88. Band Heft 1
ausgegeben am 23. 1. 1986

DMV

# Jahresbericht
## der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1986

# Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

**Manuskripte**

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 86/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

**Bezugsinformationen**

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 94,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 89 01-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of $ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 $ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1986 – Verlagsnummer 2901/1
Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

# Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Inhalt Band 88, Heft 1

### 1. Abteilung



### 2. Abteilung

## In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

**M. Eiermann, R. S. Varga, W. Niethammer:** Iterationsverfahren für nichtsymmetrische Gleichungssysteme und Approximationsmethoden im Komplexen
**H. Grunsky:** Ludwig Bieberbach zum Gedächtnis
**H. Knörrer:** Integrable Hamiltonsche Systeme und Algebraische Geometrie
**C. Müller:** Zum 100. Geburtstag von Hermann Weyl
**R. Schaback:** Numerische Approximation
**K. Strubecker:** Wilhelm Blaschkes mathematisches Werk
**E. Zehnder:** Periodische Lösungen von Hamiltonschen Systemen

---

**Anschriften der Herausgeber**

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

**Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein 88 (1986) 1–10 © 1986 B. G. Teubner, Stuttgart

# Drei Register über biographische Beiträge im Jahresbericht der DMV, Bd. 1 bis 83*)

Zusammengestellt von Renate Gernert, Garmisch-Partenkirchen

I. Register

## Nachrufe

Soweit wie möglich mit 1. Vornamen und Lebensdaten; „*“ bedeutet: mit Porträt, beim Art. oder sonst im Bd.; wenn nicht anders vermerkt, beziehen sich die Seitenangaben ab Bd. 17 auf die 1. Abt.

| | |
|---|---|
| Abbe, Ernst (1840–1905) | JB 14 S. 217–230 * |
| Ahrens, Wilhelm (1872–1927) | JB 37 S. 286–287 |
| Bachmann, Paul (1837–1920) | JB 36 S. 31–73 * |
| Bäcklund, Albert (1845–1922) | JB 38 S. 113–152 |
| Bauer, Gustav (1820–1906) | JB 16 S. 54–75 * |
| Beck, Hans (1876–1942) | JB 53 S. 91–103 * |
| Bernstein, Felix (1878–1956) | JB 83 S. 84–95 |
| Bilharz, Herbert (1910–1956) | JB 61 S. 97–103 |
| Bjerknes, Carl (1825–1903) | JB 13 S. 253–266 * |
| Blaschke, Wilhelm (1885–1962) | JB 69 S. 1–8 * |
| Bobek, Karl (1855–1899) | JB 9 S. 27–33 * |
| Bohl, Piers (1865–1921) | JB 33 S. 25–32 |
| Bohr, Harald (1887–1951) | JB 55 S. 77–88 |
| Bolza, Oskar (1857–1942) | JB 53 S. 1–13 * |
| Bopp, Karl (1877–1934) | JB 45 S. 116–119 |
| Bortolotti, Enea (1896–1942) | JB 52 S. 173 |
| Bos, Werner (1924–1973) | JB 78 S. 67–77 |
| Brauer, Richard (1901–1977) | JB 83 S. 125–134 |
| Brunn, Hermann (1862–1939) | JB 50 S. 163–166 * |
| Buka, Felix (1852–1896) | JB 6 S. 23–25 |
| Burkhardt, Heinrich (1861–1914) | JB 24 S. 185–195 * |
| Burmester, Ludwig (1840–1927) | JB 39 S. 1–21 * |
| Busche, Edmund (1861–1916) | JB 25 S. 283 |

*) Diese Register überlappen zum Teil mit den „Fundstellen“ von H. Tietz in Bd. 80, Heft 4.

| | |
|---|---|
| Cantor, Georg (1845–1918) | JB 31 S. 97–106 * |
| | JB 39 S. 189–266 * |
| Carathéodory, Constantin (1873–1950) | JB 55 S. 39–51 |
| Caspar, Max (1880–1956) | JB 62 S. 93–98 |
| Nachtrag | JB 63 S. 52 |
| Caspary, Ferdinand (1853–1901) | JB 12 S. 42–60 * |
| Curtze, Maximilian (1837–1903) | JB 12 S. 357–368 * |
| Czuber, Emanuel (1851–1925) | JB 37 S. 287–297 * |
| Darboux, Gaston (1842–1917) | JB 27 S. 196–217 |
| Dembowski, Peter (1928–1971), in engl. Sprache | JB 74 S. 93–95 |
| Disteli, Martin (1862–1923) | JB 36 S. 170–173 * |
| Doehlemann, Karl (1864–1926) | JB 37 S. 209–212 * |
| Doergens, Richard (1839–1901) | JB 11 S. 57–68 * |
| Dyck, Walther von (1856–1934) | JB 45 S. 88–98 * |
| Eberhard, Victor (1861–1927) | JB 41 S. 40–49 * |
| Feigl, Georg (1890–1945) | JB 70 S. 53–60 |
| Fiedler, Wilhelm (1832–1912) | JB 22 S. 97–113 * |
| Fink, Karl (1851–1898) | JB 7 S. 33–35 |
| Finsterwalder, Sebastian (1862–1951) | JB 56 S. 27–31 |
| Fitting, Hans (1906–1938) | JB 49 S. 93–96 * |
| Fuhrmann, Wilhelm (1833–1904) | JB 14 S. 56–60 * |
| Furch, Robert (1894–1967) | JB 72 S. 63–69 |
| Furtwängler, Philipp (1869–1940) | JB 50 S. 167–178 * |
| Gascó, Luis Gonzaga (1844–1899) | JB 8 S. 26–27 |
| Gerhardt, Carl (1816–1899) | JB 8 S. 28–30 * |
| Gierster, Josef (1854–1893) | JB 2 S. 44–45 |
| Gretschel, Heinrich (1830–1892) | JB 2 S. 42–43 |
| Guber, Siegfried (1933–1968) | JB 72 S. 1–2 |
| Günther, Paul (1867–1891) | JB 1 S. 10 |
| Gundelfinger, Sigmund (1846–1910) | JB 26 S. 75–99 * |
| Gutzmer, August (1859–1924) Todesanzeige | JB 33 S. 1 * |
| z. Gedächtnis | JB 33, II S. 1–3 |
| Hamburger, Meyer (1838–1903) | JB 13 S. 40–53 * |
| Hamel, Georg (1977–1954) | JB 58 S. 1–5 |
| Hamilton, Sir W. Rowan (1805–1865) | JB 14 S. 421–424 * |
| Hausdorff, Felix (1868–1942) | JB 69 S. 51–54 * |
| Heffter, Lothar (1862–1962) | JB 66 S. 39–52 |
| Heiberg, Johann (1853–1928) | JB 38 S. 17–23 * |
| Heller, Siegfried (1876–1970) | JB 73 S. 1–5 |
| Helly, Eduard (1884–1943) | JB 82 S. 128–151 * |
| Henrici, Olaus (1840–1918) | JB 36 S. 157–162 * |
| Hermes, Oswald (1826–1909) | JB 20 S. 299–306 * |
| Hertzer, Hugo (1831–1908) | JB 18 S. 417–422 * |
| Hessenberg, Gerhard (1874–1925) | JB 36 S. 312–332 * |
| Hettner, Georg (1854–1914) | JB 24 S. 51–58 * |
| Hilb, Emil (1882–1929) | JB 42 S. 183–198 * |

| | | |
|---|---|---|
| Hopf, Heinz (1894–1971) | | JB 78 S. 113–146 |
| Hoppe, Reinhold (1816–1900) | | JB 9 S. 33–58 * |
| Hoppe, Robert (1857–1899) | | JB 9 S. 59 * |
| Jahnke, Eugen (1861–1921) | | JB 31 S. 177–184 * |
| Janisch, Eduard (1868–1915) | | JB 26 S. 158–160 * |
| Jörgens, Konrad (1926–1974) | | JB 77 S. 78–88 |
| Jürgens, Enno (1849–1907) | | JB 17 S. 163–170 * |
| Jung, Wilhelm (1876–1953) | | JB 58 S. 5–10 |
| Kamke, Erich (1890–1961) | | JB 69 S. 191–208 * |
| Killing, Wilhelm (1847–1923) | | JB 39 S. 140–154 * |
| Kirsch, Ernst (1841–1901) | | JB 11 S. 188–189 |
| Klein, Benno (1846–1891) | | JB 1 S. 9 |
| Klein, Felix (1849–1925) | | JB 34 S. 197–213 * |
| | Todesanzeige | JB 34 S. 89 |
| Knoblauch, Johannes (1855–1915) | | JB 24 S. 443–457 * |
| Knopp, Konrad (1882–1957) | | JB 60 S. 43–49 |
| Koebe, Paul (1882–1945) | | JB 70 S. 148–161 |
| | Porträt | JB 71 bei S. 183 |
| Koehler, Carl (1855–1932) | | JB 44 S. 199–210 * |
| Kortum, Hermann (1836–1904) | | JB 15 S. 60–63 * |
| Kossak, Ernst (1839–1892) | | JB 12 S. 500–504 |
| Krazer, Adolf (1858–1926) | Todesanzeige | JB 35, II S. 81 * |
| | | JB 37 S. 1–33 * |
| Kronecker, Leopold (1823–1891) | | JB 2 S. 5–31 |
| Krüger, Louis (1857–1923) | | JB 34 S. 52–57 |
| Krull, Wolfgang (1899–1971) | | JB 82 S. 51–62 |
| Künneth, Hermann (1892–1975) | | JB 78 S. 61–66 * |
| Kummer, Ernst (1810–1893) | | JB 3 S. 13–28 |
| Landau, Edmund (1877–1938) | | JB 54 S. 55–62 |
| Lauffer, Rudolf (1882–1961) | | JB 65 S. 143–147 |
| Lettenmeyer, Fritz (1891–1953) | | JB 61 S. 2–6 |
| Lexis, Wilhelm (1837–1914) | | JB 23 S. 314–317 * |
| Lie, Sophus (1842–1899) | | JB 8 S. 30–46 * |
| Ligowski, Wilhelm (1821–1893) | | JB 4 S. 46 |
| Lipschitz, Rudolf (1832–1903) | | JB 15 S. 56–59 * |
| Löbell, Frank (1893–1964) | | JB 70 S. 1–15 |
| | Porträt | JB 69 bei S. 176 |
| Löwenheim, Leopold (1878–1957) | | JB 77 S. 1–9 * |
| Lommel, Eugen von (1837–1899) | | JB 8 S. 47–58 * |
| London, Franz (1863–1917) | | JB 26 S. 153–157 * |
| Lüroth, Jakob (1844–1910) | | JB 20 S. 279–299 * |
| Mangoldt, Hans von (1854–1925) | | JB 36 S. 332–348 |
| Maruhn, Karl (1904–1976) | | JB 81 S. 45–48 |
| Maschke, Heinrich (1853–1908) | | JB 17 S. 345–355 * |
| Mayer, Adolf (1839–1908) | | JB 17 S. 355–362 * |
| Meyer, Arnold (1844–1896) | | JB 5 S. 18–20 |

| | |
|---|---|
| Meyer, Friedrich (1842–1898) | JB 8 S. 59–61 * |
| Meyer, Wilhelm (1856–1934) | JB 45 S. 99–113 * |
| Michelsen, Johann (1747–1797) | JB 21 S. 102–103 * |
| Miller, George (1864–1951) | JB 55 S. 52–53 |
| Müller, Conrad (1878–1953) | JB 57 S. 1–5 |
| Müller, Emil (1861–1927) | JB 41 S. 50–58 * |
| Muth, Peter (1860–1909) | JB 18 S. 454–456 * |
| Neumann, Carl (1832–1925) | JB 36 S. 174–178 |
| Neumann, Franz (1798–1895) | JB 4 S. 54–68 |
| Noether, Max (1844–1921) | JB 32 S. 211–233 * |
| Pasch, Moritz (1843–1930) | JB 44 S. 120–142 |
| Pinl, Maximilian (1897–1978) | JB 83 S. 119–124 |
| Pokrowsky, Peter (1857–1901) | JB 12 S. 117–119 * |
| Prange, Georg (1885–1941) | JB 51 S. 1–14 * |
| Prediger, Carl (1822–1895) | JB 4 S. 51–52 |
| Pringsheim, Alfred (1850–1941) | JB 56 S. 1–6 |
| Prüfer, Heinz (1896–1934) | JB 45 S. 32–40 |
| Prym, Friedrich (1841–1915) | JB 24 S. 1–15 * |
| Quade, Wilhelm (1898–1975) | JB 82 S. 193–198 |
| Radon, Johann (1887–1956) | JB 63 S. 51–52 |
| Reidemeister, Kurt (1893–1971) | JB 74 S. 96–104 |
| Reinhardt, Karl (1895–1941) | JB 52 S. 75–83 * |
| Reye, Theodor (1838–1919) | JB 31 S. 185–203 * |
| Richter, Hans (1912–1978) | JB 82 S. 94–107 |
| Riemann, Bernhard (1826–1866) | JB 4 S. 71–87 |
| Ritter, Ernst (1967–1895) | JB 4 S. 52–54 |
| Ritter, Robert (1905–1959) | JB 63 S. 137–140 |
| Ritter, Wilhelm (1847–1906) | JB 16 S. 244–248 * |
| Rohn, Karl (1855–1920) | JB 32 S. 201–211 * |
| Rosenthal, Arthur (1887–1959) | JB 63 S. 89–96 |
| Rothe, Hermann (1882–1923) | JB 35 S. 172–175 * |
| Schapira, Hermann (1840–1898) | JB 8 S. 61–66 * |
| Schell, Wilhelm (1826–1904) | JB 14 S. 113–121 * |
| Schering, Ernst (1833–1897) | JB 6 S. 25–27 |
| Schilling, Friedrich (1868–1950) | JB 55 S. 1–4 |
| Schmid, Hermann (1908–1956) | JB 61 S. 7–11 |
| Schmidt, Erhard (1876–1959) | JB 69 S. 209–224 * |
| | JB 72 S. 3–17 |
| Schmidt, Franz (1827–1901) | JB 11 S. 141–146 * |
| Schmidt, Friedrich (1901–1977) | JB 83 S. 169–181 * |
| Schober, Karl (1859–1899) | JB 8 S. 66–68 * |
| Schoy, Karl (1877–1925) | JB 36 S. 163–167 * |
| Schröder, Ernst (1841–1902) | JB 12 S. 249–265 * |
| Schröter, Heinrich (1829–1891) | JB 2 S. 32–41 |
| Schütte, Friedrich (1864–1914) | JB 23 S. 429–430 * |
| Schur, Friedrich (1856–1932) | JB 45 S. 1–31 * |

| | | |
|---|---|---|
| Schur, Wilhelm (1846–1901) | | JB 11 S. 292–301 * |
| Schwarz, Hermann (1842–1921) | | JB 32 S. 6–13 * |
| Schwarzschild, Karl (1873–1916) | | JB 26 S. 56–75 * |
| Segre, Corrado (1863–1924) | | JB 35 S. 209–250 * |
| Seidel, Ludwig (1821–1896) | | JB  7 S. 23–33 |
| Seliwanoff, Dimitrij F. (1855–1932) | | JB 44 S. 210–214 * |
| Sinram, Heinrich (1840–1895) | | JB  5 S. 17–18 |
| Stahl, Wilhelm (1846–1894) | | JB  4 S. 36–45 |
| Staude, Otto (1857–1928) | | JB 40 S. 219–223 |
| Staudt, Karl von (1798–1867) | | JB 32 S. 97–119 * |
| Stekloff, Wladimir (1863/64–1926) | | JB 38 S. 206–231 * |
| Stern, Mariz (1807–1894) | | JB  4 S. 34–36 |
| Stickelberger, Ludwig (1850–1936) | | JB 47 S. 79–86 * |
| | Berichtigung | JB 47 S. 197 |
| Stöhr, Alfred (1916–1973) | | JB 83 S. 159–168 |
| Stolz, Otto (1842–1905) | | JB 15 S. 309–322 * |
| Study, Eduard (1862–1930) | | JB 40 S. 133–156 * |
| Sturm, Rudolf (1841–1919) | | JB 34 S. 41–51 * |
| Süss, Wilhelm (1895–1958) | | JB 69 S. 161–183 * |
| Thomae, Johannes (1840–1921) | | JB 30 S. 133–144 * |
| Thomé, Wilhelm (1841–1910) | | JB 20 S. 261–278 * |
| Tietze, Heinrich (1880–1964) | | JB 83 S. 182–191 |
| Toeplitz, Otto (1881–1940) | | JB 66 S. 1–16 |
| Treutlein, Peter (1845–1912) | | JB 21 S. 384–386 * |
| Ullrich, Egon (1902–1957) | | JB 61 S. 57–65 |
| Versluys, Jan (1845–1920) | | JB 29 S. 236–237 |
| Wallner, Karl (1881–1934) | | JB 45 S. 113–116 |
| Weber, Heinrich (1842–1913) | | JB 23 S. 431–444 * |
| Weierstraß, Karl (1815–1897) | | JB  6 S. 27–44 |
| Weinmeister, Philipp (1848–1910) | | JB 19 S. 321–327 * |
| Weiß, E. A. (1900–1942) | | JB 52 S. 174–176 * |
| Weiss, Wilhelm (1858–1904) | | JB 14 S. 171–175 |
| Weyer, Georg (1818–1896) | | JB  6 S. 44–45 |
| Weyr, Emil (1848–1894) | | JB  4 S. 24–33 |
| Wiarda, Georg (1889–1971) | | JB 74 S. 105–106 |
| Wieleitner, Heinrich (1874–1931) | | JB 42 S. 199–223 * |
| Wiener, Christian (1826–1896) | | JB  6 S. 46–69 |
| Wiltheiß, Eduard (1855–1900) | | JB  9 S. 59–63 * |
| Worpitzky, Julius (1835–1895) | | JB  4 S. 47–51 |
| Zelbr, Karl (1854–1900) | | JB  9 S. 63–64 |
| Zillmer, August (1831–1893) | | JB  4 S. 23–24 |
| Zsigmondy, Karl (1867–1925) | | JB 36 S. 167–170 * |

II. Register

## Kollegen in einer dunklen Zeit

| | |
|---|---|
| Gentzen, Gerhard (1909–1945) | JB 75, I S. 173–174 |
| Gödel, Kurt (1906–1978) | JB 75, I S. 191–192 |
| Grell, Heinrich (1903–1974) | JB 73, I S. 154–155 |
| Grötzsch, Herbert (1902–) | JB 71, I S. 222–223 |
| Gumbel, Emil (1891–1966) | JB 73, I S. 158–162 |
| Haenzel, Gerhard (1898–1944) | JB 73, I S. 203–205 |
| Hamburger, Hans (1889–1956) | JB 73, I S. 182–183 |
| Hartogs, Friedrich (1874–1943) | JB 73, I S. 201–202 |
| Hausdorff, Felix (1868–1942) | JB 71, I S. 199–200 |
| Heilbronn, Hans (1908–) | JB 72, I S. 173 |
| Hellinger, Ernst (1883–1950) | JB 71, I S. 214–215 |
| | Portr. bei I, 182 |
| Helly, Eduard (1884–1943) | JB 75, I S. 192–194 |
| Hensel, Kurt (1861–1941) | JB 73, I S. 199 |
| Hertz, Paul (1881–1940) | JB 72, I S. 173–176 |
| Herzberger, Max (1899–) | JB 73, I S. 168–169 |
| Hirsch, Kurt (1906–) | JB 71, I S. 179 |
| Hirschfeld, Hermann (1912–), später: Hartley, H. | JB 71, I S. 179–180 |
| Hopf, Ludwig (1884–1939) | JB 71, I S. 170 |
| | Portr. bei I, 182 |
| Hopfner, Friedrich (1881–1949) | JB 75, I S. 194–195 |
| Jacobsthal, Ernst (1882–1965) | JB 71, I S. 180–182 |
| John, Fritz (1910–) | JB 72, I S. 176 |
| Kamke, Erich (1890–1961) | JB 73, I S. 207–208 |
| Kármán, Theodore von (1881–1963) | JB 71, I S. 171–172 |
| | Portr. bei I, 183 |
| Kohn, Paul (1895–) | JB 75, I S. 174 |
| Korn, Arthur (1870–1945) | JB 71, I S. 182–183 |
| Kürti, Gustav (1903–) | JB 75, I S. 195 |
| Kuhn, Paul (1901–) | JB 75, I S. 174–175 |
| Landau, Edmund (1877–1938) | JB 72, I S. 176–178 |
| Levi, Friedrich (1888–1966) | JB 73, I S. 188–191 |
| Lewy, Hans (1904–) | JB 72, I S. 178–179 |
| Lichtenstein, Leon (1878–1933) | JB 73, I S. 191–198 |
| Liebmann, Heinrich (1874–1939) | JB 73, I S. 162–167 |
| Löwig, Heinrich (1904–) | JB 75, I S. 175 |
| Löwner, Karl (1893–1968) | JB 75, I S. 175–177 |
| Loewy, Alfred (1894–1935) | JB 71, I S. 217–220 |
| Lukács, Eugen (1906–) | JB 75, I S. 195–196 |
| Mahler, Kurt (1903–) | JB 72, I S. 179 |
| Mann, Heinrich (1905–) | JB 75, I S. 196–197 |
| Mayer, Anton (1903–1942) | JB 75, I S. 197–199 |
| Mayer, Walther (1887–1948) | JB 75, I S. 199–201 |
| Menger, Karl (1902–) | JB 75, I S. 201 |
| Mises, Richard (1883–1953) | JB 71, I S. 183–185 |
| | Portr. bei I, 183 |

| | |
|---|---|
| Mohr, Ernst (1910–) | JB 75, I S. 177–178 |
| Müntz, Chaim (1884–) | JB 71, I S. 185–187 |
| Neugebauer, Otto (1899–) | JB 72, I S. 180 |
| Neumann, Bernhard (1909–) | JB 71, I S. 187 |
| Neumann, John (Janos) von (1903–1957) | JB 71, I S. 187–188 |
| Noether, Emmy (1882–1935) | JB 72, I S. 180–182 |
| Noether, Fritz (1884–, ab 1939 vermißt) | JB 71, I S. 203–205 |
| Pelterson, Rose (1913–) | JB 71, I S. 188–189 |
| Pick, Georg (1859–1942) | JB 75, I S. 178–180 |
| Pinl, Maximilian (1897–) | JB 75, I S. 180–181 |
| Plessner, Abraham (1900–) | JB 71, I S. 223–224 |
| Pöschl, Theodor (1882–1955) | JB 73, I S. 170–175 |
| Pollaczek-Geiringer, Hilda (1895–) später Hilda von Mises | JB 71, I S. 189 |
| Prager, William (1903–) | JB 72, I S. 182 |
| Pringsheim, Alfred (1850–1941) | JB 73, I S. 202–203 |
| Rademacher, Hans (1892–1964) | JB 71, I S. 205–208 |
| Rado, Richard (1906–) | JB 71, I S. 190 |
| Reidemeister, Kurt (1893–1971) | JB 73, I S. 185 |
| Remak, Robert (1888–) | JB 71, I S. 190–193 |
| Rembs, Eduard (1890–1964) | JB 71, I S. 193–195 |
| Rogisinski, Werner (1894–1964) | JB 73, I S. 185–186 |
| Rosenthal, Artur (1887–1959) | JB 73, I S. 167 |
| Rothe, Erich (1895–) | JB 71, I S. 208–209 |
| Scherk, Peter (1910–) | JB 72, I S. 183 |
| Schlesinger, Ludwig (1864–1933) | JB 71, I S. 224–228 |
| Schrödinger, Erwin (1887–1961) | JB 77, I S. 162–164 |
| Schur, Issai (1875–1941) | JB 71, I S. 195–199 Portr. bei I, 183 |
| Schwerdtfeger, Hans (1902–) | JB 72, I S. 183–184 |
| Sommerfeld, Arnold (1868–1951) | JB 73, I S. 203 |
| Sternberg, Wolfgang (1887–1953) | JB 71, I S. 209–211 |
| Szász, Otto (1884–1952) | JB 71, I S. 215–216 |
| Szegö, Gabor (Gabriel) (1895–) | JB 73, I S. 186–188 |
| Tauber, Alfred (1866–1942) | JB 75, I S. 202–203 |
| Taussy, Olga (1906–) | JB 72, I S. 184 |
| Thirring, Hans (1888–) | JB 75, I S. 203–205 |
| Thomson, Gerhard (1899–1934) | JB 73, I S. 205–206 |
| Toeplitz, Otto (1881–1940) | JB 71, I S. 201–202 |
| Vajda, Stefan (1901–) | JB 75, I S. 205 |
| Wald, Abraham (1902–1950) | JB 75, I S. 206 |
| Warschawski, Stefan (1904–) | JB 72, I S. 184–185 |
| Wegener, J. M. | JB 71, I S. 199 |
| Weinstein, Alexander (1887–) | JB 71, I S. 211 |
| Weyl, Hermann (1885–1955) | JB 72, I S. 185–189 |
| Willer, Friedrich (1883–1959) | JB 71, I S. 216–217 |

| | |
|---|---|
| Winternitz, Arthur (1893–1961) | JB 75, I S. 182 |
| Wolf, Karl (1886–1950) | JB 75, I S. 206–208 |
| Zermelo, Ernst (1871–1953) | JB 71, I S. 221–222 |
| Zorn, Max (1906–) | JB 73, I S. 157–158 |

III. Register

**Sonstige biographisch-bibliographische Artikel**

„*" bedeutet: mit Porträt im JB; nur der 1. Vorname wird genannt.

| | |
|---|---|
| Abel, Niels Henrik (1802–1829) | JB 11 S. 377–382 |
| | JB 79, I S. 138–144 |
| Bolyai, Johann (1803–1860) | JB 12 S. 165–194 |
| | JB 29, I S. 130–135 |
| Brill, Alexander von (1842–1935) | JB 31, I S. 89–96 |
| | JB 53, I S. 82–89 |
| Crelle, August (1780–1855) | JB 79, I S. 137–174 |
| Dirichlet, Peter G. Lejeune (1805–1859) | JB 14 S. 149–163 |
| | JB 79, I S. 144–147 |
| Euler, Leonhard (1707–1783) | JB 16 S. 185–195 |
| | S. 423–424 |
| | S. 555–558 |
| | S. 558–567 |
| | JB 17 S. 36–39 |
| | S. 313–318 |
| Gauß, Carl (1777–1855) | JB 20, I S. 396–403 |
| | JB 41, II S. 1–2 |
| Graßmann, Hermann (1809–1877) | JB 18, I S. 344–356 * |
| | JB 19, I S. 1–13 |
| Hauck, Guido (1845–1905) | JB 14 S. 289–311 * |
| | JB 16 S. 155–164 |
| Hausdorff, Felix (1868–1942) | JB 69, I S. 62–75 |
| | S. 75–76 |
| Hesse, Otto (1811–1874) | JB 79, I S. 148–153 |
| Hilbert, David (1862–1943) | JB 31, I S. 3–10 * |
| | S. 10–19 |
| Jacobi, Carl (1804–1851) | JB 13 S. 405–435 * |
| | JB 79, I S. 148–153 |
| Kepler, Johannes (1571–1630) | JB 22, II S. 158 |
| Klein, Felix (1849–1925) | JB 37, II S. 2–3 |
| | JB 44, II S. 4–11 |
| Koenigsberger, Leo (1837–1921) | JB 33, I S. 104–112 * |
| Kopernikus, Nikolaus (1473–1543) | JB 20, I S. 161–167 |
| Kronecker, Leopold (1823–1891) | JB 33, I S. 210–228 |
| Kummer, Ernst (1810–1893) | JB 79, I S. 154–159 |
| Lambert, Johann (1728–1777) | JB 14 S. 186–198 |

| | |
|---|---|
| Leibniz, Gottfried (1646–1716) | JB 52, I S. 217–244 |
| Lichtenstein, Leon (1878–1933) | JB 83, I S. 135–146 |
| Minding, Ferdinand (1806–1885) | JB 79, I S. 144–147 |
| Neumann, Carl (1832–1925) | JB 17, II S. 90–93 |
| Newton, Isaak (1643–1727) | JB 77, I S. 107–137 |
| Petzval, Josef (1807–1891) | JB 12 S. 324–344 |
| Plücker, Julius (1801–1868) | JB 79, I S. 138–144 |
| Richelot, Friedrich (1808–1875) | JB 79, I S. 148–153 |
| Schoenflies, Arthur (1853–1928) | JB 32, I S. 1–6 |
| Sohncke, L. A. (1842–1897) | JB 79, I S. 148–153 |
| Stäckel, Paul (1862–1919) | JB 32, I S. 13–32 * |
| Steiner, Jakob (1796–1863) | JB 79, I S. 138–144 |
| | S. 144–147 |
| Walder, Erhard (1832–1894) | JB 4 S. 22 |
| Wangerin, A. (1844–) | JB 34, II S. 108–111 |
| Weierstraß, Karl (1815–1897) | JB 24, I S. 416–438 * |
| | S. 439–442 |
| | JB 35, I S. 56–65 |
| | JB 79, I S. 154–159 |

Renate Gernert
Steigfeldstr. 8
8100 Garmisch-Partenkirchen

Jber. d. Dt. Math.-Verein
88 (1986) 11–49
AMS subject classification: 3Cxx, 3Exx, 3Fxx, 13Exx, 13Fxx, 13Gxx, 13Hxx, 18Gxx, 20Kxx, 22Bxx
© 1986 B. G. Teubner, Stuttgart

# Wie weit sind Moduln vom Satz von Krull-Remak-Schmidt entfernt?

## Eine Analyse am Beispiel fast-freier abelscher Gruppen und ihre Konsequenzen*)

Rüdiger Göbel, Essen

## § 1 Einleitung

Der große Vorteil der Theorie der Abelschen Gruppen im Rahmen der Algebra liegt darin, daß ihre endlichen Objekte seit fast 200 Jahren durch C. F. Gauß [E12], nochmals durch seinen Schüler E. Schering [E20] und auch durch G. Frobenius und L. Stickelberg [65] klassifiziert worden sind, siehe auch [E19] und [E25]. Wagt man sich daher an die noch übrig bleibende Untersuchung unendlicher Objekte, so muß man nicht mehr mit Problemen ihrer endlichen Teilstrukturen kämpfen. Bekanntlich liegt gerade darin eine der Schwierigkeiten bei der Untersuchung unendlicher nicht kommutativer Gruppen, die dann nur durch einschneidende Endlichkeitsforderungen oder eben Kommutativitätsbedingungen bewältigt wird. Die bedeutende Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen ist für ihren unendlichen Nachbarn eben nicht mehr als ein Tropfen auf den heißen Stein.

Nun zurück zu den abelschen Gruppen, die wir hier kürzer „Gruppen" nennen. Weil die endlich erzeugbaren und weitgehend die abzählbaren Gruppen – z. B. durch den Ulmschen und den Zippinschen Satz – klassifiziert sind, gelangt man *zwangsweise* schnell zu überabzählbaren Strukturen, und hier liegt ein besonderer Reiz der Theorie. Da sie sich auf der Kreuzung zwischen Gruppen- und Modultheorie befindet, kommen ohnehin Methoden beider Gebiete zum Tragen, was in „klassischer Zeit", also bis Anfang der 70er Jahre erfolgreich genutzt wurde, erinnert sei an Kettenbedingungen, G. Cantors Zick-Zack-Argument z. B. beim Ulmschen Satz und seiner abgerundeten Form von Hill und Walker (vgl. z. B. [146, S. 449], [100]), bekannte gruppentheoretische Abzählschlüsse, z. B. beim Satz von Pontrjagin sowie die allgemeinen Methoden der homologischen Algebra und Topologie, wie sie z. B. bei dem Beweis des später zitierten Satzes von Nunke benutzt wurden.

Abelsche Gruppen haben nach meiner Meinung jedoch sehr an allgemeinem mathematischen Interesse gewonnen – und unterscheiden sich hier

*) Erweiterte Fassung des Vortrags zum Festkolloquium für Herrn Prof. Dr. G. Nöbeling, gehalten am 25. 5. 1983 am Mathematischen Institut der Universität Erlangen.

wesentlich von anderen algebraischen Theorien – seit in den 70er Jahren als Folge von Shelahs Lösung des Whitehead-Problems [153, 155] bekannt wurde, daß sie noch vielen weiteren Einflüssen ausgesetzt sind. Seitdem finden tiefe Methoden der (aus algebraischer Sicht) hochentwickelten axiomatischen Mengenlehre, der Logik und insbesondere der Modelltheorie und (unendlichen) Kombinatorik „handfeste" algebraische Anwendungen. Man ist sich bewußt, daß selbst „hausbackene" *algebraische* Probleme abelscher Gruppen unentscheidbar sein könnten. Die Veröffentlichungen der letzten Jahre zeigen deutlich, daß dieser erweiterte Methodenreichtum die Theorie und ihr natürliches Umfeld allgemeiner Moduln stürmisch weiterentwickelt hat. Darüber soll in diesem Vortrag mit besonderem Blick auf einen bedeutenden Satz von Herrn Nöbeling berichtet werden.

Da die neuen Methoden gerade *nicht* auf algebraischem Boden gewachsen sind und somit nicht für eine bestimmte Richtung zurechtgeschneidert wurden, ist es völlig klar, daß ihre Anwendungen nicht bei den abelschen Gruppen hängen bleiben, sondern Resultate über Moduln großer Klassen von Ringen, boolscher Algebren, nicht kommutativer unendlicher Gruppen, z. B. lokal endlicher Gruppen, nach sich ziehen und schon nachgezogen haben. Wir wollen darauf kurz im letzten Teil (§ 9 der Ausarbeitung) eingehen und u. a. bisher unveröffentlichte Lösungen zu zwei offenen Fragen in der Kategorie der Moduln über beliebigen, kommutativen, noetherschen Ringen und im zweiten Fall über beliebigen, kommutativen Ringen vorstellen. Auf die Kommutativität des Grundringes kann ebenfalls weitgehend verzichtet werden, wie an einem in Arbeit [78] befindlichen Kriterium (§ 9) erläutert wird.

Trotzdem wollen wir uns in den §§ 2 bis 8 auf abelsche Gruppen beschränken: Diese Objekte sind auf den ersten Blick so phantastisch einfach und auf den zweiten Blick allerdings so kompliziert, daß sehr viele Probleme allgemeiner Modultheorien hier schon in voller Schärfe auftreten. Diesen Effekt wollen wir versuchen didaktisch zu nutzen, um den Nichtalgebraiker mit Problemen und Fortschritten auf diesem Gebiet vertraut zu machen und gleichzeitig dem Algebraiker, der in einem anderen Garten pflanzt und erntet, neue Züchtungen vorzustellen.

## § 2 Allgemeines über torsionsfreie Gruppen

Aus elementaren Eigenschaften des Grundringes $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen folgt, daß jede Gruppe als Erweiterung ihrer Torsionsuntergruppe durch eine torsionsfreie Gruppe geschrieben werden kann. Dies führte zu der historischen, aber mathematisch doch sehr zweifelhaften Einteilung in torsionsfreie und Torsionsgruppen. Dabei wurden die „gemischten" Gruppen bis in das letzte Jahrzehnt (vgl. [145], [146], [175]) völlig stiefmütterlich behandelt: Die Klassifikation endlich erzeugbarer Gruppen manifestierte diese Einteilung, und klassische Fragen, wie etwa das von P. Griffith [88] gelöste mixed-splitting-Problem von R. Baer [5], sind so angelegt, als ob man sich nur für „trivial-gemischte" Gruppen interessiere. Trotz dieser besseren Einsicht möchte ich dem historischen Weg folgen, wobei über Torsionsgruppen und gemischte Gruppen in § 9 nur einige parallele Resultate genannt werden sollen.

Im Gegensatz zu den Torsionsgruppen hört das Wohlverhalten torsionsfreier Gruppen A schon auf, wenn sie nicht mehr endlich erzeugbar sind. Ist A abzählbar, so gibt es noch eine feinere Invariante als die Mächtigkeit $|A|$, nämlich die Dimension des Vektorraumes $A \otimes \mathbf{Q}$ über den rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$, d. h. den Rang rg A von A. Falls rg A = 1 ist, so kann man A als Untergruppe von $\mathbf{Q}$ auffassen und durch Invarianten, die sogenannten Typen von R. Baer [4] (1937) klassifizieren. Ist rg A > 1, so erscheint jede Klassifikation aussichtslos, besser sinnlos, da eine Fülle (zu vieler) neuer Phänomene auftreten. Beschränkt man sich jedoch auf gewisse Klassen von Gruppen endlichen Ranges, so gibt es viele neue Resultate zu nennen, die mit starken algebraischen Hilfsmitteln wie Galois-Theorie, algebraischer K-Theorie bewiesen wurden. Beispielsweise konnten beeindruckende Charakterisierungen der Butlergruppen gewonnen werden. Butlergruppen sind reine Untergruppen von vollständig zerlegbaren (torsionsfreien) Gruppen endlichen Ranges. Hierzu möchte ich auf die Monographie von D. Arnold [2] verweisen, in der die wichtigsten Resultate über torsionsfreie Gruppen endlichen Ranges bis 1980 in sehr verständlicher Form dargestellt sind; über Folgeuntersuchungen kann man sich an den Tagungsbänden [83], [84], [85] und [E14] orientieren. Läßt man die Einschränkungen weg, so gilt hier schon trotz guter Kenntnis gewisser Klassen torsionsfreier Gruppen endlichen Ranges der universelle Satz von I. Kaplansky [114, S. 81] „In this strange part (torsionfree groups) of the subject (abelian groups) anything that can conceivably happen actually does happen.“ Ein wunderschöner „Beweis“ dieses Satzes – er soll das Leitmotiv meines Vortrages sein – entstand schon 1962 aus der (bei E. C. Zeeman) in Cambridge verfaßten Dissertation von A. L. S. Corner, siehe [13].

**Satz von Corner.** *Ist* R *ein abzählbarer Ring mit torsionsfreier und reduzierter* (*d. h.* $\mathbf{Q} \not\subseteq R^+$) *additiver Gruppe* $R^+$, *so gibt es torsionsfreie, reduzierte Gruppen* G *mit Endomorphismenring* End G = R. *Hat* $R^+$ *außerdem endlichen Rang* n, *so kann* G *mit* rg G $\leqslant$ 2n *gewählt werden.*

Im allgemeinen ist rg G = 2n minimal, jedoch konnte H. Zassenhaus [177] später die Rangaussage zu rg G $\leqslant$ n verbessern, sofern $R^+$ frei ist. Es genügt sogar, daß $R^+$ lokal-frei ist, d. h. $R^+ \otimes \mathbf{Z}_{(p)}$ ist ein freier $\mathbf{Z}_{(p)}$-Modul für alle Lokalisierungen $\mathbf{Z}_{(p)}$; siehe M. C. R. Butler [E1].

Durch passende Wahlen des Parameters R kann man nun viele Pathologien torsionsfreier Gruppen finden. Es gibt zahlreiche, beliebig kuriose Beispiele zum Zerlegungsverhalten torsionsfreier Gruppen endlichen Ranges; z. B. gibt es zu natürlichen Zahlen $n \geqslant m$ eine torsionsfreie Gruppe G vom Range n, so daß jeder Summe $n = \sum_{i=1}^{m} r_i$ eine Zerlegung $G = \bigoplus_{i=1}^{m} G_i$ in unzerlegbare Gruppen $G_i$ vom Range $r_i$ entspricht. Durch andere Wahlen des Parameters R erhält man Beispiele zu den sogenannten Kaplanskyschen Testproblemen, die zeigen, wie weit die untersuchte Klasse von einem Krull-Remak-Schmidt-Satz entfernt ist. Man findet torsionsfreie Gruppen G (notwendigerweise wenigstens) abzählbaren Ranges mit $G \not\cong G \oplus G$ aber $G \cong G \oplus G \oplus G$ [ein Problem, das für Banachräume G immer noch ungelöst ist!] oder abzählbare, torsionsfreie Gruppen, die keine unzerlegbaren direkten Summanden $\neq 0$ besitzen.

Um derartige Pathologien zu vermeiden, wurden schon seit fast 50 Jahren häufig Untersuchungen über torsionsfreie Gruppen auf separable Gruppen eingeschränkt: Man fordert, daß jede endliche Teilmenge in einem direkten Summanden liegt, der selbst vollständig zerlegbar, d. h. eine direkte Summe von Rang-1-Gruppen (also Untergruppen von $\mathbf{Q}$) ist. Die Analogie z. B. zu den Butlergruppen ist offensichtlich! Separable Gruppen sind also eine gute Approximation zum Vektorraum. Mit dem gleichen Leitgedanken fordert man für die zu untersuchenden Gruppen, daß alle Teilmengen der Mächtigkeit $<\kappa$ in einem direkten vollständig zerlegbaren Summanden bzw. in einer freien Untergruppe enthalten sind; die erste Klasse sind $\kappa$-separable Gruppen und letztere Gruppen heißen $\kappa$-frei (für eine gegebene Kardinalzahl $\kappa$).

Ein gutes Beispiel, das beide Forderungen für $\kappa = \aleph_0$ erfüllt, ist die auch für den Nöbelingschen Satz wichtige Baer-Specker-Gruppe[1]) $\mathbf{Z}^{\aleph}$: Ist $\aleph$ eine Kardinalzahl, d. h. die Menge $\{\nu : \nu \text{ Ordinalzahl} < \aleph\}$, dann ist $\mathbf{Z}^{\aleph}$ die Menge aller ganzzahligen Funktionen f: $\aleph \to \mathbf{Z}$. Sie wird mit der koordinatenweisen Addition und Multiplikation zu einer Gruppe bzw. zu einem Ring. Aufgrund eines Satzes von Baer [4] ist $\mathbf{Z}^{\aleph}$ nicht frei, jedoch $\aleph_1$-frei. Es ist ebenfalls leicht zu sehen, daß $\mathbf{Z}^{\aleph}$ separabel ist.

Separable Gruppen und insbesondere $\mathbf{Z}^{\aleph}$ wurden recht erfolgreich mit algebraischen, homologischen und topologischen Methoden untersucht. Exemplarisch sei hierzu der schöne Satz von Nunke [136] zitiert, der besagt, daß man alle epimorphen Bilder von $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$ „kennt": Sie sind eine direkte Summe eines Produktes $\mathbf{Z}^{\kappa}$ ($\kappa \leqslant \aleph_0$) und einer Cotorsionsgruppe. Cotorsionsgruppen sind die epimorphen Bilder algebraisch kompakter Gruppen – also durch Invarianten beschreibbar; siehe L. Fuchs [66, Band I, §§ 40, 55]. Der Nunkesche Satz hat zahlreiche Anwendungen bei der Untersuchung torsionsfreier Gruppen gefunden; siehe L. Fuchs [66, Band II, § 95].

Bei Beweisen über separable bzw. $\kappa$-freie Gruppen wurde schon vor Jahren die (allgemeine) Kontinuumshypothese (GCH) CH benutzt; siehe z. B. [11, 12, 168]. Allerdings galt das bis Anfang der 70er Jahre eher als ein „Schönheitsfehler" oder als ein bequemes Vehikel für einen schnelleren Beweis. Trotzdem war einer Reihe von Problemen (z. B. Whitehead-Problem, Eindeutigkeit des „Elongationsproblems" bei p-Gruppen, Existenz $\kappa$-freier, nicht-freier Gruppen der Mächtigkeit $\kappa$, usw.) mit all diesen Methoden nicht näher zu kommen. Alarmsignale wie die Unentscheidbarkeit von Cantors CH-Problem (K. Gödel 1938, P. J. Cohn 1963), des Suslin-Problems (Tennenbaum 1968) oder diverse Fragen über normale Hausdorff-Topologien wurden zu dieser Zeit noch nicht ernst genommen. Man war der Überzeugung, daß die starke Wirkung der algebraischen Operationen solche Phänomene nur unter extremen Bedingungen, z. B. bei Moduln meßbarer Mächtigkeit und nicht schon bei klassisch algebraischen Fragen auftreten läßt; Erfolge, wie die Lösung des Baer-Problems oder der Beweis des „allgemeinen Ulmschen Satzes" von Hill und Walker bestätigten diese Auf-

[1]) In der Topologie und booleschen Algebra ist der Produktraum $2^{\aleph_0}$ mit der diskreten Topologie auf $2 = \{0, 1\}$ sehr wichtig. Die Parallele des sog. Cantorschen Diskontinuums $2^{\aleph_0}$ zur Baer-Specker-Gruppe $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$ ist nicht nur formal, sondern läßt sich weiter verfolgen (s. auch § 3).

fassung. In dieser sicherlich für den Fortschritt der abelschen Gruppen kritischen Zeit bewies Herr Nöbeling 1968 den seither nach ihm benannten und hier zentralen

## § 3 Satz von Nöbeling über abelsche Gruppen

Dieses Resultat kann man erst richtig verstehen, wenn man es im größeren Zusammenhang sieht. Ich möchte den Satz von Nöbeling jedoch zunächst formulieren, was – im Gegensatz zu allen bekannten Beweisen – sehr einfach geht, und ihn anschließend im Rahmen der Theorie der abelschen Gruppen aus klassischer und neuester Sicht diskutieren.

Sei also stets $\kappa$ eine Kardinalzahl. Die Baer-Specker-Gruppe $\mathbf{Z}^\kappa$ enthält zwei ausgezeichnete Untergruppen (ringe), nämlich die *direkte Summe* $\mathbf{Z}^{(\kappa)} = \bigoplus_{i \in \kappa} e_i \mathbf{Z}$, die von den durch das Kroneckersymbol definierten Indikatorfunktionen $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \kappa}$ frei erzeugt wird und die *Nöbelingsche Gruppe* $B_\kappa$ aller im üblichen Sinne, dem Betrage nach, beschränkten Funktionen.

Das Kernstück des Nöbelingschen Satzes besagt, daß $B_\kappa$ eine freie Gruppe ist. Benutzen wir eine Definition aus [134] und sagen, daß $S \subseteq B_\kappa$ eine *Speckersche Untergruppe* ist, wenn S ein Teilring von $B_\kappa$ und $(B_\kappa/S)^+$ torsionsfrei ist, so können wir allgemeiner formulieren:

**Satz von Nöbeling** [134]. *Sind* $S \subseteq T \subseteq B_\kappa$ *Speckersch, so gibt es ein Komplement* F *von* S *in* T, *d. h.* $T = S \oplus F$ *und* S, F *haben freie Basen aus charakteristischen Funktionen (Indikatorfunktionen auf* $\kappa$*).*

Durch diesen Satz wurden eine Reihe offener Probleme gelöst:

(A) A. Ehrenfeucht [47] nennt das folgende Problem (1951) von K. Kuratowski und A. Mostowski [118]:

Sei $P(\mathbf{Z})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbf{Z}$ und G die Gruppe aller ganzzahligen Funktionen auf $P(\mathbf{Z})$ so, daß

$$f(X + Y) = f(X) + f(Y) \quad \text{für alle disjunkten Paare } X, Y \subseteq \mathbf{Z}.$$

Welche Struktur hat G?

Wir behaupten $G \cong \mathbf{Z}^{2^{\aleph_0}}$. Da $B = B_\kappa$ nach obigem Satz frei ist, folgt

$$B^* = \mathrm{Hom}(B, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{2^{\aleph_0}}.$$

Also genügt es, einen Isomorphismus $\phi\colon G \to B^*$ zu finden. Falls $f \in G$, so setzen wir $\phi(f)(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} m f(x^{-1}(m))$, wobei $x \in B$ eine beschränkte Abbildung $x\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ist. Es ist nun leicht nachzuweisen, daß $\phi$ ein Isomorphismus ist.

(B) Problem von DeGroot (1963), siehe [22].

Bei der Beschreibung aller endlichen Zerlegungen eines topologischen Raumes X in offen-abgeschlossene Teilmengen, trifft man auf die Gruppe aller stetigen, beschränkten Abbildungen von X nach $\mathbf{Z}$. Welche Struktur hat G?

Da $G \subseteq B_{|X|}$, ist G nach Nöbeling [134] frei.

(C) Yamabe-Problem (1953); vgl. B. H. und Hanna Neumann [132].

Sei A eine zunächst nichtnotwendig abelsche Gruppe. Eine Abbildung f: $A \times A \to \mathbf{Z}$ heißt Yamabe-Funktion, wenn f bilinear und regulär (d. h. $a \in A$, $f(a, a) = 0 \Rightarrow a = 0$) ist.

Ist A eine Gruppe mit Yamabe-Funktion, so muß A offensichtlich torsionsfrei und abelsch sein. Nach einem zahlentheoretischen Satz von Meyer (1884) haben indefinite, quadratische Formen über $\mathbf{Z}$ vom Grade $\geqslant 5$ Nullstellen. Dies folgt in einem schönen Kapitel der Zahlentheorie, aus dem Satz von Hasse-Minkowski, siehe [151, S. 41–43]. Folglich ist f definit, wenn rg $A \geqslant 5$. Welche Struktur hat A? Wenn $a \in A$ und $f^*(a) \in \mathbf{Z}^A$ durch $f^*(a)(x) = f(x, a)$ definiert wird, dann ist die Abbildung $f^*: A \to \mathbf{Z}^A$ eine Einbettung von A in $B_{|A|}$. Folglich ist A nach [134] frei.

Das Yamabe-Problem legt folgende Verallgemeinerung nahe:
Eine Abbildung $\nu: A \to \mathbf{R}$ einer abelschen Gruppe A in die positiven reellen Zahlen heißt *Norm,* wenn für alle $a, b \in A$, $n \in \mathbf{Z}$ gilt:

(a) $\nu(a + b) \leqslant \nu(a) + \nu(b)$

(b) $\nu(na) = |n|\nu(a)$.

Offenbar ist die induzierte Topologie genau dann diskret, wenn folgendes gilt:

(c) Es gibt ein $\epsilon > 0$ mit $\nu(a) > \epsilon$ für alle $a \neq 0$.

Deshalb nennt man eine Normfunktion, die (c) erfüllt, diskret. Mit Hilfe eines zahlentheoretischen Satzes von H. Minkowski (1910) (siehe [92, S. 443, Satz 446]) kann man zeigen

**Satz** (J. Lawrence [120], 1984). *Ist* A *eine abelsche Gruppe mit diskreter Norm, so ist* A $\aleph_1$*-frei.*

Eine einfache Abschätzung zeigt, daß die ($\aleph_1$-freie) Baer-Specker-Gruppe $\mathbf{Z}^\kappa$ keine diskrete Norm zuläßt; J. Lawrence [120]. Natürlich liegt die folgende Frage auf der Hand, die ähnlich zum Satz von Nöbeling eine positive Antwort haben sollte.

**Problem 1** (S. W. Ralph [142]). Ist jede Gruppe mit diskreter Norm frei?

(D) E. C. Weinbergs Problem [176] (1963):

Eine verbandsgeordnete Gruppe G (nach G. Birkhoff $\ell$-Gruppe) ist eine additive Gruppe, die gleichzeitig ein Verband ist so, daß das Monotoniegesetz der Addition gilt. Entsprechend sind $\ell$-Homomorphismen definiert. Ein Erzeugendensystem E von G (und somit G) ist $\ell$-frei, wenn jede Abbildung von E in eine $\ell$-Gruppe zu einem $\ell$-Homomorphismus liftet.

In [176, S. 198, (5.1)] finden wir das Problem:
Ist jede freie (abelsche) $\ell$-Gruppe eine freie abelsche Gruppe?
Nach Satz 2.5 und Satz 2.8 in [176, S. 189, 191] ist eine freie $\ell$-Gruppe G Untergruppe von $B_{|G|}$, also nach [134] frei.

## § 4 Zusammenhang des Nöbelingschen Satzes mit Resultaten von Specker und Higman

Wir wollen nun sehen, daß es ein „besonderer Zufall“ ist, daß die „große“ Nöbelingsche Untergruppe $B_\kappa$ von $\mathbf{Z}^\kappa$ frei ist und beginnen mit einem bis heute noch nicht zufriedenstellend gelösten

**Problem 2.** (a) Für welche Kardinalzahlen $\kappa$ gibt es nicht-freie $\kappa$-freie Gruppen der Mächtigkeit $\kappa$? Diese Gruppen wollen wir kürzer $\kappa$-Gruppen nennen. (b) Gibt es stets $2^\kappa$ nicht isomorphe $\kappa$-Gruppen, wenn man eine $\kappa$-Gruppe finden kann?

Abgesehen vom theoretischen Interesse, tauchen diese $\kappa$-freien, nicht-freien Gruppen automatisch bei der Pontrjagindualität auf; vgl. § 5. Bei der Berechnung der 1. Kohomologiegruppe einer Überlagerung eines endlichen Zellkomplexes traf E. Specker [167] auf das Problem für $\kappa = \aleph_1$. Klassischer Kandidat ist natürlich die Baer-Specker-Gruppe $\mathbf{Z}^\kappa$ für $\kappa = \aleph_0$. Um zu sehen, daß $\mathbf{Z}^\kappa$ $\aleph_1$-frei ist, benutzt man das Pontrjaginsche Freiheitskriterium [141]. Danach ist eine *abzählbare* Gruppe frei, wenn ihre Untergruppen endlichen Ranges frei sind. Letzteres ist für $\mathbf{Z}^\kappa$ leicht zu zeigen. Die Baersche Behauptung, daß $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$ nicht frei ist, wurde von E. Specker [168] wesentlich verschärft: Ist $G^* = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z})$, so folgt $(\mathbf{Z}^{\aleph_0})^* \cong \mathbf{Z}^{(\aleph_0)}$. Ein einfaches Kardinalzahlargument macht klar, daß $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$ daher bei weitem (!) nicht frei sein kann.

Allgemeiner untersuchte E. Specker *Wachstumstypen,* das sind Untergruppen U von $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$, die folgende beiden Bedingungen erfüllen:

(1) Die konstante Funktion $f = 1$ (d. h. $f(i) = 1$ für alle $i \in \aleph_0$) gehört zu U.

(2) Mit einer Funktion f gehören alle Funktionen kleineren Wachstums zu U, d. h. sind $f \in U$, $g \in \mathbf{Z}^{\aleph_0}$ und gibt es ein $k \in \mathbf{Z}$ so, daß

$$|g(n)| \leqslant k \max_{i=0}^{n} |f(i)| \text{ für alle } n \in \aleph_0, \text{ so ist } g \in U.$$

Spezielle Wachstumstypen sind $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$, linearer oder quadratischer Wachstumstyp und das „Nullwachstum“, d. h. die Nöbelingsche Gruppe $B = B_\kappa$.

Ausgangspunkt der Nöbelingschen Arbeit war der folgende

**Satz von Specker** [168].

(1) *Ist* U *ein von* B *verschiedener Wachstumstyp, so folgt* $U^* \cong \mathbf{Z}^{(\aleph_0)}$. *Also haben alle Wachstumstypen* $\neq$ B *das gleiche freie Dual* $\mathbf{Z}^{(\aleph_0)}$.

(2) *Es gibt genau* $2^{2^{\aleph_0}}$ *nicht isomorphe Wachstumstypen.*

(3) *Unter* (ZFC + CH) *ist* $B = B_{\aleph_0}$ *frei; folglich* $B^* \cong \mathbf{Z}^{\aleph_0}$.

Insbesondere ist $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$ *reflexiv,* d. h. $G^{**}$ ist unter der Auswertungsabbildung zu G isomorph. Der „Schönheitsfehler CH“ wurde von G. Nöbeling [134] beseitigt und $\kappa = \aleph_0$ wurde durch eine beliebige Kardinalzahl $\kappa$ ersetzt. Die Freiheit von $B_\kappa$ ist also ein Satz in ZFC. Es sei dazu angemerkt, daß $B_{\aleph_0}$ nicht mehr frei ist, wenn das Auswahlaxiom durch das Axiom der Determiniertheit ersetzt wird; siehe U. Felgner und K. Schulz [64].

Obiger Satz von Specker gab Anlaß zu umfangreichen Untersuchungen über „schlanke Gruppen“. Motiviert durch die Beweisidee in [168], definierte

J. Łoś (1958): Eine Gruppe G ist *schlank,* wenn jeder Homomorphismus $\sigma\colon \mathbf{Z}^{\aleph_0} \to G$ fast alle $e_i$ ($i \in \aleph_0$) auf 0 abbildet. Aus dem Beweis von Specker folgt die Schlankheit von $\mathbf{Z}$. Vorausgegangen waren zwei parallele Arbeiten von E. C. Zeeman [178] und A. Ehrenfeucht und J. Łoś [49] mit Beweisen für den

**Satz von Ehrenfeucht, Łoś und Zeeman** (1954). *Sei* $\sigma\colon \mathbf{Z}^{\kappa} \to G$ *ein Homomorphismus in eine schlanke Gruppe* G *und* $\kappa$ *eine nicht meßbare Kardinalzahl, dann gilt*

(1) $e_i\sigma = 0$ *für fast alle* $i \in \kappa$.

(2) $\sigma$ *ist genau dann* 0, *wenn* $\mathbf{Z}^{(\kappa)}\sigma = 0$ (*d. h. wenn* $e_i\sigma = 0$ *für alle* $i \in \kappa$) *ist.*

**Anmerkung.** Die Existenz der sehr großen meßbaren Kardinalzahlen ist zweifelhaft; zumindest in ZFC + V = L treten keine meßbaren Kardinalzahlen nach einem bekannten Satz von D. Scott auf; siehe [26, S. 184, Theorem]. Ist $\kappa$ nicht meßbar, so folgt unmittelbar aus obigem Satz $(\mathbf{Z}^{\kappa})^* \cong \mathbf{Z}^{(\kappa)}$ und $\mathbf{Z}^{\kappa}$ ist reflexiv; in [178, 49] wurde diese Reflexivität bewiesen – obige Verallgemeinerung ist dann jedoch trivial. In neueren Arbeiten [45, 46] hat K. Eda mit verbesserten Beweismethoden die Meßbarkeitsvoraussetzung durch eine geschickte Änderung der Folgerung in $(\mathbf{Z}^{\kappa})^* \cong \mathbf{Z}^{(\kappa^*)}$ ersetzt: Dabei sei $\kappa^*$ die Mächtigkeit der Menge aller $\omega$-vollständigen Ultrafilter auf $\kappa$. Falls $\kappa$ nicht meßbar ist, folgt $\kappa = \kappa^*$ und sonst ist $\kappa^* \geqslant \kappa$, siehe [110], Kap. 5. Wir möchten noch anmerken, daß der Satz von Ehrenfeucht, Łoś und Zeeman eigentlich ein Lemma über Filter ist, das noch mehr leistet und die Meßbarkeit klärt:

**Lemma** (siehe [73]). *Sei* $\mathfrak{E}$ *eine nichtleere Teilmenge des Potenzmengenverbandes* $P(\kappa)$ *einer Kardinalzahl* $\kappa$ *mit den Eigenschaften*

(1) *Aus* $Y \subseteq X \in \mathfrak{E}$ *und* $Y \notin \mathfrak{E}$ *folgt* $X \setminus Y \in \mathfrak{E}$.

(2) $\mathfrak{E}$ *ist* $\omega$-*vollständig, d. h. abzählbare Durchschnitte aus* $\mathfrak{E}$ *sind in* $\mathfrak{E}$.

(3) $\{i\} \notin \mathfrak{E}$ für alle $i \in \kappa$.

Dann ist $\kappa$ eine meßbare Kardinalzahl.

Ist $f \in \mathbf{Z}^{\kappa}$ und $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^{\kappa}, G)$, so betrachte man $\mathfrak{E} = \{X \subseteq \kappa\colon \sigma(f \restriction X) \neq 0\}$. Mit dem Lemma folgt (2) des letzten Satzes, und (1) ist ohnehin einfach. Das gleiche Lemma kann man benutzen, um das von M. Dugas und B. Zimmermann-Huisgen [44] auf überabzählbares $\kappa$ verallgemeinerte „Chase-Lemma" neu herzuleiten; vgl. [73]: Grob gesprochen besagt das verallgemeinerte Chase-Lemma, daß Homomorphismen $\sigma\colon \prod_{i \in \kappa} G_i \to \bigoplus_{i \in \lambda} U_i = U$ bis auf injektive Anteile nur in ein endliches Stück $\bigoplus_{i \in E} U_i$ ($E \subset \lambda$, E endlich) von U abbilden. Damit erhält man weitere nicht isomorphe, reflexive Gruppen durch transfinite Iteration von $\oplus$ und $\Pi$ ausgehend von $\mathbf{Z}$. Dies beantwortet eine Frage von G. A. Reid [144]. Offen ist allerdings noch das

**Problem 3** (G. A. Reid). Ist die so entstehende maximale Reid-Klasse $\{\oplus, \Pi\}\mathbf{Z}$ unter direkten Summanden abgeschlossen?

Ein Beispiel für eine Gruppe A mit $A^* \notin \{\Pi, \oplus\}\mathbf{Z}$ wurde erst kürzlich von K. Eda [46] gegeben. Die weitaus schwierigere Frage nach der Existenz von Gruppen A mit nicht reflexivem Dual, d. h. $A^* \not\cong A^{***}$ unter der Auswertungsabbildung geht auf J. S. Haines zurück. Die Existenz konnte in ZFC + V = L von G. Sageev und S. Shelah [150] gezeigt werden. Es bleibt aber immer noch das

**Problem 4.** Gibt es in ZFC Gruppen A mit $|A| < \aleph_m$ so, daß die Auswertungsabbildung $A^* \to A^{***}$ nicht surjektiv ist? ($\aleph_m$ = erste meßbare Kardinalzahl)

Aufgrund des eingangs genannten Satzes von Ehrenfeucht, Łoś und Zeeman liegt es nahe, die schlanken Gruppen algebraisch zu charakterisieren. Nach Teilresultaten von S. Sasiada, L. Fuchs und anderen (siehe [66, Band 2, §§ 94, 95]) ist die endgültige Charakterisierung eine schöne Anwendung des schon in § 2 zitierten Satzes von R. J. Nunke.

**Folgerung** (Nunke [136]). Eine Gruppe G ist genau dann schlank, wenn folgende Gruppen nicht als Untergruppen von G vorkommen: $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $J_p^+$ (= additive Gruppe des Ringes $J_p$ aller ganzen p-adischen Zahlen) für alle Primzahlen $p \neq 1$ sowie $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$.

Es liegt nun ferner nahe, in der Schlankheitsdefinition $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$ durch einen beliebigen Speckerschen Wachstumstyp U zu ersetzen. Die daraus resultierende Klasse der U-schlanken Gruppen bezeichnen wir mit einem deutschen $\mathfrak{U}$. Aufgrund des Nöbelingschen Satzes (in seiner vollen Schärfe) folgern wir zunächst einmal, daß die Klasse $\mathfrak{B}$ der B-schlanken Gruppen nur aus 0 besteht. Dies ist aber eine Ausnahme! Falls $U \neq B$ ist, ist $\mathfrak{U}$ eine reichhaltige (echte) Klasse und man kann weitreichende Strukturuntersuchungen durchführen; siehe [79]. Aufgrund dieser Methoden erhält man auch eine Lösung eines aus der Torsionstheorie kommenden Problems von L. Fuchs [66, Band II, S. 184]: Die Klasse der schlanken Gruppen ist nicht einfach erzeugt; siehe [81] und eine bessere Konstruktion in [82]: Zu jeder Gruppe G gibt es eine Gruppe G′, die nicht im Abschluß $\{\oplus, S, E\}$ G von G unter direkten Summen, Untergruppen und Erweiterungen liegt. Ich finde es hier bemerkenswert, daß man G′ als Untergruppe einer Baer-Specker-Gruppe $\mathbf{Z}^\kappa$ wählen kann. Genauer gesagt ist G′ sogar ein $B_\kappa$-Modul mit dem Nöbelingschen Ring $B_\kappa$. Dieses und andere Resultate (vgl. Ende von § 8) implizieren die folgende

**Arbeitshypothese.** Pathologisches Verhalten torsionsfreier abelscher Gruppen läßt sich (wenn es nicht *offensichtlich* unsinnig ist) stets schon an Untergruppen (oder kanonischen epimorphen Bildern) von $\mathbf{Z}^\kappa$ verifizieren.

Ein weiteres Beispiel hierfür wird in § 5 das Whitehead-Problem sein. Die Arbeitshypothese legt die folgende Aufgabe nahe:

**Problem 5.** Man bestimme die Struktur möglichst vieler epimorpher Bilder und Untergruppen von $\mathbf{Z}^\kappa$; vgl. [69].

Falls $\kappa = \aleph_0$, ist der erste Teil dieses Problems durch den Nunkeschen Satz (§ 2) befriedigend gelöst und der Satz von Specker ist ein guter Start für den zweiten Teil. Mit dem Fall $\kappa > \aleph_0$ beschäftigen wir uns in § 5 und aus der Sicht der Endomorphismenringe in § 8. Selbst bei sehr spezieller Wahl der Untergruppen von $\mathbf{Z}^\kappa$ erhält man interessante Resultate und Fragen:

Es sei $\mathbf{Z}^{<\kappa} = \{f \in \mathbf{Z}^\kappa : |\{i \in \kappa, f(i) \neq 0\}| < \kappa\} \subseteq \mathbf{Z}^\kappa$ und $\mathbf{Z}_\kappa = \mathbf{Z}^\kappa/\mathbf{Z}^{<\kappa}$. Die Gruppe $\mathbf{Z}_{\aleph_0}$ ist nach einem bekannten Satz von S. Balcerzyk algebraisch kompakt und ihre Invarianten sind bestimmt, siehe L. Fuchs [66, S. 177, Exercise 7]. Ist $\mathrm{cf}(\kappa) = \aleph_0$, so wird $\mathbf{Z}_\kappa$ aus dem gleichen Grund stets nicht triviale algebraisch kompakte Untergruppen enthalten. Sei also $\mathrm{cf}(\kappa) > \aleph_0$ und z. B. $\kappa$ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl. Dann weiß man über $\mathbf{Z}_\kappa$ fast nichts – nur, daß $\mathbf{Z}_\kappa$ $\aleph_1$-frei ist. Die bekannten Methoden sind für die weitere Untersuchung von $\mathbf{Z}_\kappa$ unbrauchbar. An diesem Objekt sollte man neue Methoden entwickeln und dabei die folgende provozierend einfache Frage – ein Spezialfall von Problem 5 – lösen:

**Problem 6.** Ist jeder direkte Summand $\neq 0$ von $\mathbf{Z}_\kappa$ zu $\mathbf{Z}_\kappa$ isomorph? Wähle z. B. $\kappa = \aleph_1$!

Aufgrund des „universellen Satzes von I. Kaplansky" vermuten wir, daß die Antwort „nein!" sein wird.

Die *Klasse* $\{\mathbf{Z}_\kappa\colon \kappa$ regulär, $> \aleph_0\}$ hat eine weitere interessante Eigenschaft, die wir noch einmal in § 8 diskutieren wollen: Sei K eine Indexmenge oder eine (echte) Indexklasse und $|K|$ seine Mächtigkeit bzw. $|K| = \infty$, wenn K eine echte Klasse ist. Sei ferner $\mathfrak{K} = \{G_i\colon i \in K\}$ ein System von Gruppen. Dann ist $\mathfrak{K}$ ein *halbstarres System,* falls entweder $\mathrm{Hom}(G_i, G_j) = 0$ oder $\mathrm{Hom}(G_j, G_i) = 0$ für alle $i \neq j \in K$ und $\mathfrak{K}$ ist *starr,* falls $\mathrm{Hom}(G_i; G_j) = \mathrm{Hom}(G_j, G_i) = 0$ für alle $i \neq j \in K$. Also ist $|K|$ ein Maß für die Kompliziertheit der Theorie. Mit Hilfe eines mengentheoretischen Resultates von H. D. Donder konnte B. Wald [173] zeigen, daß es in ZFC + V = L eine echte Klasse K von Kardinalzahlen (also $|K| = \infty$) gibt, so daß $\{\mathbf{Z}_\kappa\colon \kappa \in K\}$ ein starres System ist. Mit Methoden aus [33] konstruierten M. Dugas und G. Herden [42], [43] unabhängig andere starre Klassen mit $|K| = \infty$ in ZFC + V = L. Die Existenz einer starren Klasse in ZFC würde die Konsistenz von ZFC nach sich ziehen (vgl. Vopěnka-Prinzip in [110]), also ist die Annahme V = L oder ein schwächeres Axiom wie $\diamond$ oder $\triangledown$ (siehe [33]) sehr sinnvoll! In ZFC kann man aber zumindest die Existenz von halbstarren echten Klassen $\aleph_1$-freier (schlanker) Gruppen beweisen; siehe R. Göbel, S. Shelah [75]. Diese Resultate können benutzt werden, um Probleme über Torsionstheorien zu lösen; siehe [42], [43], [75] und [38]. Eine Einführung in Torsionstheorien und deren Zusammenhang mit Gabrieltopologien findet man in dem Buch von B. Stenström [170, Kap. 6–8]), in J. Lambek [119] oder in der kürzlich veröffentlichten Monographie [10]. Es ist sicherlich eine neue Erkenntnis, daß diese algebraischen Fragen häufig von der Existenz großer Kardinalzahlen (kompakt, superkompakt, meßbar) abhängen. In M. Dugas, R. Göbel [38] konnten Probleme zu Torsionstheorien durch (konsistente) Forderungen an derartige Kardinalzahlen gelöst werden.

Bei den durch Wachstumstypen U definierten Gruppenklassen $\mathfrak{U}$ der U-schlanken Gruppen haben wir schon im Extremfall (U = 0, U = B) gesehen, daß U-schlanke Gruppenklassen trotz verschiedenem U häufig gleich sind. Es entsteht das folgende

**Problem 7.** Wie viele *verschiedene* Klassen $\mathfrak{U}$ U-schlanker Gruppen gibt es?

Wie wir sehen werden, ist diese Frage zu einem unabhängig entstandenen, bisher ungelösten Problem der Mengenlehre gleichwertig. Ist w die in Problem 7 genannte Kardinalzahl, so ist offensichtlich $w \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$, da U Untergruppe von $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$ ist. Benutzt man die $2^{2^{\aleph_0}}$ verschiedenen Wachstumstypen aus dem Speckerschen Satz, so stellt man fest, daß sie *nur* 3 Klassen schlanker Gruppen definieren. Allgemeiner gilt der folgende Sachverhalt (s. R. Göbel, B. Wald [79]):
Seien U und V Wachstumstypen und $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ die zugehörigen Klassen schlanker Gruppen. Dann sind äquivalent:

(1) $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{V}$.

(2) Es gibt einen Ordnungsmonomorphismus $\sigma\colon \aleph_0 \to \aleph_0$, der eine Einbettung $\sigma^*\colon U \to V$ induziert. Die Abbildung $\sigma^*\colon \mathbf{Z}^{\aleph_0} \to \mathbf{Z}^{\aleph_0}$ kann z. B. durch $\sigma^*(\sum_{n \in \aleph_0} f_n e_n) = \sum_{n \in \aleph_0} f_n e_{\sigma(n)}$ oder auch durch $\sigma^*(\sum_{n \in \aleph_0} f_n e_n) =$
$= \sum_{n \in \aleph_0} f_n (\sum_{i=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} e_i)$ definiert werden.

Damit erhalten wir eine $<$-Relation und eine $\sim$-Äquivalenzrelation ($U \sim V \Leftrightarrow U < V$ und $V < U$) auf allen Wachstumstypen W und offensichtlich ist $w = |W/\sim|$. Mit Hilfe von Martins Axiom MA kann man nun $|W/\sim| = 2^{2^{\aleph_0}}$ beweisen, d. h. es gilt der

**Satz** [80]. *In* ZFC + MA *gibt es die maximale Zahl von* $2^{2^{\aleph_0}}$ *Klassen schlanker Gruppen.*

Die Ordnungsmonomorphismen induzieren ebenfalls eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge $\beta(\aleph_0)$ aller Ultrafilter ohne Hauptfilter auf $\aleph_0$. Jedem Ultrafilter $\phi \in \beta(\aleph_0)$ kann vermöge (*) ein Wachstumstyp $U_\phi$ zugeordnet werden:

(*) Sei $\nu\colon \aleph_0 \to \aleph_0$ ein fester Ordnungsmonomorphismus der natürlichen Zahlen und $\phi$ ein Filter auf den natürlichen Zahlen. Wir setzen

$$U_\phi = \{f \in \mathbf{Z}^{\aleph_0} : \exists\, T \in \phi, \exists\, k \in \mathbf{N}\ \forall\, t \in T, n \in \aleph_0\ (t \geqslant n \Rightarrow |f(n)| \leqslant k\nu(t)\}.$$

Zwei Ultrafilter $\phi$ und $\psi$ sind genau dann äquivalent, wenn $U_\phi \sim U_\psi$. Damit folgt $w = |\beta(\aleph_0)/\sim| + 3$. Aus der Existenz *eines* echten Ultrafilters in ZFC folgern wir $w \geqslant 4$; also ist $4 \leqslant w \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$ und wir vermuten $w = 2^{2^{\aleph_0}}$. Die Frage nach der Kardinalzahl $|\beta(\aleph_0)/\sim|$ ist in der Mengenlehre wohlbekannt, aber in ZFC bisher nicht beantwortet.

Kommen wir zurück zu dem eingangs gestellten Problem 2, so erhalten wir also mit $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ein Beispiel $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$ für $\kappa = \aleph_1$. Allerdings hatte G. Higman [94] schon im Jahre 1951 eine entsprechende nicht-abelsche Gruppe konstruiert. Analog erhält man ohne den Zusatz CH

**G. Higmans Beispiel.** Es gibt eine $\aleph_1$-Gruppe [d. h. G ist nicht frei, $\aleph_1$-frei und $|G| = \aleph_1$].

Die Beweisidee ist sehr einfach und ist die Großmutter *vieler* Konstruktionen (stark $\kappa$-freier Gruppen), die inzwischen auch für größere Mächtigkeiten ($\geqslant \aleph_1$) möglich sind; siehe § 7: Man wähle eine $\kappa$-Filtration einer Menge G der Mächtigkeit $\kappa$, d. h. $G = \bigcup_{i \in \kappa} G_i$ wobei $\{G_i\colon i \in \kappa\}$ eine aufsteigende stetige Kette mit

$|G_i| < \kappa$ ist. Die Schichten $G_i$ machen wir zu freien Gruppen und erreichen durch Teilbarkeiten an Nicht-Limesstellen $G_i \subset G_{i+1}$, daß z. B.

$$G_{i+1}/G_i \cong \mathbf{Z}_{(p)} = \{m/n \in Q : p \nmid n\}.$$

Trivialerweise ist dann G (stark) $\kappa$-frei und zumindest für $\kappa = \aleph_1$ nicht frei.

## § 5 Der Satz von Nöbeling aus klassischer Sicht, ein Zusammenhang mit dem Whitehead-Problem

D. Hilbert formulierte 1900 in seinem Vortrag [95] auf dem Mathematikerkongreß in Paris das 5. Problem, das in moderner Sprache (ohne die Aktion auf der Mannigfaltigkeit) lautet: Ist eine lokal euklidische, topologische Gruppe (bei geeigneten lokalen Koordinaten) eine Lie-Gruppe?

Dieses Problem wurde bekanntlich 1952 durch Arbeiten von A Gleason [68] und D. Montgomery, L. Zippin [129] positiv beantwortet. Ein bedeutender Schritt in dieser Richtung wurde bereits zu Beginn der 30er Jahre durch J. v. Neumann [133], F. Peter, H. Weyl [138] und L. S. Pontrjagin [139, 140, 141] getan. Im Rahmen der Lösung des Hilbertschen Problems für *abelsche* lokalkompakte Gruppen entstand die Pontrjaginsche Dualitätstheorie, die immer noch eine gute Quelle für Untersuchungen über (abelsche) Gruppen ist: Ist G (wieder stets abelsch) lokalkompakt, so sei $\hat{G}$ die Gruppe aller stetigen Homomorphismen von G nach $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ versehen mit der kompakt-offenen Topologie und $\sigma : G \to \hat{\hat{G}}$ die Auswertungsabbildung. Dann besagt der Dualitätssatz, daß $\sigma$ ein topologischer Isomorphismus ist. Daraus folgt einerseits o. g. Teilresultat zum Hilbert-Problem und andererseits eine interessante Korrespondenz zwischen topologischen und algebraischen Eigenschaften abelscher Gruppen, die wir hier schematisch zusammenstellen. Sei G stets lokalkompakt und $\hat{G}$ das Pontrjagin-Dual; vgl. [24] [140] [141] [143, 144] sowie die schöne Monographie von S. A. Morris [130].

Pontrjagin-Dualität

| G | $\hat{G}$ |
|---|---|
| lokalkompakt | lokalkompakt |
| metrisierbar | $\sigma$-kompakt |
| total unzusammenhängend | Jedes Element von $\hat{G}$ ist kompakt, d. h. der Abschluß aller zyklischen Untergruppen ist kompakt |
| zusammenhängend | $\hat{G}$ besitzt keine kompakte Untergruppe $\neq 0$ |
| kompakt | diskret |

Um rein algebraische Eigenschaften zu erhalten, sei jetzt G stets kompakt. Dann folgt aus obiger Dualität weiter:

| G | $\hat{G}$ |
|---|---|
| metrisierbar | abzählbar |
| zusammenhängend | torsionsfrei |

Da wir uns für torsionsfreie Gruppen interessieren, sei jetzt G stets kompakt und zusammenhängend

| G | $\hat{G}$ |
|---|---|
| (lokal) weg-zusammenhängend | Whitehead-Gruppe |
| lokal zusammenhängend | $\aleph_1$-frei |
| $G \cong (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^I$ topologisch mit Produkttopologie | $\hat{G} \cong \mathbf{Z}^{(I)}$ frei |

Dabei ist A eine *Whitehead-Gruppe,* wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

(1) Ext $(A, \mathbf{Z}) = 0$.

(2) Jede Sequenz $0 \to \mathbf{Z} \to X \to A \to 0$ zerfällt

(3) Ehrenfeuchts Form [48]: Ist

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha"'] & F' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"] & A \arrow[r] & 0 \\ & & \mathbf{Z} & & \end{tikzcd}$$

eine freie Auflösung

und $\alpha : F \to \mathbf{Z}$ ein Homomorphismus, so liftet $\alpha$ zu $\beta$.

(4) Steins Form [169]:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathbf{Q} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

Ist $\pi$ die kanonische Projektion, so liftet jeder Homomorphismus $\alpha$ zu $\beta$.

J. H. C. Whitehead fragte 1952 nach der Struktur dieser Gruppen und schickte die Frage auf einer Postkarte an E. C. Zeeman. Zeeman gab dieses Problem einige Jahre später an einen Doktoranden in Cambridge, der stattdessen einen Satz aus § 2 bewies. S. Shelah [153, 155] benutzte für die Lösung des Whitehead-Problems (siehe unten) die Darstellung (2); vgl. auch P. Eklof [53]. Der Vorschlag (U. Felgner, R. Göbel 1977), den Beweis mit den Baerschen Faktorsystemen von Ext, also mit (1) umzuformulieren, wurde unabhängig in einer Arbeit von H. Hiller, M. Huber, S. Shelah [101] ausgeführt. Das dadurch erzielte allgemeinere Resultat werden wir gleich benutzen. Es ist zu vermuten, daß eine parallele Untersuchung in der Steinschen Form (4) ebenfalls interessante Neuerungen bringt!
Schließlich kann man die Lösung des Whitehead-Problems in V = L und den folgenden Satz von Hiller, Huber und Shelah sehr einfach auf dem Niveau der Linearen Algebra herleiten, wenn man Ehrenfeuchts Form (3) benutzt, wie in einer Examensarbeit [0] ausgeführt wurde: Das Kernstück ist folgendes

**Linearformen-Lemma.** (ZFC + V = L). *Sei* A *eine* $\kappa$*-freie Gruppe der Mächtigkeit* $\kappa$*, die keine freien Quotienten* A/U *mit* $|U| < \kappa$ *besitzt. Ist* $0 \to F \to F' \to A \to 0$ *die freie Auflösung in* (3), *dann gibt es Linearformen*

$f_\nu \in F^* = \mathrm{Hom}(F, \mathbf{Z})$ $\nu \in 2^\kappa$ *derart, daß die Linearformen* $n(f_\mu - f_\nu) \in F^*$ *(für* $n \in \aleph_0$, $\mu \neq \nu \in 2^\kappa$*) nicht zu Linearformen aus* $F'^*$ *liften.*

Wir wollen zunächst noch das Whitehead-Problem mit dem Nöbelingschen Satz und unserer Arbeitshypothese aus § 4 in Zusammenhang bringen. Es gelten die folgenden beiden Sätze:

**Satz von K. Stein** [169] (1951). *Whitehead-Gruppen sind* $\aleph_1$*-frei.*

**Satz von J. Rotman** [147] (1961). *Whitehead-Gruppen sind separabel.*

Kombiniert man beide Resultate, so erhält man die

**Folgerung.** *Whitehead-Gruppen sind reine Untergruppen von* $\mathbf{Z}^\kappa$.

Die beste Information über Whitehead-Gruppen *vor* 1974 erhält man aus einem Resultat von S. U. Chase [11]. In ZFC + CH sind Whitehead-Gruppen G sogar stark $\aleph_1$-frei, d. h. G ist $\aleph_1$-frei und jede abzählbare Untergruppe ist in einer abzählbaren Untergruppe U mit $G/U$ $\aleph_1$-frei enthalten. Einen neuen kürzeren Beweis findet man in [104].
Unsere Arbeitshypothese wird noch von anderer Seite motiviert:
Ist A eine beliebige Gruppe, so ist $A^*$ offensichtlich eine reine Untergruppe von $\mathbf{Z}^{|A|}$. Durch Anwendung der Cartan-Eilenberg-Sequenz auf eine freie Auflösung

$$0 \to \mathbf{Z}^{(\kappa)} \to \mathbf{Z}^{(\rho)} \to A \to 0$$

von A folgt

$$0 \to A^* \to \mathbf{Z}^\rho \to \mathbf{Z}^\kappa \to \mathrm{Ext}(A, \mathbf{Z}) \to 0.$$

Ist nun A eine Whitehead-Gruppe, so ist $\mathrm{Ext}(A, \mathbf{Z}) = 0$ und nicht nur $A^* \subseteq \mathbf{Z}^\rho$, sondern auch $\mathbf{Z}^\rho/A^* \cong \mathbf{Z}^\kappa$. Dualgruppen von Whitehead-Gruppen sind also sehr „kanonisch" in die Baer-Specker-Gruppe eingebettet. Wie sehen alle so eingebetteten Gruppen aus? Das ist ein Spezialfall von Problem 5. Zur Beantwortung benötigen wir Shelahs Lösung des Whitehead-Problems, die zu diesem Zeitpunkt (1974) erste (ernsthafte) Unentscheidbarkeitsaussage auf diesem Gebiet:

**Satz von Shelah** [153, 155]. (a) (ZFC + V = L). *Whitehead-Gruppen sind frei.*
(b) (ZFC + MA + $\neg$ CH). *Es gibt nicht-freie Whitehead-Gruppen.*

Da $\mathrm{Ext}(A, \mathbf{Z})$ stets eine teilbare Gruppe ist, reduzieren sich Strukturuntersuchungen von $\mathrm{Ext}(A, \mathbf{Z})$ auf Bestimmung der entsprechenden Kardinalzahlinvarianten. In diesem Sinne kann der erste Teil des Satzes von Shelah – wie angekündigt mit Hilfe der Baerschen Faktorsysteme – verallgemeinert und verschärft werden.

**Satz von Hiller, Huber, Shelah** [101]. (ZFC + V = L). *Falls* $A^* = 0$, *dann ist* $\mathrm{Ext}(A, \mathbf{Z})$ *kompakt.*
(D. h. „$\mathrm{Ext}(A, \mathbf{Z})$ erlaubt eine kompakte Hausdorfftopologie".)

Kompakte abelsche Gruppen sind durch Kardinalzahlinvarianten von A. Hulanicki [107] charakterisiert worden; man rechnet also die möglichen Kardinalzahlinvarianten von $\mathrm{Ext}(A, \mathbf{Z})$ aus! Ohne die Voraussetzung V = L hat S. Shelah [161]

gezeigt, daß man mit „proper forcing“ [163] Modelle der Mengenlehre konstruieren kann, in denen Ext (A, $\mathbf{Z}$) (mit A torsionsfrei und $A^* = 0$) jede abzählbare (notwendig teilbare) und torsionsfreie Gruppe sein kann.
Da abzählbare Gruppen $\neq 0$ nach Hulanicki [107] nicht kompakt sind, ist der Satz von Hiller, Huber und Shelah nicht in ZFC beweisbar. Verzichtet man auf die Voraussetzung $A^* = 0$, so gibt es schon in ZFC + V = L Gruppen Ext (A, $\mathbf{Z}$) (mit $A^* \neq 0$), die nicht kompakt sind, da der *Torsionsanteil* nicht die Hulanickischen Kardinalzahlbedingungen erfüllt; Beispiele A mit $|A| = \aleph_1$ für beliebige p-Ränge in Ext findet man bei G. Sageev und S. Shelah [148, 149]. Weitergehende Strukturaussagen für Ext (A, G) (in Form von Rangaussagen) kann man bei P. Eklof, C. Jensen, M. Huber und R. Warfield nachlesen; siehe [50], [57, 58, 59], [111, 112], [106].

Wir wenden nun obigen Satz an und erhalten als weitere Verallgemeinerung aus dem Satz von Hiller, Huber und Shelah mit homologischen Methoden eine Antwort auf unsere obige Frage.

**Satz** (M. Dugas, R. Göbel [31]). (ZFC + V = L). *Es ist* $0 \to \mathbf{Z}^\rho \to \mathbf{Z}^\kappa \to A \to 0$ *genau dann, wenn* $A \cong \mathbf{Z}^\tau \oplus C$ *mit* $\tau \leqslant \kappa$ *und* C *kompakt.*

Daraus folgt die Antwort auf eine Frage von R. J. Nunke [135]:

**Korollar.** (ZFC + V = L). *Für eine Gruppe* $A \subseteq \mathbf{Z}^\kappa$ *sind äquivalent:*
(1) A *ist ein direkter Summand von* $\mathbf{Z}^\kappa$
(2) $\mathbf{Z}^\kappa/A \cong \mathbf{Z}^\rho$ *für eine Kardinalzahl* $\rho$.

Der Satz und das Korollar sind nicht in ZFC beweisbar, wie man aus der Existenz nicht-freier Whitehead-Gruppen schließt. Man beachte die Analogie des letzten Satzes zum Satz von Nunke aus § 2. Die Frage, ob allgemeine epimorphe Bilder von $\mathbf{Z}^\kappa$ nur irgendeine „vernünftige“ Zerlegung in eine direkte Summe (ähnlich zum letzten Satz oder dem Nunkeschen Satz) in separablen Anteil und einen Dual-0-Anteil zulassen, muß leider durch ein Gegenbeispiel verworfen werden; siehe [32]. Eine Analyse des Satzes und weitergehende Resultate findet man in [105].

Auf die Frage nach der Struktur von Whitehead-Gruppen in ZFC und insbesondere auf Shelah-Gruppen G, die durch Ext (G, $\mathbf{Z}^{(\aleph_0)}$) = 0 definiert werden können, sei nur auf P. Eklof [50] und [157, 158] verwiesen. Es ist jedoch bemerkenswert, daß Teil (b) des Satzes von Shelah dahingehend abgeändert werden kann, daß es Modelle der Mengenlehre gibt, in denen sogar (ZFC + GCH + $\exists$ nicht-freie Whitehead-Gruppen) gilt; also reicht GCH nicht, um Teil (a) zu beweisen; siehe [157, 160] und für einen gut lesbaren Beweis auch [128].

Durch die Pontrjagin-Dualität wird man auf folgende Fragen gelenkt.

**Aufgabe 8.** (a) Man führe einmal den Beweis der Unentscheidbarkeit des Whitehead-Problems auf der topologischen Seite! Ähnlich zum algebraischen Beweis mit den Baerschen Faktorsystemen sind Aussagen über allgemeinere topologische Räume zu erwarten.
(b) Im engen Zusammenhang mit dem Whitehead-Problem sind in den letzten Jahren zahlreiche neue Klassen „fast-freier“ Gruppen untersucht worden; siehe z. B. § 7. Was kann man über ihre topologischen Partner sagen?

## § 6 Verallgemeinerungen und Ergänzungen zum Satz von Nöbeling

Die Verallgemeinerungen des Nöbelingschen Satzes basieren auf zwei trivialen Beobachtungen:

(1) Die Nöbelingsche Gruppe $B_\kappa$ ist auch ein Ring, der von seinen Idempotenten (den Indikatorfunktionen) erzeugt wird.

(2) Beschränkte Teilmengen von $\mathbf{Z}$ sind endlich.

Die 2. Beobachtung wurde von L. Kaup und M. S. Keane [115] 1969 ausgenutzt:

**Satz von Kaup und Keane.** *Ist* A *eine abelsche Gruppe und* $\kappa$ *eine Kardinalzahl, dann sei* $\bar{A} = \{f \in A^\kappa, \mathrm{Im}(f)$ *endlich*$\}$. *Dann ist* $\bar{A}$ *eine Untergruppe von* $A^\kappa$ *und es gibt Indikatorfunktionen* $\chi_i : \kappa \to \{0, 1\}$, $(i \in \rho)$ *mit* $A = \bigoplus_{i \in \rho} \chi_i A$.

Diese Verallgemeinerung des Nöbelingschen Satzes konnte zur Berechnung der 1. Borel-Homologie-Gruppe für lokalkompakte Räume herangezogen werden; siehe [115]. Unabhängig hatte (1961) D. Dubois [27] den Spezialfall des Satzes von Kaup und Keane für $\kappa = \aleph_0$ bewiesen.

Die 1. Beobachtung ergab eine ringtheoretische Verallgemeinerung des Nöbelingschen Satzes und einen neuen, schönen, aber auch nicht kurzen Beweis von G. M. Bergman [9]; siehe L. Fuchs [66, Band II, S. 173, 174].

**Satz von Bergman** (1973). *Sei* R *ein kommutativer Ring mit* 1, *der (als Ring) von einer Menge* E *von Idempotenten erzeugt wird. Ist* $R^+$ *torsionsfrei, so gibt es eine Menge* $T \subseteq E$ *so, daß* $R^+ = \bigoplus_{t \in T} t\mathbf{Z}$ *frei ist.*

Eine andere Verallgemeinerung von P. Hill [97] benutzt die Reinheit im Sinne von Prüfer (der alte Name war Servanzuntergruppe): Eine Untergruppe U ist *rein* in G, falls jede Gleichung $nx = u \in U$ $(n \in \mathbf{Z})$, die eine Lösung $x \in G$ besitzt, auch eine Lösung $x \in U$ hat.

**Satz von Hill** (1973). *Sei* R *ein kommutativer Ring mit* 1, *der von Idempotenten erzeugt wird. Ist* T *ein von Idempotenten erzeugter Teilring von* R, *dann ist* T *rein in* R.

## § 7 Fast-freie abelsche Gruppen

Zu diesem Thema gehört unser Problem 2, dem sich auch das Whitehead-Problem natürlich unterordnet. Das Problem 2 wurde in (ZFC + V = L) schon 1973 vollständig beantwortet. Hier wurden das erste Mal für abelsche Gruppen R. Jensens [113] „statistische Aussagen" über stationäre Teilmengen regulärer Kardinalzahlen in L benutzt, also die sogenannten Jensenfunktionen und Jensenmengen.

**Satz von Gregory** [86]. (ZFC + V = L) *Ist* $\kappa$ *regulär, nicht schwach kompakt, dann gibt es* $\kappa$*-freie, nicht freie Gruppen der Mächtigkeit* $\kappa$.

Ist $\kappa$ schwach kompakt, dann ist leicht zu sehen, daß $\kappa$-freie Gruppen auch $\kappa^+$-frei sind; ($\kappa^+$ = Nachfolgerkardinalzahl zu $\kappa$): Dazu benötigt man nur die *passende* Definition von schwach kompakt; s. z. B. [110]. Man zeigt damit, daß die gleich

definierte Γ-Invariante 0 ist und wendet das ebenfalls einfache weiter unten zitierte Kriterium (II) an.
Diese Beobachtung der Nichtexistenz von $\kappa$-Gruppen für schwach kompaktes $\kappa$ wurde unabhängig von J. Gregory [86], D. Kueker [117], A. Mekler [125] und S. Shelah [155] gemacht; siehe auch P. Eklof [51, S. 313]. Wir erinnern dazu an unsere Abkürzung $\kappa$-Gruppe (= nicht-freie, $\kappa$-freie Gruppe der Mächtigkeit $\kappa$).
Der Satz von Gregory wurde vielseitig verbessert und verallgemeinert, vgl. § 8. Man erhält parallele Resultate für nicht-kommutative Gruppen [124, 125] und kann Zusatzforderungen an die (abelschen) Gruppen stellen [60], [33].
Also ist das Problem 2 ohne algebraische Zusatzforderungen nur noch in (ZFC + wesentlich schwächere Axiome als V = L) interessant. Das älteste Beispiel in ZFC ist die schon in § 4 genannte $\aleph_1$-Gruppe von G. Higman [94]. Es folgten von P. Griffith [90] und P. Hill [98] $\aleph_n$-Gruppen für alle natürlichen Zahlen n und allgemeiner haben J. Gregory bzw. P. Eklof [52] gezeigt, daß man mit Hilfe einer $\kappa$-Gruppe auch $\kappa^+$-Gruppen konstruieren kann. Es ergibt sich also die Frage nach $\kappa$-Gruppen für singuläre Kardinalzahlen $\kappa$ (mit cf $\kappa < \kappa$). Hier gilt jedoch der

**Singuläre Kompaktheits-Satz** (S. Shelah [155, 157]). *Ist $\kappa$ eine singuläre Kardinalzahl und ist* G *eine $\kappa$-freie Gruppe, dann ist* G *auch $\kappa^+$-frei.*

Bessere Beweise und ein allgemeineres Resultat findet man bei S. Ben David [8], P. Eklof [50] und W. Hodges [102]. Klassische „Freiheitskriterien" dieser Art wurden zuerst von S. Pontrjagin [141], S. U. Chase [11, 12] und P. Hill [96, 98, 99] bewiesen. In der Tat ist der Spezialfall cf $\kappa = \aleph_1$ und cf $\kappa = \aleph_0$ des Singulären Kompaktheitssatzes ein Resultat von P. Hill. Parallele Ergebnisse wurden wiederum für nicht-kommutative Gruppen bewiesen; [125].
Passiert man also singuläre Kardinalzahlen (cf $(\kappa) < \kappa$), so wird der Nachweis von $\kappa$-Gruppen schwierig. Hier gelten zumindest noch die folgenden Sätze

(a) S. Shelah [159] (ZFC + GCH). *Ist $\kappa$ regulär $< \aleph_{\omega^2}$, so gibt es $\kappa$-Gruppen. Es gibt $\aleph_{\omega_1+1}$-Gruppen.*
(b) S. Shelah (1985) (ZFC). *Es gibt $\aleph_{\omega_1+1}$-Gruppen.*
(c) T. Dodd, R. Jensen [25]. *Die Nichtexistenz von $\kappa$-Gruppen ($\kappa$ regulär) impliziert* Con (ZFC + $\exists$ (*viele*) *meßbare Kardinalzahlen*).
(d) S. Shelah (siehe S. Ben-David [8]). Con (ZFC + $\exists$ *superkompakte Kardinalzahl*) $\Rightarrow$ (Con (ZFC + $\nexists$ $2^{\aleph_0}$-*Gruppen*).
(e) S. Shelah, M. Magidor (1985) (siehe auch [E18]). Con (ZFC + $\exists$ $\omega$ *superkompakte Kardinalzahlen*) $\Rightarrow$ Con (ZFC + GCH + $\nexists$ $\aleph_{\omega^2+1}$-*Gruppe*).

Die Aussage (e) ist ohne Bedingungen an große Kardinalzahlen nicht beweisbar, wie aus Arbeiten von T. Dodd und R. Jensen [25] über das „core model" folgt. Eine Kennzeichnung der Kardinalzahlen $\kappa$ (durch Transversale) für die es $\kappa$-Gruppen gibt, findet man in [E21].

Die in V = L von J. Gregory [86] konstruierten $\kappa$-Gruppen sind nicht nur $\kappa$-frei, sondern gehören zu der wesentlich kleineren Klasse der stark $\kappa$-freien Gruppen, die evt. die Hoffnung entstehen läßt, daß man sie durch Invarianten charakterisieren kann. Wir geben hier zwei äquivalente Definitionen stark $\kappa$-freier Gruppen ($\kappa$ regulär); siehe P. Eklof [52].

(1) Eine Gruppe G ist stark $\kappa$-frei, wenn jede Teilmenge T von G mit $|T| < \kappa$ in einer Untergruppe $U \subseteq G$ mit $|U| < \kappa$ und G/U $\kappa$-frei enthalten ist.

(2) G besitzt eine $\kappa$-Filtration $G = \bigcup_{i \in \kappa} G_i$ wobei $\{G_i : i \in \kappa\}$ eine aufsteigende, stetige Kette mit $|G_i| < \kappa$ ist, die zusätzlich folgende algebraische Eigenschaften hat:
(i) $G_i$ ist frei für alle $i \in \kappa$, $G_0 = 0$.
(ii) $G_i$ ist $\kappa$-rein in G, d. h. $G/G_i$ ist $\kappa$-frei für alle Nicht-Limeszahlen $i \in \kappa$.

Diese Gruppen tauchen natürlich beim Whitehead-Problem auf (vgl. § 5, Satz von Chase) und ebenso bei Äquivalenzen von Gruppen in unendlichen Sprachen $L_{\infty\kappa}$. Es gilt der folgende interessante

**Satz von Eklof** [51]. *Eine Gruppe* G *ist genau dann stark* $\kappa$*-frei, wenn sie* $L_{\infty\kappa}$*-äquivalent zu einer freien Gruppe* F *ist; d. h. alle Sätze aus* $L_{\infty\kappa}$ *gelten in* G *genau dann, wenn sie in* F *gelten.*

Die Formulierung mit „$L_{\infty\kappa}$-äquivalent" kann man aufgrund eines modelltheoretischen Satzes (von Ehrenfeucht, Fraissé, Benda, Karp, Calais) durch die algebraische Definition „es gibt ein System von $\kappa$-erweiterbaren partiellen Isomorphismen von G nach F" ersetzen; d. h. es gibt ein System $\Sigma = \{\varphi_i : i \in I\}$ von Isomorphismen $\varphi_i$ : Dom $(\varphi_i) \to$ Im $(\varphi_i)$ mit Dom $(\varphi_i) \subseteq G$, Im $(\varphi_i) \subseteq F$: Wenn $f \in \Sigma$ und $F' \subseteq F$, $G' \subseteq G$ mit $|F'|, |G'| < \kappa$, dann gibt es Fortsetzungen $f_F \supseteq f$, $f_G \supseteq f$ von f so, daß $F' \subseteq$ dom $(f_F)$ und $G' \subseteq$ Im $(f_G)$.
Anmerkung: Durch diese Definition kann man mit back-and forth-Argumenten rechnen und es ist somit nur natürlich, daß der Ulmsche Satz, dessen Beweis ein „Musterbeispiel" für dieses Argument ist (siehe [66, Band II, S. 63]), in $L_{\infty\kappa}$ eine sehr schöne Form hat:
Zwei p-Gruppen haben genau dann die gleichen Ulm-Kaplansky-Invarianten, wenn sie $L_{\infty\aleph_0}$-äquivalent sind. Für *abzählbare* Gruppen folgt daraus die Isomorphie, d. h. der Ulmsche Satz, siehe J. Barwise und P. Eklof [7]. Um einer erhofften Klassifikation stark $\kappa$-freier Gruppen ($\kappa$ regulär) näher zu kommen, führte P. Eklof [50] seine sog. $\Gamma$-Invarianten ein, die sich auch bei der Untersuchung von p-Gruppen oder bei der Substitution von „frei" durch „Whitehead-Gruppe" oder andere Eigenschaften als praktisch erweisen; [58], [103], [73].
Wir definieren die $\Gamma$-Invarianten für $\kappa$-freie Gruppen G: Eine $\kappa$-Filtration $G = \bigcup_{i \in \kappa} G_i$ heißt *kanonisch,* wenn (zusätzlich) aus $G/G_i$ nicht $\kappa$-frei folgt, daß $G_{i+1}/G_i$ nicht frei ist für alle $i \in \kappa$. Wir können stets eine kanonische $\kappa$-Filtration von G wählen und betrachten die Menge $X = \{i \in \kappa : G_i$ ist nicht $\kappa$-rein in $G\}$, d. h. $i \in X \Leftrightarrow G_{i+1}/G_i$ ist nicht frei.
Die Menge X ist natürlich keine Invariante von G. Betrachtet man allerdings $\tilde{X} = X$ modulo dem Ideal $I = \{D \subseteq \kappa : \exists$ cub $C \subseteq \kappa$ mit $D \cap C = \emptyset\}$ der „dünnen" Mengen in $\kappa$, dann ist $\tilde{X}$ unabhängig von der Wahl der Filtration und $\Gamma(G) = \tilde{X}$ ist Eklofs $\Gamma$-Invariante; [50].
Anmerkung: Modulo I werden zwei Teilmengen von $\kappa$ äquivalent, wenn sie auf einer abgeschlossenen unbeschränkten Teilmenge (cub) von $\kappa$ übereinstimmen. Die *stationären* Teilmengen $X \subseteq \kappa$ sind gerade $\tilde{X} \neq 0$ $(= \tilde{\emptyset})$. Die $\Gamma$-Invariante mißt die Abweichung von „frei", denn analog zum Satz von Pontrjagin gelten für $\kappa$-

freie Gruppen der Mächtigkeit $\kappa$ die beiden einfachen Kriterien:

(I) Wenn $\Gamma(G) \neq 1$ $(= \tilde{\kappa})$, dann ist G stark $\kappa$-frei.

[Die Umkehrung ist i. allg. falsch.]

(II) G ist genau dann frei, wenn $\Gamma(G) = 0$.

Mit mengentheoretischem Zusatz gilt der schärfere

**Satz von Mekler** [124]. (ZFC + V = L). *Ist* G *$\kappa$-frei,* $|G| = \kappa$ *und* $\Gamma(G) \neq 0$, *so hat* Ext (G, **Z**) *maximale Mächtigkeit* $2^\kappa$.

Durch transfinite Induktion über die Kardinalzahlen und Verankerung am Satz von Stein folgt daraus wieder der Satz von Shelah (§ 5, Teil (a)), daß Whitehead-Gruppen in L die $\Gamma$-Invariante 0 haben, also nach (II) frei sind. Falls $\Gamma \neq 0$, so reicht – wie zu erwarten war – diese Invariante nicht zur Klassifikation aus. Als ersten Schritt wollen wir diskutieren, welche Werte die Funktion $\Gamma$ annehmen kann und anschließend (§ 8) werden wir unseren „universellen Satz von I. Kaplansky" für die Klasse der stark $\kappa$-freien Gruppen beweisen. Die vielen bekannten Konstruktionsverfahren für stark $\kappa$-freie Gruppen lassen sich m. E. am besten in dem folgenden Lemma [125] vereinheitlichen. Dazu betrachten wir die folgende Bedingung an eine Kardinalzahl $\kappa$:

F($\kappa$) Es gibt eine freie Gruppe F der Mächtigkeit $\kappa$, die eine (freie) Untergruppe $K = \bigcup_{\nu \in \kappa} K_\nu$ mit $\kappa$-Filtration $\{K_\nu : \nu \in \kappa\}$ enthält, so daß $F/K_\nu$ frei für alle $\nu \in \kappa$ und F/K nicht frei ist.

Aus der Existenz von $\kappa$-Gruppen folgt F($\kappa$). Eine Teilmenge E einer regulären Kardinalzahl heißt spärlich, wenn $E \cap \nu$ nicht stationär in $\nu$ ist für alle $\nu < \kappa$; z. B. ist $\{\nu \in \aleph_1, \text{cf}(\kappa) = \aleph_0\}$ spärlich. Damit hat man alle Hilfsmittel zur Konstruktion.

**Lemma von Mekler** (siehe [166]). (ZFC). *Sei* $E \subseteq \kappa$ *spärlich so, daß* F(cf ($\kappa$)) *für alle* $\nu \in E$ *gilt. Dann existiert eine stark $\kappa$-freie Gruppe* G *der Mächtigkeit $\kappa$ mit* $\Gamma(G) = \tilde{E}$.

Aus dem Lemma folgen der eingangs genannte Satz, daß man aus $\kappa$-Gruppen $\kappa^+$-Gruppen konstruieren kann sowie die Existenz von $2^{\aleph_n}$ nicht isomorphen $\aleph_n$-Gruppen $G_n (n \in \aleph_0)$ von Hill und Griffith. *Zusätzlich* kann man $\Gamma(G_n)$ beliebig $\neq 0$ vorschreiben; siehe [63, Theorem 1.1]. Mit Hilfe *einer* stark $\kappa$-freien Gruppe kann man somit $2^\kappa$ nicht isomorphe konstruieren. Aus der Beobachtung von Gregory, Kueker, Mekler, Shelah, daß es bei schwach kompaktem $\kappa$ keine $\kappa$-Gruppen gibt, zusammen mit obigem Lemma folgt ein Korollar, das den Bildbereich von $\Gamma$ gut beschreibt.

**Korollar.** (ZFC + V = L). *Sei* $E \subseteq \kappa$ *stationär und* $\kappa = \lambda^+$ *eine Nachfolgerkardinalzahl. Dann existiert eine (oder auch* $2^\kappa$ *nicht isomorphe) stark freie Gruppe* G *mit* $|G| = \kappa$ *und* $\Gamma(G) = \tilde{E}$ *genau dann, wenn* $\tilde{E} \cap \tilde{W} = 0$, *wobei* $W = \{\nu \in \kappa\colon \text{cf}(\nu)$ *ist schwach kompakt*$\}$.

Ferner wird durch das Lemma der Satz (a) von Shelah aus diesem Paragraphen auf eine Eigenschaft von singulären Kardinalzahlen in ZFC + GCH reduziert, die in [159] bewiesen wurde; es folgt sogar die Existenz von $2^\kappa$ Gruppen mit (a). Also

haben wir, analog zum Satz von L. Zippin über p-Gruppen, gute Informationen darüber, welche Werte $\Gamma$ annehmen kann und wissen, daß $\Gamma$ keineswegs injektiv ist. Selbst naheliegende Verschärfungen von $\Gamma$ durch „Quotientenäquivalenz und Abschwächung der Isomorphie-Klassifikation" durch „fast-disjunkte Klassen" ($A \sim A' \Leftrightarrow \exists$ nicht-freie Gruppe H mit $H \subsetneq A$, $H \subsetneq A'$) führen zu entsprechenden Resultaten; siehe [63]. Es ist daher um so erstaunlicher, daß man in einem Spezialfall (unten) doch zu einer Klassifikation gelangt.
Wir beginnen dazu mit einer fast trivialen, aber interessanten Beobachtungen aus [155]. Ist G eine nicht-freie, stark $\aleph_1$-freie Gruppe der Mächtigkeit $\aleph_1$, dann ist in V = L z. B. nach dem soeben zitierten Satz von Mekler Ext $(G, \mathbf{Z}) \neq 0$. Also gibt es eine nicht zerfallende Sequenz $0 \to \mathbf{Z} \to A \to G \to 0$ und A hat eine interessante Zerlegungseigenschaft: Wir sagen allgemein, daß eine Gruppe $\kappa$-freiseparabel ist, wenn jede Teilmenge der Mächtigkeit $< \kappa$ in einem freien direkten Summanden enthalten ist. Häufig nennt man $\kappa$-freiseparabel auch $\kappa$-separabel; z. B. in dem Buch von P. A. Griffith [89]. Den Spezialfall $\aleph_0$-freiseparabel haben wir bereits in § 4 getroffen. Wäre nun A $\aleph_0$-freiseparabel, so wäre $\mathbf{Z}$ in obiger Sequenz reine Untergruppe eines direkten Summanden endlichen Ranges, also selbst direkter Summand, was der Wahl der Sequenz widerspricht. Daraus folgt die

**Beobachtung** (S. Shelah [155]). (ZFC + V = L). Es gibt stark $\aleph_1$-freie, nicht $\aleph_1$-freiseparable Gruppen der Mächtigkeit $\aleph_1$.

Diese Beobachtung war Anlaß von zahlreichen Untersuchungen über $\kappa$-separable Gruppen. Auf weitere daraus resultierende Zusammenhänge zwischen Whitehead-Gruppen, stark $\kappa$-freien Gruppen, $\kappa$-separablen Gruppen, coseparablen Gruppen ... sei auf die Übersichten von P. Eklof [50, 54, 55], R. J. Nunke [137] und Ergänzungen von M. Sollert [166] verwiesen. Diese Beobachtung war ferner Anlaß für den ersten Satz in § 8. Außerdem ist die Shelahsche Beobachtung nicht in ZFC beweisbar, denn es gilt ein

**Satz** (A. Mekler [124]). (ZFC + MA). *Stark $\aleph_1$-freie Gruppen sind $\aleph_1$-freiseparabel.*

Immerhin kann man $\aleph_1$-freiseparable Gruppen der Mächtigkeit $\aleph_1$ „klassifizieren". Die etwas abstraktere (aber nützliche!) Invariante wird durch „Filtrationsäquivalenz" definiert [55, 56]: Zwei $\aleph_1$-separable Gruppen G, H sind filtrationsäquivalenz, wenn es zwei $\aleph_1$-Filtrationen $G = \bigcup_{i \in \aleph_1} G_i$, $H = \bigcup_{i \in \aleph_1} H_i$ und Isomorphismen $f_i : G_i \to H_i$ mit $f_i(G_j) = H_j$ für alle $j < i < \aleph_1$ gibt. Man erhält einen

**„Struktursatz"** (P. Eklof [56]) *in* (ZFC + MA + $\neg$CH). *$\aleph_1$-separable Gruppen der Mächtigkeit $\aleph_1$ sind genau dann isomorph, wenn sie filtrationsäquivalent sind.*
*Aber in* (ZFC + CH) *gibt es filtrationsäquivalente, nicht isomorphe Gruppen dieser Klasse.*

Abschließend seien noch zwei (schwierige) Probleme zu diesen fast-freien Gruppen genannt:

**Problem 9.** Gibt es in ZFC $\aleph_1$-freie, nicht stark $\aleph_1$-freie Gruppen der Mächtigkeit $\aleph_1$? Was bedeutet ihre Existenz für die großen Kardinalzahlen?

**Problem 10.** Folgt für singuläre Kardinalzahlen $\kappa$ aus $\kappa^+$-frei auch stark-$\kappa^+$-frei?

## § 8 Zerlegungssätze über abelsche Gruppen

Wir wollen uns jetzt wieder mit wesentlich algebraischeren Fragen beschäftigen. Es ist jedoch bemerkenswert, daß die hier beschriebenen neueren Entwicklungen (kaum noch erkennbar) ihren Anfang in der „fast-trivialen" Beobachtung von Shelah aus dem sehr mengentheoretischen § 7 nahmen: Diese Beobachtung führte zu der Frage, ob es auch stark-$\kappa$-freie unzerlegbare Gruppen gibt. Die Antwort [60] ist ein

**Satz von Eklof-Mekler.** (ZFC + V = L). *Zu jeder regulären, nicht schwach kompakten Kardinalzahl $\kappa$ gibt es unzerlegbare stark $\kappa$-freie Gruppen der Mächtigkeit $\kappa$.*

Der Satz von Gregory (§ 7) ist also offensichtlich ein Spezialfall und der Satz von Eklof-Mekler wird wiederum aus einem Endomorphismenringsatz folgen.
Die Existenz unzerlegbarer Gruppen ist ein spezieller Zerlegungssatz! Unzerlegbare Gruppen in ZFC haben eine lange Geschichte. Beginnend mit unzerlegbaren Gruppen beliebigem endlichen Ranges (F. Levi 1917 und A. G. Kurosch 1937) und insbesondere vom Rang 2 von S. Pontrjagin [140] (1934) sind immer größere unzerlegbare Gruppen konstruiert worden. Historische Schranken waren 2, $2^{\aleph_0}$ (Baer [4], De Groot, A. Hulanicki 1958, E. Sasiada 1958), die Kardinalzahl $2^{2^{\aleph_0}}$ (L. Fuchs 1957), die erste streng unerreichbare Kardinalzahl (Fuchs, Corner 1969) und die erste meßbare Kardinalzahl (Fuchs [67]) bis S. Shelah [153] schließlich unzerlegbare Gruppen ohne Mächtigkeitseinschränkung konstruierte. Alle diese Resultate, eine historische Beschreibung finden wir in L. Fuchs [66, Band II] sind nun Spezialfälle der noch zu beschreibenden Zerlegungssätze in ZFC + V = L bzw. ZFC.
Exemplarisch betrachten wir folgende zwei Fragen, die auch beantwortet werden sollen:
Zu welchen Kardinalzahlen $\kappa$ (endlich oder unendlich) gibt es unzerlegbare, torsionsfreie abelsche Gruppen vom Range $\kappa$?
– sowie ein Problem (72) in L. Fuchs [66, Band II, S. 183] –
Zu welchen Kardinalzahlen $\kappa$ gibt es superzerlegbare oder allgemeiner $\kappa$-zerlegbare Gruppen (vom Range $\kappa$)?
Eine Gruppe heißt *$\kappa$-zerlegbar,* wenn jeder von 0 verschiedene direkte Summand eine direkte Summe von $\kappa$ nicht-trivialen Summanden ist. Insbesondere ist 2-zerlegbar = superzerlegbar; siehe § 2.
Zur Konstruktion superzerlegbarer Gruppen soll dabei wieder der Nöbelingsche Ring herangezogen werden!
Die vereinheitlichende Untersuchung dieser Fragen geschieht mit Hilfe des Endomorphismenringes, eine Methode die „im Prinzip" seit langem in der Algebra – etwa durch den Beweis des Satzes von Artin-Wedderburn – bekannt ist, jedoch erst sehr genial seit 1962 von Corner [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] zur Konstruktion von abelschen Gruppen mit vorgeschriebenen Zerlegungseigenschaften benutzt wurde, siehe § 2. Die Methode basiert auf folgendem elementaren Zusammenhang zwischen Gruppe G und Endomorphismenring End G:

| G | End G |
|---|---|
| endliche direkte Zerlegung | Zerlegung von $1 = \mathrm{id}$ in eine endliche orthogonale Summe von Idempotenten |
| unzerlegbar | Es gibt keine Idempotente $\neq 0, 1$ |
| superzerlegbar | Es gibt keine primitiven Idempotente |
| Automorphismengruppe | Einheitengruppe |

Die Liste wird später durch topologische Aussagen ergänzt.
Das Problem der Existenz von Gruppen mit vorgeschriebenen Zerlegungen zerfällt damit in zwei Teile:

(1) Man realisiere eine möglichst große Klasse von Ringen als Endomorphismenringe.

(2) Suche realisierbare Ringe, die die entsprechende Idempotenteneigenschaft haben.

Elementare Argumente zeigen, daß die Ringe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$ und $J_p \oplus J_p$ (aus Dimensionsgründen) nicht Endomorphismenringe sind. Wir schließen genau diese Gegenbeispiele durch folgende Definition aus: Für eine abelsche Gruppe G sind äquivalent:

(a) G ist cotorsionsfrei, d. h. 0 ist die einzige in G enthaltene Cotorsionsgruppe. (Cotorsionsgruppen wurden von D. K. Harrison eingeführt, sie sind genau die epimorphen Bilder algebraisch kompakter Gruppen; siehe L. Fuchs [61, Band I, S. 234, Proposition 54.1]).

(b) $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Q}^+$, $J_p^+$ sind keine Untergruppen von G für alle Primzahlen $p \neq 1$.

(c) G ist torsionsfrei und enthält keinen zu $\mathbf{Q}$, $J_p$ isomorphen direkten Summanden.

(d) $(\mathrm{End}\, G)^+$ ist cotorsionsfrei.

Diese Gruppenklasse spielte zuerst bei der Untersuchung nicht-kommutativer Gruppen eine Rolle [69]. Die Äquivalenz findet man in [33], wobei [79] verwendet wurde. Der Zusammenhang mit § 4 und § 5 ist offensichtlich: Reduzierte, separable oder $\aleph_1$-freie Gruppen oder schlanke Gruppen sind wegen des Satzes von Nunke aus § 4 cotorsionsfrei. Cotorsionsfreie Gruppen sind bei der Untersuchung torsionsfreier Gruppen fundamental wichtig: z. B. sind unzerlegbare Gruppen der Mächtigkeit $> 2^{\aleph_0}$ wegen (c) notwendig cotorsionsfrei. Sie haben auch eine Schlüsselrolle bei der Untersuchung von Moduln über kommutativen (und nicht kommutativen) Ringen; siehe § 9 und [20] [35] [76] [77] und [78]. Die Voraussetzung über den Ring R im Satz von Corner (§ 2) ist gerade: „$R^+$ ist abzählbar und cotorsionsfrei“. Neuerdings kann man in ZFC die Abzählbarkeit beseitigen, was schon vor 20 Jahren erhofft wurde [13].

**Satz** (M. Dugas, R. Göbel [35]). (ZFC). *Für einen Ring* R *sind äquivalent:*

(1) $R^+$ *ist cotorsionsfrei.*

(2) *Es gibt eine (beliebig große) cotorsionsfreie Gruppe* G *mit* $\mathrm{End}\, G \cong R$.

Die Beweismethoden benutzen ein Kardinalzahlargument, das S. Shelah [154] schon 1975 zur Konstruktion „im wesentlichen“ unzerlegbarer p-Gruppen eingeführt hatte. Es schließen sich zwei Fragen [71] an:

(I) (a) Für welche Kardinalzahlen $|G|$ gilt obiger Satz?
(b) Gibt es zu obigem Satz zu einer Kardinalzahl $\kappa = |G|$ starre Systeme $G_i$ $(i \in I)$ mit End $G_i \cong R$, $|G_i| = \kappa$ maximaler Größe $|I| = 2^\kappa$? (vgl. § 4 zu starren Systemen).

(II) Wie frei kann G in dem Satz sein?

Das schärfste Resultat zu (II) erhält man in L.

**Satz** (M. Dugas, R. Göbel [33]). *In* (ZFC + V = L) *sind für einen Ring* R *äquivalent:*

(1) $R^+$ *ist cotorsionsfrei.*

(2) *Für jede reguläre, nicht schwachkompakte Kardinalzahl* $\kappa > |R|$ *gibt es einen stark* $\kappa$*-freien* R*-Modul* G *mit* End $G \cong R$ *und* $|G| = \kappa$.

Ist $R^+$ insbesondere frei, so ist auch G stark $\kappa$-frei. Die mengentheoretische Voraussetzung V = L kann wesentlich abgeschwächt werden; siehe [33]. Für Konstruktionen $\leqslant 2^{\aleph_0}$ kann z. B. V = L durch eine schwache Form von CH nämlich $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ ersetzt werden. Die benutzten mengentheoretischen Methoden sind Jensenfunktionen, $\diamond$, bzw. das schwache Karoprinzip von K. Devlin und S. Shelah [23]. Realisiert man z. B. $R = \mathbf{Z}$, so folgt mit unserer Tabelle aus dem letzten Resultat der zu Beginn dieses Paragraphen zitierte Satz von Eklof-Mekler, und insbesondere J. Gregorys Satz aus § 7. Frage (I)(b) kann ebenfalls positiv beantwortet werden. Dieser Realisierungssatz macht klar, daß in ZFC + V = L stark $\kappa$-freie Gruppen so pathologisch wie nur denkbar sind und den „universellen Satz von I. Kaplansky“ erfüllen. Mit Hilfe eines neuen kombinatorischen Lemmas von S. Shelah [164], [165] das auf [152, Kap. VIII, Theorem 2.6] basiert, kann man auch in ZFC die Frage (I) befriedigend beantworten:

**Satz** (A. L. S. Corner, R. Göbel [20]). *Sei* R *ein Ring mit cotorsionsfreier additiver Gruppe* $R^+$. *Dann gibt es für* j e d e *Kardinalzahl* $\kappa \geqslant |R|^{\aleph_0}$ *ein (maximales) starres System* $G_i$ $(i \in 2^\kappa)$ *cotorsionsfreier Gruppen der Mächtigkeit* $\kappa$ *mit* End $G_i \cong R$ (vgl. auch § 8).

Wenn $R^+$ frei ist, können die $G_i$ nach [77] auch $\aleph_1$-frei gewählt werden. Ebenso erhält man zu vorgeschriebenem R auch echte halb-starre Klassen in ZFC und *echte* starre Klassen in (ZFC + V = L).
Die zweite Aufgabe, also die Konstruktion von Ringen, ist in vielen interessanten Fällen längst gelöst. Um unzerlegbare Gruppen zu konstruieren, realisiere man z. B. $R = \mathbf{Z}$; siehe [28] [70] und die Folgearbeit [162]. Um Gegenbeispiele zu den Kaplanskyschen Testproblemen in allen Kardinalzahlen zu erhalten, realisiere man z. B. Corners Ring [18] oder einfach den Endomorphismenring eines der bekannten alten Beispiele. Exemplarisch sei das folgende neue Korollar aus [20] genannt, das Kaplanskys Testprobleme weit umfaßt:
Sei $\Gamma$ eine abelsche Halbgruppe. Dann gibt es cotorsionsfreie Gruppen $G_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ so, daß für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ gilt:

$$G_\alpha \oplus G_\beta = G_\gamma \text{ genau dann, wenn } \alpha + \beta = \gamma.$$

Im gleichen Sinne wie Zerlegungseigenschaften, kann man mit unserer Tabelle Automorphismengruppen vorschreiben. Allgemein läßt sich zeigen [72], daß alle endlichen Gruppen, die als Automorphismengruppe *einer* torsionsfreien Gruppe auftreten, *in jeder* unendlichen Kardinalzahl $\kappa$ auf $2^\kappa$ nicht isomorphen Gruppen der Mächtigkeit $\kappa$ realisiert werden. Damit ist eine ältere Frage aus dem „Kourovka Notebook" [116] bzw. von J. T. Hallet und K. A. Hirsch [91] vollständig beantwortet.

Wir wollen schließlich den Ring $B = B_{\aleph_0}$ von G. Nöbeling benutzen, um superzerlegbare Gruppen zu konstruieren. Aufgrund unserer Tabelle benötigen wir einen Ring ohne primitive Idempotente, der realisierbar ist. Nun hat B aber sehr viele solche Idempotente! Diese dividieren wir heraus und erhalten $R = B/\mathbf{Z}^{(\aleph_0)}$. Alle Elemente $\neq 0$ haben in R unendlichen Träger und können daher nicht primitiv sein. Da $\mathbf{Z}^{(\aleph_0)}$ Speckersch im Sinne von [134] ist, hat R nach dem Satz von Nöbeling aus § 3 eine freie additive Gruppe. Weil $|R| > \aleph_0$, eignet sich Corners Satz aus § 2 nicht zum Realisieren und wir verwenden eine seiner obigen Verallgemeinerungen: In ZFC finden wir zu allen unendlichen Kardinalzahlen $\kappa$ superzerlegbare Gruppen der Mächtigkeit $\kappa$ und in ZFC + V = L für alle regulären nicht schwachkompakten $\kappa > \aleph_0$ stark $\kappa$-freie superzerlegbare Gruppen.

Mit den benutzten Methoden kann man in ZFC zu einer cotorsionsfreien Gruppe B mit $B^* = 0$ immer eine Gruppe A konstruieren, so daß Hom (A, B) = 0. Falls ZFC + V = L vorausgesetzt ist, sind derartige Gruppen A i. allg. sogar stark $\kappa$-frei, also folgt aus Kardinalzahlgründen $|B| < \kappa = |A|$ auch Hom (B, A) = 0. Das zweite Argument ist in ZFC nicht anwendbar und führt zu folgendem allgemeinen

**Problem 11.** Gibt es zu A mit $A^* = 0$ eine Gruppe B so, daß Hom (A, B) = 0.

Die soeben behandelte Klasse der superzerlegbaren Gruppen ist ein Spezialfall der $\kappa$-zerlegbaren Gruppen. Es ist klar, daß die genannten Realisierungssätze zur Gewinnung $\kappa$-zerlegbarer Gruppen für unendliches $\kappa$ ungeeignet sind: *Unendliche* (direkte) Summen sind algebraisch im Endomorphismenring nicht beschreibbar, sondern benötigen topologische Hilfsmittel! Eine algebraisch gut definierbare und schon oft – z. B. in Hasses „Zahlentheorie" – genutzte Topologie ist die sog. endliche Topologie, die in Analogie zur Topologie der linearen Operatoren auf einem Hilbertraum entstand: Ein Umgebungssystem von $0 \in$ End G besteht aus allen Annihilatoren Ann $E = \{\sigma \in \text{End } G, E\sigma = 0\}$ aller endlichen Teilemengen E von G.
Seine Elemente Ann E sind Rechtsideale von End G, und sie erzeugen eine vollständige, Hausdorffsche, lineare Topologie auf End G; siehe z. B. L. Fuchs [66, Band II, S. 221, Theorem 107.1]. Der topologische Ring End G ist diskret, wenn G endlich erzeugbar ist. Lieberts Charakterisierung [121] der Endomorphismenringe von p-Gruppen basiert ebenfalls auf der endlichen Topologie.
Der diskrete Realisierungssatz cotorsionsfreier Gruppen kann zu einem topologischen Realisierungssatz erweitert werden, was eine Frage von A. L. S. Corner [15] beantwortet.

**Topologischer Realisierungssatz** (M. Dugas, R. Göbel [37]). *Für einen Ring* R *sind äquivalent:*

(1) R *ist ein vollständiger, Hausdorffscher topologischer Ring mit einer Basis der* 0 *aus Rechtsidealen* I *so, daß* R/I *eine cotorsionsfreie Gruppe ist.*

(2) *Es gibt eine cotorsionsfreie Gruppe* G *so, daß* R *als topologischer Ring zu* End G *mit der endlichen Topologie (topologisch und algebraisch) isomorph ist.*

In [20] wurden zusätzlich alle Kardinalzahlen $\kappa \geqslant |R|^{\aleph}$ realisiert (d. h. $|G| = \kappa$), wobei $\aleph$ die Mächtigkeit einer Umgebungsbasis von $0 \in R$ ist.

Um $\kappa$-zerlegbare Gruppen zu konstruieren, benötigen wir also nur noch einen passenden topologischen Ring! Dieser wurde von Corner bereits vor einigen Jahren konstruiert und 1983 publiziert [19]. Wir beschreiben seine Konstruktion, verweisen aber für den Nachweis der „ringtheoretischen $\kappa$-Zerlegbarkeitsbedingung“ in Form von unendlichen Summen orthogonaler Idempotenter auf [19].
Sei $|I| = |J| = \kappa$ und P die Menge aller endlichen Teilmengen von I x J sowie $S = \bigoplus_{E \in P} f_E \mathbf{Z}$ frei erzeugt. Vermöge $f_E \cdot f_F = f_{E \cup F}$ wird S ein kommutativer Ring mit $1 = f_\emptyset$.
Ist C eine endliche Teilmenge von I, so erzeugt die Menge $\{f_E : E \not\subseteq C \times J\}$ ein Ideal $I_C$ von S und alle derartigen Ideale $I_C$ definieren eine 0-Umgebungsbasis und somit eine Hausdorff-Topologie $\tau$ auf S. Die Vervollständigung R von S mit den Vervollständigungen $J_C$ von $I_C$ bzgl. $\tau$ ist der gewünschte topologische Ring. Die Quotienten $R/J_C$ sind frei und R ist kommutativ. Für jede Kardinalzahl $\kappa \geqslant \aleph_0$ erhalten wir $\kappa$-zerlegbare, $\aleph_1$-freie Gruppen. Für $\kappa$ regulär, nicht-schwach kompakt können diese Gruppen in ZFC + V = L sogar stark $\kappa$-frei gewählt werden. Hierzu benutzen wir einen entsprechenden topologischen Realisierungssatz in ZFC + V = L; vgl. [74].
Da der Cornersche topologische Ring nicht gerade sehr einfach ist, wäre es wünschenswert, dieses Resultat mit dem Nöbelingschen Ring herzuleiten. Dabei entsteht das folgende

**Problem 12.** Sei $R_\kappa = B_\kappa/(\mathbf{Z}^{<\kappa} \cap B_\kappa)$. Man finde zu dem Ring $R_\kappa$ eine lineare, Hausdorff-Topologie die durch Ideale J mit $R_\kappa/J^+$ cotorsionsfrei als 0-Umgebungsbasis erzeugt wird und so, daß die entsprechenden Vervollständigungen $\hat{R}_\kappa/\hat{J} \cong R/J$. Ferner soll $R_\kappa$ die Bedingung (+) erfüllen:

(+) Zu $0 \neq x \in \hat{R}_\kappa$ gibt es eine 1-summierbare Familie orthogonaler Idempotente $e_i$ $(i \in \kappa)$ mit $xe_i \neq 0$ für alle $i \in \kappa$.

Aufgrund des topologischen Realisierungssatzes reduziert sich auch das alte Problem von P. Crawley und B. Jónsson [21] über die Austauscheigenschaft auf eine ringtheoretische Konstruktion: Es sei daran erinnert, daß eine Gruppe G die $\kappa$-Austauscheigenschaft hat, wenn für $G \oplus C = A$ mit $A = \bigoplus_{i \in \kappa} A_i$ Untergruppen $C_i \subseteq A_i$ gefunden werden können, so daß $A = G \oplus \bigoplus_{i \in \kappa} C_i$. Das ist der gruppentheoretische Rest des Austauschsatzes von Steinitz. Die schärfste Form des Crawley-Jónsson-Problems ist es, zu gegebenen Kardinalzahlen $\kappa < \rho$ eine Gruppe

G zu finden, die die $\kappa$-Austauscheigenschaft aber nicht die $\rho$-Austauscheigenschaft hat. Der Übergang zu einem ringtheoretischen Problem geschieht mit dem topologischen Realisierungssatz und einem Lemma von Corner (1966, unveröffentlicht), nach dem sich die $\kappa$-Austauscheigenschaft im Endomorphismenring mit der endlichen Topologie beschreiben läßt. Dieses Lemma wurde kürzlich unabhängig von B. Zimmermann-Huisgen und W. Zimmermann [179] gefunden und ist dort als Proposition 3 zugänglich. Damit wird aus dem Crawley-Jónsson-Problem das ringtheoretische

**Problem 13.** Seien $\kappa < \rho$ Kardinalzahlen. Finde einen Ring R mit einer durch Rechtsideale $J_i$ ($i \in I$) als Umgebungen der 0 definierten linearen, vollständigen Hausdorff-Topologie $\tau$ so, daß $R/J_i$ cotorsionsfrei für alle $i \in I$ ist. Ferner gelte

($\kappa$) Zu jeder bzgl. $\tau$ summierbaren Familie $f_i \in R$ ($i \in \kappa$) mit $\sum\limits_{i \in \kappa} f_i = 1$ gebe es paarweise orthogonale Idempotente $e_i \in Rf_i$ mit $\sum\limits_{i \in \kappa} e_i = 1$.

Die Bedingung ($\rho$) ist nicht erfüllt.
Der Spezialfall $\kappa = 2$ und $\rho = \aleph_0$ ist schon interessant genug! Obwohl es einige positive Resultate zum Crawley-Jónsson-Problem gibt (z. B. [179]), ist das Problem sicherlich „richtig" gestellt.
Schließlich wollen wir die in § 4 behandelten $\aleph_1$-freien separablen Gruppen mit Hilfe der Endomorphismen betrachten, um etwas für unser Leitmotiv, den „universellen Satz von I. Kaplansky" zu tun.

Aus der Definition separabel folgt, daß Endomorphismen mit endlich erzeugtem Bild „unvermeidlich" sind. Daher sei Ines G = $\{\sigma \in \text{End } G : \text{Im } \sigma \text{ ist endlich erzeugt}\}$. Diese Menge ist ein zweiseitiges Ideal von End G und gehört zu einem allgemeinen Konzept, das in § 9 erörtert wird! Analog zum Satz von Baer-Kaplansky (siehe z. B. L. Fuchs [66, Band II, S. 224] bestimmt Ines G die zugrundeliegende separable Gruppe. Wie im § 9 noch klarer wird, ist es dann sinnvoll, einen vorgegebenen Ring nur durch End G/Ines G zu realisieren. Dies ist für separable $\aleph_1$-freie Gruppen wegen des folgenden Satzes auch möglich.

**Satz** [41]. *Sei* R *ein Ring mit* $R^+ = \bigoplus\limits_{\alpha \in \kappa} \alpha\mathbf{Z}$ *frei. Ist* $\hat{R}$ *die* **Z**-*adische Vervollständigung von* R, *dann sei* $\hat{R} \cap \prod\limits_{\alpha \in \kappa} \alpha\mathbf{Z}$ *ein* R-*Teilmodul von* $\hat{R}$. *Dann gibt es eine* $\aleph_1$-*freie, separable Gruppe* G *mit* End G = R ⊕ Ines G *für alle* $|G| \geqslant |R|^{\aleph_0}$.

Aus dem Realisierungssatz erhalten wir mit den „Standardringen" alle nur denkbaren separablen $\aleph_1$-freien Gegenbeispiele zu den Kaplanskyschen Testproblemen, also z. B. $G \not\cong G \oplus G$ und $G \cong G \oplus G \oplus G$. Zu jeder Kardinalzahl $\kappa \geqslant 2^{\aleph_0}$ gibt es „im wesentlichen" unzerlegbare $\aleph_1$-freie separable Gruppen der Mächtigkeit $\kappa$, die nur absplittern, was sie dürfen und was unvermeidlich ist, nämlich endlich erzeugbare freie direkte Summanden. Unsere Arbeitshypothese aus § 4 wird also weitgehend bestätigt.

## § 9 Verallgemeinerung der Zerlegungssätze in ZFC, Ausblicke

In diesem Schlußparagraphen wollen wir auch nicht-torsionsfreie Gruppen berücksichtigen und darstellen, wie weit sich einige der Resultate aus § 8 auf allgemeine Modulkategorien übertragen. Zu § 5 sei nur bemerkt, daß sich die Sätze zum Whitehead-Problem für Moduln über Dedekindringen der Mächtigkeit $\leqslant \aleph_1$ beweisen lassen. Wir interessieren uns jedoch besonders für die Endomorphismenringsätze. Diese sollen *einheitlich* für torsionsfreie, gemischte Moduln und Torsionsmoduln bewiesen und dargestellt werden:

Wir beschreiben zunächst die Modulkategorie. Sei R ein kommutativer Grundring mit $1 \neq 0$, der eine abzählbare, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge S mit $\bigcap_{s \in S} sR = 0$ besitzt. Die S-Topologie auf einem (rechten) R-Modul G wird durch die 0-Umgebungsbasis $\{Gs : s \in S\}$ erzeugt. Der Modul G ist S-reduziert (Hausdorff), wenn $\bigcap_{s \in S} Gs = 0$ und $\hat{G}$ sei seine S-Vervollständigung. Ferner ist G S-torsionsfrei, wenn Multiplikation mit $s \in S$ injektiv ist und G ist S-torsion, wenn $0 \in gS$ für alle $g \in G$. Der Torsionsanteil tG wird bzgl. S gebildet, und wir unterschlagen jetzt das Präfix S.

Die zu realisierende R-Algebra A soll als R-Modul stets reduziert und torsionsfrei (bzgl. S) sein. Sollen Torsionsmoduln konstruiert werden, so verlangen wir ferner die Existenz eines (nicht notwendig primen) Elements $p \in R$, so daß $S = \{p^n : n \in \omega\}$.

Die Grundidee beim Beweis eines Realisierungssatzes – schon bei Corners [13] erstem Resultat – ist es, Endomorphismen eines geeigneten A-Moduls G durch Hinzunahme neuer Erzeugender zu vernichten. Für einige „widerstandsfähige" Endomorphismen (abhängend von den gewünschten Moduln G), z. B. für 0, oder allgemeiner für Skalarmultiplikation mit $a \in A$ wird dies nicht gelingen. Welches sind diese widerstandsfähigen Endomorphismen? Diese Frage führt auf das vereinheitlichende Konzept Ines G aller unwesentlichen (inessential) Endomorphismen von G: Ist G reduziert, so ist G S-adisch dicht in der Vervollständigung $\hat{G}$ und jeder Endomorphismus $\sigma$ von G besitzt eine eindeutige Fortsetzung $\hat{\sigma} \in \mathrm{End}\, \hat{G}$, vgl. [123]. Die Menge $\{\sigma \in \mathrm{End}\, G, \hat{G}\hat{\sigma} \subseteq G\}$ ist ein zweiseitiges Ideal Ines G von End G; seine Elemente lassen sich nicht durch Erweiterung in $\hat{G}$ vernichten. Wir erhalten einen für *alle drei* Modulkategorien (torsion, torsionsfrei, gemischt) gültigen Satz. Wir zitieren ihn deshalb als

**Universalsatz** [20]. *Sei* A *eine* R-*Algebra, die obige Bedingung erfüllt und* $\kappa$ *eine Kardinalzahl* $\geqslant |A|^{\aleph_0}$. *Dann gibt es einen* R-*Modul* G *vom Rang* $\kappa$ (*wunschgemäß, torsion, torsionsfrei oder gemischt*) *so, daß* $\mathrm{End}\, G = A \oplus \mathrm{Ines}\, G$.

In [72] konnten wir zeigen, daß es zu $\kappa$ stets ein (maximales) starres System $\{G_i : i \in 2^\kappa\}$ mit $\mathrm{End}\, G_i = A \oplus \mathrm{Ines}\, G_i$ und $\mathrm{Hom}\,(G_i, G_j) = \mathrm{Ines}\,(G_i, G_j)$ für alle $i \neq j \in 2^\kappa$ gibt.

Der Universalsatz läßt sich ebenfalls zu einem topologischen Realisierungssatz (wie in § 8) erweitern [20]. Wir bestimmen nun Ines G für torsionsfreies oder gemischtes G oder falls G torsion ist, [20].

Ist G torsion, so nennt man nach R. S. Pierce einen Homomorphismus $\sigma$ von G *klein,* wenn es zu jedem $m \in \aleph_0$ ein $n \in \aleph_0$ existiert mit $p^n G[p^m]\sigma = 0$. Dabei ist $G[s] = \{g \in G, gs = 0\}$, wie üblich, der s-Sockel von G. Kleine Homomorphismen sind bestens untersucht; siehe L. Fuchs [66, Band I, II]. Für unseren *Torsionsmodul* G gilt:
Ines G ist genau das Ideal Small G aller kleinen Homomorphismen.
Ist G im Universalsatz *gemischt,* so kann man zeigen, daß

$$\text{Ines } G = \{\sigma \in \text{End } G, \text{E } s \in S, \sigma s = 0\} = t \text{ End } G.$$

Also ist Ines G der Torsionsanteil von End G, vgl. auch [29].
Dieser „gemischte Realisierungssatz" kann durch ein Resultat für abzählbare gemischte Gruppen ergänzt werden [40]. Im torsionsfreien Fall verallgemeinern wir cotorsionsfrei für R-Moduln durch die Forderung $\text{Hom}_R(\hat{R}, G) = 0$. Ist die Algebra A ein cotorsionsfreier R-Modul, dann ist auch der R-Modul G im Universalsatz cotorsionsfrei. Daraus folgt im *torsionsfreien* Fall für cotorsionsfreie Algebren A:

$$\text{Ines } G = 0$$

und die Realisierung ist exakt End G = A.
Ist R z. B. ein *vollständiger diskreter Bewertungsring,* so sind cotorsionsfreie Moduln offensichtlich 0. In diesem Fall muß man also die Bedingungen an A abschwächen: Die vollständigen Teilmoduln von $A_R$ sollen endlichen Rang haben. Der in diesem Fall aus dem Universalsatz gewonnene Modul hat die gleiche Eigenschaft, folglich ist

$$\text{Ines } G = \{\sigma \in \text{End } G, \text{Im } \sigma \text{ hat endlichen Rang}\},$$

vgl. [30].
Der Endomorphismensatz für separable $\aleph_1$-freie Gruppen aus dem letzten Paragraphen kann nach dem gleichen einheitlichen Konzept hergeleitet werden, indem man die dort gegebene Kennzeichnung von Ines G aus dem Universalsatz berechnet.
Der Universalsatz umfaßt also seine Vorgänger [34, 35, 36], [164, 165]. Die Anwendungen von $A \oplus \text{Ines } G \cong \text{End } G$ sind ähnlich wie bei der *exakten* Realisierung, wobei Ines G die für die untersuchte Modulkategorie typischen Eigenschaften widerspiegelt. Dies soll am Beispiel der p-Gruppen kurz erläutert werden. Aus dem Universalsatz folgt das

**Korollar.** *Für einen Ring* A *sind äquivalent:*

(1) *Es gibt eine (separable)* p-*Gruppe* G *mit*

$$\text{End } G \cong A \oplus \text{Small } G$$

(2) *Für alle Kardinalzahlen* $\kappa \geqslant |A|^{\aleph_0}$ *gibt es ein starres System* $G_i$ $(i \in 2^\kappa)$ *separabler* p-*Gruppen mit* $|G_i| = \kappa$, $\text{End } G_i \cong A \oplus \text{Small } G$ *für alle* $i \neq j \in 2^\kappa$.

(3) A *erfüllt die Pierce-Bedingung, d. h.* $A^+$ *ist die* p-*adische Vervollständigung eines freien Moduls über den* p-*adischen Zahlen.*

Diese Äquivalenz ist ein Satz in M. Dugas, R. Göbel [34], wobei wir die Kardinalzahlen $\kappa$ in (2) nur aus einer echten Klasse recht großer Kardinalzahlen gewählt haben. Die fehlenden Kardinalzahlen $\kappa$ wurden durch ein schönes kombinatorisches Lemma (mit Baumkonstruktionen) von S. Shelah [164, 165] aufgefüllt. Diese „Shelahsche Black Box" wurde auch in [20] benutzt und den dort auftretenden „algebraischen Bedürfnissen" angepaßt. Hat der A zugrundeliegende freie $J_p$-Modul höchstens abzählbaren Rang, dann ist (3) → (1) ein älterer Satz (1969) von Corner [16]. Wählen wir z. B. $A = J_p$, so erhalten wir beliebig große „im wesentlichen unzerlegbare" p-Gruppen G, d. h. jede direkte Summe $G = C \oplus D$ hat einen beschränkten Teil, also $nC = 0$ oder $nD = 0$ für ein n. Dies liegt an Ines G = Small G! Denn jedes Idempotent $\pi \in$ Small G ist nach Definition „klein" beschränkt! Die dadurch gefundene Existenz beliebig großer, im wesentlichen unzerlegbarer p-Gruppen ist wiederum ein älterer Satz (1975) von S. Shelah [154]. Ausgehend von dem Realisierungssatz cotorsionsfreier Ringe in (ZFC + V = L) in § 8, können wir hier die Frage anschließen, ob man p-Gruppen „fast-frei" wählen kann und den parallelen Satz zu obigem Korollar in ZFC + V = L für diese spezielleren p-Gruppen erhält. Die positive Antwort ist ein neues Resultat in [39]. Analog zu stark $\kappa$-frei definiert man für p-Gruppen stark $\kappa$-zyklisch (indem man frei durch „direkte Summe von zyklischen p-Gruppen" ersetzt), vgl. § 7. Dann gilt der folgende Satz (ZFC + V = L): Ein Ring R genügt genau dann der Pierce-Bedingung, wenn es zu (jeder) regulären, nicht schwach kompakten Kardinalzahl $\kappa > |R|$ eine stark $\kappa$-zyklische p-Gruppe G der Mächtigkeit $\kappa$ mit End $G = R \oplus$ Small G gibt. Obwohl der mengentheoretisch statistische Teil des Beweises parallel zum torsionsfreien Fall verläuft, ist der algebraische Teil wesentlich „aufwendiger"; vgl. [33] und [39].
Im cotorsionsfreien Fall erhalten wir aus dem Universalsatz die

**Folgerung.** Sei R obiger Grundring. Dann sind für eine R-Algebra A äquivalent:

(1) A ist cotorsionsfrei.
(2) Zu jeder Kardinalzahl $\kappa \geqslant |A|^{\aleph_0}$ gibt es einen cotorsionsfreien R-Modul G der Mächtigkeit $\kappa$ und End $G \cong A$.

Ohne die genaue Kardinalzahlbedingung in (2) wurde die Folgerung in [35] bewiesen. Es ist bemerkenswert, daß die Folgerung für Dedekind-Grundringe R genau dann gilt, wenn man die offensichtlichen Ausnahmen ausschließt. R ist kein Körper und kein vollständiger diskreter Bewertungsring, siehe [35]. Ebenfalls durch Anwendung zusätzlicher klassischer, algebraischer Argumente (wie Lokalisierung, Untersuchung des Jacobson radicals) auf obige Folgerung erhält man das schöne

**Korollar** (P. Jambor [109] (1984)). *Für einen beliebigen noetherschen, kommutativen Ring mit* $1 \neq 0$, *der kein Körper ist, sind äquivalent:*

(1) *Es gibt keine superzerlegbaren* R-*Moduln.*
(2) *Es gibt keine unzerlegbaren* R-*Moduln* $\geqslant |R|^{\aleph_0}$.
(3) R *ist endliches Produkt von vollständigen, diskreten Bewertungsringen und artinschen Hauptidealbereichen.*

Außerdem erhält man aus obigem Realisierungssatz die gewünschten Beispiele zu Kaplanskys Testproblemen. Obwohl damit insbesondere das Existenzproblem für beliebig große unzerlegbare Moduln über „fast-vollständige Bewertungsringe" im Sinne von N. Nagata [139, S. 206, Example (E3.1)] gelöst ist, bleibt kurioserweise folgendes ungelöstes

**Problem 14.** Gibt es zu jeder natürlichen Zahl n bzw. $n = \aleph_0$ und jedem unvollständigen Bewertungsring einen unzerlegbaren Modul vom Range n?

Hier muß man zwischen Rang und minimalem Erzeugendensystem unterscheiden! In [174] konnte R. B. Warfield zu diesem Problem zeigen, daß jeder lokale (kommutative) Ring (mit genau einem maximalen Ideal), der kein Bewertungsring ist (der Idealverband ist nicht linear), zu jedem $n > 0$ unzerlegbare, endlich erzeugte (sogar endlich präsentierbare) Moduln besitzt, die nicht von $< n$ Elementen erzeugt werden.

Schließlich wollen wir noch anmerken, daß die bisher diskutierten Moduln von Ringen mit *abzählbarer,* multiplikativ abgeschlossener Menge $S \subseteq R$ herkommen. Falls $|S| > \aleph_0$, versagen die benutzten topologischen Methoden. *Trotzdem* ist es möglich, die meisten Realisierungssätze auf überabzählbares S zu erweitern. Es gilt z. B. der folgende

**Satz.** *Sei* R *ein kommutativer Ring und* S *eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von* R. *Dann sind für eine torsionsfreie* R-*Algebra* A *äquivalent:*

(1) A *enthält keine algebraisch kompakten Teilmoduln* $\neq 0$.

(2) *Es gibt* R-*Moduln* G *mit* End $\cong$ A.

Der „lokale Fall" dieses Satzes ist das Hauptresultat in [77] und der allgemeine Satz wird aus einem Resultat in [78] folgen (das auch gewisse nicht-kommutative Ringe R einschließt) und einen Zerlegungssatz (Theorem 3.6, 8.7) [156] umfaßt: Es sind äquivalent

(a) Jeder R-Modul ist direkte Summe abzählbar erzeugter R-Moduln.

(b) Es gibt eine reguläre Kardinalzahl $\kappa > |R|$ und jeder R-Modul ist direkte Summe von R-Moduln der Mächtigkeit $< \kappa$.

(c) Jeder R-Modul ist rein-injektiv.

Nach dem Satz von Faith-Walker (siehe [1], S. 293, Theorem 25.8) ist R dann rechts noethersch (und rein-injektiv).

## § 10 Literatur


[0] Albrecht, U.: Über das Whiteheadproblem und den Rang von Ext. Diplom-Arbeit, Universität Essen (1980)

[1] Anderson, F. W.; Fuller, K. J.: Rings and Categories of Modules. Graduate Texts 13. New York 1974: Springer

[2] Arnold, D.: Finite rank torsion free abelian groups and rings. Springer LNM 931 (1980)

[3] Arnold, D.; Hunter, R.; Walker, E. (Hrsg.): Abelian group theory. Proc. of the 2nd New Mexico State University Conference, Las Cruces (1976). Springer LNM 616 (1977)

[4] Baer, R.: Abelian groups without elements of finite order. Duke Math. J. 3 (1937) 68–122

[5] B a e r , R.: The subgroup of the elements of finite order of an abelian group. Ann. Math. 37 (1936) 766–781
[6] B a e r , R.: Die Torsionsuntergruppe einer Abelschen Gruppe. Math. Ann. 135 (1958) 219–234
[7] B a r w i s e , J.: E k l o f , P.: Infinitary properties of abelian torsion groups. Ann. of Math. Logic 2 (1970) 25–68
[8] B e n - D a v i d , S.: On Shelah's compactness of cardinals. Israel J. Math. 31 (1978) 34–56
[9] B e r g m a n , G. M.: Boolean rings of projections. J. London Math. Soc (2) 4 (1972) 593–598
[10] B i c a n , L.; K e p k a , T.; N ĕ m e c , P.: Rings, Modules and Preradicals. New York 1982: Marcel Dekker
[11] C h a s e , S. U.: Locally free modules and a problem of Whitehead. Illin.-J. Math. 6 (1962) 682–699
[12] C h a s e , S. U.: On group extensions and a problem of J. H. C. Whitehead. S. 173–193 in: [108]
[13] C o r n e r , A. L. S.: Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 13 (1963) 687–710
[14] C o r n e r , A. L. S.: On a conjecture of Pierce concerning direct decompositions of abelian groups. Proc. Coll. Abelian groups, Tihany (1963), S. 43–48. Budapest 1964: Akademiai Kiado
[15] C o r n e r , A. L. S.: Endomorphism rings of torsion-free abelian groups. Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra (1965), S. 59–69. New York 1967: Gordon and Breach
[16] C o r n e r , A. L. S.: On endomorphism rings of primary abelian groups. Quart. J. Math. (Oxford) 20 (1969) 277–296
[17] C o r n e r , A. L. S.: Endomorphism algebras of large modules with distinguished submodules. J. Alg. 11 (1969) 155–185
[18] C o r n e r , A. L. S.: Additive categories and a theorem of W. G. Leavitt. Bull. Amer. Math. Soc 75 (1969) 78–82
[19] C o r n e r , A. L. S.: On the existence of very decomposable abelian groups. S. 354–357 in: [84]
[20] C o r n e r , A. L. S.; G ö b e l , R.: Prescribing endomorphism algebras – A unified treatment. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 50 (1985) 447–479
[21] C r a w l e y , P.; J ó n s s o n , B.: Refinements of infinite direct decompositions of algebraic systems. Pacific J. Math. 14 (1964) 797–855
[22] D e G r o o t , J.: Additive groups of integer-valued functions over topological spaces. Proc. Coll. Abelian Groups, Tihany (1964), S. 77–80. Budapest 1964: Akademiai Kiado
[23] D e v l i n , K. J.; S h e l a h , S.: A weak version of $\diamond$ which follows from $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Israel J. Math. 29 (1978) 239–247
[24] D i x m i e r , J.: Quelques propriétés des groupes abéliens localement compact. Bull. Sci. Math. (2) 81 (1957) 38–48
[25] D o d , A.; J e n s e n , R.: The core model. Ann. Math. Logic 20 (1981) 43–75
[26] D r a k e , F. R.: Set Theory. Amsterdam 1979: North Holland
[27] D u b o i s , D.: Modules of sequences of a ring. J. Lond. Math. Soc. 41 (1961) 177–180
[28] D u g a s , M.: Fast freie abelsche Gruppen mit Endomorphismenring **Z**. J. Alg. 71 (1981) 314–321
[29] D u g a s , M.: On the existence of large mixed modules. S. 412–424 in: [84]
[30] D u g a s , M.; G o l d s m i t h , B.; G ö b e l , R.: Representation of algebras over complete discrete valuation rings. Quart. J. Math. (Oxford) 35 (1984) 131–146
[31] D u g a s , M.; G ö b e l , R.: Die Struktur kartesischer Produkte ganzer Zahlen modulo kartesische Produkte ganzer Zahlen. Math. Z. 168 (1979) 15–21
[32] D u g a s , M.; G ö b e l , R.: Quotients of reflexive modules. Fundam. Math. 64 (1981) 17–28
[33] D u g a s , M.; G ö b e l , R.: Every cotorsion-free ring is an endomorphism ring. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 45 (1982) 319–336
[34] D u g a s , M.; G ö b e l , R.: On endomorphism rings of primary abelian groups. Math. Ann. 261 (1982) 359–385
[35] D u g a s , M.; G ö b e l , R.: Every cotorsion-free algebra is an endomorphism algebra. Math. Z. 181 (1982) 451–470

[36] Dugas, M.; Göbel, R.: Endomorphism algebras of torsion modules II. S. 400–411 in: [84]
[37] Dugas, M.; Göbel, R.: Torsion-free abelian groups with prescribed finitely topologized endomorphism rings. Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984) 519–527
[38] Dugas, M.; Göbel, R.: On radicals and products. Pacific J. Math. **118** (1985) 79–104
[39] Dugas, M.; Göbel, R.: Almost $\Sigma$-cyclic abelian p-groups in L. S. 87–105. In: [85]
[40] Dugas, M.; Göbel, R.: Countable mixed abelian groups with very nice full-rank subgroups. Israel J. Math. **51** (1985) 1–12
[41] Dugas, M.; Göbel, R.: Endomorphism rings of separable torsion-free abelian groups. Ersch. in: Houston J. of Math. (1986)
[42] Dugas, M.; Herden, G.: Arbitrary torsion classes and almost free abelian groups. Israel J. Math. **44** (1983) 322–334
[43] Dugas, M.; Herden, G.: Arbitrary torsion classes of abelian groups. Comm. Alg. **11** (1983) 1455–1472
[44] Dugas, M.; Zimmermann-Huisgen, B.: Iterated direct sums and products of modules. S. 179–193 in: [83]
[45] Eda, K.: A boolean power and a direct product of abelian groups. Tsukuba J. Math. (2) **6** (1982) 187–194
[46] Eda, K.: On **Z**-kernel groups. Arch. Math. **41** (1983) 289–293
[47] Ehrenfeucht, A.: On a certain problem of K. Kuratowski and A. Mostowski in the theory of groups. Bull. Acad. Polon. **2** (1954) 471–473
[48] Ehrenfeucht, A.: On a problem of J. H. C. Whitehead concerning abelian groups. Bull. Acad. Polon. **3** (1955) 127–128
[49] Ehrenfeucht, A.; Łoś, J.: Sur le produits cartésiens des groupes cycliques infinis. Bull. Acad. Polon. Sci. **2** (1954) 261–263
[50] Eklof, P.: Set theoretic methods in homological algebra and abelian groups. Montreal 1980: Les Presses de l'université
[51] Eklof, P.: Infinitary equivalence of abelian groups. Fundam. Math. **81** (1974) 305–314
[52] Eklof, P.: On the existence of $\kappa$-free abelian groups. Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1975) 65–72
[53] Eklof, P.: Whitehead's problem is undecidable. Amer. Math. Monthly **83** (1976) 775–788
[54] Eklof, P.: Methods of logic in abelian group theory. S. 251–269 in: [3]
[55] Eklof, P.: Set theory and structure theorems. S. 275–284 in: [84]
[56] Eklof, P.: The structure of $\omega_1$-separable groups. Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983) 497–523
[57] Eklof, P.; Huber, M.: Abelian group extensions and the axiom of constructibility. Comment. Math. Helv. **54** (1979) 440–457
[58] Eklof, P.; Huber, M.: On the rank of Ext. Math. Z. **174** (1980) 159–185
[59] Eklof, P.; Huber, M.: On the p-ranks of Ext (A, G), assuming CH. S. 93–108 in: [83]
[60] Eklof, P.; Mekler, A.: On constructing indecomposable groups in L. J. Alg. **49** (1977) 96–103
[61] Eklof, P.; Mekler, A.: Infinitary stationary logic and abelian groups. Fundam. Math. **112** (1981) 3–15
[62] Eklof, P.; Mekler, A.: On endomorphism rings of $\omega_1$-separable primary groups. S. 320–339. In: [84]
[63] Eklof, P.; Mekler, A.; Shelah, S.: Almost disjoint abelian groups. Israel J. Math. **49** (1984) 34–54
[64] Felgner, U.; Schulz, K.: Algebraische Konsequenzen des Determiniertheitsaxioms. Arch. Math. **42** (1984) 557–563
[65] Frobenius, G.; Stickelberg, L.: Über Gruppen von vertauschbaren Elementen. J. f. d. reine angew. Math. **86** (1878) 217–262
[66] Fuchs, L.: Infinite abelian groups. Band I (1970), Band II (1973). New York: Academic Press
[67] Fuchs, L.: Indecomposable abelian groups of measurable cardinalities. Sympos. Math. **13** (1974) 233–244
[68] Gleason, A.: Groups without small subgroups. Ann. Math. **56** (1952) 193–212
[69] Göbel, R.: On stout and slender groups. J. Alg. **35** (1975) 39–55

[70] G ö b e l , R.: Darstellung von Ringen als Endomorphismenringe. Arch. Math. **35** (1980) 338–350
[71] G ö b e l , R.: Endomorphism rings of abelian groups. S. 340–353 in: [84]
[72] G ö b e l , R.: The existence of rigid systems of maximal size. S. 189–202 in: [85]
[73] G ö b e l , R.: Überabzählbare abelsche Gruppen. Monographie im Rahmen eines Forschungsprojektes beim Land NRW, in Vorbereitung. Opladen: Westdeutscher Verlag
[74] G ö b e l , R.: Torsion-free topological endomorphism rings in L. In Vorbereitung
[75] G ö b e l , R.; S h e l a h , S.: On semi-rigid classes of torsion-free abelian groups. J. Alg. **93** (1985) 136–150
[76] G ö b e l , R.; S h e l a h , S.: Modules over arbitrary domains I. Math. Z. **188** (1985) 325–337
[77] G ö b e l , R.; S h e l a h , S.: Modules over arbitrary domains II. Fundam. Math. (1986)
[78] G ö b e l , R.; S h e l a h , S.: Decompositions of arbitrary modules. In Vorbereitung
[79] G ö b e l , R.; W a l d , B.: Wachstumstypen und schlanke Gruppen. Sympos. Math. **23** (1979) 201–239
[80] G ö b e l , R.; W a l d , B.: Martin's axiom implies the existence of certain slender groups. Math. Z. **172** (1980) 107–121
[81] G ö b e l , R.; W a l d , B.: Lösung eines Problems von L. Fuchs. J. Alg. **71** (1981) 219–231
[82] G ö b e l , R.; W a l d , B.; W e s t p h a l , P.: Groups of integer valued functions. S. 161–178 in: [83]
[83] G ö b e l , R.; W a l k e r , E. A. (Hrsg.): Abelian group theory. Proc. Oberwolfach (1980). Springer LNM 874 (1981)
[84] G ö b e l , R.; L a d y , L.; M a d e r , A. (Hrsg.): Abelian group theory. Proc. Honolulu (1982/83). Springer LNM 1006 (1983)
[85] G ö b e l , R.; M e t e l l i , C.; O r s a t t i , A.; S a l c e , L. (Hrsg.): Abelian groups and Modules. Proc. of the Udine Conference, Udine April 9–14, 1984. Wien 1984: Springer
[86] G r e g o r y , J.: Notices Amer. Math. Soc. **20** (1973) A-500, Nr. 73T-E77; und Higher Souslin trees and the generalized continuum hypothesis. J. Sym. Logic. **41** (1976) 663–671
[87] G r i f f i t h , P. A.: Separability of torsion-free groups and a problem of J. H. C. Whitehead. Ill. J. Math. **12** (1968) 654–659
[88] G r i f f i t h , P. A.: A solution of the splitting mixed group problem of Baer. Trans. Amer. Math. Soc. **139** (1969) 261–269
[89] G r i f f i t h , P. A.: Infinite abelian groups. Chicago 1970: Univ. of Chicago Press
[90] G r i f f i t h , P. A.: $\aleph_n$-free abelian groups. Quart. J. Math. (Oxford) **23** (1972) 417–423
[91] H a l l e t t , J. T.; H i r s c h , K. A.: Torsion-free groups having finite automorphism groups. J. Alg. **2** (1965) 287–298
[92] H a r d y , G. H.; W r i g h t , E. W.: Einführung in die Zahlentheorie. München 1958: Oldenburg
[93] H a i n e s , J. S.: Problem 5. S. 365 in: [108]
[94] H i g m a n , G.: Almost free groups. Proc. Lond. Math. Soc. **1** (1951) 284–290
[95] H i l b e r t , D.: Mathematische Probleme. Nachr. der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math. phys. Klasse **3** (1900) 253–297
[96] H i l l , P.: On the freeness of abelian groups, a generalization of Pontrjagins theorem. Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970) 1118–1120
[97] H i l l , P.: The additive group of commutative rings generated by idempotents. Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973) 499–502
[98] H i l l , P.: New criteria for freeness in abelian groups II. Trans. Amer. Math. Soc. **196** (1974) 191–201
[99] H i l l , P.: A special criterion for freeness. Symp. Math. **13** (1974) 311–314
[100] H i l l , P.: The classification problem. S. 1–16. In: [85]
[101] H i l l e r , H.; H u b e r , M.; S h e l a h , S.: The structure of Ext (A, **Z**) in L. Math. Z. **162** (1978) 39–50
[102] H o d g e s , W.: In singular cardinality, locally free algebras are free. Algebra Universalis **12** (1981) 205–220
[103] H u b e r , M.: Methods of set theory and the abundance of separable abelian p-groups. S. 304–319 in: [84]
[104] H u b e r , M.: A simple proof for a theorem of Chase. Rendic. Padova **73** (1985)

[105] H u b e r , M.; W a r f i e l d , R. B.: Homomorphisms between cartesian powers of abelian groups. S. 202–227 in: [83]
[106] H u b e r , M.; W a r f i e l d , R. B.: On the torsion subgroup of Ext (A, G). Arch Math. **32** (1979) 5–9
[107] H u l a n i c k i , A.: Algebraic structure of compact abelian groups. Bull. Acad. Polon. Sci. **6** (1958) 71–73
[108] I r v i n , J.; W a l k e r , E. A. (Hrsg.): Topics in abelian groups. Chicago 1963: Scott, Foresman
[109] J a m b o r , P.: Rings with no superdecomposable modules. Arch. Math. **42** (1984) 517–519
[110] J e c h , T.: Set theory. New York 1978: Academic Press
[111] J e n s e n , C.: Les Foncteures Dérivés $\varprojlim$ et leurs Applications en Theorie de Modules. Springer LNM 245 (1972)
[112] J e n s e n , C.: On the structure of $\mathrm{Ext}_R$ (A, R). S. 215–226 in: K e r t e s z , A. (Hrsg.): Rings, modules and radicals. Colloqu. Math. Soc. Bolyai 6. Amsterdam 1973: North Holland
[113] J e n s e n , R.: The fine structure of the constructible hierarchy. Ann. Math. Logic **4** (1972) 229–308
[114] K a p l a n s k y , I.: Infinite abelian groups. Univ. of Michigan Press 1971
[115] K a u p , L.; K e a n e , M. S.: Induktive Limiten endlich erzeugter freier Moduln. Manuscr. Math. **1** (1969) 9–21
[116] The Kourovkoka Notebook, Unsolved problems in group theory. Amer. Math. Soc. Transl. **121** (1983) Hrsg. V. D. Mazurov, Y. I. Merzlyakov, V. A. Churkin (erste Ausg. 1965).
[117] K u e k e r , D.: Free and almost free algebras. Notices AMS (1973) # 701-02-05, p. A-31
[118] K u r a t o w s k i , K.; M o s t o w s k i , A.: Sur en problème de la théorie des groupes et son rapport à la topologie. Colloqu. Math. **2** (1951) 212
[119] L a m b e k , J.: Torsion theories, additive semantics and rings of quotients. Springer LNM 177 (1971)
[120] L a w r e n c e , J.: Countable abelian groups with a discrete norm are free. Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984) 352–354
[121] L i e b e r t , W.: Endomorphism rings of abelian p-groups. S. 239–258 in: Studies on Abelian groups. Paris 1968
[122] Ł o ś , J.: Linear equations and pure subgroups. Bull. Acad. Polon. Sci **7** (1959) 13–18
[123] M a t l i s , E.: Torsion-free modules. Chicago 1972: Univ. of Chicago Press
[124] M e k l e r , A.: The number of $\kappa$-free abelian groups and the size of Ext. S. 323–331 in: [3]
[125] M e k l e r , A.: How to construct almost free groups. Canad. Journ. Math. **32** (1980) 1206–1228
[126] M e k l e r , A.: $\aleph_1$-separable groups of mixed type. S. 114–126 in: [83]
[127] M e k l e r , A.: Proper forcing and abelian groups. S. 285–303 in: [84]
[128] M e k l e r , A.: Shelah's Whitehead groups and CH. Rocky Mt. J. **12** (1982) 271–278
[129] M o n t g o m e r y , D.; Z i p p i n , L.: Small subgroups of finite dimensional groups. Ann. Math. **56** (1952) 213–241
[130] M o r r i s , S. A.: Pontrjagin Duality and the structure of locally compact abelian groups. London Math. Soc. Lecture Notes 29. Cambridge 1977: Cambr. U. Press
[131] N a g a t a , M.: Local rings. New York 1952: Interscience
[132] N e u m a n n , B. H.; N e u m a n n , H.: On a class of abelian groups. Arch. Math. **4** (1953) 79–85
[133] v. N e u m a n n , J.: Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. Ann. Math. **34** (1933) 170–190
[134] N ö b e l i n g , G.: Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn E. Specker. Invent. Math. **6** (1968) 41–55
[135] N u n k e , R. J.: On direct products of infinite cycles. Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962) 66–71
[136] N u n k e , R. J.: Slender groups. Acta Sci. Math. Szeged. **23** (1962) 67–73
[137] N u n k e , R. J.: Whitehead's problem. S. 240–250 in: [3]
[138] P e t e r , F.; W e y l , H.: Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. Math. Ann. **97** (1927) 737–755

[139] Pontrjagin, L.: Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième problème de M. Hilbert. C. R. Acad. Sci. **198** (1934) 238–240
[140] Pontrjagin, L.: Sur les groupes abéliens continus. C. R. Acad. Sci. **198** (1934) 328–330
[141] Pontrjagin, L.: The theory of topological commutative groups. Ann. Math. **35** (1934) 361–388
[142] Ralph, W.: Variants of the singular complex and their connections with Banach algebras, Čech cohomology and coproducts. Doctoral Dissertation, Univ. of Waterloo (1982)
[143] Reid, G. A.: The theory of distributions for locally compact abelian groups and compact groups. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **16** (1966) 415–455
[144] Reid, G. A.: Almost free abelian groups. Lecture Notes. New Orleans 1966/67: Tulane University
[145] Richman, F.: Mixed local groups. S. 374–404 in: [83]
[146] Richman, F.: Mixed groups. S. 445–470 in: [84]
[147] Rotman, J.: On a problem of Baer and a problem of Whitehead on abelian groups. Acta Math. Hung **12** (1961) 245–254
[148] Sageev, G.; Shelah, S.: On the structure of Ext (A, $\mathbf{Z}$) in ZFC. J. Symb. Logic. **50** (1985) 302–315
[149] Sageev, G.; Shelah, S.: Weak compactness and the structure of Ext (A, $\mathbf{Z}$). S. 87–92 in: [83]
[150] Sageev, G.; Shelah, S.: Reflexivity in abelian groups. J. Symb. Logic (1985)
[151] Serre, J. P.: A course in arithmetic. Springer Graduate Texts 7 (1973)
[152] Shelah, S.: Classification theory and the number of non-isomorphic models. Amsterdam 1978: North Holland
[153] Shelah, S.: Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions. Israel J. Math. **18** (1974) 243–256
[154] Shelah, S.: Existence of rigid like families of abelian p-groups. S. 385–402 in Model-theory and Algebra, A memorial tribute to A. Robinson. Ed. Saracino und Weispfennig. Springer LNM 498 (1975)
[155] Shelah, S.: A compactness theorem in singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals. Israel J. Math. **21** (1975) 319–349
[156] Shelah, S.: The lazy Model-theoretician's guide to stability. Logique et Analyse **71/72** (1975) 241–308
[157] Shelah, S.: Whitehead groups may not be free even assuming CH I. Israel J. Math. **28** (1977) 193–203
[158] Shelah, S.: On uncountable abelian groups. Israel J. Math. **32** (1979) 311–330
[159] Shelah, S.: On successors of singular cardinals. S. 357–380 in: Logic Colloquium 1978. Studies in Logic and the Foundation of Math. 97, ed. M. Botta, D. v. Dalen, K. McAloon. Amsterdam 1979: North Holland
[160] Shelah, S.: Whitehead groups may not be free even assuming CH II. Israel J. Math. **35** (1980) 257–285
[161] Shelah, S.: Consistency of Ext (G, $\mathbf{Z}$) = Q. Israel J. Math. **39** (1981) 74–82
[162] Shelah, S.: On endo-rigid strongly $\aleph_1$-free abelian groups in $\aleph_1$. Israel J. Math. **40** (1981) 291–295
[163] Shelah, S.: Proper Forcing. Springer LNM 940 (1982)
[164] Shelah, S.: A combinatorial principle and endomorphism rings I: On p-groups. Israel J. Math. **49** (1984) 239–257
[165] Shelah, S.: A combinatorial theorem and endomorphism rings of abelian groups. S. 37–86. In: [85]
[166] Sollert, M.: Unabhängigkeitsaussagen in der Algebra, 350 S. Staatsexamensarbeit Essen (1982)
[167] Specker, E.: Die erste Cohomologiegruppe und Überlagerungen und Homotopie-Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helvet. **23** (1949) 303–333
[168] Specker, E.: Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen. Potug. Math. **9** (1950) 131–140
[169] Stein, K.: Analytische Funktionen mehrere komplexer Veränderlicher zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. Math. Ann. **123** (1951) 201–222

[170] Stenström, B.: Rings of Quotients. Berlin 1970: Springer
[171] Wald, B.: Schlankheitsgrade cotorsionsfreier Gruppen. Dissertation Essen (1979)
[172] Wald, B.: Martin Axiom und die Beschreibung gewisser Homomorphismen in der Theorie der $\aleph_1$-freien Gruppen. Manuscripta Math. **42** (1983) 297–309
[173] Wald, B.: On $\kappa$-products modulo $\mu$-products. S. 362–370 in: [84]
[174] Warfield, R. B.: Decomposability of finitely presented modules. Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970) 167–172
[175] Warfield, R. B.: Classification theory of abelian groups, II: Local theory. S. 322–349 in: [83]
[176] Weinberg, E. C.: Free lattice-ordered abelian groups. Math. Ann. **151** (1963) 187–199
[177] Zassenhaus, H.: Orders as endomorphism rings of modules of the same rank. J. London Math. Soc. **42** (1967) 180–182
[178] Zeeman, E. C.: On direct sums of free cycles. J. London Math. Soc. **30** (1955) 195–212
[179] Zimmermann-Huisgen, B.; Zimmermann, W.: Classes of modules with the exchange property. J. Alg. **88** (1984) 416–434

Rüdiger Göbel
Fachbereich 6, Mathematik
Universität Essen, Gesamthochschule
Universitätsstr. 3
4300 Essen 1

(*Eingegangen 1. 11. 1984*)

## Nachtrag vom 18. 08. 1985

**Ergänzungen zu § 3.** Das Problem 1 wurde inzwischen von J. Steprans [E24] gelöst. Jede Gruppe mit diskreter Norm ist (wie erwartet) frei.

**Ergänzungen zu § 4.** Das Problem 4 wurde von K. Eda und H. Ohta [E6] positiv entschieden: Es gibt schon in ZFC Gruppen A mit $|A| < \aleph_m$ (= erste meßbare Kardinalzahl) und nicht reflexivem Dual $A^*$:
Ist X ein hausdorffscher, topologischer Raum, dann sei $C(X, \mathbf{Z})$ der Ring aller stetigen Funktionen auf X mit Werten in $\mathbf{Z}$ versehen mit der diskreten Topologie. Die in Problem 3 genannte Reid-Klasse ist eine echte Teilklasse der Gruppen $C(X, \mathbf{Z})$, siehe [E4]. K. Edas nach Problem 3 genanntes Beispiel A ist von der Form $C(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$. Durch klevere Wahl des topologischen Raumes X erhält man die gewünschte Gruppe $C(X, \mathbf{Z})$ mit nicht reflexivem Dual. Der Raum $X = S \cup \{\omega_1\}$ ist dafür ein Beispiel, wobei $X \subseteq \omega_1 + 1$ mit der induzierten Ordnungstopologie von $\omega_1 + 1$ versehen ist und $S \subseteq \omega_1$ und $\omega_1 \setminus S$ stationär sind. Ein interessantes Nebenprodukt sind Kennzeichnungen algebraischer Eigenschaften der Gruppe $C(X, \mathbf{Z})$ durch (übersichtliche) topologische Bedingungen an X. In [E9] wurde obiges Beispiel von K. Eda und H. Ohta durch eine Gruppe A mit $|A| < \aleph_m$ ersetzt bei der Konstruktion und Nachweis, daß $A^*$ nicht reflexiv ist, ohne topologische Hilfsmittel geführt sind. Wenn man induktiv $A^{*n+1} = (A^{*n})$ definiert, dann ist für obiges Beispiel A auch $A^{*n}$ nicht reflexiv. Eine Gruppe G heiße *stark nicht reflexiv*, falls sogar $G \ncong G^{**}$. Insbesondere ist also die Auswertungsabbildung kein Isomorphismus. In (ZFC + CH) haben P. Eklof, A. Mekler und S. Shelah [E9] kürzlich eine Gruppe A der Mächtigkeit $\aleph_1$ gefunden, so daß A nicht reflexiv, aber $A^{*n} \cong A^{*n+2} \subseteq \mathbf{Z}^\omega$ für alle $n \geqslant 1$

ist. In ZFC + $\diamond_{\omega_1}$ kann man mehr beweisen [E9]: Es gibt $\aleph_1$-Gruppen A mit $\Gamma(A^{*n}) \neq \Gamma(A^{*n+2})$ für alle n. Insbesondere ist $A^{*n}$ stark nicht reflexiv. Die $\Gamma$-Invarianten sind in § 7 definiert. Das gelöste Problem 4 führt zu dem bisher unbeantworteten schärferem

**Problem 4*.** Gibt es in ZFC Gruppen A mit $|A| < \aleph_m$ so, daß $A^*$ nicht stark reflexiv ist?

Ein Beispiel der Mächtigkeit $\aleph_m$ ist das Produkt $\mathbf{Z}^{\aleph_m}$, da $(\mathbf{Z}^{\aleph_m})^* \cong \mathbf{Z}^{(\kappa)}$ mit $\kappa > \aleph_m$. Eine Variante von Problem 4* ist die Frage nach der Existenz von Gruppen A mit $A^*$ $\aleph_1$-separabel (siehe § 7), reflexiv, aber nicht frei. Diese Frage ist in (ZFC + V = L) und auch in (ZFC + MA) positiv entschieden [E9]. Allgemeinere Resultate über reflexive Moduln findet man in [E17] und [105].
Eine Analyse der in § 4 definierten „Schlankheit" führte in [E5] zu der folgenden in (ZFC + $\neg$CH) unentscheidbaren Aussage:
Für alle $U \subseteq \mathbf{Z}^\omega$ mit $|U| < 2^{\aleph_0}$ und alle unabhängigen Elemente $\{u_n : n \in \omega\} \subseteq U$ existiert ein Homomorphismus $\phi : U \to \mathbf{Z}$ mit supp $(\phi) = \{n : \phi(u_n) \neq 0\}$ endlich.
Der ebenfalls in § 4 genannte Satz von U. Felgner und K. Schulz [64], daß die Nöbelingsche Gruppe B in (ZF + Determiniertheitsaxiom DC) nicht frei ist, wurde von B. Wald [E26] inzwischen verschärft und ergänzt:
In (ZF + DC) bildet die Nöbelingsche Gruppe $B = B_{\aleph_0}$ *keine* Ausnahme unter den monotonen Gruppen: Es gilt (ebenfalls) $B^* \cong \mathbf{Z}^{(\aleph_0)}$; aber trotzalledem ist B schlank.
Die in § 4 diskutierte zugehörige Klasse $\mathcal{B}$ (der B-schlanken Gruppen) enthält $\mathbf{Z}$ – in ZFC ist $\mathcal{B} = \{0\}$ wegen des Satzes von G. Nöbeling; siehe § 4. In (ZF + DC) sind aber auch alle Ringe R mit $|R| \leqslant \aleph_0$ oder $R \subseteq \mathbf{R}$ schlank; z. B. sind die Körper $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ schlank, was für die Linearformen nach $\mathbf{R}$ auch $(\mathbf{R}^\omega)^* \cong \mathbf{R}^{(\omega)}$ impliziert.
Die Problematik mit DC kann man vermeiden: Die oben genannten Aussagen folgen schon aus ZF und dem schwächeren Axiom (S):
Dazu sei $A \subseteq \mathbf{N}^\mathbf{N}$ und $S_A$ folgendes Spiel: Zwei Spieler (I, II) wählen abwechselnd natürliche Zahlen. Das Spiel endet nach $\omega$ Schritten mit einer Folge $a \in \mathbf{N}^\mathbf{N}$. Der Spieler I gewinnt, wenn $a \in A$. Das Axiom (S) besagt:
Für jedes A hat einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie. R. Solovay [E23] konstruierte Modelle für ZF + (S) unter Annahme der Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl. Nach S. Shelah [E22] ist ZF + (S) jetzt auch ohne die unerreichbare Kardinalzahl (relativ) konsistent.
Der Nunkesche Satz (siehe § 2), daß alle epimorphen Bilder von $\mathbf{Z}^{\aleph_0}$ die Form $\mathbf{Z}^\rho \oplus C$ mit $\rho \leqslant \aleph_0$ und C cotorsion haben, läßt sich leider in keiner naheliegenden Weise auf $\mathbf{Z}^\kappa (\kappa > \aleph_0)$ erweitern (siehe § 5). Daran erkennt man die Schwierigkeit von Problem 5. Ein Teilresultat ist jedoch die folgende kürzlich von B. Wald [E27] und unabhängig von K. Eda (1985, unveröffentlicht) bewiesene Verallgemeinerung des Satzes von Nunke:
Sei $\mathbf{Z}^{[\kappa]}$ die Gruppe aller ganzzahligen Funktionen auf $\kappa$ mit höchstens abzählbarem Träger. Dann haben alle epimorphen Bilder von $\mathbf{Z}^{[\kappa]}$ die Form $\mathbf{Z}^{[\rho]} \oplus C$ mit $\rho \leqslant \kappa$ und C cotorsion.
Es sei noch angemerkt, daß die Beweise des Nunkeschen Satzes in [66] Band II, Lemma 95.1 sowie [E15] und [E16] falsch sind, wie schon aus dem Beispiel (1978) auf S. 233 in R. Göbel und B. Wald [79] folgt.

**Ergänzung zu § 7 und insbesondere zu Problem 10.** Vergleiche den Anhang von [E7] sowie [E8], [E18] und [E21]. Das auch zu § 7 gehörende Problem 2 sollte – auch im Blick auf § 8 – in verschärfter Form untersucht werden:
*Problem* 2*. Welche algebraischen Eigenschaften können $\kappa$-Gruppen A in ZFC haben? (Beispiele: $\kappa = \chi_n$, $A^* = 0$ oder A unzerlegbar, . . .)

**Ergänzung zu § 8.** Mit Hilfe der in § 8 genannten Methoden für abelsche Gruppen konnte folgender Satz [E3] bewiesen werden, der für G = 1 ein älteres Problem der Körpertheorie von E. Fried, C. U. Jensen u. a. beantwortet: Zu jedem Körper K der Charakteristik $\neq 2$ und zu jeder Gruppe G gibt es eine Körpererweiterung F von K mit Aut F = G. Ein schönes Beispiel ist K = $\mathbf{C}$ (= komplexe Zahlen) und G = 1. Voraussichtlich wird in der noch nicht abgeschlossenen Arbeit auch noch der Fall Charakteristik = 2 entsprechend behandelt.

**Ergänzung zu § 9.** Ein Beitrag zu einer abgeschwächten Form von Problem 14 befindet sich in [E11], [E13] und unabhängig in [E2]. Dort kann man Problem 14 für Ringe mit wenigstens fünf (comaximalen) Primidealen beantworten; die Methoden basieren auf [17] und [153] und verallgemeinern [17]. Insbesondere können mit [E11], [E13] die Kardinalzahleinschränkungen in S. Brenner, C. M. Ringel [E0] bei der Untersuchung von Moduln über zahmen Ringen weggelassen werden.
Die Folgerung in § 9 wird durch Ergebnisse in [E10] ergänzt.

## Ergänzungen zum Literaturverzeichnis

[E0] Brenner, S.; Ringel, C. M.: Pathological modules over tame rings. J. London Math. Soc. (2) **14** (1976) 207–215
[E1] Butler, M. C. R.: On locally free torsion-free rings of finite rank. J. London Math. Soc. **43** (1968) 297–300
[E2] Corner, A. L. S.: Abstract der Oberwolfachtagung „Abelsche Gruppen", 1985
[E3] Dugas, M.; Göbel, R.: The existence of rigid fields. Manuskript 1985
[E4] Eda, K.: A minimal flabby sheat and an abelian group. Tsukuba J. Math. 7 (1983) 157–168
[E5] Eda, K.: A note on subgroups of $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$. S. 371–374 in: [84]
[E6] Eda, K.; Ohta, H.: On abelian groups of integer-valued continuous functions, their $\mathbf{Z}$-duals, and $\mathbf{Z}$-reflexivity. Ersch. in [E14]
[E7] Eklof, P.: Set theoretic methods in homological algebra and abelian groups. Russ. Übers. von L. Ya. Kulikov und S. Richkov (Moskau, 1986) mit Anhang: Recent results in set theoretic algebra
[E8] Eklof, P.; Mekler, A.; Shelah, S.: When $\kappa$-free implies strongly $\kappa$-free. Manuskript 1985, ersch. in: [E14]
[E9] Eklof, P.; Mekler, A.; Shelah, S.: On reflexivity. Manuskript 1985
[E10] Franzen, B.; Göbel, R.: Prescribing endomorphism rings – the cotorsion-free case. Ersch. in Proc. London Math. Soc. (1986)
[E11] Franzen, B.; Göbel, R.: The Brenner-Butler-Corner-Theorem and its application to modules. Ersch. in: [E14]
[E12] Gauß, C. F.: Werke. 12 Bände, Göttingen 1870–1927, s. B. 4 (Disquisitiones mathematicae)
[E13] Göbel, R.: Vector spaces with distinguished subspaces. Manuskript 1985
[E14] Göbel, R.; Walker, E. A.: Abelian Group Theory. Proc. Oberwolfach 1985. London 1986: Gordon and Breach

[E15] Goldsmith, B.: A topological approach to a problem of Nunke. Arch. Math. **30** (1978) 271–274
[E16] Goldsmith, B.: A note on products of infinite cyclic groups. Rend. Math. Pad. **64** (1981) 243–246
[E17] Huber, M.: On reflexive modules and abelian groups. J. Alg. **82** (1983) 469–487
[E18] Magidor, M.; Shelah, S.: On $\kappa$-freeness. Abstracts Amer. Math. Soc. **4** (1983) 484
[E19] Nový, L.: The origins of modern algebra.Leiden 1973: Noordhoff Internat. Publ.
[E20] Schering, E.: Die Fundamental-Classen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. Abh. der Göttinger Akad. **14** (1869) 3–13
[E21] Shelah, S.: Incompactness in regular cardinals. Notre Dame J. Formal Logic (1986)
[E22] Shelah, S.: erscheint in Israel J. (1986)
[E23] Solovay, R.: A model of set theory in which every set of reals is Lebesque measurable. Ann. of Math. **92** (1970) 1–56
[E24] Steprans, J.: A characterization of free abelian groups. Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985) 347–349
[E25] van der Waerden, B. L.: A History of Algebra. Berlin, New York 1985: Springer
[E26] Wald, B.: Linear Forms of abelian groups and vector spaces in a set theory without the axiom of choice. Manuskript 1985
[E27] Wald, B.: Integer valued functions with countable support. Arch d. Math. **45** (1985) 203–206

# Buchbesprechungen

**Landau, E., Collected Works, Vol. I, II** (Editors: Mirski, L., Schoenberg, I. J., Schwarz, W., Wefelscheid, H.), Essen: Thales Verlag 1985, vol. I: 365 p., hardcover, DM 224,–, vol. II: 407 p., hardcover, DM 224,–

Edmund Landau (14. 2. 1877–19. 2. 1938) wurde 1909 von Berlin als Nachfolger von Minkowski nach Göttingen berufen und wirkte dort bis 1933, wo er durch die politischen Ereignisse gezwungen wurde, nach Berlin zurückzukehren. Sein Wirken als Privatdozent in Berlin und als Professor in Göttingen war von einer außerordentlichen Durchschlagskraft, von der man sich heute kaum mehr eine Vorstellung machen kann. Seine Bücher, so vor allem sein Handbuch „Die Lehre von der Verteilung der Primzahlen" und seine Vorlesungen über Zahlentheorie, seine „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse" und seine anderen Werke wurden von der ganzen Welt studiert. Der sogenannte Landaustil (genauer: Landaustil Nr. 2) „Voraussetzung – Behauptung – Beweis" wurde kopiert und kritisiert, ja sogar auf das Heftigste bekämpft. Neben seinen Büchern, die auch nach seinem Tod neu aufgelegt wurden, hat er über 255 Arbeiten geschrieben. Diese Arbeiten – ebenfalls in späteren Jahren im Landaustil gehalten, zeichneten sich durch äußerste Genauigkeit und Schärfe aus und wurden bei ihrem Erscheinen mit großer Begeisterung vom mathematischen Publikum gelesen. Diese Arbeiten und auch die Persönlichkeit von Landau sind, durch die Umstände bedingt, etwas in den Hintergrund getreten, wie dies auch bei anderen großen Mathematikern zunächst der Fall war. 1968 erschien ein Erinnerungsband, herausgegeben von Paul Turan, in dem die Worte von Hilbert anläßlich des Todes von Landau in Erinnerung gebracht wurden: „Er war der pflichttreueste von uns allen".

Es folgt nun als weiterer Schritt hier, vom Thales-Verlag herausgegeben, eine Sammlung seiner Arbeiten gestaltet nach der Sammlung der Sonderdrucke, die sich im Besitz von Landau gefunden haben. (Zu den Herausgebern beim Thales-Verlag Mirsky L. (Sheffield), Schoenberg I. J. (Madison), Schwarz W. (Frankfurt) konnten auch noch Bateman und Montgomery gewonnen werden.)

Dabei wurden auch seine handschriftlichen Korrekturen berücksichtigt. Es liegen jetzt zwei Bände vor, beginnend mit der Nr. 1 „Zur relativen Wertbemessung der Turnierresultate" bis zur Nr. 43 „Über den Zusammenhang einiger neuerer Sätze der analytischen Zahlentheorie". Es enthält ferner die Nachrufe von Hardy und Heilbronn und den Nachruf von Knopp im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **54** (1951).

Dazu kommt noch eine Würdigung von Mirsky und ein Verzeichnis der Arbeiten von Landau von Schoenberg. Dem ersten Band ist ein Jugendbildnis von Landau beigegeben, dem zweiten Band ein Bild, das ihn mit Poincaré, Mittag-Leffler und Runge zeigt. Man kann nur hoffen, daß die weiteren Bände rasch folgen werden.

Die Ausstattung ist eine dem Inhalt würdige, das Studium dieser gesammelten Werke wird zum Fortschritt der Mathematik meiner Überzeugung nach viel beitragen, gerade auf den Gebieten, auf denen Landau besonders gearbeitet hat, nämlich auf den Gebieten der analytischen Zahlentheorie und der Funktionentheorie.

Wien E. Hlawka

**Scharlau, W., Quadratic and Hermitian Forms** (Grundlehren, Band 270), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, x + 421 pp., hard cover, DM 138,–

Dieses Buch behandelt die algebraische Theorie der quadratischen und hermitischen Formen als selbständiges und methodisch in sich abgeschlossenes Teilgebiet der modernen

Algebra. Der Verfasser ist einer der besten Experten auf diesem Gebiet, der selbst seit fast 20 Jahren wesentlich zu den erzielten Fortschritten beigetragen hat. Auch das Buch selbst ist in etwa 10 Jahren langsam „gereift". Nur so ist es möglich, daß auf 400 Seiten eine derartige Fülle an Material behandelt wird. Das sieht man am besten beim Vergleich mit den anderen Büchern zu diesem Thema, insbesondere denen von O'Meara (1963), Lam (1973), Milnor-Husemoller (1973) und Cassels (1978). Ein großer Teil des Inhalts dieser Bücher findet sich auch in dem Buch von Scharlau, darüber hinaus werden hier zum ersten Mal in Buchform quadratische und hermitische Formen in additiven Kategorien, Involutionen auf einfachen Algebren und die Klassifikation von hermitischen Formen über Zahlkörpern behandelt. Daraus folgt natürlich, daß das Buch verhältnismäßig knapp geschrieben und für den Anfänger nicht an allen Stellen leicht zu lesen ist. Fortgeschrittene Studenten sollten den Ansprüchen aber genügen und auch mit den Beweisen zurechtkommen. Nur ganz wenige Resultate, die mit gutem Recht nicht mehr in den Rahmen dieses Buches passen, werden ohne Beweis aus der Literatur zitiert, insbesondere Sätze aus der algebraischen Zahlentheorie und Klassenkörpertheorie sowie der Hilbertsche Nullstellensatz. Abgesehen davon ist das Buch „selfcontained", einige besonders wichtige Sätze werden sogar mehrfach bewiesen und die Kapitel sind so angelegt, daß man sie weitgehend unabhängig voneinander lesen kann. Insgesamt möchte ich sagen: Ein sehr schönes Buch, das in geradezu idealer Weise dem Serientitel „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften" entspricht.

Zum Inhalt im einzelnen: *Kap. 1* „Basic Concepts" enthält die Grundbegriffe über symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen (und Räume) bis zum Satz von Witt einschließlich, alles über einem Körper K mit von 2 verschiedener Charakteristik. In einem Anhang (§ 6) werden die Begriffe auf den Fall eines kommutativen Ringes R mit $2 \in R^*$ anstelle von K verallgemeinert und einige Sätze bewiesen, wenn R außerdem lokal ist.

*Kap. 2* „Quadratic Forms over Fields" ist mit fast 80 Seiten das längste Kapitel. Hier findet man den Wittring W(K) und den Witt-Grothendieckring $\hat{W}(K)$ der symmetrischen Bilinearformen über K, die Invarianten Dimension, Diskriminante und Signatur bezüglich einer Anordnung von K, die Berechnung von W(K) und $\hat{W}(K)$ für endliche Körper und euklidische Körper (z. B. $K = \mathbf{R}$) sowie den Satz, daß K genau dann pythagoreisch ist, wenn $\hat{W}(K)$ torsionsfrei ist. Ferner werden für eine Grundkörpererweiterung $r_{L/K} : K \to L$ die induzierte Abbildung $r^*_{L/K} : W(K) \to W(L)$ und (falls L/K endlich) für eine K-lineare Abbildung $s : L \to K$ die induzierte „Scharlau-Spur" $s_* : W(L) \to W(K)$ behandelt. Damit werden insbesondere die Fälle $[L : K] = 2m + 1$ (Satz von T. A. Springer) und $[L : K] = 2$ (Exaktes Dreieck von Elman-Lam) sowie die Torsionsuntergruppe $W_t(K)$ von W(K) studiert (Es gibt nur 2-Torsion). Anschließend folgen das auf den Referenten zurückgehende Lokal-Global-Prinzip ($\Phi \in W_t(K) \Leftrightarrow \mathrm{sign}_P(\Phi) = 0$ für alle Anordnungen P von K), die Bestimmung der Primideale und des Radikals von W(K), die Anwendung der Verlagerungsmethode auf den Fall einer Galois-Erweiterung (Satz von Rosenberg-Ware), die Beschreibung des Wittrings durch Erzeugende und Relationen (Witt) sowie ihre Verallgemeinerung auf geeignete Gruppenringe (Knebusch-Rosenberg-Ware). Danach werden multiplikative Formen eingeführt und damit einige Sätze über die Struktur von W(K) erneut bewiesen. Nach einem kurzen Paragraphen über Quaternionenalgebren folgt die Behandlung der Hasse-(Witt-)Invarianten mithilfe von Steinberg-Symbolen und der Satz von Milnor, daß durch $(\alpha, \beta) \to \langle 1, -\alpha, -\beta, \alpha\beta \rangle$ ein universelles Symbol $\sigma : \dot{K} \times \dot{K} \to I^2/I^3$ induziert wird (I ist das fundamentale Ideal der Formen gerader Dimension in W(K)). Der berühmte Satz von Merkurjev (1982), daß $I^2/I^3 \cong Br_2(K)$ (Untergruppe der Elemente der Ordnung $\leqslant 2$ in der Brauergruppe von K) ist, wird erwähnt, aber nicht bewiesen. Die Vermutungen von Milnor über den Bezug der höheren Faktorgruppen $I^n/I^{n+1}$ zu entsprechenden Gruppen der algebraischen K-Theorie und Kohomologietheorie bleiben unerwähnt. Dagegen wird der Klassifikationssatz von Elman-Lam, wonach quadratische Formen über K genau dann durch die „klassischen" Invarianten Dimension, Diskriminante, Witt-Invariante und alle Signaturen klassifiziert werden, wenn $I^3(K)$

torsionsfrei ist, vollständig bewiesen. Daß es außer den in späteren Kapiteln behandelten lokalen und globalen Körpern der Zahlentheorie eine weite Klasse von Körpern gibt, für welche die entwickelte Theorie zur Gewinnung konkreter Aussagen über quadratische Formen führt, wird durch die beiden letzten Paragraphen dieses Kapitels dargetan. § 15 behandelt $C_i$-Körper und enthält z. B. einen superkurzen Beweis des Satzes von Chevalley-Warning über endliche Körper, einen eleganten Beweis (nach Nastold) des homogenen Hilbertschen Nullstellensatzes aus dem gewöhnlichen Nullstellensatz und die Hauptsätze über $C_i$-Körper (Tsen, Lang, Nagata) samt Beweisen. § 16 behandelt die u-Invariante nichtreeller Körper (z. B. ist stets $u \neq 3, 5, 7$), einen Satz von M. Kneser über die Werte quadratischer Formen (aus dem $u \leqslant |\dot{K}/\dot{K}^2|$ folgt) und den Satz von Leep (1983) über Systeme quadratischer Formen.

*Kap. 3* „Quadratic Forms over Formally Real Fields“ beginnt mit der Artin-Schreier-Theorie der (formal-) reellen und reellabgeschlossenen Körper, enthält dann einen eleganten Beweis (nach F. Lorenz) des Homomorphiesatzes von S. Lang, die Artinsche Lösung des 17. Hilbertschen Problems über positiv definite rationale Funktionen auf reellen Varietäten, den reellen Nullstellensatz von Dubois-Risler mit einem Beweis von Prestel und Sätze über die Fortsetzung von Anordnungen und Signaturen in endlichen Körpererweiterungen L/K. Außerdem findet man hier den Raum $X_K$ aller Anordnungen P des reellen Körpers K mit seinen wichtigsten algebraischen und topologischen Eigenschaften, die totale Signatur $\wedge : W(K) \to C(X_K, Z)$, deren Kern $W_t$ und Kokern jeweils 2-Torsionsgruppen sind (damit erneuter Beweis des Lokal-Global-Prinzips für W(K)), und schließlich einen Beweis des wichtigen Lokal-Global-Prinzips für schwache Isotropie von Bröcker und Prestel. Hierzu ist vor allem die Theorie der quadratischen Semiordnungen zu entwickeln, einige Grundbegriffe über Bewertungen und ihren Zusammenhang mit Anordnungen werden in einem Anhang dargestellt. Eine Form $\Phi$ heißt schwach isotrop, wenn die Form $m \times \Phi = \Phi + \ldots + \Phi$ für eine hinreichend große natürliche Zahl m isotrop ist.

*Kap. 4* „Generic Methods and Pfister Forms“ enthält vor allem diejenigen Ergebnisse über quadratische Formen, in denen transzendente Erweiterungen eine wesentliche Rolle spielen. Dazu gehören die Darstellungssätze von Cassels, die Charakterisierung der Formen $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle = \bigotimes_{i=1}^{n} \langle 1, a_i\rangle$ als generisch multiplikative Formen, der Krullsche Durchschnittssatz $\bigcap_n I^n = 0$ bzw. das zu seinem Beweis erforderliche „Main Theorem of Arason und Pfister“ (in der Terminologie von Lam), der von Knebusch eingeführte generische Nullstellen- und Zerfällungskörper einer anisotropen Form sowie die Filtrierung des Wittrings durch die Ideale $J_n = \{\varphi \in W \mid \deg \varphi \geqslant n\}$ von Arason-Knebusch. Hierbei ist $\deg \varphi = d$, wenn die „Leitform“ $\rho$ zu $\varphi$ die Dimension $2^d$ hat; es gilt $I^n \subset J_n$, die Frage der Gleichheit ist eines der schwierigen noch ungelösten Probleme. Anwendungen dieser generischen Methoden wie z. B. die quantitative Lösung des 17. Hilbertschen Problems im Körper $\mathbf{R}(X_1, \ldots, X_n)$ und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener Stufe $s = 2^k$ sind an passender Stelle eingebaut.

*Kap. 5* „Rational Quadratic Forms“ ist besonders bemerkenswert. Zwar wird hier der Stoff von Gauß und Minkowski behandelt, aber in einer sehr modernen und eigenwilligen Darstellungsweise, die ihre Fruchtbarkeit vor allem später in Kap. 6 und 7 erweist. Das Kapitel beginnt mit symmetrischen Bilinearformen und quadratischen Formen auf endlichen abelschen Gruppen M mit Werten in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Bei variablem M führen sie zu einem Wittring W und einer Wittgruppe WQ. Diese werden mit Hilfe von Gaußschen Summen berechnet, für den 2-primären Anteil von WQ gilt z. B. $WQ(2) = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} + \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Es folgt die Theorie der $\mathbf{Z}$-Gitter L. Ist $L^{\#}$ das duale Gitter, so ist $M = L^{\#}/L$ eine endliche abelsche Gruppe von der Ordnung $|\det L|$. Nach Einführung der (zweiten) Restklassenhomomorphismen $\partial_p : W(Q) \to W(\mathbf{F}_p)$ ist es dann leicht, die Wittgruppen $W(\mathbf{Q})$ und $W(\mathbf{Z})$ vollständig und explizit zu berechnen. Es gilt $W(\mathbf{Q}) \cong W(\mathbf{R}) \oplus W \cong \mathbf{Z} \oplus \bigoplus_p W(\mathbf{F}_p)$, $W(\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. Die Beweise stammen von Milnor. Die weiteren Abschnitte dieses Kapitels enthalten einen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes mit Hilfe eines kanonischen Homomorphismus $\chi : W(\mathbb{Q}) \to T$ in die Gruppe T der 8. Einheitswurzeln, die vollständige Klassifikation der quadratischen Formen über den p-adischen Körpern $\mathbb{Q}_p$, den Satz von Hasse-Minkowski für $\mathbb{Q}$ (zu dessen Beweis der Dirichletsche Primzahlsatz benutzt wird) und die explizite Berechnung der Gaußschen Summen $G(2m) = \sum_{k=1}^{2m} \exp\left(\frac{\pi i k^2}{2m}\right)$.

*Kap. 6* „Symmetric Bilinear Forms over Dedekind Rings and Global Fields" verallgemeinert die Ergebnisse von Kap. 5 auf Dedekindringe R und ihre Quotientenkörper K (unter der Einschränkung char $R \neq 2$). Einige Grundbegriffe über Dedekindringe werden vorausgesetzt bzw. zitiert. Zentrales Thema sind die folgenden exakten Sequenzen und Isomorphien. Sei WT(R) die Wittgruppe der regulären symmetrischen Bilinearformen auf endlich erzeugten R-Torsionsmoduln, wobei schwach metabolische Formen mit 0 identifiziert werden, Dann ist die kanonische Sequenz $0 \to W(R) \to W(K) \xrightarrow{\delta} WT(R)$ exakt und es gilt $WT(R) \cong \coprod_p WT(R_p)$ (Milnor) sowie $WT(R_p) \cong W(k_p)$ (abhängig von der Wahl des Primelements $\pi$ in $R_p$).

Ist $R_p$ 2-henselsch und char $k_p \neq 2$, so ist auch $W(R_p) \cong W(k_p)$, also $W(K_p) = W(k_p) + W(k_p)$ (Springer). Damit können die quadratischen Formen über p-adischen Körpern vollständig behandelt werden (für einige Details bei Restklassencharakteristik 2 wird auf O'Meara verwiesen). Ist $R = k[X]$ ein Polynomring, so gelten folgende Verschärfungen: $\delta$ ist surjektiv (Milnor), $W(R) \cong W(k)$ (Harder), $W(K) \xrightarrow{\partial} \coprod_{p,\infty} W(k_p) \xrightarrow{s} W(k) \to 0$ exakt (Scharlau).

Ist K ein globaler Körper, so wird zunächst der Satz von Hasse-Minkowski samt seinen Folgerungen und Ergänzungen (Existenz von Formen mit vorgeschriebenen lokalen Invarianten etc.) bewiesen, wobei allerdings der globale Quadratsatz und der Hassesche Normensatz nur zitiert werden. Anschließend wird noch die Exaktheit der Sequenz $0 \to W(R) \to W(K) \xrightarrow{\delta} WT/R) \to C/C^2 \to 0$ (Knebusch-Scharlau) bewiesen, wobei C die Idealklassengruppe von R ist. Schließlich enthält dieses Kapitel einen schönen Beweis des Hilbertschen Reziprozitätsgesetzes für globale Körper K durch Reduktion auf den „rationalen" Teilkörper $\mathbb{Q}$ bzw. k(X), einen Beweis des Satzes von Hecke über die Differente und den Residuensatz von Geyer-Harder-Knebusch-Scharlau für differentialwertige quadratische Formen in algebraischen Funktionenkörpern.

*Kap. 7* „Foundations of the Theory of Hermitian Forms" verfolgt zwei Ziele, zum einen die Einführung hermitischer Formen, zum anderen die Begründung einer allgemeinen Theorie von Formen auf additiven Kategorien. Die wesentlichen Objekte sind ein Ring R mit Involution *, ein Element $\lambda$ aus dem Zentrum von R mit $\lambda\lambda^* = 1$, $\lambda$-hermitische R-Moduln (M, h) mit $h(x, y) = \lambda h(y, x)^*$, die Dualität $h : M \to M^* = \mathrm{Hom}(M, R)$, hyperbolische Räume sowie die Grothendieckgruppe $KU^\lambda(R, *)$ und die Wittgruppe $W^\lambda(R, *)$. Um auch Formen auf Torsionsmoduln mit einschließen zu können, werden noch allgemeiner sog. hermitische Kategorien $(\mathcal{M}, *)$ definiert. Anschließend werden nach Bak Formparameter $\Lambda$, quadratische Formen und schließlich die Wittgruppe $WQ^{\lambda,\Lambda}(\mathcal{M}, *)$ definiert. Ein Formparameter $\Lambda$ ist in dem oben geschilderten Fall (R, *) eine additive Untergruppe von R mit $\{a - \lambda a^* \mid a \in R\} = \Lambda^{min} \subset \Lambda \subset \Lambda^{max} = \{a \in R \mid a = -\lambda a^*\}$, die quadratische Form zu h ist durch $q_h : M \to R/\Lambda$ mit $q_h(x) = h(x, x) + \Lambda$ gegeben. Unter jeweils passenden Voraussetzungen werden dann Verlagerung und Reduktion von hermitischen Kategorien, hermitische Formen über Schiefkörpern, hyperbolische Formen und die unitäre Gruppe, alternierende Formen und die symplektische Gruppe, quadratische Formen und die orthogonale Gruppe (Sätze von Witt und Cartan-Dieudonné unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen) und der Satz von Krull-Schmidt (direkte Zerlegung in unzerlegbare Bestandteile) behandelt.

Einige Beispiele (u. a. Systeme von quadratischen Formen über einem Körper k) beleuchten die Nützlichkeit dieser allgemeinen und ziemlich technischen Theorie.

*Kap. 8* „Simple Algebras and Involutions" enthält die klassische Theorie der einfachen Algebren mit den Sätzen von Wedderburn und Skolem-Noether sowie der Brauer-Gruppe. Dann folgt die Theorie von Albert über die Existenz und Klassifikation von Involutionen auf einfachen Algebren in einer eleganten Version nach Scharlau und Riehm. Dabei kommen auch reduzierte Norm und Spur sowie die Korestriktion von Algebren bzw. separabler quadratischer Erweiterungen zu Sprache. Schließlich werden noch Quaternionenalgebren (auch bei Charakteristik 2), zyklische Algebren und die kanonische Involution auf einer Gruppenalgebra $A = K[G]$ behandelt.

*Kap. 9* „Clifford Algebras" bringt in knapper aber im wesentlichen klassischer Darstellung das Wichtigste über die Clifford-Algebra und Clifford-(= Witt-) Invariante eines quadratischen Raums, die Spinor-Norm und die Arf-Invariante.

*Kap. 10* „Hermitian Forms over Global Fields" behandelt die Klassifikation (durch lokale und globale Invarianten) und das Lokal-Global-Prinzip für $\lambda$-hermitische Formen über globalen Körpern der Charakteristik $\neq 2$. Die Ergebnisse stammen zum größten Teil von Landherr (1938), Eichler und M. Kneser und werden hier unter Verwendung der Ergebnisse aus den Kapiteln 7 und 8 sowie einiger durch Zitate belegter Ergebnisse der algebraischen Zahlentheorie in möglichst einheitlicher Weise abgeleitet. Trotzdem erfordert dieses Kapitel noch mehr als 40 Seiten. Gemäß der Natur des Grundkörpers und der Involution $*$ hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Orthogonaler Fall: Quadratische Formen über Körpern (erledigt) und schiefhermitische (d. h. $\lambda = -1$) Formen über Quaternionen-Schiefkörpern (§ 3 und § 4).

2) Symplektischer Fall: Alternierende Formen über Körpern (trivial) und hermitische Formen (d. h. $\lambda = 1$) über Quaternionen-Schiefkörpern (§ 1).

3) Unitärer Fall: Hermitische Formen über Körpern mit nichttrivialer Involution $*$ (§ 1) und hermitische Formen über Schiefkörpern D mit unitärer Involution $*$ (d. h. $*$ ist nichttrivial auf dem Zentrum K von D, hierbei kann für $[D : K] = n^2$ auch der Fall $n > 2$ auftreten). Dieser schwierigste Fall wird in §§ 6–8 behandelt.

Den allgemeinsten Fall kann man auf die ebengenannten zurückführen, jedoch ist zu beachten, daß ein Schiefkörper D beim Übergang zu einer Lokalisierung $K_\mathfrak{p}$ von K auch zerfallen kann. In § 1 wird für eine separable quadratische Erweiterung $K/k$ mit nichttrivialem Automorphismus $*$ die exakte Sequenz von Jacobson $0 \to W^1(K, *) \to W(k) \to W(K)$ abgeleitet. Ferner wird gezeigt, daß für einen Quaternionen-Schiefkörper D mit kanonischer Involution $*$ und Zentrum K die natürliche Abbildung $h \to q_h$ mit $q_h(x) = h(x, x)$ eine Injektion $W^1(D, *) \to W(K)$ induziert. Damit sind diese beiden Fälle auf quadratische Formen zurückgeführt. § 2 stellt die nötigen Sätze über Brauergruppen lokaler und globaler Körper zusammen, mit denen dann in § 3 die lokale und in § 4 die globale Theorie der schiefhermitischen Formen über Quaternionenschiefkörpern $D/K$ mit quadratischen Zwischenkörper $L/K$ behandelt werden kann. Grundlegend ist hier die exakte Sequenz

$$0 \to W^1(D, *) \to W^1(L, *) \to W^{-1}(D, *) \to W(L).$$

Das starke Lokal-Global-Prinzip für Isotropie ist hier nur für $\dim h \geqslant 3$ richtig.

§ 5 bringt einen Spezialfall des starken Approximationssatzes für die spezielle lineare Gruppe (eines globalen Körpers K) samt Beweisskizze. Damit kann in §§ 6–8 der unitäre Fall über Schiefkörpern D erledigt werden. Hier gilt das starke Lokal-Global-Prinzip ohne Einschränkung.

Vier kurze Anhänge beschließen das inhaltsreiche Buch. Sie betreffen die folgenden "Perlen" am Rande der eigentlichen Theorie: Die Stufe von kommutativen Ringen; quadratische Formen auf endlichen Graphen und ihr Zusammenhang mit den Dynkin-Diagrammen $A_n$, $D_n$, $E_6$, $E_7$, $E_8$ sowie Köchern von endlichem Darstellungstyp (Gabriel); die 5 platonischen

Polyeder; die hermitische Ungleichung und die positiv-definite gerade unimodulare symmetrische Bilinearform über **Z** von der Dimension 8.

Mainz

A. Pfister

**Tate, J., Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en s = 0** (Progress in Mathematics, Vol. 47), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1984, 143 pp., hard cover, DM 45,–

In diesem Buch wird eine sehr interessante und aufregende Entwicklung in der algebraischen Zahlentheorie dargestellt.

Die Klassenzahlformel von Dedekind drückt das Residuum bei $s = 1$ der Dedekindschen $\zeta$-Funktion $\zeta_K(s)$ eines algebraischen Zahlkörpers K bis auf elementare Faktoren durch den Regulator R, die Anzahl der Einheitswurzeln e und die Klassenzahl h von K aus. Diese Formel kann man durch die Funktionalgleichung in eine Formel bei $s = 0$ umschreiben, man bekommt

$$\zeta_K(s) = -\frac{hR}{e} s^{r_1 + r_2 - 1} + \text{höhere Terme}.$$

Dabei ist $r = r_1 + r_2 - 1$ wie üblich der Rang der Einheitengruppe. Die Formel gestattet eine leichte Verallgemeinerung auf S-Einheiten. Dies wird in Chap. 0 zusammen mit der Theorie der Artinschen L-Funktion dargestellt. Die Vermutung von Stark beschäftigt sich damit, diese Formel auf die folgende Situation zu verallgemeinern.

Es sei K/k eine Galoiserweiterung von Zahlkörpern, es sei S eine endliche Menge von Stellen von k, die die unendlichen Stellen enthält. Sei $\chi : \mathrm{Gal}(K/k) \to \mathbf{C}$ der Charakter einer Darstellung $\mathrm{Gal}(K/k) \to GL(V)$. Dann wird wie üblich eine Artinsche L-Funktion

$$L(s, \chi) = L_S(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \det(\mathrm{Id} - \sigma_{\mathfrak{P}} N\mathfrak{p}^{-s} | V^{I_{\mathfrak{P}}})^{-1}$$

definiert. Die Vermutung von Stark macht eine Aussage über die Entwicklung

$$L(s, \chi) = c(\chi) \cdot s^{r(\chi)} + \dots .$$

Der Term $r(\chi)$ wird aus den darstellungstheoretischen Daten gewonnen, die interessante Größe ist $c(\chi)$. Stark definiert einen Regulator $R(\chi)$, der sich aus den Verkettungen zwischen dem Modul der Einheiten als Galoismodul und V berechnen läßt und vermutet, daß $R(\chi)/c(\chi)$ algebraisch ist und sich richtig unter der Galoisgruppe transformiert. Dies ist der Inhalt von Kap. I.

In Chap. II wird der Beweis der Vermutung für Charaktere mit Werten in **Q** geführt. In diesem Fall besteht eine enge Beziehung zwischen der Vermutung von Stark und der Struktur der Einheitengruppe $U_S$ des Körpers K als Modul unter der Galoisgruppe. Die Struktur dieses Moduls und die Beziehungen sind von Chinburg untersucht worden. Seine Resultate sind im Kapitel II dargestellt.

Im Kapitel III werden die Fälle $r(\chi) = 0$, $r(\chi) = 1$ studiert. Im Fall $r(\chi) = 0$ wird die Verbindung zur Deligne-Vermutung hergestellt.

Im Kapitel IV wird eine Verfeinerung der Vermutung von Stark für den Fall einer abelschen Erweiterung diskutiert. Unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen soll dann der Wert $L'(0, \chi)$ als eine explizite Kombination von Logarithmen von Einheiten darstellbar sein, wobei bestimmte Wurzeln aus der Einheit abelsche Erweiterungen von k erzeugen. Dann ist die Vermutung mit Hilberts Problem Nr. 12 verknüpft. Von der Verfeinerung werden Spezialfälle diskutiert, und es werden numerische Beispiele gerechnet.

Im gleichen Kapitel wird dann noch die Vermutung von Brumer-Stark diskutiert. Sie liefert eine Verallgemeinerung des Stickelberger-Elements; sie besagt, daß gewisse Elemente des

Gruppenringes $\mathbf{Z}[\mathrm{Gal}\,(K/k)]$, die sich aus den L-Werten ergeben, die Idealklassengruppe von K annullieren, und daß die erzeugenden Elemente der entstehenden Hauptideale nach geeignetem Wurzelziehen abelsche Erweiterungen von k erzeugen. Diese Vermutung besitzt ein Analogon über Funktionenkörpern, die im nächsten Kapitel diskutiert und bewiesen wird (Deligne).

Im letzten Kapitel werden p-adische Analoga dieser Vermutungen behandelt.

Wie schon in der Einleitung gesagt, behandelt das Buch eine hochaktuelle Entwicklung in der algebraischen Zahlentheorie. Man kann dem Verfasser und den Herausgebern nur dankbar sein, daß sie diese Dinge in so klarer und doch auch kurzer Form der Öffentlichkeit zugänglich gemacht haben.

Bonn G. Harder

**Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A., Harris, J., Geometry of Algebraic Curves, Volume I** (Grundlehren, Band 267), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, 10 fig., xvi + 386 p., hard cover, DM 128,–

Die Theorie der algebraischen Kurven hat in den letzten 15 Jahren eine erstaunliche Entwicklung erlebt. Mit neueren Methoden der algebraischen Geometrie gelang es endlich, wichtige klassische Vermutungen (insbesondere die Vermutung von Brill und Noether) zu beweisen, aber auch neue Ergebnisse zu erzielen. Das vorliegende Buch ist die erste systematische Darstellung dieser Resultate. Es wurde von vier Autoren verfaßt, die alle maßgeblich an den Entwicklungen der letzten Jahre beteiligt waren.

Dieses Buch war sicherlich notwendig. Es erleichtert es auch jenen Mathematikern, die dem Kreis der Autoren nicht so nahe stehen, sich in diese Ergebnisse einzuarbeiten. Bisher existierten verschiedene hektographierte Fassungen des Buches, die bereits in zahlreichen Originalarbeiten zitiert worden sind. Zur Zeit liegt allerdings lediglich der erste des auf zwei Bände angelegten Werkes vor. Da erst der zweite Band die Beweise so wichtiger Sätze wie des Brill-Noether-Theorems enthält, ist zu hoffen, daß auch dieser Teil möglichst bald erscheinen wird.

Nun zunächst zum Inhalt des vorliegenden Bandes:
Kapitel I dient der Einführung und der Erläuterung der wichtigsten Grundbegriffe, sowie der Festlegung der Notation. Sätze wie Riemann-Roch, Serre-Dualität, Abels Theorem oder der Satz von Riemann werden zitiert. Die Beweise werden verständlicherweise in der Regel nicht ausgeführt, sondern höchstens skizziert. In Kapitel II werden die Vorbereitungen zum Studium der Varietäten $W^r_d$, $C^r_d$ und $G^r_d$ getroffen. Die wichtigsten Eigenschaften von Determinantenvarietäten werden zusammengestellt und bewiesen. Die Formel von Porteous wird angegeben und für die Fälle bewiesen, in denen sie später (Kapitel VII und VIII) angewandt wird. Als weitere Anwendung werden rationale Regelvarietäten behandelt.

In Kapitel III werden erstmals Linearsysteme auf Kurven genauer untersucht. Es beginnt mit dem Satz von Clifford. Daran schließt sich der Satz von Castelnuovo an, gefolgt von Noethers Theorem. Die Kurven mit maximalem Geschlecht werden vollständig klassifiziert. Das Kapitel schließt mit den Untersuchungen Petris über das Ideal von kanonischen Kurven.

Die grundlegenden Varietäten $C^r_d$, $W^r_d$ und $G^r_d$ der Brill-Noether Theorie werden in Kapitel IV eingeführt. Ist C eine glatte Kurve und sind r, d natürliche Zahlen, so ist $W^r_d$ als Menge bekanntlich gegeben durch

$$W^r_d := \{L \in \mathrm{Pic}^d C; h^0(L) \geqslant r + 1\}$$

d. h. die Menge aller Geradenbündel auf C vom Grad d mit mindestens r + 1 unabhängigen Schnitten. $C^r_d$ ist das Urbild von $W^r_d$ unter der abelschen Summenabbildung $C_d \to \mathrm{Pic}^d C$. Hier bezeichnet $C_d$ das d-fache symmetrische Produkt von C. $G^r_d$ ist die Menge aller Linearsysteme von Grad d und Dimension r auf C. Hauptinhalt dieses Kapitels ist es, diesen Mengen eine geeignete Struktur als Varietäten zu geben. Ferner wird der Zariski-Tangentialraum an einen gegebenen Punkt untersucht. Als Anwendung werden die Sätze von H. H. Martens und Mumford bewiesen.

In Kapitel V werden die Hauptergebnisse der Brill-Noether-Theorie vorgestellt. Der Existenzsatz von Kempf und Kleiman-Laksov, sowie der Zusammenhangssatz von Fulton-Lazarsfeld gelten für jede glatte Kurve C. Ihr Beweis erfolgt in Kapitel VII. Der Dimensionssatz von Griffiths-Harris (Brill-Noether-Vermutung) und der Glattheitssatz von Gieseker (Petri-Vermutung) gelten für eine allgemeine Kurve C. Ihr Beweis soll im zweiten Band erfolgen. Eine Diskussion der Fälle $g \leqslant 6$ sorgt für reiches Anschauungsmaterial.

Kapitel VI beginnt mit einem klassischen Beweis des Satzes von Riemann über die Singularitäten des Thetadivisors. Mit Hilfe der abstrakten Theorie der Kapitel II und IV erfolgt eine Verallgemeinerung für die Varietäten $W_d^r$. Für den Satz von Torelli wird ein Beweis von Andreotti gegeben. Schließlich wird noch der Ansatz von Andreotti und Mayer zur Lösung des Schottky-Problems diskutiert, wobei die Autoren von einem neueren Ergebnis von M. Green Gebrauch machen.

Kapitel VII enthält die Beweise für die Existenz- und Zusammenhangssätze für $W_d^r$. Diese Beweise bauen darauf auf, daß ein gewisses Vektorbündel ampel ist. Allerdings wird beim Beweis des Zusammenhangssatzes ein Satz über konstruierbare Garben verwendet, der in dem vorliegenden Buch nicht bewiesen wird. Als Anwendung der Porteousformel werden die Klassen von $C_d^r$ und $W_d^r$ berechnet.

In Kapitel VIII werden die Varietäten $C_d^r$ verallgemeinert, indem das kanonische System $|K|$ durch ein allgemeines Linearsystem ersetzt wird. Schließlich werden noch Divisoren mit Vielfachheiten (de Jonquières-Formel) behandelt.

Das Buch enthält drei Anhänge. Im ersten wird ein (geometrischer) Beweis des Satzes von Riemann-Roch gegeben, die anderen beiden behandeln Thetacharakteristiken und Prymvarietäten. Dabei werden die Beweise nicht ausgeführt, sondern in Form von Übungsaufgaben präsentiert.

Dieses Buch zeichnet sich durch einige besondere Merkmale aus. So scheuen sich die Autoren nicht, ein gegebenes Problem zunächst in Spezialfällen und mit geringem technischen Aufwand zu diskutieren, um erst danach eine allgemein gültige Lösung anzugeben. Dies führt manchmal zu Wiederholungen, doch wird es dem Leser dadurch leichter gemacht, die eigentlichen Ideen zu erkennen und zu verstehen.

Eine weitere Besonderheit sind die zahlreichen Übungsaufgaben. Diese umfassen (ohne die Anhänge) 91 Seiten, d. h. ein knappes Viertel des gesamten Bandes. Die Übungen ergänzen und erweitern den Text. Man findet Aufgaben verschiedenster Schwierigkeitsgrade, von einfachen Beispielen bis hin zu tiefliegenden Sätzen, wie etwa dem Zusammenhangssatz von Fulton und Hansen.

Das Literaturverzeichnis umfaßt 136 Titel. Es ist sicher schwierig, so etwas wie auch nur annähernde Vollständigkeit zu erreichen. Negativ ist mir allerdings aufgefallen, daß etwa die Arbeiten von G. Martens an keiner Stelle erwähnt werden.

Insgesamt kann man dieses Buch allen Mathematikern, die sich mit dem schönen Gebiet der algebraischen Kurven beschäftigen möchten, nur empfehlen. Ein Wermutstropfen ist jedoch der mit DM 128,– recht hohe Preis.

Erlangen K. Hulek

**Jantzen, J. C., Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 3), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1983, 298 S., geb., DM 118,–

„Seit den Arbeiten von Gelfand, Harish-Chandra, Kostant und Duflo hat eine neue Theorie sich durch reichliche Ergebnisse und einheitliche Methoden ihren Platz im Bereich der Mathematik verdient: Die Theorie der Einhüllenden Algebren." Mit diesen Worten resümierte J. Dixmier vor zehn Jahren die Entstehung dieser neuen Disziplin, als er sein Werk „Algèbres enveloppantes" (Gauthier-Villars: Paris 1974) vorlegte. Die Einhüllenden Algebren markieren eine Zone intensiver Berührung und Wechselwirkung zwischen mehreren traditionsrechen Gebieten der Mathematik: Insbesondere handelt es sich um ein Zusammenspiel von Lie-Theorie und Ring-Theorie, das heißt von der Lieschen Theorie der kontinuierlichen (z. B. algebraischen) Gruppen und ihren Lie-Algebren und Darstellungen einerseits mit der abstrakten Theorie Noetherscher Ringe andererseits.

Wer sich für die Darstellungen Liescher Gruppen oder Algebren interessiert, sagen wir für eine zusammenhängende komplexe lineare Gruppe G mit Lie-Algebra $\underline{g}$, wird bald feststellen, daß Kenntnisse über die Einhüllende Algebra $U(\underline{g})$, über ihre Struktur, ihre Ideale, ihre Moduln, zumindest sehr nützlich, und manchmal sogar unentbehrlich werden können. Konkret kann man die Einhüllende $U(\underline{g})$ als Algebra der rechtsinvarianten Differentialoperatoren auf G auffassen; abstrakt kann man sie als die „universelle" von $\underline{g}$ erzeugte assoziative Algebra definieren oder nach Birkhoff-Witt als einen nicht kommutativen Polynomring ansehen. Die abstrakte Auffassung eröffnet die Möglichkeit, die Theorie Noetherscher Ringe auf $U(\underline{g})$ anzuwenden und damit Ergebnisse in der Lie-Theorie zu erzielen. Als noch wichtiger erweist sich allerdings der Einfluß in umgekehrter Richtung: Die neueren Ergebnisse über Einhüllende Algebren versorgen die abstrakte Ring-Theorie mit tiefen Einsichten in konkrete Beispiele von nie dagewesener Komplexität; sie haben der Forschung in der Ring-Theorie Impulse in neue Richtungen gegeben und neue Maßstäbe gesetzt. Dixmiers Buch über Einhüllende Algebren und ebenso die nun von J. C. Jantzen vorgelegte Fortsetzung dieses Standardwerkes sind deshalb meines Erachtens für den Ring- und Lie-Theoretiker gleichermaßen unentbehrlich. Ähnliche fruchtbare Wechselbeziehungen wie zur Ring-Theorie gibt es übrigens zur Theorie der Algebraischen Gruppen, insbesondere der Geometrie ihrer Konjugationsklassen und Schubert-Varietäten, sowie der Geometrie und Kombinatorik von Spiegelungsgruppen. In dem hier zu besprechenden Buch von Jantzen treten jedoch diese mehr geometrischen Seiten des Themas zurück; es ist fast ausschließlich den ring- und darstellungstheoretischen Aspekten gewidmet, die allerdings mit bewundernswerter Konsequenz, Eleganz, Gründlichkeit und Einheitlichkeit behandelt werden.

Da nach dem Satz von Levi die Lie-Algebra $\underline{g}$ semidirektes Produkt einer halbeinfachen mit einer auflösbaren Lie-Algebra ist, und da der halbeinfache Fall völlig andere Methoden erfordert als der auflösbare, findet Forschung über Einhüllende Algebren natürlicher Weise dreigleisig statt: Man studiert 1. den auflösbaren, 2. den halbeinfachen und 3. den allgemeinen Fall, letzteren jedoch nur, indem man ihn auf den halbeinfachen Fall zurückführt. Eine einigermaßen abgeschlossene Theorie lag bei Erscheinen von Dixmiers Buch erst für den Fall auflösbarer Lie-Algebren vor, der auch schon von P. Gabriel, R. Rentschler und dem Referenten in Textbuchform zusammenfassend dargestellt wurde („Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren", Springer Lecture Notes 357, 1973). Diese Darstellungen des auflösbaren Falls seien heute noch gültig, während beim allgemeinen Fall die Zeit für einen Ergebnisbericht noch nicht reif sei, begründet Jantzen in der Einleitung seinen Entschluß, sich ganz auf den halbeinfachen Fall zu beschränken – und damit die ganze Kraft und Aufmerksamkeit auf den wohl schwierigsten Teil zu konzentrieren. Was den allgemeinen Fall betrifft, so kann man inzwischen übrigens durchaus anderer Ansicht sein: Aufbauend auf Arbeiten von Dixmier haben M. Duflo, C. Moeglin und R. Rentschler die Reduktion des allgemeinen auf den halbeinfachen Fall in gewisser, wenn auch sehr komplizierter Weise durchgeführt. Dixmier hatte die Kapitel 7–9 seines Buches dem halbeinfachen und das (letzte) Kapitel 10 dem allgemeinen Fall gewidmet und damit schon einige wichtige und schöne Ergebnisse leicht zugänglich gemacht, so daß sich sein Buch sowohl als Einführung, als auch als Arbeitsgrundlage und Referenzwerk für die nachfolgende Periode lebhafter Forschungsaktivitäten hervorragend eignete.

Verdienstvoll in dieser Hinsicht war zum Beispiel seine frühzeitige Popularisierung der „Verma-Moduln", eines entscheidenden Werkzeuges für die Bearbeitung des halbeinfachen Falles, dem Dixmier ebenso wie den Harish-Chandra-Moduln in geradezu prophetischer Weitsicht ein Kapitel gewidmet hatte. Allerdings sind diese Kapitel inzwischen durch die weitere Entwicklung der Forschung überholt: Sie enthalten gewissermaßen nur die Keime einer fruchtbaren Entwicklung, aus denen inzwischen imposante Bäume gewachsen sind, an deren Präsentation in leicht zugänglicher Buchform die mathematische Öffentlichkeit ein dringendes Interesse hat. Jantzen kommt diesem Bedarf in verdienstvoller Weise nach, indem er einen der eindruckvollsten „Bäume" in seinem Buch hier präsentiert. Übrigens hatte er schon 1979 eine Monographie (J. C. Jantzen, „Moduln mit einem höchsten Gewicht", Springer Lecture Notes 750) dem erwähnten entscheidenden Werkzeug der „Höchstgewichtsmoduln" gewidmet, welche schon sehr weit über Dixmiers Buch hinausführte.

Den Kern des Buches, über das hier zu berichten ist, bildet eine vollständige Präsentation des Werkes von A. Joseph über die Klassifikation der primitiven Ideale in der Einhüllenden Algebra $U(\underline{g})$ einer halbeinfachen Lie-Algebra $\underline{g}$ mittels ringtheoretischer Methoden (Ore-Lokalisierungen, Goldie-Ränge, Gelfand-Kirillov-Dimension usw.) neben den dazu notwendigen Reduktionen auf – und Theorien über – die Höchstgewichts- und Harish-Chandra-Moduln, wobei Ergebnisse von M. Duflo, D. Vogan, J. Bernstein, I. M. Gelfand, S. I. Gelfand und anderen (einschließlich des Autors und des Referenten) berichtet werden. Auf den dreihundert Seiten des Buches berichtet der Autor über die wichtigen Resultate einer großen Anzahl neuerer Forschungsarbeiten – vor allem aus den späten siebziger Jahren – die bisher nur einem äußerst kleinen Kreis von Spezialisten bekannt und selbst diesen nur mit Mühe zugänglich waren. Dankenswerter Weise hält sich der Autor an eine sehr ambitionierte Auffassung von „Ergebnisbericht": Soweit die Kernteile seines Buches betroffen sind, versteht er darunter nämlich eine logisch abgeschlossene Entwicklung des Materials mit Beweisen, die zum Teil völlig neu durchgearbeitet oder manchmal auch überhaupt neu sind. Lediglich bei gewissen, mehr mit den geometrischen Aspekten des Themas (die in diesem Buch wie bereits erwähnt ausgeklammert bleiben) zusammenhängenden Ergebnissen (wie zum Beispiel der Kazhdan-Lusztig-Vermutung und ihrer Beweise und Konsequenzen), die in den letzten Kapiteln des Buches behandelt werden, beschränkt sich der Autor auf einen „Ergebnisbericht im engeren Sinne", wie er es in der Einleitung nennt, das heißt: auf einen Überblick über Resultate ohne vollständige Beweise. Andererseits werden die einführenden Kapitel kurz gehalten, indem für die Anfangsgründe auf die drei oben genannten anderen Monographien verwiesen wird, wo immer es dem Autor zumutbar erschien. Insgesamt erscheint mir die Präsentation sehr sinnvoll und gelungen.

Ein *primitives Ideal* von $U(\underline{g})$ ist ein Annullator eines einfachen Moduls. Ein grundlegender Satz von Duflo besagt, daß man sogar stets einen einfachen Höchstgewichtsmodul nehmen kann. Eine Klassifikation der primitiven Ideale ist zum Beispiel für eine gewisse Grobklassifikation der irreduziblen Darstellungen von $\underline{g}$ bzw. G nützlich. Josephs Klassifikation erfolgt mittels zweier Invarianten eines primitiven Ideals: Erstens dem zentralen Charakter und zweitens Josephs sogenanntem „Goldie-Rang-Polynom", für dessen Definition ein großer Teil des Buches erforderlich ist.

Für den Fall $G = SL_n$ der komplexen speziellen linearen Gruppe wird Josephs Klassifikation besonders elegant und einfach: Bei festem zentralen Charakter wird die Klassifikation der primitiven Ideale kombinatorisch mittels der Robinson-Schensted Korrespondenz zwischen Permutationen und Youngschen Standard-Tableaux beschrieben. Für beliebige halbeinfache

Gruppen G ist die Klassifikation unvorstellbar viel komplizierter: Um zu einer rein kombinatorischen Beschreibung der Klassifikation zu kommen, die (jedenfalls prinzipiell) auch berechenbar ist, muß man unter anderem die 1979 von Kazhdan-Lusztig aufgestellte und 1981 von Beilinson-Bernstein sowie Brylinski-Kashiwara bewiesene Vermutung verwenden, daß die Jordan-Hölder-Multiplizitäten der Verma-Moduln durch die Summe der Betti-Zahlen der lokalen (Goresky-MacPherson) Schnitthomologie der Schubert-Varietäten gegeben sind. Ferner muß man die Springer-Korrespondenz zwischen nilpotenten Konjugationsklassen der Lie-Algebra und irreduziblen Darstellungen der Weyl-Gruppe heranziehen. Diese Dinge behandelt Jantzen in seinem Buch nicht, weil sie *geometrische* Methoden erfordern – statt der hier vorwiegend verwendeten ringtheoretischen. Er berichtet lediglich („im engeren Sinne"), wie Barbasch und Vogan sie als Zutaten verwenden, um Josephs Klassifikation explizit zu Ende zu führen. (Zum Beispiel hat $U(\mathfrak{g})$ für G vom Typ $E_8$ bei trivialem zentralen Charakter genau 101 796 primitive Ideale.) Es wäre wünschenswert, wenn auch die genannten geometrischen Aspekte des Themas, die mit Schnitthomologie, D-Moduln bzw. nilpotenten Konjugationsklassen zu tun haben, bald in ähnlich gelungener Buchform vorgelegt werden, wie Jantzen es hier für die ring- und darstellungstheoretischen Aspekte getan hat. Allerdings ist in diesem Bereich noch vieles im Fluß: Zum Beispiel ist Jantzens einziges Kapitel über einen geometrischen Aspekt, nämlich das siebzehnte und letzte, ein Bericht („im engeren Sinne") darüber, wie man einem primitiven Ideal eine nilpotente Konjugationsklasse der Lie-Algebra als „assoziierte Varietät" zuordnen kann (nach Brylinski, dem Referenten sowie Joseph), inzwischen schon wieder durch vollständigere Ergebnisse überholt. Ferner hat sich in diesem Bereich neuerdings eine komplette geometrische Alternative zum Josephschen ringtheoretischen Zugang zur Klassifikation der primitiven Ideale abgezeichnet (nach Brylinski, MacPherson und dem Referenten), wobei sich Josephs oben erwähnte Goldie-Rang-Polynome als charakteristische Klassen in der Kohomologie der Flaggenvarietät erweisen.

Wuppertal W. Borho

**Kac, V. G., Infinite Dimensional Lie Algebras** (Progress in Mathematics, vol. 44), Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1983, xvi + 245 p., gbd., DM 58,–

In diesem Buch geht es nicht um die allgemeine Theorie unendlich dimensionaler Lie-Algebren, sondern um die Untersuchung einer speziellen Familie unter ihnen, um die *Kac-Moody-Algebren* (über dem Körper der komplexen Zahlen, der auch im folgenden stets der Grundkörper sei). Vor noch nicht ganz zwanzig Jahren begannen V. Kac und R. Moody (unabhängig voneinander) mit dem Studium dieser Algebren. Nun liegt zum ersten Mal eine Einführung in diese Theorie in Buchform vor. Bisher war der Interessierte auf die Originalarbeiten oder ein Vorlesungsskript von J. Lepowsky (Paris 1978) angewiesen, wobei aber in manchen (russischen) Publikationen nicht alle Details ausgeführt sind und bei Lepowsky nur ein kleinerer Teil der Theorie abgedeckt wird.

Für eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ hat J.-P. Serre eine Präsentation angegeben: Er nimmt $r = \text{rang}(\mathfrak{g})$ Kopien der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2$ als Erzeugende und dazu einige Relationen, die von der Cartan-Matrix C von $\mathfrak{g}$ festgelegt werden. Ersetzt man nun C durch eine beliebige (hinreichend „vernünftige") Matrix, so definieren die neuen Relationen eine neue Lie-Algebra, die im allgemeinen unendlich dimensional sein wird. Die so konstruierten Lie-Algebren sind gerade die Kac-Moody-Algebren. (Es hat sich neuestens gezeigt, daß es zweckmäßiger ist, zunächst etwas anders vorzugehen und erst später zu zeigen, daß man dasselbe erhält. So hält es auch das Buch.)

Vieles aus der Strukturtheorie (Killingform, Zerlegung in Wurzelräume, Weylgruppe) und der Darstellungstheorie (Moduln mit höchstem Gewicht, Weyls Charakterformel) läßt sich von den endlich-dimensionalen halbeinfachen Lie-Algebren auf die Kac-Moody-Algebren übertragen. (Das geschieht im Buch in den Kapiteln 1–5 und 10–11.) Es gibt aber auch Phänomene, die im endlich-dimensionalen Fall nicht beobachtet werden und neue Argumente erfordern. Vor allem kann es „imaginäre" Wurzeln geben, die nicht unter der Weylgruppe zu einer einfachen Wurzel konjugiert sind. Der zugehörige Wurzelraum hat dann im allgemeinen eine Dimension echt größer als eins.

Eine besondere Rolle unter allen Kac-Moody-Algebren spielen die *affinen Lie-Algebren*, deren Weylgruppe eine affine Weylgruppe einer der endlich-dimensionalen halbeinfachen Lie-Algebren ist. In den Kapiteln 6–7 werden die affinen Lie-Algebren direkt aus den endlich-dimensionalen konstruiert. Daraus erhält man für sie sehr viel präzisere Informationen über die Struktur als im allgemeinen Fall.

In den letzten drei Kapiteln des Buches werden einige der Querverbindungen beschrieben, die es zwischen der Theorie der Kac-Moody-Algebren (vor allem der affinen) und anderen Gebieten der Mathematik gibt und die auch bei Außenstehenden Interesse für diese Theorie geweckt haben. Zum Beispiel kann man aus der Charakterformel im Fall der eindimensionalen trivialen Darstellung die Macdonaldschen Identitäten für die $\eta$-Funktion ableiten (Kapitel 12). Die formalen Charaktere von Moduln mit einem höchsten Gewicht konvergieren als Funktionen auf einer bestimmten Teilmenge einer Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ der Kac-Moody-Algebra. Durch geeignete Zerlegung oder Spezialisierung dieser Funktionen wird man zu Thetafunktionen und elliptischen Modulfunktionen geführt (Kapitel 13). Man kann spezielle Darstellungen auf Funktionenräumen realisieren und dabei die Elemente der Lie-Algebra durch Differentialoperatoren darstellen. Dann liefert die Darstellungstheorie Lösungen von speziellen Differentialgleichungen, so der Korteweg-de Vries-Gleichung (Kapitel 14). Hier konnten einige neuere Entwicklungen (von G. Segal und G. Wilson) nicht mehr berücksichtigt werden.

Im Rahmen dieses Buches konnte kein vollständiger Überblick über diese schnell expandierende Theorie gegeben werden. Einige weitere (leichter zugängliche) Ergebnisse findet der Leser in den Übungsaufgaben, die jedes Kapitel begleiten. Dorthin werden leider auch einige Beweise (z. B. von Theorem 8.5) abgeschoben. In Kommentaren am Schluß eines jeden Kapitels gibt es Literaturhinweise zu hier nicht beschriebenen Teilen der Theorie (wie die Konstruktion von zugehörigen Gruppen und Fahnenmannigfaltigkeiten) und zu weiteren Verbindungen mit anderen Gebieten der Mathematik (u. a. Gruppen von Schleifen, integrable Hamiltonsche Systeme).

Zusammenhänge mit der Physik (die es gibt) bleiben dagegen ausgespart. Auch dürfte das Buch als Lektüre für Physiker vom Stil her nicht so gut geeignet sein. Ein Mathematiker dagegen, der sich in der Theorie der halbeinfachen Lie-Algebren, mit deren Wurzelsystemen und Weylgruppen gut auskennt, sollte keine Schwierigkeiten haben, sich an Hand dieses Buches in die Theorie der Kac-Moody-Algebren einzuarbeiten.

Hamburg J. C. Jantzen

**Narasimhan, R., Complex Analysis in One Variable**, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1985, 284 pp., hardcover, DM 98,–

This is a text in complex analysis which stresses the connection with real analysis and topology. In respect to this integrated point of view it may be compared to the well-known text of Walter Rudin: Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 2nd ed. 1974 [Jahresber. DMV **70**, p. *32*], although it does not develop the needed (actually rather minimal) real-variable tools. It is assumed that the reader knows several-variable calculus, the rudiments of Lebesgue theory in

$\mathbf{R}$ and $\mathbf{R}^2$, some point-set topology and at least the language of functional analysis and ring theory, as well as a modicum of linear algebra. Most needed facts from functional analysis, like the Baire category theorem, the Hahn-Banach theorem and the closed range theorem, are proved in the text. The treatment is detailed but not cloying, readily accessible to the reader with the modest background just sketched. There are 11 chapters, most of very moderate, digestible size, and each closes with historical notes (from 1/2 to 1 1/2 pages long) and references to the literature (about 140 titles altogether); but there are no exercises nor any symbol index. The technical aspects of the book's production are non-pareil, as we expect of this publisher.

By its point of view and choice of topics, the book provides a smooth and unintimidating transition from classical complex analysis in the plane to the modern abstract theory on manifolds where algebraic and topological methods have a bigger role to play. Here are some highlights of the contents:

In chapter 1 the Looman-Menchoff theorem is proved: for a continuous function f on an open set, existence of $D_1f$, $D_2f$ and the almost-everywhere validity of the Cauchy-Riemann equation $\partial f/\partial \bar{z} = 0$, with no other continuity assumptions, insures analyticity of f. Kronecker's use of contour integrals and the residue theorem to evaluate Gauss sums is presented. Ahlfors' construction of a metric in $\mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ with curvature $\leqslant -4$ is carried out (no knowledge of differential geometry is needed) and this function is used to present the Picard-Schottky-Landau circle of ideas. (The method via the modular function and that via Bloch's covering theorem are referenced in the notes.) There is a short chapter on several complex variables, meant only to contrast the behaviour in higher dimensions with that in the plane; here in 10 pages a surprising amount is accomplished, including a proof of the beautiful result of Remmert and Stein that for no bounded domains $\Omega_1$ in $\mathbf{C}^n$ and $\Omega_2$ in $\mathbf{C}^k$ does there exist a proper holomorphic map from $\Omega_1 \times \Omega_2$ into the (euclidean) unit ball in $\mathbf{C}^{n+k}$. The numerous equivalences of simple connectivity (for regions on the Riemann sphere) are thoroughly investigated. Very useful here is a topological result of Šura-Bura (1941) which the author proves: each component of a compactum is the intersection of all the clopen sets which contain it. Very general Runge theorems are proved using Hahn-Banach and a two-dimensional Cauchy integral formula derived from solving the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation. The latter tool is also employed in proving very general Mittag-Leffler theorems. This in turn leads into the ideal theory of $H(\Omega)$ and the theorem of Hurwitz-Wedderburn-Helmer (an ideal is closed iff finitely generated iff principal), as well as Wedderburn's elementary divisor theorem for matrices over $H(\Omega)$. Later a short chapter is devoted to a completely *ab ovo* development of T. Gamelin's formulation of T. Wolff's proof of the "Corona conjecture" (together with an explanation of the name!) about the maximal ideal space of $H^\infty$. In this circle of ideas the Kakutani-Chevalley-Bers characterization of algebra isomorphisms of $H(\Omega_1)$ with $H(\Omega_2)$ is also given. There is a chapter on compact Riemann surfaces which gives a nice introduction to that subject and contains the cohomology version of Cauchy's theorem (yet no algebraic topology is expected of the reader).

The final chapter, the book's longest, is devoted to subharmonic functions and the Wiener-Perron-Remak solution of the Dirichlet problem; and this is used to prove the Cartan-Radó theorem: a continuous function on a Riemann surface which is holomorphic off of its zero-set, is holomorphic everywhere. The treatment is completely self-contained, even the basic facts about convex functions in euclidean space are developed. Subharmonicity in the distributional sense is described but this theme is not pursued.

In summary, this is an excellent, carefully written and thematically rich book which does not overwhelm the reader. It is well-suited as a textbook either for sophisticated beginners or as a sequel to a one-semester introductory course.

Erlangen R. B. Burckel

**Hallenbeck, D. J., MacGregor, T. H., Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory** (Monographs and Studies in Mathematics, vol. 22) Boston – London – Melbourne: Pitman Advanced Pub. Program 1984, xvii + 182 p., £26.50

Mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in kompakten Teilmengen des Einheitskreises $\Delta$ wird die Menge $A$ der in $\Delta$ analytischen Funktionen zu einem lokal konvexen topologischen Vektorraum und somit linearen (insbesondere „konvexen") Methoden zugänglich. Diese Möglichkeit wird noch unterstrichen durch die Einfachheit der Darstellung stetiger linearer Funktionale auf $A$, deren Abschätzung über geeigneten Teilmengen von $A$ eines der Hauptanliegen der geometrischen Funktionentheorie ist. Andererseits sind die Funktionenklassen gerade der geometrischen Funktionentheorie im allgemeinen so hochgradig nicht-linear, daß lange Zeit die Möglichkeiten linearer Methoden in diesem Bereich als sehr bescheiden angesehen wurden. Dieses änderte sich Anfang der 70er Jahre als sich herausstellte, daß zahlreiche der bereits früher intensiv studierten Funktionenklassen – meistens kompakte Untermengen der Familie S der normierten schlichten Funktionen in $\Delta$ – sich durch eine besonders einfache Struktur ihrer Extremalpunktmengen auszeichneten. Lineare Extremalprobleme konnten somit oft in sehr einfacher und einheitlicher Weise gelöst werden. Diese Erkenntnis hat zu einer stürmischen Entwicklung solcher Methoden geführt; wohl auch weil man hoffte, möglicherweise einen grundsätzlich neuen Zugang zum Problem der Bieberbachschen Vermutung finden zu können. Die Autoren des vorliegenden Buches waren und sind an dieser Entwicklung entscheidend beteiligt. Einige der dargestellten Ergebnisse sind hier sogar erstmalig veröffentlicht.

Die ersten vier Kapitel enthalten grundlegende Tatsachen über S und deren wichtigste Teilklassen, über den Begriff der Subordination (der zentral für das ganze Buch ist) und die topologische Struktur von $A$. Sodann werden Extremalpunktmengen bestimmt, z. B. für die Klassen der normierten konvexen, sternförmigen und fast-konvexen Funktionen und damit konkrete Extremalprobleme gelöst. Kapitel 7 beschäftigt sich mit der Beschreibung der Stützpunkte der obigen Funktionenfamilien, wie auch der durch Subordination darunter entstehenden größeren Familien. Betrachtungen über die Extremalpunkte der Klasse der zu einer gegebenen Funktion subordinierten Funktionen und die Beschreibung gewisser Variabilitätsbereiche (z. B. Koeffizientenbereiche) runden den Inhalt ab.

Das Buch stellt eine gelungene Einführung in dieses aktuelle Gebiet der Funktionentheorie dar. Es ist weitgehend selbsttragend geschrieben und so auch für den Studierenden gut geeignet. Für den Forscher ist es ein sehr nützliches Referenzwerk, das auch gleichzeitig zahlreiche z. T. sehr provokative Anregungen enthält. Etwas unbequem ist allerdings, daß der eigentliche Text keinerlei Hinweise auf den Autor und die Literaturstelle zitierter Ergebnisse enthält; diese Angaben müssen etwas mühsam in den „notes" am Ende des Buches gesucht werden. – Natürlich gruppiert sich auch in diesem Buch vieles um die Bieberbachsche Vermutung: sie wird für Teilklassen von S mit wechselnden Methoden bewiesen, die verschiedenen anderen damit zusammenhängenden Vermutungen werden verglichen usw. Diese Teile sind durch den inzwischen bekannt gewordenen Satz von de Branges, der alle diese Vermutungen beweist, natürlich nur noch von geringerem Interesse. Den Wert des Buches vermindert dieser Umstand natürlich nicht.

Würzburg St. Ruscheweyh

# Teubner Studienbücher · Mathematik

Ahlswede/Wegener: **Suchprobleme.** DM 29,80

Aigner: **Graphentheorie.** DM 29,80

Ansorge: **Differenzenapproximationen partieller Anfangswertaufgaben.** DM 29,80 (LAMM)

Behnen/Neuhaus: **Grundkurs Stochastik.** DM 36,–

Bohl: **Finite Modelle gewöhnlicher Randwertaufgaben.** DM 29,80 (LAMM)

Böhmer: **Spline-Funktionen.** DM 32,–

Bröcker: **Analysis in mehreren Variablen.** DM 32,80

Bunse/Bunse-Gerstner: **Numerische Lineare Algebra** 314 Seiten. DM 34,–

Clegg: **Variationsrechnung.** DM 18,80

v. Collani: **Optimale Wareneingangskontrolle.** DM 29,80

Collatz: **Differentialgleichungen.** 6. Aufl. DM 32,– (LAMM)

Collatz/Krabs: **Approximationstheorie.** DM 28,–

Constantinescu: **Distributionen und ihre Anwendung in der Physik.** DM 21,80

Dinges/Rost: **Prinzipien der Stochastik.** DM 34,–

Fischer/Sacher: **Einführung in die Algebra.** 3. Aufl. DM 22,80

Floret: **Maß- und Integrationstheorie.** DM 32,–

Grigorieff: **Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen** Band 2: DM 32,80

Hainzl: **Mathematik für Naturwissenschaftler.** 3. Aufl. DM 34,– (LAMM)

Hässig: **Graphentheoretische Methoden des Operations Research.** DM 26,80 (LAMM)

Hettich/Zencke: **Numerische Methoden der Approximation und semi-infinitiven Optimierung.** DM 24,80

Hilbert: **Grundlagen der Geometrie.** 12. Aufl. DM 26,80

Jeggle: **Nichtlineare Funktionalanalysis.** DM 26,80

Kall: **Analysis für Ökonomen.** DM 28,80 (LAMM)

Kall: **Lineare Algebra für Ökonomen.** DM 24,80 (LAMM)

Kall: **Mathematische Methoden des Operations Research.** DM 25,80 (LAMM)

Kohlas: **Stochastische Methoden des Operations Research.** DM 25,80 (LAMM)

Krabs: **Optimierung und Approximation.** DM 26,80

Lehn/Wegmann: **Einführung in die Statistik.** DM 24,80

Müller: **Darstellungstheorie von endlichen Gruppen.** DM 24,80

Rauhut/Schmitz/Zachow: **Spieltheorie.** DM 32,– (LAMM)

Schwarz: **FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente.** DM 24,80

Schwarz: **Methode der finiten Elemente.** 2. Aufl. DM 38,– (LAMM)

Stiefel: **Einführung in die numerische Mathematik.** 5. Aufl. DM 32,– (LAMM)

Stiefel/Fässler: **Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung.** DM 29,80 (LAMM)

Stummel/Hainer: **Praktische Mathematik.** 2. Aufl. DM 36,–

Topsøe: **Informationstheorie.** DM 16,80

Uhlmann: **Statistische Qualitätskontrolle.** 2. Aufl. DM 38,– (LAMM)

Velte: **Direkte Methoden der Variationsrechnung.** DM 26,80 (LAMM)

Vogt: **Grundkurs Mathematik für Biologen.** DM 21,80

Walter: **Biomathematik für Mediziner.** 2. Aufl. DM 23,80

Winkler: **Vorlesungen zur Mathematischen Statistik.** DM 26,80

## B. G. Teubner Stuttgart

neue Reihe

# Mathematische Methoden in der Technik

**Herausgegeben von**

Prof. Dr. rer. nat. Jürgen Lehn, Technische Hochschule Darmstadt
Prof. Dr. rer. nat. Helmut Neunzert, Universität Kaiserslautern
o. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Hansjörg Wacker, Universität Linz

**Band 1**

## Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen der Technik

**Differenzenverfahren, Finite Elemente und die Behandlung großer Gleichungssysteme**

Von Prof. Dr. rer. nat. Willi Törnig, Technische Hochschule Darmstadt
Dr. rer. nat. Michael Gipser, Daimler Benz AG, Stuttgart
Dr. rer. nat. Bernhard Kaspar, Fernmeldetechnisches Zentralamt der Deutschen Bundespost, Darmstadt
1985. 183 Seiten. 16,2 × 23,5 cm. ISBN 3-519-02613-9. Kart. DM 34,–

**Band 2**

## Geostatistik

**Eine Einführung mit Anwendungen**

Von Prof. Dipl.-Ing. Dr. R. Dutter, Technische Universität Wien
1985. 159 Seiten. 16,2 × 23,5 cm. ISBN 3-519-02614-7. Kart. DM 32,–

**Band 3**

## Eigenwertberechnung in den Ingenieurwissenschaften

**Mit einer Einführung in die Numerik linearer Gleichungssysteme**

Von Prof. Dr. rer. nat. P. Spellucci, Technische Hochschule Darmstadt
und Prof. Dr. rer. nat. W. Törnig, Technische Hochschule Darmstadt
1985. 196 Seiten. 16,2 × 23,5 cm. ISBN 3-519-02615-5. Kart. DM 36,–

**B. G. Teubner Stuttgart**

# Geostatistik

**Eine Einführung mit Anwendungen**

Von Prof. Dipl.-Ing. Dr. R. Dutter, Technische Universität Wien

1985. 159 Seiten. 16,2 × 23,5 cm. ISBN 3-519-02614-7. Kart. DM 32,–
(Mathematische Methoden in der Technik, Bd. 2)

Aus dem Inhalt

Erschließung von Lagerstätten / Statistische Grundbegriffe, Stamm-und-Blatt-Darstellung, Kenngrößen einer Verteilung, theoretische Verteilungen / Regionalisierte Variable, Momente, statistische Annahmen / Das Variogramm, Eigenschaften, Berechnung, Modelle / Varianzen und Regularisierung / Schätzung von Ressourcen, Krige-Schätzer, Punkt-Krigen, Block-Krigen, Universelles Krigen / Simulation von Lagerstätten, bedingte-unbedingte Simulation / Fallstudien

**B. G. Teubner Stuttgart**



# EXPOSITIONES MATHEMATICAE

International Journal for Pure and Applied Mathematics

Expositiones Mathematicae publishes high level research articles, surveys, expository essays and historical studies in all branches of contemporary mathematics. Our aims are to advance mathematical research and to be useful to those involved in graduate and postgraduate programmes.

Many well-known authors have already contributed.
Here are some of them:
K. L. Chung, J. Dieudonné,
F. Harary, H. Heyer, P. E. T. Jørgensen,
S. G. Krantz, P. Lelong, T. L. Nicolas,
E. H. Spanier, F. Toth, S. R. S. Varadhan.

Ask your library to subscribe to Expositiones Mathematicae today.

**Managing Editor**
S. D. Chatterji
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

**Subscription Information**
1986, Vol. 4 (4 issues):
234,- DM plus postage and handling

**Back Volumes**
Vols. 1-3 (1983-1985):
198,- DM per volume plus postage and handling.
Complete set: 594,- DM plus postage and handling.

**Special offer to new subscribers**
New subscribers may order the back volumes 1-3 at the reduced price of 444,- DM.
This offer is valid until June, 30, 1986.

**For detailed information please write to:**
Bibliographisches Institut, Postfach 311
D-6800 Mannheim 1, Federal Republic of Germany
or phone (06 21) 39 01-3 89

new

Proceedings of the Workshop

# The Road-Vehicle-System and Related Mathematics

March 18–22, 1985 Lambrecht

Edited by Prof. Dr. H. NEUNZERT, University of Kaiserslautern, W.-Germany

1985. 284 pages. 16,2 x 23,5 cm. ISBN 3-519-02616-3. Paper DM 52,–

*Contents*



**B. G. Teubner Stuttgart**