89. Band Heft 1
ausgegeben am 23. 1. 1987

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1987

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 88/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 89 01-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of $ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 $ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1987 – Verlagsnummer 2902/1
Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 89, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Barner, F. Flohr: Otto Haupt zum 100. Geburtstag
E. Börger: D. Rödding: Ein Nachruf
D. Braess, R. Schaback: Helmut Werner
H. Bühlmann: Entwicklungstendenzen in der Risikotheorie
P. L. Butzer, W. Splettstößer, R. L. Stens: The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis
W. Dickmeis, R. J. Nessel, E. van Wickeren: Quantitative Extensions of the Uniform Boundedness Principle
F. W. Gehring: Uniform Domains and the Ubiquitous Quasidisk
W. K. Hayman: Schlichte Funktionen nach de Branges
R. Heath-Brown: Differences between Consecutive Primes
J. Jost: Das Existenzproblem für Minimalflächen
M. Kneser: Max Deuring 9. 12. 1907 – 20. 12. 1984
R. Kühnau: Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve
H. Triebel: Einige neuere Entwicklungen in der Theorie der Funktionenräume

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 89 (1987) 1–32
© 1987 B. G. Teubner, Stuttgart

Iterationsverfahren für nichtsymmetrische Gleichungssysteme und Approximationsmethoden im Komplexen

M. Eiermann[1,2], R. S. Varga[1,2], Kent, Ohio, W. Niethammer[1], Karlsruhe

Lineare Gleichungssysteme, die heute in den verschiedenen Anwendungen auftreten, sind häufig groß – 10^5 und mehr Unbekannte kommen oft vor –, und die Koeffizientenmatrizen sind dünn besetzt. Die iterative Lösung solcher Systeme ist ein immer wieder aktuelles Problem der Numerik. Verfahren für Systeme mit *symmetrischer* Koeffizientenmatrix, wie sie beispielsweise bei der Diskretisierung elliptischer Randwertaufgaben entstehen, sind schon früher gründlich studiert worden; die entsprechenden Ergebnisse finden sich in den Monographien von Varga [53], Young [57] und Hageman-Young [23].

In den letzten Jahren werden zunehmend *nichtsymmetrische* lineare Gleichungssysteme betrachtet. Um für solche Systeme Iterationsverfahren zu konstruieren und zu analysieren, werden häufig Konzepte der *Summierungstheorie*, der *Theorie der konformen Abbildung* und der *komplexen Approximationstheorie* herangezogen; einige Schlagworte in diesem Zusammenhang sind *maximale Konvergenz von Polynomen, Interpolation in gleichverteilten Knoten* und *Faber-Entwicklungen*. Ziel dieser Übersicht ist es, diese Verbindung zwischen komplexer Analysis einerseits und numerischer linearer Algebra andererseits aufzuzeigen und dabei den Nutzen funktionentheoretischer Methoden für die Untersuchung iterativer Verfahren herauszustellen.

1 Problemstellung und Übersicht

Gegeben seien eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbf{C}^{n,n}$ und ein lineares Gleichungssystem $Ax = \mathbf{b}$. Mit Hilfe einer Zerlegung der Koeffizientenmatrix $A = M - N$, M nichtsingulär, kann man dieses System auch in der äquivalenten Form

(1.1) $\quad Mx = Nx + \mathbf{b} \quad \text{oder} \quad x = Tx + \mathbf{c},$

$T := M^{-1}N = I - M^{-1}A$ und $\mathbf{c} := M^{-1}\mathbf{b}$, schreiben. Die Fixpunktgestalt von (1.1) führt in natürlicher Weise auf das Iterationsverfahren

(1.2) $\quad x_0 \in \mathbf{C}^n; \quad Mx_m := Nx_{m-1} + \mathbf{b} \quad \text{oder} \quad x_m := Tx_{m-1} + \mathbf{c} \quad (m \geqslant 1),$

Die Arbeit der Autoren wurde durch Zuschüsse des Air Force Office of Scientific Research (1) und der Alexander von Humboldt-Stiftung (2) gefördert.

das oft *Verfahren der sukzessiven Approximation* genannt wird (vgl. Faddejew-Faddejewa [13, S. 222]).

Jede Zerlegung $A = M - N$ erzeugt auf diese Weise ein Iterationsverfahren; sinnvollerweise wird man aber verlangen, daß M einfach zu invertieren ist, oder daß man das System (1.2) leicht nach $\mathbf{x}_m$ auflösen kann. Ist $A = D - L - R$ die *Standardzerlegung* von A, d. h. D ist eine Diagonalmatrix, L eine echte untere und R eine echte obere Dreiecksmatrix, so führt die Zerlegung $M = D$ zum *Gesamtschritt-* oder *Jacobi-Verfahren*, $M = D - L$ zum *Einzelschritt-* oder *Gauß-Seidel-Verfahren* und $M = \omega^{-1}D - L$ $(\omega \neq 0)$ zum Verfahren der *Successive-Over-Relaxation* (SOR-Verfahren). Weitere Zerlegungen und die zugehörigen Iterationsverfahren sind z. B. bei Varga [53] beschrieben.

Ist $\mathbf{x} := (I - T)^{-1}\mathbf{c}$ die eindeutig bestimmte Lösung von (1.1), so gilt für den Fehlervektor $\mathbf{e}_m := \mathbf{x} - \mathbf{x}_m$

$$(1.3) \qquad \mathbf{e}_m = T^m \mathbf{e}_0 \quad (m \geqslant 0).$$

Sind $\tau_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ die Eigenwerte von T, dann bezeichnen wir mit $\sigma(T) := \{\tau_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ das *Spektrum von* T und mit $\rho(T) := \max\{|\tau| : \tau \in \sigma(T)\}$ den *Spektralradius von* T. Aus (1.3) folgt, daß die Iteration (1.2) genau dann für jeden Startvektor $\mathbf{x}_0$ gegen die Lösung $\mathbf{x}$ konvergiert, wenn $\rho(T) < 1$ erfüllt ist. Außerdem gilt für jede Norm in $\mathbf{C}^n$

$$(1.4) \qquad \varlimsup_{m \to \infty} \sup_{\mathbf{e}_0 \neq 0} \left[\frac{\|\mathbf{e}_m\|}{\|\mathbf{e}_0\|}\right]^{1/m} = \rho(T)$$

(vgl. Varga [53, S. 67]); wir bezeichnen deshalb $\rho(T)$ als *asymptotischen Konvergenzfaktor* der Vektorfolge $\{\mathbf{x}_m\}_{m \geqslant 0}$, die durch (1.2) definiert ist. Ein weiteres häufig verwendetes Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration (1.2) ist, falls $\rho(T) < 1$, die *asymptotische Konvergenzrate*, die durch

$$(1.5) \qquad R(T) := -\ln \rho(T)$$

erklärt ist ([53, S. 67]). Grob gesagt muß man durchschnittlich $R(T)^{-1}$ Schritte der Iteration (1.2) durchführen, damit die Norm des Ausgangsfehlers $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ um den Faktor 1/e reduziert wird.

Um nun in Fällen, in denen die Folge $\{\mathbf{x}_m\}_{m \geqslant 0}$ von (1.2) divergiert, Konvergenz zu erzwingen, oder um die Konvergenz dieser Folge zu beschleunigen, bietet es sich an – wie Forsythe [14] und Varga [53, S. 133] bemerkten – Methoden der *Summierungs-* oder *Limitierungstheorie* einzusetzen. Wir betrachten dazu *Summierungsverfahren*, die durch eine unendliche untere Dreiecksmatrix definiert sind (vgl. Zeller-Beekmann [59, S. 5]); diese Klasse ist für unsere Zwecke einerseits genügend allgemein, andererseits ist sie unter konstruktiven Gesichtspunkten besonders nützlich.

Dazu bilden wir mit Hilfe der Matrix

$$(1.6) \qquad P = \begin{bmatrix} \pi_{0,0} & & & 0 \\ \pi_{1,0} & \pi_{1,1} & & \\ \pi_{2,0} & \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \pi_{m,j} \in \mathbf{C} \quad (m \geqslant 0, 0 \leqslant j \leqslant m),$$

und der Folge $\{x_m\}_{m \geq 0}$ von (1.2) die Vektoren

$$(1.7) \quad y_m := \sum_{j=0}^{m} \pi_{m,j} x_j \quad (m \geqslant 0);$$

y_m kann also als Mittel der Iterierten $x_0, \ldots, x_m$ mit eventuell komplexen Koeffizienten $\pi_{m,j}$ aufgefaßt werden.

Falls der Startvektor x_0 in (1.2) gleich der Lösung x von (1.1) ist, so gilt $x_m = x$ $(m \geqslant 0)$. In diesem Fall erwarten wir $y_m = x$ für alle $m \geqslant 0$. Für die *Transformationsmatrix* P bedeutet dies, daß ihre Zeilensummen gleich 1 sind:

$$(1.8) \quad \sum_{j=0}^{m} \pi_{m,j} = 1 \quad (m \geqslant 0).$$

Der Fehler $\tilde{e}_m := x - y_m$ der transformierten Folge erfüllt

$$\tilde{e}_m = \sum_{j=0}^{m} \pi_{m,j} x - \sum_{j=0}^{m} \pi_{m,j} x_j = \sum_{j=0}^{m} \pi_{m,j} e_j;$$

d. h. wir erhalten aus (1.3)

$$(1.9) \quad \tilde{e}_m = \left(\sum_{j=0}^{m} \pi_{m,j} T^j \right) e_0 = p_m(T) e_0 \quad (m \geqslant 0)$$

mit den Polynomen

$$(1.10) \quad p_m(z) := \sum_{j=0}^{m} \pi_{m,j} z^j \quad (m \geqslant 0).$$

Die Matrix P definiert also eine Folge $\{p_m\}_{m \geq 0}$ von Polynomen mit komplexen Koeffizienten und den Eigenschaften grad $(p_m) \leqslant m$ sowie wegen (1.8)

$$(1.11) \quad p_m(1) = 1 \quad (m \geqslant 0).$$

Unsere Aufgabe ist es demnach, die Matrix P, d. h. die Polynomfolge $\{p_m\}_{m \geq 0}$, so zu wählen, daß die Vektoren y_m möglichst schnell gegen die Lösung x von (1.1) – oder äquivalent, die Fehler $\tilde{e}_m$ möglichst schnell gegen $\mathbf{0}$ – streben.

Weil bei der Konstruktion der Vektoren y_m zuerst nach (1.2) iteriert und anschließend nach (1.7) rein algebraisch eine Linearkombination der Iterierten gebildet wird, nennt Varga [52] ein Verfahren (1.7) eine *semiiterative Methode* in bezug auf die Iteration (1.2), Forsythe [14] spricht von *linear acceleration*; wegen (1.9) wird häufig auch die Bezeichnung *polynomiale Konvergenzbeschleunigung* benutzt (siehe Young [57], Hageman-Young [23] u. a.).

Für symmetrische positiv definite Matrizen sind solche polynomialen Methoden vielfach untersucht worden; die verschiedenen Ansätze sind z. B. bei Varga [53, S. 159] und Householder [25, S. 114] beschrieben. Householder unterscheidet zwischen „Methods of Projection" (vgl. [25, § 4.2]) und „Norm-Reducing Methods" (vgl. [25, § 4.3]). Projektionsmethoden – hier ordnen sich beispielsweise das Verfahren der konjugierten Gradienten (vgl. [24]) und die Lanczos-Iteration (vgl. [29]) ein – werden in den letzten Jahren zunehmend auch zur Lösung nichtsymmetrischer Gleichungssysteme herangezogen (vgl. Saad-

Schultz [46]; dort werden einige der wichtigsten Arbeiten zu diesem Problemkreis zitiert). Wir werden uns hier ausschließlich mit der Klasse der „Norm-Reducing Methods“ beschäftigen; Householder weist im Zusammenhang mit diesen Verfahren darauf hin, daß für den Fall nichtreeller Eigenwerte von T „no theory has been developed“. Über Fortschritte in dieser Richtung soll hier berichtet werden.

Wir beschreiben nun kurz ein Beispiel, das von verschiedenen Autoren ebenfalls als „Modellproblem“ für iterative Verfahren zur Lösung nichtsymmetrischer Gleichungssysteme verwendet wurde (vgl. etwa Hageman-Young [23, Chapter 12.6] oder Saad [45]). Auch in den folgenden Abschnitten werden wir uns häufig auf dieses spezielle Beispiel beziehen:

Beispiel 1.1. Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$(1.12)\quad \begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) + \gamma u_x(x, y) &= f(x, y), \quad &(x, y) \in S,\\ u(x, y) &= 0, &(x, y) \in \partial S, \end{aligned}$$

im Einheitsquadrat $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$ mit dem Rand ∂S. Hier bezeichnen γ eine reelle Konstante und $f : S \cup \partial S \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Man kann (1.12) als einfachen Prototyp einer Konvektions-Diffusionsgleichung ansehen: γ entspricht dann der Reynoldszahl. Diskretisiert man dieses Problem unter Verwendung zentraler Differenzen mit der Schrittweite $h = 1/(N + 1)$ in beiden Koordinatenrichtungen, so erhält man ein lineares Gleichungssystem $Ax = \mathbf{b}$, dessen Koeffizientenmatrix $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ mit $n := N^2$ (für kleines h) sehr groß, aber dünn besetzt ist.

Dieses Problem ist für Testzwecke deshalb gut geeignet, weil man die Eigenwerte des Gesamtschritt- oder Jacobi-Operators $T := I - D^{-1}A$ explizit kennt; es gilt nämlich (vgl. Young-Jea [58]):

$$\sigma(T) := \{\cos(\pi j/(N + 1))/2 + i\sqrt{\lambda^2 - 1}\cos(\pi k/(N + 1))/2 : 1 \leqslant j, k \leqslant N\}$$

mit $\lambda := \gamma h/2$. Für $\lambda^2 > 1$ hat T komplexe Eigenwerte, die alle in dem Rechteck

$$(1.13)\quad R_{\alpha,\beta} := \{z \in \mathbf{C} : |\operatorname{Re} z| \leqslant \alpha, |\operatorname{Im} z| \leqslant \beta\} \quad \text{mit}$$

$$(1.14)\quad \alpha := \cos(\pi/(N + 1))/2 < 1/2, \qquad \beta := \sqrt{\lambda^2 - 1}\cos(\pi/(N + 1))/2$$

enthalten sind; α ist demnach unabhängig von λ, während β mit λ wächst. Für die Schrittweite $h = 0.1$ erhält man $\alpha = 0.4755$; Tabelle 1 am Ende des dritten Abschnitts zeigt β sowie den Spektralradius $\rho(T) = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ für einige Werte von λ. Offensichtlich divergiert das Gesamtschrittverfahren für betragsgroße λ; so ergibt sich für $\lambda = 250$ beispielsweise $\rho(T) = 118.9$.

Ist nun eine semiiterative Methode durch eine Matrix P gemäß (1.7) definiert, so gilt nach (1.9) für den Fehler $\tilde{e}_m = p_m(T)e_0$. Kennen wir nun wie im Beispiel 1.1 die Eigenwerte von T, so könnten wir für p_m ein Vielfaches des charakteristischen Polynoms von T wählen und hätten $\tilde{e}_m = \mathbf{0}$ ($m \geqslant n$) nach dem Satz von Cayley-Hamilton. Diese „triviale“ Lösung verbietet sich in der Praxis aus zwei Gründen: Einmal wird man in der Regel die Eigenwerte von T nicht kennen, zum anderen erwartet man bei Systemen mit großer Ordnung n einen ausreichend kleinen Fehler schon nach sehr viel weniger als n Schritten.

Dagegen ist es realistisch anzunehmen, daß man einen kompakten Bereich $\Omega \subset \mathbf{C}$ kennt, der $\sigma(T)$ enthält, wie im Beispiel 1.1 das Rechteck $R_{\alpha,\beta}$. Weil das System (1.1) $x = Tx + c$ nach Voraussetzung eindeutig lösbar ist, gilt $1 \notin \sigma(T)$, und wir können $1 \notin \Omega$ annehmen. Die Polynomfolge $\{p_m^*\}_{m \geq 0}$, deren Glieder das Minimierungsproblem

$$\min \{\max_{z \in \Omega} |p_m(z)| : p_m(1) = 1, \operatorname{grad}(p_m) \leq m\}$$

lösen, erzeugt in gewisser Weise eine optimale semiiterative Methode für unser Problem (vgl. Abschnitt 3). Diese Polynome existieren immer, sind jedoch nur bei einigen speziellen Bereichen Ω konstruktiv zugänglich.

Wir beschränken uns deshalb darauf, *asymptotisch optimale Verfahren* zu konstruieren. Dazu wird ähnlich wie in (1.4) ein *asymptotischer Konvergenzfaktor* $\kappa(\Omega, P)$ *von* Ω *bezüglich* P definiert (§ 3). Weiß man a priori, daß das Spektrum der Matrix T in Ω enthalten ist, so ist – grob gesagt – $\kappa(\Omega, P)$ eine obere Schranke für den Konvergenzfaktor $\overline{\lim}_{m \to \infty} \|\tilde{e}_m\|^{1/m}$ der Fehlerfolge (1.9) des durch P induzierten semiiterativen Verfahrens. Das Infimum von $\kappa(\Omega, P)$ über alle P nennen wir schließlich den *asymptotischen Konvergenzfaktor* $\kappa(\Omega)$ *von* Ω. Daraus kann man folgern, daß es *keine* semiiterative Methode (1.7) gibt, so daß der Konvergenzfaktor $\overline{\lim}_{m \to \infty} \|\tilde{e}_m\|^{1/m}$ für *jede* Matrix T mit $\sigma(T) \subseteq \Omega$ kleiner als $\kappa(\Omega)$ wird. Ein von P induziertes Verfahren heißt aus diesem Grund *asymptotisch optimal für* Ω, wenn $\kappa(\Omega, P) = \kappa(\Omega)$ gilt (§ 4).

Um Aussagen über solche asymptotisch optimalen Verfahren zu gewinnen, wird in § 2 zu einer gegebenen Matrix P, oder äquivalent zu einer Polynomfolge $\{p_m\}_{m \geq 0}$ eine weitere Folge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ gemäß

$$(1.15) \quad q_{m-1}(z) := (1 - p_m(z))/(1 - z)$$

eingeführt; wegen $p_m(1) = 1$ ist q_{m-1} ein Polynom vom Grad $m - 1$, das die Funktion $1/(1 - z)$ in den Nullstellen $\xi_i^{(m)}(i = 1, \ldots, m)$ von p_m interpoliert. Die Nullstellen $\xi_i^{(m)}$ $(m \geq 1; 1 \leq i \leq m)$ bilden eine unendliche *Knotenmatrix* K_P; jedes semiiterative Verfahren ist eindeutig durch $\{p_m\}_{m \geq 0}, \{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ oder durch K_P bestimmt (Lemma 2.1). Der durch (1.15) beschriebene Zusammenhang zwischen den Polynomfolgen $\{p_m\}_{m \geq 0}$ und $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ ermöglicht es uns, klassische Sätze aus der komplexen Approximationstheorie über die Konvergenz von Folgen von Interpolationspolynomen einzusetzen (vgl. z. B. Walsh [54] oder Gaier [17]), um für unser Problem geeignete Polynomfolgen $\{p_m\}_{m \geq 0}$ zu konstruieren. Für eine hinreichend allgemeine Klasse von Bereichen Ω (siehe (4.1)) läßt sich $\kappa(\Omega)$ explizit angeben (Satz 4.1); in bezug auf Ω asymptotisch optimale semiiterative Verfahren sind dadurch charakterisiert, daß die Folge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ in Ω *maximal* gegen $1/(1 - z)$ *konvergiert* (Korollar 2 zu Satz 4.1). Eine hinreichende Bedingung für asymptotische Optimalität ist, daß die Knoten von K_P *in* Ω *gleichverteilt* sind (Satz 4.2). Da es für eine kompakte Menge Ω verschiedene Systeme gleichverteilter Knoten gibt (z. B. Fejér-, Fekete-, Leja-Knoten), existiert auch eine entsprechende Anzahl von bezüglich Ω asymptotisch optimaler semiiterativer Verfahren. Dazu gehören auch Verfahren, die von *verallgemeinerten Faberpolynomen* erzeugt werden; letztere zeichnen sich dadurch aus, daß sie nicht nur asymptotisch optimal sind, sondern auch – bei einer normalen Matrix T und einigermaßen glattem Rand von Ω – schon für $m \geqslant 3$ sich fast so gut verhalten wie die oben erwähnten optimalen Verfahren (Satz 5.2). Insgesamt ergibt sich damit eine befriedigende *analytische* Lösung der Aufgabe, asymptotisch optimale semiiterative Verfahren zu konstruieren; im weiteren wird die *algorithmische* Seite dieses Problems untersucht.

Eine Berechnung der transformierten Vektoren y_m nach (1.7) erfordert die explizite Bereitstellung der Elemente $\pi_{m,j}$ der Matrix P sowie die Speicherung *aller* Iterierten x_j ($j = 0, \ldots, m$); beides ist bei großen Systemen nicht ökonomisch. Ist die Knotenmatrix K_P *spaltenkonstant*, so läßt sich y_m rekursiv aus y_{m-1} nach einer Formel berechnen, die einer *Richardson-Extrapolation* 1. *Art* entspricht (Satz 6.1). Genügen die Polynome p_m einer k-gliedrigen Rekursionsformel, so überträgt sich diese auf die y_m (Satz 6.2). Eine besonders günstige Klasse semiiterativer Verfahren – in analytischer wie algorithmischer Hinsicht – stellen die in § 7 beschriebenen *Euler-Verfahren* dar: Zu jedem $\Omega \in \mathsf{M}$ (siehe (4.1)) gibt es ein asymptotisch optimales Verfahren (Satz 7.1), es existieren günstige Rekursionsformeln (Satz 7.2) und schließlich können sie auch von verallgemeinerten Faberpolynomen erzeugt werden (Satz 7.4), so daß die vorteilhafte Fehlerabschätzung der Sätze 5.1 und 5.2 angewandt werden kann. Die einfachste Summierungsmethode aus dieser Klasse ist das *Verfahren von Euler-Knopp* (vgl. Zeller-Beekmann [59, S. 130]); hier berechnet sich (nach Satz 7.2) y_m gemäß

$$(1.16) \quad y_m = \mu T y_{m-1} + (1-\mu) y_{m-1} + \mu c.$$

Als Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme ist (1.16) oft untersucht worden; ist T der Gesamtschrittoperator, so heißt es auch *Jacobi-Over-Relaxation* (JOR-Verfahren) (vgl. etwa Petryshyn [42], Niethammer [34], [35], Albrecht-Klein [1]). Ist $x = Tx + c$ eine lineare Fredholmsche Integralgleichung 2. Art, so entspricht (1.16) dem Iterationsverfahren von Wiarda [55] und Bückner [5]. Dort findet sich auch der historisch interessante Hinweis von G. G. Lorentz, daß es sich beim Verfahren von Wiarda eigentlich um die Anwendung des Euler-Knopp-Verfahrens auf die Neumannsche Reihe von T handelt. Dies nimmt Bellmann [3] zum Anlaß, die Anwendung allgemeiner Summierungsverfahren auf diese Reihe vorzuschlagen. Er schreibt dann „whether summability methods have any practical application or not is not clear". Daß diese Frage heute positiv beantwortet werden kann, dies soll u. a. dieser Bericht zeigen.

In § 8 werden die vorausgehenden Ergebnisse auf das Beispiel 1.1 angewandt und mit numerischen Rechnungen belegt. Schließlich wird in § 9 noch auf Anwendungen dieser Methoden bei linearen Gleichungen in Banachräumen und bei nichtlinearen Gleichungssystemen eingegangen.

2 Semiiterative Methoden und Interpolationsverfahren

Wenden wir uns zunächst noch einmal der Vektorfolge $\{x_m\}_{m \geqslant 0}$ zu: Da die *Residuenvektoren* $r_m := c - (I - T)x_m$, $m \geqslant 0$, die Gleichungen $x_m = Tx_{m-1} + c = x_{m-1} + r_{m-1}$ und $r_m = T^m r_0$ erfüllen, erhalten wir

$$(2.1)\qquad x_m = x_0 + \sum_{j=0}^{m-1} r_j = x_0 + \left(\sum_{j=0}^{m-1} T^j\right) r_0 \quad (m \geqslant 1).$$

Wegen (1.1) kann man die Lösung x des gegebenen Systems in der Form $x = x_0 + (I - T)^{-1} r_0$ schreiben; ist $\rho(T) < 1$ gültig, so folgt daraus

$$(2.2)\qquad x = x_0 + (I - T)^{-1} r_0 = x_0 + \left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right) r_0 = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} r_j.$$

Ein Vergleich von (2.1) und (2.2) zeigt, daß $\{x_m\}_{m \geqslant 0}$ gerade die Partialsummenfolge der Reihe (2.2) ist; oder anders formuliert: Die Iteration (1.2) besteht im wesentlichen darin, die *Neumannsche Reihe* $(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$ durch spezielle Polynome in T, nämlich durch die Teilsummen $\left\{\sum_{j=0}^{m-1} T^j\right\}_{m \geqslant 1}$, zu approximieren. Man wird sich nun natürlich fragen, welche Art von Approximation für x man erhält, wenn man in (2.1) die Polynome $\sum_{j=0}^{m-1} z^j$, $m \geqslant 1$, durch eine andere Polynomfolge $\{q_{m-1}(z)\}_{m \geqslant 1}$ (grad $(q_{m-1}) \leqslant m - 1$) ersetzt, d. h. wenn man die Folge

$$(2.3)\qquad y_0 = x_0; \qquad y_m = x_0 + q_{m-1}(T) r_0 \qquad (m \geqslant 1)$$

betrachtet. Wir werden sehen, daß (2.3) eine semiiterative Methode in bezug auf (1.2) ist, und daß man umgekehrt jede semiiterative Methode in der Form (2.3) darstellen kann.

Führen wir die unendliche Matrix S mit ihrer Inversen S^{-1} gemäß

$$(2.4)\qquad S := \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

ein, so transformiert S die Glieder $\{x_0, r_0, r_1, \ldots\}$ der Reihe (2.2) in die Partialsummen $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ derselben Reihe. Induziert die Matrix P (1.6) nun eine semiiterative Methode, dann transformiert $Q := PS$ die Reihenglieder $\{x_0, r_0, r_1, \ldots\}$ direkt in die Folge $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$ von (1.7). Man sagt, daß Q die durch P definierte Transformation in „Reihe-Folge-Form" darstellt (vgl. [59, S. 6]). Wegen (1.8) sind alle Elemente der ersten Spalte von Q gleich 1, d. h. Q ist von der Form

$$(2.5)\qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ 1 & \gamma_{0,0} & & & & \\ 1 & \gamma_{1,0} & \gamma_{1,1} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & \gamma_{m-1,0} & \gamma_{m-1,1} & \cdots & \gamma_{m-1,m-1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \gamma_{m,j} \in \mathbf{C} \quad (m \geqslant 0, 0 \leqslant j \leqslant m).$$

Die Koeffizienten der m-ten Zeile von Q definieren das Polynom

$$(2.6)\quad q_{m-1}(z) := \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{m-1,j} z^j \quad (m \geq 1).$$

Aus (1.7) und (2.1) schließt man durch eine einfache Rechnung, daß die Transformierten y_m der gegebenen semiiterativen Methode die Beziehung (2.3) erfüllen. Ist nun umgekehrt eine Vektorfolge der Form (2.3) – mit einer Polynomfolge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$, grad $(q_{m-1}) \leq m-1$ – gegeben, so kann man sich aus den Koeffizienten dieser Polynome eine unendliche Matrix Q der Gestalt (2.5) aufbauen. Die Zeilensummen der Dreiecksmatrix $P = QS^{-1}$ sind dann sämtlich gleich 1, so daß P eine semiiterative Methode bezüglich (1.2) definiert. Wegen (2.1) sieht man sofort, daß die zugehörigen Vektoren y_m von (1.7) gerade die Ausgangsvektoren $y_m = x_0 + q_{m-1}(T)r_0$ sind. Insgesamt erhalten wir

Lemma 2.1 ([9, Theorem 1]). *Sei* P *eine Matrix gemäß* (1.6), *die der Bedingung* (1.8) *genügt, und sei* $Q := PS$ *mit* S *nach* (2.4). *Sind* $\{p_m\}_{m \geq 0}$ *die in* (1.10) *und* $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ *die in* (2.6) *definierten Polynomfolgen, so gilt:*

$$(2.7)\quad q_{m-1}(z) = (1 - p_m(z))/(1 - z) \quad (m \geq 0); \quad q_{-1}(z) := 0;$$

$$(2.8)\quad p_m(z) = 1 - (1 - z)q_{m-1}(z) \quad (m \geq 0).$$

Ist $\xi_i^{(m)}$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ *eine Nullstelle von* p_m *mit der Vielfachheit* k_i, *dann folgt für die „geometrische Funktion"* $g(z) := 1/(1-z)$

$$(2.9)\quad q_{m-1}^{(j)}(\xi_i^{(m)}) = g^{(j)}(\xi_i^{(m)}) = j!/(1 - \xi_i^{(m)})^{j+1} \quad (1 \leq i \leq \ell, 0 \leq j \leq k_i - 1),$$

d. h. q_{m-1} *ist das eindeutig bestimmte Hermitesche Interpolationspolynom, das die Funktion* g *an den Nullstellen von* p_m *interpoliert.*
Für die Näherungsvektoren y_m *der durch* P *induzierten semiiterativen Methode gilt:*

$$(2.10)\quad y_m = p_m(T)x_0 + q_{m-1}(T)c;$$

während sich die zugehörigen Fehler $\tilde{e}_m$ (*vgl.* (1.9)) *durch*

$$(2.11)\quad \tilde{e}_m = [(I - T)^{-1} - q_{m-1}(T)]r_0$$

darstellen lassen.

Nun ist klar, daß man jede semiiterative Methode auch als ein *Interpolationsverfahren* der folgenden Form interpretieren kann (vgl. [6, § 7.3]):
Sei $y_0 = x_0$ ein beliebiger Startvektor.
Für jede natürliche Zahl m
– wählen wir m komplexe Knoten $\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_m^{(m)}$; diese müssen nicht paarweise verschieden sein, aber wir fordern $\xi_i^{(m)} \neq 1$ für alle $1 \leq i \leq m$.
– Dann bestimmt man das zugehörige Hermitesche Interpolationspolynom q_{m-1} für $g(z) = 1/(1-z)$.
– Schließlich ersetzt man in (2.2) die Matrix $(I - T)^{-1}$ durch $q_{m-1}(T)$, um eine Näherung $y_m = x_0 + q_{m-1}(T)r_0$ für die Lösung $x = x_0 + (I - T)^{-1}r_0$ von (1.1) zu erhalten.

Aus Lemma 2.1 folgt, daß eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den semiiterativen Methoden (1.7) und den eben beschriebenen Interpolationsverfahren besteht. Definieren wir für eine gemäß (1.6) gegebene Transformationsmatrix P noch die *Knotenmatrix* $K_P = (\xi_i^{(m)})_{m \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant m}$, wobei wir in der m-ten Zeile die Nullstellen $\xi_i^{(m)}$ von p_m entsprechend ihrer Vielfachheit aufführen, so ist eine semiiterative Methode offenbar eindeutig durch eine der drei unendlichen Dreiecksmatrizen P, Q = PS (vgl. (2.5)) oder K_P definiert; die beiden anderen Matrizen lassen sich jeweils aus der gegebenen bestimmen.

Zum Abschluß dieses Paragraphen demonstrieren wir diese wechselseitige Beziehung zwischen semiiterativen Methoden, Summierungs- und Interpolationsverfahren an zwei klassischen Folgentransformationen.

Beispiel 2.2. Seien die Knoten $\xi_i^{(m)}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, der Matrix K_P die von z = 1 verschiedenen (m + 1)-ten Einheitswurzeln, d. h. die $\xi_i^{(m)}$ sind gerade die Nullstellen von $(z^{m+1} - 1)/(z - 1) = 1 + z + \ldots + z^m$. Für die Polynome p_m von (1.10) bedeutet dies $p_m(z) = (1 + z \ldots + z^m)/(m + 1)$ d. h. $\pi_{m,j} = 1/(m + 1)$, $m \geqslant 0$, $0 \leqslant j \leqslant m$. Durch die unendliche Dreiecksmatrix P mit diesen Koeffizienten wird das wohlbekannte *Cesàro-Verfahren* (C_1-Verfahren) (vgl. [59, S. 100]) induziert. Die zugehörigen Vektoren $y_m = \dfrac{1}{m+1} \sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j$ (nach (1.7)) sind die arithmetischen Mittel der Iterierten $x_0, x_1, \ldots, x_m$.

Beispiel 2.3. Wenn man die Knoten der Matrix K_P identisch gleich $\xi \in \mathbf{C}\backslash\{1\}$ wählt, so gilt mit $\mu := 1/(1 - \xi)$ (d. h. $-\xi/(1 - \xi) = 1 - \mu$)

$$p_m(z) = \left(\frac{z - \xi}{1 - \xi}\right)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \left(\frac{1}{1 - \xi}\right)^j \left(\frac{-\xi}{1 - \xi}\right)^{m-j} z^j.$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \mu^j (1 - \mu)^{m-j} z^j =: \sum_{j=0}^{m} \pi_{m,j} z^j.$$

Die Matrix $P(\mu) := (\pi_{m,j})_{m \geqslant 0, 0 \leqslant j \leqslant m}$ induziert das *Euler-Knopp-Verfahren* ([59, S. 130], das wir bereits am Ende von § 1 erwähnten. Interessant ist, daß die Matrix $P(\mu)$ durch *einen* Parameter μ bestimmt ist, der dann auch in die einfache Formel (1.16) für die Berechnung der „Euler-Knopp-Transformierten" y_m eingeht.

3 Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit

Wir haben gesehen, daß eine semiiterative Methode durch eine der drei Matrizen P, Q und K_P eindeutig bestimmt ist. Nach welchen Kriterien sollen nun bei gegebenem T diese Matrizen, d. h. die Polynomfolgen $\{p_m\}_{m \geqslant 0}$ bzw. $\{q_{m-1}\}_{m \geqslant 1}$ gewählt werden? Im ersten Abschnitt haben wir schon erwähnt, daß $\tilde{e}_m = \mathbf{0}$, d. h. $y_m = x$, gilt, wenn das charakteristische Polynom von T ein Teiler von p_m ist; mit anderen Worten: wir haben in diesem Fall nach m Schritten die Lösung des linearen Gleichungssystems (1.1) erhalten. Da man bei Systemen mit großer Ordnung n aber keineswegs n Iterationsschritte durchführen möchte, spielt die Möglichkeit, daß ein Verfahren nach endlich vielen Schritten die exakte Lösung liefert, in der Praxis nur eine untergeordnete Rolle.

Mit Hilfe der Jordanschen Normalform von T (vgl. Gantmacher [18, S. 102]) und Lemma 2.1 läßt sich das folgende Konvergenzkriterium für semiiterative Methoden ableiten:

Lemma 3.1 ([9, Lemma 8]). *Sei*

$$m_T(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-\tau_i)^{n_i} \quad (\tau_i \neq \tau_j \textit{ für } i \neq j) \tag{3.1}$$

das Minimalpolynom der Matrix T. *Ein semiiteratives Verfahren sei durch die Polynomfolgen* $\{p_m\}_{m \geq 0}$ *nach* (1.10) *oder* $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ *nach* (2.7) *gegeben. Dann sind die folgenden fünf Aussagen einander äquivalent:*

(a) *Die Folge* $\{y_m\}_{m \geq 0}$ *nach* (1.7) *konvergiert für jeden Startvektor* y_0 *gegen die Lösung* x *des Systems* (1.1).

(b) $\lim\limits_{m \to \infty} p_m(T) = 0.$

(c) $\lim\limits_{m \to \infty} p_m^{(j)}(\tau_i) = 0$ *für* $1 \leq i \leq k$ *und* $0 \leq j \leq n_i - 1.$

(d) $\lim\limits_{m \to \infty} q_{m-1}(T) = (I-T)^{-1}.$

(e) $\lim\limits_{m \to \infty} q_{m-1}^{(j)}(\tau_i) = \left[\dfrac{d^j}{dz^j}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)\right]_{z=\tau_i}$ *für* $1 \leq i \leq k$ *und* $0 \leq j \leq n_i - 1.$

Dieses Resultat scheint nur von theoretischem Interesse zu sein, da es die Kenntnis der Eigenwerte von T voraussetzt. Weiß man allerdings, daß die Polynomfolge $\{p_m\}_{m \geq 0}$ gleichmäßig im Innern (d. h. auf jeder kompakten Teilmenge) einer offenen Menge G gegen 0 strebt, und ist außerdem bekannt, daß das Spektrum von T in dieser Menge G enthalten ist, so folgt aus Lemma 3.1, daß die Näherungsvektoren y_m der induzierten semiiterativen Methode – für jedes $y_0 \in \mathbf{C}^n$ – gegen $x = (I-T)^{-1}c$ konvergieren.

Beispiel 3.2. Die semiiterative Methode, die dem Cesàro-Verfahren entspricht, wird durch die Polynome $p_m(z) = \dfrac{1}{m+1} \sum\limits_{j=0}^{\infty} z^j$ definiert (vgl. Beispiel 2.2). Diese Polynome konvergieren gleichmäßig im Inneren von $D_1 := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ gegen 0 und divergieren für jedes z mit $|z| > 1$. Mit anderen Worten $\rho(T) < 1$ impliziert, daß die Vektorfolge $\{y_m\}_{m \geq 0}$ für jeden Startvektor konvergiert und umgekehrt folgt aus der Konvergenz dieser Folge (für jedes y_0), daß $\rho(T) \leq 1$ gilt. Diese semiiterative Methode stellt also keine wesentliche „Verbesserung" der Ausgangsiteration (1.2) dar.

Beispiel 3.3. Ganz anders verhält es sich mit der Anwendung eines Euler-Knopp-Verfahrens (Beispiel 2.3). Wir erhalten

$$\lim_{m \to \infty} p_m(z) = \lim_{m \to \infty} [(z-\xi)/(1-\xi)]^m = 0$$

gleichmäßig im Innern von $D(\xi; |1-\xi|) := \{z \in \mathbf{C} : |z-\xi| < |1-\xi|\}$, oder $\lim\limits_{m \to \infty} y_m = x$ falls $\sigma(T) \subseteq D(\xi; |1-\xi|)$ gilt.

Um die Qualität der Konvergenz einer von P induzierten semiiterativen Methode beurteilen zu können, führen wir in Analogie zu (1.4) die Größe

$$(3.2)\qquad \kappa(T, P) := \lim_{m \to \infty} \left[\sup_{e_0 \neq 0} \frac{\|\tilde{e}_m\|}{\|e_0\|} \right]^{1/m}$$

ein und nennen sie den *asymptotischen Konvergenzfaktor von* T *bezüglich* P. Bei Ortega-Rheinboldt [40, S. 288] heißt $\kappa(T, P)$ „root-convergence-factor"; dort wird auch gezeigt, daß $\kappa(T, P)$ normunabhängig ist.

Wegen $\tilde{e}_m = p_m(T)e_0$ kann man aus der Jordanschen Normalform von $p_m(T)$ das folgende Lemma ableiten:

Lemma 3.4. *Ist* m_T *nach* (3.1) *das Minimalpolynom von* T, *so gilt für beliebiges* P

$$(3.3)\qquad \kappa(T, P) = \overline{\lim_{m \to \infty}} \{ \max_{1 \leq i \leq k} \max_{0 \leq j \leq n_i - 1} |p_m^{(j)}(\tau_i)|^{1/m} \}.$$

Wenn T *diagonalisierbar ist, so folgt daraus*

$$(3.3a)\qquad \kappa(T, P) = \overline{\lim_{m \to \infty}} \{ \max_{\tau \in \sigma(T)} |p_m(\tau)|^{1/m} \}.$$

Natürlich läßt sich $\kappa(T, P)$ auch über die Folge der Interpolationspolynome $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ charakterisieren (vgl. [9, Lemma 10]).

Auch dieses Ergebnis ist nur theoretisch verwendbar, weil es wiederum eine genaue Kenntnis des Spektrums $\sigma(T)$ voraussetzt. Durchaus realistisch ist dagegen die Annahme, daß ein kompakter Bereich $\Omega \subset \mathbf{C}$ mit $\sigma(T) \subseteq \Omega$ bekannt ist; z. B. läßt sich häufig nach dem Satz von Bendixson (vgl. etwa Householder [25, S. 69]) ein Rechteck angeben, das die Eigenwerte einer Matrix enthält. Da nach Voraussetzung die Koeffizientenmatrix $I - T$ des Systems (1.1) nichtsingulär, also $1 \notin \sigma(T)$ ist, werden wir $1 \notin \Omega$ annehmen.

Damit ergibt sich das Problem, ein bezüglich der Information $\sigma(T) \subseteq \Omega$ möglichst günstiges Verfahren, d. h. ein Verfahren mit minimalem asymptotischem Konvergenzfaktor zu finden. Man kann sogar noch weitergehen und versuchen, in jedem „Semiiterations-Schritt" m eine maximale Verringerung der Fehlernorm $\|\tilde{e}_m\|_2 := (\tilde{e}_m^T \tilde{e}_m)^{1/2}$ zu erreichen. Ist T normal, so führt dies nach (3.3a) zum Minimierungsproblem

$$(3.4)\qquad \min \{ \max_{z \in \Omega} |p_m(z)| : p_m \in \Pi_m \text{ und } p_m(1) = 1 \};$$

hier bezeichnet Π_m die Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich m. Ein klassisches Ergebnis der komplexen Analysis (vgl. Smirnov-Lebedev [49, S. 367]) besagt, daß (3.4) für jedes m eine Lösung p_m^* besitzt. Die Koeffizienten dieser Polynome $\{p_m^*\}_{m \geq 0}$ bilden eine Matrix P^*, die allerdings nur für spezielle Bereich Ω explizit bekannt ist. Ist Ω ein reelles Intervall $[\alpha, \beta]$, so erweisen sich auf $[\alpha, \beta]$ transformierte und auf $p_m(1) = 1$ normierte Tschebyscheff-Polynome erster Art als Lösung von (3.4) ([53, S. 135]). Ist Ω das abgeschlossene Innengebiet einer Ellipse mit den reellen Brennpunkten α und β, so erhält man dasselbe Ergebnis (Manteuffel [32]). Freund-Ruscheweyh [15] lösen (3.4), wenn Ω ein Intervall parallel zur imaginären Achse ist; de Boor-Rice [4] berechnen p_m^* mit Hilfe eines Algorithmus vom Remez-Typ, wenn Ω aus zwei disjunkten reellen Intervallen besteht. Nachdem es unser erklärtes Ziel ist, ein für allgemeinere Bereiche Ω möglichst gut geeignetes Verfahren zu finden, beschränken wir uns darauf, asymptotisch optimale Methoden zu konstruieren.

Durch (3.3a) motiviert führen wir dazu den *asymptotischen Konvergenzfaktor*

$$\text{(3.5)} \quad \kappa(\Omega, P) := \overline{\lim_{m\to\infty}} \{\max_{z\in\Omega} |p_m(z)|^{1/m}\}$$

von Ω *bezüglich* P ein. Definieren wir ferner die Klasse

$$\text{(3.6)} \quad \mathbf{P} := \{P = (\pi_{m,j})_{m\geqslant 0,\, 0\leqslant j\leqslant m} : \pi_{m,j} \in \mathbf{C}, \sum_{j=0}^{m} \pi_{m,j} = 1 \text{ für } m \geqslant 0\}$$

aller unendlichen Dreiecksmatrizen, die ein semiiteratives Verfahren erzeugen, so nennen wir

$$\text{(3.7)} \quad \kappa(\Omega) := \inf_{P\in\mathbf{P}} \kappa(\Omega, P)$$

den *asymptotischen Konvergenzfaktor von* Ω.

Beispiel 3.5. Kehren wir zu unserem Testproblem (Beispiel 1.1) zurück: Wir haben gesehen, daß das Spektrum des Gesamtschrittoperators T in einem Rechteck $\Omega = R_{\alpha,\beta}$ $(1 \notin R_{\alpha,\beta})$ enthalten ist. Kann man nun ein semiiteratives Verfahren, das einem Euler-Knopp-Summierungsverfahren entspricht (vgl. Beispiel 2.3, 3.3), einsetzen, um entweder Konvergenz zu erzwingen oder die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen? Mit den Bezeichnungen aus Beispiel 2.3 gilt

$$\text{(3.8)} \quad \kappa(\Omega, P(\mu)) = \max_{z\in\Omega} |(z-(1-\mu)^{-1})/(1-(1-\mu)^{-1}|.$$

Da die Matrix T aus Beispiel 1.1 diagonalisierbar ist, folgt aus (3.3a) $\kappa(T, P(\mu)) \leqslant \kappa(\Omega, P(\mu))$. Es ist einfach zu sehen, daß in unserem Fall sogar Gleichheit herrscht. Die rechte Seite von (3.8) wird für $\alpha < \alpha^2 + \beta^2$ durch die Wahl

$$\text{(3.9)} \quad \hat{\mu} := (1-\alpha)/((1-\alpha)^2 + \beta^2)$$

minimiert, und wir erhalten

$$\kappa(\Omega, P(\hat{\mu})) = \kappa(T, P(\hat{\mu})) = \beta/\sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Ist $1 > \alpha \geqslant \alpha^2 + \beta^2$, so wird $\hat{\mu} := 1$ (vgl. Yeyios [56]). Nun ist P(1) aber die unendliche Einheitsmatrix, so daß wir hier durch kein Euler-Knopp-Verfahren eine Konvergenzbeschleunigung erzielen können.

Für $h = 0{,}1$ (d. h. $\alpha = 0{,}4755$) und verschiedene Werte von λ (siehe Beispiel 1.1) zeigt Tabelle 1, daß die Anwendung dieser semiiterativen Methode eine

Tabelle 1

λ	β	$\rho(T)$	$\kappa(T, P(\hat{\mu}))$
1,25	0,3566	0,5944	0,5944
2,5	1,090	1,189	0,9011
10	4,731	4,755	0,9939
250	118,9	118,9	0,99999

Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit bedeuten kann. Wir werden später allerdings sehen, daß es viel günstigere Verfahren für unser Testproblem gibt.

4 Asymptotisch optimale semiiterative Methoden

Wir nennen eine semiiterative Methode, induziert durch $\tilde{P} \in \mathbf{P}$, *asymptotisch optimal bezüglich* (der kompakten Menge) Ω, wenn $\kappa(\Omega, \tilde{P}) = \kappa(\Omega)$ erfüllt ist. Die Matrix P^*, die zu den Lösungen p_m^*, $m \geqslant 0$, des Minimierungsproblems (3.4) gehört, induziert offensichtlich ein asymptotisch optimales semiiteratives Verfahren. Die Frage ist, ob es neben P^* noch andere Matrizen $P \in \mathbf{P}$ gibt, die auch zu einer asymptotisch optimalen Methode führen, aber gleichzeitig leichter zugänglich sind als P^*.

Um solche unendlichen Dreiecksmatrizen P zu konstruieren, führen wir die folgende Klasse kompakter Mengen $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ ein (dabei sei $\bar{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$):

(4.1) $\mathbf{M} := \{\Omega \subseteq \mathbf{C}\colon \Omega$ ist kompakt, $1 \notin \Omega$, $\bar{\mathbf{C}} \backslash \Omega$ ist einfach zusammenhängend, Ω enthält mehr als einen Punkt$\}$.

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz existiert für jedes $\Omega \in \mathbf{M}$ eine konforme Surjektion

(4.2) $$\psi\colon \bar{\mathbf{C}} \backslash \{w\colon |w| \leqslant 1\} \to \bar{\mathbf{C}} \backslash \Omega$$

mit

(4.3) $$\psi(\infty) = \infty \quad \text{und} \quad \psi'(\infty) = \lim_{z \to \infty} \psi(z)/z =: \gamma(\Omega) > 0.$$

Die Konstante $\gamma(\Omega)$ heißt die *Kapazität von* Ω (vgl. Walsh [54, S. 74]). Wegen $1 \notin \Omega$ gibt es genau eine Zahl $\hat{w} \in \mathbf{C}$ mit

(4.4) $$\psi(\hat{w}) = 1, \qquad \hat{\eta} := |\hat{w}| > 1.$$

Nun wissen wir, daß jede semiiterative Methode nicht nur durch die Matrix $P \in \mathbf{P}$, sondern auch durch die zugehörige „Reihe-Folge-Matrix" $Q = PS$ (vgl. (2.5)) eindeutig festgelegt ist. Die Polynome $\{q_{m-1}\}_{m \geqslant 1}$, die aus den Koeffizienten dieser Matrix Q gebildet werden können (vgl. (2.6)), haben wir als eine Folge von Interpolationspolynomen für die Funktion $g(z) = 1/(1 - z)$ identifiziert. Wegen (2.7) und weil $1 \notin \Omega$ gilt, kann $\kappa(\Omega)$ anstatt durch (3.7) auch durch

(4.5) $$\kappa(\Omega) = \inf_{\{q_{m-1}\}_{m \geqslant 1}} \{\overline{\lim_{m \to \infty}} [\max_{z \in \Omega} |1/(1 - z) - q_{m-1}(z)|^{1/(m-1)}]\}$$

definiert werden; dabei läuft $\{q_{m-1}\}_{m \geqslant 1}$ über alle Polynomfolgen mit grad $(q_{m-1}) \leqslant m - 1$. Aus der Approximationstheorie ist bekannt, daß die Infima aus (3.7) und (4.5) angenommen werden. Mit anderen Worten: Wir können bei unserer Suche nach asymptotisch optimalen Verfahren entweder Polynomfolgen $\{p_m\}_{m \geqslant 0}$ bestimmen, die – unter der Nebenbedingung $p_m(1) = 1$ – auf Ω die Nullfunktion asymptotisch optimal approximieren, oder wir können Folgen $\{q_{m-1}\}_{m \geqslant 1}$ konstruieren, die die Funktion $g(z) = 1/(1 - z)$ auf Ω asymptotisch optimal approximieren. Letzteres ist jedoch eine klassische Fragestellung der Approximationstheorie im Komplexen. Wir erhalten direkt

Satz 4.1 (siehe Walsh [54, Chap. 4, Theorem 7]). *Für* $\Omega \in \mathsf{M}$ *gilt*

(4.6) $\kappa(\Omega) = 1/\hat{\eta}$ *mit* $\hat{\eta}$ *nach* (4.4).

In der „Sprache der semiiterativen Methoden" lautet dieses Ergebnis:

Korollar 1 (zu Satz 4.1). *Eine semiiterative Methode, induziert durch* $\mathrm{P} \in \mathbf{P}$, *ist genau dann asymptotisch optimal für* $\Omega \in \mathsf{M}$, *wenn* $\kappa(\Omega, \mathrm{P}) = 1/\hat{\eta}$ *ist.*

Eine Folge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$, für die in (4.5) das Minimum angenommen wird, *konvergiert maximal* auf Ω gegen $g(z) = 1/(1-z)$ ([54, S. 79]). Damit ergibt sich das überaus nützliche

Korollar 2 (zu Satz 4.1). *Eine semiiterative Methode ist genau dann asymptotisch optimal für* Ω, *wenn die Folge* $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ *der zugehörigen Interpolationspolynome auf* Ω *maximal gegen* $g(z) = 1/(1-z)$ *konvergiert.*

Da maximale Konvergenz beim Differenzieren erhalten bleibt (siehe [54, Chap. 4, Theorem 9]), schließen wir aus Lemma 3.4 für eine beliebige, nicht notwendigerweise diagonalisierbare Matrix T:

Korollar 3 (zu Satz 4.1). *Induziert* $\mathrm{P} \in \mathbf{P}$ *eine asymptotisch optimale semiiterative Methode für* $\Omega \in \mathsf{M}$, *und ist* $\sigma(\mathrm{T}) \subseteq \Omega$, *so gilt*

$$\kappa(\mathrm{T}, \mathrm{P}) = \overline{\lim_{m \to \infty}} \left[\sup_{e_0 \neq 0} \frac{\|\tilde{e}_m\|}{\|e_0\|} \right]^{1/m} \leq \frac{1}{\hat{\eta}}. \tag{4.7}$$

Es läßt sich sogar sehr viel mehr zeigen: Für die Mengen

$$\Omega_\eta := \overline{\mathbf{C}} \backslash \psi(\{w \in \overline{\mathbf{C}} : |w| > \eta\}) \quad (\eta \geq 1) \tag{4.8}$$

gilt offensichtlich $\Omega_\eta \in \mathsf{M}$ und $\kappa(\Omega_\eta) = \eta/\hat{\eta}$, falls $\eta < \hat{\eta}$.

Korollar 4 (zu Satz 4.1). *Ist ein semiiteratives Verfahren asymptotisch optimal für* $\Omega \in \mathsf{M}$, *so auch bezüglich aller Mengen* Ω_η *mit* $1 \leq \eta < \hat{\eta}$.

Maximale Konvergenz kann auch durch die Lage der Knoten $\xi_i^{(m)}$ der Knotenmatrix K_P (vgl. Abschnitt 2) beschrieben werden: Die Knoten $\xi_i^{(m)}$ ($m \geq 1$, $1 \leq i \leq m$) von K_P heißen *gleichverteilt auf* $\Omega \in \mathsf{M}$ (siehe [17, S. 65]), wenn

(i) kein Häufungspunkt der Menge $\{\xi_i^{(m)}\}$ in $\overline{\mathbf{C}} \backslash \Omega$ liegt, und wenn

(ii) $$\overline{\lim_{m \to \infty}} \left\{ \max_{z \in \Omega} \left[\prod_{i=1}^{m} |z - \xi_i^{(m)}| \right]^{1/m} \right\} = \gamma(\Omega) \text{ gilt,}$$

wobei $\gamma(\Omega)$ die Kapazität von Ω ist (vgl. (4.3)).

Der folgende Satz ist eine direkte Folgerung aus dem Satz von Kalmár und Walsh (siehe Gaier [17, S. 66]) sowie der Dualität zwischen Interpolations- und semiiterativen Verfahren, die in Abschnitt 2 beschrieben wurde:

Satz 4.2 [8, Theorem 6]. *Sind die Knoten von* K_P *gleichverteilt auf* $\Omega \in \mathsf{M}$, *so ist die zugehörige semiiterative Methode asymptotisch optimal für* Ω.

Für eine gegebene Menge $\Omega \in \mathsf{M}$ gibt es viele verschiedene Systeme von gleichverteilten Knoten: Beispiele wie etwa die Fejér-Knoten und die Fekete-

Knoten werden bei Gaier [17, S. 68ff.] beschrieben, andere wie z. B. die Leja-Knoten werden erwähnt.

Nach Satz 4.1 wissen wir, daß für $\Omega \in \mathsf{M}$ der Konvergenzfaktor positiv ist, d. h. wir können keine semiiterative Methode finden, die die Eigenschaften hat, daß für alle T mit $\sigma(T) \subseteq \Omega$ die Folge $\{y_m\}_{m \geqslant 0}$ überlinear, d. h. mit Konvergenzfaktor 0 konvergiert. Andererseits können wir im Prinzip mehrere Verfahren angeben, die bezüglich Ω asymptotisch optimal sind, z. B. solche, die von auf Ω gleichverteilten Knoten erzeugt werden.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des Konvergenzfaktors ist seine „Monotonie", die in dem nun folgenden Vergleichssatz präziser formuliert wird:

Satz 4.3 [9, Theorem 16]. *Gilt für die Mengen* $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathsf{M}$ *die Inklusion* $\Omega_1 \underset{\neq}{\subset} \Omega_2$, *so folgt* $\kappa(\Omega_1) < \kappa(\Omega_2)$.

Diese Aussage ist eine Konsequenz aus dem Schwarzschen Lemma (vgl. [38, Theorem 3]).

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß sich alle Ergebnisse dieses Abschnitts auch unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen an Ω beweisen lassen. Es genügt zu fordern, daß das Komplement von Ω eine Greensche Funktion G mit Pol in ∞ besitzt; dies ist beispielsweise gewährleistet, wenn $\overline{\mathbf{C}}\backslash\Omega$ n-fach zusammenhängend ist, und Ω keine isolierten Punkte enthält (Lebesgue-Osgood Bedingung, vgl. Walsh [54, Section 4.1]). Dann läßt sich zeigen, daß

$$\kappa(\Omega) = \exp(-G(1))$$

gilt.

Abschließend wollen wir ein asymptotisch optimales Verfahren für Kreisscheiben angeben:

Beispiel 4.4. Ist $\Omega = \overline{D}(\xi, \nu) := \{z \in \mathbf{C} : |z - \xi| \leqslant \nu\} \in \mathsf{M}$, so ist $\psi(w) = \nu z + \xi$ offenbar die konforme Abbildung ψ nach (4.2) und (4.3). Wegen $\psi((1 - \xi)/\nu) = 1$ gilt $\kappa(\Omega) = \nu/|1 - \xi|$. Für die semiiterative Methode aus Beispiel 3.5 gilt aber $\kappa(\overline{D}(\xi, \nu), P(\mu)) = \max\limits_{z \in \overline{D}(\xi, \nu)} |(z - \xi)/(1 - \xi)| = \nu/|1 - \xi|$ $(\mu = 1/(1 - \xi)$ vgl. Beisp. 2.3), so daß $P(\mu)$ ein asymptotisch optimales semiiteratives Verfahren für die Kreisscheibe $\overline{D}(\xi, \nu)$ induziert. Wegen $\gamma(\overline{D}(\xi, \nu)) = \nu$ ist auch klar, daß die Knoten $\xi_i^{(m)} = \xi$ $(m \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant m)$ gleichverteilt auf $\overline{D}(\xi, \nu)$ sind.

5 Von Faberentwicklungen erzeugte semiiterative Methoden

Sei Ω eine kompakte Menge aus der Klasse M nach (4.1). Im letzten Abschnitt haben wir zwei Möglichkeiten beschrieben, wie man asymptotisch optimale Verfahren bezüglich Ω konstruieren kann: Einmal können wir gleichverteilte Knoten verwenden, zum anderen erzeugt jede Polynomfolge $\{q_{m-1}\}_{m \geqslant 1}$, die auf Ω maximal gegen $g(z) = 1/(1 - z)$ konvergiert, ein solches Verfahren. Wir werden nun diesen zweiten Ansatz näher analysieren.

In der Approximationstheorie kennt man viele Wege, maximal konvergente Polynomfolgen zu konstruieren. Gragg-Reichel [20] betrachten orthogonale Polynome bezüglich des Randes $\partial\Omega$ von Ω und einer geeigneten Gewichtsfunktion.

Interpolation in den Nullstellen dieser Polynome erzeugt – unter einigen Voraussetzungen an $\partial\Omega$ – maximale Konvergenz und damit asymptotisch optimale Methoden. Dasselbe gilt, wenn man von den zugehörigen „Kernel polynomials" ausgeht (vgl. Smolarski-Saylor [50]). Wir werden hier eine weitere wohlbekannte Klasse von Polynomen, nämlich *Faberpolynome*, auf ihre Brauchbarkeit bei der Konstruktion semiiterativer Methoden untersuchen.

Dazu benötigen wir einige Definitionen: Im letzten Abschnitt spielte die konforme Surjektion

$$\psi: \bar{\mathbf{C}} \setminus \{w: |w| \leq 1\} \to \bar{\mathbf{C}} \setminus \Omega,$$

$$\psi(\infty) = \infty, \qquad \psi'(\infty) = \gamma(\Omega),$$

(vgl. (4.2), (4.3)) eine wichtige Rolle. Wir normalisieren ψ durch $\hat{\psi}(w) := \psi(w/\gamma(\Omega)) : \bar{\mathbf{C}} \setminus \{w: |w| \leq \gamma(\Omega)\} \to \bar{\mathbf{C}} \setminus \Omega$. $\hat{\psi}$ kann in eine Laurentreihe der Form

$$\text{(5.1)} \qquad \hat{\psi}(w) = w + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j w^{-j}, \qquad |w| > \gamma(\Omega),$$

entwickelt werden. Ist $\hat{\Phi}$ die Umkehrabbildung von $\hat{\psi}$, so bezeichnen wir für $\tau > \gamma(\Omega)$ das Bild des Kreises $\{w: |w| = \tau\}$ unter $\hat{\psi}$ mit $\hat{\Gamma}_\tau$, also $\hat{\Gamma}_\tau := \{z: |\hat{\Phi}(z)| = \tau\}$. Ferner sei $\hat{\Omega}_\tau$ die kompakte Menge, die $\hat{\Gamma}_\tau$ als Rand besitzt. (Zwischen diesen Mengen und den Mengen Ω_τ nach (4.8) besteht die Beziehung $\Omega_\tau = \hat{\Omega}_{\gamma(\Omega)\tau}$.) Außerdem sei

$$\text{(5.2)} \qquad \chi(w) := \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j w^{-j}$$

eine in $\{w: |w| > \gamma(\Omega)\}$ holomorphe Funktion mit $\chi(\infty) = \gamma_0 \neq 0$, die in $|w| > \gamma(\Omega)$ keine Nullstellen besitzt.

Für jedes $k \in \mathbf{N}_0$ besitzt die Funktion $\chi(\hat{\Phi}(z))[\hat{\Phi}(z)]^k$ eine Laurentreihe

$$\text{(5.3)} \qquad \chi(\hat{\Phi}(z))[\hat{\Phi}(z)]^k = \gamma_0 z^k + \sum_{j=-\infty}^{k-1} \beta_{k,j} z^j$$

in einer Umgebung von ∞. Der Hauptteil dieser Reihe

$$\text{(5.4)} \qquad F_k(z; \chi) := \gamma_0 z^k + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{k,j} z^j$$

ist ein Polynom vom genauen Grad k und heißt *k-tes verallgemeinertes Faberpolynom für Ω bezüglich der Gewichtsfunktion* χ; für $\chi \equiv 1$ ist F_k das (gewöhnliche) k-te Faberpolynom für Ω (siehe Faber [11], [12]).

Diese Polynome spielen in der Approximationstheorie deshalb eine wichtige Rolle, weil für $\tau > \gamma(\Omega)$ jede Funktion, die im Innern von Γ_τ holomorph ist, nach Faberpolynomen entwickelt werden kann. Wir wollen semiiterative Methoden konstruieren und sind daher nur an der Approximation von $g(z) = 1/(1-z)$ interessiert. Außerdem beschränken wir unsere Untersuchung auf die spezielle Gewichtsfunktion

$$\text{(5.5)} \qquad \chi(w) = 1/\hat{\psi}'(w),$$

die offensichtlich die an χ gestellten Forderungen erfüllt. Diese Einschränkung ist keineswegs notwendig, erscheint uns aber aus den folgenden Gründen zweckmäßig: Wie wir später sehen, kann man mit Hilfe der Polynome $F_k(z; 1/\hat{\psi}')$ ein semiiteratives Verfahren konstruieren, dessen Vektorfolge $\{y_m\}$ sich durch eine stationäre Rekursion berechnen läßt. Es wird sich auch herausstellen, daß diese Verfahren den wohlbekannten Euler-Verfahren (vgl. Abschnitt 7) entsprechen. Dieser Zusammenhang führt auf neue Resultate über Euler-Verfahren.

Ist also $\hat{F}_k(z) := F_k(z; 1/\hat{\psi}')$ und

$$(5.6)\qquad 1/(1-z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \hat{F}_k(z), \quad z \in \Omega,$$

die Entwicklung von $g(z) = 1/(1-z)$ nach diesen Faberpolynomen, so approximieren wir g durch die Teilsummen von (5.6)

$$q_{m-1}(z) := \sum_{k=0}^{m-1} \sigma_k \hat{F}_k(z) \quad (m \geqslant 1).$$

Diese Folge $\{q_{m-1}\}_{m \geqslant 1}$ induziert durch

$$(5.7)\qquad y_0 = x_0; \qquad y_m = x_0 + q_{m-1}(T) r_0 \quad (m \geqslant 1)$$

(siehe (2.3)) eine semiiterative Methode bezüglich (1.2).

Da Faberentwicklungen unter den gegebenen Voraussetzungen maximal konvergieren (vgl. Smirnov-Lebedev [49, 2.1.3, 2.2.2]), schließen wir aus Korollar 2 zu Satz 4.1, daß durch (5.7) sogar eine für Ω asymptotisch optimale semiiterative Methode definiert wird, oder anders formuliert, daß die zu (5.7) gehörende Fehlerfolge asymptotisch wie $\kappa(\Omega)^m$ gegen den Nullvektor strebt.

Besitzt ein durch P induziertes semiiteratives Verfahren den asymptotischen Konvergenzfaktor $\kappa(T, P)$, so besagt dies, daß die Norm $\|\tilde{e}_m\|$ des Fehlers asymptotisch in jedem Schritt mit dem Faktor $\kappa(T, P)$ multipliziert wird; damit ist aber noch keineswegs gesagt, daß dieses Verhalten schon für kleine Werte von m vorliegt. So haben für $q \in \mathbf{C}$ die Folgen $\{q^m\}_{m \geqslant 0}$ und $\{m^k q^m\}_{m \geqslant 0}$ für festes $k \in \mathbf{N}$ den gleichen asymptotischen Konvergenzfaktor $|q|$. Trotzdem wird für $|q| < 1$ die zweite Folge eine vorgegebene Schranke $\epsilon > 0$ erst sehr viel später als die erste erreichen. Zwei in bezug auf $\Omega \in \mathbf{M}$ asymptotisch optimale Verfahren können sich also im Verhalten der Fehler zu Beginn der Rechnung sehr wohl unterscheiden. Die nächsten Sätze besagen nun, daß sich semiiterative Verfahren, die auf die oben beschriebene Weise von verallgemeinerten Faberpolynomen erzeugt werden, in dieser Hinsicht besonders günstig verhalten:

Satz 5.1 (vgl. [7]). *Ist die Matrix* T *normal, so gilt für die Vektorfolge* $\{y_m\}_{m \geqslant 0}$, *die durch die Teilsummen der Faberentwicklung* (5.6) *erklärt ist, die folgende Fehlerabschätzung:*

$$(5.8)\qquad \|x - y_m\|_2 \leqslant (\max_{z \in \Omega} |1 - z|) \frac{e}{\gamma(\Omega)} \frac{m - 1 - m\kappa(\Omega)}{(1 - \kappa(\Omega))^2} [\kappa(\Omega)]^{m+1} \|x - y_0\|_2 .$$

Zum Beweis von (5.8) benötigen wir

$$\max_{z \in \Omega} |\hat{F}_k(z)| \leqslant e(k+1)[\gamma(\Omega)]^k \quad (k \geqslant 0),$$

was beispielsweise in [49, 2.2.1] gezeigt wird. Dort wird auch darauf hingewiesen, daß man die Konstante e in dieser Ungleichung durch keine Zahl kleiner als 1 ersetzen kann[1]): Elementare Abschätzungen (ein analoges Vorgehen findet man in [9, § 7]) liefern für die Teilsummen q_{m-1} von (5.6)

$$\max_{z\in\Omega}\left|\frac{1}{1-z}-q_{m-1}(z)\right|\leqslant\frac{e}{\gamma(\Omega)}\,\frac{m-1-m\kappa(\Omega)}{(1-\kappa(\Omega))^2}\,[\kappa(\Omega)]^{m+1}\qquad(m\geqslant 1),$$

woraus sich (5.8) mit Hilfe von (1.9) und (2.8) ableiten läßt.
Wegen der Äquivalenz der Normen im $\mathbf{C}^n$ kann man Abschätzungen vom Typ (5.8) natürlich nicht nur für die Euklidische Vektornorm $\|y\|_2 := (y^H y)^{1/2}$, $y \in \mathbf{C}^n$, sondern für jede beliebige Norm beweisen. Ist der Rand $\partial\Omega$ von Ω „genügend glatt", so läßt sich noch mehr zeigen. Sei $\theta(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \ell)$ eine Parametrisierung von $\partial\Omega$ bezüglich der Bogenlänge ℓ. $\partial\Omega$ gehört der Klasse $C(p, \alpha)$ an, wenn θ p-mal stetig differenzierbar ist und $\theta^{(p)}$ einer Lipschitz-Bedingung der Form $|\theta^{(p)}(s) - \theta^{(p)}(s')| \leqslant \lambda\, |s - s'|^\alpha$ $(0 \leqslant s, s' \leqslant \ell)$ mit einer Konstanten λ genügt.

Satz 5.2 [9, Theorem 22]. *Ist*

$$E_m(g, \Omega) := \min\{\max_{z\in\Omega} |g(z) - q_m(z)| : q_m \in \Pi_m \text{ (vgl. (3.4))}\}$$

der Fehler der gleichmäßigen polynomischen Bestapproximation vom Grad m *für die Funktion* $g(z) = 1/(1 - z)$ *auf* Ω, *gehört* $\partial\Omega$ *zur Klasse* $C(1, \epsilon)$ *und ist* T *normal, so gilt die folgende Verschärfung von* (5.8)

$$\text{(5.9)}\qquad \|x - y_m\| \leqslant L \ln(m-1) E_{m-1}(g, \Omega)\|x - y_0\| \qquad (m \geqslant 3).$$

Hier bezeichnet $\|\,.\,\|$ *eine beliebige Vektornorm im* $\mathbf{C}^n$, *und* L *ist eine von* m *unabhängige Konstante.*

6 Algorithmen

In den letzten Abschnitten haben wir eine Reihe analytischer Ergebnisse über semiiterative Methoden zusammengestellt; jetzt suchen wir geeignete Algorithmen, um die zugehörige Vektorfolge $\{y_m\}_{m\geqslant 0}$ berechnen zu können. Es geht also um die Frage, wie man für eine gegebene Matrix $P \in \mathbf{P}$ (vgl. (1.6)) die Vektoren

$$\text{(6.1)}\qquad y_m = \sum_{j=0}^{m} \pi_{m,j} x_j \qquad (m \geqslant 0)$$

bestimmt, wobei x_j $(j \geqslant 0)$ die Iterierten aus (1.2) bezeichnen. Natürlich könnte man dazu die Formel (6.1) direkt verwenden; dann müßte man allerdings alle Elemente $\pi_{m,j}$ $(m \geqslant 0,\ 0 \leqslant j \leqslant m)$ von P bereitstellen und alle Iterierten x_j $(0 \leqslant j \leqslant m)$ speichern – ein ziemlich aufwendiges Vorgehen. Häufig ist die Matrix P durch wenige Daten bestimmt, aus denen dann das Dreiecksschema der Koeffizienten $\pi_{m,j}$ aufgebaut wird (vgl. Beispiel 2.3; dort hängt P nur von einem Parameter ab). In dieser Situation wird man versuchen, eine Rechenvorschrift für die y_m zu fin-

[1]) Nachdem L. deBranges 1984 die Bieberbachsche Vermutung bewiesen hat, läßt sich die Konstante e hier und in der Fehlerabschätzung (5.8) durch 1 ersetzen.

den, bei der auf die explizite Bestimmung der $\pi_{m,j}$ verzichtet werden kann. Außerdem wird man eine rekursive Berechnung der y_m anstreben: Wünschenswert wäre es, wenn man y_m aus den letzten k Näherungen $y_{m-1}, y_{m-2}, \ldots, y_{m-k}$ konstruieren könnte.

Wie wir im zweiten Abschnitt gesehen haben, ist eine semiiterative Methode auch durch die Vorgabe einer Knotenmatrix $K_P = (\xi_i^{(m)})_{m \geq 1, 1 \leq i \leq m}$ festgelegt. Wir nennen K_P *spaltenkonstant*, wenn in jeder Spalte von K_P durchgehend derselbe Knoten auftritt, wenn also gilt:

(6.2) $\quad \xi_i^{(m)} = \xi_i \quad$ für alle $m \geqslant i$ und $i \geqslant 1$.

Satz 6.1 [8, Theorem 5]. *Ist die Knotenmatrix* K_P *spaltenkonstant, so lassen sich die Vektoren* y_m *von* (6.1) *der von* K_P *induzierten semiiterativen Methode wie folgt berechnen:*

(6.3) $\quad y_m = y_{m-1} + \mu_m[c - (I - T)y_{m-1}] \quad (m \geqslant 1)$ oder

(6.3′) $\quad y_m = [\mu_m T + (1 - \mu_m)I]y_{m-1} + \mu_m c \quad (m \geqslant 1)$.

Dabei sind die Parameter μ_m *durch die Knoten* ξ_m *über*

(6.4) $\quad \mu_m = 1/(1 - \xi_m)$

bestimmt.

Zum Beweis des Satzes 6.1 verwendet man neben der Darstellung (2.10) der Vektoren y_m aus Lemma 2.1 vor allem, daß bei einer spaltenkonstanten Knotenmatrix K_P die Polynome p_m in der einfachen Form

(6.5) $$p_0(z) = 1; \qquad p_m(z) = \frac{z - \xi_m}{1 - \xi_m}\, p_{m-1}(z) \quad (m \geqslant 1)$$

geschrieben werden können. (6.3) ist als Iterationsverfahren bekannt unter dem Namen *nicht-stationäre Richardson-Extrapolation* 1. *Art.* Für $\xi_m = \xi$, d. h. $\mu_m = \mu = 1/(1 - \xi)$, $m \geqslant 1$, wird (6.3′) zur stationären Rekursion (1.16). Damit ist auch gezeigt, daß die Rechenvorschrift (1.16) aus dem ersten Abschnitt tatsächlich eine semiiterative Methode repräsentiert.

Wie können wir nun die Ergebnisse der letzten Paragraphen verwenden, um die Parameter μ_m in (6.3) „geschickt zu wählen"? Besteht die Matrix K_P aus Knoten, die bezüglich einer kompakten Menge $\Omega \in \mathbf{M}$ gleichverteilt sind, so induziert K_P nach Satz 4.2 eine für Ω asymptotisch optimale semiiterative Methode; allerdings wird K_P i. allg. nicht spaltenkonstant sein. Um trotzdem Satz 6.1 benutzen zu können, wendet man den folgenden Trick an, den wir hier für das System der *Fejér-Knoten* beschreiben, der sich aber auch bei anderen Knotenmatrizen anwenden läßt. Kurz gesagt, wir wählen eine Teilfolge der Knoten, so daß einerseits die Gleichverteilung erhalten bleibt und andererseits sich eine spaltenkonstante Matrix ergibt.

Sei $\Omega \in \mathbf{M}$; zusätzlich setzen wir voraus, daß die konforme Abbildung ψ von (4.2), die das Außengebiet des Einheitskreises auf das Komplement von Ω abbildet, sich stetig auf den Rand der Einheitskreisscheibe ausdehnen läßt. Das ist beispielsweise richtig, wenn der Rand von Ω eine Jordan-Kurve ist. Die Fejér-Knoten sind dann durch

$$(6.6)\quad \xi_j^{(m)} := \psi\left(\exp\left[2\pi i\frac{j-1}{m}\right]\right) \quad (m \geqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$$

definiert. Sie sind gleichverteilt auf Ω (vgl. [17, S. 68]), aber die Matrix $K_P = (\xi_j^{(m)})$ ist sicher nicht spaltenkonstant. Für jedes $j > 1$ gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen k und ℓ mit $2^k < j \leqslant 2^{k+1}$ und $j = 2^k + \ell$, $1 \leqslant \ell \leqslant 2^k$.
Wir setzen $\zeta_1 := 1$, $\zeta_j := \exp[2\pi i(2\ell - 1)/2^{k+1}]$, $j > 1$, d. h. ζ_j ist eine 2^{k+1}-te Einheitswurzel, und dann

$$(6.7)\quad \xi_j := \psi(\zeta_j) \quad (j \geqslant 1).$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Knoten $\{\xi_j\}_{j \geqslant 1}$ ebenfalls gleichverteilt auf Ω sind; die zugehörige Knotenmatrix K_P ist aber spaltenkonstant, so daß wir Satz 6.1 anwenden können.

Ist das Ausgangsproblem $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ reell, d. h. $T \in \mathbf{R}^{n,n}$ und $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$, so wird die Menge Ω, die das Spektrum von T enthält, symmetrisch zur reellen Achse sein. In diesem Fall wird man sich bei der Anwendung des Iterationsverfahrens (6.3) auf reelle Arithmetik beschränken wollen. Die Fejér-Knoten $\xi_j^{(m)}$ nach (6.6) sind zwar komplexe Zahlen, aber ebenfalls symmetrisch zur reellen Achse, d. h. zu jedem j, $1 \leqslant j \leqslant m$, existiert ein j', $1 \leqslant j' \leqslant m$, mit $\xi_j^{(m)} = \overline{\xi_{j'}^{(m)}}$. Die „modifizierten" Fejér-Knoten nach (6.7) besitzen dann offenbar eine analoge Symmetrieeigenschaft. Durch eine geeignete Kombination zweier Iterationsschritte (6.3) kann daher auf komplexe Rechnung vollständig verzichtet werden (vgl. auch Opfer-Schober [39, Theorem 2.3]).

Erfüllen die Polynome p_m nach (1.10) eine $(k + 1)$-gliedrige Rekursionsformel

$$(6.8)\quad p_m(z) = \mu_{m,0} z p_{m-1}(z) + \sum_{j=1}^{k} \mu_{m,j} p_{m-j}(z) \quad (m \geqslant k)$$

mit komplexen Koeffizienten $\mu_{m,j}$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, so können die Vektoren $\mathbf{y}_m$ von (6.1) ebenfalls rekursiv berechnet werden. Wir beschreiben dies für $k = 2$:

Satz 6.2. *Angenommen, die Polynome* p_m *von* (1.10) *genügen einer dreigliedrigen Rekursion der folgenden Form* $p_0(z) = 1$; $p_1(z) = \pi_{1,0} + \pi_{1,1} z$;

$$(6.9)\quad p_m(z) = (\mu_{m,0} z + \mu_{m,1}) p_{m-1}(z) + \mu_{m,2} p_{m-2}(z) \quad (m \geqslant 2)$$

mit $\mu_{m,j} \in \mathbf{C}$, $0 \leqslant j \leqslant 2$, *und* $\sum_{j=0}^{2} \mu_{m,j} = 1$, *dann gilt für die Vektoren* $\mathbf{y}_m$ *von* (6.1):

$$(6.10)\quad \begin{aligned} &\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0; \qquad \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \pi_{1,1}\tilde{\mathbf{r}}_0; \\ &\mathbf{y}_m = \mathbf{y}_{m-1} + \mu_{m,0}\tilde{\mathbf{r}}_{m-1} - \mu_{m,2}(\mathbf{y}_{m-1} - \mathbf{y}_{m-2}) \quad (m \geqslant 2), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mathbf{r}}_m = \mathbf{c} - (I - T)\mathbf{y}_m$ *der zu* $\mathbf{y}_m$ *gehörige Residuenvektor ist.*

Resultate dieses Typs findet man häufig in der Literatur (vgl. etwa Stiefel [51], Faddejew-Faddejewa [13, § 90]). Die wohl bekannteste und am häufigsten verwendete semiiterative Methode, die sogenannte *Tschebyscheff-semiiterative Methode*, ordnet sich ebenfalls hier ein:

Beispiel 6.3 (vgl. Manteuffel [32]). Dieses Verfahren wird von den Polynomen

$$p_m(z) = T_m\left[\frac{2z-(\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}\right] / T_m\left[\frac{2-(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha}\right] \quad (m \geqslant 0)$$

erzeugt (vgl. [53, Chapter 5]). Hier bezeichnen α und β komplexe Zahlen mit $1 \notin [\alpha, \beta] := \{z = \alpha + \lambda(\beta - \alpha) : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ und T_m das Tschebyscheff Polynom 1. Art vom Grad m, d. h.

$$T_0(z) = 1; \quad T_1(z) = z; \quad T_m(z) = 2zT_{m-1}(z) - T_{m-2}(z) \quad (m \geqslant 2).$$

Mit den Abkürzungen $\gamma := (\beta - \alpha)/2$ und $\delta := 1 - (\alpha + \beta)/2$ schließen wir aus Satz 6.2, daß sich die Iterierten y_m von (6.1) gemäß (6.10) rekursiv berechnen lassen. Durch

$$\begin{aligned} &\mu_{2,0} = 2\delta/(2\delta^2 - \gamma^2); \qquad \mu_{2,2} = \delta\mu_{2,0} - 1 \quad \text{und} \\ (6.11)\quad &\mu_{m,0} = \left[\delta - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \mu_{m-1,0}\right]^{-1}; \qquad \mu_{m,2} = \delta\mu_{m,0} - 1 \quad (m > 2) \end{aligned}$$

erhält man die zugehörigen Koeffizienten (vgl. [9, Section 3]).

7 Euler-Verfahren

Wir wollen nun eine Klasse von semiiterativen Methoden beschreiben, die sowohl günstige analytische wie algorithmische Eigenschaften besitzen. Dazu müssen wir neben den unendlichen Dreiecksmatrizen P und Q (vgl. (1.6) und (2.5)) noch eine weitere Transformationsmatrix V einführen, durch die sich ein semiiteratives Verfahren beschreiben läßt. Zunächst kann man die Vektorfolge $\{y_m\}_{m \geqslant 0}$ von (1.7) als die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ mit den *Änderungsvektoren* $z_j := y_j - y_{j-1}, j \geqslant 0, y_{-1} := \mathbf{0}$, auffassen. Entsprechend gibt es eine Matrix V, die die Reihe (2.2) mit den Gliedern $x_0, r_0, r_1, r_2, \ldots$ direkt in die Reihe mit den Gliedern $z_0, z_1, z_2, \ldots$ transformiert. V beschreibt die durch P definierte Transformation in der sogenannten *Reihe-Reihe-Form* (vgl. Zeller-Beekmann [59, S. 6]). Von der „Folge-Folge-Matrix“ P haben wir gefordert, daß alle ihre Zeilensummen identisch gleich 1 sind. Da die Matrizen P, Q = PS und V über

$$(7.1)\quad V = S^{-1}PS = S^{-1}Q; \qquad P = SVS^{-1}; \qquad Q = SV$$

miteinander gekoppelt sind (S bzw. S^{-1} gemäß (2.4)), besitzt die unendliche Dreiecksmatrix $V := (\rho_{j,m})_{j \geqslant 0, 0 \leqslant m \leqslant j}$ die folgende Eigenschaft

$$(7.2)\quad \rho_{0,0} = 1; \qquad \rho_{j,0} = 0 \quad (j \geqslant 1).$$

Eine semiiterative Methode kann demnach durch eine der Matrizen P, Q und V induziert werden; die beiden anderen lassen sich dann nach (7.1) berechnen.

Allgemeine Euler-Verfahren lassen sich am einfachsten durch „Reihe-Reihe-Matrizen“ V beschreiben. Bezeichnen wir mit $D_\eta := D(0, \eta)$ (vgl. Beispiel 3.3) die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt 0 und Radius η sowie mit $\overline{D}_\eta$ deren Abschluß, dann heißt h eine *Euler-Funktion*, wenn eine offene Umgebung $\mathbf{D}$ von

$\bar{D}_1$ existiert, so daß
(i) h in **D** meromorph und schlicht ist, und
(ii) $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ gelten.

Jede Euler-Funktion h ist in einer Nullumgebung holomorph, d. h. es gibt eine Zahl $\nu = \nu(h) > 0$, so daß wir h – und damit alle Potenzen von h – in D_ν in eine Taylorreihe entwickeln können:

$$(7.3) \qquad [h(z)]^m =: \sum_{j=m}^{\infty} \rho_{j,m} z^j, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots; |z| < \nu).$$

Die Koeffizienten $\{\rho_{j,m}\}_{j \geq 0, 0 \leq j \leq m}$ formen eine unendliche untere Dreiecksmatrix $V = V(h)$, die offensichtlich der Bedingung (7.2) genügt. Deshalb sind die Zeilensummen der nach (7.1) gebildeten Matrix $P(h) = SV(h)S^{-1}$ alle gleich 1, so daß P(h) bzw. V(h) tatsächlich eine semiiterative Methode induzieren. Wir nennen sie ein *Euler-Verfahren* (in der Summierungstheorie spricht man von einem *allgemeinen Euler-Verfahren*, vgl. [59, S. 132]), das durch die Euler-Funktion h definiert ist.

Aus (7.3) erkennen wir, daß die m-te Spalte von V(h) gerade aus den Reihenkoeffizienten von h^m besteht. Das bedeutet insbesondere, daß die Matrix V(h) durch ihre erste Spalte vollständig festgelegt ist. Bezeichnen wir mit (vgl. (3.6))

$$(7.4) \qquad \mathbf{P}_E := \{P(h) : P(h) = SV(h)S^{-1}, \text{h ist eine Eulerfunktion}\} \subseteq \mathbf{P}$$

die Klasse der Euler-Verfahren, so ist $\mathbf{P}_E$ offenbar sehr viel kleiner als die Klasse **P** aller Dreiecksmatrizen P, die eine semiiterative Methode erzeugen, denn die Koeffizienten einer Matrix $P \in \mathbf{P}$ sind – außer der Zeilensummenbedingung (1.8) – keiner weiteren Einschränkung unterworfen. Aus diesem Grund ist der nächste Satz wichtig.

Satz 7.1 [9, Theorem 15]. *Zu jedem $\Omega \in \mathbf{M}$ gibt es ein Euler-Verfahren, das eine asymptotisch optimale semiiterative Methode bezüglich Ω ist.*

Zum Beweis geht man von der Funktion ψ nach (4.2) aus, die das Außengebiet des Einheitskreises konform auf das Komplement von Ω abbildet. Bezeichnet $\kappa = \kappa(\Omega)$ den asymptotischen Konvergenzfaktor von Ω, so ist – bis auf eine Rotation $z \to e^{i\theta}z$ – durch

$$(7.5) \qquad h(z) := 1/\psi(1/(\kappa z))$$

eine Euler-Funktion erklärt, von der man zeigen kann, daß sie eine *asymptotisch optimale* semiiterative Methode erzeugt.

Ist eine Euler-Funktion h durch ihre Potenzreihe

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{j,1} z^j \quad (\text{vgl. } (7.3))$$

gegeben, so lassen sich die Koeffizienten μ_j der Funktion

$$(7.6) \qquad \tilde{h}(z) := 1/h(z) = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{z} - \mu_1 - \mu_2 z - \mu_3 z^2 - \ldots\right)$$

leicht rekursiv bestimmen. Es gilt dann

Satz 7.2 [9, Theorem 4]. *Es sei eine Euler-Funktion* h *und damit* $\tilde{h} := 1/h$ *gemäß* (7.6) *gegeben. Die Vektoren* y_m *des von* h *erzeugten Euler-Verfahrens können dann folgendermaßen berechnet werden:*

$$(7.7) \quad y_0 = x_0; \qquad y_{m+1} = \mu_0[\tilde{r}_m + y_m] + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_{m+1-j} + \left(1 - \sum_{j=0}^{m} \mu_j\right) y_0 \quad (m \geqslant 0)$$

mit $\tilde{r}_m = c - (I - T) y_m$.

Der Beweis folgt aus einem Koeffizientenvergleich: Aus der Identität $h^{m-1} = \tilde{h} h^m$ kann man Rekursionsformeln für die Elemente $\rho_{j,m}$ von V(h) und daraus dann (7.7) ableiten.

Kennen wir für ein $\Omega \in \mathbf{M}$ die Abbildung ψ nach (4.2), so stehen uns nun zwei Möglichkeiten zur Verfügung, eine in Bezug auf Ω asymptotisch optimale Methode zu konstruieren. Wir können einmal das System der Fejérknoten bestimmen und danach die Vektoren y_m in der Form (6.3) einer nichtstationären einstufigen Richardson-Extrapolation berechnen, wie es in Abschnitt 6 beschrieben wurde. Dazu benötigt man die eigentliche Abbildungsfunktion ψ gar nicht, sondern nur die zugehörige „Ränderzuordnungsfunktion" (vgl. Gaier [16, Kap. 2]). Wir erhalten eine zweite asymptotisch optimale Methode, wenn wir nach (7.5) eine Euler-Funktion h bestimmen und dann die Vektoren y_m mit Hilfe von (7.7) errechnen. Allerdings werden wir zur Konstruktion von y_m alle vorherigen Iterierten y_j $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ benötigen. Bei großen Systemen ist dieser Weg demnach nicht zu empfehlen. Aus diesem Grund ist auch das folgende Korollar nützlich:

Korollar (zu Satz 7.2). *Hat die Euler-Funktion* h *die spezielle Gestalt*

$$(7.8) \quad h(z) = \frac{\mu_0 z}{1 - \mu_1 z - \ldots - \mu_k z^k},$$

$\mu_j \in \mathbf{C}$, $\sum_{j=0}^{k} \mu_j = 1$, *so genügen die Iterierten* y_m *des durch* h *erzeugten Euler-Verfahrens der Rekursion*

$$(7.9) \quad y_m = \mu_0(c + Ty_{m-1}) + \mu_1 y_{m-1} + \ldots + \mu_k y_{m-k} \quad (m \geqslant k).$$

Insbesondere stellt dieses Euler-Verfahren also ein k*-stufiges stationäres Iterationsverfahren dar.*

Im allgemeinen kann man aber wohl nicht davon ausgehen, daß die konforme Abbildung ψ nach (4.2) zu einer gegebenen kompakten Menge $\Omega \in \mathbf{M}$ bekannt ist. Wie soll man dann vorgehen, um ein möglichst günstiges semiiteratives Verfahren für Ω zu konstruieren? Ein Weg, der auch von anderen Autoren vorgeschlagen wurde (siehe etwa Opfer-Schober [39], de Pillis [43]), besteht darin, Ω in eine weitere Menge $\tilde{\Omega} \in \mathbf{M}$ $(\Omega \underset{\neq}{\subset} \tilde{\Omega})$ einzuschließen, für die man ein asymptotisch optimales Verfahren kennt. Ist diese Methode etwa durch die unendliche Dreiecksmatrix $P \in \mathbf{P}$ (1.9) induziert, so folgt

$$\kappa(\Omega) \leqslant \kappa(\Omega, P) \leqslant \kappa(\tilde{\Omega}, P) = \kappa(\tilde{\Omega}) < 1,$$

was sich unmittelbar aus der Definition des Konvergenzfaktors und dem Vergleichssatz 4.3 ergibt. Mit anderen Worten: P induziert i. allg. zwar kein bezüglich Ω asymptotisch optimales, aber zumindest ein *konvergentes* Verfahren. Paßt sich darüber hinaus $\tilde{\Omega}$ gut an Ω an – d. h. grob gesagt, ist $\tilde{\Omega}\backslash\Omega$ eine „kleine Menge" –, so wird man erwarten, daß sich $\kappa(\Omega)$ und $\kappa(\tilde{\Omega})$ nur wenig unterscheiden oder mit anderen Worten, daß die Matrix P ein „fast optimales Verfahren" für Ω induziert.

Dieses Vorgehen setzt allerdings die Kenntnis einer größeren Anzahl von „Modellmengen" $\tilde{\Omega}$ voraus, für die asymptotisch optimale semiiterative Methoden bekannt sind. Natürlich wird man zusätzlich verlangen, daß man diese Verfahren effektiv durchführen kann. Es liegt deshalb nahe, Klassen von semiiterativen Methoden zu betrachten, die diese Forderung erfüllen, und zu untersuchen, für welche Mengen wir asymptotisch optimale Verfahren erhalten. Diese Mengen können dann als Modellmengen im oben beschriebenen Sinn verwendet werden. Opfer-Schober [39] betrachtet beispielsweise die *zyklische Richardson-Extrapolation*, ein semiiteratives Verfahren, das durch eine spezielle spaltenkonstante Knotenmatrix (vgl. Abschnitt 6) induziert wird. Es stellt sich heraus, daß dieses Verfahren für *Lemniskaten*, d. h. für Mengen des Typs $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbf{C} : |p_k(z)| \leqslant \rho\}$ asymptotisch optimal sind. Hier bezeichnet p_k ein (festes) Polynom vom Grad k, das durch die Wahl der Knoten festgelegt ist. Für $k > 1$ kann es allerdings schwierig sein, solche Lemniskaten zu konstruieren, weil dies letztlich bedeutet, das Urbild einer Kreisscheibe unter der nichtlinearen Abbildung p_k zu berechnen. Wir wollen nun zeigen, daß Euler-Verfahren, speziell Euler-Verfahren der Gestalt (7.8), eine Verfahrensklasse darstellen, die für diese Zwecke gut geeignet ist.

Ist D_η wieder die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius η, so definieren wir für eine gegebene Euler-Funktion h ihre maximale Ausdehnung durch

(7.10) $\hat{\eta}(h) := \sup\{\eta\colon \text{h ist meromorph und schlicht in } D_\eta\}$.

Sicher gilt $\hat{\eta}(h) > 1$ und wir erhalten

Satz 7.3 (vgl. [38, Corollary 2]). *Sei* h *eine Euler-Funktion und sei* $\tilde{h} := 1/h$ (vgl. (7.6)). *Das zugehörige Euler-Verfahren ist dann eine asymptotisch optimale semiiterative Methode in bezug auf die Mengen*

(7.11) $S_\eta(h) := \mathbf{C}\backslash\tilde{h}(D_\eta), \qquad 1 < \eta \leqslant \hat{\eta}(h).$

Für diese η *gilt*

(7.12) $\kappa(S_\eta(h)) = 1/\eta$.

Wegen der Voraussetzungen an eine Euler-Funktion sind die kompakten Mengen $S_\eta(h)$ einfach zusammenhängend; ihre Ränder sind die Bilder der Kreise mit Radius η unter der Abbildung $\tilde{h}$. Daß hier Bilder und nicht Urbilder wie bei der zyklischen Richardson-Extrapolation zu bestimmen sind, macht unsere Aufgabe wesentlich einfacher.

Besonders leicht lassen sich die Bereiche $S_\eta(h)$ für die im Korollar zu Satz 7.2 auftretenden Euler-Funktionen $h(z) = (\mu_0 z)/(1 - \mu_1 z - \ldots - \mu_k z^k)$ angeben. Für $k = 1$ ist $\tilde{h} := 1/h$ durch $\tilde{h}(z) = (1 - (1 - \mu_0)z/(\mu_0 z)$ gegeben; die Mengen $S_\eta(h)$ sind abgeschlossene konzentrische Kreisscheiben mit dem Mittelpunkt

$1 - 1/\mu_0$ und den Radien $1/(\eta|\mu_0|)$, $1 < \eta < \infty$. Nach (7.9) kann man die Näherung y_m dieses Euler-Verfahrens gemäß

$$y_m = \mu_0 T y_{m-1} + (1 - \mu_0) y_{m-1} + \mu_0 c$$

berechnen. Ein Vergleich mit (1.16) zeigt, daß wir hier das aus dem ersten Abschnitt bereits bekannte Euler-Knopp-Verfahren erhalten haben.

Für $k = 2$ ist $\tilde{h} = 1/h$ eine Abbildung vom Joukowski-Typ. h ist genau dann eine Euler-Funktion, wenn $|\mu_2| < 1$ ist, und es gilt $\hat{\eta}(h) = 1/\sqrt{|\mu_2|}$. Als Euler-Verfahren resultiert nach (7.9) eine zweistufige Methode, die manchmal auch Richardson-Extrapolation zweiter Art genannt wird. Die Bereiche $S_\eta(h)$, $1 < \eta \leqslant \hat{\eta}(h)$, sind die abgeschlossenen Innengebiete von konfokalen Ellipsen, deren Brennpunkte und Halbachsen durch die Parameter μ_0, μ_1, μ_2 und η bestimmt sind (vgl. [9, § 6]). Für $\eta = \hat{\eta}(h)$ ergibt sich gerade das Intervall zwischen den Brennpunkten. Ist umgekehrt Ω das Innengebiet einer Ellipse oder ein Intervall, so kann man Parameter μ_0, μ_1, μ_2 angeben, so daß das zugehörige Euler-Verfahren asymptotisch optimal für Ω ist (vgl. [9, § 6]).

Beispiele für die Fälle $k = 3$ und $k = 4$ sind in [36] und [38, Example 4] beschrieben.

Der nächste Satz stellt schließlich die Verbindung zu Abschnitt 5 her:

Satz 7.4 [9, Theorem 21]. *Sei* $\Omega \in \mathsf{M}$, *bezeichne* $\hat{\psi}$ *die konforme Abbildung nach* (5.1) *und* $\hat{F}_k(z) = F_k(z; 1/\hat{\psi}')$, $k \geqslant 0$, *die zugehörigen verallgemeinerten Faberpolynome nach* (5.4). *Außerdem sei* h *die in* Satz 7.1 *beschriebene Euler-Funktion. Dieses Euler-Verfahren ist dann identisch mit der in* Abschnitt 5 *beschriebenen semiiterativen Methode, die von der Folge* $\{\hat{F}_k\}_{k \geqslant 0}$ *erzeugt wird. Umgekehrt kann man auch jede dieser „Faber-Methoden" als Euler-Verfahren auffassen.*

Die wichtigste Konsequenz dieses Satzes, bei dessen Beweis Satz 7.2 verwendet wird, ist, daß man die Aussagen der Sätze 5.1 und 5.2 nun auf Euler-Verfahren anwenden kann.

Die Anwendung von Euler-Verfahren zur iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme wurde von Niethammer [34] untersucht. Mit anderer Normierung und ohne Bezug zur Summierungstheorie werden diese Methoden von Kublanovskaya [28] im Zusammenhang mit analytischer Fortsetzung behandelt (vgl. auch Faddejew-Faddejewa [13, Kap. IX]).

8 Ein Beispiel

Wir wollen nun versuchen, die Ergebnisse der letzten Abschnitte an unserem Testbeispiel (vgl. Beispiel 1.1) zu illustrieren. Erinnern wir uns: Durch Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung (1.12) erhalten wir ein lineares Gleichungssystem mit der Eigenschaft, daß alle Eigenwerte des Gesamtschrittoperators in einem Rechteck $R_{\alpha,\beta} \in \mathsf{M}$ (vgl. (1.13), (1.14)) enthalten sind. Wie wir in Abschnitt 3 erwähnt haben, sind Rechtecksgebiete auch aus einem anderen Grund interessant: Mit dem Satz von Bendixson (vgl. Householder [25, S. 69]) kann man ein Rechteck konstruieren, das die Eigenwerte einer gegebenen Matrix umfaßt.

In Beispiel 1.1 haben wir gesehen, daß das Gesamtschrittverfahren in unserem Modellproblem nur in Ausnahmefällen konvergiert. In Beispiel 3.5 haben wir dann eine erste semiiterative Methode in bezug auf das Gesamtschrittverfahren betrachtet: Das Euler-Knopp-Verfahren, das in diesem Zusammenhang oft Jacobi-Over-Relaxation (JOR-Verfahren) genannt wird, konvergiert – bei geeigneter Wahl des Parameters μ (vgl. (3.9)) – zwar immer, die Konvergenzgeschwindigkeit ist allerdings für „große Rechtecke" sehr gering (siehe Tabelle 1).

Um festzustellen, mit welcher Konvergenzgeschwindigkeit wir bei einem semiiterativen Verfahren hier überhaupt rechnen können, müssen wir den Konvergenzfaktor $\kappa(R_{\alpha,\beta})$ des Rechtecks $R_{\alpha,\beta}$ bestimmen. Dieser ist per Definition das Infimum von $\{\kappa(R_{\alpha,\beta}, P) : P \in \mathbf{P}\}$; d. h. keine semiiterative Methode besitzt in bezug auf $R_{\alpha,\beta}$ einen Konvergenzfaktor, der kleiner als $\kappa(R_{\alpha,\beta})$ ist. Die konforme Abbildung ψ nach (4.2), die das Außengebiet des Einheitskreises auf das Komplement von $R_{\alpha,\beta}$ abbildet, und durch die $\kappa(R_{\alpha,\beta})$ bestimmt werden kann (vgl. (4.4), (4.6)), läßt sich in Form einer Laurent-Reihe angeben (vgl. Ellacott [10]). Damit können wir einmal $\kappa(R_{\alpha,\beta})$ angeben (vgl. Tabelle 2), zum andern können wir nun zwei in bezug auf $R_{\alpha,\beta}$ asymptotisch optimale Verfahren konstruieren: Mit Hilfe von (7.5) bestimmen wir eine Euler-Funktion, die ein solches Verfahren erzeugt. Die zugehörige Vektorfolge $\{y_m\}_{m \geqslant 0}$ läßt sich nach Satz 7.2 rekursiv berechnen, allerdings werden zur Berechnung von y_m alle vorherigen Näherungen y_k $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ benötigt. Da wir die Abbildung ψ kennen, sind wir aber auch in der Lage, die zu $R_{\alpha,\beta}$ gehörenden Fejér-Knoten nach (6.6) zu bestimmen. Wenn wir dann den in Abschnitt 6 beschriebenen Trick anwenden, um zu einer spaltenkonstanten Knotenmatrix zu kommen, so erhalten wir eine nichtstationäre Richardson-Extrapolation erster Art, die asymptotisch optimal für unser Problem ist. Hier treten keine Speicherprobleme auf, auf der anderen Seite ist dieses Verfahren aber nur dann numerisch stabil, wenn man die Extrapolationsparameter – d. h. hier die Fejér-Knoten – geeignet numeriert (vgl. Anderssen-Golub [2]).

Als nächstes wollen wir versuchen, das Rechteck $R_{\alpha,\beta}$ in Standardgebiete einzuschließen, für die wir optimale Methoden sehr viel leichter – d. h. ohne Verwendung der konformen Abbildung ψ – konstruieren können. Im letzten Paragraphen haben wir behauptet, daß Euler-Verfahren, speziell solche, die von Euler-Funktionen der Form (7.8) erzeugt werden, für diese Aufgabe besonders gut geeignet sind. Das werden wir nun für die Fälle k = 1, 2 und 4 an unserem Testbeispiel 1.1 demonstrieren.

Zunächst ziehen wir aus dem Vergleichssatz 4.3 und Satz 7.3 eine unmittelbare Folgerung:

Lemma 8.1. *Induziert* P(h) *ein Euler-Verfahren und ist* $\Omega \in \mathbf{M}$ *mit* $\Omega \subset S_\eta(h)$ *für ein* $1 < \eta < \hat{\eta}(h)$ (vgl. (7.10)), *so folgt* $\kappa(\Omega) \leqslant \kappa(\Omega, P(h)) \leqslant 1/\eta$. $\neq$

Sobald wir also das Rechteck $R_{\alpha,\beta}$ in einen der Bereiche $S_\eta(h)$ eingeschlossen haben, kennen wir eine obere Schranke für den asymptotischen Konvergenzfaktor des zugehörigen Euler-Verfahrens. Beim einstufigen Verfahren mit Parameter μ (vgl. (1.16)) ist $S_\eta(h)$ die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D}(1 - 1/\mu, 1/|\eta\mu|)$ (siehe Abschnitt 6). Wenn wir deshalb eine solche Kreisscheibe finden, die das Rechteck $R_{\alpha,\beta}$, aber nicht den Punkt z = 1 enthält, so konvergiert das einstufige

Verfahren (1.16) mit einem Konvergenzfaktor, der höchstens gleich $1/\eta$ ist. Nun gibt es natürlich viele Kreisscheiben, die diese Bedingung erfüllen; man kann also versuchen, den Konvergenzfaktor $1/\eta$ zu minimieren, was wir durch die Wahl des Parameters $\mu = \hat{\mu}$ nach (3.9) in Beispiel 3.5 getan haben (vgl. Yeyios [56]). Der Ausdruck „optimales Verfahren" ist hier allerdings nicht gerechtfertigt, denn wir erhalten zwar das für unser Problem bestmögliche Verfahren der Form (1.16), aber wegen Satz 4.3 keineswegs eine asymptotisch optimale Methode für $R_{\alpha,\beta}$. In ähnlicher Weise kann man nun versuchen, das Rechteck $R_{\alpha,\beta}$ mit Ellipsen „einzufangen"; hier ist es schon schwieriger, diejenigen Parameter zu finden, die zum kleinsten Konvergenzfaktor (innerhalb der Klasse der stationären zweistufigen Verfahren) führen:

Satz 8.2 (Kjellberg [26], Young [57, Chapter 6.4]). *Sei eine Euler-Funktion der Form*

$$(8.1)\qquad h(z) = \frac{\mu_0 z}{1 - \mu_1 z - \mu_2 z^2}\,; \quad \mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{C}, \quad \sum_{i=0}^{2} \mu_i = 1$$

gegeben. Der „optimale" Konvergenzfaktor

$$(8.2)\qquad \kappa_2 := \min\{1/\eta : R_{\alpha,\beta} \subseteq S_\eta(h),\ h \text{ hat die Form (8.1) und } 1 < \eta \leqslant \hat{\eta}(h)\}$$

ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$\left[\alpha \frac{1+\kappa^2}{2\kappa}\right]^{2/3} + \left[\beta \frac{1-\kappa^2}{2\kappa}\right]^{2/3} = 1,$$

die im Intervall (0, 1) *liegt.*

Die Parameter μ_0, μ_1, μ_2, die den Konvergenzfaktor κ_2 nach (8.2) liefern, lassen sich dann einfach angeben (siehe Hageman-Young [23, § 12.2], [38]). Werte von κ_2 für einige Rechtecke $R_{\alpha,\beta}$ findet man in Tabelle 2.

In Beispiel 6.3 haben wir ein nichtstationäres zweistufiges Verfahren, nämlich das Tschebyscheff-Verfahren, erwähnt. Diese Methode ist asymptotisch stationär, d. h. die Koeffizienten $\mu_{m,k}$ (k = 0, 1, 2, siehe (6.11)) streben für $m \to \infty$ gegen feste Werte μ_k (vgl. Golub-Varga [19]). Mit Hilfe der Sätze Perrons über die Lösung Poincaréscher Differenzengleichungen (siehe [41]) kann man daraus schließen, daß sich die Tschebyscheff-semiiterative Methode asymptotisch wie ein stationäres zweistufiges Verfahren verhält. Damit ist κ_2 nach (8.2) auch der beste Konvergenzfaktor, den wir mit Hilfe eines solchen Tschebyscheff-Verfahrens erzielen können.

Schließlich wollen wir noch Funktionen der Form

$$(8.3)\qquad h(z) = \frac{\mu_0 z}{1 - \mu_2 z^2 - \mu_4 z^4} \quad (\mu_0, \mu_2, \mu_4 \in \mathbf{R})$$

betrachten. Es gilt

Lemma 8.3 (vgl. [7]). h *nach* (8.3) *ist genau dann eine Euler-Funktion, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\mu_0 + \mu_2 + \mu_4 = 1, \quad |\mu_4| < \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad |\mu_2| < 1 - \mu_4 \quad (\text{falls } \mu_4 \geqslant 0) \quad \text{oder}$$

$$|\mu_2| < 1 + 3\mu_4 \quad (\text{falls } \mu_4 \leqslant 0).$$

Eine Wahl der Parameter μ_0, μ_2, μ_4, die diese Bedingung erfüllen und die für ein gegebenes Rechteck $R_{\alpha,\beta}$ zu einem günstigen – im Falle eines Quadrats $R_{\alpha,\alpha}$ sogar zum kleinsten – Konvergenzfaktor führen, wird im folgenden Lemma vorgeschlagen:

Lemma 8.4 (vgl. [7]). *Mit*

$$(8.4)\quad \hat{\mu}_4 = \left[3 + 2\sqrt{1 + 4\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2}\right]^{-1}, \qquad \hat{\mu}_2 = (1-\hat{\mu}_4)(\beta-\alpha)/(\alpha+\beta),$$
$$\hat{\mu}_0 = 2(1-\hat{\mu}_4)/(\alpha+\beta)$$

hat die Gleichung

$$(8.5)\quad \hat{\mu}_4\kappa^4 + \hat{\mu}_2\kappa^2 + \hat{\mu}_0\kappa = 1$$

genau eine Lösung κ_4 *in* $(0, 1)$. *Für*

$$(8.4')\quad \mu_4 = \hat{\mu}_4\kappa_4^4,\ \mu_2 = \hat{\mu}_2\kappa_4^2,\ \mu_0 = \hat{\mu}_0\kappa_4$$

ist h *nach* (8.3) *eine Euler-Funktion. Darüberhinaus gilt* $\kappa(R_{\alpha,\beta}, P(h)) = \kappa_4$.

Daß diese vierstufigen Verfahren in unserem Fall zu einem kleineren Konvergenzfaktor führen als die optimalen zweistufigen Verfahren nach Satz 8.2, geht „rein anschaulich“ aus Abbildung 1 hervor. Dort sind (für $h = 0,1$ und $\lambda = 2,5$, d. h. $\alpha = 0,4755$ und $\beta = 1,090$) neben dem Rechteck $R_{\alpha,\beta}$ die beiden einschließenden Bereiche $S_{1/\kappa_2}(h_2)$ sowie $S_{1/\kappa_4}(h_4)$ (vgl. (7.11)) gezeichnet. Dabei bezeichnen h_2 bzw. h_4 die Euler-Funktionen, die zum zweistufigen Verfahren nach Satz 8.2 bzw. dem vierstufigen nach Lemma 8.4 führen. $S_{1/\kappa_4}(h_4)$ paßt sich offensichtlich sehr viel besser an das gegebene Rechteck $R_{\alpha,\beta}$ an als $S_{1/\kappa_2}(h_2)$.

In Tabelle 2 sind einige Werte von κ_4 für spezielle Rechtecke enthalten (es wurde stets $h = 0,1$ gesetzt, vgl. auch Tabelle 1).

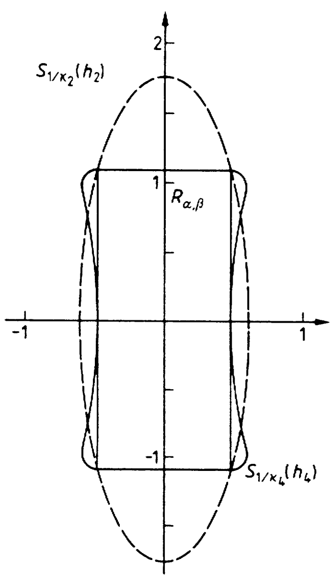


Abbildung 1

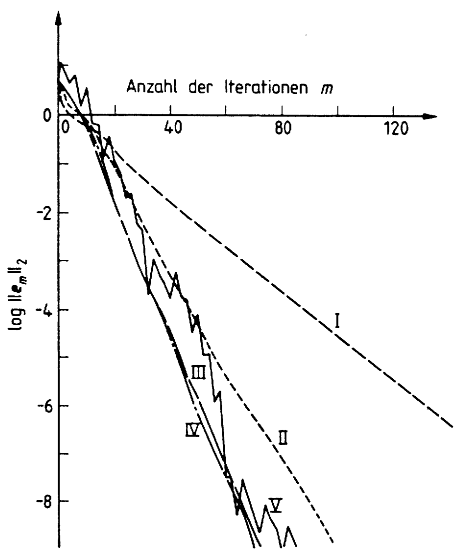


Abbildung 2

Tabelle 2

λ	κ_2 (vgl. (8.2))	κ_4 (vgl. (8.5))	$\kappa(R_{\alpha,\beta})$
1,25	0,5938	0,5122	0,5010
2,5	0,8069	0,7345	0,7117
10	0,9498	0,9279	0,9064
250	0,9979	0,9963	0,9956

Die letzte Zeile dieser Tabelle bedeutet beispielsweise, daß für $\lambda = 250$ eine asymptotisch optimale Methode für das zugehörige Rechteck $R_{\alpha,\beta}$ (hier gilt $\alpha = 0{,}4755$ und $\beta = 118{,}9$, vgl. (1.14)) um den Faktor $\ln(0{,}9956)/\ln(0{,}9979) \sim 2{,}1$ *schneller* ist als das beste stationäre zweistufige Verfahren oder das optimierte Tschebyscheff-Verfahren. Das vierstufige Verfahren, dessen Parameter in Lemma 8.4 gegeben sind, ist demgegenüber immerhin noch 1,76mal so schnell.

In Abbildung 2 wird nun das tatsächliche Fehlerverhalten für das lineare Gleichungssystem aus Beispiel 1.1 mit $\lambda = 2{,}5$ und $h = 0{,}1$ beschrieben. Getestet werden das JOR-Verfahren (I, vgl. (1.16)) mit dem „optimalen" Extrapolationsparameter nach (3.9), das stationäre zweistufige Verfahren nach Satz 8.2 (II), das vierstufige Verfahren nach Lemma 8.4 (III) und die beiden oben erwähnten asymptotisch optimalen Methoden, nämlich das optimale Euler-Verfahren (IV) sowie die Richardson-Extrapolation 1. Art, die auf den Fejér-Knoten basiert (V).

Diese optimalen Verfahren haben zwar beide denselben Konvergenzfaktor $\kappa = 0{,}7117$, trotzdem unterscheiden sie sich in ihrem Fehlerverhalten beträchtlich: Während sich die Fehlernorm beim Euler-Verfahren ungefähr wie κ^m verhält, ist beim Fejér-Knoten-Verfahren ein „wellenförmiger" Fehlerverlauf zu beobachten. Dieses Phänomen läßt sich dadurch erklären, daß wir nicht alle Fejér-Knoten berücksichtigen, sondern aus algorithmischen Gründen nur eine Teilfolge, nämlich die 2^k-ten Fejér-Knoten ($k = 0, 1, 2, \ldots$) verwenden (vgl. Abschnitt 6). Die Fehlernorm $\|\tilde{e}_m\|_2$ wird sich deshalb nur dann wie κ^m verhalten, wenn der Iterationsindex m die Form $m = 2^k$ besitzt, was auch mit der in Abbildung 2 dargestellten Fehlerkurve V übereinstimmt.

9 Ergänzungen

Wir haben die Anwendung von semiiterativen Methoden, also letztlich von Mittelungs- oder Limitierungsmethoden, auf die Lösung linearer Gleichungssysteme, d. h. auf lineare Gleichungen im $\mathbf{C}^n$ untersucht. Wir wollen noch auf die Ergebnisse in allgemeineren Räumen und bei nichtlinearen Gleichungen hinweisen.

Melencov und Muraev [33] betrachten, ausgehend vom Analogon von (1.1) in einem linearen topologischen Raum und den Iterierten (1.2) Verfahren der Form (1.7), stellen dabei aber vor allem limitierungstheoretische Aspekte heraus. Niethammer und Schempp [37], [48] betrachten in Verallgemeinerung von [34] die Anwendungen allgemeiner Euler-Verfahren bei linearen Gleichungen in Hilbert- und Banachräumen.

Ist

$$(9.1) \quad x = \varphi(x)$$

eine Fixpunktgleichung in einem Banachraum, so konvergiert das Verfahren der sukzessiven Approximation $x_m = \varphi(x_{m-1})$ $(m \geqslant 1)$ gegen einen Fixpunkt, wenn φ kontrahierend ist. Zur Abschwächung der Kontraktionsbedingung schlägt Mann [30] die Anwendung von Mittelungsmethoden auf die Folge $\{x_m\}_{m \geqslant 0}$ vor. Aus dem gleichen Grund betrachtet Schaefer [47] eine Iteration der Form (1.16), die schon vorher von Krasnoselskii [27] für den Fall $\mu = 1/2$ untersucht wurde. Reinermann [44] betrachtet (1.16) bei variablen Koeffizienten μ_m und stellt die Verbindung mit dem Ansatz von Mann her; er weist auch auf den Zusammenhang mit Euler-Knopp-Summierung hin. Eine Übersicht über diese und weitere Arbeiten gibt Mann [31]; ihnen allen gemeinsam ist, daß sich die Voraussetzung an φ nur von kontrahierend zu „nicht expandierend", d. h. $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leqslant \|x - y\|$, abschwächen läßt.

Ausgehend von der Erfahrung, daß häufig Methoden, die sich bei linearen Problemen global bewähren, sich auch bei nichtlinearen Aufgaben lokal erfolgreich einsetzen lassen, wurden von Gutknecht, Niethammer und Varga [22] k-stufige Verfahren der Form (7.9) bei Gleichungen der Form (9.1) im $\mathbf{C}^n$ untersucht; unter der Voraussetzung, daß lokal ein eindeutiger Fixpunkt existiert, lassen sich auch bei expandierendem φ lokale Konvergenzaussagen beweisen. Gutknecht und Kaiser [21] verallgemeinern diese Ergebnisse auf Gleichungen in Banachräumen.

Literatur

[1] Albrecht, P.; Klein, M. P.: Extrapolated iterative methods for linear systems. SIAM J. Numer. Anal. **21** (1984) 192–201

[2] Anderssen, R. S.; Golub, G. H.: Richardson's nonstationary matrix iterative procedure. Rep. STAN-CS-72-304, Comp. Sci. Dep., Stanford University, Stanford, CA 1972

[3] Bellmann, R.: A note on the summability of formal solutions of linear integral equations. Duke Math. J. **17** (1950) 53–55

[4] de Boor, C.; Rice, J. R.: Extremal polynomials with application to Richardson iteration for indefinite linear systems. SIAM J. Sci. Stat. Comp. **3** (1982) 47–57

[5] Bückner, H.: A special method of successive approximations for Fredholm integral equations. Duke Math. J. **15** (1948) 197–206

[6] Eiermann, M.: Numerische analytische Fortsetzung durch Interpolationsverfahren. Dissertation, Univ. Karlsruhe 1982

[7] Eiermann, M.: On the application of semiiterative methods generated by Faber polynomials to the solution of nonsymmetric linear equations. In Vorbereitung

[8] Eiermann, M.; Niethammer, W.: On the construction of semiiterative methods. SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983) 1153–1160

[9] Eiermann, M.; Niethammer, W.; Varga, R. S.: A study of semiiterative methods for nonsymmetric systems of linear equations. Numer. Math. **47** (1985) 505–533

[10] Ellacott, S. W.: Computation of Faber series with application to numerical polynomial approximation in the complex plane. Math. Comp. **40** (1983) 575–587

[11] Faber, G.: Über polynomische Entwicklungen. Math. Ann. **57** (1903) 398–408

[12] Faber, G.: Über Tschebyscheffsche Polynome. J. Reine Angew. Math. **150** (1920) 79–106

[13] Faddejew, D. K.; Faddejewa, W. N.: Numerische Methoden der linearen Algebra. München – Wien: Oldenbourg 1964

[14] Forsythe, G. E.: Solving linear algebraic equations can be interesting. Bull. Am. Math. Soc. **59** (1953) 299–329
[15] Freund, R.; Ruscheweyh, S.: On a class of Chebyshev approximation problems which arise in connection with a conjugate gradient type method. Erscheint in Numer. Math.
[16] Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1964
[17] Gaier, D.: Vorlesungen über Approximation im Komplexen. Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1980
[18] Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung, Teil I. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1965
[19] Golub, G. H.; Varga, R. S.: Chebyshev semiiterative methods, successive overrelaxation iterative methods, and second order Richardson iterative methods. Numer. Math. **3** (1961) 147–168
[20] Gragg, W. B.; Reichel, L.: On the application of orthogonal polynomials to the iterative solution of linear systems of equations with indefinite or non-hermitian matrices. Erscheint in Linear Algebra Appl.
[21] Gutknecht, M. H.; Kaiser, A.: Iterative k-step methods for computing possibly repulsive fixed points in Banach spaces. Erscheint in J. Math. Anal. Applics.
[22] Gutknecht, M. H.; Niethammer, W.; Varga, R. S.: K-step iterative methods for solving nonlinear systems of equations. Erscheint in Numer. Math.
[23] Hageman, L. A.; Young, D. M.: Applied Iterative Methods. New York – London – Toronto – Sydney – San Francisco: Academic Press 1981
[24] Hestenes, M. R.; Stiefel, E.: Methods of conjugate gradients for solving linear systems. J. Res. Nat. Bur. Stand. **49** (1952) 409–436
[25] Householder, A. S.: The Theory of Matrices in Numerical Analysis. New York – Toronto – London: Blaisdell Publ. Comp. 1964
[26] Kjellberg, G.: On the convergence of successive over-relaxation applied to a class of linear systems with complex eigenvalues. Ericsson Tech. Stockholm **2** (1958) 245–258
[27] Krasnoselskii, M. A.: Zwei Bemerkungen über die Methode der sukzessiven Näherungen. Uspehi Mat. Nauk (N. S.) **10** (1953) 123–127 (Russisch)
[28] Kublanovskaya, V. N.: Application of analytic continuation in numerical analysis by means of change of variables. Trudy Mat. Inst. Steklov **53** (1959) 145–185 (Russisch)
[29] Lanczos, C.: Solution of systems of linear equations by minimized iterations. J. Res. Nat. Bur. Stand. **45** (1950) 255–282
[30] Mann, W. R.: Mean value methods in iteration. Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953) 506–510
[31] Mann, W. R.: Averaging to improve convergence of iterative processes. In: Functional Analysis Methods in Numerical Analysis, 169–179, Lect. Notes in Math. 701. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1979
[32] Manteuffel, T. A.: The Tchebychev iteration for nonsymmetric linear systems. Numer. Math. **28** (1977) 307–327
[33] Melencow, A. A.; Muraev, E. B.: Summierung der Iterationen eines linearen operators. Akad. Nauk Armjan. SSR, Ser. fiz-mat. Nauk **16** (1963) 3–12
[34] Niethammer, W.: Iterationsverfahren und allgemeine Euler-Verfahren. Math. **102** (1967) 288–317
[35] Niethammer, W.: Konvergenzbeschleunigung bei einstufigen Iterationsverfahren durch Summierungsmethoden. In: Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, Approximationstheorie, S. 235–243. Basel: Birkhäuser 1970
[36] Niethammer, W.; de Pillis, J.; Varga, R. S.: Convergence of block iterative methods applied to sparse least-squares problems. Linear Algebra Appl. **58** (1984) 327–341
[37] Niethammer, W.; Schempp, W.: On the construction of iteration methods for linear equations in Banach spaces by summation methods. Aequat. Math. **5** (1970) 273–284
[38] Niethammer, W.; Varga, R. S.: The analysis of k-step iterative methods for linear systems from summability theory. Numer. Math. **41** (1983) 177–206
[39] Opfer, G.; Schober, G.: Richardson's iteration for nonsymmetric matrices. Linear Algebra Appl. **58** (1984) 343–367

[40] Ortega, J. M.; Rheinboldt, W. C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York – London: Academic Press 1970
[41] Perron, O.: Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung. J. Reine Angew. Math. **137** (1910) 6–64
[42] Petryshyn, W. V.: On the extrapolated Jacobi or simultaneous displacements method in the solution of matrix and operator equations. Math. Comp. **19** (1965) 37–55
[43] de Pillis, J.: How to embrace your spectrum for faster iterative results. Linear Algebra Appl. **34** (1980) 125–143
[44] Reinermann, J.: Über Toeplitzsche Iterationsverfahren und einige ihrer Anwendungen in der konstruktiven Fixpunkttheorie. Studia Math. **32** (1969) 209–227
[45] Saad, Y.: Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems. Math. Comp. **37** (1981) 105–126
[46] Saad, Y.; Schultz, M. H.: Conjugate gradient-like algorithms for solving nonsymmetric linear systems. Math. Comp. **44** (1985) 417–424
[47] Schaefer, H. H.: Über die Methode der sukzessiven Approximationen. Jahresb. DMV **59** (1957) 131–140
[48] Schempp, W.: Iterative solution of linear operator equations in Hilbert space and optimal Euler methods. Arch. Math. **21** (1970) 390–395
[49] Smirnov, V. L.; Lebedev, N. A.: Functions of a Complex Variable: Constructive Theory. Cambridge, MA: MIT Press 1968
[50] Smolarski, D. C.; Saylor, P. E.: An optimum semi-iterative method for solving any linear set with a square matrix. Preprint
[51] Stiefel, E.: Kernel polynomials in linear algebra and their numerical applications. Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. **49** (1958) 1–22
[52] Varga, R. S.: A comparison of the successive overrelaxation method and semi-iterative methods using Chebyshev polynomials. SIAM J. Appl. Math. **5** (1957) 39–46
[53] Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall 1962
[54] Walsh, J. L.: Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. Providence, RI: AMS Colloquim Publications, Vol. XX
[55] Wiarda, G.: Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Leipzig: Teubner 1930
[56] Yeyios, A.: On the optimization of an extrapolation method. Linear Algebra Appl. **57** (1984) 191–203
[57] Young, D. M.: Iterative Solution of Large Linear Systems. New York: Academic Press 1971
[58] Young, D. M.; Jea, K. C.: Generalized conjugate gradient acceleration of iterative methods: Part II, the nonsymmetriable case. Rep. CNA-163, Center of Numerical Analysis, University of Texas at Austin
[59] Zeller, K.; Beekmann, W.: Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin: Springer 1970

Dr. M. Eiermann
Prof. Dr. R. S. Varga
Institute for Computational Mathematics
Kent State University
Kent, Ohio 44242
USA

Prof. Dr. W. Niethammer
Institut für Praktische Mathematik
Universität Karlsruhe
D-7500 Karlsruhe

(*Eingegangen 7. 10. 1985*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. **89** (1987) 33–59 © 1987 B. G. Teubner, Stuttgart

Periodische Lösungen von Hamiltonschen Systemen *)

E. Zehnder, Bochum

Einleitung

Es ist das Ziel dieser Mitteilung, einige Phänomene und Fragestellungen, Resultate und Referenzen über periodische Lösungen von Hamiltonschen Differentialgleichungen zusammenzustellen. Ab und zu weisen Stichworte auf die verwendeten Beweismethoden hin.

Das Interesse an geschlossenen Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen kam ursprünglich von mechanischen Problemen, wie etwa dem Vielkörperproblem der Himmelsmechanik, hat aber schon um die Jahrhundertwende insbesondere durch die Untersuchungen von H. Poincaré zu Methoden und Techniken geführt, die in anderen Zweigen der Mathematik verwendet werden, erinnert sei z. B. an die Fortsetzungsmethode, Bifurkationsmethode, topologische Fixpunktsätze. In den zwanziger Jahren hat das geometrische Problem der geschlossenen Geodätischen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit – hier handelt es sich um periodische Lösungen eines speziellen Hamiltonschen Systems auf dem Kotangentenbündel einer kompakten Mannigfaltigkeit, T^*M – zu zwei wichtigen Theorien kritischer Punkte von Funktionen auf unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten geführt, nämlich der Morse-Theorie und der Ljusternik-Schnirelman-Theorie, siehe z. B. R. Bott [B 32, 33]. Modifikationen dieser Techniken spielen auch im Existenzproblem periodischer Lösungen allgemeiner Hamiltonscher Gleichungen eine große Rolle. Wir werden im folgenden auf das Problem der geschlossenen Geodätischen nicht eingehen und verweisen auf das Buch [K 2] und auf die DMV-Mitteilung [B 8].

Unser Interesse gilt vielmehr allgemeinen Hamiltonschen Gleichungen auf $\mathbf{R}^{2n}$. Diese speziellen gewöhnlichen Differentialgleichungen sind von der Form

$$\dot{x} = J\nabla h(x), \qquad x \in \mathbf{R}^{2n},$$

wobei die Funktion h Hamiltonfunktion heißt, und wobei die schiefsymmetrische Matrix J gegeben ist durch

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \text{Identität auf } \mathbf{R}^n.$$

Wir werden auch Hamiltonfunktionen betrachten, welche periodisch von der Zeit abhängen. Die globale Lösungsstruktur einer Hamiltonschen Differential-

*) Gefördert von der Stiftung Volkswagenwerk.

gleichung ist äußerst kompliziert, und zwar schon für Systeme, die nahe den integrablen Systemen sind, siehe etwa [M 6, Z 1]. Die Frage nach periodischen Lösungen ist aber nicht ein Anfangswertproblem sondern ein Randwertproblem und es gibt ein klassisches Variationsfunktional dessen kritische Punkte gerade diese Lösungen sind. In scharfem Kontrast zum geometrischen Problem der geschlossenen Geodätischen ist dieses Variationsfunktional für allgemeine Funktionen h entartet. Es ist weder von unten noch von oben beschränkt und die Standardtechniken der Variationstheorie sind nicht direkt anwendbar. Erst Ende der siebziger Jahre hat P. Rabinowitz in einer Reihe von bahnbrechenden Arbeiten gezeigt, daß man solche degenerierte Variationsprinzipien auch für Existenzbeweise sehr effektiv verwenden kann. Seine Mini-Max-Methoden der Theorie der kritischen Punkte haben in der Folge zu einer Fülle von Existenzresultaten globaler periodischer Lösungen geführt, und wurden auch als abstrakte Variationsmethoden weiter untersucht. Wir brauchen im folgenden nicht detailliert auf diese Methoden einzugehen, da sie im Zusammenhang mit periodischen Lösungen schon mehrfach dargestellt worden sind: in [R 7], [D 1] und [B 20], siehe auch [N 3]. Natürlich gibt es unter speziellen Annahmen an die Hamiltonfunktion, etwa Konvexität, andere äquivalente Variationsprinzipien, die den einfacheren sogenannten direkten Methoden der Variationsrechnung zugänglich sind, z. B. das duale Aktionsprinzip, eine Idee, die von der Optimierungstheorie herkommt, und durch Clark und Ekeland in das Problem der periodischen Lösungen eingeführt wurde.

In neuerer Zeit sind Variationstechniken auch auf Fixpunktprobleme symplektischer Abbildungen, also globale Fragen der symplektischen Geometrie, angewendet worden; dies ist der Schwerpunkt dieser Mitteilung, welche eine Erweiterung des Vortrages an der DMV-Tagung darstellt.

Inhalt

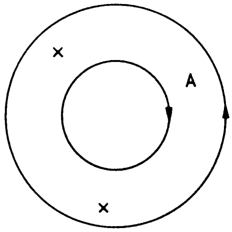
I. Fixpunkte symplektischer Abbildungen und Vermutungen von V. I. Arnold

1 Geschichte, der Spezialfall des Torus

Die Vermutungen von V. I. Arnold über Fixpunkte symplektischer Abbildungen gehen zurück auf den uralten Problemkreis der Himmelsmechanik, welcher mit dem sogenannten letzten geometrischen Theorem von H. Poincaré zusammenhängt. Auf seiner Suche nach periodischen Lösungen im restringierten

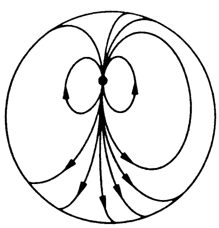
3-Körper-Problem hat Poincaré eine Transversalabbildung eines Kreisringes A auf der Jacobifläche konstruiert, welche ihn zur Formulierung des folgenden merkwürdigen Satzes [P 5] geführt hat:

H. Poincaré (1912), **G. Birkhoff** (1913). *Jeder maßerhaltende Homöomorphismus eines Kreisringes* $A = S^1 \times [a, b]$, *welcher die beiden Ränder in entgegengesetzter Richtung rotiert, hat mindestens* 2 *Fixpunkte im Innern.*



Der Beweis dieses Satzes wurde erst 1913 von G. Birkhoff mittels eines strikt 2-dimensionalen Arguments geliefert, siehe [B 39, 40] und auch [B 38, C 1,3]. In seinem Buch über Mechanik [A 11] bemerkt V. I. Arnold, daß, wenigstens in differenzierbarem Fall, der Satz aus einem Fixpunktsatz symplektischer Abbildungen eines Torus $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ hergeleitet werden könnte. Da die Eulercharakteristik des Kreisringes A und auch diejenige von T^2 verschwindet, ist die Lefschetz-Fixpunkttheorie nicht anwendbar. Der obige Satz ist in der Tat auch kein topologisches Resultat; er ist falsch, wenn die Bedingung maßerhaltend weggelassen wird, wie einfache Beispiele sofort zeigen.

Um die Konsequenz einer Bedingung der Maßerhaltung auf die globale Existenz von Fixpunkten zu illustrieren, betrachten wir zunächst eine Abbildung f auf der Sphäre S^2, welche homotop zur Identität ist, $f \simeq \mathrm{id}$, und deshalb auf Grund des Lefschetz-Fixpunktsatzes mindestens einen Fixpunkt hat, da $\chi(S^2) = 2 \neq 0$ ist. Sie braucht aber nur einen Fixpunkt zu haben, wie das Beispiel der Translation auf der Riemannschen Zahlenkugel zeigt.



Es ist aber eine überraschende Tatsache, daß f einen zweiten Fixpunkt hat unter der zusätzlichen Annahme, daß f ein reguläres Maß erhält, wie 1974 von C. Simon [S 7] und N. Nikishin [N 4] bewiesen wurde:

Satz 1. *Jeder Homöomorphismus* f *auf* S^2, *homotop zur Identität und ein reguläres Maß erhaltend, hat* $\geqslant 2$ *Fixpunkte.*

Der folgende Beweis benutzt wieder ein strikt 2-dimensionales Argument, welches schon von C. Loewner in seinen Stanford-Vorlesungen verwendet worden war. Ist der durch die Lefschetz-Theorie garantierte Fixpunkt p^* der einzige Fixpunkt, so ist f auf $S^2\setminus\{p^*\} \cong \mathbf{R}^2$ ein Homöomorphismus ohne Fixpunkte. Auf Grund von Brouwers Translationssatz gibt es deshalb eine offene Menge D, so daß $f^j(D)$ paarweise disjunkt sind. Infolgedessen gilt

$$m(S^2) \geqslant m\left(\bigcup_{j=0}^{n} f^j(D)\right) = \sum_{j=0}^{n} m(f^j(D)) = (n+1)\,m(D)$$

für alle positiven ganzen Zahlen n, so daß $m(D) = 0$, im Widerspruch zur Regularität des Maßes.

Insbesondere hat also jeder Diffeomorphismus f auf S^2, der eine Volumenform ω invariant läßt, $f^*\omega = \omega$, mindestens zwei Fixpunkte, d. h. mindestens ebenso viele Fixpunkte, wie eine Funktion auf S^2 kritische Punkte besitzt. Die Restriktion auf die Klasse symplektischer Diffeomorphismen hat also globale Konsequenzen; dieses Phänomen ist nicht auf den zweidimensionalen Fall beschränkt.

Im Gegensatz zu S^2 braucht ein Diffeomorphismus von $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, auch wenn er maßerhaltend ist, keinen Fixpunkt zu besitzen, wie das Beispiel der Translation zeigt. Die Klasse der Diffeomorphismen von T^2 muß daher eingeschränkt werden, sollen diese notwendigerweise Fixpunkte besitzen. Wir betrachten maßerhaltende Diffeomorphismen auf T^2, welche homolog zur Identität sind, und deshalb, auf $\mathbf{R}^2$, dargestellt werden durch

$$\psi\colon \begin{array}{l} X = x + p(x, y) \\ Y = y + q(x, y) \end{array}$$

mit zwei periodischen Funktionen p und q und verlangen:

(i) ψ ist homolog zu id

(ii) $dX \wedge dY = dx \wedge dy$

(iii) $\int_{T^2} p\, dx\, dy = 0 = \int_{T^2} q\, dx\, dy.$

Die Bedingung (iii) fordert die Invarianz des Massenmittelpunktes und schließt insbesondere die Translation aus. Für diese Klasse von Diffeomorphismen gilt der folgende Fixpunktsatz [C 20], aus welchem der Satz von Poincaré-Birkhoff im differenzierbaren Fall folgt [C 30], und welcher von V. I. Arnold formuliert worden war [A 10, 11]. Er ist ein Spezialfall einer Vermutung von V. I. Arnold über Fixpunkte symplektischer Abbildungen, welche weiter unten beschrieben werden soll.

Satz 2. *Jeder Diffeomorphismus* ψ *von* T^2, *welcher* (i)–(iii) *genügt, hat* $\geqslant 3$ *Fixpunkte* ($\geqslant 4$, *falls alle Fixpunkte nichtdegeneriert sind*).

Dabei heißt ein Fixpunkt p nichtdegeneriert, falls 1 nicht ein Eigenwert der linearisierten Abbildung, $d\psi(p)$, ist. Der Satz, offensichtlich kein „Euler-Charakteristik-Resultat“, behauptet, daß die symplektische Abbildung ψ mindestens ebenso viele Fixpunkte besitzt, wie eine Funktion auf T^2 kritische Punkte hat, nämlich

$$3 = \text{cup length } (T^2) =: CL(T^2)$$

$$4 = \text{Summe der Bettizahlen } (T^2) =: SB(T^2).$$

Die Invariante CL(X) eines kompakten Raumes ist hier definiert als $CL(X) = 1 + \sup \{k \mid \text{es gibt Klassen } \alpha_j \in H^*(X) \setminus 1 \text{ mit } \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ldots \cup \alpha_k \neq 0\}$; dabei bezeichnet $H^*(X)$ die Alexanderkohomologie.

Zur Formulierung dieses Satzes, dessen topologische Version noch offen ist (siehe J. Franks [F 11]), wurde Arnold durch das folgende Argument geführt, unter der zusätzlichen Restriktion jedoch, daß ψ nahe an der Identität ist, genauer, daß $|\psi - \mathrm{id}|_{C^1}$ hinreichend klein ist.

In diesem Fall gibt es eine direkte und ein-eindeutige Beziehung zwischen den Fixpunkten der symplektischen Abbildung ψ und den kritischen Punkten einer Funktion auf T^2. Nämlich, H. Poincaré [P 2] folgend, verifiziert man leicht, daß die Eins-Form auf T^2:

$$(X - x)(dY + dy) - (Y - y)(dX + dx) = dS(x, y)$$

wegen (i)–(iii) eine exakte Form ist mit einer Funktion S auf T^2. Die Fixpunkte von ψ, $X = x^*$ und $Y = y^*$, sind die kritischen Punkte von S, falls die Formen $(dY + dy)$ und $(dX + dx)$ dort linear unabhängig sind. Dies ist aber genau dann der Fall, falls (-1) nicht Eigenwert von $d\psi(x^*, y^*)$ ist, was insbesondere für ψ nahe der Identität zutrifft.

Diese Idee, nämlich die Fixpunkte symplektischer Abbildungen mit kritischen Punkten einer sogenannten „erzeugenden" Funktion in Beziehung zu bringen, wird häufig für Existenzsätze der Mechanik benutzt, siehe [W 2, M 1] und die darin enthaltenen Referenzen. Bis anhin hat diese Methode jedoch nur zu Störungsresultaten geführt.

Der Beweis von Satz 2 für eine globale Abbildung ψ beruht auf einer ganz anderen Idee; zwar werden die Fixpunkte auch als kritische Punkte einer Funktion gefunden, aber nicht einer Funktion auf T^2, sondern auf der unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit der kontrahierbaren loops auf T^2. Zunächst wird das Fixpunktproblem für ψ zurückgeführt auf das Existenzproblem periodischer Lösungen eines Hamiltonschen Vektorfeldes auf T^2, also auf ein Problem der dynamischen Systeme. Zu diesem Zweck konstruiert man ein Vektorfeld auf T^2, dessen Fluß ϕ^t die Abbildung ψ zur Identität deformiert, so daß $\psi = \phi^1$ ist. In der Tat kann man mittels eines zweidimensionalen Arguments zeigen [C 20], daß die Bedingungen (i)–(iii) an den Diffeomorphismus ψ auf T^2 äquivalent zur folgenden dynamischen Bedingung sind:

$\psi = \phi^1$, *der Zeit-*1*-Abbildung des Flusses* ϕ^t *eines zeitabhängigen Hamiltonschen Vektorfeldes auf* $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$:

$$\frac{d}{dt}\phi^t(x) = J\nabla h(t, \phi^t(x)) \quad \textit{und} \quad \phi^0(x) = x,$$

wobei $x \in \mathbf{R}^2$, *und* $h(t, x)$ *eine periodische Funktion der Periode* 1 *in allen Variablen ist.*

Da die Fixpunkte von ψ offenbar ein-eindeutig den 1-periodischen Lösungen des Hamiltonschen Vektorfeldes $\dot{x} = J\nabla h(t, x)$ auf T^2 entsprechen, so folgt nun Satz 2 aus dem folgenden Multiplizitätssatz für erzwungene Schwingungen, welcher insbesondere zeigt, daß die bisherigen Fixpunktsätze nicht ein zweidimensionales Phänomen sind.

Satz 3. *Jedes Hamiltonsche Vektorfeld auf* $T^{2n} = \mathbf{R}^{2n}/\mathbf{Z}^{2n}$ *bezüglich der symplektischen Standardstruktur*: $\dot{x} = J\nabla h(t, x)$, $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n}$, *wobei* h *eine periodische Funktion der Periode* 1 *in allen Variablen ist, hat* $\geqslant 2n + 1$ *periodische Lösungen der Periode* 1 (resp. $\geqslant 2^{2n}$, *falls alle* 1*-periodischen Lösungen nicht degeneriert sind*).

Dabei ist $2n + 1$ als $CL(T^{2n})$ und 2^{2n} als $SB(T^{2n})$ zu interpretieren. Eine periodische Lösung soll dabei nichtdegeneriert heißen, falls 1 nicht ein Floquet-Multiplikator ist.

Die gefundenen periodischen Lösungen sind, wie sich zeigt, kontrahierbare loops auf T^{2n} und es gibt Beispiele mit genau $2n + 1$ Lösungen. Dies ist in Kontrast zum geometrischen Problem der geschlossenen Geodätischen, wo man leicht eine Lösung in jeder Homotopieklasse des Loopraumes findet.

Die gesuchten periodischen Lösungen können mit Hilfe eines klassischen Variationsprinzipes gefunden werden, welches aus allen Lösungen des im allgemeinen äußerst komplizierten Flusses des Hamiltonschen Systemes genau die periodischen Lösungen herausgreift. Bezeichnen wir mit ΩM, wobei $M = T^{2n}$, die Mannigfaltigkeit der kontrahierbaren loops $\Omega M = \{x : t \to x(t) \in \mathbf{R}^{2n} \mid x(0) = x(1)\}$, so sind die kritischen Punkte der Funktion $f : \Omega M \to \mathbf{R}$, welche definiert ist durch:

$$f(x) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \langle x, J\dot{x} \rangle + h(t, x(t)) \right\} dt,$$

gerade die gesuchten 1-periodischen Lösungen. In der Tat verifiziert man formal sofort für die Ableitung von f:

$$f'(x)y = \int_0^1 \langle J\dot{x} + \nabla h(t, x(t)), y \rangle dt =: (\nabla f(x), y)_{L_2},$$

so daß $f'(x) = 0$, $x \in \Omega(M)$, genau dann falls $0 = \nabla f(x) = J\dot{x} + \nabla h(t, x)$, oder also, da $J^2 = -1$ ist, falls der loop x für alle $t \in \mathbf{R}$ die Hamiltonschen Gleichungen erfüllt. Das Problem besteht nun darin, kritische Punkte von f zu finden.

Auf der Suche nach kritischen Punkten von f stößt man auf die Schwierigkeit, daß f weder von unten noch von oben beschränkt ist, und daß mögliche kritische Punkte Sattelpunkte mit unendlich dimensionalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten sind, so daß die Standardmethoden der Variationsrechnung nicht direkt anwendbar sind. Erst in jüngerer Zeit hat P. Rabinowitz gezeigt, daß man diesen Schwierigkeiten zum Trotz solche degenerierte Variationsprinzipien sehr effektiv für Existenzbeweise, welche auf Mini-Max-Techniken beruhen, heranziehen kann.

Im vorliegenden Spezialfall eines Loopraumes über einer kompakten Mannigfaltigkeit führen andere Ideen zum Auffinden der kritischen Punkte. Man studiert den künstlichen Gradientenfluß

$$\frac{d}{ds} x = -\nabla f(x), \qquad x \in \Omega M,$$

auf dem Loopraum ΩM, dessen Gleichgewichtspunkte, $\nabla f(x) = 0$, gerade die gesuchten periodischen Lösungen sind. Wegen der Gradientenstruktur findet man die Gleichgewichtspunkte als Limesmenge der beschränkten Lösungen. Setzt man $h \equiv 0$, so ist der durch die symplektische Struktur allein definierte Gradientenfluß einfach zu beschreiben: die Menge der beschränkten Lösungen besteht aus den konstanten loops, also aus den Punkten von $T^{2n} \subset \Omega M$, welche überdies eine normal hyperbolische Menge darstellt. Man schließt daraus, daß auch im Falle $h \neq 0$, die Gleichgewichtspunkte in einer endlich dimensionalen Untermannigfaltigkeit $\tilde{\Omega} \subset \Omega M$ enthalten sind, und mittels einer globalen Lyapunov-Schmidt-Reduktion kann das Problem reduziert werden auf das Studium eines reduzierten Gradientenflusses in $\tilde{\Omega}$. Die Menge S der beschränkten Lösungen ist kompakt und reflektiert die Topologie der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit $M = T^{2n}$. Hierzu zeigt man, daß die natürliche Abbildung $\alpha : \Omega M \to M$ eine injektive Abbildung

$$(\alpha | S)^* : H^*(M) \to H^*(S)$$

induziert, so daß insbesondere

$$CL(S) \geqslant CL(M)$$

folgt. Die gesuchte Abschätzung der Gleichgewichtspunkte in S folgt somit aus der allgemeinen Abschätzung für einen „gradientenhaften" Fluß (d. h. es existiert eine reellwertige und stetige Funktion, welche längs nicht konstanter Bahnen streng monoton abnimmt) auf einem kompakten Raum S:

$$\#\{\text{Gleichgewichtspunkte}\} \geqslant CL(S).$$

Die schärfere Abschätzung $\geqslant SB(S)$ im nicht degenerierten Fall benutzt Morse-theoretische Argumente, für Details sei auf [C 20] verwiesen.

Das Beispiel des Torus illustriert den Unterschied zwischen dem koerziven Variationsproblem der geschlossenen Geodätischen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und dem entarteten Variationsproblem für erzwungene Schwingungen Hamiltonscher Systeme auf kompakten symplektischen Mannigfaltigkeiten. Im ersten Fall liegt eine Attraktor-Situation vor und man erwartet, daß, grob gesprochen, jede Kohomologieklasse des Loopraumes in den kritischen Punkten repräsentiert wird, während im zweiten Fall offenbar nur die Kohomologie der Mannigfaltigkeit selber in den kritischen Punkten repräsentiert wird.

Es sei in diesem Zusammenhang noch bemerkt, daß natürlich die zur Existenz geschlossener Geodätischer entwickelten Ideen auch auf das Existenzproblem erzwungener Schwingungen spezieller Hamiltonscher Systeme auf dem Kotangentenbündel T^*M einer kompakten Mannigfaltigkeit übertragen werden können. Sei etwa das System durch eine Lagrangefunktion der Form $L_t(x) = \sum a_{ij}(t, x)\dot{x}_i\dot{x}_j$ auf dem Tangentenbündel TM beschrieben, wobei für die Matrix a die Bedingungen $a(t, x) = a(t + 1, x)$ und $a > 0$ gelten sollen. Die dazugehörigen erzwungenen Schwingungen sind gerade die kritischen Punkte des folgenden koerziven Funktionals f auf dem Loopraum ΩM:

$$f(x) = \int_0^1 L_t(x)\,dt.$$

Ist nun die q-te Homologieklasse $H_q(\Omega M)$ nicht trivial, so kann man $T_q := \{K \subset \Omega M \mid i : H_q(K) \to H_q(\Omega M) \neq 0\}$ definieren, und man verifiziert, daß

$$c_q = \inf_{K \in T_q} \left(\sup_{x \in K} f(x)\right)$$

ein kritischer Wert von f ist. Falls zum Beispiel $\pi_1(M) = \{1\}$, so weiß man, daß $H_q(\Omega M) \neq 0$ ist für unendlich viele q, und man findet durch Abschätzen der c_q unendlich viele erzwungene Schwingungen des Systemes, [B 42].

2 Vermutung von Arnold und Resultate

Sei nun allgemein (M, ω) eine kompakte symplektische Mannigfaltigkeit, wobei ω eine nichtdegenerierte und geschlosssene 2-Form auf M, die sog. symplektische Struktur, ist. Einer glatten Funktion $h : S^1 \times M \to \mathbf{R}$ wird durch die Vorschrift

$$\omega(X_t, .) = dh_t(\,.\,)$$

ein sogenanntes exakt Hamiltonsches Vektorfeld X_t auf M zugeordnet, welches periodisch von der Zeit t abhängt mit Periode 1. Hier hat man ausgenutzt, daß ω nichtdegeneriert ist. Eine 1-periodische Lösung des Vektorfeldes ist eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dt} x = X_t(x) \quad \text{auf } M,$$

welche die Randbedingung $x(0) = x(1)$ erfüllt. Motiviert durch den Spezialfall des Torus vermutet Arnold, daß das jedes solche Hamiltonsche Vektorfeld mindestens ebenso viele 1-periodische Lösungen besitzt, wie eine Funktion auf M kritische Punkte hat, also, im Hinblick auf die Theorien von Ljusternik-Schnirelman und Morse:

Vermutung von V. I. Arnold

$$\#\{\text{1-periodische Lösungen}\} \geqslant CL(M)$$

($\geqslant SB(M)$, falls alle 1-periodischen Lösungen nichtdegeneriert sind).

Da der Fluß ϕ^t eines Hamiltonschen Vektorfeldes auf (M, ω) aus symplektischen Abbildungen besteht, d. h. $(\phi^t)^*\omega = \omega$ erfüllt, geben die 1-periodischen Lösungen Anlaß zu Fixpunkten der symplektischen Abbildung $\psi = \phi^1$. Die Resultate über periodische Lösungen sind deshalb Fixpunktresultate für die Klasse von symplektischen Diffeomorphismen, welche durch exakt Hamiltonsche Vektorfelder interpoliert werden können. Wie A. Banyaga [B 9] gezeigt hat, ist diese Klasse die Kommutator-Untergruppe [G, G], wo G die Eins-Komponente der Gruppe der symplektischen Diffeomorphismen von (M, ω) ist.

Falls die Eulercharakteristik $\chi(M) \neq 0$ ist, so garantiert natürlich der Lefschetzsche Fixpunktsatz eine periodische Lösung. Kürzlich hat Gromov [G 3] gezeigt, daß (M, ω) mindestens eine 1-periodische Lösung trägt, falls $[\omega] \in H^2(M, \mathbf{R})$ auf dem Bild des Hurewicz-Homomorphismus $\pi_2(M) \to H_2(M, \mathbf{R})$ verschwindet. Im Störungsfall, d. h. unter der zusätzlichen Annahme, daß

$$\sup_{x \in M} |\nabla h_t(x)|$$

hinreichend klein ist, ist die Arnoldsche Vermutung von A. Weinstein [W 11] verifiziert worden.

Im globalen Fall ist, wie wir gesehen haben, die Vermutung richtig für die speziellen Flächen S^2 (Satz 1) und T^2 (Satz 2) bezüglich jeder symplektischen Struktur. Es genügt in der Tat im zweidimensionalen Fall das Resultat für eine spezielle symplektische Struktur zu beweisen, da nach einem Satz von Moser [M 8], je zwei Volumenformen bis auf eine Konstante äquivalent sind. Für die Flächen höheren Geschlechts stammt das Resultat von A. Floer [F 7] und J. Sikorav [S 6]:

Satz 4. *Auf einer kompakten orientierten 2-dimensionalen Fläche* (P, ω) *vom Geschlecht* $g \geqslant 1$ *hat jedes exakt Hamiltonsche Vektorfeld* $X_t \geqslant CL(P) = 3$ *periodische Lösungen* (resp. $\geqslant SB(P) = 2 + 2g$ *im nicht entarteten Fall*).

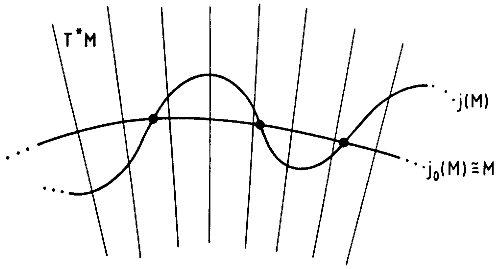
Tatsächlich ist Satz 4 ein Spezialfall von allgemeineren Resultaten in [F 7] und [S 6] für gewisse Kählermannigfaltigkeiten in beliebigen Dimensionen, wo weitreichende Verfeinerungen der beim Beweis des Torus zugrundeliegende Variationsideen zum Ziele führen. Im Falle des Torus T^{2n}, $n > 1$, ist die Vermutung bis jetzt nur für solche symplektische Strukturen bewiesen, welche der Standardstruktur (Satz 3) äquivalent sind. In diesem Zusammenhang fällt auch auf, daß das Klassifikationsproblem symplektischer Strukturen von kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimension größer als 2 offen scheint. Für den komplexen projektiven Raum $\mathbf{CP}^n$ mit der standard-symplektischen Struktur ist die Arnoldsche Vermutung von A. Weinstein und B. Fortune [F 6] bewiesen worden. Interessant in diesem Fall, welcher den Fall $S^2 \cong \mathbf{CP}^1$ auf höhere Dimensionen verallgemeinert, ist die Tatsache, daß wegen $\pi_2(\mathbf{CP}^n) \neq 0$ der Variationszugang nicht direkt benutzt werden kann. Diese Schwierigkeit wird umgangen, indem man das System auf $\mathbf{CP}^n$ als Reduktion im Sinne von [M 9] eines Hamiltonschen Systemes auf $\mathbf{C}^{n+1}$ betrachtet, wo dann die Variationsmethoden aus [B 21] Zum Ziele führen.

3 Schnittpunkte von Lagrangemannigfaltigkeiten

Die oben beschriebene Variationstechnik kann auch auf andere globale Fragen der symplektischen Geometrie, nämlich auf das Schnittpunktproblem von Lagrangemannigfaltigkeiten, angewendet werden. Im Störungsfall taucht diese Frage zunächst wieder in der Himmelsmechanik auf, so etwa beim lokalen Fixpunktsatz von Birkhoff-Lewis, siehe [M 3, V 2], und veranlaßte V. I. Arnold [A 12] zur Formulierung globaler Verallgemeinerungen.

Ist M eine kompakte Mannigfaltigkeit, so ist das Kotangentenbündel (T^*M, ω) mit $\omega = d\lambda$ eine symplektische Mannigfaltigkeit, wobei λ die Liouville-

Form auf T*M ist. Eine Einbettung $j : M \to T^*M$ heißt Lagrange-Einbettung, falls $j^*(d\lambda) = 0$ ist; falls $j^*(\lambda)$ eine exakte 1-Form auf M ist, so heißt j eine exakte Lagrange-Einbettung. Der 0-Schnitt $j_0 : M \to T^*M$ des Bündels ist ein solches Beispiel. Allgemeiner definiert jede exakte Form $j := dS : M \to T^*M$ eine exakte Lagrange-Einbettung, da $\beta^*\lambda = \beta$ für jede 1-Form β auf M ist. Die kritischen Punkte der Funktion $S : M \to \mathbf{R}$ sind in diesem Fall die Schnittpunkte von dS(M) mit dem 0-Schnitt $j_0(M)$, und wir erhalten die Abschätzung $\# \{j(M) \cap j_0(M)\} \geqslant CL(M)$.



Die globale Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes ist der folgende Schnittpunktsatz von M. Chaperon [C 26], [H 8], [L 4].

Satz 5. *Sei* $j : M \to T^*(M)$ *eine exakte Lagrangeeinbettung einer kompakten Mannigfaltigkeit* M. *Dann gilt*

$$\# \{j(M) \cap j_0(M)\} \geqslant CL(M)$$

($\geqslant SB(M)$ *falls alle Schnittpunkte transversal sind*), *vorausgesetzt, daß* $j = j_1$ *durch eine Familie von Lagrangeeinbettungen* $j_t : M \to T^*M$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ *zum* 0-*Schnitt* j_0 *deformiert werden kann.*

Die Annahme an $j = j_1$ erlaubt die Konstruktion einer speziellen Deformation von Lagrange-Einbettungen

$$j_t := \phi^t \circ j_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

wobei ϕ^t der Fluß eines exakt Hamiltonschen Vektorfeldes auf (T^*M, ω) ist, dessen Hamiltonfunktion $h(t, p)$, $p \in T^*M$, kompakten Träger hat. Man verifiziert leicht, daß die kritischen Punkte des klassischen Variationsfunktionals

$$f(x) = \int_0^1 \{x^*(\lambda) - h(t, x)\}\, dt,$$

definiert auf der Mannigfaltigkeit der Abbildungen $x : [0, 1] \to T^*M$, mit den natürlichen Randbedingungen $x(0), x(1) \in j_0(M)$, in ein-eindeutigem Zusammenhang mit den gesuchten Schnittpunkten $j_0(M) \cap j(M)$ sind.

Für den im Hinblick auf Anwendungen in der Himmelsmechanik interessanten Fall $M = T^n$ ist dieses Variationsproblem von M. Chaperon [C 2] formuliert und gelöst worden. In Analogie zur Technik der gebrochenen Geodätischen in der Riemannschen Geometrie hat Chaperon später [C 27] ein verschiedenes, äquivalentes, Variationsprinzip auf einer endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit gefunden, welches von F. Laudenbach und J. Sikorav [L 4] zum Beweis im allgemeinen Fall verwendet wurde. Dieselbe Methode erlaubt auch einen einfachen Beweis von

Satz 3 [C 29]. H. Hofer [H 8] schätzt in seinem Beweis von Satz 5 die Anzahl kritischer Punkte des Aktionsfunktionals direkt ab.

Mit völlig neuen Methoden hat M. Gromov kürzlich [G 3] gezeigt, daß $j(M) \cap j_0(M) \neq \emptyset$ ist für jede exakte Lagrange-Einbettung. Die Multiplizitätsfrage unter dieser, im Vergleich mit den Annahmen von Satz 5 schwächeren Annahme, ist noch ungelöst. Für weitere Resultate und offene Fragen der symplektischen Geometrie sei auf [C 28], [G 3], [L 5] und [S 9] verwiesen.

4 Subharmonische Lösungen auf kompakten Mannigfaltigkeiten

Die Stärke des Poincaré-Birkhoffschen Fixpunktsatzes liegt darin, daß er auf einen Schlag unendlich viele periodische Punkte durch Anwendung des Satzes auf die Iterierten liefert, welche in den Anwendungen zu unendlich vielen periodischen Lösungen führen, siehe [B 4]. In der analogen Frage nach subharmonischen Lösungen, d. h. Lösungen der Periode 2, 3, . . . eines 1-periodischen Hamiltonschen Systemes auf einer kompakten Mannigfaltigkeit gibt es bis jetzt wenige Resultate.

Lokal in der Umgebung einer 1-periodischen Lösung kann man unter gewissen Annahmen sehr viele subharmonische Lösungen finden. Ist eine 1-periodische Lösung elliptisch, d. h. liegen die Floquetmultiplikatoren auf dem Einheitskreis, und erfüllen diese linearen Birkhoffinvarianten und die ersten nichtlinearen Birkhoffinvarianten endlich viele Bedingungen, so findet man in jeder Tubenumgebung T_ϵ vom Durchmesser ϵ eine Menge von subharmonischen Lösungen, deren Abschluß P sogar positives Maß hat:

$$\mathrm{Vol}\,(T_\epsilon \setminus P) = O(\sqrt{\epsilon})\ \mathrm{Vol}\,(T_\epsilon),$$

wobei an das System sehr hohe Glattheitsforderungen gestellt werden müssen, so daß es sich nicht wirklich um topologische Aussagen handelt. Der Beweis beruht auf der analytisch schwierigen K.A.M.-Theorie invarianter Tori, von denen man mit Hilfe des lokalen Fixpunktsatzes von Birkhoff-Lewis [M 3], nachweist, daß sie im Abschluß der subharmonischen Lösungen liegen, siehe [P 3] und [C 19].

Die globalen Methoden, mit denen die 1-periodischen Lösungen gefunden wurden, geben keinen Rückschluß auf deren mögliche Birkhoffinvarianten. Der folgende Existenzsatz garantiert unendlich viele globale subharmonische Lösungen, welche nicht notwendigerweise in der Nähe der erzwungenen Schwingungen liegen, unter Annahme an das linearisierte System längs aller 1-periodischen Lösungen.

Satz 6. *Kein Floquetmultiplikator der* 1*-periodischen Lösungen von* $\dot{x} = J\nabla h(t, x)$ *auf* T^{2n}, $n \geqslant 2$, *sei eine Einheitswurzel. Dann existiert ein* $T^* > 1$, *so daß für jede Primzahl* $T \geqslant T^*$ *eine periodische Lösung mit minimaler Periode* T *existiert.*

Für den Beweis [C 22] wichtig ist eine Beziehung zwischen dem relativen Morse-Index des kritischen Punktes im Loopraum und der „Windungszahl" der dazugehörenden periodischen Lösung im Phasenraum. Diese Infrastruktur des Morse-Index erlaubt es, ähnlich wie beim Problem der geschlossenen Geodätischen, die kritischen Punkte der minimalen T-periodischen Lösungen zu unterscheiden von den kritischen Punkten der T-fach iterierten 1-periodischen Lösungen.

II Globale periodische Lösungen auf $\mathbf{R}^{2n}$

1 Periodische Lösungen auf Energieflächen

Das zeitunabhängige Hamiltonsche System

$$\dot{x} = J\nabla H(x) =: X_H(x), \qquad x \in \mathbf{R}^{2n}$$

hat die Hamiltonfunktion H als Integral, d. h. es gilt für den Fluß ϕ^t mit $\phi^0 = \text{id}$, $H(\phi^t(x)) = H(x)$, für alle $t \in \mathbf{R}$ und $x \in \mathbf{R}^{2n}$. Die sogenannten Energieflächen

$$M = \{x \in \mathbf{R}^{2n} \mid H(x) = c\} \text{ für eine konstante } c \in \mathbf{R},$$

sind also invariant. Falls $\nabla H(x) \neq 0$, $x \in M$, so heißt M eine reguläre Energiefläche, sie ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1, an die das Hamiltonsche Vektorfeld X_H tangential ist.

Man kann nun fragen, ob das Vektorfeld X_H auf M eine periodische Lösung besitzt. Dabei ist es nützlich, sich zunächst daran zu erinnern, daß eine reguläre Energiefläche M (zusammen mit der symplektischen Struktur, die wir aber nicht ändern) das Hamiltonsche Vektorfeld auf M bis auf einen nicht verschwindenden Faktor festlegt. Aus $M = \{x \mid H(x) = c\} = \{x \mid F(x) = c'\}$ für zwei Funktionen mit $\nabla H \neq 0$ und $\nabla F \neq 0$ auf M folgt nämlich $\nabla F(x) = \lambda(x) \cdot \nabla H(x)$ für $x \in M$ und $\lambda(x) \neq 0$, so daß

$$X_F = \lambda X_H \quad \text{auf } M$$

und $\lambda \neq 0$. Die Vektorfelder X_H und X_F haben infolgedessen dieselben Bahnen auf M, obwohl die Parametrisierung natürlich i. allg. verschieden sein wird: ist ϕ^t der Fluß von X_H und ψ^t der Fluß von X_F, so gilt auf $x \in M$:

$$\psi^s(x) = \psi^t(x), \quad \text{wobei } t = t(s, x) \text{ Lösung ist von}$$

$$\frac{dt}{ds} = \lambda(\phi^t(x)) \text{ mit } t(0, x) = 0.$$

Insbesondere haben X_H und X_F auf M dieselben periodischen Bahnen.

Falls z. B. $M := \left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2}|x|^2 = R > 0\right\}$ eine reguläre Energiefläche für X_H ist, so sind alle Lösungen von X_H auf M periodisch, da ja der Fluß ψ^t von X_F, mit $F = \frac{1}{2}|x|^2$ periodisch (mit Periode 2π) ist: $\psi^t(x) = e^{tJ}x = (\cos t)x + (\sin t)Jx$. Dies ist natürlich ein sehr spezielles Beispiel, eine kleine Störung von M wird die Bahnstruktur auf M völlig verändern, immerhin überleben aber noch mindestens n periodische Lösungen, wie wir unten sehen werden.

Nach dieser Vorbemerkung stellt sich das Problem folgendermaßen: suche Bedingung an M, so daß jedes Hamiltonsche Vektorfeld X_H, welches M als reguläre Energiefläche hat, auf M mindestens eine periodische Lösung besitzt.

Im C^1-generischen Sinn sind, wie schon von H. Poincaré vermutet worden war, auf einer kompakten Energiefläche die periodischen Lösungen dicht, was aus dem sogenannten „Closing-Lemma“, siehe C. Pugh und C. Robinson [P 4] folgt; wir sind jedoch an Existenzresultaten interessiert. Das erste globale Resultat stammt von P. Rabinowitz [R 6] und A. Weinstein [W 4].

Satz 1. *Ist* $M = \partial C$ *der* C^2*-Rand eines beschränkten und strikt konvexen Gebietes* $C \subset \mathbf{R}^{2n}$, *so trägt* M *mindestens eine periodische Lösung.*

Tatsächlich hat P. Rabinowitz ein allgemeineres Resultat bewiesen: es genügt, daß C sternförmig bezüglich eines inneren Punktes ist, siehe auch [B 2].

B e w e i s. Der Beweis illustriert einen Trick von F. Clark [C 11, 14] aus der konvexen Optimierungstheorie, der sich in der Folge als populär erwiesen hat. Aufgrund der Vorbemerkung und der Konvexitätsannahme wählen wir zuerst eine geeignete Funktion H mit $M = \{x \mid H(x) = 1\}$, nämlich (i) $H \in C^2(R^{2n} \setminus \{0\})$ (ii) H homogen zweiter Ordnung (iii) H strikt konvex außerhalb des Ursprungs. Die Periode normierend suchen wir für dieses spezielle H periodische Lösungen der Periode 2π von

$$\dot{x} = \lambda X_H(x) \quad \text{auf } M$$

für ein $\lambda \neq 0$. Diese Gleichungen sind die Euler-Gleichungen des Variationsprinzips

$$\min_{x \in H^1(S^1)} \int_0^{2\pi} H(x(t))\,dt \quad \text{und} \ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \langle Jx, \dot{x}\rangle\,dt = 1.$$

Das Funktional ist von unten beschränkt, das Infimum wird aber nicht angenommen, wie man leicht verifiziert. Clarks Trick ist es nun, ein ganz anderes Variationsprinzip, nämlich für die Legendre-Transformierte G von H, zu wählen. Die Konvexität von H benutzend ist G definiert durch

$$G(y) := \max_{\xi} (\langle \xi, y\rangle - H(\xi)) = \langle x, y\rangle - H(x),$$

und es gilt $G(y) + H(x) = \langle x, y\rangle$ für $y = \nabla H(x)$ oder äquivalent dazu $x = \nabla g(y)$. Die Funktion G hat dieselben Eigenschaften (i)–(iii) wie H. Das alternative Variationsprinzip

$$\min_{z \in A} \int_0^{2\pi} G(\dot{z})\,dt =: \min_{z \in A} I(z),$$

wobei $A = \{z \in H^1(S^1) \mid \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z = 0 \quad \text{und} \ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \langle Jz, \dot{z}\rangle = 1\}$,

ist wiederum von unten beschränkt, erfüllt nun aber die richtigen Kompaktheitsbedingungen zur Anwendung der einfachsten direkten Methoden der Variationsrechnung. Man überzeugt sich in der Tat sehr leicht, daß eine minimisierende Folge in A eine Teilfolge besitzt, welche in H^1 schwach gegen das Minimum $z_* \in A$ konvergiert:

$$\inf_{z \in A} I(z) = I(z_*) =: \mu > 0.$$

Das Minimum erfüllt offensichtlich die Eulerschen Gleichungen

$$\nabla G(\dot{z}_*) = \mu J z_* + \beta, \quad \text{für ein } \beta \in \mathbf{R}^{2n}.$$

Mit der punktweisen Legendre-Transformation folgt $\dot{z}_* = \nabla H(\mu J z_* + \beta)$ so daß insbesondere $z_* \in C^2[0, 2\pi]$ ist. Setzt man $x := c(\mu J z_* + \beta)$ mit einer Konstanten c, für welche $\int_0^{2\pi} H(x(t))\,dt = 2\pi$ gilt, so folgt mittels der Homogenität, daß $y(t) := x(\mu^{-1} t)$ eine Lösung von $\dot{x} = J\nabla H(x)$ auf $H = 1$ mit Periode $2\pi\mu$ ist.

Für einen anderen Beweis, der auf dem bekannten Mountain-Pass-Lemma, einer speziellen Minimaxtechnik für kritische Punkte [H 7] beruht, verweisen wir auf [A 6]. Der Trick von Clark, in abstrakten Rahmen häufig duales Wirkungsprinzip genannt, hat zu sehr vielen Resultaten unter Konvexitätsannahmen geführt, siehe etwa [A 7, 8, B 21–23, C13–16, 21, 25, 31, E 1–4, 6, 11–13, G 4, M 1, W 13], und wurde auch für Existenzbeweise von semilinearen partiellen Differentialgleichungen verwendet [B 37]. Für eine abstrakte Formulierung des dualen Wirkungsprinzips siehe [B 22, 35, E 7, 9, W 14].

Man kann sich fragen, ob eine reguläre Energiefläche mehr als eine periodische Lösung trägt. Falls nur endlich viele periodische Lösungen auf einer konvexen Energiefläche existieren, so müssen diese in der Tat in einem ganz speziellen Verhältnis (Resonanzbedingungen) zueinander stehen, so daß also eine konvexe Energiefläche „fast immer" unendlich viele periodische Lösungen trägt, wie I. Ekeland [E 13] im Rahmen seiner auf dem dualen Wirkungsprinzip beruhenden Morse-Theorie periodischer Lösungen auf einer konvexen Energiefläche gezeigt hat. Der folgende Multiplizitätssatz von I. Ekeland und J. Lasry [E 5] ist nicht nur generischer Natur, erfordert jedoch metrische Zusatzbedingungen.

Satz 2. *Falls, zusätzlich zu den Voraussetzungen von* Satz 1, $K_r \subset C \subset K_R$ *für zwei abgeschlossene Kugeln mit Radien* $r < R < \sqrt{2}\,r$, *so trägt* $M = \partial C$ *mindestens* n *periodische Lösungen.*

Die zusätzlichen periodischen Lösungen werden als Sattelpunkte des Variationsproblems gefunden mit Hilfe einer Minimax-Technik, welche auf einer S^1-äquivarianten Index-Theorie basiert. Die quantitativen Restriktionen stellen sicher, daß verschiedene kritische Punkte tatsächlich auch zu geometrisch verschiedenen periodischen Lösungen gehören, eine notorische Schwierigkeit, welche im Problem der geschlossenen Geodätischen wohlbekannt ist. Diese Index-Theorie ersetzt analoge, auf der Kategorie oder dem genus basierende Argumente und wurde von E. Fadell und P. Rabinowitz [F 2] eingeführt, siehe auch [B 10–13]. Sie ist ein nützliches Hilsmittel beim Beweis von Multiplizitätsresultaten zeitunabhängiger Systeme.
Der ursprüngliche Beweis von Satz 2 wurde in [A 8] erheblich vereinfacht, siehe auch [H 4], [W 9], [B 21] für weitere Beweise.

Im Spezialfall eines klassischen konservativen Systems mit Potential V

$$H(x) = \frac{1}{2} |p|^2 + V(q),$$

$x = (p, q) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, haben H. Gluck und W. Ziller [G 1] mittels differentialgeometrischer Methoden die Pionierarbeit von H. Seifert [S 4] verallgemeinert:

Satz 3. *Ist* $\Omega = \{q \in \mathbf{R}^n \mid V(q) \leqslant h\}$ *nicht leer und kompakt, so trägt die Energiefläche* $M = \{H(x) = h\}$ *mindestens eine periodische Lösung.*

Falls $\nabla V(q) \neq 0$ für $q \in \partial\Omega$, so ist die gesuchte Lösung ein „break-orbit", die zwischen Punkten von $\partial\Omega$ hin und her oszilliert. Sie wird mittels der klassischen Euler-Maupertius-Jacobi-Prinzips gefunden, welches sagt, daß die periodischen Lösungen auf M die geschlossenen Geodätischen in Ω bezüglich der „Jacobi-Metrik"

$$dg(q) := \sqrt{h - V(q)}\, ds, \qquad q \in \Omega,$$

sind. Das Problem mit dieser Metrik besteht offenbar darin, daß sie am Rande $\partial\Omega$ degeneriert, so daß Standardtechniken der Riemannschen Geometrie nicht direkt angewendet werden können. Für einen neuen, mehr analytischen Beweis für allgemeinere Systeme der Form $H(x) = \langle A(q)p, p\rangle + V(q)$ mit $A(q)$, $q \in \Omega$, positiv definit, siehe [B 14, 16], siehe auch [H 3].

Die in Satz 1 und 2 geforderte Konvexität für die Energiefläche kommt zwar den bisher verwendeten Variationstechniken eines Funktionals in linearen Funktionenräumen entgegen, ist aber im Hinblick auf die Transformationstheorie Hamiltonscher Vektorfelder kaum befriedigend, da diese Eigenschaft nicht invariant unter symplektischer Diffeomorphismen ist, siehe auch [W 5]. In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, daß H. Seifert vermutet hatte, daß jedes Vektorfeld auf einer Sphäre S^3 eine periodische Lösung hat. P. Schweitzer [S 3] hat jedoch 1974 ein C^1-Vektorfeld auf S^3 ohne periodische Lösungen konstruiert, für höhere Dimensionen hatte dies T. Wilson [W 10] schon früher getan. Es ist aber denkbar, daß die Vermutung richtig ist, falls man die Vektorfelder auf die Klasse der Hamiltonschen Vektorfelder einschränkt:

Modifizierte Seifert-Vermutung. *Jede reguläre Energiefläche, welche diffeomorph zu einer Sphäre* S^{2n+1} *ist, trägt mindestens eine periodische Lösung.*

2 Periodische Lösungen mit vorgegebener Periode und erzwungene Schwingungen

Über die Perioden der auf den globalen Energieflächen gefundenen Lösungen ist wenig bekannt, siehe [R 7, C 24, B 21] und [E 12] für Aussagen über die Floquetmultiplikatoren. Anstatt nach Lösungen mit vorgegebener Energie kann man aber auch nach Lösungen mit vorgegebener Periode T suchen. Der folgende Multiplizitätssatz von P. Rabinowitz [R 10] ist der bisherige Höhepunkt einer ganzen Reihe von Vorarbeiten:

Satz 4. *Die Hamiltonfunktion* $H \in C^1(\mathbf{R}^{2n})$ *erfülle die folgende asymptotische Nichtlinearitätsbedingung: es gibt ein* $r > 0$ *und* $\mu > 2$, *so daß*

$$\langle \nabla H(x), x\rangle \geqslant \mu H(x) > 0 \quad \textit{für } |x| \geqslant r.$$

Dann gibt es für jede vorgegebene Periode $T > 0$ *und für jedes vorgegebene* $R > 0$ *eine* T-*periodische Lösung* $x(t)$ *mit* $\max_t |x(t)| \geqslant R$.

Daß für jede vorgegebene Periode $T > 0$ unendlich viele Lösungen mit großer Amplitude gefunden werden, liegt an der geforderten starken Nichtlinearität des Hamiltonschen Vektorfeldes, für welche insbesondere gilt: $H(x) \geqslant c_1 |x|^\mu - c_2$ für alle $x \in \mathbf{R}^{2n}$ mit zwei Konstanten c_1 und c_2. Wie einfache

Beispiele im $\mathbf{R}^2$ zeigen, brauchen nicht alle Perioden minimal sein. Der Beweis dieses Satzes ist eine kunstvolle Kombination verschiedener Methoden und Techniken der Theorie kritischer Punkte, angewendet auf das entartete und stark nichtlineare Aktionsfunktional. Für weitere Resultate in diesem Zusammenhang unter Zusatzbedingungen wie Konvexität oder unter andern Nichtlinearitätsbedingungen, auch für das Problem minimaler Perioden, für spezielle klassische konservative Systeme sei auf [A 6–8, B 15, 22, C 13, 14, 16, 21, 31, E 2, 3, 6, 12, G 4, M 1, W 8, 13] verwiesen, wo verschiedenartige Variationstechniken angewendet werden, auf die wir nicht näher eingehen wollen.

Falls das Hamiltonsche System periodisch von der Zeit abhängt,

$$\dot{x} = J\nabla H(t, x), \qquad (t, x) \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n}$$

mit $H(t + T, x) = H(t, x)$ für ein $T > 0$, so ist eine natürliche Periode vorgegeben und man sucht nach periodischen Lösungen der Periode T, den sogenannten erzwungenen Schwingungen, und nach subharmonischen Lösungen, d. h. nach periodischen Lösungen der minimalen Periode nT, $n > 1$ eine ganze Zahl.

Für den Spezialfall einer Gleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + f(t, x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R},$$

stammt das folgende Resultat von P. Hartmann [H 2], welches zuvor von H. Jacobowitz [J 1] unter einer Zusatzbedingung bewiesen worden war.

Satz 5. *Die Funktion* $f(t, x) \in C^1(\mathbf{R}^2)$ *erfülle die drei Bedingungen:*

(i) $f(t + 1, x) = f(t, x)$

(ii) $f(t, 0) = 0$

(iii) $\dfrac{f(t, x)}{x} \to \infty$ *für* $|x| \to \infty$ *uniform in* T.

Dann besitzt die Gleichung unendlich viele erzwungene Schwingungen, genauer: es gibt eine ganze Zahl N_*, *so daß die Gleichung für jede ganze Zahl* $N \geqslant N_*$ *eine* 1*-periodische Lösung mit genau* 2N *Nullstellen in* [0, 1) *besitzt. Falls* n_0 *die Anzahl der Nullstellen einer nichttrivialen Lösung von* $\ddot{y} + f(t, 0)y = 0$ *in* [0, 1) *ist, so kann man* $N_* \geqslant \frac{1}{2} n_0 + 1$ *wählen. Zudem gibt es für je zwei ganze Zahlen* p, q *mit* $p \geqslant N_* q$ *eine subharmonische Lösung der Periode* q *mit genau* 2p *Nullstellen in* [0, p).

Nach einer a-priori-Abschätzung für Lösungen mit vorgegebener Anzahl von Nullstellen in [0, 1), wobei die Sturmschen Vergleichssätze zur Anwendung kommen wird der Existenzbeweis auf den Poincaré-Birkhoffschen Fixpunktsatz zurückgeführt. Schränkt man die Form und die Glattheit der Nichtlinearität ein, z. B. $\ddot{x} + x^{2n+1} + x^{2n}p(t) = 0$ mit $p(t + 1) = p(t)$ eine glatte Funktion, so hat der Abschluß der subharmonischen Lösungen sogar unendliches Lebesgue-Maß [D 6], wie man unter Benutzung des Twisttheorems zeigen kann.

Es sei vorweggenommen, daß es bis jetzt noch keine geeignete Verallgemeinerung dieses Resultats auf höhere Dimensionen gibt. Man kann erwarten, daß die Nichtlinearität so beschaffen sein muß, daß die gesuchten erzwungenen Schwingungen immer größere „Windungszahlen" haben müssen. Unter verschiedenen, den bisher entwickelten Variationstechniken zugänglichen Forderungen an das nichtlineare Verhalten des Systems im Unendlichen kann man auf mindestens eine erzwungene Lösung schließen. Hervorgehoben sei das folgende technisch schwierige Multiplizitätsresultat von A. Bahri und H. Berestycki [B 2] für ein System, welches jedoch in der Nähe eines zeitunabhängigen Systems ist:

Satz 6. *Sei* $H(t, x) = H_0(x) + \langle f(t), x\rangle \in C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n})$ *mit* $f(t + 1) = f(t)$. *Es gelte* $\langle \nabla H_0(x), x\rangle \geqslant \mu H_0(x) - c$ *für alle* $x \in \mathbf{R}^{2n}$ *und zwei Konstanten* $\mu > 2$ *und* $c > 0$, *überdies gelte* $a|x|^{p+1} - b \leqslant H_0(x) \leqslant c|x|^{q+1} + d$ *für alle* $x \in \mathbf{R}^{2n}$ *und* $1 < p \leqslant q < 2p + 1$. *Dann gibt es unendlich viele erzwungene Schwingungen.*

Der Beweis beruht auf Verfeinerungen der von Rabinowitz entwickelten Minimaxtechniken und benutzt die S^1-Index-Theorie für das zeitunabhängige System $H_0(x)$. In Kontrast zu diesem analytischen Resultat steht das folgende mehr topologische Ergebnis über sehr schwach nichtlineare, nämlich asymptotisch lineare Systeme, bei denen man i. allg. nur endlich viele erzwungene Schwingungen erwarten kann:

Satz 7. *Für* $H(t, x) \in C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n})$, $n \geqslant 2$, *mit* $H(t + T, x) = H(t, x)$ *gelte:*

$$J\nabla H(t, x) = JA_\infty(t)x + o(|x|) \quad \text{für} \quad |x| \to \infty$$

$$J\nabla H(t, x) = JA_0(t)x + o(|x|) \quad \text{für} \quad |x| \to 0,$$

uniform in t, *für zwei stetige*, T-*periodische symmetrische Matrizen* A_0 *und* A_∞. *Falls die beiden linearen Hamiltonschen Systeme* $\dot{x} = JA_\infty(t)x$ *und* $\dot{x} = JA_0(t)x$ *keine nichttrivialen* T-*periodischen Lösungen besitzen, und falls sie in der Menge solcher linearer Hamiltonscher Systeme nicht zueinander homotop sind, so existiert mindestens eine nichttriviale* T-*periodische Lösung. Falls diese nichtdegeneriert ist, so existiert noch eine zweite.*

Dieses Resultat, ein Spezialfall der Morse-Theorie erzwungener Schwingungen für asymptotisch lineare Hamiltonsche Systeme [C 18], erinnert an den Poincaré-Birkhoffschen Fixpunktsatz und deutet auf mögliche Verallgemeinerungen dieses 2-dimensionalen Existenzsatzes auf symplektischen Diffeomorphismen in höheren Dimensionen hin. Für weitere Existenz- und Multiplizitätsresultate im Rahmen asymptotisch linearer Hamiltonscher Systeme siehe [A 3–5, C 2, 10, W 13].

III Lokale periodische Lösungen in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes

Interessiert man sich für die Bahnstruktur einer Gleichung $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbf{R}^m$ in der Nähe eines nichtdegenerierten Gleichgewichtspunktes, etwa $f(0) = 0$, so betrachtet man zunächst die Lösungen des linearisierten Systems:

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0).$$

Das Vorhandensein von imaginären Eigenwerten von A ist offenbar notwendig für die Existenz von kleinen periodischen Lösungen in der Nähe von 0.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die (nicht notwendigerweise voneinander verschieden) Eigenwerte von A, so nehmen wir an, daß

$$\alpha_1 = i\omega, \qquad \alpha_2 = -i\omega, \qquad \omega > 0$$

ein Paar von imaginären Eigenwerten mit Eigenvektoren $A(e_1 + ie_2) = i\omega(e_1 + ie_2)$ ist, so daß $\dot{x} = Ax$ die Familie $x(t) = \operatorname{Re}\{c(e_1 + ie_2)e^{i\omega t}\}$ von periodischen Lösungen der Periode $T = 2\pi/\omega$ hat, welche die Ebene $E = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ ausfüllen. Wir suchen nun nach periodischen Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ in der Nähe von diesen. Zu diesem Zweck muß die Klasse der Vektorfelder eingeschränkt werden, wie das Beispiel

$$\dot{x}_1 = -x_2 + r^2 x_1, \qquad \dot{x}_2 = x_1 + r^2 x_2,$$

$r^2 = x_1^2 + x_2^2$, in $\mathbf{R}^2$ zeigt, wo aus $\frac{d}{dt}|x|^2 = 2|x|^4 > 0$ folgt, daß $x \equiv 0$ die einzige periodische Lösung ist.

Wir nehmen an, daß f ein Integral G hat, also $\langle \nabla G(x), f(x) \rangle = 0$, und erinnert zunächst an den bekannten Satz von Lyapunov [L 3], siehe auch Horn [H 5].

Satz 1. *Sei* $\alpha_1 = i\omega$, $\alpha_2 = -i\omega$, $\omega > 0$. *Falls die anderen Eigenwerte von* A *die Bedingung*

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_1} \neq \text{ganze Zahl}, \qquad 3 \leqslant k \leqslant m$$

erfüllen, und falls das Integral G *von* f *auf* E *nicht degeneriert ist, d. h.* $G_{xx}(0)|E$ *nichtdegeneriert, (in welchem Fall es definit, sagen wir positiv definit ist) dann gibt es für jedes* ϵ *hinreichend klein eine eindeutige periodische Lösung* $x(t, \epsilon)$ *nahe von* E *mit Periode* $T(\epsilon)$ *nahe von* $T = 2\pi/\omega$ *auf der Integralfläche* $G(x) - G(0) = \epsilon^2$; *überdies* $x(t, \epsilon) \to 0$ *und* $T(\epsilon) \to T$ *für* $\epsilon \to 0$.

Die Nichtresonanzbedingung dieses Satzes, welcher mit der Poincaréschen Fortsetzungsmethode sofort bewiesen ist, fordert, daß die Ebene E alle periodischen Lösungen von $\dot{x} = Ax$ mit Periode $T = 2\pi/\omega$ enthält. Falls es mehrere Paare von rein imaginären Eigenwerten gibt, so schließt man auf dementsprechend mehrere Familien von periodischen Lösungen mit Perioden nahe den Grundschwingungen, vorausgesetzt jedoch, daß die entsprechenden Nicht-Resonanzbedingungen erfüllt sind. Sind diese Resonanzbedingungen verletzt, so braucht es keine periodische Lösungen außer dem Gleichgewichtspunkt zu geben, wie einfache Beispiele zeigen.

Der Satz ist insbesondere anwendbar auf ein Hamiltonsches Vektorfeld $f(x) = J\nabla H(x)$, $x \in \mathbf{R}^{2n}$ mit $\nabla H(0) = 0$, welches die Funktion H als Integral hat, und wir beschränken uns im folgenden auf diese Situation.

Erst in relativ jüngerer Zeit hat A. Weinstein [W 1] entdeckt, daß die Nicht-Resonanz-Bedingungen durch andere Bedingungen an das linearisierte System ersetzt werden können: Falls die Hamiltonfunktion am Gleichgewichtspunkt definit ist (sagen wir positiv definit), dann gibt es auf jeder Energiefläche $H(x) - H(0) = \epsilon^2 > 0$, ϵ klein, mindestens n periodische Lösungen mit Perioden nahe den Grundschwingungen. Keine Resonanzbedingung ist gefordert, stattdessen muß $H_{xx}(0)$ definit sein! Um die allgemeinere Version von J. Moser [M 2] zu formulieren, kürzen wir das linearisierte Vektorfeld ab: $JH_{xx}(0) =: A$.

Satz 2. $\mathbf{R}^{2n} = E + F$ *lasse sich in zwei unter* A *invariante Unterräume aufspalten, so daß alle Lösungen von* $\dot{x} = Ax$ *in* $x \in E$ *die Periode* $T > 0$ *haben, während keine Lösungen in* $F \setminus \{0\}$ *diese Periode hat. Falls* $H_{xx}(0)|E > 0$, *so gibt es für jedes kleine* $\epsilon > 0$ *mindestens* $\frac{1}{2}\dim E$ *periodische Lösungen auf* $H(x) = H(0) + \epsilon^2$ *mit Perioden nahe an* T.

Die Beweismethode hat M. Bottkol [B 34] zu einem abstrakten Bifurkationssatz für periodische Lösungen inspiriert, welche von einer Untermannigfaltigkeit, auf welcher alle Lösungen periodisch sind, verzweigen. Für eine Erweiterung des Resultats siehe [W 6]. Für weitere Beweise von Satz 2, siehe [C 9], [E 1].

Falls die Hessesche $H_{xx}(0)|E$ im Satz indefinit ist, so braucht das Hamiltonsche System keine periodische Lösung außer dem Gleichgewichtspunkt zu besitzen, wie das Beispiel in [M 5] zeigt. Verschwindet aber die Signatur dieser Hesseschen nicht (sie ist eine gerade Zahl):

$$\operatorname{sign}(H_{xx}(0)|E) = 2\nu \neq 0$$

so haben E. Fadell und R. Rabinowitz [F 2] in jeder offenen Umgebung U von $\{0\}$ mindestens $|\nu|$ periodische Lösungen zu vorgegebener Periode nahe T gefunden:

$$\#\{\text{Periodische Lösungen in } U\setminus\{0\} \text{ mit Periode nahe } T\} \geqslant |\nu|,$$

dabei wird also, im Gegensatz zu den obigen Resultaten, nach kleinen periodischen Lösungen mit vorgegebener Periode und nicht mit vorgegebener Energie gesucht; genauer gilt der folgende

Satz 3 [F 2]. $\mathbf{R}^{2n} = E + F$ *spalte sich in zwei, unter* A *invariante Unterräume auf, so daß alle Lösungen von* $\dot{x} = Ax$ *in* E *die Periode* T *haben, aber keine Lösung in* $F\setminus\{0\}$ *diese Periode besitzt. Sei nun* $H_{xx}(0)|E$ *nicht degeneriert und* $\operatorname{sign}(H_{xx}(0)|E) = 2\nu \neq 0$.

Sei $\{0\}$ *eine isolierte* T*-periodische Lösung. Dann gibt es zwei nicht negative ganze Zahlen* k_+ *und* k_- *mit* $k_+ + k_- \geqslant |\nu|$, *so daß für jede Umgebung* U *von* $\{0\}$ *in* $\mathbf{R}^{2n}$ *das Folgende gilt: Für jede Zahl* $\tau \in [T - \epsilon, T + \epsilon]$ *ist die Anzahl* τ*-periodischer Lösungen in* $U\setminus\{0\}$ *mindestens* k_+, *falls* $\tau > T$, *und mindestens* k_-, *falls* $\tau < T$. *Die positive Zahl* $\epsilon > 0$ *hängt dabei ab von der Wahl von* U.

Ein alternativer Beweis dieses Bifurkationsresultats, welches ursprünglich mittels Mini-Max-Methoden im Zusammenhang mit einer S^1-äquivarianten Index-Theorie bewiesen worden war, beruht auf dem äquivarianten Analogon der Homotopie-Index-Theorie von C. Conley [C 17] für äquivariante Flüsse auf metrischen Räumen, siehe [F 10].

In den bis anhin besprochenen Resultaten wurden die periodischen Lösungen nahe dem Gleichgewichtspunkt aus Bedingungen an das linearisierte Vektorfeld geschlossen, das lediglich stetig differenzierbar zu sein braucht. Die gefundenen periodischen Lösungen sind sogenannte Fundamentalschwingungen, deren

Perioden nahe denjenigen des linearen Systems sind. Falls man mehr Informationen über die nichtlineare Struktur eines glatten Hamiltonschen Vektorfeldes besitzt, so schließt man dementsprechend mehr über die Bahnstruktur in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes. Falls zum Beispiel alle Eigenwerte des linearisierten Hamiltonschen Vektorfeldes rein imaginär sind und zudem endlich viele Nicht-Resonanzbedingungen erfüllen, und falls zusätzlich die nichtlinearen Birkhoff-Invarianten endlich viele Bedingungen erfüllen, welche die Nichtlinearität postulieren, so ist das System nahe dem Gleichgewichtspunkt durch ein integrables System approximierbar. Mit Hilfe der K.A.M.-Theorie beweist man, daß im Sinne des Maßes die meisten Lösungen quasiperiodisch mit n Frequenzen sind. Da diese im Abschluß der periodischen Lösungen liegen, so erhält man, daß der Abschluß der periodischen Lösungen in jeder Umgebung des Gleichgewichtspunktes $\{0\}$ sogar positives Maß hat. Die Perioden dieser Lösungen sind jedoch sehr groß und deshalb für unsere Diskussion weniger interessant.

Falls in Kontrast dazu die Eigenwerte des linearisierten Vektorfeldes in $\{0\}$ in Resonanz sind, eine Situation die man z. B. in der Himmelsmechanik antrifft, so hat H. Duistermaat eine Strategie entwickelt, wie man, unter generischen Annahmen an Terme höherer Ordnung, mittels der Moserschen Bifurkationstheorie [M 2], kombiniert mit der S^1-äquivarianten Singularitätentheorie und der Theorie der Birkhoff-Normalformen, eine gute Einsicht in die Bifurkationsstruktur periodischer Lösungen vom Typ der Grundschwingungen gewinnen kann, siehe [D 5] und [M 10] und die darin angegebenen Referenzen.

IV Referenzen

[A 1] Albeverio, S.; Blanchard, P.; Höegh-Krohn, R.: Feynman path integrals and the trace formula for Schrödinger operators. Commun. math. Phys. **83** (1982) 49–76

[A 2] Alexander, J. C.; Yorke, J. A.: Global Bifurcation of periodic orbits. Amer. J. Math. **100** (1978) 263–292

[A 3] Amann, H.: Saddle points and multiple solutions of differential equations. Math. Z. **169** (1979) 127–166

[A 4] Amann, H.; Zehnder, E.: Nontrivial Solutions for a Class of Nonresonance Problems and Applications to Nonlinear Differential Equations. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie IV, Vol. **VII** (1980) 539–603

[A 5] Amann, H.; Zehnder, E.: Periodic solutions of asymptotically linear Hamiltonian systems. Manus. Math. **32** (1980) 149–189

[A 6] Ambrosetti, A.: Recent advances in the study of the existence of periodic orbits of Hamiltonian systems. Advances in Hamiltonian Systems. Birkhäuser 1983, 1–22

[A 7] Ambrosetti, A.; Mancini, G.: Solutions of Minimal Period for a Class of Convex Hamiltonian Systems. Math. Ann. **255** (1981) 405–421

[A 8] Ambrosetti, A.; Mancini, G.: On a theorem by Ekeland and Lasry concerning the number of periodic Hamiltonian trajectories. J. Diff. Equ. **43** (1982) 249–256

[A 9] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P.: Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Functional Analysis **14** (1973) 349–381

[A 10] Arnold, V. I.: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XXVIII. AMS (1976) p. 66

[A 11] Arnold, V. I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics, Appendix 9. Springer 1978

[A 12] Arnold, V. I.: Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. C. R. Acad. Sci. Paris **261** Groupe 1 (1965) 3719–3722

[B 1] Bahri, A.: Groupes d'homotopie des ensembles de niveaux pour certaines fonctionelles à gradient Fredholm, à paraître

[B 2] Bahri, A.; Berestycki, H.: Forced vibrations of superquadratic hamiltonian systems. Acta Math. **152** (1984) 143–197

[B 3] Bahri, A.; Berestycki, H.: Existence of forced oscillations for some nonlinear differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **XXXVII** (1984) 403–442

[B 4] Bahri, A.; Berestycki, H.: Points critiques de perturbations de fonctionnelles paires et applications. C. R. Acad. Sci. Paris **291**, Série A (1980) 189–192

[B 5] Bahri, A.; Berestycki, H.: Existence d'une infinité de solutions périodiques de certains systèmes. C. R. Acad. Sci. Paris **292**, série A (1981) 315–318

[B 6] Ballmann, W.; Thorbergsson, G.; Ziller, W.: Closed geodesics on positively curved manifolds. Ann. of Math. **116** (1982) 231–247

[B 7] Ballmann, W.; Ziller, W.: On the number of closed geodesics on a compact Riemannian manifold. Duke Math. J. **49** (1982) 629–632

[B 8] Bangert, V.: Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **87** (1985) 39–66

[B 9] Banyaga, A.: Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui presérvent une forme symplectique. Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 174–227

[B 10] Benci, V.: Some critical point theorems and applications. Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980) 147–172

[B 11] Benci, V.: On critical point theory for indefinite functionals in the presence of symmetries. Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982) 533–572

[B 12] Benci, V.: A geometrical index for the group S^1 and some applications to the research of periodic solutions of O.D.E.'s. Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981) 393–432

[B 13] Benci, V.; Rabinowitz, P.: Critical point theorem for indefinite functionals. Invent. Math. **52** (1979) 241–273

[B 14] Benci, V.: Normal modes of a Lagrangian system constrained in a potential well. Ann. Inst. H. Poincaré **1** (1984) 379–400

[B 15] Benci, V.: The direct method in the study of periodic solutions of Hamiltonian systems with prescribed period. Advanced in Hamiltonian Systems. Birkhäuser 1983, 24–43

[B 16] Benci, V.: Closed geodesics for the Jacobi metric and periodic solutions of prescribed energy of natural Hamiltonian systems. Ann. Inst. H. Poincaré **1** (1984) 401–412

[B 17] Berestycki, H.: Orbites périodiques de systèmes conservatifs. Sem. Goulaouic-Mayer-Schwartz. Exposé n^0 XXIV, 1981–82, Ec. Polytechnique, Palaiseau

[B 18] Berestycki, H.; Brezis, H.: On a free boundary problem arising in plasma physics. Nonlinear Analysis, T.M.A. **4** (1980) 415–436

[B 19] Berestycki, H.; Lasry, J. M.: A topological method for the existence of periodic orbits for conservative systems. Preprint

[B 20] Berestycki, H.: Solutions périodiques des systèmes Hamiltoniens. Seminaire BOURBAKI 35e année, 1982/83, n^0 603

[B 21] Berestycki, H.; Lasry, J. M.; Mancini, G.; Ruf, B.: Existence of multiple periodic orbits on star-shaped hamiltonien surfaces. Comm. Pure Appl. Math. **XXXVIII** (1985) 253–289

[B 22] Benci, V.; Fortunato, D.: The Dual Method in Critical Point Theory. Multiplicity Results for Indefinite Functionals. Ann. Mat. Pura Appl. (IV), **XXXII** (1982) 215–242

[B 23] Benci, V.; Capozzi, A.; Fortunato, D.: Periodic solutions of Hamiltonian systems of presribed period. Preprint MRC – Madison 1983, Technical Summary Report #2508

[B 24] Berger, N.: On periodic solutions of second order Hamiltonian systems. J. Math. Anal. Appl. **29** (1970) 512–522

[B 25] Berger, M.: Periodic solutions of second order dynamical systems and isoperimetric variational problems. Amer. J. Math. **93** (1971) 1–10

[B 26] B e r g e r , M.: On a family of periodic solutions of Hamiltonian systems. J. Diff. Eq. **10** (1971) 17–26
[B 27] B e r g e r , M.: Nonlinearity and Functional Analysis. Academic Press 1977
[B 28] B i r k h o f f , G. D.: An extension of Poincaré's last geometric theorem. Acta Math. **47** (1925) 297–311
[B 29] B i r k h o f f , G. D.: Une generalization à n-dimensions due dernier théorème de géométrie de Poincaré. C. R. Acad. Sci. Paris **192** (1931) 196–198
[B 30] B i r k h o f f , G. D.; L e w i s , D. C.: On the periodic motions near a given periodic motion of a dynamical system. Ann. Mat. Pura Appl. **12** (1933) 117–133
[B 31] B i r k h o f f , G. D.: On the periodic motions of dynamical systems. Acta Math. **50** (1927) p. 359–379
[B 32] B o t t , R.: Marston Morse and his mathematical works. Bull. (New Series) AMS **3** (1980) 907–950
[B 33] B o t t , R.: Lectures on Morse theory, old and new. Bull. (New Series) AMS **7** (2) (1982) 331–358
[B 34] B o t t k o l , M.: Bifurcation of periodic orbits on manifolds and Hamiltonian systems. J. Diff. Eq. **37** (1980) 12–22
[B 35] B r e z i s , H.: Periodic solutions of nonlinear vibrating strings and duality principle. Bull. AMS **8** (1983) 409–426
[B 36] B r e z i s , H.; C o r o n , J. M.: Periodic solutions of nonlinear wave equations and hamiltonian systems. Amer. J. of Math. **103** (1980) 559–570
[B 37] B r e z i s , H.; C o r o n , J. M.; N i r e n b e r g , L.: Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz. Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980) 667–684
[B 38] B r o w n , M.; N e u m a n n , W. D.: Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem. Michigan Math. J. **24** (1977) 21–31
[B 39] B i r k h o f f , G. D.: Proof of Poincaré's Geometric Theorem. Trans. Amer. Math. Soc. **14** (1913) 14–22
[B 40] B i r k h o f f , G. D.: The restricted problem of three bodies. Rend. Circolo Mat. Palermo **39** (1915) 265–334
[B 41] B i r k h o f f , G. D.: Dynamical systems with two degrees of freedem. Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917) 199–300
[B 42] B e n c i , V.: Periodic Solutions of Lagrangian Systems on a Compact Manifold. Preprint, Università die Pisa 1985
[C 1] C a r t e r , P. H.: An improvement of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem. Trans. AMS (1982) 285–299
[C 2] C h a n g , K. C.: Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse theory. Comm. Pure and Appl. Math. **34** (1981) 693–712
[C 3] C h e n c i n e r , A.: Sur un énoncé dissipatif du théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff. C. R. Acad. Sci. Paris **294** I (1982) 243–245
[C 4] C h o w , S. N.; M a l l e t - P a r e t , J.: The Fuller Index and Global Hopf Bifurcation. J. Diff. Eq. **29** (1978) 66–85
[C 5] C h o w , S. N.; M a l l e t - P a r e t , J.: Periodic solutions near an equilibrium of a nonpositive definite Hamiltonian system. Preprint, Michigan State Univ.
[C 6] C h o w , S. N.; M a l l e t - P a r e t , J.: Y o r k e , J. A.: Global Hopf bifurcation from a multiple eigenvalue. Nonlinear Analysis, Theory, Meth. and Appl. **2** (1978) 753–763
[C 7] C l a r k , D. C.: Periodic solutions of variational systems of ordinary differential equations. J. Diff. Eq. **28** (1978) 354–368
[C 8] C l a r k , D.: On periodic solutions of autonomous Hamiltonian systems of ordinary differential equations. Proc. AMS **39** (1973) 579–584
[C 9] C h o w , S. N.; H a l e , J.: Methods of Bifurcation Theory. Springer Grundlehren, Vol. 251 (1982), p 163–166
[C 10] C h a n g , K. C.: Applications of homology theory to some problems in differential equations. MSRI 064-83, Berkeley 1983
[C 11] C l a r k e , F.: A classical variational principle for periodic Hamiltonian trajectories. Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979) 186–188
[C 12] C l a r k e , F.: Periodic solutions to Hamiltonian inclusions. J. Diff. Equ. **40** (1981) 1–6

[C 13] Clarke, F.; Ekeland, I.: Nonlinear Oscillations and Boundary-Value Problems for Hamiltonian systems. Archive Rat. Mech. and Analysis **78** (1982) 315–333

[C 14] Clarke, F.; Ekeland, I.: Hamiltonian Trajectories Having Precribed Minimal Periods. Comm. Pure and Appl. Math. **33** (1980) 103–116

[C 15] Clarke, F.: Solution periodique des équations hamiltoniennes. C. R. Acad. Sci. Paris **287** (1978) 951–952

[C 16] Clarke, F.; Ekeland, I.: Solutions périodiques, de periode donnée, des équations hamiltoniennes. C. R. Acad. Sci. Paris **287** (1978) 1013–1015

[C 17] Conley, C. C.: Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conf. Series in Math. **38** (1978), AMS Providence R. I.

[C 18] Conley, C. C.; Zehnder, E.: Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations. Comm. Pure and Appl. Math. **XXXVII** (1984) 207–253

[C 19] Conley, C. C.; Zehnder, E.: An index theory for periodic solutions of a Hamiltonian system. Geometric Dynamics, Springer Lecture Notes in Math. 1007, 122–145

[C 20] Conley, C. C.; Zehnder, E.: The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold. Invent. math. **73** (1983) 33–49

[C 21] Capozzi, A.: On Subquadratic Hamiltonian Systems. Nonlinear Analysis T.M.A. **8** (1984) 553–562

[C 22] Conley, C.; Zehnder, E.: Subharmonic solutions and Morse-theory. Physica **124A** (1984) 649–658

[C 23] Crandall, M.; Rabinowitz, P.: Bifurcation from simple eigenvalues. J. Funct. Anal. **8** (1971) 321–370

[C 24] Croke, C. B.; Weinstein, A.: Closed Curves on Convex Hypersurfaces and Periods of Nonlinear Oscillations. Invent. Math. **64** (1981) 199–202

[C 25] Costa, D. G.; Willem, M.: Multiple critical points of invariant functionals and applications. MRC-Madison, Technical report #2532, 1983

[C 26] Chaperon, M.: Quelques questions de géométrie symplectique. Séminaire Bourbaki 1982–83, Astérisque **105–106**, (1983) 231–249

[C 27] Chaperon, M.: Une idée du type géodésiques brisées pour les système hamiltoniens. C. R. Acad. Sci. Paris **298** (1984) 293–296

[C 28] Chaperon, M.: Questions de géométrie symplectique. Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie. Travaux en cours. Hermann Paris 1985, ed. Jean-Paul Dufour, p. 30–45

[C 29] Chaperon, M.: An Elementary Proof of the Conley-Zehnder Theorem in Symplectic Geometry. In: Dynamical Systems and Bifurcations. Springer Lecture Notes, Vol. 1125, 1–8

[C 30] Chaperon, M.; Zehnder, E.: Quelques résultat globaux en géométrie symplectique. Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie III: Autour du Théorème de Poincaré-Birkhoff. Travaux en cours. Hermann Paris 1984, 51–121

[C 31] Colin de Verdiere, Y.: Spectre du Laplacien et longeurs des géodésiques périodiques I, II. Compositio Math. **27** (1973) 83–106 and 159–184

[D 1] Desolneux-Moulis, N.: Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens autonomes. Sém. Bourbaki février 1980, exposé n⁰ 552. Lect. Notes in Math. n⁰ 842, Springer-Verlag 1981

[D 2] Duistermaat, H.: On periodic solutions near equilibrium points of conservative systems. Arch. Rat. Mech. Anal. **45** (1972) 143–160

[D 3] Duistermaat, H.: On the Morse index in variational calculus. Adv. in Math. **21** (1976) 173–195

[D 4] Duistermaat, H.: Periodic solutions near equilibrium points of Hamiltonian systems. North-Holland Math. Stud. 47 (1981) 27–33

[D 5] Duistermaat, H.: Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of Hamiltonian systems. Springer Lecture Notes in Math. Vol. 1057 (1984) 57–105

[D 6] Dieckerhoff, R.; Zehnder, E.: Boundedness of solutions via the Twist-theorem. Preprint RUB Bochum. Bericht Nr. 22 (1984), Springer Lecture Notes, Vol. 1125, 9–14

[E 1] Ekeland, I.: La théorie des perturbations au voisinage des systèmes Hamiltonian convexes. Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, Expose n⁰ VII (1981)

[E 2] Ekeland, I.: Oscillations de systèmes Hamiltoniens non linéaires III. Bull. Soc. Math. France **109** (1981) 297–330

[E 3] Ekeland, I.: Forced Oscillations for Nonlinear Hamiltonian Systems II. In: Advances in Mathematics, volume en l'honeur de Laurent Schwartz, Nachbin, éd. Academic Press 1981

[E 4] Ekeland, I.: Dualité et stabilité des systèmes hamiltoniens. C. R. Acad. Sci. Paris **294**, Série I (1982) 673–676

[E 5] Ekeland, I.; Lasry, J. M.: On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface. Ann. of Math. **112** (1980) 283–319

[E 6] Ekeland, I.: Periodic solutions of Hamiltonian equations and a theorem of P. Rabinowitz. J. Diff. Eq. **34**, (1979) 523–534

[E 7] Ekeland, I.; Lasry, J. M.: Duality in non convex variational problems. In: Advances in Hamiltonian systems. Birkhäuser 1983, 73–108

[E 8] Ekeland, I.: A Perturbation Theory near Convex Hamiltonian systems. J. Diff. Eq. **50** (1983) 407–440

[E 9] Ekeland, I.; Lasry, J. M.: Problèmes variationnels non convexes en dualité. C.R. Acad. Sci. Paris, Série A **291** (1980) 493–496

[E 10] Ekeland, I.; Temam, R.: Convex analysis and variational problems. North Holland, New York 1976

[E 11] Ekeland, I.; Hofer, H.: Periodic solutions with precribed minimal period for convex autonomous Hamiltonian systems. Invent. math. **81** (1985) 155–188

[E 12] Ekeland, I.: Hypersurfaces pincées et systèmes hamiltoniens. Preprint Ceremade, Université Paris-IX, Dauphine 1984

[E 13] Ekeland, I.: Une théorie de Morse pour les systèmes hamiltoniens convexes. Ann Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaires, **1** (1984) 19–78

[F 1] Fadell, E. R.; Rabinowitz, P.: Bifurcation for odd potential operators and an alternative topological index. J. Funct. Anal. **26** (1977) 48–67

[F 2] Fadell, E. R.; Rabinowitz, P.: Generalized chohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems. Inv. Math. **45** (1978) 139–174

[F 3] Fadell, E. R.; Husseini, S.; Rabinowitz, P.: Borsuk-Ulam theorem for arbitrary S^1-actions and applications. Trans AMS **274** (1) (1982) 345–360

[F 4] Fet, A. I.; Lusternik, L. A.: Variational problems on closed manifolds. Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. **81** (1951) 17–18

[F 5] Floer, A.; Zehnder, E.: Fixed point results for symplectic maps related to the Arnold-Conjecture. In: Dynamical System and Bifurcations. Springer Lecture Notes, Vol. 1125 (1985), 47–64

[F 6] Fortune, B.; Weinstein, A.: A symplectic fixed point theorem for complex projetive spaces. Bulletin AMS **12** (1985) 128–130

[F 7] Floer, A.: Proof of the Arnold Conjecture for Surfaces and Generalizations to Certain Kählermanifolds. Duke Math. J. (1986) 1–32

[F 8] Fortune, B.: A symplectic fixed point theorem for $\mathbf{CP}^n$. Invent. math. **81** (1985) 29–46

[F 9] Floer, A.: A refinement of the Conley index and an application to the stability of hyperbolic invariant sets. 1984, erscheint in Dynamical systems and Ergodic Theory

[F 10] Floer, A.; Zehnder, E.: The Equivariant Conley Index and Bifurcations of Periodic Solutions of Hamiltonian Systems, Forschungsbericht, FIM E.T.H. Zürich, 1985

[F 11] Franks, J.: Recurrence and Fixed Points of Surface Homeomorphismus. Preprint, North Western University, Evanston 1985

[G 1] Gluck, H.; Ziller, W.: Existence of periodic motions of conservative systems. In: Seminar on Minimal Submanifolds, E. Bombieri, ed. Princeton University Press 1983

[G 2] Gordon, W. B.: A theorem of the existence of periodic solutions to Hamiltonian systems with convex potential. J. Diff. Eq. **10** (1971) 324–335

[G 3] Gromov, M.: Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. Invent. math. **82** (1985) 307–347

[G 4] van Groesen, E. W.: On Small Period, Large Amplitude Normal Modes of Natural Hamiltonian Systems. MRC-Technical summary Report # 2637, Madison 1984

[H 1] Harris, T. C.: Periodic solutions of arbitrary long period in Hamiltonian systems. J. Diff. Eq. **4** (1968) 131–141

[H 2] Hartmann, P.: On boundary value problems for superlinear second order differential equations. J. Diff. Eq. **26** (1977) 37–53

[H 3] Hayashi, K.: Periodic solutions of classical Hamiltonian systems. Tokyo J. Math. **6** (1983) 473–486

[H 4] Hofer, H.: A new proof for a result of Ekeland and Lasry concerning the Number of periodic Hamiltonian trajectories on a prescribed energy surface. Boll. U.M.I. **6**, 1-B (1982) 931–942

[H 5] Horn, J.: Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen. Z. Math. Phys. **48** (1903) 400–434

[H 6] Hofer, H.: On strongly indefinite functionals with applications. Trans. of the AMS **275** (1983) 185–213

[H 7] Hofer, H.: A note on the topological degree at a critical point of mountain pass type. Proc. of the AMS **90** (1984) 309–315

[H 8] Hofer, H.: Lagrangian embeddings and critical point theory. Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse nonlin. **2** (1985) 407–462

[J 1] Jacobowitz, H.: Periodic solutions of $x'' + f(x, t) = 0$ via the Poincaré-Birkhoff theorem. J. Diff. Eq. **20** (1976) 37–52.

[K 1] Katok, A.: Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorems. Ergod. Th. and Dyn. Sys. **2** (1982) 185–194

[K 2] Klingenberg, W.: Lectures on closed geodesics. Grundlehren Vol. 230, Springer 1978

[L 1] Lagrange, J. L.: Mémoire sur la théorie de la variation des éléments des planètes. Mem. Classe Sci. Math. Phys. Inst. France, 1808, Oeuvres complètes, tome VI, 713–768

[L 2] Lusternik, L.; Schnirelman, L.: Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels. Herman, Paris 1934

[L 3] Lyapunov, A.: Problème général de la stabilité des mouvements. Ann. Fac. Sci. de Toulouse **2** (1907) 203–474

[L 4] Laudenbach, F.; Sikorav, J. C.: Persistence d'intersections avec la section nulle au cours d'une isotopie Hamiltonienne dans un fibre cotangent. Invent. math. **82** (1985) 349–357

[L 5] Laudenbach, F.: Un principe de prolongement mis en defaut en géométrie symplectique. Preprint Paris-Sud 1985

[M 1] Mancini, G.: Periodic solutions of Hamiltonian systems having prescribed minimal period. In: Advances in Hamiltonian Systems. Birkhäuser 1983, 43–72

[M 2] Moser, J.: Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein. Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976) 727–747

[M 3] Moser, J.: Proof of a generalized from of a fixed point theorem due to G. D. Birkhoff. Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 597: Geometry and Topology (1977) 464–494

[M 4] Moser, J.: A fixed point theorem in symplectic geometry. Acta Math. **141** (1978) 17–34

[M 5] Moser, J.: Addendum to "Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by A. Weinstein". Comm. Pure and Appl. Math. **31** (1978) 529–530

[M 6] Moser, J.: Stable and Random Motions in Dynamical Systems. In: Annals of Math. Studies, Vol. 77. Princeton University Press 1973

[M 7] Moser, J.: Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold. Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970) 609–636

[M 8] Moser, J.: On the volume elements on a manifold; Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965) 286–294

[M 9] Marsden J.; Weinstein, A.: Reduction of symplectic manifolds with summetry. Reports on Math. Phys. **5** (1974) 121–130

[M 10] Van der Meer, J.C.: The Hamiltonian Hopf Bifurcation. Thesis, Utrecht 1985

[M 11] Mather, J.: Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus. Topology **21** (1982) 457–467

[N 1] Ni, W. M.: Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations. J. Analyses Math. **37** (1980) 248–275

[N 2] Nirenberg, L.: Comments on nonlinear problems. Proceed. Conf. Catania. Matematiche (Catania) **36** (1981) 109–119

[N 3] Nirenberg, L.: Variational and topological methods in nonlinear problems. Bull. Amer. Math. Soc. **4** (1981) 267–302
[N 4] Nikishin, N.: Fixed points of diffeomorphisms on the twosphere that preserve area. Funkcional Anal. i Prelozen **8** (1974) 84–85
[P 1] Palais, R. S.: Critical point theory and the minimax principle. In: Glocal Analysis, Proc. AMS **XV**, 185–212
[P 2] Poincaré, H.: Methodes nouvelles de la mécanique célèste. Vol. 3, chap. 28. Gauthier Villars Paris 1899
[P 3] Pöschel, J.: Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets. Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982) 653–696
[P 4] Pugh, C. C.; Robinson, R. C.: The C^1-Closing Lemma, including Hamiltonians. Ergodic Theory and Dynamical Systems **3** (1983) 261–313
[P 5] Poincaré, H.: Sur un théorème de Géométrie. Rend. Circolo Math. Palermo **33** (1912) 375–407
[R 1] Rabinowitz, P. H.: On periodic solutions of large norm of some ordinary and partial differential equations. Ergodic Th. and Dyn. Sys. II, Proc. Maryland 1979–80. Birkhäuser (1982) 193–210
[R 2] Rabinowitz, P. H.: On Subharmonic solutions of Hamiltonian systems. Comm. Pure App. Math. **XXXIII** (1980) 609–633
[R 3] Rabinowitz, P. H.: A variational method for finding periodic solutions of differential equations. In: Nonlinear Evolution Equations (M. G. Crandall, ed.), Academic Press 1978, 225–251
[R 4] Rabinowitz, P. H.: Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations. In: Nonlinear Analysis, A Collection of Papers in Honor of Erich H. Rothe. Academic Press 1978, 161–177
[R 5] Rabinowitz, P. H.: Periodic solutions of Hamiltonian systems. Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978) 157–184
[R 6] Rabinowitz, P. H.: Periodic solutions of a Hamiltonian system on a prescribed energy surface. J. Diff. Eq. **33** (1979) 336–352
[R 7] Rabinowitz, P. H.: Periodic solutions of Hamiltonian systems: a survey. SIAM J. Math. Anal. **13** (1982) 343–352
[R 8] Rabinowitz, P. H.: Variational methods for nonlinear eigenvalue problems. (CIME, Varenna 1974), Ediz. Cremonese Rome 1974
[R 9] Rabinowitz, P. H.: Free vibrations or a semi-linear wave equation. Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978) 31–68
[R 10] Rabinowitz, P. H.: Periodic solutions of large norm of hamiltonian system. J. Diff. Eq. **50** (1983) 33–48
[R 11] Rabinowitz, P. H.: Multiple critical points of perturbed symmetric functionals. Trans. Amer. Math. Soc. **272** (1982) 753–769
[R 12] Ralston, J. V.: On the construction of quasimodes associated with stable periodic orbits. Comm. Math. Phys. **51** (1976) 219–242
[R 13] Rybakowski, K. P.; Zehnder, E.: A Morse-Equation in Conley's index theory for semiflows on metric spaces. Ergodic Th. and Dyn. Sys. (1985) 123–143
[S 1] Sanders, J. A.: Are higher order resonances really interesting? Celestial Mech. **16** (1978) 421–440
[S 2] Schmidt, D. S.: Periodic solutions near a resonant equilibrium of a Hamiltonian system. Celestial Mech. **9** (1974) 81–103
[S 3] Schweitzer, P. A.: Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations. Annals of Math. **100** (1974) 386–400
[S 4] Seifert, H.: Periodische Bewegungen mechanischer Systeme. Math. Z. **51** (1948) 197–216
[S 5] Siegel, C. L.; Moser, J.: Lectures on Celestial Mechanics. Springer Grundlehren Bd. 187 (1971)
[S 6] Sikorav, J. C.: Points fixes d'une application symplectique homologue à l'identité. J. Diff. Geom. **22** (1985) 49–79
[S 7] Simon, C. P.: A bound for the fixed point index of an area-preserving map with applications to mechanics. Inv. Math. **26** (1974) 187–200
[S 8] Salamon, D.: Connected simple systems and the Conley Index of Isolated invariant sets. Trans. Amer. Math. Soc. 291 (1985) 1–41

[S 9] S i k o r a v , J. C.: Sur les immersions Lagrangiennes dans un fibré cotangent admettant une phase génératrice globale. C. R. Acad. Sc. Paris **302**, Sér. I (3) (1986) 119–122

[S 10] S i k o r a v , J. C.: Problêmes d'intersections et de points fixes en géométrie Hamiltonienne. Préprint Univ. Paris Sud (1986)

[V 1] C o l i n d e V e r d i e r e , Y.: Spectre du Laplacien et longeurs des géodésiques périodiques I, II

[V 2] V e y , J.: Orbites périodiques d'un système hamiltonien au voisinage d'un point d'équilibre. Ann. Sci. Nor. Sup., Pisa ser. 4, **5** (1978) 757–787

[W 1] W e i n s t e i n , A.: Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems. Inv. Math. **20** (1973) 47–57

[W 2] W e i n s t e i n , A.: Lectures on symplectic manifolds. CBMS, Regional conf. series in Math. **29** (1977)

[W 3] W e i n s t e i n , A.: Bifurcations and Hamilton's Principle. Math. Z. **159** (1958) 235–248

[W 4] W e i n s t e i n , A.: Periodic orbits for convex Hamiltonian systems. Ann. Math. **108** (1978) 507–518

[W 5] W e i n s t e i n , A.: On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems. J. Diff. Eq. **33** (1979) 353–358

[W 6] W e i n s t e i n , A.: Symplectic V-Manifolds, Periodic orbits of Hamiltonian Systems, and a Volume of certain Riemannian Manifolds. Comm. on Pure and Appl. Math. **30** (1977) 265–271

[W 7] W e i n s t e i n , A.: Lagrangian submanifolds and hamiltonian systems. Ann. Math. **98** (1973) 377–410

[W 8] W i l l e m , M.: Subharmonic oscillations of nonlinear systems. Proceed. Conf. "Equa. diff. 82" Würzburg. Lecture Notes in Mathematics Nr. 1017, pp. 661–666

[W 9] W i l l e m , M.: On the number of Periodic Hamiltonian orbits on a convex surface. Preprint 1983

[W 10] W i l s o n , T. W.: On the minimal sets of nonsingular vectorfields. Ann. of Math. **84** (1966) 529–536

[W 11] W e i n s t e i n , A.: On Extending the Conley-Zehnder Fixed point theorem to other Manifolds. Proceedings of Symposia in Pure Math. **45** (1986) part 2, 541–544

[W 12] W i t s c h , K. J.: Über eine freie Randwertaufgabe aus der physikalischen Geodäsie. Habilitationsschrift, Essen 1982

[W 13] W i l l e m , M.: Subharmonic Oscillations of convex Hamiltonian systems. Rapport 6 (1982), Louvain-La Neuve to be published in Nonlinear Analysis, T.M.A.

[W 14] W i l l e m , M.: Remarks on the dual least action principle. Z. für Analysis und ihre Anwendungen

[Z 1] Z e h n d e r , E.: Homoclinic Points near elliptic Fixed Points. Comm. Pure and Appl. Math. **XXVI** (1973) 131–182

Prof. Dr. E. Zehnder
Ruhr-Universität Bochum
Institut für Mathematik
Postfach 10 21 48
4630 Bochum 1

(*Eingegangen 28. 10. 1985*)

Buchbesprechungen

Huber, P. J., Robust Statistics (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics), New York – Chichester – Brisbane – Toronto: John Wiley & Sons 1981, ix + 308 p., $ 37.95

In diesem Buch hat Herr Huber überwiegend seine eigenen, grundlegenden Beiträge zu dem immer noch relativ jungen Gebiet der Robusten Statistik zusammengefaßt. Um rasch einen Eindruck von den wesentlichen Resultaten zu gewinnen, empfiehlt sich auch die Lektüre seines Übersichtsbändchens „Robust Statistical Procedures" (1977). Hubers Arbeiten (a) „Robust estimation of a location parameter" (1964) und (b) „A robust version of the probability ratio test" (1965) betrachte ich als prägenden Ursprung für seine weiteren Beiträge.

Von der Arbeit (a), als „Durchbruch" zu einer mathematischen Robustheitstheorie gefeiert, spannt sich der Bogen über Regressionsschätzung bis zur Schätzung von Kovarianzmatrizen (§ 4 bis § 8). Als Robustheitskriterium fungiert hier das Maximum der asymptotischen Varianz eines Schätzers, welches über hinreichend vollen, von der schwachen Topologie abgeleiteten Umgebungen (hauptsächlich: ϵ-Kontamination) zu minimieren ist.

Im Rückblick ist es amüsant festzustellen, daß so in der historischen Entwicklung der zweite vor dem ersten Schritt vollzogen wurde: Die Varianz, zweifellos die „stochastischere" Größe im Vergleich zum Bias, wird jedoch sehr schnell von diesem überlagert (im Verhältnis $\sqrt{n}$, wenn – wie in dieser Asymptotik angenommen – der Stichprobenumfang n beliebig groß wird). Sehr deutlich sind dem Buch die Schmerzen anzumerken, dieses Problem durch eine Einschränkung auf „symmetrische" Verteilungen wegdefinieren zu müssen. Die Frage, was denn außerhalb der Umgebungszentren eigentlich zu schätzen sei („der Limeswert des jeweiligen Schätzers"), hängt eng damit zusammen und muß selbst nach den neueren Beiträgen über spezielle Minimum-Distanz Funktionale als ungelöst betrachtet werden. Die damit einhergehende Künstlichkeit der Varianztheorie kommt möglicherweise auch darin zum Ausdruck, daß die ungünstigsten Dichten im Hinblick auf wirkliche Daten als zu glatt, mit zu niedrigen Flanken, empfunden werden; im Mehrdimensionalen treten unrealistische Singularitäten auf. Ferner beurteilt Huber eine Situation mit 10% Fehlern statistisch verschieden, je nachdem ob 100 oder 1000 Beobachtungen vorliegen (§ 10), so daß – um seine Kritik (§ 11) gegen schrumpfende Umgebungen zurückzugeben – eigentlich eine Asymptotik für wachsende (!) Umgebungen gefordert ist.

Seinem Ansatz (a) haftet außerdem die nur schwer zu rechtfertigende Vertauschung von Limesoperationen an. Die Beschränkung auf M-Schätzer mag im lokalen Rahmen angehen, bei konstanten Umgebungen werden aber so andere interessante Schätzer sicher nicht erfaßt. Im Regressionsproblem dürfen die Regressoren keinen Fehlern unterliegen.

Demgegenüber erfassen die an die Arbeit (b) anknüpfenden Resultate über Tests und Intervallschätzungen (§ 10) tatsächlich volle Umgebungen (ohne Symmetrieannahme), Optimalität gilt ohne Eingrenzung auf M-Schätzer, und es handelt sich dabei um ziemlich die einzigen nichtasymptotischen Ergebnisse. Leider kommt dieser finite Ansatz nicht über den Fall eines eindimensionalen Lokationsparameters hinaus.

Bei all diesen offenen Fragen handelt es sich natürlich um ein wichtiges Buch, beeindruckend durch seine enorme Spannweite (Kapazitäten, Algorithmen, . . .) und neue Maßstäbe setzend, indem Konzepte und Verfahren fortlaufend auf eine reiche Erfahrung mit statistischen Daten bezogen werden.

Gelegentlich ist das Buch für die etablierte Statistik auch recht beunruhigend: In dem Kapitel über optimale Versuchsplanung (§ 9) wird einer ganzen Disziplin mit ihrem eigenen Werkzeug bescheinigt, daß sie sich an der falschen Zielgröße orientiert, sobald nur mit geringsten Abweichungen von der Linearität der Regression zu rechnen ist.

Vielleicht wird deshalb von manchen Leuten der bildhafte, aber mathematisch unebene und stellenweise fehlerhafte Stil (z. B. ist in § 4 die Voraussetzung, daß die ungünstigste Dichte vollen Träger haben müßte, konsequent vergessen) zum Anlaß genommen, das Buch abzulehnen, wobei, was die archaische Kürze des Arguments betrifft, vielleicht nur das Prinzip gegolten haben mag, unter einer akzeptablen oberen Schranke an die lokale Unschärfe, die Länge des Werkes zu minimieren.

Bayreuth H. Rieder

Liggett, T. M., Interacting Particle Systems (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 276), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, xv, 488 pp., hardcover, DM 196,–

Das vorliegende Buch ist in doppelter Hinsicht bemerkenswert: Sowohl wegen seines aktuellen und faszinierenden Gegenstandes als auch wegen seines exzellenten Stils.

Worum geht es? Großenteils angeregt durch eine bahnbrechende Arbeit von Spitzer (1970), ist in den letzten 15 Jahren eine Theorie spezieller Markov-Prozesse entstanden, die das zeitliche Verhalten von (abzählbar) unendlich vielen, in bestimmter Weise interagierenden Komponenten beschreiben. Die klassische Theorie der Markov-Prozesse wird dabei zwar in mancherlei Weise benutzt, jedoch wird deren Rahmen bereits in grundlegenden Dingen gesprengt. (Z. B. ist infolge der Interaktion das Verhalten der einzelnen Komponenten nicht mehr Markovsch.) Der Zustandsraum dieser Markov-Prozesse mit Interaktion ist in vielen Fällen $\{0, 1\}^S$, wobei S abzählbar unendlich ist (z. B. $S = \mathbf{Z}^d$ für $d \geqslant 1$). Das heißt, zu jedem Zeitpunkt $t \geqslant 0$ kann jede einzelne Komponente $\eta_t(x)$ des Prozesses $\eta_t = (\eta_t(x))_{x \in S}$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Je nach Interpretation der Al ternative $\eta_t(x) = 0$ oder 1 ergeben sich verschiedene Ansätze zur Definition eines Interaktionsprozesses $(\eta_t)_{t \geqslant 0}$. Wir führen drei Beispiele an.

1) $\eta_t(x) = 1$ bedeutet: Zur Zeit t befindet sich an der Stelle x ein Teilchen. Diese Interpretation (die dem Buch seinen Titel gegeben hat) stand am Anfang der Theorie und führte zur Definition von Prozessen $(\eta_t)_{t \geqslant 0}$, deren zeitlich invariante (und reversible) Verteilungen gerade die Gibbsschen Gleichgewichtszustände der Statistischen Physik sind. Bei diesen Prozessen, die vielfach unter dem Namen „Stochastic Ising model" laufen, wird an jeder Stelle $x \in S$ ein Teilchen erzeugt bzw. vernichtet mit einer Rate, die vermöge eines Wechselwirkungspotentials von der vorliegenden Konfiguration aller Teilchen abhängt.

2) $\eta_t(x) = 1$ bedeutet: Eine Zelle (oder Pflanze) an der Stelle x ist zur Zeit t von einer bestimmten Krankheit befallen. Ein Modell für die räumliche Ausbreitung der Krankheit durch Infektion liefert der von Harris (1974) eingeführte sogenannte Kontaktprozeß: Jede gesunde Zelle wird infiziert mit einer Rate proportional zur Anzahl ihrer kranken Nachbarn, und jede kranke Zelle wird gesund mit Rate 1.

3) $\eta_t(x) = 1$ bedeutet: Zur Zeit t gehört der Platz x zum Territorium der ersten von zwei konkurrierenden Populationen. Clifford und Sudbury (1973) erfanden einen Prozeß, bei dem jede Population einen fremden Platz x ihrem Territorium einzuverbleiben versucht mit einer Rate, die davon abhängt, wie gut sich x in das bisherige Territorium einfügt. Dieser Prozeß wurde unabhängig von Holley und Liggett (1975) eingeführt und heißt seither, aufgrund einer naheliegenden politischen Interpretation, das „voter model".

Liggett's Buch ist das erste, das diesen und einer ganzen Reihe weiterer derartiger Prozesse gewidmet ist. Die einzelnen Prozeßtypen werden in weitgehend unabhängig voneinander lesbaren Kapiteln auf ihr asymptotisches Verhalten untersucht. Zu den zentralen Fragestellungen zählen die Bestimmung der extremalen invarianten Verteilungen sowie der Beweis von Konvergenzsätzen. Vielfach zeigt sich dabei eine kritische Abhängigkeit der ergodischen Eigenschaften der Prozesse von bestimmten Parametern. Die Einheit der dargestellten Theorie beruht zum großen Teil auf einer Gemeinsamkeit der Methoden. Unter diesen spielen die Methoden der Kopplung und der Dualität eine besondere Rolle. Bei der ersteren handelt es sich darum, zwei vorgegebene Prozesse so auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum zu definieren, daß gewisse nützliche Zusatzeigenschaften erfüllt sind. Das Stichwort Dualität bezeichnet eine Beziehung zwischen zwei Prozessen, die es gestattet, bestimmte Wahrscheinlichkeiten für den einen Prozeß durch solche für den anderen auszudrücken. Diese Methoden werden in einem eigenen Kapitel vorgestellt und zur Einübung auf einige klassische und einige nichtklassische Fragen der Theorie der Markov-Ketten angewandt. (Für eine Vorlesung über Markov-Ketten kann dieses Kapitel wertvolle Anregungen geben.)

Nun zum Stil des Buches. Der Autor strebt weder Vollständigkeit noch größte Allgemeinheit an, sondern beschränkt sich darauf, die zentralen und typischen Resultate in möglichst einfachem Rahmen vorzuführen. Eine Auswahl weiterer Ergebnisse wird teils im Text, teils in den „Notes" ohne Beweis angegeben. Nahezu jedes Kapitel schließt mit einer längeren Liste von teilweise ausführlich diskutierten „Open Problems". An Vorkenntnissen reicht eine übliche Vorlesung über stochastische Prozesse, bei der die Markov-Ketten mit stetiger Zeit nicht zu kurz gekommen sind. Trotz solcher Vorkenntnisse mag zwar mancher Leser den ein oder anderen Beweis als zu knapp empfinden. Dies wird jedoch mehr als aufgewogen durch die Meisterschaft, mit welcher der rote Faden der Ideen sichtbar gemacht wird und die Einzelresultate in den Gesamtzusammenhang eingeordnet werden. Positiv anzumerken sind außerdem die fast vollkommene Druckfehlerfreiheit und die vollständige Bibliographie.

Die Lektüre von Liggett's Buch ist ein absolutes Muß für jeden Stochastiker, der über den Tellerrand der klassischen Markov-Theorie hinausgucken möchte. Ich wünsche dem Buch, daß es trotz seines Preises weite Verbreitung findet.

München H. O. Georgii

Freidlin, M. I., Wentzell, A. D., Random Perturbations of Dynamical Systems, Translated from the Russian by Szücs, J. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 260), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, viii, 326 pp., cloth, DM 168,–

Um das Thema des Buches zu präzisieren, sei vorangestellt, daß sich die Autoren mit zufälligen Störungen eines dynamischen Systems befassen, das durch eine Differentialgleichung der Form

$$(1)\qquad \dot{x}_t = b(x_t)$$

gegeben wird. Ausgehend von dem klassischen Fall (nicht zufälliger) Störungen von (1), gegeben durch

$$(2)\qquad \dot{x}_t = b(x_t, \psi_t)$$

mit einer Störungsfunktion ψ, wird eine zufällige Störung durch (2) definiert, wenn ψ einen stochastischen Prozeß darstellt. Gegenstand der Untersuchungen sind Konvergenzaussagen der Lösungen zu (2) gegen diejenige des ungestörten Systems (1), wenn ψ klein in einem passenden Sinne wird, und daraus ableitbarer Resultate, etwa über invariante Maße und Austrittszeiten. Neben stochastischer und fast sicherer Konvergenz, konzentrieren sich die Autoren vornehmlich auf Konvergenz in Verteilung und auf das Problem großer Abweichungen.

Mit der Entwicklung der Theorie großer Abweichungen bei stochastischen Prozessen stößt die Störungstheorie dynamischer Systeme auf immer mehr Interesse. Vor allem die russische Schule hat wesentliche Beiträge geliefert, insbesonders auch die beiden Autoren. Das vorliegende Buch will und kann nicht vollständig sein, es bietet auch teilweise keine endgültige Darstellung an.

Nun kurz zum Inhalt im einzelnen: In Kapitel 2 werden Störungen der Art $\dot{X}_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon, \epsilon\xi_t)$ und spezieller

(3) $$\dot{X}_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) + \epsilon\sigma(X_t^\epsilon)\dot{w}_t \quad (X_0^\epsilon = x_0)$$

betrachtet, wobei $(w_t : 0 \leqslant t)$ den Wienerprozeß, σ eine n x n-Matrix-wertige Funktion und b eine hinreichend glatte n-dimensionale Funktion bezeichnen. Gesetze der großen Zahlen, asymptotische Entwicklungen und deren Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen stehen im Mittelpunkt. Große Abweichungen für das System $\dot{X}_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) + \epsilon\dot{w}_t$ werden in Kapitel 3 untersucht. Wesentliches Hilfsmittel ist hierbei (und im folgenden) das sog. „action potential", das es erlaubt, Exponentialungleichungen zu erhalten. In Kapitel 4 wird dieses Konzept für das System (3) entwickelt. Insbesonders wird das Verhalten von Austrittszeiten aus Umgebungen stabiler Gleichgewichtszustände untersucht. Prozesse, die durch (3) definiert werden, besitzen Differentialoperatoren, die durch eine elliptische partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

(4) $$\frac{1}{2}\epsilon^2 \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial^2/\partial x_j\partial x_k + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial/\partial x_j$$

$((a_{jk}) = \sigma\sigma^*)$ gegeben sind. Es wird die Lösung des Dirichlet-Problems für (3) auf ihr Austrittsverhalten aus Gebieten im $\mathbf{R}^n$ hin untersucht. Kapitel 5 erweitert die Theorie auf eine Klasse von Markoffprozessen, Kapitel 6 auf den Fall komplizierterer Gleichgewichtszustände als in Kapitel 4. In Kapitel 7 werden die Lösungen von $\dot{X}_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon, \xi_{t/\epsilon})$ untersucht, wobei (ξ_t) stationär mit guten Mischungsbedingungen ist. Stabilitätsprobleme werden kurz in Kapitel 8 betrachtet, und in Kapitel 9 werden weitere Verallgemeinerungen besprochen.

Sicherlich ist dieses Buch ohne Vorkenntnisse über stochastische Integrale, Markoff- und Diffusionsprozesse sehr schwer lesbar. Hilfreich mag hier das erste Kapitel sein, in dem ein Überblick über diese benutzten Sachverhalte gegeben wird. Wesentliche Teile des Buches werden mit den eigenen Forschungsergebnissen der Autoren bestritten. Dadurch wird der Stil des Buches sehr technisch; die Übersetzung von Herrn Szüsz ist gelungen. Vorher nur angekündigte Resultate erscheinen mit vollständigem Beweis, und einige neue Ergebnisse sind von den Autoren hinzugefügt.

Sicherlich wird dieses Buch seinen berechtigten Platz in der Literatur über stochastische Differentialgleichungen finden. Empfehlen kann man dieses Buch guten Gewissens.

Göttingen M. Denker

de Gruyter Studies in Mathematics

An international series of monographs and textbooks of high standard in pure and applied mathematics. Written by outstanding experts, the volumes within this series cover a wide spectrum of contemporary mathematics and will be of interest to active researchers in mathematics and related fields as well as to graduate students.

Editors: Heinz Bauer, University of Erlangen-Nürnberg, West Germany
Peter Gabriel, University of Zürich, Switzerland

W. Klingenberg: **Riemannian Geometry**
1982. 17 x 24 cm. X, 396 pages. Cloth DM 118,–

M. Métivier: **Semimartingales**
A Course on Stochastic Processes
1982. 17 x 24 cm. XII, 287 pages. Cloth DM 88,–

L. Kaup/B. Kaup:
Holomorphic Functions of Several Variables
An Introduction to the Fundamental Theory
With the assistance of Gottfried Barthel. Translated by Michael Bridgland
1983. 17 x 24 cm. XVI, 350 pages. Cloth DM 112,–

C. Constantinescu: **Spaces of Measures**
1984. 17 x 24 cm. 444 pages. Cloth DM 128,–

G. Burde/H. Zieschang: **Knots**
1984. 17 x 24 cm. XII, 400 pages. Cloth DM 138,–

U. Krengel: **Ergodic Theorems**
1985. 17 x 24 cm. VIII, 357 pages. Cloth DM 128,–

H. Strasser: **Mathematical Theory of Statistics**
Statistical Experiments and Asymptotic Decision Theory
1985. 17 x 24 cm. XII, 492 pages. Cloth DM 158,–

T. tom Dieck: **Transformation Groups**
1987. 17 x 24 cm. Approx. 350 pages. Cloth approx. DM 130,–

Prices are subject to change without notice

W DE G

Walter de Gruyter · Berlin · New York

Eine neue Reihe:

Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der MATHEMATIK

Herausgegeben von Michael Otte, Ivo Schneider und Hans-Georg Steiner

1: Gottfried Richenhagen · **Carl Runge (1856–1927): Von der reinen Mathematik zur Numerik**

1985. XIII, 355 Seiten mit zahlreichen Abbildungen, kartoniert DM 90,–

Dieses Buch widmet sich dem Werk des als Numeriker und Funktionentheoretiker bekannten Carl Runge. Es beschreibt die nicht nur innerhalb der Numerik geltende Forschungskonzeption Runges und vergleicht diese mit anderen, zur selben Zeit entstehenden Konzepten. Dabei wird deutlich, daß Runge sich eng an die konstruktiv ausgerichtete Mathematik Weierstraß' anlehnt, die er bei seiner mathematischen Ausbildung in Berlin kennengelernt hatte. Darüber hinaus ist für sein Werk die Verwendung der im 19. Jahrhundert zur Serienproduktion gereiften Rechenmaschine charakteristisch.

2: Michael-Markus Toepell · **Über die Entstehung von David Hilberts »Grundlagen der Geometrie«**

1986. XIV, 293 Seiten mit 63 Abbildungen, kartoniert DM 78,–

Die immer wieder gestellte Frage, aus welchen Motiven und auf welchem Wege Hilbert zu seinem für die Entwicklung der axiomatischen Methode in der Mathematik und der geometrischen Forschung und Lehre so bedeutsamen Werk »Grundlagen der Geometrie« gekommen ist, versucht die Untersuchung von M.-M. Toepell vor allem anhand der Materialien des Hilbert-Nachlasses, der eine Vielzahl von bisher unveröffentlichten Briefen und etwa 50 Vorlesungsmanuskripte umfaßt, zu beantworten. Der Weg Hilberts wird im Zusammenhang mit der Gesamtentwicklung der Geometrie und ihrer Grundlegung am Ende des 19. Jahrhunderts dargestellt.

3: Klaus Thomas Volkert · **Die Krise der Anschauung**

Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850
1986. XXXII, 420 Seiten mit 26 Abbildungen, kartoniert DM 98,–

Inhaltsübersicht: Einleitung. – *Historischer Teil:* Anschauung und antike Mathematik / Anschauung und Mathematik im Zeitalter Descartes' / Die Anerkennung der komplexen Zahlen – Anschauung als erkenntnisbegründende Instanz / Die Entwicklung des Funktionsbegriffes / Das Arithmetisierungsprogramm / Das goldene Zeitalter der Monster / Zusammenfassung. – *Historisch-Systematischer Teil:* Der Begriff Anschauung / Formale und informale Ebene in der Mathematik: am Beispiel des Funktionsbegriffes / Arithmetisierung und mathematische Existenz (die erkenntnisfundierende Funktion der Anschauung) / Diskussion um die »willkürlichen Funktionen« / Zusammenfassung zum historisch-systematischen Teil. – *Systematischer Teil:* Auf dem Wege zur Zeichenanschauung / Die Rückkehr der intellektuellen Anschauung: der Intuitionismus Brouwers / Die Rehabilitierung der Anschauung / Über den Ursprung der mathematischen Gewißheit / Zusammenfassung. – Literaturverzeichnis.

Bitte **Sonderprospekt** »Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik« anfordern!

Der Briefwechsel David Hilbert – Felix Klein (1886–1918)

Mit Anmerkungen herausgegeben von *Günther Frei.* (Arbeiten aus der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek 19). 1985. XII, 154 Seiten, broschiert DM 28,–

V&R **Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen/Zürich**

Edited by
Steven R. Givant
Mills College
Oakland, USA
Ralph N. Mc Kenzie
University of California
Berkeley, USA

Alfred Tarski Collected Papers

Vol. 1 (1921–1934)
1986. 680 pages, Hardcover
sFr. 370.–/DM 460.–
ISBN 3-7643-3280-8

Vol. 2 (1935–1944)
1986. 720 pages, Hardcover
sFr. 370.–/DM 460.–
ISBN 3-7643-3281-6

Vol. 3 (1945–1957)
1986. 704 pages, Hardcover
sFr. 370.–/DM 460.–
ISBN 3-7643-3282-4

Vol. 4 (1958–1979)
1986. 776 pages, Hardcover
sFr. 370.–/DM 460.–
ISBN 3-7643-3283-2

Vols. 1–4
Set price
sFr. 1280.–/DM 1600.–
ISBN 3-7643-3284-0

Edited by
Robert R. Kallman
North Texas State University
Denton, USA

Shizuo Kakutani Selected Papers

Vol. 1
1986. 480 pages, Hardcover
sFr. 230.–/DM 288.–
ISBN 3-7643-3277-8

Vol. 2
1986. 472 pages, Hardcover
sFr. 230.–/DM 288.–
ISBN 3-7643-3278-6

Vol. 1 and 2
Set price
sFr. 380.–/DM 475.–
ISBN 3-7643-3279-4

Edited by
Vagn Lundsgaard Hansen
The Technical University of Denmark
Copenhagen, Denmark
Fleming Topsoe
Dansk Matematisk Forening
Copenhagen, Denmark

Jakob Nielsen Collected Mathematical Papers

Vol. 1
1986. 472 pages, Hardcover
sFr. 198.–/DM 248.–
ISBN 3-7643-3140-2

Vol. 2
1986. 432 pages, Hardcover
sFr. 192.–/DM 240.–
ISBN 3-7643-3151-8

Vol. 1 and 2
Set price
sFr. 332.–/DM 415.–
ISBN 3-7643-3152-6

New

CONTEMPORARY MATHEMATICIANS

Edited by
Cathleen S. Morawetz
Courant Institute
New York, USA

Kurt Otto Friedrichs Selecta

Vol. 1
1986. 432 pages, Hardcover
sFr. 230.–/DM 288.–
ISBN 3-7643-3268-9

Vol. 2
1986. 608 pages, Hardcover
sFr. 230.–/DM 288.–
ISBN 3-7643-3269-7

Vol. 1 and 2
Set price
sFr. 380.–/DM 475.–
ISBN 3-7643-3270-0

Edited by
Gian-Carlo Rota
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, USA
Joseph S. Oliveira
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, USA

Selected Papers on Algebra and Topology by Garret Birkhoff

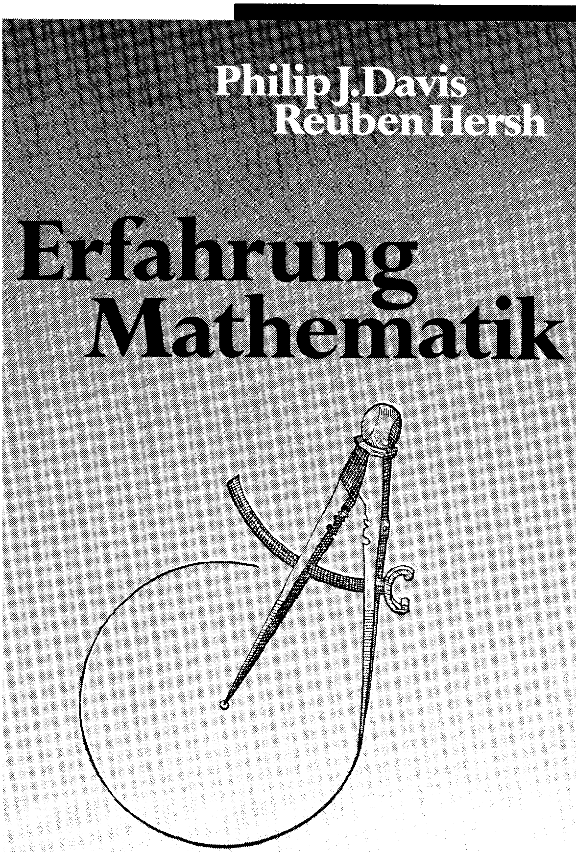
1986. 544 pages, Hardcover
sFr. 128.–/DM 154.–
ISBN 3-7643-3114-3

Prices are subject to change without notice. 10/86

Please order from your bookseller
or Birkhäuser Verlag, P.O. Box 133,
CH-4010 Basel/Switzerland
or Birkhäuser Boston, Inc.
c/o Springer-Verlag New York, Inc.
44 Hartz Way/Secaucus,
Nj 07094/USA

Birkhäuser Verlag
Basel · Boston · Stuttgart

Wenn einmal von Mathematik die Rede ist...



Von allen Büchern, die je über Mathematik geschrieben worden sind, ist dies das klügste und informativste.

Thomas v. Randow in «ZEIT»

«Erfahrung Mathematik» ist ein glänzendes Buch. Davis und Hersh sprechen eine deutliche, farbige Sprache... Es gelingt ihnen, Mathematik als menschliche Tätigkeit und in ihrem Wandel begreiflich zu machen – also auch dem Aussenstehenden zu zeigen, was mathematisches Arbeiten (heute) ist.

Detlef D. Spalt in der «FAZ»

«Dieses Buch leistet einen grossen Beitrag zum Verständnis der Mathematik und dürfte wohl ein Klassiker werden.»

NEUE ZÜRCHER ZEITUNG

Philip J. Davis
Reuben Hersh
Erfahrung Mathematik
Aus dem Amerikanischen von Jeanette Zehnder
1986. 462 S., 96 sw-Abb., 47 Fig.,
Gebunden DM 78.–
ISBN 3-7643-1359-5

Birkhäuser Verlag
Basel · Boston · Stuttgart

Änderungen vorbehalten