88. Band Heft 3
ausgegeben am 23. 7. 1986

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1986

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 88/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 94,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 88, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

3. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

P. L. Butzer, W. Splettstößer, R. L. Stens: The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis

W. Dickmeis, R. J. Nessel, E. van Wickeren: Quantitative Extensions of the Uniform Boundedness Principle

M. Eiermann, R. S. Varga, W. Niethammer: Iterationsverfahren für nichtsymmetrische Gleichungssysteme und Approximationsmethoden im Komplexen

F. W. Gehring: Uniform Domains and the Ubiquitous Quadidisk

H. Grunsky: Ludwig Bieberbach zum Gedächtnis

W. K. Hayman: Schlichte Funktionen nach de Branges

M. Kneser: Max Deuring 9. 12. 1907 – 20. 12. 1984

C. Müller: Zum 100. Geburtstag von Hermann Weyl

E. Zehnder: Periodische Lösungen von Hamiltonschen Systemen

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 88 (1986) 105–123

Phasenübergänge am Ising-Modell

G. Leha, Passau

1 Das Modell und seine Bedeutung

Noch vor knapp 50 Jahren gab es innerhalb der Physik eine kontroverse Diskussion über die Frage, ob verschiedene Phasen einer Materie (wie etwa gasförmig, flüssig, fest) aufgrund der gleichen mikroskopischen Wechselwirkungen der beteiligten Moleküle erklärt werden können (vgl. M. Born – K. Fuchs, 1938). Wenn seither in dieser und ähnlichen Fragestellungen entscheidende Fortschritte erzielt werden konnten, so ist das nicht zuletzt dem mathematischen Modell zu verdanken, das der Physiker E r n s t I s i n g in seiner Hamburger Dissertation unter Anleitung seines Doktorvaters W. Lenz (vgl. E. Ising, 1925) erstmals untersuchte mit dem Ziel, ferromagnetische Erscheinungen besser verstehen zu können. An diesen Ursprung werden im folgenden manche der Begriffsbildungen des heute allgemein nach Ising benannten Modells erinnern.
Gegeben ist mit

(1.1) $V \subset \mathbf{Z}^d$,

einer *endlichen* Teilmenge des d-dimensionalen ganzzahligen Gitters $\mathbf{Z}^d$, die (ebenfalls endliche) Menge

(1.2) $S = S_V := \{-1, +1\}^V$

der *Spin-Konfigurationen* $s = (s_k)_{k \in V} \in S$.
Die Zahl $d \in \mathbf{N}$ ist die *Dimension des Modells.*
Die Punkte $k \in V$ werden als Ecken eines Graphen betrachtet, dessen Kantenmenge K aus den (achsenparallelen) Verbindungsstrecken $[k, \ell]$ *nächster Nachbarn* $k, \ell \in V$ besteht, also

(1.3) $K = K_V := \{[k, \ell] : k, \ell \in V, |k - \ell| = 1\}$.

Zu berechnen ist dann, als Funktion der reellen Parameter

$b \in [0, \infty)$, der „inversen Temperatur", und
$H \in \mathbf{R}$, des „äußeren magnetischen Feldes",

die *Zustandssumme*

(1.4) $$Z = Z_V = Z_V(b, H) := \sum_{s \in S} \exp\left[b\left(\sum_{[k,\ell] \in K} s_k s_\ell + H \sum_{k \in V} s_k \right)\right].$$

[Von der Zustandssumme erhält man durch Differentiation nach den Parametern b und H alle (thermodynamischen) Zustandsgrößen.]
Da man sich für sehr große V (Anzahl der Elemente in der Größenordnung der Loschmidtschen Zahl) interessiert, ist eine direkte Berechnung auch mit Hilfe schnellster Computer unmöglich. Die Approximation großer V durch das ganze Gitter $\mathbf{Z}^d$ führt zur folgenden *Hauptaufgabe*, oft auch *Ising-Problem* genannt: Man berechne die *freie Energie per Spin* im *thermodynamischen Limes*

$$(1.5) \quad f(b, H) := \lim_{V \uparrow \mathbf{Z}^d} \frac{1}{|V|} f_V(b, H),$$

wobei $|V|$ die Anzahl der Elemente in V und die *freie Energie in V* durch

$$(1.6) \quad f_V = f_V(b, H) := -\frac{1}{b} \log Z_V$$

definiert ist (für $b > 0$).
Das Ising-Problem stellt eine nunmehr etwa 6 Jahrzehnte währende Herausforderung an die Mathematik dar. Lediglich teilweise Lösungen sind gelungen, nämlich durch E. Ising (1925) im eindimensionalen und durch L. Onsager (1944), allerdings nur für $H = 0$, im zweidimensionalen Fall.
Damit gehört das Ising-Problem zur Reihe jener faszinierenden mathematischen Probleme, die sich zwar elementar formulieren lassen, deren Behandlung jedoch hochkompliziert ist. Der Reiz des Ising-Modells wird aber noch beträchtlich erhöht durch seine fast einzigartige Grenzstellung, die es einnimmt zwischen mathematischer Behandelbarkeit und hinreichender „Realitätsnähe" für die Beschreibung verschiedenster „kooperativer Systeme": Das Modell spiegelt nicht nur für Ferromagneten wesentliche Grundzüge wider, sondern auch für Kristalle, insbesondere binäre Legierungen (W. L. Bragg – E. J. Williams, 1934/35), für Gitter-Gase (T. D. Lee – C. N. Yang, 1952), für verschiedene biologische Systeme (vgl. C. J. Thompson, 1972), und es diente zur Untersuchung soziologischer (W. Weidlich, 1971) und ökonomischer Fragestellungen (H. Föllmer, 1974). In jüngster Zeit schließlich wurden enge Querverbindungen zu den Quantenfeldtheorien (s. z. B. M. Aizenmann, 1982) hergestellt.
Von zentraler Bedeutung ist dabei stets, daß sich am Ising-Modell Begriffe wie kritische Phänomene, Phasenübergang und dgl. mathematisch exakt studieren lassen.

2 Analytische Behandlung

2.1 Algebraische Methode

Wir betrachten zunächst den eindimensionalen Fall, und zwar für

$$(2.1) \quad V = V(n) = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbf{Z}.$$

Die Berechnung der Zustandssumme

$$(2.2) \quad Z_V = \sum_{s \in S} \exp\left[b\left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k s_{k+1} + H \sum_{k=1}^{n} s_k\right)\right]$$

vereinfacht sich, wenn man anstelle des *freien Randes,* bei dem die „Randspins“ (hier die Stellen 0 und n + 1) unbesetzt sind, den *periodischen Rand* einführt, bei dem die Spins an den Stellen 1 und n als nächste Nachbarn angesehen werden, d. h. wenn man die „Kette“ $\{1, \ldots, n\}$ zum Kreis schließt. Dann haben wir

$$(2.3)\quad Z_n = Z_{V(n)} = \sum_{s_1=\pm 1, \ldots, s_n=\pm 1} \prod_{k=1}^{n} \exp\left[b s_k s_{k+1} + \frac{bH}{2}(s_k + s_{k+1}) \right].$$

Führt man die *Transfer-Matrix*

$$(2.4)\quad L = (L(\sigma, \tau))_{\sigma, \tau \in \{-1, +1\}}$$

ein mit

$$(2.5)\quad L(\sigma, \tau) = \exp\left[b\sigma\tau + \frac{bH}{2}(\sigma + \tau) \right], \qquad \sigma, \tau \in \{-1, +1\},$$

so ist offenbar

$$(2.6)\quad Z_n = \sum_{s_1=\pm 1} L^n(s_1, s_1) = \operatorname{tr} L^n = \lambda_1^n + \lambda_2^n,$$

wobei tr die Spur und λ_1, λ_2 die Eigenwerte der (2 x 2)-Matrix L bezeichnen. Damit ist die Berechnung der Zustandssumme auf ein Eigenwertproblem zurückgeführt.

Die Berechnung der Eigenwerte liefert

$$(2.7)\quad \lambda_{1/2} = e^b \cosh(bH) \pm (e^{2b} \sinh^2(bH) + e^{-2b})^{1/2}.$$

Damit ist die freie Energie per Spin in V(n) gegeben durch

$$(2.8)\quad \frac{1}{n} f_n = -\frac{1}{b}\frac{1}{n} \log Z_n = -\frac{1}{b}\left\{ \log \lambda_1 + \frac{1}{n} \log \left[1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right] \right\}.$$

Im Limes $n \to \infty$ haben wir dann

$$(2.9)\quad f(b, H) = -\frac{1}{b} \log \lambda_1.$$

Die erste wichtige Zustandsgröße, die *Magnetisierung per Spin* ist definiert als

$$(2.10)\quad m(b, H) := -\frac{\partial}{\partial H} f(b, H).$$

Für sie ergibt sich somit

$$(2.11)\quad m(b, H) = \frac{\sinh(bH)}{(\sinh^2(bH) + e^{-4b})^{1/2}}.$$

Dieses (von E. Ising auf kompliziertere Weise hergeleitete) Ergebnis besagt insbesondere: Für jedes $b > 0$ verschwindet die *spontane Magnetisierung*

$$(2.12)\quad m^+(b) := \lim_{H \downarrow 0} m(b, H).$$

Insbesondere ergibt sich keine Hysteresisschleife (vgl. Fig. 1), wie sie experimentell bei Ferromagneten beobachtet wird (vgl. R. W. Pohl, 1964).

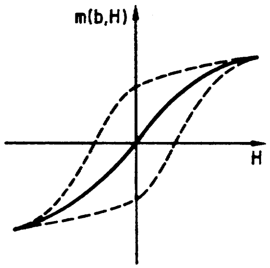


Fig. 1 Die Magnetisierung als Funktion des äußeren Feldes H. Gestrichelte Linie = Hysteresisschleife

Erst knapp zwanzig Jahre später führte die gleiche, auf H. A. Kramers und G. H. Wannier (1941) zurückgehende Transfer-Matrix-Methode auch im zweidimensionalen Fall, „by a masterly application of Lie algebras and group representations" (Thompson, 1972), durch *Lars Onsager* (1944) zum Ziel – allerdings nur für den Fall $H = 0$.

Für

(2.13) $V = V(n, m) = \{(i, j) : 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$

ist hier (mit $Z_{n,m} = Z_V$)

$$(2.14)\quad Z_{n,m} = \sum_{s \in S} \exp\left[b \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} s_{i,j} s_{i+1,j} + b \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m-1} s_{i,j} s_{i,j+1} + bH \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} s_{i,j}\right].$$

Betrachten wir wieder den periodischen Rand statt des freien, d. h. setzen wir $s_{n+1,j} = s_{1,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ und $s_{i,m+1} = s_{i,1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, dann haben wir

$$(2.15)\quad Z_{n,m} = \sum_{s \in S} \prod_{j=1}^{m} \exp\left[\frac{b}{2} \sum_{i=1}^{n} s_{i,j} s_{i+1,j} + \frac{bH}{2} \sum_{i=1}^{n} s_{i,j} + b \sum_{i=1}^{n} s_{i,j} s_{i,j+1} + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{n} s_{i,j+1} s_{i+1,j+1} + \frac{bH}{2} \sum_{i=1}^{n} s_{i,j+1}\right].$$

Fassen wir für $1 \leqslant j \leqslant m$ die j-te Spalte zu einem Vektor

(2.16) $\sigma_j = (s_{1,j}, \ldots, s_{n,j})$

zusammen und führen wir wieder die Transfer-Matrix

$$(2.17)\quad L(\sigma, \tau) = \exp\left[\frac{b}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i s_{i+1} + \frac{bH}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i + b \sum_{i=1}^{n} s_i t_i + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{n} t_i t_{i+1} + \frac{bH}{2} \sum_{i=1}^{n} t_i\right]$$

für $\sigma = (s_1, \ldots, s_n)$, $\tau = (t_1, \ldots, t_n)$, $s_{n+1} = s_1$, $t_{n+1} = t_1$ ein, so ist

$$Z_{n,m} = \sum_{\sigma_1} L^m(\sigma_1, \sigma_1) = \operatorname{tr} L^m.$$

Die $2^n \times 2^n$-Matrix L ist symmetrisch mit strikt positiven Einträgen, besitzt also 2^n reelle Eigenwerte, von denen nach dem Perron-Frobenius-Theorem genau einer, etwa λ_1, maximalen Betrag hat. Dieser ist strikt positiv, so daß für die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2^n}$ der Matrix L gilt:

$$\text{(2.18)} \quad \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1 \quad \text{für} \quad 2 \leqslant i \leqslant 2^n.$$

Ferner ist

$$\text{(2.19)} \quad Z_{n,m} = \lambda_1^m + \lambda_2^m + \ldots \lambda_{2^n}^m = \lambda_1^m \left[1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m + \ldots + \left(\frac{\lambda_{2^n}}{\lambda_1}\right)^m\right].$$

Läßt man die Spaltenzahl m unbegrenzt wachsen, so erhält man

$$\text{(2.20)} \quad \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log Z_{n,m} = \lambda_1,$$

so daß nur noch der maximale Eigenwert λ_1 relevant ist. Es handelt sich jetzt aber um die Eigenwertberechnung für eine $(2^n \times 2^n)$-Matrix, deren Durchführung die große Leistung Onsagers ist. Bezüglich einer detaillierten (und etwas geglätteten) Darstellung der „Onsager-Lösung" verweisen wir auf C. J. Thompson (1972), Appendix D, und K. Huang (1963), Chap. 16.
Für die freie Energie per Spin im Limes $m \to \infty$, $n \to \infty$ erhält man die *Onsager-Formel*

$$\text{(2.21)} \quad -bf(b, 0) = \log 2 + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \log\left[\cosh^2(2b) - \sinh(2b)(\cos\vartheta + \cos\varphi)\right] d\vartheta d\varphi$$
$$= \log 2 + \frac{1}{2\pi^2} F(\sinh(2b)),$$

wobei mit $t = \sinh(2b)$

$$\text{(2.22)} \quad F(t) = \int_Q \log\left[(t-1)^2 + t(2 - \kappa(x))\right] dx,$$
$$Q = [0, \pi]^2 \quad \text{und} \quad \kappa(x) = \cos x_1 + \cos x_2 \quad \text{für} \quad x = (x_1, x_2) \in Q$$

ist.
Offenbar sind Singularitäten der Funktion $b \to f(b, 0)$ durch Singularitäten der Funktion $t \to F(t)$ gegeben.
Mit

$$\text{(2.23)} \quad \begin{aligned} A(t, x) &= (t-1)^2 + t(2 - \kappa(x)) \\ B(t, x) &= (t-1)^2 + t\frac{\|x\|^2}{2} \end{aligned} \qquad t \geqslant 0, x \in Q$$

ist

$$\text{(2.24)} \quad F(t) = \int_Q \log\frac{A(t, x)}{B(t, x)} dx + \int_Q \log B(t, x) dx.$$

Eine Analyse zeigt, daß beide Summanden stetig differenzierbar sind, die zweite Ableitung aber nur noch für den ersten Summanden stetig ist, während die zweite Ableitung des zweiten Summanden eine logarithmische Singularität im Punkt $t = 1$ besitzt. Folglich weist die *spezifische Wärme*, die definiert ist durch

$$(2.25)\quad c(b, 0) = -kb^2 \frac{d^2}{db^2}(bf(b, 0)), \qquad [k = \text{Boltzmann-Konstante}]$$

eine logarithmische Singularität in

$$(2.26)\quad b^* = \frac{1}{2}\sinh^{-1}(1)$$

auf.

Damit liegt für $d = 2$ *mit* $(b^*, 0)$ *ein kritischer Punkt des Parameterbereichs* $[0, \infty] \times \mathbf{R}$ *vor.*

Offen blieb aber zunächst die Frage nach der Magnetisierung und speziell nach der spontanen Magnetisierung, die nach den Definitionen (2.10) und (2.12) die Berechnung von $f(b, H)$ für $H \neq 0$ verlangen.

Nichtsdestoweniger gab L. Onsager, jedoch ohne Herleitung, die Formel

$$(2.27)\quad m^+(b) = \begin{cases} [1 - \sinh^{-4}(2b)]^{1/8}, & b > b^* \\ 0, & b \leqslant b^* \end{cases}$$

für die spontane Magnetisierung an (L. Onsager, 1949). Ein Argument für die Richtigkeit der Formel (2.27) gab C. N. Yang (1952), endgültig bewiesen wurde sie allerdings erst – und dies ohne die Berechnung von $f(b, H)$ für $H \neq 0$ – von A. Martin-Löf und D. B. Abraham (A. Martin-Löf, 1972, und D. B. Abraham – A. Martin-Löf, 1973), vgl. Abschnitt 3.

Zwei weitere Meilensteine in der analytischen Behandlung des Ising-Problems stellen die Ergebnisse von C. N. Yang und T. D. Lee dar. Zunächst wiesen sie (unter wesentlich allgemeineren als den hier vorliegenden Bedingungen) die Existenz des Limes (1.5) für alle Parameterwerte b und H nach (C. N. Yang – T. D. Lee, 1952). Schreibt man ferner die Zustandssumme Z_V als Polynom in der Variablen

$$(2.28)\quad z = e^{-2bH}$$

also

$$(2.29)\quad Z_V = e^{|V|bH} \sum_{r=0}^{|V|} p(r) z^r,$$

wobei

$$(2.30)\quad p(r) = \sum_{s \in S(r)} \exp\left[b \sum_{[k,\ell] \in K} s_k s_\ell\right], \qquad 0 \leqslant r \leqslant |V|,$$

und S(r) die Menge der Spin-Konfigurationen mit genau r negativen Spins ist, so besagt das zweite fundamentale Resultat von T. D. Lee und C. N. Yang (1952), daß die Nullstellen der Polynome

$$(2.31)\quad \mathcal{P}_V(z) = \sum_{r=0}^{|V|} p(r) z^r$$

stets auf dem Einheitskreis $\{|z| = 1\}$ liegen. Daraus läßt sich nach (1.5) und (1.6) folgern, daß die freie Energie per Spin im thermodynamischen Limes für $|z| \neq 1$, also für $H \neq 0$, analytisch ist. Insbesondere ist die freie Energie f(b, H) für alle $b > 0$ und $H \neq 0$ differenzierbar.

2.2 Kombinatorische Methode

Ein zweiter, vom bisher behandelten völlig verschiedener, analytischer Zugang zum Ising-Problem stützt sich auf Reihenentwicklungen der Zustandssumme Z_V. Es sind hierbei zwei Ansätze zu unterscheiden:
Die *low temperature expansion* geht auf B. L. van der Waerden (1942) – dort allerdings ohne explizite Bezugnahme auf das Ising-Modell – zurück, wobei wiederum für verschwindendes äußeres Feld H = 0, die Zustandssumme nach Potenzen von e^{-2b} entwickelt wird. [Die Variable e^{-2b} ist klein für großes b (inverse Temperatur), also für tiefe Temperaturen.]
Bezeichnet man mit $N_{+-}(s)$ die Anzahl der Paare nächster Nachbarn (k, ℓ) im Gitter V, in denen die Spins (s_k, s_ℓ) der Konfiguration $s \in S$ verschiedenes Vorzeichen aufweisen, so gilt (bei periodischem Rand) die – etwa durch Induktion über die Anzahl der (+)-Spins unmittelbar einzusehende – Beziehung

$$(2.32)\quad \sum_{[k,\ell] \in K} s_k s_\ell = d\,|V| - 2N_{+-}(s).$$

Mit (1.4) ergibt sich dann (für H = 0):

$$(2.33)\quad Z_V = 2e^{bd|V|} \sum_{r=0}^{\infty} m(r) e^{-2br},$$

wobei $m(0) = 1$ und $m(r)$ für $r \geqslant 1$ die Anzahl der Möglichkeiten ist, genau r (+ –)-Paare in V zu plazieren. [Der Faktor 2 berücksichtigt die Symmetrie $s \to -s$. Es handelt sich in (2.33) natürlich um eine endliche Summe, da $m(r) = 0$ ist für $r \geqslant |K| = d|V|$.] Im zweidimensionalen Fall führt nun die schon von R. Peierls (1936) benutzte Idee weiter, nämlich jeder Spin-Konfiguration auf einfache und modulo der oben angesprochenen (+ –)-Symmetrie eindeutige Weise durch Umrandung aller zusammenhängenden (–)-Gebiete einen achsenparallelen Polygonzug in dem zu V dualen Gitter zuzuordnen. [Das zu V duale Gitter entsteht durch Translation des Gitters V um den Vektor $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.] Dabei entspricht jedem (+ –)-Paar der Konfiguration eine Kante des zugeordneten Polygonzuges und umgekehrt. Um die Koeffizienten m(r) zu bestimmen, hat man also (für d = 2) geschlossene achsenparallele Polygonzüge der Länge r zu zählen.

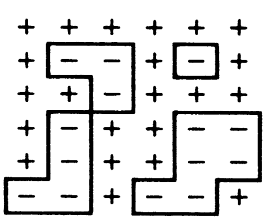


Fig. 2 Umrandung der (–)-Spins durch Polygonzüge

Offenbar ist

$$m(1) = m(2) = m(3) = 0, \quad m(4) = |V|, \quad m(5) = 0, \quad m(6) = 2|V|, \quad \ldots .$$

Allgemein ist $m(r) = 0$ für ungerades r.
Die *high temperature expansion* geht von folgender einfacher Beobachtung aus: Schreibt man für $H = 0$ die Zustandssumme Z_V, vgl. (1.4), in der Form

$$(2.34) \quad Z_V = \sum_{s \in S} \prod_{[k,\ell] \in K} \exp [b s_k s_\ell],$$

so geht die Exponentialfunktion nur an den Stellen $e^{\epsilon b}$ mit $\epsilon = \pm 1$ ein, ist also durch die Gerade $\epsilon \to \cosh b(1 + \epsilon \tanh b)$ ersetzbar. Mit der Variablen $z = \tanh b$ [tanh b ist klein, wenn b klein, also die Temperatur hoch ist] ist dann

$$(2.35) \quad Z_V = (\cosh b)^{d|V|} \sum_{s \in S} \prod_{[k,\ell] \in K} (1 + s_k s_\ell z)$$

$$= (\cosh b)^{d|V|} \sum_{s \in S} \Bigg[1 + \sum_{[k,\ell] \in K} s_k s_\ell z + \\ + \sum_{\substack{[k_1,\ell_1],[k_2,\ell_2] \in K \\ [k_1,\ell_1] \neq [k_2,\ell_2]}} s_{k_1} s_{\ell_1} s_{k_2} s_{\ell_2} z^2 + \ldots \Bigg],$$

also

$$(2.36) \quad Z_V = (\cosh b)^{d|V|} 2^{|V|} \sum_{r=0}^{\infty} n(r) z^r,$$

wobei

$$(2.37) \quad 2^{|V|} n(r) = \sum_{\substack{[k_1,\ell_1],\ldots,[k_r,\ell_r] \in K \\ \text{paarweise verschieden}}} \sum_{s \in S} s_{k_1} s_{\ell_1} \ldots s_{k_r} s_{\ell_r}$$

ist. Führt man die Summation über $s \in S$ aus, so ergibt sich stets 0 oder $2^{|V|}$, wobei der letztere Wert genau dann angenommen wird, wenn jedes s_m in gerader Potenz auftritt, d. h. wenn an jedem Punkt in V eine gerade Anzahl der Kanten $[k_1, \ell_1], \ldots, [k_r, \ell_r]$ zusammentrifft, sie somit insbesondere einen geschlossenen achsenparallelen Polygonzug bilden. Damit reduziert sich auch die high temperature expansion auf die Bestimmung der Koeffizienten n(r) und damit auf das Zählen von Polygonzügen der Länge r.
Für Dimension $d = 2$ gilt nun

$$(2.38) \quad n(r) = m(r), \qquad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

also

$$(2.39) \quad Z_V = 2^{|V|} (\cosh b)^{d|V|} \sum_{r=0}^{\infty} m(r) z^r .$$

Aus den beiden Gleichungen (2.33) und (2.39) folgt sofort: Wenn für $d = 2$ im thermodynamischen Limes $V \uparrow \mathbf{Z}^d$ eine Singularität entsteht, kann dies nur für

$$(2.40) \quad z = \tanh b = e^{-2b}$$

geschehen, also für $b = \frac{1}{2} \sinh^{-1}(1)$. Aufgrund derartiger Überlegungen haben H. A. Kramers und G. H. Wannier (1941) schon 3 Jahre vor Onsagers Lösung den kritischen Punkt des zweidimensionalen Modells lokalisiert. Die Berechnung der Koeffizienten m(r) und n(r) wird für wachsendes r sehr rasch eine äußerst komplexe Aufgabe. Dennoch gelang es M. Kac und J. C. Ward (1952) [die Argumentation wurde von S. Sherman (1960) vervollständigt] aus der high temperature expansion (2.36) die Onsagersche Lösung (2.21) des zweidimensionalen Problems zu gewinnen. [Eine exakte Darstellung der Kac-Ward-Methode findet man in H. S. Green – C. A. Hurst (1964), Chap. 6.2]. Eine relativ kurze, ebenfalls von (2.36) ausgehende Herleitung der Onsager-Formel (2.21) gibt auch H. E. Stanley (1971), Appendix B. Eine weitere Methode, die Onsager-Formel (2.21) aus (2.36) abzuleiten, benutzt sogenannte *Pfaffsche Aggregate* (vgl. H. Schwerdtfeger, 1950), eine Variante der Determinante für schiefsymmetrische (2n) x (2n)-Matrizen. Vgl. hierzu H. S. Green – C. A. Hurst (1964), Chap. 3, und C. J. Thompson (1972), Appendix E.
Abschließend sei noch bemerkt, daß die high temperature expansion (2.36) bisher nahezu die einzige Quelle ist, um kritische Parameter und das Verhalten der Zustandsgrößen für das dreidimensionale Modell zu bestimmen, wo exakte Resultate noch nicht erzielt werden konnten. Mit Computerhilfe ist es gelungen, für d = 3 etwa die ersten zwanzig Koeffizienten n(r) zu berechnen. Wir verweisen hierzu auf C. J. Thompson (1972), Section 6.5, H. E. Stanley (1971), p. 144, sowie auf O. G. Mouritsen (1984).

3 Wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung

Gegen Ende der sechziger Jahre brachten R. L. Dobrushin (1968) sowie unabhängig davon, O. E. Lanford und D. Ruelle (1969) einen völlig neuen Gesichtspunkt in die Diskussion ein. Hierzu kehren wir nochmals an den Anfang zurück:
Ausgangspunkt war die endliche Menge S_V aller Spin-Konfigurationen in $V \subset \mathbf{Z}^d$. S_V wird zu einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum, wenn man die – für das Studium von Gleichgewichtssituationen zugrundezulegende – *Gibbsverteilung* P_V einführt, die definiert ist durch

$$(3.1) \quad P_V(s) = \frac{1}{Z_V} \exp\,[b(w_V(s) + Hm_V(s))], \qquad s \in S_V,$$

wobei

$$(3.2) \quad w_V(s) := \sum_{[k,\ell] \in K_V} s_k s_\ell$$

die *Wechselwirkungsenergie* und

$$(3.3) \quad m_V(s) := \sum_{k \in V} s_k$$

die *Magnetisierung der Spinkonfiguration* $s \in S_V$ *ist.*

Das Maß P_V hängt natürlich von den Parametern b und H ab, also

(3.4) $P_V = P_V^{b,H}$.

Gleiches gilt für weitere im folgenden einzuführende Größen. Wir werden diese Abhängigkeit in der Schreibweise meist unterdrücken.
Die Zustandssumme Z_V übernimmt jetzt die Rolle eines Normierungsfaktors.
Die neue Idee besteht nun im wesentlichen darin, den thermodynamischen Limes $V \uparrow \mathbf{Z}^d$ nicht mehr nur analytisch (für die Zustandssumme bzw. die freie Energie), sondern auch für die W-Räume $(S_V, \mathfrak{P}(S_V), P_V)_{V \text{ endlich} \subset \mathbf{Z}^d}$ durchzuführen. Im folgenden Diagramm wird die neue Idee durch die gestrichelten Pfeile symbolisiert:

$$\begin{tikzcd}
(S_V, \mathfrak{P}(S_V), P_V) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\begin{array}{l}\text{thermodynamischer}\\ \text{Limes } V \uparrow \mathbf{Z}^d\end{array}"] & Z_V,\ f_V = -\frac{1}{b} \log Z_V \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{thermodynamischer}\\ \text{Limes } V \uparrow \mathbf{Z}^d\end{array}"] \\
(E, F, P) \arrow[r, dashed] & f = \lim \frac{1}{|V|} f_V,\ m = -\frac{\partial}{\partial H} f, \ldots
\end{tikzcd}$$

Die Wahl des Meßraumes (E, F) als Limes der Räume $(S_V, \mathfrak{P}(S_V))_V$ liegt auf der Hand: Man wähle

(3.5) $E := \{-1, 1\}^{\mathbf{Z}^d}$

und für F die Produkt-σ-Algebra auf E.
Keineswegs auf der Hand liegend ist jedoch die Wahl eines geeigneten W-Maßes P als Limes der Maße P_V; denn die Familie der W-Räume $(S_V, \mathfrak{P}(S_V), P_V)$ ist – außer im uninteressanten Fall $b = 0$ – nicht projektiv. Im folgenden werden wir, teils nur um abzukürzen, folgende Notationen verwenden: Wir schreiben

(3.6) $I := \mathbf{Z}^d, \quad \mathcal{V} := \{V \subset I : V \neq \emptyset, V \text{ endlich}\}$

und bezeichnen mit

(3.7) $\partial V := \{\ell \in I \setminus V : \exists\, k \in V, |k - \ell| = 1\}$

den *Rand* von $V \in \mathcal{V}$. Für $x = (x_i)_{i \in I} \in E$ und $J \subset I$ sei

(3.8) $x_J := (x_j)_{j \in J}, \qquad [x]_J := \{y \in E : y_J = x_J\}$

und schließlich

(3.9) $F_J := \sigma(\{[x]_V : x \in E, V \in \mathcal{V}, V \subset J\})$

die von den „Zylindern" $[x]_V \subset E$ mit $V \in \mathcal{V}$, $V \subset J$ erzeugte Unter-σ-Algebra von F. Wir können offenbar $\mathfrak{P}(S_V)$ mit F_V identifizieren, so daß wir von jetzt ab annehmen, daß die Gibbsmaße P_V auf (E, F_V) gegeben sind $(V \in \mathcal{V})$. Die fehlende Projektivität der Familie $(P_V)_{V \in \mathcal{V}}$ hat ihren Grund darin, daß bei der Definition von P_V „Randeffekte" unberücksichtigt bleiben. Der Versuch, dieses Manko zu beheben, führt zu folgender Begriffsbildung:

Für $V \in \mathcal{V}$, $x, y \in E$ sei

(3.10) $$P_{V,y}([x]_V) := \frac{1}{Z_{V,y}} \exp\,[b(w_{V,y}(x) + Hm_V(x))],$$

wobei $Z_{V,y}$ der Normierungsfaktor und

(3.11) $$w_{V,y}(x) := \sum_{[k,\ell]\in \mathcal{K}} x_k x_\ell + \sum_{[k,\ell]\in \mathcal{K}'} x_k y_\ell$$

mit $\mathcal{K} = \mathcal{K}_V$ und $\mathcal{K}' := \{[k, \ell] \in \mathcal{K}_{V\cup\partial V} : k \in V, \ell \in \partial V\}$, also die Wechselwirkungsenergie der Konfiguration $x_V \in S_V$ unter Berücksichtigung der Randspins y_ℓ, $\ell \in \partial V$, ist. Ferner schreiben wir abkürzend $m_V(x)$ für $m_V(x_V)$.
Entscheidend ist nun folgende Beobachtung, die sich durch Nachrechnen bestätigen läßt:
Für $V, W \in \mathcal{V}$ mit $V \cup \partial V \subset W$, $x, y, z \in E$ ist

(3.12) $$P_{W,z}([x]_V \mid \mathcal{F}_{W\setminus V})(y) = P_{V,y}([x]_V),$$

d. h. die bedingte Erwartung des Ereignisses $[x]_V$, unter der Hypothese $[y]_{W\setminus V} \in \mathcal{F}_{W\setminus V}$ (der „Ereignisse in $W\setminus V$"), ist gänzlich unabhängig von W und z und hängt nur von den Spin-Komponenten y_ℓ, $\ell \in \partial V$, ab. Gleichung (3.12) kann als Ausgangspunkt für die Theorie der Zufallsfelder (Stochastische Felder, random fields, s. C. Preston, 1976) und speziell der Markov-Felder (Markov random fields, s. F. Spitzer, 1974, und R. Kindermann – J. L. Snell, 1980) angesehen werden, wo das Pendant zu (3.12) die sogenannten DLR(Dobrushin-Lanford-Ruelle)-Gleichungen sind. Die Tatsache, daß die linke Seite in (3.12) nur von den Randspins in ∂V abhängt, läßt sich durch die sogenannte *Markov-Eigenschaft*

(3.13) $$P_{W,\cdot}(F \mid \mathcal{F}_{W\setminus V}) = P_{W,\cdot}(F \mid \mathcal{F}_{\partial V})$$

für $V, W \in \mathcal{V}$ mit $V \cup \partial V \subset W$, $F \in \mathcal{F}_V$ ausdrücken.
Die Unabhängigkeit in (3.12) von $W \in \mathcal{V}$, $z \in E$ legt es nun nahe, thermodynamische Limiten der W-Maße $P_{V,y}$ folgendermaßen zu definieren:

Ein W-Maß P auf $(E, \mathcal{F})$ heiße Gibbs-Maß, wenn gilt:

(3.14) $$P(F \mid \mathcal{F}_{I\setminus V})(y) = P_{V,y}(F) \quad P-\text{f.a. } y \in E$$

für alle $V \in \mathcal{V}$ *und* $F \in \mathcal{F}_V$.

Die Markov-Eigenschaft bleibt natürlich für Gibbsmaße erhalten, und zwar in der Form

(3.15) $$P(F \mid \mathcal{F}_{I\setminus V}) = P(F \mid \mathcal{F}_{\partial V}) \quad P-\text{f}\cdot\text{s}$$

für $V \in \mathcal{V}$, $F \in \mathcal{F}_V$.
Zu fragen ist nun als erstes, ob es überhaupt Gibbsmaße auf $(E, \mathcal{F})$ gibt, d. h. ob die von den Parametern $b \geqslant 0$ und $H \in \mathbf{R}$ abhängende Menge

(3.16) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(b, H)$$

der Gibbsmaße nichtleer ist.

Diese Frage ist jedoch ziemlich leicht zu entscheiden: Versieht man $\{-1, 1\}$ mit der diskreten und $E = \{-1, 1\}^I$ mit der Produkt-Topologie, so ist E und damit auch die Menge aller W-Maße auf $(E, \mathcal{F})$ ein kompakter metrischer Raum. Wählt man also eine gegen I aufsteigende Folge $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in $\mathcal{V}$ mit der Eigenschaft, daß zu jedem $V \in \mathcal{V}$ ein V_n mit $V \cup \partial V \subset V_n$ existiert, sowie ein $z \in E$, so besitzt die Folge $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ der W-Maße P_n auf $(E, \mathcal{F})$, die vermöge

$$P_n(F \cap G) = P_{V_n, z}(F) \cdot 1_G(z) \qquad \text{für } F \in \mathcal{F}_{V_n}, G \in \mathcal{F}_{I\setminus V_n}$$

festgelegt sind, einen Häufungspunkt P, der die Gleichung (3.14) erfüllt d. h. mit P ist ein Gibbsmaß auf $(E, \mathcal{F})$ gefunden. Die Menge $\mathfrak{G}(b, H)$ ist also für alle Parameterwerte b, H nichtleer. Weiter unten werden wir sogar spezielle Gibbsmaße konstruieren.

Eine weitaus schwierigere – und den Nerv der gesamten Problemstellung treffende – Aufgabe ist die Beantwortung der Eindeutigkeitsfrage. Hierbei erweist sich die – bislang unberücksichtigte – auf E liegende Ordnungsstruktur als wesentliche Hilfe: Wir versehen $E = \{-1, 1\}^I$ mit der Produktordnung, d. h. wir schreiben für $x, y \in E$

(3.17) $x \leqslant y, \quad \text{falls } x_i \leqslant y_i \quad \forall\, i \in I$

ist. Damit ist für jedes $V \in \mathcal{V}$ der Kegel

(3.18) $\mathcal{P}_V := \{p\colon E \to \mathbf{R},\ p \text{ monoton steigend, } \mathcal{F}_V\text{-meßbar}\}$

erklärt. $\mathcal{P}_V$ ist offenbar determinierend in dem Sinne, daß für zwei W-Maße P, Q auf $(E, \mathcal{F}_V)$ gilt:

(3.19) $\int p\,dP = \int p\,dQ \quad \forall\, p \in \mathcal{P}_V \Rightarrow P = Q.$

Somit ist auf der Menge der W-Maße auf $(E, \mathcal{F}_V)$ vermöge

(3.20) $P \prec Q \Leftrightarrow \int p\,dP \leqslant \int p\,dQ \quad \forall\, p \in \mathcal{P}_V$

eine (Balayage-) Ordnung $\prec$ erklärt.

Sind nun $V \in \mathcal{V}$ und $x, y \in E$ mit $x \leqslant y$, so lassen sich unter wesentlicher Heranziehung der *Attraktivität der Interaktion,* die sich hier in der *Nicht-Negativität des Parameters b* (in den wir die „Spinkopplungskonstante" absorbiert haben) ausdrückt, die Voraussetzungen des Satzes von R. Holley (1974), Theorem 6) nachweisen: Es gilt nämlich, wie man durch Nachrechnen bestätigt,

(3.21) $P_{V,y}(s \vee t) P_{V,x}(s \wedge t) \geqslant P_{V,y}(s) P_{V,x}(t)$

für $s, t \in S_V$, das als Verband bezüglich der Produkt-Ordnung betrachtet wird. Als Folgerung erhalten wir (R. Holley, 1974, Corollary 11): Die Abbildung $y \to P_{V,y}$ ist bezüglich der Ordnung (3.20) monoton steigend, d. h. es gilt für $V \in \mathcal{V}$, $x, y \in E$ mit $x \leqslant y$:

(3.22) $\int p\,dP_{V,x} \leqslant \int p\,dP_{V,y} \quad \forall\, p \in \mathcal{P}_V.$

Bezeichnen wir nun mit $P_{V,-}$ bzw. $P_{V,+}$ das zur Konfiguration $x^- := (-1)_{i\in I}$ bzw. $x^+ := (+1)_{i\in I}$ gehörige Gibbsmaß auf $(E, \mathcal{F}_V)$, so haben wir also

(3.23) $\int p\,dP_{V,-} \leqslant \int p\,dP_{V,y} \leqslant \int p\,dP_{V,+}$

für alle $V \in \mathcal{V}$, $p \in \mathcal{P}_V$ und $y \in E$.

Hieraus ergibt sich, zusammen mit (3.12), für $V, W \in \mathcal{V}$ mit $V \cup \partial V \subset W$ und $p \in \mathcal{P}_V$:

$$(3.24)\quad \int p dP_{W,+} = \int E_{W,+}[p \mid \mathcal{F}_{W\setminus V}](y) dP_{W,+}(y)$$
$$= \int (\int p dP_{V,y}) dP_{W,+}(y) \leqslant \int (\int p dP_{V,+}) dP_{W,+}$$
$$= \int p dP_{V,+}$$

und ebenso

$$(3.25)\quad \int p dP_{W,-} \geqslant \int p dP_{V,-}.$$

Somit sind vermöge

$$(3.26)\quad \int p dP_{\pm} := \lim_{W \uparrow I} \int p dP_{W,\pm} \quad \text{für} \quad p \in \mathcal{P}_V, V \in \mathcal{V}$$

zwei W-Maße P_+ und P_- auf $(E, \mathcal{F})$ definiert.
Man bestätigt sofort, daß P_+ und P_- Gibbsmaße sind, wobei wegen (3.23) gilt:

$$(3.27)\quad \int p dP_- \leqslant \int p dP \leqslant \int p dP_+$$

für alle $V \in \mathcal{V}$, $p \in \mathcal{P}_V$ und $P \in \mathfrak{G}$.
P_+ und P_- sind darüberhinaus *translationsinvariant:* Bezeichnen wir nämlich für $k \in I$ mit $\tau_k : E \to E$ die zugehörige Translation, also $(\tau_k x)_\ell = x_{k+\ell}$, $\ell \in I$, dann ist für $p \in \mathcal{P}_V$ (und entsprechend für P_- statt P_+)

$$(3.28)\quad \int p dP_{V,+} = \int p \circ \tau_k dP_{V+k,+} \geqslant \int p \circ \tau_k dP_+,$$

also

$$(3.29)\quad \int p dP_+ \geqslant \int p \circ \tau_k dP_+ \geqslant \int p \circ \tau_k \circ \tau_{-k} dP_+ = \int p dP_+.$$

Unmittelbar aus der Definition (3.14) folgen Konvexität (und Kompaktheit) der Menge $\mathfrak{G}$ der Gibbsmaße. Nach (3.27) sind P_+ und P_- stets Extremalpunkte von $\mathfrak{G}$. Die Ungleichungen (3.27) liefern ferner:
Es gibt genau dann nur ein Gibbsmaß auf $(E, \mathcal{F})$, *wenn die Maße* P_- *und* P_+ *zusammenfallen.*
Wegen der Translationsinvarianz der beiden Maße P_- und P_+ genügt es für die Koinzidenzprüfung, lediglich die Gleichheit

$$(3.30)\quad \int p_0 dP_- = \int p_0 dP_+$$

für die eine monotone Funktion

$$(3.31)\quad p_0 : E \to \{0, 1\}, x \to \frac{1}{2}(1 + x_0)$$

nachzuprüfen. Gilt nämlich (3.30), dann liegen für $V \in \mathcal{V}$ die Funktionen

$$p_v : E \to \{0, 1\}, \qquad x \to \begin{cases} 1, & x_k = 1 \quad \forall k \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\quad p := \sum_{k \in V} p_k - p_v \qquad \left[p_k(x) = \frac{1}{2}(1 + x_k) \right]$

in $\mathcal{P}_V$ mit

$$(3.32)\quad \int p_k dP_- = \int p_0 dP_- = \int p_k dP_+ \qquad \forall k \in V,$$

also

$$(3.33)\quad \sum_{k\in V} \int p_k dP_- - \int p_v dP_- = \int p dP_- \leqslant \int p dP_+ = \sum_{k\in V} \int p_k dP_+ - \int p_V dP_+$$

und damit wegen (3.32)

$$(3.34)\quad \int p_V dP_+ \leqslant \int p_V dP_- \leqslant \int p_V dP_+.$$

Die Gleichheit der Integrale für die Funktionen p_V, $V \in \mathcal{V}$, impliziert aber die Gleichheit der Maße P_- und P_+.
Somit besteht Eindeutigkeit für die Gibbsmaße auf $(E, \mathcal{F})$ *genau dann, wenn die Wahrscheinlichkeit, an der Stelle* $0 \in I$ *ein* (+)*-Spin vorzufinden, für die beiden Maße* P_- *und* P_+ *gleich ist.*
Aus Symmetriegründen ist

$$(3.35)\quad \int p_V dP_-^{b,H} = 1 - \int p_V dP_+^{b,-H},$$

also für $H = 0$:

$$(3.36)\quad |\mathfrak{G}| = 1 \Leftrightarrow \int p_0 dP_+ = \frac{1}{2}.$$

Das in der low temperature expansion (s. Abschnitt 2.2) angesprochene Peierlssche Argument (R. Peierls, 1936, für d = 2, auf höhere Dimensionen ausgedehnt von R. L. Dobrushin, 1965) liefert [für d = 2 durch eine einfache Abschätzung der Zahl der dort betrachteten Polygonzüge, vgl. R. Kindermann – J. L. Snell (1980), pp. 11–14] die Ungleichung

$$(3.37)\quad \int p_0 dP_+^{b,0} > \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad b \text{ hinreichend groß.}$$

Damit ist für $H = 0$ und hinreichend große b die Existenz mehrerer verschiedener Gibbsmaße auf $(E, \mathcal{F})$ nachgewiesen: $\mathfrak{G}$ enthält ja stets die Strecke $\{(1-\alpha)P_- + \alpha P_+ : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$ zwischen P_- und P_+, die im angesprochenen Fall nicht zu einem Punkt zusammenfällt.
Es wird sich nun zeigen, daß die Menge $\mathfrak{G}(b, H)$ genau dann einelementig ist, wenn die freie Energie per Spin $f(b, H)$, s. (1.5), als Funktion von H differenzierbar ist. Zunächst ersieht man unmittelbar aus (1.6) und (3.10) für $V \in \mathcal{V}$, $y \in E$ die Beziehung

$$(3.38)\quad \frac{\partial}{\partial H}(-f_{V,y}(b, H)) = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial H} \log Z_{V,y}(b, H) = \int m_V dP_{V,y}^{b,H}.$$

Die Ableitung der Funktion $H \mapsto -f_{V,y}(b, H)$ ist somit gerade der Erwartungswert der Magnetisierung m_V in V. Nochmaliges Differenzieren zeigt, daß die zweite Ableitung dieser Funktion mit der Varianz von m_V übereinstimmt und demnach $\geqslant 0$ ist. Damit ist die Funktion $H \mapsto f_{V,y}(b, H)$ stetig differenzierbar und konkav. Wir wählen nun eine Folge $(V(n))_{n\in\mathbf{N}}$ von Würfeln $V(n) \in \mathcal{V}$ mit $V(n) \cup \partial V(n) \subset V(n+1)$, die gegen I aufsteigt.
Weiter fixieren wir b und setzen für $H \in \mathbf{R}$

$$(3.39)\quad f_{n,\pm}(H) := \frac{1}{|V(n)|} f_{V(n),\pm}(b, H), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Unter Beachtung von

(3.40) $m_V = 2 \sum_{k \in V} p_k - |V| \in \mathcal{P}_V, \qquad V \in \mathcal{V},$

und der Translationsinvarianz des Maßes P_- ist

(3.41) $\int \frac{1}{|V|} m_V dP_{V,-} \leqslant \frac{2}{|V|} \sum_{k \in V} \int p_k dP_- - 1 = \int m_0 dP_-$

mit

(3.42) $m_0 = 2p_0 - 1.$

Mit (3.38) und (3.41) folgt nun

(3.43) $-f'_{n,-} \leqslant \int m_0 dP_- \leqslant \int m_0 dP_+ \leqslant -f'_{n,+},$

wobei sich das letzte Ungleichheitszeichen analog zum ersten ergibt. Aus den Ergebnissen von T. D. Lee – C. N. Yang (s. Ende des Abschnitts 2.1) wissen wir, daß (zunächst ohne Berücksichtigung der Randspins + oder –)

(3.44) $f(b, H) = \lim_{n \to \infty} f_n(b, H) = -\frac{1}{b} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|V(n)|} \log Z_{V(n)}(b, H)$

existiert und für $H \neq 0$ analytisch ist.
Den Einfluß der Randspins kann man aber abschätzen: Für $V \in \mathcal{V}$, $s \in S_V$ und $x, y \in E$ ist offenbar

(3.45) $|w_{V,x}(s) - w_{V,y}(s)| \leqslant \sum_{\ell \in \partial V} (|x_\ell| + |y_\ell|) \leqslant 2|\partial V|,$

also

(3.46)
$$\begin{aligned} Z_{V,x} &= \sum_{s \in S_V} \exp[b(w_{V,x}(s) + Hm_V(s))] \\ &= \sum_{s \in S_V} \{\exp[b(w_{V,y}(s) + Hm_V(s))] \\ &\qquad \cdot \exp[b(w_{V,x}(s) - w_{V,y}(s))]\} \\ &\leqslant Z_{V,y} \exp[2b|\partial V|]. \end{aligned}$$

Damit ist

(3.47) $\left| \frac{1}{|V|} \log Z_{V,x} - \frac{1}{|V|} \log Z_{V,y} \right| \leqslant 2b \frac{|\partial V|}{|V|}.$

Hieraus folgt, zusammen mit (3.44),

(3.48) $\lim_{n \to \infty} f_{n,-} = \lim_{n \to \infty} f_{n,+} = \lim_{n \to \infty} f_n = f.$

Da die (steig differenzierbaren) Funktionen $f_{n,\pm}$ konkav sind, ist auch ihr Limes f als Funktion von H konkav.
Daraus folgt (reelle Analysis!):
Ist $f(b, \cdot)$ differenzierbar in $H \in \mathbf{R}$, so ist

(3.49) $\frac{\partial}{\partial H} f(b, H) = \lim_{n \to \infty} f'_{n,-}(H) = \lim_{n \to \infty} f'_{n,+}(H).$

Insbesondere haben wir nach (3.43) in diesem Fall

$$(3.50)\quad -\frac{\partial}{\partial H} f(b, H) = \int m_0 dP_-^{b,H} = \int m_0 dP_+^{b,H},$$

Mit (3.42) und (3.30) folgt somit;
Ist f(b, ·) *differenzierbar in* H, *so ist* $|\mathfrak{G}(b, H)| = 1$.
Wir bemerken, daß f(b, ·) in allen $H \neq 0$ differenzierbar ist, daß also $|\mathfrak{G}(b, H)| = 1$ für alle $b \geqslant 0$ und $H \neq 0$ ist. Weiter liefert die Konkavität der Funktion $H \to f(b, H)$:

$$(3.51)\quad \lim_{H \uparrow 0} \frac{\partial}{\partial H} f(b, H) = f^{(\ell)}(b, 0),$$

wobei $f^{(\ell)}(b, 0)$ die linksseitige Ableitung von f(b, ·) im Nullpunkt ist.
Da ferner die in H stetigen Funktionen $\int m_0 dP_{V(n),-}^{b,H}$ gegen $\int m_0 dP_-^{b,H}$ aufsteigen, ist letztere eine nach unten halbstetige Funktion von H. Somit ist

$$(3.52)\quad \int m_0 dP_-^{b,0} = \lim_{H \uparrow 0} \int m_0 dP_-^{b,H} = -\lim_{H \uparrow 0} \frac{\partial}{\partial H} f(b, H) = -f^{(\ell)}(b, 0).$$

Ebenso erhält man für die rechtsseitige Ableitung $f^{(r)}(b, \cdot)$:

$$(3.53)\quad \int m_0 dP_+^{b,0} = -f^{(r)}(b, 0).$$

Somit ist wieder mit (3.42) und (3.30) und mit (3.52), (3.53) genau dann $|\mathfrak{G}(b, 0)| = 1$, wenn f(b, ·) in H = 0 differenzierbar ist. Schließlich erinnern wir noch an die spontane Magnetisierung (s. (2.12)):

$$(3.54)\quad m^+(b) = \lim_{H \downarrow 0} m(b, H) = \lim_{H \downarrow 0} \left(-\frac{\partial}{\partial H} f(b, H)\right) = \int m_0 dP_+^{b,0}.$$

Somit ist auch, wegen (3.54), (3.42) und (3.36),

$$(3.55)\quad |\mathfrak{G}(b, 0)| = 1 \Leftrightarrow m^+(b) = 0.$$

Als Fazit der letzten Überlegungen halten wir fest:
Es gibt zu den Parametern b *und* H *genau dann nur ein Gibbsmaß auf* $(E, \mathcal{F})$, *wenn die freie Energie per Spin (im thermodynamischen Limes)* f(b, ·) *in* H *differenzierbar ist, d. h. wenn* $\frac{\partial f}{\partial H}(b, H)$ *existiert. Dies ist für* $H \neq 0$ *stets der Fall und für* H = 0 *genau dann, wenn die spontane Magnetisierung* $m^+(b)$ *verschwindet.*
Somit verbleibt noch, um den Parameterbereich der Eindeutigkeit der Gibbsmaße genau abzustecken, die Bestimmung der spontanen Magnetisierung $b \to m^+(b)$:
Eine erneute Anwendung der Holleyschen Ungleichungen (R. Holley, 1974, Corollary 12) liefert nun zunächst:
Ist $V \in \mathcal{V}$, $k \in I$ mit $0, k \in V$, so gilt mit

$$(3.56)\quad m_k := 2p_k - 1 \in \mathcal{P}_V$$

$$(3.57)\quad \int m_0 m_k dP_{V,+} \geqslant \int m_0 dP_{V,+} \int m_k dP_{V,+},$$

so daß für beliebiges $k \in I$

(3.58) $\int m_0 m_k dP_+ \geqslant (\int m_0 dP_+)^2$

ist. Sind andererseits $V_1, V_2, W \in \mathcal{V}$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $0 \in V_1$, $k \in V_2$ und $V_i \cup \partial V_i \subset W$, dann ist

(3.59) $$\int m_0 m_k dP_{W,+} = \int [\int m_0 dP_{V_1,y} \int m_k dP_{V_2,y}] dP_{W,+}(y) \leqslant \int m_0 dP_{V_1,+} \int m_k dP_{V_2,+}.$$

Hieraus folgt

(3.60) $$\limsup_{|k| \to \infty} \int m_0 m_k dP_+ \leqslant (\int m_0 dP_+)^2,$$

und zusammen mit (3.58), für alle $b \geqslant 0$:

(3.61) $$m^+(b, 0)^2 = (\int m_0 dP_+^{b,0})^2 = \lim_{|k| \to \infty} \int m_0 m_k dP_+^{b,0} = \lim_{|k| \to \infty} \lim_{n \to \infty} \int m_0 m_k dP_{n,+}^{b,0}.$$

Unter Verwendung der Transfer-Matrix-Methode (s. Abschnitt 2.1), hier allerdings mit „positivem" statt des periodischen Randes, gelang es D. B. Abraham und A. Martin-Löf (1973), die rechte Seite in (3.61) für Dimension $d = 2$ zu berechnen und damit die Onsagersche Formel (2.27) für die spontane Magnetisierung zu bestätigen.
Somit haben wir für die Dimensionen $d \leqslant 2$ die Eindeutigkeitsfrage im Griff:
Für $d = 1$ *ist* $|\mathfrak{G}(b, H)| = 1$ *für alle* $b \geqslant 0$ *und* $H \in \mathbf{R}$. *Für* $d = 2$ *ist, mit*
$b^* = \frac{1}{2} \sinh^{-1}(1)$,

$$|\mathfrak{G}(b, H)| = 1 \quad \textit{für} \quad H \neq 0 \quad \textit{oder für} \quad H = 0, b \leqslant b^*$$
$$|\mathfrak{G}(b, H)| > 1 \quad \textit{für} \quad H = 0, b > b^*.$$

Nun liegt eine ähnliche Situation in den Phasendiagrammen der Thermodynamik vor: Der kritische Punkt (hier $(b^*, 0)$) ist Endpunkt einer Kurve (hier $b \to (b, 0)$, $b > b^*$), die den Übergang einer Phase in eine andere markiert. Damit ist es gerechtfertigt, zu sagen:
Ist $|\mathfrak{G}(b, H)| > 1$, *so findet Phasenübergang statt.*
[Dies ist auch die allgemeine Definition des Begriffs Phasenübergang in der Theorie der Stochastischen Felder.]
Für Dimension $d = 2$ ist über den genauen Bereich der Parameterwerte, an denen Phasenübergang stattfindet, hinaus noch bekannt, daß neben den auf der Strecke zwischen P_- und P_+ liegenden Gibbsmaßen keine weiteren existieren (M. Aizenman, 1979), d. h. im zweidimensionalen bleibt die „Symmetrie der Translationsinvarianz" für alle Gibbsmaße erhalten.
Für höhere Dimension $d \geqslant 3$ konnte, neben den am Ende des Abschnitts 2.2 angesprochenen Approximationen der Zustandsgrößen, bisher nur vergleichsweise wenig geklärt werden: Wieder mit einem „Peierlsschen Argument" konnte R. L. Dobrushin (1965) die Existenz eines Phasenübergangs für genügend großes b (und $H = 0$) nachweisen. Da die Funktion $b \to m^+(b)$ monoton wachsend ist

(R. B. Griffiths, 1967), folgt die Existenz eines kritischen Punktes (b^*, 0). Ebenfalls unter Heranziehung der Ordnungsstruktur erhält man, daß der kritische Parameter mit wachsender Dimension kleiner wird (vgl. H. O. Georgii, 1974, Korollar 14.3). Darüber hinaus konnte R. L. Dobrushin (1972) für $d \geqslant 3$ nachweisen, daß für $H = 0$ und b hinreichend groß neben dem „Bruch der spin-flip-Symmetrie" (d. h. P_- und P_+ sind verschieden) ein weiterer Symmetriebruch in der Existenz eines nicht-translationsinvarianten Gibbsmaßes vorliegt. Selbstverständlich wurde das Ising-Modell auf nahezu jede erdenkliche Weise verallgemeinert, wie z. B. Ersetzung des Gitters $\mathbf{Z}^d$ durch andere Gitter oder durch allgemeine Graphen, Ausdehnung des Parameters b auf negative Werte (antiferromagnetischer Fall) oder Einbeziehung noch allgemeinerer „Interaktionspotentiale", Ersetzung von $\{-1, 1\}$ durch allgemeinere „Zustandsräume". Auf diese Weise konnten viele schöne Resultate erzielt und sogar ganze Theoriegebäude errichtet werden, aber erst die Zukunft wird erweisen, ob das ursprüngliche Ziel der Dissertation E. Isings, das dreidimensionale Problem zu lösen, erreichbar ist, oder ob sich die Aussage bewahrheitet (s. H. E. Stanley, 1971, p. 17): „Some workers have claimed that it (the threedimensional Ising model) may in fact be an unsoluble problem".

Literatur

Abraham, D. B.; Martin-Löf, A. (1973): The Transfer Matrix for a Pure Phase in the Two-dimensional Ising Model. Comm. math. Phys. **32**, 245

Aizenman, M. (1979): Instability of Phase Coexistence and Translation Invariance in Two Dimensions. Phys. Rev. Letters **43**, 407 [s. auch M. Aizenman, Comm. math. Phys. **73**, 83]

Aizenman, M. (1982): Geometric Analysis of Φ^4 Fields and Ising Models. Part I and II. Comm. math. Phys. **86**, 1

Born, M.; Fuchs, K. (1938): The statistical mechanics of condensing systems. Proc. Royal Soc. London **164**, 391

Bragg, W. L.; Williams, E. J. (1934/35): Effect of thermal agitation on atomic arrangement in alloys, I/II. Proc. Royal Soc. London **A 145/A 151**, 699/540

Brush, S. G. (1967): History of the Lenz-Ising model. Rev. Mod. Phys. **39**, 883

Dobrushin, R. L. (1965): Existence of a phase transition in two and three dimensional Ising models. Theor. Prob. Appl. **10**, 193

Dobrushin, R. L. (1968): The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity. Theor. Prob. Appl. **13**, 197

Dobrushin, R. L. (1972): Coexistence of phases in the three dimensional Ising model. Theor. Prob. Appl. **17**

Fisher, M. E. (1967): Critical Temperatures of Anisotropic Ising Lattices, II. General Upper Bounds. Phys. Rev. **162**, 480

Föllmer, H. (1974): Random economics with many interacting systems. J. Math. Econ. **1**, 51

Georgii, H. O. (1972): Phasenübergang 1. Art bei Gittergasmodellen. Springer, Lecture Notes Phys. **16**

Georgii, H. O. (1974): Stochastische Felder und ihre Anwendungen auf Interaktionssysteme. Vorlesungs-Skriptum. Heidelberg

Georgii, H. O. (1979): Canonical Gibbs Measures. Springer, Lect. Notes Math. **760**

Green, H. S.; Hurst, C. A. (1964): Order-Disorder Phenomena. London – New York – Sidney: Interscience Publishers (Wiley & Sons)

Griffiths, R. B. (1967): Correlations in Ising Ferromagnets. I. J. Math. Phys. **8**, 478

Holley, R. (1974): Remarks on the FKG inequalities. Comm. math. Phys. **36**, 227

Huang, K. (1963): Statistical Mechanics. New York: Wiley

I s i n g , E. (1925): Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. Z. f. Phys. **31**, 253

I s r a e l , R. B. (1979): Convexity in the Theory of Lattice Gases. Princeton: Princeton University Press

K a c , M.; W a r d , J. C. (1952): A combinatorical solution of the two-dimensional Ising model. Phys. Rev. **88**, 1332

K e s t e n , H. (1963/64): On the Number of Self Avoiding Walks I/II. J. Math. Phys. **4/5**, 966/1128

K i n d e r m a n n , R.; S n e l l , J. L. (1980): Markov Random Fields and their Applications. Providence, R. I, AMS Ser. Contemp. Math. 1

K r a m e r s , H. A.; W a n n i e r , G. H. (1941): Statistics of the two-dimensional ferromagnet I/II. Phys. Rev. **60**, 252/263

L a n f o r d , O. E.; R u e l l e , D. (1969): Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. Comm. math. Phys. **13**, 194

L e e , T. D.; Y a n g , C. N. (1952): Statistical theory of equations of state and phase transitions, II. Lattice gas and Ising model. Phys. Rev. **87**, 410

M a r t i n - L ö f , A. (1972): On the spontaneous magnetization in the Ising model. Comm. math. Phys. **24**, 253

M o u r i t s e n , O. G. (1984): Computer Studies of Phase Transitions and Critical Phenomena. Springer Series in Comput. Phys.

O n s a g e r , L. (1944): Crystal Statistics: I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. Phys. Rev. **65**, 117

O n s a g e r , L. (1949): Discussion remark (Spontaneous magnetization of the two-dimensional Ising model). Nuovo Cimento (Suppl.) **6**, 261

P e i e r l s , R. (1936): On Ising's model of ferromagnetism. Proc. Cambr. Phil. Soc. **32**, 477

P o h l , R. W. (1964): Elektrizitätslehre. 19. Aufl. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer

P r e s t o n , C. (1976): Random Fields. Springer, Lect. Notes Math. 534

R u e l l e , D. (1969): Statistical Mechanics. Rigorous Results. New York – Amsterdam: W. A. Benjamin

R u e l l e , D. (1978): Thermodynamic Formalism: The Mathematical Structures of Classical Equilibrium Statistical Mechanics. London: Addison-Wesley

S c h w e r d t f e g e r , H. (1950): Introduction to Linear Algebra and the Theory of Matrices. Groningen: Noordhoff

S h e r m a n , S. (1960): Combinatorical aspects of the Ising model for ferromagnetism, I. A conjecture of Feynman on paths and graphs. J. Math. Phys. **1**, 202

S i n a i , Ya. G. (1982): Theory of Phase Transitions: Rigorous Results. Oxford – New York – Toronto: Pergamon Press

S p i t z e r , F. (1974): Introduction aux processus de Markov a parametres dans Z_ν. Springer, Lect. Notes Math. 390

S t a n l e y , H. E. (1971): Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon Press

T h o m p s o n , C. J. (1972): Mathematical Statistical Mechanics. New York: Macmillan

V a n d e r W a e r d e n , B. L. (1942): Die lange Reichweite der regelmäßigen Atomanordnung in Mischkristallen. Z. Phys. **118**, 473

W e i d l i c h , W. (1971): The statistical description of polarisation phenomena in society. Brit. J. Math. & Statist. Psychology **24**, 251

Y a n g , C. N. (1952): The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model. Phys. Rev. **85**, 808

Y a n g , C. N.; L e e , T. D. (1952): Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation. Phys. Rev. **87**, 404

Dr. Gottlieb Leha
Fakultät für Mathematik
und Informatik
Innstr. 27
8390 Passau

(Eingegangen: 3. 7. 1985)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
88 (1986) 124–145
AMS subject classification: 57 R 55, 57 R 10, 57 R 60, 58 B 99

Exotische Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten*)

M. Kreck, Mainz

Inhaltsverzeichnis

1. Was sind exotische Strukturen und was ist in anderen Dimensionen bekannt?

Für den, der nicht so mit dem Begriff einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit vertraut ist, reicht es für diesen Artikel völlig aus, an die folgenden Beispiele von differenzierbaren (C^∞) Mannigfaltigkeiten zu denken:

– der n-dimensionale Euklidische Raum $\mathbf{R}^n$

– die n-dimensionale Standardsphäre $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

– S^n ist Rand von $D^{n+1} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| \leqslant 1\}$, der $(n + 1)$-dimensionale Ball

– der n-dimensionale reelle projektive Raum $\mathbf{RP}^n$ = Geraden in $\mathbf{R}^{n+1} = S^n/_{\pm \mathrm{Id}}$

– der n-dimensionale komplexe projektive Raum $\mathbf{CP}^n$ = Geraden in $\mathbf{C}^{n+1} = S^{2n+1}/_{S^1}$. n ist in diesem Fall die komplexe Dimension, die reelle Dimension ist also 2n.

– Nullstellengebilde einer durch ein Polynom gegebenen Abbildung von einem der obigen Beispiele in die reellen oder komplexen Zahlen. Dabei muß man, um Singularitäten zu vermeiden, darauf achten, daß der Nullpunkt ein regulärer Wert ist, d. h. der Gradient darf nirgendwo verschwinden.

*) Ausarbeitung eines Übersichtsvortrages aus Anlaß der Jahrestagung der deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV) im September 1984.
Der Hauptteil dieses Artikels wurde während eines Gastaufenthaltes am IHES im März/April 1985 geschrieben. Der Autor möchte dem Institut für die Einladung und Unterstützung herzlich danken.

Als ein solches Beispiel, das im folgenden eine besondere Rolle spielen wird, sei die folgende Mannigfaltigkeit genannt:

– Die Kummerfläche $K = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in \mathbf{CP}^3 \mid z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$. K hat die komplexe Dimension 2 also reelle Dimension 4.

– Cartesische Produkte von den obigen Beispielen.

Wie in mathematischen Theorien üblich, führt man für Mannigfaltigkeiten einen Isomorphiebegriff ein. Es gibt mehrere naheliegende Möglichkeiten:

– Homöomorphie. Ein Homöomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N ist eine bijektive Abbildung $f: M \to N$, so daß f und f^{-1} stetig sind. Wenn eine solche Abbildung existiert, heißen M und N homöomorph.

– Diffeomorphie. Wenn man für f und f^{-1} (C^∞)-Differenzierbarkeit verlangt, erhält man einen Diffeomorphismus. M und N heißen dann diffeomorph.

Es ist ein naheliegendes Problem zu fragen, ob diese Begriffe äquivalent sind. Offensichtlich sind diffeomorphe Mannigfaltigkeiten homöomorph, so daß man die folgende Frage erhält:

Problem *Gibt es eine* n*-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit* M, *zu der es eine homöomorphe aber nicht diffeomorphe Mannigfaltigkeit* N *gibt. Man sagt dann:* M *hat* eine exotische differenzierbare Struktur. *Man kann dann weiter nach einer Klassifikation der exotischen Strukturen fragen, das heißt nach der Klassifikation der zu* M *homöomorphen Mannigfaltigkeiten bis auf Diffeomorphie.*

Bemerkung Die hier gewählte Formulierung des Problems ist ästhetisch vielleicht nicht ganz befriedigend. Man kann statt dessen auch den Begriff der differenzierbaren Struktur auf einer topologischen Mannigfaltigkeit einführen und nach dem äquivalenten Problem der Klassifikation dieser Strukturen fragen. Wir werden in diesem Artikel vorwiegend differenzierbare Mannigfaltigkeiten betrachten und nur in Ausnahmefällen topologische (d. h. im wesentlichen Räume die lokal homöomorph zum $\mathbf{R}^n$ sind). Ferner werden wir, ohne das speziell zu erwähnen, i. allg. annehmen, daß orientierbare Mannigfaltigkeiten mit einer Orientierung versehen sind.

Es ist leicht, zu zeigen, daß jede 1-dimensionale Mannigfaltigkeit eine eindeutige differenzierbare Struktur hat (sie ist stets Vereinigung aus Kreisen und Geraden). Auch 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten haben eine sehr einfache Beschreibung und es ist nicht überraschend, daß sie eine eindeutige differenzierbare Struktur haben. Dagegen ist die Klassifikation von 3-Mannigfaltigkeiten ein offenes schwieriges Problem (man denke nur an die ungelöste 3-dimensionale Poincaré-Vermutung), aber trotzdem weiß man seit etwa 30 Jahren, daß sie eine eindeutige differenzierbare Struktur haben. Dies folgt aus der sogenannten Hauptvermutung für 3-Mannigfaltigkeiten (jede 3-Mannigfaltigkeit hat eine eindeutige kombinatorische Struktur) [Mo] und der Tatsache, daß eine kombinatorische 3-Mannigfaltigkeit eine eindeutige differenzierbare Struktur hat (vgl. z. B. [Hi-Ma]).

Es war auf diesem Hintergrund sicher eine große Überraschung, als Milnor im Jahre 1956 eine Arbeit veröffentlichte, in der er differenzierbare Mannigfaltigkeiten angab, die homöomorph aber nicht diffeomorph zur 7-dimensionalen Standardsphäre S^7 sind.

Satz (Milnor [Mi_1] (1956)) S^7 *hat exotische Strukturen.*

Ich möchte kurz etwas zu Milnors Beweis sagen, denn die Ideen waren grundlegend für die weitere Entwicklung, die im Laufe der nächsten 15 Jahre zu einem ziemlich guten Verständnis von differenzierbaren Strukturen auf Mannigfaltigkeiten der Dimension $\geqslant 5$ führte. Auf diesem Hintergrund versteht man dann auch besser, warum die Resultate von Donaldson und Freedman über 4-Mannigfaltigkeiten so überraschend sind. Zur Konstruktion seiner Beispiele sei zunächst daran erinnert, daß S^7 die Einheitssphäre in $H \times H$ ist, H = Quaternionen. Die Einheitsquaternionen S^3 operieren auf S^7 und die Quotientenmannigfaltigkeit ist die quaternionale Gerade $P_1(H) = S^4$. Man hat also ein differenzierbares Faserbündel (das quaternionelle Hopf-Bündel) $S^3 \to S^7 \to S^4$. Die Zerlegung von S^4 in S^4 – Südpol $\cup$ S^4 – Nordpol = $\mathbf{R}^4 \cup \mathbf{R}^4$, wobei $x \in \mathbf{R}^4 - \{0\}$ mit $\frac{1}{\|x\|^2} \cdot x \in \mathbf{R}^4 - \{0\}$ identifiziert wird, liefert eine Zerlegung von $S^7 = \mathbf{R}^4 \times S^3 \bigcup_\alpha \mathbf{R}^4 \times S^3$, wobei α die Punkte $(x, y) \in \mathbf{R}^4 - \{0\} \times S^3$ mit den Punkten $\left(\frac{1}{\|x\|^2} \cdot x, \frac{x}{\|x\|} \cdot y\right)$ identifiziert und die Multiplikation in S^3 die quaternionale Multiplikation ist.

Nun kann man für ungerades k die Identifikation so verallgemeinern:

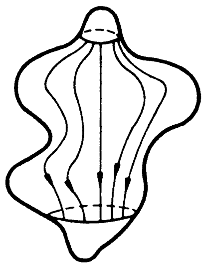
$$(x, y) \sim \left(\frac{1}{\|x\|^2} \cdot x, \quad \left(\frac{x}{\|x\|}\right)^{(1+k)/2} \cdot y \cdot \left(\frac{x}{\|x\|}\right)^{(1-k)/2}\right).$$

Die durch entsprechende Identifikation entstehende 7-Mannigfaltigkeit bezeichnen wir mit Σ_k. $\Sigma_1 = S^7$.

Milnor zeigt, daß Σ_k stets homöomorph zu S^7 ist, aber für gewisse k nicht diffeomorph. Die Idee des Beweises, daß Σ_k homöomorph zu S^7, ist die folgende. Milnor konstruiert ganz explizit eine Morse-Funktion $\Sigma_k \to \mathbf{R}$, die nur 2 kritische Punkte hat. Mit etwas Analysis (gewöhnliche Differentialgleichungen) folgt daraus, daß Σ_k Vereinigung von zwei 7-dimensionalen Bällen ist und das impliziert mit einem Standardtrick, daß Σ_k homöomorph zu S^7 ist.

Es soll versucht werden, dieses wichtige Argument zu veranschaulichen. Eine Morse-Funktion stelle man sich als Höhenfunktion eines Reliefs vor. Kritische Punkte entsprechen z. B. für 2-dimensionale Reliefs den Maxima, Minima und Sattelpunkten. Wenn eine Morse-Funktion nur 2 kritische Punkte hat, hat sie genau ein Maximum und Minimum und keine anderen kritischen Punkte. Nun betrachte man das durch die Morse-Funktion gegebene Gradientenvektorfeld und seine Integralkurven. In dieser Situation kann man sich die Integralkurven so vorstellen, daß man es auf das Relief regnen läßt. Die Bahnen der Wassertröpfchen durchlaufen die Integralkurven. Nun nehme man kleine Bälle um das Maximum x und Minimum y. Von jedem Punkt des Randes des Balles um x verläuft genau eine Integralkurve zum Rand des Balles um y und diese Integralkurven füllen den Zwischenraum zwischen den beiden Bällen völlig aus. Man erhält somit eine Zerlegung von

Σ_k in die zwei Bälle und einen Zylinder, und das liefert natürlich eine Zerlegung von Σ_k in zwei Bälle, indem man einen Ball zusammen mit dem Zylinder wieder zu einem Ball zusammenfaßt.



Ball um Maximum

Zylinder

Ball um Minimum

Diese Art der Argumentation mittels Morse-Theorie ist von ganz grundsätzlicher Bedeutung. Sie findet zum Beispiel wenige Jahre später Verwendung bei Smales Beweis des h-Kobordismussatzes [Sm], der ein entscheidender Schlüssel zum allgemeinen Verständnis von Mannigfaltigkeiten der Dimension $\geqslant 5$ ist.

Das Argument, daß Σ_k für gewisse k nicht diffeomorph zu S^7 ist, war ebenfalls grundlegend für die weitere Entwicklung. Der allgemeine Hintergrund ist der Hirzebruchsche Signatursatz oder allgemeinere Ganzzahligkeitssätze für charakteristische Zahlen [Hi]. Diese Sätze sagen aus, daß bestimmte Invarianten, wie die aus den Pontrjaginklassen des Tangentialbündels einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit, deren Dimension durch 4 teilbar ist, abgeleiteten charakteristischen Zahlen, gewisse Kongruenzen erfüllen. Z. B. gilt für differenzierbare 8-Mannigfaltigkeiten M ohne Rand stets: $P_1(M)^2 - 4 \cdot \text{sign}(M) = 0 \bmod 7$. Dabei ist $P_1(M) \in H^4(M; \mathbf{Z})$ die 1. Pontrjagin-Klasse und $P_1(M)^2$ die entsprechende charakteristische Zahl. sign (M) ist die übliche Signatur der durch die Schnittform auf M gegebenen symmetrischen Bilinearform (vgl. dazu die kurze Erklärung in 2.).

Nun ist Σ_k nach Konstruktion Rand einer kompakten 8-Mannigfaltigkeit, nämlich des assoziierten Scheibenbündels: spanne in jede Faser S^3 einen 4-dimensionalen Ball ein. Wäre Σ_k diffeomorph zu S^7, so könnte man den Rand mit einem 8-dimensionalen Ball zukleben. Für die entstehende Mannigfaltigkeit M kann man $P_1(M)^2$ und die Signatur leicht ausrechnen: $P_1(M)^2 = 4k^2$, sign (M) = 1. Die obige Kongruenz impliziert damit:

$$k^2 - 1 = 0 \bmod 7$$

falls Σ_k diffeomorph zu S^7.

Also ist Σ_k für k = 3, 5, 7, 9, 11, 13 nicht diffeomorph zu S^7. Etwas später wurden die differenzierbaren Strukturen auf S^7 sollständig klassifiziert: Σ_{2m-1} und $\Sigma_{2m'-1}$ sind orientierungserhaltend diffeomorph genau dann, wenn $m(m+1) = m'(m'+1) \bmod 56$, und auf diese Weise erhält man alle möglichen differenzierbaren Strukturen auf S^7 [Ke-Mi$_1$].

Das zuletzt erwähnte Resultat ist ein Spezialfall der allgemeinen Resultate von Kervaire und Milnor [Ke-Mi$_1$] über differenzierbare Strukturen auf Sphären der Dimension $\geqslant 5$. Genauer betrachten sie sogenannte Homotopiesphären, das sind differenzierbare kompakte n-Mannigfaltigkeiten, die homotopieäquivalent zur n-Sphäre sind (d. h. sie können durch Verformungen in die n-Sphäre überführt werden). Nach Smale sind solche Homotopiesphären für $n \geqslant 5$ homöomorph zu S^n, das ist die Aussage der n-dimensionalen topologischen Poincaré Vermutung für differenzierbare Mannigfaltigkeiten (vgl. [Mi_2]). Aus dieser Arbeit folgt, daß es auf S^5 und S^6 nur eine differenzierbare Struktur gibt und S^n für $n \geqslant 7$ bis auf wenige Ausnahmen, (z. B. $n = 12$), verschiedene differenzierbare Strukturen besitzt aber die Anzahl stets endlich ist. Die genaue Bestimmung dieser Anzahl wird im wesentlichen auf die Berechnung der stabilen Homotopiegruppen von Sphären reduziert, die nach wie vor bis auf kleine Dimensionen einem Buch mit sieben Siegeln gleichen.

Die von Kervaire und Milnor entwickelten Methoden waren wesentlicher Baustein einer rasanten Entwicklung, die Ende der 60er Jahre mit den Arbeiten von Kirby und Siebenmann zu einer Reduktion der Klassifikation von differenzierbaren Strukturen auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten der Dimension $\geqslant 5$ auf homotopietheoretische Probleme führte [Ki-Si]. Insbesondere ist die Anzahl stets abzählbar und für kompakte Mannigfaltigkeiten endlich. Als weiteres konkretes Beispiel sei genannt: $\mathbf{R}^n$ hat für $n \neq 4$ genau eine differenzierbare Struktur.

2. Der Satz von Rohlin und die Rolle des Whitney-Tricks

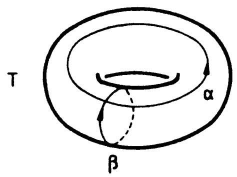
Die in 1. erwähnten Resultate: Mannigfaltigkeiten der Dimension $\leqslant 3$ haben stets eine eindeutige differenzierbare Struktur und solche der Dimension $\geqslant 5$ haben i. allg. exotische Strukturen (allerdings gibt es in allen Dimensionen $\geqslant 5$ kompakte mit eindeutiger Struktur [Kr_1]) aber (für kompakte Mannigfaltigkeiten) stets endlich viele, lassen die Lücke der 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten offen. Bis vor wenigen Jahren stand man den 4-Mannigfaltigkeiten einigermaßen hilflos gegenüber. Das lag daran, daß die bewährten höherdimensionalen Methoden (h-Kobordismussatz, surgery) nur sehr beschränkt anwendbar waren (im wesentlichen lieferten sie Resultate bis auf zusammenhängende Summe mit $S^2 \times S^2$), und ähnliches gilt für die kombinatorischen und geometrischen Methoden von 3-Mannigfaltigkeiten.

Das bedeutet natürlich nicht, daß keine Arbeiten über 4-Mannigfaltigkeiten geschrieben wurden. Wer darüber einen Überblick erhalten möchte, sei auf [Ma] verwiesen. Aber es gab z. B. weder ein einziges Beispiel einer 4-Mannigfaltigkeit mit exotischer Struktur noch eines mit eindeutiger (das letztere ist nach wie vor offen).

Von den Resultaten vor 1981 möchte ich nur eines und eine Folgerung daraus erwähnen, das die ersten Hinweise darauf lieferte, daß höherdimensionale Methoden in der Dimension 4 i. allg. nicht anwendbar sind.

Satz (Rohlin [Ro], 1952) *Wenn die Schnittform einer 1-zusammenhängenden kompakten differenzierbaren 4-Mannigfaltigkeit ohne Rand gerade ist, so ist die Signatur durch 16 teilbar.*

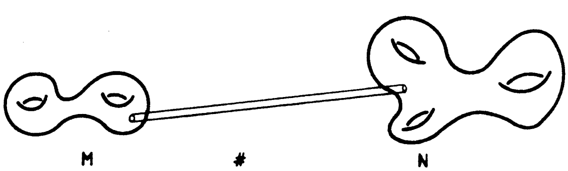
Ein Raum ist 1-zusammenhängend, wenn er wegzusammenhängend ist und sich jede geschlossene Kurve auf einen Punkt deformieren läßt. Die Schnittform S_M einer orientierten unberandeten kompakten 4-Mannigfaltigkeit M ist eine unimodulare symmetrische Bilinearform auf dem freien **Z**-Modul $H_2(M; \mathbf{Z})/_{\text{Torsion}}$, die man sich anschaulich zumindest für 1-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten so vorstellen kann: Repräsentiere Homologieklassen α und β durch Immersionen von S^2 im M (Einbettungen mit transversalen Selbstdurchdringungen), die sich in allgemeiner Lage in endlich vielen Punkten schneiden. Mit Hilfe der Orientierung von M kann man jedem Schnittpunkt eine Zahl ± 1 zuordnen. Die Summe dieser Zahlen ist die Schnittzahl $S_M(\alpha, \beta)$.



$S_T(\alpha, \beta) = \pm 1$

Eine Form heißt gerade, falls für alle α gilt $S(\alpha, \alpha) = 0\ (2)$, sonst heißt sie ungerade. Die Signatur ist wie üblich die Differenz der Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte (unter Berücksichtigung von Multiplizitäten).

Bevor wir zu Freedmans Satz kommen, soll an einem Beispiel gezeigt werden, warum Rohlins Satz impliziert, daß gewisse höherdimensionale Methoden in Dimension 4 nicht funktionieren. Der Satz impliziert, daß es keine 1-zusammenhängende differenzierbare kompakte unberandete 4-Mannigfaltigkeit mit Schnittform E_8 gibt, wobei E_8 die eindeutige positiv definite gerade Form mit Signatur 8 ist (deren Graph das Dynkin-Diagramm der entsprechenden Lie-Gruppe ist) (vgl. z. B. [Mi-Hu]). Wenn wir mit $\langle \pm 1 \rangle$ die entsprechende 1-dimensionale Form bezeichnen, so können wir die orthogonale Summe $E_8 + \langle -1 \rangle$ betrachten. Da indefinite Formen durch ihren Rang, Signatur und Typ (gerade oder ungerade) klassifiziert werden [Se], gilt: $E_8 + \langle -1 \rangle \xrightarrow[f]{\cong} 8\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle$. Das letztere ist aber die Schnittform von $M = \underbrace{\mathbf{CP}^2 \# \ldots \# \mathbf{CP}^2}_{8} \# \overline{\mathbf{CP}^2}$, wobei $\overline{\mathbf{CP}^2}$ die projektive Ebene mit der negativen Orientierung ist und # die zusammenhängende Summe ist:



Wenn α ein Basiselement von $\langle -1 \rangle$ ist, so liefert $f(\alpha)$ ein Element von $H_2(M; \mathbf{Z})$, welches durch eine stetige Abbildung $g : S^2 \to M$ repräsentiert werden kann. Man kann sich fragen, ob man g als differenzierbare Einbettung wählen kann. Würden höherdimensionale Methoden funktionieren, so wäre die Antwort ja, denn jede stetige Abbildung $g : S^n \to N^{2n}$ mit N 1-zusammenhängend und $n \geqslant 3$ kann durch Einbettung ersetzt werden [Ke-Mi$_1$]. Es gilt aber

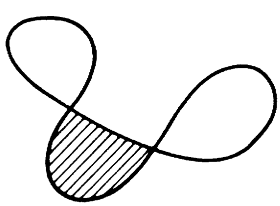
Korollar [Ke-Mi$_2$] *Es gibt eine 1-zusammenhängende differenzierbare 4-Mannigfaltigkeit* M *und Homologieklasse* $\beta \in H_2(M; \mathbf{Z})$, *die nicht durch eine differenzierbare Einbettung repräsentiert werden kann.*

B e w e i s Wir führen den Beweis mittels der oben begonnenen Argumentation, da diese eine für unseren Zusammenhang interessante Querverbindung aufzeigt. Kervaire und Milnor geben andere Beispiele an, indem sie zeigen, daß z. B. das 2-fache der Diagonale in $H_2(S^2 \times S^2; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ bzw. das 3-fache eines Erzeugers von $H_2(\mathbf{CP}^2; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ nicht durch eine differenzierbare Einbettung repräsentiert werden kann. Der Hintergrund all dieser Beispiele ist der oben erwähnte Satz von Rohlin.

Sei $M = \#_8 \mathbf{CP}^2 \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ wie oben und $\beta = f(\alpha)$. Wenn β durch differenzierbare Einbettung $g : S^2 \to M$ repräsentiert werden könnte, so folgt aus Standardmethoden, daß man g zu einer Einbettung $\mathbf{CP}^2 - \mathring{D}^4 \to M$ fortsetzen kann, wobei $S^2 = \mathbf{CP}^1 \subset \mathbf{CP}^2 - \mathring{D}^4$. Damit kann man sich eine neue Mannigfaltigkeit $M' := M - (\mathbf{CP}^2 - \mathring{D}^4) \cup D^4$ konstruieren, die die folgenden Eigenschaften hat: M' ist 1-zusammenhängend und differenzierbar und $S_{M'}$ ist isomorph zum orthogonalen Komplement von α, also zu E_8. Das widerspricht aber Rohlins Satz. □

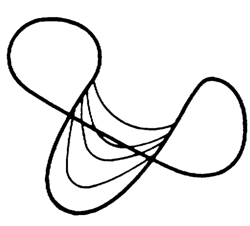
An diesem Beispiel wird deutlich, daß die Frage, welche Homoligieklassen durch Einbettungen der 2-Sphäre repräsentiert werden können, von Bedeutung für die wichtige Frage ist, welche unimodularen symmetrischen Bilinearformen über $\mathbf{Z}$ Schnittformen von 1-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten sind.

Es soll ganz kurz auf das Problem eingegangen werden, das auftritt, wenn man zeigen möchte, daß man eine Homologieklasse durch eine Einbettung von S^2 repräsentieren kann. Aus der allgemeinen Theorie folgt, daß man stets eine Immersion finden kann. In höheren Dimensionen (Immersionen $S^n \to M^{2n}$ mit $n \geqslant 3$) kann man deren endlich viele Selbstdurchdringungspunkte, die in Paaren von Doppelpunkten auftreten, durch den sogenannten Whitney-Trick wegmachen [Mi$_2$]: Man spanne, wie in dem Bild angedeutet, einen 2-dimensionalen Ball, eine Whitney-Scheibe, ein und verforme die Immersion entlang dieser Scheibe, bis die Doppelpunkte verschwinden.



2-dimensionaler Ball

Verformung:

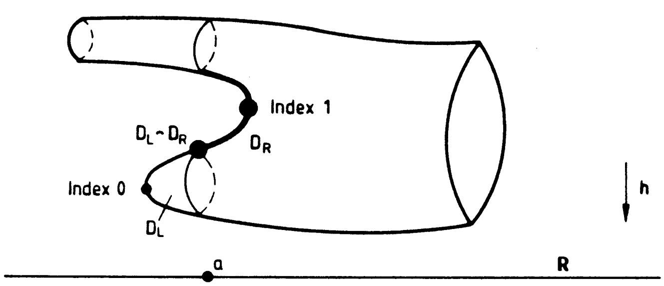


Für n = 2 treten bei dem Whitney-Trick Probleme auf, da man die benötigte 2-dimensionale Whitney-Scheibe in eine 4-Mannigfaltigkeit zwar abbilden und damit immersieren kann aber wieder vor dem Problem steht, diese Immersion in eine Einbettung zu verwandeln und damit scheinbar überhaupt nichts gewonnen hat.

Die Probleme mit dem Whitney-Trick spielen nicht nur bei der Repräsentierbarkeit von Homologieklassen durch Einbettungen sondern auch an anderer Stelle eine wichtige Rolle.

Wir haben in 1. den h-Kobordismussatz von Smale erwähnt, der besagt, daß ein h-Kobordismus W der Dimension $\geqslant 6$ diffeomorph zum Zylinder $M \times I$ ist. Dabei verstehen wir unter einem h-Kobordismus eine 1-zusammenhängende differenzierbare kompakte Mannigfaltigkeit W, deren Rand aus zwei Komponenten M und N besteht, auf die man W deformieren kann. (W ist homotopieäquivalent zu einem Zylinder.) Insbesondere sind M und N dann diffeomorph.

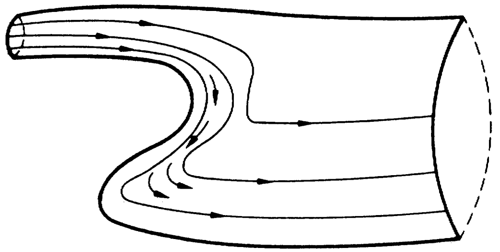
Für dim W = 5 versagen die Beweismethoden von Smale, die darin bestehen, eine Morse-Funktion $h : W \to \mathbf{R}$ ohne kritische Werte zu finden, so daß ein in 1. angedeutetes Argument impliziert, daß $W \cong M \times I$. Was man für dim W = 5 mit seinen Methoden erreichen kann ist das folgende [Mi_2]: Es gibt eine Morse-Funktion $W \to \mathbf{R}$, die nur kritische Punkte vom Index 2 und 3 hat. Dabei ist der Index die Anzahl der negativen Eigenwerte (unter Berücksichtigung von Multiplizitäten) der Hesseschen Form. Diese kritischen Punkte treten in Paaren auf. Das folgende Bild beschreibt eine analoge 2-dimensionale Situation mit kritischen Punkten vom Index 0 bzw. 1:



Ähnlich wie in 1. bei Milnors Beweis, daß Σ_k homöomorph zu S^7 ist, sieht man in solch einer Situation durch Betrachtung von Integralkurven, die von dem einen kritischen Punkt ausgehen bzw. in dem anderen enden, Einbettungen von 3-dimensionalen Bällen D^3_R (rechts-Ball) und D^3_L (links-Ball), deren Rand in einem Zwischenniveau $h^{-1}(a)$ liegt. Also liefert der Rand von D^3_R und D^3_L zwei Einbettungen von S^2 in die 4-Mannigfaltigkeit $h^{-1}(a)$: S^2_R und S^2_L.

Falls sich diese beiden eingebetteten Sphären in genau einem Punkt schneiden, kann man die beiden kritischen Punkte durch einen in dem Bild angedeuteten Trick wegmachen. Man leitet das Gradientenvektorfeld geschickt um (s. S. 132).

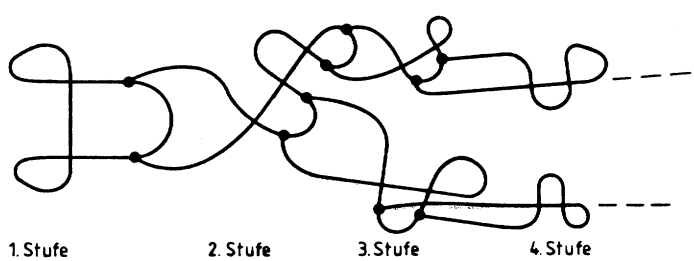
In der beschriebenen Situation weiß man stets, daß sich S^2_R und S^2_L in endlichen vielen Punkten $x, y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots, y_k, z_k$ schneiden. In der analogen höherdimensionalen Situation kann man wieder den Whitney-Trick anwenden und die

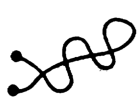


Punktepaare $y_1, z_1, \ldots, y_k, z_k$ wegmachen. Dies zeigt in einem weiteren Beispiel, welche entscheidende Rolle der Whitney-Trick spielt. Wäre er auch in Dimension 4 anwendbar, so könnte man für 1-zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeiten den h-Kobordismussatz beweisen und 2-dimensionale Homologieklassen durch differenzierbare Einbettungen von 2-Sphären repräsentieren.

3. Casson-Henkel, der Satz von Freedmann, die 4-dimensionale Poincaré-Vermutung und andere Anwendungen

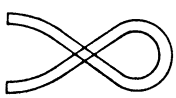
In 2. habe ich versucht klarzumachen, welche Rolle der Whitney-Trick beim Verständnis von Mannigfaltigkeiten spielt und was die Probleme in der Dimension 4 sind. Anfang der 70er Jahre hat A. Casson versucht, einen Ausweg aus diesem Dilemma zu finden [Ca]. Das Problem bei dem Whitney-Trick in Dimension 4 ist, daß man die benötigte 2-dimensionale Whitney-Scheibe nicht einbetten sondern nur immersieren kann. Cassons Idee war es, solch eine Immersion zu nehmen und zu versuchen, deren Doppelpunkte mit dem Whitney-Trick wegzumachen. Das führt natürlich wieder auf das gleiche Problem, eingebettete 2-dimensionale Scheiben einzuspannen. Im allgemeinen kann man wieder nur eine Immersion erhalten und dieses Verfahren iteriert er. Induktiv erhält er so einen Turm von immersierten Whitney Scheiben. Schematisch kann man sich das an dem folgenden Bild vorstellen:



Dabei steht das Bild  für eine immersierte 2-Scheibe.

Wenn man nach endlich vielen Schritten zu einer Stufe käme, auf der man die immersierten Whitney-Scheiben dieser Stufe einbetten könnte, könnte man den Whitney-Trick rekursiv anwenden, die Doppelpunkte in der Stufe davor wegmachen und so in der Stufe davor Einbettungen erhalten usw. bis am Ende die ursprüngliche Immersion in eine Einbettung verwandelt werden könnte. Aber i. allg. wird diese Situation nicht nach endlich vielen Schritten auftreten und der Casson Turm hat unendlich viele Stockwerke.

Die obige Skizze liefert nur eine Idee davon, was ein Casson-Turm ist. Bei der genauen Definition, die hier nicht angegeben werden soll, betrachtet man Verdickungen dieser Immersionen. Man möchte nämlich am Ende die Homologieklasse nicht nur durch irgendeine Einbettung repräsentieren, sondern diese Einbettung sollte eine „schöne" Umgebung haben, was für differenzierbare Einbettungen stets der Fall ist. Ein Casson-Henkel wird damit eine Vereinigung von verdickten immersierten 2-Bällen und das ist eine 4-dimensionale Untermannigfaltigkeit $CH \subset M$, deren Bausteine etwa so aussehen



(kinky Henkel).

Außerdem stellt man gewisse zusätzliche Bedingungen. Man möchte nicht zulassen, daß die immersierten Whitney-Scheiben des n-ten Stockwerkes solche aus den niedrigeren Etagen schneiden. Dazu braucht man eine Bedingung an die betrachtete Homologieklasse. Wir fassen die wesentlichen Informationen, die Casson bewiesen hat, zusammen.

Satz (A. Casson (1973–75) [Ca]) *Sei* M *eine* 1-*zusammenhängende differenzierbare* 4-*Mannigfaltigkeit mit Rand und* f *eine Immersion einer* 2-*Scheibe in* M, *deren Rand in* ∂M *eingebettet wird. Wenn es ein* $x \in H_2(M; \mathbf{Z})$ *gibt mit* $S_M(x, y) = 1$, *wo* y *die von* f *repräsentierte Homologieklasse in* $H_2(M, \partial M; \mathbf{Z})$ *ist, und* $S_M(x, x)$ *gerade, dann ist* f *regulär homotop zur ersten Stufe eines Casson-Henkels* CH (*regulär homotop bedeutet homotop in der Kategorie der Immersionen*).

Ein Casson-Henkel ist stets eigentlich homotopieäquivalent zu dem Standardhenkel: $D^2 \times \mathring{D}^2$.

Erstaunlicherweise gilt sogar

Satz (M. Freedman (1981) [Fr_2]) *Ein Casson-Henkel* CH *ist stets homöomorph zum Standardhenkel.*

Es ist im Rahmen eines solchen Artikels unmöglich, den sehr aufwendigen Beweis von Freedmans Satz auch nur anzudeuten. Es ist ein gewaltiger Kraftakt in geometrischer Topologie. Eine (selbst-) kritische Bemerkung kann ich mir nicht verkneifen. Bei dem Beweis werden Methoden aus der geometrischen Topologie benutzt, die von Bing entwickelt wurden und deren Bedeutung von vielen Mathematikern skeptisch beurteilt wurde. Die Anwendung dieser Methoden zur Lösung eines so fundamentalen Problems wie z. B. der 4-dimensionalen topologischen Poincaré-Vermutung macht nachdenklich.

Damit ist die zentrale Anwendung des obigen Satzes erwähnt. Sie ist selbst wieder ein Spezialfall der topologischen Klassifikation von 1-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten. Wir haben in 2. angedeutet, daß der Beweis des h-Kobordismussatzes in der Dimension 4 sowie die Frage, welche unimodularen symmetrischen Bilinearformen Schnittform einer 1-zusammenhängenden kompakten 4-Mannigfaltigkeit sind, eng mit der Existenz von Whitney Scheiben zusammenhängt. Die Sätze von Casson und Freedman zeigen, wie man unter gewissen Bedingungen *topologische* Whitney-Scheiben erhalten kann. Das reicht aus, um die Beweise in der topologischen Kategorie zu Ende zu führen. So erhält man:

Satz ([Fr_2]) *Jeder differenzierbare* h-*Kobordismus zwischen kompakten* 1-*zusammenhängenden* 4-*Mannigfaltigkeiten ist homöomorph zu einem Produkt. Insbesondere sind die beiden Enden homöomorph.*

Bemerkung Die obigen Sätze sind inzwischen von Quinn [Qu] und Freedman und Quinn [Fr-Qu] in mehreren Richtungen verallgemeinert worden. Zum einen gilt der h-Kobordismussatz auch für topologische h-Kobordismen (vgl. die nachfolgende kurze Diskussion) und zum anderen kann man 1-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten durch solche mit poly zyklisch-endlicher Fundamentalgruppe ersetzen. Die erwähnte Arbeit [Fr-Qu] enthält nicht nur die Verallgemeinerung sondern auch eine deutliche Vereinfachung der Beweise.

Bereits 1962 hat Wall [Wa] bewiesen, daß zwei 1-zusammenhängende differenzierbare kompakte 4-Mannigfaltigkeiten genau dann h-kobordant sind, wenn sie isomorphe Schnittformen haben. Also sind sie nach Freedmans Satz homöomorph. Freedman hat in [Fr_2] gezeigt, daß der h-Kobordismussatz für 4-Mannigfaltigkeiten gilt, die nicht überall differenzierbar sind, sondern es reicht, daß sie außerhalb eines Punktes differenzierbar sind. F. Quinn hat nun unter Verwendung von Freedmans Methoden wenig später die sogenannte Annulus-Vermutung bewiesen, die der wesentliche Schritt ist, um zu zeigen, daß jede 4-Mannigfaltigkeit außerhalb eines Punktes eine differenzierbare Struktur besitzt [Qu].

Der oben erwähnte Satz von Wall läßt sich auf topologische Mannigfaltigkeiten verallgemeinern, wenn man als zusätzliche Invariante für Mannigfaltigkeiten mit ungerader Schnittform noch die Kirby-Siebenmann-Invariante $k(M) \in \mathbf{Z}/_2$ hinzunimmt. Die geometrische Bedeutung dieser Invariante ist, daß $k(M) = 0$ ist genau dann, wenn $M \times S^1$ eine differenzierbare Struktur besitzt. Insgesamt folgt:

Satz ([Fr_2], [Qu]) *Zwei kompakte* 1-*zusammenhängende topologische* 4-*Mannigfaltigkeiten sind genau dann homöomorph, wenn sie isomorphe Schnittformen haben und, falls die Schnittformen ungerade sind, die Kirby-Siebenmann-Invariante* $k \in \mathbf{Z}/_2$ *übereinstimmt.* (*Diese ist für differenzierbare Mannigfaltigkeiten stets Null.*)

Wenn man speziell Mannigfaltigkeiten betrachtet, die homotopieäquivalent zu S^4 sind, so ist die Homologie trivial und der Satz impliziert als Spezialfall

Satz (topologische Poincaré Vermutung) [Fr_2] *Jede zu* S^4 *homotopieäquivalente kompakte* 4-*Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu* S^4.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die differenzierbare Poincaré-Vermutung in Dimension 4, also die Aussage, daß eine differenzierbare 4-dimensionale Homotopiesphäre diffeomorph zu S^4 ist, weiterhin offen ist. Nach Freedmans Satz ist die differenzierbare Poincaré-Vermutung äquivalent zur Behauptung, daß S^4 eine eindeutige differenzierbare Struktur besitzt.

Freedmann macht auch Anwendungen auf nicht kompakte 4-Mannigfaltigkeiten:

Satz [Fr_2] *Eine zu* $\mathbf{R}^4$ *bzw.* $S^3 \times \mathbf{R}$ *eigentlich homotopieäquivalente Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu ihr.*

Als letzte Anwendung wenden wir uns wieder dem Problem zu, welche symmetrischen unimodularen Bilinearformen Schnittform einer 1-zusammenhängenden kompakten 4-Mannigfaltigkeit sind. Wir haben in 2. angedeutet, wie das Funktionieren des Whitney-Tricks dazu verwendet werden könnte, um mit Hilfe von offensichtlich realisierbaren Formen neue Formen zu realisieren. Unter den im Satz von Casson erwähnten Bedingungen funktioniert der Whitney Trick nun aber topologisch und das kann man zur Konstruktion *topologischer* 4-Mannigfaltigkeiten mit interessanten Schnittformen ausnutzen. Allerdings sei hier warnend darauf hingewiesen, daß die Bedingung des Satzes von Casson in dem in 2. diskutierten Fall nicht erfüllt ist. Trotzdem zeigt Freedmann mit einem anderen Ansatz, daß E_8 durch eine topologische 4-Mannigfaltigkeit realisiert werden kann, die dann nach dem Satz von Rohlin überhaupt keine differenzierbare Struktur besitzt. Allgemeiner zeigt er

Satz [Fr_2] *Jede unimodulare symmetrische Bilinearform ist Schnittform einer 1-zusammenhängenden kompakten* topologischen *4-Mannigfaltigkeit. (Man kann für ungerade Formen sogar die Kirby-Siebenmann-Invariante* $k \in \mathbf{Z}/_2$ *beliebig vorschreiben.)*

Wie oben gesagt, kann man diesen Satz nicht in voller Allgemeinheit mit den in 2. angedeuteten Methoden beweisen. Aber in den meisten Fällen geht das, insbesondere bei der Realisierung von $E_8 \oplus E_8$. Da dieser Fall von besonderem Interesse ist, soll der Beweis kurz erläutert werden. Bei den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, die wir zu Beginn dieses Artikels aufgelistet haben, haben wir die Kummerfläche $K = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in \mathbf{CP}^3 \mid \Sigma\, z_i^4 = 0\}$ besonders hervorgehoben. Mit Hilfe des bereits erwähnten Signatursatzes läßt sich die Signatur von K aus den charakteristischen Klassen (die man bei einer algebraischen Mannigfaltigkeit leicht aus dem Polynom bestimmen kann) von K ausrechnen und ebenso die Eulersche Charakteristik e: sign (K) = 16, e(K) = 24. Also hat K 2. Betti-Zahl $b_2(K) = 22$. Die Schnittform ist deshalb indefinit. Sie ist gerade, da K eine Spin-Struktur trägt. Wegen der Klassifikation von indefiniten Formen [Se] folgt also:

$$S_K \cong E_8 \oplus E_8 \oplus 3\,H$$

wo $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die hyperbolische Ebene ist.

Um also eine Mannigfaltigkeit M mit $S_M = E_8 \oplus E_8$ zu erhalten, kann man versuchen, diese 3 hyperbolischen Summanden wegzumachen. Die naheliegende Methode dazu ist surgery, was ähnlich wie bei dem in 2. angedeuteten Prozeß darin besteht, gewisse Umgebungen von Sphären herauszuschneiden und durch etwas anderes zu ersetzen. Der Effekt eines solchen Prozesses ist gerade das Subtrahieren eines hyperbolischen Summanden. Wieder hat man allerdings das Problem der Repräsentation von Homologieklassen durch eingebettete 2-Sphären. In dieser Situation, wo man einen hyperbolischen Summanden durch surgery wegmachen möchte, ist die Bedingung von Cassons Satz nun erfüllt. Nach Freedman können wir also surgery machen, wobei das Resultat eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Etwas genauer heißt das das folgende. Mit Hilfe von zwei Casson-Henkeln kann man eine offene Teilmenge $U \subset K$ und einen Homöomorphismus $\varphi : U \to S^2 \times S^2 - D^4$ konstruieren, so daß $\varphi^{-1}(S^2 \times \{*\})$ bzw. $\varphi^{-1}(\{*\} \times S^2)$ Homologieklassen repräsentieren, die Basis eines hyperbolischen Summanden sind. (Freedman zeigt auch, daß es eine andere *differenzierbare* Einbettung $j : U \to S^2 \times S^2$ gibt, eine Bemerkung, die später gebraucht wird.) Dieser hyperbolische Summand verschwindet nun, wenn wir U herausschneiden und statt dessen D^4 hereinkleben. Mit etwas Vorsicht kann man diesen Prozeß bei der Kummerfläche iterieren und so eine topologische 4-Mannigfaltigkeit $M(E_8 \oplus E_8)$ mit $S_M \cong E_8 \oplus E_8$ erhalten. Das Verhältnis zwischen $M(E_8 \oplus E_8)$ und K ist das folgende: $M(E_8 \oplus E_8) \# 3 (S^2 \times S^2)$ ist homöomorph zu K.

4. Einige ‚erwartete' exotische Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten

Man würde vielleicht auf einer differenzierbaren 4-Mannigfaltigkeit M eine exotische Struktur erwarten, wenn die Übertragung der in 1. erwähnten höherdimensionalen Sätze auf die Dimension 4 eine solche ergeben würde. Insbesondere würde man, wenn die Kohomologiegruppe $H^3(M; \mathbf{Z}_2)$ verschwindet, (z. B. M kompakt und 1-zusammenhängend oder $M = \mathbf{R}^4$) eine eindeutige Struktur erwarten, dagegen für $\mathbf{RP}^4$ oder $S^3 \times \mathbf{R}$ eine exotische Struktur.

Für das letztere gab es sogar Kandidaten, denn Cappell und Shaneson [Ca-Sh] hatten eine Mannigfaltigkeit konstruiert, die topologisch h-kobordant zu $\mathbf{RP}^4$ aber nicht diffeomorph ist. Und Freedman selbst hatte eine konstruiert [Fr_1], die eigentlich homotopieäquivalent zu $S^3 \times \mathbf{R}$ aber nicht diffeomorph ist. Der Nachweis, daß die Mannigfaltigkeiten nicht diffeomorph zu $\mathbf{RP}^4$ bzw. $S^3 \times \mathbf{R}$ sind, wird in beiden Fällen auf den Satz von Rohlinin zurückgeführt. Aus den in 3. erwähnten Sätzen folgt, daß diese Mannigfaltigkeiten sogar homöomorph zu $\mathbf{RP}^4$ bzw. $S^3 \times \mathbf{R}$ sind, also erhält man

Satz $S^3 \times \mathbf{R}$ *und* $\mathbf{RP}^4$ *besitzen exotische differenzierbare Strukturen.*

Wie im Falle von exotischen 7-Sphären wäre es schön, explizite Beispiele von 4-Mannigfaltigkeiten zu sehen, die homöomorph aber nicht diffeomorph sind. Freedmans Konstruktion ist etwas indirekt, Cappells und Shanesons ist sehr explizit (man schneidet aus $\mathbf{RP}^4$ ein Stück heraus und klebt dafür etwas anderes herein), aber das einfachste Beispiel scheint mir das folgende zu sein

Beispiel [Kr_2] Sei wieder K die Kummerfläche. Dann sind $\mathbf{RP}^4 \# K$ und $\mathbf{RP}^4 \# 11(S^2 \times S^2)$ homöomorph aber nicht diffemorph.

Der Beweis, daß diese Mannigfaltigkeiten homöomorph sind, ist eine einfache Folgerung aus Freedmans Klassifikation der 1-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten. Aus der topologischen Klassifikation von 4-Mannigfaltigkeiten folgt ($\approx$ bedeutet homöomorph):

$$K \approx M(E_8) \# M(E_8) \# 3(S^2 \times S^2),$$

denn beide Seiten haben gleiche Schnittform. Dabei ist $M(E_8)$ die eindeutig bestimmte topologische 1-zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeit mit Schnittform E_8. Aus dem gleichen Grund folgt ($-M$ bedeutet M mit der entgegengesetzten Orientierung):

$$(-M(E_8)) \# M(E_8) \approx \underset{8}{\#} (S^2 \times S^2).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{RP}^4 \# K &\approx [\mathbf{RP}^4 \# M(E_8)] \# M(E_8) \# 3(S^2 \times S^2) \\ &\approx [\mathbf{RP}^4 \# (-M(E_8))] \# M(E_8) \# 3(S^2 \times S^2) \\ &\approx [\mathbf{RP}^4 \# [(-M(E_8)) \# M(E_8)] \# 3(S^2 \times S^2) \\ &\approx \mathbf{RP}^4 \# 11(S^2 \times S^2). \end{aligned}$$

Dabei wird bei der 2. Identität benutzt, daß die zusammenhängende Summe zwischen einer nicht orientierbaren und einer orientierten Mannigfaltigkeit unabhängig von der Orientierung ist.

Daß $M = \mathbf{RP}^4 \# K$ und $N = \mathbf{RP}^4 \# 11(S^2 \times S^2)$ nicht diffeomorph sind folgt genau wie bei Cappell und Shaneson aus dem Satz von Rohlin. Dieser Satz sagt etwas über die Signatur aus, die nur für orientierte Mannigfaltigkeiten erklärt ist. M und N sind nicht orientierbar, aber wenn wir aus ihnen eine Umgebung von $\mathbf{RP}^3$ in $\mathbf{RP}^4$ herausschneiden, erhalten wir orientierbare Mannigfaltigkeiten, nämlich $K - \mathring{D}^4$ bzw. $11(S^2 \times S^2) - \mathring{D}^4$. Man kann nun mit Hilfe des Satzes von Rohlin zeigen, daß die Signatur dieser Mannigfaltigkeiten modulo 32 eine Diffeomorphie-invariante von M bzw. N ist ([Ca-Sh], [Kr_2]). Aber in einem Falle ist diese Signatur 16 und im anderen Fall 0, also sind M und N nicht diffeomorph.

Abschließend seien einige weitere Beispiele von einfachen 4-Mannigfaltigkeiten mit exotischer Struktur erwähnt, die man mit ähnlichen Methoden beweisen kann. Sei $F_k = \# \mathbf{RP}^2$ eine nicht-orientierbare Fläche. Dann gilt für $k > 1$: $F_k \times S^2 \# S^2 \times S^2$ hat eine exotische differenzierbare Struktur [Kr_3]. Der Fall $k = 1$, also $\mathbf{RP}^2 \times S^2 \# S^2 \times S^2$, scheint offen zu sein. Dieser Fall unterscheidet sich aber von $k > 1$ durch die folgende Eigenschaft: Wenn, für $k = 1$, $F_k \times S^2 \# S^2 \times S^2$ eine exotische Struktur besitzt, dann wird sie die Standardstruktur, wenn man zusammenhängende Summe mit $\underset{r}{\#} S^2 \times S^2$ für genügend großes r bildet, dagegen gibt es für $k > 1$ exotische Strukturen, die nie die Standardstruktur werden [Kr_3]. Daß exotische Strukturen durch zusammenhängende Summe mit $S^2 \times S^2$ standard werden können, ist ein seit längerem bekanntes Phänomen. Z. B. gilt die oben für $\mathbf{RP}^2 \times S^2 \# S^2 \times S^2$ erwähnte Aussage für alle kompakten 1-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten [Wa].

5. Donaldsons Satz über die nicht Realisierbarkeit gewisser Formen

Wir haben an verschiedenen Stellen das Problem erwähnt, welche unimodularen symmetrischen Bilinearformen über **Z** Schnittform einer 1-zusammenhängenden kompakten 4-Mannigfaltigkeit sind. Freedman hat bewiesen, daß es stets durch topologische Mannigfaltigkeiten geht. S. Donaldson hat 1982 bewiesen, daß die entsprechende Aussage für differenzierbare Mannigfaltigkeiten i. allg. falsch ist.

Satz (Donaldson 1982 [Do_1]) *Wenn* M *eine* 1-*zusammenhängende kompakte differenzierbare* 4-*Mannigfaltigkeit mit positiv definiter Schnittform ist, so ist* S_M *äquivalent zur standard Euklidischen Form* $\Sigma\, x_i^2$.

Insbesondere folgt, daß es keine 1-zusammenhängende kompakte differenzierbare 4-Mannigfaltigkeit M gibt mit $S_M = E_8 \oplus E_8$. Das heißt, der in 3. skizzierte surgery Prozeß zur Konstruktion einer topologischen Mannigfaltigkeit mit dieser Form ist nicht in der differenzierbaren Kategorie durchführbar. Ein Casson-Henkel kann deshalb i. allg. nicht diffeomorph zu einem Standardhenkel sein.

Man sollte an dieser Stelle daran erinnern, daß die Klassifikation der positiv definiten symmetrischen unimodularen Bilinearformen über **Z** im Gegensatz zur schon mehrfach erwähnten sehr einfachen Klassifikation der indefiniten Formen ein sehr schwieriges offenes Problem ist. Z. B. hat man die folgende Information über die Anzahl der geraden positiv definiten Formen mit vorgegebenem Rang $k : k = 8 : 1$ (Anzahl); $k = 16 : 2$; $k = 24 : 24$; $k = 32 : \geqslant 10^7$; $k = 40 : \geqslant 10^{51}$ (vgl. [Mi-Hu], speziell die Diskussion in II, § 6).

Im folgenden sollen die wesentlichen Beweisschritte des Satzes von Donaldson knapp erläutert werden ([Do_1], vgl. auch [Fr-Uh]). Sei M wie im Satz mit positiv definiter Schnittform S_M. Wie kann man entscheiden, ob S_M die Standardform ist? Eine einfache Überlegung aus der linearen Algebra zeigt, daß das genau dann der Fall ist, wenn Rang $S_M = \frac{1}{2} \# \{\alpha \mid S_M(\alpha, \alpha) = 1\}$ ([Do_1], Lemma 2). Der entscheidende und schwierige Schritt ist nun der folgende: Donaldson zeigt, daß es eine kompakte orientierte 5-dimensionale Mannigfaltigkeit W gibt, deren Rand aus M und disjunkten Kopien von $\mathbf{CP}^2$ und $\overline{\mathbf{CP}^2}$ besteht, deren Gesamtzahl r ist, $r = \frac{1}{2} \# \{\alpha \mid S_M(\alpha, \alpha) = 1\}$. Nun ist die Signatur einer berandeten Mannigfaltigkeit 0 [Hi] und die Signatur von $\mathbf{CP}^2 = 1$. Also folgt: sign (M) $= \sum_r \pm 1 \leqslant r$. Da S_M positiv definit ist, gilt sign (M) = Rang S_M und der ist offensichtlich stets $\geqslant r$. Also muß Gleichheit herrschen und wegen der obigen Bemerkung ist die Schnittform die Standardform.

Wie kommt man nun an diese Mannigfaltigkeit W? Zunächst sollte betont werden, daß die bekannten Methoden zur Untersuchung, ob gewisse Mannigfaltigkeiten beranden, hier zu nichts führen können, denn sie würden für differenzierbare und topologische Mannigfaltigkeiten im wesentlichen auf die gleiche Antwort hinauslaufen. Aber wir wissen nach Freedman, daß die Antwort in den beiden Kategorien völlig verschieden ist.

Es werden also neue Methoden benötigt, die nur für differenzierbare Mannigfaltigkeiten funktionieren. Diese Methoden kommen aus der mathematischen Physik, aus der Untersuchung von Eichtheorien. Die verwendete Sprache ist die der Differentialgeometrie und wir müssen an einige Grundbegriffe erinnern. Wir tun das in der folgenden Situation. Sei $P \to M$ ein SU(2)-Prinzipalbündel. Man betrachte den Raum aller Zusammenhänge A auf P. Um eine gewisse Vorstellung von diesem Raum zu vermitteln sei daran erinnert, daß er ein affiner Raum ist mit zugehörigem Vektorraum $\Omega^1(M; su(2))$, der Vektorraum der 1-Formen auf M mit Werten in dem zu P assoziierten Bündel, dessen Faser die Lie-Algebra von SU(2) ist.

Aus einem Zusammenhang A kann man mit Hilfe der kovarianten Ableitung eine 2-Form $F_A \in \Omega^2(M; su(2))$, die Krümmung, erhalten.

Wenn wir nun auf M eine Riemannsche Metrik g wählen, so erhalten wir den Hodge $*$-Operator:

$$*: \Omega^k(M; su(2)) \to \Omega^{n-k}(M; su(2)),$$

wo $n = \dim M$. In unserer Situation ist nun $n = 4$ und $F_A \in \Omega^2(M, su(2))$, also $*F_A$ wieder in $\Omega^2(M, su(2))$. Dies ist eine Stelle wo wir eine Situation haben, *die nur in der Dimension* 4 *zustandekommt.*

Auf $\Omega^2(M; su(2))$ ist $*$ eine Involution, und man erhält eine Zerlegung von $\Omega^2(M, su(2))$ in die ± 1 Eigenräume: $\Omega^2(M, su(2)) = \Omega^2_+(M, su(2)) \oplus \Omega^2_-(M, su(2))$. Man sagt, der Zusammenhang A ist selbst dual, wenn seine Krümmung F_A invariant unter $*$ ist, d. h. $F_A \in \Omega^2_+(M, su(2))$ oder F_A im Kern von $\Omega^2(M, su(2)) \twoheadrightarrow \Omega^2_-(M, su(2))$. Die Physiker bezeichnen selbst duale Zusammenhänge als Instantonen. Die Differentialgleichung $*F_A = F_A$ heißt Yang-Mills-Gleichung und ist eine nicht-abelsche Version der Maxwell-Gleichung (die man für SO(2) statt SU(2) erhalten würde). Es sei hier bemerkt, daß in der Formel für die kovariante Ableitung die Lie-Klammer auftaucht. Das impliziert bei nicht-abelschen Gruppen, daß die Differentialgleichung nicht-linear ist. Der Raum der Instantonen zu vorgegebener Metrik g sei mit $\mathfrak{A}_g$ bezeichnet.

Auf diesem Raum operiert die Gruppe der Eichtransformationen $\mathfrak{H}$, das ist die Gruppe der Automorphismen des Prinzipalbündels P. Im wesentlichen ist der Modul Raum $\mathfrak{M}_g(M, P)$ der Quotientenraum $\mathfrak{A}_g/\mathfrak{H}$. Das „im wesentlichen" soll darauf verweisen, daß Donaldson aus technischen Gründen zu Sobolev-Vervollständigungen übergeht, um in Banach-Räumen arbeiten zu können. Es war sicher für Donaldsons Arbeit von großer Bedeutung, daß dieser Modul-Raum für den Fall $M = S^4$ intensiv studiert worden war [AHS]. Für allgemeine 4-Mannigfaltigkeiten ist es überhaupt nicht klar, ob der Modul-Raum nicht leer ist. Erst kurz vorher hatte dies C. Taubes [Ta_1] unter der Bedingung gezeigt, daß S_M positiv definit ist und die 2. Chernklasse von P, $c_2(P) < 0$ ist.

Dieser Modul-Raum $\mathfrak{M}_g(M, P)$ ist nun für geeignetes P fast die gesuchte 5-Mannigfaltigkeit W. Man hat eine lokale Darstellung von $\mathfrak{M}_g(M, P)$ als Nullstellengebilde eines Fredholm-Operators. Die Dimension von $\mathfrak{M}_g(M, P)$ ist also der Index dieses Operators, den man wiederum mit Hilfe des Atiyah-Singer-Index-Satzes [At-Si] ausrechnen kann:

$$\dim \mathfrak{M}_g(M, P) = 8(-c_2(P)) - 3.$$

Also speziell, wenn $c_2(P) = -1$ ist, was wir ab jetzt annehmen wollen:

$$\dim \mathfrak{M}_g(M, P) = 5.$$

Damit ist $\mathfrak{M}_g(M, P)$ eine offene 5-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Singularitäten. Diese Singularitäten sind von zweierlei Typ: Es gibt solche, die bei geeigneter Wahl der Metrik verschwinden (ein Argument aus [Fr-Uh], das von Donaldson anders behandelt wurde) und solche, die unabhängig von der Metrik vorhanden sind. Wir werden im folgenden stets annehmen, daß die Metrik g so gewählt ist, daß nur die letzteren Singularitäten auftauchen. Diese sind isolierte Punkte, deren Anzahl $= \frac{1}{2} \# \{\alpha \mid S_M(\alpha, \alpha) = 1\}$ ist. Die Umgebung einer solchen Singularität ist homöomorph zu einem Kegel über $\mathbf{CP}^2$. Wenn man das Innere all dieser Kegel herausnimmt, erhält man eine nicht kompakte 5-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand r Kopien von $\mathbf{CP}^2$ bzw. $\overline{\mathbf{CP}^2}$.

Auch wenn das Auftreten der Singularitäten in diesem Rahmen nicht im einzelnen analysiert werden kann, wird den Leser doch interessieren, wie man aus einer Lösung der Gleichung $S_M(\alpha, \alpha) = 1$ überhaupt einen Zusammenhang erhält, der die zugehörige isolierte Singularität repräsentiert. Wenn wir uns das SU(2)-Bündel P als Sphärenbündel eines 2-dimensionalen komplexen Vektorbündels E vorstellen, dann weiß man generell, daß ein solches Vektorbündel E über einer 4-Mannigfaltigkeit durch die Chern-Klasse $c_2(E) = c_2(P)$ bis auf Isomorphie vollständig klassifiziert wird. Eine Möglichkeit, sich ein solches Vektorbündel zu verschaffen ist die Whitney Summe von einem komplexen Linienbündel L mit seinem inversen: $L \oplus L^{-1}$. Es gilt $c_2(L \oplus L^{-1}) = -c_1(L)^2$. Falls also $c_1(L)^2 = 1$ ist, ist $L \oplus L^{-1}$ isomorph zu unserem vorgegebenen Vektorbündel. Auf dem Linienbündel L hat man einen eindeutigen selbst dualen Zusammenhang, der ein wohldefiniertes Element des Modul-Raumes $\mathfrak{M}_g(M; P)$ liefert, welches die der Aufspaltung $E \cong L \oplus L^{-1}$ entsprechende isolierte Singularität ist. Da komplexe Linienbündel bijektiv durch c_1 klassifiziert werden, entsprechen die möglichen Aufspaltungen gerade den Paaren $\pm\alpha$ von Lösungen von $S_M(\alpha, \alpha) = 1(S_M(\alpha, \alpha)$ entspricht kohomologisch dem Quadrat α^2) und wir erhalten so r verschiedene Singularitäten.

Als nächstes zeigt Donaldson, daß das Komplement der isolierten Singularitäten in $\mathfrak{M}_g(M, P)$ orientierbar ist. Er tut das, indem er noch einmal den Atiyah-Singer-Index-Satz verwendet. In [Fr-Uh] wird ein einfacher Beweis gegeben, der darauf beruht, daß man das Tangentialbündel dieser Mannigfaltigkeit auf einen 1-zusammenhängenden Raum fortsetzen kann und Bündel über 1-zusammenhängenden Räumen sind immer orientierbar.

Der letzte und wohl schwierigste Schritt ist die Konstruktion einer Kompaktifizierung $\overline{\mathfrak{M}_g(M, P)}$ von $\mathfrak{M}_g(M, P)$ durch Hinzunahme der Mannigfaltigkeit M selbst. Dies ist technisch aufwendig und benutzt schwierige Sätze von K. Uhlenbeck und C. Taubes. Damit man sich wenigstens irgend etwas als Anhaltspunkt vorstellen kann, sei hier nur eine Bemerkung aus einem Vortrag von Atiyah wiedergegeben, der angedeutet hat, daß man sich die Kompaktifizierung so vorstellen kann, daß man eine Folge von Instantonen nimmt, deren Krümmung immer mehr in einem Punkt konzentriert wird. Die Limites solcher Folgen von Instantonen liefern eine Kompaktifizierung von $\mathfrak{M}_g(M, P)$ durch M selbst: $\overline{\mathfrak{M}_g(M, P)}$.

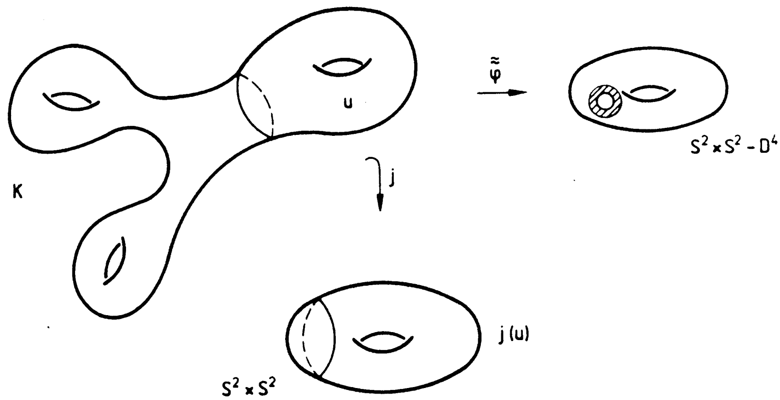
Die gesuchte Mannigfaltigkeit W ist nun

$$W = \overline{\mathfrak{M}_g(M, P)} - \cup \text{ Kegel über } \mathbf{CP}^2.$$

6. Eine unerwartete exotische Struktur: ein exotischer $\mathbf{R}^4$

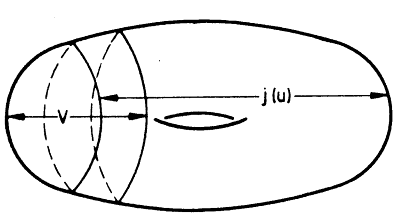
Die wohl überraschendste Konsequenz aus den Sätzen von Donaldson und Freedman ist die Existenz von Mannigfaltigkeiten, die homöomorph aber nicht diffeomorph zu $\mathbf{R}^4$ sind. Wir haben am Ende von 3. beschrieben, wie man die 3 hyperbolischen Summanden in der Schnittform der Kummerfläche durch surgery wegmachen kann, wobei das Resultat eine topologische Mannigfaltigkeit mit Schnittform $E_8 \oplus E_8$ ist. Nach Donaldson geht das nicht in der differenzierbaren Kategorie. Daraus folgt die Existenz eines exotischen $\mathbf{R}^4$ (vgl. [Go$_1$]).

Genauer: Sei M eine 1-zusammenhängende kompakte differenzierbare 4-Mannigfaltigkeit mit $S_M = E_8 \oplus E_8 \oplus rH$ und r minimal. (Inzwischen hat Donaldson angekündigt, daß r = 3 [Do$_3$].) Nach der Beschreibung am Ende von 3. gibt es eine offene Teilmenge $U \subset M$, einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\varphi} S^2 \times S^2 - D^4$, der einen hyperbolischen Summanden der Schnittform repräsentiert, und eine differenzierbare Einbettung $j : U \to S^2 \times S^2$.



Nun vergrößern wir die eingebettete Scheibe $D^4 \subset S^2 \times S^2$ ein wenig zu $D_*^4 \supset D^4$, die wir im Bild schraffiert haben.

$$V := S^2 \times S^2 - j(\varphi^{-1}(S^2 \times S^2 - D_*^4)) \subset S^2 \times S^2.$$



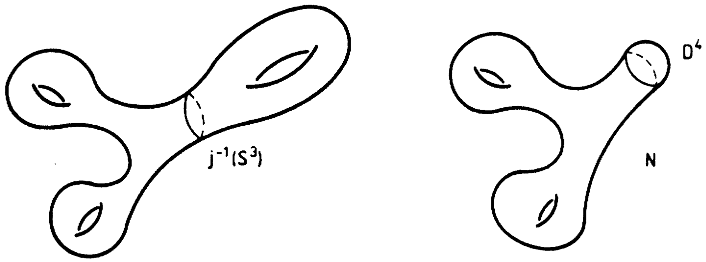
Satz V *ist homöomorph zu* $\mathbf{R}^4$ *aber nicht diffeomorph, also besitzt* $\mathbf{R}^4$ *eine exotische differenzierbare Struktur.*

Bemerkung Historisch war es wohl so, daß Freedman bei der Entwicklung seiner Theorie aufgefallen war, daß entweder die topologische Mannigfaltigkeit mit Schnittform $E_8 \oplus E_8$ eine differenzierbare Struktur trägt oder $\mathbf{R}^4$ eine exotische Struktur hat.

Der Beweis des Satzes mit Hilfe der erwähnten Resultate ist nicht schwer und soll hier skizziert werden. Man kann leicht zeigen, daß V eigentlich homotopieäquivalent zu $\mathbf{R}^4$ ist (das ist äquivalent dazu, daß V zusammenziehbar und 1-zusammenhängend im Unendlichen ist, was unmittelbar aus der Konstruktion folgt). Nach dem erwähnten Satz von Freedman folgt, daß V homöomorph zu $\mathbf{R}^4$ ist.

Andererseits ist V nicht diffeomorph zu $\mathbf{R}^4$, denn V hat folgende erstaunliche Eigenschaft, die $\mathbf{R}^4$ offensichtlich nicht hat: Es gibt eine kompakte Teilmenge $A \subset V$, so daß es keine differenzierbare Einbettung von S^3 in $V - A$ gibt, die A umschließt.

Betrachte $A := V - j(U)$. A ist offensichtlich kompakt. Angenommen es gibt eine differenzierbare Einbettung $S^3 \to V - A$, die A umschließt. Dann wäre $j^{-1}(S^3) \subset K$ eine differenzierbare Einbettung und man könnte K entlang $j^{-1}(S^3)$ zerschneiden und den Rand mit D^4 zukleben. Das Resultat wäre eine *differenzierbare* 4-Mannigfaltigkeit N mit Schnittform $E_8 \oplus E_8 \oplus (r-1) \cdot H$



Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß r minimal ist.

7. Weitere Ergebnisse

Wir haben bereits eine Reihe von Resultaten erwähnt, die nach den Ankündigungen der Sätze von Freedman im Herbst 1981 und Donaldson im Sommer 1982 bewiesen wurden. Z. B. die Verallgemeinerung der Resultate von Freedman und Vereinfachung der Beweise durch Freedman und Quinn [Fr-Qu] auf topologische 4-Mannigfaltigkeiten mit polyzyklisch-endlicher Fundamentalgruppe und die Resultate von Quinn in [Qu], die u. a. implizieren, daß jede 4-Mannigfaltigkeit im Komplement eines Punktes eine differenzierbare Struktur besitzt. Ferner haben wir Donaldsons Ankündigung erwähnt, daß es keine 1-zusammenhängende kompakte differenzierbare 4-Mannigfaltigkeit mit Schnittform $2k \cdot E_8 \oplus 2H$ gibt [Do_3].

Im folgenden wollen wir ohne Anspruch auf Vollständigkeit einige weitere Resultate wiedergeben.

A) Donaldsons Satz für gewisse nicht 1-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten

Bei der Skizze des Beweises des Satzes von Donaldson haben wir gesehen, daß der Moduli-Raum der selbst dualen Zusammenhänge auf gewissen SU(2)-Prinzipalbündeln eine entscheidende Rolle spielt. Es ist naheliegend, statt SU(2) andere Lie-Gruppen zu betrachten und zu untersuchen, welche Informationen man mit Hilfe entsprechender Moduli-Räume erhalten kann. R. Fintushel und R. Stern [Fi-St] haben das für SO(3) durchgeführt und damit ein Resultat erhalten, das unter gewissen zusätzlichen Bedingungen das Resultat von Donaldson auf eine große Klasse von nicht einfach-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten verallgemeinert. Ohne hier auf den Beweis dieses Satzes im einzelnen einzugehen sei nur bemerkt, daß er einfacher als Donaldsons Beweis ist, wobei im einfach-zusammenhängenden Fall auch etwas weniger herauskommt.

Satz [Fi-St] *Sei* M *eine kompakte orientierte topologische* 4*-Mannigfaltigkeit mit positiv definiter Schnittform, so daß* $H_1(M; \mathbf{Z})$ *keine* 2*-Torsion hat. Falls es Klasse* $u \in H_2(M; \mathbf{Z})/_{\text{Tor}}$ *gibt mit* $S_M(u, u) = 2$ *oder* 3 *und* $\frac{1}{2} \# \{v \in H_2(M; \mathbf{Z})/_{\text{Tor}} \mid S_M(u, u) = S_M(v, v)$ *und* $u = v \bmod 2\}$ *ungerade, dann besitzt* M *keine differenzierbare Struktur.*

Bemerkung Die Voraussetzung dieses Satzes ist z. B. erfüllt, wenn $S_M = E_8 \oplus E_8$. Also erhält man einen neuen und einfacheren Beweis, der in 6. beim Beweis, daß $\mathbf{R}^4$ eine exotische Struktur besitzt, entscheidend verwendeten Tatsache, daß es keine differenzierbare einfach zusammenhängende kompakte 4-Mannigfaltigkeit mit Schnittform $E_8 \oplus E_8$ gibt.

B) Weitere exotische $\mathbf{R}^4$'s

Nachdem maß wußte, daß $\mathbf{R}^4$ eine exotische differenzierbare Struktur besitzt, begann man, im Sinne der zu Beginn dieses Artikels erwähnten Problemstellung, nach einer Klassifikation der differenzierbaren Strukturen auf $\mathbf{R}^4$ zu fragen. Insbesondere interessierte man sich für die Frage, wie viele exotische Strukturen es gibt: endlich –, unendlich – oder überabzählbar viele. Auf Grund gewisser Zusammenhänge erwartete man die Existenz von überabzählbar vielen exotischen $\mathbf{R}^4$'s.

Zunächst wurde ziemlich bald bemerkt, daß es außer der Standardstruktur mindestens 3 exotische Strukturen gibt [Go_1], dann wurde ein weiterer exotischer $\mathbf{R}^4_u$ entdeckt, der eine ganz besondere Eigenschaft hat, auf die wir noch zurückkommen werden [Fr-Ta]. Unter Verwendung der dabei entwickelten Techniken zeigte Gompf, daß es unendlich viele differenzierbare Strukturen auf $\mathbf{R}^4$ gibt [Go_2]. Wenig später zeigte C. Taubes, daß es tatsächlich überabzählbar viele Strukturen gibt.

Satz [Ta_2] *Es gibt eine durch* $\mathbf{R}$ *parametrisierte Familie von paarweise verschiedenen differenzierbaren Strukturen auf* $\mathbf{R}^4$.

Zur Verdeutlichung der Bedeutung dieses Resultates sei noch einmal daran erinnert, daß in allen anderen Dimensionen die Menge der differenzierbaren Strukturen auf einer topologischen Mannigfaltigkeit diskret ist. Das Resultat ist somit ein weiteres Indiz für die Vorstellung, daß die Theorie der topologischen und differenzierbaren 4-Mannigfaltigkeiten völlig verschieden ist und die letztere Kategorie viele Ähnlichkeiten mit der komplexen Analysis bzw. algebraischen Geometrie hat, wo die Existenz kontinuierlicher Familien von Strukturen etwas völlig normales ist.

Mit diesem Resultat hat man natürlich noch keine Klassifikation der differenzierbaren Strukturen auf $\mathbf{R}^4$. Außerdem sind die bisher bekannten Sätze über exotische Strukturen auf $\mathbf{R}^4$ reine Existenzsätze. Eine interessante Information über die Gesamtheit aller differenzierbaren Strukturen auf $\mathbf{R}^4$ ist die Existenz des schon erwähnten universellen $\mathbf{R}^4_u$, die von M. Freedman und L. Taylor bewiesen wurde.

Satz [Fr-Ta] *Es gibt einen universellen exotischen* $\mathbf{R}^4_u$, *in den sich jede zu* $\mathbf{R}^4$ *homöomorphe differenzierbare Mannigfaltigkeit als offene Teilmenge einbetten läßt.*

C) Nicht erwartete exotische Strukturen auf kompakten 4-Mannigfaltigkeiten

Die bisher erwähnten exotischen Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten wurden entweder mit Hilfe des Satzes von Rohlin von der Standardstruktur unterschieden und waren somit stabil (d. h. bleiben bei zusammenhängender Summe mit $S^2 \times S^2$ exotisch) oder die zugrundeliegenden Mannigfaltigkeiten waren nicht kompakt. Ferner waren die Beispiele von exotischen Strukturen auf kompakten 4-Mannigfaltigkeiten alle nicht einfach-zusammenhängend. Wie erwähnt, hat Wall gezeigt, daß es auf einfach-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten keine „erwarteten" exotischen Strukturen geben kann, denn all diese Strukturen werden nach genügend häufiger zusammenhängender Summe mit $S^2 \times S^2$ standard.

Auch wenn es auf Grund der erfolgten Veränderung des Bildes von 4-Mannigfaltigkeiten nur noch schwer ist, von Überraschungen zu reden, bleibt festzuhalten, daß der nachfolgende Satz, den Donaldson in diesem Jahr wiederum mittels Eichtheorie bewiesen hat, ein weiterer Schritt in völlig neues Terrain ist.

Satz [Do_2] *Die einfach-zusammenhängende kompakte 4-Mannigfaltigkeit* $\mathbf{CP}^2 \# 9\mathbf{CP}^2$ *hat eine exotische differenzierbare Struktur.*

Literaturverzeichnis

[AHS] Atiyah, M. F.; Hitchin, N.; Singer, I. M.: Self duality in four-dimensional Riemannian geometry. Proc. R. Soc. London A, **362** (1978) 425–461

[At-Si] Atiyah, M. F.; Singer, I. M.: The index of elliptic operators: IV. Ann. of Math. **93** (1971) 119–138

[Ca-Sh] Cappell, S.; Shaneson, J.: Some new 4-manifolds. Ann. of Math. **104** (1976) 61–72

[Ca] Casson, A.: Three lectures on new constructions in 4-dimensional manifolds. Notes by L. Guillou, prépublications Orsay 81 T 06

[Do_1] Donaldson, S. K.: An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds. J. Diff. Geom. **18** (1983) 269–316

[Do$_2$] Donaldson, S. K.: The differential topology of complex surfaces. Preprint 1985

[Do$_3$] Donaldson, S. K.: in preparation

[Fi-St] Fintushel, R.; Stern, R.: SO(3)-connections and the topology of 4-manifolds. Preprint 1984

[Fr$_1$] Freedman, M.: A fake $S^3 \times \mathbf{R}$. Ann. of Math. **110** (1979) 177–201

[Fr$_2$] Freedman, M.: The topology of four-dimensional manifolds. J. Diff. Geom. **17** (1982) 357–454

[Fr-Qu] Freedman, M.; Quinn, F.: The topology of 4-manifolds. Preprint 1984

[Fr-Ta] Freedman, M.; Taylor, L.: A universal $\mathbf{R}^4$. In preparation

[Fr-Uh] Freed, D. S.; Uhlenbeck, K. K.: Instantons and four-manifolds. M.S.R.I. publications, Springer 1984

[Go$_1$] Gompf, R.: Three exotic $\mathbf{R}^4$'s and other ano malies. J. Diff. Geom. **18** (1983) 317–328

[Go$_2$] Gompf, R.: An infinite set of exotic $\mathbf{R}^4$'s (+ addendum). Preprint 1985

[Hi-Ma] Hirsch, M.; Mazur, B.: Smoothing of piecewise-linear manifolds. Ann. Math. Studies **80** (1974)

[Hi] Hirzebruch, F.: Topological methods in algebraic geometry. 3rd ed., Springer 1966

[Ke-Mi$_1$] Kervaire, M.; Milnor, J.: Groups of homotopy spheres I. Ann. of Math. **77** (1963) 504–537

[Ke-Mi$_2$] Kervaire, M.; Milnor, J.: On 2-spheres in 4 manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **47** (1961) 1651–1657

[Ki-Si] Kirby, R.; Siebenmann, L.: Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations. Ann. Math. Studies **88** (1977)

[Kr$_1$] Kreck, M.: Manifolds with unique differentiable structure. Topology **23** (1984) 219–232

[Kr$_2$] Kreck, M.: Some closed 4-manifolds with exotic differentiable structure. In Springer Lecture Notes **1051** (1984) 246–262

[Kr$_3$] Kreck, M.: Smooth structures on closed 4-manifolds up to connected sum with $(S^2 \times S^2)$'s. Preprint 1984

[Ma] Mandelbaum, R.: Four dimensional topology: an introduction. Bull. A.M.S. **2** (1980) 1–159

[Mi$_1$] Milnor, J.: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Ann. of Math. **64** (1956) 399–405

[Mi$_2$] Milnor, J.: Lectures on the h-cobordism theorem, notes by L. Siebenmann and J. Sondow. Princeton Univ. Press 1965

[Mi-Hu] Milnor, J.; Husenmoller, D.: Symmetric bilinear forms. Springer 1973

[Mo] Moise, E.: Affine structures in 3-manifolds I–V. Ann of Math. **54** (1951) 506–533; **55** (1952) 172–176, 203–214 und 215–222; **56** (1952) 96–114

[Qu] Quinn, F.: Ends of maps III: dimensions 4 and 5. J. Diff. Geom. **17** (1982) 503–521

[Ro] Rohlin, V. A.: New results in the theory of 4-dimensional manifolds (Russian). Dok. Akad. Nauk. USSR **84** (1952) 221–224

[Se] Serre, J. P.: Cours d'arithmétique. Presses Univ. de France 1970

[Sm] Smale, S.: On the structure of manifolds. Am. J. Math. **84** (1962) 387–399

[St] Stern, R.: Instantons and the topology of 4-manifolds. Math. Int. **5**, No. 3 (1983) 39–44

[Ta$_1$] Taubes, C.: Self-dual connections on non self-dual 4-manifolds. J. Diff. Geom. **17** (1982) 139–170

[Ta$_2$] Taubes, C.: Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. To appear

[Wa] Wall, C. T. C.: On simply connected 4-manifolds. J. London Math. Soc. **39** (1964) 141–149

Prof. Dr. M. Kreck
Fachbereich 17, Mathematik
Johannes-Gutenberg-Universität
Saarstraße 21
6500 Mainz

(*Eingegangen: 29. 7. 1985*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
88 (1986) 146–157
AMS subject classification: 01 A 70

Wilhelm Blaschkes mathematisches Werk[1)]

K. Strubecker, Karlsruhe

1. Gerne folge ich der Aufforderung der Leitung dieses Kongresses, anläßlich der 100. Wiederkehr des Geburtstags von *Wilhelm Blaschke* (* 13. 9. 1885) hier, in seiner Vaterstadt Graz, einen Vortrag über sein mathematisches Werk zu halten, das vor allem der Geometrie gewidmet war. Ich komme dieser Einladung umso lieber nach, weil ich Blaschke stets als einen väterlichen Freund verehrt habe und seinem geometrischen Schaffen viele Anregungen verdanke. Die Beziehungen von Blaschke zu der Karlsruher Technischen Hochschule (seit 1967 heißt sie „Universität Karlsruhe") waren demgemäß auch immer sehr eng; Blaschke war oft Vortragsgast in unserem Mathematischen Kolloquium und wurde im Jahre 1960 Karlsruher Ehrendoktor.

2. Erste geometrische Anregungen empfing Blaschke schon als Kind von seinem Vater *Josef Blaschke* (1852–1917), der an der Grazer Oberrealschule das Fach Darstellende Geometrie unterrichtete und seinen Sohn zur Weihnachtszeit an Hand selbstgefertigter Modelle mit Keplers Sternkörpern bekannt machte.

Zu eigener Beschäftigung mit geometrischen Fragen kam Blaschke als Student des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule Graz, wo sein Lehrer *Oskar Alexander Peithner Freiherr von Lichtenfels* (1852–1923) es verstand, in Blaschke die Neigung zur Geometrie zu wecken. Von ihm gefördert schrieb Blaschke seine erste wissenschaftliche Arbeit über *„Allgemeine Schraublinien"*, die man heute nach *Emil Müller* kurz als Böschungslinien bezeichnet, weil sie dadurch gekennzeichnet sind, daß ihre Tangenten gegen eine feste (horizontal gedachte) Ebene π unter einem festen Winkel α geneigt sind, also die feste Böschung $\tan \alpha$ besitzen. Die Tangentenfläche einer solchen Kurve ist also eine Böschungsfläche; ihre rektifizierende Torse (ich sage kürzer Strecktorse) ist der durch die Böschungslinie gelegte vertikale Zylinder.

Die Arbeit entwickelt durch rein geometrische Überlegungen alle vordem nur auf rechnerischem Wege gefundenen Eigenschaften der Böschungslinien. Sehr eingehend werden dabei die auf Drehflächen 2. Ordnung (mit vertikaler Drehachse) liegenden Böschungslinien behandelt. Von ihnen hatte *Alfred Enneper* (1830–1885) schon früher rechnerisch gefunden, daß ihre Projektion auf eine horizontale Grundrißebene π zyklische Kurven sind, nämlich beim Drehellipsoid Epizykloiden, beim einschaligen Drehhyperboloid je nach Steigung Hypo- oder Hyperzykloiden, beim zweischaligen Drehhyperboloid aber Parazykloiden und (als Grenzfall) beim Dreh-

[1)] Vortrag auf dem XI. Österreichischen Mathematiker-Kongreß in Graz am 20. 9. 1985.

paraboloid schließlich Kreisevolventen. Es gelingt dem jungen Blaschke diese Ergebnisse ohne alle Rechnung durch kurze und anschauliche Überlegungen zu gewinnen und sie in verschiedenen Richtungen erheblich zu erweitern.

3. Ergänzend sei erwähnt, daß die Frage nach den Böschungslinien auf beliebigen Quadriken allgemeiner Lage erst der Wiener Geometer *Walter Wunderlich* (1947) durch elegante geometrische Überlegungen geklärt hat. Projiziert man die Quadrik aus ihrem Mittelpunkt auf eine Ebene π, so erscheinen ihre Böschungslinien als nichteuklidische Evolventen eines Kegelschnitts k. Als Maßkegelschnitt der nichteuklidischen Metrik dient dabei der Schnitt des Asymptotenkegels der Quadrik mit der Ebene π.

4. Sein Studium vollendete Blaschke 1908 in Wien, wo an der Universität der vielseitige Mathematiker *Wilhelm Wirtinger* (1865–1945) und an der Technischen Hochschule der Geometer *Emil Müller* (1861–1927) wirkten (die 20 Jahre später auch meine Lehrer waren). Emil Müller pflegte in seinen Sondervorlesungen die Gebiete der Linearen Abbildungen, der Zyklographie und der Differentialgeometrie aus dem Blickwinkel der konstruktiven Geometrie zu behandeln und hielt daran anschließende Übungen und Seminare. Blaschkes Wiener Dissertation entsprang dem Gedankenkreis der Zyklographie, welche gestattet, die pseudoeuklidische Geometrie des Raumes, deren absoluter Kegelschnitt k der Fernkegelschnitt des Drehkegels

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \tag{1}$$

ist, auf die Laguerresche Geometrie der Speere (= orientierten Geraden) der Ebene π zu übertragen. Zykel (= orientierte Kreise) werden dabei durch lineare Gleichungen zwischen den homogenen Speerkoordinaten dargestellt. Quadratische Gleichungen zwischen den Speerkoordinaten stellen dann die von *Edmond Laguerre* (1834–1886) im Jahre 1885 eingeführten Hyperzykel dar; deren genaue Klassifikation und ausführliches Studium bildet den Hauptgegenstand der Dissertation von Blaschke, mit der er 1908 an der Universität Wien zum Dr. phil. promoviert wurde. Die Arbeit erschien 1910 in den Wiener Monatsheften unter dem Titel „*Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene*".

5. Blaschkes Einteilung der Hyperzykel in sechs Arten stützt sich geometrisch auf die 7-gliedrige Gruppe L_7 der Laguerreschen Speertransformationen, welche zyklographisches Abbild der Gruppe G_7 der Ähnlichkeiten des pseudoeuklidischen Raums ist. Der darin invariant enthaltenen Untergruppe G_6 der pseudoeuklidischen Bewegungen entspricht dabei die 6-gliedrige Untergruppe der „eigentlichen" Laguerreschen Speertransformationen L_6.

Den analytischen Apparat zur adäquaten Beschreibung der Speergeometrie und ihrer Gruppen hatte schon *Eduard Study* (1862–1930) geschaffen in seiner „*Geometrie der Dynamen*" (1903). Neben die Studyschen homogenen Speerkoordinaten, die an eine quadratische Relation gebunden sind, treten dabei noch zwei Systeme von pseudohomogenen Speerkoordinaten zur Beschreibung der beiden natürlichen Kontinuen von Speeren, durch die man die Mannigfaltigkeit der eigentlichen Speere durch Systeme von uneigentlichen Speeren gegenüber der Gruppe L_6 der Speertransformationen abschließen kann. Die Gruppe L_6 der Speertransformationen kann dann bei Verwendung von dualen Zusammenfassungen der homogenen Speerkoordinaten in linear gebrochener Weise und in den pseudohomogenen Speerkoordinaten in linear-homogener Weise geschrieben werden.

6. Deutet man die vier homogenen Speerkoordinaten als Punkte des Raums, so beschreibt ihre quadratische Relation die Punkte eines quadratischen Kegels oder eines Zylinders, dessen projektive Automorphien den Laguerreschen Speertransformationen entsprechen.

7. In Blaschkes Dissertation finden sich auch schon die Grundformeln der Differentialgeometrie der Laguerreschen Speerebene, mit der sich später in ausführlicher Weise die Dissertation von *Gerrit Bol* (Leiden 1928) befaßt hat. Systematisch findet sich die ebene differentielle Laguerre-Geometrie im Band III von Blaschkes „*Vorlesungen über Differentialgeometrie*" (1929) ausgeführt.

8. In seiner Dissertation hatte Blaschke in vielfacher Weise die neuen und weittragenden analytischen Methoden verwendet, die *Eduard Study* (1862–1930) in die Geometrie eingeführt hatte. Zur weiteren Vervollständigung seiner geometrischen Ausbildung mit einem 2-Jahresstipendium ausgerüstet, ging Blaschke daher zuerst nach Bonn zu Study, dem damals ersten Geometer in Deutschland, anschließend noch nach Pisa zu dem führenden italienischen Vertreter der Differentialgeometrie *Luigi Bianchi* (1856–1928) und schließlich auch noch nach Göttingen, wo neben *Felix Klein* (1849–1925) und *David Hilbert* (1862–1943) auch noch viele jüngere Mathematiker wie *Constantin Carathéodory* (1873–1950) und *Gustav Herglotz* (1881–1953) wirkten, mit denen Blaschke engen Kontakt fand.

9. Aus diesen Studienaufenthalten gewann Blaschke viele Anregungen, die sich auch in wertvollen Arbeiten niederschlugen.

Aus Bonn stammen zunächst einige Arbeiten, die eng mit der Speergeometrie der Ebene zusammenhängen und an verschiedene Gedanken von Study anschließen.

Man kann die Speere s der Ebene π mit der Gleichung

$$s \ldots x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi = p \tag{2}$$

auf Punkte S des Raums R(x, y, z) mit den Koordinaten

$$S = (\sin\varphi, \cos\varphi, p) \tag{3}$$

abbilden, die auf dem Drehzylinder

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{4}$$

liegen. Diese Abbildung ist dual zur Abbildung der Speere s der Ebene π auf die Tangentenebenen σ des Kegelschnitts k der Fernebene ω, der als absoluter Kegelschnitt der schon erwähnten pseudoeuklidischen Raumgeometrie zugrunde liegt. Die Bildebene σ ist also eine isotrope Ebene dieser Raumgeometrie.

Den von Speeren umhüllten Zykeln der Ebene π entsprechen als Bilder die ebenen Schnitte (Ellipsen) des Zylinders und parallele Speere haben als Bilder die Punkte einer Mantellinie des Zylinders. Die Laguerresche Speergeometrie der Ebene erscheint als die projektive Geometrie des Drehzylinders.

Unter den ebenen Speertransformationen sind jene von besonderem Interesse, welche die Tangentialentfernung zweier orientierter Kurven erhalten. Diese *äquilongen Speertransformationen* bilden eine unendliche Gruppe, die zu den winkeltreuen Punkttransformationen der Ebene dual sind, und sich in analoger Art wie diese darstellen lassen, wenn man statt der gewöhnlichen komplexen Zahlen zu dualen Zahlen greift. Auf dem Zylinder entsprechen den äquilongen Transformationen solche, die den affinen Winkel der Zylinderkurven erhalten.

Sehr bemerkenswert sind schließlich auch noch die *umfangstreuen Speertransformationen* der Ebene. Ihnen entsprechen die *flächentreuen Abbildungen* des Zylinders. Der Umfang einer einfach geschlossenen orientierten Kurve der Ebene erscheint nämlich auf dem Zylinder als der Flächeninhalt ihrer geschlossenen Bildkurve.

10. Die bedeutendste Bonner Arbeit ist die 1910 in den Wiener Monatsheften erschienene *Habilitationsschrift* von Blaschke „*Zur Geometrie der Speere im Euklidischen Raum*“. Mit ihr wurde Blaschke bei Study, wie er schreibt, „bei einer guten Flasche Moselwein zum Privatdozenten erhoben“. Auch diese sehr reichhaltige und gründliche Arbeit schließt an Gedanken von Study an, die vordem auch schon die Geometer *Eduard von Weber* (1870–1935) und *Josef Grünwald* (1876–1911) aufgegriffen hatten.

Jede reelle Gerade g des komplexen euklidischen Raums R_3 ist die Schnittgerade zweier konjugiert komplexer Minimalebenen (d. s. Tangentenebenen des Ponceletschen absoluten Kegelschnitts k des euklidischen Raums). Durch Orientierung der Geraden g kann man die Beziehung der beiden so entstehenden Speere von g zu den Minimalebenen eindeutig machen. Nach dem Vorgang von Study ist es dabei zweckmäßig, die sechs Linienkoordinaten des Speers zu drei dualen Größen zusammenzufassen. Die Bewegungen des komplexen euklidischen Raums R_3, die von 6 komplexen, also 12 reellen Parametern abhängen, können dann in sehr einfacher, nämlich linear gebrochener Weise geschrieben werden.
Die Gruppe G_{12} der komplexen Bewegungen des Raums vertauscht die Minimalebenen unter einander und bewirkt damit reelle Transformationen der reellen Speere des Raums, die eine reelle 12-gliedrige Gruppe S_{12} bilden. Die invarianten Figuren dieser schon von Study eingeführten und von Blaschke ausführlich studierten Gruppe S_{12} bilden das umfangreiche Feld der räumlichen Speergeometrie.

11. Um ein Beispiel der in dieser neuen Speergeometrie auftretenden Figuren zu geben, betrachten wir die (bei Zählung reeller Parameter) ∞^2 Minimalebenen durch einen komplexen Punkt P des Raums. Sie werden durch die ∞^2 reellen Speere einer sogenannten „*Speergarbe*“ dargestellt; deren Speere liegen (Bild 1) auf den reellen Erzeugenden einer Drehschar konfokaler einschaliger Drehhyperboloide (mit gemeinsamem Fokalkreis).

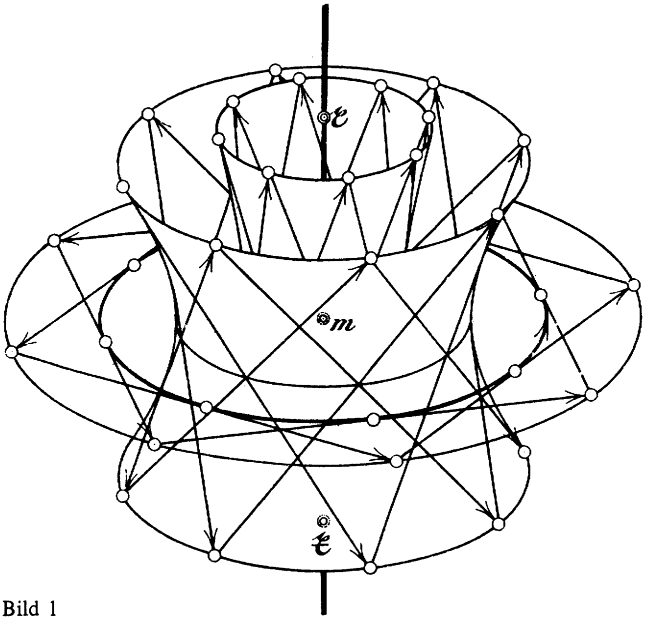


Bild 1

Diese Speergarbe ist (ebenso wie die Schar der Minimalebenen des festen Punkts P) Träger eines komplex-binären Gebiets von Speeren und ihre Geometrie ist daher äquivalent zur Geometrie einer reellen Riemannschen Zahlkugel. Den Ketten, d. h. den Kreisen dieser Zahlkugel entsprechen dann in der Speergarbe enthaltene „*Speerketten*"; Trägerflächen dieser Speerketten sind gewisse ausgezeichnete Regelflächen 4. Ordnung mit elliptischer Striktionslinie, die in der Mittenebene der Speergarbe liegt und den Fokalkreis doppelt berührt.

Neben die Speergarben treten als neue Speermannigfaltigkeiten noch Figuren, die Blaschke als „*Speerkugeln*" und „*Speerquirle*" bezeichnet und schließlich noch „*isotrope Speerkongruenzen*", die nach *Albert Ribaucour* (1845–1893) eng mit *Minimalflächen* zusammenhängen.
Ausführlich wird wieder die Frage der „natürlichen Kontinuen" gegenüber der Gruppe G_{12} der räumlichen Speergeometrie untersucht, deren es sogar drei verschiedene gibt.

12. An vielen Stellen der Habilitationsschrift werden auch differentialgeometrische Fragen berührt. Insbesondere findet sich schon hier der Hinweis, daß die euklidische Differentielle Liniengeometrie, insbesondere die Theorie der Regelflächen sich mit der größten Leichtigkeit mittels des *Studyschen Übertragungsprinzips* entwickeln läßt, das eng mit dem Gegenstand der Speergeometrie zusammenhängt und dessen geometrische Bedeutung darin besteht, daß es die Bewegungen des Raums auf die Drehungen einer komplex-dualen Kugel überträgt. Die räumliche Metrik des Geradenraums deckt sich dabei mit der sphärischen Metrik der ins Duale erweiterten Kugel.

Blaschke hat diese wunderbare Theorie im Band I seiner „*Vorlesungen über Differentialgeometrie*" ausführlich entwickelt. Dieses schöne Kapitel ist für die Blaschkesche Art, geometrische Einsichten mit den besten und wirksamsten analytischen Hilfsmitteln zu gewinnen, besonders kennzeichnend.

13. Im Jahre 1911 erschien eine in ihrem Grundgedanken ebenfalls an Study anknüpfende Arbeit von Blaschke über *„Euklidische Kinematik und Nichteuklidische Geometrie“*. Die darin entwickelte *kinematische Abbildung* ist ein gutes Beispiel für die Breitenwirkung geometrischer Ideen. Die (gleichzeitig auch von *Josef Grünwald* angegebene) kinematische Abbildung bildet die Bewegungen B der euklidischen Ebene π in umkehrbar eindeutiger Weise auf die Punkte P eines dreidimensionalen projektiven Raumes Q_3 ab, aus dem eine Gerade u entfernt ist. Analog entsprechen den Umlegungen der Ebene π die Ebenen des Raumes Q_3. Diesen längs der Geraden u aufgeschnittenen („geschlitzten“) Raum Q_3 bezeichnet Blaschke als *quasielliptischen Raum*, weil er als ein Grenzfall des elliptischen Raums E_3 aufgefaßt werden kann. Die Geometrie dieses quasielliptischen Raums hat Blaschke auch ausführlich in einem Buch über *„Ebene Kinematik“* (1938) dargestellt, ebenso zusammen mit *Hans Robert Müller* 1956 ausführlich in einem Bande gleichen Titels. Nach Study kann man die ebenen Bewegungen sehr elegant durch eine Variante der Quaternionen beschreiben. Deren vier Koordinaten bilden den quasielliptischen Parameterraum Q_3 der ebenen Bewegungsgruppe G_3.

14. Zeichnet man in der Ebene π ein orientiertes Linienelement e_0 als Grundelement aus, das die identische Bewegung der Ebene kennzeichnet, so können die Bewegungen B der Ebene π umkehrbar eindeutig durch die dabei aus e_0 entstehenden orientierten Linienelemente e dargestellt werden, denen dann die kinematische Abbildung umkehrbar eindeutig die Punkte P des quasielliptischen Raums Q_3 als Bilder zuordnet. Den Punkten der Geraden g des quasielliptischen Raums Q_3 entsprechen dabei in der Ebene π die orientierten Elemente e einer Drehschar oder, wenn g die ausgeschlossene Gerade u schneidet, einer Schiebschar, die man mit dem Amerikaner *Edward Kasner* (1911) sehr anschaulich als Turbinen bezeichnet.

15. Im Sonderfall erhält man, wenn die Gerade g einem gewissen linearen Strahlkomplex $\mathfrak{S}$ angehört, als Bild ihrer Punkte in π die orientierten Linienelemente e eines Zykels, eines Speeres oder eines Punktes. Zu den Speeren von π gehören dabei im Raum Q_3 die Geraden g, die einem gewissen parabolischen Strahlnetz $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{S}$ mit der Leitgeraden u angehören, und zu den Punkten von π die Geraden g aus einem bestimmten elliptischen Drehnetz $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{S}$.

16. Damit ist auch in sehr einfacher Weise die Brücke zu den nach *Lie*, *Laguerre* und *Möbius* benannten Kreisgeometrien hergestellt. Kombination mit dem Verfahren der Zyklographie führt dann zu der pseudoeuklidischen Geraden-Kugel-Transformation von *Sophus Lie* (1842–1899). Ich habe diese Zusammenhänge vor 35 Jahren ausführlicher auf der DMV-Tagung in Berlin (1951) dargestellt und in den Elementen der Mathematik 8 (1953) veröffentlicht.

17. Gleich den Bewegungen des elliptischen Raumes E_3 lassen sich auch die *Bewegungen* B des quasielliptischen Raums Q_3 in kommutativer Weise durch

zwei dreigliedrige Gruppen von Cliffordschen Schiebungen erzeugen:

(5) $B_6 = S_3^{\mathfrak{l}} \cdot S_3^{\mathfrak{r}} = S_3^{\mathfrak{r}} \cdot S_3^{\mathfrak{l}}$.

Die kinematische Abbildung ordnet dabei der dreigliedrigen Gruppe G_3 der *Bewegungen der Ebene* π die *Rechtsschiebungen* $S_3^{\mathfrak{r}}$ von Q_3 zu. Was aber entspricht dabei im Bereich der orientierten Linienelemente e der Ebene π der Gruppe der *Linksschiebungen* $S_3^{\mathfrak{l}}$ des quasielliptischen Raums Q_3? Es ist dies eine sehr bemerkenswerte neue dreigliedrige Gruppe von Vertauschungen der Elemente e, die man in der von mir 1935 eingeführten sehr anschaulichen Ausdrucksweise als die „*militärischen Exerzierbewegungen*" der Ebene π bezeichnen kann, bei denen nämlich alle Elemente e die Bewegungen des Grundelements e_0 (des „Korporals") nachahmen. Man könnte (weniger militärisch) die orientierten Linienelemente e auch als Tänzer und e_0 als den Vortänzer oder den Tanzlehrer auffassen und damit das exerzierende Militär der orientierten Linienelemente e friedlicher durch eine Menge von Tänzern ersetzen, welche allesamt die Bewegungen des Vortänzers e_0 kopieren.

Die Bewegungen der Ebene und ihre Tanzbewegungen sind miteinander vertauschbar und bilden zusammen eine 6-parametrige Gruppe G_6. Im Sinne der von *Study* geschaffenen „*Neuen Kinematik*" sind dabei solche *Figuren* von orientierten Linienelementen (Study spricht kurz von Figuren von *Somen*) zu einander *äquivalent*, die durch Transformationen der Gruppe G_6, also durch die (kommutative) *Aufeinanderfolge einer Bewegung und einer Tanzbewegung* in einander über geführt werden können. Kinematisch äquivalente Figuren orientierter Linienelemente (Studyscher Somen) der Ebene π führen also durch die kinematische Abbildung auf *Punktfiguren* des quasielliptischen Raumes Q_3, welche durch *Bewegungen* dieses Raumes auseinander hervorgehen.

18. Ich habe bei diesem Bericht teilweise über den eigentlichen Inhalt der Arbeit von Blaschke über „*Euklidische Kinematik und Nichteuklidische Geometrie*" hinausgegriffen, um die Weite ihrer gedanklichen Folgerungen anzudeuten. Eine bedeutsame Anwendung fand die Idee der kinematischen Abbildung, als *Kurt Reidemeister* (1893–1971) sie im Jahre 1934 als ein sehr wirksames Hilfsmittel für die axiomatische Begründung der absoluten und elliptischen Geometrie der Ebene erkannte. Auch die allgemeine Theorie der von *Helmut Karzel* im Jahre 1964 eingeführten Inzidenzgruppen und der zugehörigen Geometrien in geschlitzten Räumen beruht auf den Ideen der kinematischen Abbildung.

19. Blaschkes frühes geometrisches Schaffen war, wie schon mehrfach erwähnt wurde, besonders von dem mächtigen Ideenkreis der geometrischen Gedanken von *Eduard Study* beeinflußt. Wie Study selbst war auch Blaschke kein besonderer Freund der geometrischen Axiomatik, der er Sterilität vorhielt und Mangel an den saftigen Früchten schöner und anschaulicher geometrischer Ergebnisse, die erst den Wert der Geometrie ausmachen. Solche saftigen Früchte anschaulicher Geometrie findet man bei Blaschke überall in reicher Fülle. Ein unverwechselbares Kennzeichen seiner lebendigen und wenig konventionellen Darstellungskunst ist der lockere, das Wesentliche hervorhebende Stil seiner Schriften, der die Leser ohne Umschweife mitreißt und nur ungern entläßt.

20. In seinen folgenden Schriften wendet sich Blaschke *neuen, großen Themen* zu. Eines dieser besonders gepflegten Themen betrifft die *Geometrie der konvexen Figuren* in der Ebene und im Raum, der nach verschiedenen Abhandlungen das erste Buch Blaschkes mit dem lapidaren Titel *„Kreis und Kugel“* (1916) gewidmet ist. Das seinem Grazer Lehrer *von Lichtenfels* gewidmete Buch ist im Geiste von *Jakob Steiner* (1796–1863) geschrieben; Blaschke sagt, er habe aus Steiners vom Vater geerbten Werken auch die Vorliebe zu dessen Versuchen einer Anwendung der heiteren, anschaulichen und manchmal auch etwas leichtfertigen Geometrie auf ernste Fragen der Analysis (wie Extrema und Integrale) geerbt.

Das später mit dem „Steiner-Preis“ der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin ausgezeichnete Buch gibt zuerst, gestützt auf elementare und anschauliche Methoden Steiners (Anwendung des Viergelenkverfahrens und der Symmetrisierung), strenge Beweise für die *Isoperimetrischen Eigenschaften* des *Kreises* und der *Kugel.* Das wesentliche Problem ist dabei bekanntlich in beiden Fällen der Nachweis der Existenz einer Lösung des Problems, die bei Steiner noch offen blieb. In der Ebene reicht dazu der Weierstraßsche Existenzsatz eines Extrems bei Funktionen, die in einem abgeschlossenen Intervall stetig sind. Im Raum stützt sich Blaschke auf seinen berühmten *Auswahlsatz für konvexe Körper*, der eine Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano und Weierstraß ist und besagt, daß man in einer unendlichen Menge gleichmäßig beschränkter kompakter konvexer Körper stets eine Folge von Körpern auswählen kann, die gegen einen kompakten konvexen Körper konvergiert.

Das Buch wendet sich dann ausführlich der Theorie der linearen Scharen von konvexen Körpern zu, insbesondere verschiedenen Sätzen von *H. A. Schwarz* (1843–1921), *Brunn* (1862–1939) und *Minkowski* (1864–1909), die mit Hilfe der Steinerschen Symmetrisierung und des neuen Auswahlsatzes auf sehr einfache Weise bewiesen werden können, und gibt schließlich noch zahlreiche neue Beiträge zur Geometrie der konvexen Körper.

21. In diesen Gedankenkreis gehören auch Blaschkes Beiträge zur Frage der infinitesimalen Unverbiegbarkeit der Eiflächen, die um 1900 zuerst von *Heinrich Liebmann* (1874–1939) bewiesen wurde. Blaschke gab dafür, gestützt auf Hilfsmittel von *Weingarten* und *Hilbert*, einen neuen, eleganten Beweis. Die heutige Differentialgeometrie verfügt über verschiedene neue Methoden zum Beweis der endlichen Unverbiegbarkeit der Eiflächen, die in der 5. Auflage von Blaschkes I. Band der „Vorlesungen über Differentialgeometrie“ von dem Herausgeber *Kurt Leichtweiss* (* 1927) dargestellt sind.

22. Den bedeutendsten Einfluß auf die neuere Entwicklung und Gestaltung der Geometrie übte Blaschkes großes, aus drei Bänden bestehendes Standardwerk *„Vorlesungen über Differentialgeometrie“* aus. Es ist schon dadurch völlig neuartig, daß es unter dem Leitstern des *„Erlanger Programms“* von *Felix Klein* stand, das darin erstmals konsequent auf die Differentialgeometrie angewandt wurde.

Die drei Bände entwickeln der Reihe nach die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen der Ebene und des Raumes nach den Gesichtspunkten der

Invarianz ihrer Eigenschaften
1) bei der *euklidischen Bewegungsgruppe* (Band I),
2) bei der *Gruppe der inhaltstreuen Affinitäten* (Band II)
3) bei den *Gruppen der Kreis- und Kugeltransformationen von Möbius, Laguerre und Lie* (Band III).

23. Schon der erste Band, (aus Vorlesungen in Tübingen und Hamburg entstanden, wohin Blaschke nach Zwischenstationen in Prag, Leipzig und Königsberg zuletzt 1919 gekommen war), der als erster Band der berühmten „Gelben Sammlung" des Springer-Verlags über „Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften" 1921 erschien, erregte größtes Aufsehen und errang das höchste Ansehen, unterschied er sich doch von Grund auf nach Methode, Inhalt und Form von allen vorher erschienenen deutschen und fremdsprachlichen Werken über Differentialgeometrie, indem er methodisch erstmals die mathematisch knappe Schreibweise der Vektorrechnung verwandte, sachlich neben den traditionellen *lokalen Eigenschaften* der Kurven und Flächen als große Neuerung auch die *globalen Eigenschaften* berücksichtigte und zudem bei aller Kürze und Prägnanz der Darstellung auch sprachlich überaus lebendig geschrieben war.

24. Wie groß der Einfluß und die anregende Kraft dieses zu Lebzeiten von Blaschke in vier Auflagen erschienenen Bandes war, von dem auch Übersetzungen ins Russische und Türkische und ein amerikanischer Neudruck erschienen sind, zeigt auch die Wirkung der darin aufgeworfenen Probleme. Als Beispiel dafür diene Blaschkes globales Problem der „*Wiedersehensflächen*", das verlangt, jene vollständigen orientierbaren zweidimensionalen Flächen anzugeben, auf denen jeder Punkt P genau einen konjugierten Punkt P′ besitzt, d. h. bei denen alle von P ausgehenden geodätischen Linien sich wieder in einem Punkte P′ vereinigen. Blaschkes Vermutung war, daß nur die Kugel diese „Wiedersehenseigenschaft" habe, und er konnte beweisen, daß jede Wiedersehensfläche, wenn sie einfach zusammenhängend ist, notwendigerweise den topologischen Zusammenhang einer Kugel hat. Das Problem blieb, trotz vieler Bemühungen, durch vier Jahrzehnte offen. Erst dem Amerikaner *L. W. Green* gelang 1963 der endgültige Beweis für die Richtigkeit von Blaschkes berühmter Vermutung.

25. Der zweite Band von Blaschkes „*Vorlesungen über Differentialgeometrie*" erschien 1923 als Band 7 der „Gelben Sammlung" unter Mitwirkung von *Kurt Reidemeister*, der damals in Wien wirkte. Er enthält die ebene und räumliche affine Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, wie sie als Theorie ihrer Invarianten bei inhaltstreuen Affinitäten von Blaschke selbst und vielen Mitarbeitern in einer langen Kette von Arbeiten seit 1916 entwickelt worden war. Wieder werden neben den lokalen affinen Eigenschaften auch die globalen ausführlich betrachtet. Insgesamt enthält der Band II eine Fülle neuer Erkenntnisse, darunter auch die Lösung von vielen interessanten Aufgaben über Extreme bei Kurven und Flächen, die auch schon in Band I zu Blaschkes Lieblingsfragen gehörten.

Elementare Teile der affinen Flächentheorie kann man, gestützt auf Asymptotenparameter, darstellen, die aber nur auf hyperbolischen Flächen-

stücken reell sind. Die allgemeine affine Flächentheorie wird daher mit Hilfe der auf kurzem Wege eingeführten „Tensorrechnung" entwickelt, die damals im Hinblick auf Einsteins „Allgemeine Relativitätstheorie" überall Eingang in den mathematischen Unterricht fand.
Von Blaschkes affiner Differentialgeometrie sind viele neue Anregungen und Entwicklungen ausgegangen, über die Herr *Udo Simon* (* 1938, Berlin) vor kurzem ausführlich berichtet hat.

26. Der dritte Band von Blaschkes „*Vorlesungen über Differentialgeometrie*", von *Gerhard Thomsen* (1899–1934) bearbeitet, erschien 1929 als Band 29 der „Gelben Sammlung". Er enthält nach einer elementar gehaltenen Einleitung die auf die Kreis- und Kugeltransformationen von Möbius, Laguerre und Lie gestützte Differentialgeometrie der Kurven und Flächen der Ebene und des Raumes, die Blaschke selbst und viele seiner Mitarbeiter seit 1924 wieder in einer langen Serie von Arbeiten begründet und entwickelt hatten. Abgesehen von einer Studie zu der berühmten globalen Frage nach der Mindestanzahl der Nabelpunkte auf Eiflächen behandelt der Band III in ausführlicher Weise nur Fragen der lokalen Differentialgeometrie.

27. Da die Lie-geometrische Flächentheorie zur *projektiven Differentialgeometrie* der Flächen äquivalent ist, können die Ergebnisse und Formelapparate beider Theorien in einander übergeführt werden. Man kann daher sagen, daß die drei Bände des großartigen Werkes von Blaschke zusammen die Differentialgeometrien der wichtigsten geometrischen Gruppen umfassen.

28. Kleins „Erlanger Programm" berührt auch die *Gruppe der topologischen Abbildungen.* Der auf diese sehr umfassende ebene und räumliche Gruppe gestützten Differentialgeometrie wandte sich Blaschke seit 1927 zu, zusammen mit zahlreichen Mitarbeitern, die ihm halfen, dieses völlig neue, vordem noch nie betretene Gebiet zu erforschen. Die Ergebnisse der so entstandenen 65 Arbeiten über „*Topologische Fragen der Differentialgeometrie*" hat Blaschke zusammen mit *Gerrit Bol* 1935 in Band 49 der „Grundlehren" unter dem Titel „*Geometrie der Gewebe*" ausführlich dargestellt, der sich als Abschluß würdig den drei Bänden der „Differentialgeometrie" anschließt. Gegenstand des neuen Bandes ist die Theorie der topologisch invarianten lokalen Eigenschaften der Kurven- und Flächengewebe, die sich als überaus reichhaltig und außerdem auch für die *Grundlagen der Geometrie* und die *Nomographie* bedeutsam erwies. Die Neuartigkeit der Untersuchungen erforderte manche neue Hilfsmittel, insbesondere solche aus der Theorie der Gruppen, der linearen Differentiatoren, der algebraischen Funktionen (insbesondere das Abelsche Theorem) und der Weylschen Geometrie.

Blaschke liebte es, über seine Neuschöpfungen immer wieder einem größeren Kreis von Fachkollegen in einführenden Übersichtsvorträgen Kunde zu geben. Aus solchen Vorträgen und aus Vorlesungen in Barcelona, Hamburg, Istanbul und Messina, ist seine bequem lesbare „*Einführung in die Geometrie der Waben*" entstanden, die auch auf Russisch und Türkisch erschien.

29. Um 1935 nahm Blaschke (durch Herglotz angeregt) Untersuchungen auf, die (geistesverwandt auch mit Gedanken von Jakob Steiner) zu dem von ihm als *Integralgeometrie* bezeichneten Gebiet führten. Seine und seiner Mitarbeiter Ergebnisse sind in zwei Heften der „Hamburger Mathematischen Einzelschriften" dargestellt.

Die Fragestellung der Integralgeometrie wurzelt in alten Arbeiten des Iren *Morgan William Crofton* (1826–1915), der 1868 die Idee hatte, der Dichte der Punkte P der Ebene innerhalb einer geschlossenen Kurve k, welche zu dem Doppelintegral des Flächeninhalts dieser Kurve k führt, in dualer Weise eine *Dichte der die Kurve k treffenden Geraden* p gegenüber zu stellen. Das Doppelintegral der Croftonschen Geradendichte ergibt die *Bogenlänge* der Kurve k. Dichten und Integrale sind dabei invariante Größen gegenüber euklidischen Bewegungen. *Henri Poincaré* erweiterte diesen Gedanken im Rahmen von Betrachtungen über geometrische Wahrscheinlichkeiten zu dem allgemeinen Begriff der „kinematischen Dichte", indem er die die Kurve k schneidenden Geraden g allgemeiner durch Kurven c ersetzte, die durch Bewegung aus einander entstehen. Wählt man z. B. mit dem Argentinier *L. A. Santaló* die feste Kurve k als *Eilinie* (mit dem Umfang U und dem Inhalt F) und als die beweglichen Kurven c kongruente Kreise vom Radius r, so ergibt die Integralgeometrie die Gleichung

$$\left(\frac{U^2}{4\pi} - F\right) - \pi\left(\frac{U}{2\pi} - r\right)^2 = F_4 + 2F_6 + 3F_8 + \ldots, \tag{6}$$

in der die Größe $F_n \geqslant 0$ den Flächeninhalt des Gebiets der Mittelpunkte M aller jener Kreise c vom Radius r bedeutet, welche die Eilinie k in genau n Punkten treffen.

Für $r = U/2\pi$ (d. h. für Kreise c, die mit k umfangsgleich sind), lautet die *Gleichung von Santaló* dann einfacher

$$\frac{U^2}{4\pi} - F = F_4 + 2 \cdot F_6 + 3 \cdot F_8 + \ldots, \tag{7}$$

woraus wegen $F_n \geqslant 0$ für die Eilinie k die *Ungleichung*

$$\frac{U^2}{4\pi} - F \geqslant 0 \tag{8}$$

folgt, welche für alle Eilinien der Ebene gilt und die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises enthält, für den das Gleichheitszeichen gilt.

Das zweite Heft der „Integralgeometrie" handelt von räumlichen Dichten bei Eikörpern im euklidischen Raum und entwickelt für Vielflache Blaschkes allgemeine „kinematische Hauptformel" und einige ihrer Anwendungen.

30. Mit dem Aufbau der Integralgeometrie kehrte Blaschke wieder zur *euklidischen Geometrie* und zu dem Ideenkreis seines ersten Buches über *„Kreis und Kugel"* zurück. Der Ring der unter dem Leitstern des *„Erlanger Programms"* von Blaschke und seinen Mitarbeitern entwickelten Zweige der Geometrie ist damit geschlossen. Das dabei entstandene Gesamtwerk ist großartig und hat nirgends seinesgleichen. Es hat den Ruhm seines Meisters in unvergleichlicher Weise erhöht und in aller Welt verbreitet.

Die noch folgenden Arbeiten und Bücher von Blaschke zur *euklidischen Kinematik* der Ebene und des Raums, zur *Nichteuklidischen Geometrie und Mechnaik*, zur *elliptischen Hermiteschen Geometrie* und zur *Riemannschen Geometrie*, ebenso seine auf Cartansche Methoden gestützte Entwicklung der euklidischen Differentialgeometrie zeigen Blaschke auf dem Höhepunkt seiner analytischen Kraft und geometrischen Vielseitigkeit, die man insbesondere auch in seinen beiden ungewöhnlich reichhaltigen Büchern über „*Analytische Geometrie*“ und „*Projektive Geometrie*“ bewundern kann.

31. Blaschkes Werk wirkt durch die große Fülle der Ergebnisse und der neu angestoßenen Fragen in kommende Zeiten weiter. Es ist daher sehr zu begrüßen, daß die wesentlichen seiner über 200 Schriften aus vielen weithin verstreuten Zeitschriften gesammelt werden. Die von Blaschkes Amtsnachfolger *Emanuel Sperner* (1905–1980) in Hamburg gegründete und nach seinem Tode heute von *Walter Benz* (* 1931) geleitete „*Wilhelm-Blaschke-Gedächtnis-Stiftung*“ hat daher begonnen, in sechs Bänden „*Gesammelte Werke von Wilhelm Blaschke*“ herauszugeben. Bisher sind die ersten drei Bände im Thales-Verlag in Essen erschienen; die letzten drei Bände sollen bald nachfolgen.

Prof. Dr. Karl Strubecker
Hansjakobstraße 8
D-7500 Karlsruhe 1

(*Eingegangen 26. 9. 1985*)

Buchbesprechungen

Götze, H., Wille, R. (Hrsg.), Musik und Mathematik, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer 1985, 16 Abb., IX, 97 S., broschiert, DM 18,–

„Musik und Mathematik", dieser Titel hat in mir Skepsis und Neugierde hervorgerufen. Skepsis, weil ich die Gefahr sehe, daß sich bei diesem Thema ein mystischer Glaube, alles sei durch Mathematik zu erklären, zu Wort melden könnte, neugierig, weil ich bei aller Beschränktheit der Anwendungsmöglichkeit von Mathematik gerne etwas darüber erfahren möchte, ob es außer gewissen offensichtlichen Querverbindungen tiefergehende Einsichten gibt. Um es vorwegzunehmen, beide Erwartungen waren berechtigt. Wenn Heinz Götze in seiner Einführung feststellt, „die Mathematik ist ein System von Chiffren, in denen alle Erscheinungen unseres Lebens zum Ausdruck gebracht werden . . . können", dann scheint mir das bei aller Sympathie für Enthusiasmus sehr übertrieben.

Solche Vorstellungen liegen den weiteren Beiträgen dieses Bändchens (3 längere Ausarbeitungen von Vorträgen, 5 Kurzbeiträge und Ausschnitte aus dem Gespräch der Teilnehmer) nicht zugrunde. In ihnen entsteht ein differenzierteres vielschichtiges Bild des gestellten Themas, es wird deutlich, wie viele verschiedene Gesichtspunkte vorhanden sind. Da ist zum einen die Beziehung zwischen Musiktheorie und Mathematik zu nennen, die in dem Vortrag von R. Wille „Musiktheorie und Mathematik" und den „6 Thesen zur Rolle der Mathematik für die Musik" von G. Mazzola angesprochen wird. Während bis zum 18. Jahrhundert die formalisierte Beziehung von Mathematik und Musik meist über Zahlen hergestellt wurde, und im Zeitalter des Subjektivismus „die mathematische Begründung der Musiktheorie durch die Ästhetik des menschlichen Individuums vordrängt" wurde (trotz des Versuches z. B. von Euler, ästhetische Phänomene der Musik mathematisch zu erfassen), betont R. Wille die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert etwa der Geometrie von Mannigfaltigkeiten oder der Gruppentheorie und des mit ihr geschaffenen Symmetriebegriffs, die neue Möglichkeiten der Querverbindungen schafft. Er erwähnt einige Beispiele in dieser Richtung, allerdings nur sehr knapp (bedauerlich, denn in dieser Richtung liefern auch die anderen Beiträge nicht mehr Material).

In dem Beitrag von Helga de la Motte-Haber „Rationalität und Affekt. Über das Verhältnis von mathematischer Begründung und psychologischer Wirkung der Musik" wird eine kritische Grundeinstellung gegenüber der Rolle von Mathematik in der Musiktheorie sichtbar. Die Kritik geht von der These aus, daß (wie sie in ihrem Gesprächsbeitrag noch einmal provozierend formuliert) das, was wir als musikalischen Sinn bezeichnen, sich aus zweierlei Schichten zusammensetzt. Aus einer, die eventuell formalisierbar ist, und einer, wo dies nicht möglich ist, weil alles, was sozusagen an Affekt in der Musik vorhanden ist, nicht mit mathematischen Begriffen faßbar ist. Sie hinterfragt diese These selbst kritisch, indem sie darauf hinweist, daß Künstler im 20. Jahrhundert auf Zahlen und quasi mathematische Operationen vertraut haben, wenn es darum ging, ästhetische Ordnungen zu finden. Aber, so wendet sie ein, die Werke behalten den Charakter des subjektiv Gesetzten, sie müssen ihn als Resultat einer imaginativen schöpferischen Tätigkeit auch behalten. Auch wenn mir eine kritische Einstellung gegenüber einer Überbetonung der Rolle der Mathematik sympathisch ist, habe ich bei dem Beitrag von Frau de la Motte-Haber den Eindruck, daß sie ein recht einseitiges Bild der Mathematik vor Augen hat. Dadurch wird ihre Kritik an den Möglichkeiten der Anwendung von Mathematik in der Musiktheorie etwas oberflächlich.

An dieser Erfahrung mit Laienurteilen setzt auch der Beitrag von W. Metzler „Schöpferische Tätigkeiten in Mathematik und Musik" an. Er konfrontiert sie dann mit Äußerungen von Dehn, Hasse und Borel, die Parallelen zwischen Mathematik und Kunst betonen. Er vergleicht diese Darlegungen zu schöpferischer Tätigkeit in der Mathematik mit entsprechenden Äußerungen von Komponisten und Beispielen aus der Musikgeschichte. Er stellt fest, daß dabei deutliche Parallelen zur Vorstellung der Mathematiker sichtbar werden. Insbesondere betont er die in beiden Bereichen zentrale Rolle von Intuition und Planung bzw. handwerklichem Können. Er fragt anschließend, ob nicht ein grundlegender Unterschied zwischen Mathematik und Musik darin besteht, daß Mathematik sich nur aus sich selbst heraus entwickelt, während Musik ein Ausdruck der jeweiligen Zeit ist. Ohne den Anspruch zu erheben, diese Frage zu beantworten, relativiert er die hinter dieser Frage sichtbar werdenden Vorstellungen und weist auf die Hilfen hin, die eine Disziplin für die andere zur Verfügung stellen kann. Abschließend stellt er einige Gedanken zur Begabtenförderung zur Diskussion und plädiert als Christ für eine Ausbildung, die die Förderung von Talenten nicht mit dem Wunsch verknüpft, Konkurrenten auszustechen.

Diese Berichte aus den drei Hauptbeiträgen machen deutlich, daß das Buch eine Reihe von interessanten Gedankengängen enthält und zum eigenen Nachdenken anregt.

Mainz M. Kreck

Truesdell: C., An Idiot's Fugitive Essays on Science, Methods, Criticism, Training, Circumstances, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, xvii, 654 pp., cloth, DM 158,–

Der Verfasser (*1919) dieses gewichtigen Bandes ist u. a. bekannt a) durch Forschungsarbeiten und Monographien auf dem Gebiet der Kontinuumsmechanik (seit ca. 1945) b) durch gewichtige Forschungsbeiträge zur Geschichte der Mathematik und c) durch Rezensionen und brillante Essays zu den in a) und b) bezeichneten Gebieten und zu allgemeinen Fragen der Wissenschaftstheorie und des Wissenschaftsbetriebes. Der vorliegende Sammelband vereinigt Neudrucke vor allem aus dem Publikationsbereich c); die Texte wurden hierzu leicht korrigiert bzw. überarbeitet und kommentiert. Die abgedruckten Beiträge stammen aus den Jahren 1950–1982. Sie erscheinen hier zu sechs Teilen gebündelt: I. Aims, Programs, and Methods (11 Texte), II. Criticism: Selected Reviews (20 Texte), III. Biography and Circumstances (4 Texte), IV. Training, V. Philosophy? , VI. Dirge (= „Klagelied"; 3 Texte).

Besonders gewichtig erscheinen mir die Beiträge aus Teil III über Newton, Euler, Herapath und Waterston, und Bateman, sowie, aus Teil IV der Text Nr. 39: Suppesian Stews. Die Generallinie des Verfassers ist deutlich: Überragende mathematische Qualität deutlich herausstellen, aufgeblasene Ansprüche abstechen. Für das letztere dient ihm u. a. das Abklopfen von Wortlauten mittels einfacher Spezialfälle; es ist kein Wunder, wenn dabei Formulierungen z. B. von philosophischer Seite „baden gehen". Das sehr scharfe Urteil des Verfassers wird durch einen enormen Fundus an Texten gestützt, der sich in ausführlichen Zitaten niederschlägt. Truesdell hat aber vor allem nicht nur vieles gelesen, sondern dieses auch genauer als die meisten Mathematiker, insbesonders als die von ihm kritisierten. Wenn er bekannten Wissenschaftstheoretikern wie P. Suppes und W. Stegmüller historische Detail-Unkenntnis vorhält, kann er sich auf tiefgestaffelte Nachweise stützen. Seitenhiebe auf R. Thom's Katastrophentheorie (S. 122ff) referieren dagegen, soweit ich sehe, nur die Polemik anderer Mathematiker.

Der Titel erscheint mir überwiegend untertrieben. Die Qualität der Feststellungen des Autors ist in meinen Augen unterschiedlich, das Rechtbehalten manchmal zu sehr vorprogrammiert; doch macht der vielfältige Beleuchtungswechsel Eindruck und Vergnügen. Der Band hat viel Substanz, und das Englisch des Verfassers ist, soweit ich es beurteilen kann, bewunderswert farbig und geschliffen. Lesenswert.

Erlangen K. Jacobs

Devlin, K. J., Constructibility (Perspectives in Mathematical Logic), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, xi, 425 pp., cloth, DM 158,–

The universe of constructible sets constitutes a radical attempt to restrict the concept of a set so as to make it precise at least with respect to the class of ordinals. This major accomplishment in Set Theory of the 1930's was brought about by K. Gödel to set a ground for the proof of the consistency of the Continuum Hypothesis. And much more, it initiated the study of inner models of set theory. In Zermelo-Fraenkel set theory (ZF), the notion of what constitutes a set is related to a commulative hierarchy which itself is based on the powerset operation. It seemed to be an apparent reason why the Continuum Problem, which was the driving force in set theory at that time, has had endured to efforts of so many fine mathematicians to settle it within the frames of ZF.

The class L of all constructible sets is a subclass of the set-theoretic universe V. It has a cummulative hierarchy of sets L_α, α an ordinal which mimic the sets in the cummulative hierarchy of V. But there is an important difference: a new element of L can occur at a certain stage only if it is defined by a first-order formula using previously defined elements of L. As a result, L constitutes a universe of sets in which the notion of what constitutes a set is very precisely defined relative to the ordinals, which all belong to L. The process gives L its well-defined structure and all axioms of ZF are true in L. Thus L is an inner model of Zermelo-Fraenkel set theory. In 1937, Gödel realized that the method of generating L implicitely contains the well-ordering of the constructible universe that provides for the truth of the Axiom of Choice in L. Hence L is an inner model of Zermelo-Fraenkel set theory with the Axiom of Choice (ZFC) which established the consistency of ZFC relatively to the consistency of the axioms of ZF. Later, in 1938, he proved that all constructible subsets of an arbitrary constructible cardinal ω_α are generated at subsequent stages that are close to the one where ω_α was generated. He derived from this fact that the Generalized Continuum Hypothesis (GCH) was true in L. By this way, the consistency of ZFC + GCH – the strongest extension of ZF used in pre-war mathematics – was established relatively to the consistency of ZF. Besides, a new, much stronger axiom emerged from the inner model L. The proces that generates constructible sets is absolute in the following sense, it gives the same results whether carried out in the set-theoretic universe V or in the constructible universe L. Hence the class L^L of all constructible sets defined in L coincides with L and, consequently, the statement "every set is constructible" is true in L. This statement is usually abbreviated as V = L and it is called The Axiom of Constructibility. It turns out that ZF + V = L is much stronger extension of Zermelo-Fraenkel set theory than ZFC + GCH. It is consistent relatively to ZF, since it has L as a model. It should be noted that the Axiom of Constructibility implies both the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis. Moreover, it is powerful enough to settle many problems that cannot be proved or disproved in ZFC + GCH, let us mention the Suslin Hypothesis alone.

Gödel's work on constructibility initiated the study of restrictions of models of set theory which was systematized by Shepherdson in the study of inner models in the 1950's. The major goal, however, remained to establish the independence of the Continuum Hypothesis and of the Axiom of Choice. Fraenkel (1922) and Mostowski (1938) who revised the original Fraenkel's argument proved that the Axiom of Choice was independent of a theory ZFU which postulated the existence of infinitely many objects that were not sets. The same problem for ZF remained open. The concepts of relative constructibility due to Lévy (1957) and Hajnal (1961) were studied as a possible tool to establish the independence of the axiom of Constructibility and of GCH. In 1960, Scott proved that the existence of a measurable cardinal implies that the set-theoretic universe V is strictly larger that L. Thus the independence of V = L was established modulo a large cardinal.

A fameous breakthrough came in 1963 when P. Cohen showed that both the Continuum Hypothesis and the Axiom of Choice are independent of the axioms of ZF. His forcing method was further developed by Scott, Solovay, Shoenfield and Vopěnka and it has proved since to be one of the most powerful tools for establishing consistency of set-theoretic hypotheses. As a general method for producing (so-called generic) extensions of models of set theory, it finds its place, however, on the oposite end of the spectrum of tools for investigation of metamathematics of set theory.

Scott's result turned attention to elementary embeddings of the universe V into some inner models of set theory. Using model-theoretic methods, Rowbottom (1971) proved that a combinatorial property of measurable cardinals implies that there are only countably many reals in L, if measured on the cardinal scale of V. Silver (1971) studied this phaenomenon of transcendence over L and isolated a set of integers called $0^{\#}$ which codes all sentences true in L. Of course, $0^{\#}$ does not belong to L and its existence cannot be proved in ZFC. This follows immediately from the Gödel's Second Incompletness Theorem. At about the same time, Jensen completed his study of the structural properties of L using a well-balanced blend of recursion- and model-theoretic techniques. Jensen's deep analysis of L culminated in 1972 in formulation of the Fine Structure Theory of L based on a new hierarchy of the constructible universe. The first applications of the theory were combinatorial. New and powerful combinatorial principles e.g. $\square_\kappa$ or morasses were distilled from L in addition to those that like $\diamond$ had been extracted earlier. A new tool was prepared for discoveries.

After a careful analysis made in the 1960's of the behaviour of the cardinal function 2^κ in generic extensions of models of ZFC, there was growing interest in the so-called Singular Cardinal Problem. In its simplest form, the problem asks whether it is consistent with ZFC that the Generalized continuum hypothesis may fail first at a singular cardinal. It was expected that a positive answer will follow from a sophisticated Forcing argument, until Silver (1974) proved that the answer was negative for singular cardinals with uncountable cofinality. New activity spurred by Silver's discovery culminated in a deep structural statement about the relation between V and L known as Jensen's Covering Theorem (1975). It states that if $0^{\#}$ does not exist ($\neg\ 0^{\#}$) then every uncountable set of ordinals in V is a subset of a constructible set of ordinals of the same cardinal power (in V). In other words, if $\neg\ 0^{\#}$ then every uncountable set of ordinals is covered by one in L of the same cardinal power. This covering property implies that the cardinality structure of L cannot be radically different from that of V, the latter being a "slim" envelope of L. In particular, the Covering Property (and hence $\neg 0^{\#}$) implies the negative solution of the Singular Cardinal Problem for all singular cardinals. Yet, $0^{\#}$ is implied by the existence of certain large cardinals and their presence in the set-theoretic universe makes V "fat" over L. It was shown by Dodd and Jensen (1981) that even then there is a definable inner model K, $L \subseteq K \subseteq V$ called the Core Model which shares many properties of the constructible universe. Like L, the Core model K does not contain any measurable cardinal, yet it allows an extension of the Covering Property to the consistency strength of measurability. Once started with L nearly fifty years ago, the study of inner models has brought many deep results about the global structure of the set-theoretic universe.

Devlin's book is an advanced monograph that gives the full exposition on the subject of Constructibility. Part I explains elementary theory of L and some of its applications. It starts with a review of basic concepts of Zermelo-Fraenkel set theory with a particular emphasis on the metamathematical concept of definability. Kripke-Platek set theory is introduced as the weakest fragment of ZF which is sufficient for the construction of the constructible hierarchy. The original hierarchy of sets L_α is described and it is shown that L is a minimal model of ZFC + V = L. The generatized Continuum Hypothesis is proved in L via the Condensation lemma and Σ_n-Skolem functions for L_α's are introduced, which play an important rôle in deeper parts of constructibility theory. The panorama of trees in L is shown and the related combinatorial principles $\diamondsuit_\kappa$ and $\square_\kappa$ are examined. The story of $0^\#$ starts with a very short review of Large Cardinals and culminates in the proof of the Covering Theorem. Obviously, this part of the exposition could not be completed without recourses to some facts from the Fine structure theory of L which are proved later.

Part II presents advanced theory of L. Fine structure, the stuff of projecta, the Uniformization Theorem for the Jensen's hierarchy of sets J_α and Standard Codes are rigorously developed with many intricate details. This machinery is briefly demonstrated in the arboretum of κ-trees for various, mostly large cardinals κ and then it penetrates the pitorsque landscape of morasses. These sophisticated combinatorial structures, originally motivated by the Cardinal Transfer Problem of Model Theory, are capable filling an entire book of its own. The detailed discussion of the simplest kind of a morass and a glance at Simplified morasses and Gap-n morasses culminates the exposition. The last chapter presents Silver Machines, which offer an alternative to Fine structure theory in proving the Covering Theorem, $\square_\kappa$ and other results. This Chapter can be read in parallel to the last Chapters of Part I. The book is concluded by Historical remarks, Bibliography and Index.

The book under review gives a fairly comprehensive account of the theory of the constructible universe at an advanced level. It is a self-contained exposition on the subject accessible to graduate students of mathematics with some knowledge of mathematical logic. The book is well-written and provides the reader with all delicate details. Yet, it still could offer him a friendly service by interrupting the flow of rigors on some places by a short look from the bird's eye perspective, which would help the reader to keep all pieces together. The author kept his word uncompromisingly and concentrated on the theory of the constructible universe. The story of $0^\#$ and the Covering Theorem are the only place, where he stepped out of L for a while. The concept of relative constructibility appears only in exercises. It was perhaps too restrictive and prevented the author of the possibility to include comments that would place certain results in a broader context of Set Theory. But every book has to stop somewhere and this one is well-recommendable to students of mathematics and specialists interested in Set Theory.

Prag Petr Štěpánek

Hallett, M., Cantorian Set Theory and Limitation of Size (Oxford Logic Guides 10), Oxford: Clarendon Press 1984, xxii, 343 pp., cloth, £ 28.00

Das Buch diskutiert die Entwicklung der Cantorschen Mengenlehre hauptsächlich unter philosophischen und historischen Gesichtspunkten. Dabei kommen auch Cantors theologisch-philosophische Rechtfertigungen seiner Mengenlehre ausführlich zu Wort. Das Hauptthema handelt jedoch von der Genesis der Idee der „Größenbeschränkung" (limitation of size), was – grob gesprochen – besagt, daß nur diejenigen Klassen (Inbegriffe) als Mengen bezeichnet werden können, die nicht „zu groß" sind. Es wird weiterhin verfolgt, wie sich diese Idee der Größenbeschränkung auf die weitere Entwicklung der Mengenlehre im 20. Jahrhundert ausgewirkt hat. Es werden beispielsweise auch die Axiomatisierungen von Zermelo-Fraenkel-Skolem (ZF), v. Neumann-Bernays-Gödel (NBG) und D. Scott besprochen. Eine Diskussion der Ackermannschen Axiomatisierung fehlt allerdings. Dies ist sehr zu bedauern, da doch gerade diese Axiomatisierung aus philosophischer Sicht besonders befriedigend ist.

In der Darstellung stützt sich der Autor nicht nur auf die publizierten Werke und Briefe Cantors sondern auch auf den bisher noch weitgehend unpublizierten Nachlaß Cantors, der in der Göttinger Universitätsbibliothek aufbewahrt wird. Der umfangreiche, bisher unpublizierte Briefwechsel zwischen Cantor und Mittag-Leffler, der in Djursholm/Schweden aufbewahrt wird, wurde jedoch nicht berücksichtigt.

Insgesamt ist das Buch sehr lebendig geschrieben und auch gut lesbar. Es wendet sich hauptsächlich an Studenten, aber auch dem Fachmann werden gelegentlich einige Neuheiten geboten (z. B. Dokumente aus dem unpublizierten Zermelo-Nachlaß aus der Universitäts-Bibliothek Freiburg i. Br.). Das Buch enthält zahlreiche gute und treffende Bemerkungen; manchmal ist der Autor allerdings etwas voreilig in seinem Urteil.

Cantors Bedeutung für die Mengenlehre ist unbestritten. Die Bemerkung des Autors (p. 1), daß Cantor sogar der Begründer der modernen Mathematik sei, ist aber entweder sehr übertrieben oder nichtssagend. Auch die Rolle, die Cantor in der Begründung der Mengenlehre spielt, wird gelegentlich etwas übertrieben.

Von Mengen, Klassen, Inbegriffen und Mannigfaltigkeiten haben die Mathematiker bereits seit der Antike gesprochen, haben aber damit keine eigenständigen Gedankenobjekte gemeint. So kommt das Wort „Menge" (τὸ πλῆθος) auch in dem bekannten Primzahlsatz von Euklid (9. Buch der „Elemente") vor, hat dort aber nur die Bedeutung von „beliebig viele einzelne Objekte" (die Menge selber wird nicht als Objekt angesehen). Der Schritt, daß Mengen als Objekte angesehen werden können, also eine eigene Seinsweise haben, wird erst in der Neuzeit vollzogen. Es war allerdings nicht Cantor, wie in dem Buch (p. 299) behauptet wird, sondern bereits B. Bolzano („Wissenschaftslehre", § 85, und „Paradoxien des Unendlichen"), der diesen wichtigen Schritt vollzogen hat. Damit wurde es möglich, auch Mengen von Mengen zu bilden und dergleichen.

In diesem Zusammenhang muß auch darauf hingewiesen werden, daß die englische Übersetzung einer Stelle aus dem „Gottesstaat" von Augustinus nicht sehr geschickt ist. Der Ausdruck „et omnes infiniti sunt" wird mit „but as a class they are infinite" (p. 35) übersetzt. Die Bildung der (actual unendlichen) Klasse (aller natürlichen Zahlen) vollzieht Augustinus aber überhaupt nicht. Der „Witz" des Augustinischen Argumentes ist ja gerade, daß der Mensch mit seinen begrenzten Fähigkeiten die unbegrenzte Gesamtheit aller natürlichen Zahlen gar nicht bilden könne, da er vorher nicht sämtliche Zahlen gebildet haben kann. Gott aber habe die Reihe aller Zahlen einzeln fertig gebildet vor sich und könne sie zu einem Ganzen (einem neuen Ding) zusammenfassen. Augustinus lehnt sich auch hier in seiner Argumentation an Platon an, wobei er dessen Welt der Ideen durch den Gottesbegriff ersetzt.
Auf p. 99 wird der Gödelsche Satz falsch zitiert: man muß dabei voraussetzen, daß das betrachtete formale System rekursiv axiomatisierbar ist. Auf p. 162 wird etwas zu leichtfertig gesagt, daß es legitim sei, Gesetze, die im Endlichen gelten, auch auf das Unendliche auszudehnen. Sowohl das Auswahlaxiom (AC) als auch das Axiom der Determiniertheit (AD) sind im Endlichen gültig– ihre Ausdehnungen auf das Unendliche widersprechen sich aber gegenseitig (vergl. den Epilog in Felgner-Schulz: Algebraische Konsequenzen des Determiniertheits-Axioms. Archiv d. Math. **42** (1984) 557–563).

Ich möchte noch eine Bemerkung zu der These (p. 16) machen, H. Weyl sei Konstruktivist und Anhänger des Intuitionismus gewesen. Gewiß, nicht-konstruktiv bewiesene Sätze nennt Weyl in seiner Schrift „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft" (1927) leere Schatten. Zwölf Jahre später jedoch lobt H. Weyl in seinem Buch „Classical Groups" beispielsweise den Hilbertschen Basis-Satz, der ja keinen konstruktiven Beweis hat, als einen der wichtigsten Sätze der gesamten Algebra. Hieraus und aus vielen anderen Beispielen geht hervor, daß Weyl sich über die Thesen seiner eigenen Philosophie großzügig hinwegsetzt, sobald er Mathematik betreibt. Es ist ja oft so, daß eine vorgefertigte Philosophie der Mathematik, so verführerisch sie auch klingen mag, das Mathematische, wenn überhaupt, dann nur in Ausschnitten erfassen kann.

Cantors Philosophie der Mengenlehre beruht auf Annahmen über göttliche Omnipotenz. Es ist wohl bekannt, daß sich Cantors metaphysische Annahmen nicht unbeträchtlich auf die Substanz und Natur der heutigen Mengenlehre ausgewirkt haben. Wer sich für diese Auswirkungen interessiert, dem kann das vorliegende Buch trotz einiger Mängel dennoch sehr empfohlen werden – auf die Grenzen dieser Auswirkungen wird allerdings nicht eingegangen.

Tübingen U. Felgner

Beth, Th., Jungnickel, D., Lenz, H., Design Theory, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1985, 688 pp., hardcover, DM 128,–

As it says on the back cover: "This is the first comprehensive treatment of the theory of combinatorial designs"; it is full of information, has perhaps 600 references and several useful tables.

No-one working in this field can afford not to have a copy, if only because of the bibliography.

Still, I am not really happy with the book.

First of all, my experience is that things are difficult to find. Why should I look for Majumdar's inequality under "Affine designs" and for Majindar's inequality under "The Higman-Sims group"? Fortunately the author index is excellent, namely integrated with the list of references, so that one can find the places where given papers are cited. You don't know the author of the result you are looking for? Bad luck.

Some useful techniques are only found hidden in a proof. Do you want to know how many absolute points a polarity may have? No answer is given, but the technique is found in a proof in the section on unitals.

Secondly, the treatment is not so comprehensive as one might wish for. The authors have viewed their subject very narrowly: it is $t-(v, k, \lambda)$ designs, transversal designs (nets) and very little else. There are close connections between coding theory, graph theory, design theory, group theory and geometry, but this book only brings some group theory to the design theory and not only carefully avoids association schemes, strongly regular graphs, regular 2-graphs, lattices and polar spaces but also e.g., partially balanced incomplete block designs and group divisible designs in the original sense of the word (cf. Raghavarao).

Moebius geometries are mentioned only because they are Steiner systems; their geometric origin is not discussed; no results like Dembowski's theorem. There are no Laguerre or Minkowski geometries. (But these play a useful role: using them one may give recursive constructions that yield infinitely many Steiner 3-designs missing in Table F.) The many combinatorial configurations that have designs as special cases are not discussed. No packing and covering results, no extremal constant weight codes, no graph decompositions, no Bridge tournaments.

In the table of known symmetric designs the description of the third series has been distorted and provided with a strange reference just to avoid the mention of strongly regular graphs or of polar space terminology. It feels painful in many other places to see all the effort wasted in avoiding the proper setup for things.

Thirdly, the main emphasis is on constructing designs. This is interesting, but only a small aspect of the theory.

Eigenvalues are an important tool and the book by Willem Haemers shows how one can obtain useful information about designs from them. Coding theory is an important tool and the book by Eric Lander shows some ways of using codes in design theory. (A pearl is the very short uniqueness proof for S (3, 6, 22).)

In this book the only technique that is given ample attention is that of constructing designs, either directly or recursively. Unfortunately, the technique of "PBD-closed sets" is used only to construct BIBD's while it would have been illuminating to see how one may show asymptotic existence for entirely different combinatorial structures in this way.

I would not advise anyone to use this book as the basis for a course on design theory.

Aalborg A. E. Brouwer

Weil, A., Number Theory: An Approach through History, From Hammurapi to Legendre, Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1984, xxi, 375 pp., hardcover, DM 74,–

Schon bevor man dieses Buch aufschlägt und zu lesen beginnt, weiß man, daß es ein wahrhaft einzigartiges Buch ist: noch nie zuvor hat ein Mathematiker vom Range André Weils ein ganzes Buch über einen wesentlichen Abschnitt der Geschichte seines Faches geschrieben. Sucht man nach einem Gegenstück, so könnte man allenfalls noch an Felix Kleins „Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert" denken, das in Anlage und Zielsetzung jedoch so verschieden ist, daß sich jeder Vergleich verbietet. Auf das Erscheinen dieses Buches haben viele historisch interessierte Mathematiker lange und ungeduldig gewartet. Jeder, der sich nur ein wenig mit der Geschichte der Zahlentheorie beschäftigt hat, hat die brillanten Essays Weils zu diesem Thema gelesen (vgl. Weil: Oeuvres, vol. III), und war gespannt darauf, die Themen und Leitmotive, die manchmal provokativen Behauptungen dieser Vorträge und Aufsätze ausgeführt und im Einzelfall abgehandelt zu sehen.

Jetzt ist das Buch erschienen, und was es enthält ist schnell gesagt: Ein einführendes Kapitel von gut 30 Seiten über „Protogeschichte" (mit pythagoräischen Tripeln, Quadratsummen und Pells Gleichung als Schwerpunkten und Archimedes, Diophant, Brahmagupta, Fibonacci und Viéte als Hauptpersonen), fast dreimal so viel über „Fermat und seine Korrespondenten", 130 Seiten über „Euler" und ein kurzes abschließendes Kapitel „Ein Zeitalter des Übergangs: Lagrange und Legendre", dazu insgesamt 11 Anhänge mathematischen Inhalts. In diesen werden verschiedene zentrale Fragestellungen des Buches abgehandelt, unter anderen euklidische quadratische Zahlkörper, Kurven vom Geschlecht 1, Mordells Satz, quadratisches Reziprozitätsgesetz, Quadratsummen, Hasse-Prinzip für ternäre Formen, indefinite binäre Formen. Es soll darauf verzichtet werden, den Inhalt des Buches im einzelnen anzugeben; es genügt festzustellen, daß vor allem das zahlentheoretische Werk Fermats und Eulers zusammenhängend und erschöpfend vorgestellt und bis in die letzten Winkel ausgeleuchtet wird. Sieht man Weils Vorträge „Two lectures on number theory, past and present" gewissermaßen als research announcement an, so liegt jetzt die ausgeführte Arbeit mit Einzelheiten und Beweisen vor. Hatte Weil in früheren Vorträgen und Aufsätzen den Bogen historischer Entwicklung manchmal beängstigend weit gespannt, wenn er in zwei, drei Sätzen von Leibniz und Euler bis in unsere Zeit kommt, so haben wir jetzt das solide Bauwerk vor uns. Hervorzuheben ist dabei auch die außerordentliche Sorgfalt und Mühe, die Weil sich damit macht, seine Darstellung durch Verweise auf die Literatur zu belegen; der Text ist geradezu gespickt mit solchen Verweisen und Zitaten aus der Originalliteratur. Wie bei einer hervorragenden mathematischen Arbeit auch ist die Lektüre nicht bequem, sondern erfordert konzentrierte Mitarbeit des Lesers. Es gibt aber immer noch genug Stellen, an denen Weils lebendiger und bildhafter, Ironie und Pathos unauflösbar verbindender Stil bewundert werden kann.

In seinem Vortrag in Helsinki hat Weil klar gesagt, von welchem Standpunkt aus er die Geschichte der Mathematik sieht, nämlich von dem des aktiven, forschenden Mathematikers des 20. Jahrhunderts. Von mehr historisch orientierten Wissenschaftlern ist dieser Ansatz (auch bei anderen Autoren) gelegentlich kritisiert worden. Der Mathematiker kann jedoch nur feststellen, daß dieser Weg ihm am ehesten das Kennenlernen der Geschichte ermöglicht und ihm auch am meisten für seine eigene Arbeit nützt – in Forschung und auch in Vorlesungen. An Weils Buch kann er andererseits auch erkennen, daß Geschichte der Mathematik eine ernst zu nehmende Wissenschaft ist, wenn sie mit Sachkenntnis (mathematischer, historischer und sprachlicher Art) und auf dem Niveau dieses Buches betrieben wird.

Auch wenn Weil uns die Zeit Fermats und Eulers viel näher bringt, so ist sie doch für heutige Mathematiker schon recht fern und man wird sich ihr mehr aus historischem als mathematischem Interesse zuwenden. In seine früheren Arbeiten hat Weil auch die folgende Zeit mit Gauß, Dirichlet, Jacobi, Kummer, Kronecker und Eisenstein eingeschlossen, deren Werk heute auch mathematisch noch viel lebendiger und gegenwärtiger ist. Um so lebhafter wird nach diesem Buch der Wunsch und die Hoffnung, daß André Weil in einem zweiten Band auch diese Zeit und diese Mathematiker behandeln möge.

Münster W. Scharlau

van der Waerden, B. L., Zur algebraischen Geometrie (Selected Papers), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1983, VII, 479 S., gbd., DM 84,–

F. Hirzebruch schreibt in einem Geleitwort zu diesen Selected Papers: „Jeder algebraische Geometer begegnet in seiner täglichen Arbeit Fragen der Spezialisierung und der Entartung algebraischer Varietäten, der Schnittbildung von Untervarietäten, der Multiplizität von Schnittkomponenten, des Multiplizitätsbegriffes in anderen Zusammenhängen, der verschiedenen Äquivalenzbegriffe für Untervarietäten und algebraische Zyklen beliebiger Kodimension, der Parametrisierung (Moduln) algebraisch-geometrischer Objekte. Diese Theorien standen vor fünfzig Jahren auf schwankenden Füßen. Der vorliegende Band zeigt wieviel van der Waerden für die Fundamente des bereits damals stolzen Gebäudes der algebraischen Geometrie getan hat. Neben den Beiträgen zu den Fundamenten enthält der Band viele schöne Einzelresultate, die man mit Vergnügen liest". Und J. Dieudonné charakterisiert in seinem „Cours de géométrie algébrique 1, 1974" die Arbeiten von van der Waerden zur Grundlegung der algebraischen Geometrie so: „Les travaux de Severi et de Lefschetz mettaient donc en évidence la nature essentiellement topologique des fondements de la Géométrie algébrique classique; pour pouvoir développer de la même manière la Géométrie algébrique sur un corps quelconque, il fallait créer des outils purement algébriques qui puissent se substituer aux notions topologiques de „variation continue" et de „nombre d'intersection de cycles" (au sens de la Topologie algébrique). C'est à van der Waerden que revient le mérite d'avoir, à partir de 1926, posé les jalons essentiels dans cette voie".

Van der Waerden selbst hat beim internationalen Mathematiker-Kongreß in Nizza, 1970, einen historischen Rückblick gegeben: „The Foundations of Algebraic Geometry from Severi to André Weil", erschienen im Archive for History of Exact Sciences 7 (1971), der am Anfang der Selected Papers steht und auf 10 Seiten diese Entwicklung darstellt. Anknüpfend an F. Severis „dynamische" Multiplizitätsdefinition und dessen „Prinzip der Erhaltung der Anzahl" konnte van der Waerden in der klassischen Arbeit „Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie" (1927) eine algebraische – und damit über jedem Grundkörper gültige – Multiplizitätsdefinition geben und für diese Severis Aussagen, insbesondere das „Prinzip der Erhaltung der Anzahl", streng beweisen. Generische Punkte, relationstreue Spezialisierungen, Fortsetzungen von Spezialisierungen sind die algebraischen Substitute für Stegigkeitsüberlegungen im klassischen Fall. Idealtheorie, Eliminationstheorie und Körpertheorie lieferten dabei die Hilfsmittel. Darauf aufbauend konnte van der Waerden in aufeinanderfolgenden Arbeiten „Zur algebraischen Geometrie . . ." (ZAG) schrittweise allgemeinere Schnittmultiplizitäten definieren und die erwünschten Eigenschaften für diese nachweisen, zunächst für Varietäten A und B komplementärer Dimension im $\mathbf{P}^n$: Dazu wurde auf eine derselben eine „allgemeine" projektive Transformation T ausgeübt. TA schneidet dann B in einer endlichen Anzahl von Punkten. Dann wird T zur Identität spezialisiert und die Schnittpunkte von TA und B spezialisieren zu den Schnittpunkten von A und B. Jeder der letzteren erhält so eine bestimmte Vielfachheit. Diese stimmt, **C** als Grundkörper vorausgesetzt, mit der von Lefschetz angegebenen „topologischen" Schnittmultiplizität überein. Letztere wurde in der Arbeit „Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie" (1929) weiter ausgebaut und als Homologieinvariante zur Grundlegung von Schuberts Kalkül benutzt. Die Schnittmultiplizität für Varietäten im $\mathbf{P}^n$ führte ferner zu einem Beweis eines verallgemeinerten Satzes von Bézout. Severi führte mit einer Kegelkonstruktion den Schnitt von Untervarietäten A und B einer glatten projektiven Varietät U auf den obigen Fall zurück. So war es möglich, falls A und B sich „eigentlich" schneiden, d. h. alle Komponenten von $A \cap B$ die richtige Dimension haben, einen Schnittzyklus $A \cdot B = \Sigma\, \mu_c \cdot C$, μ_c = Multiplizität von C in $A \cap B$, zu definieren.

Nachdem F. Severi 1932 begonnen hatte, rationale und algebraische Systeme von (positiven) Zyklen zu untersuchen, schufen W. L. Chow und van der Waerden mit den Chow-Koordinaten auch hier solide Grundlagen. In der darauf aufbauenden Arbeit ZAG XIV wurde der Schnittring der algebraischen Äquivalenzklassen algebraischer Zyklen eingeführt.

Mit Benutzung von van der Waerdens Spezialisierungsmultiplizität gab A. Weil in seinen „Foundations of algebraic geometry" (1946) dann eine *lokale* Definition der Schnittmultiplizität, und ein Schnittring der feineren rationalen Äquivalenzklassen von Zyklen auf einer glatten projektiven Varietät konnte später von Chow, Samuel und Chevalley konstruiert werden.

Seit dieser Zeit hat die algebraische Geometrie eine stürmische Weiterentwicklung erfahren. Sie findet z. T. ihren Niederschlag in der kürzlich erschienenen umfassenden Darstellung von W. Fulton, Intersection Theory (1984). Dort wird – ohne Rückgriff auf eine lokale Theorie – ein Schnittprodukt sogleich für (rationale) Äquivalenzklassen von Zyklen definiert. Es ist daher von besonderem Interesse, die Anfänge dieser Entwicklung wieder ins Bewußtsein zu bringen, und hierfür bilden diese Selected Papers eine unschätzbare Quelle.

Münster H.-J. Nastold

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.

Jahreschroniken der DMV für 1982 und 1983

Den folgenden Chroniken für die beiden Jahre meiner Amtstätigkeit als Vorsitzender des Präsidiums der DMV möchte ich einige Gedanken vorausschicken. Während dieser Zeit wurden an den Universitäten durch unsere Landesregierungen erhebliche Sparmaßnahmen vorgenommen, die insbesondere auf Stelleneinsparungen im Bereich der Mathematik abzielen. Zur gleichen Zeit erfährt die Informatik von Regierungsseiten eine besondere Förderung, weil man ihren Wert für die zukünftige wirtschaftliche Entwicklung unserer Gesellschaft besonders hoch einschätzt.

Die beiden Fakten zeigen an, daß es der Mathematik nicht gelungen ist, deutlich zu machen, welche Schlüsselrolle sie in der Entwicklung unserer Technik zu spielen vermag. Tatsächlich hat die Mathematik – und dazu hat auch die DMV ihren Teil beigetragen – das Ansehen einer reinen Wissenschaft, deren Nutzen nur schwer für den Außenstehenden zu erkennen ist. Es liegt nun an uns selbst, die Bedeutung der Mathematik verständlich zu machen und zu zeigen, daß es eine Angewandte Mathematik gibt, die aufgeschlossen für die Anwendungen ist und auch bereit, eine Brücke zum Verständnis mathematischer Sachverhalte für die Anwender zu bauen und die gleichwohl in Methodik und Originalität der Reinen Mathematik nicht nachsteht. Es war mein Bemühen, hier um Verständnis zu werben. Einmal bei den Mathematikern verschiedener Forschungsrichtungen selbst, zum anderen aber auch gegenüber Außenstehenden. Wir müssen in Zukunft sehr viel mehr Wert auf diese Aufgabe legen und darauf hinwirken, junge Forscher für sie zu gewinnen. Dies bedeutet natürlich nicht, daß sich die Mathematiker nun vor allem auf die Anwendungen stürzen sollen; es müssen sich jedoch genügend viele dieser Aufgabe widmen, um zum Ansehen und damit auch zur Anerkennung der Notwendigkeit einer Reinen und Angewandten Mathematik in unserer Gesellschaft beizutragen. Die praktische Auswirkung der Mathematik in den Wissenschaften, in der Technik, die Industrie und Wirtschaft wird von Außenstehenden als Rechtfertigung des breiten Umfangs und Nachdruckes für die Pflege angesehen. Auch in Zukunft werden wir uns dieser Aufgabe und den damit verbundenen Auseinandersetzungen stellen müssen; und Vertreter von Reiner und Angewandter Mathematik sollten dies, meine ich, gemeinsam tun.

Bonn, Mai 1984 H. Werner

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.

Jahreschronik der DMV für 1982

1 Ämter und Gremien

1.1 in der DMV

Vorsitzender		*H. Werner*
Schriftführer		*Wallisser*
Schatzmeister		*Grotemeyer*
Geschäftsführender Herausgeber		*Jacobs*
Präsidium	*Dold*	*Schwarz*
	Fischer	*Wallisser*
	Grotemeyer	*Walter*
	Hirzebruch	*Werner*
	Jacobs	*Witting*
	Koecher	
Gäste	*Barner* (MFO)	
	Winkler (Fachbereichskonferenz)	
	Christian (ÖMG)	

1.2 in den anderen Organisationen

Von Seiten der DMV nahmen die Herren *Werner, Barner* und *Pallaschke* an der General Assembly der IMU teil, die im August 1982 in Warschau getagt hat.

Herr *Dold* vertritt die DMV im EMC (European Mathematical Council).

Kommission für die IMUK: *Barner, Baurmann, Bergmann, Böddecker, Griesel, Grotemeyer, Kunle, Pickert, Schupp, Steiner, Vollrath.*

2 Jahrestagung und Mitgliederversammlung 1982

2.1 Die Jahrestagung fand vom 20.–24. September 1982 in Bayreuth statt. Es wurden folgende Übersichtsvorträge gehalten:

J. Neubüser, Aachen	Kristallographische Gruppen
H. Kraft, Basel	Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie

M. F. Vigneras, Montrouge	Correspondences between automorphic representations
A. Pietsch, Jena	Operatorenideale
St. Hildebrandt, Bonn	Partielle Differentialgleichungen und Differentialgeometrie
J. Flum, Freiburg	Modelltheoretische Äquivalenz
K. Johannson, Bielefeld	Topologie und Geometrie von 3-Mannigfaltigkeiten
C. J. Scriba, Hamburg	Die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung von Schülern und Lehrern
R. J. Beran, Berkeley	Bootstrap Methods in Statistics
R. Schaback Göttingen	Numerische Approximation

Zum Gedenken an C. L. Siegel fanden im Anschluß an die Eröffnung folgende Vorträge statt:

Th. Schneider, Freiburg	Das Werk C. L. Siegels in der Zahlentheorie
H. Klingen, Freiburg	Das Werk C. L. Siegels in der Funktionentheorie
H. Rüssmann, Mainz	Kleine Nenner in der Himmelsmechanik

Es fand ein Kolloquium zu Fragen der „Lehrerausbildung" mit den Herren M. Otte, M. Jeger und P. Müller statt, sowie eine Sitzung zum Thema „Der Mathematiker in Wirtschaft und Industrie" mit Vorträgen der Herren D. Schulte (Krupp, Essen) und A. Blaser (IBM, Heidelberg).

2.2 Die Mitglieder-Versammlung fand am 23. September 1982 in Bayreuth statt. Herr *Wallisser* wurde als Schriftführer wiedergewählt. Für die Nachfolge von Herrn *Koecher* wurde Herr *Pareigis* und für die Nachfolge von Herrn *Walter* wurde Herr *Bierstedt* gewählt.

3 Aktivitäten der DMV

3.1 DMV-Seminare. Die DMV veranstaltete fünf DMV-Seminare auf Schloß Mickeln bei Düsseldorf. Die Teilnehmer konnten finanzielle Unterstützung durch die Stiftung Volkswagenwerk erhalten.

28. 3. – 2. 4. „Spektraltheorie gewöhnlicher Differentialoperatoren, Hamiltonsche Gleichungen"
Leitung: J. Moser (Zürich), E. Trubowitz (New York), E. Zehnder (Bochum)

20. 6. – 25. 6. „Gruppen und Graphen"
Leitung: B. Fischer (Bielefeld), D. Goldschmidt (Berkeley)

29. 8. – 3. 9. „Robust Statistics"
Leitung: R. J. Beran (Berkeley), H. Rieder (Bayreuth)
5. 9. – 10. 9. „Connectedness in Algebraic Geometry"
Leitung: A. Van de Ven (Leiden), R. Lazarsfeld (Princeton)
26. 9. – 1. 10. „Riemannian Geometry"
Leitung: V. P. Gromov (Paris), H. Karcher (Bonn)

Es liegen bisher zwei Ausarbeitungen der Vorträge vor, die im Birkhäuser-Verlag erschienen sind. Mitglieder erhalten bei Bestellung über die DMV 25% Rabatt.

3.2 Zur Erkundung der Berufssituation für Dipl.-Mathematiker wurden Kontakte mit der Zentralstelle für Arbeitsvermittlung (ZAV) in Frankfurt unterhalten. Der Bericht der ZAV wurde zum großen Teil in den Mitteilungen abgedruckt.

Es scheint, daß die Industrie neuerdings oft Dipl.-Ingenieure gegenüber Dipl.-Mathematikern vorzieht. Die DMV wird das Problem im Auge behalten und vorsichtige Recherchen über die Situation der Mathematiker in der Industrie und deren Wünsche anstellen.

Um die Kontakte zwischen Universität und Industrie auf individueller Ebene zu verbessern, hat das Präsidium einen Mathematiker aus der Industrie gebeten, eine Koordinatorfunktion zu übernehmen.

Herr Dr. *Schwarz* (IBM, Bonn), mit dem die DMV wegen der Integration der Industriemathematiker seit längerem Kontakt hatte, hat diese Aufgabe übernommen.

Die Geschäftsstelle der DMV verschickte auf Anfragen ca. 500x den Aufsatz von Herrn *E. Schwarz* „Die berufliche Situation des Mathematikers in Industrie und Wirtschaft" sowie die Arbeitsmarktbeobachtungen der ZAV.

3.3 Aufbaustudium. Das Präsidium der DMV hat eine Stellungnahme zur Einrichtung eines Aufbaustudiums in Mathematik erarbeitet, die in den Mitteilungen Heft 3/Juli 1982 abgedruckt wurde.

3.4 Mathematisch orientierte Unterrichtsfächer in der gymnasialen Oberstufe. Ein Teil der Informatiker strebt an, die Informatik als eigenständiges Fach in der Schule einzuführen. Das Präsidium ist der Meinung, daß das Fach Informatik im Rahmen des Mathematikunterrichts gelehrt werden sollte. Es wird eine Kommission eingerichtet, die aus den Herren *Fischer, Werner, Bergmann, Oberschelp* besteht, und die eine Ergänzung der Denkschrift der DMV „Zum Mathematikunterricht an Gymnasien" vornehmen soll. Es wird Kontakt mit dem Präsidenten der DPG (Deutsche Physikalische Gesellschaft) Herrn *Rollnick* (Bonn) aufgenommen, um eine Übereinstimmung in dieser Frage mit den Physikern zu erreichen.

Auf Initiative der MNU wurde im Jahr 1981 der Aufruf „Rettet die mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung" verfaßt und mit folgenden Vereinigungen abgestimmt: DMV, DPG (Deutsche Physikalische Gesellschaft), GDCh (Gesellschaft Deutscher Chemiker), MNU (Deutscher Verein zur Förderung des mathematisch und naturwissenschaftlichen Unterrichts), VD (Verband Deutscher Biologen). Der Aufruf wurde an die Mitglieder der DMV mit Heft 2/April 1982 der Mitteilungen versandt.

3.5 Es wurde eine Kommission aus den Herren *Dold, Witting, Grotemeyer* und *Fischer* gebildet, die ein Verfahren erarbeiten soll, wie im Fall von Ehrungen vorgegangen werden soll. Für den Wolf-Preis wurden die Herren *S. S. Chern* und *A. Weil* vorgeschlagen.

3.6 Es wurden Kontakte mit Herrn *Scharlau* bezüglich der Veröffentlichung historischer Vorlesungen durch die DMV aufgenommen.

4 Organisation

4.1 In den Mitteilungen wurden Notizen über die Neuerscheinung von Büchern aufgenommen. Die Ankündigungen haben einen Umfang von ca. 10 Schreibmaschinenzeilen. Pro Ankündigung wurde ein Preis von DM 50,– berechnet. Das Angebot wurde von 6 Verlagen angenommen.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.

Jahreschronik der DMV für 1983

1 Ämter und Gremien

1.1 in der DMV

Vorsitzender		*H. Werner*
Schriftführer		*Wallisser*
Schatzmeister		*Grotemeyer*
Geschäftsführender Herausgeber		*Jacobs*
Präsidium	*Bierstedt*	*Pareigis*
	Dold	*Schwarz*
	Fischer	*Wallisser*
	Grotemeyer	*Werner*
	Hirzebruch	*Witting*
	Jacobs	
Gäste	*Barner* (MFO)	
	Winkler (Fachbereichskonferenz)	
	Christian (ÖMG)	

1.2 in den anderen Organisationen

Herr *Werner* vertritt die DMV bei der MNU-Tagung in Tübingen.

Herr *Dold* vertritt die DMV im EMC (European Mathematical Council).

Fachgutachter für die DFG: *Dold* und *Grauert* vertreten die Reine Mathematik und *Kirchgässner* und *Bulirsch* die Angewandte Mathematik.

2 Jahrestagung und Mitgliederversammlung 1983

2.1 Die Jahrestagung fand vom 19.–23. September 1983 in Köln statt.
Es wurden folgende Übersichtsvorträge gehalten:

J.-P. Bourguignon, Paris	Analytische Probleme geometrischen Ursprungs: Beispiele aus der Yang-Mills Theorie
V. Bangert, Freiburg	Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten
E. Vieweg, z. Z. Paris	Zur Klassifikation komplexer projektiver Mannigfaltigkeiten

R. Tijdeman, Leiden	Exponential diophantine equations and recurrence sequences
G. Faltings, Wuppertal	Die Vermutung von Mordell
D. Gaier, Gießen	Approximation im Komplexen
D. Vogt, Wuppertal	Splittingbedingungen für exakte Sequenzen von Fréchetäumen und ihre Anwendung in der Analysis
S. Koppelberg, Berlin	Booleschwertige Logik
D. Jungnickel, Gießen	Lateinische Quadrate, ihre Geometrien und ihre Gruppen
P. Henrich, Zürich	Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei Systemen von formalen Potenzreihen
S. D. Chatterji, Lausanne	Ein Teilfolgenprinzip in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Es fand ein Kolloquium mit den Herren W. Oberschelp und L. H. Klingen über „Fragen der Informatik im Mathematikunterricht an Gymnasien" statt, sowie eine Veranstaltung für „Mathematiker in der Wirtschaft" mit den Herren U. Pallaske (Bayer AG, Leverkusen) und H. Schüttler (GEI, Aachen).

2.2 Die Mitglieder-Versammlung fand am 22. September 1983 in Köln statt.

Herr *Grotemeyer* wird als Schatzmeister wiedergewählt. Herr *Hirzebruch* wird wiedergewählt.

Für die Nachfolge von Herrn *Witting* wird Herr *Krengel*, zum neuen Vorsitzenden der DMV wird vom Präsidium Herr *Dold* für das Amtsjahr 1984 gewähtl.

3 Aktivitäten der DMV

3.1 DMV-Seminare. Die DMV veranstaltete vier DMV-Seminare in Schloß Mickeln in Düsseldorf-Himmelgeist.

13. 3. – 18. 3. „Mathematik und Physik periodenverdoppelnder dynamischer Systeme"
Leitung: P. Collet (Palaiseau), J. P. Eckmann (Genft)

28. 8. – 2. 9. „Analytische Methoden für diophantische Probleme"
Leitung: W. M. Schmidt (Colorado), H. P. Schlickewei (Ulm)

4. 9. – 9. 9. „Approximationstheorie, numerische Verfahren und Anwendungen"
Leitung: D. Braess (Bochum), K. H. Hoffmann (Augsburg), R. Schaback (Göttingen)

25. 9. – 30. 9. „Systems in Random Environment"
Leitung: L. Arnold (Bremen), G. Papanicolaou (New York)

Die Teilnehmer konnten durch die Stiftung Volkswagenwerk finanzielle Unterstützung erhalten. Da das Programm für die DMV-Seminare 1984 ausläuft, wird die DMV bei der VW-Stiftung einen Verlängerungsantrag für 3 Jahre stellen.

Im Birkhäuser-Verlag sind inzwischen 3 Ausarbeitungen der DMV-Seminare erschienen, die von DMV-Mitgliedern zum ermäßigten Preis bezogen werden können.

3.2 Zur Berufslage der Diplom-Mathematiker wurde ein Auszug aus der AIS-Information Nr. 2 (Zentralstelle f. Arbeitsvermittlung – Juni 1983) in den Mitteilungen veröffentlicht. Dort wurde auf eine im Gang befindliche Umschichtung des Studieninteresses von der Mathematik hin zur Informatik hingewiesen.

3.3 Informatik an deutschen Gymnasien. Das Präsidium der DMV erarbeitete eine „Stellungnahme zum Informatikunterricht an Gymnasien", die den Mitgliedern der DMV mit Heft 2/April 1983 der Mitteilungen zugesandt wurde.
Herr *Werner* brachte die Stellungnahme bei der MNU-Tagung in Tübingen zur Kenntnis.
Die Geschäftsstelle versandte außerdem die Stellungnahme an: Kultusminister, Math. Institute und Fachbereiche, Studienseminare, Fachhochschulen, Päd. Hochschulen.
Herr *Fischer* berichtete auf der Mitglieder-Versammlung in Köln über die Reaktionen, die auf die Herausgabe der Stellungnahme eingegangen sind.
Herr *Oberschelp* soll seine zur Stellungnahme vorgelegten Unterrichtseinheiten in Informatik ausarbeiten, als Beispiele, wie wesentliche Inhalte der Informatik in organischer Weise in den Unterricht eingeführt werden können.
Diese Ausarbeitungen sollen beim Teubner-Verlag erscheinen, wobei die DMV als Mitherausgeber auftritt.

3.4 Herr *Scharlau* macht der DMV den Vorschlag, die Veröffentlichung klassischer Vorlesungen mit dem Titel „Dokumente zur Geschichte der Mathematik" herauszubringen. Der Vieweg-Verlag hat sich angeboten, die Veröffentlichung der Reihe zu übernehmen. Bei der DFG und der VW-Stiftung soll ein Kostenzuschuß beantragt werden.
Der erste Band der geplanten Vorlesungsreihe mit einer Vorlesung von R. Dedekind über Differential- und Integralrechnung ist leider bis zur Tagung nicht fertig geworden. Der Vieweg-Verlag plant, diesen Band zunächst mit einer Auflage von 500 Exemplaren herauszugeben, wobei an einen Ladenpreis von DM 34,– (für DMV-Mitglieder DM 26,–) gedacht wird.

3.5 Aufbaustudium. Herr *Winkler* (KMathF) berichtet, daß sich einige Fachbereiche skeptisch über die Einrichtung von Aufbaustudiengängen in Mathematik geäußert haben. Es wird befürchtet, daß der Diplomstudiengang eingeengt wird; zum anderen existieren an manchen Hochschulen bereits Promotionsstudiengänge, die durch die Einführung eines Aufbaustudiums in eine Studienordnung gepreßt würden.

3.6 Die Kanadische Mathematische Gesellschaft ist an die DMV herangetreten und hat den Abschluß eines Reziprozitätsabkommens vorgeschlagen. Die DMV ist dazu bereit.

4 Organisation

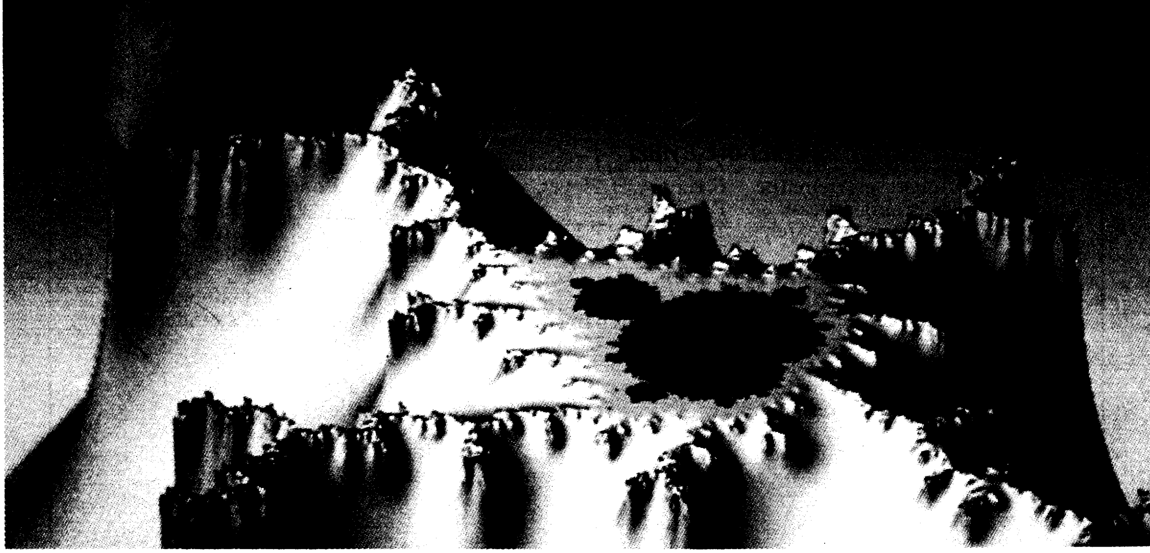
4.1 In einem Gespräch mit Vertretern der Verlage Springer, Teubner, Vieweg wurde folgende Übereinkunft bezüglich der Buchankündigungen in den Mitteilungen getroffen. Es sollen in Zukunft nur noch die bibliographischen Daten der Neuerscheinungen der Verlage im vergangenen Vierteljahr, nach Sektionen geordnet, aufgeführt werden. Die DMV bietet den Verlagen an, kostenlos diese Informationen an die Mitglieder weiterzugeben.

4.2 Die Geschäftsstelle erhielt zahlreiche Anfragen zur Ausbildung und Berufssituation von Diplom-Mathematikern, vor allem von Lehrern und Schülern, und verschickte daraufhin den Aufsatz von Herrn *E. Schwarz* „Die berufliche Situation des Mathematikers in Industrie und Wirtschaft" sowie die „Arbeitsmarktbeobachtungen der ZAV".

H.-O. Peitgen, P.H. Richter

The Beauty of Fractals

Images of Complex Dynamical Systems



This book represents an unusual attempt to publicize the field of Complex Dynamics. The editors report on this rapidly developing discipline in terms of computer graphical pictures that resulted from their own studies of iterated maps. Such maps arise, e.g., in the problem of root finding, or in the renormalization group theory of phase transitions. They define highly complex boundaries between various domains of attraction, also known as Julia sets for rational maps of the complex plane. Detailed investigation into the changes of these boundaries under parameter variations reveals that Mandelbrot's set embodies an universal principle of their morphology.

Order form

Please order from your bookseller or
Springer-Verlag, Heidelberger Platz 3, D-1000 Berlin 33

No. copies

______________________________ ISBN 3-540-__________

______________________________ ISBN 3-540-__________

______________________________ ISBN 3-540-__________

☐ I enclose my cheque for a total of £ ..../DM..........................
☐ Please invoice me
☐ Please charge my credit card ☐ Access ☐ Visa

Card Number ______________________ Expiry date: ______________

Name/Address ______________________________

____

____

Date/Signature ______________________________

Springer Mathematics: A Brief Historical Background

Springer
Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo

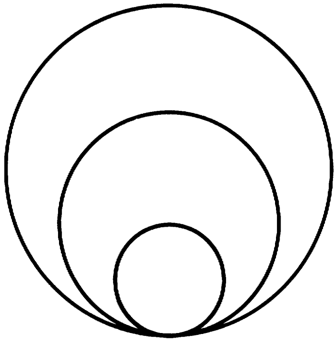
The mathematical tradition of Springer-Verlag, when measured against the history of the publishing house, which was founded in 1842 in Berlin by Julius Springer, does not seem so very old. The upsurge of mathematical literature in its publishing programme during the opening decades of the 20th century was the outcome of the many personal contacts between the faculty of Mathematics at Göttingen University and Ferdinand Springer, one of the owners of the firm and grandson of the founder.

Tradition and quality remain corner stones of Springer-Verlag's present book and journal publishing programme in mathematics and the oldest series which has existed in its original form since 1921 is **Grundlehren der mathematischen Wissenschaften** and this was followed in 1932 by **Ergebnisse der Mathematik** (now into its 3rd sequence): names, which in spite of their teutonic ring, have entered the everyday parlance of mathematicians worldwide. Today, Springer-Verlag, world leader in the field of mathematical sciences publishes more than 200, the majority in English, new titles each year.

The journal publishing programme which started with **Mathematische Zeitschrift,** founded in 1918, continues and there has been a dramatic increase in the number of mathematics journals, today some 20 in number, all of which serve as primary vehicles for scientific research.

During the coming months, it is our intention to detail and describe both established, new and forthcoming series, and to highlight on a regular basis titles from our on-going publishing programme.

Neu



Horst Herrlich
Einführung in die Topologie

Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 1.
1986, 224 Seiten, DM 36.00, ISBN 3-88538-101-X.

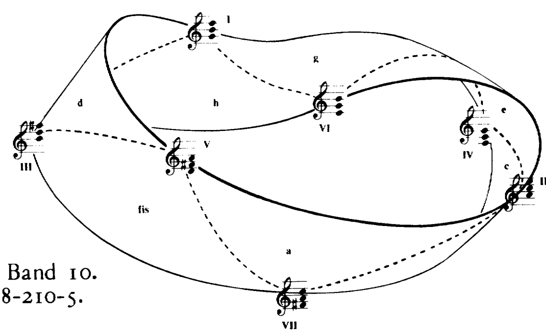
Das vorliegende Buch ist konzipiert als ein Kurs zum Selbststudium der Topologie, versehen mit zahlreichen Studierhinweisen, Beispielen und Aufgaben. Es eignet sich jedoch auch als Grundlage oder Begleitmaterial für eine Vorlesung oder ein Seminar.

Inhalt des Kurses ist die elementare Theorie metrischer Räume, die in ihren Grundzügen vollständig dargestellt wird. Anhand von kurzen, kapitelweisen Zusammenstellungen von Definitionen und Ergebnissen wird dem Leser neben Übungsaufgaben eine zusätzliche Lernhilfe zur Verfügung gestellt. Von besonderem Interesse für den Fachmann ist eine in Inhalt und Ausführlichkeit einmalige historische Darstellung der Enstehung der Topologie.

Die natürliche Fortsetzung des Themas in allgemeinerer Hinsicht ist die Theorie der topologischen und uniformen Räume, die hier nur angedeutet, in sich anschließenden Büchern des Autors jedoch ausführlich betrachtet wird.

In Vorbereitung: Band 2: H. Herrlich, Topologie I; Band 3: H. Herrlich, Topologie II; Band 4: B. Huppert, Angewandte lineare Algebra.

Guerino Mazzola
Gruppen und Kategorien in der Musik



Research and Exposition in Mathematics, Band 10.
1985, 214 Seiten, DM 48.00, ISBN 3-88538-210-5.

Die mathematische Beschreibung musikalischer Sachverhalte ist eine Tradition europäischen Denkens seit der griechischen Antike. Die dazu verwandten formalen Mittel spiegeln jeweils den zeitgenössischen mathematischen Wissensstand.

Heute lassen sich fundamentale Mechanismen der musikalischen Komposition und Interpretation durch Begriffe beschreiben, die dem Paradigma der Mannigfaltigkeit entlehnt sind. Diese Idee der Verknüpfung lokaler Raumteile zu einem globalen Gebilde stellt eine Formalisierung der Vielfalt musikalischer Bedeutung dar durch die Freiheit, das Ganze in verschiedener Weise aus Teilräumen zusammenzufügen. Während Gruppen affiner Transformationen hierzu die Verknüpfungsdaten liefern, führt die Frage nach der Identität eines Musikwerkes über das Yoneda-Lemma zur kategorientheoretischen Klassifikationsproblematik.

Der vorliegende theoretische Ansatz stellt insbesondere Modulationsmodelle bereit, die von der Harmonielehre und der Kompositionspraxis gestützt werden. Die Analyse des Allegro-Satzes von Beethovens Hammerklavier-Sonate und die darauf aufbauende Konstruktion eines Sonaten-Hauptsatzes sind prägnante Anwendungen dieser mathematischen Modellbildung.

Heldermann Verlag, Nassauische Str. 26, D-1000 Berlin 31, Tel. (030) 87 04 46.
Direktbestellung bei Verlag möglich. Obige Preise enthalten alle Versandkosten.