87. Band Heft 3
ausgegeben am 23. 7. 1985

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

B. G. Teubner Stuttgart 1985

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 86/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 94,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 89 01-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 87, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

R. Gernert: Drei Register über biographische Beiträge im Jahresbericht der DMV, Bd. 1 bis 83

R. Göbel: Wie weit sind Moduln vom Satz von Krull-Remak-Schmidt entfernt?

H. Knörrer: Integrable Hamiltonsche Systeme und Algebraische Geometrie

E. Neher: Jacobis Tripelprodukt Identität und η-Identitäten in der Theorie affiner Lie-Algebren

R. Schaback: Numerische Approximation

G. Schubring: Die Entwicklung des Mathematischen Seminars der Universität Bonn 1864–1929

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein
87 (1985) 91–107
AMS subject classification: 60 F 99

A Subsequence Principle in Probability Theory

S. D. Chatterji*), Lausanne

"Tout ce qui existe dans l'univers est le fruit du hasard et de la nècessitè" (Democritus; prefatory citation in "Le hasard et la nécessité" by Jacques Monod, Seuil, Paris (1970)).

§ 1 Introduction

The subsequence principle referred to in the title affirms, if it were to be stated in general non-mathematical terms, that subsequences drawn from completely arbitrary sequences of observations will often manifest the same stochastic fluctuations as those which are generally associated with sequences of independent identically distributed random variables. Before stating the principle in more precise terms let us note that manifestations of surprising randomness have been noticed in recent years in subsystems of perfectly deterministic dynamical systems arising in the most varied areas of mathematics and mathematical physics (cf. an article by Saari and Urenko [24] for an accessible elementary treatment of some relevant recent work).

Let us now give a preliminary heuristic statement of the subsequence principle. Let (Ω, Σ, μ) be an arbitrary abstract (non-negative but not necessarily finite) measure space and let $g_n : \Omega \to \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, be any sequence of real valued measurable functions. If for some fixed p, $0 < p < \infty$, $\sup_n \int |g_n|^p d\mu < \infty$, then the principle states that a subsequence of $\{g_n\}$ can be determined in such a way that any further subsequence of it will behave, in many respects, in the same way as do sequences of real valued independent identically distributed random variables with finite p-th absolute moments. For instance, if $p = 1$, a subsequence of $\{g_n\}$ may be chosen so that all further subsequences of it will satisfy the strong law of large numbers i.e. their arithmetic averages will converge a.e. (μ). This striking theorem is due to Komlós [20] and is stated in a precise way later (in § 3). If $p = 2$, theorems of the central limit type and of the law of iterated logarithms type can be proven for suitable subsequences of $\{g_n\}$. (Cf. theorems 3 and 4 in § 3.) Many other examples can be and will be cited in the sequel. In fact, in the statement of

*) This is a somewhat enlarged English version of an invited one hour lecture given at the DMV meeting in Köln in September 1983.

the principle, the p-th absolute moments can be replaced by other more general functionals. Indeed, it turns out that the principle itself can be given a very general exact mathematical formulation (given in § 4); this is due to the remarkable work of Aldous [1]. Even though this latter may not be the ultimate "truth" concerning the subsequence principle (cf. remarks in § 4), it already contains the foregoing theorems and illustrates in a convincing way the universality of the subsequence principle.

One word about the history behind the subsequence principle. I became convinced of its validity soon after having seen Komlós' paper [20]. The fact that I was aware of a number of older results in a similar vein (discussed in § 5) only strengthened my conviction. This led to the papers [4], [6], [7] (amongst others) which entirely reconfirmed my original belief in the subsequence principle and which I had already stated (in the above heuristic form) somewhat earlier in [5]. It turns out that Gaposhkin working independently in Russia had also been deriving results similar to those predicted by the subsequence principle (cf. [16]); although he apparently never stated the principle explicitly, it is clear from his work (of which I became aware only much later in 1974) that he was also moved by a conviction similar to mine. It is the unrivalled merit of Aldous [1] that he conceived of an exact mathematical formulation of the principle and managed to prove it by using ideas entirely different from those used by Gaposhkin or Komlós or me.

The outline of the rest of the paper is as follows. After establishing some necessary notation we state the known instances of the subsequence principle in § 3 and indicate there, one simple proof which gives the flavour of the methods used initially to prove them. In § 4, we give Aldous' formulation of the subsequence principle and discuss it. In § 5, we cite some of the older results on "lacunary" sequences which can obviously be considered as some early manifestations of the subsequence principle. In § 6 we indicate the new problems that arise when we consider sequences of vector valued functions (the vector space being a Banach space) and state some of the recent results proven.

§ 2 Notations and conventions

In the sequel, we shall be concerned with measurable functions defined on some fixed but arbitrary (non-negative) measure space (Ω, Σ, μ) i.e. Ω is a set, Σ is a sigma-algebra of subsets of Ω and $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ is a countably additive set function. In § 4, μ will be a probability measure i.e. $\mu(\Omega) = 1$. In § 5, Ω will be $\mathbf{R}$ or intervals thereof and μ will then be Lebesgue measure on the corresponding Borel subsets Σ. In § 6, the functions considered will take their values in a real or complex Banach space E, the measure space (Ω, Σ, μ) being again quite general. In sections 3, 4, 5 we shall consider only real valued functions; the possible generalizations are indicated here and there and obviously in § 6.

By L^p, $0 < p < \infty$, we shall denote the space of measurable functions $g : \Omega \to \mathbf{R}$ such that $\int |g|^p d\mu < \infty$. If E is a Banach space, L^p_E will denote the corresponding space of strongly measurable functions $g : \Omega \to E$ such that $\int |g|^p d\mu < \infty$. A sequence in L^p_E will be generally denoted by a map $F : \{1, 2, \ldots\} \to L^p_E$, the value of F at n being indicated by F_n. The sequence F in L^p_E will be called bounded if

$\sup_n \int |F_n|^p d\mu < \infty$. A sequence $\tilde{F}$ will be called a subsequence of F if $\tilde{F}_n = F_{\sigma(n)}$ where $\sigma : \{1, 2, \ldots\} \to \{1, 2, \ldots\}$ and $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots$. On occasions, a sequence or subsequence will also be noted as $\{f_n\}$.

§ 3 Subsequence principle: illustrative examples

Theorem 1 *Let* p *be a fixed number in* $]0, 2[$ *and let* F *be any bounded sequence in* L^p *over an arbitrary measure space* (Ω, Σ, μ). *Then there exists a subsequence* $\tilde{F}$ *of* F *and a function* α *in* L^p *such that for any subsequence* $\{f_n\}$ *drawn from* $\tilde{F}$ *we have*

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} n^{-1/p} \sum_{k=1}^{n} \{f_k - \alpha\} = 0 \qquad \text{a.e.} \quad (\mu)$$

If $0 < p < 1$, *we may take* $\alpha = 0$ in (1).

For $p = 1$, the theorem was proven by Komlós [20]. In this case, the theorem illustrates the subsequence principle as regards the Kolmogorov strong law of large numbers for independent identically distributed real valued integrable random variables; this latter is, in fact, a corollary of it (cf. also the remarks in the concluding part of § 4).

The general case of $0 < p < 2$ is given in my paper [4] and illustrates the subsequence principle as regards Marcinkiewicz-Zygmund's strengthening of Kolmogorov's strong law to the case of independent, identically distributed real valued random variables with finite p-th absolute moments (cf. Loève [21] p. 243). As remarked in my paper [4], the case $p = 1$ is the most difficult one. Some of the efforts directed towards proving the theorem in this case as well as certain remarks on the origin of the problem are to be found in Komlós paper [20]. In particular, an important precursor is an article of Révész [23] which contains the following result.

Theorem 2 *Let* F *be a bounded sequence in* L^2 *over an arbitrary measure space* (Ω, Σ, μ). *Then there is a subsequence* $\tilde{F}$ *of* F *and a function* α *in* L^2 *such that for any subsequence* $\{f_n\}$ *drawn from* $\tilde{F}$ *we have that:*

(*) *the series* $\sum_n c_n\{f_n - \alpha\}$ *converges* a.e. (μ) *whenever* $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, $c_n \in \mathbf{R}$.

Actually, in this theorem, once one has a subsequence $\{f_n\}$ with the given property (*), all its further subsequences will automatically possess the same property (*) so that the introduction of the subsequence $\tilde{F}$ is unnecessary in the statement of theorem 2. We have done so only to maintain a certain symmetry in the statements of our theorems. However, in the other theorems, that a subsequence $\tilde{F}$ can be chosen such that *all* its further subsequences have a given property is *not* an immediate consequence of the fact that *one* subsequence can be chosen with the given property. (See however [14] and the references there for a study of this type of question.)

Two immediate consequences of theorem 2 should be noticed. Firstly, if we take $c_n = 1/n$ in theorem 2, then we may conclude, via a standard reasoning using a lemma due to Kronecker, that from any sequence bounded in L^2 we may obtain a subsequence all of whose further subsequences satisfy the strong law of large numbers i.e. we have a proof of the Komlós theorem in the case of sequences bounded in L^2. Secondly, by taking $c_n = n^{-(1+\epsilon)/2}$, $\epsilon > 0$, we can conclude, as before, that there are subsequences $\tilde{F}$ in any L^2-bounded sequence F such that

$$\text{(2)} \qquad \lim_{n\to\infty} n^{-(1+\epsilon)/2} \sum_{k=1}^{n} (f_k - \alpha) = 0 \qquad \text{a.e.} \quad (\mu)$$

for a suitable α in L^2 and any subsequence $\{f_n\}$ drawn from $\tilde{F}$ – and any $\epsilon > 0$. For the last point, it suffices to choose, by a diagonal procedure, a subsequence $\tilde{F}$ which satisfies (2) for a sequence $\epsilon_k > 0$, decreasing to 0. Indeed, the same reasoning shows that the factor $n^{-(1+\epsilon)/2}$ may be replaced by others which go to 0 much more slowly; for instance, $n^{-1/2}(\ln n)^{-(1+\epsilon)/2}$, $\epsilon > 0$, will obviously do. However, it is clear from considerations of the applicability of the central limit theorem to sequences of square integrable independent, identically distributed real valued random variables that the factor $n^{-1/2}$ will not be appropriate in (2).
The question now arises as to what more can be said in the L^2-bounded case. For instance, are theorems like the central limit theorem or the law of the iterated logarithm true for suitable subsequences of arbitrary L^2-bounded sequences? The answer is essentially in the affirmative as indicated in the following theorems.

Theorem 3 *Let* F *be any bounded sequence in L^2 over an arbitrary measure space (Ω, Σ, μ). Then there is a subsequence $\tilde{F}$ of* F *and functions α in L^2 and β in L^1_+ such that for any sequence $\{f_n\}$ drawn from $\tilde{F}$ we have:*

$$\text{(i)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k = \alpha \qquad \text{a.e.} \quad (\mu).$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (f_k - \alpha)^2 = \beta \qquad \text{a.e.} \quad (\mu).$$

(iii) *On the set* $A_0 = \{\beta = 0\}$, $n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} (f_k - \alpha) \to 0$ *in μ-measure.*

(iv) *If* $A \in \Sigma$ *is such that* $0 < \mu(A) < \infty$ *and* A *is disjoint of* A_0 *then*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left\{A; (\beta n)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} (f_k - \alpha) \leqslant x\right\} = \mu(A)\cdot(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp(-y^2/2)\,dy,$$

$-\infty < x < \infty$.

An alternative but equivalent form of theorem 3 would be to combine (iii) and (iv) in one statement to the effect that for all $x \in \mathbf{R}$,

$$\text{(3)} \qquad \lim_{n\to\infty} \mu\left\{A; n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} (f_k - \alpha) \leqslant x\right\} = \mu(A)\cdot G(x; \beta, A)$$

for any choice of A in Σ such that $0 < \mu(A) < \infty$ and where G (as a function of x) is a distribution function which is a certain mixture of normal distributions whose characteristic function $\psi(\cdot;\beta, A)$ is given by

$$\psi(t;\beta, A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)G(dx;\beta, A) = (1/\mu(A) \int_A \exp\{-\beta(\omega)t^2/2\}\mu(d\omega).$$

Notice that α and β play the roles of mean and variance; their existence, as affirmed in (i) and (ii) of theorem 3, is, of course, an immediate consequence of Komlós' theorem. It is interesting to note that $(\beta n)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} (f_k - \alpha)$ converges to a law in a mixing way – in the sense of Rényi and others – exactly as in the corresponding case of independant, identically, distributed, square integrable, real valued random variables. We remark further that the formulation (3) (or (iv)) seems to be one reasonable way for stating limit laws in the case of infinite measure spaces. Theorem 3 along with various generalizations appear in Chatterji [6] and Gaposhkin [15], [16].

We note also that the introduction of β is inevitable in the statement of the theorem and hence requires making a distinction between the set where $\beta = 0$ and the set where $\beta > 0$. On the one hand, if all the functions F_n of the given sequence F are equal to the same one α (or if $F_n \to \alpha$ somewhat rapidly) then it is clear that the only limit law that we can hope to obtain from expressions of the type $n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} (f_k - \alpha)$, for any subsequence $\{f_n\}$ of F, would be the degenerate law. This is covered by (iii) of theorem (3) and corresponds to the case of independent, identically distributed real random variables which are almost surely equal to a fixed constant. Consider, on the other hand, a sequence of independent, identically distributed real random variables $\{\xi_n\}$ on a probability space (Ω, Σ, P) such that $E\{\xi_n\} = 0$, $E\{\xi_n^2\} = 1$. If $g : \Omega \to \mathbf{R}$ is an arbitrary bounded measurable function, then $F_n(\omega) = g(\omega) \cdot \xi_n(\omega)$ defines a bounded sequence $F = \{F_n\}$ in L^2. In this case, any subsequence $\{f_n\}$ of F would satisfy (i) and (ii) of theorem 3 with $\alpha = 0$ and $\beta = g^2$ and the limit law must necessarily involve g^2 as indicated in (iii) and (iv) of theorem 3 or as in statement (3). Notice further that if g is any real random variable which is independent of the ξ_n's and is such that $E\{|g|^2\} < \infty$ then the above sequence $\{f_n\}$ would even be an orthogonal sequence bounded in L^2 (orthonormal if and only if $E\{|g|^2\} = 1$). We see that even in the presence of orthogonality in the F_n's, weighted limit laws like those of (3) would be inevitable – an observation first made in Morgenthaler [22].

We now state the analogue of the law of the iterated logarithm.

Theorem 4 *Let* F *be any bounded sequence in L^2 over an arbitrary measure space (Ω, Σ, μ). Then there is a subsequence $\tilde{F}$ of* F *and functions α in L^2 and β in L^1_+ such that for any sequence $\{f_n\}$ drawn from $\tilde{F}$ we have:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k = \alpha$ a.e. (μ)

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (f_k - \alpha)^2 = \beta$ a.e. (μ)

$$\text{(iii)} \qquad \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} (f_k - \alpha)}{(2n \ln \ln n)^{1/2}} \right] = \beta^{1/2} \qquad \text{a.e.} \quad (\mu).$$

It follows immediately (by passing from F_n to $-F_n$) that $\tilde{F}$ can be so chosen in theorem 4 that the lim inf in (iii) there would be equal to $-\beta^{1/2}$. Thus theorem 4 gives the complete analogue of the law of the iterated logarithm for independent identically distributed square integrable real random variables as given by Hartman and Wintner (cf. Straßen [27]). Theorem 4 appears in Chatterji [7]. Similar theorems appear also in Berkes [2] and in Gaposhkin [16].

We must add that in [6], [7], [15], [16] generalizations of theorems 3 and 4 to the case of weighted sums $\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} f_j$ are also given. See also [8] for theorems generalizing theorem 2 to such weighted sums.

Let us now indicate briefly the method used by various authors (before Aldous) to prove these and related theorems. The main idea is to obtain a subsequence $\tilde{F}$ of the given sequence F such that $\tilde{F}$ is very close to being a "strongly orthogonal" sequence in some appropriate sense. To illustrate the idea, let us take up the proof of theorem 2. Notice that we may suppose, without loss of generality, that the underlying measure space (Ω, Σ, μ) is a probability space i.e. $\mu(\Omega) = 1$. Indeed, since the theorem has to do with a denumbrable number of real valued functions in L^2, there is a μ-sigma-finite set $S \subset \Omega$ such that all the considered functions vanish outside S. Thus $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$, $\mu(S_j) < \infty$, S_j's disjoint. If we can find a suitable subsequence for each S_j, the diagonal procedure would assure a subsequence such that theorem 2 would be valid for all of S and hence for all of Ω. Thus we have reduced the problem to finite measure spaces and hence to probability spaces.

Let, then, F be a bounded sequence in L^2 over a probability space (Ω, Σ, μ). By passing to a subsequence, we may suppose that F converges weakly to a function α in L^2 i.e. $\int F_n \cdot f d\mu \to \int \alpha \cdot f d\mu$ for every f in L^2. By subtracting α from the F_n's we may suppose that $F_n \to 0$ weakly in L^2. We may now choose a sequence G of measurable simple functions (i.e. each taking a finite number of distinct values) such that $\int |F_n - G_n|^2 d\mu < 2^{-n}$ so that $G_n \to 0$ weakly in L^2 also. If we can choose a subsequence $\{g_n\}$ from G such that $\sum_n c_n g_n$ converges a.e. for every real sequence $\{c_n\}$ with $\sum_n |c_n|^2 < \infty$ then $\sum_n c_n f_n$ would also converge a.e. for the corresponding subsequence $\{f_n\}$ drawn from F. In other words, we have reduced our problem to the case of a bounded sequence G in L^2 (over a probability space (Ω, Σ, μ)) such that each function G_n is simple and $G_n \to 0$ weakly in L^2.

Let us now define a subsequence $\{g_n\}$ of G which would do for theorem 2. Take $g_1 = G_1$, $n_1 = 1$; since $G_n \to 0$ weakly, it follows that $E\{G_n | g_1\} \to 0$ as $n \to \infty$ (since the conditional expectation concerned takes values of the type $(1/\mu(A)) \cdot \int_A G_n d\mu$ on μ non-null sets A which are sets of constancy of the simple function g_1). Thus we can find n_2 such that $|E\{G_n | g_1\}| < 2^{-2}$ if $n \geq n_2$. By the same reasoning, we can define inductively $1 = n_1 < n_2 < \ldots$ such that if $g_k = G_{n_k}$ then

$$|E\{G_n | g_1, \ldots, g_{k-1}\}| < 2^{-k} \quad \text{for } n \geqslant n_k.$$

The sequence g_k then is such that

$$|E\{g_k | g_1 \ldots g_{k-1}\}| < 2^{-k};$$

in other words, $\{g_k\}$ is very vlose to being a martingale difference sequence (which is a property of "strong orthogonality"; recall that if $E\{g_k | g_1 \ldots g_{k-1}\} = 0$ then $\{g_k\}$ is called a martingale difference sequence). From standard properties of these sequences (and the fact that $\sup_n \int |g_n|^2 d\mu < \infty$) we conclude that $\sum_n c_n g_n$ is convergent a.e. (μ) if only $\sum_n |c_n|^2 < \infty$. This concludes the proof of theorem 2. The details of this argument can be seen in [4] where the origin of this type of reasoning is acknowledged to be that contained in Komlós [20].

In the proof of all the other theorems, the choice of the martingale difference type sequence is done in such a way that the theorem concerned can be deduced. This involves some further work since central limit theorems and laws of the iterated logarithm type for martingale difference sequences are not yet conveniently available in sufficient generality (see however the work in [5], [6], [7] and the references there).

§ 4 Subsequence principle: a mathematical formulation

We shall now present the mathematical formulation (i.e. a theorem) given by Aldous [1] for the subsequence principle in so far as a.e. convergence properties are concerned. Aldous [1] has also given a corresponding theorem for the subsequence principle as regards convergence in law; this latter is not as succinct as the one concerning a.e. convergence and it is reasonable to hope for a better version in the future. In any case, it is only fair to remark that his theorem concerning convergence in law does contain the corresponding theorem 3 (§ 3) of this paper.

In this section, (Ω, Σ, μ) would be a fixed probability space. Let P be the set of all probability measures on $\mathbf{R}$; P will be considered as a complete separable metrizable space (Polish space) under the usual topology of weak convergence ($\nu_n \to \nu$ weakly if $\int f d\nu_n \to \int f d\nu$ for every bounded, continous $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$). By $\mathbf{R}^\infty$ we shall denote the topological vector space of all real sequences $x = (x_n)_{n \geqslant 1}$ endowed with its usual product topology which makes it a Polish space also. If ν is a probability measure on $\mathbf{R}$, let ν^∞ denote the corresponding product probability measure $\nu \otimes \nu \otimes \ldots$ on $\mathbf{R}^\infty$.

Following Aldous [1], we now define a *statute* to be a Borel subset $A \subset P \times \mathbf{R}^\infty$ such that for any $\nu \in P$, $\nu^\infty(A_\nu) = 1$ where $A_\nu = \{x \in \mathbf{R}^\infty : (\nu, x) \in A\}$ is the ν-section of the set A.

In so far as ν^∞ is the mathematical model of a sequence of independent, identically distributed real valued random variables, the notion of a statute covers that of an a.e. limit property concerning the latter. Let us give two examples of important statutes to understand the notion better. For this, let us introduce the following notations: if $\nu \in P$, write

$$|\nu|_p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \nu(dx), \qquad 0 < p < \infty$$

$$\alpha(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x\nu(dx) \qquad \text{if } |\nu|_1 < \infty,$$

$$\beta(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\nu(dx) - \alpha^2(\nu) \quad \text{if } |\nu|_2 < \infty;$$

Now, let K be the set of those $(\nu, x) \in P \times \mathbf{R}^\infty$ such that either $|\nu|_1 = \infty$ (and then no conditions on x) or else $|\nu|_1 < \infty$ and then $x \in \mathbf{R}^\infty$ is such that $(1/n) \sum_{j=1}^{n} x_j \to \alpha(\nu)$ as $n \to \infty$. In other words,

$$K \subset P \mathrm{x} \mathbf{R}, \qquad x = (x_n), \qquad \text{and}$$

$$K = \left\{(\nu, x) : |\nu|_1 = \infty\right\} \cup \left\{(\nu, x) : |\nu|_1 < \infty, \lim_{n \to \infty} (1/n) \sum_{j=1}^{n} x_j = \alpha(\nu)\right\}.$$

It is easy to see that the fact that K is a statute is essentially equivalent to Komogorov's strong law of large numbers for independent, identically distributed real valued random variables. Let us now define the statute corresponding to the law of the iterated logarithm for the same situation. With notation as before let $L \subset P \mathrm{x} \mathbf{R}$ be such that

$$L = \left\{(\nu, x) : |\nu|_2 = \infty\right\} \cup \left\{(\nu, x) : |\nu|_2 < \infty, \limsup_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \{x_j - \alpha(\nu)\}/\theta(n) = \sqrt{\beta(\nu)}\right\}$$

where $\theta(n) = (2n \ln \ln n)^{1/2}$. The fact that L is a statute is equivalent to the Hartman-Wintner law of the iterated logarithm.

We now define the notion of a *limit statute* (again following Aldous [1]); a Borel subset A of $P \mathrm{x} \mathbf{R}^\infty$ is called a limit statute if A is a statute such that whenever $(\nu, x) \in A$ and $y \in \mathbf{R}^\infty$ is such that $|x - y|_1 = \sum_j |x_j - y_j| < \infty$ then $(\nu, y) \in A$. The idea is that if $(\nu, x) \in A$ and y is not too different from x then $(\nu, y) \in A$; the limit statutes A correspond to those a.e. properties (of independent, identically distributed real valued random variables) which remain unchanged if the given sequence of random variables is replaced by another one which is asymptotically equivalent in a suitable sense. We note that the statutes K, L defined above are obviously limit statutes.

We are now in a position to state Aldous' main theorem concerning the a.e. convergence results in the subsequence principle.

Theorem 5 (Aldous [1]) *Let* F *be any sequence of real valued random variables defined on an arbitrary probability space* (Ω, Σ, μ) *such that the laws of the* F_n*'s form a tight family of probability measures* (*i.e. for all* $\epsilon > 0$, *there exists a finite* $M = M_\epsilon > 0$ *such that* $\mu\{|F_n| \leqslant M\} > 1 - \epsilon$, $n = 1, 2, \ldots$). *Let* A *be any limit statute. Then, there exists a subsequence* $\tilde{F}$ *of* F *and a measurable map*

$\lambda : \Omega \to P$ *such that for any subsequence* $\{f_n\}_{n \geq 1}$ *chosen from* F *we have*

$$(\lambda(\omega), (f_n(\omega)_{n \geq 1})) \in A, \qquad \omega \quad \text{a.e.} \quad (\mu)$$

Further, the map λ *is such that*

$$(4) \qquad \int_\Omega |\lambda(\omega)|_p \mu(d\omega) \leq \limsup_{n \to \infty} \int_\Omega |F_n(\omega)|^p \mu(d\omega)$$

for any $p \in]0, \infty[$.

Before commenting on the proof of this far-reaching theorem, let us note how Komlós' theoremfollows immediately from it. Note first that if the sequence F in theorem 5 is bounded in L^1 (or in any L^p) then the tightness condition there is automatically fulfilled; further, it follows then from (4) that the map λ mentioned there is such that $|\lambda(\omega)|_1 < \infty$ a.e. (ω). Now, if we take as our limit statute in theorem 5 the one called K above, then we see that from any bounded sequence F in L^1 we can obtain a subsequence $\tilde{F}$ such that for any further subsequence $\{f_n\}$ of $\tilde{F}$ we shall have that

$$(\lambda(\omega), (f_n(\omega)) \in K, \qquad \omega \quad \text{a.e.} \quad (\mu).$$

By the definition of K and the fact that $|\lambda(\omega)|_1 < \infty$ ω a.e. in this case, we see that,

$$\lim_{n \to \infty} (1/n) \sum_{j=1}^{n} f_j(\omega) = \alpha(\lambda(\omega)), \qquad \omega \quad \text{a.e.} \quad (\mu)$$

which is Komlós' theorem.

It is clear also that using the limit statute L in theorem 5 yields our theorem 4 of § 3. The reader will have no difficulty in formulating the right limit statutes K_p which would lead to theorem 1 from theorem 5.

To explain the basic idea of Aldous' proof of theorem 5, we must introduce the concept of an *exchangeable* sequence of random variables (also called symmetrically dependent or permutable or interchangeable random sequences). A sequence $\{g_n\}_{n \geq 1}$ of random variables defined on a probability space (Ω, Σ, μ) (with values in any measurable space – here our immediate concern is with real valued random variables) is called an exchangeable sequence if the law of $(g_1, \ldots, g_n)$ is the same as that $(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})$ for any choice n distinct indices $i_1, \ldots, i_n$ and any $n = 1, \ldots$. This is obviously equivalent to saying that the law of $(g_1, \ldots g_N)$ is the same as that of $(g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(N)})$ for every permutation σ of $\{1, 2, \ldots, N\}$, $N = 1, 2, \ldots$. It turns out that an exchangeable sequence of real valued random variables $\{g_n\}$ can be characterized by the fact that they are conditionally independently identically distributed. More precisely, there exists a random probability measure i.e. a measurable map $\lambda : \Omega \to P$ (P being the space of all probability measures on $\mathbf{R}$) such that the conditional law of $\{g_n\}$ given λ is λ^∞. In analytical terms, this means that

$$(5) \qquad \mu\{g_1 \in B_1, \ldots, g_n \in B_n | \lambda\} = \prod_{j=1}^{n} \lambda(\cdot)(B_j)$$

for any Borel sets $B_j \subset \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$. This characterization generalizes to random variables with values in any Polish space – and actually somewhat beyond – and is due to the superposed efforts of many mathematicians like de Finetti, Hewitt and Savage, Kallenberg and others (cf. Aldous [1], Kingman [19] for some of the references). It may be pointed out here that recently Dubins and Freedman [13] have shown that the completely general case presents some measure theoretical pathologies.

Let us call the random probability measure λ that appears in the above characterization the *canonical random measure* associated with the exchangeable sequence $\{g_n\}$. It is immediately clear from the characterization that any theorem valid for independent, identically distributed sequences of random variables would be valid for exchangeable ones. More precisely, let $\{g_n\}$ be an exchangeable (real valued) sequence and let A be any statute (not necessarily a limit statute). Then

$$(6) \qquad (\lambda(\omega), (g_n(\omega))) \in A, \qquad \omega \quad \text{a.e.} \quad (\mu)$$

where λ is the canonical random measure associated with $\{g_n\}$. This intuitively obvious fact is an immediate consequence of (5) and the definition of a statute; the simple technical lemma needed is stated as lemma 1 in Aldous [1]. Notice further that any subsequences of an exchangeable sequence $\{g_n\}$, being identical in law with the original sequence, will itself also satisfy (6). If, now, F is any sequence of real valued random variables such that there is a subsequence $\tilde{F}$ and an exchangeable sequence (perhaps on some other probability space) of real valued random variables $\{g_n\}$ such that $\tilde{F}$ is *asymptotically equivalent* to $\{g_n\}$ (in the sense that on some probability space there exist sequences $\tilde{F}'$ and $\{g_n'\}$ such that the laws of $\tilde{F}$ and $\{g_n\}$ are the same as those of $\tilde{F}'$ and $\{g_n'\}$ respectively and $\Sigma_n |\tilde{F}_n - g_n'| < \infty$ a.s.) then it is obvious that any further subsequence $\{f_n\}$ of $\tilde{F}$ will satisfy $(\lambda(\omega), (f_n(\omega))) \in A$ ω a.e. (μ) for *every* limit statute A. Following Aldous, let us say that the sequence of real valued random variables F has property P′ if F has a subsequence $\tilde{F}$ of the type indicated above.

Thus, if F has property P′ then for some subsequence $\tilde{F}$ of it, the conclusion of theorem 5 would be valid simultaneously for all limit statutes A. Unfortunately, tightness alone does not suffice to deduce that F has property P′ and a counterexample is given in Aldous [1] (see also [19]). Hence, what Aldous does is to show first that given a tight sequence F, there is a subsequence F′ of $\tilde{F}$ and an exchangeable sequence $\{g_n\}$ (with associated canonical random measure λ) such that for any random variable V which is F′-measurable and any j, one has that $(V, F_n') \to (V, g_j)$ in law as $n \to \infty$. It is then shown that certain types of properties of $\{g_n\}$ (say given by a certain limit statute A) are shared by suitable subsequences $\tilde{F}$ of F′. Unfortunately, the subsequence chosen depends on the limit statute A. Hence, although given a denumerable family of limit statutes one can find, by a diagonal procedure, a subsequence which would work for all of the denumerably many limit statutes simultaneously (alternatively, we can use the fact that the intersection of a countable number of limit statutes is also a limit statute), the problem becomes more complicated if the number of limit statutes involved is non-denumerable – as, for example, would be the case in proving theorem 2 of § 3 where one limit statute is involved for each $c = (c_n)$ with $\sum_n |c_n|^2 < \infty$. By an uniformity argument, Aldous [1] manages, actually, to prove a more general theorem (given below as theorem 6); however, it is curious that in the present formulation of the subsequence principle a theorem like theorem 2 which is definitely easier then theorem 1 needs special treatment. This would indicate that a further generalization of theorem 5 is needed. In any case, here is what Aldous [1] can prove by generalizing his arguments.

Theorem 6 *Let* F *be a bounded sequence in* L^2 *such that* $F_n \to 0$ *weakly. Then there is a subsequence* $\{f_n\}$ *of* F *such that for any* $\{c_n\}$ *with* $\sum_n |c_n|^2 < \infty$ *and any permutation* σ *of the positive integers* $\{1, 2, \ldots\}$ *we have that* $\sum_n c_{\sigma(n)} f_{\sigma(n)}$ *converges a.s.*

Observe once again that if F had the property P′ mentioned in the preceding discussion, then theorem 6 would be almost immediate. It is curious that in all such theorems, things work as though the sequence F had property P′ but the rigorous proofs have to work via various devious alternative routes.
We remark also that once a theorem like theorem 6 or one of the theorems in § 3 has been proved, it immediately implies a corresponding result for exchangeable sequences. This is so since any subsequence of an exchangeable sequence has the same law as the whole sequence and hence satisfies exactly the same probabilistic properties. This remark shows that Aldous' approach via exchangeable sequences is obviously the right one. An interesting account of the various applications of exchangeability is contained in Kingman's article [19]. See also the monograph of Chow and Teicher [10] for a detailed mathematical introduction to this concept.
We close this section by remarking that Aldous [1] has also pointed out that most of his results (in particular theorem 5) would remain valid for random sequences taking values in an arbitrary separable metric space S (instead of **R**). $P(S)$ would no longer be a Polish space under the topology of weak convergence but its topology would remain separable and metrizable; also tightness of families of probability measures in S would continue to imply the weak sequential compactness which is so important in the proof of theorem 5. However, as remarked by Aldous also, this generalization does not seem to lead to any really interesting new results. The point of course is that for an "infinite dimensional" metric space (even if it be separable), tightness is a very stringent condition which is, in most cases, difficult to verify. Cf. the discussion in § 6.

§ 5 Related results on lacunary sequences

In this section, Ω will be a subinterval of **R** and μ the Lebesgue measure on the Borel subsets Σ of Ω. It is our purpose here to recall a number of older results concerning sequences F of measurable real valued functions on Ω which are related to the theorem of § 3. These results were concerned with one of the following three types of considerations: (a) Given an orthogonal sequence $\{\phi_j\}$ (e.g. $\phi_j(x) = \cos(2\pi jx)$, $x \in [0, 1]$) and a *specified* subsequence $j_1 < j_2 < \ldots$ prove probabilistic theorems like strong law, central limit theorem etc. for the specified sequence $\{\phi_{j_n}\}$. (b) Given a fixed function f prove probabilistic theorems for sequences of the type $f_n(x) = f(\lambda_n x)$ or $f_n(x) = f(\lambda_n + x)$ for *specified* λ_n's. (c) Given an orthogonal sequence $\{\phi_j\}$ find *suitable* subsequences $\{\phi_{j_n}\}$ such that certain probabilistic theorems are valid for them. It is clear that theorems of type

(c) are now entirely contained in the new developments outlined in § 3 and § 4. Important early examples of theorems of type (c) are given in the work of Morgenthaler [22] and Mary Weiss [30]. These investigations concentrate on the classical analytical notion of orthogonality and involve rather heavy calculations which become avoidable through the use of "strong orthogonality" involved in the probabilistic notion of a martingale difference sequence.
In studying these older results, one is struck by the importance given to the classical notion of orthogonality or some form of approximate orthogonality. It would seem now that the real analytical mechanism behind the validity of the various probabilistic theorems is the combination of tightness (as defined in § 4) and the mixing character of the sequences involved. Although we do not define and discuss this latter notion (various forms of which are well-known in probability theory and ergodic theory), we remark that its use is also evident in Aldous' work.
The problems of the other two types ((a) and (b)) are in some ways more difficult. The point is that a certain subsequence is specified as it were and we must deal with it directly – instead of blithely throwing away those items of a given sequence which are not suitable for the probabilistic property in question. It is imaginable that someday we shall have probabilistic theorems of such generality that they would include all the three types of theorems. For the moment, this seems somewhat unlikely – specially, if one considers the very special nature of some of the theorems in categories (a) and (b) (see infra). What is clear however for theorems in these categories is that the existence of the results given in § 3 and § 4 implies the *existence* of many subsequences for which they would be valid.
Be that as it may, we must start out by mentioning that it was the great merit of Kac (and Steinhaus) to have noticed in the late 30's and in the 40's that many typically probabilistic phenomena occurring in observations associated with games of chance (like repeated coin tossing) appear equally in connexion with lacunary trigonometric sequences (cf. p. 50–51 in Kac [18]; here, references to related works of Bohr, Jessen and Wintner will also be found). Kac's 1948 address before the American Mathematical Society (published in 1949 cf. Kac [18] p. 287–311) gives an account of these probabilistic properties manifested by lacunary series and the fluctuations of additive number-theoretical functions. It also contains many references to the related work of others – in particular to those of Erdös, Fortet, Salem and Zygmund. It seemed to have become qualitatively clear by 1948 that whenever many mutually incommensurable frequencies are superimposed (as in the theory of almost periodic functions) a very random (turbulent) behaviour emerges. A huge amount of more recent work in the most varied areas (which we shall not even be able to cite here) only confirms this conclusion. We note that in the editorial commentary added to the Selected Papers of Kac [18] (p. 1–22) some of the related later investigations have been noted down.
Let us now briefly mention a few of the results involved starting with one due to Kac, Salem and Zygmund (1948) (cf. Salem [25] p. 414–422). Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be 2π-periodic and square integrable over $[0, 2\pi]$ with $\int_0^{2\pi} f = 0$. Suppose further that

$$\int_0^{2\pi} (f - S_n)^2 = O((\ln n)^{-\sigma})$$

for some $\sigma > 2$ where S_n denotes the nth partial sum of the Fourier series of f. (This is an averaged smoothness condition on f and is certainly verified if f is, say, of bounded variation on $[0, 2\pi]$.) Then if $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ is a sequence such that $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1$ (the so-called Hadamard gap condition) then $\sum_n c_n f(\lambda_n x)$ converges a.e. (x) whenever $\sum_n c_n^2 \ln^2 n < \infty$.

Note that here, if we only suppose that $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is 2π-periodic, square integrable over $[0, 2\pi]$ with $\int_0^{2\pi} f = 0$ then we can easily prove (using theorem 2 of § 3) that given any sequence of real numbers $\{\tilde{\lambda}_n\}$ tending to ∞ there exists a subsequence $\{\lambda_n\}$ such that $\sum_n c_n f(\lambda_n x)$ converges a.e. (x) whenever $\sum_n c_n^2 < \infty$. This is because

$$\sup_{\lambda \geqslant 1} \int_0^{2\pi} |f(\lambda x)|^2 dx \leqslant 2 \int_0^{2\pi} |f|^2$$

and $f_\lambda \to 0$ weakly in $L^2[0, 2\pi]$ as $\lambda \to \infty$ where $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. The proof of the last statement is a straight-forward adaptation of a standard proof of the Riemann-Lebesgue lemma. Thus we obtain a much stronger statement valid for a larger class of sequences $\{c_n\}$ with no smoothness at all required of f – at the cost, evidently, of having no control over the nature of the subsequence $\{\lambda_n\}$.

Similarly, we can deduce from Komlós' theorem, with minimal effort, that if $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is 2π-periodic and integrable over $[0, 2\pi]$ with $\int_0^{2\pi} f = 0$ then given any sequence of real numbers $\{\tilde{\lambda}_n\}$ tending to ∞ there exists a subsequence $\{\lambda_n\}$ such that

$$(7) \qquad \lim_{n \to \infty} (1/n) \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k x) = 0 \qquad \text{a.e.} \quad (x).$$

Further, the $\{\lambda_n\}$ can be so chosen that the last relation holds for every subsequence $\{\lambda_n'\}$ of $\{\lambda_n\}$. For the proof, we need only notice that

$$\sup_{\lambda \geqslant 1} \int_0^{2\pi} |f(\lambda x)| dx \leqslant 2 \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

and that $f_\lambda \to 0$ weakly in $L^1[0, 2\pi]$ as $\lambda \to \infty$ where $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. The fact that the limit in (7) is 0 follows from this last remark and the known identification of the limit in Komlós' theorem.

Statement (7) is, of course, much stronger than anything that can be deduced from the results or methods of Kac, Salem and Zygmund (loc. cit.) – again however with the strong drawback of not being able to say anything much about the subsequences $\{\lambda_n\}$ that would work.

Another theorem (due to Kac (1946), [18] p. 178–194) is that

$$\lim_{n \to \infty} \mu \left\{ x \in [0, 1] : (1/\sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} f(2^k x) \leqslant v \right\} = (2\pi\beta)^{1/2} \int_{-\infty}^{v} e^{-u^2/2\beta} du$$

provided that $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x + 1) = f(x)$, f is of bounded variation on $[0, 1]$, $\int_0^1 f = 0$

and

$$\lim_{n\to\infty} (1/n) \int_0^1 |\sum_1^n f(2^k x)|^2 dx = \beta \quad \text{exists and is} > 0.$$

This is clearly a central limit theorem for the subsequence $\{f(2^k x)\}_{k \geq 0}$ of the sequence $\{f(nx)\}_{n \geq 1}$.
Let us finally mention the penetrating studies of the central limit theorem and the law of the iterated logarithm due to Salem and Zygmund (cf. [25]) and completed at some important points by M. Weiss [29]. These have to do with $f_k(x) = \rho_k \cos(n_k x - \theta_k)$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ where $n_k > 0$, $n_k/n_{k+1} \geqslant q > 1$ (the n_k being not necessarily integral). It is shown (Salem-Zygmund) that for any $A \subset [0, 2\pi]$, $v \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu \left\{ x \in A : (1/B_n) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant v \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{v} \exp(-u^2) du$$

provided that $B_n^2 = \rho_1^2 + \ldots + \rho_n^2 \to \infty$ and $(\rho_n/B_n) \to 0$. Further (Salem-Zygmund-Weiss)

$$\limsup_{n\to\infty} (1/\theta_n) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = (1/2)^{1/2} \qquad \text{a.e.} \quad (x)$$

if $B_n^2 = \rho_1^2 + \ldots + \rho_n^2 \to \infty$, $\rho_n = 0(B_n/\sqrt{\ln \ln B_n})$ and $\theta_n = (2B_n^2 \ln \ln B_n)^{1/2}$. It should be mentioned that exact analogues of these hold for suitable subsequences of arbitrary sequences of uniformity bounded measurable functions (cf. [7], [16], [30]).

§ 6 Vector valued case

In this section we discuss the analogues of the theorem in § 3 when the sequences F involved take their values in a Banach space E (with norm $|\cdot|$) while the underlying measure space (Ω, Σ, μ) is arbitrary (if necessary, an arbitrary probability space). As mentioned at the end of § 4, the development there (and in particular theorem 5) remains valid if the random variables concerned take their values in any separable metric space. Hence, all the theorems of § 3 would remain valid for (strongly measurable) random variables with values in an arbitrary Banach space E – provided that we impose the extra hypothesis that the sequences F involved form tight families. This means (for a probability measure μ) that for any $\epsilon > 0$ there is a compact set $K = K_\epsilon$ such that $\mu\{F_n \in K\} > 1 - \epsilon$ for $n = 1, 2, \ldots$. Now, in the case of infinite dimensional Banach spaces, tightness of a sequence F is a relatively strong condition; in particular, no moment boundedness condition on F would ensure the tightness of the latter. On the other hand, it is clear that the theorems of § 3 cannot all be true for all Banach spaces. For instance, consider the Komlós theorem. Its validity for bounded sequences F in L_E^1 would imply that E has the Banach-Saks property i.e. for any bounded sequence $\{x_n\}$ in E, there is a subsequence $\{x_{n(k)}\}_{k \geq 1}$ such that $(1/N) \sum_{k=1}^{N} x_{n(k)}$ has a (strong) limit in E as $N \to \infty$; all we have to do is to take $F_n(\omega) \equiv x_n$, (Ω, Σ, μ) being, say, a probability space. Now it is known that the Banach-Saks property implies reflexivity ([11]).

Hence, it is clear that there are Banach spaces E for which the Komlós theorem would not be valid.

Let us say that E has property (K) if for any bounded sequence F in L_E^1 over any measure space (Ω, Σ, μ) there is a subsequence $\tilde{F}$ such that for any further subsequence $\{f_n\}$ of $\tilde{F}$, $\lim_{n \to \infty} (1/n) \sum_{k=1}^{n} f_k$ exists a.e. Further, let us say that E has property (BS) (Banach-Saks) if from any bounded sequence $\{x_n\}$ in E a (C, 1)-convergent subsequence can be drawn. It is known (see e.g. [14]) that a subsequence then can be so chosen that all further subsequences will be (C, 1)-convergent i. E. The question is now whether there is a close relation between the two properties (K) and (BS).

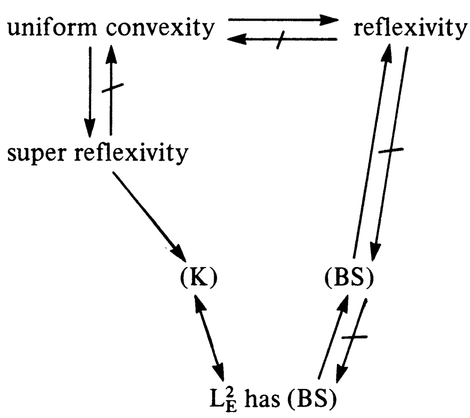
A more immediate question perhaps is to ask whether K is valid in a Hilbert space. Even this turns out to be rather difficult to prove (the answer is yes – due to Garling [17]; see also [9], [28]). In fact, the only case which is really easy to handle (starting with the work of § 3–4) is the case where E is finite dimensional; it is clear that all the theorems of § 3 would go through for this case.

Garling [17] has shown that if E is super-reflexive (i.e. E has an equivalent norm under which it becomes uniformly convex e.g. $E = L^p$, $p > 1$) then E has property (K). Garling has given a number of other theorems generalizing theorems 1 and 2 to sequences in L_E^p.

A relatively easy theorem (cf. [9]) is that theorem 1 of § 3 remains valid for *any* Banach space E if $0 < p < 1$.

Schachermeyer [26] has shown that E may have property (BS) without L_E^2 having property (BS)*). Bourgain [3] has completed this line of investigation by proving the remarkable fact that E has property (K) if and only if L_E^2 has property (BS). The survey paper of Diestel and Uhl [12] gives a very readable account of many of the related recent developments.

The known information on this circle of problems can be summarized in the following schematic diagram (the relevant references may be found in [11] and [12]):



It is not known to me whether (K) implies super-reflexivity.

---

*) A counter-example to this effect had been given earlier by Bourgain (see reference in [12])

As regards the other theorems in § 3 (central limit theorem, law of the iterated logarithm) nothing is known in infinite dimensional spaces E. It seems certain that they are true in any Hilbert space.
Given that the central limit theory and the law of the iterated logarithm have been studied extensively in general Banach spaces it is perhaps only a matter of time before these questions are settled – or at least investigated – in general Banach spaces.

References

[1] Aldous, D. J.: Limit theorems for subsequences of arbitrarily-dependent sequences of random variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **40** (1977) 59–82
[2] Berkes, I.: The law of the iterated logarithm for subsequences of random variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **30** (1974) 209–215
[3] Bourgain, J.: The Komlós theorem for vector valued functions. To be published (1984)
[4] Chatterji, S. D.: A general strong law. Inventiones math. **9** (1970) 235–245
[5] Chatterji, S. D.: Un principe de sous-suites dans la théorie des probabilités. Séminaire de probabilités VI, Strasbourg. Berlin: Springer-Verlag 1972. = Lecture Notes in Mathematics 258, 72–89
[6] Chatterji, S. D.: A principle of subsequences in probability theory: the central limit theorem. Advances in Mathematics **13** (1974) 31–54, **14** (1974) 266–269
[7] Chatterji, S. D.: A subsequence principle in probability theory II. The law of the iterated logarithm. Inventiones math. **25** (1974) 241–251
[8] Chatterji, S. D.: On a theorem of Banach and Saks. In: Linear operators and approximation II. Proc. Conf. Oberwolfach, Eds. Butzer and Sz. Nagy, Basel: Birkhäuser Verlag 1974, 565–578
[9] Chatterji, S. D.: Le principe de sous-suites dans les espaces de Banach. Séminaire de probabilités XIII. Berlin: Springer-Verlag 1979. = Lectures Notes in Mathematics 721, 4–21
[10] Chow, Y. S.; Teicher, H.: Probability theory: independence, interchangeability, martingales. New York: Springer-Verlag 1978
[11] Diestel, J.: Geometry of Banach spaces-selected topics. Berlin: Springer-Verlag 1975. = Lecture Notes in Mathematics 485
[12] Diestel, J.; Uhl, J. J.: Progress in vector measures – 1977–83. Eds. Belley, Dubois and Morales. Berlin: Springer-Verlag 1983. = Lectures Notes in Mathematics 1033, 144–192
[13] Dubins, L. E.; Fredman, D. A.: Exchangeable processes need not be mixtures of independent, identically distributed random variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **48** (1979) 115–132
[14] Figiel, T.; Sucheston, L.: An application of Ramsey sets in analysis. Advances in Mathematics **20** (1976) 103–105
[15] Gaposhkin, V. F.: Sequences of functions and the central limit theorem. Selected translations Math. Statist. and Probability **9** (1970) 89–118
[16] Gaposhkin, V. F.: Convergence and limit theorems for sequences of random variables. Theory of probability and its applications **17** (1972) 379–400
[17] Garling, D. J. H.: Subsequence principles for vector-valued random variables. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **86** (1979) 301–311
[18] Kac, M.: Selected papers. Cambridge, Massachusetts: M.I.T. Press 1979
[19] Kingman, J. F. C.: Uses of exchangeability. Ann. Prob. **6** (1978) 183–197
[20] Komlós, J.: A generalization of a problem of Steinhaus. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967) 217–229
[21] Loève, M.: Probability theory. New York: D. Van Nostrand 1955
[22] Morgenthaler, G.: A central limit theorem for uniformly bounded orthonormal systems. Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955) 281–311

[23] Révész, P.: On a problem of Steinhaus. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **16** (1965) 310–318
[24] Saari, D. G.; Urenko, J. B.: Newton's method, circle maps and chaotic motion. Amer. Math. Monthly **91** (1984) 3–17
[25] Salem, R.: Oeuvres mathématiques. Paris: Hermann 1967
[26] Schachermeyer, W.: The Banach-Saks property is not L^2-hereditary. Israel J. Math. **40** (1981) 340–344
[27] Strassen, V.: A converse to the law of the iterated logarithm. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **4** (1966) 265–268
[28] Suchanek, Ana Maria: On almost sure convergence of Cesaro averages of subsequences of vector-valued functions. J. Multivariate Anal. **8** (1978) 589–597
[29] Weiss, Mary: The law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series. Trans. Amer. Math. Soc. **91** (1959) 444–469
[30] Weiss, Mary: On the law of the iterated logarithm for uniformly bounded orthonormal systems. Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959) 531–553

S. D. Chatterji
Dept. de Mathématiques
Ecole Polytechnique Féderale
CH-1015 Lausanne

(*Eingegangen 5. 4. 1984*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
87 (1985) 108–126

Numerik des Radonschen Problems

F. Natterer, Münster

Einleitung

Das Radonsche Problem, also die Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Geraden- oder Ebenenintegrale, hat in den letzten Jahren überraschende Anwendungen in ganz verschiedenen Gebieten gefunden. Wir erwähnen nur Astronomie, Elektronenmikroskopie, zerstörungsfreies Prüfen und, wohl am spektakulärsten, Radiologie.

Im Prinzip ist das Problem schon 1917 durch Radon gelöst worden, der eine explizite Inversionsformel angab. Von einer Inversionsformel zu einem brauchbaren numerischen Verfahren ist es aber ein weiter Weg. Zunächst ist keineswegs klar, wie eine solche Formel diskretisiert werden muß. Anhand der sogenannten Fourier-Rekonstruktion werden wir sehen, wozu unkritisches Anwenden von Rezepten führen kann. Auch fallen die Daten in der Regel nicht in einer Form an, auf welche Inversionsformeln direkt angewendet werden können. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn nur ein Teil der in die Inversionsformel eingehenden Daten zur Verfügung steht. Solche Probleme treten häufig im Dreidimensionalen auf und bereiten immer noch erhebliches Kopfzerbrechen.

Ein weiterer Problemkreis besteht darin, daß alle genannten Probleme schlecht gestellt sind, wenn auch in sehr unterschiedlichem Maße. Dies ist nicht nur zu beachten bei der Entwicklung numerischer Verfahren, sondern auch bei dem Entwurf von Meßanordnungen.

Eine zentrale Frage ist schließlich, wieviele und welche Integrale man benötigt, um Details einer vorgegebenen Größe noch auflösen zu können. Natürlich steht auch diese Frage in engem Zusammenhang mit numerischen Verfahren und Meßanordnungen.

Der Plan der Arbeit ist wie folgt. In § 1 beschreiben wir eine radiologische Anwendung, welche uns als Standardbeispiel dienen wird, die sogenannte Computer-Tomographie. In § 2 führen wir die relevanten Integraltransformationen ein und geben einfache Eigenschaften, insbesondere Inversionsformeln. In § 3 diskutieren wir Rekonstruktionsverfahren, welche auf diesen aufbauen. § 4 ist Problemen mit unvollständigen Daten gewidmet, wobei Eindeutigkeits- und Stabilitätsfragen im Vordergrund stehen. § 5 behandelt die Frage der Auflösung. In § 6 schließlich geben wir Ausblicke auf mögliche Weiterentwicklungen.

Wir wollen noch einige allgemeine Literaturhinweise geben. Der vorwiegend an den mathematischen Aspekten Interessierte sei auf [50], [18], [21] verwiesen.

Praktische Fragen werden in [20] ausführlich behandelt. Anwendungen finden sich in [12], [19], und die Zeitschrift „Proceedings of the IEEE" hat das Heft 3 des Bandes 71 einem Überblick über den Stand der Kunst gewidmet. [4] enthält Hinweise auf die historische Entwicklung.

§ 1 Computer-Tomographie

Tomographie bedeutet in der Radiologie ein Verfahren zur Abbildung zweidimensionaler Körperquerschnitte ($\tau o \mu o \varsigma$ (griech.) = Scheibe). Einfache tomographische Techniken, die auf geeigneter simultaner Bewegung von Röntgenquelle und Film zur Aussonderung einer bestimmten Schicht beruhen, wurden schon seit langer Zeit verwendet [31]. Wegen ihrer geringen Auflösung war diese Form der Tomographie von begrenztem diagnostischem Wert. Die Computer-Tomographie, welche von Hounsfield [24] zu Beginn der 70er Jahre in die klinische Praxis eingeführt und von Cormack [7, 8] schon 1963 vorgeschlagen worden war, hat dagegen die Radiologie revolutioniert und gehört heute zu den Standard-Verfahren. Sie arbeitet nach folgendem Prinzip: Der Körper wird der Strahlung einer Röntgenquelle ausgesetzt und die Intensität der Strahlung nach Durchdringen des Körpers durch kollimierte Detektoren (in der Praxis einige hundert) gemessen. Dies wird für viele (in der Praxis einige hundert) Positionen der Röntgenquelle durchgeführt, siehe Abb. 1. Alle so gewonnenen Meßwerte werden in einem Rechner – daher der Name Computer-Tomographie – zu Querschnittsbildern verarbeitet und auf einem Bildschirm dargestellt.
Das zugrunde liegende physikalische Modell ist grob folgendes: Sei f(x) der Absorptionskoeffizient gegenüber Röntgenstrahlen im Punkt x des Körpergewebes. Ist I_0 die Intensität eines Strahls L – gedacht als Verbindungsgerade zwischen Röntgenquelle und Detektor – beim Verlassen der Röntgenquelle, so ist die Intensität des Strahls nach Durchdringen des Körpers

$$I_0 \exp \left\{ - \int_L f(x)dx \right\} .$$

Es werden also die Integrale der gesuchten Dichte entlang sehr vieler (in der Praxis einige 10^5) Geraden gemessen. Aus all diesen Integralen konstruiert der Rechner die gesuchte Dichte f.

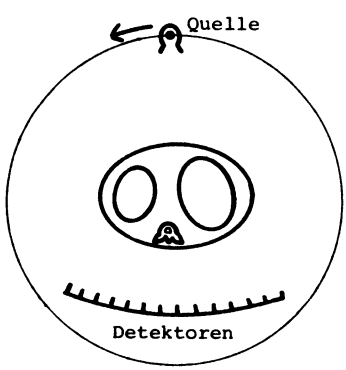


Abb. 1
Prinzip der Computer-Tomographie. Dargestellt ist die sogenannte Fächerstrahl-Maschine. Die Quelle ist mit dem Detektorfeld fest verbunden und rotiert auf dem äußeren Kreis um den Körper

§ 2 Einige Integraltransformationen

Die Transformation, welche einer Funktion in $\mathbf{R}^n$ die Menge ihrer Ebenenintegrale zuordnet, heißt Radon-Transformation R. Sie ist erklärt durch

$$Rf(\Theta, s) = \int_{\Theta \cdot x = s} f(x)dx = \int_{\Theta^\perp} f(s\Theta + y)dy,$$

wo $\Theta \in S^{n-1}$, $s \in \mathbf{R}^1$. Sie stimmt – bis auf die Bezeichnung der Argumente – in $\mathbf{R}^2$ mit der Röntgen-Transformation

$$Pf(\Theta, x) = \int_{\mathbf{R}^1} f(x + t\Theta)dt$$

ein, wobei man x auf $\Theta^\perp$ beschränken kann. Die Funktion $Pf(\Theta, \cdot)$ auf $\Theta^\perp$ ist die Projektion von f auf $\Theta^\perp$. Eine für die Anwendung günstigere Schreibweise ist

$$Df(a, \Theta) = \int_0^\infty f(a + t\Theta)dt,$$

was mit Pf bis auf Bezeichnung übereinstimmt, wenn die Quelle a außerhalb der konvexen Hülle von supp (f) liegt. Wir nennen D die Fächerstrahl- (oder divergent beam, fan-beam) Transformation. Für die Praxis interessant sind die Fälle n = 2, 3. Zur Vermeidung technischer Schwierigkeiten betrachten wir alle Transformationen nur für glatte Funktionen mit kompaktem Träger, genauer auf $C_0^\infty(\Omega)$ mit Ω der Einheitskugel in $\mathbf{R}^n$. Es ist dann z. B. $Rf \in C_0^\infty(Z)$, wo $Z = S^{n-1} \times \mathbf{R}^1$ der Einheitszylinder in $\mathbf{R}^{n+1}$ ist.

Von zentraler Bedeutung für die Theorie der Radon-Transformation ist ihre Beziehung zur Fourier-Transformation

$$f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x)dx.$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$\hat{f}(\sigma\Theta) = (2\pi)^{(1-n)/2}(Rf)^\wedge(\Theta, \sigma), \tag{2.1}$$

wobei links die n-dimensionale, rechts die eindimensionale Fourier-Transformation, und zwar nach dem zweiten Argument, gemeint ist. (2.1) heißt Projektionssatz. Mit Hilfe der Fourierschen Inversionsformel bekommt man aus (2.1) natürlich sofort eine Inversionsformel für die Radon-Transformation. Unter Benutzung von Polarkoordinaten erhält man

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} R^* H \left(\dfrac{d}{ds}\right)^{n-1} Rf, & \text{n gerade,} \\ (-1)^{(n-1)/2} R^* \left(\dfrac{d}{ds}\right)^{n-1} Rf, & \text{n ungerade.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Dabei ist H die Hilbert-Transformation

$$Hg(s) = \frac{1}{\pi} \oint \frac{g(t)}{s-t} dt$$

und wirkt auf die zweite Variable von Rf. R^* ist der zu R adjungierte Operator

$$R^*g(x) = \int_{S^{n-1}} g(\Theta, x \cdot \Theta)d\Theta.$$

Interpretiert man g als Funktion auf der Menge der Ebenen des $\mathbf{R}^n$, so daß also $g(\Theta, s)$ der Wert von g für die Ebene $x \cdot \Theta = s$ ist, dann integriert R^* über alle Ebenen durch einen Punkt, während R über alle Punkte einer Ebene integriert. Diese Dualität hat zu weitreichenden Verallgemeinerungen der Radon-Transformation geführt [18]. In der Bildverarbeitung nennt man R^* die Rückprojektion. (2.2) heißt Radonsche Inversionsformel, weil (2.2) nach einigen Manipulationen in die von Radon 1917 [44] für $n = 2$ angegebene Formel übergeht. Für die Entwicklung numerischer Verfahren geeigneter als (2.2) wird sich die Formel

$$(2.3) \quad (R^*v) * f = R^*(v * Rf)$$

erweisen. Dabei ist v eine Funktion auf Z, also steht links die Faltung in $\mathbf{R}^n$ und rechts in $\mathbf{R}^1$.

Eine Formel ganz anderen Typs leitete Cormack 1963 [7, 8] im Falle $n = 2$ her. Entwickeln wir f und $g = Rf$ in Fourier-Reihen, also

$$f(r\Theta) = \sum_{\ell} f_\ell(r) e^{i\ell\varphi}$$

$$g(\Theta, s) = \sum_{\ell} g_\ell(s) e^{i\ell\varphi},$$

wobei $\Theta = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$, so gilt die Cormacksche Formel

$$(2.4) \quad f_\ell(r) = -\frac{1}{\pi}\int_r^1 (s^2 - r^2)^{-1/2} T_{|\ell|}\left(\frac{s}{r}\right) g'(s)\,ds$$

mit den Tschebyscheff-Polynomen T_m vom Grade m. Alternativ haben wir für $\ell > 0$

$$(2.5) \quad f_\ell(r) = -\frac{1}{\pi}\int_r^1 (s^2 - r^2)^{-1/2}\left(\frac{s}{r} + \left(\frac{s^2}{r^2} - 1\right)^{1/2}\right)^{-|\ell|} g_\ell'(s) + \frac{1}{r}\int_0^r U_{|\ell|-1}\left(\frac{s}{r}\right) g'(s)\,ds$$

wobei U_m das Tschebyscheff-Polynom 2. Art vom Grade m bedeutet. (2.4) und (2.5) sind mathematisch äquivalent. Wir werden aber sehen, daß die beiden Formeln vom Praktischen und Numerischen her gesehen völlig verschieden sind. Im übrigen sei darauf hingewiesen, daß (2.4) schon 1962 von Kershaw [26] in ganz anderem Zusammenhang gefunden wurden. Wie [1] zeigt, scheint diese Formel zu denjenigen mathematischen Resultaten zu gehören, die immer und immer wieder entdeckt werden.

Für die Röntgen-Transformation P besteht eine zu (2.2) analoge Inversionsformel. Diese ist jedoch von geringer Bedeutung, da sämtliche Linienintegrale durch Ω in sie eingehen, und diese können in $\mathbf{R}^3$ in der Regel nicht gemessen werden. Das gleiche gilt für die Fächerstrahl-Transformation D, für welche in [29] eine Inversionsformel angegeben wurde; siehe aber § 4.

Zur Formulierung von Stetigkeitsaussagen führen wir die Sobolev-Normen

$$\|f\|_{H^\alpha(\Omega)} = \left\{\int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\alpha |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right\}^{1/2}$$

und $$\|g\|_{H^\alpha(Z)} = \left\{\int_{S^{n-1}}\int_{\mathbf{R}^1} (1 + \sigma^2)^\alpha |\hat{g}(\Theta, \sigma)|^2 d\Theta\, d\sigma\right\}^{1/2}$$

ein. Zu jedem $\gamma \in \mathbf{R}^1$ gibt es dann Konstanten $C(\gamma, n)$, $c(\gamma, n) > 0$ mit

$$(2.6) \quad c(\gamma, n)\|f\|_{H^\gamma(\Omega)} \leqslant \|Rf\|_{H^{\gamma+(n-1)/2}(Z)} \leqslant C(\gamma, n)\|f\|_{H^\gamma(\Omega)}$$

für alle $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Dies folgt leicht aus (2.1).
Aus (2.6) ziehen wir für $\gamma = 0$ die wichtige Folgerung, daß R^{-1} als Abbildung von $L_2(Z)$ in $L_2(\Omega)$ nicht stetig ist. Das Problem $Rf = g$ ist also bei Verwendung dieser Räume schlecht gestellt [51]: Kleine Fehler in den Daten können zu riesigen Störungen des Resultates führen. Alle Probleme im Umkreis des Radonschen Problems sind mehr oder weniger schlecht gestellt, ganz besonders die in § 4 behandelten. Wir werden daher ganz kurz etwas zu diesen Problemen sagen müssen.
Sei A ein linearer injektiver Operator von $L_2(\Omega)$ in einen Hilbert-Raum H, und es gebe Konstante C, c, $\alpha > 0$ mit

$$(2.7) \quad c\|f\|_{H^{-\alpha}(\Omega)} \leqslant \|Af\| \leqslant C\|f\|_{H^{-\alpha}(\Omega)}$$

für $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Es ist dann A^{-1} unbeschränkt als Abbildung von H in $L_2(\Omega)$, und die Gleichung $Af = g$ schlecht gestellt. Ist nun g in $Af = g$ nur mit einem Fehler ϵ bekannt, so ist f völlig unbestimmt, es sei denn, man hat über f noch weitere Information, etwa der Form

$$\|f\|_{H^\beta(\Omega)} \leqslant \rho.$$

Als worst-case-Fehler für die Berechnung von f kann man dann die Zahl

$$E(\epsilon, \rho) = \operatorname{Sup}\{\|f\|_{L_2(\Omega)} : \|Af\| \leqslant \epsilon, \|f\|_{H^\beta(\Omega)} \leqslant \rho\}$$

ansehen. Es gilt unter der Voraussetzung (2.7)

$$E(\epsilon, \rho) = O\left(\epsilon^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \rho^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right),$$

wie man bei unserer Definition der Normen leicht nachrechnet. Aus einem Fehler der Ordnung ϵ in den Daten wird also ein Fehler der Ordnung $\epsilon^{\beta/(\alpha+\beta)}$ im Resultat. Anders ausgedrückt: Die Anzahl der korrekten Dezimalen im Resultat ist der Bruchteil $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} < 1$ der korrekten Dezimalen in den Daten. Für $\alpha \gg \beta$ ist der Genauigkeitsverlust also groß, für $\alpha \ll \beta$ ist er gering, und für $\alpha \sim \beta$ erträglich. Je nachdem welcher der Fälle vorliegt, nennt man das Problem $Af = g$ sehr, schwach oder mäßig schlecht gestellt.
Im Falle der Radon-Transformation $A = R$ haben wir $\alpha = (n-1)/2$. Der Wert von β hängt natürlich davon ab, wie stark sich die zu rekonstruierende Funktion ändert. In [37] kamen wir zu dem Schluß, daß für Bilddichten f die Annahme $\beta = 1/2$ nicht ganz unvernünftig ist. Demnach wäre das Radonsche Problem in $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}^3$ nur mäßig schlecht gestellt, mit dem (erträglichen) Fehler $\epsilon^{1/2}$ für die Rekonstruktion aus Linienintegralen und $\epsilon^{1/3}$ für die Rekonstruktion aus Ebenenintegralen.
In § 4 werden wir sehen, daß diese einfachen und befriedigenden Verhältnisse sehr davon abhängen, daß wir Zugang zu allen Daten haben. Für Probleme mit unvollständigen Daten liegen die Dinge viel komplizierter und ungünstiger.
Einer der interessantesten Züge der Radon-Transformation is ihr Wertebereich. Der Satz von Helgason-Ludwig [18] sagt aus, daß es zu $g \in C_0^\infty(Z)$ genau dann ein

$f \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt mit $g = Af$, wenn $g(\Theta, s) = 0$ für $|s| \geqslant 1$ und

$$\int_{\mathbf{R}^1} s^m g(\Theta, s)ds = P_m(\Theta)$$

mit einem homogenen Polynom vom Grade m in Θ. Entwickeln wir also g nach Kugelflächenfunktionen $Y_{m,\ell}$ vom Grade m, so bekommen wir

$$g(\Theta, s) = \sum_{m,\ell} g_{m\ell}(s) Y_{m\ell}(\Theta), \qquad g_{m\ell} \perp \langle 1, s, \ldots, s^{m-1} \rangle.$$

Für große m ist also $g_{m\ell}$ eine stark oszillierende Funktion. Dies sieht man auch an der Fourier-Transformationwon $g_{m\ell}$, für welche [33] mit Hilfe des Funk-Hecke-Theorems und (2.1)

$$\hat{g}_{m\ell}(\sigma) = c_n \int_{\Omega} f(x)(\sigma|x|)^{(n-2)/2} J_{m+(n-2)/2}(\sigma|x|) Y_{m\ell}\left(\frac{x}{|x|}\right) dx$$

erhält, wobei J_ν die Bessel-Funktion 1. Art bezeichnet und c_n eine hier irrelevante Konstante ist. Die Debyesche Formel aus der Theorie der Bessel-Funktionen sagt nun tatsächlich aus, daß $|\hat{g}_{m\ell}(\sigma)|$ sehr klein ist für $|\sigma| > m$, und m groß.

§ 3 Rekonstruktionsverfahren

Die numerischen Verfahren zur Lösung des Radonschen Problems kann man grob in zwei Klassen einteilen. Die algebraischen Verfahren diskretisieren das Problem irgendwie und lösen das entstehende riesige lineare Gleichungssystem entweder iterativ (ART) oder direkt, was aber nur bei gewissen Invarianzeigenschaften der Abtastgeometrie durch Einsatz schneller Algorithmen möglich ist (Direkte algebraische Verfahren). ART wurde von Hounsfield [24] in dem ersten kommerziell verfügbaren Tomographen verwendet, wobei als Iterationsverfahren das von Kaczmarz [25] schon 1937 angegebene Verfahren der sukzessiven orthogonalen Projektion diente. Direkte algebraische Verfahren [30], [37], [27] lösen die diskreten Systeme direkt unter Ausnutzung von Rotationssymmetrie. Im Gegensatz zu den algebraischen Verfahren stehen eine Reihe von Verfahren, welche von den in § 2 angegebenen Formeln Gebrauch machen. Diesen wollen wir uns nun zuwenden, wobei wir uns auf den Fall n = 2 beschränken. Betrachten wir zunächst den Projektionssatz (2.1). Danach erhält man f durch ein- bzw. zweidimensionale Fourier-Transformation aus den Daten $g = Rf$, und zwar ist

$$(3.1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

$$(3.2) \qquad \hat{f}(\sigma\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^1} e^{-is\sigma} g(\Theta, s) ds.$$

Diese Integrale muß man noch diskretisieren. Dazu benutzen wir das Abtasttheorem von Shannon (siehe § 5). Wir nehmen an, daß $g(\Theta, s)$ für

$$\Theta = \Theta_j = (\cos \varphi_j, \sin \varphi_j)^T, \qquad \varphi_j = \pi j/p, \quad j = 0, \ldots, p-1$$

$$s_\ell = h\ell, \quad \ell = -q, \ldots, q, \quad h = 1/q$$

zur Verfügung steht. Da f in Ω konzentriert ist, genügt es nach dem Abtasttheorem, $\hat{f}$ mit der Schrittweite π zu diskretisieren. Als diskretes Analogon zu (3.1), (3.2) ergibt sich damit näherungsweise

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} f(hm) &= \frac{\pi}{2} \sum_{|k| < \pi q} e^{i\pi hm \cdot k} \hat{f}(\pi k), \\ \hat{f}(\pi r \Theta_j) &= \frac{h}{2\pi} \sum_{\ell=-q}^{q} e^{-i\pi h \ell r} g(\Theta_j, s_\ell); \end{aligned}$$

die Begrenzung für den ganzzahligen Vektor k kommt wieder vom Abtasttheorem. (3.3) läßt sich nicht unmittelbar ausführen, denn während die zweite Beziehung $\hat{f}$ auf dem Polarkoordinatengitter $\{\pi r \Theta_j$: r ganz, $j = 0, \ldots, p-1\}$ liefert, benötigt die erste Beziehung $\hat{f}$ an den Punkten des Cartesischen Gitters $\{\pi k$: $k = (k_1, k_2)$, k_1, k_2 ganz$\}$. Es muß also noch ein Interpolationsschritt eingeschoben werden. Dies kann z. B. so geschehen, daß für jeden Punkt πk des Polarkoordinatengitters genommen wird. Zusammen mit diesem Interpolationsschritt nennen wir (3.3) das Verfahren der Fourier-Rekonstruktion. Es wurde schon früh in der Astronomie [3] und der Elektronenmikroskopie [10] verwendet. Sein Rechenzeitbedarf ist geringer als bei allen anderen Verfahren. Berechnet man die Summen in (3.3) mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation (FFT), so benötigt man

$$O(q^2 \log q + pq \log q)$$

Rechenoperationen.

Leider ist das Verfahren in dieser Form nahezu unbrauchbar, da es sehr ungenau ist. Als Beispiel geben wir einen Querschnitt durch ein mathematisch erzeugtes Thoraxphantom (Abb. 2a), welches wir durch Fourier-Rekonstruktion rekonstruiert haben (Abb. 2b), und zwar mit $p = 200$, $q = 128$ (siehe Kunstdruckblatt). Wir sehen, daß das Resultat völlig unbrauchbar ist und allenfalls die groben Züge des Originals entstellt wiedergibt. Eine Erhöhung der Interpolationsordnung macht die Sache übrigens nicht besser.

Die Analyse des Versagens der Fourier-Rekonstruktion in der beschriebenen Form ist keineswegs einfach und erfordert langwierige Fehlerabschätzungen in Sobolev-Räumen. In [40] wurde gezeigt, daß für die Interpolationspunkte ξ_k eine Bedingung der Form

$$|\pi k - \xi_k| \leqslant a |k| / p$$

mit einer Konstanten a haben muß, wenn die Rekonstruktion optimale Fehlerordnung haben soll. Diese Bedingung schließt im wesentlichen radiale Interpolation aus, ist aber für reine Winkelinterpolation erfüllt. Fourier-Algorithmen, welche radiale Interpolation vermeiden, sind von Pasciak [41] und Löw, Natterer [32] angegeben worden. Die Rekonstruktion nach Pasciak findet sich in Abb. 2c. Die Verbesserung ist offensichtlich.

Das am häufigsten verwendete Rekonstruktionsverfahren ist die gefilterte Rückprojektion. Man erhält dieses Verfahren, indem man v in (2.5) so wählt, daß R^*v

das Diracsche δ-Maß approximiert. Dies ist z. B. der Fall für

$$(3.4)\qquad \hat{v}(\sigma) = (2\pi)^{-3/2} |\sigma| F(|\sigma|)$$

mit dem „idealen Tiefpaßfilter“

$$F(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| \leqslant \sigma_0 \\ 0, & |\sigma| > \sigma_0 \end{cases}$$

mit der Abschneidefrequenz σ_0. Es wird dann

$$(R^*v)^\wedge(\xi) = \frac{1}{2\pi} F(|\sigma|)$$

und R^*v ist für große σ_0 tatsächlich eine Approximation für δ. Setzt man

$$f_F = R^*v * f,$$

so ist f_F die tiefpaßgefilterte Version von f, und (2.5) geht über in

$$(3.5)\qquad f_F = R^*(v * g), \qquad g = Rf.$$

Man muß also zunächst eine Faltung („Filterung“ in der Sprechweise der Nachrichtentechnik) durchführen und danach die Rückprojektion. Dies erklärt den Namen des Verfahrens. Natürlich muß (3.5) noch diskretisiert werden. Mit den gleichen Daten wie oben erhält man dann näherungsweise

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} f_F(x) &= \frac{\pi}{p} \sum_{j=0}^{p-1} w(\Theta_j, \Theta_j \cdot x), \\ w(\Theta_j, s_r) &= h \sum_{\ell=-q}^{q} v(s_r - s_\ell) g(\Theta_j, s_\ell). \end{aligned}$$

Um (3.6) durchführen zu können, muß man im zweiten Argument von w noch interpolieren. Es hat sich gezeigt, daß hier lineare Interpolation genügt, was zwar so ganz noch nicht verstanden ist, aber jedenfalls praktisch kein Problem darstellt. Die einzige kritische Stelle liegt in der Wahl der Abschneidefrequenz σ_0 in dem Filter v. Diese muß nach dem Abtasttheorem zunächst der Schrittweite h angepaßt werden, und zwar muß $\sigma_0 \leqslant \pi/h = \pi q$ sein. Außerdem muß dafür gesorgt werden, daß die Funktion $\varphi \to w(\Theta, \Theta \cdot x)$ so glatt ist, daß sie durch die Trapezregel mit p Stützstellen zuverlässig integriert wird. Man kann mit Hilfe der Debyeschen Formel aus der Theorie der Bessel-Funktionen zeigen, daß dies so ungefähr für $\sigma_0 \leqslant p$ der Fall ist [52]. Da σ_0 nach dem Abtasttheorem die Auflösung des Verfahrens kontrolliert in dem Sinne, daß das kleinste rekonstruierbare Detail die Größe $2\pi/\sigma_0$ hat, bekommen wir auf ganz konstruktive Weise unsere erste Aussage über die Auflösung, welche wir in § 5 noch verschärfen werden: Um Funktionen, welche Details der Größe d enthalten, zuverlässig rekonstruieren zu können, muß $p \geqslant 2\pi/d$, $q \geqslant \pi/d$ sein. Als optimales Verhältnis zwischen p und q hat man also $p = \pi q$, was natürlich nur als ungefähre Beziehung zu verstehen ist. Der Rechenaufwand für (3.6) ist, wenn man $f_F(x)$ auf einem $(2q + 1) \times (2q + 1)$-Gitter – entsprechend der Diskretisierung von $g(\Theta_j, \cdot)$ – auswertet, von der Ordnung

$$O(pq^2 + pq \log q);$$

dabei sind wir davon ausgegangen, daß die Faltungen durch FFT ausgeführt werden. Der Löwenanteil kommt dann von der Rückprojektion. Für Anwendungen im Bereich der Radiologie gibt es heute spezielle Hardware für die Ausführung der Rückprojektion, welche diese Operation auch für große Werte von p und q (jeweils einige hundert) innerhalb von Sekunden ausführen.
Vergleicht man (3.5) unter Beachtung von (3.4) mit der Radonschen Formel (2.2) für $n = 2$, so sieht man, daß man (3.6) auch als eine Implementierung der Radonschen Formel ansehen kann: Die Operation $\frac{1}{4\pi} Hd/ds$ wird dabei näherungsweise als Faltung mit v ausgeführt, was vollkommen natürlich ist, wenn man sich beide Operationen im Fourier-Raum ansieht [49], [45].
Wir wollen einige Bemerkungen zur Implementierung der Cormackschen Formel (2.4) machen. Es treten dort die Tschebyscheff-Polynome $T_{|\ell|}$ mit Argument > 1 auf, d. h. $T_{|\ell|}\left(\frac{s}{r}\right) \gg 1$ für $|\ell|$ groß. Auf der anderen Seite wissen wir von den Helgason-Ludwig-Bedingungen, daß g'_ℓ für große $|\ell|$ stark oszilliert. Wir haben also eine stark oszillierende Funktion gegen eine Funktion mit großen positiven Werten zu integrieren. Das führt zu Auslöschungen und kann praktisch nicht durchgeführt werden. (2.4) ist also numerisch äußerst problematisch, wie schon Cormack [7] gemerkt hat und in [8] dann (2.4) durch (2.5) ersetzt hat. Da in (2.5) die $U_{|\ell|-1}$ mit Argumenten $\leqslant 1$ auftreten und dort betragsmäßig durch $|\ell|$ beschränkt sind, ist diese Formel numerisch sehr viel geeigneter. Sie hat sich trotzdem aus verschiedenen praktischen Gründen nicht durchsetzen können.

§ 4 Probleme mit unvollständigen Daten

In der Praxis kommt es häufig vor, daß nicht alle Linien- oder Ebenenintegrale durch das zu untersuchende Objekt gemessen werden können. Wir bringen einige Beispiele.

(a) Das äußere Problem. Hier wird $Rf(\Theta, s)$ nur für $1 \geqslant |s| \geqslant a$ gemessen, und $f(x)$ natürlich nur für $|x| \geqslant a$ gesucht. Die Cormacksche Inversionsformel (2.4) zeigt, daß das äußere Problem eindeutig lösbar ist. Im radiologischen Bereich tritt das äußere Problem zum Beispiel dann auf, wenn die Umgebung des schlagenden Herzens abgebildet werden soll, oder wenn der zu untersuchende Körperteil für Röntgenstrahlen undurchdringliche Teile (metallische Prothesen) enthält.

(b) Das innere Problem. Hier wird $Rf(\Theta, s)$ nur für $|s| \leqslant a < 1$ gemessen. Dieses Problem ist nicht eindeutig lösbar. Ist nämlich h eine Funktion, welche außerhalb $[a, 1]$ verschwindet und setzt man $g(\Theta, s) = h(|s|)$, so liefert wieder die Cormacksche Formel (2.3) die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{|x|}^{\infty} (s^2 - |x|^2)^{-1/2} h'(|s|) ds$$

als Lösung von $Rf = g$ im $\mathbf{R}^2$. Bei geeigneter Wahl von h ist $f(x)$ in $|x| \leqslant a$ nicht identisch 0, wohl aber $g(\Theta, s)$ für $|s| \leqslant a$. Das innere Problem tritt etwa auf, wenn man nur an einem kleinen Teil des zu untersuchenden Objekts interessiert ist und keine Strahlung auf den übrigen Teil verschwenden möchte (region-of-interest tomography).

(c) Das Problem mit beschränktem Winkel. Hier wird $Rf(\Theta, s)$ nur gemessen für Richtungen Θ, die in einer Teilmenge der Halbkugel liegen, im zweidimensionalen etwa nur für $\Theta = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ mit $|\varphi| \leqslant \varphi_0 < \pi/2$. Solche Probleme treten zum Beispiel in der Elektronenmikroskopie [23] auf. Da $\hat{f}$ eine analytische Funktion ist, folgt die Eindeutigkeit aus dem Projektionssatz (2.1), wenn die Anzahl der Richtungen nur unendlich ist.

(d) Ein Problem mit unvollständigen Daten für die Fächerstrahl-Transformation D bekommt man, wenn man das dreidimensionale Analogon der Fächerstrahlmaschine betrachtet (vgl. Abb. 1.1): Dabei bewegt sich eine Röntgenquelle auf einem Kreis A um das nun dreidimensionale Objekt, und das Detektorfeld ist nun zweidimensional zu denken. Es steht also $Df(a, \Theta)$ für $\Theta \in S^2$ und a auf dem Kreis zur Verfügung. Auch hier herrscht Eindeutigkeit. Nach einem Satz aus [16] ist dies für unendlich viele Quellen immer der Fall.

(e) Schließlich erwähnen wir noch den Fall, daß nur sehr wenige Daten zur Verfügung stehen, etwa $Rf(\Theta, s)$ nur für wenige Richtungen Θ. Jetzt kann man natürlich keine Eindeutigkeit erwarten. Beschränkt man sich aber auf konvexe homogene Objekte, d. h. nimmt man an, daß f charakteristische Funktion einer konvexen Menge des $\mathbf{R}^n$ ist, dann kommt man wieder zu Eindeutigkeitsaussagen. Für n = 2 zum Beispiel genügen dann im allgemeinen vier Richtungen [15]. In [55] finden sich weitere derartige Resultate, auch für D bei endlich vielen Quellen. Dieses Problem tritt z. B. in der Radar-Technik auf [11].

Wir wollen uns zunächst einmal ganz heuristisch eine Vorstellung über die Art der bei unvollständigen Daten auftretenden Artifakte machen. Dazu sehen wir uns die Radonsche Inversionsformel (2.2) im Falle n = 2 einmal genauer an. Mit $g = Rf$ lautet sie

$$(4.1) \qquad f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^1} Hg'(\Theta, x \cdot \Theta)\, d\Theta.$$

Ignorieren wir zunächst einmal die Hilbert-Transformation H, so haben wir zu Rekonstruktion von f in x das Integral

$$(4.2) \qquad \int_{S^1} g'(\Theta, x \cdot \Theta)\, d\Theta$$

auszuwerten. Dazu benötigen wir g' – als Funktion auf der Menge der Geraden des $\mathbf{R}^2$ interpretiert – für alle Geraden durch x, und es wird über alle diese Geraden gemittelt. Die größten Beiträge liefern natürlich die Geraden, in deren Umgebung sich g stark ändert. Dies sind aber die Tangenten an solche Kurven, entlang denen f Unstetigkeiten hat (oder, da wir nur glatte Funktionen betrachten, sich stark ändert). Stehen die Integrale von f über solche Geraden also nicht zur Verfügung, so kann (3.2) auch nicht näherungsweise berechnet werden. Ähnliches gilt auch für (3.1), wenn auch wegen des nichtlokalen Charakters der Hilbert-Transformation die obige Überlegung nicht in streng lokaler Form gilt. Für Probleme mit unvollständigen Daten ergibt sich damit folgende Faustregel: Starke Artifakte sind in der Umgebung von Tangenten an Unstetigkeitskurven von f zu erwarten, wenn für diese Rf nicht zur Verfügung steht.

Diese unscharfe und schlecht begründete Regel bewährt sich in der Praxis recht gut, wie man in Abb. 3 (siehe Kunstdruckblatt) sieht.
Das Original (a) stellt ein in der Literatur häufig benutztes Kopf-Phantom dar. (b) gibt die Rekonstruktion mit Hilfe des ART-Verfahrens (siehe § 3) aus den Werten von $Rf(\Theta, s)$ mit $|\varphi| \leqslant 60°$. Deutlich kann man das „Verschmieren" des Phantoms entlang der Tangenten an den Schädelknochen sehen, welche einen Winkel $\leqslant 30°$ mit der Horizontalen machen und daher zum fehlenden Bereich gehören. In (c) wird aus den Werten von $Rf(\Theta, s)$ für $|s| \geqslant 0.2$ rekonstruiert; bei einem Radius des Bildes von 0.5 werden also 40% der Daten einfach weggelassen. Trotzdem fällt die Rekonstruktion zufriedenstellend aus. Dies ist in Übereinstimmung mit unserer Faustregel, denn keine der Tangenten an den Schädelknochen trifft die Kreisscheibe vom Radius 0.2.
Probleme mit unvollständigen Daten sind Beispiele sehr schlecht gestellter Probleme. Dies machen wir uns klar durch Abschätzungen in Sobolev-Räumen, wie wir sie in § 2 für Probleme mit vollständigen Daten durchgeführt haben. Betrachten wir zum Beispiel das dreidimensionale Problem (c). D ist dort eine Abbildung von $L_2(\Omega)$ in $L_2(A \times S^2)$. Im Gegensatz zu (2.6) gilt mit keinem endlichen α die Abschätzung

$$(4.3) \qquad c(\gamma, \alpha) \| f \|_{H^\gamma(\Omega)} \leqslant \| Df \|_{H^{\gamma+\alpha}(A \times S^2)}$$

für reelles γ und $c(\gamma, \alpha) > 0$. Um dies einzusehen genügt es, eine unstetige Funktion f_+ in Ω anzugeben, für welche Ω $Df_+ \in C^\infty$. Dazu nehmen wir eine Ebene E, welche Ω trifft, aber nicht A, und ein $f \in C_0^\infty(\Omega)$, welches auf E nicht identisch verschwindet. Ist E_+ einer der beiden von E erzeugten Halbräume, so ist

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E_+ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Funktion der genannten Art. Da von A ausgehende Halbstrahlen E nur transversal treffen können, ist Df_+ in der Tat eine C^∞-Funktion. Man wird bemerken, daß diese Konstruktion von f_+ genau unsere Faustregel verletzt. Wir schließen, daß Problem (c) sehr schlecht gestellt ist.
Um zu einem besser gestellten Problem zu kommen, müssen wir den Kreis A durch eine besser geeignete Kurve ersetzen. Eine solche Kurve darf die Konstruktion der Funktion f_+ natürlich nicht möglich machen. Wir fordern daher von A die Bedingung von Tuy [54]: Jede Ebene durch Ω schneidet A transversal. Ein Beispiel für eine solche Kurve bilden etwa zwei zueinander orthogonale Kreise. Tuy hat unter dieser Bedingung eine Inversionsformel hergeleitet. Zu ihrer Formulierung benötigen wir eine Parameterdarstellung $a = a(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ von A. Die Tuysche Bedingung verlangt dann, daß es zu jedem $x \in \Omega$ und jedem $\Theta \in S^2$ ein $\lambda = \lambda(x, \Theta)$ gibt mit

$$a(\lambda) \cdot \Theta = x \cdot \Theta, \qquad a'(\lambda) \cdot \Theta \neq 0.$$

Dann lautet Tuys Inversionsformel

$$(4.4) \qquad f(x) = (2\pi)^{-3/2} i^{-1} \int_{S^2} (a'(\lambda) \cdot \Theta)^{-1} \frac{d}{d\lambda} (Df)\hat{}\,(a(\lambda(x, \Theta)), \Theta) d\Theta,$$

wo $(Df)^\wedge$ die Fourier-Transformation in $\mathbf{R}^3$ bezüglich des zweiten Arguments bedeutet, wozu Df als homogene Funktion vom Grade -1 von S^2 auf $\mathbf{R}^3$ fortgesetzt wird.
Eine numerische Implementierung von (4.4) ist bisher nicht bekannt geworden und erscheint extrem schwierig. Sie würde praktisch auch nicht viel nützen, da sie $Df(a, \Theta)$ für alle $\Theta \in S^2$ erfordert, was zum Beispiel bei klinischen Anwendungen die Durchstrahlung des Körpers entlang seiner Längsachse erfordern würde. Tuys Formel (4.4) hat aber eine wichtige Konsequenz: Sie macht Hoffnung, daß eine Abschätzung der Form (4.3) mit endlichem α bestehen könnte, wenn A die Tuysche Bedingung erfüllt. Einen wichtigen Schritt in diese Richtung hat Finch [14] gemacht. Er zeigte die Abschätzung

$$(4.5) \qquad c(\gamma) \|f\|_{H^{\gamma-1/2}(\Omega)} \leqslant \|Df\|_{H^{\gamma, 1/2}(A \times S^2)}$$

für $\gamma \geqslant 1/2$, wobei sich die Ordnungen γ, $1/2$ in $H^{\gamma, 1/2}(A \times S^2)$ auf A bzw. S^2 beziehen. Wir vermuten daher, daß für eine Kurve A mit Tuyscher Bedingung die Abschätzung (4.3) mit $\alpha = 1$ (das ist die Differenz der Ordnungen $\gamma + 1/2$ und $\gamma - 1/2$ in (4.5)) gilt und das Problem damit nur mäßig schlecht gestellt ist.
Ob sich Tuys Bedingung technisch realisieren läßt, vermögen wir nicht zu beurteilen. Sie hat aber einen anderen höchst unerwünschten Nebeneffekt: Sie stört mit Sicherheit die Rotationssymmetrie der Meßanordnung, die im Falle eines Kreises (oder, wie in [16] [27] vorgeschlagen, zweier paralleler Kreise) A bestand. Damit sind die einzigen Rekonstruktionsverfahren, die nach Lage der Dinge überhaupt in Frage kommen, nämlich die schon in § 3 genannten direkten algebraischen Verfahren nicht mehr verwendbar. Wir sind daher in einem Dilemma: Verwenden wir für A einen Kreis oder auch zwei parallele Kreise, so haben wir zwar Rekonstruktionsverfahren, aber das Problem ist sehr schlecht gestellt. Nehmen wir für A eine Kurve mit Tuyscher Bedingung, so ist das Problem zwar nur mäßig schlecht gestellt; wir haben aber keine effizienten Algorithmen. Wir sind der Ansicht, daß echt dreidimensionale Tomographie auf ewig ein Wunschtraum bleiben wird, wenn kein Ausweg aus diesem Dilemma gefunden wird.

§ 5 Auflösung

Für unsere Eindeutigkeitsaussagen haben wir bisher immer angenommen, daß unendlich viele Richtungen oder Quellen zur Verfügung stehen. Dies ist in der Praxis natürlich nicht der Fall, und wir wollen uns mit den damit zusammenhängenden Problemen befassen.
Als typisches Beispiel greifen wir den Fall heraus, daß $Pf(\Theta_k, x)$ für endlich viele Richtungen $\Theta_1, \ldots, \Theta_p$ verfügbar ist, und zwar der Einfachheit halber für alle $x \perp \Theta_k$. K. Smith [50] bewies folgendes negative Resultat:
Sei $f \in C_0^\infty(K)$, K kompakt. Zu jeder kompakten Menge $K_0 \subset\subset K$ gibt es ein $f_0 \in C_0^\infty(K_0)$, welches in K_0 mit f übereinstimmt und für welches $Pf(\Theta_k, x) = 0$, $x \perp \Theta_k$, $k = 1, \ldots, p$.
Dies bedeutet, daß es zu jedem Objekt f ein Objekt f_0 gibt, welches von f nur in einer beliebig dünnen Randschicht abweicht, und welches von den Richtungen $\Theta_1, \ldots, \Theta_p$ aus unsichtbar ist. Auf den ersten Blick ist damit Computer-Tomo-

graphie ein aussichtsloses Unterfangen. Sieht man sich jedoch den Beweis an, so findet man, daß f_0 in der dünnen Randschicht, in der es von f abweicht, ungeheuer große und oszillierende Werte annimmt. Solche Objekte kann man für praktische Zwecke getrost ignorieren. Wir tun das, indem wir die Klasse der zu rekonstruierenden Funktionen einschränken, und zwar auf die aus der Nachrichtentechnik bekannten bandbeschränkten Funktionen, deren Fourier-Transformation $\hat{f}(\xi)$ für $|\xi| > b$ verschwindet. b heißt dann Bandbreite, und wir nennen f dann auch kurz b-bandbeschränkt. Da Funktionen mit kompakten Trägern nicht streng b-bandbeschränkt sein können, formulieren wir unsere Aussagen für wesentlich b-bandbeschränkte Funktionen und meinen damit, daß $\hat{f}(\xi)$ für $|\xi| \geqslant b$ in geeignetem Sinne vernachlässigbar ist.

Ein zentrales Hilfsmittel der Nachrichtentechnik ist das Abtasttheorem von Shannon, das wir in einer recht allgemeinen Form [42] benötigen. Wir nehmen an, f sei auf dem Gitter $\{W\ell : \ell \in Z^n\}$ abgetastet, wo W eine reelle nicht singuläre n x n-Matrix ist. Sind dann das Innere der Mengen

$$(5.1) \qquad \mathrm{supp}\,(f) + 2\pi(W^{-1})^T k, \qquad k \in Z^n$$

disjunkt, so kann f aus den abgetasteten Werten $f(W\ell)$ eindeutig berechnet werden. Für W = h x Einheitsmatrix ist dies z. B. erfüllt, wenn f b-bandbeschränkt ist mit $h \leqslant \pi/b$. Dies ist die Nyquist-Bedingung der Nachrichtentechnik.

Die Abtastbedingung für die Radon-Transformation einer wesentlich b-bandbeschränkten Funktion f lautet [34]: Ist $Rf(\Theta_k, s_\ell)$ bekannt für p Richtungen $\Theta_1, \ldots, \Theta_p$, welche „in allgemeiner Lage" sind, und gilt $s_\ell = \ell/q$, $\ell = -q, \ldots, q$ mit

$$(5.2) \qquad p \geqslant \frac{1}{(n-1)!}\, b^{n-1}, \qquad q \geqslant b/\pi,$$

so kann man f zuverlässig bestimmen. Auch diese Beziehungen sind nur als ungefähre zu verstehen. Für n = 2 bekommen wir die gleichen Bedingungen wie in § 3. Zur Rekonstruktion einer wesentlich b-bandbeschränkten Funktion benötigt man also $p(2q + 1) \sim \frac{2}{\pi(n-1)!}\, b^{n+1}$ Ebenenintegrale. Wir werden zeigen, daß dies zumindest für n = 2 nicht optimal ist. Dazu betrachten wir Rf als Funktion nicht auf $S^1 \times \mathbf{R}^1$, sondern in $\mathbf{R}^2$. Wir setzen

$$G(\varphi, s) = Rf(\Theta, s), \qquad \Theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

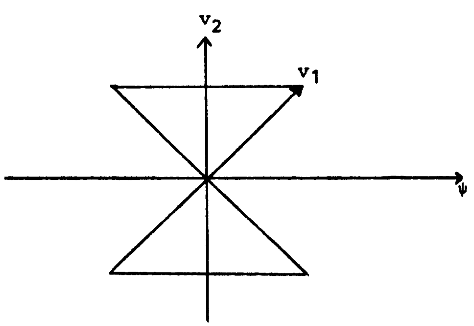
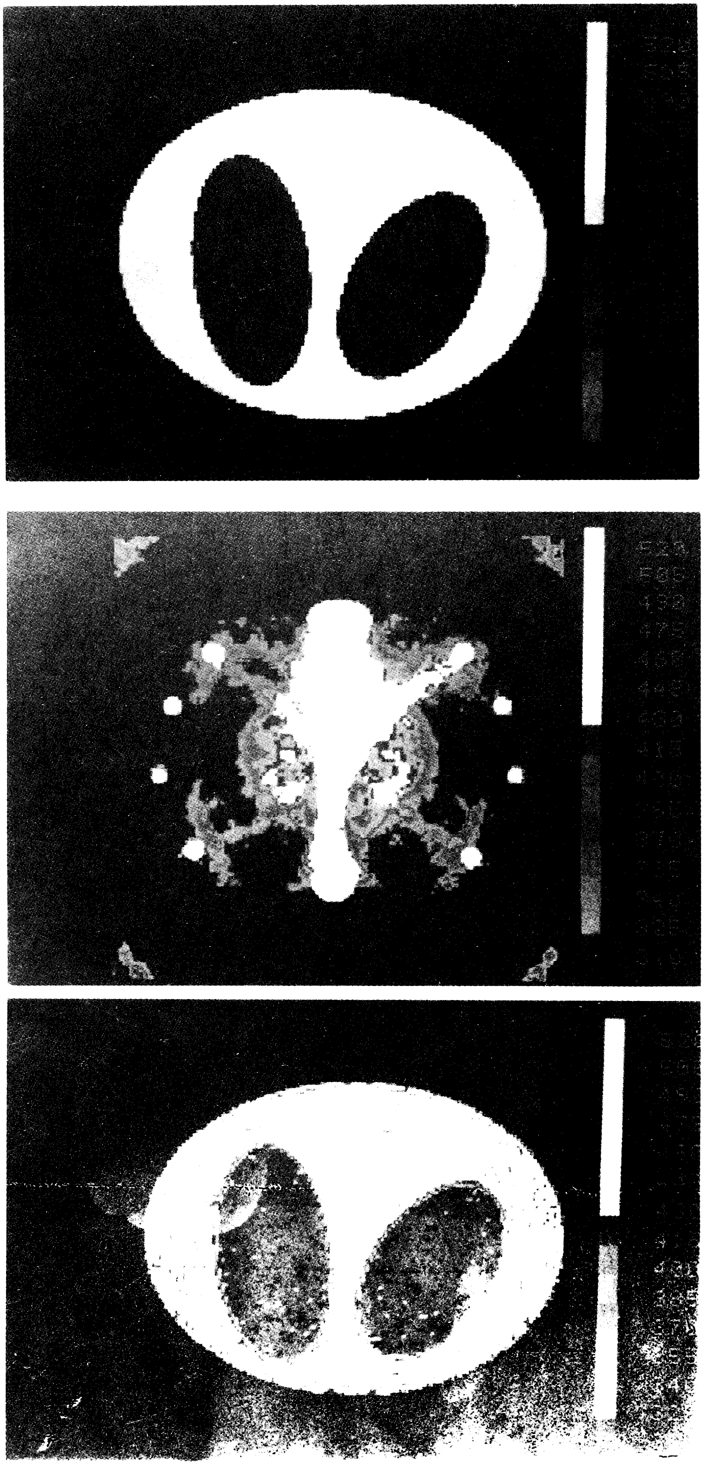


Abb. 4
Träger von $\hat{G}$ mit den beiden Spalten von $2\pi(W^{-1})^T$.

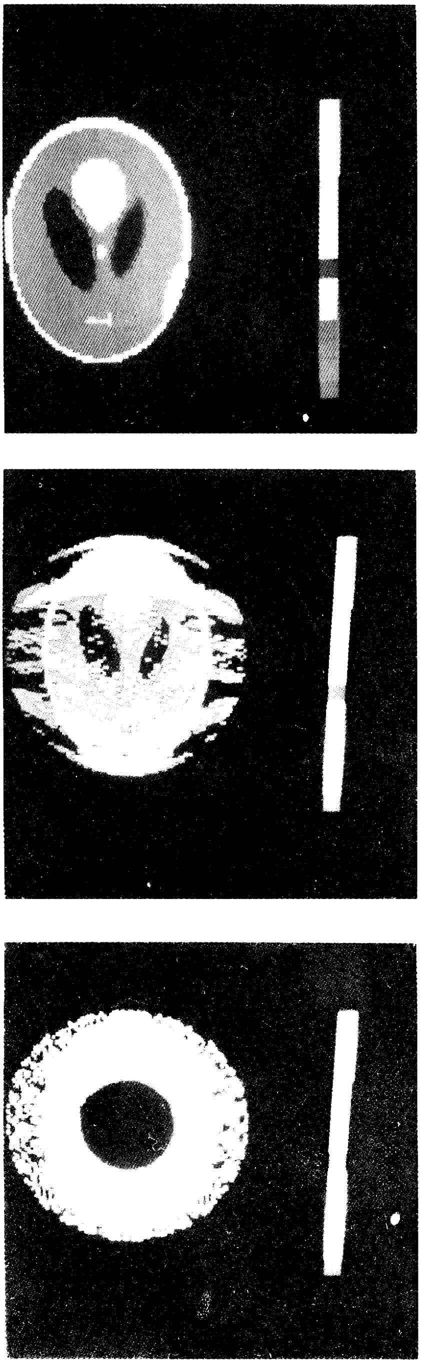


a

b

c

Abb. 2
Vergleich von Standard-Fourier-Rekonstruktion (b) und modifizierte Fourier-Rekonstruktion (c) mit dem Original (a)



a

b

c

Abb. 3 Artifakte bei unvollständigen Daten
(a) Original, (b) Beschränkter Winkel, (c) Inneres Problem

G ist im ersten Argument 2π-periodisch. Die Fourier-Transformation G von $G \in \varphi'(\mathbf{R}^2)$ ist die Distribution

$$\hat{G}(\psi, \sigma) = \sum_m \hat{g}_m(\sigma)\delta_m(\psi)$$

mit den Fourier-Koeffizienten $\hat{g}_m(\sigma)$ der Funktion $\hat{g}(\Theta, \sigma)$. In § 2 haben wir gesehen, daß $\hat{g}_m(\sigma)$ für $|\sigma| > m$ und großes m sehr klein ist. Der Träger von $\hat{G}$ sieht also wie der Schmetterling in Abbildung 4 aus, wobei „Träger" nun so zu verstehen ist, daß $\hat{G}$ auf Funktionen mit Träger außerhalb des Schmetterlings angewandt sehr kleine Werte ergibt. Wir sehen, daß die Inneren der Mengen

$$\operatorname{supp}(\hat{G}) + 2\pi b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} k, \qquad k \in Z^2$$

disjunkt sind, und wir sehen aus (5.1), daß es genügt, G auf dem Gitter

$$\frac{\pi}{b}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ell, \qquad \ell \in Z^2$$

abzutasten, welches in Abbildung 5 dargestellt ist.

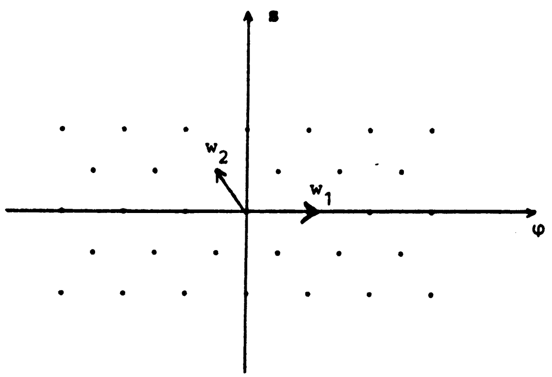


Abb. 5
Abtastgitter für G mit den beiden Spalten von W

Dies entspricht also dem Abtasten von G an den Stellen $G(\varphi_j, s_{j\ell})$, wobei

$$\varphi_j = \frac{\pi}{p} j, \qquad j = 0, \ldots, p-1, \qquad p \geqslant b$$

$$s_{j\ell} = \begin{cases} \dfrac{2\ell}{q}, & j \text{ gerade} \\[2ex] \dfrac{2\ell+1}{q}, & j \text{ ungerade} \end{cases}, \qquad \ell = -q, \ldots, q, \qquad q \geqslant b/\pi.$$

Das Abtastschema ist jetzt also kein Tensorprodukt aus eindimensionalen Diskretisierungen mehr: Bei aufeinanderfolgenden Richtungen stehen die Abtastpunkte auf Lücke. Die Anzahl der Abtastpunkte bei dieser auf Rattey-Lindgren [46] zurückgehende Geometrie ist mit b^2/π gerade die Hälfte der obigen Anzahl. Es ist gegenwärtig noch offen, ob es überhaupt Rekonstruktionsalgorithmen gibt, welche diese prinzipiell mögliche Auflösung erreichen.

§ 6 Ausblick

Wir wollen einige mögliche Weiterentwicklungen andeuten und betrachten dazu zunächst einmal Verallgemeinerungen der Radon-Transformation, etwa die gedämpfte Radon-Transformation in $\mathbf{R}^2$, nämlich

$$R_\mu f(\Theta, s) = \int_{x \cdot \Theta = s} f(x) e^{-D\mu(x, \Theta^\perp)} dx,$$

wobei die Funktion μ die Rolle eines Parameters spielt. R_μ tritt in der Emissionstomographie auf [5]. Ist μ konstant in einer konvexen Menge und 0 außerhalb dieser konvexen Menge, so ist R_μ invertierbar, und man hat die Inversionsformel von Tretiak, Metz [53]. Für allgemeines μ ist über die Invertierbarkeit wenig bekannt, siehe [43, 22, 36]. Die numerische Seite, also Fragen wie Auflösung, Stabilität und Algorithmen wurden von Heike [17] untersucht. Ein besonderes Problem im Zusammenhang mit R_μ ist die Berechnung von f aus $g = R_\mu f$ bei unbekanntem μ. Ein ganz pragmatischer Vorschlag hierzu wurde in [6] gemacht. In [39] wird die Struktur des Wertebereiches von R_μ zur Identifizierung von μ herangezogen.
Das Radonsche Problem ist ein Spezialfall des allgemeinen Problems der Integralgeometrie im Sinne von Blaschke: Man berechne eine Funktion auf $\mathbf{R}^n$ aus Integralen entlang Mannigfaltigkeiten der Dimension $< n$. Eindeutigkeitssätze findet man z. B. in [47], Inversionsformeln für spezielle Fälle in [9]. Für weitergehende mathematische Untersuchungen sei wieder auf [18] verwiesen. Obwohl an diesen Problemen beträchtliches praktisches Interesse besteht, etwa in der Seismologie [2] und auch in der Kernspintomographie (NMR) [28], ist die Numerik auf diesem Gebiet noch völlig unterentwickelt. Auch fehlen Untersuchungen über die entsprechenden Probleme mit unvollständigen Daten.
Weiter ist das Radonsche Problem ein Grenzfall des inversen Steuerproblems der Wellengleichung. Ist das streuende Objekt durch die Funktion f beschrieben, sind

$$e^{ikt} u_I(x), \qquad e^{ikt} u_S(x)$$

die einfallende bzw. die gestreute Welle, so gilt mit $u = u_I + u_S$

$$\Delta u + k^2(1 + f)u = 0,$$

wozu noch Randbedingungen kommen. Man kann zeigen [35], daß $u_S(x)$ in der Rytovschen Näherung und für große Frequenzen k durch die Linienintegrale von f gegeben ist. Damit hat man im Radonschen Problem einen gutverstandenen Grenzfall, und es fragt sich, inwieweit sich Eigenschaften des Radonschen Problems – etwa Eindeutigkeit bei unvollständigen Daten – auf das inverse Streuproblem übertragen lassen. Dies gilt natürlich auch für Algorithmen. Ansätze hierzu sind in [13, 48] gemacht.

Literaturverzeichnis

[1] Alliney, S.; Sgallari, F.: An "Ill-Conditioned" Volterra Integral Equation Related to the Reconstruction of Images from Projections. SIAM J. Appl. Math. **44** (1984) 627–645
[2] Anderson, D. L.: Surface Wave Tomography. Eos **65** (1984) 174

[3] Bracewell, R. N.: Strip integration in radio astronomy. Aus. J. Phys. **9** (1956) 198–217
[4] Brooks, R. A.; Dichiro, G.: Principles of Computer Assisted Tomography (CAT) in Radiographic and Radioisotopic Imaging. Phys. Med. Biol. **21** (1976) 689–732
[5] Budinger, T. F.; Gullberg, G. T.; Huesman, R. H.: Emission computed tomography. In: Herman, G. T. (ed.): Image Reconstruction from Projections. Berlin: Springer 1979
[6] Censor, Y.; Gustafson, D. E.; Lent, A.; Tuy, H.: A new approach to the emission computerized tomography problem: simultaneous calculation of attenuation and activity coefficients. IEEE NS **26** (1979) 2775–2779
[7] Cormack, A. M.: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. I. J. Appl. Physics **34** (1963) 2722–2727
[8] Cormack, A. M.: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. II. J. Appl. Physics **35** (1964) 2908–2913
[9] Cormack, A. M.: The Radon Transform on a Family of Curves in the Plane. Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981) 325–330
[10] Crowther, R. A.; DeRosier, D. J.; Klug, A.: The reconstruction of a three-dimensional structure from projections and its application to electron microscopy. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **317** (1970) 319–340
[11] Das, Y.; Boerner, W. M.: On Radon target shape estimation using algorithms for reconstruction from projections. IEEE Transactions **AP26** (1978) 274–279
[12] Deans, S. R.: The Radon Transform and some of its applications. Wiley 1983
[13] Devaney, A. J.: A Filtered Backpropagation Algorithm for Diffraction Tomography. Ultrasonic Imaging **4** (1982) 336–350
[14] Finch, D. V.: Cone Beam Reconstruction with Sources on a Cone. Reprint, Oregon State University, Corvallis, OR 97331 (1984)
[15] Giering, O.: Bestimmung von Eibereichen und Eikörpern durch Steiner-Symmetrisierungen. Sitzungsberichte Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Nat. Kl. (1962) 225–253
[16] Hamaker, C.; Smith, K. T.; Solmon, D. C.; Wagner, S. L.: The divergent beam X-ray transform. Rocky Mountain J. Math. **10** (1980) 253–283
[17] Heike, U.: Die Inversion der gedämpften Radontransformation, ein Rekonstruktionsverfahren der Emissionstomographie. Dissertation, Münster 1984
[18] Helgason, S.: The Radon Transform. Boston, MA: Birkhäuser 1980
[19] Herman, G. T. (ed.): Image Reconstruction from Projections: Implemantation and Applications. Berlin: Springer 1979
[20] Herman, G. T.: Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. New York: Academic Press 1980
[21] Herman, G. T.; Natterer, F. (eds.): Mathematical Aspects of Computerized Tomography. Berlin: Springer 1981 = LNMI **8**
[22] Hertle, A.: On the Injectivity of the Attenuated Radon Transform. Reprint, Fachbereich Mathematik, Universität Mainz
[23] Hoppe, W.; Hegerl, L.: Three Dimensional Structure Determination by Electron Microscopy. In: Hawkes, P. W. (ed.): Computer Processing of Electron Microscopy Images. Springer 1980
[24] Hounsfield, G. N.: A method and apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation. Patent Specification 1283915, The Patent Office, London, England 1972
[25] Kaczmarz, S.: Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. A. (1937) 355–357
[26] Kershaw, D.: The Determination of the Density Distribution of a Gas Flowing in a Pipe from Mean Density Measurements. Admirality Research Laboratory, Teddington, Middlesex, Technical Report A.R.L./R1/MATHS 4–105 (1962)
[27] Kowalski, G.: Multislice reconstruction from beam scanning. IEEE Trans. NS-**26**, No. 2, April 1979
[28] Lai, Ch.-M.: Reconstructing NMR Images from Projections under Inhomogeneous Magnetic Fields and Non-Linear Field Gradients. Phys. Med. Biol. **28** (1983) 925–938
[29] Leahy, J. K.; Smith, K. T.; Solmon, D. C.: Uniqueness, nonuniqueness and inversion in the X-ray and Radon problems. To appear in Proc. Int. Symp. on Ill-Posed Problems: Theory and Practice (Univ. Delaware, Newark, Oct. 2–6, 1979)
[30] Lent, A.: Seminar talk at the Bodynamic Research Unit. Rochester: Mayo Clinic 1975

[31] Littleton, J. T.: Tomography: Physical principles and clinical applications. Baltimore: The Williams & Williams Co. 1976
[32] Löw, K. H.; Natterer, F.: An ultra-fast algorithm in tomography. Technical Report A81/03, Fachbereich der Universität des Saarlandes, 6600 Saarbrücken, Germany
[33] Louis, A. K.: Analytische Methoden in der Computer-Tomographie. Habilitationsschrift Münster 1981
[34] Louis, A. K.: Optimal sampling in nuclear magnetic resonance tomography. Comput. Assist. Tomogr. **6** (1982) 334–340
[35] Mueller, R. K.; Kaveh, M.; Wade, G.: Reconstruction Tomography and Applications to Ultrasonics. Proceedings of the IEEE **67** (1979) 567–587
[36] Markoe, A.; Quinto, E. T.: An Elementary Proof of Local Invertibility for Generalized and Attenuated Radon Transforms. Preprint, Department of Mathematics, Rider College
[37] Natterer, F.: A Sobolev space analysis of picture reconstruction. SIAM J. Appl. Math. **39** (1980) 402–411
[38] Natterer, F.: Efficient implementation of "optimal" algorithms in computerized tomography. Math. Meth. in the Appl. Sci. **2** (1980) 545–555
[39] Natterer, F.: Computerized Tomography with Unknown Sources. SIAM J. Appl. Math. **43** (1983) 1201–1212
[40] Natterer, F.: Fourier Reconstruction in Tomography. Preprint, Münster 1984
[41] Pasciak, J.: A note on the Fourier algorithm for image reconstruction. Preprint, Applied mathematics department, Brookhaven National Laboratory, Upton, New York 1973
[42] Peterson, P. P.; Middleton, D.: Sampling and Rekonstruction of Wave-Number Limited Functions in N-dimensional Euclidean Spaces. Inf. Contr. **5** (1962) 279–323
[43] Quinto, E. T.: The Invertibility of Rotation Invariant Radon Transforms. Preprint, Department of Mathematics, Tufts University
[44] Radon, J.: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Ber. Verh. Sächs. Adad. Wiss. Leipzig **69** (1917) 262–277
[45] Ramachandran, G. N.; Lakshminaryanan, A. V.: Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: Application of convolutions instead of Fourier transforms. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **68** (1971) 2236–2240
[46] Rattey, P. A.; Lindgren, A. G.: Sampling the 2-D Radon Transform. IEEE Trans. ASSP **29** (1981) 994–1002
[47] Romanov, V. G.: Integral Geometry and Inverse Problem for Hyperbolic Equations. Springer 1964
[48] Schomberg, H.: An Improved Approach to Reconstructive Ultrasound Tomography. Preprint, Philips GmbH, Forschungslaboratorium Hamburg
[49] Shepp, L. A.; Logan, B. F.: The Fourier reconstruction of a head section. IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-**21** (1974) 21–43
[50] Smith, K. T.; Solmon, D. C.; Wagner, S. L.: Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs. Bul. AMS **83** (1977) 1227–1270
[51] Tikhonov, A. N.; Arsenin, V. Y.: Solution of Ill-Posed Problems. New York: Wiley 1977
[52] Tretiak, O. J.: The point-spread function for the convolution algorithm. In: Gordon, R. (ed.): Image Processing for 2-D and 3-D Reconstruction from Projections. Stanford 1975
[53] Tretiak, O. J.; Metz, C.: The exponential Radon transform. SIAM J. Appl. Math. **39** (1980) 341–354
[54] Tuy, H. K.: An inversion formula for cone-beam reconstruction. TR MIPG **57**, SUNY Buffalo, 1981
[55] Volčič, A.: Uniqueness Theorems for Mixed X-ray Problems of Hammer Type. Preprint, Erlangen 1983

Prof. Dr. F. Natterer
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Inst. f. Numerische u. Instrumentelle Mathematik
Einsteinstr. 62
4400 Münster

(*Eingegangen: 17. 10. 1984*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
87 (1985) 127–137
AMS subject classification: 04 A 20, 05 C 70

Faktoren in unendlichen Graphen*)

K. Steffens, Hannover

Unter einem *Faktor* H versteht man eine Menge H von eckendisjunkten Kanten eines Graphen G = (V, E). Ein Faktor heißt *perfekt,* wenn er alle Ecken des Graphen überdeckt. Doch nicht jeder Graph besitzt einen perfekten Faktor – man betrachte z. B. einen endlichen Graphen mit ungerader Eckenzahl.

Welche Graphen besitzen perfekte Faktoren? Diese Frage führt zu der Aufgabe, notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz von perfekten Faktoren zu suchen. Für endliche Graphen gab W. T. Tutte 1947 als erster eine Antwort: G besitzt einen perfekten Faktor genau dann, wenn für jede Menge S von Ecken von G die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $G \setminus S$ mit ungerader Eckenzahl kleiner oder gleich der Kardinalität von S ist. – Dabei entsteht $G \setminus S$ aus G durch Herausnahme von S und allen mit S inzidenten Kanten. – Die Überprüfung dieser Bedingung ist recht aufwendig, muß doch die volle Potenzmenge der Eckenmenge untersucht werden. Es stellt sich die Frage, ob die Spezialisierung auf spezielle Graphenklassen eine einfachere Bedingung ergibt.

Läßt sich die Eckenmenge V eines Graphen G = (V, E) so in zwei Klassen A und B zerlegen, daß jede Kante mit einer Ecke aus A und mit einer Ecke aus B inzident ist, so heißt G *bipartit,* geschrieben G = (A, B, E). Ist G = (A, B, E) bipartit und überdeckt ein Faktor H von G alle Ecken aus A, so heißt H *halbperfekt.* Besitzt ein bipartiter Graph G = (A, B, E) zwei Faktoren H_1, H_2, von denen der eine A und der andere B überdeckt, so besagt der Satz von Schröder-Bernstein, daß G einen perfekten Faktor besitzt. Daher läßt sich für bipartite Graphen G = (A, B, E) die Frage nach der Existenz eines perfekten Faktors zurückführen auf die Frage nach der Existenz eines halbperfekten Faktors.

Es ist nun aber unüblich, dieses Problem in der Sprache der Graphentheorie zu formulieren. Daher ordnen wir dem bipartiten Graphen G = (A, B, E) eine Familie $F|A \to P(B)$ durch folgende Vorschrift zu:

$$F(a) = \{b \in B | \{a, b\} \in E\}.$$

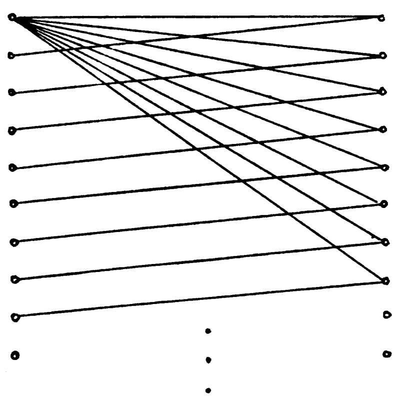
Dann ist die Frage nach der Existenz eines halbperfekten Faktors von G gleichbedeutend mit der Frage nach der Existenz einer injektiven Auswahlfunktion von F. Für endliche Familien $F|I \to M$ hat als erster P. Hall 1935 eine Antwort gegeben:

*) Erweiterte Fassung eines Vortrages, der auf der DMV-Tagung in Kaiserslautern (1984) gehalten wurde.

$F|I \to M$ besitzt eine injektive Auswahlfunktion genau dann, wenn für jede Menge $J \subseteq I$ gilt: $|J| \leqslant |F(J)|$. Wie üblich ist $F(J) = \bigcup\{F(j) | j \in J\}$. Man sieht, daß durch die Spezialisierung keine Erleichterung eingetreten ist. Erneut muß die volle Potenzmenge von I untersucht werden. Andererseits sind für endliche Graphen und endliche Familien sehr effiziente Algorithmen bekannt.

Wie tragfähig sind die Bedingungen von W. T. Tutte und P. Hall? Man versucht, die Graphenklassen, auf die die Bedingungen anwendbar sind, zu vergrößern. Ein Graph heißt *lokalfinit,* falls jede Ecke mit nur endlich vielen Kanten inzident ist; entsprechend heißt eine Familie $F|I \to M$ mit $|F(i)| < \aleph_0$ für alle $i \in I$ lokalfinit. Mit Hilfe des Kompaktheitsprinzips (Rados Auswahlprinzip) kann man beweisen, daß sich die Bedingung von Tutte bzw. von Hall auf lokalfinite Graphen bzw. lokalfinite Familien übertragen läßt ([43] bzw. [13]). Das folgende Beispiel zeigt aber die Grenzen beider Kriterien auf.

Beispiel 1 Die Abbildung $F|\mathbf{N} \to P(\mathbf{N})$ sei definiert durch $F(0) = \mathbf{N}$ und $F(n) = \{n-1\}$ für $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. F genügt der Hall-Bedingung, besitzt aber keine injektive Auswahlfunktion. Skizze 1 zeigt den zu F gehörenden bipartiten Graphen.



Skizze 1

§ 1 Injektive Auswahlfunktionen

Der Begriff der Kardinalität spielt sowohl im Tutteschen als auch im Hallschen Kriterium eine tragende Rolle. Es hat sich aber herausgestellt, daß für eine ganze Reihe kombinatorischer Probleme der Begriff der Kardinalität zu grob ist. Andererseits sind die Größen $|I|$ und $|F(i)|$ Parameter, die durch die Familie F frei Haus mitgeliefert werden und unmittelbar zugänglich sind. Da die Angabe eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums, das sich nur dieser Größen bedient, hoffnungslos erscheint, hat man sich auf Bedingungen beschränkt, die entweder notwendig oder hinreichend sind. Ein herausragendes Beispiel ist das folgende Ergebnis von Milner und Shelah [9], [25], [35], [45]:
Ist $F = (F(i) | i \in I)$ eine Familie nichtleerer Mengen und gilt

$$(*) \qquad x \in F(i) \Rightarrow |\{j \in I | x \in F(j)\}| \leqslant |F(i)|$$

für alle $i \in I$, $x \in F(i)$, so besitzt F eine injektive Auswahlfunktion.

Interpretiert man I als eine Menge von Jungen, F(i) als die Menge derjenigen Mädchen, die der Junge i kennt, so ist eine injektive Auswahlfunktion von F eine Massenhochzeit, bei der jeder Junge ein Mädchen seiner Bekanntschaft heiratet. Die Bedingung (*) besagt: Kennt der Junge i das Mädchen x, so kennt der Junge i mindestens soviele Mädchen, wie das Mädchen x Jungen kennt.

1.1 Abzählbare Familien

Ist $F = (F(i) \mid i \in I)$ eine Familie, so heißt $J \subseteq I$ *kritisch,* falls $F \restriction J$ eine injektive Auswahlfunktion besitzt und falls für jede injektive Auswahlfunktion f von $F \restriction J$ gilt: Wb f = F(J). In diesem Fall nennt man auch die Familie $F \restriction J$ kritisch. Besitzt F eine injektive Auswahlfunktion, so ist

$$(\{J \subseteq I \mid J \text{ kritisch}\}, \bigcap, \bigcup)$$

ein vollständiger, atomarer Verband [14], [39]. Ferner gilt: Wird ein Mädchen x bei jeder Hochzeit verheiratet, d. h. kommt x im Wertebereich einer jeden injektiven Auswahlfunktion von F vor, so liegt x in einer kritischen Subfamilie von F [31]. Unabhängig von der Tatsache ob F eine injektive Auswahlfunktion besitzt, läßt sich jede kritische Menge $K \subseteq I$ zu einer maximal kritischen Menge erweitern [31]. Andererseits zeigt die Familie

$$F(\alpha) = \omega \quad \text{für} \quad \alpha \in \omega_1,$$

daß nicht notwendigerweise eine maximale Menge $J \subseteq \omega_1$ existiert, so daß $F \restriction J$ eine injektive Auswahlfunktion besitzt. Diese Tatsache macht das Auffinden von notwendigen und hinreichenden Kriterien schwierig.

Im Gegensatz zu obigem Beispiel konnte gezeigt werden, daß jede abzählbare Familie eine maximal verheiratbare Subfamilie besitzt [32]. Ferner gilt: Eine abzählbare Familie besitzt eine injektive Auswahlfunktion genau dann, wenn für jede kritische Menge $J \subseteq I$ und für jedes $i \in I \setminus J$ gilt $F(i) \not\subseteq F(J)$ [31]. Dieses Kriterium arbeitet für solche Familien, die maximal verheiratbare Subfamilien besitzen [32]. Aber welche sind das? Man kennt zur Zeit drei Klassen solcher Familien F:

1. Abzählbare Familien [32]
2. Familien mit $|\{i \in I \mid x \in F(i)\}| \leqslant \aleph_0$ für alle $x \in F(I)$ [28]
3. Familien, für die der zu F gehörende bipartite Graph keine unendlich langen Wege besitzt [34].

Die erste Klasse liefert eine hübsche Verallgemeinerung des Satzes von Dilworth über halbgeordnete Mengen: Jede abzählbare Halbordnung $(P, \leqslant)$ ohne unendlich lange Ketten besitzt eine Zerlegung $(C_i \mid i \in I)$ von P in Ketten und ein Repräsentantensystem von $(C_i \mid i \in I)$, das eine Antikette ist [29]. Der binäre ω-Baum zeigt, daß dieser Satz falsch werden kann, wenn man die Voraussetzung, daß $(P, \leqslant)$ nur endliche Ketten besitzen soll, fallen läßt.

Doch nun zurück zu den abzählbaren Familien. Bereits Beispiel 1 zeigt, daß sich unendliche Mitglieder einer Familie bzgl. der Eigenschaft, eine injektive Auswahlfunktion zu besitzen, wie endliche Mitglieder verhalten können. Denn setzt man in Beispiel 1 $J = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant 1\}$, so ist $F \restriction J$ kritisch und $F(0) \setminus F(J) = \emptyset$.

Also verhält sich die unendliche Menge F(0) wie die leere Menge. Diese Grundidee wurde in [14] weiter ausgestaltet. Nach [14] existieren zu jeder abzählbaren Familie $F = (F(i) | i \in I)$ eine Partition (I_1, I_2) von I und eine Familie $S = (S(i) | i \in I_1)$ mit $S(i) \subset\subset F(i)$ für alle $i \in I_1$, so daß F eine injektive Auswahlfunktion genau dann besitzt, wenn das assoziierte Skelett S eine solche besitzt.

Ein weiteres Kriterium, im wesentlichen auch nur für abzählbare Familien anwendbar, ist von Damerell und Milner [10] nach einer Idee von C. St. J. A. Nash-Williams [26] entwickelt worden. Nash-Williams gibt in [27] ein Kriterium an, von dem R. Aharoni bewies, daß es zu dem mit Hilfe kritischer Familien formulierten Kriterium äquivalent ist [1]. Im folgenden Abschnitt soll das Kriterium von Nash-Williams beschrieben werden. Zunächst erweitert man die Menge der ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$ um zwei neue Elemente $-\infty$, ∞ mit der gewöhnlichen Bedeutung. $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt die Menge der quasi-ganzen Zahlen. Ist A eine Menge, so ist die Größe $\|A\|$ die Kardinalität von A, falls A endlich ist und ∞, falls A unendlich ist. Die Summe $a_1 + \ldots + a_n$ von quasi-ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ hat die übliche Bedeutung, falls alle a_i ganze Zahlen sind; ist hingegen mindestens ein a_i gleich ∞, so sei die Summe gleich ∞, ist kein a_i gleich ∞, aber ein a_i gleich $-\infty$, so sei die Summe gleich $-\infty$. Insbesondere ist also $\infty - \infty = \infty$. Es sei $F = (F(i) | i \in I)$ eine Familie. Eine injektive Abbildung g von einer Ordinalzahl α in F(I) heißt eine *Aufzählung in F(I).* Ist $A \subseteq F(I)$ eine Menge von Mädchen und g eine Aufzählung in F(I), so sei $D(A) = \{i \in I | F(i) \subseteq A\}$ die Menge der Jungen, die notgedrungen nach A heiraten müssen und $D(g) = D(\mathrm{Wb}\ g)$. Ist λ eine Limesordinalzahl und $a_\rho \in \mathbf{Z}^*$ für alle $\rho < \lambda$, so sei

$$\liminf_{\rho \to \lambda} a_\rho = \sup \{\inf \{a_\eta | \rho \leqslant \eta < \lambda\} | \rho < \lambda\}$$

Zu jeder Aufzählung g in F(I) definieren wir eine quasi-ganze Zahl q(g). Es sei

$$q(\emptyset) = -\|D(\emptyset)\|.$$

Ist $g | \alpha \to F(I)$ eine Aufzählung in F(I) und ist $q(g \upharpoonright \beta)$ für jedes $\beta < \alpha$ bereits definiert, so sei

$$q(g) = q(g \upharpoonright \beta) + 1 - \|D(g) - D(g \upharpoonright \beta)\|,$$

falls $\alpha = \beta + 1$ ist und

$$q(g) = \liminf_{\rho \to \alpha} q(g \upharpoonright \rho) - \|D(g) \setminus \bigcup_{\rho < \alpha} D(g \upharpoonright \rho)\|,$$

falls α eine Limeszahl ist.

Nash-Williams beweist in [27], daß eine abzählbare Familie $F = (F(i) | i \in I)$ genau dann eine injektive Auswahlfunktion besitzt, wenn für jede Aufzählung g in F(I) die quasi-ganze Zahl q(g) größer gleich Null ist. In [28] wird gezeigt, daß dieses Kriterium auch für solche Familien von Jungen und Mädchen arbeitet, in denen jedes Mädchen höchstens abzählbar viele Jungen kennt.

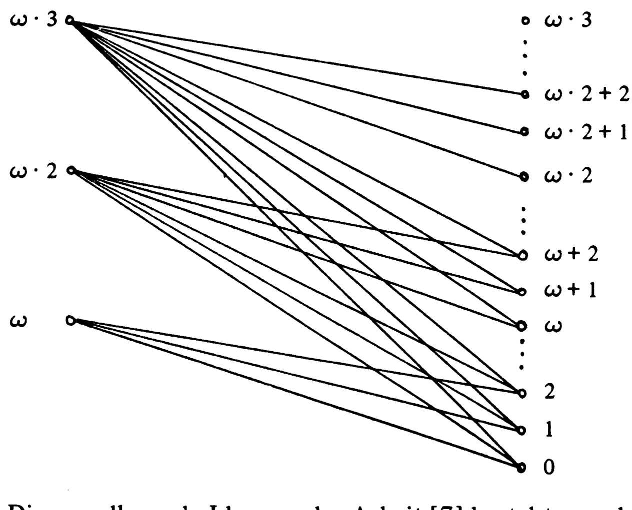
1.2 Überabzählbare Familien

Die Beschäftigung mit überabzählbaren Familien, d. h. Familien mit $|I| > \aleph_0$, zeigt sehr eindrucksvoll, daß graphentheoretische Probleme mit Metho-

den aus der Mengenlehre gelöst werden können. Wegen der grundlegenden Bedeutung dieser Methoden erfolgt eine relativ ausführliche Schilderung.
Es sei $\kappa > \omega$ eine reguläre Kardinalzahl. Als Prototyp denke der Leser an die kleinste überabzählbare Kardinalzahl $\aleph_1$. Eine Menge $C \subseteq \kappa$ wird ein *Club* in κ genannt, falls C unbeschränkt und abgeschlossen ist; abgeschlossen bedeutet, daß für jede streng wachsende Folge $(c_\xi | \xi < \sigma)$ von Elementen aus C gilt: $\sup_{\xi<\sigma} c_\xi \in C$, falls nur die Ordinalzahl σ kleiner als κ ist.
Es ist zum Beispiel die Menge der Limeszahlen kleiner κ ein Club in κ. Eine Menge $S \subseteq \kappa$ heißt *stationär in* κ, falls $S \cap C \neq \emptyset$ für jeden Club $C \subseteq \kappa$. Bildlich gesprochen sind stationäre Mengen große Mengen, für die das Schubfachprinzip gilt. Eine Abbildung $f | \kappa \to \kappa$ nennt man *regressiv* auf $S \subseteq \kappa$, falls $f(\alpha) < \alpha$ für alle $\alpha \in S \setminus \{0\}$ ist. Von herausragender Bedeutung ist der Satz von Fodor [11]: Ist $\kappa > \omega$ eine reguläre Kardinalzahl und ist f regressiv auf einer stationären Menge $S \subseteq \kappa$, so ist f konstant auf einer stationären Teilmenge S^* von S.

Wir betrachten ein Beispiel. Die Menge $\{\alpha \in \aleph_1 | \mathrm{Lim}(\alpha)\} =: I$ ist ein Club in $\aleph_1$ und somit eine stationäre Menge. Also besitzt nach dem Satz von Fodor die Familie $F = (F(\alpha)|\alpha \in I)$ mit $F(\alpha) = \alpha$ keine injektive Auswahlfunktion.

Beispiel 2 Die Familie $F = (F(\alpha)|\alpha < \aleph_1 \ \& \ \mathrm{Lim}(\alpha))$ sei definiert durch $F(\alpha) = \alpha$.



Skizze 2

Die grundlegende Idee aus der Arbeit [7] besteht nun darin, die Beispiele 1 und 2 geschickt in einem einzigen Begriff zusammenzufassen.

Definition Ist $F = (F(i)|i \in I)$ eine Familie, G_F der zugehörige bipartite Graph, d. h. $\{i, x\} \in E$ genau dann, wenn $x \in F(i)$, und ist κ eine Kardinalzahl, so ist ein *κ-Turm in G_F* eine monoton wachsende, stetige Folge $(T_\alpha | \alpha < \kappa)$ von induzierten Subgraphen von G_F mit $T_0 = \emptyset$. Zu jedem κ-Turm $T = (T_\alpha | \alpha < \kappa)$ sei

$$\bar{T} = (L_\alpha | \alpha < \kappa)$$

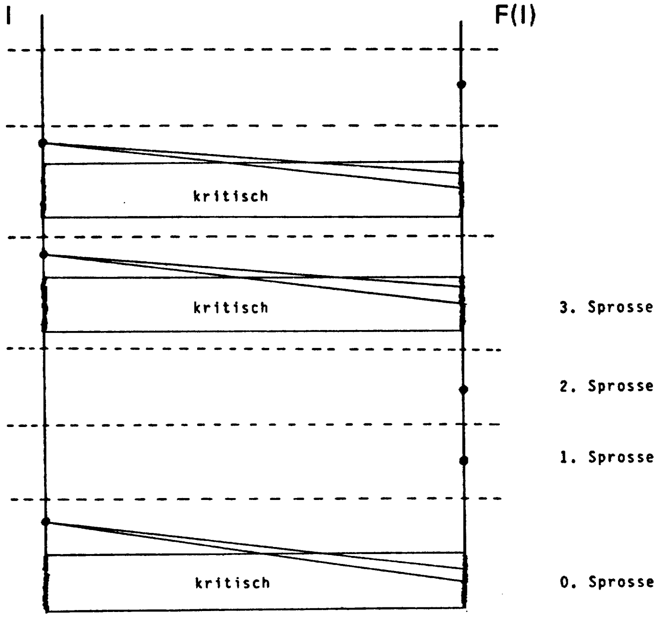
mit $L_\alpha = T_{\alpha+1} \setminus T_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$ die zugehörige *κ-Leiter;* L_α heißt die *α-te Sprosse.*

Ist $M = \{1\} \cup \{\kappa > \omega \mid \kappa \text{ regulär}\}$, so definiert man induktiv über M den Begriff der κ-Obstruktion. Ein induzierter Teilgraph L von G_F heißt *1-Obstruktion*, falls eine kritische Menge $J \subsetneq I$ und ein Element $i \in I \setminus J$ existieren mit $F(i) \subseteq F(J)$, so daß L der von $J \cup \{i\} \cup F(J)$ induzierte Teilgraph von G_F ist. Nun sei für alle $\mu < \kappa$ mit $\mu \in M$ die Eigenschaft „L ist eine μ-Obstruktion von G_F" bereits definiert. Ein κ-Turm $T = (T_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ heißt *κ-obstruktiv*, falls folgendes gilt:

(a) Zu jedem $\alpha < \kappa$ existiert entweder
  (i) eine Kardinalzahl $\mu < \kappa$ mit $\mu \in M$, so daß die Sprosse L_α eine μ-Obstruktion in $G_F \setminus T_\alpha$ ist oder
  (ii) ein Element $x \in F(I)$ mit $L_\alpha = \{x\}$.

(b) Die Menge aller $\alpha < \kappa$, so daß in (a) der Fall (i) eintritt, ist stationär in κ.

Ein Teilgraph L von G_F, der von einem κ-obstruktiven Turm induziert wird, nennt man eine *κ-Obstruktion*.
Skizze 3 soll den Begriff der $\aleph_1$-Obstruktion verdeutlichen.



Skizze 3

In [7] wird bewiesen, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) F besitzt eine injektive Auswahlfunktion
(2) G_F besitzt einen halbperfekten Faktor
(3) G_F enthält keine κ-Obstruktion.

Dieses Ergebnis charakterisiert diejenigen bipartiten Graphen, die keinen halbperfekten Faktor besitzen. Überraschenderweise gibt es also im wesentlichen nur zwei Typen, nämlich eine 1-Obstruktion und eine κ-Obstruktion mit $\kappa > \omega$, die keinen halbperfekten Faktor besitzen.

Beispiel 1 ist das Standardbeispiel für eine 1-Obstruktion und Beispiel 2 das für eine $\aleph_1$-Obstruktion.
In [30] gibt K.-P. Podewski ein weiteres Kriterium an, das Ideen aus [36] verwendet. Es ermöglicht einen direkten Beweis von Korollar 6.1.a aus [7] und beantwortet so eine Frage aus [7].

Das Kriterium von Aharoni, Nash-Williams und Shelah wurde von R. Aharoni benutzt, um eine Frage von P. Erdös zu beantworten. Nach D. König ist für endliche, bipartite Graphen die minimale Anzahl trennender Ecken gleich der maximalen Anzahl eckendisjunkter Kanten. P. Erdös fragte, ob zu jedem beliebigen bipartiten Graphen eine trennende Eckenmenge S und ein Faktor F derart existieren, daß jede Kante aus F genau eine Ecke aus S enthält und jede Ecke aus S mit einer Kante aus F inzident ist. In [32] wurde die Frage für abzählbare bipartite Graphen und in [2] von R. Aharoni für beliebige bipartite Graphen positiv beantwortet. Aharoni zeigt zunächst, daß eine Familie $F = (F(i) | i \in I)$ genau dann *keine* injektive Auswahlfunktion besitzt, wenn eine Menge $S \subseteq F(I)$ von Mädchen derart existiert, daß zwar

$$F^{-1} \restriction S = \{(x, J) | x \in S \;\&\; J = \{i \in I | x \in F(i)\}\}$$

eine injektive Auswahlfunktion *in D(S)*, aber $F \restriction D(S)$ keine injektive Auswahlfunktion besitzt. Diese Verallgemeinerung des Hallschen Satzes macht den Löwenanteil des Beweises aus. Die Verallgemeinerung des Satzes von König ergibt sich nun sehr rasch: Es sei $G = (A, B, E)$ ein bipartiter Graph. Besitzt G einen halbperfekten Faktor, so setze $S = A$ und alles ist bewiesen. Andernfalls existiert nach Aharoni eine Menge $S \subseteq B$, so daß $F_G^{-1} \restriction S$ eine injektive Auswahlfunktion f in D(S), aber $F_G \restriction D(S)$ keine injektive Auswahlfunktion besitzt. Offensichtlich gilt der Satz von König für den Teilgraphen $G[D(S) \cup S]$. Eine Iteration dieser beiden Argumente ergibt die Verallgemeinerung des Satzes von König.

§ 2 Perfekte Faktoren für beliebige Graphen

Da das Konzept der kritischen Familien sich als tragfähig erwies, hat man es auf beliebige Graphen $G = (V, E)$ übertragen. Ist $S \subseteq V$ und F ein Faktor von G, so heißt F ein *Faktor von S,* falls jede Ecke von S auf einer Kante von F liegt und jede Kante von F mit einer Ecke aus S adjazent ist. $S \subseteq V$ heißt *geschlossen,* falls ein Faktor von S existiert und in keinem Faktor F von S eine Kante $\{v, w\} \in F$ mit $v \in S$ und $w \notin S$ vorkommt. Wieder existiert zu jeder geschlossenen Menge $S \subseteq V$ eine maximal geschlossene Obermenge [41]. Es lassen sich eine Reihe von Sätzen, die für kritische Mengen gelten, auch für geschlossene Mengen beweisen [41], [3]. Zum Beispiel gilt für abzählbare Graphen $G = (V, E)$ folgendes: Entweder besitzt G einen perfekten Faktor oder es existiert eine geschlossene Menge $S \subseteq V$ und eine Ecke $z \in V \setminus S$ mit

$$N(z) := \{x \in V | \{x, z\} \in E\} \subseteq S \qquad \text{(siehe [41])}.$$

Läßt sich eine Verbindung herstellen zwischen dem Satz von Hall und dem Satz von Tutte? Ist $G = (V, E)$ und $S \subseteq V$, so sei der bipartite Graph $\Pi(S)$ definiert durch folgende Vorschrift: Ist A die Menge aller faktor-kritischen Komponenten von $G \setminus S$ und ist B gleich der Menge S, so werden $a \in A$ und $b \in B$ durch eine Kante verbunden, falls im Originalgraphen G eine Kante von b in die Komponente a führt. Für lokalfinite Graphen G ist die Bedingung von Tutte äquivalent zu der Aussage, daß für jede endliche Menge S der bipartite Graph $\Pi(S)$ einen halbperfekten Faktor besitzt, der alle Ecken aus A überdeckt, d. h. daß die zu dem Graphen $\Pi(S)$ gehörende Familie der Hall-Bedingung genügt.

In [5], [6] zeigt R. Aharoni, daß die folgende Bedingung notwendig und hinreichend für die Existenz eines perfekten Faktors ist: Für jede Menge $S \subseteq V$ besitzt $\Pi(S)$ einen halbperfekten Faktor. Ferner beweist er, daß die analogen Begriffe für 1-Obstruktion und κ-Obstruktion zu einem notwendigen und hinreichenden Kriterium führen [6].

Das Kriterium von R. Aharoni beschreibt natürlich die Struktur solcher Graphen, die keinen perfekten Faktor besitzen. Kann man die Struktur solcher Graphen noch genauer beschreiben? Diese Frage zielt auf den Zerlegungssatz von Edmonds-Gallai [42]. Eine Menge $S \subseteq V$, die einen Faktor besitzt, wollen wir *faktorisierbar* nennen. Nicht jeder Graph besitzt eine maximal faktorisierbare Eckenmenge, man betrachte z. B. den vollständigen bipartiten Graph $K_{\aleph_1, \aleph_0}$. Besitzt hingegen ein Graph $G = (V, E)$ eine maximal faktorisierbare Eckenmenge, so bezeichnen wir mit A die Menge aller Ecken, die nicht im Durchschnitt aller maximal faktorisierbaren Eckenmengen liegen und mit B die Menge aller Ecken $x \in V \setminus A$, die mit einer Ecke aus A adjazent sind. Es gelten mit $C = V \setminus (A \cup B)$ die folgenden Aussagen:

(1) Jede Komponente von $G[A]$ ist faktor-kritisch.

(2) Ist H ein Faktor einer maximal faktorisierbaren Menge, so gilt:
  (a) Für jede Ecke $v \in B$ ist $H(v) \in A$.
  (b) Zu jeder Komponente K von $G[A]$ existiert eine Ecke $y \in V(K)$, so daß $H \restriction (V(K) \setminus \{y\})$ ein perfekter Faktor von $G[V(K) \setminus \{y\}]$ ist.
  (c) $H \restriction C$ ist ein perfekter Faktor von $G[C]$.

Die Bedeutung dieses Satzes steht und fällt mit der Charakterisierung solcher Klassen von Graphen, die eine maximal faktorisierbare Eckenmenge besitzen. Zur Zeit sind i. w. nur zwei Graphenklassen bekannt:

(1) Abzählbare Graphen [41]

(2) Graphen ohne unendlich lange Wege [34].

Abschließend soll ein unveröffentlichtes Resultat von F. Galvin erwähnt werden: Ist G ein unendlicher, zusammenhängender Graph, so besitzt G^3 einen perfekten Faktor.

§ 3 Halbperfekte Faktoren mit Nebenbedingungen

Ist $G = (A, B, E)$ ein bipartiter Graph, so gibt es zwei Möglichkeiten, den Graphen G zu strukturieren: Man versieht die Eckenmenge $A \cup B$ oder die Kantenmenge E mit einer Struktur.

Zu der ersten Möglichkeit gehört das Vorgehen, B als Grundmenge eines Matroiden $(B, \mathcal{E})$ mit endlichem Charakter und Rangfunktion ρ aufzufassen. Nach

R. Rado [33] besitzt ein bipartiter Graph $G = (A, B, E)$ mit $|N(a)| < \aleph_0$ für alle $a \in A$ einen halbperfekten Faktor F mit $\{F(a) | a \in A\} \in \mathcal{E}$ genau dann, wenn für alle endlichen Teilmengen $X \subseteq A$ gilt: $|X| \leqslant \rho(N(X))$. Der Satz von Rado ist die Matroidenversion des Satzes von Hall. Kann man diesen Satz dadurch verbessern, daß man die einschränkende Bedingung $|N(a)| < \aleph_0$ durch $|\rho(N(a))| < \aleph_0$ ersetzt? J. H. Mason zeigt in [19], daß dies möglich ist. In Anlehnung an ein bekanntes Resultat für abzählbare Familien [31] gibt E. Milner für abzählbare bipartite Graphen in [23] ein scharfes Kriterium für die Existenz eines halbperfekten Faktors F mit $\{F(a) | a \in A\} \in \mathcal{E}$ an.

Nun zu der zweiten Möglichkeit einen Graphen zu strukturieren. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *rekursiv,* falls $V \subseteq \mathbf{N}$ und auch $E \subseteq \mathbf{N}^2$ (E symmetrisch) rekursive Mengen sind. Einen rekursiven Graphen $G = (V, E)$ nennt man *stark rekursiv,* falls die Gradfunktion $\gamma | \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definiert durch

$$\gamma(n) = \begin{cases} 0, & n \in \mathbf{N} \setminus V \\ |\{k \in \mathbf{N} | (n, k) \in E\}|, & n \in V \end{cases}$$

rekursiv ist. Ist $G = (A, B, E)$ bipartit, so heißt G *rekursiv bipartit,* falls ein Algorithmus existiert, der die Elementbeziehung in A und B determiniert. Manaster und Rosenstein [17] bewiesen, daß rekursiv bipartite, stark rekursive Graphen existieren, die der Hall-Bedingung genügen, die aber keinen rekursiven halbperfekten Faktor besitzen. Ferner geben sie in [17] eine scharfe Schranke für den Unlösbarkeitsgrad von halbperfekten Faktoren an. Da die Hallsche Bedingung für die Existenz von rekursiven halbperfekten Faktoren nicht ausreicht, sucht man nach zusätzlichen Bedingungen, die rekursive Lösungen garantieren.

Ein bipartiter Graph $G = (A, B, E)$ genügt der *erweiterten Hall-Bedingung,* falls eine Abbildung $h | \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ mit $h(0) = 0$ existiert, so daß für alle endlichen Teilmengen $X \subset\subset A$ gilt: Ist $|N(X)| - |X| < n$, so ist $|X| < h(n)$.
Ist h rekursiv, so genügt G der *rekursiven erweiterten Hall-Bedingung.* $h(0) = 0$ stellt sicher, daß G der Hall-Bedingung genügt. H. A. Kierstead konnte 1983 beweisen, daß rekursiv bipartite, stark rekursive Graphen, die der rekursiven erweiterten Hall-Bedingung genügen, immer einen rekursiven halbperfekten Faktor besitzen [16]. Ferner zeigte er, daß man auf die Bedingung der Rekursivität von h nicht verzichten kann.

Literatur

[1] Aharoni, R.: On the Equivalence of Two Conditions for the Existence of Transversals. J. Combin. Theory, Ser. A, **34** (1983) 202–214
[2] Aharoni, R.: König's duality theorem for infinite bipartite graphs. J. London Math. Soc. **29** (1984) 1–12
[3] Aharoni, R.: On an obstruction for perfect matchings. Combinatorica **4** (1984) 1–6
[4] Aharoni, R.: Matchings in Graphs of Size $\aleph_1$. J. Combin. Theory, Ser. B, **36** (1984) 113–117
[5] Aharoni, R.: A generalization of Tutte's 1-factor theorem to countable graphs. J. Combin. Theory, Ser. B, **37** (1984) 199–209
[6] Aharoni, R.: Matchings in infinite graphs. Technion Preprint Series No. MT-629
[7] Aharoni, R.; Nash-Williams, C. St. J. A.; Shelah, S.: A general criterion for the existence of transversals. Proc. London Math. Soc. **47** (1983) 43–68

[8] Aharoni, R.; Nash-Williams, C. St. J. A.; Shelah, S.: Another form of a criterion for the existence of transversals. J. London Math. Soc. **29** (1984) 193–203
[9] Bollobas, B.; Milner, E. C.: A theorem in transversal theory. Bull. London Math. Soc. **5** (1973) 267–270
[10] Damerell, M. R.; Milner, E. C.: Necessary and sufficient conditions for transversals of countable set systems. J. Combin. Theory, Ser. A, **17** (1974) 350–374
[11] Fodor, G.: Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen. Acta Sci. Math. (Szeged) **17** (1956) 139–142
[12] Hall, P.: On representatives of subsets. J. London Math. Soc. **10** (1935) 26–30
[13] Hall, P.: Distinct representatives of subsets. Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948) 922–926
[14] Holz, M.; Podewski, K.-P.; Steffens, K.: Hall Families and the Marriage Problem. J. Combin. Theory, Ser. A, **27** (1979) 161–180
[15] Holz, M.; Podewski, K.-P.; Steffens, K.: A Hall Criterion for Countable Families of Sets. J. London Math. Soc. (2), **21** (1980) 1–12
[16] Kierstead, H. A.: An effective version of Hall's theorem. Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983) 124–128
[17] Manaster, A. B.; Rosenstein, J. G.: Effective matchmaking (Recursion theoretic aspects of a theorem of P. Hall). Proc. London Math. Soc. **25** (1972) 615–654
[18] Manaster, A. B.; Rosenstein, J. G.: Effective matchmaking and k-chromatic graphs. Proc. Amer. Math. Soc. **39** (1973) 371–378
[19] Mason, J. H.: Representations of independence spaces. PhD Diss., University of Wisconsin, 1969
[20] McCarthy, P. J.: Matchings in Infinite Graphs. Czech. Math. J. **28** (103) (1978) 245–251
[21] McCarthy, P. J.: Matchings in Graphs II. Discr. Math. **11** (1975) 141–145
[22] McCarthy, P. J.: Matchings in Graphs III. Infinite Graphs. In: Alavi, Y.; Lick, D. R. (eds): Theory and Applications of Graphs, Proceedings. Michigan 1976, Berlin – Heidelberg – New York 1978 (Springer Lecture Note 642), 384–393
[23] Milner, E. C.: Independent transversals for countable set systems. J. Combin. Theory, Ser. A, **19** (1975) 125–133
[24] Milner, E. C.: Lectures on the marriage theorem of Aharoni, Nash-Williams and Shelah. Graph Theory, Singapore 1983. Proceedings (ed. K. M. Koh and H. P. Yap), Lecture Notes in Mathematics Nr. 1073
[25] Milner, E. C.; Shelah, S.: Sufficiency conditions for the existence of transversals. Canad. J. Math. **26** (1974) 948–961
[26] Nash-Williams, C. St. A.: Which infinite set-systems have transversals? A possible approach. Proceedings of the Conference on Combinatorics at Oxford (1972) 237–253, Institute of Mathematics and it's Application
[27] Nash-Williams, C. St. A.: Another criterion for marriage in denumerable societies, Advances in graph theory (ed. B. Bollobas). Ann. Discrete Math. **3** (1978) 165–179
[28] Nash-Williams, C. St. A.: Marriage in societies in which each woman knows countably many men. Proc. of the tenth southeastern conference on combinatorics, graph theory and computing, Vol. 1 (eds. F. Hoffman, D. McCarthy, R. C. Mullin, R. G. Stanton, Congressus Numerantium XXIII, Utilitas Mathematica, Publishing Inc. 1979), 103–115
[29] Oellrich, H.; Steffens, K.: On Dilworth Decomposition Theorem. Discrete Mathematics **15** (1976) 301–304
[30] Podewski, K.-P.: Necessary and sufficient conditions for the existence of injective choice functions. Schriftenreihe des Instituts für Mathematik Nr. 165, Universität Hannover, 1983
[31] Podewski, K.-P.; Steffens, K.: Injective choice functions for countable families. J. Combin. Theory, Ser. B, **21** (1976) 40–46
[32] Podewski, K.-P.; Steffens, K.: Maximal representable subfamilies. Bull. London Math. Soc. **8** (1976) 186–189
[33] Rado, R.: Axiomatic treatment of rank in infinite sets. Canad. J. Math. **1** (1949) 337–343
[34] Schmidt, R.: Ein Reduktionsverfahren für Weg-endliche Graphen. Dissertation, Hamburg 1982

[35] S h e l a h , S.: A substitute for Hall's theorem for families with infinite sets. J. Combin. Theory, Ser. A, **16** (1974) 199–208
[36] S h e l a h , S.: "Notes on Partition Calculus", Infinite and finite sets, Vol. III. Colloquia Mathematica, Societatis János Bolyai 10, Amsterdam – London 1975, 1257–1276
[37] S h e l a h , S.: A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals. Isr. J. Math. **21** (1975) 319–349
[38] S t e f f e n s , K.: Injective choice functions. J. Combin. Theory, Ser. A, **17** (1974) 138–144
[39] S t e f f e n s , K.: Ergebnisse aus der Transversalentheorie I. J. Combin. Theory, Ser. A, **20** (1976) 178–201
[40] S t e f f e n s , K.: Ergebnisse aus der Transversalentheorie II. J. Combin. Theory, Ser. A, **20** (1976) 202–229
[41] S t e f f e n s , K.: Matchings in countable graphs. Canad. J. Math. **29** (1976) 165–168
[42] S t e f f e n s , K.: Maximal tight sets and the Edmonds-Gallai decomposition for matchings. Erscheint in der Zeitschrift Combinatorica
[43] T u t t e , W. T.: The factorization of linear graphs. J. London Math. Soc. **22** (1947) 107–111
[44] T u t t e , W. T.: The factorization of locally finite graphs. Can. J. Math. **2** (1950) 44–49
[45] T v e r b e r g , H.: On the Milner-Shelah condition for transversals. J. London Math. Soc. **13** (1976) 520–524

Prof. Dr. K. Steffens
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1
3000 Hannover

(*Eingegangen: 13. 12. 1984*)

Buchbesprechungen

Kertész, A., Georg Cantor, 1845–1918, Schöpfer der Mengenlehre (bearbeitet von Manfred Stern), Acta Historica Leopoldina, Nr. 15 (1983), kart. 118 Seiten (Lizenzausgabe Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, Mitgliedpreis DM 26,–)

In dieser Schrift möchte der Autor die Persönlichkeit, das Leben und das Lebenswerk Georg Cantors einem größeren Kreis kulturell interessierter Menschen nahebringen. Das private und das wissenschaftliche Leben Cantors wird ausführlich und liebevoll geschildert und mit zahlreichen zeitgenössischen Zitaten, vielen Photos und Facsimiles von Dokumenten ausgeschmückt. Interessant für den Historiker ist das hier erstmals veröffentlichte vollständige Verzeichnis aller von Cantor an der Universität Halle angekündigten Lehrveranstaltungen. Auf 30 Seiten wird ferner eine Einführung in die Grundzüge der Cantorschen Mengenlehre gegeben.

Eine kritische Würdigung des Cantorschen Werkes wird allerdings nicht gegeben: die Diskussion bleibt stets an der Oberfläche stecken. Störend wirkt die unsachliche Polemik gegen Kronecker (Die Beschreibung des Kroneckerschen Programms – wenigstens in einer Fußnote – wäre nützlich gewesen, denn erst aus dem Programm heraus sind die Kroneckerschen Angriffe auf den naiven Platonismus der Cantorschen Mengenlehre verständlich und wirken dann auch nicht mehr böswillig). Ferner: auf Seite 50 unten ist die Nennung von K. Gödel sachlich falsch.

Tübingen U. Felgner

The Mathematical Heritage of Henri Poincaré (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 39 part 1 and 2, edited by Felix Browder), Providence, Rhode Island: American Mathematical Society 1983, IX + 435 + 470 pages, hardcover, $ 75.00 (set price)

Die beiden Bände enthalten die überarbeiteten Hauptvorträge eines Symposiums, das im April 1980 in Bloomington, Indiana stattfand. Teilweise sind die dort gehaltenen Vorträge durch ausführlichere Vorlesungen ersetzt, die die Autoren bei anderer Gelegenheit zum selben Thema hielten. Hierzu kommen ältere Artikel über Poincaré und sein Werk, die 1921 in den Acta Mathematica erschienen, sowie Alexandrovs Vortrag über Poincaré und die Topologie, den er anläßlich des 100. Geburtstags 1954 in Den Haag hielt.

Man verdankt Henri Poincaré (1854–1912) bedeutende Beiträge zur Himmelsmechanik, zu den Riemannschen Flächen und den diskreten Gruppen konformer Transformationen, zur algebraischen Geometrie, zur komplexen Analysis mehrerer Veränderlicher und zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Man sieht in ihm den Begründer mehrerer Zweige der neueren Mathematik wie der algebraischen Topologie, der Differentialtopologie, der dynamischen Systeme und der Ergodentheorie. Was hat uns Poincaré in all diesen Gebieten als Erbe hinterlassen? Wie hat dieses Erbe die Entwicklung der Mathematik bis heute beeinflußt, und welche zukunftsweisenden Fragestellungen ergeben sich daraus? Dies scheinen die unausgesprochenen Fragen zu sein, auf die zahlreiche Experten mit ihren Beiträgen antworten. Oft schlägt ein Artikel den großen Bogen von Poincaré bis zu den heute bearbeiteten Problemen. Andere Autoren beschreiben nur, was uns Poincaré hinterließ. Wieder andere beschränken sich auf neuere Ergebnisse, ohne auf Poincaré Bezug zu nehmen. Die meisten Beiträge sind Übersichtsartikel, in denen Einzelheiten und Beweise nicht ausgeführt werden. Zum großen Teil wurden sie bereits 1981–83 im Bulletin der American Mathematical Society veröffentlicht und werden in den vorliegenden Proceedings nur nachgedruckt.

Drei Themenkreise werden in jeweils mehreren z. T. ausführlichen Artikeln behandelt: 1. hyperbolische Geometrie und diskrete Gruppen konformer Abbildungen (Kleinsche Gruppen), 2. komplexe Differentialgeometrie, 3. Methoden der Topologie und Variationsrechnung bei nicht-linearen Problemen der Analysis. Darüber hinaus gibt es kaum ein Gebiet aus Poincarés Erbe, welches nicht mit wenigstens einem Artikel berücksichtigt wird. Der Herausgeber F. Browder bedauert, daß es nicht gelang, das was aus Poincarés Arbeiten zur Himmelsmechanik entstand, angemessen zu berücksichtigen. Auch die gesamte mathematische Entwicklung, die Poincaré mit seiner Erfindung der Homologie und der Fundamentalgruppe in Gang setzte, vermißt man; denn es gibt nur einen Beitrag von F. Adams über eine spezielle Frage der Homotopietheorie. Aber anstatt Vorschläge für einen 3. und 4. Band zu machen, sei lieber festgestellt, welch' eine Fülle interessanter Mathematik in oft hervorragender Darstellung die vorhandenen Beiträge bieten.

Um in die hyperbolische Geometrie eingeführt zu werden, sollte man mit J. Milnors Artikel beginnen, der zunächst die Geschichte von den Anfängen bis ca. 1900 schildert und sodann anhand einiger Beispiele an die Ergebnisse und Probleme der jüngsten Zeit heranführt. Man ist dann auf W. P. Thurstons Beitrag vorbereitet, in dem er seine Aufsehen erregenden Ergebnisse über die Existenz hyperbolischer Strukturen auf 3-dim. Mannigfaltigkeiten vorstellt sowie die Konsequenzen, die sich daraus für die Klassifikation dieser Mannigfaltigkeiten ergeben. In seinem Artikel findet man auch einen Abschnitt über die reichhaltige und merkwürdige Geometrie der Kleinschen Gruppen und ihrer Grenzmengen, auf der die (nicht ausgeführten) Beweise seiner Hauptergebnisse beruhen. Zu diesem Themenkreis gehören auch L. Bers Übersichtsartikel über endlich dimensionale Teichmüller-Räume und D. Sullivans maßtheoretische Untersuchung des geodätischen Flusses auf dem hyperbolischen Raum modulo einer diskreten Gruppe konformer Transformationen.

Die Beiträge zur komplexen Differentialgeometrie handeln von den reellen Hyperflächen des $\mathbf{C}^n$ mit ihrer Cauchy-Riemannschen Struktur, insbesondere von den Rändern pseudokonvexer Gebiete und von diesen Gebieten selbst. In einem Übersichtsartikel schildert R. O. Wells, wie aus Poincarés grundlegender Arbeit von 1907 im Laufe von 70 Jahren die heutigen Ergebnisse und Probleme entstanden. Soweit es sich um pseudokonvexe Gebiete handelt, hat der Leser Gelegenheit, Einzelheiten und Beweise in Ch. Feffermans Vorlesungsreihe kennenzulernen, die in der Ausarbeitung von M. Beals und G. Grossman fast die Hälfte des ersten Bandes einnimmt. Sodann zeigt R. Penrose in einem längeren Beitrag auf, wie innerhalb seiner Twistor-Geometrie Cauchy-Riemannsche Strukturen auftreten. Schließlich ist diesem Themenkreis eine Originalarbeit von N. Mok und S. T. Yau zuzuordnen, in der Holomorphiegebiete durch Krümmungseigenschaften der Kähler-Einsteinschen Metrik charakterisiert werden.

Zum dritten der oben genannten Themenkreise (nicht-lineare Analysis) findet man einen Übersichtsartikel von L. Nirenberg, der eine große Vielfalt von Methoden der Topologie und Variationsrechnung vorstellt. Eine Reihe neuerer Anwendungsbeispiele auf partielle Differentialgleichungen machen diesen Beitrag besonders interessant. Zwei weitere Artikel greifen aus dieser Vielfalt die Theorie des Abbildungsgrades (F. Browder) und die nicht-linear schwingende Saite (H. Brezis) für eine ausführliche Behandlung heraus.

Von den zahlreichen Artikeln außerhalb der drei Themenkreise seien drei genannt, die einen breiten Leserkreis ansprechen: vier Vorlesungen von R. Bott über Morse-Theorie, S. Smales Beitrag über den Fundamentalsatz der Algebra und Komplexitätstheorie und H. Fürstenbergs Darstellung des Poincaréschen Wiederkehrsatzes und seine Anwendung auf zahlentheoretische Probleme. Darüber hinaus bemühen sich fast alle Autoren, zumindest einen Teil ihres Beitrags nicht nur für den Spezialisten zu schreiben. Gerechterweise sollte man sie alle vorstellen. Nur würde dies den Rahmen dieser Besprechung sprengen. Alle Artikel werden zudem im Mathematischen Zentralblatt und in den Mathematical Reviews einzeln referiert.

Köln K. Lamotke

Lerman, M., Degrees of Unsolvability – Local and Global Theory (Perspectives in Mathematical Logic), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1983, XIII + 307 S., DM 138,–

Dieses Buch hat die Struktur der Menge aller Turing-Grade (auch Grade algorithmischer Unlösbarkeit genannt) zum Gegenstand. Falls A, B, $\subseteq \mathbf{N}$ dann nennt man A rekursiv in (oder auch Turing-reduzierbar auf) B, geschrieben $A \leqslant_T B$, falls unter Verwendung der charakteristischen Funktion von B ein Algorithmus angegeben werden kann mit dessen Hilfe man jede Frage der Form „ist n in A?" entscheiden kann. Der Turing-Grad von A ist die Äquivalenzklasse

$$dg(A) = \{ B \subseteq \mathbf{N}; A \leqslant_T B \; \& \; B \leqslant_T A \}.$$

Das vorliegende Buch widmet sich also der Frage nach der Struktur des Halbverbandes $\mathcal{D} = \{dg(A); A \subseteq \mathbf{N}\}$. Es gibt einen ausgezeichneten, in sich geschlossenen Überblick über die meisten der bisher erzielten Strukturaussagen. Das Buch ist einerseits ein mustergültiges, anspruchsvolles Lehrbuch und andererseits auch für den Forscher auf diesem Gebiet ein vorzügliches Nachschlagewerk.

In der Darstellung der Ergebnisse und ihrer Beweise hat der Autor durch die weitgehende Verwendung der Erzwingungs-Methode (forcing) ein hohes Maß an Einheitlichkeit erreicht. Das Buch ist klar gegliedert: es besteht aus drei großen Teilen, von denen jeder wiederum in 4 Kapitel gegliedert ist.

Teil A ist dem Studium der in $\mathcal{D}$ einbettbaren partiell geordneten Mengen gewidmet. Man findet hier zunächst Aussagen über die Größe von Ketten und von Antiketten in $\mathcal{D}$ und dann den wichtigen Satz, daß jedes abzählbare Ideal I von $\mathcal{D}$ der „Schatten" von höchstens zwei Elementen a_1 und $a_2 \in \mathcal{D}$ ist (d. h. es gilt für alle $b \in \mathcal{D}$: $b \in I \leftrightarrow b \leqslant_T a_1 \; \& \; b \leqslant_T a_2$). Es wird der sogenannte „jump-operator" eingeführt, der jedem Grad a den größten Grad b zuordnet derart, daß a in b rekursiv aufzählbar ist (geschrieben $b = a'$). Es werden einige jump-Inversions-Theoreme bewiesen und mit ihnen zahlreiche Aussagen über Ketten, Antiketten und maximal unabhängige Teilmengen unterhalb von $0'$ gewonnen.

Teil B ist dem Studium der abzählbaren Ideale von $\mathcal{D}$ gewidmet. Die dargestellten Ergebnisse sind im wesentlichen Konstruktionen von Anfangs-Segmenten von $\mathcal{D}$, welche durch ein Orakel vom Grad $0^{(2)}$ kontrolliert werden. Beispielsweise wird die Existenz von $2^{\aleph_0}$ verschiedenen Graden $a <_T 0^{(2)}$ mit $a^{(2)} = 0^{(2)}$ gezeigt. Ferner: die endlichen Ideale von $\mathcal{D}$ sind genau die endlichen Verbände und die abzählbaren Ideale von $\mathcal{D}$ sind genau die abzählbaren supremums-Halb-Verbände mit kleinstem Element.

Teil C behandelt wieder Konstruktionen von Anfangs-Segmenten von $\mathcal{D}$, welche jetzt aber durch ein Orakel vom Grad $0'$ kontrolliert werden. Der forcing-Zugang wird nun jedoch zugunsten der effektiveren Verwendung partieller Bäume (à la Sacks) aufgegeben. Mittels Prioritäts-Argumenten wird die Existenz minimaler Grade unterhalb von $0'$ gezeigt. Mit einem schönen neuen Beweis wird auch Coopers jump-Inversions-Theorem dargestellt. Weitere Sätze betreffen die Struktur von Anfangs-Segmenten unterhalb von $0'$.

Insgesamt darf und muß man dem Autor für dieses vorzügliche Werk gratulieren. Auch Druck und Ausstattung sind sehr gut – nur der Preis ist leider etwas zu hoch.

Tübingen U. Felgner

Washington, L. C., Introduction to Cyclotomic Fields (Graduate Texts, vol. 83), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, xi + 389 p., cloth, DM 96,–

Mit Kummers Arbeiten über die Fermatsche Vermutung und über explizite Reziprozitätsgesetze nimmt die Theorie der zyklotomischen Körper in der Mitte des vorigen Jahrhunderts ihren eigentlichen Anfang. Ein entscheidender Schritt über Kummer hinaus erfolgt ein-hundert Jahre später: Iwasawa begründet die Theorie der $\mathbf{Z}_p$-Erweiterungen und Leopoldt-Kubota konstruieren die p-adischen L-Funktionen. Seitdem befindet sich die Theorie in einem stürmischen Fortgang.

Washingtons Buch gibt eine wahrhaft meisterhafte Einführung.

Gleichsam als Einleitung wird in Kapitel 1 mit Kummers Originalbeweis des ersten Falls der Fermat-Vermutung für reguläre Primzahlexponenten begonnen. Danach kommen in den Kapiteln 2, 3 und 4 die grundlegenden Tatsachen über die Arithmetik der Kreisteilungskörper und über Dirichletsche L-Reihen; speziell werden die Werte der L-Reihen an den negativen ganzzahligen Stellen mittels verallgemeinerter Bernoullizahlen berechnet und die analytische Klassenzahlformel für abelsche Zahlkörper behandelt. Für den hierbei zur Anwendung kommenden Satz von Kronecker-Weber gibt der Autor in Kapitel 14 einen von der Klassenkörpertheorie unabhängigen Beweis.

In Kapitel 5 werden bereits die p-adischen L-Funktionen zu Dirichletcharakteren χ konstruiert, und zwar gemäß dem Ansatz von Kubota-Leopoldt als Lösung eines Interpolationsproblems: Man sucht eine p-adische Funktion $L_p(s, \chi)$, die an den negativen ganzzahligen Stellen die Werte der Dirichletschen L-Reihe $L(s, \chi)$ annimmt. Das Problem wird hier mit einer Methode von Washington gelöst, die auf einer p-adischen Version der partiellen Hurwitzschen Zetafunktion beruht. Die p-adischen L-Reihen ergeben mod p-Kongruenzen für verallgemeinerte Bernoullizahlen, darunter die berühmten Kummerschen Kongruenzen. Abschließend wird die Leopoldtsche Vermutung über das Nichtverschwinden des p-adischen Regulators diskutiert und der Beweis dieser Vermutung im abelschen Fall nach Brumer-Baker gegeben.

Kapitel 6 beginnt mit dem Satz von Stickelberger. Daraus wird der Satz von Herbrand hergeleitet, welcher die Nichttrivialität gewisser Teilräume der Idealklassengruppe von $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ auf die p-Teilbarkeit korrespondierender Bernoullizahlen bezieht; hier wird auch auf seine Umkehrung, den Satz von Ribet eingegangen. Nach dem Indexsatz für das Stickelbergerideal endet das Kapitel mit dem Beweis des ersten Falls der Fermatschen Vermutung für Primzahlexponenten p vom Irregularitätsindex $i(p) < \sqrt{p} - 2$.

Das Kapitel 7 verbindet die beiden vorhergehenden Kapitel. Es bringt Iwasawas Potenzreihenkonstruktion der p-adischen L-Funktionen mit Hilfe von Stickelbergerelementen. Zugleich wird hier der Satz von Ferrero-Washington über das Verschwinden der zyklotomischen μ-Invarianten für abelsche Zahlkörper bewiesen. Washington folgt dabei einem Beweis von Oesterlé.

In Kapitel 8 werden die zyklotomischen Einheiten eingeführt und vor allem die p-adische Klassenzahlformel von Leopoldt bewiesen. Außerdem wird ausführlich die Vandiver-Vermutung $p \nmid h^+(\mathbf{Q}(\zeta_p))$ diskutiert.

Das Kapitel 9 ist ganz dem zweiten Fall der Fermatschen Vermutung gewidmet. Hier spielen neben der Klassenzahl auch die Einheiten von $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ eine Rolle. Bewiesen wird der zweite Fall für reguläre Primzahlen und für Primzahlen p, welche der Vandiver-Vermutung unterliegen und einer weiteren Teilbarkeitsbedingung genügen.

In Kapitel 10 werden in erster Linie die Spiegelungsmethoden von Leopoldt behandelt und der Satz von Mazur-Wiles im einfachen Fall, d. h. unter Annahme der Vandiver-Vermutung $p \nmid h^+(\mathbf{Q}(\zeta_p))$ bewiesen.

In Kapitel 11 werden die Kreisteilungskörper $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ der Klassenzahl 1 bestimmt. Aus dem Satz von Brauer-Siegel und Diskriminantenberechnungen folgt, daß es nur endlich viele solche Körper gibt. Ihre explizite Angabe geschieht mit Methoden von Masley, Montgomery und den unteren Diskriminantenabschätzungen von Odlyzko.

Kapitel 12 ist dem maßtheoretischen Aspekt der zyklotomischen Theorie gewidmet. Hauptziel ist die Integraldarstellung der p-adischen L-Funktionen, nämlich ihre Interpretation als Mellin-Transformierte. Mit den maßtheoretischen Methoden wird außerdem der Satz von Bass über Erzeugende und Relationen der zyklotomischen Einheiten bewiesen.

Kapitel 13 schließlich behandelt Iwasawas Theorie der $\mathbf{Z}_p$-Erweiterungen algebraischer Zahlkörper. Nach den grundlegenden Tatsachen über Aufbau, Verzweigung und Anzahl der $\mathbf{Z}_p$-Erweiterungen wird Iwasawas berühmte Klassenzahlformel $e_n = \mu p^n + \lambda n + \nu$ bewiesen. Danach werden die Galoisgruppen des Hilbertschen p-Klassenkörpers und der maximalen außerhalb p unverzweigten abelschen p-Erweiterung von $\mathbf{Z}_p$-Erweiterungen untersucht, und zwar hinsichtlich ihrer Struktur als Iwasawamoduln. Ausführlich wird die sog. Hauptvermutung diskutiert: die Interpretation des rationalen Anteils von $L_p(s, \chi)$ als charakteristisches Polynom eines gewissen Iwasawamoduls; hierbei wird auch auf die Umdeutung als Fittingideal nach Mazur-Wiles eingegangen. Zuletzt wird Iwasawas Satz über die Beziehung der p-adischen Funktionen zur Galoisstruktur der lokalen Einheiten modulo zyklotomischer Einheiten bewiesen.

In einem Anhang werden die im Text benutzten Ergebnisse aus der Hilbertschen Verzweigungstheorie und aus der lokalen und globalen Klassenkörpertheorie ohne Beweis zusammengestellt. Jedem Kapitel sind zahlreiche ergänzende Kommentare und Übungsaufgaben angegliedert. Man findet außerdem drei interessante numerische Tabellen (Bernoullizahlen, irreguläre Primzahlen, Klassenzahlen) und eine ausgezeichnete zyklotomische Bibliographie.

Mit seinem schwungvollen Stil wird dieses Buch viele Leser und Freunde gewinnen, und mit seinem reichen Gehalt wird es gewiß zu einem Klassiker über zyklotomische Körper werden.

Regensburg G. Tamme

Bosch, S., Güntzer, U., Remmert, R., Non-Archimedean Analysis (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 261), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, 436 S., DM 168,–

Die Autoren haben eine ansprechende und gut lesbare Einführung in die abstrakte Theorie der rigid-analytischen Varietäten vorgelegt, in der ganz von den Anfängen ausgehend die wichtigsten Methoden und Ergebnisse dieser Theorie erläutert, besprochen und zumeist auch bewiesen werden. Im Jahre 1961 hatte sich J. Tate mit dem Problem auseinandergesetzt, in welcher Weise man eine interessante globale analytische Geometrie über einem nichtarchimedisch bewerteten und damit total unzusammenhängenden Grundkörper erhalten kann. Unter dem Einfluß und der Führung von H. Grauert und R. Remmert wurden die von Tate aufgeworfenen Fragen hauptsächlich in den Jahren 1965–1970 intensiv untersucht. Die wichtigsten Resultate dieser Forschungen werden in diesem Grundlehrenband in recht vollendeter Form entwickelt.

Es gibt heutzutage bedeutende Untersuchungen, die man zur nichtarchimedischen Analysis zu zählen hat wie etwa solche über p-adische Zetafunktionen oder Differentialgleichungen, auf die in diesem Band nicht eingegangen wird. Insofern könnte der Buchtitel, wenn man den dazugehörenden Untertitel nicht beachtet, etwas weit gefaßt erscheinen.

Das Ziel der Autoren dieses aus drei Teilen bestehenden Lehrbuches ist es, in möglichst systematischer Weise die Methoden darzulegen, die zum Aufbau der rigid-analytischen Geometrie führen.

In Teil A („Linear Ultrametric Analysis and Valuation Theory") wird viel Mühe darauf verwendet, die fundamentalen Techniken und Sätze aus der nichtarchimedischen Funktionalanalysis darzulegen; insbesondere wird behandelt: der Reduktionsfunktor, Spektral- und Supremumsnormen, Funktionenalgebren und stabile Körper. Die klassische Bewertungstheorie ergibt sich in natürlicher Weise als spezieller Fall. Nach meinem Empfinden ist dieser Teil gelegentlich etwas zu breit angelegt.

Im Mittelpunkt von Teil B steht die Kategorie der affinoiden Algebren. Es wird gezeigt, daß die Tate-Algebren von strikt konvergenten Potenzreihen in endlich vielen Variablen noethersch und faktoriell sind. Eine zentrale Rolle spielt dabei eine Modifikation der klassischen Techniken von Weierstraß. Für affinoide Algebren erhält man das Analogon zum klassischen Normalisierungslemma von Noether und wichtige Endlichkeitssätze. Dieser Teil, der konzeptionell völlig ausgereift wirkt, ist sehr konzentriert geschrieben und dürfte für jeden, der über einige Kenntnisse aus der kommutativen Algebra verfügt, eine vorzügliche Möglichkeit bieten, einen Einstieg in die affinoide Geometrie zu finden.

In Teil C wird auseinandergesetzt, wie die globale analytische Theorie von Varietäten über einem nichtarchimedischen Körper zu behandeln ist. Zunächst werden die Bausteine, nämlich die Spektren affinoider Algebren untersucht. Es werden der fundamentale Azyklizitätssatz von Tate und der Klassifikationssatz für lokal abgeschlossene Einbettungen bewiesen. Damit sind dann die Methoden und Ergebnisse bereitgestellt, um, wie von Kiehl vorgeschlagen, unter Verwendung des Konzepts der Grothendieck-Topologie von zulässigen Überdeckungen die lokalen Bausteine zu verkleben und den allgemeinen Begriff einer rigid-analytischen Varietät einzuführen. Grundlegende Begriffe wie kohärente Moduln, eigentliche und separierte Abbildungen werden ausführlich diskutiert. Zwei bedeutende Ergebnisse von Kiehl, nämlich der Satz vom direkten Bild und der Satz über formelle Funktionen werden ohne Beweis gebracht. Ganz zum Schluß werden dann die heutzutage Tate-Kurven genannten elliptischen Kurven behandelt, deren Entdeckung Anlaß zu Entwicklung der gesamten Theorie war.

Die Stärke des Buches liegt darin, daß konsequent und ohne Abschweifungen die Errichtung des theoretischen Gebäudes von den Grundmauern her betrieben wird. Bewußt haben die Autoren weitgehend darauf verzichtet, Anwendungen zu behandeln oder Querverbindungen zu anderen Theorien aufzuweisen. Für manche Leser könnte diese Beschränkung zu Motivationsproblemen führen. Immerhin ist der Apparat der rigid-analytischen Geometrie in den letzten Jahren mit ganz gutem Erfolg angewendet worden etwa beim Studium von Mumfordkurven und ihrer Modultheorie, oder bei der von Drinfeld initiierten Theorie von Modulformen über Körpern endlicher Charakteristik. Es zeichnet sich auch deutlich ab, daß man gewichtige Anwendungen bei der Behandlung der von Deligne-Mumford angegebenen stabilen Reduktion von Kurven und bei Untersuchungen über Differentialgleichungen, die durch den Gauss-Manin-Zusammenhang von Familien von Kurven gegeben werden, erhalten kann.

Die Autoren haben sich auch nicht darauf eingelassen, etwas über den Zusammenhang zwischen formeller und rigid-analytischer Geometrie auszuführen. Nun weiß man, daß man etwa bei der Untersuchung der Tate-Kurven auch auf den Pfaden der formellen Geometrie sehr gut zum Ziel gelangen kann, siehe etwa die Darstellung von Deligne-Rapoport in „Les schémas de modules de courbes elliptiques“ Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Vol. 349. Meines Erachtens hätte das Buch noch gewonnen, wenn man diesen Aspekt mit in die Betrachtung einbezogen hätte.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß sich das Buch vorzüglich dazu eignet, sich die Fundamente der rigid-analytischen Geometrie anzueignen. Insbesondere wird es nützlich sein für jeden, der sich selbst ausreichend motivieren kann und der einige Kenntnisse über algebraische und komplex-analytische Geometrie mitbringt.

Bochum L. Gerritzen

Kraft, Hanspeter, Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg Verlag 1984, 308 Seiten, DM 48,–

Mit dem vorliegenden Buch möchte der Autor eine weiteren Kreisen zugängliche Einführung in einige Fragestellungen der Invariantentheorie geben, die sich seit Erscheinen von Mumfords Buch „Geometric Invariant Theory“ in einer Phase erneuten Wiederaufblühens befindet. Nun ist es keineswegs das Ziel des Buches, die Mumfordsche Konstruktion von Modulschemata zu erläutern. Mit einer bescheideneren Zielsetzung versucht es, ein Verständnis für die geometrischen Aspekte der Theorie der algebraischen Transformationsgruppen zu entwickeln und verbleibt dazu bei der Untersuchung von Aktionen reduktiver Gruppen auf affinen komplex-algebraischen Varietäten. Kenntnisse über algebraische Gruppen und algebraische Geometrie werden vom Autor nicht explizit vorausgesetzt.

Das erste, vorbereitende Kapitel des Buches dient ausschließlich der Motivation der später einzuführenden Begriffe und Untersuchungsweisen. Anhand von naheliegenden und historisch wichtigen Klassifikations- und Normalformenproblemen, z. B. für quadratische und kubische Formen sowie für Matrizen, werden hier Quotienten nach Gruppenaktionen, Fasern von Quotientenabbildungen und das Abschlußverhalten von Orbiten exemplarisch studiert.

Das zentrale, zweite Kapitel widmet sich der systematischen Entwicklung der Begriffe. Unter häufiger Bezugnahme auf die Beispiele der klassischen Gruppen werden zunächst Grundtatsachen über algebraische Gruppen, ihre rationalen Darstellungen und ihre Aktionen auf Varietäten hergeleitet. Es folgt der Beweis des Endlichkeitssatzes für das System der fundamentalen Invarianten bei Aktionen reduktiver Gruppen G auf affinen Varietäten X, der die Existenz einer Quotientenvarietät X/G garantiert. Neben Kriterien für Quotienten und Beispielen (endliche Gruppen, erster Fundamentalsatz für GL_n) stellt der Autor dann zahlreiche Aussagen über die algebraisch geometrische Struktur der Quotientenvarietäten X/G und der Fasern der Quotientenabbildung $X \to X/G$ zusammen, die sich bisher teilweise nur verstreut in Forschungsartikeln finden ließen.

Das dritte und letzte Kapitel widmet sich spezielleren Fragen. Nachdem zunächst noch die Darstellungstheorie von GL_n und SL_n sowie das Hilbert-Mumford-Kriterium für Nullformen (Instabilität) behandelt werden, führt der Autor die sogenannte Methode der U-Invarianten ein. Hier bezeichnet U eine maximale unipotente Untergruppe der betrachteten reduktiven Gruppe G. Die Nützlichkeit dieser Methode, die auf darstellungstheoretischen Einsichten beruht, wurde erst in letzter Zeit erkannt. Als eines der Anwendungsbeispiele wird abschließend die vollständige Klassifikation der affinen SL_2-Einbettungen durchgeführt.

Das Buch ist mit zwei Anhängen versehen. Der erste, umfangreichere (50 Seiten) stellt die Begriffe und Resultate aus der algebraischen Geometrie zusammen, die im Hauptteil des Buches zur Anwendung kommen. Der zweite enthält einen Beweis der linearen Reduktivität der klassischen Gruppen.

Aufgrund der großen Zahl von Beispielen und Anwendungen, die einen integralen Bestandteil des Textes ausmachen, erweist sich die Lektüre als erfrischend und instruktiv. Wie vom Autor intendiert, bietet das Buch somit einen vorzüglichen Einstieg in aktuelle Forschungen auf dem Gebiet der Invariantentheorie und der algebraischen Transformationsgruppen. Es ergänzt sich gegenseitig mit den Noten von T. A. Springer („Invariant Theory", Springer Lecture Notes in Math. 585), und es ebnet auch den Weg zu dem oben zitierten Buch von Mumford. Große Teile des Buches sind sicherlich mit guten Algebrakenntnissen zugänglich. Es finden sich aber auch schon im ersten Kapitel Stellen, an denen eine Vertrautheit mit Konstruktionen der algebraischen Geometrie erforderlich scheint.

Der Text läßt erkennen, daß er mit großer Sorgfalt vorbereitet und durchdacht worden ist. Dies gilt auch von der äußeren Gestaltung. Einige kleine Schönheitsfehler wird man darum dem Autor gerne verzeihen (auch den mengentheoretischen Lapsus im Anhang I, Beispiel 1.6d, der sich gerade in einem Buch über Invariantentheorie und Quotientenvarietäten leicht hätte vermeiden lassen). Insgesamt gesehen, handelt es sich bei der vorliegenden Publikation um eine erfreuliche Neuerscheinung, die auch sicherlich außerhalb des deutschsprachigen Raumes auf Interesse stoßen wird.

Bonn P. Slodowy

Barth, W., Peters, C., Van de Ven, A., Compact Complex Surfaces (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge – Band 4), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, x + 304 S., gbd., DM 118,–

Die Beschreibung und Klassifizierung der kompakten komplexen Flächen ist eines der zentralen Probleme der Geometrie. Manche Methode der algebraischen, komplex-analytischen oder differentialen Geometrie wurde entwickelt, um Flächen zu untersuchen, manche andere fand in der Flächentheorie ihre interessanteste und überzeugendste Anwendung.

Die Theorie der Schemata und Garben („the second revolution"), die Theorie der Chern-Klassen, die Hodgetheorie, die Deformations- und Modul-Theorie, die neuen Entwicklungen der Differentialgeometrie, all das hat beigetragen zu einer Welle von neuen Ergebnissen und Flächen (und allein diese Ergebnisse berechtigen von „Revolution" zu reden). Die Fülle von Grundlagen, teilweise zu neu, uns „wohlbekannt" zu sein, macht jede Darstellung oder Vorlesung über Flächen schwer zugänglich und auch das vorliegende Buch bildet keine Ausnahme. Wer als Nicht-Spezialist, ermuntert durch die Einleitung, versucht, das Buch durchzuarbeiten, wird schon im Kapitel „Preliminaries" stecken bleiben. Wer es als Einführung in die Geometrie betrachtet, wird schon auf der ersten Seite über die Leray-Spektral-Sequenz stolpern. Besser, man wählt sich einige Themen aus den folgenden Kapiteln aus und erarbeitet sich selbst einen Leitfaden.

Der Leser kann so eine moderne und knappe Darstellung vieler Aspekte der Theorie der Flächen finden:

– Kurven auf Flächen und Schnitt-Theorie (Kap. II)
– Familien von Kurven oder eine Einführung in die Theorie der Singularitäten und ihrer Beseitigung (Kap. III)
– Viele Beispiele algebraischer und nicht algebraischer Flächen und eine Darstellung der Kodairaschen Theorie der elliptischen Flächen.
– Und endlich in Kapitel VI: Die Klassifikation der algebraischen und nicht algebraischen Flächen.

Wer sich nur für den algebraischen Teil der Klassifikationstheorie interessiert, sagen wir, für die Ergebnisse der italienischen Geometer zu Beginn des Jahrhunderts, wird einfachere Darstellungen finden (z. B. das Buch von A. Beauville). Zum Kennenlernen der vollständigen Enriques-Kodaira-Klassifikation führt der beste Weg wohl doch durch die ersten sechs Kapitel dieses Buches. Es ist schade, daß die Autoren Hinweise auf den höherdimensionalen Fall vermeiden. Zum Beispiel wäre es hilfreich für das Verständnis des Lürothschen Problemes für Flächen und der Bedeutung des Castelnuovo-Kriteriums, wenn man etwas über die Gegenbeispiele im höherdimensionalen Fall erführe.

In den beiden letzten Kapiteln wenden sich die Autoren zwei Klassen von Flächen zu, deren Struktur und Eigenschaften in den letzten Jahren besonders erfolgreich untersucht wurden. Flächen von allgemeinem Typ, ihre multi-kanonischen Abbildungen und die Geographie der Chern-Zahlen werden in Kapitel VII behandelt. In Kapitel VIII findet der Leser die Theorie der K3- und Enriques-Flächen, wobei besonders auf die Periodenabbildung und Torelli-Sätze eingegangen wird. Siu's Satz, daß jede K3-Fläche kählersch ist, erschien gerade rechtzeitig, um dieses Kapitel abzurunden.

Am Ende der einzelnen Kapitel oder Abschnitte stehen Hinweise auf die Literatur oder historische Bemerkungen (und die Autoren ersparen es sich so in vorbildhafter Weise, jedem Satz oder Lemma einen Urheber zuzuordnen). Manches Ergebnis aus der Flächentheorie fehlt oder kommt zu kurz. Für welche Flächen existieren Modulvarietäten und warum? Wie steht es mit dem Torelli-Problem für andere Flächen als K3- oder Enriques-Flächen? (Fragen wir nicht wieder nach Hinweisen auf höhere Dimensionen.) Wenigstens ein paar zusätzliche Literaturhinweise würden dem Nicht-Spezialisten helfen. Leider stolpert man beim Lesen des Buches über einige Ungenauigkeiten. Mal springt die Bezeichnung, mal fehlt ein Symbol in einer Formel, mal muß der Leser eine kleine mathematische Schlampigkeit schlucken. Jedoch habe ich keine Stelle gefunden, wo dadurch die Verständlichkeit des Textes leidet.

Das vorliegende Buch, an dessen Erscheinen so mancher, der die Entwicklung verfolgen konnte, kaum noch glauben wollte, wird sicher zum „Standard-Werk" für diesen Teil der Geometrie werden. Es erleichtert, auch dem Spezialisten, den Zugang und das Verständnis für die Entwicklungen der letzten Jahre. Und es kann dem Nicht-Spezialisten, der bereit ist, sich den hohen Anforderungen zu stellen, viele Informationen und Anregungen bieten. Eine sehr gute und umfassende Darstellung der Theorie der kompakten komplexen Flächen, ein wichtiges Buch, kein perfektes Buch, aber an dieser Stelle verweisen wir auf Seite V.

Essen E. Viehweg

Taylor, M., Classgroups of Group Rings (London Math. Society Lecture Notes Ser., vol. 91), Cambridge – London: Cambridge University Press; 1984, xiii + 119 p., paper, $ 17.95

Wohl immer, wenn man Eigenschaften von arithmetischen Moduln studieren möchte, zum Beispiel von Moduln über einem ganzzahligen Gruppenring RG, tut man dies über das sogenannte Global-Lokal-Prinzip, diskutiert also zunächst die lokalen Eigenschaften des gegebenen Moduls und versucht dann, daraus so viel wie möglich an Information für den Modul selbst zu gewinnen. Das Hauptwerkzeug hierzu stellt die Klassengruppe C von RG dar, eine natürliche Verallgemeinerung der gewöhnlichen Idealklassengruppe eines Dedekindringes (wenn also RG der Gruppenring der trivialen Gruppe ist); C beschreibt die Gesamtheit der lokalfreien RG-Moduln modulo der freien unter diesen. Das Buch von Taylor ist heute d i e Quelle, aus der man alle nötige Information wird schöpfen können, will man für einen gegebenen lokal-freien RG-Modul dessen Klasse in C explizit berechnen! In den letzten 15 Jahren wurde hierzu entscheidender Fortschritt erzielt. Der erste war Fröhlichs Beschreibung von C als Quotient gewisser Hom-Gruppen, in denen die komplexen Charaktere der Gruppe G erscheinen. Ihr Vorteil gegenüber früheren Darstellungen von C liegt in ihrer „Funktorialität": man sieht sogleich, wie sich natürliche Abbildungen, wie etwa Restriktion und Induktion zu Untergruppen, auf C durchdrücken. Der zweite Fortschritt geht auf Taylor selbst zurück: mit seinem Gruppen-Logarithmus gelang es ihm, den Nenner in Fröhlichs Formel für C in den Griff zu bekommen.

Als das schönste Beispiel in diesem Zusammenhang ist die berühmte Antwort auf die alte Frage von Emmy Noether zu nennen, wann nämlich der Ring $\mathcal{O}_L$ der ganzen Zahlen in einer galoisschen Zahlkörpererweiterung L/K mit Gruppe G frei als $\mathbb{Z}$G-Modul ist („Ganzheitsnormalbasis"), vorausgesetzt natürlich, die Erweiterung L/K ist nur zahm-verzweigt, also $\mathcal{O}_L$ überhaupt lokal-frei. Gewiß lebt das Buch auf diesem zahlentheoretischen Hintergrund – das Problem selbst wird allerdings hier nicht behandelt, und es braucht das auch gar nicht, da inzwischen Fröhlichs Buch „Galois module structure of algebraic integers" (Springer 1983) zu diesem Fragenkomplex erschienen ist. Stattdessen konzentriert sich der Autor auf Beispiele aus der Theorie selbst; seine Schwerpunkte sind der Fixpunktsatz für Gruppendeterminanten, C. T. C. Walls Vermutung über bei der Identität konzentrierten Determinanten, die Existenz von Adams-Operatoren auf Klassengruppen und Ulloms Vermutung bezüglich der Swan-Klassen von p-Gruppen. Die Zahlentheorie ist allerdings einmal doch direkt im Spiel, nämlich wenn Taylor seinen Selbstdualitätssatz für Ganzheitsringe von zahmen Erweiterungen beweist. Den Leser wird es sicher auch freuen, sehr viele konkrete Beispiele in diesem Buch zu finden: etwa die Klassen der Swan-Moduln von p-Gruppen, die Klassengruppen von Diedergruppen der Ordnung pq (Galovich-Reiner-Ullom) und die von Dieder- und Quaternionengruppen von 2-Potenzordnung, die von Fröhlich, Keating, Wilson und Endo zuerst untersucht worden sind.

Augsburg J. Ritter

Hanche-Olsen, H., Størmer, E., Jordan Operator Algebras (Monographs and Studies in Mathematics, vol. 21), London: Pitman 1984, viii + 183 p, hardbound $ 27.50

Jordan-Algebren wurden von Jordan und anderen mit Blick auf Anwendungen in der Quantenmechanik eingeführt. Jedoch kam die Theorie damals kaum über den endlich-dimensionalen Fall hinaus und wurde fortan hauptsächlich unter algebraischen Gesichtspunkten weiter entwickelt. Im Bereich der inzwischen weit ausgebauten Theorie der C*- und W*-Algebren spielte diese Klasse nur im Zusammenhang mit ordnungstheoretischen Fragen eine Rolle und wurde eher am Rande mit untersucht. Einen Durchbruch, der diese beiden Bereiche wieder zusammenführte, stellt hier sicher die Arbeit von Alfsen Shultz und Størmer: „A Gelfand-Neumark Theorem for Jordan Algebras" dar. Durch diese Arbeit werden die ursprünglichen Vorstellungen von Jordan, von Neumann, ... zu einer Algebraisierung der Quantenmechanik – Axiomensystem von Segal – weiterentwickelt und die Jordan-Operator-Algebren weitgehend unter die Theorie der C*- und W*-Algebren subsummiert. Methoden und Ergebnisse dieser Gebiete werden damit auch auf Jordan-Operator-Algebren anwendbar, so daß man heute von einer Theorie der Operator-Algebren reden kann.

Ziel dieses Buches ist die in sich geschlossene Darstellung dieser und einiger anderer verwandter Ergebnisse. Die Beweise sind dabei allerdings geglättet und verbessert und die Aussagen verallgemeinert. Die wichtigsten Resultate werden in Kapitel 7 gezeigt. Die vorangehenden Abschnitte haben dabei einen eher vorbereitenden Charakter. Kapitel 1 bzw. 2 bringt die notwendigen Grundlagen der Funktionalanalysis bzw. algebraischen Theorie der Jordan-Algebren. In Kapitel 3 und 4 wird die Struktur der Jordan-Operator-Algebren parallel zur Theorie der C*- bzw. W*-Algebren untersucht. Die Dimensionsanalysis – Kapitel 5 – mit dem wichtigsten Halbierungslemma ist ebenfalls an die Methodik der W*-Algebren angelehnt. Mit dem Abschnitt über Spin-Algebren sind dann die Vorbereitungen für den Beweis der Struktursätze abgeschlossen. Durch die Verwendung der universellen speziellen Hülle, kann hierbei auf die s-Identitäten verzichtet werden, und der Zusammenhang zwischen JW-Algebren und W*-Algebren kann klarer herausgearbeitet werden.

Insgesamt bietet dieses Buch eine klare und knappe Darstellung der Jordan-Operator-Algebren und ihrer Beziehungen zu den C*- und W*-Algebren. Druck, Layout, Aufteilung und Index sind gut und übersichtlich. Die Literaturliste gibt mit 130 Angaben einen vollständigen Überblick über den gegenwärtigen Forschungsstand. Als nachteilig bei diesem Buch empfinde ich die außerordentlich knappe Darstellung, die sich, besonders in den ersten Kapiteln, häufig nur auf das Satz-Beweis-Schema beschränkt. Tatsächlich wird hier nur das gerade Notwendigste für die Beweise zu den Struktursätzen gebracht. Diese Kargheit findet sich auch in den Kommentaren und erläuternden Beispielen. So werden etwa JC*-Algebren und symmetrische Bereiche auf nur je einer Seite abgehandelt. Dadurch wird eine Lektüre dieses Buches etwas mühsam. Dies dürfte insbesondere für Leser zu Schwierigkeiten führen, die C*- bzw. W*-Algebren kaum kennen.

In diesem Buch hätte ich mir auch noch einen weiteren Abschnitt mit Kommentaren und Erläuterungen zu neueren Ergebnissen gewünscht. Trotz dieser Einwände halte ich diese kompakte Darstellung der Jordan-Operator-Algebren für eine wertvolle Ergänzung der bereits vorliegenden Bücher zur Theorie der C*- und W*-Algebren.

Osnabrück H. Behncke

Doob, J. L., Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart (Grundlehren der math. Wissenschaften 262), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer Verlag 1984, XX + 846 p., cloth DM 168,–

Ein Buch von 846 Seiten auf knappem Raum zu besprechen, ist generell eine schwierige Aufgabe. Im vorliegenden Fall ist diese Aufgabe noch schwieriger, da es sich in der Sicht des Referenten eigentlich um vier Bücher handelt, die in komplizierter Weise ineinander greifen. Das erste Buch (S. 1–261) entwickelt die klassische Potentialtheorie der Laplace-Gleichung von den Grundlagen bis hin zum Martin-Rand, wobei der Schwerpunkt der Darstellung auf der Behandlung des Dirichletschen Problems und des Randverhaltens harmonischer und superharmonischer Funktionen liegt. Das zweite Buch (S. 262–383) ist der Behandlung der weniger bekannten Potentialtheorie der Wärmeleitungsgleichung gewidmet. Im dritten Buch (S. 387–598) wird die moderne Theorie der stochastischen Prozesse, insbesondere die Martingaltheorie und die Theorie der Brownschen Bewegung dargestellt. Das vierte Buch (S. 599–738) schließlich bringt die drei großen Themen der vorausgehenden Bücher – ähnlich wie beim Aufbau einer Fuge – zum „harmonischen" Zusammenklang. Danach folgen acht Anhänge über analytische Mengen, Kapazitäten, Verbände (insbesondere Vektorverbände), verbandstheoretische Konzepte in der Maßtheorie, gleichgradige Integrierbarkeit, Kerne und Übergangsfunktionen, Integral-Grenzwertsätze und halbstetige Funktionen. Das Ganze wird abgerundet durch wichtige historische Hinweise, eine im Hinblick auf den Umfang des Buches relativ kurze Bibliographie sowie durch ein Symbol- und Sachverzeichnis.

Die im Titel auftauchende Potentialtheorie ist also in diesem Buch die Potentialtheorie der Laplace- und der Wärmeleitungsgleichung – und damit eigentlich die Potentialtheorie auf harmonischen Räumen. Der Verfasser bleibt aber ganz im Rahmen der Laplace- und Wärmeleitungsgleichung und läßt die abstrakte Theorie bewußt beiseite. Der Kenner wird sie trotzdem auf Schritt und Tritt hinter den speziellen Entwicklungen aufleuchten sehen. Die Parallelität der Darstellung der Potentialtheorie von Laplace- und Wärmeleitungsgleichung ist im übrigen von der Beweistechnik her erst durch die abstrakte Theorie weitgehend ermöglicht worden. Das Thema des in unserer Zählung dritten Buches ordnet sich völlig natürlich in die Gesamtintention des Werkes ein. Martingale und Supermartingale verhalten sich in vieler Hinsicht analog zu harmonischen und superharmonischen bzw. parabolischen und superparabolischen Funktionen. Die Martingaltheorie, deren Entstehung auf das engste mit dem Namen des Verfassers verknüpft ist, erscheint also hier als ein natürlicher Probabilistic Counterpart zur Potentialtheorie. Im vierten Buch steht dann das probabilistische Gegenstück zu den Begriffsbildungen und Sätzen der Potentialtheorie der Laplace- und Wärmeleitungsgleichung im Vordergrund. Die wichtigsten dieser Begriffe und Sätze erfahren mit Hilfe der Brownschen Bewegung (bzw. ihrer Raum-Zeit-Modifikation) ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation. Häufig werden sie unter entscheidender Heranziehung der Martingaltheorie auf probabilistischem Wege erneut hergeleitet.

Die Fachwelt hat lange auf dieses Buch gewartet. Die Geduld hat sich gelohnt: Der Verfasser erweist sich als ein zuverlässiger Wegführer, der den Leser mit seinem knappen, aber erfrischenden Stil der Sprache und der Darstellung wach und bei guter Laune hält. Die nicht immer leicht zugänglichen Originalarbeiten des Verfassers zum Zusammenspiel zwischen Potentialtheorie, Martingalen und Brownscher Bewegung werden hier in durchsichtiger Form dargeboten. Neben Bekanntem finden sowohl Analytiker als auch Stochastiker neue Resultate, z. B. die Technik der iterierten Reduktion bei superharmonischen Funktionen und bei Supermartingalen mit dem Ziel der Herleitung von Grenzwertsätzen. Aus allen diesen Gründen wird sich dieses Buch rasch den Ruf eines Standardwerkes für Forscher, Lehrende und Lernende erwerben. Die „Bücher" 1–3 können dabei auch für sich nutzbringend gelesen und für Vorlesungszwecke verwendet werden. Die Parallelität der Entwicklung in den einzelnen Abschnitten des Werkes wird durch eine einheitliche, gut überlegte, vielleicht anfangs irritierende Bezeichnungsweise hervorgehoben. Der Leser tut gut daran, als erstes den Notationsindex auf ein die Lektüre begleitendes Beiblatt zu kopieren. Noch hilfreicher wäre es, wenn der Verlag ein solches Einlegeblatt dem Buch beifügen könnte.

Das materielle Gewicht dieses Bandes wird vom Verlag mit 1385 g angegeben. Das ideelle Gewicht liegt unschätzbar höher.

Erlangen H. Bauer

Fenyö, S., Stolle H. W., Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen (Bände 3 und 4), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1984, 548 p., 708 p., hardcover, DM 120,–, DM 138,–

Die jetzt zur Besprechung vorliegenden Bände 3 und 4 sind im weitesten Sinne den praktischen Anwendungen gewidmet: Hier werden sowohl die in der Praxis auftretenden Integralgleichungen als auch numerische Verfahren behandelt. Da die Verfasser auf die ausführliche Darstellung dieser Gegenstände besonderen Wert gelegt haben, machen die Bände 3 und 4 etwa zwei Drittel des Gesamtwerks aus.

Der dritte Band beginnt mit einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen 1. Art. In diesem Abschnitt werden auch Lösungsmethoden behandelt. Breiter Raum wird dann den Integraltransformationen der mathematischen Physik eingeräumt. Weiter folgt das Studium spezieller Typen von Integralgleichungen, zu denen auch die Volterraschen gezählt werden, aber auch die Wiener-Hopfsche Integralgleichung, zwei- und dreifache Integralgleichungen sowie singuläre Integralgleichungen mit Cauchy-Kern.

Der vierte Band enthält zunächst eine ausführliche Darstellung numerischer Methoden zur Lösung linearer Integralgleichungen, hauptsächlich für Fredholmsche 2. Art. Sie umfaßt Kernapproximation, Iterationsverfahren, Quadraturmethoden, Variationsmethoden und Projektionsverfahren sowie einige speziellere Betrachtungen für singuläre Kerne, zur Berechnung von Eigenwerten und über Fehler- und Stabilitätsverhalten. Weiter ist der vierte Band den Anwendungen von Integralgleichungen gewidmet, mit denen solche innerhalb wie auch außerhalb der Mathematik gemeint sind. Zu den ersteren gehört die Anwendung der Theorie der Integralgleichungen zur Lösung von Differentialgleichungen sowie zur Behandlung konformer Abbildungen. Insbesondere aber werden Integralgleichungen in der Elastizitätstheorie, der Strömungsmechanik, der Elektrodynamik sowie die Integralgleichung der Neutronentransporttheorie und die der Erneuerungstheorie hergeleitet und untersucht. Ein gewaltiges Literaturverzeichnis mit über zweitausen Zitaten schließt den vierten Band ab.

Bereits diese kurze Inhaltsbeschreibung der Bände 3 und 4 zeigt, daß sie ungewöhnlich breit angelegt sind und sehr viele Details enthalten. Nicht um krampfhaft Lücken ausfindig zu machen, sondern um zu verdeutlichen, daß der Gegenstand der linearen Integralgleichungen selbst auf zweitausend Seiten nicht völlig auszuschöpfen ist, möchte der Referent exemplarisch nur zwei Punkte nennen, die ihrer Bedeutung nach durchaus in den Rahmen des Werks gepaßt hätten. So wird bei den Lösungsmethoden für Integralgleichungen 1. Art im dritten Band zwar einleitend bemerkt, daß alle Schwierigkeiten bezüglich der Auflösung dieser Gleichungen darauf zurückzuführen sind, daß die Hadamardschen Bedingungen an ein korrekt gestelltes Problem nicht erfüllt sind. Die Tichonov-Regularisierung jedoch, die bei der praktischen Behandlung inkorrekt gestellter Probleme heute zu den wichtigsten Verfahren gehört, kommt nicht zur Sprache. Oder zum vierten Band: Der Lösung von Integralgleichungen mit Splines wird ein Abschnitt gewidmet, doch konnte offenbar nichts über B-Splines aufgenommen werden, die sich dafür besonders gut eignen. Der Referent bemerkt übrigens auch, daß selbst das riesige Literaturverzeichnis nicht alle Arbeiten von gleichrangiger Bedeutung aufführt; immerhin enthält es Zitate bis 1981. Das Gesamtwerk ist eindrucksvoll.

Insgesamt bestätigen die Bände 3 und 4 das Bild, das schon die ersten beiden Bände haben erkennen lassen: Es ist ein Werk entstanden, das die heutige Kenntnis der linearen Integralgleichungen weitgehend vollständig wiedergibt. Dem widerspricht nicht, daß nicht alle Typen in gleicher Breite behandelt werden. Im Gegenteil: Der Leser könnte eher erwarten, in stärkerem Maße Wertungen vorzufinden. Es würde die Orientierung über den Stoff und die Verwendung als Lehrbuch erleichtern, wenn deutlichere Akzente zur Unterscheidung von Wichtigem und weniger Wichtigem zu erkennen wären. Es gibt jedoch gegenwärtig kein vergleichbares Werk über Integralgleichungen, und die vier Bände werden gewiß für lange Zeit zentrale Bedeutung als geschlossene Lehrbuchdarstellung für gehobene Ansprüche und als enzyklopädisches Handbuch haben.

München G. Hämmerlin

Khaleelulla, S. M., Counterexamples in Topological Vector Spaces (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 936), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1982, xxi + 179 p., DM 24,–

Die vorliegende Sammlung setzt sich zum Ziel, dem Leser eine große Anzahl von Beispielen an die Hand zu geben, welche die durch zahlreiche gängige Begriffsbildungen definierten Klassen topologischer Vektorräume als von unterschiedlichem Umfang erweisen sollen. Sie sind also fast durchgehend von der Form: „Ein konkreter topologischer Vektorraum der Klasse A hat die Eigenschaft B, aber nicht C". Dabei wird in jedem Kapitel jeweils eine Klasse oder Gruppe von Eigenschaften topologischer Vektorräume betrachtet; im einzelnen: I. Topologische Vektorräume; II. Allgemeine lokalkonvexe Räume; III. Spezielle lokalkonvexe Räume (Hilbertsche, Banachsche, Fréchetsche, Bairesche Räume usw.); IV. Spezielle topologische Vektorräume; V. Geordnete topologische Vektorräume; VI. Erblichkeitseigenschaften (bezgl. der Bildung linearer Teilräume); VII. Topologische Basen; VIII. Topologische Algebren.

Von den mehreren hundert Beispielen sind wenigstens die Hälfte sehr leicht zu verstehen und verdeutlichen Umfang und Charakter der betrachteten Begriffe. Hier liegt sicher der Nutzen der Sammlung für Studenten oder Nichtexperten. Ein anderer Teil der Beispiele ist schwierigerer Natur; hier ist die Sammlung aber weniger hilfreich, da sie häufig die Beispiele ohne Beweise gibt oder nur Literaturhinweise verzeichnet. Überhaupt ist dem Werk der Vorwurf einer gewissen Inhomogenität (in Organisation, Inhalt und Qualität) nicht zu ersparen (man vgl. hierzu II, Nr. 11 und III, Nr. 17). Man wird diesem etwas konzepthaften Manuskript vielleicht am besten gerecht, wenn man es zugleich als Aufgabensammlung betrachtet. Es wird aber vielen Lesern eine Hilfe sein und kann alle zum Nachdenken anregen. Insofern wird es einem Anliegen der „Lecture Notes"-Sammlung sicher gerecht.

Tübingen H. H. Schaefer

Skorohod, A. V., Random Linear Operators (Mathematics and its Applications, Soviet Series), Dordrecht – Boston – Lancaster: D. Reidel Publ. Comp. 1984, xvi + 199 p., cloth, Dfl 115,–

Die Thematik des Buches ist, laut Verfasser, „... a natural step in the development of random analysis". Dabei ist der im Titel des Buches genannte Gegenstand der Entwicklung zu präzisieren: Es handelt sich ausschließlich um zufällige lineare Operatoren (random operators) in einem (reellen, separablen) Hilbertraum X.

Zufällige lineare Operatoren sind im Sinne des Buches nicht nur einfach Zufallsvariable mit Werten im Raum der beschränkten, linearen Operatoren auf X, sondern das Hauptgewicht liegt – um das wichtige Beispiel des stochastischen Integrals mitzuerfassen – auf „verallgemeinerten Zufallsvariablen" mit Werten in diesem Raum. Darunter versteht der Autor speziell starke und schwache zufällige Operatoren (strong resp. weak random operators), die zu Beginn ziemlich unvermittelt eingeführt werden: Ein starker zufälliger Operator A etwa ist eine Abbildung, die jedem Vektor $x \in X$ eine X-wertige Zufallsvariable Ax zuordnet; die Zuordnung ist fast sicher linear (d. h. für $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in R$ sind $A(\alpha x + \beta y)$ und $\alpha Ax + \beta Ay$ f.s. gleich) und stochastisch stetig (d. h. Ax_n konvergiert stochastisch gegen Ax, falls x_n gegen x konvergiert).

Das Buch gliedert sich grob in vier Teile. Das Kapitel I legt die oben schon angesprochenen grundlegenden Begriffe bereit, untersucht deren Zusammenhänge und Konvergenzfragen. Im zweiten Kapitel werden im wesentlichen Kernstücke aus der klassischen Theorie linearer Operatoren im Hilbertraum auf die Situation des Buches übertragen, wie z. B. aus der Spektraltheorie und Gleichungen verschiedenen Typs (Evolutionsgleichung, Gleichungen vom Schrödinger-Typ und vom Fredholmtyp). Da zufällige Operatoren verallgemeinerte Zufallsvariable sind, läßt sich diese Übertragung oftmals nur unter erheblichem technischen Aufwand bewerkstelligen. Der dritte Teil wendet sich in Kapitel 3 und den §§ 10, 11 aus Kapitel 4 dann den Begriffen des Martingals und des stochastischen Integrals zu. Dabei werden Martingale in mehreren verschiedenen Variationen abgehandelt: Diskret und kontinuierlich, Hilbertraum-wertig, operator-wertig (schwach und stark), jeweils mit Konvergenzsätzen. Entsprechend vielseitig ist auch das stochastische Integral, nämlich bezüglich der verschiedenen eingeführten Martingale und bezüglich verschiedener Reihenfolge Integrand-Integrator (falls beides Operatoren sind). Der letzte Teil (§ 12 aus Kap. 4 und Kap. 5) schließlich ist vor allem der Lösung von „stochastischen Operator-Gleichungen", d. h. stochastischen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Funktionen zufälliger Operatoren sind, sowie Untersuchungen über stochastische Halbgruppen gewidmet.

Das Buch ist in erster Linie ein Ergebnisbericht. Der Satz aus dem Vorwort „This monograph presents, for the first time, a complete account of the theory of these generalized operators ..." ist allerdings dahingehend zu ergänzen, daß lediglich über die sowjetische Literatur vollständig berichtet wird. So wird im Buch keinerlei Bezug genommen auf die hauptsächlich von M. Métivier entwickelte Theorie Hilbertraum-wertiger Martingale und des zugehörigen isometrischen Integrals (vgl. M. Métivier, Semimartingales, de Gruyter 1982). Ebenso bleibt die Theorie der „mild solutions" linearer stochastischer Differentialgleichungen in Hilberträumen unberücksichtigt (vgl. etwa R. F. Curtain, Markov processes generated by linear stochastic evolution, Stochastics 5, 1981).

An Vorkenntnissen verlangt das Buch Grundkenntnisse in klassischer Hilbertraum-Theorie und in Wahrscheinlichkeitstheorie. Daher ist es für ein sehr breites Publikum lesbar. Zu lesen sein wird es jedenfalls von jedem, der sich mit moderneren Entwicklungen der Wahrscheinlichkeitstheorie befaßt – stochastische Analysis ist ein Gebiet, dessen Bedeutung auch über die Mathematik hinaus (Physik, Biologie und Ingenieurwissenschaften) derzeit rasch zunimmt. Leider wird das Studium des Buches durch zahlreiche Druckfehler etwas erschwert.

Noch eine persönliche Anmerkung: Auf mich wirkte die Art der Darstellung im Buch anfangs sehr spröde, ich hätte mir doch mehr erläuternde Zusätze gewünscht. Aber im Verlaufe der Auseinandersetzung mit dem Buch wurde doch immer deutlicher, von welcher Meisterhand man hier durch ein neues Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie geführt wird.

Erlangen G. Leha

Werner, J., Optimization Theory and Applications (Vieweg Advanced Lectures in Mathematics), Braunschweig – Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn, 1984, vii + 233, paper, DM 39,50

Das vorliegende Buch gibt in kurzer Form eine Einführung in die Grundlagen und die Anwendungen der Optimierung. Es ist entstanden aus dem Skript zu einer Vorlesung, die der Autor an der Universität Göttingen gehalten hat. Diese „Nähe zum Hörsaal" merkt man dem lebendig geschriebenen Buch wohltuend an. Durch eine Reihe begleitender Beispiele, die immer wieder aufgegriffen werden, wird der Leser dauernd neu motiviert.

Das Buch eignet sich sowohl zum Selbststudium als auch als Textbuch für eine in die Optimierung einführende Vorlesung. Es werden nur Grundkenntnisse aus den Anfängervorlesungen vorausgesetzt. Die benötigten Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis (wie Trennungssätze) werden im Text selber entwickelt. Leider geht das Buch nicht auf numerische Methoden ein; das hätte aber wohl auch den Rahmen des Buches gesprengt! In der Fülle der Bücher über Optimierung wird dieses Büchlein sicher seinen Platz finden.

Der Text ist wie folgt aufgebaut: Im ersten Paragraphen werden Beispiele für Optimierungsprobleme „von Euklid bis zur Raumfahrt" diskutiert. Paragraph zwei behandelt den Dualitätssatz der endlichdimensionalen linearen Programmierung; dabei versucht der Zugang, den geometrischen Hintergrund zu betonen. Nach einigen in Paragraph drei entwickelten funktionalanalytischen Hilfsmitteln wird im Hauptteil des Buches, den Paragraphen vier und fünf, die konvexe und die differenzierbare Optimierung in normierten linearen Räumen entwickelt. Es werden die klassischen Optimalitätsbedingungen hergeleitet und an einer Reihe von Kontroll- und Approximationsproblemen illustriert.

Bayreuth J. Zowe

Fahrmeir, L., Hamerle, A. (Hrsg.), Multivariate statistische Verfahren, Berlin – New York: W. de Gruyter 1984, xiii + 796 p., gbd. DM 198,–

Vielen statistischen Problemen liegen Situationen zugrunde, bei denen pro Untersuchungseinheit (Versuchsperson) mehrere Meßwerte erhoben werden. Das vorliegende, von einem Autoren-Team erstellte Lehr- und Nachschlagewerk wendet sich primär an den Anwender. Es versucht – bewußt auf Aussagen rein mathematischen Charakters und vielfach auf Beweise verzichtend – einen Einblick in den Stand der Forschung zu geben und an die Originalliteratur heranzuführen. Besonderer Wert wird auf die Analyse qualitativer bzw. gemischt qualitativ-metrischer Daten gelegt. Demgemäß werden die klassischen, weitgehend auf Normalverteilungsannahmen zugeschnittenen Verfahren nur gestrafft und Rangverfahren gar nicht behandelt. Positiv hervorzuheben sind die den einzelnen Abschnitten vorangestellten und der Einordnung dienenden Präambeln, die vielen aus realen Situationen stammenden instruktiven Beispiele, die Betonung der numerischen Aspekte einschließlich Hinweisen auf die zur Verfügung stehenden Programmpakete, sowie über 600 Literaturhinweise für ergänzende Studien.

Zur Charakterisierung des Inhalts seien die Kapitelüberschriften einschließlich der Seitenzahlen angegeben: Einführung (18); Mehrdimensionale Zufallsvariablen und Verteilungen (30); Grundlegende multivariate Schätz- und Testprobleme (34); Regressionsanalyse (72); Varianz- und Kovarianzanalyse (56); Kategoriale Regression (46); Verallgemeinerte lineare Modelle (44); Diskriminanzanalyse (70); Clusteranalyse (102); Zusammenhangsanalysen in mehrdimensionalen Kontingenztabellen (102); Faktorenanalyse (88); Grundlagen der mehrdimensionalen Skalierung (26); Anhang: Grundbegriffe der Matrix-Algebra (36); Tabellen (26); Literatur, Register usw. (45).

Das inhaltsreiche Buch ist klar und auch für den Anwender verständlich geschrieben. Es zeichnet sich durch eine gute Ausstattung und einen übersichtlichen Druck aus. In den Augen des Referenten stellt es eine nützliche Ergänzung der insbesondere auf diesem Sektor mageren deutschsprachigen Literatur dar und erweitert in den oben erwähnten Schwerpunkten auch das 1982 erschienene Lehr- und Handbuch der Angewandten Statistik von Hartung-Elpelt-Klösener.

Freiburg i. B. H. Witting

Rényi, A., Tagebuch über die Informationstheorie, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1982, 173 S., DM 36,–; **A Diary on Information Theory,** Budapest: Akadémiai Kiadó 1984, DM 67,50

Diese beiden Bücher sind Übersetzungen der zuvor erschienenen ungarischen Originalausgabe. Die deutsche Version, erstellt von Th. Mayer, ist eine Gemeinschaftsproduktion von Birkhäuser mit dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften und Akadémiai Kiadó; sie ist anständig gedruckt. Die englische Version, besorgt durch M. und T. Morry, von Akadémiai Kiadó vorgelegt, ist ein Hektogramm, das man zwischen Buchdeckel geklemmt hat. – Der Inhalt (in der Reihenfolge der deutschen Version): 1) Über den Begriff der Information in der Mathematik (= The Diary): Vorwort, fünf Vorlesungen, Vorbereitung auf meinen Vortrag, 2) Gedanken zum Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3) Glücksspiele und Wahrscheinlichkeitsrechnung, 4) Variationen über ein Thema von Fibonacci, 5) Über die mathematische Theorie der Bäume. – Der Geist, in dem dies Buch geschrieben ist, läßt sich durch das im Vorwort von P. Révész wiedergegebene Zitat aus Rényis Archimedes-Dialog (dt. Übers. in „Dialoge über Mathematik", Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1967) beleuchten: „Die Mathematik gewährt nur demjenigen Einblick in ihre Geheimnisse, der sich, von ihrer Schönheit begeistert, ihr aus reinem Wissensdrang naht". Die von musischem Zauber durchdrungene Gedankenfülle von Alfréd Rényi (1921–1970) macht das vorliegende Buch zu einer genuß- und gewinnreichen Lektüre für jeden mathematisch Gebildeten. Das eigentliche „Tagebuch über Informationstheorie" ist als Einstieg in dies von Rényi aktiv geförderte Gebiet geeignet, kann aber auch dem geschulten Informationstheoretiker zum „Abklopfen" der eigenen Gedankenwelt dienen. Das Kapitel über Bäume wird für jeden eine Bereicherung sein, der sich zunächst nur unter irgendeinem speziellen Gesichtspunkt mit der Theorie der Bäume gefaßt hat, etwa mit der Pólyaschen Abzähltheorie. Ähnliche Horizonterweiterung gewinnt man aus dem Abschnitt über Fibonacci. In allen Darlegungen des Buchs bewährt sich der von Rényi so nachhaltig mitgeprägte „ungarische Mathematik-Stil": Vielfalt überraschender Wendungen bei elementarer Fragestellung. – Jeder Mathematiker, insbesondere jeder Gymnasiallehrer für Mathematik sollte sich dies Buch zum Geburtstag wünschen.

Erlangen K. Jacobs