  nicht frei vorkommt; es ist dann

$$T \vdash \varphi(y t_1 \dots t_n) \rightarrow \psi$$

und daher

$$T \vdash \exists y \varphi(y t_1 \dots t_n) \rightarrow \psi,$$

$$T \vdash \exists x \varphi(x t_1 \dots t_n) \rightarrow \psi,$$

d. h.  $\overline{\exists x \varphi(x t_1 \dots t_n)} \leq \bar{\psi}$ .

Die so erhaltene  $B$ -wertige Struktur  $A$  ist Modell von  $T$ , denn für jedes  $\varphi \in T$  gilt  $\|\varphi\| = \bar{\varphi} = 1$ .

Die Idee des zweiten Schrittes ist, für einen Ultrafilter  $p$  von  $B_T$  zu definieren:

$$A/p = (A/p, 2, \dots).$$

Und zwar nenne man  $t, t' \in A$  äquivalent bzgl.  $p$ , falls  $\|t = t'\| \in p$ .  $A/p$  sei die Menge der Restklassen  $t/p$  mit  $t \in A$  bzgl. dieser Äquivalenzrelation und die

Struktur  $A/p$  im übrigen so definiert, daß die folgende, als „Wahrheitslemma“ bezeichnete Aussage gilt:

$$(4) \quad A/p \models \varphi[t_1/p \dots t_n/p] \text{ genau dann, wenn } \|\varphi[t_1 \dots t_n]\| \in p.$$

Dabei bedeutet  $B \models \varphi[b_1 \dots b_n]$  wie üblich (siehe [ChKe]): „ $\varphi$  ist wahr in  $B$ , wenn  $x_1, \dots, x_n$  mit  $b_1, \dots, b_n \in B$  belegt werden“.

Genauer gesagt interpretiert man die Symbole von  $\mathcal{L}$  in  $A/p$  so, daß (4) für atomares  $\varphi$  gilt, und versucht dann, für beliebige Formeln (4) induktiv zu beweisen. Bei der Behandlung von Disjunktionen und Negationen treten keine Probleme auf, da  $p$  einem Homomorphismus  $f : B \rightarrow 2$  entspricht. Der Beweis von (4) für Existenzformeln erfordert aber, daß  $f$  die Suprema der Mengen  $M_{\varphi, t_1 \dots t_n}$  erhält, und das ist für beliebige Homomorphismen von  $B$  nach  $2$  i. a. nicht der Fall. Jedoch läßt sich der Beweis durch eine intelligentere Wahl von  $p$  bzw.  $f$  vervollständigen, denn es gilt die folgende Verschärfung des Booleschen Primidealsatzes (siehe [RaSi]):

**Rasiowa-Sikorski-Lemma** *B sei eine nichttriviale Boolesche Algebra und  $\mathfrak{M}$  eine abzählbare Familie von Teilmengen von  $B$ , so daß  $\sup^B M$  für jedes  $M \in \mathfrak{M}$  existiert. Dann gibt es einen Ultrafilter  $p$  von  $B$ , so daß der zugehörige Homomorphismus  $f : B \rightarrow 2$  für jedes  $M \in \mathfrak{M}$  das Supremum  $\sup^B M$  erhält.*

Nun sei  $\mathfrak{M}$  die Familie aller Mengen  $M_{\varphi, t_1 \dots t_n}$  mit  $\varphi(x_1 \dots x_n) \in \text{Fml}$  und  $t_1, \dots, t_n \in A$ ; mit  $\mathcal{L}$  ist  $\mathfrak{M}$  abzählbar. Wählt man  $p$  nach dem Rasiowa-Sikorski-Lemma, so gilt (4) für alle Formeln  $\varphi$ , und  $A/p$  ist ein Modell von  $T$ . Mit  $A$  ist auch  $A/p$  abzählbar. □

Für überabzählbare Familien  $\mathfrak{M}$  ist das Rasiowa-Sikorski-Lemma i. a. falsch. Es soll aber noch erwähnt werden, daß der algebraische Beweis des Modellexistenzsatzes sich auf überabzählbare Sprachen übertragen läßt (siehe Aufgabe 2.2.19 in [ChKe]), jedoch durch die zusätzlich erforderliche Arbeit viel von seiner Attraktivität verliert. Wir geben stattdessen einige Beispiele, wie leichte Variationen des obigen Beweises schärfere Modellexistenzsätze liefern.

Der folgende Satz stammt von Grzegorzcyk, Mostowski und Ryll-Nardzewski (1961); die hier nicht definierten Begriffe und den üblichen Beweis findet man z. B. in [ChKe].

**Typauslassungssatz** *T sei eine syntaktisch widerspruchsfreie Theorie in einer abzählbaren Sprache  $\mathcal{L}$  und  $S$  eine abzählbare Menge von Typen in  $\mathcal{L}$ ; jedes  $\Sigma \in S$  werde von  $T$  lokal ausgelassen. Dann hat  $T$  ein abzählbares Modell, das alle Typen aus  $S$  ausläßt.*

**B e w e i s.** Man konstruiert  $A = (A, B_T, \|\cdot\|)$  wie im Modellexistenzsatz. Für  $\Sigma(x_1 \dots x_n) \in S$  und  $t_1, \dots, t_n \in A$  gilt, da  $\Sigma$  von  $T$  lokal ausgelassen wird,

$$(5) \quad \inf^{B_T} \{ \|\sigma[t_1 \dots t_n]\| \mid \sigma(x_1 \dots x_n) \in \Sigma \} = 0.$$

Da  $S$  und  $A$  abzählbar sind, gibt es einen Ultrafilter  $p$ , dessen zugehöriger Homomorphismus  $f : B_T \rightarrow 2$  außer den im Modellexistenzsatz betrachteten Suprema auch die in (5) auftretenden Infima erhält.  $A/p$  ist dann abzählbares Modell von  $T$  und läßt jedes  $\Sigma(x_1 \dots x_n) \in S$  aus: seien  $t_1, \dots, t_n \in A$ . Wegen (5) und der Wahl

von  $p$  gibt es ein  $\sigma \in \Sigma$  mit  $\|\sigma[t_1 \dots t_n]\| \notin p$ , was nach dem Wahrheitslemma  $A/p \neq \sigma[t_1/p \dots t_n/p]$  bedeutet.  $\square$

Die Lindenbaum-Tarski-Algebra  $B_T$  im letzten Beweis ist abzählbar und erfüllt damit die abzählbare Kettenbedingung (im Englischen mit ccc, „countable chain condition“, abgekürzt): jede Familie von paarweise disjunkten Elementen von  $B_T$  ist abzählbar. Nun läßt sich Martins Axiom, eine Abschwächung der speziellen Kontinuumhypothese, die viele interessante kombinatorische Auswirkungen hat (siehe [Ku] und auch das folgende Kapitel), äquivalent formulieren als:

**Martins Axiom** Die Aussage des Rasiowa-Sikorski-Lemmas gilt für Familien  $\mathfrak{M}$  mit  $|\mathfrak{M}| < 2^{\aleph_0}$ , falls  $B$  ccc erfüllt.

Insbesondere gilt unter Voraussetzung von Martins Axiom der Typauslassungssatz für alle Mengen  $S$  von Typen mit  $|S| < 2^{\aleph_0}$ .

Der Vollständigkeits- bzw. Modellexistenzsatz für die Prädikatenlogik  $L_{\omega_1\omega}$  ([Ke]) läßt sich ebenso algebraisch beweisen wie der für die bisher betrachtete Logik  $L_{\omega\omega}$  mit Formeln endlicher Länge; tatsächlich war sein erster Beweis von Karp ([Ka1]) der hier skizzierte.  $L_{\omega_1\omega}$  ist dabei die Erweiterung von  $L_{\omega\omega}$  um Disjunktionen  $\bigvee \Phi$  und Konjunktionen  $\bigwedge \Phi$  abzählbarer Formelmengen  $\Phi$ ; in  $B$ -wertigen  $\mathcal{L}$ -Strukturen  $A$  verlangt man natürlich

$$(6) \quad \|\bigvee \Phi\| = \sup^B \{ \|\varphi\| \mid \varphi \in \Phi \}$$

und analog für Konjunktionen.

**Modellexistenzsatz für  $L_{\omega_1\omega}$**   $F$  sei ein abzählbares Fragment von  $L_{\omega_1\omega}$ ,  $T$  eine syntaktisch widerspruchsfreie Theorie in  $F$ . Dann hat  $T$  ein Modell.

**B e w e i s.** Man bildet die Lindenbaum-Tarski-Algebra  $B_T$  von  $T$  bzgl. des gegebenen Fragments  $F$  und des in [Ke] angegebenen Kalküls  $\vdash$  und verfährt wie im Beweis des Modellexistenzsatzes für  $L_{\omega\omega}$ . Dabei wählt man  $p$  so, daß der zugehörige Homomorphismus  $f$  auch die unter (6) auftretenden Suprema für  $\bigvee \Phi \in F$  erhält; dies ist wegen der Abzählbarkeit von  $F$  möglich.  $\square$

Kombination der beiden vorangehenden Beweise ergibt ([Ke]):

**Typauslassungssatz für  $L_{\omega_1\omega}$**   $F$  sei ein abzählbares Fragment von  $L_{\omega_1\omega}$ ,  $T \subseteq F$  eine syntaktisch widerspruchsfreie Theorie und  $S$  eine abzählbare Menge von Typen  $\Sigma \subseteq F$ . Läßt  $T$  alle  $\Sigma \in S$  lokal aus, so hat  $T$  ein abzählbares Modell, das alle  $\Sigma \in S$  ausläßt.

Die Wechselwirkung zwischen Sätzen über Boolesche Algebren – hier dem Rasiowa-Sikorski-Lemma – und Vollständigkeitsätzen illustriert noch folgender Satz ([Ka1]).  $\kappa$  sei eine reguläre unendliche Kardinalzahl und  $L_\kappa$  die Aussagenlogik mit  $\gamma$  Aussagenvariablen sowie Konjunktionen und Disjunktionen von weniger als  $\kappa$  Formeln; ein Kalkül  $\vdash_\kappa$  für  $L_\kappa$  wird in [Ka1], 5.11 angegeben. Man betrachte für eine Formel  $\alpha$  in  $L_\kappa$  die Aussagen:

- $\alpha$  ist im Kalkül  $\vdash_\kappa$  ableitbar
- $\alpha$  ist (bei jeder Belegung der Aussagenvariablen) wahr in jeder  $<\kappa$ -vollständigen Booleschen Algebra

- c)  $\alpha$  ist wahr in jeder  $<\kappa$ -darstellbaren,  $<\kappa$ -vollständigen Booleschen Algebra  
 d)  $\alpha$  ist wahr in jeder  $<\kappa$ -Mengenalgebra  
 e)  $\alpha$  ist wahr in 2.

**Satz Die Implikationen**

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e)$$

gelten für jedes  $\alpha$  und jede Kardinalzahl  $\kappa$ . e)  $\Rightarrow$  a) gilt genau dann für jedes  $\alpha$ , wenn jede  $<\kappa$ -vollständige Boolesche Algebra, die von höchstens  $\gamma$  Elementen  $<\kappa$ -erzeugt wird,  $<\kappa$ -darstellbar ist.

Nach dem Satz von Loomis-Sikorski ([Si]) gilt der Vollständigkeitssatz für  $L_\kappa$  ( $\vdash_\kappa \alpha$  genau dann, wenn  $\alpha$  bei jeder Belegung der Aussagenvariablen in 2 wahr ist) für  $\kappa = \aleph_1$  – wir haben oben sogar den Vollständigkeitssatz für die Prädikatenlogik  $L_{\omega_1\omega}$  bewiesen. Er ist jedoch falsch für  $\kappa > \aleph_1$ , da für solche  $\kappa$  Boolesche Algebren existieren, die  $<\kappa$ -vollständig, aber nicht  $<\kappa$ -darstellbar sind ([Ka2]).

### 3 Unabhängigkeitsbeweise

Die Benutzung von nicht-Booleschen Wahrheitswertalgebren kann beim Nachweis der Nichtableitbarkeit gewisser Axiome bzw. Axiomenschemata zweckmäßig sein. So gab z. B. Lukasiewicz 1920 mit Hilfe mehrwertiger Logiken Unabhängigkeitsbeweise für Axiomenschemata der Aussagenlogik. 1948 zeigte Mostowski die Nicht-Ableitbarkeit einiger Aussagen im intuitionistischen Prädikatenkalkül unter Benutzung von Heytingwertigen Strukturen ([Most]); diese waren das Vorbild für den algebraischen Modellbegriff von Rasiowa und Sikorski.

Grundsätzlich können nun Booleschwertige Strukturen nicht mehr Unabhängigkeitsbeweise liefern als zweiwertige, denn Korrektheits- und Vollständigkeitssatz der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe ergeben, daß eine Aussage  $\varphi$  genau dann in jedem Booleschwertigen Modell einer Theorie T wahr ist, wenn sie in jedem zweiwertigen Modell von T wahr ist. Da T aber mehr Booleschwertige als zweiwertige Modelle hat, ist es manchmal natürlicher,  $T \not\vdash \varphi$  durch ein Booleschwertiges Modell zu zeigen. Wir beschreiben im folgenden die sog. Cohensche Erzwingungsmethode (1963) für Unabhängigkeitsbeweise in der Mengenlehre mit Hilfe Booleschwertiger Modelle. Cohens ursprüngliche Methode benutzte Halbordnungen statt Boolescher Algebren, und die Wahl der „richtigen“ Halbordnung für eine geplante Anwendung ist auch intuitiv meist einfacher als die der entsprechenden Booleschen Algebra. Erst 1967 erkannten Scott und Solovay und unabhängig davon Vopěnka, daß es sich bei Cohens Methode um eine Anwendung Booleschwertiger Modelle handelt. Die folgende Zusammenfassung läßt viele begrifflich und technisch schwierige Details aus; hierzu siehe etwa [Be] und [Je].

Sei  $M$  (genauer:  $(M, \in \upharpoonright M)$ ) ein zweiwertiges abzählbares transitives Modell von ZFC, der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre mit Auswahlaxiom.  $B$  sei ein Element von  $M$ , das im Sinne von  $M$  vollständige Boolesche Algebra ist. In Abhängigkeit von  $B$  kann man ein Booleschwertiges Modell

$$A_B = (M^{(B)}, B, \parallel_B)$$

für die Sprache  $\mathcal{L} = \{\epsilon\}$  von ZF so definieren, daß  $M^{(B)} \subseteq M$  und für jedes Axiom  $\alpha$  von ZFC  $\|\alpha\|_B = 1$  gilt. Wichtig ist dabei, daß ein großer Teil der Konstruktion innerhalb von  $M$  formulierbar ist. Z. B. ist  $M^{(B)}$  und für jede ZF-Formel  $\varphi(x_1 \dots x_n)$  auch

$$\{(f_1, \dots, f_n, b) \mid f_1, \dots, f_n \in M^{(B)}, b \in B, b = \|\varphi[f_1 \dots f_n]\|_B\}$$

eine in  $M$  definierbare Klasse.

Ist nun  $\alpha$  eine Aussage in der Sprache von ZF mit  $\|\alpha\|_B \neq 1$ , so besagt der Korrektheitsatz der Prädikatenlogik, daß  $\alpha$  nicht aus ZFC ableitbar ist. Da  $B$  innerhalb von  $M$  eine beliebige vollständige Boolesche Algebra sein darf, wird man versuchen, durch passende Wahl von  $B$ ,  $\|\alpha\|_B \neq 1$  zu erreichen. Wir schreiben von jetzt an  $\|$  statt  $\|\|_B$ .

$A_B$  hat eine spezielle, sehr angenehme Eigenschaft:

**Maximumprinzip** *Ist  $\varphi(x_1 \dots x_n)$  ZF-Formel und sind  $f_1, \dots, f_n \in M^{(B)}$ , so gibt es ein  $f \in M^{(B)}$  mit*

$$\|\exists x\varphi(x_1 \dots x_n)[f_1 \dots f_n]\| = \|\varphi[ff_1 \dots f_n]\|.$$

Das auf der linken Seite zu bildende Supremum wird also bei  $f$  angenommen und daher von jedem Ultrafilter  $p$  von  $B$  (d. h. vom zugehörigen Homomorphismus von  $B$  nach  $2$ ) erhalten; für den zweiwertigen Quotienten  $A_B/p$  gilt das Wahrheitslemma. Trotzdem ist es nützlich,  $p$  mit Hilfe des Rasiowa-Sikorski-Lemmas sorgfältiger zu wählen: man nennt einen Ultrafilter  $p$  von  $B$  *generisch* über  $M$  und  $B$ , falls  $p$  für jede Teilmenge  $X$  von  $B$ , die Element von  $M$  ist,  $\sup^B X$  erhält. Ein solches  $p$  kann i. a. nicht in  $M$  existieren. Da aber  $M$  als abzählbar vorausgesetzt war, gibt es jedenfalls nach dem Rasiowa-Sikorski-Lemma generische Ultrafilter. Mit  $M$  sind  $M^{(B)} \subseteq M$  und  $M^{(B)}/p$  abzählbar, und man kann zeigen, daß für generisches  $p$  das Modell  $A_B/p$  fundiert ist. Es ist daher zu genau einem transitiven Modell isomorph, das mit  $M[p]$  bezeichnet wird.  $M[p]$  hat dieselben Ordinalzahlen wie  $M$  und läßt sich folgendermaßen charakterisieren:

**Satz vom generischen Modell**  $M[p]$ , *die generische Erweiterung von  $M$  durch  $p$ , ist das kleinste transitive Modell  $N$  von ZF mit  $M \subseteq N$  und  $p \in N$ .*

Da mit  $M$  auch  $M[p]$  das Auswahlaxiom erfüllt, läßt sich die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von ZF nicht ohne weiteres mit der Methode der generischen Modelle zeigen, wohl aber durch Kombination dieser Methode mit der alten Fraenkel-Mostowski-Methode der sog. Permutationsmodelle; siehe z. B. [Fe1] für eine größere Anzahl von Beispielen. Wir gehen auf Modelle, in denen das Auswahlaxiom falsch ist, nicht näher ein und deuten als Paradebeispiel von Cohens Konstruktion den Unabhängigkeitsbeweis der speziellen Kontinuumhypothese  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$  an. Zunächst gilt:

**Lemma** *Erfüllt  $B$  im Sinne von  $M$  ccc, so haben  $M$  und  $M[p]$  dieselben Kardinalzahlen.*

Sei  $\kappa$  die Kardinalzahl  $\aleph_2$  im Sinne von  $M$ . In  $M$  versehe man die Menge  $2 = \{0, 1\}$  mit der diskreten und  $P = 2^{\kappa \times \aleph}$  mit der Produkttopologie; für  $B$  wähle man die vollständige Boolesche Algebra der regulär offenen Teilmengen von  $P$ .  $B$  erfüllt



dann die ccc. Sei  $p$  ein generischer Ultrafilter von  $B$ . Nach dem vorangehenden Lemma ist  $\kappa$  auch im Sinne von  $M[p]$  die Kardinalzahl  $\aleph_2$ . Für  $\alpha \in \kappa, n \in \mathbf{N}, \epsilon \in 2$  ist

$$b_{\alpha n \epsilon} = \{x \in P \mid x(\alpha, n) = \epsilon\}$$

offen-abgeschlossen in  $P$ , also ein Element von  $B$ ; mit  $p$  liegt auch die durch

$$a_\alpha = \{n \in \mathbf{N} \mid b_{\alpha n 1} \in p\}$$

definierte Familie  $a = (a_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$  in  $M[p]$ . Wir zeigen, daß die  $a_\alpha$  paarweise verschieden sind: für  $\alpha \neq \beta$  ist

$$X = \{b_{\alpha n 1} \cap b_{\beta n 0} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

eine Teilmenge von  $B$ , die in  $M$  liegt. Da  $P = 2^{\kappa \times \mathbf{N}}$  die Produkttopologie trägt und die Indexmenge  $\kappa \times \mathbf{N}$  unendlich ist, ist die Vereinigung der Elemente von  $X$  dicht in  $P$ , also  $\sup^B X = 1$ ; da  $p$  generisch ist, liegt ein Element  $b_{\alpha n 1} \cap b_{\beta n 0}$  von  $X$  in  $p$ . Damit folgt  $n \in a_\alpha \setminus a_\beta$ , und  $a$  ist eine Familie von  $\aleph_2$  verschiedenen Teilmengen von  $\mathbf{N}$ . —

In diesem Beispiel codierte der generische Ultrafilter  $p$  die Funktion  $f = \kappa \times \mathbf{N} \rightarrow 2$  mit

$$f(\alpha, n) = \epsilon \quad \text{genau dann, wenn} \quad b_{\alpha n \epsilon} \in p,$$

diese wiederum die Familie  $a$ .

Wir geben nun Beispiele an, wie algebraisch-kombinatorische Eigenschaften von  $B$  in  $M$  und Eigenschaften von  $M[p]$  sich beeinflussen; für eine wesentlich inhaltsreichere Sammlung solcher Beispiele und genauere Beweise siehe [Je].

Eine Boolesche Algebra  $B$  erfüllt die  $\kappa$ -Kettenbedingung, wenn keine Teilmenge  $D$  von  $B$  von paarweise disjunkten Elementen mit  $|D| = \kappa$  existiert. Sie ist  $(\kappa, \lambda)$ -distributiv, wenn je  $\kappa$  Partitionen  $(P_\alpha)_{\alpha < \kappa}$  der 1 in  $B$  mit  $|P_\alpha| \leq \lambda$  eine gemeinsame Verfeinerung haben. Durch die Schreibweise  $(\dots)^M, (\dots)^{M[p]}$  deuten wir an, in welchem Modell die betreffenden Mengen gebildet werden.

**Lemma** a) *Erfüllt  $B$  in  $M$  die  $\kappa$ -Kettenbedingung, so ist jede Kardinalzahl  $\mu$  von  $M$  mit  $\mu \geq \kappa$  Kardinalzahl in  $M[p]$ .*

b)  *$B$  ist genau dann in  $M$   $(\kappa, \lambda)$ -distributiv, wenn jede Funktion  $f$  in  $M[p]$  von  $\kappa$  nach  $\lambda$  bereits in  $M$  liegt. Insbesondere: Ist  $B$   $(\kappa, 2)$ -distributiv in  $M$ , so hat  $\kappa$  in  $M$  und  $M[p]$  dieselben Teilmengen; ist  $B$   $(\mu, \kappa)$ -distributiv in  $M$  für jedes  $\mu < \kappa$ , so ist  $\kappa$  Kardinalzahl in  $M[p]$ .*

$$c) (2^\kappa)^{M[p]} \leq (|B|^\kappa)^M.$$

Das Lemma gibt genauere Informationen, wie stark die Kontinuumshypothese verletzt werden kann: In  $M$  gelte die allgemeine Kontinuumshypothese,  $\kappa$  sei reguläre Kardinalzahl und  $\lambda$  Kardinalzahl mit  $\text{cf } \lambda > \kappa$ . Ebenfalls in  $M$  wählt man eine vollständige Boolesche Algebra  $B$ , die die  $\kappa$ -Kettenbedingung erfüllt,  $(\mu, \rho)$ -distributiv für jedes  $\mu < \kappa$  und jedes  $\rho$  ist und  $|B| = \lambda$  erfüllt. Dann haben für jedes generische  $p$  nach dem Lemma  $M$  und  $M[p]$  dieselben Kardinalzahlen; für  $\mu < \kappa$  ist  $(P(\mu))^M = (P(\mu))^{M[p]}$ , und in  $M[p]$  gilt  $2^\mu = \mu^+$ . Wegen  $|B| = \lambda$  ist in  $M[p]$   $2^\kappa \leq \lambda$ .  $\lambda \leq (2^\kappa)^{M[p]}$  sowie die oben geforderten Eigenschaften von  $B$  gelten, wenn man  $B$  als die reguläre offene Algebra des Raumes

$$P = 2^{\lambda \times \kappa}$$

mit den Basismengen

$$b_f = \{x \in P \mid f \subseteq x\}$$

wählt, wobei  $f$  alle Funktionen aus  $\lambda \times \kappa$  nach 2 durchläuft, deren Definitionsbereich weniger als  $\kappa$  Elemente hat.

Teil b) des Lemmas liefert eine übersichtliche Erklärung eines elementaren, aber etwas unangenehm zu beweisenden Satzes über Boolesche Algebren: für jede vollständige Boolesche Algebra  $B$  sind die Aussagen

- a)  $B$  ist  $(\kappa, 2)$ -distributiv
- b)  $B$  ist  $(\kappa, \kappa)$ -distributiv
- c)  $B$  ist  $(\kappa, 2^\kappa)$ -distributiv

äquivalent – wobei die nichttriviale Aussage natürlich die Implikation von a) nach c) ist. Aber sowohl in  $M$  als auch in  $M[p]$  hat man kanonische Bijektionen zwischen  ${}^\kappa 2$  (der Menge aller Funktionen von  $\kappa$  nach 2),  ${}^{\kappa \times 2}$  und  ${}^\kappa ({}^\kappa 2)$ .

Innerhalb jedes Modells  $N$  von ZFC kann man die Modelle  $L^N$  der konstruktiblen und  $HOD^N$  der erblich ordinal-definierbaren Mengen von  $N$  bilden; es ist  $L^N \subseteq HOD^N \subseteq N$ . Welche der Klassen  $L$ ,  $HOD$  und  $V$  (die Klasse aller Mengen) überstimmen, hängt für generische Modelle  $N = M[p]$  auf übersichtliche Weise von der zugrundegelegten Algebra  $B \in M$  ab.

**Satz** (siehe [Je]) *In  $M$  gelte  $V = L$ .*

- a) *Genau dann gilt (für jedes generische  $p$ )  $V = L$  in  $M[p]$ , wenn  $B$  atomar ist.*
- b) (Vopěnka) *Sei (in  $M$ )  $B^*$  die Subalgebra aller Elemente von  $B$ , die von keinem Automorphismus von  $B$  bewegt werden. Dann ist  $HOD^{M[p]} = M[p \cap B^*]$ .*

Daraus folgt:

In  $M[p]$  gilt  $L = HOD = V$  (für jedes  $p$ ) genau dann, wenn  $B$  atomar, d. h. zu einer Potenzmengenalgebra isomorph ist.

In  $M[p]$  gilt  $L = HOD \neq V$  genau dann, wenn  $B$  atomlos und  $B^*$  atomar ist, d. h. wenn  $B$  Produkt von homogenen Faktoren ist (siehe [Ko]). Diese Eigenschaft haben z. B. die oben betrachteten regulär offenen Algebren.

In  $M[p]$  gilt  $L \neq HOD = V$  genau dann, wenn  $B$  atomlos und starr ist, d. h. keine nichttrivialen Automorphismen hat.

In  $M[p]$  gilt  $L \neq HOD \neq V$  genau dann, wenn  $B$  atomlos ist und weder homogene noch starre Faktoren hat.

Die Existenz von Algebren für eine der beiden letztgenannten Situationen ist nicht leicht zu beweisen; der erste Existenzbeweis überhaupt wurde von McAloon indirekt durch Angabe eines Modells  $M[p]$  von  $L \neq HOD$  geführt.

Da mit  $M$  auch  $M[p]$  abzählbares transitives ZFC-Modell wird, kann man wiederum generische Erweiterungen von  $M[p]$  bilden, etwa  $M[p][r]$ , wobei  $r$  generisch über  $M[p]$  und  $D$ ,  $D$  vollständige Boolesche Algebra im Sinne von  $M[p]$  ist.  $M[p][r]$  läßt sich als einfache generische Erweiterung  $M[q]$  schreiben; dabei ist  $q$  generisch über  $M$  und einer vollständigen Oberalgebra  $C$  von  $B$  in  $M$  und  $q \cap B = p$ . So ergibt sich eine Korrespondenz zwischen generischen Erweiterungen von  $M[p]$  und Paaren  $(C, q)$ , in denen  $C$  vollständige Oberalgebra von  $B$ ,  $q$  generisch über  $M$  und  $C$  und  $q \cap B = p$  ist; Fragen über vollständige Einbettungen zwischen vollständigen Booleschen Algebren gehen in Fragen über generische Erweiterungen von generischen

Modellen über. Durch passende Definition des „Limes“ einer Kette von vollständigen Booleschen Algebren mit vollständigen Einbettungen läßt sich die Iteration generischer Modelle ins Transfinite fortsetzen. Wir skizzieren eine Anwendung dieser Betrachtungsweise.

Sei  $(X, <)$  eine dichte, vollständige lineare Ordnung mit kleinstem und größtem Element. Man sagt,  $(X, <)$  erfülle die ccc, wenn jede Familie von paarweise disjunkten offenen Intervallen von  $X$  abzählbar ist. Ist  $X$  separabel, d. h. hat  $X$  eine in der Intervalltopologie dichte abzählbare Teilmenge  $D$ , so erfüllt  $X$  trivialerweise die ccc und ist zum reellen Einheitsintervall  $[0, 1]$  isomorph: man kann annehmen, daß  $D$  das kleinste und das größte Element von  $X$  enthält. Nach einem Satz von Cantor ist  $D$  zu  $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$  isomorph und  $X$ , die Dedekindsche Vervollständigung von  $D$ , zu  $[0, 1]$ . – Erfüllt  $X$  die ccc, ist aber nicht separabel, so heißt  $X$  ein Souslin-Kontinuum. Die Souslinsche Hypothese besagt, daß es *keine* Souslin-Kontinua gibt, daß also bis auf Isomorphie das reelle Intervall  $[0, 1]$  die einzige dichte vollständige lineare Ordnung ist, die die ccc erfüllt. Sie ist von ZFC und auch von der Kontinuumhypothese unabhängig (Jensen, siehe [DeJo]) und läßt sich als eine Aussage über Boolesche Algebren auffassen: eine vollständige Boolesche Algebra heiße Souslin-Algebra, wenn sie ccc erfüllt sowie atomlos und für jede Kardinalzahl  $\kappa$   $(\omega, \kappa)$ -distributiv ist; es reicht natürlich,  $(\omega, \omega)$ -Distributivität zu fordern. Man sieht leicht ein, daß die Existenz von Souslin-Algebren zu der von Souslin-Kontinua gleichwertig ist. Denn für ein Souslin-Kontinuum  $(X, <)$  ist die regulär-offene Algebra von  $X$  (mit der Intervalltopologie) Souslin-Algebra; in einer Souslin-Algebra  $B$  ist jede maximale Kette (in der kanonischen Halbordnung von  $B$ ) ein Souslin-Kontinuum.

In jeder vollständigen atomlosen Booleschen Algebra  $B$ , die  $(\omega, \kappa)$ -distributiv für jedes  $\kappa$  ist, läßt sich eine aufsteigende Kette  $(B_\alpha)_{\alpha < \aleph_1}$  von vollständigen atomaren Subalgebren so konstruieren, daß  $B_0 = 2$  und jedes Atom von  $B_\alpha$  in  $B_{\alpha+1}$  in mindestens zwei Atome aufgespalten wird: bei Nachfolgerschritten benutzt man die Atomlosigkeit, bei Limeschritten die Distributivität. Diese Konstruktion zeigt zunächst, daß aus Martins Axiom (siehe Kapitel 2) und  $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$  die Souslinsche Hypothese folgt: wäre  $B$  Souslin-Algebra, so gäbe es wegen  $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$  einen Ultrafilter  $p$  von  $B$ , der für jedes  $\alpha < \aleph_1$  das Supremum der Atome von  $B_\alpha$  erhält. Für jedes  $\alpha < \aleph_1$  läge genau ein Atom  $x_\alpha$  von  $B_\alpha$  in  $p$ ;  $(x_\alpha)_{\alpha < \aleph_1}$  wäre eine überabzählbare invers wohlgeordnete Kette in  $B$ , was der ccc widerspricht.

Ist nun wie bisher  $M$  ein abzählbares transitives Modell von ZFC,  $B \in M$  Souslin-Algebra im Sinne von  $M$  und  $p$  generisch über  $M$  und  $B$ , so zeigt dieselbe Überlegung, daß  $B$  im Sinne von  $M[p]$  nicht mehr Souslin-Algebra ist – man beachte, daß wegen der ccc für  $M$  in  $B$  die Kardinalzahlen von  $M$  und  $M[p]$  dieselben sind,  $\{x_\alpha \mid \alpha < (\aleph_1)^M\}$  also im Sinne von  $M[p]$  überabzählbar ist. Ist nun  $D \in M[p]$  Souslin-Algebra im Sinne von  $M[p]$  und  $r$  generisch über  $M[p]$  und  $D$ , so ist  $D$  nicht mehr Souslin-Algebra im Sinne von  $M[p][r]$  usw. Letzten Endes erhält man durch geschickte Iteration generischer Modelle ein Modell  $N \supseteq M$ , in dem keine Souslin-Algebren mehr existieren, d. h. die Souslinsche Hypothese wahr ist. Es läßt sich sogar erreichen, daß in  $N$  Martins Axiom sowie  $2^{\aleph_0} > \aleph_1$  und deshalb die Souslinsche Hypothese gilt. Tatsächlich war die Suche nach einem Modell für die Souslinsche Hypothese der Anstoß zur Formulierung von Martins Axiom.

Die Eigenschaft, Souslin-Algebra zu sein, d. h. die Zusammenfassung von ccc und  $(\omega, \omega)$ -Distributivität, ist sehr stark – wir haben oben gesehen, daß in einigen Modellen der Mengenlehre solche Algebren nicht existieren. Insbesondere können Souslin-Algebren nicht beliebig große Mächtigkeit haben. Man sieht z. B. ziemlich leicht, daß jedes Souslin-Kontinuum und auch seine regulär offene Algebra genau die Kardinalzahl  $2^{\aleph_0}$  haben. Solovay hat gezeigt (siehe [Je]), daß Souslin-Algebren höchstens die Mächtigkeit  $2^{\aleph_1}$  haben können. Der Beweis dieses mathematischen Satzes benutzt auf sehr elegante Weise die metamathetische Methode der iterierten generischen Modelle.

#### 4 Booleschwertige Modelle und Garben über Booleschen Räumen

Die Stonesche Dualitätstheorie (siehe etwa [Hal]) besagt, daß die Kategorie der Booleschen Algebren zu der der Booleschen Räume dual äquivalent ist; dabei heißt ein topologischer Raum  $X$  Boolesch, wenn er Hausdorffsch, kompakt und nulldimensional ist, d. h. das System  $\text{Clop } X$  der offen-abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  eine Basis bildet. Genauer ist für jeden Booleschen Raum  $X$  die zu  $X$  duale Algebra  $\text{Clop } X$ , und für jede Boolesche Algebra  $B$  hat der zu  $B$  duale Raum die Trägermenge

$$\text{Ult } B = X = \{p \subseteq B \mid p \text{ Ultrafilter von } B\}$$

mit der Basis  $\{h(b) \mid b \in B\}$ , wobei  $h : B \rightarrow P(X)$  der Homomorphismus aus Kapitel 1 sei.

Ist nun  $\mathbf{A} = (A, B, \parallel)$  eine  $B$ -wertige  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $X = \text{Ult } B$ , so kann man wie in Kapitel 2 für jedes  $p \in X$  den zweiwertigen Quotienten  $A/p$  bilden, auch wenn für  $p$  nicht das Wahrheitslemma (4) gilt: man definiere die Trägermenge  $A/p$  wie dort; im übrigen ist die Struktur  $A/p$  durch Forderung (4) für atomares  $\varphi$  festgelegt. Es liegt nahe, die Familie  $(A/p)_{p \in X}$  als die Menge der Halme einer Garbe über  $X$  aufzufassen und zu vermuten, daß Booleschwertige Strukturen auf natürliche Weise Garben über Booleschen Räumen entsprechen.

Eine Garbe von (zweiwertigen)  $\mathcal{L}$ -Strukturen ist eine Folge

$$\mathcal{S} = (S, \pi, X, (\mathbb{M}_p)_{p \in X})$$

mit

1.  $S$  und  $X$  sind topologische Räume,  $\pi : S \rightarrow X$  ist ein surjektiver lokaler Homöomorphismus
2. für  $p \in X$  ist  $\mathbb{M}_p$   $\mathcal{L}$ -Struktur mit Trägermenge  $M_p = \pi^{-1}(p)$
3. für atomares  $\varphi(x_1 \dots x_n)$  in  $\mathcal{L}$  und  $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(\mathcal{S})$  ist die durch

$$(7) \quad |\varphi[f_1 \dots f_n]| = \{p \in X \mid \mathbb{M}_p \models \varphi[f_1(p) \dots f_n(p)]\}$$

definierte Menge offen in  $X$ .

Dabei ist  $\Gamma(\mathcal{S})$  die Menge der globalen Schnitte von  $\mathcal{S}$ , d. h. der stetigen Abbildungen  $f : X \rightarrow S$  mit  $\pi \circ f = \text{id}_X$ . – Die Strukturen  $\mathbb{M}_p$  heißen die Halme von  $\mathcal{S}$ .

$\Gamma(\mathcal{S})$  ist, falls nichtleer, Trägermenge einer Unterstruktur der Produktstruktur  $\prod_{p \in X} \mathbb{M}_p$ . Läßt sich eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathbb{M}$  als Schnittstruktur  $\Gamma(\mathcal{S})$  einer Garbe  $\mathcal{S}$  dar-

stellen, so bewirkt dies eine gute Veranschaulichung von  $\mathbb{M}$ , da i. a. die Halme  $\mathbb{M}_p$  viel einfacher aussehen als  $\mathbb{M}$ . Ein gutes Beispiel für diese Situation bietet die Ringtheorie, insbesondere die Theorie der birégulären Ringe ([ArKa], [DaHo], [Pi]).

Jeder Garbe  $\mathcal{S}$  kann man trivial die Booleschwertige Struktur  $(\prod_{p \in X} \mathbb{M}_p, P(X), | |)$  zuordnen, wenn man  $| |$  wie in (7) definiert. Den topologischen Daten von  $\mathcal{S}$  entspräche es besser, könnte man  $(\Gamma(\mathcal{S}), \text{Clop } X, | |)$  als Booleschwertige Struktur betrachten. Dazu müßte  $|\varphi[f_1 \dots f_n]|$  für beliebige  $\varphi(x_1 \dots x_n)$  und  $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(\mathcal{S})$  offen-abgeschlossen sein, was i. a. nicht der Fall ist.

$\mathcal{S} = (S, \pi, X, (\mathbb{M}_p)_{p \in X})$  heißt Hausdorffsch, wenn  $S$  Hausdorffraum ist; für Boolesches  $X$  bedeutet dies, daß für alle  $f, f' \in \Gamma(\mathcal{S})$  die offene Menge  $|f = f'|$  offen-abgeschlossen ist. Analog nennen wir  $\mathcal{S}$   $\mathcal{L}$ -Hausdorffsch, wenn für jede Formel  $\varphi(x_1 \dots x_n)$  und beliebige  $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(\mathcal{S})$   $|\varphi[f_1 \dots f_n]|$  offen-abgeschlossen ist. Eine  $B$ -wertige Struktur  $\mathbb{A} = (A, B, || ||)$  heiße separiert, wenn für  $a, a' \in A$  aus  $||a = a'|| = 1$  stets  $a = a'$  folgt; sie heißt endlich vollständig, wenn für jede Partition  $1 = b_1 \vee \dots \vee b_n$  von  $B$  und beliebige  $a_1, \dots, a_n \in A$  ein  $a \in A$  mit  $||a = a_i|| = b_i$  existiert. Die angekündigte Korrespondenz ist dann nicht schwer einzusehen: ist  $\mathbb{A} = (A, B, || ||)$  separiert, endlich vollständig und erfüllt  $\mathbb{A}$  das Maximumprinzip aus Kapitel 3, so wird  $\mathcal{S} = (S, \pi, X, (A/p)_{p \in X})$  eine  $\mathcal{L}$ -Hausdorffsche Garbe, wenn man  $X = \text{Ult } B$  setzt und für  $S$  die Vereinigung der (o. B. d. A. disjunkten) Trägermengen  $A/p$  wählt;  $\pi$  bilde genau  $A/p \subseteq S$  auf den Punkt  $p \in X$  ab, die Topologie von  $S$  wollen wir nicht näher angeben. Ist umgekehrt  $\mathcal{S} = (S, \pi, X, (\mathbb{M}_p)_{p \in X})$   $\mathcal{L}$ -Hausdorffsch und  $X$  Boolesch, so wird  $\mathbb{A} = (\Gamma(\mathcal{S}), \text{Clop } X, | |)$  Booleschwertige  $\mathcal{L}$ -Struktur.

Die Voraussetzung „ $\mathbb{A}$  ist separiert, endlich vollständig und erfüllt das Maximumprinzip“ ist ziemlich stark; verschiedene bekannte Konstruktionen der Allgemeinen Algebra bzw. Modelltheorie liefern aber solche Strukturen. Hierunter fallen z. B. direkte und reduzierte Produkte, beschränkte Boolesche Potenzen ([Ash]), die Booleschen Potenzen von Mansfield ([Ma]) etc.; eine gute Übersicht gibt [Vo]. Der für das Folgende zentrale Satz führt – in der korrespondierenden garbentheoretischen Situation – die Theorie einer Schnittstruktur  $\Gamma(\mathcal{S})$  auf die der Halme  $\mathbb{M}_p$  und die der Booleschen Algebra  $\text{Clop } X$  zurück; er stammt für den klassischen Fall reduzierter Produkte von Feferman und Vaught ([FefVa]), für Garben von Comer ([Co1]).

**Satz (Feferman-Vaught-Comer)** *Es gibt eine effektive Zuordnung*

$$\varphi(\bar{x}) \mapsto (\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_m(\bar{x}); \quad \Phi(y_1 \dots y_m))$$

( $\varphi$  und  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$   $\mathcal{L}$ -Formeln,  $\Phi$  Formel in der Sprache der Booleschen Algebren), so daß für jede  $\mathcal{L}$ -Hausdorffsche Garbe  $\mathcal{S} = (S, \pi, X, (\mathbb{M}_p)_{p \in X})$  mit Booleschem  $X$  und für alle  $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(\mathcal{S})$ :

$$\Gamma(\mathcal{S}) \models \varphi[f_1 \dots f_n] \text{ genau dann, wenn } \text{Clop } X \models \Phi[b_1 \dots b_m],$$

wobei  $b_k = |\varphi_k[f_1 \dots f_n]|$ .

Die Theorie der Booleschen Algebren hat, entscheidbarkeits- und modelltheoretisch gesehen, größtenteils angenehme Eigenschaften: sie ist entscheidbar und hat eine Modellvervollständigung (s. unten), nämlich die Theorie der atomlosen Booleschen

Algebren. Diese Eigenschaften übertragen sich nach dem Satz von Feferman-Vaught-Comer häufig von der Theorie der Halme auf die der Schnittstruktur, wie die folgenden Sätze zeigen.

Eine Theorie  $T'$  in  $\mathcal{L}$  heißt modellvollständig, wenn für jedes Paar  $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$  von  $T'$ -Modellen  $\mathbf{A}$  elementare Unterstruktur von  $\mathbf{B}$  ist (siehe etwa [Po]).  $T'$  heißt Modellbegleiter einer  $\mathcal{L}$ -Theorie  $T$ , wenn sich jedes Modell von  $T$  (bzw.  $T'$ ) in eines von  $T'$  (bzw.  $T$ ) einbetten läßt und  $T'$  modellvollständig ist; Modellvervollständigung von  $T$ , wenn zusätzlich für jedes  $T$ -Modell  $\mathbf{A}$  die Theorie  $T'$ , vermehrt um das Diagramm von  $\mathbf{A}$ , in der Sprache  $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$  (s. u.) vollständig ist. Modellbegleiter bzw. Modellvervollständigungen von  $T$  sind, falls sie existieren, eindeutig bestimmt. Z. B. ist die Theorie der algebraisch abgeschlossenen bzw. der reell abgeschlossenen Körper die Modellvervollständigung der Theorie der Körper bzw. der angeordneten Körper. Eine  $\mathcal{L}$ -Theorie  $T$  ist genau dann modellvollständig, wenn in  $T$  jede  $\mathcal{L}$ -Formel zu einer Existenzformel äquivalent ist.

Für jeden Ring  $R$  sei  $\text{Idp}(R)$  die Boolesche Algebra derjenigen idempotenten Elemente von  $R$ , die mit ganz  $R$  kommutieren.

**Satz** (Macintyre [Mac])  *$T$  sei eine Theorie in der Sprache  $\mathcal{L}$  der Ringtheorie, so daß jede  $\mathcal{L}$ -Formel in  $T$  zu einer positiven Existenzformel äquivalent ist. Alle Modelle von  $T$  seien nichttriviale Ringe  $R$  mit  $\text{Idp}(R) = \{0, 1\}$ . Dann ist die Theorie  $T' = \text{Th}(\mathbf{K})$  der Klasse*

$$\mathbf{K} = \{ \Gamma(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} = (S, \pi, X, (\mathbb{M}_p)_{p \in X}) \text{ Garbe, } X \text{ Boolesch ohne isolierte Punkte, } \mathbb{M}_p \models T \text{ für alle } p \in X \}$$

*modellvollständig.*

Dieser Satz liefert den älteren

**Satz** (Lipschitz-Saracino [LiSa]) *Die Theorie der kommutativen Ringe mit 1 und ohne nichttriviale nilpotente Elemente hat einen Modellbegleiter, nämlich die Theorie derjenigen nichttrivialen kommutativen biregulären Ringe  $R$  mit 1, für die  $\text{Idp}(R)$  atomlos ist und jedes normierte Polynom eine Nullstelle hat.*

Man wähle nämlich im Satz von Macintyre für  $T$  die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper und definiere  $\mathbf{K}$  wie dort;  $\text{Th } \mathbf{K}$  ist dann der Modellbegleiter von  $T$ .

Analoge Resultate erhält man durch Heranziehen von reell abgeschlossenen statt algebraisch abgeschlossener Körper. Für eine spezielle Klasse von verbandsgeordneten Ringen, die sog.  $f$ -Ringe, ergibt sich:

**Satz** (Macintyre [Mac]) *Die Theorie der kommutativen  $f$ -Ringe mit 1 und ohne nichttriviale nilpotente Elemente hat einen (vollständigen und entscheidbaren) Modellbegleiter  $T'$ , nämlich die Theorie des Ringes aller stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Cantorsche Diskontinuum.*

Die Arbeit [Mac] gibt für  $T'$  ein Axiomensystem an. [BuWe], Satz 10.7 und [Wei], Satz 3.9. bis 3.11 konstruieren Modellbegleiter in allgemeineren Situationen bzw. übertragen Eigenschaften wie Modellvollständigkeit, Existenz eines Modellbegleiters bzw. einer Modellvervollständigung, Quantorenelimination einer  $\mathcal{L}$ -Theorie  $T$

auf eine  $T$  kanonisch zugeordnete Theorie in der Sprache  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_{BA}$ , wobei  $\mathcal{L}_{BA}$  die Sprache der Booleschen Algebren ist.

Das wohl einfachste Entscheidbarkeitsresultat, das aus dem Satz von Feferman-Vaught-Comer folgt, ist:

**Satz (Comer [Co1])**  $\mathbf{B}$  sei eine unter isomorphen Bildern abgeschlossene Klasse von Booleschen Algebren,  $\mathbf{M}$  eine Klasse von  $\mathcal{L}$ -Strukturen und

$$\mathbf{K} = \{ \Gamma(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} = (S, \pi, X, (\mathbb{M}_p)_{p \in X}) \text{ } \mathcal{L}\text{-Hausdorffsch, } X \text{ Boolesch,} \\ \text{Clop } X \in \mathbf{B}, \mathbb{M}_p \in \mathbf{M} \text{ f\"ur alle } p \in X \}.$$

Sind  $\text{Th } \mathbf{B}$  und  $\text{Th } \mathbf{M}$  entscheidbar, so auch  $\text{Th } \mathbf{K}$ .

Für eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $A = (A, \dots)$  und einen Booleschen Raum  $X$  sei die „konstante  $A$ -Garbe über  $X$ “ die Garbe  $(X \times A, \pi, X, (\mathbb{M}_p)_{p \in X})$ , in der  $X \times A$  der Produktraum von  $X$  mit dem diskreten Raum  $A$ ,  $\pi : X \times A \rightarrow X$  die Projektionsabbildung ist und jedes  $\mathbb{M}_p$  mit  $A$  übereinstimmt. Ist im obigen Satz  $\mathbf{B}$  die Klasse aller Booleschen Algebren,  $A$  endlich und  $\mathbf{M} = \{A_A\}$  ( $A_A$  die Expansion von  $A$  um Konstanten für die Elemente von  $A$ ), so wird  $\mathbf{K}$  die Klasse aller Schnittstrukturen von konstanten  $A$ -Garben über Booleschen Räumen und  $\text{Th } \mathbf{K}$  entscheidbar. Für den Verband  $A$ , der als unterliegende Halbordnung die Kette mit  $n$  Elementen hat, wird  $\mathbf{K}$  die Klasse der Post-Algebren der Ordnung  $n$ ; für den Körper  $A$  mit genau  $q$  Elementen ( $q$  Primzahl) wird  $\mathbf{K}$  die Klasse der kommutativen Ringe mit  $1$ , in denen die Gleichung  $x^q = x$  gilt. Daher sind die Theorie der Post-Algebren der Ordnung  $n$  bzw. die Theorie der  $q$ -Ringe entscheidbar.

Im vorigen Satz beschränkte man sich auf  $\mathcal{L}$ -Hausdorffsche Garben bzw. in den zitierten Anwendungen auf konstante Garben. Weniger triviale Entscheidbarkeitsresultate gibt es in einer etwas allgemeineren Situation. Wir nennen eine Garbe  $\mathcal{S}$  atomar Hausdorffsch, wenn für jedes *atomare*  $\varphi(x_1 \dots x_n)$  und alle  $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(\mathcal{S})$  die Menge  $|\varphi[f_1 \dots f_n]|$  offen-abgeschlossen ist.

**Satz (Burriss-Werner [BuWe])**  $\mathcal{L}$  sei endliche Sprache,  $\mathbf{M}$  eine endliche Klasse von endlichen  $\mathcal{L}$ -Strukturen und

$$\mathbf{K} = \{ \Gamma(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} = (S, \pi, X, (\mathbb{M}_p)_{p \in X}) \text{ atomar Hausdorffsch, } X \text{ Boolesch,} \\ \text{Clop } X \text{ abzählbar, } \mathbb{M}_p \in \mathbf{M} \text{ f\"ur alle } p \in X \}.$$

Dann ist  $\text{Th } \mathbf{K}$  entscheidbar.

Während im Satz von Comer die Entscheidbarkeit von  $\text{Th } \mathbf{K}$  auf die der Theorie der Booleschen Algebren, ein Resultat von Tarski, zurückgeführt wurde, benutzt der Satz von Burriss-Werner einen tiefer liegenden Satz von Rabin: die (zweistufige) Theorie der abzählbaren Booleschen Algebren mit Quantifizierung über Filter ist entscheidbar. Die Strukturen aus  $\mathbf{K}$  lassen sich nämlich als Schnittstrukturen von Untergarben einer konstanten  $\mathbb{M}$ -Garbe für endliches  $\mathbb{M}$  beschreiben; den endlich vielen Unterstrukturen von  $\mathbb{M}$  entsprechen endlich viele abgeschlossene Teilmengen des Grundraums  $X$  und diesen Filter von  $\text{Clop } X$ .

Der Satz von Burriss-Werner verallgemeinert frühere Ergebnisse von Comer ([Co1], s. unten), die ebenfalls den Rabinschen Satz benutzten. Für alles Folgende konzentrieren wir uns, der historischen Entwicklung folgend, auf Sprachen  $\mathcal{L}$  ohne Rela-

tionssymbole;  $\mathcal{L}$ -Strukturen werden dann als Algebren (im Sinne der Allgemeinen Algebra) bezeichnet. Eine Klasse  $\mathbf{V}$  von Algebren heißt eine Varietät, wenn sie Modellklasse einer Theorie  $T$  ist, deren Axiome nur aus Gleichungen bestehen. Nach einem Satz von Birkhoff (siehe [BuSa]) ist  $\mathbf{V}$  genau dann Varietät, wenn  $\mathbf{V}$  unter der Bildung von direkten Produkten, Subalgebren und homomorphen Bildern abgeschlossen ist. Für eine Klasse  $\mathbf{L}$  von Algebren ist die von  $\mathbf{L}$  erzeugte Varietät als die kleinste Varietät definiert, die  $\mathbf{L}$  umfaßt. Die sog. Diskriminatorvarietäten sind besonders eng mit Garben über Booleschen Räumen verknüpft, siehe etwa [BuSa]. Insbesondere folgt aus dem vorangehenden Satz, daß für endliches  $\mathcal{L}$  die Theorie einer von endlich vielen endlichen Algebren erzeugten Diskriminatorvarietät entscheidbar ist ([BuWe]). Als Spezialfälle erhält man u. a. zwei Resultate von Comer: für jedes  $m \geq 2$  ist die Theorie der kommutativen Ringe mit 1, die die Gleichung  $x^m = x$  erfüllen, entscheidbar ([Co1]); für jedes  $m \geq 1$  ist die Theorie der unten definierten Varietät  $\mathbf{V}_m$  von monadischen Algebren entscheidbar ([Co2]).

Ein Paar  $(B, c)$  heißt eine monadische Algebra ([Ha2]) oder Zylinderalgebra der Dimension 1 ([HeMoTa]), falls  $B$  Boolesche Algebra und  $c : B \rightarrow B$  ein Hüllenoperator des Verbandes  $B$  ist, dessen Wertebereich eine Boolesche Subalgebra  $A$  von  $B$  bildet. Das Standardbeispiel einer monadischen Algebra ist die Lindenbaum-Tarski-Algebra  $B_T$  einer Theorie  $T$  mit dem Operator  $c$ , der die Existenzquantifikation bzgl. einer festen Variablen  $x$  beschreibt: man setze für jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi$

$$c(\bar{\varphi}) = \exists x \varphi.$$

Monadische Algebren wurden von Halmos bzw. Henkin und Tarski als Strukturen eingeführt, die für eine algebraische Behandlung der Prädikatenlogik dieselbe natürliche Rolle spielen sollten, wie sie die Booleschen Algebren für die Aussagenlogik spielen. Die Frage nach der Entscheidbarkeit der Theorie der monadischen Algebren blieb längere Zeit offen.

Nun läßt sich eine monadische Algebra  $(B, c)$  äquivalent beschreiben durch das Paar  $(B, A)$ , wo  $A$  der Wertebereich von  $c$  ist. Dies legt eine Garbendarstellung von  $B$  über dem dualen Raum von  $A$  nahe, und die zugehörige Garbe ist atomar Hausdorffsch. Die Klasse der monadischen Algebren bildet eine Varietät  $\mathbf{V}_\infty$ , die sogar Diskriminatorvarietät ist. Ihre Untervarietäten wurden in [Mo] bestimmt: es sind

$$\mathbf{V}_1 \subseteq \mathbf{V}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathbf{V}_\infty,$$

wobei  $\mathbf{V}_m$  von der endlichen Algebra  $(2^m, 2)$  erzeugt wird. Comers Studium von Garbendarstellungen war weitgehend von der Frage nach der Entscheidbarkeit von  $\text{Th } \mathbf{V}_m$  bzw.  $\text{Th } \mathbf{V}_\infty$  inspiriert und ergab die Entscheidbarkeit von  $\text{Th } \mathbf{V}_m$  für  $m < \infty$ . 1975 zeigte jedoch Rubin ([Ru]), daß die Theorie von  $\mathbf{V}_\infty$  unentscheidbar ist.

Es gelang 1980 McKenzie, zu charakterisieren, wann – unter starken Voraussetzungen – die Theorie einer Varietät  $\mathbf{V}$  entscheidbar ist ([BuMcK]): die Sprache  $\mathcal{L}$  von  $\mathbf{V}$  sei endlich, für jede Algebra aus  $\mathbf{V}$  sei der Kongruenzenverband von  $A$  modular;  $\mathbf{V}$  werde von endlich vielen endlichen Algebren erzeugt.  $\text{Th } \mathbf{V}$  ist genau dann entscheidbar, wenn  $\mathbf{V}$  von zwei unabhängigen Untervarietäten  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{M}$  erzeugt wird, so daß  $\mathbf{D}$  Diskriminatorvarietät (und damit entscheidbar),  $\mathbf{M}$  i. w. die Varietät der Linksmoduln über einem endlichen Ring  $R$  und  $\text{Th } \mathbf{M}$  entscheidbar ist.



In den schwierigen Beweis gehen interessanterweise nicht nur die positiven Entscheidbarkeitsresultate von Comer-Burris-Werner, sondern auch das negative von Rubin entscheidend ein. Daß die Theorie der Linksmoduln eines endlichen kommutativen Ringes  $R$  tatsächlich unentscheidbar sein kann, zeigte Baur in [Ba].

### Literatur

- [ArKa] A r e n s , R. F.; K a p l a n s k y , I.: Topological representation of algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948) 457–481
- [Ash] A s h , C. J.: Reduced powers and Boolean extensions. J. London Math. Soc. **9** (1975) 429–432
- [Ba] B a u r , W.: Undecidability of the theory of abelian groups with a subgroup. Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976) 125–128
- [Be] B e l l , J. L.: Boolean-valued models and independence proofs in set theory. Clarendon 1977
- [Bo] B o o l e , G.: An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. Dover Publications, Inc. 1951 (Nachdruck)
- [BuMcK] B u r r i s , S t . ; M c K e n z i e , R.: Decidability and Boolean Representations. Mem. Amer. Math. Soc. **32** (1981), Nr. 246
- [BuSa] B u r r i s , S t . ; S a n k a p p a n a v a r , H. P.: A Course in Universal Algebra. Springer 1981
- [BuWe] B u r r i s , S t . ; W e r n e r , H.: Sheaf constructions and their elementary properties. Trans. Amer. Math. Soc. **248** (1979) 269–309
- [ChKe] C h a n g , C. C.; K e i s l e r , H. J.: Model Theory. North-Holland 1973
- [Co1] C o m e r , S. D.: Elementary properties of structures of sections. Bol. Soc. Math. Mexicana **19** (1974) 78–85
- [Co2] C o m e r , S. D.: Monadic algebras with finite degree. Algebra Universalis **5** (1975) 313–327
- [DaHo] D a u n s , T.; H o f m a n n , K. H.: The representation of biregular rings by sheaves. Math. Z. **91** (1966) 103–123
- [DeJo] D e v l i n , K.; J o n s b r ä t e n , H.: The Souslin Problem. Lecture Notes in Mathematics 405 (1974)
- [Fef] F e f e r m a n , S.: Some applications of the notion of forcing and generic sets. Fund. Math. **56** (1965) 325–345
- [FefVa] F e f e r m a n , S.; V a u g h t , R. L.: The first order properties of products of algebraic systems. Fund. Math. **47** (1959) 57–103
- [Fel] F e l g n e r , U.: Models of ZF-Set Theory. Lecture Notes in Mathematics 223 (1971)
- [Hai] H a i l p e r i n , T h . : Boole's Logic and Probability. North Holland 1976
- [Ha1] H a l m o s , P. R.: Lectures on Boolean Algebras. van Nostrand 1963
- [Ha2] H a l m o s , P. R.: Algebraic Logic. Chelsea 1962
- [HalLe] H a l p e r n , J. D.; L e v y , A.: The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. In: Axiomatic Set Theory, ed. D. Scott; Proc. Symp. in Pure Mathematics; Vol. XIII, Part 1
- [HeMoTa] H e n k i n , L.; M o n k , J. D.; T a r s k i , A.: Cylindric Algebras I. North-Holland 1971
- [Hu] H u n t i n g t o n , E.: Sets of independent postulates for the algebra of logic. Trans. Amer. Math. Soc. **5** (1904) 288–309
- [Je] J e c h , T h . : Set Theory. Academic Press 1978
- [Ka1] K a r p , C.: Languages with Expressions of Infinite Length. North-Holland 1964
- [Ka2] K a r p , C.: A note on the representation of  $\alpha$ -complete Boolean Algebras. Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963) 705–707
- [Ke] K e i s l e r , H. J.: Model Theory for Infinitary Logic. North-Holland 1971
- [Ko] K o p p e l b e r g , S.: A lattice structure on the isomorphism types of complete Boolean algebras. In: Lecture Notes in Mathematics 872 (1981) 98–126
- [Ku] K u n e n , K.: Set Theory. North-Holland 1980

- [LiSa] Lipschitz, L.; Saracino, D.: The model companion of the theory of commutative rings without nilpotent elements. *Proc. Amer. Math. Soc.* **38** (1973) 381–387
- [Mac] Macintyre, A.: Model completeness for sheaves of structures. *Fund. Math.* **81** (1974) 73–89
- [Ma] Mansfield, R.: The theory of Boolean ultrapowers. *Ann. Math. Logic* **2** (1971) 297–323
- [Mo] Monk, J. D.: On equational classes of algebraic versions of logic I. *Math. Scand.* **27** (1970) 53–71
- [Most] Mostowski, A.: Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus. *J. Symb. Logic* **13** (1948) 204–207
- [Pi] Pierce, R. S.: Modules over commutative regular rings. *Mem. Amer. Math. Soc.* no. 70 (1967)
- [Po] Potthoff, K.: Einführung in die Modelltheorie. Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1981
- [RaSi] Rasiowa, H.; Sikorski, R.: *The Mathematics of Metamathematics*. Warszawa 1963
- [Ru] Rubin, M.: The theory of Boolean algebras with a distinguished subalgebra is undecidable. *Ann. Sci. Clermont, No. 60 Math. No.* **13** (1976) 129–134
- [Schr] Schröder, E.: *Algebra der Logik*. Chelsea
- [She] Sheffer, H. M.: A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants. *Trans. Amer. Math. Soc.* **14** (1913) 481–488
- [Shoe] Shoenfield, J. R.: *Mathematical Logic*. Addison-Wesley 1967
- [Si] Sikorski, R.: *Boolean Algebras*, 2nd ed. Springer 1964
- [St] Stone, M. H.: The theory of representations for Boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **40** (1936) 37–111
- [Vo] Volger, H.: The Feferman-Vaught theorem revisited. *Coll. Math.* **36** (1976) 1–11
- [Wei] Weispfenning, V.: Model completeness and elimination of quantifiers for subdirect products of structures. *J. Algebra* **36** (1975) 252–277
- [Wh] Whitehead, A. N.: *Universal Algebra*. Hafner 1960

Prof. Dr. S. Koppelberg  
 Freie Universität  
 Fachbereich Mathematik  
 Institut für Mathematik II (WE2)  
 Arnimallee 3  
 1000 Berlin 33

(Eingegangen 2. 5. 1984)

## Buchbesprechungen

Ahlfors, L. V., *Collected Papers* (Assistant editor R. M. Shortt), Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1982, vol. 1, 1929–1954, XIX + 520 p., vol. 2, 1954–1979, XIX + 515 p., DM 328,—

Die vorliegende Ausgabe der Veröffentlichungen von L. V. Ahlfors ist keineswegs nur eine zeitliche Aneinanderreihung derselben; vielmehr sind zusammengehörige in Gruppen zusammengefaßt (wodurch die zeitliche Reihenfolge öfters durchbrochen wird) und mit Kommentaren des Autors versehen, die die Entstehung erläutern, öfters mit kritischem Rückblick, und gegebenenfalls auf frühere, gleichzeitige oder anschließende Arbeiten anderer Autoren hinweisen. Diese Kommentare sind von großem Wert für die Beurteilung der Arbeiten und darüber hinaus für ein Eindringen in die Entwicklung der Funktionentheorie des letzten halben Jahrhunderts.

Die Anfänge von Ahlfors' mathematischem Schaffen waren geprägt von Ernst Lindelöf, dem Vater der finnischen Mathematik, und Rolf Nevanlinna. Ahlfors geht in seinen Publikationen von der klassischen Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen aus, sprengt jedoch später diesen Rahmen, ohne daß dabei der Zusammenhang mit der Funktionentheorie je aus dem Auge verloren würde. Diese Ausweitung bedeutet z. T. eine Vertiefung des Verständnisses funktionentheoretischer Ergebnisse (z. B. in der Theorie der Überlagerungsflächen, [19]), z. T. eine Eingliederung weiter Gebiete ursprünglich nicht funktionentheoretischen Charakters (quasikonforme Abbildung).

Etwas schematisch und nicht erschöpfend kann man drei thematisch und zeitlich einigermaßen klar abgegrenzte Perioden in der Publikationstätigkeit von Ahlfors unterscheiden, die sich durch die Stichworte andeuten lassen: 1) Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen; Klassifikation von Riemannschen Flächen. 2) Quasikonforme Abbildung und Teichmüllerräume. 3) Kleinsche Gruppen.

In 1) steht zunächst, abgesehen vom Beweis der Denjoeschen Vermutung in der Dissertation [5], die Nevanlinnasche Theorie im Vordergrund, die der Verf. aus verschiedenen Gesichtspunkten durchleuchtet. [16] dürfte noch immer einer der einfachsten Zugänge zu dieser Theorie sein. [19] sucht die topologischen Hintergründe zu klären, [22] die Beziehungen zur Differentialgeometrie über den Gauß-Bonnettschen Satz. Das Typenproblem für Riemannsche Flächen läßt sich mit diesen Untersuchungen verbinden, z. B. [15]; dieses Problem kann erweitert werden zu dem der Klassifikation offener Riemannscher Flächen, [36]. [35] kann nach Problemstellung und Ergebnissen als Einschränkung auf schlichte Gebiete angesehen werden. Methodisch sind die beiden letztgenannten Arbeiten freilich ganz verschieden; in [35] steht die Methode der extremalen Länge im Vordergrund, über die hier zum ersten Male berichtet wird, in [36] der Kalkül der Differentialformen, der schon bei der Begründung des Dirichletschen Prinzips in [28] vorteilhafte Verwendung gefunden hatte. Er ist auch der zentrale Begriff in [51] und [52], in denen die Differentiale auf beliebigen offenen Flächen klassifiziert und Inklusionen zwischen den verschiedenen Klassen aufgestellt werden. — Besonders zu erwähnen ist [27], wo im Anschluß an H. und J. Weyl die Nevanlinnasche Theorie auf Systeme von meromorphen Funktionen (meromorphe Kurven) ausgedehnt wird: ist  $x(t) := (x_0(t), \dots, x_n(t))$  ein System von ganzen Funktionen,  $a := (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ , so handelt es sich um die Anzahl  $n(r, a)$  der Schnittpunkte der durch  $x(t)$  in  $|t| < r$  dargestellten Kurve mit der zu  $a$  orthogonalen Hyperebene. Die Ausdehnung auf  $n > 1$  erfordert einen weitgespannten begrifflichen Apparat.

2) Der Begriff der quasikonformen Abbildung, als scheinbar wenig wichtige Verallgemeinerung der konformen Abbildung konzipiert (Grötzsch 1928), später ein nützliches Hilfsmittel bei der Behandlung des Typenproblems, war durch Teichmüllers Erleuchtung im Jahre 1939 zu einem echten funktionentheoretischen Begriff geworden, indem eine Beziehung zwi-

schen quasikonformen Abbildungen zweier kompakter Riemannscher Flächen des Geschlechts  $g$  und gewissen holomorphen quadratischen Differentialen auf ihnen aufgestellt wurde; damit gelang es, die durch gewisse Äquivalenzrelationen reduzierte Menge dieser Flächen zu einem metrischen Raum und schließlich zu einem Raum mit komplex-analytischer Struktur, dem Teichmüllerraum, zu machen. Aber diese und andere Ideen von Teichmüller entbehrten der exakten Durchführung, und es ist mit das Verdienst von Ahlfors, daß diese Gedankengänge in sorgfältig durchgeführte Theorien umgewandelt wurden. In [44] wird, nach allgemeinen Untersuchungen über quasikonforme Abbildungen, die den Begriff insbesondere von ad-hoc-Voraussetzungen befreien, der metrische Teichmüllerraum gewonnen, in [54] der mit komplex-analytischer Struktur; dazu weiter [57] und [58]. [45] und [53] beziehen sich auf die globale Lösung der Beltramschen Differentialgleichung  $f'_z = \mu f'_z$ ,  $|\mu| < 1$ , der eine quasikonforme Abbildung genügt.

3) Die Theorie der Kleinschen Gruppen, die ab 1964 im Mittelpunkt des Interesses des Verf. steht, ist aufs engste mit den Problemen in 2) verknüpft: ist  $\Omega$  der Diskontinuitätsbereich einer Kleinschen Gruppe  $\Gamma$ , so sind die Komponenten von  $S := \Omega/\Gamma$  Riemannsche Flächen; [65], [65a], [75], [76]. Wenn  $\Gamma$  endlich viele Erzeugende hat, so besteht  $S$  aus endlich vielen Komponenten von kompakten und in endlich vielen Punkten punktierten Flächen. – Schon Poincaré hatte die Kleinschen Gruppen in der Ebene erweitert zu Gruppen in einem Halbraum des  $\mathbf{R}^3$ , wo sie als Fuchssche Gruppen erscheinen. In [73] und [74] wird dieser Gedanke aufgegriffen; er führt auf quasikonforme Abbildungen in höheren Dimensionen, die durch wichtige Begriffsbildungen bereichert wird; [80], [82], [83], [89].

Von ganz wenigen begründeten Ausnahmen abgesehen sind alle Originalpublikationen erfaßt. Ferner findet sich (in beiden Bänden wiedergegeben) ein Vorwort des Verf., das eine kurze Selbstbiographie, insbesondere im Hinblick auf seine wissenschaftliche Tätigkeit, enthält, sowie, in streng zeitlicher Reihenfolge, ein vollständiges Verzeichnis der Publikationen (Übersetzungen ausgenommen), auch der (hier natürlich nicht wiedergegebenen) Bücher.

Die Qualität der photomechanischen Wiedergabe entspricht nicht immer dem nicht eben bescheidenen Preis, s. z. B. [27]. Der Preis wird leider auch den wesentlichen Sinn dieser Publikation beeinträchtigen, es jedem, und insbesondere jedem jüngeren Forscher auf dem Gebiete der Funktionentheorie zu ermöglichen, diese Bände als Privatbesitz an seinem Schreibtisch zu haben.

Würzburg

H. Grunsky

**Littlewood, J. E., Collected Papers** (2 vols.), Oxford: Clarendon Press 1982, vol I: xxxviii + 788 + 11 p., vol II: xxxviii + 875 + 11 p., cloth £ 65.00 je Band

These two volumes contain those papers not written in collaboration with G. H. Hardy. They have the same format as Hardy's collected works, although, inconveniently and presumably inadvertently, the title, volume, year and page numbers of each journal, unlike the Hardy volumes, have not been included at the foot of each title page. This makes the tracking down of a particular reference, particularly in connection with the excellent commentaries provided, quite awkward.

The volumes can be thought of as being divided into real analysis (volume I) and complex analysis (volume II). More precisely volume I contains the papers on differential equations (edited by H. P. F. Swinnerton-Dyer), trigonometrical polynomials and series (D. A. Brannan), inequalities and rearrangements (B. Bollobás) and the theory of series and Tauberian theorems (L. S. Bosanquet), and volume II contains those on the Riemann zeta function and number theory (A. Baker and H. Halberstam), complex analysis (W. K. Hayman), probabilistic analysis (B. Bollobás) and unclassified mathematics and miscellaneous topics (J. W. S. Cassels).

Each volume includes a table of contents for both volumes, J. C. Burkill's obituary extracted from the Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society and a complete bibliography.

The work on differential equations is divided into six subsections, ballistics, fixed point theorems, van der Pol and related equations, celestial mechanics, adiabatic invariance, and other conservative second order equations. The work on ballistics stems from Littlewood's service in the Royal Garrison Artillery in the first world war, and there are two further papers in the miscellaneous section in volume II which describe the earliest work. It has been said of this subject that even Littlewood could not make it intellectually interesting. Nevertheless the relaxation of discipline that was permitted must have meant that somebody "high up" thought the work important.

The bulk of Littlewood's work on ordinary differential equations has its beginnings, it seems, in a request from the British Government made to a number of leading mathematicians just before the second world war to investigate non-linear differential equations of the kind connected with electric circuits. This led to a long collaboration with M. L. Cartwright on van der Pol's equation

$$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} = b\mu k \cos(\mu t + \alpha) \tag{1}$$

and generalizations, much of which was published separately. The work is heavy going and of 1957, 2, which investigates the behaviour of the solutions of (1) when  $k$  is large and  $0 < b < \frac{2}{3}$  Swinnerton-Dyer quotes Littlewood as saying "... and I should never have read it had I not written it myself". The results of this paper are still definitive as are those of 1951, 1, 1947, 1, 1964, 4, for example. Apparently even the powerful methods of modern algebraic topology cannot be applied.

The papers on trigonometrical polynomials

$$f(t) = \sum_{m=1}^n (a_m \cos mt + b_m \sin mt) \tag{2}$$

date from the nineteen sixties. They are concerned with the behaviour of the mean  $\|f\|_p$  on  $[0, 2\pi]$  as a function of  $p$  and with estimates for the number of zeros of  $f$  in  $[0, 2\pi]$  in terms of these means. There has been very little progress on these topics since then.

Littlewood's most important work on trigonometric series is the collaboration with R. E. A. C. Paley 1931, 4, 1937, 1, 1937, 2. The central inequality of their theory can be stated as follows. Suppose that  $f \in L_p$  and that

$$S(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

is the Fourier series of  $f$ . Let  $F(z)$  be defined for  $|z| < 1$  by

$$F(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

and suppose that  $F(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta})$  exists for almost all  $\theta$ . M. Riesz showed that if  $p > 1$ ,

then

$$\|f\|_p \leq \|F\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Littlewood and Paley introduce the function

$$g(\theta) = \left\{ \int_0^1 (1-r) |F'(re^{i\theta})|^2 dr \right\}^{1/2}$$

and show that

$$A_p \|g\|_p \leq \|F\|_p \leq B_p \|g\|_p.$$

They then proceed to use these inequalities to establish a fundamental theory which has influenced several areas, including complex analysis, Fourier analysis and harmonic analysis.

All the papers on inequalities except the last one are connected with the Khintchine-Littlewood inequality. This has become of importance recently in Banach spaces. There are also extensions to martingales. The last paper in this section stands apart from the rest. Among other things, it gives some background to the celebrated "Littlewood problem" on the  $L_1$  norm of a trigonometrical polynomial with coefficients 0 or 1 which has been recently solved by Konyagin, and by Mcghee, Pigno and Smith.

The paper 1911, 1 in the last section of volume I, on the theory of series and Tauberian theorems, can be said to be the starting point of the Hardy-Littlewood collaboration. It contains the celebrated high-Oh Tauberian theorem (a term later coined by Hardy and Littlewood in 1913). There is a vivid account of the genesis of this theorem in the extract from *A Mathematician's Miscellany* included at the end of volume II.

The papers on number theory in the first part of volume II are almost exclusively concerned with properties of the Riemann zeta function and their consequences for the distribution of prime numbers. The exceptions to this are 1928, 3 and 1924, 6.

In the work on the Riemann zeta function, much of that which depends on the Riemann hypothesis or the Lindelöf hypothesis is still the best that is known. As an example we quote the principal result of 1924, 9 which states that on the Riemann hypothesis the number of zeros of  $\zeta(s)$  with  $0 < \text{Im } s < T$  is

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O((\log T)/(\log \log T)).$$

All of Littlewood's work on the zeta function is seminal. One can only view with wonder the vast array of important results announced in 1922, 1. Apart from the stream of papers that followed, the outgrowth of work also led to the Cambridge tracts of Ingham and Titchmarsh on the distribution of primes and the zeta function respectively.

The paper 1937, 4 is interesting because it is the starting point for Turán's fundamental work on exponential sums, and has led to some very striking results about the behaviour of the error term in the prime number theorem and its generalization to primes in an arithmetic progression.

In 1928, 3 properties of Dirichlet L-functions are studied, in Landau's terminology, as "k-analogues" of properties of the Riemann zeta-function. This procedure is now standard.

The paper 1924, 6 is joint with A. Walfisz (and also contains a note by E. Landau). It uses the van der Corput method to obtain an improved estimate  $O(x^{\Theta+\epsilon})$ , where  $\Theta = 37/112$ , for the error term in Gauß's asymptotic formula for the number of lattice points in a circle of radius  $\sqrt{x}$  and centre the origin. For a short while this was the world record. This problem and its analogues involve hard analysis, but have become the province of "epsilon improvements", and Littlewood was probably content to leave that sort of thing to others.

The heart of volume II is the work on complex analysis. Again Littlewood's work is seminal. In particular that on the minimum modulus of entire functions, that on univalent functions and subordination, and that on subharmonic functions has given rise, in each area, to a considerable body of ongoing work. Over and over again one has the impression that Littlewood would enter a field close to its inception, establish a number of fundamental theorems, make a series of profound conjectures, and depart for other pastures. The section on complex analysis is divided into two subsections, one on functions in the unit disc and one on functions in the plane. The first of these subsections contains 1925, 3 in which Littlewood introduces

the term “subordination” to describe a concept introduced by Lindelöf, namely that if  $g(z)$  maps the disc  $D = \{z : |z| < 1\}$  conformally onto a domain  $W$  of a Riemann surface, that if  $f(0) = g(0)$  and  $f$  is regular on  $D$ , and that if as  $z$  describes any closed contour lying in  $D$  the point  $f(z)$  describes a contour lying in  $W$ , then  $f$  is subordinate to  $g$  in  $D$ . Littlewood then exploits the concept to show, among other things, that if

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

is univalent in the unit disc, then  $|a_n| < en$ , a radical reduction on what had previously been known and only a constant factor away from the notorious Bieberbach conjecture  $|a_n| \leq n$ . There is little doubt that this is one of Littlewood’s most influential papers.

The third section of volume II contains the papers on probabilistic analysis, including the important collaboration with A. C. Offord. There had been some early investigations by Bloch and Pólya on the average number of real roots of random polynomials, but Littlewood and Offord were the first to realize that “most” polynomials have about the same number of real zeros. They also identified the most important probability models and associated problems and created a new area of research.

Littlewood and Offord 1948, 2 also studied the following problem. Consider an integral function

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

of finite non-zero order. They show that if the signs  $\pm$  are chosen at random, then the entire function

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pm a_n z^n$$

almost always behaves like the Weierstraß  $\sigma$  function. In particular it exhibits a “pits effect” around its zeros. Littlewood returned to the investigation of situations in which pits effects can occur on a number of occasions during the last decade of his life.

The very last section of volume II should be required reading for anyone interested in mathematical research. Here is the fun and excitement of research at the highest level described in a variety of ways, full of insight and done with the greatest wit.

It is inevitable that Littlewood’s work be compared and contrasted with Hardy’s. Hardy the natural expositor with a highly polished style. Littlewood exposing ideas with less polish but more insight and backed up with tremendous power. A feeling that Littlewood could storm anything within reach. Much blood might be expended but victory was never in doubt. Also, unlike the Hardy volumes, here there is really very little that has an unfashionable look to it. One can only conclude that this is an outstanding contribution to mathematical literature which all libraries and many mathematicians will wish to add to their collections.

London

R. C. Vaughan

**Magnus, W., Collected Papers** (Editors: Baumslag, G., Chandler, B.), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1984, 49 figs., xvi + 726 p., cloth, DM 88,—

In der Sammlung der mathematischen Arbeiten von W. Magnus finden sich, wie zu erwarten ist, einige Ecksteine der kombinatorischen Gruppentheorie wie: erster Beweis des Freiheitssatzes; die Lösung des Identitätsproblems für Gruppen mit einer definierenden Relation, die Magnusche Einbettung von  $F/R'$  in eine  $2 \times 2$ -Matrizengruppe ( $F$  freie Gruppe,  $R \triangleleft F$ ); der

Zusammenhang zwischen den Kommutatoren von Gruppen und Lieschen Algebren. Die zur Lösung entwickelten Theorien und Methoden haben bis zum heutigen Tage ihre Bedeutung behalten und sind stark ausgebaut worden. Sie beruhen auf direkten kombinatorischen oder Rechenmethoden und es wird, zum Beispiel, nicht auf topologische Hilfsmittel zum Beweis gruppentheoretischer Sätze zurückgegriffen. Es ist erfreulich, sie hier gesammelt zu finden. In anderen Arbeiten finden sich zahlreiche Anwendungen der kombinatorischen Gruppentheorie auf verschiedene mathematische Gebiete wie: Bestimmung der Automorphismengruppen der Fundamentalgruppen von berandeten Flächen, Zopfgruppen, Knotentheorie, Matrizengruppen, Riemannsche Flächen. Hierbei kam W. Magnus seine hervorragende, genaue Kenntnis der klassischen Funktionentheorie und Algebra zu Hilfe.

Diese Folge von Arbeiten zur kombinatorischen Gruppentheorie und ihre Anwendungen macht die Entwicklung großer Teile der kombinatorischen Gruppentheorie und ihrer Anwendungsmöglichkeiten sehr deutlich und ist für Interessenten an Geschichte der Mathematik eine gute Fundgrube, vor allem da in einigen Artikeln W. Magnus seinen historischen Interessen nachgegangen ist und dabei sein breites Wissen über klassische Theorien und ihre Entwicklung eingebracht hat.

Die Sammlung enthält auch die Arbeiten, die Magnus während des 2. Weltkrieges und vereinzelt auch danach über mathematische Probleme des Elektromagnetismus und gewisse gewöhnliche Differentialgleichungen sowie spezielle Funktionen geschrieben hat; sie zeichnen sich durch Sorgfalt in der Abfassung aus.

Bochum

H. Zieschang

**Szegő, G., Collected Papers I, II, III** (Ed. by R. Askey), Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1982, vol. I: xxii + 857 p., vol. II: x + 869 p., vol. III: x + 880 p., cloth DM 378,—

Gabor Szegő is one of the mathematicians who makes one wish that they each had their own journals so that one could follow their work more easily. These three volumes are the next best thing. They should be in every serious mathematical library, even if the library has to pass up some current ephemera in order to afford them.

Szegő's work has had great influence on many branches of analysis, and few of his papers have become obsolete. It is particularly gratifying to see the papers collected, since many of them were not available in the average library even when they were new. As Askey observes in his analysis of Szegő's work at the beginning of this collection, Szegő's papers often contain insights that one may miss at first reading, and they repay careful study.

Szegő has worked in many branches of analysis. His best known contributions have been to the theory of Toeplitz and Hankel forms, orthogonal polynomials, complex analysis (especially conformal mapping and singularities of power series), and inequalities (especially for polynomials and trigonometric polynomials, and for geometric quantities of physical interest). Askey characterizes him as a problem-solver. Indeed, much of his work has contained elegant solutions of problems that have an immediate appeal — one thinks, for example, of his theorem that a power series with only finitely many different coefficients is either rational or noncontinuable. Szegő has indeed solved many problems that baffled everyone else at the time, and that have had important and unexpected applications later on; but he also has had an uncanny ability to build the solution of a particular problem into a substantial branch of mathematics, as we see even in his earliest work, on Toeplitz and Hankel forms, or from his theory of polynomials orthogonal on the unit circle.

Some of Szegő's most important work appears in these three volumes only by implication, since it is in his books: Orthogonal polynomials, and (with Pólya) Problems and theorems



in analysis, and Isoperimetric inequalities in mathematical physics. It was an excellent idea to include perceptive reviews of these books: of the first, by P. C. Rosenbloom; of the second, by Askey; and of the third, by L. E. Payne. Besides contributing an Overview of Szegő's work, Askey has provided notes on most of the papers, giving their setting and bringing the history of their consequences up to date.

There are also two more extended notes. One, by T. Kailath, is on the application of Szegő's unit circle polynomials to prediction theory. This describes how these polynomials, apparently of the most abstract mathematical character, have had a decisive effect on, inter alia, the technology of synthesizing speech. The other, by B. M. McCoy, describes how Szegő's 1952 paper, On certain Hermitian forms associated with the Fourier series of a positive function, originated from a physicist's question and has indeed had applications to physics, with ramifications that are expanding to this day. There are also a brief bibliography of Szegő, and reminiscences by Pólya and by Rosenbloom.

The complete list of Szegő's publications is reproduced in each volume. The three volumes are an exemplary tribute to an exemplary mathematician.

Evanston, Ill.

R. P. Boas

**Reid, C., Neyman – From Life**, Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, 51 photographs, v + 298 p., cloth DM 49,—

Diese Biographie des großen alten Mannes der mathematischen Statistik ist von besonderer Prägung: sie entstand zu wesentlichen Teilen aus Befragungen Neymans selbst, seiner Kollegen und Schüler, die die Verfasserin in 1978 vornahm. So konnte erstmalig die Frühzeit der Statistik genauer beleuchtet werden, für die kaum Dokumente existieren. Der offenbare, aber bei einem solchen Vorgehen unvermeidliche, Nachteil ist die Bindung an Neymans eigene Sicht dieser Epoche. Für die besser belegte Zeit Neymans in den USA waren der Verfasserin dann zusätzlich Archive und Bibliotheken zur Hand.

Das Werk weicht durch acht Einschübe über die Zeit von 1978/79 von einer chronologischen Anlage ab. Schon dies zeigt, daß mehr ein Porträt als eine Entwicklungsgeschichte beabsichtigt ist. So erscheint – leider – nur die Oberfläche des wissenschaftlichen Progresses. Um so mehr tritt das Charakterbild Neymans hervor, seine unbeirrbare Zielstrebigkeit im Kampf gegen ideologische Widerstände und politische Hemmnisse, mit der er einen grundlegenden Standpunkt in der Statistik verfocht und ein bedeutendes Department aufbaute, dabei stets gegen ein vordergründiges Nützlichkeitsdenken den intellektuellen Anreiz der Statistik zu bewahren trachtend: „Life is complicated, but not uninteresting“ war einer seiner Wahlsprüche.

Das Porträt ist meisterlich gelungen; jeden, der Neyman begegnet ist, wird die Echtheit dieses Lebensbildes beeindrucken.

Heidelberg

D. W. Müller

**Koblitz, A. H., A Convergence of Lives**. Sofia Kovalevskaia: Scientist, Writer, Revolutionary, Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1983, xx + 305 p., DM 49,80 (Ko)

**Truhovič-Gjurič, D., Im Schatten Albert Einsteins. Das tragische Leben der Mileva Einstein-Marič**. Bern – Stuttgart: Verlag Paul Haupt 1983<sup>2</sup>, 189 p., DM 35,— (Tr)

Die hier angezeigten Biographien zweier Mathematikerinnen sind gänzlich unvergleichbar. Beiden gemeinsam ist aber das Anliegen, die Leistungen der dargestellten Frauen ins rechte

Licht zu setzen. Insofern treffen sich beide Bücher mit dem Anliegen der Frauenbewegung, die Rolle der Frauen in der Geschichte (der Wissenschaften) klarer hervortreten zu lassen.

Schon die porträtierten Frauen sind sehr verschieden: Sofia Kovalevskaia (1850–1891) machte Karriere als erste Mathematikprofessorin der Neuzeit (und erste Universitätsprofessorin seit der italienischen Renaissance) in Stockholm; sie war neben ihrer erfolgreichen mathematischen Tätigkeit auch literarisch sehr aktiv. Mileva Einstein-Marič (1875–1948), Albert Einsteins erste Frau (Heirat 1903, Scheidung 1919), hat anscheinend weder literarische Zeugnisse noch mathematische Arbeiten hinterlassen; aber das Buch (Tr) suggeriert, daß sie an der Mathematik in Einsteins ersten bahnbrechenden Publikationen (vor der allgemeinen Relativitätstheorie) keinen geringen Anteil hatte. — Ebenso verschieden die Autorinnen der Bücher: Ann Koblitz ist eine junge Historikerin der Naturwissenschaften, die sich besonders mit der Rolle der Frauen in der Wissenschaft befaßt, und so ist das Buch (Ko) nach den Regeln historischer Forschung gearbeitet, die höchstens Detailkritik gestatten (s. u.). Desanka Trbuhović ist nur 22 Jahre jünger als ihre Heldin und stammt wie diese aus Serbien. Aus serbischem Nationalstolz heraus fügte sie eine lose Ansammlung von Memorabilien über Mileva Marič zu einer romantischen Biographie zusammen, die 1969 in ihrer Muttersprache zum ersten Mal veröffentlicht wurde und jetzt in der sprachlich häufig mangelhaften deutschen Fassung (Tr) vorliegt. Hier gibt es nicht einmal ein Inhaltsverzeichnis, geschweige Fußnoten oder präzise Quellenangaben. Zwar gibt es manches schöne Foto; aber statt z. B. die Unterschrift des Zeichenlehrers abzubilden (p. 29) hätte man besser darauf geachtet, daß nicht Frontispiz oder Umschlagbild seitenverkehrt geraten. Im Text wechseln abstrus übergenaue Details („Eben als sie denkt, jetzt werde es leichter gehen, weicht die Erde unter ihr. Vorbeikommende finden sie bewußtlos ...“ p. 174) mit ungeheuerlichen Verallgemeinerungen („Die Einfachheit der aufgestellten Gleichungen weist fast unzweifelhaft ihren Stil auf, der ihr in Mathematik und Leben gleichermaßen eignete.“ p. 77). Es ist also völlig unmöglich, anhand dieses Buches ein begründetes Urteil über Milevas wissenschaftliche Bedeutung zu fällen.

Vergleichen wir mit einigen Einstein-Biographien (s. Liste am Ende!): Carl Seelig bescheinigt Mileva, ohne dies im einzelnen zu belegen, „durchschnittliche Intelligenz, aber keine ausgesprochen mathematische Begabung ... Ohne Einstein hätte sie das Abgangszeugnis vielleicht nie erworben.“ (Ihr Abgangszeugnis vom Polytechnikum Zürich ist insgesamt nur wenig schlechter als Alberts — vgl. (Tr), p. 43, 57.) Andererseits ist es für Seelig nicht erklärungsbedürftig, daß sie nur ein Abgangszeugnis, kein Diplom erhielt, „wie das bei den Studentinnen damals üblich war“ — (Se), p. 29. Laut (Tr), p. 58, und (Pa), p. 45, hat sie aber zweimal vergeblich versucht, das Diplom zu bekommen. — Max Flückiger (Fl) hält sich, was Mileva angeht, an Seelig, übertreibt aber die negativen Aspekte noch. — Philipp Frank bedauert Einstein fast ob einer so verschlossenen und physikalisch nicht mitdiskutierenden Frau: (Fr), p. 39, 44. — Banesh Hoffmann findet nur Zeit, die Ehe als unglücklich zu bezeichnen (was sie ab 1911 sicher war). Nur der sorgfältige Abraham Pais sagt ehrlich — (Pa), p. 476 —, daß er kein klares Bild von Mileva hat gewinnen können. Er zitiert (p. 47, 301) einen Brief Einsteins an C. Seelig, in dem Einstein u. a. von inneren Widerständen beim Eingehen der Ehe spricht. (Mileva hinkte von Geburt an. Es ist schwer zu sagen, ob Einstein hier auch darauf anspielt.)

Daß Mileva und Paul Habicht eine Maschine zur Messung kleiner Spannungen erfanden und durch Albert patentieren ließen, ist vielleicht die einzige derzeit sicher dokumentierte wissenschaftliche Leistung Milevas. In (Tr), p. 65, wird dabei auf ihr *physikalisch-praktisches* Geschick abgehoben. Die Hauptthese von (Tr) über Milevas *mathematische* Beiträge ist demgegenüber ganz unbelegt. — Die Tatsache, daß Einstein das gesamte Geld des Nobelpreises Mileva gab, wird in (Tr) sehr stark herausgestrichen. Die Autorin scheint aber nicht zu wissen, daß dies ein Teil des Scheidungsvertrages von 1919 war — s. (Pa), p. 300, 503; vgl. (EB), Nr. 43. Jedenfalls ist es unmöglich, daraus allein schon eine Würdigung von Milevas Mitarbeit zu folgern.

In dem Buch (Tr) überzeugt (trotz aller Mängel) die eindringliche Schilderung von Milevas langem Lebensende mit dem kranken jüngeren Sohn. Es ist aber vor allem eine *Herfassung*, das Leben und die mögliche wissenschaftliche Rolle von Mileva Marić exakt zu untersuchen. Vielleicht enthält der bisher anscheinend noch nicht gesichtete Briefwechsel zwischen Albert und Mileva Aufschlüsse darüber.

An dem sehr sorgfältig gearbeiteten Buch (Ko), das auf langen Recherchen in Archiven in Leningrad und Stockholm beruht, kann man die manchmal übertriebene Tendenz zur Benutzung schwer zugänglicher Quellen bedauern: Von V. V. Golubev z. B. wird nur eine russische Arbeit, nicht aber das auf Englisch vorliegende Buch (Go) mit historischem Anhang erwähnt (ich verdanke Horst Knörrer, Bonn, diesen und andere Hinweise); die Rolle des französischen Sozialisten Jaclard in der Pariser Kommune wird (p. 105) durch eine russische Quelle belegt. In Einzelfällen muß man Bücher in den Fußnoten identifizieren, weil sie in der Bibliographie fehlen – z. B. (WK) in fn. 8, p. 101. Eine Zeittafel hätte das Buch abgerundet. Druckfehler sind selten, abgesehen von den deutschen Titeln in der Bibliographie. Daß alle russischen Titel in Umschrift angegeben sind, entspricht natürlich westlichen Gepflogenheiten, führt aber m. E. nur dazu, auch dem Russischkundigen das Identifizieren der Titel zu erschweren.

Ann Koblitz' Hauptziel in (Ko) ist es, das bewegte Leben Kovalevskaias von den Ideen der russischen nihilistischen Bewegung der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts her einheitlich und verständlich zu beschreiben. Von der Kindheit und Jugend auf dem Landgut Palibino, über die Scheinheirat mit Vladimir Kovalevskii, die Reisefreiheit schuf und so die akademische Ausbildung in Heidelberg und dann vor allem in Privatstunden bei Weierstraß in Berlin ermöglichte, das Zwischenspiel mit der Schwester in der Pariser Kommune, nach der Göttinger Promotion die fünfjährige chaotische Familienzeit in Petersburg ohne Mathematik, in der ihre Tochter geboren wird, bis hin zur Rückkehr in die mathematische Welt, die mit der durch Mittag-Leffler erwirkten Dozentur, dann Professur, und dem Preis der Pariser Akademie gekrönt wird – dies alles wird sehr überlegt und genau geschildert und erklärt durch die „nihilistischen“ Ideen, denen gemäß naturwissenschaftliche Ausbildung und Forschung, literarische Betätigung und politisches Engagement nur verschiedene Aspekte einer umfassenden aufklärerischen Bewegung waren. Besondere eigene literarische Qualitäten sind in diesem Bericht zwar nicht angestrebt, aber wer künftig eine zuverlässige Biographie von Sofia Kovalevskaja sucht, wird sich an (Ko) halten. (Für den deutschen Leser sei angemerkt, daß es neben diversen wohl kaum noch lieferbaren Frauenromanen über Kovalevskaja auch eine, wenn auch nicht mehr ganz frische, Übersetzung ihrer eigenen „Jugenderinnerungen“ im Fischer Verlag gibt – 1897/1968/1983 –, mit einem allzu oberflächlichen Nachwort von Peter Härtling.)

Das häufigste Vorurteil unter Mathematikern über Kovalevskaja ist, daß alles Gute in ihren mathematischen Veröffentlichungen von Weierstraß stammt, der sich in die junge Russin verliebt hatte. Aus seinen Briefen an sie (WK) ist es offensichtlich, daß der einsame alte Gelehrte seiner „nicht ... besten, sondern ... einzigen wirklichen Freundin“ – (WK), p. 24 – unbeschränktes Vertrauen entgegenbrachte. (Ihre Briefe an ihn hat er nach ihrem Tode verbrannt, da Privatgeschichten die Nachwelt nicht zu interessieren hätten – (WK), p. 7. Dauernd sorgt er sich, daß seine Briefe an sie in falsche Hände geraten könnten.) Bei aller Zärtlichkeit im Ton kann von einer Liebesbeziehung wohl nicht die Rede sein – vgl. (Ko), p. 116. Im XIII. Kapitel von (Ko) wird die Bedeutung von Kovalevskaias mathematischen Arbeiten dadurch beleuchtet, daß Meinungen bedeutender Mathematiker über sie zusammengestellt werden. Koblitz beweist so die starke Stellung Kovalevskaias in der mathematischen Welt. Sie steigt aber als Historikerin nicht selbst in die mathematischen Einzelheiten ein. Ähnliches findet sich auch in ihrem Artikel im *Math. Intelligencer* 6(1), 1984, p. 20–29, dort noch gewürzt mit den unglaublichen Verrißsen von Kovalevskaias Leistungen durch gegenwärtige Herausgeber der *Acta Math.* Es ist Zeit, daß hier (mit mathematischen Einzelheiten!) reiner Tisch gemacht wird: Kovalevskaja hat sicher nie die Bedeutung ihres Lehrers erreicht; aber aus (WK) kann man einen Eindruck von

der Zusammenarbeit der beiden bekommen (vgl. z. B. die behutsame Schilderung in K.-R. Biermann, *Crelle* 223 (1966), 208–210); der Fehler in einem Artikel Kovalevskaias und seine Korrektur sollten erklärt werden; nicht zuletzt sollte die jüngste Bedeutung der Kovalevskischen Methode zum Auffinden integrierbarer Hamiltonscher Systeme dargestellt werden. Vielleicht wird das angekündigte Buch von Roger Cooke dies leisten.

#### Bibliographie

- (EB) A. Einstein – M. Besso, *Correspondance 1903–1955*; Paris 1972  
 (Fl) Max Flückiger, *Albert Einstein in Bern*; Verlag Paul Haupt (Bern – Stuttgart), 1974  
 (Fr) Philipp Frank, *Einstein – Sein Leben und seine Zeit*; Wiesbaden 1979  
 (Go) V. V. Golubev, *Lectures on Integration of the Equations of Motions of a Rigid Body about a Fixed Point*; Moscow 1953  
 (Ho) Banesh Hoffmann, *Albert Einstein, créateur et rebelle*; Paris 1975  
 (Pa) Abraham Pais, „Subtle is the Lord ...“ – *The Science and the Life of Albert Einstein*; Oxford 1983  
 (Se) Carl Seelig, *Albert Einstein*; Zürich 1954  
 (WK) Briefe von Karl Weierstraß an Sofie Kovalevkaia (dtsh.-russ.); Moskau 1973

Bonn

N. Schappacher

**Lothaire, M., *Combinatorics on Words*** (*Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 17), London – Amsterdam: Addison Wesley 1983, xix + 218 p., hardbound

Bekanntlich ist ein Wort eine endliche Folge von „Buchstaben“, die einem „Alphabet“ A entnommen werden. Das vorliegende Buch ist die erste systematische Behandlung der kombinatorischen Eigenschaften von Wörtern, die in vielen Teilen der reinen wie der angewandten Mathematik eine wichtige Rolle spielen (z. B. beim Studium freier Gruppen und Algebren, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der Automatentheorie, der Informationstheorie und der Theorie formaler Sprachen). Die ersten wesentlichen Arbeiten auf diesem Gebiet stammen von Thue und MacMahon (Anfang unseres Jahrhunderts). Heutzutage wird das Gebiet vor allem von Marcel Schützenberger und seiner Schule gepflegt, der das Laboratoire Informatique Théorique et Programmation in Paris gründete. Das vorliegende Buch ist dann auch von 11 Autoren, die zum größten Teil an französischen Universitäten lehren und als gemeinsames Pseudonym den Namen M. Lothaire gewählt haben. Erfreulicherweise ist es trotzdem gelungen, eine einheitliche Darstellungsweise durchzuhalten.

Zum Inhalt im Einzelnen: Nach einem einführenden Kapitel von D. Perrin, in dem einige grundlegende Definitionen und Ergebnisse behandelt werden, ist eines der Hauptthemen das Studium unvermeidbarer Regularitäten, also solcher Eigenschaften, die jedes hinreichend lange Wort besitzt (und dual dazu die Frage nach Eigenschaften, die vermeidbar sind). Im 2. Kapitel wird die Existenz beliebig langer quadratfreier Wörter gezeigt, also von Wörtern, die sich nicht in der Form  $uvvw$  zerlegen lassen (J. Berstel und C. Reutenauer). Im 3. Kapitel (J. E. Pin) wird van der Waerden's berühmter Satz über arithmetische Progressionen bewiesen und im Rahmen der vorliegenden Thematik interpretiert. Kapitel 4 (G. Pirillo) behandelte allgemein „repetitive“ Abbildungen und Morphismen und in Kapitel 7 (C. Reutenauer) werden Zusammenhänge zwischen unvermeidbaren Regularitäten und Polynom-Identitäten in Algebren untersucht. Die Kapitel 5 bis 7 sind mehr algebraischer Natur als die restlichen Kapitel. Ganz besonders gilt dies für Kapitel 5 (D. Perrin), in dem Faktorisierungen des freien Monoids aller Wörter über A untersucht werden; insbesondere werden hier die sogenannten Lyndon-Wörter betrachtet und zur Konstruktion von Basen der freien Lie-Algebren verwendet. Dabei wird die Theorie freier Lie-Algebren soweit benötigt entwickelt (bis zum Campbell-Baker-Hausdorff-Theorem). Kapitel

6 (J. Sakarowitch und I. Simon) behandelt Unterwörter eines Worts (also alle Teilfolgen des gegebenen Worts); verschiedene Zählprobleme, die sich hier ergeben, werden mit Hilfe der Algebra der Polynome in nicht-kommutierenden Unbestimmten über  $\mathbf{N}$  bzw.  $\mathbf{Z}$  gelöst. In den Kapiteln 8 bis 11 werden weitere interessante Einzelthemen behandelt: In Kapitel 8 (M. P. Schützenberger) das sogenannte „Critical factorization theorem“, in Kapitel 9 (C. Choffrut) Gleichungen in Wörtern (das vielleicht einfachste Beispiel ist die Gleichung  $xy = yx$ , die – wie bereits im 1. Kapitel gezeigt wird – als Lösungen genau diejenigen Wortpaare  $(x, y)$  besitzt, die Potenzen eines gemeinsamen Wortes  $u$  sind). Kapitel 10 (D. Foata) behandelt Umordnungen von Wörtern über dem Alphabet  $\mathbf{N}$  und enthält kombinatorische Ergebnisse z. B. über die Anzahl von Abstiegen, Inversionen usw.; diese Resultate werden insbesondere auf Permutationen angewendet. Schließlich werden im 11. Kapitel (R. Cori) die Zusammenhänge von Wörtern und Bäumen untersucht und für einen kombinatorischen Beweis der Lagrangeschen Inversionsformel verwendet. Alle Kapitel enthalten eine beachtliche Anzahl von Problemen, häufig mit Literaturhinweis.

In seinem Vorwort schreibt D. Perrin: „This book is written at a completely elementary level so as to be accessible to anyone with a standard mathematical background.“ Dieses Ziel wurde meines Erachtens durchaus erreicht. Die Darstellung ist im allgemeinen klar; alle benötigten Begriffe werden erklärt (das gilt sogar für Kapitel 5 und die dort auftretenden freien Lie-Algebren). Trotzdem ist die Lektüre nicht trivial und erfordert an vielen Stellen eine aufmerksame Mitarbeit des Lesers. Wahrscheinlich ist dies kein Buch, das man in einem Zuge lesen möchte. Jedes der einzelnen Kapitel behandelt aber sein Thema gründlich und enthält meist ausführliche Hinweise auf verwandte Ergebnisse und weiterführende Literatur. Es ist zweifellos ein Verdienst der Autoren, viele wesentliche und bisher über die Literatur verstreute Ergebnisse und Methoden in klarer Weise in Buchform zusammengebracht zu haben. Insgesamt möchte ich den vorliegenden Band jedem an Kombinatorik und freien algebraischen Strukturen interessiertem Mathematiker empfehlen.

Gießen

D. Jungnickel

**Prieß-Crampe, S., Angeordnete Strukturen: Gruppen, Körper, projektive Ebenen** (Ergebnisse, 2. Folge, Bd. 98), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1983, xii + 286 p., geb., DM 178,–

Weite Bereiche der Grundlagen der (ebenen) Geometrie passen in folgenden Rahmen: Einer aus Punkten und Geraden bestehenden Inzidenzstruktur ist irgendeine Art metrischer Struktur und eine topologische Struktur aufgeprägt, und man fragt nach dem Zusammenwirken von Annahmen über diese 3 Strukturkomponenten. Aus historischen Gründen, insbesondere wohl unter dem Einfluß von Hilberts Buch (1899) wird die Stetigkeit dabei mit Vorliebe über eine Anordnung der Geraden eingeführt, die bei Projektivitäten erhalten bleibt oder umgekehrt wird. Lineare Anordnungen affiner Ebenen und ihrer Koordinatenbereiche sind zentrales Thema des vorliegenden Buches; die metrische Komponente und Verallgemeinerungen des Anordnungsbegriffs bleiben dabei außer Betracht. So sind Anordnungsfragen in hyperbolischen Ebenen und Beziehungen zu quadratischen Formen ausgegrenzt, ebenso alle Querverbindungen zur mathematischen Logik wie etwa Nichtstandardmodelle. Vervollständigung und Einbettung angeordneter Körper in Körper formaler Potenzreihen (mit antiwohlgeordnetem Träger) bilden einen weiteren Schwerpunkt des Buches. Der Stoff ist weitgehend im Hinblick auf die genannten Gesichtspunkte ausgewählt.

Nach einem kurzen Kapitel über angeordnete (insbesondere archimedische) loops und Gruppen folgen 46 Seiten über angeordnete Ringe und Körper einschließlich der klassischen Theorie reell abgeschlossener Körper mit vollständigen Beweisen. Das dritte Kapitel enthält

auf 84 Seiten Abschnitte über den stetigen Abschluß eines angeordneten Körpers durch eigentliche Dedekindsche Schnitte (Baer 1970), (maximal) ordnungsverträglich bewertete Körper (Kaplansky 1942) und Vervollständigungen angeordneter Gruppen (Holland 1963). Ein kurzes Kapitel ist  $\eta_\alpha$ -Gruppen und -Körpern gewidmet. Das letzte Kapitel ist mit über 100 Seiten am umfangreichsten, aber auch am breitesten geschrieben. § 1 enthält die großenteils tautologischen Beziehungen zwischen Anordnungen von projektiven und affinen Ebenen und ihren Ternärkörpern. Mit den konvexen Dreiecken als Umgebungsbasen werden Verbinden und Schneiden stetig. Deshalb folgen 28 Seiten über Grundbegriffe topologischer Ebenen. Jede archimedisch angeordnete Ebene läßt sich vervollständigen zu einer „ebenen“ Ebene, deren Punktmenge eine Fläche ist. Der naturgemäß komplizierte Beweis dieses Satzes der Verfasserin ist in § 3 dargestellt. Das Ergebnis von Joussem (1981), daß sich jede endlich erzeugte freie Ebene archimedisch anordnen läßt, wird ohne Beweis angeführt. Überblicke über Homomorphismen projektiver Ebenen und die Lenz-Barlotti-Klassifikation für angeordnete Ebenen beschließen das Buch.

In seiner Art entspricht der Text in vieler Hinsicht eher einem Lehrbuch als den Vorstellungen, die man mit der „Ergebnisse“-Serie verbindet. In den geschilderten Grenzen sind die grundlegenden Resultate gut und so ausführlich dargestellt, daß sie Studenten ohne weiteres zugänglich sind (aber bei einem Preis von DM 178,— kaum erschwinglich). Routinierteren Lesern würden sicher an manchen Stellen kürzere Beweisandeutungen genügen. Enzyklopädische Vollständigkeit wurde nicht angestrebt; auch das Literaturverzeichnis ist mit 315 Titeln längst nicht vollständig. Das Buch dürfte zu weiteren Untersuchungen Anlaß werden und wird für alle an den angesprochenen Fragen Interessierten sehr nützlich sein.

Tübingen

H. Salzmann

**Hua, L. K., Introduction to Number Theory** (transl. by Shin, P.), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, xviii + 572 p., cloth, DM 96,—

Das vorliegende Buch gefällt mir ganz ausgezeichnet. Schon ein flüchtiger Blick zeigt sofort, daß es aus einer langjährigen Forschungs- und Lehrtätigkeit erwachsen ist. Der Inhalt ist vielfältig und meist auch schön dargestellt. Es wird große Mühe darauf verwendet, dem Leser die einzelnen Gegenstände nicht nur mittels Formeln sondern auch mit Erklärungen nahebringen; gewisse Unebenheiten könnten durchaus erst beim Übersetzen aus dem Chinesischen hereingekommen sein.

Das Buch ist klar aufgebaut. Es bringt zunächst grundlegende Dinge wie Faktorisierung, Kongruenzen, quadratische Reziprozität, Primitivwurzeln. Es schließt sich an Tschebyscheffs Satz über Primzahlen, einiges über arithmetische Funktionen, Charaktere, Gauß-Summen und Partitionen. Der Primzahlsatz wird in der Gestalt  $\psi(x) \sim x$  nach Wiener-Ikehara bewiesen; mit dieser Methode hat der Referent kürzlich  $\psi(x) = x + O(xe^{-(\log x)^c})$  für ein gewisses  $c > 0$  gezeigt. Es werden dann Kettenbrüche, diophantische Gleichungen, binäre quadratische Formen und ganzzahlige Matrizen untersucht. Es schließt sich an einiges über  $p$ -adische und algebraische Zahlen, das Waring-Problem, Schnirelman-Dichte und Geometrie der Zahlen. Die bisherige Aufzählung gibt nur einen vagen Eindruck von der Reichhaltigkeit. So hätte man neben den Sätzen von Roth, Khintschin und Gelfond-Schneider noch vieles andere hervorheben können. Aber auch so sieht man, daß sehr viel Interessantes in dem Buch steht. Erfreulicherweise sind auch Übungsaufgaben (ohne Lösungen) eingestreut und noch ungelöste Probleme.

Viele Kapitel sind natürlich unabhängig voneinander lesbar. Es fehlt ein Leitfaden. Das Buch erinnert zwangsläufig an das Werk Hardy-Wright; doch werden hier die Akzente oft anders gesetzt. Ich empfehle das Buch mit großem Nachdruck und wünsche mir sehr, daß es

nicht nur im Schatten des erwähnten Klassikers zu leben hat, sondern daß viele Leser den Zauber und die Anregungen dieses Buches entdecken mögen.

Hannover

G. J. Rieger

**Hua, L. K., Selected Papers** (Ed.: Halberstam, H.), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1983, xiv + 889 p., cloth, DM 128,—

Loo-Keng Hua ist zweifellos einer der bedeutendsten Mathematiker unserer Tage. Es ist zu begrüßen, daß seine weitverstreuten mathematischen Arbeiten in einer gelungenen Auswahl zusammengefaßt wurden. Hua ist wohl in erster Linie durch seine Beiträge zur Zahlentheorie bekanntgeworden. Doch hat er auch viele andere Gebiete wesentlich bereichert wie etwa Algebra, Geometrie und Funktionentheorie. Seine Arbeiten zur Zahlentheorie lassen sich am besten mit den Stichworten Waringsches Problem, Exponentialsummen, Goldbachsches Problem und Gitterpunktfragen umschreiben; ein vorzüglicher Überblick findet sich auf S. 1–5. Bei den Beiträgen zur Algebra und Geometrie geht es hauptsächlich um Schiefkörper, klassische Gruppen und Geometrie der Matrizen; dazu gehört ein guter Überblick auf S. 281–284. Der entsprechende Überblick für die Funktionentheorie ist auf S. 634–635. Die Auswahl aus dem Gesamtwerk eines Mathematikers hat wohl immer etwas Subjektives. Im vorliegenden Fall ist sie vorzüglich gelungen. Das Buch ist von hohem Interesse für Mathematiker verschiedenster Forschungsrichtungen.

Hannover

G. J. Rieger

**Schroeder, M. R., Number Theory in Science and Communication** (Springer Series in Information Sciences, vol. 7), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, 67 fig., 350 p., cloth, DM 64,—

Der ehemalige Direktor von „Acoustics Speech and Mechanics Research“ (Bell Laboratories) und jetzige Göttinger Physiker legt hier ein ungewöhnliches Buch vor: Die Streifzüge eines Physikers durch die Zahlentheorie mit dem Blick auf Anwendungen in Physik, Biologie, Informatik, Kryptographie u. ä. Eine kleine Auswahl von Überschriften der 168 Paragraphen zeigt den lockeren Stil des Autors und seine kaleidoskopartige Sicht am besten: Euler, Totients and Cryptography. Gauß, Congruences and Diffraction. Galois, Fields and Codes. Hilbert and Large Nuclei. A Fourier Property of Primitive Roots and Concert Hall Acoustics. Spread Spectrum Communication. Coin Tossing by Telephone. Minimum Redundancy Antennas. Galois Theory and Impossible Necklaces. Die 30 Kapitel sind, wie man an zahlreichen Wiederholungen merkt, z. T. unabhängig voneinander geschrieben, so daß man das Buch nicht linear lesen muß.

Es ist die Absicht des Autors, eine wenig formale, dafür sehr informative (Intuition und Wechselbeziehungen zu anderen Gebieten betonende) Einführung in die Zahlentheorie zu bieten. Der Buchprospekt macht daraus eine „Einführung in die Zahlentheorie für Nicht-Mathematiker“; der Besprecher kann das Buch allerdings mit gutem Gewissen nur Mathematikern empfehlen, denn bei aller anregenden Reichhaltigkeit kommt die Mathematik zu kurz. Zum einen enthält das Buch zahlreiche mathematische Versehen bzw. Ungenauigkeiten (schon im 1. Kapitel kann man mehr als ein halbes Dutzend finden). Typisch ist, daß mehrfach falsche Behauptungen, fehlerhafte Formeln später in korrekter Form wieder auftauchen, einiges bleibt aber unkorrigiert und – wegen nicht vorhandener Beweise – vom Laien auch unkorrigierbar. Bisweilen zeigen aber auch vorgeführte Beweise, wie die (fehlerhaft aufgestellte) Behauptung

richtig lauten müßte. Der Mathematiker wird diese Versehen leicht korrigieren können, der Nichtmathematiker aber wird irritiert bleiben. Diese Ungenauigkeiten beschränken sich nicht nur auf mathematische Betrachtungen: In dem Paragraphen „Octaves, Temperament, Kilos und Decibel“ kann man z. B. den Eindruck gewinnen, daß auf Bachs wohltemperiertem Klavier die Töne c und h auf Grund der Approximation  $3^5 \approx 2^8$  identifiziert werden.

Der lockere und unterhaltsame Stil des Autors bringt außer Ungenauigkeiten aber auch tieferliegende Probleme mit sich: Indem Beweise oft durch Beispiele oder Plausibilitätsüberlegungen ersetzt werden, geht das Gefühl für das tragende Gerüst des Gebäudes der Zahlentheorie und für den Schwierigkeitsgrad der aufgeworfenen mathematischen Probleme verloren. Das führt einmal dazu, daß wesentliche elementare Begriffe (wie z. B. primitive Polynome) unterschlagen werden, obwohl sie stillschweigend (als Voraussetzung) benutzt werden; zum anderen kommt es vor, daß Sachverhalte als erstaunlich und merkwürdig hingestellt werden, die mit (in früheren Kapiteln) bereitgestellten Methoden leicht aufzuklären wären. Gleichzeitig einher geht damit eine gewisse Unsicherheit, wie weit die vom Autor (bisweilen lückenhaft) vorgetragenen Schlußketten wirklich stichhaltig sind. Das umfangreiche Literaturverzeichnis ist hier allerdings eine wertvolle Hilfe.

Dennoch ist das Buch aus mehreren Gründen für Mathematiker lesenswert: Zum einen ist es eine anregende Einführung in experimentelle Mathematik, mit vielen interessanten Bildern, für die nicht immer eine befriedigende Erklärung vorhanden ist. Zum anderen kann und sollte der immer wieder von elementaren Fragen auch und gerade aus nichtmathematischen Gebieten ausgehende und mit Plausibilität schnell zu Resultaten kommende Stil des Buches eine willkommene Zutat zu mathematischen Vorlesungen sein. In vielen Fällen wird das Buch mehr den Appetit wecken, die Strukturierung und Vertiefung bleibt dem Leser überlassen. Vieles wird angetippt und bleibt ohne Rückgriff auf die zitierte Literatur unverständlich – was hilft z. B. die Darstellung der Riemannschen Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion, wenn nicht gesagt wird, welche Bedeutung dies für verschiedene zahlentheoretische Fragestellungen hat? Doch dem Autor ist für das Zusammentragen reichhaltigen Anschauungs- und Anwendungsmaterials zur Zahlentheorie Dank zu sagen – die Formgebung bleibt als Aufgabe für den Mathematiker übrig.

Erlangen

W.-D. Geyer

**Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Prestel, A., Remmert, R., Zahlen** (Grundwissen Mathematik, Band 1), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer Verlag 1983, XII + 291 S., geheftet, DM 48,—

Das vorliegende von 7 Autoren und einem Redakteur (K. Lamotke) geschriebene Buch über den Aufbau des Zahlensystems ist der erste Band der neuen Springer-Reihe „Grundwissen Mathematik“, aber wendet sich nicht unbedingt an Studienanfänger. Seine Lektüre setzt Kenntnis der in den Anfängervorlesungen eingeübten Terminologie und selbständigen Umgang mit mathematischer Begrifflichkeit voraus. Trotzdem kann man es getrost dem Erstsemester ebenso wie dem Dozenten empfehlen. Es ist ein wunderschönes Buch, trotz der verschiedenen Autoren sehr homogen und klar geschrieben, reich an historischen Bemerkungen, voll von dem, was man unter „Grundwissen Mathematik“ oder mathematischer Allgemeinbildung versteht.

Sieht man von Bolzanos Reiner Zahlenlehre ab, liefern die beiden noch heute lesenswerten Büchlein von Dedekind („Stetigkeit und Irrationalzahlen“, Vieweg 1872, <sup>7</sup>1965 und „Was sind und was sollen die Zahlen“, Vieweg 1888, <sup>10</sup>1965) den ersten heutigen Ansprüchen genügenden Aufbau des Zahlensystems. Es ist daher nicht verwunderlich, daß Dedekind nach Euler der meistzitierte Name in diesem Buch ist. E. Landau hat Dedekinds Gedanken umgegos-



sen zu einer Anfängervorlesung („Grundlagen der Analysis“, Leipzig 1930, repr. Frankfurt 1970), die das Zahlensystem auf den Peano-Axiomen aufbaut. Bis heute ist dieses Buch das Alibi für viele Dozenten und andere Bücher (so auch das vorliegende), die nicht alle für einen vollständigen Aufbau notwendigen (aber durch Wiederholung ermüdenden) Beweisschritte vorführen wollen. Seither gibt es zahlreiche didaktische Bearbeitungen; es gibt das dreibändige Werk von W. Felscher („Naive Mengen und abstrakte Zahlen“, B.I. 1978/1979), das man aber eher als eine methodologisch-erkenntnistheoretische Einführung in die Grundlagen der Mathematik bezeichnen muß, obwohl es viel vom Aufbau der Zahlen handelt. Ein mit dem vorliegenden vergleichbares Buch ist mir jedoch nicht bekannt, und so muß ich die erste Wertung ergänzen: Nicht nur ein wunderschönes Buch, auch ein nützliches Buch liegt hier vor, das eine Lücke in der Lehrbuchliteratur füllt.

Zum Inhalt: Das Buch zerfällt in 3 Teile. Der klassische Aufbau des Zahlensystems geschieht in Teil A: K. Mainzer entwickelt in den ersten beiden Kapiteln die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen, R. Remmert in den folgenden 3 Kapiteln die komplexen Zahlen, wobei ein Kapitel den Fundamentalsatz der Algebra, ein weiteres der (dabei benutzten) Zahl  $\pi$  gewidmet ist. Damit ist die Zahlenwelt für Gauß zu Ende, nicht aber für den heutigen Mathematiker. Der Teil B wählt aus den Erweiterungsmöglichkeiten die reellen Divisionsalgebren aus. M. Koecher und R. Remmert stellen in 3 Kapiteln die Hamiltonschen Quaternionen und die Cayleyschen Oktaven dar und beweisen die zugehörigen Eindeutigkeitsätze von Frobenius, Hopf und Zorn. In einem weiteren Kapitel werden die Kompositionsalgebren und der Satz von Hurwitz vorgestellt. Diese 4 Kapitel liefern schönes Material für Proseminare. Das letzte Kapitel dieses Teiles B, von F. Hirzebruch geschrieben, ist (naturgemäß) mehr skizzenhaft und stellt die Erfolge der algebraischen Topologie (mit Kohomologie, charakteristischen Klassen, Periodizitätssatz der K-Theorie) bei der Bestimmung der Dimension der Divisionsalgebren dar, die der Algebra bisher unerreichbar blieben. Im Teil C des Buches („Ausblicke“) beleuchtet A. Prestel zunächst die infinitesimalen Zahlen im Lichte von Robinsons Non-Standard Analysis, dann berichtet H. Hermes über Conways Konzept der aus der Spieltheorie gewonnenen Zahlen, indem er die grundlegenden Ideen ausbreitet. Den Abschluß bildet H.-D. Ebbinghaus mit einem Kapitel über Mengenlehre und Mathematik, das seit Dedekind zum Aufbau des Zahlensystems gehört.

Was fehlt? Z. B. der Name Hensel und die von ihm geschaffenen  $p$ -adischen Zahlen, sowie vieles, was damit zusammenhängt: Die Restklassen modulo  $p$  und die Galoisfelder (die durch die Computer zu Zahlbereichen auch in der angewandten Mathematik geworden sind), die lokalkompakten Körper (obschon die zusammenhängenden unter ihnen alle vorgestellt sind). Hier muß man sich in der zahlentheoretischen Literatur orientieren. Doch das, was das Buch bietet, bietet es in ausgefeilter und druckfehlerarmer Form; das Lesen ist ein Genuß, den man sich nicht entgehen lassen sollte.

Erlangen

W.-D. Geyer

Hecke, E., *Lectures on Dirichlet Series, Modular Functions and Quadratic Forms* (Edited by Bruno Schoeneberg in collaboration with Wilhelm Maak), Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1983, 98 p., DM 32,—

1959 erschienen in erster Auflage die gesammelten mathematischen Werke von Erich Hecke, die seitdem zum Literaturgrundstock jedes an Modulfunktionen Interessierten gehören und schon zweimal nachgedruckt werden mußten. Eingeweihte wußten schon lange, daß die Angabe im Vorwort, der Sammelband enthalte alle veröffentlichten mathematischen Abhandlungen Heckes mit Ausnahme des Buches „Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zah-

len“ nur bei sehr enger Auslegung des Begriffes der mathematischen Abhandlung richtig war. Es existierte noch eine Ausarbeitung von Vorlesungen, die Hecke bei einem Gastaufenthalt 1938 in den USA gehalten hatte [E. Hecke, *Dirichlet series, modular functions and quadratic forms*. Notes by Hyman Serbin. The Institute for Advanced Study, Spring Term, 1938. Planographed by Edwards Brothers, Inc., Ann Arbor, Michigan, 1938]. Diese Ausarbeitung war leider in kaum einer Bibliothek vorhanden und somit praktisch unzugänglich. Das war um so bedauerlicher als es sich um eine Vorlesung über einige der interessantesten und folgenreichsten Ansätze in Heckes mathematischem Schaffen handelte. Dem Verlag Vandenhoeck & Ruprecht ist zu danken, daß er eine Wiederherausgabe ermöglicht hat, womit jetzt alle Veröffentlichungen Heckes zugänglich sind. Als glücklicher Umstand kommt hinzu, daß Heckes Notizen zu dieser Vorlesung erhalten sind, was eine unmittelbare Kontrolle der Ausarbeitung erlaubte (es zeigte sich, daß Notizen und Ausarbeitung im wesentlichen übereinstimmten).

In den Vorlesungen gibt Hecke eine Einführung in die von ihm in den Veröffentlichungen der Jahre 1935–1937 entwickelten Theorien. Es handelt sich zum einen um die Aufdeckung des Zusammenhanges zwischen Dirichletreihen mit einer Funktionalgleichung vom Typ der Funktionalgleichung der Zetafunktion und den Modulfunktionen zu den Heckeschen Gruppen  $G(\lambda)$  in der Arbeit „Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung“ [Math. Ann. 112 (1936), 664–699], deren Darstellung den Hauptteil der Vorlesungen (Kap. I–IV, VII) einnimmt. Zum anderen behandelt er (Kap. V) die Anfänge der systematischen Theorie der heute als Heckeoperatoren bezeichneten Operatoren  $T_n$  aus seiner Arbeit „Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I“ [Math. Ann. 114 (1937), 1–28]. Über die Methoden und Ergebnisse beider Arbeiten hatte Hecke in zwei Übersichtsartikeln berichtet [Die Primzahlen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Medd. XIII, 10 (1935); Neuere Fortschritte in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Comptes rendus Congr. intern. des Math. Oslo 1936, 140–156]. Die Vorlesung hält sich zwar in den wesentlichen Zügen eng an die erwähnten Arbeiten, ist aber in den Einzelheiten ausführlicher gehalten, insgesamt geschlossener und einheitlicher und angenehmer lesbar, wozu auch das klare Druckbild beiträgt. Sehr schön ist ein vorangestelltes einführendes Kapitel, in dem Hecke eine Übersicht über seine Ergebnisse gibt und auf die Ausgangspunkte seiner Untersuchungen eingeht. Hier erwähnt er auch Ergebnisse seiner Arbeit „Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung und ihre Nullstellen auf der Mittelgeraden“ [Sitzungsber. Bayr. Akad. Wiss. Math.-nat. Abt. 1937, 73–95]. In dem kurzen Kapitel VI klingen Zusammenhänge mit den quadratischen Formen an, die Hecke später ganz besonders beschäftigen.

In der sprachlichen Gestaltung sind zwar die stilistischen Unzulänglichkeiten einer Vorlesungsnachschrift ebenso unverkennbar wie die Tatsache, daß Englisch nicht die Muttersprache des Vortragenden war, dies sollte jedoch den interessierten Leser nicht allzusehr stören. Über das historische Interesse hinaus ist das Buch auch heutzutage noch als einführende Literatur zur Theorie der Modulfunktionen geeignet.

Marburg

K.-B. Gundlach

**Suzuki, M., Group Theory I** (Grundlehren, Band 247), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1981, 450 p., cloth, DM 160,—

„One of my main aims (für das 1977 erschienene japanische Original) was to present an introduction to this recent progress in the theory of finite simple groups.“ Genau das ist es, was der Leser von Suzukis zweibändigem Lehrbuch erwartet, der den Autor als einen Pionier der Theorie endlicher einfacher Gruppen kennt und daher den ersten Band mit einiger Spannung aufschlägt.

Ein Blick auf das in drei Kapitel zu je 6–10 Paragraphen gegliederte Inhaltsverzeichnis läßt jedoch fast nur konventionelle Themen allgemeingruppentheoretischer Natur erkennen. Nichts weist auf Begriffe, Methoden und Klassifikationssätze hin, die mit jenem „recent progress“ verknüpft sind, nichts auf das grundlegende und umfangreiche Werk des Autors selbst.

Welchen Beitrag also leistet der erste Band zu jenem selbstgesteckten Ziel? Welches Konzept liegt ihm zugrunde, wenn er nicht nur als Teil eines größeren Ganzen aufgefaßt werden soll? Was sind andere „main aims“?

Zunächst zum Inhalt: Im ersten Kapitel (Basic Concepts) und einem Teil des zweiten (Fundamental Theorems) wird die jedem Mathematiker vertraute formale Gruppentheorie bis hin zu den Sätzen von Jordan-Hölder und Krull-Remak-Schmidt (für Gruppen mit Operatoren) entwickelt. Weitere Hauptthemen sind abelsche Gruppen, Moduln, lineare Gruppen, freie Gruppen, Erzeugende und Relationen, Erweiterungs- und Kohomologietheorie, Schurscher Multiplikator, Kranzprodukte und natürlich die Sylowschen Sätze mit den grundlegenden Eigenschaften endlicher  $p$ -Gruppen.

Endliche Gruppen erscheinen nur am Rande; die Zerfallssätze von Gaschütz und Schur-Zassenhaus werden als Anwendung sowohl der Kohomologietheorie als auch der Ergebnisse über Kranzprodukte angeboten, die Prinzipien der teilerfremden Operation von Gruppen auf Gruppen als Anwendung und zur Illustrierung der Sätze von Sylow und Schur-Zassenhaus.

Das dritte Kapitel (Some Special Classes of Groups) schließlich kulminiert in einer Beschreibung der (seinerzeit) bekannten endlichen einfachen Gruppen, der eine Betrachtung der symmetrischen und alternierenden Gruppen, der Spiegelungsgruppen (mit der Klassifikation der endlichen) und vor allem der Titschen Theorie der „Gebäude“ und BN-Paare vorangeht.

Nun meine Antwort auf die oben gestellten Fragen: Als erstes Ziel des Buches sehe ich eine gründliche Einführung in die *a l l g e m e i n e* Gruppentheorie, als zweites eine Einführung in die Theorie der *b e k a n n t e n* endlichen einfachen Gruppen (klassische Gruppen, Chevalleygruppen, alternierende Gruppen, sporadische Gruppen), die vor allem mit Konstruktion und geometrischer Bedeutung der Chevalleygruppen (des Prototyps einer einfachen Gruppe) vertraut machen soll. Hieraus erklärt sich die Auswahl der Themen, die insgesamt ein zusammenhängendes Ganzes und kein loses Nebeneinander bilden.

Keines der zahlreichen, leider nur zum Teil im Inhaltsverzeichnis aufgeführten Einzelthemen wird schnell abgehakt, alles wird ausführlich erläutert, vieles in Beispielen und Übungsaufgaben (mit Anleitung) weiter ausgeleuchtet. Der gruppentheoretische Neuling kann sich fürsorglich an die Hand genommen fühlen. Sogar die geringen von ihm erwarteten Vorkenntnisse aus elementarer Algebra und Zahlentheorie werden genau besprochen. Der Fortgeschrittene, der sich etwa in die mit Schwerpunkten der neueren gruppentheoretischen Forschung eng zusammenhängende Titsche Theorie einarbeiten will, wird die Abschnitte über „Coxeter Groups“ und „Geometry of Linear Groups“ dankbar begrüßen.

Kiel

H. Bender

**Aumann, G., Haupt, O., Einführung in die reelle Analysis, Band III: Integralrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlicher**, Berlin – New York: de Gruyter Verlag 1983<sup>3</sup>, 298 S., gebunden, DM 138,-

Der vorliegende letzte Band des 3-bändigen Werkes, vom hochbetagten O. Haupt mit besonderer Energie vollendet, hat die Integralrechnung der reellen Funktionen mehrerer Variablen zum Thema. Die Darstellung knüpft an die im 1. Band begründete Theorie des Riemann-Integrals an und behandelt in 9 Teilen in der Reihenfolge die folgenden Themenkreise: Mengen- algebraische Hilfsmittel, Maße, Integrale, Maße beliebigen Vorzeichens, Stammfunktionen, Er-

gänzungen und Anwendungen auf die Geometrie, Produktmaße und -integrale, die Sätze von Gauß und Stokes, funktionalanalytische Zugänge zu Maß und Integral.

Dem einzigen überlebenden Autor der bereits in den Jahren 1948 bis 1955 zusammen mit G. Aumann und Chr. Pauc begründeten und nunmehr in der 3. Auflage „völlig neu gestalteten“ enzyklopädisch geprägten Darlegung des Grundwissens der reellen Analysis standen bei der Abfassung des neu aufgelegten 3. Bandes Kollegen und Freunde zur Seite, welche mehr als Anregungen lieferten: G. Nöbeling verfaßte den 8. Teil, D. Kölzow lieferte Hinweise auf die Theorie des Liftings innerhalb des 5. Teils, H. Bauer prägte durch seine Arbeiten und Bücher die Darlegung der Grundbegriffe der Maß- und Integrationstheorie in den Teilen 1 bis 3 und 7 sowie die Zusammenschau der abstrakten und konkreten Radonintegration im Teil 9 der Vorlage. Während der 3. Band der 2. Auflage von grundlegender Bedeutung für die seinerzeit einsetzende fruchtbare Entwicklung der Maßtheorie war, handelt es sich im vorliegenden 3. Band der Neuauflage um eine Neuformulierung der inzwischen zumindest für die Lehre im Rahmen der reellen Analysis abgeschlossenen Entwicklung der Theorie.

Die „Integralrechnung“ von Aumann und Haupt zeichnet sich durch eine Fülle von Besonderheiten aus, die in kaum einem anderen existierenden Lehrbuch über diese Disziplin zu finden sind und deshalb ein besonderes Interesse beim Leser wecken. Als Beispiele fallen in den Teilen über Maßtheorie die gründliche Behandlung des Haarmaßes (2.8), die detaillierte Darstellung der Vitalisysteme (5), aber auch hilfreiche topologische Einschübe über den Satz von Tychonoff (2.8.3) und über Moore-Smith-Folgen (5.2) auf, unter den geometrischen Anwendungen der Satz über die Differentiierbarkeit Lebesgue-fast überall dehnungsbeschränkter Funktionen (6.4), das Problem der Totalstetigkeit rektifizierbarer Wege (6.6) sowie der berühmte Satz von Sard (6.7). Überhaupt ist es ein großer Gewinn, im vorliegenden Band eine Maß- und Integrationstheorie vorliegen zu haben, welche eine genauere Betrachtung der klassischen Integralsätze von Gauß und Stokes enthält. Weitere mit der Maß- und Integrationstheorie zusammenhängende Themen der reellen Analysis können bei Beschränkung auf ein Buch von nicht mehr als 300 Druckseiten nur angeschnitten werden. So scheint der auf M. H. Stone zurückgehende Zugang (9.0 bis 9.5) bewußt etwas weiter gefaßt als für die Anwendungen unmittelbar notwendig, der Abschnitt 9.6 über Hilberträume eher etwas isoliert, die Bemerkung über Distributionen im Sinne von L. Schwartz (in 9.7.4) ausschließlich als Andeutung einer weitergefaßten Theorie.

Es mag unangemessen erscheinen, angesichts eines so grundlegend konzipierten und von Fachvertretern höchsten Ranges über Jahrzehnte gestalteten Werkes Kritisches zu vermerken, so wie es sich bei erster, vielleicht nicht genügend vertiefter Lektüre des Buches auftut. Der Referent weiß jedoch, daß der überlebende Autor ein offenes Wort wünscht, und so seien in diesem Zusammenhang erwähnt: der generelle Hang zur eigenwilligen Terminologie, gelegentliche Formulierungen im Telegrammstil, ein etwas eng gefaßtes Sachverzeichnis, das Fehlen eines Namensverzeichnisses (Wie soll man die Oxtoby-Topologie oder den Satz von Radon-Nikodym oder die Grenzwertsätze von Beppo Levi bzw. Lebesgue finden?) und schließlich eine Liste von Druckfehlern (bei keinem Buch zu vermeiden), welche durch gründlichere Korrekturarbeit im Verlag hätte verkürzt werden können.

Mit diesem 3. Band sucht die uns vorliegende „Einführung in die reelle Analysis“ ihresgleichen: geradezu monumental angelegt, inhaltlich umfassend, vielseitig ausgerichtet, am neuesten Stand der Theorie orientiert, mit Ausblicken in diverse Richtungen, vor allem mit einer unübersehbaren Betonung von geometrischer Einsicht und Anwendung stellt sie ein Standardwerk dar, welches in keiner mathematischen Bibliothek fehlen sollte.

**Duren, P. L., Univalent Functions** (Grundlehren, Band 259), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1983, 450 p., cloth, DM 138,–

Das Buch von Duren gibt eine zeitgemäße Darstellung der Theorie der schlichten Funktionen, insbesondere der Klasse  $S$  der Funktionen  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ , die in  $\{|z| < 1\}$  analytisch und injektiv sind. Die Bieberbachsche Vermutung besagt, daß  $|a_n| \leq n$  ist, und trotz großer Fortschritte in verschiedene Richtungen ist dieses Problem immer noch ungelöst\*).

Viele raffinierte Methoden wurden zur Lösung dieses und anderer Extremalprobleme entwickelt. Das vorliegende Buch ist daher nach Methoden und nicht so sehr nach Einzelresultaten geordnet. So sind ähnliche Ergebnisse mit verschiedenen Methoden bewiesen worden, um deren Stärken und Grenzen zu zeigen.

Das Buch beginnt mit den Grundlagen der geometrischen Funktionentheorie und der klassischen Theorie, wie sie u. a. von Koebe und Bieberbach entwickelt wurde. Dann wendet sich der Autor der Parametrisierungsmethode von Löwner und Kufarev zu, wobei die Schlitzabbildungen eingehend untersucht werden.

In den nächsten zwei Kapiteln werden die Grunskyschen Ungleichungen behandelt. Besonders in ihrer Exponentialform (nach Milin und FitzGerald) sind sie das wichtigste Hilfsmittel zur Behandlung der großen Koeffizienten geworden.

Als nächstes werden Subordination und Integralmittel untersucht. Hervorzuheben ist die schöne Behandlung der Methode von Baernstein, dessen subharmonische  $*$ -Funktion viele Anwendungen auch in anderen Gebieten der Funktionentheorie hat.

Die letzten drei Kapitel handeln von Extremalproblemen. In den letzten Jahren sind besonders über Extrempunkte und Stützpunkte große Fortschritte erzielt worden. Dann wird die Schiffersche Methode der Randvariation sehr schön dargestellt und eine knappe Einführung in die Koeffizientenkörper gegeben.

Die Methode der quadratischen Differentiale wird jedoch nur kurz erwähnt. Alle Methoden werden auf viele Einzelprobleme angewendet. Viele weitere Resultate finden sich in den „Exercices“. Weiter werden die wichtigen Klassen spezieller Funktionen dargestellt und der Faltungssatz von Ruscheweyh und Sheil-Small bewiesen.

Aus der Fülle des Materials hat Duren eine gute Auswahl getroffen. Natürlich mußten dabei einige interessante Dinge weggelassen werden, insbesondere die quasikonforme Fortsetzung. Nicht behandelt wurden alle Fragen, die mit dem Randverhalten konformer Abbildungen zusammenhängen.

Bei allen Resultaten werden die Autoren genannt und nicht nur eine Nummer. Das vereinfacht die Benutzung des Buches sehr. Das Literaturverzeichnis umfaßt über 500 Artikel.

Vom Niveau her wendet sich Durens Buch an Studenten in den höheren Semestern und an Forscher. Es ist ausgezeichnet geschrieben und gedruckt. Es ist schade, daß der Preis so absurd hoch ist (oder ist der Referent naiv?). Man kann das Buch allen uneingeschränkt empfehlen, die sich für schlichte Funktionen interessieren.

---

\*) *Zusatz bei der Korrektur:* Die Bieberbachsche Vermutung wurde kürzlich von L. de Branges bewiesen.

**Kaup, L., Kaup, B., Holomorphic Functions of Several Variables: An Introduction to the Fundamental Theory** (With the Assistance of G. Barthel, Translated by M. Bridgland), (Studies in Mathematics 3), Berlin – New York: de Gruyter 1983, XV + 349 pp., gbd., DM 124,–

Die „eindeutige analytische Fortsetzung“ führt bei holomorphen Funktionen von  $n$  komplexen Veränderlichen (ähnlich wie im Fall  $n = 1$  zu dem fundamentalen Begriff der Rie-

männchen Fläche) zu Funktionen auf „Riemannschen Gebieten“, die nicht mehr in sondern über  $\mathbf{C}^n$  liegen. Riemannsche Gebiete über  $\mathbf{C}^n$  sind also komplexe Mannigfaltigkeiten; während aber aus Riemannschen Flächen über  $\mathbf{C}$  auch bei Einbeziehung endlicher Verzweigungspunkte wieder komplexe Mannigfaltigkeiten entstehen, ergeben sich für  $n \geq 2$  oft (z. B. bei der Funktion  $\sqrt{z_1 z_2}$ ) Gebilde, die schon topologisch keine Mannigfaltigkeiten sind. Indem sie bei diesen „verzweigten Riemannschen Gebieten“ von der Projektion in  $\mathbf{C}^n$  abstrahierten, haben Behnke und Stein schon 1951 – gleichzeitig mit H. Cartan – den Begriff des komplexen Raums eingeführt, der (unter dem Einfluß der algebraischen Geometrie) 1955 von J.-P. Serre und 1960 von H. Grauert verallgemeinert wurde. Auch global tritt bei der analytischen Fortsetzung für  $n \geq 2$  ein Phänomen auf, das für  $n = 1$  nicht vorkommt: Zu einem Gebiet  $G$  in  $\mathbf{C}^n$  gibt es i. a. echt größere Gebiete, in die sich  $a \mid l \in G$  holomorphen Funktionen eindeutig holomorph fortsetzen lassen. Damit ergibt sich die Aufgabe, ein maximales solches Gebiet (eine „Holomorphiehülle von  $G$ “) über  $\mathbf{C}^n$  zu finden und die Gebiete zu charakterisieren, die gleich ihrer Holomorphiehülle sind. Abstrakte komplexe Räume mit entsprechenden Eigenschaften heißen steinsch.

Zentrale Begriffe der komplexen Analysis sind somit der des komplexen Raums und der des steinschen komplexen Raums. Das wichtigste Hilfsmittel bei ihrer Untersuchung bilden die kohärenten analytischen Garben. Die schwierigsten grundlegenden Sätze der Theorie sind die Kohärenzsätze von Oka und Cartan („Die Strukturgarben Serrescher komplexer Räume sind kohärent.“) und Cartans Theoreme A und B über kohärente Garben auf steinschen Räumen.

Obwohl diese Ideen seit den fünfziger Jahren bekannt sind, haben L. und B. Kaup sie als erste in einem Lehrbuch zusammengestellt. Da das Werk außerordentlich inhaltsreich ist, will ich den Inhalt nur skizzieren und dabei durch Stichworte beispielhaft andeuten, wie die zentralen Sätze überall durch Anwendungen und weitere Sätze nach vielen Richtungen ergänzt werden.

Kap. 0: Elementare Eigenschaften holomorpher Funktionen (auch Automorphismen beschränkter Gebiete, holomorphe Abbildungen von konstantem Rang). Kap. 1: Holomorphiegebiete in  $\mathbf{C}^n$ , Holomorphiekonvexität und Pseudokonvexität (hier könnte man vielleicht Gebiete über  $\mathbf{C}^n$  und die allgemeine Konstruktion von Holomorphiehüllen vermissen). Kap. 2: Analytische Algebren. Kap. 3: Garben, Serresche komplexe Räume, komplexe Mannigfaltigkeiten. Kap. 4: Komplexe Räume (im Sinn von Grauert; Raumkeime, Bildgarbensatz für endliche Abbildungen, Remmerts Abbildungssatz, analytische Spektren, universelle Nenner, Nullstellensatz, Kohärenzsätze, Dimensionen, irreduzible Komponenten, Faserprodukte und Quotientenräume). Kap. 5: Steinsche Räume (Anwendungen von Theorem B, Cousin-Probleme, Poincaré-Problem, Runge'sche Ausschöpfung, Spektren steinscher Algebren). Kap. 6: Beweis von Theorem B (mit Hilfe der  $\bar{\partial}$ -Theorie; verschiedene Charakterisierungen steinscher komplexer Räume, Lösung des Levi-Problems, Endlichkeitssatz von Cartan und Serre). Kap. 7: Normale und maximale komplexe Strukturen, Normalisierung.

Das Buch enthält eine große Zahl von Beispielen. In allen Paragraphen findet man nützliche Übungsaufgaben, die den Leser zum Mitdenken zwingen und viel zusätzliches Material bringen. Manche Aufgaben werden an anderer Stelle wiederverwendet; sie sind mit einem entsprechenden Hinweis versehen, wie ich überhaupt die reichlich eingestreuten Verweise vorbildlich finde. Oft wird auf weiterführende Begriffe und Sätze in knapper Form hingewiesen und Literatur dazu genannt. Einige Sätze, die für den Gesamtaufbau des Werkes nicht wesentlich sind, werden nur mit einer Beweisandeutung oder ohne Beweis gebracht, z. B. der Grauert'sche Bildgarbensatz und mehrere Folgerungen.

Für welche Leser ist dieses Buch nun geeignet? An Kenntnissen wird vorausgesetzt, was jeder Student in mittleren Semestern mitbringen sollte: Elemente der reellen und der eindimensionalen komplexen Analysis, der Algebra und der Topologie; außerdem sollte man etwas Garben- und Kohomologietheorie kennen (obwohl das Wichtigste darüber knapp beschrieben wird). Trotzdem glaube ich, daß sich das Buch mehr an solche Leser wendet, die auch mit der mehrdimensionalen komplexen Analysis schon einen gewissen Kontakt gehabt haben. Andere werden

vielleicht mit den verwendeten Termini Schwierigkeiten haben, da sie oft beiläufig oder in etwas anderer Form definiert wurden (z. B. ist die Rede von „embedding at  $a$ “, definiert ist „immersion at  $a$ “). Vor allem aber werden sie Gefahr laufen, in der Fülle des Stoffes den roten Faden zu verlieren. Dazu trägt bei, daß oft erst später definierte Begriffe oder noch nicht bewiesene Sätze verwendet werden. Von den als Supplement bezeichneten Paragraphen bringen manche Ergänzungen, die man bei der ersten Lektüre überschlagen kann, andere aber Material, das für den vorangehenden Paragraphen benötigt wird. In den Kapiteln 5 und 6 wird die Übersicht dadurch erschwert, daß in jedem der beiden zum Teil auf Ergebnissen des anderen aufgebaut wird. Diese Schwierigkeiten liegen natürlich in dem Stoff selbst begründet, und in der relativen Vollständigkeit, mit der er gebracht wird.

Die äußere Form des Buches ist tadellos, der Druck hervorragend. Der Band enthält ein sehr ausführliches Sach- und Namenregister, ein langes Verzeichnis der verwendeten Symbole, eine Liste der behandelten Beispiele und eine Zusammenstellung ergänzender und weiterführender Literatur.

Das Buch ist allen sehr zu empfehlen, die sich mit komplexer Analysis beschäftigen, sei es zur Vorbereitung einführender Vorlesungen, zur Vertiefung der Kenntnisse oder als Nachschlagewerk.

München

K. Wolffhardt

**Field, M., Several Complex Variables and Complex Manifolds (in two parts)** (London Math. Soc. Lectures Notes Series, vols. 65, 66), Cambridge – London: Cambridge University Press 1982, 420 pp., paper, £ 27.00

Vor jeder einführenden Darstellung eines so verzweigten Gebietes wie das mehrerer komplexer Veränderlicher müssen von vornherein zwei schwierige Entscheidungen getroffen werden. Welche Zweige sollen gekappt und welche gepflegt werden, und wie hält man es mit den verschiedenartigen technischen Apparaten, die mit solchen anderer Gebiete wie der partiellen Differentialgleichungen, der Differentialgeometrie, der algebraischen Topologie und der algebraischen Geometrie verwoben sind. Die Auswahl des Stoffes für diese Lecture Notes ist, wohl auch von den Erfordernissen des International Centre of Theoretical Physics in Triest beeinflusst, an dem der Autor Kurse gegeben hat, so ausgefallen: Darstellung des Bereichs der pseudokonvexen Gebiete einschließlich der Lösung des Levi-Problems, sowie Einführung der komplexen Mannigfaltigkeiten und Vektorbündel über solchen. Die Verbindung zwischen beiden Themenkreisen wird hergestellt durch die Behandlung der Steinschen Mannigfaltigkeiten und der Theoreme A, B von H. Cartan einerseits, und der Verschwindungssätze für die Cohomologie von positiven Geradenbündeln andererseits. Dagegen werden analytische Mengen und komplexe Räume bis auf einige Aussagen über analytische Hyperflächen weitgehend eliminiert. Bei der Lösung des Levi-Problems wird verdeutlicht, wie nicht allein Methoden bei mehreren komplexen Variablen zur Anwendung in der algebraischen Geometrie kommen, sondern daß umgekehrt, deren Methoden auch Ergebnisse über Gebiete im  $\mathbb{C}^n$  liefern.

Aus dem Inhalt in Stichworten: Hebbarkeitssätze von Riemann und Hartogs – Holomorphie- und (pseudo-)konvexe Gebiete – Bergmann Kerne – Cousinsche Probleme – meromorphe Funktionen und Divisoren – Weierstraßscher Vorbereitungssatz – Hilbertscher Syzygiensatz – komplexe Mannigfaltigkeiten, klassische symmetrische Gebiete, projektive Varietäten, Graßmann- und Fahnenmannigfaltigkeiten, komplexe Tori, Quotienten nach eigentlich diskontinuierlichen Gruppenaktionen –  $\sigma$ -Modifikationen – komplexe Differentialformen – Dolbeault'sches Lemma – Geradenbündel und lineare Systeme über  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  – Garben und Garbencohomologie – Theoreme A, B für Steinsche Mannigfaltigkeiten und den projektiven Raum – Endlichkeitssätze

von Cartan-Serre – Lösung des Levi-Problems nach Grauert – kohärente Garben auf  $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$  – Verschwindungssätze für positive Geradenbündel – Kodaira-Einbettung. Vier weitere Kapitel, die vom Autor ursprünglich geplant waren, sollen in einem 3. Band folgen.

Die beiden Bände lassen keine besondere Originalität sowohl hinsichtlich des Inhalts als auch hinsichtlich der Organisation der Beweise erkennen. Die Beweise sind durchweg knapp skizzierte Standardbeweise. Das Schöne an diesen Lecture Notes liegt vielmehr in der übersichtlichen Aufbereitung des Stoffes und der Zusammenstellung eines großen und vielseitigen Beispielmaterials, demgegenüber die technischen Aufwendungen – dies gilt hauptsächlich für den ersten Band – möglichst gering gehalten sind. Dieses letzte Prinzip wird jedoch vom Autor im zweiten Band durchbrochen, indem er sich in Kap. 5 zu lange mit komplexer multilinearer Algebra befaßt, um  $(p, q)$ -Formen einzuführen, oder in Kap. 6 ebenfalls zu ausgiebig die Garbensprache entwickelt. Als besonders positiv sind die vielen Anmerkungen und Hinweise auf weitere vollständige Literatur zu werten, jedoch erscheint das Quellenverzeichnis lückenhaft. Es sollte auch nicht unerwähnt bleiben, daß sich nach etwas intensiverer Beschäftigung mit dem Buch herausstellt, daß der Autor zwar vielen interessanten Stoff anspricht, die Dinge dann aber allzu oft gerade nur angeschnitten hat, um dann auf weitere Literatur zu verweisen. Da auch die Beweise an wesentlichen Stellen unvollständig sind, ist das Werk bei weitem nicht self-contained, wie vom Autor im Vorwort behauptet.

Die vorliegenden Lecture Notes dürften vor allen Dingen für fortgeschrittene Studenten und Mathematiker mit anderen Schwerpunkten, die über genügend allgemeine Grundbegriffe verfügen, eine spannende Lektüre darstellen, durch die sie ohne große technische Hindernisse in wesentliche Begriffe, Ergebnisse und Methoden bei mehreren komplexen Veränderlichen eingeführt werden. Für den komplexen Analytiker dürften die vielen Bemerkungen und Hinweise nicht uninteressant und das Buch insgesamt eine wertvolle Hilfe bei Vorlesungsvorbereitungen sein.

Kaiserslautern

G. Trautmann

**Baird, P., Harmonic Maps with Symmetry, Harmonic Morphisms and Deformation of Metrics** (Research Notes in Maths, vol. 87), Boston – London – Melbourne: Pitman Publ. Ltd. 1983, 208 p., paper, £ 9.95

Das Buch stellt mehrere in den letzten Jahren entwickelte Konstruktionsverfahren für globale harmonische Abbildungen dar. Die neue Idee, dabei E. Cartans isoparametrische Funktionen sehr wesentlich zu verwenden, wird durch zahlreiche neue Beispiele belohnt und macht diesen Band wirklich zu „Research Notes in Mathematics“, wie der Reihen-Titel verspricht.

Hat man eine Abbildung  $\varphi$  zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, welche vorgegebene Hyperflächenblätterungen derselben respektiert ( $\varphi$  heiße dann äquivariant), so reduziert sich unter gewissen Voraussetzungen die Frage nach der Harmonizität von  $\varphi$  auf ein Problem transversal zu den Blätterungen: auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung. Lösungen der Differentialgleichung ermöglichen umgekehrt die Konstruktion harmonischer Abbildungen. Dieser Reduktionsmethode, die in Spezialfällen sehr erfolgreich schon von R. T. Smith verwendet wurde, sind zwei Drittel des Buches gewidmet. Baird hat erkannt, daß nicht Orbit-Blätterungen, sondern isoparametrische Familien die „richtige“ Ausgangssituation liefern: Familien paralleler Hyperflächen von konstanter mittlerer Krümmung. Er beweist dafür einen Reduktionssatz und studiert sehr ausführlich die globalen Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungen (Randwertprobleme meist für Gleichungen vom Pendeltyp mit variabler Schwerkraft und Dämpfung). Als Anwendungen erhält er zahlreiche Beispiele harmonischer Abbildungen von Raumformen in Sphären.



In zwei weiteren Kapiteln wird die Theorie der harmonischen Morphismen von Fuglede und Ishihara aufgenommen und speziell für homogene polynomiale Abbildungen weitergeführt. Auch hier werden verschiedene Zusammenhänge mit isoparametrischen Polynomen sichtbar. Man erhält harmonische Morphismen von (auch inhomogenen) Fokalmannigfaltigkeiten isoparametrischer Familien auf Sphären, aber auch zahlreiche äquivariante Abbildungen, auf die wiederum die Reduktionsmethode anwendbar ist.

Das letzte Kapitel schließlich behandelt im Rahmen äquivarianter Abbildungen von Sphären mit isoparametrischen Familien das sogenannte „rendering problem“, das Problem, eine gegebene (hier äquivariante) Abbildung durch Homotopie und Deformation der Metriken harmonisch zu machen. Es wird gezeigt, daß dies in jeder  $n$ -ten Homotopieklasse der  $n$ -Sphäre lösbar ist.

Das Buch ist sehr attraktiv durch die vielen ausgearbeiteten Beispiele und durch seinen klaren Aufbau. Trotz kleinerer Fehler, Ungenauigkeiten und Lücken wäre die Darstellung zumindest für Differentialgeometer eine angenehme Lektüre, wenn sie nicht so schlecht getippt wäre. Obwohl (oder weil?) die Maschine 1 und 1 hat, wird in Formeln grundsätzlich 1 statt l verwendet. Ein gut Teil der Kommata ist ohne erkennbares System durch Semikola ersetzt. Viele Klammern fehlen, und auch nach 180 Seiten hatte ich mich nicht daran gewöhnt, daß  $\emptyset$  – wohl für  $\varphi$  – das am häufigsten für die harmonischen Abbildungen verwendete Symbol ist.

Berlin

D. Ferus

**Braun, M., Differential Equations and their Applications, An Introduction to Applied Mathematics** (Applied Math. Sciences, vol. 15), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1983<sup>3</sup>, xiii + 546., cloth, DM 66,–

Die Nr. 15 in der Applied Math. Sciences-Serie des Springer-Verlags liegt nunmehr in der 3. Auflage als Hardcover-Ausgabe vor. Im Vergleich zur 1. Paperback-Ausgabe hat sich nicht nur Ausstattung und Druckbild geändert, sondern es wurden auch einige Kapitel ergänzt und modernisiert.

Das Buch hat zweifelsohne seine Meriten, und seine Beliebtheit wird durch die jetzt erfolgte 3. Auflage unter Beweis gestellt. Hervorzuheben sind hier insbesondere die vielen Anwendungsbeispiele und die vielen Geschichten darum herum, die die Lektüre dieses Buches für Anfänger interessant gestalten. Somit sind die ersten Teile recht gut in einer Einführungsvorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen oder in einer Mathematik für Naturwissenschaftler zu gebrauchen. Das erste Kapitel bringt die Theorie einer Gleichung 1. Ordnung mit den üblichen Inhalten (lineare DGL, exakte DGL, Picard-Iteration und numerische Methoden) aber unterstützt durch viele Beispiele, Aufgaben und mit Fortran- und APL-Programmen für einfache numerische Verfahren.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit linearen Gleichungen zweiter Ordnung; zunächst mit dem Fall konstanter Koeffizienten, dann mit Reihenansätzen (mit dem Hauptsatz über reguläre singuläre Punkte) und der Laplace-Transformation, wiederum mit vielen Aufgaben versehen. Skeptisch liest man allerdings (im Vorwort) Sätze wie „2.12 contains an absolutely super and unique treatment of the Dirac delta function“ oder, sinngemäß gekürzt und übersetzt: „Meine Darstellung der linearen Algebra ist so gut, daß die Studenten erst bei mir befragen, was dahintersteckt“ – was natürlich Ermessensfrage und m. E. zu bezweifeln ist. Der Autor scheint jedoch der Meinung zu sein, daß sein Buch das „Non Plus Ultra“ ist – ein Literaturverzeichnis oder Angaben auf andere und/oder weiterführende Bücher fehlen völlig.

Das ganze dritte Kapitel über elementare lineare Algebra könnte wohl entfallen – hier gibt es kompetentere Darstellungen und zumindest in Deutschland sind dem Studenten

Begriffe wie Vektorraum und Determinante i. A. bekannt, bevor er Systeme von gewöhnlichen DGLen kennenlernt. Dafür könnte die Diskussion von Eigenwerten und Phasenportraits ebener Flüsse im vierten Kapitel ausführlicher sein – hier ist die Darstellung im bekannten Buch von Hirsch/Smale (Academic Press 1974) sicher wesentlich geglückter. Bei der Behandlung qualitativer Aspekte im vierten Kapitel fallen dafür die Simplifikationen und Anpassungen der Realität an die Mathematik unangenehm auf. Um einfachste ebene Gleichungen wie  $x' = Ax + b$  ( $A, b$  konstant) zu studieren, werden Modelle zur „Kriegsentstehung und Kriegsführung“, mit Zahlen des US Marine Corps garniert, besprochen und auf S. 410 wird zufrieden festgestellt „the model does indeed describe real life engagements“ – die Soldaten starben tatsächlich wie vorhergesagt; man fragt sich in der Tat, warum Kriege nicht gleich im mathematischen Seminarraum ausgetragen werden. Diesen Versuch der Rationalisierung und Vorhersagbarkeit des Krieges halte ich für äußerst bedenklich; mal ganz abgesehen vom ethischen Aspekt halte ich die sich hier offenbarende mangelnde kritische Distanz für völlig unwissenschaftlich. Das fünfte Kapitel schließlich gibt einen Ausblick auf Randwertprobleme und auf partielle Differentialgleichungen.

Es bleibt festzustellen, daß die ersten zwei Kapitel mit den vielen Beispielen und Aufgaben für die Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen nützlich sind; für eine exakte und weiterführende Behandlung, insbesondere im Hinblick auf die qualitative Theorie, sind andere Bücher – ich nenne hier stellvertretend Walter (Springer), Knobloch/Kappel (Teubner), Hirsch/Smale (Academic Press) und Amann (Gruyter) – sicher empfehlenswerter.

Bayreuth

M. Wiegner

**Amann, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen** (de Gruyter Lehrbuch), Berlin – New York: W. de Gruyter 1983, xii + 497 S., geb., DM 59,–

Das vorliegende Buch bietet sowohl eine Einführung in die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen als auch in die nichtlineare Funktionalanalysis. Der Verfasser betont den funktionalanalytischen Zugang zur Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und vermag so dem Leser in einfacher Weise die allgemeinen Prinzipien nahezubringen, welche später in der Theorie partieller Evolutionsgleichungen eine bedeutende Rolle spielen. Beweise, die auf funktionalanalytischen Methoden beruhen, werden für den endlich-dimensionalen Fall meist so geführt, daß sie sich auch auf den unendlich-dimensionalen Fall übertragen lassen. Die notwendigen Modifikationen hierzu sind jeweils explizit angegeben. In gewissem Sinne stellt dieses Buch somit auch eine Einführung in die Theorie partieller Evolutionsgleichungen dar.

Das erste Kapitel bietet einen Einblick sowohl in moderne als auch in klassische Fragestellungen, welche zu Differentialgleichungen führen. So werden neben ökologischen Modellen auch Probleme der Variationsrechnung und der klassischen Mechanik betrachtet. Dieses erste Kapitel stellt zum Teil recht hohe Anforderungen an den Leser, so daß Studenten nach dem zweiten Studienjahr, an welche sich der Autor wendet, Verständnisschwierigkeiten haben könnten. Der weitere Aufbau des Buches ist jedoch von diesem ersten Kapitel unabhängig.

Die klassischen Existenz- und Stetigkeitssätze werden im zweiten Kapitel bewiesen. Darüberhinaus werden dynamische Systeme (Flüsse und Halbflüsse) auf metrischen Räumen studiert. Mit den Methoden der linearen Algebra werden im folgenden dritten Kapitel lineare Differentialgleichungen besprochen, wobei auch auf die Klassifikation linearer Flüsse eingegangen wird.

Kapitel 4 ist der qualitativen Theorie gewidmet. Dabei steht die Behandlung von Halbflüssen im Vordergrund. Existenz- und Stabilitätsfragen für periodische Lösungen werden im fünften Kapitel beantwortet. Eine ausführliche und in sich geschlossene Darstellung des Brou-

werschen Abbildungsgrades gestattet es, die entsprechenden Fixpunktprobleme für den Zeit-T-Operator zu diskutieren und die bekannten Resultate von Krasnosel'skii herzuleiten.

Im abschließenden sechsten Kapitel werden Kontinuitäts- und Bifurkationsprobleme diskutiert. Mit Hilfe der Liapunov-Schmidt Reduktion wird die Verzweigung beim Vorliegen eines einfachen Eigenwerts 0 und eines Paares konjugiert komplexer Eigenwerte  $\pm i$  detailliert behandelt. Eingeschlossen sind hierbei Kriterien für die Stabilität der Verzweigungslösungen. Im Hinblick auf Verallgemeinerungen auf Evolutionsgleichungen ist der große technische und rechnerische Aufwand dieses Kapitels gerechtfertigt. Für eine Einführung in die Verzweigungstheorie gibt es jedoch elementarere Darstellungen, welche auch inhaltlich weiterführen.

Dieses Buch schließt – zumal im deutschsprachigen Raum – eine Lücke und stellt durchaus eine Bereicherung dar. Die einzelnen Kapitel bieten eine sehr klare und sorgfältige Darstellung einer Fülle von Ergebnissen aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und zeigen von funktionalanalytischer Warte her die größeren Zusammenhänge, in welche diese Theorie eingebettet ist. Nicht ins Buch aufgenommen hat der Autor die Theorie der Randwertprobleme und die allgemeine strukturelle Stabilitätstheorie. Auf die Rolle der Zentrumsmannigfaltigkeit bei der Behandlung von Differentialgleichungen sowie auf Resultate über nichtlineare Oszillationen wird nur am Rande eingegangen. Ein wenig Kritik an der Bibliographie scheint angebracht. Literaturhinweise, die den interessierten Leser zu den jüngeren Forschungsergebnissen führen, fehlen fast gänzlich. Die zugrundeliegenden Quellen hätten vielleicht etwas häufiger zitiert werden können.

Würzburg

D. Flockerzi

**Rektorys, K., The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations,**  
Dordrecht – Boston – London: D. Reidel Publ. Comp. 1982, xviii + 451 p., cloth, Dfl. 165,–

Der Titel des Buches ist insoweit leicht irreführend, als lediglich über Ergebnisse des Autors und seiner Mitarbeiter aus den letzten Jahren berichtet wird; dabei wird weder Bezug genommen auf bestehende Literatur über ähnliche Probleme und Methoden (v. Welck [5], Gerdes und Martensen [1], vgl. auch den Übersichtsartikel von Liskovets [2]) noch auf andere partielle Diskretisierungsverfahren (Linienmethode), wie sie etwa von Walter [4] in einer Reihe von Arbeiten zur Behandlung parabolischer Anfangs-Randwertaufgaben verwendet wurden.

Das Buch besteht aus vier Abschnitten: Im ersten Abschnitt (Kap. 1–2) wird die Methode (von Rothe [3]) vorgestellt: Diese transformiert ein parabolisches Problem

$$(P) \quad \begin{aligned} u_t - Au &= f \quad \text{in } (0, T) \times G \\ Ru &= 0 \quad \text{auf } \{0\} \times \bar{G} \cup (0, T) \times \partial G \end{aligned}$$

durch Diskretisierung der Variablen  $t$  in ein endliches System

$$(*) \quad \begin{aligned} \frac{1}{h}(u(kh, x) - u((k-1)h, x)) - Au(kh, x) &= f(kh, x) \quad \text{in } G \\ Ru(kh, x) &= 0 \quad \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

( $k = 1, \dots, [T/h]$ ,  $u(0, x)$  wird aus der Anfangsbedingung entnommen) elliptischer Probleme, das rekursiv gelöst werden kann. Die dazu herangezogenen Variationsmethoden werden klar und mit einem sicheren Blick für das Wesentliche dargestellt.

Im zweiten Abschnitt (Part 1) wird dann die Methode an einer Reihe von Beispielen erläutert und erprobt.

Im dritten Abschnitt (Kap. 10–14) wird die zugehörige Theorie geliefert, und es werden (unter anderem) Durchführbarkeit des Verfahrens (also Existenz und Eindeutigkeit für (\*)), Existenz- und Eindeutigkeit für (P), Regularitätsfragen für die Lösungen von (P) und Näherungsverfahren (von Ritz) für die Lösungen von (\*) und (P) diskutiert. Die hierzu benötigten komplizierten Begriffsbildungen werden in beeindruckender Weise vorgestellt; so wird etwa das Verfahren (\*) als eine Art implizites Euler-Cauchysches Verfahren für (P) gedeutet und damit die Darstellung der Beweise und Ergebnisse erleichtert.

Im letzten Abschnitt (Kap. 15–21) wird gezeigt, daß die Methode nebst vorgestellten Hilfsmitteln auch auf andere Probleme (einschließlich solchen mit gewissen Nichtlinearitäten, mit funktionaler Abhängigkeit bzw. hyperbolischem Hauptteil) anwendbar ist. Was das Lösungsverhalten von (P) anbetrifft, werden keine neuen Einsichten vermittelt (wie der Autor selbst formuliert, p. 445); jedoch kann das Buch als empfehlenswerte (wenn auch nicht preiswerte) Einführung in das nicht leicht zugängliche Sachgebiet der elliptischen und parabolischen Gleichungen aus dem Blickwinkel der Variationsrechnung dienen.

- [1] G e r d e s , W.; M a r t e n s e n , E.: Das Rothe-Verfahren für die räumlich eindimensionale Wellengleichung. ZAMM 58 (1978) T367–T368
- [2] L i s k o v e t s , O. A.: The method of lines (review) [russisch]. Differential'nye Uravneniya 1 (1965) 1662–1678. Engl. Übersetzung in Diff. Eqs. 1 (1965) 1308–1323
- [3] R o t h e , E.: Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben. Math. Ann. 102 (1930) 650–670
- [4] W a l t e r , W.: Differential and integral inequalities. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970
- [5] v. W e l c k , U.: Ein stabiles Schichtenverfahren für allgemeine Evolutionsgleichungen. Numer. Math. 27 (1977) 171–178

Karlsruhe

R. Lemmert

# HISTORY OF SCIENCE



*D. J. Albers/G. L. Alexanderson (Eds.)*  
**Mathematical People**  
*Profiles and Interviews*  
*With an Introduction by Phil Davis*  
 1984. 400 pages, Hardcover  
 approx. sFr. 56.-/DM 68.-  
 ISBN 3-7643-3191-7

*A. Hibner Koblitz*  
**A Convergence of Lives**  
*Sofia Kovalevskaia:*  
*Scientist, Writer, Revolutionary*  
 1984. 304 pages, Hardcover  
 sFr. 44.-/DM 49.80  
 ISBN 3-7643-3162-3

*W. Knorr*  
**Ancient Tradition of Geometric Problems**  
 1984. 400 pages, Hardcover  
 approx. sFr. 80.-/DM 90.-  
 ISBN 3-7643-3148-8

*Th. Tymoczko (Ed.)*  
**New Directions in the Philosophy of Mathematics**  
 1984. 340 pages, Hardcover  
 approx. sFr. 40.-/DM 50.-  
 ISBN 3-7643-3163-1

*A. Weil*  
**Number Theory**  
*An approach through history*  
*From Hammurapi to Legendre*  
 1984. 384 pages, Hardcover  
 sFr. 64.-/DM 74.-  
 ISBN 3-7643-3141-0

*G.-C. Rota/D. Sharp/  
 N. Metropolis (Eds.)*  
**J. Robert Oppenheimer:  
 Uncommon Sense**  
 1984. 160 pages, Hardcover  
 sFr. 46.-/DM 56.-  
 ISBN 3-7643-3165-8

*E. Heisenberg*  
**Inner Exile**  
*Recollections of a Life*  
*with Werner Heisenberg*  
 1984. 170 pages, Hardcover  
 sFr. 38.-/DM 44.-  
 ISBN 3-7643-3146-1

*S. Goldberg*  
**Understanding Relativity**  
*Origin and Impact of a Scientific Revolution*  
 1984. 494 pages, Hardcover  
 sFr. 60.-/DM 72.-  
 ISBN 3-7643-3150-X

Please order from your bookseller  
 or Birkhäuser Verlag  
 P. O. Box 133  
 CH-4010 Basel/Switzerland  
 or Birkhäuser Boston Inc.,  
 380 Green Street, Cambridge  
 MA 02139/USA

**Birkhäuser  
 Verlag**   
 Basel · Boston · Stuttgart

# DMV Seminar

Herausgegeben von der Deutschen  
Mathematiker Vereinigung  
Edited by the German Mathematics Society

## DMV Seminar 1 M. Knebusch/W. Scharlau **Algebraic Theory of Quadratic Forms**

*Generic Methods and Pfister Forms*  
1980. 48 pages, Paperback  
sFr. 8.-/DM 8.-  
ISBN 3-7643-1206-8

## DMV Seminar 2 K. Diederich/I. Lieb **Konvexität in der komplexen Analysis**

*Neue Ergebnisse und Methoden*  
1980. 140 Seiten, Broschur  
sFr. 23.-/DM 27.-  
ISBN 3-7643-1207-6

## DMV Seminar 3 S. Kobayashi/H.-H. Wu **Complex Differential Geometry**

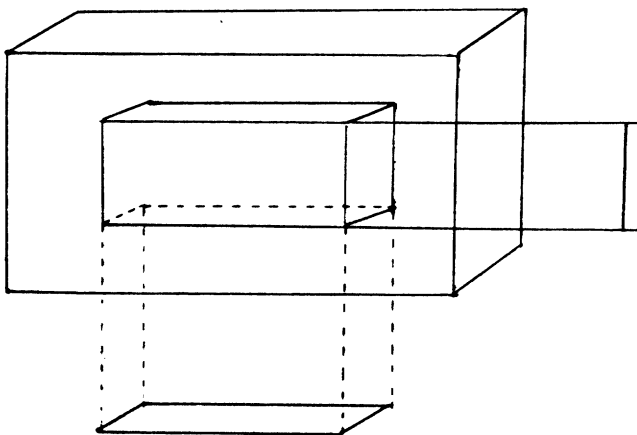
*Topics in Complex Differential  
Geometry  
Function Theory on Noncompact  
Kähler Manifolds*  
1983. 160 pages, Paperback  
sFr. 26.-/DM 29.80  
ISBN 3-7643-1494-X

## **New** DMV Seminar 4 R. Lazarsfeld/A. Van de Ven **Topics in the Geometry of Projective Space**

*Recent Work of F.L. Zak*  
1984. 52 pages, Paperback  
sFr. 18.-/DM 19.80  
ISBN 3-7643-1660-8

Die von der Deutschen Mathematiker Vereinigung organisierten Arbeitsgemeinschaften sollen vor allem jüngeren Mathematikern in sorgfältig vorbereiteten Veranstaltungen den Zugang zu aktuellen Forschungsgebieten erleichtern und ihnen eine gründliche Einarbeitung ermöglichen. Daneben können sie Wissenschaftlern anderer Fachrichtungen mathematisches Wissen und Anregungen vermitteln. Durch die Veröffentlichungen einer eigenen Sammlung wollen die DMV und der Verlag die Früchte dieser Arbeit einem über die Teilnehmer der Seminare hinausgehenden Kreis zugänglich machen.

The workshops organized by the Deutschen Mathematiker Vereinigung (German Mathematics Society) are particularly intended to introduce students and young mathematicians to current fields of research. By means of these well organized seminars, scientists from other fields will also be introduced to new mathematical ideas. The publication of these workshop proceedings in the DMV-SEMINAR series will therefore make the material available to an even larger audience.



## **New** DMV Seminar 5 W.M. Schmidt **Analytische Methoden für diophantische Gleichungen**

*Einführende Vorlesungen*  
1984. 132 Seiten, Broschur  
sFr. 26.-/DM 29.80  
ISBN 3-7643-1661-6

**Bitte bestellen Sie bei Ihrem  
Buchhändler**  
**Please order from your bookseller**  
oder Birkhäuser Verlag,  
P.O. Box 133,  
CH-4010 Basel/Schweiz  
or Birkhäuser Boston Inc.,  
380 Green Street,  
Cambridge, MA 02139/USA

**Birkhäuser  
Verlag**

Boston · Basel · Stuttgart



Prices are subject to change  
without notice 8/84

---

# Neuerscheinungen

## Allgemeine Algebra und Anwendungen

Von Prof. Dr. phil. D. W. DORNINGER, Technische Universität Wien, und Prof. Dr. phil. W. B. MÜLLER, Universität für Bildungswissenschaften Klagenfurt

1984. 324 Seiten mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen und Übungen.  
16,2×22,9 cm. ISBN 3-519-02030-0. Geb. DM 42,—

*Aus dem Inhalt:* Operationen und Relationen (mit Beispielen aus der Verkehrsplanung und Soziologie) / Verbände und Boolesche Algebren (mit Anwendungen in der Quantenmechanik, Schaltalgebra und Aussagenlogik) / Halbgruppen (Automaten, Formale Sprachen, Beispiele aus der Biologie) / Gruppen (Anwendungen in der Zähltheorie, kristallographische Gruppen, ein Beispiel aus der Ethnologie, Elemente der Darstellungstheorie) / Ringe und Körper (Konstruktion mit Zirkel und Lineal, Statistische Versuchsplanung) / Fehlerkorrigierende Codes und Kryptographie

Proceedings of the Conference

## Mathematics in Industry

October 24–28, 1983 Oberwolfach

Edited by Prof. Dr. rer. nat. H. NEUNZERT, Universität Kaiserslautern

1984. 287 pages. 16,2×23,5 cm. ISBN 3-519-02610-4. Paper DM 52,—

### Contents

#### ORGANIZED COOPERATION BETWEEN UNIVERSITY AND INDUSTRY

R. S. Anderssen and F. R. de Hoog: A Framework for Studying the Application of Mathematics in Industry / A. B. Taylor: Oxford Study Groups with Industry; 1967–1983 / H. Wacker: Hydro Energy Optimization / J. Spanier: Applied Mathematics Education at the Claremont Colleges / H. Neunzert: Mathematics in the University and Mathematics in Industry – Complement or Contrast? / K. Hoffmann: On Establishing Contacts with Industry / M. Schulz-Reese: A Report of the „Kaiserslauterer Modellversuch“: Continuing Mathematical Education / H.-E. Gross and U. Knauer: University Education as Preparation for Professional Praxis / A. M. Kempf: Mathematical Modelling in the French Grandes Ecoles. The Particular Case of the E.S.I.E.A.

#### INDIVIDUAL PROJECTS AT THE UNIVERSITIES

C. Cercignani: Mathematics and Fluidynamics / M. Primicerio: Sorption of Swelling Solvents by Glassy Polymers / M. Shinbrot: Icebreaking by Hovercraft / B. Rihtarsic, F. Krmelj and I. Kuscer: Oscillations in Pipelines of Hydroelectric Power Plants / A. K. Louis: The Limited Angle Problem in Computerized Tomography / H. Frank: Computer Aided Design in Piping of Chemical Plants / W. Krüger: The Trippstadt-Problem / B. Aulbach: Trouble with Linearization

#### PROBLEMS POSED BY INDUSTRY

J. Bukovics: Oscillations of a Gasbody with Absorbant Walls (A Problem Occuring in Structural Acoustics of Passenger Cars) / P. Causemann: Requirements for a Calculating Program Regarding a Two-Mass Vibration System to Optimize Damping Force Characteristics for Vehicle Shock Absorbers / A. Gamst: Geometric Design of Mobile Radio Telephone Systems / U. Pallaske: Large Systems of Stiff Ordinary Differential Equations. Numerical Treatment by Systems Reduction / R. Zobel: Validation of a Vehicle Crash Model

B. G. Teubner Stuttgart



Proceedings of the Conference

# Applied Optimization Techniques in Energy Problems

June 25 – 29, 1984 Linz, Austria

Edited by Prof. Dr. Hj. WACKER, Universität Linz

1985. 495 pages. 16,2×23,5 cm. ISBN 3-519-02612-0. Paper approx. DM 82,—

## Contents

H.-J. Adermann: Treatment of Integral Contingent Conditions in Optimum Power Plant Commitment / S. Andersson, T. Andersson, D. Sjelvgren: Information System for Optimal Operations Planning and Associated Forecasting Techniques / E. Antensteiner, H. Müller: Unit Commitment of Hydrothermal Power Systems Including Controllable Load / F. Archetti, A. Frigessi, C. Vercellis: Variance Reduction Techniques in Monte Carlo Evaluation of the Reliability of Stochastic Networks / P. H. Ashmole: Economic Dispatch and Regulating Capacity Allocation in a Thermal/Pumped Storage System / W. Barwig, R. Peßl: Optimization of the Gosau System / W. Bauer, H. Gfrerer, E. Lindner, A. Schwarz, Hj. Wacker: Optimization of the Storage Plant System Gosau – Gosauschmied – Steeg / N. R. C. Birkett, B. M. Count, N. K. Nichols, D. A. C. Nicol: Optimal Control Problems in Tidal Power Generation / F. Breitenecker, A. Schmid, M. Peschl: Simulation and Optimization of a Multipurpose Hydro-Energetic System Using Standard Simulation Software / H. Brugger, A. Imre: Unit Commitment and Generator Scheduling, Realized on a Process Computer / S. Buchinger, E. Lindner, Hj. Wacker: Optimization of a Hydro Energy Storage Plant by Homotopy Methods in Connection with the Active Index Set Strategy / H. Gfrerer: Optimization of Storage Plant Systems by Decomposition / P. G. Harhammer, M. A. Muschik, A. Schädler: Optimization of Large Scale MIP Models Operation Planning of Energy System / K. Harkányi, A. Szöllösi-Nagy, P. Bartha: Real-Time Hydrological Forecasting System for the River Danube / A. Kühne: Flow Simulation in Rivers Acting as Reservoirs – a Basis for Planning and Operation of River Power Plants / E. Lindner, Hj. Wacker: Input Parameters for the Optimization of the System Partenstein: Forecasting of the Influx, Determination of the Efficiency Function / J. Mayer, A. Prékopa: On the Load Flow Problem of Electric Power Systems / G. Petritsch, S. Wagner: Medium-term Planning for a Regional Electric Company, Realized on a Process Computer / A. Prékopa: Recent Results in Optimization of Electro-Energetic Systems / G. Rabensteiner: MIP-Planning Models for Expansion and Operation of Hydrothermal Electric Power Systems / Hj. Wacker: Mathematical Techniques for the Optimization of Storage Plants / H. Wagner: Procedures for the Solution of the Unit Commitment Problem / E. A. Zarzer: An Adaptive and Learning Load Forecasting Method



**B. G. Teubner Stuttgart**

---