87. Band Heft 2
ausgegeben am 15. 4. 1985

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1985

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 86/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 94,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 87, Heft 2

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

S. D. Chatterji: A Subsequence Principle in Probability Theory
R. Gernet: Drei Register über biographische Beiträge im Jahresbericht der DMV Bd. 1–83
R. Göbel: Wie weit sind Moduln vom Satz von Krull-Remak-Schmidt entfernt?
F. Natterer: Numerik des Radonschen Problems
G. Schubring: Die Entwicklung des Mathematischen Seminars der Universität Bonn 1864–1929

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
87 (1985) 39–66
AMS subject classification: 53 C 22, 58 E 10, 58 F 17

Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten*)

V. Bangert, Bonn

Das Interesse am globalen Verlauf der geodätischen Linien einer Riemannschen Mannigfaltigkeit führte schon im letzten Jahrhundert zu schönen Resultaten, z. B. durch Jacobis Arbeit [1839] über Geodätische auf dem Ellipsoid und durch v. Mangoldts [1881] und Hadamards [1897], [1898] Untersuchungen über Geodätische auf positiv bzw. negativ gekrümmten Flächen. Die globalen Methoden, die von Poincaré, Birkhoff, Lusternik-Schnirelmann und Morse, oft im Zusammenhang mit Untersuchungen über Geodätische, entwickelt wurden, üben bis heute eine große Anziehungskraft aus.

Aussagen über den Verlauf von Geodätischen sind für viele Ergebnisse der globalen Riemannschen Geometrie wichtig; schöne Beispiele dafür bilden die Arbeiten von Gromoll-Meyer [1969a] und Cheeger-Gromoll [1972] über die Struktur von offenen Mannigfaltigkeiten nicht-negativer Krümmung.

Für die Theorie Hamiltonscher Systeme bilden geodätische Flüsse besonders anschauliche Beispiele. So untersuchte Poincaré in seiner bekannten Arbeit [1905] Geodätische auf konvexen Flächen als singularitätenfreies Beispiel für die Probleme der Himmelsmechanik. Umgekehrt lassen sich die Bahnkurven eines mechanischen Systems vom Typ „kinetische Energie + Potential" als geodätische Linien einer Riemannschen Metrik, der Jacobi-Metrik, deuten. Für diese Möglichkeit, aus Ergebnissen über Geodätische Aussagen über Bahnkurven mechanischer Systeme zu gewinnen, sei auf Seifert [1948], Weinstein [1978] und Gluck-Ziller [1983] verwiesen. Eng damit verwandt ist das Fermatsche Prinzip, das Geodätische als Lichtstrahlen in Medien mit variablem Brechungsindex zu deuten erlaubt.

In der allgemeinen Relativitätstheorie sind Geodätische von Lorentz-Metriken wichtig. Hierbei treten sowohl ähnliche als auch ganz andersartige Phänomene auf, vgl. etwa Beem-Ehrlich [1981]. Eine Aufzählung der vielen weiteren Wechselbeziehungen mit anderen mathematischen Disziplinen verbietet sich aus Raumgründen.

---

*) Dies ist eine erweiterte Fassung des Vortrags auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Köln 1983. Ich danke dem Forschungsinstitut für Mathematik der ETH Zürich für die Gastfreundschaft während der Ausarbeitung dieses Artikels.

Bei Prof. W. Ziller (Philadelphia) bedanke ich mich für das sorgfältige Lesen der ersten Version dieser Arbeit.

Die Arbeit ist in folgende Abschnitte eingeteilt:

Es ist natürlich unmöglich, im Rahmen eines solchen Artikels einen vollständigen Überblick über all das zu geben, was über geodätische Linien im Großen bekannt ist. Abschnitt 2 stellt einige Themenkreise vor, die im Folgenden nicht oder nur teilweise behandelt werden. Geodätische lassen sich von zwei Standpunkten aus untersuchen, von dem der Variationsrechnung, der den meisten Geometern naheliegt, und von dem der dynamischen Systeme. Die Ziele dieser beiden Theorien und die Anwendungsbereiche ihrer Methoden sind nicht identisch, aber auch nicht disjunkt. Das Kernstück dieser Arbeit wird von Ergebnissen gebildet, die mit Methoden der Variationsrechnung erzielt wurden. Ich habe mich jedoch darum bemüht, ebenfalls die Resultate, die aus der Theorie der dynamischen Systeme stammen, aufzuführen, insbesondere in den Bereichen, in denen sich beide Standpunkte ergänzen. Es wird nicht der in manchen Fällen interessanten Frage nachgegangen, ob die Ergebnisse in allgemeinerem Rahmen richtig sind, z. B. für Finsler-Metriken oder Busemannsche G-Räume, vgl. Busemann [1955].

1 Grundbegriffe

Wir betrachten eine m-dimensionale, zusammenhängende, glatte ($= C^\infty$) Mannigfaltigkeit M mit Riemannscher Struktur g. g ist ein glattes Tensorfeld, das jedem $p \in M$ ein (positiv definites) Skalarprodukt g_p auf dem Tangentialraum TM_p zuordnet. Mittels g läßt sich die *Länge* L(c) einer stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \to M$ definieren

$$(1.1) \qquad L(c) = \int_a^b (g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)))^{1/2} dt$$

Das typische Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine Untermannigfaltigkeit M eines euklidischen Raums $\mathbf{E}^n$, wobei g durch Restriktion der euklidischen Struktur erklärt ist. In diesem Fall stimmt (1.1) mit der üblichen euklidischen Kurvenlänge überein.

M wird durch g in natürlicher Weise zu einem metrischen Raum, in dem der *Abstand* d(p, q) zweier Punkte p, q $\in$ M als das Infimum der Längen aller p und q verbindenden Kurven definiert ist. $c : [a, b] \to M$ heißt *Kürzeste*, falls $L(c) = d(c(a), c(b))$ gilt. Offensichtlich ist L(c) unabhängig von der Parametrisierung von c, so daß (1.1) kein reguläres Variationsproblem besitzt. Man betrachtet deshalb statt L meist das Funktional

$$(1.2) \qquad E(c) = \frac{1}{2} \int_a^b g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))\, dt,$$

das ein reguläres Variationsproblem hat. Es gilt

$$L^2(c) \leqslant 2(b-a)E(c)$$

mit Gleichheit genau für proportional zur Bogenlänge parametrisiertes c (d. h. $g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \text{const}$). Also sind proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kürzeste c Minima von E in der Klasse der Kurven $\gamma : [a, b] \to M$ mit $\gamma(a) = c(a)$, $\gamma(b) = c(b)$. Die Euler-Lagrange Gleichung der „*Energie*" E ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem 2. Ordnung, das mittels des Levi-Civitá-Zusammenhangs ∇ von g invariant als

$$(1.3) \qquad \nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$$

geschrieben werden kann. Eine Kurve c, die (1.3) genügt, heißt *Geodätische*. Wegen $\frac{d}{dt}(g(\dot{c}, \dot{c})) = 2g(\nabla_{\dot{c}}\dot{c}, \dot{c})$ sind Geodätische stets proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Zu jedem Tangentialvektor v an M existiert genau eine auf einem maximalen Intervall I_v definierte Geodätische c_v mit $\dot{c}_v(0) = v$. (M, g) heißt *vollständig*, falls $I_v = \mathbf{R}$ für alle $v \in TM$ gilt. Eine *geodätische Linie* ist das Bild $c(\mathbf{R})$ einer nicht-konstanten Geodätischen $c : \mathbf{R} \to M$.
Lokal besteht folgender Zusammenhang zwischen Geodätischen und Kürzesten:

(1.4) **Satz** *Für jede kompakte Teilmenge* K *von* M *existiert ein* $\epsilon > 0$, *so daß gilt: Ist* $c : [a, b] \to M$ *eine Geodätische mit* $c(a) \in K$ *und* $L(c) < \epsilon$, *so ist* c *Kürzeste. Ist* $p \in K$, $q \in M$ *und* $d(p, q) < \epsilon$, *so existiert eine Geodätische* $c : [a, b] \to M$ *von* $c(a) = p$ *nach* $c(b) = q$, *die Kürzeste ist. Jede Kürzeste von* p *nach* q *stimmt bei geeigneter Parametrisierung mit* c *überein.*

Grundlegend für globale Aussagen ist der

(1.5) **Satz von Hopf-Rinow** *Folgende drei Aussagen sind äquivalent*

(a) (M, g) *ist vollständig.*
(b) *Der metrische Raum* (M, d) *ist vollständig.*
(c) *Jede in* (M, d) *beschränkte abgeschlossene Menge ist kompakt.*

Jede dieser Aussagen impliziert, daß je zwei Punkte von M *durch eine Kürzeste verbunden werden können.*

Ein wichtiges Hilfsmittel der globalen Riemannschen Geometrie sind *Vergleichssätze* für geodätische Dreiecke, deren infinitesimale Version die klassische Sturm-Liouville Theorie ist. Dafür wird auf Gromoll-Klingenberg-Meyer [1968] und Cheeger-Ebin [1975] verwiesen.

Abschließend gehen wir kurz auf den Zusammenhang mit der Mechanik ein, der auf eine weitere Grundeigenschaft der Geodätischen führt. Im Fall einer Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbf{E}^n$ bedeutet (1.3) gerade, daß die gewöhnliche 2. Ableitung $c''(t)$ stets senkrecht auf $TM_{c(t)}$ steht. Das läßt folgende mechanische Deutung zu: Ein Massepunkt, der sich auf M bewegt und der, abgesehen von der orthogonalen Zwangskraft, die ihn auf M hält, kräftefrei ist, folgt einer Geodätischen. Das mit (1.2) verbundene Variationsprinzip heißt in der Mechanik das *Lagrangesche Prinzip der geringsten Wirkung*. Der Übergang von Lagrangescher zu Hamiltonscher Mechanik kann in unserem Fall folgendermaßen beschrieben werden:
Die Riemannsche Metrik g gibt einen Bündel-Isomorphismus $g_* : TM \to T^*M$, $g_*(v)(w) := g(v, w)$, durch den die natürliche symplektische Struktur α des Cotangentiabündels T^*M eine symplektische Struktur $\omega = (g_*)^*\alpha$ auf TM induziert. Der *geodätische Fluß* $\tilde{\Phi} : TM \times \mathbf{R} \to TM$ einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist durch $\tilde{\Phi}(v, t) := \dot{c}_v(t)$ definiert, wobei c_v die Geodätische mit $\dot{c}_v(0) = v$ bezeichnet. Eine Rechnung zeigt:

(1.6) **Satz** $\tilde{\Phi}$ *ist der Hamiltonsche Fluß zur Hamiltonfunktion*

$$h(v) := \frac{1}{2} g(v, v) \quad \textit{auf} \quad (TM, \omega).$$

Aus (1.3) oder (1.6) folgt leicht, daß für alle $s, t \in \mathbf{R}$, $v \in TM$ gilt:

$$\tilde{\Phi}(sv, t) = s\tilde{\Phi}(v, st).$$

Wir werden uns deshalb stets nur für die Restriktion Φ von $\tilde{\Phi}$ auf das Einheitstangentialbündel $UM = \{v \in TM \mid g(v, v) = 1\}$ interessieren. Satz (1.6) hat Folgen für den Verlauf der geodätischen Linien, die überraschend sind, wenn man nur deren lokale Kürzesteneigenschaft vor Augen hat. Φ läßt als Hamiltonscher Fluß ein Volumenelement auf UM invariant, das man als das Produktmaß auf UM (lokal $M \times S^{m-1}$) identifiziert. Mit Poincarés Wiederkehrsatz folgt daraus

(1.7) **Satz** *Ist* (M, g) *vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit endlichen Volumens, so existiert für fast alle* $v \in UM$ *eine Folge* $t_i \to \infty$ *mit* $\lim \dot{c}_v(t_i) = v$.

2 Problemkreise

Ziel dieses Abschnitts ist es, auf Gebiete und Resultate hinzuweisen, die im Folgenden nicht oder nur teilweise behandelt werden. Dabei wird nicht der Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

§ 1 Negative Krümmung

Die dynamischen Eigenschaften des geodätischen Flusses von Mannigfaltigkeiten negativer Schnittkrümmung wurden beginnend mit Hadamard [1898] in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts von vielen Autoren untersucht; hierfür wird auf den Übersichtsartikel von Hedlund [1939] und auf E. Hopf [1940] hingewiesen. Einen Höhepunkt dieser Theorie bilden Anosovs Arbeiten [1967] über die – heute nach ihm benannten – Anosov-Flüsse. Eine Konsequenz ist:

(2.1) **Satz** *Der geodätische Fluß einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit negativer Schnittkrümmung ist ergodisch* (oder stärker: *mischend*).

Auch unter schwächeren Voraussetzungen als negativer Krümmung gibt es ähnliche Resultate, z. B. von Pesin [1977], Ballmann-Brin [1982] und Burns [1983]. Mannigfaltigkeiten mit geodätischem Fluß von Anosov-Typ werden in Eberlein [1973a] und Klingenberg [1974] untersucht. Variationsargumente zeigen nun, daß die Existenz einer Metrik negativer Krümmung auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M Folgen hat für die Geodätischen bezüglich einer beliebigen Metrik auf M, vgl. Morse [1924], Klingenberg [1971] und Katok [1982]. Hedlund [1932] gelang in ähnlicher Weise eine Beschreibung derjenigen Geodätischen auf einem 2-dimensionalen Torus, die in der universellen Überlagerung global Kürzeste sind.

§ 2 Spektrum des Laplace-Operators

Ein enger Zusammenhang besteht zwischen dem Spektrum des Laplace-Operators Spec (M, g) einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und den Längen aller geschlossener Geodätischer auf (M, g), dem Längenspektrum. Für zwei Metriken g, $\bar{g}$ konstanter Gaußscher Krümmung $K = \bar{K} = -1$ auf einer kompakten Fläche M gilt Spec (M, g) = Spec (M, $\bar{g}$) genau dann, wenn die Längenspektren übereinstimmen. Das folgt aus der Selbergschen Spurformel, vgl. den Übersichtsartikel Elstrodt [1981]. Für die meisten Riemannschen Metriken g auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M bestimmt Spec (M, g) das Längenspektrum sowie weitere Eigenschaften der geschlossenen Geodätischen, vgl. etwa C. de Verdière [1973]. Chazarain [1974] und Duistermaat-Guillemin [1975]. Umgekehrt lassen nichtausgeartete, elliptische geschlossene Geodätische Schlüsse auf Spec (M, g) zu, siehe Guillemin-Weinstein [1976], Ralston [1976] und C. de Verdière [1977].

§ 3 Inverse Probleme

Unter diesem Titel werden Fragen nach Existenz oder Eigenschaften von Metriken zusammengefaßt, deren Geodätische bestimmte Eigenschaften haben. Das bekannteste Problem dieser Art ist die

Blaschke-Vermutung *Ist jede Riemannsche Mannigfaltigkeit* M *mit folgender Eigenschaft* (*) *isometrisch zu einer Einheitssphäre?*

(*) *Für jeden Punkt* $p \in M$ *existiert ein Punkt* $i(p) \in M$, *so daß jede von* p *ausgehende Geodätische der Länge* π *Kürzeste von* p *nach* i(p) *ist.*

Die Antwort ist „ja" wie Green [1963] für dim M = 2 und Berger, Kazdan, Weinstein und Yang 1978 für höhere Dimensionen bewiesen. Für diese Resultate und viele damit zusammenhängende offene Probleme wird auf Besse [1978] verwiesen. Verwandte Fragen für berandete Mannigfaltigkeiten wurden in Michel [1981] und Bangert [1983a] behandelt.

E. Hopf [1948] zeigte, daß eine Fläche vom Typ des Torus, die keine konjugierten Punkte besitzt, flach ist. Das entsprechende Problem in höheren Dimensionen ist offen, vgl. Yau [1982]. Teilresultate dazu erzielten Avez [1970] und O'Sullivan [1974].

Ein mit § 2 zusammenhängendes inverses Problem ist die Frage, ob zwei kompakte Flächen (M, g), (M, $\bar{g}$) mit Krümmung $K = \bar{K} = -1$ und gleichem Längenspektrum (⇔ gleichem Spektrum) stets isometrisch sind. Mit Beispielen, die aus der algebraischen Zahlentheorie stammen, zeigte Vignéras [1978], daß das nicht so ist. Wolpert [1979] bewies jedoch, daß die meisten solchen Metriken g durch ihr Längenspektrum bestimmt sind.

Gluck und Singer [1978], [1979] konstruieren Metriken, die – wie eine Linse – zwei vorgegebene Büschel von Geodätischen ineinander beugen. Das wird dazu benutzt, Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nicht triangulierbarem Schnittort zu konstruieren. Das Problem, wann es zu einem Vektorfeld V eine Riemannsche Metrik gibt, so daß die Integralkurven von V Geodätische sind, wird in Sullivan [1978], Gluck [1980], Asimov-Gluck [1980] und Langer-Singer [1982] behandelt.

3 Geschlossene Geodätische auf kompakten Mannigfaltigkeiten

Es bezeichne $S^1 \subseteq \mathbf{C}$ den komplexen Einheitskreis. Eine Abbildung $c : S^1 \to M$ heißt *geschlossene Geodätische*, falls $\tilde{c} : \mathbf{R} \to M$, $\tilde{c}(t) := c(e^{2\pi i t})$, eine nicht-konstante Geodätische ist. Das Interesse an geschlossenen Geodätischen wurde von Poincaré geweckt, der in Poincaré [1892], S. 82, sagt: D'ailleurs ce qui nous rend ces solutions périodiques (eines dynamischen Systems) si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par laquelle nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. Wenn es heute auch andere Methoden (Ergodentheorie, strukturelle Stabilität) gibt, gewisse dynamische Systeme zu untersuchen, so ist dieser Satz für den geodätischen Fluß von Mannigfaltigkeiten, deren Schnittkrümmung keiner Beschränkung unterliegt, immer noch gültig. Wir werden in § 3 und § 4 sehen, daß Kenntnisse über geschlossene Geodätische zu einer genaueren Beschreibung des geodätischen Flusses führen können. Die folgende Übersicht ist systematisch angeordnet. An einigen wichtigen Stellen sind historische Bemerkungen angefügt.

§ 1 Das Variationsprinzip

Wenn wir uns an die Definition der Geodätischen erinnern, so ist es nicht überraschend, daß geschlossene Geodätische als Extremalen eines Energiefunktionals auf einem Raum geschlossener Kurven charakterisiert werden können. Das ermöglicht, auf folgende Weise die Existenz von geschlossenen Geodätischen nachzuweisen: Man zeigt, daß die Topologie des Raumes der geschlossenen Kurven die Existenz kritischer Punkte des Energiefunktionals impliziert. Bevor wir uns dem Problem zuwenden, dieser Idee einen präzisen analytischen Rahmen zu geben, soll sie an einem einfachen Fall erläutert werden.

(3.1) **Satz** *Auf jeder kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit* (M, g) *existiert mindestens eine geschlossene Geodätische.*

Bemerkung Für $M = S^2$ und $M = S^m$ wurde (3.1) von Birkhoff [1917], [1927] bewiesen. Der allgemeine Fall stammt von Lusternik-Fet [1951].

B e w e i s. Wir betrachten den Raum Γ der stetigen Abbildungen $\gamma: S^1 \to M$ mit der kompakt-offenen Topologie. Γ enthält den Unterraum Γ^0 der konstanten Kurven, der zu M homöomorph ist. Wir wollen zeigen, daß es ein topologisches Hindernis gibt, Γ nach Γ^0 zu deformieren. Eine kompakte Mannigfaltigkeit ist nicht zusammenziehbar. Also existiert ein $k \geqslant 1$ mit $\pi_k(M) \neq 0$. Ist M nicht einfachzusammenhängend ($k = 1$), so besitzt Γ eine Zusammenhangskomponente (= freie Homotopieklasse), die Γ^0 nicht trifft, d. h. $\pi_0(\Gamma, \Gamma^0) \neq 0$. Im Fall $k \geqslant 2$ repräsentiere $f: (I^k, \partial I^k) \to (M, p)$ eine nicht-triviale Homotopieklasse. Hierbei bezeichnet I^k das k-fache kartesische Produkt von $I = [0, 1]$, $I^0 := \{0\}$, $\partial I^0 := \emptyset$. Man kann ganz elementar einsehen, daß dann

$$\hat{f}: (I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \to (\Gamma, \Gamma^0), \qquad \hat{f}(x)(e^{2\pi i t}) := f(x, t)$$

ein nicht-triviales Element von $\pi_{k-1}(\Gamma, \Gamma^0)$ repräsentiert. Die dabei durchzuführenden Beweisschritte sind jedoch schon im Kalkül der Homotopietheorie enthalten: Wir betrachten die durch die Auswertungsabbildung $e: \Gamma \to M$, $e(\gamma) := \gamma(1)$, gegebene Faserung mit typischer Faser $\Omega = e^{-1}$ (Punkt), dem Schleifenraum von M. e besitzt einen Schnitt

$$j \circ s: M \xrightarrow{s} \Gamma^0 \xhookrightarrow{j} \Gamma.$$

Deshalb ist in der exakten Sequenz

$$\pi_k(M) \to \pi_{k-1}(\Omega) \xrightarrow{i_*} \pi_{k-1}(\Gamma) \xrightarrow{e_*} \pi_{k-1}(M)$$

die Abbildung i_* injektiv. Die lange exakte Sequenz von (Γ, Γ^0) gibt

$$\pi_{k-1}(\Gamma^0) \xrightarrow{j_*} \pi_{k-1}(\Gamma) \xrightarrow{p_*} \pi_{k-1}(\Gamma, \Gamma^0).$$

Wegen $e_* \circ i_* = 0$ und $e \circ j \circ s = \mathrm{id}_M$ muß kern $p_* \cap$ im $i_* = 0$ gelten. Also ist $p_* \circ i_*$ injektiv. Die Abbildung $[f] \in \pi_k(M) \to [\hat{f}] \in \pi_{k-1}(\Gamma, \Gamma^0)$ ist nun gerade die Komposition des kanonischen Isomorphismus $\pi_k(M) \approx \pi_{k-1}(\Omega)$ mit $p_* \circ i_*$.

Der analytische Teil des Beweises besteht darin, aus dieser topologischen Information die Existenz einer geschlossenen Geodätischen zu folgern. Da f glatt approximiert werden kann, können wir annehmen, $\hat{f}$ sei eine Abbildung in den Raum $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ der stückweise stetig differenzierbaren Kurven und

$$E: \tilde{\Gamma} \to \mathbf{R}, \qquad E(\gamma) := E(\tilde{\gamma}\,|\,[0, 1]) = \frac{1}{2} \int_0^1 g_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t))\,dt$$

sei auf $\hat{f}(I^{k-1}) \subseteq \tilde{\Gamma}$ beschränkt. Wir verwenden nun die von Birkhoff stammende Minimax-Methode, die später zur Morse- und zur Lusternik-Schnirelmann Theorie weiterentwickelt wurde. Der kritische Wert von $[\hat{f}] \in \pi_{k-1}(\tilde{\Gamma}, \Gamma^0)$ ist

$$\kappa := \inf\{\sup (E \circ \tilde{f})\,|\,\tilde{f} \in [\hat{f}]\}.$$

Zunächst gilt $\kappa > 0$, da aus (1.4) leicht folgt, daß für genügend kleines $\epsilon > 0$

$$\tilde{\Gamma}^\epsilon := \{\gamma\,|\,\gamma \in \tilde{\Gamma} \text{ und } E(\gamma) < \epsilon\}$$

nach Γ^0 deformiert werden kann. Wir erwarten die Existenz einer geschlossenen Geodätischen $c \in \Gamma$ mit $E(c) = \kappa$, da es ein Hindernis geben muß, Repräsentanten von $[\hat{f}]$ unter das Niveau $E = \kappa$ zu deformieren. Hinreichend für diesen Schluß ist die Existenz eines $\epsilon \in (0, \kappa/2)$ und einer Homotopie $\mathfrak{D}_t : (\tilde{\Gamma}^{2\kappa}, \Gamma^0) \to (\tilde{\Gamma}^{2\kappa}, \Gamma^0)$, $t \in [0, 1]$, von $\mathfrak{D}_0 = \mathrm{id}$ mit:

(3.2) *Ist* $\mu \in (2\epsilon, 2\kappa - \epsilon)$ *und existiert keine geschlossene Geodätische* c *mit* $E(c) = \mu$, *so gilt* $\mathfrak{D}_1(\tilde{\Gamma}^{\mu+\epsilon}) \subseteq \tilde{\Gamma}^{\mu-\epsilon}$.

Existiert nämlich keine geschlossene Geodätische der Energie κ, so wählen wir $\tilde{f} \in [\hat{f}]$ mit $E \circ \tilde{f} < \kappa + \epsilon$. Dann gilt $\mathfrak{D}_1 \circ \tilde{f} \in [\hat{f}]$ und $E \circ \mathfrak{D}_1 \circ \tilde{f} < \kappa - \epsilon$, im Widerspruch zur Definition von κ. Für $k = 1$ zeigt dieses Argument, daß es in jeder nichttrivialen freien Homotopieklasse eine geschlossene Geodätische minimaler Energie gibt.

Es bleibt die Frage, wie man solche „energieverringernden Deformationen" $\mathfrak{D}$ erhält. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

(a) Am einfachsten, jedoch für viele Anwendungen ausreichend, ist ein auf Birkhoff [1917] zurückgehender *Verkürzungsprozeß*, der z. B. in Klingenberg [1978], S. 204–206, beschrieben ist. Nach (1.4) kann man zwei disjunkte Punktfolgen $z_1, \ldots, z_{k+1} = z_1$ und $w_1, \ldots, w_{k+1} = w_1$ auf S^1 finden, so daß für alle $\gamma \in \tilde{\Gamma}^{2\kappa}$ und alle $1 \leqslant i \leqslant k$ die kürzesten Geodätischen von $\gamma(z_i)$ nach $\gamma(z_{i+1})$ bzw. von $\gamma(w_i)$ nach $\gamma(w_{i+1})$ eindeutig sind. $\mathfrak{D}_1$ wirkt in folgender Weise auf $\gamma \in \tilde{\Gamma}^{2\kappa}$: Für alle $1 \leqslant i \leqslant k$ werden die Kurvenstücke von γ mit den Endpunkten $\gamma(z_i)$, $\gamma(z_{i+1})$ durch kürzeste Geodätische ersetzt; auf die so entstehende Kurve wird das analoge Verfahren für die Parameterwerte $w_1, \ldots, w_k$ angewendet. Es ist nicht schwer einzusehen, daß dieses $\mathfrak{D}_1$ homotop zu $\mathfrak{D}_0 = \mathrm{id}$ ist und Eigenschaft (3.2) hat.

(b) Teil (a) zeigt speziell, daß $(\tilde{\Gamma}^{2\kappa}, \Gamma^0)$ homotopieäquivalent zu einem Raum geschlossener Polygone (fester Eckenzahl k) aus kürzesten Geodätischen ist. Morses Methode der *endlich-dimensionalen Approximationen* identifiziert ein solches Polygon mit seinen Eckpunkten und damit den Raum dieser Polygone mit einer offenen Teilmenge von M^k, so daß er eine differenzierbare (und eine Riemannsche) Struktur erhält, bezüglich derer E glatt ist. Als $\mathfrak{D}_t$ verwendet man den Fluß von $(-\mathrm{grad}\, E)$. Im Gegensatz zu (a) kann man hier sogar Morse Theorie auf einem zu $(\tilde{\Gamma}^{2\kappa}, \Gamma^0)$ homotopieäquivalenten Raum betreiben. Dieser Zugang ist z. B. in Bott [1982] dargestellt.

(c) Aufbauend auf Arbeiten von Eells und Palais-Smale über Morse Theorie auf Hilbertmannigfaltigkeiten wurde vor allem von einer Gruppe um Klingenberg die folgende Methode entwickelt, die im Unterschied zu (a) und (b) intrinsisch ist: Man betrachtet den Raum

$$\Lambda = \Lambda M = H^1(S^1, M)$$

der geschlossenen Kurven mit quadratintegrierbaren 1. Ableitungen, der in natürlicher Weise die Struktur einer Riemannschen Hilbertmannigfaltigkeit trägt, auf der E eine glatte Funktion ist. Als $\mathfrak{D}_t$ verwendet man wieder den Fluß von $(-\mathrm{grad}\, E)$. (3.2) folgt aus der Bedingung (C) von Palais-Smale, die leicht nachgewiesen werden kann. Neben der formalen Eleganz hat diese Methode den Vorteil, die natürliche Symmetrie unseres Problems nicht zu zerstören: Die Symmetriegruppe O(2) von S^1 wirkt auf Λ durch Umparametrisieren

$$O(2) \times \Lambda \to \Lambda, \quad (g, \gamma) \to g \cdot \gamma \quad \text{mit} \quad g \cdot \gamma(z) := \gamma(gz),$$

wobei offenbar $E(g \cdot \gamma) = E(\gamma)$ gilt. Da die Operation isometrisch ist, vertauscht sie mit dem (−grad E)-Fluß. Das gibt die Möglichkeit auch auf dem Quotienten von Λ nach O(2) Lusternik-Schnirelmann Theorie zu betreiben. Für unsere Zwecke genügt die kurze Einführung in Ballmann-Thorbergsson-Ziller = BTZ [1983a] in diese Theorie.

Wir werden uns im Folgenden an Methode (c) halten, die – wenn sie erst einmal bereitgestellt ist – leistungsfähig und leicht zu handhaben ist. Darstellungen finden sich in Eliasson [1972], Flaschel-Klingenberg [1972] und Klingenberg [1978].

§ 2 Kurze geschlossene Geodätische auf Sphären

Sobald man nach der Existenz von mehr als einer geschlossenen Geodätischen fragt, wird man mit dem großen Problem dieser Theorie konfrontiert: Geometrisch verschieden sind geschlossene Geodätische c und $\tilde{c}$ nur, wenn die zugehörigen geodätischen Linien $c(\mathbf{R})$ und $\tilde{c}(\mathbf{R})$ verschieden sind. In diesem Sinn sind alle Aussagen über die Existenz von n geschlossenen Geodätischen, $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, gemeint. Nun entsprechen aber jeder geschlossenen geodätischen Linie viele verschiedene kritische Punkte von $E : \Lambda \to \mathbf{R}$: Jeder kritische Punkt von E gehört zu einer O(2)-Bahn von kritischen Punkten, die alle gleiches Bild in M haben. Noch größere Probleme verursacht oft die Tatsache, daß mit c auch die q-mal durchlaufene Kurve oder *q-fach Iterierte* c^q, $c^q(z) := c(z^q)$, kritischer Punkt von E ist, der natürlich zur gleichen geschlossenen geodätischen Linie gehört. Ein Grundproblem ist also:

Wie erkennt man, daß zwei kritische Punkte c, $\tilde{c}$ *von* E *zu verschiedenen geschlossenen Geodätischen gehören?*

Wir werden bei jedem der aufgeführten Resultate andeuten, wie diese Schwierigkeit überwunden wurde. Das Problem der Iterierten tritt übrigens in anderer Form erneut auf, wenn man von Λ zum Quotienten nach der O(2)-Aktion übergeht. Hierbei entstehen Singularitäten genau bei den mehrfach durchlaufenen Kurven.

Seit der grundlegenden Arbeit Poincaré [1905] über geschlossene Geodätische auf konvexen Flächen fand der – wie wir sehen werden – besonders schwierige Fall von zur Sphäre diffeomorphen Riemannschen Mannigfaltigkeiten großes Interesse. Wichtige Beispiele solcher Mannigfaltigkeiten sind Ellipsoide, deren geodätischer Fluß, wie Jacobi [1839] bewies, integrabel ist. Der Verlauf der Geodätischen kann deshalb sehr explizit beschrieben werden, vgl. Klingenberg [1982]. Ausgezeichnete geschlossene geodätische Linien sind die $\frac{1}{2}m(m+1)$ *Hauptellipsen*, das sind die Schnitte des m-dimensionalen Ellipsoids mit den aus den Hauptachsen gebildeten Ebenen. Morse [1934] bemerkte, daß auf einem Ellipsoid, dessen Hauptachsen nahezu gleiche, aber verschiedene Längen besitzen, jede von den Hauptellipsen verschiedene geschlossene Geodätische beliebig lang ist. Kürzlich wurde in Ballmann [1983a] und Bangert [1983b] gezeigt, daß Entsprechendes stets für Riemannsche Metriken auf Sphären gilt, deren Schnittkrümmung nahezu konstant ist. Die folgenden Arbeiten beschäftigen sich mit dem Problem, für allgemeine Riemannsche Metriken auf Sphären geschlossene Geodätische zu finden, die den Hauptellipsen der Ellipsoide entsprechen („kurze geschlossene Geodätische").
Der topologische Teil dieser Frage wird meist mit Modifikationen einer Idee behan-

delt, die von Lusternik-Schnirelmann [1929] (für m = 2) und Lyusternik [1947] stammt:

Man betrachtet den Quotienten $(\bar{\Lambda}S^m, \Lambda^0 S^m)$ von $(\Lambda S^m, \Lambda^0 S^m)$ nach der O(2)-Aktion und konstruiert darin g(m) subordinierte Homologieklassen, wobei g(m) die Cuplänge der Graßmannmannigfaltigkeit $G(2, m-1)$ der 2-Ebenen im $\mathbf{R}^{m+1}$ ist, $g(m) = 2m - s - 1$, wobei $s \geqslant 0$ und $2^k + s = m < 2^{k+1}$. Diese Homologieklassen sind durch Zykel gegeben, die aus Groß- und Kleinkreisen der Einheitsphäre $S^m \subseteq \mathbf{E}^{m+1}$ bestehen. Das erklärt den Zusammenhang mit $G(2, m-1) \simeq$ Raum der Großkreise von S^m. Nach § 1, c) kann man auf das Paar $(\bar{\Lambda}, \bar{E})$ Lusternik-Schnirelmann Theorie anwenden und erhält sofort:

(3.3) **Lemma** *Auf jeder Riemannschen Sphäre* (S^m, g) *existieren (nicht notwendig geometrisch verschiedene) geschlossene Geodätische* c_i *mit* $E(c_i) = \kappa_i$, $1 \leqslant i \leqslant g(m)$. *Die* κ_i *sind die kritischen Werte von Homologieklassen, die durch Zykel aus Groß- und Kleinkreisen der Einheitssphäre repräsentiert werden können.*

Ballmann entdeckte 1979, daß die so konstruierten Homologieklassen in $(\bar{\Lambda}, \Lambda^0)$ in Wahrheit nicht subordiniert sind. Inzwischen aber bewiesen BTZ [1983a], Anosov [1980], [1981] und Hingston [1981], [1984], daß bei geeigneten Modifikationen die oben beschriebene Idee doch einen Beweis von (3.3) ermöglicht. Allerdings folgt aus $\kappa_i = \kappa_{i+1}$ nicht ohne weiteres die Existenz von unendlich vielen geschlossenen Geodätischen der Energie κ_i. Dieser Schluß ist jedoch richtig, wenn keine mehrfach durchlaufenen geschlossenen Geodätischen der Energie κ_i existieren. Grund für dieses Phänomen sind die oben erwähnten Singularitäten von $\bar{\Lambda}$ in den mehrfach durchlaufenen Kurven.

Es bleibt das geometrische Problem, etwas über die Verschiedenheit der in (3.3) gefundenen geschlossenen Geodätischen herauszufinden. Für m = 2 hat man Lusternik-Schnirelmanns [1929] berühmtes Resultat, das, wie geeignete Ellipsoide zeigen, nicht verbessert werden kann:

(3.4) **Satz** *Jede Riemannsche Metrik auf der* S^2 *besitzt drei doppelpunktfreie geschlossene Geodätische.*

Im Beweis wird auf die Kurven der oben erwähnten g(2) = 3 Zykel eine energieverringernde Deformation $\mathfrak{D}_t$ angewendet, die – im Gegensatz zum (−grad E)-Fluß – die Menge der doppelpunktfreien Kurven in sich abbildet. In diesem Teilraum sind deren Homologieklassen übrigens stets subordiniert, so daß die oben erwähnte Schwierigkeit nicht auftritt. Man erhält so geschlossene Geodätische, die durch doppelpunktfreie Kurven approximiert werden können, die also selbst doppelpunktfrei sind. Es ist möglich, aber überraschend schwierig, eine solche Deformation $\mathfrak{D}_t$ anzugeben. Die Tatsache, daß dieses $\mathfrak{D}_t$ nicht O(2)-invariant ist, verursacht zusätzliche topologische Schwierigkeiten. Leider existiert trotz mancher Bemühungen noch kein einwandfreier Beweis dieses Satzes in der Literatur – am nächsten kommt dem Ballmann [1978a], vgl. auch Lyusternik [1947].

Poincaré [1905] gab zwei Beweisansätze für die Existenz von doppelpunktfreien geschlossenen Geodätischen auf konvexen Flächen, die kürzlich von Berger-Bombieri [1981], Croke [1982] und Anosov [1982] durchgeführt werden konnten. In diesem Zusammenhang sei ein offenes Problem (Ziller) erwähnt:

Ist die kürzeste geschlossene Geodätische einer konvexen Fläche stets doppelpunktfrei?

Ballmann [1978b] fand mit der Methode von Lusternik-Schnirelmann doppelpunktfreie geschlossene Geodätische auf kompakten Flächen mit $\pi_1 \neq 0$. Freedman-Hass-Scott [1982] und Hass-Rubinstein [1983] beschreiben vollständig das Schnittverhalten derjenigen geschlossenen Geodätischen auf Flächen, die in ihrer freien Homotopieklasse minimale Länge haben.

In höheren Dimensionen existieren Resultate wie (3.4) für Metriken, die eine „pinching condition" an die Schnittkrümmung erfüllen. Das entscheidende Hilfsmittel ist dabei Klingenbergs Abschätzung für den Injektivitätsradius einer solchen Metrik, die eine untere Schranke für die Länge ℓ der kürzesten geodätischen Schleife gibt. Die „pinching condition" kann ein zweites Mal verwendet werden, um durch geschickte geometrische Konstruktionen die subordinierten Homologieklassen durch Kurven der Energie $< 2\ell^2$ zu repräsentieren. Dann sind die geschlossenen Geodätischen c_i aus (3.3) doppelpunktfrei, da für ihre Längen gilt: $L(c_i) \leqslant \sqrt{2\kappa_i} < 2\ell$. Das ist die Grundidee im Beweis von

(3.5) **Satz** (BTZ [1983a]) *Es sei* (M, g) *zur Sphäre* S^m *homöomorphe Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung* $\frac{1}{4} \leqslant \delta \leqslant K \leqslant 1$ *erfüllt. Dann existieren auf* (M, g) *mindestens* g(m) *doppelpunktfreie geschlossene Geodätische mit Längen im Intervall* $[2\pi, 2\pi/\sqrt{\delta}] \subseteq [2\pi, 4\pi]$. *Sind alle geschlossenen Geodätischen der Länge* $\leqslant 4\pi$ *nicht entartet, so existieren mindestens* $\frac{1}{2}m(m+1)$ *doppelpunktfreie geschlossene Geodätische mit Längen im Intervall* $[2\pi, 2\pi/\sqrt{\delta}]$.

Eine geschlossene Geodätische c heißt *nicht entartet*, falls der Nullraum der Hesseform $\nabla^2 E|_c$ von E in c nur 1-dimensional ist, d. h. falls c als kritischer Punkt von E so wenig ausgeartet ist, wie das in Anbetracht der O(2)-Aktion möglich ist. Obige Bedingung ist für eine C^2 offene und dichte Menge Riemannscher Metriken mit $\frac{1}{4} < K < 1$ erfüllt, vgl. § 4. Geeignete Ellipsoide zeigen, daß man im letzten Fall eine optimale Aussage erhält. Verwandte Resultate erhielten etwa gleichzeitig und unabhängig Anosov [1980], [1981] und Hingston [1981], [1984]. Diesen Ergebnissen ging eine längere Reihe von Arbeiten voraus: Alber [1957], [1966], [1970], Klingenberg [1968], [1981a] und Thorbergsson [1979] Ähnliche Sätze existieren für Riemannsche Mannigfaltigkeiten vom Typ $P^n\mathbf{R}$, $P^n\mathbf{C}$, $P^n\mathbf{H}$ und P^2Ca, z. B. in Hingston [1984], BTZ [1983a], [1983b], Rademacher [1983], und vom Typ der Graßmannmannigfaltigkeiten in Eliasson [1966].

Fet [1965] bewies die Existenz von zwei geschlossenen Geodätischen auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe, deren geschlossene Geodätische alle nicht entartet sind. Klingenberg [1965], [1978] gab eine starke Verallgemeinerung von (3.4): Auf jeder kompakten, 1-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit existieren 2k − 1 „kurze" geschlossene Geodätische. Hierbei ist k größer oder gleich der kleinsten Zahl p > 0, für die $H_p(M, \mathbf{Z})$ unendlich ist, speziell $k \geqslant 2$. Ziller [1983] enthält möglicherweise ein Gegenargument zum

Beweis dieses Satzes: Es wird eine symmetrische Finslermetrik auf S^3 konstruiert, die nur 4 „kurze“ geschlossene Geodätische besitzt, während für S^3 $2k - 1 = 5$ gilt. Es stellt sich die nicht leicht zu beantwortende Frage, ob der Beweis in Klingenberg [1978] Schritte enthält, die sich für symmetrische Finslermetriken nicht durchführen lassen.

§ 3 Stabilitätseigenschaften von geschlossenen Geodätischen

Die Frage, inwieweit eine geschlossene Geodätische stabil oder instabil im Sinne der dynamischen Systeme ist, ist wichtig, wenn aus Existenzsätzen über geschlossene Geodätische weitere Eigenschaften des geodätischen Flusses abgeleitet werden sollen. Die infinitesimalen Stabilitätseigenschaften einer geschlossenen Geodätischen c können an der linearisierten Poincaré-Abbildung P_c von c abgelesen werden. P_c ist eine symplektische Abbildung, die durch die Jacobifelder längs c bestimmt ist. c heißt *elliptisch*, falls P_c in 2-dimensionale Rotationen zerfällt; *elliptisch-parabolisch*, falls P_c in 2-dimensionale Rotationen und einen Teil mit Eigenwerten ± 1 zerfällt; *hyperbolisch*, falls c keine Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt. Zum Beispiel sind auf einem nicht zu weit von der Sphäre abweichenden allgemeinen Ellipsoid in $\mathbf{E}^3$ die kürzeste und die längste Hauptellipse elliptisch, während die mittlere hyperbolisch ist, siehe Klingenberg [1982]. Während für die Instabilität von c die Existenz eines Eigenwerts von P_c vom Betrag $\neq 1$ hinreichend ist, kann aus Elliptizität nicht auf Stabilität geschlossen werden. Ist jedoch zusätzlich die Poincaré-Abbildung von c vom Twist-Typ (eine Bedingung 3. Differentiationsordnung an den geodätischen Fluß), so gelten die starken Ergebnisse der KAM-Theorie für c, vgl. Arnold [1978] und Moser [1973]. Ein Bindeglied ist ein Resultat, das aus Klingenberg-Takens [1972], siehe auch Klingenberg [1978] folgt:

(3.6) **Satz** *Für eine C^4-generische Menge Riemannscher Metriken auf einer Mannigfaltigkeit ist die Poincaré-Abbildung jeder geschlossenen Geodätischen auf der Zentrumsmannigfaltigkeit vom Twist-Typ.*

Es ist also sinnvoll geschlossene Geodätische c zu suchen, für die P_c nur Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt, d. h. deren Zentrumsmannigfaltigkeit offen im Definitionsbereich der Poincaré-Abbildung ist.

Im allgemeinen kann aus Variationseigenschaften allein nicht auf Stabilitätseigenschaften geschlossen werden. So braucht eine geschlossene Geodätische minimaler Energie in ihrer freien Homotopieklasse keineswegs hyperbolisch zu sein, sie kann sogar elliptisch sein. Jedoch lassen Annahmen über die Krümmung, die die Differentialgleichung der Jacobifelder beherrscht, oft Schlüsse auf P_c zu: Zum Beispiel ist im Fall negativer Krümmung jede geschlossene Geodätische hyperbolisch. Katok [1982] zeigte, daß es auf einer kompakten Mannigfaltigkeit, die eine Metrik negativer Krümmung gestattet, bezüglich jeder Metrik viele hyperbolische geschlossene Geodätische gibt. Poincaré [1905] gibt eine Beweisskizze für die Existenz einer nicht-hyperbolischen, doppelpunktfreien geschlossenen Geodätischen auf jeder konvexen Fläche. Grjuntal [1979] zeigte jedoch, daß es C^1-nahe bei der Standardsphäre konvexe Flächen gibt, deren doppelpunktfreie geschlossene Geodätische alle hyperbolisch sind. Geschlossene Geodätische auf normal homogenen

Räumen sind stets elliptisch-parabolisch, Ziller [1976b]. Aufbauend auf Ergebnissen aus Thorbergsson [1979] wird in BTZ [1982] bewiesen:

(3.7) **Satz** *Sei* (M, g) *Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung* K. *Auf* (M, g) *existiert eine elliptisch-parabolische geschlossene Geodätische, falls* $M = S^m$ *und* $9/16 \leqslant K \leqslant 1$ *oder falls* $M = P^m\mathbf{R}$ *und* $1/4 \leqslant K \leqslant 1$ *gilt.*

Im Beweis werden Variationsmethoden mit Vergleichssätzen für Jacobifelder kombiniert. Nach (3.6) folgt daraus die Existenz einer C^4 offenen und dichten Menge $\mathcal{O}$ in der Menge der Metriken auf S^m mit $9/16 < K < 1$, so daß jedes $g \in \mathcal{O}$ eine geschlossene Geodätische c besitzt, für die die Ergebnisse der KAM-Theorie gelten: In jeder Umgebung des periodischen Orbits $\dot{c}$ in TS^m existiert eine Menge von Orbits von positivem Maß, die auf invarianten Tori verlaufen. Insbesondere ist der geodätische Fluß Φ – im Gegensatz zum Fall negativer Krümmung – nicht ergodisch. Im Fall m = 2 (hier genügt nach Thorbergsson [1979] die Voraussetzung $1/4 < K < 1$) ist c stabil. Diese geschlossenen Geodätischen erfüllen die Voraussetzungen der in Abschnitt 2 erwähnten Ergebnisse von Ralston [1976], Guillemin-Weinstein [1976].

In diesem Zusammenhang erinnern wir an das offene Problem, ob der geodätische Fluß einer Sphäre ergodisch sein kann (oder eine ergodische Komponente positiven Maßes besitzen kann). Für Finsler-Metriken existieren solche Beispiele, vgl. Katok [1973].

Nicht-hyperbolische geschlossene Geodätische erhält man unter schwächeren Voraussetzungen: Für Sphären (S^m, g) genügt $1/4 \leqslant K \leqslant 1$, vgl. BTZ [1982]. Aus Eschenburg-O'Sullivan [1980] folgt, daß eine geschlossene Geodätische minimaler Energie in ihrer freien Homotopieklasse nichthyperbolisch ist, falls die Riccikrümmung nicht-negativ ist, vgl. BTZ [1982]. Generisch gibt es in der Nähe einer nicht-hyperbolischen geschlossenen Geodätischen unendlich viele weitere geschlossene Geodätische, deren Längen gegen unendlich streben. Das folgt aus (3.6) in Verbindung mit dem Fixpunktsatz von Birkhoff-Lewis, vgl. Moser [1978]. Dadurch werden wir zum nächsten Paragraphen geführt:

§ 4 Existenz von vielen geschlossenen Geodätischen auf Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe

Über die tatsächliche Verteilung der geschlossenen Geodätischen auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist nur wenig bekannt. Für eine generische Metrik sind alle geschlossenen Geodätischen nicht entartet, vgl. Abraham [1970], Klingenberg-Takens [1972] und Anosov [1982]; es gibt also für jedes $C > 0$ höchstens endlich viele mit Länge $< C$. Deshalb kann der Abschluß $\overline{\text{Per}}$ der Menge Per $\subseteq$ UM der Tangentialvektoren an mit Geschwindigkeit 1 durchlaufene geschlossene Geodätische doch ganz UM sein. Es gibt jedoch für alle $\epsilon > 0$ konvexe Flächen, bei denen der Quotient der Maße von $\overline{\text{Per}}$ und UM kleiner als ϵ ist, vgl. vgl. Weinstein [1970]. Für Ellipsoide (vgl. § 2) gilt $\overline{\text{Per}}$ = UM, wobei allerdings alle von den Hauptellipsen verschiedenen geschlossenen Geodätischen sehr lang sein können. Das zeigt, daß es mit Variationsmethoden sehr schwierig sein wird, auf Sphären mehr als die kurzen geschlossenen Geodätischen zu finden. In diesem Zusammenhang erwähnen wir Beispiele von Katok [1973] von nicht-symmetrischen

Finsler-Metriken auf S^m mit nur endlich vielen (für S^2 nur zwei) geschlossenen Geodätischen. Diese Beispiele werden in Ziller [1983] genau untersucht.

Dennoch ist bisher die Morse-Theorie des Funktionals $E : \Lambda \to \mathbf{R}$ die erfolgreichste Methode, viele geschlossene Geodätische zu finden. Dabei werden geschlossene Geodätische durch ihren Index unterschieden,

$$\operatorname{ind}(c) = \textit{Dimension des negativen Eigenraums von } \nabla^2 E\,|_c.$$

Ein wichtiges Hilfsmittel ist ein Satz von Bott [1956] über die Indices von iterierten geschlossenen Geodätischen, und insbesondere eine von Gromoll-Meyer [1969b] und Ziller stammende Folgerung daraus:

(3.8) **Satz** *Zu jeder geschlossenen Geodätischen* c *existieren* $\alpha_c \geqslant 0, \beta_c \geqslant 0$, *so daß für alle* $q > 0$ *gilt:*

$$q\alpha_c - \beta_c \leqslant \operatorname{ind}(c^q) \leqslant q\alpha_c + \beta_c.$$

Gibt es nur endlich viele geschlossene Geodätische, so existiert nach (3.8) ein $n_0 \in \mathbf{N}$, so daß für alle genügend großen $i \in \mathbf{N}$ höchstens n_0 kritische Orbits von E mit Index i existieren. Das ist die Grundidee in Gromoll-Meyer [1969b]:

(3.9) **Satz** *Sei* M *kompakte Mannigfaltigkeit. Ist die Folge* $b_i(\Lambda M)$ *der Bettizahlen von* ΛM *unbeschränkt, so existieren für jede Riemannsche Metrik auf* M *unendlich viele geschlossene Geodätische.*

Während (3.9) im Fall, daß alle geschlossenen Geodätischen nicht entartet sind, leicht aus (3.8) folgt, beruht der schwierigere allgemeine Fall auf der Tatsache, daß die Folge der Typenzahlen der Iterierten c^q einer geschlossenen Geodätischen c höchstens 2^m verschiedene Werte annehmen kann. (3.9) erhält seine volle Stärke erst in Verbindung mit einem Resultat von Vigué-Poirrier/Sullivan [1976]: Für einfach-zusammenhängendes M ist $b_i(\Lambda M)$ genau dann unbeschränkt, wenn der rationale Kohomologiering von M nicht von einem Element erzeugt wird. Es folgt also die Existenz von unendlich vielen geschlossenen Geodätischen für sehr viele topologische Typen von Mannigfaltigkeiten, jedoch *nicht* für einige sehr einfache: Mannigfaltigkeiten vom Homotopietyp von kompakten symmetrischen Räumen vom Rang 1, speziell Sphären. Während (3.9) für beliebige Koeffizientenkörper gilt, werden in Vigué-Poirrier/Sullivan nur $\mathbf{Q}$-Koeffizienten betrachtet, und es ist nicht bekannt, ob ihr Ergebnis auch für beliebige Koeffizientenkörper gilt. Ziller [1977] fand symmetrische Räume M vom Rang < 1, für die $b_i(\Lambda M; \mathbf{Z}_2)$ unbeschränkt und $b_i(\Lambda M; \mathbf{Q})$ beschränkt ist.

Von besonderem Interesse sind Abschätzungen für das Wachstum der Funktion

$$N_g(t) = N(t) = \textit{Anzahl der geschlossenen Geodätischen der Länge} \leqslant t.$$

In Gromov [1978] wird unter der Voraussetzung, daß M kompakt und $\pi_1(M)$ endlich ist und daß alle geschlossenen Geodätischen nicht entartet sind, bewiesen:

$$N_g(t) \geqslant \frac{\alpha}{t} \sum_{k \leqslant \beta t} b_k(\Lambda M) \quad \textit{mit} \quad \alpha = \alpha(g) > 0, \beta = \beta(g) > 0.$$

Eine verwandte Abschätzung findet sich in Ballmann-Ziller [1982]. Es ist ein offenes Problem, im allgemeinen Fall eine ähnliche Abschätzung zu finden.

Wir wenden uns nun Mannigfaltigkeiten zu, auf die (3.9) nicht anwendbar ist. Für die einfachste solche Mannigfaltigkeit, die S^2, existiert eine schöne Idee von Birkhoff [1927], eine doppelpunktfrei geschlossene Geodätische c vom „Minimaxtyp", die nach (3.4) existiert, zu benutzen, um den geodätischen Fluß weiter zu untersuchen: In vielen Fällen kann man mittels c einen volumentreuen Homöomorphismus T eines Ringgebiets konstruieren, der den Fluß vollkommen beschreibt. T ist genau dann vom Twist-Typ, wenn für keinen Punkt c(s) auf c der zweite konjugierte Punkt längs c nach genau einem Umlauf eintritt; das ist, da c vom „Minimaxtyp" ist, für eine C^2 offene und dichte Menge von Riemannschen Metriken auf S^2 der Fall. Unter dieser Bedingung existieren aufgrund des Poincaré-Birkhoffschen Fixpunktsatzes stets unendlich viele geschlossene Geodätische. In den Fällen, in denen T nicht definierbar ist, läßt sich mit den (Variations-) Methoden aus Bangert [1980] und Bangert-Klingenberg [1983] zeigen, daß unendlich viele geschlossene Geodätische existieren.
Im allgemeinen ist dann (S^2, g) eine „taillierte Sphäre", d. h., es existiert eine geschlossene Geodätische, die ein lokales Minimum von E ist. Es gilt also

(3.10) **Satz** *Für eine* C^2 *offene und dichte Menge Riemannscher Metriken auf* S^2 *existieren unendlich viele geschlossene Geodätische.*

Dieser Satz ist in konkreten Fällen anwendbar: Z. B. existieren auf den zu Beginn dieses Paragraphen erwähnten Beispielen konvexer Flächen mit kleinem $\overline{\text{Per}}$ stets unendlich viele geschlossene Geodätische. Eine Verallgemeinerung des Satzes über taillierte Sphären auf höhere Dimensionen wird in Bangert-Klingenberg [1983] gegeben. Die verwendete Methode zeigt, daß die Morse Theorie von (Λ, E) einen Teil der Struktur von Λ übersieht.

In Klingenberg [1978], [1981b] werden Beweise für die Existenz von unendlich vielen geschlossenen Geodätischen auf jeder kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe gegeben. Neben den Methoden aus Gromoll-Meyer [1969b] werden Sullivans Konstruktion rationaler Homologieklassen und ein Multiplizitätslemma benützt, das Teilbarkeitsrelationen zwischen den Vielfachheiten bestimmter Paare geschlossener Geodätischer gibt. Da in diesen Beweisen noch nicht alle Details ausgefüllt sind, wird weiter nach anderen, leichter zugänglichen Methoden gesucht; bisher allerdings ohne sehr großen Erfolg.

Eine Möglichkeit besteht darin, die folgende Alternative zu verwenden, die sich aus Klingenberg-Takens [1972], vgl. (3.6), ergibt:

(3.11) *Für eine* C^4*-generische Metrik gilt: Entweder alle geschlossenen Geodätischen sind hyperbolisch, oder es existiert eine nicht-hyperbolische vom Twist-Typ.*

Wie am Ende von § 3 erwähnt, existieren im zweiten Fall stets unendlich viele geschlossene Geodätische, N(t) wächst mindestens wie die Primzahlen. Für ein generisches Resultat genügt es also, den Fall zu betrachten, daß alle geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind. Für hyperbolische Geodätische c gilt folgende, bessere Version von (3.8)

(3.12) $\operatorname{ind}(c^q) = q \operatorname{ind}(c)$,

die es in manchen Fällen erleichtert, die Existenz geschlossener Geodätischer zu

zeigen. Dieses Vorgehen steht allerdings nicht im Einklang mit der ursprünglichen Motivation, geschlossene Geodätische zu suchen, um den geodätischen Fluß genauer kennenzulernen. Es liefert jedoch recht starke generische Resultate.
So bewiesen BTZ [1981] mittels (3.11) und (3.12) leicht:

(3.13) **Satz** *Sei* M *kompakt und* $\pi_1(M)$ *endlich und nicht-trivial. Für eine* C^4*-generische Menge von Metriken* g *auf* M *gilt*: $\liminf \left(N_g(t) \frac{\ln t}{t} \right) > 0$.

Hingston [1981], [1984] benutzte (bezüglich der O(2)-Aktion) equivariante Morse Theorie, um zu beweisen

(3.14) **Satz** *Sei* M *einfachzusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit vom rationalen Homotopietyp eines kompakten symmetrischen Raums vom Rang* 1. *Wenn alle geschlossenen Geodätischen auf* M *hyperbolisch sind, so gilt*
$\liminf \left(N_g(t) \frac{\ln t}{t} \right) > 0$.

Zusammen mit (3.11) folgt also, daß generisch auf solchen Räumen unendlich viele geschlossene Geodätische existieren. Im Beweis wird mittels Morse-Theore bezüglich des Energiefunktionals der Standardmetrik die O(2)-equivariante Kohomologie von (Λ, Λ^0) berechnet. Deren Modulstruktur ermöglicht, die Existenz eines $b \in \mathbf{N}$ zu zeigen, so daß für alle genügend großen Primzahlen p geschlossene Geodätische c_p existieren, deren Vielfachheit prim zu p ist und für deren Index $\operatorname{ind}(c_p) = kp$ mit $k \leqslant b$ gilt. Wegen (3.12) ist die Vielfachheit von c_p höchstens b, woraus mit einer Längenabschätzung die Behauptung folgt. Es ist kein Beispiel einer glatten Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe bekannt, deren geschlossene Geodätische alle hyperbolisch sind.

Zum Abschluß erwähnen wir einige Ergebnisse und Fragen, die von ihrer Problematik her in diesen Paragraphen gehören.

Eine Verallgemeinerung des Begriffs der geschlossenen Geodätischen wurde in Grove [1974] untersucht: Ist $A : M \to M$ Isometrie, so heißt eine Geodätische $c : \mathbf{R} \to M$ A-invariant, falls für ein $t_0 > 0$ gilt: $A \circ c(t) = c(t + t_0)$. Nach einem Teilresultat in Grove-Tanaka [1978] konnte Tanaka [1982] eine Verallgemeinerung von (3.9) auf isometrie-invariante Geodätische erzielen. Tanaka [1982] erwähnt einige offene Probleme dieser Theorie. Weitere Ergebnisse und der Zusammenhang mit rationaler Homotopietheorie sind in Grove/Halperin/Vigué-Poirrier [1978] und Grove-Halperin [1982] beschrieben.

Serre [1951] beweist, daß je zwei Punkte einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit durch unendlich viele Geodätische verbunden werden können. Das Beispiel der Standardsphäre zeigt jedoch, daß diese Geodätischen alle Teilstücke derselben (geschlossenen) Geodätischen sein können, also nicht geometrisch verschieden zu sein brauchen. Verschiedene Autoren haben die Frage gestellt, ob es – analog zu (3.9) – stets unendlich viele verschiedene solche Geodätische gibt, falls die Folge der Bettizahlen des Schleifenraums von M unbeschränkt ist, vgl. Tanaka [1982]. Falls die zwei Punkte längs keiner sie verbindenden Geodätischen konjugiert sind, ist dies recht leicht einzusehen.

§ 5 Geschlossene Geodätische auf Mannigfaltigkeiten mit unendlicher Fundamentalgruppe

Oft kann mittels der Fundamentalgruppe nachgewiesen werden, daß gewisse geschlossene Geodätische geometrisch verschieden sind. Ein einfaches Beispiel dafür ist der Fall, daß $\pi_1(M)$ abelsch und vom Rang $k \geqslant 2$ ist, oder allgemeiner, daß $b_1(M) = k \geqslant 2$ ist. Dann gilt für jede Riemannsche Metrik auf M (kompakt!):

$$\liminf N(t)/t^k > 0.$$

Beweis: Ist $\pi_1(M)$ abelsch, so bestimmen verschiedene prime Elemente von $\pi_1(M)$ verschiedene freie Homotopieklassen, die keine mehrfach durchlaufenen Kurven enthalten. Also sind die darin enthaltenen geschlossenen Geodätischen geometrisch verschieden. Bezüglich einer auf $\pi_1(M)$ durch ein Erzeugendensystem induzierten Norm wächst die Anzahl der primen Elemente als Funktion der Norm wie t^k. Daraus folgt leicht die entsprechende Abschätzung für N(t).

Ist die Anzahl der geschlossenen Geodätischen, die minimale Energie in ihrer freien Homotopieklasse haben, endlich, so erfüllt $\pi_1(M)$ folgende Bedingung:

(3.15) *Es existiert eine endliche Menge* $E \subseteq \pi_1(M)$, *so daß jedes* $\alpha \in \pi_1(M)$ *zu einer Potenz eines* $\beta \in E$ *konjugiert ist.*

Es ist also interessant, möglichst große Klassen von endlich präsentierten Gruppen zu finden, für die (3.15) nicht gilt. Bisher weiß man noch nicht einmal, ob auf jeder kompakten Mannigfaltigkeit mit unendlicher Fundamentalgruppe mehr als eine geschlossene Geodätische existiert.

Mittels geometrischer Methoden kann man zeigen, daß (3.15) nicht gilt, falls M eine Metrik negativer Krümmung besitzt. In diesem Fall existiert in jeder freien Homotopieklasse genau eine geschlossene Geodätische, und es gilt:

(3.16) **Satz** *Auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit negativer Schnittkrümmung liegen die Tangentialvektoren an geschlossene Geodätische dicht im Einheitstangentialbündel.*

Das folgt leicht aus Poincarés Wiederkehrsatz (1.7) und einem elementaren Schließungssatz, der im Wesentlichen von Hadamard [1898] stammt. Inzwischen kennt man weitaus stärkere quantitative Aussagen, die von Sinai [1966], Margulis [1969] und Bowen [1972] stammen. Wesentlich ist dabei nur die Anosov-Eigenschaft des geodätischen Flusses. Wir zitieren ein relativ einfaches Resultat dieser Theorie:

(3.17) **Satz** *Sei* (M, g) *kompakte,* m-*dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung zwischen* $-K_2^2$ *und* $-K_1^2$ $(0 < K_1 \leqslant K_2)$. *Dann gilt*

$$(m-1)K_1 \leqslant \lim (\ln N_g(t)/t) = h_g \leqslant (m-1)K_2,$$

wobei h_g *die topologische Entropie von* Φ_g *bezeichnet.*

(3.17) impliziert offenbar, daß N(t) für jede Metrik auf M exponentiell wächst. Für diesen Fall enthält Katok [1982] sehr schöne explizite Abschätzungen für N(t). Der Fall nichtpositiver Krümmung wird in Knieper [1983] behandelt.

Falls nicht die Existenz einer Metrik negativer Krümmung auf M gefordert wird, ist nur wenig über die Verteilung der geschlossenen Geodätischen bekannt. Während im Fall negativer Krümmung jede nicht-triviale Komponente von ΛM homotopieäquivalent zu einem Kreis ist, so daß Variationsmethoden nur zur Existenz einer geschlossenen Geodätischen in jeder nicht-trivialen freien Homotopieklasse führen, bemüht man sich im allgemeinen Fall mit topologischen Methoden zu zeigen, daß unter geeigneten Voraussetzungen viele Komponenten von ΛM eine kompliziertere topologische Struktur besitzen; Variationsargumente liefern dann geschlossene Geodätische, die nicht minimale Energie in ihrer freien Homotopieklasse besitzen.
So wird in Bangert-Hingston [1984] bewiesen

(3.18) **Satz** *Sei* M *kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit unendlich zyklischer Fundamentalgruppe und* $M \neq S^1$. *Dann gilt*

$$\liminf\, (N(t) \cdot \ln t/t) > 0.$$

In Gromov [1975] und Ballmann [1983b] finden sich bessere Abschätzungen für N(t), falls M homöomorph zu einem Produkt von S^1 mit einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist:

$$\liminf\, (N(t) \cdot \ln t/t^2) > 0 \quad \text{und} \quad \limsup\, (N(t)/t^2) > 0.$$

Es ist ein offenes Problem, ob die Bedingung $b_1(M) = 1$ hinreichend für die Existenz von unendlich vielen geschlossenen Geodätischen ist. Für den Spezialfall, daß M zusätzlich homöomorph zu einem nichttrivialen Produkt ist, findet sich diese Aussage in Bangert-Klingenberg [1983]. In Gromov [1975] und darauf aufbauend in Ballmann [1983b] wird der Fall fast nilpotenter, aber nicht unendlich zyklischer Fundamentalgruppen behandelt. Verwandte Resultate erhielt Tanaka [1983].

Die bisher in diesem Paragraphen erwähnten Abschätzungen für N(t) sind sehr explizit; sie hängen nur von C^0-Bedingungen an die Metrik und der Topologie von M ab. Das ist nicht so für die Abschätzungen aus § 4, die die Alternative (3.11) verwenden. Ebenfalls mittels (3.11) wird in BTZ [1981] gezeigt, daß für generische Metriken $\liminf\, (N(t) \ln t/t) > 0$ gilt, falls in $\pi_1(M)$ gewisse Relationen bestehen.

Schließlich erwähnen wir eine Bemerkung aus Gromov [1975], die die Struktur von $\pi_1(M)$ in ganz anderer Weise benützt:

Ist M *kompakt und das Wortproblem von* $\pi_1(M)$ *nicht lösbar, so existieren für jede Riemannsche Metrik auf* M *unendlich viele zusammenziehbare geschlossene Geodätische.*

Die Idee dabei ist, daß es bezüglich jeder endlichen Präsentierung von $\pi_1(M)$ Worte W_n der Länge ℓ_n gibt, die auf das Neutralelement reduziert werden können, die aber bei jeder solchen Reduktion zunächst zu Worten der Länge $\geqslant n \cdot \ell_n$ führen. Mittels einer Triangulierung von M erhält man solchen Worten W_n entsprechende zusammenziehbare Kurven γ_n, so daß jede Nullhomotopie von γ_n Kurven der Länge $\geqslant$ const $\cdot\, n \cdot L(\gamma_n)$ enthält. Bei Anwendung eines Verkürzungsprozesses, vgl. § 1, führen die γ_n also zu zusammenziehbaren geschlossenen Geodätischen c_n und nicht etwa zu Punktkurven. Unendlich viele der c_n sind geometrisch verschieden, da Nullhomotopien der c_n über im Verhältnis zu $L(c_n)$ „immer höhere Pässe" führen. Es ist jedoch nicht klar, ob die c_n nicht Iterierte von (unendlich vielen) nicht-zusammenziebaren Kurven sein könnten.

4 Geodätische Linien auf vollständigen, nicht-kompakten Mannigfaltigkeiten

§ 1 Probleme

Im nicht-kompakten Fall können sich Geodätische durch ihr Verhalten gegenüber dem Unendlichen unterscheiden.

(4.1) **Definition** Eine Kurve $\gamma : [0, \infty) \to M$ auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit heißt

(i) *divergent*, falls γ eine eigentliche Abbildung ist, d. h. falls für jede kompakte Menge $K \subseteq M$ ein $t_0 > 0$ existiert mit $c(t) \notin K$ für $t > t_0$.
(ii) *beschränkt*, falls es eine kompakte Menge $K \subseteq M$ mit $\gamma([0, \infty)) \subseteq K$ gibt.
(iii) *oszillierend*, falls weder (i) noch (ii) gilt.

Zu $v \in TM$ bezeichne c_v die Geodätische mit $\dot{c}_v(0) = v$. Die *Exponentialabbildung* $\exp : TM \to M$ ist durch $\exp(v) := c_v(1)$ definiert, $\exp_p := \exp | TM_p$. Eine stärkere Eigenschaft als die, daß alle Geodätischen durch $p \in M$ divergieren, ist

(iv) $\exp_p : TM_p \to M$ ist eigentlich.

Zu (i)–(iii) führen wir die Mengen

$D^+ = \{v \in UM \mid c_v: [0, \infty) \to M \text{ ist divergent}\}$

$B^+ = \{v \in UM \mid c_v: [0, \infty) \to M \text{ ist beschränkt}\}$

$OS^+ = \{v \in UM \mid c_v: [0, \infty) \to M \text{ oszilliert}\}$

und $D := D^+ \cap (-D^+)$, $B := B^+ \cap (-B^+)$ ein. Eine geodätische Linie $c_v(\mathbf{R})$ (mit $v \in UM$) heißt *divergent*, falls $v \in D$, *beschränkt*, falls $v \in B$ und *oszillierend*, falls $v \in OS^+ \cup (-OS^+)$.

Die Fälle, daß sich $c_v | [0, \infty)$ und $c_{-v} | [0, \infty)$ bezüglich (i)–(iii) unterschiedlich verhalten, sind selten. Aus der Volumentreue von Φ folgt leicht, daß $D^+ \backslash D$, $B^+ \backslash B$ und $OS^+ \backslash (-OS^+)$ Mengen vom Maß 0 sind, vgl. Wojtkowski [1978].

Es stellen sich viele naheliegende Probleme: Außer nach geschlossenen Geodätischen kann man nach Existenz oder Nicht-Existenz von Geodätischen mit (i)–(iii) fragen und danach, wie groß die Mengen D, B und OS^+ sind. Zur Orientierung seien einige wohlbekannte Tatsachen zu diesen Fragen erwähnt: Zu jedem Punkt $p \in M$ und jedem Ende von M existiert eine (zwischen je zwei ihrer Punkte) kürzeste Geodätische $c : [0, \infty) \to M$ mit $c(0) = p$ in dieses Ende; speziell gilt $D^+ \cap TM_p \neq \emptyset$. Zwei verschiedene Enden von M können durch eine kürzeste Geodätische $c : \mathbf{R} \to M$ verbunden werden; speziell gilt $D \neq \emptyset$, falls M mindestens zwei Enden besitzt. Eigenschaft (iv) kann für ein $p \in M$ nur dann gelten, wenn M zusammenziehbar ist (Serre [1951]). Falls $\dim M = 2$ ist, ist M also diffeomorph zur Ebene $\mathbf{R}^2$. Falls dim M > 2 ist, folgt aus (iv), daß M im Unendlichen 1-zusammenhängend ist. Für dim M ≠ 3,4 gilt dann, daß M zu $\mathbf{R}^{\dim M}$ diffeomorph ist, vgl. dazu Gromoll-Meyer [1969a]. Hat M endliches Volumen, so folgt aus (1.7), daß D Maß 0 hat. In diesem Fall ist es sowohl möglich, daß B volles Maß hat (Rotationsflächen), als auch daß OS^+ volles Maß hat (vgl. (4.5)). D kann jedoch auch dann Maß 0 haben, wenn M unendliches Volumen besitzt: Ein Beispiel ist die Rotationsfläche von $1 + \sin x + e^{-x^2}$. Eine Untersuchung solcher Phänomene ist sicherlich von Interesse.

§ 2 Resultate in Dimensionen > 2

Nahezu alle tieferliegenden Ergebnisse benutzen hier Voraussetzungen an das Vorzeichen der Schnittkrümmung oder an das Wachstum von Jacobifeldern. Wir beginnen mit dem Fall nicht-positiver Krümmung. Ist M zusätzlich 1-zusammenhängend, d. h. eine Hadamard-Mannigfaltigkeit, so ist $\exp_p : TM_p \to M$ für alle $p \in M$ ein Diffeomorphismus. Speziell sind alle Geodätischen Kürzeste. Nach Eberlein-O'Neill [1973] kann M durch die Klassen asymptotischer Geodätischer kompaktifiziert werden. Dieser Konstruktion entspricht im Fall konstanter negativer Krümmung gerade der Übergang vom offenen Einheitsball (mit der Poincaré-Metrik) zum abgeschlossenen Einheitsball. Das ist ein wichtiges Hilfsmittel in Eberlein [1972], [1973b] und Ballmann [1982]. Ein Spezialfall ihrer Ergebnisse ist:

(4.2) **Satz** *Sei* M *vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung* $K \leqslant c < 0$. *Ist* $\pi_1(M)$ *weder trivial noch unendlich zyklisch, so existieren unendlich viele geschlossene Geodätische auf* M. *Gilt zusätzlich* vol (M) < ∞, *so ist* Φ *topologisch mischend, und die Tangentialvektoren an geschlossene Geodätische liegen dicht in* UM.

Viele Eigenschaften von Räumen nicht-positiver Krümmung folgen schon aus der Voraussetzung, daß keine konjugierten (oder keine Fokal-) Punkte existieren. Für solche Ergebnisse sei auf Morse-Hedlund [1942], Green [1954], für dim M = 2, und auf Eschenburg-O'Sullivan [1976] (und die dort zitierte Literatur) verwiesen. Resultate in diese Richtung sind für das in 2, § 3 erwähnte Problem der Tori ohne konjugierte Punkte von Interesse.

Ergodizität des geodätischen Flusses von Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit negativer Krümmung, endlichem Volumen und Dimension > 2 wurde meines Wissens nur unter zusätzlichen Symmetrieannahmen bewiesen, die die Möglichkeit geben, die Theorie der Lie-Gruppen anzuwenden, vgl. E. Hopf [1939] und Mautner [1957].

Die Arbeiten von Gromoll-Meyer [1969a] und Cheeger-Gromoll [1972] zur Struktur vollständiger Mannigfaltigkeiten nicht-negativer Krümmung klären das Verhalten der Geodätischen bezüglich der Eigenschaften (i)–(iv) nahezu vollständig. Sie verallgemeinern damit die Resultate von Cohn-Vossen [1935] auf Dimensionen > 2. Diese Ideen wurden in Greene-Wu [1974], § 5, weiter entwickelt.

(4.3) **Satz** *Ist die Schnittkrümmung* K *einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit* M *außerhalb einer kompakten Teilmenge von* M *nicht-negativ, so gilt*

$OS^+ = \emptyset$. *Gilt überall* $K \geqslant 0$, *so hat* B *Maß* 0. *Gilt überall* $K > 0$, *so ist* $\exp_p$ *für alle* $p \in M$ *eigentlich.*

Das wesentliche Hilfsmittel im Beweis ist der Vergleichssatz von Toponogov. Im ersten Fall wird die Existenz einer Ausschöpfungsfunktion $f : M \to \mathbf{R}$ (d. h. alle Subniveaus $f^{-1}((-\infty, a])$ sind kompakt) gezeigt, die außerhalb einer kompakten Menge C konvex ist (d. h. für jede Geodätische c in $M - C$ ist $f \circ c$ konvex). Ist $c : [0, \infty) \to M$ eine beliebige Geodätische, so kann $f \circ c$ in $M - C$ keine lokalen Maxima besitzen, also $OS^+ = \emptyset$. Im zweiten Fall ist f überall konvex und nirgends lokal konstant. Ist $v \in B$, so ist $f \circ \exp(tv)$ beschränkt, also konstant. Daraus folgt leicht, daß B Maß 0 hat. Im Fall $K > 0$ existiert sogar ein strikt konvexes solches f, woraus die dritte Behauptung folgt.

Existiert auf einer vollständigen Mannigfaltigkeit M nicht-negativer Riccikrümmung eine (zwischen je zwei ihrer Punkte) kürzeste geodätische Linie, so spaltet M isometrisch einen Faktor $\mathbf{R}$ ab, Cheeger-Gromoll [1971]. Das war in Toponogov [1964] für nicht-negative Schnittkrümmung bewiesen worden. Für Flächen gilt ein stärkeres Resultat von Cohn-Vossen [1936].

Variationsmethoden sind im nicht-kompakten Fall nur unter zusätzlichen Bedingungen nützlich. Zum Beispiel existiert auf einer Fläche von der Form eines Trompetenrohrs (Rotationsfläche von e^x) keine geschlossene Geodätische, obwohl die Fläche nicht 1-zusammenhängend ist. In vielen der im folgenden zitierten Arbeiten, hilft die Existenz konvexer Objekte auf M weiter. Eine Übersicht über Begriffe und Resultate zur Konvexität in Riemannschen Mannigfaltigkeiten gibt Walter [1981]. Ist $C \subseteq M$ kompakt und lokal konvex, so läßt sich auf dem Raum der in C enthaltenen geschlossenen Kurven wie in 3, § 1 Morse und Lusternik-Schnirelmann Theorie betreiben. So folgt etwa leicht aus den oben erwähnten Tatsachen

(4.4) **Satz** (Thorbergsson [1978]) *Ist die Schnittkrümmung von* M *außerhalb eines Kompaktums nicht-negativ und ist* M *nicht zusammenziehbar, so existiert eine geschlossene Geodätische auf* M.

Herbort [1983] untersucht die Eigenschaften der Geodätischen der Bergman-Metrik eines beschränkten, glatt berandeten pseudokonvexen Gebiets in $\mathbf{C}^n$.

Ein interessantes offenes Problem ist (vgl. jedoch (4.6) und (4.7)):

Existieren vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten endlichen Volumens ohne jede geschlossene Geodätische?

§ 3 Resultate für Flächen

Eine Fülle von Ergebnissen existiert für den Fall nicht-positiver Schnittkrümmung. Es wird auf den Übersichtsartikel von Hedlund [1939] und auf Eberlein [1978], [1979] verwiesen. Von besonderer Bedeutung ist:

(4.5) **Satz** (E. Hopf [1940]) *Der geodätische Fluß einer vollständigen Fläche endlicher Oberfläche ist ergodisch, falls die Gaußsche Krümmung* K *zwischen zwei negativen Konstanten variiert und* grad K *beschränkt ist.*

Für nicht-kompakte Flächen gibt es – im Gegensatz zum höherdimensionalen Fall – viele Resultate, die mit Variationsmethoden erzielt wurden. Das hat zwei Gründe: Die Topologie von Flächen ist sehr einfach und genau bekannt. Die Tatsache, daß Geodätische Flächen lokal zerlegen, hat starke Konsequenzen, die in höheren Dimensionen nicht gelten.

(4.6) **Satz** (Thorbergsson [1978]) *Sei* M *vollständige, nicht-kompakte Fläche, die nicht homöomorph zur Ebene, zum Zylinder oder zum Möbiusband ist. Dann existieren auf* M *unendlich viele geschlossene Geodätische.*

Die Idee ist hierbei, daß auf solchen Flächen viele freie Homotopieklassen α existieren, die die Eigenschaft haben, daß jede Schleife in α aus topologischen Gründen eine kompakte Menge trifft. Deshalb kann zu jeder Minimalfolge in α eine gegen eine geschlossene Geodätische minimaler Energie konvergente Teilfolge gefunden werden.

Offensichtlich existieren vollständige Flächen vom Typ der Ebene und des Zylinders ohne geschlossene Geodätische. Auf einem vollständigen Möbiusband existiert mindestens eine geschlossene Geodätische (Thorbergsson [1978]), und man kann leicht Beispiele mit nur einer einzigen finden. Es gilt jedoch

(4.7) **Satz** (Bangert [1980]) *Sei* M *vollständige Fläche vom Typ der Ebene, des Zylinders oder des Möbiusbands. Hat* M *endlichen Flächeninhalt, so existieren unendlich viele geschlossene Geodätische auf* M.

Auf Flächen kann die Totalkrümmung – das Integral der Gaußschen Krümmung über die Fläche – durch die Gauß-Bonnet-Formel für geodätische Polygone mit dem Verlauf der geodätischen Linien in Verbindung gebracht werden. Diese Technik wird in Cohn-Vossen [1936] erfolgreich verwendet; wir zitieren nur eines der vielen schönen Ergebnisse:

(4.8) **Satz** *Auf einer vollständigen Ebene überall positiver Gaußscher Krümmung schneiden sich je zwei geodätische Linien.*

In Bangert [1981a] wird die gleiche Methode in Verbindung mit einem Variationsargument benutzt, um zu beweisen:

(4.9) **Satz** *Sei* M *vollständige Ebene ohne doppelpunktfreie geschlossene Geodätische. Dann gilt* $B^+ = \emptyset$. *Existiert zusätzlich die Totalkrümmung von* M, *so ist* $\exp_p$ *für alle* $p \in M$ *eigentlich.*

Ob es auf vollständigen Ebenen ohne doppelpunktfreie geschlossene Geodätische oszillierende Geodätische geben kann, ist eine offene Frage.

Wojtkowski [1978] benutzt Variationsmethoden, um überabzählbar viele oszillierende Geodätische auf Flächen zu konstruieren, die nicht homöomorph zur Ebene, zum Zylinder oder zum Möbiusband sind und die ein „reguläres Horn" besitzen. Die Existenz eines solchen Horns bedeutet die Existenz eines Endes von M, das vom Typ eines halboffenen Zylinders $S^1 \times [0, \infty)$ ist und das nicht durch eine geschlossene Geodätische minimaler Länge abgeschnitten werden kann. Ein partielles Gegenstück zu diesem Ergebnis bildet

(4.10) **Satz** (Bangert [1981a]) *Sei* M *endlich zusammenhängende vollständige Fläche, und das Krümmungsdefizit jedes Endes von* M *sei positiv. Dann existiert eine kompakte Teilmenge* C *von* M, *so daß jede Geodätische* $c : [0, \infty) \to M$, *die* C *verläßt, divergiert.*

Die Bedingung an das „Krümmungsdefizit" bedeutet anschaulich, daß sich die Halbzylinder, die die Enden von M bilden, alle öffnen.

Die Frage nach der Existenz von divergenten geodätischen Linien ist in höheren Dimensionen in den meisten Fällen völlig offen. In Bangert [1981b] wird die Existenz einer doppelpunktfreien divergenten geodätischen Linie auf jeder vollständigen Ebene bewiesen. Das ist in Dimension 2 der einzige interessante Fall und beantwortet eine Frage, die schon in Cohn-Vossen [1936] erwähnt wird und die unabhängig davon in Wojtkowski [1979] auftritt. Ein weiteres offenes Problem ist, ob auf jeder vollständigen Ebene mindestens zwei solcher geodätischer Linien existieren.

Literatur

Abraham, R. [1970]: Bumpy metrics. In: Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. XIV. Providence R.I.: Amer. Math. Soc. 1970

Alber, S. I. [1957]: On periodicity problems in the calculus of variations in the large. Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **12** (1957) 57–124 (Russisch); Amer. Math. Soc. Transl. (2) **14** (1960) 107–172

– [1966]: Topology of function spaces. Dokl. Akad. Nauk SSSR **168** (1966) 727–730 (Russisch); Soviet Math. **7** (1966) 700–704

– [1970]: The topology of functional manifolds and the calculus of variations in the large. Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **25** (1970) 57–122 (Russisch); Russ. Math. Surveys **25** (1970) 51–117

Anosov, D. V. [1967]: Geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature. Trudy Mat. Inst. Steklov **90** (1967) (Russisch); Proc. Steklov Inst. Math. **90**. Providence R.I.: Amer. Math. Soc. 1967

– [1980]: Certain homotopies in the space of closed curves. Izv. Akad. Nauk SSSR **44** (1980) 1219–1254 (Russisch); Math. USSR Izv. **17** (1981) 423–453

– [1981]: Some homology in the space of closed curves in the n-dimensional sphere. Izv. Akad. Nauk SSSR **45** (1981) 467–490 (Russisch); Math. USSR Izv. **18** (1982) 403–422

– [1982]: On generic properties of closed geodesics. Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982) 675–709 (Russisch); Math. USSR Izv. **21** (1983) 1–29

Arnold, V. I. [1978] Mathematical Methods of Classical Mechanics. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1978. Graduate Texts in Math. 60

Asimov, D.; Gluck, H. [1980]: Morse-Smale fields of geodesics. In: Global Theory of Dynamical Systems (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanstown Ill. 1979), 1–17. Lect. Notes in Math. 819. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980

Avez, A. [1970]: Variétés riemanniennes sans points focaux. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B, **270** (1970) A188–A191

Ballmann, W. [1978a]: Der Satz von Lusternik und Schnirelmann. Bonner Math. Schriften **102** (1978) 1–25

– [1978b]: Doppelpunktfreie geschlossene Geodätische auf kompakten Flächen. Math. Z. **161** (1978) 41–46

– [1982]: Axial isometries on manifolds of non-positive curvature. Math. Ann. **259** (1982) 131–144

– [1983a]: On the lengths of closed geodesics on convex surfaces. Invent. math. **71** (1983) 593–597

– [1983b]: Geschlossene Geodätische auf Mannigfaltigkeiten mit unendlicher Fundamentalgruppe. Preprint, Bonn 1983

Ballmann, W.; Brin, M. [1982]: On the ergodicity of geodesic flows. Ergod. Th. Dynam. Syst. **2** (1982) 311–315
Ballmann, W.; Thorbergsson, G.; Ziller, W. = BTZ [1981]: Closed geodesics and the fundamental group. Duke Math. J. **48** (1981) 585–588
– [1982]: Closed geodesics on positively curved manifolds. Ann. of Math. **116** (1982) 213–247
– [1983a]: Existence of closed geodesics on positively curved manifolds. J. Diff. Geom. **18** (1983) 221–252
– [1983b]: Some existence theorems for closed geodesics. Comment. Math. Helv. **58** (1983) 416–432
Ballmann, W.; Ziller, W. [1982]: On the number of closed geodesics on a compact Riemannian manifold. Duke Math. J. **49** (1982) 629–632
Bangert, V. [1980]: Closed geodesics on complete surfaces. Math. Ann. **251** (1980) 83–96
– [1981a]: Geodesics and totally convex sets on surfaces. Invent. math. **63** (1981) 507–517
– [1981b]: On the existence of escaping geodesics. Comment. Math. Helv. **56** (1981) 59–65
– [1983a]: Manifolds with geodesic chords of constant length. Math. Ann. **265** (1983) 273–281
– [1983b]: On the lengths of closed geodesics on almost round spheres. Preprint 1983
Bangert, V.; Hingston, N. [1984]: Closed geodesics on manifolds with infinite abelian fundamental group. J. Diff. Geom. **19** (1984) 277–282
Bangert, V.; Klingenberg, W. [1983]: Homology generated by iterated closed geodesics. Topology **22** (1983) 379–388
Beem, J. K.; Ehrlich, P. E. [1981]: Global Lorentzian Geometry. New York – Basel: Marcel Dekker 1981
Berger, M. S.; Bombieri, E. [1981]: On Poincaré's isoperimetric problem for simple closed geodesics. J. Funct. Analysis **42** (1981) 274–298
Besse, A. L. [1978]: Manifolds all of whose Geodesics are Closed. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1978. = Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 93
Birkhoff, G. D. [1917]: Dynamical systems with two degrees of freedom. Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917) 199–300
– [1927]: Dynamical Systems. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. IX, Providence R.I.: Amer. Math. Soc. 1927
Bott, R. [1956]: On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory. Comm. Pure Appl. Math. **9** (1956) 171–206
– [1982]: Lectures on Morse theory, old and new. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982) 331–358
Bowen, R. [1972]: Periodic orbits for hyperbolic flows. Amer. J. Math. **94** (1972) 1–30
Burns, K. [1983]: Hyperbolic behaviour of geodesic flows on manifolds with no focal points. Ergod. Th. Dynam. Sys. **3** (1983) 1–12
Busemann, H. [1955]: The Geometry of Geodesics. New York: Academic Press 1955
Chazarain, J. [1974]: Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. Invent. math. **24** (1974) 65–82
Cheeger, J.; Ebin, D. [1975]: Comparison Theorems in Riemannian Geometry. Amsterdam – Oxford: North-Holland 1975
Cheeger, J.; Gromoll, D. [1971]: The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. J. Diff. Geom. **6** (1971) 119–128
– [1972]: On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. Ann. of Math. **96** (1972) 413–443
Colin de Verdière, Y. [1973]: Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I, II. Compositio Math. **27** (1973) 83–106 und 159–184
– [1977]: Quasi-modes sur les variétés Riemanniennes. Invent. math. **43** (1977) 15–52
Cohn-Vossen, St. [1935]: Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen. Compositio Math. **2** (1935) 69–133
– [1936]: Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfachzusammenhängenden offenen vollständigen Flächenstücken. Mat. Sbornik (Recueil Mathématique) **1** (1936) 139–163
Croke, C. B. [1982]: Poincaré's problem and the length of the shortest closed geodesic on a convex hypersurface. J. Diff. Geom. **17** (1982) 595–634
Duistermaat, J. J.; Guillemin, V. [1975]: The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. Invent. math. **29** (1975) 39–79
Eberlein, P. [1972]: Geodesic flows on negatively curved manifolds I. Ann. of Math. **95** (1972) 492–510

– [1973a]: When is a geodesic flow of Anosov type? I, II. J. Diff. Geom. **8** (1973) 437–463 und 565–577
– [1973b]: Geodesic flows on negatively curved manifolds II. Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973) 57–82
– [1978]: Geodesics and ends in certain surfaces without conjugate points. Memoirs Amer. Math. Soc. (13) **199** (1978)
– [1979]: Surfaces of nonpositive curvature. Memoirs Amer. Math. Soc. (20) **218** (1979)
Eberlein, P.; O'Neill, B. [1973]: Visibility manifolds. Pacific. J. Math. **46** (1973) 45–109
Eliasson, H. [1966]: Über die Anzahl geschlossener Geodätischer in gewissen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **166** (1966) 119–147
– [1972]: Morse theory for closed curves. In: Symp. Infinite Dim. Topology, Louisiana State Univ. Princeton N.J.: Princeton Univ. Press 1972. = Ann. of Math. Studies 69, 63–77
Elstrodt, J. [1981]: Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **83** (1981) 45–77
Eschenburg, J.-H.; O. Sullivan, J. J. [1976]: Growth of Jacobi fields and divergence of geodesics. Math. Z. **150** (1976) 221–237
– [1980]: Jacobi tensors and Ricci curvature. Math. Ann **252** (1980) 1–26
Fet, A. I. [1965]: A periodic problem in the calculus of variations. Dokl. Akad. Nauk SSSR **160** (1965) 287–289 (Russisch); Soviet Math. **6** (1965) 85–88
Flaschel, P.; Klingenberg, W. [1972]: Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeiten. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1972. = Lect. Notes in Math. 282
Freedman, M.; Hass, J.; Scott, P. [1982]: Closed geodesics on surfaces. Bull. London Math. Soc. **14** (1982) 385–391
Gluck, H. [1980]: Dynamical behaviour of geodesic fields. In: Global Theory of Dynamical Systems (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanstown Ill. 1979) Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980. = Lect. Notes in Math. 819, 190–215
Gluck, H.; Singer, D. [1978]: Scattering of geodesic fields I. Ann. of Math. **108** (1978) 347–372
– [1979]: Scattering of geodesic fields II. Ann. of Math. **110** (1979) 205–225
Gluck, H.; Ziller, W. [1983]: Existence of periodic motions of conservative systems. In: Seminar on Minimal Submanifolds. Princeton N.J.: Princeton Univ. Press 1983. = Ann. of Math. Studies 103
Green, L. [1954]: Surfaces without conjugate points. Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954) 529–546
– [1963]: Auf Wiedersehensflächen. Ann. of Math. **78** (1963) 289–299
Greene, R. E.; Wu, H. [1974]: Integrals of subharmonic functions on manifolds of nonnegative curvature. Invent. math. **27** (1974) 265–298
Grjuntal, A. I. [1979]: The existence of convex spherical metrics all closed non-selfintersecting geodesics of which are hyperbolic. Izv. Akad. Nauk SSSR **43** (1979) 3–18 (Russisch); Math. USSR Izv. **14** (1980), 3–18
Gromoll, D.; Klingenberg, W.; Meyer, W. [1968]: Riemannsche Geometrie im Großen. (2. Aufl. 1975). Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1968. = Lect. Notes in Math. 55
Gromoll, D.; Meyer, W. [1969a] On complete open manifolds of positive curvature. Ann. of Math. **90** (1969) 75–90
– [1969b]: Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds. J. Diff. Geom. **3** (1969) 493–510
Gromov, M. [1975]: Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group. Preprint 1975
– [1978]: Homotopical effects of dilatation. J. Diff. Geom. **13** (1978) 303–310
Grove, K. [1974]: Isometry-invariant geodesics. Topology **3** (1974) 281–292
Grove, K.; Halperin, S. [1982]: Contributions of rational homotopy theory to global problems in geometry. Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. **56** (1982) 171–178
Grove, K.; Halperin, S.; Vigué-Poirrier, M. [1978]: The rational homotopy theory of certain path spaces with applications to geodesics. Acta Math. **140** (1978) 277–303
Grove, K.; Tanaka, M. [1978]: On the number of invariant closed geodesics. Acta Math. **140** (1978) 33–48
Guillemin, V.; Weinstein, A. [1976]: Eigenvalues associated with a closed geodesic. Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976) 92–94

H a d a m a r d , J. [1897]: Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique. J. Math. Pures Appl. (5) **3** (1897) 331–387

– [1898]: Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. J. Math. Pures Appl. (5) **4** (1898) 27–73

H a s s , J.; R u b i n s t e i n , J. H. [1983]: One-sided closed geodesics on surfaces. Preprint 1983

H e d l u n d , G. [1932]: Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients. Ann. of Math. **33** (1932) 719–739

– [1939]: The dynamics of geodesic flows. Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939) 241–260

H e r b o r t , G. [1983]: On the geodesics of the Bergman metric. Math. Ann. **264** (1983) 39–51

H i n g s t o n , N. [1981]: Equivariant Morse Theory and Closed Geodesics. Thesis. Harvard 1981

– [1984]: Equivariant Morse theory and closed geodesics. J. Diff. Geom. **19** (1984) 85–116

H o p f , E. [1939]: Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **91** (1939) 261–304

– [1940]: Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus II. Math. Ann. **116** (1940) 590–608

– [1948]: Closed surfaces without conjugate points. Proc. Nat. Acad. Sci. **34** (1948) 47–51

J a c o b i , C. G. J. [1839]: Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution. J. reine angew. Math. (Crelles J.) **19** (1839) 309–313

K a t o k , A. [1973]: Ergodic properties of degenerate integrable Hamiltonian systems. Izv. Akad. Nauk SSSR **37** (1973) 539–576 (Russisch); Math. USSR Izv. **7** (1973) 535–571

– [1982]: Entropy and closed geodesics. Erg. Th. Dynam. Sys. **2** (1982) 339–367

K l i n g e n b e r g , W. [1965]: The theorem of the three closed geodesics. Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965) 601–605

– [1968]: Simple closed geodesics on pinched spheres. J. Diff. Geom. **2** (1968) 225–232

– [1971]: Geodätischer Fluß auf Mannigfaltigkeiten vom hyperbolischen Typ. Invent. math. **14** (1971) 63–82

– [1974]: Manifolds with geodesic flow of Anosov type. Ann. of Math. **99** (1974) 1–13

– [1978]: Lectures on Closed Geodesics. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1978. = Grundlehren Math. Wiss. 230

– [1981a]: On the existence of closed geodesics on spherical manifolds. Math. Z. **176** (1981) 319–325

– [1981b]: Über die Existenz unendlich vieler geschlossener Geodätischer. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. Math.-Nat. Kl. **1** (1981)

– [1982]: Riemannian Geometry. Berlin – New York: de Gruyter 1982. = Studies in Math. 1

K l i n g e n b e r g , W.; T a k e n s , F. [1972]: Generic properties of geodesic flows. Math. Ann. **197** (1972) 323–334

K n i e p e r , G. [1983]: Das Wachstum der Äquivalenzklassen geschlossener Geodätischer in kompakten Mannigfaltigkeiten. Arch. Math. **40** (1983) 559–568

L a n g e r , J.; S i n g e r , D. [1982]: Diffeomorphisms of the circle and geodesic fields on Riemann surfaces of genus one. Invent. math. **69** (1982) 229–242

L u s t e r n i k , L.; F e t , A, I. [1951]: Variational problems on closed manifolds. Dokl. Akad. Nauk SSSR **81** (1951) 17–18 (Russisch); MR **13** (1952) 474

L u s t e r n i k , L.; S c h n i r e l m a n n , L. [1929]: Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0. C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929) 269–271

L y u s t e r n i k , L. [1947]: The Topology of the Calculus of Variations in the Large. Trudy Mat. Inst. Steklov **19** (1947) (Russisch); Providence R.I.: Amer. Math. Soc. 1966. = Transl. of Math. Monographs 16

v. M a n g o l d t , H. [1881]: Über diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein. J. reine angew. Math. **91** (1881) 23–52

M a r g u l i s , G. A. [1969]: Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature. Funkcional. Anal. i Priložen **3** (1969) 89–90 (Russisch); Funct. analysis and its appl. **3** (1969) 335–336

M a u t n e r , F. [1957]: Geodesic flows on symmetric Riemannian spaces. Ann. of Math. **65** (1957) 416–431

Michel, R. [1981]: Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques. Invent. math. **65** (1981) 71–83
Morse, M. [1924]: A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. Trans. Amer. Math. Soc. **26** (1924) 25–60
– [1934]: The Calculus of Variations in the Large. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. 1934. = Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 18
Morse, M.; Hedlund, G. [1942]: Manifolds without conjugate points. Trans. Amer. Math. Soc. **51** (1942) 362–386
Moser, J. [1973]: Stable and random motions in dynamical systems. Princeton N.J.: Princeton Univ. Press 1973. = Ann. of Math. Studies 77
– [1978]: The Birkhoff-Lewis fixed point theorem Appendix (3.3) in Klingenberg [1978]
O. Sullivan, J. J. [1974]: Manifolds without conjugate points. Math. Ann. **210** (1974) 295–311
Pesin, J. B. [1977]: Geodesic flows on closed Riemannian manifolds without focal points. Izv. Akad. Nauk SSSR **41** (1977) 1252–1288 (Russisch); Math. USSR Izv. **11** (1977) 1195–1228
Poincaré, H. [1892]: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Vol. I. Paris: Gauthier-Villars 1892
– [1905]: Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905) 237–274
Rademacher, H.-B. [1983]: Geschlossene Geodätische auf Projektiven Räumen. Diplomarbeit. Bonn 1983
Ralston, J. V. [1976]: On the construction of quasimodes associated with stable periodic orbits. Comm. Math. Phys. **51** (1976) 219–242
Seifert, H. [1948]: Periodische Bewegungen mechanischer Systeme. Math. Z. **51** (1948) 197–216
Serre, J. P. [1951]: Homologie singulière des espaces fibrés. Ann. of Math. **54** (1951) 425–505
Sinai, J. G. [1966]: The asymptotic behaviour of the number of closed geodesics on a compact manifold of negative curvature. Izv. Akad. Nauk SSSR **30** (1966) 1275–1295 (Russisch); Amer. Math. Soc. Translations (2) **73** (1968) 229–250
Sullivan, D. [1978]: A foliation of geodesics is characterized by having no „tangent homologies". J. Pure Appl. Algebra **13** (1978) 101–104
Tanaka, M. [1982]: On the existence of infinitely many isometry-invariant geodesics. J. Diff. Geom. **17** (1982) 171–184
– [1983]: Closed geodesics on compact Riemannian manifolds with infinite fundamental group I. Preprint. Tokai Univ. 1983
Thorbergsson, G. [1978]: Closed geodesics on non-compact Riemannian manifolds. Math. Z. **159** (1978) 249–258
– [1979]: Non-hyperbolic closed geodesics. Math. Scand. **44** (1979) 135–148
Toponogov, V. A. [1964]: The metric structure of Riemannian spaces of non-negative curvature which contain straight lines. Sibirsk. Mat. Z. **5** (1964) 1358–1369 (Russisch); Amer. Math. Soc. Transl. (2) **70** (1968) 225–239
Vignéras, M. F. [1978]: Exemples de sous-groupes discrets non conjugués de PSL (2, $\mathbb{R}$) qui ont même fonction zêta de Selberg. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B, **287** (1978) A47–A49
Vigué-Poirrier, M.; Sullivan, D. [1976]: The homology theory of the closed geodesic problem. J. Diff. Geom. **11** (1976) 633–644
Walter, R. [1981]: Konvexität in riemannschen Mannigfaltigkeiten. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **83** (1981) 1–31
Weinstein, A. [1970]: Sur la non-densité des géodésiques fermées. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B **271** (1970) A504
– [1978]: Periodic orbits for convex hamiltonian systems. Ann. of Math. **108** (1978) 507–518
Wojtkowski, M. [1978]: Oscillating geodesics on two-dimensional manifolds. Astérisque **51** (1978) 443–456
– [1979]: Geodesics on open surfaces containing horns. Preprint. Uniwersytet Warszawski 1979
Wolpert, S. [1979]: The length spectrum as moduli for compact Riemann surfaces. Ann. of Math. **109** (1979) 323–351
Yau, S. T. [1982]: Problem Section. In: Seminar on Differential Geometry. Princeton N.J.: Princeton Univ. Press 1982. = Ann. of Math. Studies 102

Ziller, W. [1976a]: Geschlossene Geodätische auf global symmetrischen und homogenen Räumen. Bonner Math. Schriften **85** (1976)
– [1976b]: Glosed geodesics on homogeneous spaces. Math. Z. **152** (1976) 67–88
– [1977]: The free loop space of globally symmetric spaces. Invent. math. **41** (1977) 1–22
– [1983]: Geometry of the Katok examples. Ergod. Th. Dynam. Sys. **3** (1983) 135–157

Nachtrag bei der Korrektur

Weitere Literatur

zu 2, § 1

Ballmann, W.; Brin, M.; Eberlein, P.: Structure of manifolds of nonpositive curvature. I. University of Maryland. Technical Report 1984
Eberlein, P.: Geodesic rigidity in compact nonpositively curved manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. **268** (1981) 411–443

zu 3, §§ 1, 2 und 4

Klingenberg, W.: Closed Geodesics on Riemannian Manifolds. Providence R.I.: Amer. Math. Soc. 1983. = Regional conference series in mathematics 53

zu 3, § 5

Pansu, P.: Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés. Erg. Th. Dyn. Sys. **3** (1983) 415–445

zu 4, § 3

Maeda, M.: On the existence of rays. Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. **26** (1979) 1–4
Shiga, K.: On a relation between the total curvature and the measure of rays. Tsukuba J. Math. **6** (1982) 41–50

Dr. V. Bangert
Math. Institut
der Universität Bonn
Wegelerstr. 10
5300 Bonn 1

(*Eingegangen 28. 4. 1984*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 87 (1985) 67–89
AMS subject classification: 58 E 30, 81 G

Analytical Problems Arising in Geometry: Examples from Yang-Mills Theory

Jean-Pierre Bourguignon, Palaiseau

From its origin, differential geometry has involved analytical expressions containing partial derivations. Understanding geometric concepts has even been one of the main motivations for the calculus in many variables. As an illustration, the famous lecture notes by Darboux [D] contain discussions on geometry and on partial differential equations on an equal footing. Most considerations were then *local*.

When the theory of *linear elliptic partial differential equations* reached a sufficient level of development (in particular when the invariance under diffeomorphisms of singular integrals was recognized), it found numerous applications in *global* differential geometry. Perhaps the most striking one is the *Hodge-de Rham theory of harmonic forms.* On compact manifolds solutions of a certain linear elliptic system given by the Hodge-de Rham Laplacian provide us with smooth representatives of cohomology classes with real coefficients (a nice presentation of this tool can be found in [Wr]). This system of equations characterizes also the *critical points of a functional* defined on a space parametrized by exterior differential forms, hence is of Euler-Lagrange type.

Many other geometric quantities can be taken as competitors to extremize a functional of geometric origin. As examples, one can mention maps between given manifolds, submanifolds in a given homology class, or else Riemannian metrics on a given manifold. Possible variational problems attached to these objects are looking for maps of critical energy, the *harmonic maps* (for a survey, cf [Es-Le]), or submanifolds of critical area, the *minimal submanifolds*, or metrics of a fixed volume with critical total scalar curvature, the *Einstein metrics*, or even metrics in a fixed conformal class with critical total scalar curvature, *the* famous *Yamabe problem.* The main common feature of all these problems is that, unlike Hodge-de Rham theory, they involve solving *non-linear systems of partial differential equations* of a global nature. These systems can be made elliptic after performing some manipulations which are forced upon us by their geometric origins.

As is well known, non linear partial differential equations cannot be treated in the same systematic way as linear ones. Nevertheless, the basic techniques which revealed themselves efficient for dealing with linear equations provide tools to handle this more complicated class of equations. Very important progress have been made in the last ten years having a great impact in other areas of mathematics or even outside (see [Yu1], [Yu2] for systematic surveys of these topics or

[Mn]). This fact is certainly responsible for the recent blooming of differential geometry which in a sense has now become almost unseparable from global analysis.

These notes will be concerned with still another variational problem, *Yang-Mills theory*, which has recently attracted many physicists and even more recently some geometers. It shows in a nice way (at least the author feels so) how analytical problems arising from geometry are special. Many important results have been obtained in the last three years mainly by K. Uhlenbeck and C. Taubes among others giving a new trend to the whole theory. (For surveys, see [U3] and [U4]).

Yang-Mills theory was developed by physicists to give a classical model of strong interactions which due to their range are known to be quantum phenomena. It is quite remarkable that, while the theory was growing, many of the basic concepts of modern global differential geometry such as bundles, connections, curvature, Chern-Weil theory of characteristic classes were reinvented by physicists (see [W-Y] where a dictionary between these concepts and their counterparts of physical origin can be found).

Later in the development of the theory, at a time where non-abelian gauge theories were more widely accepted, Yang-Mills theory's relevance to give a renormalizable theory of the coupling between electromagnetic and weak interactions was recognized. (For more details on the physics involved, we refer to [Is].)

The emphasis was then put on getting a complete description of minimal solutions on special spaces such as S^4 or $\mathbf{R}^4$. (The physical motivation was to show that the vacuum had already an interesting structure which could explain the confinement of certain particles.) Another remarkable coincidence occurred. This description was made possible by very recent developments in algebraic geometry on stable vector bundles on complex projective 3-space thanks to an intriguing tool, the Penrose transform (cf. [A]). Solutions of the Yang-Mills equations on more general spaces seemed unobtainable until C. Taubes proved an important existence theorem, after some basic preliminary work by K. Uhlenbeck.

The final surprise came then when S. K. Donaldson (cf. [Dn]) turned the whole situation around, and made the space of minimal solutions of Yang-Mills equations into a mathematical object of intrinsic interest. After being mainly motivated by questions of physicists, mathematicians realized that Yang-Mills theory could be studied in its own right and revealed itself as a powerful tool to solve mathematical problems (cf. [Fd-Fn-U] for more details).

The aim in this survey talk on analytical problems arising in Yang-Mills theory is to illustrate the interaction between geometric and analytical phenomena. Some of the recent results of the subject have been organized in that perspective. Details are almost always omitted and can be found in the quoted articles. Comments on the underlying physics will be very scarce. For more on this story, possible references are [Gs], [Je], [Je-T].

The author would like to thank the organizers of the annual meeting of the Deutsche Mathematiker Vereinigung to have given him the opportunity to present some of these ideas in front of a very large audience.

Section I contains the basic framework of Yang-Mills theory, in particular includes a discussion of how primitive concepts of differential geometry such as bundles, connections, curvature, enter it.

In Section II, we present the global analysis tools necessary to solve the Yang-Mills equations by analytical methods. The section closes with the basic regularity theorem stating that a solution having minimal regularity is in fact analytic in suitable coordinates.

We gathered the most important results obtained so far by analytical means in Section III, in particular K. Uhlenbeck's basic estimates on the connection knowing its curvature. Important consequences are the removability of point singularities and a compactness theorem in dimension n = 3. The general existence theorems of minimal solutions due to C. Taubes are also presented.

Section IV is devoted to properties of critical levels. Among them, we discuss the gap phenomenon which ensures that absolute minima are indeed separated from other critical points, the non-existence of local nonglobal minima, and how Ljusternik-Schnirelman theory can be applied. We close with a summary of results on moduli spaces of selfdual connections, including S. Donaldson's remarkable achievements.

Some open problems are offered as a kind of conclusion in Section V.

Summary

I The geometric framework of the Yang-Mills functional

i) Bundles with Lie structure group

The framework in which the theory develops is that of *bundles over manifolds with structure group a compact Lie group* G. We briefly review what these objects are.

Manifolds (i.e., topological spaces with a prefered set of compatible charts with values in balls of $\mathbf{R}^n$) are always assumed to be C^∞. Two types of bundles can be considered. Either one deals with *principal* G-*bundles* such as $p : P \to M$. The base space M is then the orbit space of a free action of the Lie group G on the total space P. Locally, over some sufficiently small open set U of M, P looks like $U \times G$ with G acting on the second factor by right multiplication. The fibre at each point m of the base space identifies itself with G except that the neutral element has been lost.

Typical examples of principal bundles are given by the collection Gl M of all linear tangent frames on a manifold M, the projection telling where the frame is attached (G is then $\mathbf{R}\,Gl_n$), or further, if an inner product g_m has been given in a smooth way on each tangent space $T_m M$, the collection $O_g M$ of all g-orthonormal frames (G is then O_n, in that case a compact Lie group).

To a principal G-bundle $p : P \to M$, one can also attach *associated bundles.* Given a representation ρ of G on a space ξ, the bundle $\pi : E_\rho \to M$ is the set of equivalence classes of pairs (p, v) in $P \times \xi$ where one sets $(p, v) \sim (p', v')$ provided there exists γ in G such that $p' = p \cdot \gamma^{-1}$ and $v' = \rho(\gamma) \cdot v$. One also writes $E_\rho = P \times_\rho \xi$. Later we assume that the representation ρ is linear, hence that E_ρ is a vector bundle.

Typical examples are given by all tensor bundles over M, ξ being then the appropriate tensor representation of $\mathbf{R}\,Gl_n$ (respectively O_n) on a tensor space built on $\mathbf{R}^n$.

A hint coming from the physical interpretation of the objects may be useful at this point. The base space M represents space-time, the structure group G a symmetry group of the physical interaction under consideration, the (global structure of the) principal G-bundle conditions under which the experiment is performed (in particular boundary conditions at infinity), and the representation ρ the type of particles on which one focuses one's attention.

To a principal G-bundle $p : P \to M$, one can attach its G-*automorphism bundle* $\pi : GP \to M$ where $GP = P \times_{ad} G$ is the associated bundle for the adjoint action of G onto itself.

It is clear that GP admits G as fibre. Notice that, although GP looks locally like $U \times G$ over a trivializing open set U as P does, G does not act on GP. Moreover, if G is abelian, GP is a trivial bundle $GP = M \times G$.

For a linear representation ρ, GP admits an image bundle GE into the endomorphism bundle $E^* \otimes E$ of E. (One can write $GE = P \times_{\rho^* \otimes \rho} G$.) The Lie group bundle GE reflects the extra-structure that G defines on E, e.g., if ρ is an orthogonal representation, a fibre inner product is well defined on E.

In a similar way, one defines the infinitesimal automorphism bundles $\mathfrak{G}P = P \times_{Ad} \mathfrak{G}$ and $\mathfrak{G}E = E \times_{\rho^* \otimes \rho} \mathfrak{G}$. (Here, $\mathfrak{G}$ stands for the Lie algebra of G.)

ii) Connections

The variational problem that we want to consider is defined on the set $\mathcal{C}E$ of G-connections on the bundle $\pi : E \to M$. We recall that ∇ is said to be a *G-connection* (or a *G-covariant derivative*) if ∇ is a first order linear differential operator mapping the space $\Omega^0(M, E)$ of sections of E into the space $\Omega^1(M, E)$ of differential 1-forms with values in E such that, for any C^∞ function f on M and any smooth section s of E,

$$(*) \qquad \nabla(fs) = f(\nabla s) + df \otimes s.$$

(In other words, the principal symbol $\sigma(\nabla)$ of ∇ mapping $T^*M \otimes E$ to $T^*M \otimes E$ is the identity.) Moreover, ∇ is assumed to preserve any further structure defined on E by G, e.g., a fibre metric if the representation ρ is orthogonal or a complex structure if ρ is complex. It easily follows from $(*)$ that the difference between two G-connections ∇ and ∇' is a zeroth order operator between sections of E and sections of $T^*M \otimes E$, hence a differential 1-form on M a priori with values in $E^* \otimes E$, in fact with values in $\mathfrak{G}E$. The space $\mathcal{C}E$ is an affine space modelled after $\Omega^1(M, \mathfrak{G}E)$.

Connections are adequate tools to differentiate sections of the bundle E as we will see below. In physics, connections are called *gauge potentials.*

A trivialized bundle $pr_1 : M \times \xi \to M$ has a privileged connection, the *product connection*, its sections being identified with functions on M with values in the fixed space ξ.

Since the local structure of a G-bundle $\pi : E \to M$ is equivalent to that of a product structure, for any trivialization $\pi \restriction U: U \times \xi \to \pi^{-1}(U)$ over an open set U of M (physicists would say for any choice of a *local gauge*), one gets a local expression of any connection ∇ as

$$\nabla = \nabla^U + A^U$$

where ∇^U denotes the image under ϕ of the product connection on the bundle $pr_1 : U \times \xi \to U$.

In local bundle coordinates (x^i, s^α), in a neighbourhood of a point m in M, and for a local section $s = s^\alpha \epsilon_\alpha$, one can write

$$\nabla s(m) = \sum_{\substack{i=1\\ \alpha=1}}^{n,k} \left(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} + \sum_{\beta=1}^{k} A_i{}^\alpha{}_\beta s^\beta \right) dx^i \otimes \epsilon_\alpha$$

where $(A_i{}^\alpha{}_\beta)$ are the coordinate expressions of the local differential l-form A.

A connection ∇ on a bundle E being given, one can define an *exterior differential* d^∇ acting on E-valued exterior differential forms by setting for a decomposed differential k-form $\omega = \alpha \otimes s$ (with $\alpha \in \Omega^k M$ and $s \in \Omega^0(M, E)$)

$$d^\nabla(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^k \alpha \wedge \nabla s.$$

If E is a trivialized bundle, we omit the reference to its privileged connection and write merely d as one does for ordinary exterior differential forms.

iii) Curvature

The main object to consider is the *curvature* $R^\nabla = d^\nabla \circ d^\nabla$ of the connection ∇. (Physicists call R^∇ the *field*.) It easily follows from the well known relation $d \circ d = 0$ for ordinary exterior differential forms that R^∇ is a zeroth order operator on sections of E. In fact $R^\nabla \in \Omega^2(M, \mathfrak{G}E)$.

The dependence of R^∇ on ∇ is given by the following basic formula

$$(**) \qquad R^{\nabla + A} - R^\nabla = d^\nabla A + [A \wedge A]$$

where $[A \wedge A]$ is the image under the $\mathfrak{G}$-bracket map of $A \wedge A$ considered as a 2-form with values in $\mathfrak{G}E \otimes \mathfrak{G}E$.

For the first time, we see how the non-Abelian character of the group G enters into the theory. If G is Abelian, formula (**) says that R^∇ depends linearly on ∇. If not, the local expression of R^∇ involves the local expression of ∇ non linearly. This fact has analytical consequences as we shall see later.

In local bundle coordinates (x^i, s^α) in which $R^\nabla = (R^\nabla)_{ij}{}^\alpha{}_\beta dx^i \wedge dx^j \otimes \epsilon_\alpha \otimes \epsilon^{*\beta}$ the formula reads

$$(R^\nabla)_{ij}{}^\alpha{}_\beta = \frac{\partial A_j{}^\alpha{}_\beta}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i{}^\alpha{}_\beta}{\partial x^j} + [A_i, A_j]^\alpha_\beta.$$

iv) The Yang-Mills functional

Let us now *fix* a Riemannian metric g (hence a volume element v_g) on M. The *Yang-Mills functional* $\mathcal{YM}$ on $\mathcal{C}$E is defined as

$$\mathcal{YM}(\nabla) = \frac{1}{2} \int_M \|R^\nabla\|^2 v_g$$

where $\| \ \|$ stands for a metric norm on $\Lambda^2 TM \otimes \mathfrak{G}E$. We take it to be $g \otimes k$ where k is an adG-invariant metric on $\mathfrak{G}$ (the opposite of the Killing form for example if G is semi-simple).

It is sometimes called the *Euclidean* Yang-Mills functional to emphasize that one works with a metric of elliptic signature. A priori to be physically relevant, the functional should involve a Lorentzian metric, but it is supposed to be a classical model for a theory which exists only at the quantum level, hence the change of signature according to quantification methods currently in use.

v) The Yang-Mills equations

It easily follows from (**) that

$$\frac{d}{dt} R^{\nabla + tA} |_{t=0} = d^\nabla A.$$

Hence, by differentiating the functional $\mathcal{YM}$ at a connection A, the equation of critical points of $\mathcal{YM}$, *the system of Yang-Mills equations*, reads

$$d^{\nabla *} R^\nabla = 0$$

where $d^{\nabla *}$ denotes the adjoint of the exterior differential for vector valued 2-forms attached to the connection ∇.

Remarks. i) The Yang-Mills equations, the field's equations for a Yang-Mills particle, show the distinctive feature of involving the potential also in the operator which is applied to the field. This fact adds to the non linearity of the equations which is already forced upon by the field expression (**) when the structure group is non Abelian.

ii) When G is Abelian, $\mathfrak{G}E$ is a trivial bundle, and for any G-connection ∇ on E the connection naturally induced on $\mathfrak{G}E$ by ∇ is indeed the trivial connection. In that case, the Yang-Mills equations involve only the field $d^*R^\nabla = 0$. This is precisely what happens for Maxwell's equations since electromagnetism is modelled by such constructions with $G = U_1$, the group of unit complex numbers which can then be associated with the polarization of photons.

iii) The metric enters the Yang-Mills system via the adjoint operation on d^∇.

iv) The left hand side of the Yang-Mills equations appears in fact as the L_2-gradient of the functional. It is the Yang-Mills current when one considers the case of a non empty space.

In local coordinates (or more generally if one chooses a reference connection ∇_0), the Yang-Mills equations are written as follows

$$-g^{ij}\left\{\frac{\partial^2 A^U{}_k{}^\alpha{}_\beta}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 A^U{}_i{}^\alpha{}_\beta}{\partial x^j \partial x^k}\right\} - 2g^{ij}\left[A^U{}_i, \frac{\partial A^U{}_k}{\partial x^j}\right]^\alpha_\beta + g^{ij}\left[A^U{}_i, \frac{\partial A^U{}_j}{\partial x^k}\right]^\alpha_\beta -$$

$$-g^{ij}\left[\frac{\partial A^U{}_j}{\partial x^i}, A^U{}_k\right]^\alpha_\beta - g^{ij}[A^U{}_i, [A^U{}_j, A^U{}_k]]^\alpha_\beta = 0.$$

They appear as a second order system of partial differential equations in the local expression A^U of the connection (or in the difference of connections). The second order terms are linear, but the first order terms are linear in A^U and $\left(\frac{\partial A^U}{\partial x^i}\right)$, the zeroth terms being cubic in A^U.

We call a critical point of $\mathcal{YM}$ a *Yang-Mills connection.* On a given G-bundle, *the main question is to describe all Yang-Mills connections.*

Since $\mathcal{C}E$ is an affine space, it is contractible. Therefore, there is a priori no reason for a non-negative functional defined on $\mathcal{C}E$ such as $\mathcal{YM}$ to have other critical points than absolute minima (if it achieves its lower bound). Later, we shall see that *the gauge invariance* of $\mathcal{YM}$ permits to introduce some topology into the problem, giving some hope for other critical points.

Before discussing this, let us return for a final comment to the Yang-Mills system. Recall that, for any connection ∇ on any bundle, *the differential Bianchi identity* holds

$$d^\nabla R^\nabla = 0.$$

(In fact, this identity directly follows from the definition of R^∇ that we gave, $R^\nabla = d^\nabla \circ d^\nabla$.) Since the curvature field of a Yang-Mills connection is both closed and coclosed, Yang-Mills theory is often called a *non-linear Hodge theory.* The system of equations are indeed elliptic in the curvature. This is not so for the Yang-Mills equations as a system in the connection because of the presence of an infinite dimensional invariance group, the gauge group, which we now introduce.

vi) The gauge group

The *gauge group* $\mathcal{G}E$ is the group of sections of the automorphism bundle GE. It acts naturally on $\mathcal{C}E$ in the following way. For a section s of E and an element ∇ of $\mathcal{C}E$, one sets

$$\nabla^\gamma s = \gamma^{-1} \circ (\gamma(s)).$$

Then, one easily sees that $R^{\nabla^\gamma} = \gamma^{-1} \circ R^\nabla \circ \gamma$. Therefore, the action of G on E being assumed orthogonal,

$$\mathcal{YM}(\nabla^\gamma) = \mathcal{YM}(\nabla),$$

the Yang-Mills functional is invariant under the gauge group. In other words, one can consider $\mathcal{YM}$ as a function on the quotient $\mathcal{C}E/\mathcal{G}E$, a space which has a richer topology that $\mathcal{C}E$. Moreover, if ∇ is a Yang-Mills connection, so are the ∇^γ's for all elements γ of $\mathcal{G}E$. As a consequence, all tangent vectors to $\mathcal{C}E$ at a Yang-Mills connection ∇ obtained as $\frac{d}{dt}\nabla^{\gamma_t}|_{t=0}$ for paths $t \mapsto \gamma_t$ in $\mathcal{G}E$ issued from the identity form the infinite dimensional space $d^\nabla\Omega^0(M, \mathfrak{G}E)$. They lie in the kernel of the linearized Yang-Mills equations. Hence, these equations cannot be elliptic. In fact, these directions are the only characteristic directions of the principal symbol. One can say that on the quotient space $\mathcal{C}E/\mathcal{G}E$, the Yang-Mills equations are elliptic.

vii) Special properties of dimension 4

When the dimension of the base space M is 4, special features appear. Since M is to be considered as space-time, this is precisely the case of interest to physicists.

The functional $\mathcal{YM}$ was defined thanks to a Riemannian metric g on M. For example, on the local expression of the integrand of $\mathcal{YM}$,

$$-g^{ik}g^{j\ell}R_{ij}{}^\alpha{}_\beta R_{k\ell}{}^\beta{}_\alpha\sqrt{\det(g_{mn})}\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

(where (g^{ij}) denotes the inverse matrix of the local expression (g_{ij}) of the metric g), it is clear that replacing the metric g by a pointwise conformal metric $\lambda^2 g$ modifies it by a factor λ^{n-4}. Therefore, in dimension 4, the integrand stays the same in the *conformal class* [g] of g. This can be translated into a scaling invariance if one uses transformations on M preserving the conformal class, e.g., dilations in $\mathbf{R}^4$ with the Euclidean metric or any spherically symmetric metric, or else, flows of the gradient of first spherical harmonics on the standard sphere S^4. This property is crucial for many of the analytical arguments that we shall encounter. This fact is also reflected in the Yang-Mills equations. To see it, we need the following.

On an oriented n-dimensional Riemannian manifold, the *Hodge map* $*$ attaches to a k-form α an $(n-k)$-form $*\alpha$ in the following way. For any k-form β, one sets

$$*\alpha \wedge \beta = (\alpha, \beta)v_g .$$

In other words, for a positive orthonormal basis (e_i), $*e_I = e_J$ where the multi-indices I and J are such that $\{I, J\}$ is an even permutation of $\{1, \ldots, n\}$. Hence it is clear that $* \circ * = (-1)^{k(n-k)}$ and that $*$ depends only on the conformal class of the metric for k-forms on a 2k-manifold. (Indeed, for the metric $\lambda^2 g$, the basis $(\lambda^{-1}e_i)$ is orthonormal, hence $*_\lambda(\lambda^{-k}e_I) = \lambda^{-k}e_J$.)

When $n = 4$, $*$ is an involution of the 6-dimensional space $\Lambda^2 T^*_m M$ at any point m of M. We decompose $\Lambda^2 T^*_m M$ into the $+1$-eigenspace $\Lambda^+ T^*_m M$ and the (-1)-eigenspace $\Lambda^- T^*_m M$ of $*$. Elements of $\Lambda^+ T^*_m M$ and $\Lambda^- T^*_m M$ are respectively called *self-dual* and *antiself-dual* 2-forms at m. For the curvature for example, we shall write

$$R^\nabla = R^\nabla_+ + R^\nabla_-.$$

These forms play a very important role in 4-dimensional Yang-Mills theory, as we shall see. Recall first that the codifferential d^* on 2-forms has the following expression

$$d^* = - * \circ d \circ *.$$

The system of Yang-Mills equations can therefore be rewritten

$$d^\nabla * R^\nabla = 0.$$

In dimension 4, this exhibits its dependence on the conformal class [g] only via the map $*$ on 2-forms.

Together with the differential Bianchi identity, this says that a self-dual or antiself-dual curvature is automatically a Yang-Mills field. In fact, on a compact manifold M, an even more interesting phenomenon takes place. In the same way as the differential Bianchi identity holds on any bundle for any connection, the expression

$$\int_M |R^\nabla \wedge R^\nabla| = \int_M \{\|R^\nabla_+\|^2 - \|R^\nabla_-\|^2\}\, v_g$$

does not depend on the connection ∇ chosen on a bundle over a compact manifold. It is indeed a topological invariant of the bundle. Moreover, it is quantized, i.e., equal to $4\pi^2 k$ where the relative integer k is the so-called *instanton number* (as physicists say), the Pontrjagin index of the bundle. Over spheres and for G simple, k classifies the bundle as we explain in the next paragraph.

By splitting the Yang-Mills integrand in the obvious way, $\|R^\nabla\|^2 = \|R^\nabla_+\|^2 + \|R^\nabla_-\|^2$, one obtains the important topological lower bound for the functional over an oriented 4-manifold M,

$$2\pi^2 |k(E)| \leqslant \mathcal{YM}(\nabla).$$

Moreover, equality can occur only if the connection is self-dual or antiself-dual as one easily sees. Notice that the self-duality equations are first order, i.e., that the candidate absolute minima satisfy a stronger equation that other critical points.

viii) Some special solutions

There is one manifold where many of the notions that we introduced take a particular interest, namely the sphere S^4.

Let us recall that the sphere S^n is topologically the simplest compact manifold because it is possible to describe it with two charts defined over contractible open sets, an expanded northern hemisphere and an expanded southern hemisphere. Since any bundle over a contractible space (like $\mathbf{R}^n$) is trivial, a bundle over a sphere is characterized by the gluing map of two trivializations over the hemispheres along the thickened equator. Up to equivalence, this map defines a homotopy class of maps from S^{n-1} (the equator) into the structure group G of the bundle, i.e., an element in $\pi_{n-1}(G)$. For S^4, one must consider $\pi_3(G)$ which, for a simply connected group, is $\mathbf{Z}^\ell$ where ℓ denotes the *rank* of the group G. For the simplest non Abelian Lie group SU_2, bundles over S^4 are then classified by an integer which can be interpreted as the degree of the map from the equator S^3 to the structure group $SU_2 \simeq S^3$ (since this group can also be thought of as the group of unit quaternions).

(For more details on the classification of bundles, one can consult [Sd].)

Moreover, another interesting point is to notice. Two geometrically natural bundles, the half-spin bundles, correspond to the two generators. Concerning them, let us recall that the group $Spin_n$ is the non-trivial 2-fold (hence universal) cover of SO_n. The case n = 4 is special in that the group $Spin_4$ is isomorphic to the product group $SU_2 \times SU_2$. At the Lie algebra level, this splitting is noting but the splitting of 2-forms into their self-dual and antiself-dual parts. When n is even (n = 2k), the fundamental complex representation of $Spin_{2k}$ is 2^k-dimensional. One can then decompose this representation into the two half-spin representations of complex dimension 2^{k-1}. When n = 4, these representations can be identified with the fundamental representations of the two factors SU_2 on $\mathbf{C}^2$.

The Levi-Civita connection of the standard metric on S^4 when induced on these bundles is respectively self-dual and antiself-dual. In this way, on gets interesting critical points of the functional $\mathcal{YM}$ on the simplest SU_2-bundles over S^4. Moreover, if, keeping the metric on the sphere fixed, one endows these bundles with the Levi-Civita connections of images of the standard metric on S^4 under conformal transformations, one obtains a five dimensional moduli space of self-dual (or antiself-dual) connections. (Recall that the identity component of the group of conformal transformations of the standard sphere S^n is $SO_{n+1,1}$ so that its quotient by the group of isometries can be identified with the ball B^{n+1}. To all these connections (except one), one can attach a *center* and a *scale* which can be described as follows. The volume element of any metric with constant curvature on S^n has a center of gravity in $\mathbf{R}^{n+1}$ which is a point of the ball B^{n+1}. The center x and the scale λ of the associated connection are just the polar coordinates (x, λ) of the center of gravity. If one applies the family of conformal transformations of S^n pushing towards x from its antipodal image x^*, the curvature of the image connection concentrates near x.

An analytical description of these deformed self-dual connections can be obtained by solving the non-linear partial differential equation

$$\Delta u = \frac{1}{6} k u^3.$$

on $\mathbf{R}^4$. The clue between these two constructions is given as follows. By stereographic projection, S^4 minus a point is mapped to $\mathbf{R}^4$. The function u is then the conformal weight of the change of metric ($\tilde{g} = u^2 g$). The equation expresses that the scalar curvature of the new metric has constant scalar curvature, a condition which is known to ensure that it has indeed constant sectional curvature. (This result is due to M. Obata.) This construction is usually refered to in the physics literature as t'Hooft's Ansatz.

For each class of G-bundles over the standard 4-sphere, M. Atiyah, V. G. Drinfeld, N. Hitchin, and Y. I. Manin have given an algebraic description of one connected component of self-dual connections (in fact of all of them since, today, one knows that they form a connected set). This involves solving some quaternionic equations and relies on recent results in algebraic geometry concerning stable rank 2 vector bundles over $\mathbf{CP}^3$. Some of these connections can be obtained by t'Hooft's Ansatz with many centers. (See [A] for more details.)

II The basic analytical framework

i) A weak formulation of the Yang-Mills equations

As it is by now classical, to solve the Euler-Lagrange equation of a variational problem, one first looks for weak solutions in the largest possible functional space on which the functional is defined. The next step is then to prove that these extended solutions are indeed classical, the regularity step.

In our situation, one completes the space $\mathcal{C}E$ of connections in the Sobolev L^p_k topology in the following way. (For an introduction to Sobolev spaces, one can consult [Ps2] or [Gg-Tr].) If one chooses a smooth reference connection ∇_0, the affine space $\mathcal{C}E$ can be identified with the space $\Omega^1(M, \mathfrak{G}E) = C^\infty(T^*M \otimes \mathfrak{G}E)$. We then consider sections of the bundle $T^*M \otimes \mathfrak{G}E$ whose k first ∇_0-covariant derivatives are L^p-integrable. The space $\mathcal{C}^p_kE$ defined in this way does not depend on the choice of ∇_0.

In the same way, one defines the spaces $L^p_k(\Lambda^2T^*M \otimes \mathfrak{G}E)$. The curvature map extends to a continuous map between $\mathcal{C}^p_1E$ and $L^p_0(\Lambda^2T^*M \otimes \mathfrak{G}E)$ provided $\dim M = n \leqslant 2p$. (Indeed, for a connection $\nabla = \nabla_0 + A$, we saw that $R^\nabla = R^{\nabla_0} + d^{\nabla_0}A + [A \wedge A]$. By the Sobolev embedding theorem, a function of Sobolev class L^p_1 is L^q-integrable when $-\frac{n}{q} \leqslant 1 - \frac{n}{p}$, so that $[A \wedge A]$ lies in L^p if $-\frac{n}{2p} \leqslant 1 - \frac{n}{p}$.) Therefore, if $4 \leqslant n$, the largest space on which the Yang-Mills functional, i.e., the L^2-norm of the curvature, is defined is $\mathcal{C}^{n/2}_1E$ whereas for $n \leqslant 4$ it is defined on the Hilbert space $\mathcal{C}^2_1E$. We shall see later that for convergence reasons (and also for invariance reasons) the right functional to consider in dimension n is the $L^{n/2}$-norm of the curvature which is well defined on $\mathcal{C}^{n/2}_1E$.

One has also to enlarge the gauge group. We first consider how a connection $\nabla = \nabla_0 + A$ is transformed under a gauge transformation γ. We get

$$\nabla^\gamma = \nabla_0 + A^\gamma = \nabla_0 + \gamma^{-1} \circ (\nabla_0\gamma) + \gamma^{-1} \circ A \circ \gamma.$$

To act on $\mathcal{C}^{n/2}_1E$, we take the gauge transformations to have one more derivative, hence the gauge group to be $\mathcal{C}^p_2E$ for a p that we now discuss. In order that $\mathcal{C}^p_2$ be a smooth manifold and a Lie group, we need to have $\mathcal{C}^p_2E \subset C^0(M, GE)$. This is so only if $n < 2p$. In that case, $\mathcal{C}^p_2E$ acts indeed smoothly on $\mathcal{C}^{n/2}_1E$. In fact, one even has a stronger regularity statement. If both ∇^γ and ∇ lie in $C_1^p E$, then γ lies in $G_2^p E$ provided $n < 2p$. (Indeed, write $\nabla_0 \gamma = \gamma \circ A - A^\gamma \circ \gamma$ and use the regularity theorem for linear systems of partial differential equations together with the multiplication theorems for functions of Sobolev class.)

It is crucial to notice that gauge transformations in $G_2^{n/2} E$ are L^p-integrable for all p, but not necessarily continuous or even bounded. Since the classification of bundles is up to continuous automorphisms, the action of a gauge transformation of Sobolev class $L_2^{n/2}$ may take a bundle into a non isomorphic one. Very often, weak limit arguments will be necessary to treat this borderline case. In some instances, they will fail to work, giving very interesting geometric situations where nevertheless the lack of convergence can be controlled. (See Section III.)

ii) Conformal invariance and critical Sobolev exponents

While presenting the basic framework in which we are going to work, we met the limiting case of Sobolev inequalities. Some further comments on it are probably in order.

Functions of Sobolev class L_{k+1}^p are in L_k^q for $k + 1 - \frac{n}{p} \leqslant k - \frac{n}{q}$. Equality is achieved for the critical Sobolev exponent q^* which is therefore $q^* = \frac{np}{n-p}$. The embedding of L_{k+1}^p into $L_k^{q^*}$ is not compact, a fact which has important consequences.

The numbers $k + 1 - \frac{n}{p}$ and $k - \frac{n}{q}$ are precisely the conformal weights of the corresponding Sobolev norms. The conformally invariant norms L^∞, L_1^n, $L_2^{n/2}$, etc. exhibit special phenomena. A conformal change of the underlying metric can be achieved by letting a dilation of $\mathbf{R}^n$ act or a conformal transformation of the standard sphere S^n. Both of these groups are non compact. (On the spheres S^n, the conformal transformations going off to infinity correspond to flows of the gradients of first spherical harmonics induced by linear functions on $\mathbf{R}^{n+1}$.) An orbit under this group which lies in a sphere of any of those functional spaces cannot stay within a compact region. This fact prevents for example the embedding $L_2^{n/2} \subset L_1^n$ from being compact.

In a geometric problem, the presence of a group of symmetries is always an important tool. Aside from groups of holomorphic transformations, these groups are most often compact when the space on which they act is compact. The sphere is the only compact conformal manifold with a non compact group of conformal transformations. In the preceding section, we saw how this group helped us in describing the moduli space of instanton solutions to the Yang-Mills equations on the half-spin bundles. (In the same way, the real projective space is the only compact projective manifold with a non compact group of projective transformations.)

iii) The failure of the Palais-Smale condition (C)

One of the standard tools of the calculus of variations on functional spaces is the so-called *condition (C) of Palais-Smale* (see [Ps-Se]). When dealing with problems in finitely many dimensions, the compactness of balls plays a very important role. Since it fails in infinite dimensions, it is replaced by a condition on the functional.

A functional F defined on a functional space H is said to satisfy condition (C) if, for any sequence (v_i) in H on which F is bounded and for which $dH(v_i)$ goes to 0, there exists a subsequence $(v_{i'})$ converging to a point v in H. The point v then is necessarily a critical point of F.

Conditions on the integrand of the variational problem have been given to ensure that condition (C) is satisfied. They are a strengthening of ellipticity of the Euler-Lagrange equation. The Yang-Mills functional is precisely falling on the boundary of this class. Again, by letting conformal transformations act on minimal solutions on the standard sphere we are sure that $\mathcal{YM}$ cannot satisfy condition (C) since the minimum level is non compact. To give a precise description of neighbourhoods of infinity on this space turns out to be a crucial step in S. Donaldson's result that we present later. (See Section IV.)

iv) How to make the system of Yang-Mills equations elliptic

In presenting the system of Yang-Mills equations, we saw that, because of the gauge group, the system

$$d^\nabla * R^\nabla = 0$$

could not be elliptic.

As a system in R^∇, it is elliptic because of the differential Bianchi identity $d^\nabla R^\nabla = 0$. To make it elliptic as a system with unknown the connection, one must break the gauge invariance. This can be done by choosing a reference connection ∇_0 and writing $\nabla = \nabla_0 + A$. The leading term of the system of Yang-Mills equations is $d^{\nabla_0} * d^{\nabla_0} A$. The system becomes elliptic if one imposes for example the vanishing of $d^{\nabla_0} * A$ up to zeroth order terms. Unfortunately, it is a priori difficult to solve globally this new system because of the presence of global obstructions since we want to change A merely by gauge transformations. Geometrically, this amounts to finding a global slice to the action of the gauge group $\mathcal{G}E$ on $\mathcal{C}E$, a problem which is known to be related to the topology of the fibration $\mathcal{C}E \to \mathcal{C}E/\mathcal{G}E$. In physics, this question is often refered to as the Gribov ambiguity. Locally, over an open subset U over which the bundle E is trivial, no such obstruction exists. Moreover, in that case, it is convenient to choose the connection giving the trivialization as background connection. A possible way of getting a gauge-equivalent connection satisfying the right condition is to consider the image connection under a gauge transformation critical for the functional

$$J(\gamma) = \int_U \|A^\gamma\|^2 v_g = \int_U \|\gamma^{-1} d\gamma + \gamma^{-1} \circ A \circ \gamma\|^2 v_g .$$

Such a gauge is called a Lorentz or a Coulomb gauge in the physics literature. K. Uhlenbeck prefers to call it a *Hodge gauge* (cf. [U1]). If one trivializes the bundle in such a gauge, the system of Yang-Mills equations becomes elliptic.

v) The basic regularity theorem

Critical gauge transformations of the auxiliary functional J can indeed be proved to exist. On a trivializing open set, they can be identified with maps to the structure group G which are in some sense harmonic. The functional J agrees with the Dirichlet integral in its top order tems. This ensures local existence of solutions to its Euler-Lagrange equation in the space of gauge transformations of Sobolev class L_2^2 with various natural boundary conditions. (For more on the regularity theory of harmonic maps, one can consult [Sn-U].)

This leads to the following basic regularity result.

Theorem (K. Uhlenbeck [U1]). *Any weak solution of the system of Yang-Mills equations of Sobolev class* L_1^p *for* $n \leqslant 2p$ *is smooth in some gauge, for example in any local Hodge gauge. It is even analytic if the base metric is.*

Thanks to this theorem, the weak formulation of Yang-Mills equations is justified. While proving the result, K. Uhlenbeck obtained very important estimates on the uniform norms of local expressions of the connection in terms of L^p-norms of the curvature provided this norm is small enough. This requires though $n < 2p$.

III Some important results

i) The removability of point singularities

By sophisticating the existence theorem for Hodge gauges, K. Uhlenbeck was able to prove the following very important result.

Theorem (K. Uhlenbeck, [U2]). *Any Yang-Mills connection on a bundle over the punctured ball* $B^4 - \{0\}$ *with finite Yang-Mills energy extends to a Yang-Mills connection on a bundle defined over the whole of* B^4.

A similar statement has been proved for $n \leqslant 7$ by L. Sibner under the assumption that the $L^{n/2}$-norm of the curvature is bounded (see [Sr] and [Sr-Sr]). Although open at the moment, the result should hold for general dimensions.

The proof relies on constructing appropriate Hodge gauges on annuli with exponentially decreasing radii. Using the fact that the norm of a Yang-Mills field satisfies a subharmonic estimate, its growth in shrinking annuli can be controled by its L^2-norm.

This result has a very important global consequence, namely

Theorem (K. Uhlenbeck [U2]). *Any Yang-Mills connection on a bundle over the euclidean space* $\mathbf{R}^4$ *with finite Yang-Mills action comes via stereographic projection from a Yang-Mills connection on a bundle over the standard sphere* S^4.

The proof relies on the conformal invariance of the Yang-Mills functional. Since the stereographic projection realizes a conformal equivalence between the euclidean metric on $\mathbf{R}^4$ and the standard metric on S^4, one can transfer the Yang-Mills connection on the sphere minus the south pole and apply the previous theorem.

Finiteness of the Yang-Mills action is crucial in dimension 4. By pulling back Yang-Mills connections on the sphere S^{n-1} on $\mathbf{R}^n - \{0\}$ via the projection $x \mapsto x/|x|$, one can indeed construct Yang-Mills connections on $\mathbf{R}^n - \{0\}$. The curvature grows like x^{-2}, so that its L^p-norm is finite for $p < \frac{n}{2}$, and infinite for $\frac{n}{2} \leqslant p$. This is in accordance with our previous discussion concerning conformal invariance and critical Sobolev exponents.

We refer to [Gs] for the construction of explicit solutions having higher dimensional singularities. Point singularities exist on the hyperbolic space H^4 with constant curvature -1. Non self-dual connections with plane singularities can also be constructed on H^4.

Monotonicity formulas for Yang-Mills fields can also be found in [Pe].

A great deal of efforts has been devoted to the study of positive solutions of the scalar equation $\Delta u = u^3 + \lambda u$. (See for example [Ls], and [Bs-Ng].)

ii) A compactness theorem

Another important consequence of the estimates K. Uhlenbeck obtained for Yang-Mills connections is the following weak compactness theorem

Theorem (K. Uhlenbeck [U1]). *For any sequence* (∇^i) *of connections in* $C_1^2 E$ *with bounded Yang-Mills action one can find a sequence of gauge transformations* (γ_i) *of Sobolev class* L_2^2 *such that the subsequence* $(\nabla^{i'\gamma_{i'}})$ *converges in* $C_1^2 E$ *provided* $n \leqslant 3$.

Notice that the assumption $n \leqslant 3$ brings us back to the safe Sobolev range. The most frequently considered 3-dimensional situation is the so-called Yang-Mills-Higgs theory. It comes from a 4-dimensional Yang-Mills set-up on $\mathbf{R}^4$ where the time axis has been split off. If one trivializes the bundle along this axis, the 4-dimensional connection breaks up into a connection over the 3-dimensional space $\mathbf{R}^3$ and a vector-valued 1-form, the Higgs field. (For extension of the preceding results to Yang-Mills-Higgs fields, see [Pr].) In this set-up, because of the triviality along the time axis, finite energy fields to not come up naturally.

In dimension 4, the situation is much more delicate as we suggested in Section II. The phenomenon occurs in other geometric situations (for harmonic maps, see [Ss-U] or [Le]). Using the direct method of the calculus of variations, S. Sedlacek (cf. [Sk]) proved that from a minimizing sequence one can extract after gauge transformations a weakly convergent subsequence whose limit is a Yang-Mills connection on a bundle which may be different from the original one, because of lack of C^1-convergence at a finite number of points at which the curvature of the sequence of connections concentrates (for a more precise statement, see [T6].)

Notice that this does not imply that the instanton number, which can be expressed as an integral in the curvature, is preserved when going to the limit. (For more on that, see [U5].)

Among invariants of the bundle which are preserved are 2-dimensional cohomology classes such as the first Chern class of a unitary bundle, or the class which obstructs extending the structure group of the bundle to its universal cover. For some structure groups and some bundles, this ensures at least that the limiting connection is not the trivial product connection on a trivial bundle.

iii) An existence theorem for self-dual connections

We now focus our attention on dimension 4. Of utmost importance has been the following result, an existence theorem for self-dual connections on bundles over general Riemannian manifolds satisfying only a topological condition.

Let us first recall that on a compact oriented 4-dimensional manifold M the 2-dimensional cohomology space $H^2(M, \mathbf{Z})$ comes equipped with an integral quadratic form $\langle , \rangle$. When viewed in homology, it is indeed the intersection form. To state the theorem, we need only to consider cohomology classes with real coefficients. Such a class α is represented by a closed exterior differential form a. The value of the intersection form is then $\langle \alpha, \alpha \rangle = \int_M a \wedge a$.

Theorem (C. Taubes [T3]). *Any* SU_2*-bundle with positive Pontryagin class on a compact oriented 4-dimensional with positive definite intersection form admits an irreducible self-dual connection.*

Typical manifolds for which the intersection form is positive definite are the sphere S^4 (together with all manifolds with vanishing 2-cohomology), the complex projective plane $\mathbf{CP}^2$ with the orientation induced by its complex structure and more generally connected sums of $\mathbf{CP}^2$.

The proof uses the implicit function theorem in an appropriate functional space after one has constructed an approximate solution by transplanting a minimal solution on the standard sphere on a ball enlarged thanks to the conformal invariance of the Yang-Mills functional. The topological assumption on the base manifold M ensures that there is no closed antiself-dual 2-form on M. Such a form is harmonic and the cohomology class it represents would have negative self-intersection.

Closed ordinary exterior differential forms can be interpreted as curvature forms of U_1-connections. To solve the self-duality equation $R_-^{\nabla_0 + A} = 0$, it is convenient to look for A as $d^{\nabla_0} {*S}$ for some anti-self dual 2-form S. This is suggested by the following sequence

$$0 \to \Omega^0(M, \mathfrak{G}E) \xrightarrow{d^\nabla} \Omega^1(M, \mathfrak{G}E) \xrightarrow{\pi^- \circ d^\nabla} \Omega^-(M, \mathfrak{G}E) \to 0$$

where π^- denotes the projection onto antiself-dual 2-forms. This sequence is a complex precisely when the connection ∇ is anti-self dual since by definition $R_-^\nabla = \pi_- \circ d^\nabla \circ d^\nabla$. This sequence will be basic in considerations developed in the next section.

If one develops the equation $R_-^{\nabla_0 + A}$ for $A = d^{\nabla_0} {*S}$, one gets $d^{\nabla_0} \circ d^{\nabla_0 *}$ as leading term. The topological condition contained in the theorem ensures that this operator has no kernel.

C. Taubes extended his existence theorem to general oriented 4-manifolds in [T6]. If the intersection form of such a manifold M has index ℓ, then one can prove existence of a self-dual connection on SU_2-bundles over M with large enough second Chern numbers $\left(\max\left(\frac{4}{3}\ell, 1\right) \leqslant c_2(E) \text{ is sufficient}\right)$. It is indeed known that on $\mathbf{CP}^2$ any SU_2-bundle E with $c_2(E) = -1$ does not admit an antiself-dual irreducible connection.

IV Properties of critical levels

i) Gap phenomena

In dimension 4, we saw that the Yang-Mills functional has a topological lower bound. Moreover, if this lower bound is achieved by a connection ∇, the connection satisfies the first order self-duality equations.

These absolute minima for bundles over the standard sphere can be shown to be separated from other critical points by a gap. This was first proved in [Bn-Ln1] with a sharp C^0-estimate for the gap on the Yang-Mills field or even its self-dual part. Analogous results were also given on spheres of general dimension with self-dual fields replaced by trivial fields. A crucial improvement was given by J. Dodziuk and Min'Oo in [Mo] and in [Dz-Mo] who showed that the gap can be expressed in terms of the L^2-norm of the field, i.e., the Yang-Mills functional itself. This leads us to C. Taubes' claim in [T6] that for a bundle over S^4 of instanton number k $\mathcal{YM}^{-1}([k, k+\epsilon])$ retracts by deformation onto the minimal set.

All these results are based on a study of the harmonic equation which is satisfied by a Yang-Mills field. The Hodge-de Rham Laplacian $d^\nabla d^{\nabla *} + d^{\nabla *} d^\nabla$ which annihilates such a field can be compared to the rough Laplacian $\nabla^*\nabla$. The formula relating the two operators, usually refered to a Weitzenböck formula, involves both the curvature of the base Riemannian metric and the curvature of the bundle. When integrated over the manifold against the Yang-Mills field itself the formula relates the H^1-norm of the field with a cubic expression in the field, a typical feature of the non-linearity of the system of equations. When the field is small in an appropriate sense, one gets a vanishing theorem. The C^0-result follows from a direct estimate, the result involving the Yang-Mills functional requires the use of Sobolev inequalities with their best constants.

If one looks more carefully at the proof, one sees that to work on the standard sphere is not really needed, but the Riemannian metric on the base space should be positive in a strong sense. (For more details, see [Bn-Ln1] page 211).

Notice that in all these results, the nature of the compact group G does not enter.

ii) Local and global minima

In the calculus of variations it is standard to pay attention to the second variation of the functional at a critical point. For the Yang-Mills functional, whose origin is physical, special interest is devoted to stable critical points. At such a point, the second variation is non negative and the critical value is a local minimum. When the base space is sufficiently symmetric, local minima must be global minima as shown by the following theorem.

Theorem (J. P. Bourguignon, H. B. Lawson [Bn-Ln1]). *Any local minimum of the Yang-Mills functional on a* SU_2*-bundle over a compact orientable homogeneous Riemannian 4-manifold is an absolute minimum, i.e., its fields is self-dual or antiself-dual.*

The theorem holds also for the groups U_2, SU_3 (cf. [Bn-Ln2]) and SO_4 (cf. [Bn-Ln1]). For the groups U_2, SO_4, the second part of the statement must be modified. For U_2, one must allow twisting by a line bundle, and for SO_4 there is a twofold self-duality because its Lie algebra is not simple.

The method of proof is to average the second variation of $\mathcal{YM}$ on a family of special deformations of the stable connection constructed with Killing fields. Thanks to the non-negativity of the second variation, one gets in this way a nullity space of positive dimension. Earlier, the same method has been applied to many geometric variational problems such as minimal submanifolds, or harmonic maps. In those cases the special deformations involve conformal vector fields as do the analogous theorem on n-dimensional spheres for $5 \leqslant n$ due to J. Simons.

iii) Other critical points

The preceding result has been extended by C. Taubes who proves in [T5] that the index of a non minimal critical point grows at least linearly with the instanton number of the bundle. The main question which remains is to prove the existence of non-minimal critical points. One of the standard techniques for that purpose is Ljusternik-Schnirelman theory (for an account in infinite dimension, see [Ps1]). One introduces the path components of $C^0((B^\ell, S^{\ell-1}); (\mathcal{C}E, (\mathcal{C}E)_{|k|}))$, the space of continuous maps from the ℓ-dimensional ball B^ℓ into $\mathcal{C}E$ sending the boundary of the disk to the minimal set of $\mathcal{YM}$ on $\mathcal{C}E$ that we denote by $(\mathcal{C}E)_{|k|}$.

For a path component Γ_ℓ, we set

$$L(\Gamma_\ell) = \inf_{\varphi\in\Gamma_\ell} \sup_{p\in B^\ell} (\mathcal{YM}(\varphi(p)) - |k|)$$

and call it the *critical value* attached to Γ_ℓ.

If $L(\Gamma_\ell) > 0$, via mini-max arguments, one should be able to associate to Γ_ℓ a non minimal critical point of $\mathcal{YM}$.

Theorem (C. Taubes, [T6]). *Let* E *be an* SU_2*-bundle over the standard sphere* S^4. *If the critical value* $L(\Gamma_\ell)$ *attached to the connected component* $\Gamma_\ell \subset C^0((B^\ell; S^{\ell-1}), (\mathcal{C}E, (\mathcal{C}E)_{|k|}))$ *is not an even integer, then there is a non-minimal critical point on some maybe distinct* SU_2*-bundle* E′ *with index at most* $\ell + 1$.

This extra condition is related to the partial failure of the Palais-Smale condition (C). It appears in the proof because by passing to the limit we may leave the bundle we started with. We already met this phenomenon while presenting Sedlacek's results on the direct method of the calculus of variations.

A very similar phenomenon is known to appear in the study of minimal surfaces (cf. [Ss-U] or [Sn-Yu]). It is very often refered to as the "bubbling off" phenomenon, because of the appearance of minimal 2-spheres when passing to the limit.

This theorem still leaves open the existence of non minimal critical points on bundles over the standard 4-sphere.

In [T2], C. Taubes solved the analogous question in the affirmative for Yang-Mills-Higgs theory. Previously, he also proved in [T1] that on S^4 Yang-Mills fields admitting a continuous symmetric satisfy the self-duality equations.

iv) Moduli spaces

In this section we collect the results which are known on the space of solutions of the self-duality equations, the moduli space of instantons.

As it is usual for a moduli problem, we must divide by the automorphism group, in our case the gauge group. We are interested in self-dual connections up to gauge transformations.

The basic ingredient is the following complex that we already met at a self-dual connection

$$0 \to \Omega^0(M, \mathfrak{G}E) \xrightarrow{d^\nabla} \Omega^1(M, \mathfrak{G}E) \xrightarrow{\pi^- \circ d^\nabla} \Omega^-(M, \mathfrak{G}E) \to 0.$$

This complex is elliptic, and its index can be computed in purely topological terms (see [A-H-S] for details). For a compact oriented 4-manifold with positive definite intersection form such as the 4-sphere and a bundle with instanton number k, its index equals $8k - 3$. By the Atiyah-Singer index theorem, $8k - 3$ is also the alternate sum of dimensions of spaces of harmonic elements $-\dim H^0(M, \mathfrak{G}E) + \dim H^1(M, \mathfrak{G}E) - \dim H^-(M, \mathfrak{G}E)$. It is rather easy to see that $\Omega^0(M, \mathfrak{G}E)$ is the space of parallel sections of $\mathfrak{G}E$. Hence, $\Omega^0(M, \mathfrak{G}E)$ is not 0 only if the connection ∇ is reducible to a U_1-connection. In this case, if the bundle is not trivial, $H^0(M, \mathfrak{G}E)$ is in fact 1-dimensional. The space $H^1(M, \mathfrak{G}E)$ can be identified with the formal tangent space to the moduli space. Elements A of $H^1(M, \mathfrak{G}E)$ are indeed 1-forms with values in $\mathfrak{G}E$ such that

$$\begin{cases} d^\nabla * A = 0 \\ \pi^- \circ d^\nabla A = 0. \end{cases}$$

The first condition ensures that A is transversal to the orbit of ∇ under the gauge group. The second is precisely the linearization of the self-duality condition. In $H^-(M, \mathfrak{G}E)$, one finds closed (hence coclosed) antiself dual $\mathfrak{G}E$-valued 2-forms. In fact no such 2-forms exist on the sphere, because these forms can be shown to come from ordinary harmonic antiself dual 2-forms. Moreover, in deformation theory, it is well known that this space is the space where obstructions to deformation live. Its vanishing ensures that the moduli space is indeed $(8\,|k| - 3)$-dimensional for SU_2-bundles over S^4 with instanton number k. In Section I, using the symmetries of S^4, we showed that the moduli space for the simplest nontrivial bundle on it (with instanton number $|k| = 1$) could be identified with the 5-ball D^5, a particularly simple 5-dimensional space.

Not much is known on the topology of these general moduli spaces even for the standard sphere except the following result.

Theorem (C. Taubes [T6]). *The moduli space of self-dual connections on an* SU_2-*bundle over the standard* 4-*sphere is path connected.*

In his outstanding work [Dn], S. Donaldson turned around completely our point of view on moduli spaces of self-dual connections. We came at them as objects of interest in Yang-Mills theory. For what follows, we restrict our attention to SU_2-bundles with instanton number 1 on a simply-connected manifold M with positive definite intersection form. We know that the moduli space $\mathcal{M}$ is not empty by C. Taubes' existence theorem. The space $\mathcal{M}$ is in fact 5-dimensional since the discussion we presented before applies also to the case at hand.

S. Donaldson was able to describe the global structure of $\mathcal{M}$, proving that $\mathcal{M}$ is orientable (a delicate point) and admitting a neighbourhood of infinity diffeomorphic to a collar $M \times \mathbf{R}$. By modifying slightly the metric if necessary, $\mathcal{M}$ is shown to have only point singularities corresponding to points where the connection is reducible. Therefore, their number is equal to the number of ordinary harmonic forms of self-intersection +1, i.e. $b_2(M)$, the second Betti number of M. Moreover, these singular points can be analyzed precisely. They are cones over $\mathbf{CP}^2$. All these facts allow S. Donaldson to attach to any compact oriented H-dimensional manifold M with positive definite intersection form an oriented 5-dimensional manifold $\mathcal{M}$ admitting M as one component of its boundary. This manifold $\mathcal{M}$ realizes an oriented cobordism between M and the connected sum of $b_2(M)$ copies of $\mathbf{CP}^2$. From this, he can deduce the following topological statement.

Theorem (S. Donaldson, [Dn]). *Any compact simply connected oriented differentiable 4-manifold has a standard intersection form, i.e., has an integral orthonormal basis.*

(For a nice survey of this theorem, one can consult [H].)

This result is in sharp contrast with what has been proved recently by M. Freedman for topological manifolds. Any nondegenerate quadratic form can be realized as the intersection form of an oriented topological manifold provided its signature is divisible by 8 if the form takes only even values (Rohlin's theorem).

Since there are many non equivalent positive definite integral quadratic forms, S. Donaldson's theorem shows that compact differentiable 4-manifolds are far more restricted than topological ones. Combined with some recent result in topology due to M. Freedman, one obtains

Theorem. *The Euclidean space* $\mathbf{R}^4$ *has a least one exotic differentiable structure.*

V Open problems

i) Non minimal Yang-Mills fields on S^4

As we already mentioned, one of the outstanding problems of the field is

Problem. *To decide whether there are non self-dual* SU_2*-Yang-Mills fields on bundles over the standard sphere.*

The question is also open for more general conformal classes on more general manifolds and for SU_3-fields.

ii) Topological aspects of Yang-Mills theory

The space of connections $\mathcal{C}E$ over which the Yang-Mills functional $\mathcal{YM}$ is defined is contractible. Because of its invariance under the gauge groups $\mathcal{G}E$, $\mathcal{YM}$ descends to a functional $\hat{\mathcal{YM}}$ on $\mathcal{C}E/\mathcal{G}E$. In dimension 2, $\hat{\mathcal{YM}}$ is a perfect function, i.e., has exactly the minimal number of critical points compatible with Morse inequalities (cf. [A-Bt]).

Since the topology of $\mathcal{C}E/\mathcal{G}E$ is of great interest to physicists, special attention has been devoted to the information which can be drawn from $\hat{\mathcal{YM}}$. (See for example [A-Js].)

Analytic methods revealed themselves very important to deal with these questions (cf. [T6]).

Problem. *If* E *is an* SU_2*-bundle over* S^4 *with instanton number* k, *show that the homotopy groups* $\pi_n((\mathcal{C}E)_k)$ *and* $\pi_{n+3}(S^3)$ *are isomorphic for* $0 < n \leqslant 2k - 2$.

iii) The Yang-Mills functional on special connections over the tangent bundle

On an oriented 4-manifold M, its tangent bundle TM is a special SO_4-bundle. Connections over TM can be torsion-free, a notion which makes sense only on this bundle. It would be interesting to study if these connections play a special role in Yang-Mills theory. This is not unlikely since the curvature of a torsion-free connection verifies the algebraic Bianchi identity. Two more specific questions seem also to be of interest.

Problem. *Study the Yang-Mills functional among connections which are metric with respect to the metric on the base space.*

Problem. *Study the Yang-Mills functional among connections which are Levi-Civita connections of Riemannian metrics over the base space.*

A special mention is probably to be made of spin-manifolds on which the tangent bundle can be replaced by half-spin-bundles. (Recall that in dimension 4, the group Spin 4 is the direct product $SU_2 \times SU_2$.)

Bibliography

[A] Atiyah, M. F.: Geometry of Yang-Mills. Lezioni Fermi Ac. Naz. Dei Lincei Scuola Norm. Sup. Pisa (1979)

[A-Bt] Atiyah, M. F.; Bott, R.: Yang-Mills equations over Riemann surfaces. To appear in Phil. Trans. Roy. Soc. London

[A-H-S] Atiyah, M. F.; Hitchin, N.; Singer, I. M.: Self-duality in 4-dimensional Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. London A, **362** (1978) 425–461

[A-Js] Atiyah, M. F.; Jones, J. D.: Topological aspects of Yang-Mills theory. Commun. Math. Phys. **61** (1978) 97–118

[Bn-Ln1] Bourguignon, J. P.; Lawson, H. B.: Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields. Commun. Math. Phys. **79** (1981) 189–230

[Bn-Ln2] Bourguignon, J. P.; Lawson, H. B.: Yang-Mills theory: its physical origin and differential geometric aspects. In: Seminar on Differential Geometry ed. by S. T. Yau. Princeton: Princeton University Press 1982. = Ann. Math. Studies N° 102

[Bs-Ng] Brézis, H.; Nirenberg, L.: Positive solutions of non-linear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. To appear in Comm. Pure and Appl. Math.
[D] Darboux, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, Volumes I, II, III, IV. Paris 1894–1896
[Dk-Kn] DeTurck, D.; Kazdan, J. L.: Some regularity theorems in Riemannian geometry. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Paris **14** (1981) 249–260
[Dn] Donaldson, S.: An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds. J. Differential Geometry
[Dz-Mo] Dodziuk, J.; Min'Oo: An L^2-isolation theorem for Yang-Mills fields over complete manifolds. Compositio Math. **47** (1982) 165–169
[Es-Le] Eells, J.; Lemaire, L.: A report on harmonic maps. Bull. London Math. Soc. **10** (1978) 1–68
[Fd-Fn-U] Freed, D.; Freedman, M.; Uhlenbeck, K.: Seminar on gauge theories and four-manifolds. MSRI Preprint Series. Berkeley 1983
[Gg-Tr] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S.: Elliptic partial differential equations of second order. Grund. der math. Wiss., Springer Verlag 1977
[Gs] Gidas, B.: Euclidean Yang-Mills and related equations. In: Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and related topics. Dordrecht: Reidel Pub. Co 1980, 243–267
[H] Hitchin, N.: The Yang-Mills equations and the topology of 4-manifolds. Exposé n° 606, Séminaire Bourbaki (1983)
[Is] Iliopoulos, J.: Unified theories of elementary particle interactions. Contemp. Phys. **21** (1980) 159–183
[Je] Jaffe, A.: Introduction to gauge theories. Proc. Int. Cong. Math., Helsinki (1978) 905–916
[Je-T] Jaffe, A.; Taubes, C.: Vortices and Monopoles. Boston: Birkhäuser 1981. = Progress in Physics N° 2
[Le] Lemaire, L.: Applications harmoniques de surfaces riemanniennes. J. Differential Geometry **13** (1978) 51–78
[Ls] Lions, P. L.: On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. SIAM Rev. **24** (1982) 441–467
[Mn] Marsden, J.: Applications of global analysis in Mathematical Physics. Publish or Perish (1974)
[Mo] Min'oo: An L^2-isolation theorem for Yang-Mills fields. Compositio Math. **47** (1982) 153–163
[Pe] Price, P.: A monotonicity formula for Yang-Mills fields. Preprint, Australian National University, Canberra
[Pr] Parker, T.: Gauge theories on 4-dimensional Riemannian manifolds. Commun. Math. Phys. **85** (1982) 1–40
[Ps1] Palais, R. S.: Ljusternik-Snirelman theory on Banach manifolds. Topology **5** (1966) 115–132
[Ps2] Palais, R. S.: Foundations of global non-linear analysis. New York: Benjamin 1968
[Ps-Se] Palais, R. S.; Smale, S.: A generalized Morse theory. Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964) 165–171
[Sk] Sedlacek, S.: A direct method for minimizing the Yang-Mills functional over 4-manifolds. Commun. Math. Phys. **86** (1982) 515–528
[Sn-U] Schoen, R.; Uhlenbeck, K.: A regularity theory for harmonic maps. J. Differential Geometry **17** (1982) 307–335
[Sn-Yu] Schoen, R.; Yau, S. T.: The existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature. Ann. of Math. **110** (1979) 127–142
[Sd] Steenrod, N.: The topology of fibre bundles. Princeton: Princeton University Press 1951
[Sr] Sibner, L.: Removable singularities of Yang-Mills fields in $\mathbf{R}^3$. Compositio Math. **53** (1984) 91–104
[Sr-Sr] Sibner, L.; Sibner, R.: Removable singularities of coupled Yang-Mills in $\mathbf{R}^3$. Commun. Math. Phys. **93** (1984) 1–17
[Ss-U] Sacks, J.; Uhlenbeck, K.: The existence of minimal immersions of 2-spheres. Ann. of Math. **113** (1981) 1–24

[T1] T a u b e s , C. H.: On the equivalence of first and second order equations for gauge theories. Commun. Math. Phys. **75** (1980) 207–227

[T2] T a u b e s , C. H.: The existence of a non-minimal solution to the SU_2 Yang-Mills-Higgs equations on $\mathbf{R}^3$. Commun. Math. Phys. **86** (1982) Part I: 257–298, Part II: 299–320

[T3] T a u b e s , C. H.: Self-dual Yang-Mills connections on non-self dual four manifolds. J. Differential Geometry **17** (1982) 139–170

[T4] T a u b e s , C. H.: Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix. J. Differential Geometry **19** (1984) 517–560

[T5] T a u b e s , C. H.: Stability in Yang-Mills theories. Commun. Math. Phys. **91** (1983) 235–263

[T6] T a u b e s , C. H.: Long range forces and topology of instanton moduli spaces. In: Colloque Laurent Schwartz. To appear in Astérisque

[U1] U h l e n b e c k , K. K.: Connections with L^p-bounds on curvature. Commun. Math. Phys. **83** (1982) 31–42

[U2] U h l e n b e c k , K. K.: Removable singularities in Yang-Mills fields. Commun. Math. Phys. **83** (1982) 11–29

[U3] U h l e n b e c k , K. K.: Variational problems for gauge fields. In: Seminar on Differential Geometry, ed. by S. T. Yau. Princeton: Princeton University Press 1982. = Ann. Math. Studies N° 102

[U4] U h l e n b e c k , K. K.: Variational problems for gauge fields. Proc. Int. Cong. Math. 82, Warsaw

[U5] U h l e n b e c k , K. K.: Chern classes of Sobolev connections. To appear in Commun. Math. Phys.

[Wr] W a r n e r , F.: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Glenview: Scott, Foresman and Co 1971

[Wu-Y] W u , T. T.; Y a n g , C. N.: Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. Phys. Rev. D **12** (1975) 3845–3857

[Yu1] Y a u , S. T.: The role of partial differential equations in differential geometry. Proc. Int. Cong. Math. Helsinki (1978) 237–250

[Yu2] Y a u , S. T.: Survey of partial differential equations in differential geometry, in Seminar on Differential Geometry, ed. by S. T. Yau. Princeton: Princeton University Press 1982. = Ann. Math. Studies N° 102

Jean-Pierre Bourguignon
Centre de Mathématiques*
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex

(*Eingegangen 20. 8. 1984*)

* Laboratoire Associé au C.N.R.S. N° 169

Buchbesprechungen

Aubin, T., Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampère Equations (Grundlehren, Band 252), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1982, cloth, 180 p., DM 79,–

In the last fifteen years, nonlinear analysis on Riemannian manifolds has grown into a body of great relevance in studying geometric problems. Thanks to it, quite spectacular results have been obtained by many people. Among the contributors, one can especially mention L. Nirenberg, K. Uhlenbeck, S. T. Yau, and the author of the book under review, T. Aubin.

In the fifties and sixties, the power of functional analysis allowed remarkable breakthroughs in the theory of linear partial differential equations. One of the crucial points which was then made clear is the advantage of working in the right functional framework, hence the central role played by some families of spaces such as Sobolev spaces or Hölder spaces. Note that, very often, the most useful spaces turn out to be Hilbertian. In the theory of linear elliptic equations, existence and regularity results are by now fairly complete, even for systems. As an example, Hodge theory, thanks to which one can represent a cohomology class on a Riemannian manifold by a harmonic differential form, is a beautiful application of these ideas in geometry. It has had important consequences especially in the study of Kähler manifolds. The Atiyah-Singer Index Theorem is another illustration of the wide range of geometric consequences which can be drawn from analytic considerations.

More recently, there has been a growing interest in the construction of global geometric objects by analytical means. Often, these objects extremized some geometrically defined functionals. To obtain them, one had to solve nonlinear partial differential equations or even systems, e.g., Euler-Lagrange equations of variational problems. The basic functional analytic tools necessary to study these equations are simply extensions of the ones needed for linear equations. Most of the time, the spaces one has to introduce are only Banach spaces. Some basic nonlinear lemmas have to be established, but the hardest part is almost always to prove a priori estimates adapted to the problem under consideration. Another difficulty to overcome lies in the global character of the object to be constructed. This contrasts with earlier work in differential geometry where the attention was often focused on local problems.

It is therefore clear that books helping to penetrate these new developments are welcome. The volume under review falls precisely into this program. It intends to present basic techniques necessary to deal with nonlinear problems arising in Riemannian geometry and to illustrate these techniques by some recently developped typical examples. Special attention is given to those involving the determinant of the (real or complex) Hessian matrix of a function, the so-called Monge-Ampère equations.

Before describing more precisely the contents of the book, a word about its general structure is in order, Chapters 1 to 4 contain the preliminary material, both Riemannian and analytical. They form an introductory part. Chapters 5, 6, 7, and 8 are each devoted to a specific problem and of course make use of the techniques presented before.

Chapter One is devoted to a survey of Riemannian geometry. It contains mainly definitions without pictures or examples. The main emphasis is on presenting the objects technically rather than on giving a geometric feeling for them. A few points could have been stated more specifically. For example, it is surprising that, in a book discussing analytical approaches to geometry, the First Variation Formula is not given as such. (It is in disguise in Proposition 1.33.) Most of the discussions on Jacobi fields and the index form would be much more digestible in that perspective too. The exponential map is presented only for points although it is also very useful for submanifolds. This notion is of much use when one considers manifolds of mappings. A side comment. Theorem 1.45 is not correct as stated. It should say that the point Q is conjugate to the point P "along the geodesic defined by X_0". The connection between § 8 and the classical estimates of Bishop and Günther on the volume growth of Riemannian manifolds with controlled curvature is not made. This hides the true nature of these theorems, namely comparison with model spaces. Having this fact in mind helps greatly in understanding them.

Rather surprisingly, the more elementary Chapter 3 on "Background material" does not come next. Chapter 2 is devoted to "Sobolev Spaces". It contains a fairly complete presentation of this topic including limiting cases of the Sobolev embedding theorems and of the Rellich-Kondrakov compactness theorems. Notions and theorems are of course developped on general Riemannian manifolds, and not confined to open sets in euclidean spaces. Special attention is also devoted to best constants in Sobolev inequalities, whose importance to the field has been stressed by the author. Missing, however, are the continuity properties of bilinear maps, the so-called Schauder ring properties, and the composition lemmas for maps of Sobolev class. These are important tools in global analysis. For example, they are unavoidable when one deals with spaces of maps or sections of bundles, i.e., large families of objects of interest in geometry.

Chapter 3 sweeps a very broad landscape. Even more so than in the previous two chapters, the style is dry and influenced by the Bourbaki tradition. In the reviewer's opinion, such a presentation does not suit well the purpose of the book. It will probably be difficult for a beginner to learn the material in this form. Topics covered include all basic theorems in real functional analysis and Lebesgue integration theory in their abstract forms. Hölder spaces appear for the first time in the book in § 6 of this chapter with the Schauder estimates for elliptic partial differential equations. No general discussion of them is given. (They do not even appear in the index.) This is in sharp contrast with the long developments devoted to Sobolev spaces, which strangely enough are taken up again at the end of Chapter 3. General maximum principles are also presented there.

The short Chapter 4 is devoted to the Green's function of a Riemannian manifold, i.e., to the fundamental solution of the basic linear operator defined by a Riemannian metric, the Laplace-Beltrami operator. All necessary material is included.

With Chapter 5, we enter the illustrative part. Despite its title, it contains only a brief presentation of a generalization of the famous Yamabe problem, namely, "on a compact manifold, describe scalar curvature functions in a conformal class of metrics". This is taken up in Chapter 6 with special emphasis on getting constant scalar curvature metrics. The results of the author on this problem using sharp values of the Sobolev constants are presented. More geometric methods to solve this problem due to J. Kazdan and F. Warner are not discussed, nor is the role of the group of conformal transformations on the standard sphere emphasized.

Complex Monge-Ampère equations on compact Kähler manifolds are the theme of Chapter 7. A brief introduction to Kähler manifolds is also included from an analytical point of view excluding cohomological considerations. Coordinate expressions of the Ricci curvature are given, facilitating a description of the equations for the Calabi conjecture and the search for Kähler-Einstein metrics. The complex Monge-Ampère equations that one must solve for these problems (one adds a background Kähler metric to the complex Hessian of the unknown function) are shown to have solutions in Hölder spaces in the negative or null cases thanks to the continuity method. The necessary a priori estimates are established in detail.

The final Chapter 8 is concerned with the Dirichlet problem for the real Monge-Ampère equation on bounded domains of $\mathbf{R}^n$. Results are obtained by the method of upper and lower solutions. Again complete estimates are derived (one needs to control derivatives up to order three up to the boundary). The chapter ends with a brief description of a new method due to P. L. Lions to deal with this equation. (The new idea is to use a penalisation method allowing one to treat the equation directly on the whole of $\mathbf{R}^n$.) Earlier in the chapter, a few words are said on the complex Monge-Ampère equation on pseudo-convex domains in $\mathbf{C}^m$.

The book ends with a very complete bibliography and useful subject and notation index.

All in all, the book will certainly be of use to mathematicians who want to be introduced to this rapidly growing area of mathematics. On the other hand, it is not clear that it fulfills completely the program of the Springer Grundlehren series, providing the mathematical community with longlasting reference books presenting with proofs a state of the art in a given speciality. At many places, the text has been kept very close to some of the author's research articles. The analytic prejudice taken by the author at the expense of geometric lines of thought blurs the perspectives on some problems. Systems are never discussed or even mentioned. Also, at several instances, the English is awkward and consequently makes the understanding uneasy. All this makes the book hard to read from cover to cover. One must say that this is also the case of C. B. Morrey's book "Multiple integrals in the calculus of variations" in the same series which, nonetheless, is still a must for specialists in the field.

A final comment. This report leaves the reviewer with the feeling that there is still enough room for another book in the same area with a more systematic presentation of the methods and a broader scope including geometric points of view.

Palaiseau (France) J. P. Bourguignon

Meister, E., Randwertaufgaben der Funktionentheorie: Mit Anwendungen auf singuläre Integralgleichungen und Schwingungsprobleme der mathematischen Physik (Leitfäden der angew. Mathem. und Mechanik, Bd. 59), Stuttgart: B. G. Teubner 1983, 320 S, geb., DM 44,–

Um den Inhalt dieses Buches zu beschreiben, beginnen wir mit folgenden grundlegenden Ergebnissen. Es sei L eine positiv orientierte, glatte Jordankurve, und f sei auf L Hölder-stetig. Es bezeichne

$$F^+(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z}\, dt \quad (z \in \operatorname{int} L), \qquad F^-(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z}\, dt \quad (z \in \operatorname{ext} L)$$

die in $\mathbf{C} \setminus L$ holomorphe Funktion F, und

$$(S_L f)(t_0) := \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0}\, dt = f(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\, dt \quad (t_0 \in L)$$

sei das zu f gehörige und auf L erklärte Cauchy-Hauptwert-Integral. Die Grundtatsachen, auf denen das Buch aufbaut, betreffen die Winkelgrenzwerte $F^+(t_0)$ und $F^-(t_0)$ von F^+ und F^- bei Annäherung an $t_0 \in L$. Die Plemelj-Sochozki-Formeln besagen: Es gilt

$$F^{\pm}(t_0) = \pm\frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2} (S_L f)(t_0) \quad (t_0 \in L) \tag{1}$$

und folglich

$$F^+(t_0) - F^-(t_0) = f(t_0) \quad (t_0 \in L) \tag{2}$$

sowie

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2} (S_L f)(t_0) \quad (t_0 \in L). \tag{3}$$

Die Beziehung (2) kann als Sprungeigenschaft gelesen werden; F löst das Problem, eine in $\mathbf{C} \setminus L$ holomorphe Funktion zu finden, welche der Kopplungsbedingung (2) mit gegebenem f genügt. Die Beziehung (3) hingegen besagt, daß F^+ eine Randwertaufgabe in int L löst, mit den rechts stehenden Randwerten. Sind diese vorgegeben, so muß ersichtlich f auf L einer singulären Integralgleichung (Igl) mit Cauchy-Kern $\frac{1}{t - t_0}$ genügen.

Das Hauptziel des Buches besteht nun in einer gründlichen Behandlung der Themen, welche durch die Beziehungen (2) und (3) angeschnitten sind. Thema 1 ist das allgemeine Riemannsche Kopplungsproblem

$$F^+(t_0) = G(t_0)F^-(t_0) + g(t_0) \quad (t_0 \in L), \tag{4}$$

Thema 2 die Riemann-Hilbertsche Randwertaufgabe

$$\mathrm{Re}[(a + ib)(t_0)F^+(t_0)] = c(t_0) \quad (t_0 \in L) \tag{5}$$

mit vorgegebenen Funktionen a, b, c. Dabei darf jetzt L ein System von Kurven oder Jordanbögen sein, so daß das Gebiet, in dem F^+ und F^- holomorph sind, mehrfach zusammenhängt. Singuläre Integralgleichungen, mit Cauchy-Kern, logarithmischem oder anderem schwach singulärem Kern, hängen eng damit zusammen, weil sie sich nämlich in ein Kopplungsproblem (4) überführen lassen. Schließlich ist es ein wesentliches Anliegen des Verfassers, die allgemeine Theorie an zahlreichen Problemen aus der Praxis (Hydromechanik, Schwingungen) zur Anwendung zu bringen.

Kapitel I (75 Seiten) stellt Grundtatsachen der Funktionentheorie zusammen: Residuenrechnung, konforme Abbildung, Spiegelungsprinzip, Greensche Funktionen, verschiedene Randwertaufgaben.

Kapitel II (38 Seiten) bringt zunächst die fundamentalen Eigenschaften von Integralen vom Cauchy-Typ und des Cauchy-Hauptwert-Integrals $S_L f$ von f. Die sorgfältigen Beweise erfordern oft einen erheblichen Aufwand. Auch der Fall, daß f auf L schwach singulär wird, wird behandelt. Sodann lassen sich schon einfache Randwertaufgaben, auch für meromorphe Funktionen, behandeln.

In Kapitel III (51 Seiten) wird nun das allgemeine Kopplungsproblem (4) in Angriff genommen. Zuerst wird G = 1 gesetzt; das Verhalten von F für $|z| \to \infty$ muß spezifiziert werden. Bei allgemeinem G spielt der Windungsindex κ von G eine entscheidende Rolle. Die Lösungen von (4) lassen sich geschlossen angeben. Es folgen verschiedene Zusätze: Kopplungsprobleme für Bögen und bei unstetigen Koeffizienten, periodische Kopplungsprobleme. Im letzteren Fall wird ein periodisches Integral vom Cauchy-Typ herangezogen. Allgemeiner als (4) wird das Kopplungsproblem mit Konjugation behandelt: $F^+ = GF^- + H\overline{F^-} + g$.
Im zweiten Teil von Kapitel III kommt nun (5) an die Reihe, wobei man sich – nach konformer Abbildung – auf den Einheitskreis beschränken kann. Das homogene Problem (5) wird in ein äquivalentes Kopplungsproblem übergeführt, sodann die Lösung des allgemeinen inhomogenen Problems diskutiert. Über die explizite Darstellung der Lösung wird jedoch nichts gesagt.
Es folgt der Sonderfall, daß das Gebiet die obere Halbebene ist; hier werden auch gemischte Aufgaben, bei denen $\mathrm{Re}F^+$ bzw. $\mathrm{Im}F^+$ auf disjunkten Intervallen vorgeschrieben sind, zugelassen.

Im letzten theoretischen Kapitel IV (38 Seiten) wird gezeigt, wie sich singuläre Igln mit Cauchy-Kern oder schwach singulären Kernen in Kopplungsprobleme überführen und so lösen lassen. Anwendungen auf die Umströmung dünner, schwach gewölbter Profile oder periodischer Gitter von Profilen. Die Abelsche Igl 1. Art wird verallgemeinert und gelöst, ebenfalls die für die Praxis wichtige Faltungs-Igl vom Wiener-Hopf-Typ. Oftmals läßt sich eine Randwertaufgabe nach Anwendung der Fourier- oder Laplace-Transformation in ein Kopplungsproblem auf $\mathbf{R}$ überführen. Dies wird an Beispielen gezeigt; zuvor werden die nötigen Grundtatsachen der Fourier- und Laplace-Transformation bereitgestellt.

Die Kapitel V (46 Seiten) und VI (41 Seiten) sind mehreren Anwendungen der Theorie in der Strömungsmechanik und der Schwingungstheorie gewidmet. Auf diesen Gebieten hatte der Verfasser, z. T. zusammen mit Söhngen, gearbeitet. Die Grundlagen der physikalischen Probleme werden vorausgeschickt und sodann die Umströmung eines dünnen, schwingenden Profils oder eines periodischen Gitters behandelt. Es entstehen Systeme von singulären Igln mit periodischen Kernen; die Horizontal-Schlitzabbildung eines Streckengitters wird verwendet. Von den Problemen des Kap. VI sei das Sommerfeldsche Halbebenenproblem und die Beugung elektromagnetischer Wellen an Systemen dünner Platten erwähnt.

Es ist sehr zu begrüßen, daß Herr Meister in diesem Buch die funktionentheoretischen Methoden zusammengestellt hat, die zur Lösung praktisch wichtiger Randwertprobleme herangezogen werden können. Die Bedeutung der Funktionentheorie für die Anwendungen ist dadurch erneut eindrucksvoll bestätigt worden.

Gießen D. Gaier

Godbillon, C., Dynamical Systems on Surfaces (Universitext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, vii + 199 p., soft cover, DM 42,–

Es handelt sich um eine Übersetzung von Notizen des ersten Teils einer Vorlesung über Blätterungen, welche der Autor in Straßburg (1976) und in Tunis (1977) gehalten hat. Der Inhalt gruppiert sich originell um die klassischen Gegenstände: qualitatives Verhalten der Lösungen eines Vektorfeldes in der Ebene lokal in der Nähe einer Singularität, Minimalmengen von 2-dim. Flüssen (Poincaré-Bendixson-Theorie), Richtungsfelder (Resultate von H. Kneser), Kreisabbildungen (Theorie von Denjoy und Rotationszahl von Poincaré). Wie der Autor im Vorwort feststellt, werden die neueren Resultate über die strukturell stabilen Systeme auf Flächen (z. B. der Satz von Peixoto) nicht behandelt. Als Ergänzung und einführende Darstellung dieser Resultate und auch der damit zusammenhängenden Methoden der dynamischen Systeme empfiehlt sich das Buch „Geometric Theory of Dynamical Systems" von J. Palis und W. de Melo (1982)*).

Bochum E. Zehnder

Arnold, V. I., Singularity Theory-Selected Papers (London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 53), Cambridge – London – New York – New Rochelle – Melbourne – Sydney: Cambridge University Press 1981, 266 pp., paper, £ 12.50

Die moderne Theorie differenzierbarer und analytischer Singularitäten erlebt seit etwa zwanzig Jahren einen großen Aufschwung. Zur Entwicklung dieser Theorie haben Prof. V. I. Arnold von der Moskauer Staatsuniversität und seine Schüler wesentlich beigetragen. Insbesondere haben sie sehr weitgehende Klassifikationen von Singularitäten unter verschiedenen Aspekten durchgeführt und hierfür effiziente Berechnungsmethoden entwickelt. Auch haben sie mathematische Modelle für einige interessante physikalische Probleme mit den Methoden der Singularitätentheorie untersucht (z. B., in der geometrischen Optik, schnell oszillierende Integrale und die mathematische Beschreibung von Kaustiken); diese Untersuchungen, die man als Teil der Katastrophentheorie betrachten kann, bilden eine der wenigen wirklich gesicherten und nicht nur spekulativen Anwendungen dieser Theorie in den Naturwissenschaften. Bei ihren Forschungen fanden sie interessante Zusammenhänge zu anderen Gebieten der Mathematik, z. B. zur Geometrie von Lie-Gruppen. In letzter Zeit hat Arnold mit seinen Kollegen Speziali-

*) Siehe Jber. d. Dt. Math.-Verein. **86**, H. 1 (1984) *19*.

sierungen der Singularitätentheorie untersucht, also Singularitäten mit zusätzlicher Struktur (z. B. Singularitäten am Rand einer Mannigfaltigkeit oder Singularitäten mit Symmetrie), und Erweiterungen dieser Theorie, z. B. Singularitäten von Vektorfeldern oder von 1-Formen).

Das vorliegende, 1981 erschienene Buch „Singularity Theory" ist kein Lehrbuch, sondern „nur" eine Sammlung der wichtigsten Arbeiten Arnolds über Singularitätentheorie in der Zeit vor 1980; es handelt sich hierbei um sieben sehr ausführliche Übersichtsartikel aus Russian Mathematical Surveys, die wegen der Wichtigkeit von Arnolds Forschungen auf diesem Gebiet eine unerläßliche Quelle bilden für jeden, der sich für Singularitätentheorie interessiert.

Die Serie beginnt mit einem einführenden Bericht aus dem Jahre 1968, der sich immer noch gut als Lehrstoff zum Einstieg in die Singularitätentheorie eignet. Es folgen eine Arbeit über Normalformen von parametrisierten Matrizenscharen und danach, als Kern der Sammlung, drei sehr wichtige Arbeiten von 1973–1975 über die Klassifikation von singulären Funktionskeimen (mit Anwendungen in der Optik (Kaustiken) und Zusammenhängen zur Geometrie von Lie-Gruppen). Diese Arbeiten enthalten sogar Beweisskizzen für die sehr umfangreichen Klassifikationsberechnungen und sehr ausführliche Literaturlisten, bei der Übersetzung noch ergänzt, die als ziemlich vollständige Bibliographien für die vor 1975 erschienene Literatur verwendet werden können. Die letzten beiden Arbeiten der Sammlung behandeln Singularitäten von Funktionen und von 1-Formen auf berandeten Mannigfaltigkeiten: in der letzten Arbeit wird ein Index für Singularitäten von 1-Formen auf berandeten Mannigfaltigkeiten definiert. Die Arbeit enthält auch eine Klassifikation aller Singularitäten von Projektionen von generischen Flächen in $\mathbf{R}^3$ nach $\mathbf{R}^2$.

Diese Arbeiten kann man natürlich alle auch am ursprünglichen Erscheinungsort, den Russian Mathematical Surveys, lesen. Aber hier hat man sie alle zusammen, als ausgezeichnetes Nachschlagewerk über die Forschungen der Arnold-Schule in Singularitätentheorie.

Mein einziger Kritikpunkt: die Sammlung wäre noch nützlicher geworden, hätte der Verlag sich die Mühe gemacht, dem Band ein Sachregister zu den Arbeiten beizufügen.

Bochum G. Wassermann

Petersen, K., Ergodic Theory (Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 2), Cambridge – London: Cambridge University Press 1983, xi + 329 p., cloth, £ 26.50

Als Einführungsliteratur in die maßtheoretische und topologische Ergodentheorie standen bisher die Lecture-Notes-Bände von Walters (1975) und Denker-Grillenberger-Sigmund (1976) zur Verfügung. 1981 trat das nicht nur einführende, sondern für weite Teile der Ergodentheorie geradezu enzyklopädische Werk von Cornfeld-Fomin-Sinai hinzu. In naher Zukunft ist eine umfassende Monographie von Krengel über Ergodensätze zu erwarten. In dieser Szene profiliert sich das vorliegende Buch durch viele anziehende Besonderheiten. Es setzt in einem Kap. 1 den Leser rasch ins Bild über die hauptsächlichen Fragestellungen der Ergodentheorie, über das grundlegende Beispielmaterial und über eine Reihe immer wieder verwendeter Methoden. In Kap. 2 folgt ein rascher, beweisender Durchgang durch typische Themen: Ergodensätze, Wiederkehrsätze, Ergodizität, starke und schwache Mischung. Kap. 3 variiert das Thema „Ergodensätze" vielseitig: Chacon-Ornstein-Theorem, Wiener's lokaler Ergodensatz, Hilbert-Transformation, Martingalkonvergenz. In Kap. 4 wird eine ausgezeichnete Einführung in den Themenkreis „Topologische Dynamik und Rekurrenz" bis hin zu den Sätzen von Furstenberg-Weiss, Hindman, Jewett-Krieger (mit direktem Beweis nach Bellow-Furstenberg) und dem Beweis eines Spezialfalls von Furstenbergs „Szemerédi-Theorem" (1977) geboten. In Kap. 5 folgt eine Einführung in die Entropie-Theorie, mit zahlreichen konkreten Entropie-Berechnungen. Das Thema „Entropie" wird in Kap. 6 in mehreren Richtungen fortgeführt: Weitere Entropie-Berechnungen, Shannon-McMillan-Breiman-Theorem, topologische Entropie, und als krönender Abschluß das Ornsteinsche Isomorphie-Theorem mit dem finitary-coding-Beweis von Keane-Smorodinski. – Das Buch setzt eine gute Vorbildung in allgemeiner Topologie und Maßtheorie voraus. Obwohl der persönliche Geschmack des Autors in der Themenauswahl deutlich zu spüren ist, möchte ich sagen: wer das Buch, und insbesondere die darin enthaltenen, oft hochkarätigen Übungsaufgaben durcharbeitet, beschäftigt sich mit brillant vorgetragener Mathematik hohen Ranges und wird zum vielseitigen Experten in Sachen Ergodentheorie. Mir erscheint dies Buch als eine unter den gegenwärtigen Bedingungen optimale Approximation an das Urbild der berühmten Lectures on Ergodic Theory von P. R. Halmos (1956).

Erlangen K. Jacobs

Fuchssteiner, B., Lusky, W., Convex Cones (North-Holland Mathematics Studies, vol. 56), Amsterdam – New York – London: North-Holland Publ. Comp. 1981, x + 428 p., Dfl. 110.00

Obgleich konvexe Kegel – wie etwa $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ oder Kegel nach oben halbstetiger numerischer Funktionen auf einem topologischen Raum –, die nicht als positive Kegel von geordneten (oder prägeordneten) Vektorräumen interpretierbar sind, in der praktischen Arbeit des funktionalanalytisch interessierten Mathematikers ziemlich häufig auftreten, fehlte es bisher an einer überzeugenden einheitlichen Darstellung dieses Gebietes. Dabei lag der Nutzen, der sich etwa aus einer Entwicklung maß- und integrationstheoretischer Sätze oder von Resultaten der Potentialtheorie im Rahmen von Funktionenkegeln ergeben mußte, auf der Hand. Darüber hinaus zeigte es sich in den letzten Jahren, daß eine der tragenden Säulen der Funktionalanalysis – der Satz von Hahn-Banach – seine volle Wirksamkeit erst dann entfalten kann, wenn man als Wertemengen für sublineare Funktionale und Operatoren konvexe Kegel zuläßt, die i. a. nicht in Vektorverbände einbettbar sind.

Das vorliegende Buch von B. Fuchssteiner und W. Lusky liefert einen entscheidenden Beitrag zur Schließung dieser Lücke. Es ist allerdings kein Lehrbuch für Studenten ohne soliden funktionalanalytischen Hintergrund. Vielmehr demonstrieren die Autoren exemplarisch an einer Reihe von Themenkreisen die Effizienz und Allgemeingültigkeit einer Behandlung funktionalanalytischer Probleme im Rahmen und mit den Hilfsmitteln der Theorie konvexer Kegel.

Der erste Teil des Buches behandelt Fragestellungen, die sich aus den Kegel- und Halbgruppenversionen des Satzes von Hahn-Banach ergeben. Die dominierenden subadditiven und minorisierenden superadditiven Abbildungen nehmen allerdings ihre Werte noch nicht in beliebigen ordnungsvollständigen Kegeln an, sondern nur in $\overline{R} := R \cup \{-\infty\}$, wobei R ein ordnungsvollständiger Vektorverband ist. Wesentlicher ist, daß auch die etwa mit Hilfe des Sandwich-Satzes erhaltenen additiven bzw. linearen Abbildungen in $\overline{R}$ abbilden, was – wie die Autoren überzeugend etwa am Beispiel des Summensatzes und des Zerlegungssatzes dokumentieren – von großem Nutzen sein kann.

Glücklicherweise fehlt es in dem Buch nicht an vielen instruktiven Beispielen für die gewonnenen Sätze. Dies betrifft nicht nur den ersten Teil des Buches mit Anwendungen u. a. in der Banachrauminterpolation, der Funktionentheorie und der mathematischen Wirtschaftstheorie, sondern auch den zweiten, auf Integraldarstellungen ausgerichteten Teil.

Obgleich auch dieses zweite Kapitel systematisch auf den bereits gewonnenen Resultaten aufbaut, erleichtern hier Vorkenntnisse – etwa über die Sätze von Choquet-Bishop-de Leeuw und über Banach-Verbände – sicher das Verständnis. Andererseits wird gerade der in den klassischen Sätzen vorinformierte Leser gelegentlich die Schwierigkeiten übersehen, die sich etwa aus der Einbeziehung des Unendlichkeitspunktes $-\infty$ in die Wertemengen der linearen

Funktionale ergeben. Dies zeigt sich bereits bei der dem bekannten Muster der Dualität von AM- und AL-Räumen folgenden Dualitätstheorie von AM- und AL-Kegeln und führt im zweiten Teil des Buches immer wieder zu gelegentlich unerwarteten Erschwernissen, die freilich auch stets vertiefte Einblicke und oft breitere Anwendbarkeit garantieren.

Auch der für den Integraldarstellungsteil des Buches fundamentale Begriff des Dini-Kegels erweist sich als wesentlich allgemeiner – und damit stellenweise auch widerspenstiger – als das bekannte Analogon der Dini-Räume. Durch die Einbeziehung von Gewichtsfunktionen und eine Verallgemeinerung des adaptierten Kegelbegriffs wird ein erleichterter Zugang zu den Resultaten und Anwendungen des Abschnitts über Integraldarstellungen auf Kegeln geschaffen. Dieser zeigt – beginnend mit einer detaillierten Analyse von Rändern – in eindrucksvoller Weise, daß sich der vorher investierte Aufwand in einer erheblichen Verkürzung des Beweisgangs bekannter Integraldarstellungssätze auszahlt. Darüber hinaus führt die Vorgehensweise zu vertieftem Verständnis und, wie etwa an einem Anhang über Integraldarstellungen von Operatoren gezeigt wird, auch zu neuen Resultaten.

Ein eigener Anwendungsabschnitt über Hewitt-Nachbin-Räume erweitert die klassischen Begriffe Stone-Čech-Kompaktifizierung, Reell-Kompaktifizierung und der Pseudokompaktheit. Ein gegebener Kegel F beschränkter Funktionen mit Ordnungseinheit übernimmt die Rolle der stetigen beschränkten Funktionen auf dem topologischen Raum X. Hierbei wird auf die vollständige Regularität von X verzichtet und statt dessen die Punktetrennung von F gefordert.

Mit Hilfe von verallgemeinerten Charakteren gelingt eine weitgehende Übertragung der auf Hewitt und Nachbin zurückgehenden Resultate im Fall vollständig regulärer Räume und stetiger bzw. stetiger beschränkter Funktionen.

Schließlich sollte eine ganz besondere Stärke des Buches nicht unerwähnt bleiben: Die Autoren haben zu jedem Abschnitt in einem Anhang eine umfangreiche Dokumentation mit Literaturangaben und weiterführenden Ergebnissen ausgearbeitet. Dies gilt besonders für das Kapitel über lineare Funktionale und Hahn-Banach-Sätze. Der interessierte Leser wird deshalb in dem Buch eine wertvolle Hilfe auch dann finden, wenn er sich in einem der dargestellten Gebiete weiter vertiefen will.

Passau K. Donner

Fattorini, H. O., The Cauchy Problem (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 18), Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company 1983, xxii und 636 pp., gbd., $ 62.50

Bereits im späten 19. Jahrhundert steht das Cauchy-Problem im Brennpunkt des Interesses in der sich stürmisch entwickelnden Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Man untersucht die Frage, ob Lösungsexistenz bei einer allgemeinen partiellen Differentialgleichung durch Vorgabe von Cauchy-Daten (also der Funktionswerte der gesuchten Lösung selbst und einer gewissen Anzahl ihrer Ableitungen in Normalenrichtung auf einer Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$) eindeutig gesichert ist. Eine positive Antwort wird im Jahre 1875 von Sophia Kowalewska für eine große Klasse analytischer Differentialgleichungen gegeben. Das Resultat findet seinen Niederschlag in dem berühmten Existenzsatz von Cauchy-Kowalewska, dessen vereinfachte Version von Goursat auch heute noch fester Bestandteil der Standardwerke über partielle Differentialgleichungen ist. J. Hadamard, dem die Prägung des Begriffes „Cauchy-Problem" zugeschrieben wird (Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. New Haven: Yale University Press, 1923), führt den Begriff der „korrekten Stellung" ein, der sich von überaus großer Tragweite für das Verständnis der Theorie partieller Differentialgleichungen erweist. Im Sinne von Hadamard ist das Cauchy-Problem korrekt gestellt, wenn Lösungen den drei Charakteristika: Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Cauchy-Daten, unterworfen sind. Vor Hadamard wurde die Forderung nach stetiger Abhängigkeit der Lösung von den Cauchy-Daten in aller Regel übersehen. Man war der Meinung, den durch das Cauchy-Kowalewska-Theorem nicht abgesicherten Fall nicht-analytischer Daten nach folgendem Rezept behandeln zu können: Man approximiere die Vorgaben durch analytische Cauchy-Daten, löse jetzt die Gleichung und bilde anschließend Grenzwerte. Hadamard präsentierte das nun klassische Gegenbeispiel, nämlich das Cauchy-Problem für die Laplacegleichung, bei dem das Approximationsargument versagt. Die Hadamardschen Arbeiten zum Cauchy-Problem bilden einen glänzenden Höhepunkt und einen vorläufigen Abschluß der klassischen Periode.

Eine Renaissance mit einer wahrlich kometenhaften Entwicklung wird dem Cauchy-Problem in seiner abstrakten Version nach dem zweiten Weltkrieg beschieden. Im Jahre 1948 entdecken E. Hille und K. Yosida unabhängig voneinander, daß das Cauchy-Problem für parabolische Gleichungen $u_t = Au$, $u = u_0$ für $t = 0$, in abstrakter Form als gewöhnliches Anfangswertproblem geschrieben werden kann:

$$\text{(ACP)} \quad u'(t) = Au(t), \qquad u(0) = u_0.$$

Die Differentialgleichung ist nun in einem geeigneten Funktionenraum als gewöhnliche Gleichung mit operatorwertigen Koeffizienten zu interpretieren. Die Lösung kann in der Form $u(t) = \exp(tA)u_0$ geschrieben werden, sofern die Exponentialfunktion nur richtig definiert wird. Diese Erkenntnis führt in einer kurzen Zeitspanne zur Entwicklung der umfassenden Theorie der Operatorenhalbgruppen durch K. Yosida und W. Feller sowie E. Hille und R. S. Phillips. Eine erste, auch heute noch faszinierende Dokumentation dieser Entwicklung stellt die Monographie der beiden letztgenannten Autoren dar (Functional Analysis and Semi-groups. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 31. Providence R. I.: Amer. Math. Soc. 1957). Im Soge dieses Trends hat sich danach eine kaum überschaubare Flut von Publikationen über hyperbolische und parabolische Anfangswertprobleme ergossen, der größte Teil verstreut in den zahlreichen mathematischen Journalen. Einige der Höhepunkte der zurückliegenden Entwicklung sind die grundlegenden Arbeiten von T. Kato und H. Tanabe über den Fall zeitabhängiger Operatoren $A = A(t)$, ferner die Ideen von J. L. Lions, der abstrakte Differentialgleichungen unter dem Aspekt verallgemeinerter Lösungen studierte. A. V. Balakrishnan gelang es schließlich mit seinem Konzept der gebrochenen Potenzen eines unbeschränkten Operators, auch die Cauchy-Probleme für abstrakte Differentialgleichungen n-ter Ordnung $u^{(n)}(t) = Au(t)$ einer Behandlung durch Operatorenhalbgruppen zugänglich zu machen.

Die Beiträge der russischen Schulen zu diesem Themenkreis sind in der Monographie von S. G. Krein dokumentiert (Linear Differential Equations in Banach Space. Moskau 1963. Englische Übersetzung in der Reihe: Translations of Mathematical Monographs, vol. 29. Providence R. I.: Amer. Math. Soc. 1971). Diese Monographie, in der, ausgehend vom Begriff der korrekten Stellung, die damals bekannten Resultate zum abstrakten Cauchy-Problem wiedergewonnen werden, hat den Aufbau des zur Besprechung vorliegenden Buches von Hector O. Fattorini unverkennbar beeinflußt. Die Thematik ist mit den obigen Ausführungen umrissen; sie spiegelt sich auch in den Überschriften zu den neun Kapiteln des Buches wider: Elemente der Funktionalanalysis. – Das Cauchy-Problem und seine abstrakte Formulierung für einige Differentialgleichungen der mathematischen Physik. – Allgemeine Theorie korrekt gestellter Probleme. – Dissipative Operatoren und Anwendungen. – Abstrakte parabolische Gleichungen und ihre Anwendung auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung. – Störungstheorie und Approximation abstrakter Differentialgleichungen. – Einige inkorrekt gestellte Cauchy-Probleme. – Das abstrakte Cauchy-Problem bei zeitabhängigen Gleichungen. – Das Cauchy-Problem im Sinne vektorwertiger Distributionen. Gemeinsames Anliegen aller Kapitel ist die Behandlung abstrakter linearer Differentialgleichungen erster (und teilweise zweiter) Ordnung. Nur wenig wird gesagt über Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Im Hinblick auf die hervorragenden Monographien von Hille/Phillips und Krein wäre es müßig, die Theorie des abstrakten Cauchy-Problems (ACP) oder ihr Äquivalent – die Theorie der Operatorenhalbgruppen – einer bloßen Aufarbeitung zu unterwerfen. Die Rechtfertigung für das vorliegende enzyklopädische Werk wird vom Verfasser in der Einleitung gegeben. Er erkennt richtig, daß die genannten Monographien einen entscheidenden Nachteil aufweisen: zwar ist die abstrakte Theorie vollständig und erschöpfend dargelegt, die vielschichtigen Anwendungen dieser Theorie auf die relevanten Probleme der mathematischen Physik und der Ingenieurwissenschaften sind jedoch in der Regel nur in speziellen Forschungsbeiträgen wiederzufinden. Die Überbrückung dieser Diskrepanz ist das erklärte Ziel des Verfassers. Demgemäß ist der Hauptteil des Buches den Anwendungen gewidmet. Unter den zahlreichen Beispielen, die einer ausführlichen Behandlung unterzogen werden, befinden sich die Wärmeleitungsgleichung, die Diffusionsgleichung, die Neutronen-Transportgleichung, die Schrödinger- und die Dirac-Gleichung, die Maxwellschen Gleichungen, die Fokker-Planck-Gleichung und die Gleichung von Chapman-Kolmogorov.

Aufgearbeitet oder zumindest kommentiert werden auch zahlreiche neuere Forschungsergebnisse, die erst in der Zeit nach dem Erscheinen der Kreinschen Monographie entstanden. Hier ist vornehmlich die Theorie der stark stetigen Cosinus-Familien zu nennen, die erst durch die fundamentalen Arbeiten von M. Sova im Jahre 1966 und durch weitere Ergebnisse des Verfassers selbst in den Jahren 1967 und 1968 zu einem Abschluß gekommen ist.

Nicht behandelt werden Cauchy-Probleme für nichtlineare Differentialgleichungen jedweder Art. Wer erwartet, die mit der Einführung der maximal monotonen Operatoren durch G. Minty im Jahre 1962 einsetzende und durch die Pionierarbeit von Y. Komura im Jahre 1967 entfachte rasante Entwicklung der nichtlinearen Operatorenhalbgruppen und der damit verknüpften nichtlinearen Evolutionsgleichungen und -inklusionen in dem vorliegenden Buch wiederzufinden, mag einigermaßen enttäuscht sein. Insofern bedarf der Titel des Buches einer einschränkenden Korrektur, etwa: Das Cauchy-Problem für abstrakte lineare Differentialgleichungen. Man wäre auch nicht versucht, nach den klassischen Hadamardschen Resultaten zu blättern.

Mit diesen Einschränkungen wird das vorliegende Buch den Ansprüchen an ein enzyklopädisches Werk durchaus gerecht. Sehr beeindruckend ist das über 100seitige Literaturverzeichnis. Die ca. 1720 Literaturhinweise liefern auch dem Experten über den weitestgehend kanonischen Stoff des Buches hinaus eine wertvolle Hilfestellung bei der Erforschung spezifischer Problemstellungen. Trotz der sorgfältigen Quellenrecherchen des Verfassers und der sachgerechten Einbeziehung eines jeden Titels in den Textzusammenhang bleibt das Literaturverzeichnis höchstens bis zum Jahre 1978 einigermaßen zuverlässig.

Das Buch richtet sich in erster Linie an den anwendungsorientierten Mathematiker, den Physiker und den Ingenieur. Es kann eine gute Quelle sein bei der Suche nach effizienten Lösungsverfahren für spezielle Probleme der mathematischen Physik. Vom prospektiven Leser werden lediglich die üblichen Analysis-Grundkenntnisse sowie einige Vertrautheit mit dem Lebesgueschen Integralbegriff und elementaren Tatsachen der Funktionalanalysis erwartet. Spezielle Kenntnisse aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen werden nicht vorausgesetzt; das Buch enthält einen kompletten Abriß der Sobolevraum-Theorie partieller Differentialgleichungen. Der enzyklopädische Charakter wird durch einen reichhaltigen Index unterstrichen; das Werk ist wegen der sehr detaillierten Beweise und der sorgfältig ausgearbeiteten Beispiele auch als Lehrbuch für Studenten der Mathematik und Physik im Hauptstudium brauchbar.

Das mit großem Sachverstand geschriebene, durch ein Vorwort von F. E. Browder ergänzte und von Addison-Wesley hervorragend ausgestattete Buch sollte zum ständigen Instrumentarium eines jeden anwendungsorientierten Mathematikers gehören.

Erlangen H. Grabmüller

Krasnosel'skiĭ, M. A., Zabreĭko, P. P., Geometrical Methods of Nonlinear Analysis (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 263), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer Verlag 1984, XIX + 409 S., geb., DM 138,–

M. A. Krasnosel'skiĭ hat viele Bücher zum Thema Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen auf Integral- und Differentialgleichungen geschrieben, mehr mit Kollektiven als allein, insbesondere: Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Pergamon 1964 (kurz: „top methods"); Positive solutions of operator equations, Noordhoff 1964; Plane vector fields, Acad. Press 1966; The operator of translation along trajectories of ODEs, Amer. Math. Soc. 1968; Approximate solutions of operator equations, Noordhoff 1972. Von den „top methods" haben viele Mathematiker in West und Ost gezehrt; sie sind seit langem vergriffen.

Das neue Buch (Übersetzung des russischen Originals von 1975) ist im wesentlichen eine modernisierte Version dieses einflußreichen Werks; modernisiert soll heißen, daß es auf den Stand um 1970 gebracht wurde, von einigen Beiträgen der Autoren und ihrem Gefolge bis 1975 abgesehen. Es kann weitgehend als Ersatz für die genannten alten Bücher dienen; dadurch erspart man sich langweilige Wiederholungen, die man in diesen zuhauf findet. Die Umkehrung ist leider auch richtig: wer die alten kennt, hat von dem neuen nicht viel.

Was man findet ist Abbildungsgradtheorie in epischer Breite, endlichdimensional und für kompakte Störungen der Identität in unendlichdimensionalen Räumen; aus heutiger Sicht unbefriedigende Kapitelchen über Mengenkontraktionen, Fixpunkte, dissipative Operatoren, mengenwertige Abbildungen und Näherungslösungen; noch immer Gutes über positive Lösungen und Verzweigung, Gebiete, in denen M. A. Krasnosel'skiĭ Bahnbrechendes geleistet hat; viele „weiche" Anwendungen. Wer sich anhand dieses Buches in das Gebiet einarbeiten oder Vorlesungen darüber halten will, wird schnell erkennen, daß die formal fehlenden Übungsaufgaben tatsächlich vorhanden sind: zu viele leichte Sätzchen sind zu Sätzen hochstilisiert, oft sogar zu Kochrezepten, „Prinzipien" genannt. Vielleicht sollte man in diesem Punkt berücksichtigen, daß das Buch laut Vorwort auch für „mechanische" Ingenieure mit Interesse an qualitativer Theorie gedacht ist; ernst gemeint bedeutet dies dann auch, daß man mehr als die fünf unscheinbaren Bildchen hätte malen können, noch dazu bei diesem Titel. Auch bezüglich des so wertlosen Literaturverzeichnisses hätte allen Beteiligten in den neun Jahren seit der russischen Ausgabe etwas einfallen können.

Was man also kaufen kann ist ein historisches Werk eines Altmeisters der Nichtlinearen Funktionalanalysis und seines schon „serienmäßigen" Koautors, sogar ein billiges, bedenkt man die sehr gute Ausstattung und die Zeit, die ein deutscher Professor (Ch. Fenske, Gießen) darauf verwendet hat, es zu übersetzen.

Paderborn K. Deimling

Biedenharn, L. C., Louck, J. D., Angular Momentum in Quantum Physics – Theory and Application (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 8), Reading, Mass.: Addison-Wesley 1981, xxxii + 716 S., hardbound, $ 68.15

Biedenharn, L. C., Louck, J. D., The Racah-Wigner Algebra in Quantum Theory (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 9), Reading, Mass.: Addison-Wesley 1981, XC + 534 S., hardbound, $ 68.15

Diese beiden Bände der wohlbekannten Autoren müssen heute als das definitive Standardwerk über die Mathematik des quantentheoretischen Drehimpulses gelten. Dabei geht aus der verwendeten Terminologie eindeutig hervor, daß sich das Werk in erster Linie an den Physiker wendet, der die Theorie hier systematisch und ziemlich vollständig entwickelt vorfindet.

Die letzten Abschnitte jedes Kapitels bilden Anmerkungen von oft interessanten historischen Details, Appendices und Literaturangaben. Für Übersichtlichkeit ist durch Tabellen, Symbolliste, Autoren- und Sachverzeichnis gesorgt. Verläßlichkeit bei der Behandlung der „berüchtigten" Phasenkonventionen scheint gegeben. Zur Orientierung sei zunächst der Inhalt von Band 8 grob angegeben.

Teil I: 1. Einleitung, 2. Kinematik der Rotationen, 3. Standardbehandlung des Drehimpulses in der Quantenmechanik, 4. Theorie der Wendungen nach Hamilton, 5. Anwendung des Bosonkalküls auf die Theorie der Wendungen. 6. Bahndrehimpuls und Kugelfunktionen.

Teil II: Anwendungen. 1. Einleitung, 2. Grundprinzipien, 3. Zeemaneffekt, 4. Wasserstoffatom, 5. Atomspektren, 6. Elektromagnetische Prozesse, 7. Drehimpulstechniken in der Dichtematrixformulierung, 8. Winkelkorrelationen und -verteilungen bei Reaktionen, 9. Kernstruktur, 10. Körperfeste Bezugssysteme, sphärischer Kreisel.

Die Kapitel 3 und 6 sind für den Anwendungsteil die wichtigsten. Die Abschnitte 4 und 5 bieten eine interessante, nicht in jedem Einführungstext zu findende alternative Methode, die dann für den folgenden Band 9 von besonderer Bedeutung ist. Nicht Eingang gefunden hat leider eine von Newman und Penrose angegebene wirkungsvolle Alternative zur Multipolentwicklung von Tensorfeldern, die Entwicklung nach Kugelfunktionen mit Spingewicht und der praktische Operator $\eth$.

Dieses für den theoretischen und mathematischen Physiker äußerst wichtige Werk wird den abstrakten reinen Mathematiker vielleicht nicht so reizen, wenn er statt mit physikalischen Systemen eher mit Strukturen, Abbildungen, Morphismen etc. umzugehen gewöhnt ist. Für ihn ist hervorzuheben, daß sich am Beginn von Band 9 eine 60 Seiten umfassende, vom bekannten Mathematiker G. Mackey verfaßte Einleitung befindet, die für beide Bände gemeint ist. Er beschreibt erst die grundlegende mathematische Struktur der Quantenmechanik, sodann die Formulierung und Rolle der Rotationsinvarianz in diesem Rahmen und schließlich in mathematisch abstrakter Sprache Begriffsbildung und Problemstellung der Theorie der „irreduziblen Tensoroperatoren".

Inhalt von Band 9: 1. Einleitung, 2. Algebraische Strukturen in Verbindung mit Wigner- und Racah-Operatoren, 3. Kern-Eigenschaften und Struktursätze für die RW-Algebra, 4. W-Algebra als Algebra invarianter Operatoren. 5. Spezielle Themen (u. a.: Symmetrien in der Quantenmechanik; Monopol-Harmonische und komplexe Linienbündel; Unschärferelationen für Drehimpulse; Verbindung zur projektiven Geometrie; Umkopplungstheorie und Graphentheorie).

Bei den genannten Algebren handelt es sich um Algebren von beschränkten Operatoren, deren Matrixelemente die Wigner- bzw. Racah-Koeffizienten sind. Die Struktur dieser Algebren erfaßt die bekannten und neuen Eigenschaften der Koeffizienten systematisch und erschließt neue Anwendungen. Die speziellen Themen stellen überraschende Querverbindungen zwischen den Wigner- und Racah-Koeffizienten und verschiedenen anderen Gebieten der Physik und Mathematik her. Es wäre zu hoffen gewesen, daß auch die originelle Penrosesche Idee der Spin-Netzwerke Eingang gefunden hätte, doch liegt hierfür anscheinend noch zu wenig zugängliches Material vor.

Wien H. Urbantke