89. Band Heft 3
ausgegeben am 23. 7. 1987

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1987

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 88/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 89 01-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 89, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

D. Braess, R. Schaback: Helmut Werner
H. Bühlmann: Entwicklungstendenzen in der Risikotheorie
P. L. Butzer, W. Splettstößer, R. L. Stens: The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis
R. Heath-Brown: Differences Between Consecutive Primes
J. Heinhold: Oskar Perron
K.-H. Hoffmann: Steuerung freier Ränder
J. Jost: Das Existenzproblem für Minimalflächen
R. Kühnau: Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve
H. Rohrbach: Alfred Brauer zum Gedächtnis
W. Singhof: Einige Beziehungen zwischen stabiler Homotopietheorie und Zahlentheorie
W. Stute: Empirische Prozesse in der Datenanalyse
H. Triebel: Einige neuere Entwicklungen in der Theorie der Funktionenräume

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 89 (1987) 105–134
AMS subject classification: 41–02, 41A25, 41A65; 41A05, 41A55, 41A63, 42A10, 42A45, 42B15, 65M15

Quantitative Extensions of the Uniform Boundedness Principle

W. Dickmeis, R. J. Nessel, E. van Wickeren*), Aachen

During the last decade we worked out a functional analytical approach towards the problem of the sharpness of the various concrete error bounds arising in approximation theory and numerical analysis. As a matter of fact, the classical uniform boundedness and condensation principles were equipped with rates; in many situations this even enabled one to discuss the necessity of the conditions involved in the direct estimates. It is the purpose of the present paper to survey the recent results on the subject (see also our monograph [22]).

Contents

1 Resonance Principles in Approximation Theory

To comment on the quantitative extensions in the light of basic work of Du Bois-Reymond and Lebesgue, let $C_{2\pi}$ be the Banach space of functions f, continuous and 2π-periodic on the real axis $\mathbf{R}$, endowed with the usual norm $\|f\|_C := \sup\{|f(u)| : u \in \mathbf{R}\}$. Consider the n-th partial sum (with $n \in \mathbf{N}$, the set of natural numbers)

$$(1.1)\quad (S_nf)(x) := \sum_{k=-n}^{n} f^{\wedge}(k)e^{ikx}, \qquad f^{\wedge}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du,$$

*) Supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft Grant No. Ne 171/5.

of the Fourier series of $f \in C_{2\pi}$. The theorem of Du Bois-Reymond (1876) states that there exists a counterexample $f_0 \in C_{2\pi}$ for which the Fourier series diverges, in fact $\limsup_{n\to\infty} \|S_n f_0\|_C = \infty$. Nowadays, instead of a separate approach, this result is established as an immediate consequence of the uniform boundedness principle (UBP).

To this end, let X be a Banach space, and X* be the class of non-negative functionals T on X which are sublinear, i.e.,

$$(1.2)\quad T(f+g) \leqslant Tf + Tg, \qquad T(af) = |a|Tf$$

for all $f, g \in X$ and $a \in \mathbf{R}$, and which are bounded, i.e.,

$$(1.3)\quad \|T\|_{X^*} := \sup\{Tf : \|f\|_X \leqslant 1\} < \infty.$$

Obviously, to each bounded linear operator A mapping X into a further normed linear space Y there corresponds an element $T \in X^*$ via $Tf = \|Af\|_Y$ with equal norms, i.e.,

$$(1.4)\quad \|T\|_{X^*} = \|A\|_{[X,Y]} := \sup\{\|Af\|_Y : \|f\|_X \leqslant 1\}.$$

Therefore the classical UBP may be formulated as follows.

UBP 1 *Strong (pointwise) boundedness of a sequence* $\{T_n\} \subset X^*$ *on* X, *i.e.*, $T_n f = O_f(1)$ *for each* $f \in X$, *implies uniform boundedness, i.e.*, $\|T_n\|_{X^*} = O(1)$.

In the applications the UBP often serves as a test of divergence in as much as $\limsup_{n\to\infty} \|T_n\|_{X^*} = \infty$ necessarily implies the existence of a counterexample $f_0 \in X$ with $\limsup_{n\to\infty} T_n f_0 = \infty$. This, together with the familiar estimate $(0 < a_1, a_2 < \infty)$

$$(1.5)\quad a_1 \log n \leqslant \|S_n\|_{[C_{2\pi}, C_{2\pi}]} \leqslant a_2 \log n,$$

already furnishes a proof of the theorem of Du Bois-Reymond mentioned. Moreover, since $\limsup_{n\to\infty} \|T_n\|_{X^*} = \infty$ is equivalent to the following two conditions (1.6, 7), yet another reformulation of the UBP states (cf. [44, p. 19])

UBP 2 (resonance version) *Suppose that for* $T_n \in X^*$ *there are elements* $g_n \in X$ *satisfying*

$$(1.6)\quad \|g_n\|_X \leqslant C_1 \quad (n \in \mathbf{N}),$$

$$(1.7)\quad \limsup_{n\to\infty} T_n g_n = \infty.$$

Then there exists a counterexample $f_0 \in X$ *such that*

$$(1.8)\quad \limsup_{n\to\infty} T_n f_0 = \infty.$$

So far, the UBP was formulated with regard to the whole Banach space X. From the point of view of error analysis, however, one is particularly interested in results in terms of suitable Banach subspaces. To this end, let ω be an abstract modulus of continuity, thus continuous on $[0, \infty)$ with

$$(1.9)\quad 0 < \omega(s) \leqslant \omega(s+t) \leqslant \omega(s) + \omega(t) \quad (0 < s, t).$$

Standard examples of ω are supplied by the powers $\omega_\alpha(t) := t^\alpha$ for $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. It follows that (cf. [62, p. 96])

(1.10) $\omega(t)/t \leqslant 2\omega(s)/s \quad (0 < s \leqslant t)$.

For a given family $\{U_t : t > 0\} \subset X^*$, complete subspaces are then defined by

(1.11) $X_\omega := \{f \in X : \|f\|_{X_\omega} := \max\{\|f\|_X, \sup_{t>0} U_t f/\omega(\sigma(t))\} < \infty\}$,

where $\sigma(t) > 0$ for $t > 0$ (see Section 4.4 for an extension to arbitrary parameter sets). A prominent concretization is furnished by the first modulus of continuity of functions, thus by

(1.12) $U_t f = \omega_1(t, f; C_{2\pi}) := \sup_{|h| \leqslant t} \|f(u+h) - f(u)\|_C$.

Obviously, $U_t \in C^*_{2\pi}$, and the corresponding subspace (1.11) for $\omega = \omega_\alpha$ and $\sigma(t) = t$ coincides with the standard Lipschitz class

$$(C_{2\pi})_{\omega_\alpha} = \mathrm{Lip}_1(\alpha; C_{2\pi}) := \{f \in C_{2\pi} : \omega_1(t, f; C_{2\pi}) = O_f(t^\alpha), t \to 0+\}.$$

A first quantitative extension of the (resonance version of the) UBP then states (with $\{\varphi_n\} \subset \mathbf{R}$, strictly decreasing to zero).

Theorem 1.1 (UBP with large O-rates) *Suppose that for* $T_n \in X^*$ *there are elements* $g_n \in X$ *satisfying* (1.6, 7). *Furthermore, let* $\{U_t : t > 0\} \subset X^*$ *be such that*

(1.13) $U_t g_n \leqslant M_1 \min\{1, \sigma(t)/\varphi_n\} \quad (n \in \mathbf{N}, t > 0)$.

Then for each ω *there exists a counterexample* $f_\omega \in X_\omega$ *such that*

(1.14) $\limsup_{n\to\infty} T_n f_\omega/\omega(\varphi_n) = \infty$.

This result may still be easily deduced from the classical statement. Indeed, since $X_\omega \subset X$ continuously, one has $T_n \in X^*_\omega$, too. Moreover, in view of (1.9, 10) and the Jackson-Bernstein-type inequality (1.13)

(1.15) $U_t g_n \leqslant M_1 \begin{cases} 1 \leqslant \omega(\sigma(t))/\omega(\varphi_n) & \text{if } \sigma(t) \geqslant \varphi_n \\ \sigma(t)/\varphi_n \leqslant 2\omega(\sigma(t))/\omega(\varphi_n) & \text{if } \sigma(t) \leqslant \varphi_n, \end{cases}$

hence $\|g_n\|_{X_\omega} \leqslant \max\{C_1, 2M_1/\omega(\varphi_n)\}$ by (1.6, 11). Thus for the Banach space X_ω the functionals $T_n/\omega(\varphi_n)$ and elements $\omega(\varphi_n)g_n$ satisfy (1.6, 7) so that UBP 2 ensures the existence of a counterexample $f_\omega \in X_\omega$ for which (1.14) holds true.

On the other hand, Theorem 1.1 subsumes the classical assertion of UBP 2 as a special case (choose $\omega = \omega_0$, $U_t = 0$). Let us emphasize, however, that it is this formulation of a UBP with large O-rates which in a unifying way covers various divergence results occurring in the literature, e.g., in interpolation theory (for some details see [18; 19; 22; 51], also Theorem 3.1, 4).

Concerning the sharpness of error bounds, however, the applicability of Theorem 1.1 is rather limited. Let us indicate this in connection with our favourite test, the Fourier partial sums (1.1). A familiar result of Lebesgue (1910) states that for $0 < \alpha \leqslant 1$ (cf. (3.6, 7))

(1.16) $f \in \mathrm{Lip}_1(\alpha; C_{2\pi}) \Rightarrow \|S_n f - f\|_C = O_f(n^{-\alpha} \log n)$,

and this direct estimate was shown by him to be sharp in the sense that there exists $f_\alpha \in \mathrm{Lip}_1(\alpha; C_{2\pi})$ such that

(1.17) $\|S_n f_\alpha - f_\alpha\|_C \neq o(n^{-\alpha} \log n)$.

In this connection an application of Theorem 1.1 only ensures that for each positive nullsequence $\{\epsilon_n\}$ and $0 < \alpha \leqslant 1$ there exists $f_{\alpha,\epsilon} \in \mathrm{Lip}_1(\alpha; C_{2\pi})$ such that

$$\|S_n f_{\alpha,\epsilon} - f_{\alpha,\epsilon}\|_C \neq O(\epsilon_n n^{-\alpha} \log n).$$

Indeed, in order to regain the full Lebesgue result (1.17), one needs a different quantitative extension of the UBP where, roughly speaking, divergence in (1.7, 14), i.e., not large O-rates, is replaced by the fact that the relevant lim sup is bounded away from zero, i.e., not small o-rates. As a matter of fact, if one restricts the modulus of continuity according to

(1.18) $(\omega(0) =) \lim_{t \to 0+} \omega(t) = 0, \qquad \lim_{t \to 0+} \omega(t)/t = \infty,$

i.e., the limiting cases ω_0, ω_1 are excluded, then one has the following (see [17; 19; 26])

Theorem 1.2 (UBP with small o-rates) *Suppose that for* $T_n \in X^*$ *there are elements* $g_n \in X$ *satisfying* (1.6) *and (cf.* (1.7))

(1.19) $\limsup_{n \to \infty} T_n g_n \geqslant C_2 > 0$.

Furthermore, let $\{U_t : t > 0\} \subset X^*$ *be such that* (1.13) *holds true. Then for each* ω *subject to* (1.9, 18) *there exists a counterexample* $f_\omega \in X_\omega$ *such that*

(1.20) $\limsup_{n \to \infty} T_n f_\omega / \omega(\varphi_n) \geqslant C_2 > 0$.

For a proof see Section 2, for some historical comments Section 3. In contrast to Theorem 1.1 (thus $C_2 = \infty$), the proof cannot proceed via the classical UBP, simply because the relevant assertion on the whole Banach space X (without rates) is not true. Indeed, for $\{T_n\} \subset X^*$ condition $T_n f = o_f(1)$ for each $f \in X$ does by no means imply $\|T_n\|_{X^*} = o(1)$. One point of the treatment in Section 2, however, is that such small o-results (without rates) do hold in Fréchet spaces, due to their richer structure (cf. Theorem 2.1). As a matter of fact, the Banach subspaces X_ω are considered as Fréchet spaces (cf. (2.9)).

Concerning the sharpness of error bounds, if the direct approximation theorem $f \in X_\omega \Rightarrow T_n f = O_f(\omega(\varphi_n))$ holds true (e.g., (1.16)), then Theorem 1.2 (case $0 < C_2 < \infty$) states that the error bound $O_f(\omega(\varphi_n))$ cannot be improved to $o_f(\omega(\varphi_n))$ on the whole (smoothness) class X_ω. Indeed, let us illustrate how the Lebesgue result (1.17) may now be deduced. In view of (1.4, 5) there exists $f_n \in C_{2\pi}(= X)$ such that

(1.21) $\|f_n\|_C \leqslant 1, \qquad \|S_n f_n\|_C \geqslant (a_1/2) \log n$.

To smooth f_n, consider the delayed means V_n of de La Vallée Poussin which leads to the candidates

(1.22) $g_n = V_n f_n := \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} S_k f_n.$

In view of the familiar facts (cf. [11, pp. 99, 108]) that $\|V_n\|_{[C_{2\pi}, C_{2\pi}]} \leqslant 3$, that g_n is a trigonometrical polynomial of degree at most 2n so that Bernstein's inequality is applicable, and that $S_nV_n = V_nS_n$, it follows that

(1.23) $\|g_n\|_C \leqslant 3, \qquad \|g_n'\|_C \leqslant 6n, \qquad S_ng_n = S_nf_n,$

thus (1.6) with $C_1 = 3$. Setting $T_nf = \|S_nf - f\|_C/\log n$, one has $T_n \in C_{2\pi}^*$ with

(1.24) $T_ng_n \geqslant [\|S_nf_n\|_C - \|g_n\|_C]/\log n \geqslant a_1/2 - 3/\log n,$

thus (1.19) with $C_2 = a_1/2 > 0$. Moreover, for $U_tf = \omega_1(t, f; C_{2\pi})$ it follows that

(1.25) $U_tg_n \leqslant \min\{2\|g_n\|_C, t\|g_n'\|_C\} \leqslant 6 \min\{1, tn\},$

thus (1.13) with $M_1 = 6$, $\sigma(t) = t$, $\varphi_n = 1/n$. Therefore Theorem 1.2 may be applied delivering (1.17) for $0 < \alpha < 1$. For a treatment of the Lebesgue result even in the limiting case $\alpha = 1$ see Corollary 2.2.

2 Proofs

As already mentioned, to prove Theorem 1.2 it is appropriate to extend the framework from Banach to Fréchet spaces since the enlarged structure enables one to pose conditions under which even a small o-resonance principle (without rates) holds true. The main Theorem 2.1 is formulated in Section 2.1, the proof being postponed. In fact, we first establish Theorem 1.2 via Theorem 2.1, describing the smoothness condition $f \in X_\omega$ in terms of a suitably chosen sequence of seminorms. Moreover, Theorem 2.1 allows a treatment of the Lebesgue result (1.17) for $\alpha = 1$. Section 2.2 contains a proof of Theorem 2.1 via a gliding hump method while a proof via a Baire category argument is given in Section 2.3.

2.1 Resonance in Fréchet Spaces

Let Y be a Fréchet space, i. e., a complete, metrizable, locally convex space, with a given sequence $\{|\cdot|_p\}_{p\in\mathbf{N}}$ of seminorms. Then convergence in Y is expressed by ($f, f_n \in Y$)

(2.1) $\lim_{n\to\infty} f_n = f \iff \lim_{n\to\infty} |f_n - f|_p = 0 \quad$ for each $p \in \mathbf{N}$.

In this framework consider dominated convergence in Y, i.e., (2.1) is satisfied together with

(2.2) $\sup_{n,\, p \in \mathbf{N}} |f_n|_p < \infty.$

It follows that

(2.3) $Y_b := \{f \in Y : \|f\|_{Y_b} := \sup_{p\in\mathbf{N}} |f|_p < \infty\}$

is a Banach space under $\|\cdot\|_{Y_b}$, continuously embedded in Y. On the other hand, Y_b is not closed with regard to the topology of Y (for further details see [64; 65]).

Theorem 2.1 *Suppose that for a sequence of non-negative, sublinear, and continuous functionals* T_n *on* Y *there are elements* $g_n \in Y_b$ *satisfying*

(2.4) $\|g_n\|_{Y_b} \leqslant M_2 \quad (n \in \mathbf{N})$,

(2.5) $\lim_{n\to\infty} |g_n|_p = 0 \quad (p \in \mathbf{N})$,

(2.6) $\lim_{p\to\infty} |g_n|_p = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$,

(2.7) $\limsup_{n\to\infty} T_n g_n \geqslant C_2 > 0$.

Then there exists a counterexample $f_0 \in Y_b$ *such that*

(2.8) $\limsup_{n\to\infty} T_n f_0 \geqslant C_2 > 0$.

For proofs see Section 2.2, 3. Note that (2.4, 5) assume the sequence $\{g_n\}$ to tend to zero in the sense of dominated convergence (2.1, 2). Let us also mention that only the case $C_2 < \infty$ is of interest. Indeed, Theorem 2.1 for $C_2 = \infty$, and then even without conditions (2.5, 6), just restates the classical UBP 2 with regard to the Banach space Y_b. As a matter of fact, Theorem 2.1 for real C_2 serves as the counterpart to the classical UBP in connection with a general treatment of the sharpness of error bounds. To indicate this, let us first give a

P r o o f of Theorem 1.2 via Theorem 2.1. Let ω be fixed. With the aid of the sequence $\{\varphi_n\}$, strictly decreasing to zero, define seminorms on X (possibly unbounded) by

$$(2.9) \quad |f|_p := \begin{cases} \|f\|_X, & p = 1 \\ \sup\left\{\dfrac{U_t f}{\omega(\sigma(t))} : t > 0, \begin{cases}\varphi_1 \leqslant \sigma(t) < \infty\}, \\ \varphi_{p-1} \leqslant \sigma(t) \leqslant \varphi_{p-2}\},\end{cases}\right. & \begin{matrix} p = 2 \\ p \geqslant 3, \end{matrix} \end{cases}$$

where $|\cdot|_p := 0$ if there is no $t > 0$ with, e.g., $\varphi_{p-1} \leqslant \sigma(t) \leqslant \varphi_{p-2}$. Setting

$$Y := \{f \in X : |f|_p < \infty \text{ for each } p \in \mathbf{N}\},$$

one has $Y_b = X_\omega$ (cf. (1.11), (2.3)), and Y is a locally convex space, continuously embedded in X. Thus T_n is continuous on Y, too. Moreover, Y is complete and therefore a Fréchet space. In fact, let $\{f_k\}$ be a Cauchy sequence in Y. Then it is a Cauchy sequence in X, too, and the completeness of X ensures the existence of $f \in X$ such that $\|f - f_k\|_X = |f - f_k|_1$ tends to zero. To show $f \in Y$, let, e.g., $p \geqslant 3$ with $|\cdot|_p \neq 0$. Given $\epsilon > 0$, there exists $n_0 \in \mathbf{N}$ such that $|f_m - f_n|_p < \epsilon$ for $m, n \geqslant n_0$. Thus for $n \geqslant n_0$ and $\varphi_{p-1} \leqslant \sigma(t) \leqslant \varphi_{p-2}$

$$U_t(f - f_n)/\omega(\sigma(t)) \leqslant \limsup_{m\to\infty} [U_t(f - f_m)/\omega(\sigma(t)) + |f_m - f_n|_p] \leqslant \epsilon$$

since U_t is sublinear and continuous on X (cf. (1.2, 3)). Hence $|f - f_n|_p \leqslant \epsilon$, and Y is complete.

As for the proof of Theorem 1.1, let us apply Theorem 2.1 to

$$\tilde{g}_n := \omega(\varphi_n) g_n, \qquad \tilde{T}_n := T_n/\omega(\varphi_n).$$

Obviously, (2.7) then coincides with (1.19). Moreover, (2.4) was already shown by (1.15), but to verify (2.5, 6), we have to reconsider the argument with some more care. To this end, by (1.6)

$$|\tilde{g}_n|_1 = \omega(\varphi_n)\|g_n\|_X \leqslant C_1 \omega(\varphi_n),$$

whereas for $p \geqslant 2$ by (1.10, 13)

$$\frac{U_t \tilde{g}_n}{\omega(\sigma(t))} \leqslant M_1 \min\left\{\frac{\omega(\varphi_n)}{\omega(\sigma(t))}, \frac{\omega(\varphi_n)}{\varphi_n}\frac{\sigma(t)}{\omega(\sigma(t))}\right\}$$

$$\leqslant M_1 \min\left\{\frac{\omega(\varphi_n)}{\omega(\varphi_{p-1})}, 2\begin{cases} 1\} & \text{if } \varphi_1 \leqslant \sigma(t) < \infty \\ \left.\dfrac{\omega(\varphi_n)}{\varphi_n}\dfrac{\varphi_{p-2}}{\omega(\varphi_{p-2})}\right\} & \text{if } \varphi_{p-1} \leqslant \sigma(t) \leqslant \varphi_{p-2}. \end{cases}\right.$$

This not only reestablishes (2.4) with $M_2 = \max\{C_1\,\omega(\varphi_1), 2M_1\}$, but verifies (2.5, 6) since by (1.18)

$$|\tilde{g}_n|_p \leqslant \max\left\{C_1, \frac{M_1}{\omega(\varphi_{p-1})}\right\}\omega(\varphi_n) = o_p(1) \quad (n \to \infty),$$

$$|\tilde{g}_n|_p \leqslant \left[2M_1 \frac{\omega(\varphi_n)}{\varphi_n}\right]\frac{\varphi_{p-2}}{\omega(\varphi_{p-2})} \quad = o_n(1) \quad (p \to \infty). \qquad \square$$

Thus, essentially, Theorem 1.2 concerning small o-rates reduces to Theorem 2.1 (without rates) as did the large O-principle of Theorem 1.1 to the classical UBP 2. Indeed, Theorem 2.1 is independent of ω and its properties, in contrast to Theorem 1.2 where one needs condition (1.18). Therefore Theorem 2.1 is also applicable to the limiting cases, excluded by (1.18). To illustrate this point, let us return to the Fourier partial sums (1.1) and establish the Lebesgue result (1.17) for $\alpha = 1$ via Theorem 2.1.

Corollary 2.2 *There exists a counterexample* $f_1 \in \mathrm{Lip}_1(1; C_{2\pi})$ *such that*

$$|(S_n f_1)(0) - f_1(0)| \neq o(n^{-1}\log n) \quad (n \to \infty).$$

P r o o f. In view of the familiar fact (cf. [11, p. 376]) that $\mathrm{Lip}_1(1; C_{2\pi}) = \{f \in C_{2\pi} : f' \in L^\infty_{2\pi}\}$, let us consider the seminorms

$$|f|_1 = \|f\|_C, \qquad |f|_p = \operatorname{ess\,sup}\left\{|f'(u)| : \frac{\pi}{p} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{p-1}\right\} \quad (p \geqslant 2).$$

Then

$$Y = \{f \in C_{2\pi} : f \text{ even on } \mathbf{R}, \text{ locally absolutely continuous on } (0,\pi] \text{ such that } |f|_p < \infty \text{ for all } p \in \mathbf{N}\}$$

is a Fréchet space, the corresponding Y_b being equal to $\mathrm{Lip}_1(1; C_{2\pi})$ as restricted to even functions. Let $x_n := 2\pi/(2n+1)$ and $k_n \in \mathbf{N}$ with $2 \leqslant k_n \leqslant n$ be such that (for $n \geqslant n_0$)

$$e^{-(\log n)^{1/2}} \leqslant y_n := \frac{2\pi k_n}{2n+1} < e^{-(\log n)^{1/2}} + \frac{2\pi}{2n+1}.$$

Then for the Dirichlet kernel $D_n(x) := \sin((2n+1)x/2)/\sin(x/2)$ one has $D_n(x_n) = D_n(y_n) = 0$. Now consider the even, 2π-periodic test elements

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{2n+1}{2}x, & x_n \leqslant x \leqslant y_n \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant x_n,\ y_n \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

in connection with the remainder functional

$$T_n f = \frac{n}{\log n} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(u) du - f(0) \right|.$$

It follows that $g_n \in Y_b$ with $|g_n|_1 := \|g_n\|_C = 1/n$ and $\|g_n\|_{Y_b} = (2n+1)/2n \leqslant 2$, thus (2.4). Moreover, (2.5, 6) hold true since $|g_n|_p = 0$ for $y_n < \pi/p$ or $x_n > \pi/(p-1)$. Obviously, T_n is non-negative, sublinear, and continuous on Y since, e.g., $T_n f \leqslant Cn|f|_1$. Concerning (2.7) one has

$$T_n g_n = \frac{1}{2\pi \log n} \left[\int_{x_n}^{\pi} - \int_{y_n}^{\pi} \right] \frac{\sin^2((2n+1)u/2)}{\sin(u/2)} du$$

$$\geqslant C_2 - \frac{1}{2 \log n} \int_{y_n}^{\pi} \frac{du}{u} = C_2 - O((\log n)^{-1/2})$$

(for C_2 see, e.g., [50, p. 147]). Therefore an application of Theorem 2.1 delivers the assertion. □

Note that the argument in fact shows that the counterexample in Corollary 2.2 may be chosen within the closed cone of even functions in $\mathrm{Lip}_1(1; C_{2\pi})$.

2.2 Gliding Hump Method

Proof of Theorem 2.1. If there exists some $j \in \mathbf{N}$ such that $\limsup_{n\to\infty} T_n g_j > 0$, then assertion (2.8) already follows with $f_0 = g_j$. Therefore, without loss of generality, one may assume

$$(2.10) \quad \lim_{n\to\infty} T_n g_j = 0 \quad (j \in \mathbf{N}).$$

Since T_n is continuous, thus bounded on Y, to each $n \in \mathbf{N}$ there exists $r_n \in \mathbf{N}$ and $K_n \geqslant 1$ with $r_n \leqslant r_{n+1}$, $K_n \leqslant K_{n+1}$ such that

$$(2.11) \quad T_n f \leqslant K_n \max_{1 \leqslant q \leqslant r_n} |f|_q \quad (f \in Y).$$

Now one may successively construct subsequences $\{p_k\}, \{n_k\} \subset \mathbf{N}$ along the following lines: Suppose that $1 = p_1, \ldots, p_{k-1}$ and $1 = n_1, \ldots, n_{k-1}$ have already been chosen. In view of (2.6) there exists $p_k > \max\{n_{k-1}, r_{n_{k-1}}, p_{k-1}\}$ such that

$$(2.12) \quad \sum_{j=1}^{k-1} |g_{n_j}|_p \leqslant 1 \quad (p \geqslant p_k).$$

Having p_k and using (2.5, 10, 7), respectively, one may then continue to choose $n_k > n_{k-1}$ such that

$$(2.13) \quad K_{n_{k-1}} \max_{1 \leqslant q \leqslant p_k} |g_{n_k}|_q \leqslant 2^{-k},$$

$$(2.14) \quad \sum_{j=1}^{k-1} T_{n_k} g_{n_j} \leqslant \frac{1}{k},$$

$$(2.15) \quad T_{n_k} g_{n_k} \geqslant C_2/2.$$

By (2.13) it follows that for $1 \leqslant p \leqslant p_{k+1}$

$$(2.16)\quad \sum_{j=k+1}^{\infty} |g_{n_j}|_p \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j}/K_{n_{j-1}} \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} \leqslant 2^{-k} \leqslant 1.$$

Given $p \in \mathbf{N}$, let $k \in \mathbf{N}$ be such that $p_k \leqslant p < p_{k+1}$. Then by (2.4, 12, 16) for each $p \in \mathbf{N}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |g_{n_j}|_p \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} |g_{n_j}|_p + |g_{n_k}|_p + \sum_{j=k+1}^{\infty} |g_{n_j}|_p \leqslant 1 + M_2 + 1.$$

Hence $f_0 := \Sigma_{j=1}^{\infty} g_{n_j}$ is well-defined in Y since Y is complete, in fact $f_0 \in Y_b$. Moreover, since $r_{n_k} < p_j$ for all $j \geqslant k+1$, one has by (2.11, 13–15) that

$$\begin{aligned} T_{n_k} f_0 &\geqslant T_{n_k} g_{n_k} - \sum_{j=1}^{k-1} T_{n_k} g_{n_j} - \sum_{j=k+1}^{\infty} K_{n_k} \max_{1 \leqslant q \leqslant r_{n_k}} |g_{n_j}|_q \\ &\geqslant C_2/2 - 1/k - \sum_{j=k+1}^{\infty} K_{n_{j-1}} \max_{1 \leqslant q \leqslant p_j} |g_{n_j}|_q \\ &\geqslant C_2/2 - 1/k - \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} = C_2/2 - o(1) \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

This completes the proof of Theorem 2.1. □

2.3 Baire Category Argument

A second proof of Theorem 2.1 may be based upon a Baire category argument. To this end, let Z be a complete metric space. For $A \subset Z$ the interior of A is denoted by int A and the closure by $\bar{A}$. Recall that $A \subset Z$ is nowhere dense if int $\bar{A} = \emptyset$. Then $A \subset Z$ is said to be of first category if it is a countable union of nowhere dense subsets of Z, otherwise A is of second category. In this terminology Baire's theorem states that Z is of second category. An important consequence is (cf. [43, p. 62; 55, pp. 159–164; 59, p. 57])

Osgood's Theorem *Pointwise boundedness of a sequence of non-negative, continuous functionals* T_n *on* Z, *i.e.,* $T_n f = O_f(1)$ *for each* $f \in Z$, *implies its uniform boundedness on some nonvoid open set* $G_0 \subset Z$, *i.e.,*

$$(2.17)\quad \sup\{T_n f : f \in G_0, n \in \mathbf{N}\} < \infty.$$

Obviously, since G_0 is open, (2.17) implies that for each $f \in G_0$

$$(2.18)\quad \limsup_{n \to \infty} T_n h_n < \infty \quad \text{for each } \{h_n\} \subset Z \text{ with } \lim_{n \to \infty} h_n = f.$$

Hence, setting $G := \{f \in Z : f \text{ satisfies } (2.18)\}$, Osgood's Theorem ensures int $G \neq \emptyset$, in other words, the complement of G in Z cannot be dense in Z. Therefore, if the complement is dense in Z, the hypothesis of pointwise boundedness on Z must necessarily be violated for the sequence $\{T_n\}$. This leads to the corresponding resonance version of Osgood's Theorem, in fact included as the case $C_2 = \infty$ in

Theorem 2.3 *Suppose that for a sequence of non-negative, continuous functionals* T_n *on* Z *there exists a dense subset* Z_0 *of* Z *such that for each* $f \in Z_0$ *there are ele-*

ments $h_n \in Z$ *satisfying*

(2.19) $\lim_{n\to\infty} h_n = f$,

(2.20) $\limsup_{n\to\infty} T_n h_n \geqslant C_2 > 0$.

Then there exists a counterexample $f_0 \in Z$ *such that*

(2.21) $\limsup_{n\to\infty} T_n f_0 \geqslant C_2 > 0$.

Proof. In view of Osgood's Theorem we only have to consider the case $C_2 < \infty$ for which the proof, however, proceeds analogously to the classical situation of $C_2 = \infty$. Indeed, setting

$$A := \{f \in Z : \limsup_{m\to\infty} T_m f < C_2\} = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} B_{j,k},$$

$$B_{j,k} := \{f \in Z : \sup_{m \geqslant k} T_m f \leqslant C_2(1 - 1/j)\},$$

the assertion follows by Baire's theorem if each $B_{j,k}$ is shown to be nowhere dense. Suppose, on the contrary, that int $\overline{B}_{j,k} \neq \emptyset$ for some $j, k \in \mathbf{N}$. Then, since $B_{j,k}$ is closed by the continuity of T_m and since Z_0 is dense in Z, there even exists some $f \in Z_0 \cap \operatorname{int} B_{j,k}$. In view of the assumptions as applied to this element f, there are $h_n \in Z$ with (2.19, 20), and thus $n_0 \in \mathbf{N}$ such that $h_n \in B_{j,k}$ for $n \geqslant n_0$. Setting $n_1 := \max\{k, n_0\}$, one has by (2.20)

$$C_2(1 - 1/j) \geqslant \sup_{n \geqslant n_1} \sup_{m \geqslant k} T_m h_n \geqslant \sup_{n \geqslant n_1} T_n h_n \geqslant \limsup_{n\to\infty} T_n h_n \geqslant C_2,$$

a contradiction. □

With the aid of Theorem 2.3, thus by a Baire category argument, we can now proceed to a further

Proof of Theorem 2.1. Consider the complete metric space $Z \subset Y$, given by the closure in Y of

$$Z_0 := \{f \in Y_b : \|f\|_{Y_b} < M_2 + 1, \lim_{p\to\infty} |f|_p = 0\}.$$

First of all, $Z \subset Y_b$. Indeed, for an arbitrary $f \in Z$ and $\{f_n\} \subset Z_0$, tending to f via (2.1), it follows that for each $p \in \mathbf{N}$

$$|f|_p \leqslant \limsup_{n\to\infty} [|f - f_n|_p + |f_n|_p] \leqslant M_2 + 1.$$

Obviously, Z_0 is dense in Z and T_n continuous on Z. To establish (2.19, 20), let $f \in Z_0$. Without loss of generality one may assume (otherwise (2.8) is obvious)

(2.22) $\limsup_{n\to\infty} T_n f < C_2/2$.

By the definition of Z_0 there exists $p_0 \in \mathbf{N}$ such that (cf. (2.12))

$$\sup_{p \geqslant p_0} |f|_p \leqslant 1/2.$$

Moreover, (2.5) implies the existence of $n_0 \in \mathbf{N}$ such that for $n \geqslant n_0$ (cf. (2.13))

$$\max_{1 \leqslant p < p_0} |g_n|_p \leqslant \frac{1}{2}[M_2 + 1 - \|f\|_{Y_b}].$$

Setting $h_n = g_n + f$, one therefore has by (2.6) and the definition of Z_0 that $\lim_{p \to \infty} |h_n|_p = 0$ as well as

$$\begin{aligned} \|h_n\|_{Y_b} &\leqslant \max\{\max_{1 \leqslant p < p_0} |g_n|_p + \|f\|_{Y_b}, \|g_n\|_{Y_b} + \sup_{p \geqslant p_0} |f|_p\} \\ &\leqslant \max\left\{\frac{1}{2}(M_2 + 1 + \|f\|_{Y_b}), M_2 + \frac{1}{2}\right\} < M_2 + 1, \end{aligned}$$

thus $h_n \in Z_0 \subset Z$ for $n \geqslant n_0$. Obviously, (2.5, 7) imply (2.19, 20), respectively, since by (2.22)

$$\limsup_{n \to \infty} T_n h_n \geqslant \limsup_{n \to \infty} T_n g_n - \limsup_{n \to \infty} T_n f \geqslant C_2 - C_2/2 = C_2/2.$$

Therefore Theorem 2.3 ensures the existence of some $f_0 \in Z \subset Y_b$ with $\limsup_{n \to \infty} T_n f_0 \geqslant C_2/2$; this completes the proof. □

3 Equivalence Assertions of Banach-Steinhaus- and Dini-Lipschitz-Type

Let us return to Theorem 1.1, 2 and indicate some of their more theoretical applications. The formulation of these theorems in Section 1 stressed their resonance character, indeed, they may be considered as quantitative extensions of UBP 2. Parallel to UBP 1, however, one may also ask for corresponding positive assertions. To this end, note that $\|T_n\|_{X^*} = O(1)$ if and only if $T_n g_n = O(1)$ for each sequence $\{g_n\} \subset X$ with (1.6). It is then clear that in connection with Theorem 1.1, 2 the sequence $\{g_n\}$ of test elements should additionally describe the operator norm in the sense that

(3.1) $\quad \|T_n\|_{X^*} \leqslant C_3 T_n g_n.$

This leads to the following positive version of Theorem 1.1.

Theorem 3.1 *Suppose that for* $T_n, U_t \in X^*$ *there are elements* $g_n \in X$ *satisfying* (1.6, 13) *as well as* (3.1) (*instead of* (1.7)). *If for some* ω (*cf.* (1.9, 11))

(3.2) $\quad T_n f = O_f(\omega(\varphi_n)) \quad (f \in X_\omega),$

then necessarily $\|T_n\|_{X^*} = O(1)$.

Thus the pointwise boundedness condition (3.2) on the s u b space X_ω implies uniform boundedness with regard to the whole space X. Indeed, if $\|T_n\|_{X^*} \neq O(1)$, then (3.1) guarantees (1.7) so that Theorem 1.1 applies and leads to a contradiction to (3.2). In the same way one deduces from Theorem 1.2

Theorem 3.2 *Suppose that for* $T_n, U_t \in X^*$ *there are elements* $g_n \in X$ *satisfying* (1.6, 13) *as well as* (3.1) (*instead of* (1.19)). *If for some* ω *subject to* (1.18)

(3.3) $\quad T_n f = o_f(\omega(\varphi_n)) \quad (f \in X_\omega),$

then necessarily $\|T_n\|_{X^*} = o(1)$.

One of the important consequences of the classical UBP is to be seen in the equivalence assertion of the Banach-Steinhaus theorem. To indicate corresponding quantitative extensions, let us briefly recall the classical result in the present terminology, $U \subset X$ being a dense linear subset.

Theorem of Banach–Steinhaus *For* $\{T_n\} \subset X^*$ *the following assertions are equivalent*:

(a) (i) $\|T_n\|_{X^*} = O(1)$, (ii) $T_n g = o_g(1)$ $(g \in U)$,

(b) $T_n f = o_f(1)$ $(f \in X)$.

According to the structure as an equivalence theorem, there are two different types of applications: The implication (a) $\Rightarrow$ (b) serves as a test of convergence, while (b) $\Rightarrow$ (a) may be considered as a test of nonconvergence. Whereas (a) $\Rightarrow$ (b) follows immediately via closure, part (b) $\Rightarrow$ (a) is given by the UBP.

In 1973 Butzer–Scherer–Westphal [12] equipped the Banach-Steinhaus theorem with rates in the sense that each of the conditions is equipped with rates. To formulate a (simple) version, let the dense linear subset $U \subset X$ be endowed with seminorm $|\cdot|_U$. Consider the Peetre K-functional $(t \geqslant 0)$

(3.4) $$K(t, f) := K(t, f; X, U) := \inf\{\|f-g\|_X + t|g|_U : g \in U\},$$

by now a standard measure of smoothness for elements of an abstract space.

Theorem 3.3 *For* $\{T_n\} \subset X^*$ *the following assertions are equivalent*:

(a) (i) $\|T_n\|_{X^*} \leqslant A_1$, (ii) $T_n g \leqslant A_2 \varphi_n |g|_U$ $(g \in U)$,

(b) $T_n f \leqslant A_3 K(\varphi_n, f; X, U)$ $(f \in X)$.

Indeed, (a) implies for any $f \in X$, $g \in U$

$$T_n f \leqslant T_n(f-g) + T_n(g) \leqslant A_1\|f-g\|_X + A_2\varphi_n|g|_U$$

so that (b) follows upon taking the infimum over all $g \in U$. On the other hand, (b) $\Rightarrow$ (a) is an immediate consequence of

(3.5) $$K(t, f; X, U) \leqslant \begin{cases} \|f\|_X & (f \in X) \\ t|f|_U & (f \in U). \end{cases}$$

Let us point out that referring to Theorem 3.3 as a quantitative Banach-Steinhaus theorem is not only justified by the fact that the statement is completely parallel to the classical one, but so are the possible applications. These are concerned with direct approximation theorems, i.e., via (a) $\Rightarrow$ (b) they conclude rates of convergence from a given smoothness property of f in the same spirit as the original Banach-Steinhaus theorem serves as a test of convergence.

To illustrate the procedure with the aid of our test, the Fourier partial sums (1.1), let $X = C_{2\pi}$, $U = C'_{2\pi}$ (:= set of continuously differentiable functions with seminorm $|g|_U = \|g'\|_C$), and $T_n f = \|S_n f - f\|_C/\log n$. In view of the Jackson-type inequality (cf. [11, pp. 97, 105])

$$\|S_n g - g\|_C \leqslant A_2 n^{-1} \log n \cdot \|g'\|_C \quad (g \in C'_{2\pi}),$$

Theorem 3.3, (a) $\Rightarrow$ (b), then implies that for any $f \in C_{2\pi}$

(3.6) $\quad \|S_n f - f\|_C \leqslant A_3 \log n \cdot K(n^{-1}, f; C_{2\pi}, C'_{2\pi}).$

This proves the direct result (1.16) of Lebesgue in view of the equivalence

(3.7) $\quad b_1\omega_1(t, f; C_{2\pi}) \leqslant K(t, f; C_{2\pi}, C'_{2\pi}) \leqslant b_2\omega_1(t, f; C_{2\pi}),$

valid for any $f \in C_{2\pi}$, $t \geqslant 0$ (cf. [10, p. 192]).

On the other hand, concerning the implication (b) $\Rightarrow$ (a) of Theorem 3.3, no interpretation is possible as a quantitative test for nonconvergence. In fact, that assertion (b) should hold for all $f \in X$ is much too strong for a reasonable negative result. Here Theorem 3.1 delivers the following contribution towards the sharpness of the abstract estimate of Theorem 3.3.

Theorem 3.4 *Suppose that the sequence* $\{T_n\} \subset X^*$ *satisfies the Jackson-type inequality of* Theorem 3.3 (a) (ii), *and let there exist elements* $\{g_n\} \subset U$ *satisfying* (1.6), (3.1), *and the Bernstein-type inequality* (*cf.* (1.13))

(3.8) $\quad |g_n|_U \leqslant M_3/\varphi_n.$

Then for any ω *the following assertions are equivalent*:

(a) $\quad \|T_n\|_{X^*} = O(1),$

(b) $\quad T_n f = O_f(\omega(\varphi_n)) \quad (f \in X_\omega),$

where X_ω *is defined via* (1.11) *with* $U_t f = K(t, f; X, U)$, $\sigma(t) = t$.

Indeed, the present functionals U_t clearly belong to X^* (cf. (3.4, 5)) and satisfy (1.13) for $\sigma(t) = t$ since $g_n \in U$ and therefore by (1.6), (3.5, 8)

$$K(t, g_n; X, U) \leqslant \max\{C_1, M_3\} \cdot \min\{1, t/\varphi_n\}.$$

Thus the implication (b) $\Rightarrow$ (a) follows by Theorem 3.1, whereas (a) $\Rightarrow$ (b) is a consequence of Theorem 3.3. Note that Theorem 3.4 corresponds to that reformulation of the classical Banach-Steinhaus theorem which states that, if $T_n g = o_g(1)$ for each $g \in U$, then $\|T_n\|_{X^*} = O(1)$ is necessary and sufficient for $T_n f = o_f(1)$ for each $f \in X$. For further results and comments see [8; 9; 12; 16; 22, p. 32; 24] where a number of applications are worked out.

Correspondingly, the small o-result of Theorem 3.2 leads to general Dini-Lipschitz theorems with rates (cf. [51]).

Theorem 3.5 *Suppose that for* $T_n, U_t \in X^*$ *the direct estimate*

(3.9) $\quad T_n f \leqslant A_2 \|T_n\|_{X^*} U_{\varphi_n} f \quad (f \in X)$

holds true. Moreover, let there exist elements $g_n \in X$ *satisfying* (1.6), (3.1), *and* (1.13) *for* $\sigma(t) = t$. *Then for each* ω *subject to* (1.18) *the Dini-Lipschitz-type condition*

(3.10) $\quad \omega(\varphi_n)\|T_n\|_{X^*} = o(1)$

is necessary and sufficient for

(3.11) $T_n f = o_f(1) \quad (f \in X_\omega)$.

Indeed, (3.10) implies (3.11) in view of (3.9) (and (1.11) with $\sigma(t) = t$), whereas the necessity of (3.10) is a consequence of Theorem 3.2 as applied to $\omega(\varphi_n)T_n$.

Typical for an application of Theorem 3.5 is a situation where the operator norms of the process under consideration do not form a bounded sequence. Theorem 3.5 then provides minimal (smoothness) properties the elements should satisfy in order to ensure convergence. Let us illustrate this point again in connection with the Fourier partial sums (1.1), thereby regaining classical results of Dini, Lipschitz, Faber, Lebesgue (cf. [66, pp. 63, 302]).

Corollary 3.6 *For any* ω *subject to* (1.18) *the following assertions are equivalent*:

(a) $\omega(1/n) \log n = o(1)$,

(b) $\|S_n f - f\|_C = o_f(1)$ *on* $\{f \in C_{2\pi} : \omega_1(t, f; C_{2\pi}) = O_f(\omega(t))\}$.

P r o o f. Once again consider $X = C_{2\pi}$, $\varphi_n = 1/n$, $U_t f = \omega_1(t, f; C_{2\pi})$, and $T_n f = \|S_n f - f\|_C$. Then $\|T_n\|_{X^*}$ behaves like $\log n$ (cf. (1.5)), and (3.9) follows via (3.6, 7). Moreover, the test elements (1.22) indeed satisfy (1.6, 13) for $\sigma(t) = t$ (cf. (1.23, 25)) as well as (3.1) (cf. (1.5, 21, 24)) so that an application of Theorem 3.5 completes the proof. □

Let us conclude with a problem in harmonic analysis which further illustrates the fact that one can use the present analysis to equip equivalence assertions with rates.

For certain subsets $A, B \subset C_{2\pi}$ a sequence $\psi := \{\psi_k\}$ of complex numbers is said to be a multiplier from A to B, in notation $\psi \in M(A, B)$, if to each $f \in A$ there exists $f^\psi \in B$ such that the Fourier coefficients (cf. (1.1)) satisfy $\psi_k f\hat{}(k) = (f^\psi)\hat{}(k)$ for all integers k. Obviously, to each $\psi \in M(A, B)$ there is associated a multiplier operator T^ψ from A to B, defined via $T^\psi f := f^\psi$. If $A = B = C_{2\pi}$, thus $\psi \in M := M(C_{2\pi}, C_{2\pi})$, it is an immediate consequence of the closed graph theorem that $T^\psi \in [C_{2\pi}, C_{2\pi}]$, the space of bounded linear operators of $C_{2\pi}$ into itself (cf. (1.4)). Hence M may be topologized by the associated operator norm $\|\psi\|_M := \|T^\psi\|_{[C_{2\pi}, C_{2\pi}]}$. By the theorem of Du Bouis-Reymond, already mentioned, the set

$$(C_{2\pi})_0 := \{f \in C_{2\pi} : \|S_n f - f\|_C = o_f(1)\}$$

of uniformly convergent Fourier series is a proper subset of $C_{2\pi}$. Therefore one is interested in the class $M(A, (C_{2\pi})_0)$ of multipliers of uniform convergence of A. Suitable candidates for A, intensively studied in the literature, are furnished by $(C_{2\pi})_\omega$ as defined by (1.11) for $U_t f = \omega_1(t, f; C_{2\pi})$, $\sigma(t) = t$. For example, there is the following equivalence assertion in terms of

$$D_n^\psi(u) := \sum_{k=-n}^{n} \psi_k e^{iku}, \qquad \psi(n)_k := \begin{cases} \psi_k, & |k| \leqslant n \\ 0, & |k| > n. \end{cases}$$

Corollary 3.7 *For any* $\psi \in M(C_{2\pi}, C_{2\pi})$ *and* ω *subject to* (1.18) *the following assertions are equivalent*:

(a) $\omega(1/n)\|D_n^\psi\|_1 = o(1)$,

(b) $\psi \in M((C_{2\pi})_\omega, (C_{2\pi})_0)$.

Proof. First of all note that (cf. [11, p. 267])

$$\|\psi(n)\|_M := \|T^{\psi(n)}\|_{[C_{2\pi}, C_{2\pi}]} = \|D_n^\psi\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n^\psi(u)|du.$$

To exclude a trivial situation, if $\|D_n^\psi\|_1 = O(1)$, then (a) is always valid (cf. (1.18)), in fact $\psi \in M(C_{2\pi}, (C_{2\pi})_0)$ by the classical Theorem of Banach–Steinhaus. Thus one may assume

(3.12) $\lim_{n\to\infty} \|D_n^\psi\|_1 = \infty.$

To apply Theorem 3.5, consider $X = C_{2\pi}$, $\varphi_n = 1/n$, $\sigma(t) = t$,

$$T_n f = \|T^{\psi(n)}f - T^\psi f\|_C, \qquad U_t f = \omega_1(t, f; C_{2\pi}).$$

Since $S_n T^\psi = T^{\psi(n)}$, assertion (b) then means $T_n f = o_f(1)$ for each $f \in (C_{2\pi})_\omega$. Moreover, since $T^\psi \in [C_{2\pi}, C_{2\pi}]$ by hypothesis, (a) may equivalently be expressed by $\omega(1/n)\|T_n\|_{X^*} = o(1)$. Thus it remains to verify the assumptions of Theorem 3.5 for the present situation. Concerning (3.9), if Π_n denotes the set of trigonometrical polynomials of degree $\leqslant n$ and

(3.13) $E_n(f; C_{2\pi}) := \inf\{\|f - p\|_C : p \in \Pi_n\}$

the functional of best trigonometric approximation, then the theorem of Jackson states that (cf. [11, p. 97])

$$E_n(f; C_{2\pi}) \leqslant A_2\omega_1(1/n, f; C_{2\pi}) \quad (f \in C_{2\pi}).$$

Since $T_n p = 0$ for all $p \in \Pi_n$, one therefore has

(3.14) $T_n f = \inf_{p\in\Pi_n} T_n(f - p) \leqslant \|T_n\|_{X^*} E_n(f; C_{2\pi}) \leqslant A_2\|T_n\|_{X^*}\omega_1(1/n, f; C_{2\pi}),$

thus (3.9). Parallel to (1.21, 22), let $f_n, g_n \in C_{2\pi}$ be such that

(3.15) $\|f_n\|_C \leqslant 1, \qquad T_n f_n \geqslant \|T_n\|_{X^*}/2, \qquad g_n = V_n f_n.$

Then (1.6, 13) follow (cf. (1.23, 25)) and

$$T_n g_n = \|T^{\psi(n)}f_n - T^\psi g_n\|_C \geqslant T_n f_n - \|\psi\|_M \|f_n - g_n\|_C,$$

thus (3.1) in view of (3.12, 15). □

In this final form, Corollary 3.7 is due to Teljakovskii [61] who in particular supplied the necessity part of the assertion. At this stage let us point out that the present general approach to quantitative extensions of the UBP was indeed influenced by that work of Teljakovskii and related material of Pochuev [57] on multipliers of uniform convergence in as much as these authors already used specific versions of a gliding hump method in order to establish necessity. In fact, their results were first extended in [48; 49] from the particular situation of

2π-periodic functions and one-dimensional trigonometric expansions to regular biorthogonal systems in Banach spaces. This in turn paved the way for the present general approach (cf. [17; 19]) which does not need any orthogonality or commutativity.

On the other hand, gliding hump methods, similar to those of Teljakovskii and Pochuev, were also developed since 1967 in a number of papers of O. Kis, J. Szabados, and P. Vértesi (see Section 4.2 for some more details) in order to treat quantitative divergence phenomena for (Lagrange) interpolation processes. It seems that these considerations of the Hungarian School have their roots in the paper [36] of Erdös–Turán of 1955. In this connection it may be mentioned that perhaps the first contributions concerned with structural properties (Lipschitz conditions) on the one hand side and with best possible rates of convergence (for Fourier partial sums and interpolation processes, respectively) on the other hand are those of Faber [37] and Lebesgue [47] in 1910. The Baire approach of Section 2 was developed in [64; 65].

4 Applications

In this section we will give further applications of Theorem 1.2, this time concerned with concrete problems occurring in connection with the sharpness of error bounds in various fields of analysis.

4.1 Compound Trapezoidal Rule

Let $X = C[0, 1]$ be the space of functions f, continuous on the compact interval [0, 1], endowed with the usual max-norm $\|f\|_C$. Consider the compound trapezoidal rule

$$(4.1)\quad Q_n^{tr}f := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

for the approximate calculation of the integral $\int_0^1 f(u)du$. For the remainder

$$T_nf = |Q_n^{tr}f - \int_0^1 f(u)du| \in X^*$$

one has the well-known direct estimate (cf. [5, pp. 177, 226])

$$(4.2)\quad T_nf \leqslant A_3\omega_2(1/n, f; C[0, 1]) \quad (f \in C[0, 1]),$$

the r-th modulus of continuity of f being given by ($r \in \mathbf{N}$)

$$(4.3)\quad \omega_r(t, f; C[0, 1]) := \sup\{|\Delta_h^r f(u)| : u, u + rh \in [0, 1], |h| \leqslant t\},$$

$$\Delta_h^r f(u) := \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} f(u + kh).$$

The following result establishes the sharpness of (4.2).

Corollary 4.1 *For any* ω *subject to* (1.18) *there exists a counterexample* $f_\omega \in C[0, 1]$ *satisfying*

$$\omega_2(t, f_\omega; C[0,1]) = O(\omega(t^2))$$

such that for the compound trapezoidal rule

$$|Q_n^{tr} f_\omega - \int_0^1 f_\omega(u)du| \neq o(\omega(n^{-2})).$$

P r o o f. Consider the test functions $g_n(u) = \sin^2(2\pi nu)$ which vanish at the knots of the rule. Obviously, (1.6, 19) hold true with $C_1 = 2C_2 = 1$. Setting $U_t f = \omega_2(t, f; C[0,1])$, one also has (1.13) with $\sigma(t) = t^2$, $\varphi_n = n^{-2}$ since (cf. (1.25))

$$U_t g_n \leqslant \min\{4\|g_n\|_C, t^2\|g_n''\|_C\} \leqslant 8\pi^2 \min\{1, (tn)^2\}. \tag{4.4}$$

Therefore the assertion follows by an application of Theorem 1.2. Note that even the case $\omega = \omega_1$ is covered, namely by $f_1(x) = x^2$ since $T_n f_1 = 1/6n^2$. □

For $\omega_{\alpha/2}$, $0 < \alpha < 2$, Corollary 4.1 was already shown by Brass [6] via the construction of explicit counterexamples f_ω, based on special properties of the remainders T_n. Of course, the present procedure does not depend upon particular features of the trapezoidal rule so that corresponding results can also be deduced for other standard quadrature formulae. For a collection of examples, explicitly worked out, including interpolatory quadrature processes based on Jacobi knots, see [17; 19; 22; 28; 30; 51].

4.2 Lagrange Interpolation

Let $L_n f$ denote the Lagrange interpolation polynomials for $f \in C[0,1]$ with regard to the triangular matrix $0 \leqslant x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn} \leqslant 1$ of knots, i.e.,

$$L_n f := \sum_{k=1}^n f(x_{kn})\ell_{kn}, \qquad \ell_{kn}(u) := \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n \frac{u - x_{jn}}{x_{kn} - x_{jn}}.$$

In view of the projection property one has (cf. (3.14))

$$\|L_n f - f\|_C \leqslant (\lambda_n + 1)E_n(f; C[0,1]), \tag{4.5}$$

where $E_n(f; C[0,1])$ denotes the functional of best approximation by algebraic polynomials (cf. (3.13)) and λ_n the Lebesgue constant, i.e., the operator norm of L_n on $C[0,1]$ (cf. (1.4)). One has the representation

$$\lambda_n = \|\lambda_n(u)\|_C, \qquad \lambda_n(u) := \sum_{k=1}^n |\ell_{kn}(u)|,$$

and a result of Faber states that $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ for any triangular matrix of knots. Using (4.5) and well-known estimates for the functional of best approximation (cf. [62, Chapter 5]), one has that

$$\|L_n f - f\|_C \leqslant A_3 \lambda_n \omega_r(1/n, f; C[0,1]) \quad (f \in C[0,1]). \tag{4.6}$$

In spite of the extensive literature concerned with divergence phenomena for Lagrange interpolation, the sharpness of (4.6) is not yet settled in full generality.

The best result known so far uses the quantity

(4.7) $d_n := \min\{x_{kn} - x_{k-1,n} : 2 \leqslant k \leqslant n\}$

and delivers the following upper bounds for rates of convergence.

Corollary 4.2 *Given a triangular matrix of knots, for any* ω *subject to* (1.18) *there exists a counterexample* $f_\omega \in C[0, 1]$ *satisfying*

$$\omega_r(t, f_\omega; C[0, 1]) = O(\omega(t^r))$$

such that for the corresponding Lagrange interpolation process

$$\|L_n f_\omega - f_\omega\|_C \neq o(\lambda_n \omega(d_n^r)).$$

Proof. Let $f_n \in C[0, 1]$ be such that (cf. (1.21))

$$\|f_n\|_C \leqslant 1, \qquad \|L_n f_n\|_C \geqslant \lambda_n/2,$$

and consider a function h, arbitrarily often differentiable on **R**, satisfying

$$h(u) \begin{cases} = 0 & \text{for } u \leqslant 0 \\ \in (0, 1) & \text{for } 0 < u < 1 \\ = 1 & \text{for } 1 \leqslant u. \end{cases}$$

Then the test elements

$$g_n(u) = \begin{cases} f_n(x_{1n}) & \text{for } 0 \leqslant u \leqslant x_{1n} \\ f_n(x_{kn}) + [f_n(x_{k+1,n}) - f_n(x_{kn})]h\left(\dfrac{u - x_{kn}}{x_{k+1,n} - x_{kn}}\right) & \\ \qquad \text{for } x_{kn} \leqslant u \leqslant x_{k+1,n},\ 1 \leqslant k \leqslant n-1 & \\ f_n(x_{nn}) & \text{for } x_{nn} \leqslant u \leqslant 1 \end{cases}$$

are arbitrarily often differentiable on **R** satisfying (cf. (1.23))

$$\|g_n\|_C \leqslant 1, \qquad \|g_n^{(r)}\|_C \leqslant 2\|h^{(r)}\|_C/d_n^r, \qquad L_n g_n = L_n f_n.$$

Therefore, setting $T_n f = \|L_n f - f\|_C/\lambda_n$, it follows by the Faber result mentioned that (cf. (1.24))

$$T_n g_n \geqslant \lambda_n^{-1}[\|L_n f_n\|_C - \|g_n\|_C] \geqslant 1/2 - o(1),$$

thus (1.6, 19). Moreover, $U_t f = \omega_r(t, f; C[0, 1])$ satisfies (1.13) with $\sigma(t) = t^r$, $\varphi_n = d_n^r (\leqslant n^{-r})$ (cf. (4.4)). By Theorem 1.2 this completes the proof. □

Note that the quantity d_n of (4.7) is related to the Lebesgue constant λ_n via $d_n > 1/n^2\lambda_n$ (see [36], also [46] for the corresponding estimate $d_n > 1/n\,\lambda_n$ in connection with trigonometric Lagrange interpolation). As already mentioned, Lagrange interpolation is a classical field to discuss divergence phenomena for which Corollary 4.2 is just one example. This and related material may indeed be found in work of Kis (cf. [45]), Privalov (cf. [58]), Szabados (cf. [60]), and Vértesi (cf. [63] and the literature cited there), where each time gliding hump methods are developed, especially tailored to the particular situation at hand. In contrast, Theorem 1.2 (and 1.1) enables a unifying approach to the subject. For further results, explicitly worked out via Theorem 1.1, 2, including Lagrange interpolation at Jacobi knots, see [17; 19; 21; 22, Section 6.1; 51]).

4.3 Explicit Difference Scheme for the Heat Equation

Let $X = C_b(\mathbf{R})$ be the space of functions, uniformly continuous and bounded on $\mathbf{R}$. To approximate the exact solution (cf. (5.11) for the multivariate version)

$$(4.8) \quad u(x, t) := (W(t)f)(x) := (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} f(x-u)e^{-u^2/4t}du$$

of the initial value problem for the heat equation

$$\frac{d}{dt} u(x, t) = \frac{d^2}{dx^2} u(x, t), \qquad u(x, 0) = f(x) \in C_b(\mathbf{R}),$$

consider the explicit difference scheme ($\lambda \in (0, 1/2]$)

$$E_{t/n} := (1-2\lambda)I + \lambda(\tau_\delta + \tau_{-\delta}),$$

$$\delta^2 := t/n\lambda, \qquad (\tau_\delta f)(x) := f(x+\delta), \qquad I := \text{identity}.$$

For the approximation error $T_n f = \| E^n_{1/n} f - W(1)f \|_C$ at time $t = 1$ one has the direct estimate (cf. [34; 56])

$$f \in (C_b(\mathbf{R}))_{\omega_\alpha} \Rightarrow T_n f = O_f(\omega_\alpha(n^{-1})),$$

$(C_b(\mathbf{R}))_\omega$ being defined via (1.11) with $U_t f = \omega_2(t, f; C_b(\mathbf{R}))$, $\sigma(t) = t^2$ (cf. (4.3)).

Corollary 4.3 *For any* ω *subject to* (1.18) *there exists* $f_\omega \in C_b(\mathbf{R})$ *satisfying*

$$\omega_2(t, f_\omega; C_b(\mathbf{R})) = O(\omega(t^2)),$$

$$\| E^n_{1/n} f_\omega - W(1) f_\omega \|_C \neq o(\omega(n^{-1})).$$

P r o o f. Since X still contains trigonometric functions, consider the test functions $g_n(u) = \cos(2\pi(\lambda n)^{1/2}u)$ (compare Section 5.2 for a corresponding treatment in $L^p(\mathbf{R})$-spaces). In view of the convolution structure

$$W(1)g_n = g_n \exp\{-4\pi^2\lambda n\}, \qquad E_{1/n}g_n = g_n,$$

$$T_n g_n = 1 - \exp\{-4\pi^2\lambda n\} \geqslant 1 - \exp\{-4\pi^2\lambda\} =: C_2 > 0,$$

so that (1.6, 19) hold true. Since (1.13) is valid for $\sigma(t) = t^2$, $\varphi_n = n^{-1}$ (cf. (4.4)), the assertion follows by Theorem 1.2. □

For $\omega_{\alpha/2}$, $0 < \alpha < 2$, Corollary 4.3 was shown by Hedstrom [42] via concrete methods (see also [7] and the literature cited there). For further examples via Theorem 1.1, 2, concerned with the numerical solution of initial value problems, see [19; 20; 22; 28; 29].

4.4 Product Cubature Formulae

Apart from the trapezoidal rule (4.1) consider the compound Simpson rule

$$Q_n^{Si} f := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6} \left[f\left(\frac{2k-2}{2n}\right) + 4f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{2k}{2n}\right) \right],$$

which is indeed related to (4.1) via

$$(4.9)\quad Q_n^{Si} = \frac{4}{3} Q_{2n}^{tr} - \frac{1}{3} Q_n^{tr}.$$

On $R[0,1]^2$, the set of functions, Riemann integrable over the square $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbf{R}^2$, one may define corresponding compound product cubature rules $(m, n \in \mathbf{N})$

$$C_{m,n}^{tr} f := (Q_m^{tr} \times Q_n^{tr}) f, \qquad C_{m,n}^{Si} f := (Q_m^{Si} \times Q_n^{Si}) f,$$

$$C_{m,n}^{tr} f := \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{j-1}{m}, \frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{j}{m}, \frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{j-1}{m}, \frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{j}{m}, \frac{k}{n}\right)\right],$$

with remainders $R_{m,n}^{tr}$ and

$$R_{m,n}^{Si} f := |C_{m,n}^{Si} f - \int_0^1 \int_0^1 f(u,v)\, d(u,v)|,$$

respectively. Obviously, (4.9) implies

$$(4.10)\quad C_{m,n}^{Si} = \frac{16}{9} C_{2m,2n}^{tr} - \frac{4}{9} C_{2m,n}^{tr} - \frac{4}{9} C_{m,2n}^{tr} + \frac{1}{9} C_{m,n}^{tr}.$$

Let $\epsilon := \{\epsilon_{m,n}\}$ denote a decreasing nullsequence, i.e., $\epsilon_{m,n} \leqslant \epsilon_{j,k}$ if $j \leqslant m$, $k \leqslant n$, and $\epsilon_{m,n} \to 0$ if $m, n \to \infty$ simultaneously. Then (4.10) delivers that on $R[0,1]^2$

$$R_{m,n}^{tr} f \leqslant \epsilon_{m,n} \Rightarrow R_{m,n}^{Si} f \leqslant \frac{25}{9} \epsilon_{m,n},$$

which is sharp in the following sense.

Corollary 4.4 *For each sequence* $\{(m_k, n_k)\}_{k \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{N}^2$ *with* $m_k, n_k \to \infty$ *for* $k \to \infty$ *and for each decreasing nullsequence* $\epsilon = \{\epsilon_{m,n}\}$ *there exists* $f_\epsilon \in C[0,1]^2$ *such that*

$$R_{m,n}^{tr} f_\epsilon \leqslant \epsilon_{m,n} \quad \text{but} \quad R_{m_k,n_k}^{Si} f_\epsilon \neq o(\epsilon_{m_k,n_k}) \quad (k \to \infty).$$

P r o o f. First of all note that Theorem 1.2 (and 1.1) remains valid if the functionals $U_t \in X^*$ depend on a parameter t, varying over an arbitrary index set J, and if $\sigma : J \to (0, \infty)$ (cf. (1.11), (2.9)). One may then consider $X = C[0,1]^2$, $t = (m,n) \subset J = \mathbf{N}^2$, $U_t = R_{m,n}^{tr}$, $T_k = R_{m_k,n_k}^{Si}$, and the test elements $g_k(x,y) = \cos(2\pi m_k x) \cos(2\pi n_k y)$. Again (1.6) holds true for $C_1 = 1$ as well as (1.19) for $C_2 = 1/9$ since

$$R_{m_k,n_k}^{Si} g_k = |C_{m_k,n_k}^{Si} g_k| = |Q_{m_k}^{Si}(\cos(2\pi m_k x)) Q_{n_k}^{Si}(\cos(2\pi n_k y))|.$$

On the other hand,

$$R_{m,n}^{tr} g_k = |Q_m^{tr}(\cos(2\pi m_k x)) Q_n^{tr}(\cos(2\pi n_k y))| \leqslant \begin{cases} 0 & \text{if } m > m_k \text{ or } n > n_k \\ 1 & \text{in any case} \end{cases}$$
$$\leqslant \min\{1, \epsilon_{m,n}^2/\epsilon_{m_k,n_k}^2\},$$

thus (1.13) for $M_1 = 1$, $\sigma(m,n) = \epsilon_{m,n}^2$, $\varphi_k = \epsilon_{m_k,n_k}^2$. Therefore Theorem 1.2 for $\omega_{1/2}$ delivers the assertion. □

4.5 Moduli of Continuity

Let $X = L^p(\mathbf{R})$, $1 \leqslant p < \infty$, be the space of functions f, p-th power integrable over $\mathbf{R}$ with $\|f\|_p := (\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^p du)^{1/p}$. For $0 < \beta < r \in \mathbf{N}$ the following question arises as an inverse theorem in approximation theory: Given a positive sequence $\{\delta_n\}$, tending monotonically to zero, does (cf. (4.3)) $\|\Delta_{\delta_n}^r f\|_p = O(\delta_n^\beta)$ for $n \to \infty$ already imply $\|\Delta_\delta^r f\|_p = O(\delta^\beta)$ for $\delta \to 0+$, provided that

(4.11) $\delta_n = O(\delta_{n+1}) \quad (n \to \infty)$?

It seems that this problem was posed by DeVore [13, Chapter 8], who also gave first results towards the sufficiency of (4.11). This point of view was continued in [3; 35; 40]. Our contribution to the problem consists in a unified approach towards the necessity of (4.11), thereby regaining (cf. [52]) results of H. S. Shapiro (cf. [13, p. 239]) and Freud [40].

Corollary 4.5 *Let* $0 < \beta < r \in \mathbf{N}$ *and* $0 < \delta_{n+1} < \delta_n = o(1)$. *On* $L^p(\mathbf{R})$, $1 \leqslant p < \infty$, (4.11) *is necessary and sufficient for the implication* $(n \to \infty, \delta \to 0+)$

(4.12) $\|\Delta_{\delta_n}^r f\|_p = O_f(\delta_n^\beta) \Rightarrow \|\Delta_\delta^r f\|_p = O_f(\delta^\beta)$.

P r o o f. For the sufficiency see [3]. To show the necessity of (4.11), consider $h_t(u) := t^{-1/p} H(u/t)$, $H(u) := \exp\{-u^2\}$, for $t > 0$. Obviously,

$$\|h_t\|_p = \pi^{1/2p} = C_1, \quad \|\Delta_t^r h_t\|_p = \|\Delta_1^r H\|_p = C_2 > 0,$$
$$\|h_t^{(r)}\|_p = t^{-r} \|H^{(r)}\|_p = M_3 t^{-r}.$$

Assume (4.11) to be false, i.e., there exists a subsequence $\{k_n\} \subset \mathbf{N}$ such that $\alpha_n := \delta_{k_n}/\delta_{k_n+1}$ tends to infinity. Choose s such that $\beta/r < s < 1$, and set

$$g_n = h_{\epsilon_n}, \qquad \epsilon_n := \delta_{k_n}^s \delta_{k_n+1}^{1-s},$$
$$T_n f = \|\Delta_{\epsilon_n}^r f\|_p, \qquad U_m f = \|\Delta_{\delta_m}^r f\|_p$$

upon replacing the continuous parameter $t \to 0+$ by the discrete one $m \to \infty$. Then (1.6, 19) are satisfied. Moreover, for $k_n < m$

$$\begin{aligned} U_m g_n &\leqslant \delta_m^r \|g_n^{(r)}\|_p = M_3 \epsilon_n^{-r} \delta_m^r \\ &= M_3 (\delta_m/\delta_{k_n})^{sr} (\delta_m/\delta_{k_n+1})^{(1-s)r} \leqslant M_3 (\delta_m/\delta_{k_n})^{sr} \leqslant M_3, \end{aligned}$$

whereas for $k_n \geqslant m$

$$U_m g_n \leqslant 2^r \|g_n\|_p = 2^r C_1 \leqslant 2^r C_1 (\delta_m/\delta_{k_n})^{sr},$$

thus in any case (1.13) with $\sigma_m = \delta_m^{sr}$, $\varphi_n = \delta_{k_n}^{sr}$. Therefore Theorem 1.2 for $\omega_{\beta/sr}$ delivers the existence of a counterexample $f_0 \in L^p(\mathbf{R})$ for which

$$\|\Delta_{\delta_m}^r f_0\|_p = U_m f_0 = O(\omega_{\beta/sr}(\delta_m^{sr})) = O(\delta_m^\beta),$$
$$\|\Delta_{\epsilon_n}^r f_0\|_p = T_n f_0 \geqslant C_2 \omega_{\beta/sr}(\delta_{k_n}^{sr}) = C_2 \delta_{k_n}^\beta = C_2 \alpha_n^{\beta(1-s)} \epsilon_n^\beta \neq O(\epsilon_n^\beta),$$

at least for infinitely many n. But this is a contradiction to (4.12), proving the necessity of (4.11). □

5 Extensions

In this final section we indicate some of the more important further developments of the quantitative resonance principle. These aspects are concerned with condensation, nonlinearity, and comparison, each time illustrated by a significant application.

5.1 Condensation

In 1927 Banach and Steinhaus [1] extended the UBP to a condensation principle which reads in a formulation parallel to UBP 2,

Condensation Principle *Suppose that for a double sequence* $\{\{T_{n,p}\}_{n\in\mathbf{N}} : p\in\mathbf{N}\} \subset X^*$ *there are elements* $g_{n,p} \in X$ *satisfying*

(5.1) $\|g_{n,p}\|_X \leqslant C_1 \quad (n, p \in \mathbf{N})$,

(5.2) $\limsup_{n\to\infty} T_{n,p}g_{n,p} = \infty \quad (p \in \mathbf{N})$.

Then there exists a counterexample $f_0 \in X$ *such that*

(5.3) $\limsup_{n\to\infty} T_{n,p}f_0 = \infty$

simultaneously for each $p \in \mathbf{N}$.

Again this principle may be equipped with rates. To this end, let $\{\{\varphi_{n,p}\}_{n\in\mathbf{N}} : p \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$ be a double sequence of numbers, for each $p \in \mathbf{N}$ strictly decreasing to zero as $n \to \infty$. Then, analogously to Theorem 1.2,

Theorem 5.1 *Suppose that for* $T_{n,p} \in X^*$ *there are elements* $g_{n,p} \in X$ *satisfying* (5.1) *and*

(5.4) $\limsup_{n\to\infty} T_{n,p}g_{n,p} \geqslant C_{2,p} > 0 \quad (p \in \mathbf{N})$.

Furthermore, let $\{U_t : t > 0\} \subset X^*$ *be such that*

(5.5) $U_t g_{n,p} \leqslant M_1 \min\{1, \sigma(t)/\varphi_{n,p}\} \quad (n, p \in \mathbf{N}, t > 0)$.

Then for each ω *subject to* (1.9, 18) *there exists a counterexample* $f_\omega \in X_\omega$ (*cf.* (1.11)) *such that*

(5.6) $\limsup_{n\to\infty} T_{n,p}f_\omega/\omega(\varphi_{n,p}) \geqslant C_{2,p} > 0$

simultaneously for each $p \in \mathbf{N}$.

Of course, one may also give a condensation principle with large O-rates, corresponding to Theorem 1.1. These results were shown in [21] via elementary, but rather intricate gliding hump methods. Once the machinery is available, one advantage of the Baire approach, however, is that the extension to condensation readily follows, using the fact that the countable intersection of residual sets is residual, too. For details see [64; 65].

Here we would like to conclude with an application of Theorem 5.1 to the approximation of $f \in C[0, 1]$ by the Bernstein polynomials

$$B_n(f; x) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

As a consequence, the well-known direct estimate (cf. [2])

$$(5.7) \quad |B_n(f; x) - f(x)| \leqslant A_3\omega_2\left(\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{1/2}, f; C[0, 1]\right) \quad (f \in C[0, 1])$$

turns out to be sharp in the following pointwise sense.

Corollary 5.2 *For any* ω *subject to* (1.18) *there exists a counterexample* $f_\omega \in C[0, 1]$ *satisfying*

$$\omega_2(t, f_\omega; C[0, 1]) = O(\omega(t^2))$$

such that for the Bernstein polynomials

$$\limsup_{n\to\infty} |B_n(f_\omega; x) - f_\omega(x)|/\omega(x(1-x)/n) \geqslant C_2 > 0$$

simultaneously for each x *of a dense set in* [0, 1].

Proof. For $X = C[0, 1]$ and $p = x \in (0, 1)$ consider the functionals

$$T_{n,x}f = |B_n(f; x) - f(x)|, \qquad U_t f = \omega_2(t, f; C[0, 1])$$

in connection with the test elements ($\psi_{n,x} := x(1-x)/n$, $\xi_{n,x} \in [0, 1]$)

$$g_{n,x}(u) = 1 - \cos((x-u)/\psi_{n,x}^{1/2}) = (x-u)^2/2\psi_{n,x} - (1/4!)(x-u)^4 g_{n,x}^{(4)}(\xi_{n,x}).$$

Of course, $g_{n,x}$ satisfy (5.1) as well as (5.5) with $\sigma(t) = t^2$, $\varphi_{n,p} = \psi_{n,x}$ (cf. (4.4)). Moreover, (5.4) with $C_{2,x} = 3/8$ follows since in view of the positivity of the Bernstein polynomials

$$\begin{aligned} T_{n,x}g_{n,x} &= B_n(g_{n,x}; x) \geqslant (1/2\psi_{n,x})B_n((x-u)^2; x) - (1/4!)\psi_{n,x}^{-2}B_n((x-u)^4; x) \\ &= 1/2 - (1/4!)[3 + 1/nx(1-x) - 6/n]. \end{aligned}$$

Thus Theorem 5.1 applies and delivers the assertion for all rational $x \in (0, 1)$, say. Again the case ω_1 is also covered, namely by $f_1(x) = x^2$ since $B_n(f_1; x) - f_1(x) = \psi_{n,x}$. □

By a general continuity argument, already given by Orlicz [54], one may immediately extend assertions like those of Corollary 5.2 (or even Theorem 5.1) to uncountable dense sets of second category (cf. [21; 65]). On the other hand, the extension to sets of full measure is a much more difficult problem (but see Section 5.2). For the Bernstein polynomials an elaborate analysis can be carried out, giving the sharpness of (5.7) almost everywhere. See [14; 15] for the details.

5.2 Nonlinear Functionals

In certain cases divergence phenomena on arbitrary sets may be handled just by passing to the following class of nonsubadditive functionals: For the Banach space X let X^+ be the class of non-negative functionals T on X which are positive homogeneous

(5.8) $T(af) = aTf \quad (f \in X, a \geqslant 0)$

and lower semicontinuous, i.e., for each $f \in X$ and $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for all $g \in X$ with $\|g\|_X < \delta$

(5.9) $T(f + g) > Tf - \epsilon$.

Obviously, $X^* \subset X^+$, but nevertheless Theorem 1.2 remains valid on X^+, provided the sequence $\{T_n\}$ satisfies (5.10) on the cone

$$G := \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_j g_j : m \in \mathbf{N}, a_j \geqslant 0 \right\}.$$

Theorem 5.3 *Suppose that for* $T_n \in X^+$ *there are elements* $g_n \in X$ *satisfying* (1.6, 19), *and let the sequence* $\{T_n\}$ *be asymptotically lower subadditive on* G *in the sense that*

(5.10) $T_n(p + q) \geqslant T_n p - T_n q - C_q \varphi_n \quad (p, q \in G, n \in \mathbf{N})$.

Furthermore, let $\{U_t : t > 0\} \subset X^*$ *be such that* (1.13) *holds true. Then for each* ω *subject to* (1.9, 18) *there exists a counterexample* $f_\omega \in X_\omega$ *such that* (1.20) *is valid.*

For a proof see [31] (gliding hump method) or [64; 65] (Baire category argument). Let us again examine the value of the result in connection with a concrete application (further ones are worked out in [15; 23; 25; 31; 32]).

Let $X = C_0(\mathbf{R}^k)$ be the space of functions f, continuous on the Euclidean k-space $\mathbf{R}^k$ with $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$. Consider the singular integral of Gauss–Weierstrass ($t > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbf{R}^k$, cf. (4.8))

(5.11) $(W(t)f)(x) := (4\pi t)^{-k/2} \int_{\mathbf{R}^k} f(x - u) e^{-u^2/4t} du,$

for which one has the familiar direct estimate (cf. (4.3))

(5.12) $\|W(t)f - f\|_C \leqslant A_3 \omega_2(t^{1/2}, f; C_0(\mathbf{R}^k)) \quad (f \in C_0(\mathbf{R}^k))$.

Then Theorem 5.3 may be used to establish the sharpness of (5.12) even in the following pointwise sense.

Corollary 5.4 *For any* ω *subject to* (1.18) *there exists a counterexample* $f_\omega \in C_0(\mathbf{R}^k)$ *satisfying*

$$\omega_2(t, f_\omega; C_0(\mathbf{R}^k)) = O(\omega(t^2))$$

such that for the singular integral of Gauss–Weierstrass

$$\limsup_{t \to 0+} |(W(t)f_\omega)(x) - f_\omega(x)| / \omega(t) \geqslant C_2 > 0$$

simultaneously for each $x \in \mathbf{R}^k$.

P r o o f. First of all note that, in contrast to Section 4.3, trigonometrical functions do not belong to the present space $X = C_0(\mathbf{R}^k)$. Therefore consider the functionals $T_n \in X^+$,

$$T_n f = \inf \{ |(W(1/n)f)(x) - f(x)| : |x| \leqslant n-1 \},$$

together with the test elements $g_n(x) = H(x/n) \exp\{in^{1/2} \sum_{j=1}^k x_j\}$, where H is a function, arbitrarily often differentiable on $\mathbf{R}^k$ with compact support such that $H(x) = 1$ for $|x| \leqslant 1$. Setting

$$\tilde{g}_n(x) := \exp\left\{ in^{1/2} \sum_{j=1}^{k} x_j \right\}, \qquad H_n(x) := H(x/n)$$

(hence $g_n = H_n \tilde{g}_n$), one has

$$\begin{aligned} T_n g_n &\geqslant T_n \tilde{g}_n - \sup_{|x| \leqslant n-1} |(W(1/n)(\tilde{g}_n(H_n - 1)))(x)| \\ &\geqslant [1 - e^{-k}] - (\|H\|_C + 1)(n/4\pi)^{k/2} \int_{|u| \geqslant 1} e^{-u^2 n/4} du \end{aligned}$$

so that (1.6, 19) hold true with $C_1 = \|H\|_C$, $C_2 = 1 - e^{-k}$. Moreover, for $U_t f = \omega_2(t, f; C_0(\mathbf{R}^k))$ one has (1.13) with $\sigma(t) = t^2$, $\varphi_n = 1/n$ (cf. (4.4)) which also establishes (5.10) (cf. (5.12)). Hence Theorem 5.3 may be applied which then implies the assertion. □

It may be worthwile to mention that Theorem 5.3 in fact includes the following UBP (without rates) on X^+ (cf. UBP 2).

Theorem 5.5 *Suppose that for* $T_n \in X^+$ *there are elements* $g_n \in X$ *satisfying* (1.6, 7), *and let the sequence* $\{T_n\}$ *be asymptotically lower subadditive on* G *in the sense that* (*cf.* (5.10))

(5.13) $\quad T_n(p+q) \geqslant T_n p - T_n q - C_q \quad (p, q \in G, n \in \mathbf{N}).$

Then there exists a counterexample $f_0 \in X$ *such that* (1.8) *holds true.*

This result, in particular condition (5.13) (and (5.8, 9)), should be compared with work of Gál (cf. [41]). Let us emphasize, however, that it is the present form of a UBP on X^+ which subsumes classical results of Kolmogorov (1926) and of (Grünwald-) Marcinkiewicz (1937) on the everywhere divergence of trigonometrical Fourier partial sums on $L^1_{2\pi}$ and of the Lagrange interpolation process, taken at the Tschebyscheff knots, on C[−1, 1], respectively. See [25; 31] for the details.

5.3 Comparison

About twenty years ago, Favard [38; 39] raised the question for the comparison of approximation processes: Given two sequences $\{R_n\}, \{V_n\} \subset X^*$, does there hold true an estimate of type $R_n f = O_f(V_n f)$ for each f of a prescribed class in X? In connection with the UBP he pointed out that one feature of this problem certainly consists in deriving significant negative results. Indeed, he formulated

UBP 3 (comparison version) *Suppose that for* $R_n, V_n \in X^*$ *there are elements* $g_n \in X$ *satisfying* (1.6) *and* (*cf.* (1.7))

(5.14) $\quad R_n g_n \neq O(\|V_n\|_{X^*}) \quad (n \to \infty).$

Then there exists a counterexample $f_0 \in X$ *such that*

(5.15) $R_n f_0 \neq O(V_n f_0) \quad (n \to \infty)$.

Condition (5.14) depends upon $\|V_n\|_{X^*}$, i.e., upon the supremum of the values $V_n f$ over a ball in X (cf. (1.3)). From the point of view of applications this may be too large. In fact, it would be desirable (cf. (1.7, 8) as well as (5.15)) to replace (5.14) by $R_n g_n \neq O(V_n g_n)$, but this seems to be too weak. If, however, all the values $V_n g_j$ are taken into account, then one may indeed extend Theorem 1.2 to the following negative result concerning a comparison of two processes $\{R_n\}, \{V_n\}$.

Theorem 5.6 *Suppose that for* $R_n, T_n, V_n \in X^*$ *there are elements* $g_n \in X$ *satisfying* (1.6, 19) *and*

(5.16) $\limsup_{n \to \infty} R_n g_n \geq C_2 > 0$,

(5.17) $V_n g_n \leq B_1, \qquad \limsup_{m \to \infty} V_m g_n / \varphi_m = B_{2,n} < \infty$.

Furthermore, let $\{U_t : t > 0\} \subset X^*$ *be such that* (1.13) *holds true. Then for each* ω *subject to* (1.9, 18) *there exists a counterexample* $f_\omega \in X_\omega$ *(cf.* (1.11)) *satisfying* (1.20) *as well as*

(5.18) $R_n f_\omega \neq o(V_n f_\omega) \quad (n \to \infty)$.

Thus the negative small o-result (5.18) (cf. (5.15)) on the comparison of the processes $\{R_n\}, \{V_n\}$ is again given in quantitative terms in as much as $f_\omega \in X_\omega$ assures a certain smoothness of the counterexample, whereas (1.20) may now be interpreted as a precision of its nonsmoothness. For a proof of Theorem 5.6 see [26; 53] or [64; 65] and the literature cited there. In fact, our approach was very much inspired by Boman's treatment [4] of a problem of S. B. Steckin (1977). In contrast to the more theoretical merits of Favard's suggestions, Steckin posed his problem in concrete terms: On the basis of his inequality (cf. [62, p. 331], for the notation see (1.12), (3.13), (4.3))

$$\omega_r(1/n, f; C_{2\pi}) \leq K_r n^{-r} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{r-1} E_k(f; C_{2\pi}) \quad (f \in C_{2\pi})$$

he asked for an estimate of (the more direct) type

$$\omega_r(1/n, f; C_{2\pi}) \leq K_f E_n(f; C_{2\pi})$$

to be valid for each nondifferentiable function f, say. The answer is negative and was given by Boman [4]. Let us show how to regain (a quantitative extension of) Boman's result from the general Theorem 5.6.

Corollary 5.7 *For each* ω *subject to* (1.18) *and each positive sequence* $\{M_n\}$, *tending to infinity, there exists a counterexample* $f_{\omega,M} \in C_{2\pi}$ *satisfying*

$$\omega_r(t, f_{\omega,M}; C_{2\pi}) \begin{cases} = O(\omega(t^r)) \\ \neq o(\omega(t^r)) \end{cases} \quad (t \to 0+),$$

but for which nevertheless

$$\omega_r(1/n, f_{\omega,M}; C_{2\pi}) \neq o(M_n E_n(f_{\omega,M}; C_{2\pi})) \quad (n \to \infty).$$

P r o o f. For $X = C_{2\pi}$ consider the functionals

$$U_t f = \omega_r(t, f; C_{2\pi}), \qquad R_n = T_n = U_{1/n}, \qquad V_n f = M_n E_n(f; C_{2\pi}),$$

and the test elements $g_n(u) = e^{inu}$. Obviously, (1.6, 13, 19), (5.16) hold true with $\sigma(t) = t^r$, $\varphi_n = n^{-r}$, using the elementary estimates

$$|\Delta_h^r g_n(u)| = |1 - e^{inh}|^r \begin{cases} \leqslant \min\{2^r, (n|h|)^r\} & \text{for } h \in \mathbf{R} \\ \geqslant (2n|h|/\pi)^r & \text{for } |h| \leqslant \pi/n. \end{cases}$$

Since $V_m g_n = 0$ for $m \geqslant n$, condition (5.17) is also valid with $B_1 = B_{2,n} = 0$. Hence an application of Theorem 5.6 completes the proof. □

The present treatment of Steckin's problem sufficiently exhibits the close interconnection with the more theoretical aspects of Favard's problem. See [26–28; 30; 33; 52; 53] for further motivations and results.

References

[1] B a n a c h , S.; S t e i n h a u s , H.: Sur le principe de la condensation de singularités. Fund. Math. **9** (1927) 50–61
[2] B e r e n s , H.; L o r e n t z , G. G.: Inverse theorems for Bernstein polynomials. Indiana Univ. Math. J. **21** (1972) 693–708
[3] B o m a n , J.: On a problem concerning moduli of smoothness. In: Fourier Analysis and Approximation Theory. Proceedings, Budapest 1976 (G. Alexits, P. Turán, eds.). Amsterdam: North-Holland 1978, 175–179
[4] B o m a n , J.: A problem of Steckin on trigonometric approximation. In: Constructive Function Theory '77. Proceedings, Blagoevgrad 1977 (Bl. Sendov, D. Vacov, eds.). Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci. 1980, 269–273
[5] B r a s s , H.: Quadraturverfahren. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht 1977
[6] B r a s s , H.: Der Wertebereich des Trapezverfahrens. In: Numerische Integration. Proceedings, Oberwolfach 1978 (G. Hämmerlin, ed.). Basel: Birkhäuser 1979, 98–108
[7] B r e n n e r , P.; T h o m é e , V.; W a h l b i n , L.: Besov Spaces and Applications to Difference Methods for Initial Value Problems. Berlin: Springer 1975
[8] B u t z e r , P. L.: The Banach-Steinhaus theorem with rates and applications to various branches of analysis. In: General Inequalities II. Proceedings, Oberwolfach 1978 (E. F. Beckenbach, ed.). Basel: Birkhäuser 1980, 299–331
[9] B u t z e r , P. L.: Some recent applications of functional analysis to approximation theory. In: Zum Werk Leonhard Eulers. Proceedings, Berlin 1983 (E. Knobloch, I. S. Louhivaara, J. Winkler, eds.). Basel: Birkhäuser 1984, 133–155
[10] B u t z e r , P. L.; B e r e n s , H.: Semi-Groups of Operators and Approximation. Berlin: Springer 1967
[11] B u t z e r , P. L.; N e s s e l , R. J.: Fourier Analysis and Approximation. Basel: Birkhäuser 1971; New York: Academic Press 1971
[12] B u t z e r , P. L.; S c h e r e r , K.; W e s t p h a l , U.: On the Banach–Steinhaus theorem and approximation in locally convex spaces. Acta Sci. Math. (Szeged) **34** (1973) 25–34
[13] D e V o r e , R.: The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators. Berlin: Springer 1972
[14] D i c k m e i s , W.: Ein quantitatives Resonanzprinzip und Schärfe von punktweisen Fehlerabschätzungen fast überall. Habilitationsschrift Aachen 1983

[15] Dickmeis, W.: On quantitative condensation of singularities on sets of full measure. To appear

[16] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.: On Banach–Steinhaus theorems with orders. Comment. Math. Prace Mat. Tomus Specialis in Honorem Ladislai Orlicz 1 (1978) 95–107

[17] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.: A unified approach to certain counterexamples in approximation theory in connection with a uniform boundedness principle with rates. J. Approx. Theory **31** (1981) 161–174

[18] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.: A uniform boundedness principle with rates and an application to linear processes. In: Functional Analysis and Approximation. Proceedings, Oberwolfach 1980 (P. L. Butzer, E. Görlich, B. Sz.-Nagy, eds.). Basel: Birkhäuser 1981, 311–322

[19] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.: On uniform boundedness principles and Banach–Steinhaus theorems with rates. Numer. Funct. Anal. Optim. **3** (1981) 19–52

[20] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.: On counterexamples for rates of convergence concerning numerical solutions of initial value problems. Z. Anal. Anwendungen **1** (1982), 59–70

[21] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.: Condensation principles with rates. Studia Math. **75** (1982) 55–68

[22] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.: Quantitative Prinzipien gleichmäßiger Beschränktheit und Schärfe von Fehlerabschätzungen. Opladen: Westdeutscher Verlag 1982

[23] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.: On condensation principles with rates II. In: Constructive Function Theory '81. Proceedings, Varna 1981 (Bl. Sendov et al., eds.). Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci. 1983, 275–278

[24] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.: Quantitative Banach–Steinhaus theorems – a survey. In: Recent Trends in Mathematics. Proceedings, Reinhardsbrunn 1982 (H. Kurke et al., eds.). Leipzig: BSB Teubner 1983, 69–82

[25] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.: A quantitative condensation of singularities on arbitrary sets. J. Approx. Theory **43** (1985) 383–393

[26] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: On the sharpness of estimates in terms of averages. Math. Nachr. **117** (1984) 263–271

[27] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: A general approach to quantitative negative results in approximation theory. In: Mathematical Structures-Computational Mathematics – Mathematical Modelling, 2. (D. Vasov, ed.). Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci. 1984, 141–147

[28] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: A general approach to counterexamples in numerical analysis. Numer. Math. **43** (1984) 249–263

[29] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: Steckin-type estimates for locally divisible multipliers in Banach spaces. Acta Sci. Math. (Szeged) **47** (1984) 169–188

[30] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: Some negative results on the comparison of approximation processes. In: Constructive Theory of Functions '84. Proceedings, Varna 1984 (Bl. Sendov et al., eds.). Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci. 1984, 273–283

[31] Dickmeis, W., Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: On nonlinear condensation principles with rates. Manuscripta Math. **52** (1985) 1–20

[32] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: A nonlinear quantitative resonance principle with applications to pointwise approximation. In: Alfred Haar Memorial Conference. Proceedings, Budapest 1985 (J. Szabados, K. Tandori, eds.). Amsterdam: North-Holland 1986, in print

[33] Dickmeis, W.; Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: Necessary conditions for the comparison of sequences of linear functionals. Math. Nachr. in print

[34] Dickmeis, W.; Roeckerath, M. Th.: On stable limit laws with orders and their connection to numerical analysis. Numer. Funct. Anal. Optim. **1** (1979) 383–397

[35] Ditzian, Z.: Inverse theorems for functions in L_p and other spaces. Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976) 80–82

[36] Erdös, P.; Turán, P.: On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **6** (1955) 47–65

[37] Faber, G.: Über stetige Funktionen (zweite Abhandlung). Math. Ann. **69** (1910) 372–443

[38] Favard, J.: Sur la comparaison des procédés de sommation. In: On Approximation Theory. Proceedings, Oberwolfach 1963 (P. L. Butzer, J. Korevaar, eds.). Basel: Birkhäuser 1964, 4–11
[39] Favard, J.: On the comparison of the processes of summation. SIAM J. Numer. Anal. **1** (1964) 38–52
[40] Freud, G.: On the problem of R. DeVore. Canad. Math. Bull. **17** (1974) 39–44
[41] Gál, I. S.: Sur la méthode de résonance et sur un théorème concernant les espaces de type (B). Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **3** (1951) 23–50
[42] Hedstrom, G. W.: The rate of convergence of some difference schemes. SIAM J. Numer. Anal. **5** (1968) 363–406
[43] Horváth, J.: Topological Vector Spaces and Distribution I. Reading: Addison-Wesley 1966
[44] Kaczmarz, S.; Steinhaus, H.: Theorie der Orthogonalreihen. New York: Chelsea 1951
[45] Kis, O.: A condition for the divergence of trigonometric interpolation (Russ.). Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **10** (1967) 135–142
[46] Kis, O.: A remark on the order of the error in interpolation (Russ.). Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **20** (1969) 339–346
[47] Lebesgue, H.: Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz. Bull. Soc. Math. France **38** (1910) 184–210
[48] Mertens, H. J.; Nessel, R. J.: An equivalence theorem concerning multipliers of strong convergence. J. Approx. Theory **30** (1980) 284–308
[49] Mertens, H. J.; Nessel, R. J.: Quasikonvexe Multiplikatoren starker Konvergenz. Anal. Math. **7** (1981) 49–67
[50] Natanson, I. P.: Konstruktive Funktionentheorie. Berlin: Akademie Verlag 1955
[51] Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: A unified approach to approximation theorems of Dini-Lipschitz-type. J. Math. Res. Exposition **4** (1984) 137–152
[52] Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: Some negative results in connection with Marchaud-type inequalities. In: General Inequalities 4. Proceedings, Oberwolfach 1983 (W. Walter, ed.). Basel: Birkhäuser 1984, 221–238
[53] Nessel, R. J.; van Wickeren, E.: Negative results in connection with Favard's problem on the comparison of approximation processes. In: Anniversary Volume on Approximation Theory and Functional Analysis. Proceedings, Oberwolfach 1983 (P. L. Butzer, R. L. Stens, B. Sz.-Nagy, eds.). Basel: Birkhäuser 1984, 189–200
[54] Orlicz, W.: Über Folgen linearer Operationen, die von einem Parameter abhängen. Studia Math. **5** (1934) 160–170
[55] Osgood, W. F.: Non-uniform convergence and the integration of series term by term. Amer. J. Math. **19** (1897) 155–190
[56] Peetre, J.; Thomée, V.: On the rate of convergence for discrete initial-value problems. Math. Scand. **21** (1967) 159–176
[57] Pochuev, V. R.: On multipliers of uniform convergence and multipliers of uniform boundedness of partial sums of Fourier series (Russ.). Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika **21** (1977) 74–81 = Soviet Math. **21** (1977) 60–66
[58] Privalov, A. A.: Divergence of interpolation processes at a fixed point (Russ.). Mat. Sb. **66** (1965) 272–286
[59] Riesz, F.; Sz.-Nagy, B.: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956
[60] Szabados, J.: Note on the divergence of trigonometric interpolation. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **20** (1969) 335–338
[61] Teljakovskii, S. A.: Uniform convergence factors for Fourier series of functions with a given modulus of continuity (Russ.). Mat. Zametki **10** (1971) 33–40 = Math. Notes **10** (1971) 444–448
[62] Timan, A. F.: Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. New York: Pergamon Press 1963
[63] Vértesi, P. O. H.: On certain linear operators VII (A summary from new point of view. Estimations for mechanical quadratures). Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **25** (1974) 67–80
[64] van Wickeren, E.: Resonanzprinzipien der Approximationstheorie aus Baire'scher Sicht. Dissertation Aachen 1984

[65] van Wickeren, E.: A Baire approach to quantitative resonance principles. Numer. Funct. Anal. Optim. 1986, in print.
[66] Zygmund, A.: Trigonometric Series I. Cambridge: Cambridge University Press 1959

W. Dickmeis, R. J. Nessel, E. van Wickeren
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 55
D-5100 Aachen

(*Eingegangen 16. 12. 1985*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 89 (1987) 135–143

Max Deuring 9.12.1907 bis 20.12.1984

M. Kneser, Göttingen

Am 20. Dezember 1984 verstarb kurz nach Vollendung seines 77. Lebensjahres der Senior der Göttinger Mathematiker Max Deuring. Am 9. Dezember 1907 in Göttingen geboren wuchs er in einem Naturwissenschaften und Technik gegenüber aufgeschlossenen Elternhaus auf. Sein Vater war Ingenieur, und auch ein älterer Bruder hatte diesen Beruf gewählt. Schon bald, spätestens während des Besuchs der Oberrealschule, zeigte sich seine besondere mathematische Begabung, und so lag es nahe, daß er im Sommer 1926 die heimische Georg-August-Universität bezog, um Mathematik und Physik zu studieren.

In Göttingen waren damals verschiedene mathematische Arbeitsrichtungen vertreten, etwa analytische Zahlentheorie durch Landau, reelle Analysis durch Courant, auch Hilbert hatte noch einige Schüler, die an Grundlagenfragen interessiert waren. Besonders aktiv war der Kreis junger Algebraiker um Emmy Noether, dem sich Deuring bald anschloß, und in dem er wesentliche Anregungen für seine eigene spätere Arbeit erhielt. Nach einem einsemestrigen Studienaufenthalt im Winter 1928/29 in Rom, wo er u. a. Vorlesungen bei Enriques und Severi hörte, finden wir ihn z. B. im Wintersemester 1929/30 in Emmy Noethers Vorlesung über „Algebra der hyperkomplexen Größen". Die von Deuring angefertigte Ausarbeitung ist in ihren Gesammelten Abhandlungen abgedruckt [N].

Im Sommer 1930 schloß Deuring sein Studium mit der Promotion ab. Referentin war Emmy Noether. Die Reihe seiner mathematischen Veröffentlichungen beginnt jedoch schon vor der Dissertation mit einer Arbeit [1], in der die Hilbertsche Verzweigungstheorie algebraischer Zahlkörper auf beliebige bewertete Körper ausgedehnt wird. Das erforderte nicht nur andere Beweise sondern auch – im Fall nichtzyklischer Wertegruppe – eine Umformulierung der Ergebnisse. Die Dissertation [2] enthält eine Theorie abelscher Erweiterungen von Funktionenkörpern einer Veränderlichen für den Fall, daß der Grundkörper hinreichend viele Einheitswurzeln enthält, also ein Analogon zu Ergebnissen der Klassenkörpertheorie algebraischer Zahlkörper, allerdings mit völlig unabhängigen Beweisen. Ebenfalls von Funktionenkörpern handelt die Note [3] und die etwas spätere Arbeit [16].

Aus den Jahren nach der Promotion stammen einige kürzere Arbeiten *algebraischen* oder *arithmetischen* Inhalts [4], [5], [9], [11], [12], [13], [14], die auf dem Hintergrund der Fortschritte zu sehen sind, welche nichtkommutative Algebra einerseits, Klassenkörpertheorie andererseits damals durch Artin, R. Brauer, Hasse und Emmy Noether erfahren hatten. Ich möchte sie hier nicht im einzelnen besprechen, sondern nur die Note [9] zum Tschebotareffschen Dichtigkeitssatz herausgreifen. In der wichtigen Arbeit [Ts] hatte Tschebotareff eine Idee entwickelt, die Artin zum Beweis seines allgemeinen Reziprozitätsgesetzes verwenden konnte [A]. Deuring zeigte nun, daß man umgekehrt die im Tschebotareffschen Satz zu bestimmende Dichte mit Hilfe des Reziprozitätsgesetzes in wenigen Zeilen auf die Dichte von Primidealen in Kongruenzklassen zurückführen kann, was anderen vor ihm offenbar entgangen war – man vergleiche dazu die Ausführungen in Hasses Zahlbericht [Ha 1] S. 133–138 und 160–161. Diese Note ist auch ein schönes Beispiel für Deurings Bemühen bei bekannten, ja klassischen Sätzen Beweise zu vereinfachen oder durchsichtiger zu gestalten. Andere Beispiele sind die Arbeiten [4] über die Existenz von Normalbasen galoisscher Körpererweiterungen, [11] zum Bauerschen Satz über die Charakterisierung galoisscher Erweiterungen von Zahlkörpern durch die Klasse der voll zerfallenden Primideale, [28] zur Bürmann-Lagrangeschen Reihe und [35] über eine Form des Cauchyschen Integralsatzes.

In den Umkreis der algebraisch-arithmetischen Arbeiten gehört natürlich der 1935 erschienene Ergebnis-Bericht „Algebren", der eine knappe, aber im wesentlichen vollständige Darstellung der damals zu einem gewissen Abschluß gekommenen Theorie der Algebren enthält. Er erwarb sich bald den Ruf eines Standardwerkes, wurde 1968 fast unverändert neu aufgelegt und wird noch heute gern als Referenz benutzt.

Nicht nur zur Algebra hat Deuring in dieser Zeit Beiträge geleistet. Die drei Arbeiten [7], [10], [17] gehören der *analytischen Zahlentheorie* an, und auch später ist er auf analytische Fragestellungen zurückgekommen. Sein Interesse dafür wurde anscheinend durch Siegel geweckt, der im Sommer 1930 als Gastprofessor in Göttingen eine Vorlesung über Analytische Zahlentheorie hielt. Jedenfalls hat Deuring diese Vorlesung ausgearbeitet [Si] und in seinem Nachruf auf Siegel [49] den tiefen Eindruck beschrieben, den sie bei ihm hinterlassen hat. Amüsant ist in diesem Zusammenhang die Bemerkung von Emmy Noether (die damals in Frankfurt las) auf einer Postkarte an Deuring: „Daß Sie die Siegel-Ausarbeitung machen, ist sehr schön; da kann ich im Winter seine halsbrecherischen Beweise in Ruhe lesen, was mir lieber ist als hören".

In [7] beschäftigt sich Deuring mit der von Gauß (in der Sprache der quadratischen Formen) gestellten Frage nach dem Verhalten der Klassenzahl $h(-d)$ des imaginären quadratischen Zahlkörpers $Q(\sqrt{-d})$ und erhält das folgende überraschende Resultat: Wenn es unendlich viele Diskriminanten $-d < 0$ mit $h(-d) = 1$ gibt, so sind alle nicht reellen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion einfach und haben den Realteil $\frac{1}{2}$, d. h. die Riemannsche Vermutung ist richtig. Auch wenn das eigentliche Ziel, der Nachweis, daß die Klassenzahl $h(-d)$ mit d gegen unendlich geht, erst kurz danach von Heilbronn erreicht wurde [Hei], so hat Deurings Arbeit doch einen wesentlichen Anstoß gegeben – man vergleiche auch Deurings persönliche Erinnerungen an Heilbronn in [50]. Grundlage für die Überlegungen in [7] ist die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Epsteinschen Zetafunktion

$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} (am^2 + bmn + cn^2)^{-s}$$

in Abhängigkeit nicht nur von s sondern auch von den Koeffizienten a, b, c der auftretenden positiv definiten quadratischen Form und insbesondere von deren Diskriminante $-d = b^2 - 4ac$. Andere Aussagen über diese Funktionen, z. B. über ihre Nullstellen, bilden den Inhalt der Habilitationsschrift [10] und der Arbeit [17].

Auf die Gleichung $h(-d) = 1$ kommt Deuring in ganz anderem Zusammenhang später noch einmal zurück. 1934 hatten Heilbronn und Linfoot gezeigt, daß es außer den bekannten neun Werten

$$-d = -3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67, -163$$

mit $h(-d) = 1$ höchstens noch einen weiteren gibt, aber ihre Methode ließ prinzipiell keine Entscheidung der Frage zu, ob ein solcher zehnter Wert existiert. 1952 zeigte Heegner [Hee], daß es keine weiteren einklassigen imaginären quadratischen Körper gibt. Sein Beweis war allerdings schwer verständlich und erweckte den Eindruck, daß er sich auf eine unbewiesene Vermutung Webers stützte. Er wurde daher zunächst nicht anerkannt. Erst nach Bekanntwerden der Beweise von Baker und Stark rund 15 Jahre später wurde Heegners Arbeit von verschiedenen Mathematikern erneut geprüft, so auch von Deuring, der in [47] eine ausführliche Darstellung des Heegnerschen Beweises gab und zeigte, daß er nach nur geringfügigen Ergänzungen stichhaltig ist.

Die beiden späten analytischen Arbeiten [46] und [48] zeigen noch einmal Deurings Virtuosität im Umgang mit analytischen Formeln. Beide schließen an frühere Ergebnisse von Siegel an, wobei sich in [48] ganz merkwürdige Reihenentwicklungen für Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper ergeben.

Ehe wir uns den Arbeiten über elliptische Funktionenkörper und komplexe Multiplikation zuwenden, die Deuring bald mehr und mehr beschäftigen, wollen wir einen Blick auf seinen weiteren Lebensweg werfen. Anfang der 30er Jahre waren die Aussichten für den wissenschaftlichen Nachwuchs alles andere als rosig, und sie verschlechterten sich bald noch mehr. So war Deuring froh, als ihm van der Waerden 1931 nach Überbrückung eines Jahres durch ein Notgemeinschafts-Stipendium eine Assistentenstelle in Leipzig anbot, die er bis 1937 inne hatte, unterbrochen nur durch einen Gastaufenthalt 1932/33 als Sterling Research Fellow an der Yale University. Als sich nach 1933 in Leipzig keine Möglichkeit des Weiterkommens abzeichnete, stellte er 1935 auf Anregung von Hasse ein Habilitationsgesuch an der Universität Göttingen. Im Verlauf des Verfahrens scheinen hier politische Einflüsse eine Rolle gespielt zu haben. Die Gutachten sind nämlich durchweg positiv, selbst der zum Nachfolger Landaus ernannte Tornier spricht sich für die Habilitation aus, bemerkt dann aber ohne Angabe von Gründen, daß er sich „mit allen Mitteln gegen die Verleihung einer Dozentur wenden würde". Tatsächlich erteilt die Göttinger Fakultät Deuring „die Würde eines Dr. phil. habil.", der Antrag auf eine Doezntur wird jedoch vom Berliner Ministerium abgelehnt, so daß Deuring zunächst in Leipzig blieb. Erst 1938 konnte er sich nach Jena umhabilitieren und dort als Dozent tätig werden. Nach Kriegsbeginn wurde er zur Berechnung von Sterntabellen für Wetterflieger an die Sternwarte in Babelsberg verpflichtet und 1943 zum außerordentlichen Professor an der „Reichsuniversität" Posen ernannt. Das Kriegsende führte ihn für kurze Zeit in seine Heimatstadt zurück, aber schon 1947 folgte er einem Ruf nach Marburg, ging 1948 nach Hamburg, ehe er 1950 als Nachfolger von Gustav Herglotz nach Göttingen berufen wurde.

Doch zurück zu Deurings mathematischen Arbeiten! Wie schon angedeutet begann er Mitte der 30er Jahre sich intensiv mit Funktionenkörpern zu beschäftigen. Vergegenwärtigen wir uns kurz den damaligen Stand der Dinge. Durch Artin und F. K. Schmidt waren Funktionenkörper einer Veränderlichen mit endlichem Konstantenkörper untersucht und ihre Zetafunktionen eingeführt worden. Hasse hatte soeben für diese Kongruenzzetafunktionen bei elliptischen Funktionenkörpern das Analogon zur Riemannschen Vermutung bewiesen [Ha 2], der Fall höheren Geschlechts war dagegen noch offen, vor allem aber steckte die algebraische Geometrie über Körpern von Primzahlcharakteristik noch in den Anfängen, waren Weils „Foundations" noch nicht geschrieben. In dieser Situation entwickelte Deuring in den Arbeiten [18] und [19] eine Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper über Konstantenkörpern beliebiger Charakteristik, welche als Grundlage für weitere Untersuchungen diente und im elliptischen Fall einige von Hasses Überlegungen vereinfachte. Nach der Arbeit [20] über Moduln algebraischer Funktionenkörper wird in [23], wiederum im Hinblick auf weitere Anwendungen, das Verhalten von Funktionenkörpern bei Restklassenbildung im Konstantenkörper behandelt. Die entsprechenden Ergebnisse für höhere Dimensionen stammen von Shimura [Shi], während der ganze Problemkreis heute seine adäquate Darstellung in der Sprache der Schemata findet.

Wir kommen jetzt zu Deurings mathematischen Lieblingskindern, denen seine bedeutendsten Arbeiten gewidmet sind, und die ihn bis zum Ende seiner mathematischen Tätigkeit nicht mehr losgelassen haben, den *elliptischen Funktionenkörpern*. Die Reihe von Arbeiten hierüber beginnt mit einer verhältnismäßig einfachen Bestandsaufnahme [21] von Normalformen solcher Körper, insbesondere auch in Charakteristik zwei. Dem folgt als erster Höhepunkt [22] die Bestimmung der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper oder, in heute üblicherer Sprache, der Endomorphismenringe elliptischer Kurven. In Charakteristik 0 entnimmt man der klassischen analytischen Theorie der elliptischen Funktionen, daß es für diesen Ring R zwei Möglichkeiten gibt: Entweder er besteht nur aus den ganzen rationalen Zahlen, oder R ist eine Ordnung in einem imaginären quadratischen Zahlkörper, und jede solche Ordnung kommt auch wirklich vor. Hasse hatte bemerkt, daß bei Primzahlcharakteristik als dritte Möglichkeit R auch eine Ordnung in einer definiten Quaternionenalgebra sein kann. Deuring stellt nun die genauen Bedingungen auf, die ein Ring R erfüllen muß, um als Endomorphismenring einer elliptischen Kurve E in Charakteristik $p > 0$ vorzukommen. Insbesondere zeigt er, daß der dritte Fall genau dann eintritt, wenn E keine p-Teilungspunkte besitzt, und daß dann R eine Maximalordnung in derjenigen definiten Quaternionenalgebra ist, in der nur die Primzahl p verzweigt ist. Die Bedeutung dieser großen Arbeit liegt nicht nur in dem genannten Hauptresultat sondern auch in den zu dessen Beweis bereitgestellten Hilfsmitteln, die in vielen späteren Arbeiten auch anderer Autoren Verwendung gefunden haben. Z. B. wird gezeigt, daß es zu jeder elliptischen Kurve $\bar{E}$ in Charakteristik $p > 0$ mit einem Endomorphismus $\bar{\mu}$ eine elliptische Kurve E in Charakteristik 0 mit einem Endomorphismus μ gibt derart, daß $\bar{E}$, $\bar{\mu}$ aus E, μ durch Konstantenreduktion hervorgeht.

Deuring selber wendet die Ergebnisse aus [22] an verschiedenen Stellen an: In [31] auf Rationalitätsfragen bei elliptischen Funktionenkörpern, in [26] zur

Herleitung von Relationen zwischen Klassenzahlen in quadratischen Zahlkörpern und Quaternionenalgebren, in [29] zur Untersuchung der Primfaktoren von Differenzen $j(\alpha_1) - j(\alpha_2)$ von Werten der j-Funktion an imaginär quadratischen Argumenten α_1, α_2, ein Problem, das kürzlich von Gross und Zagier wieder aufgegriffen wurde [GZ].

Ebenfalls auf [22] bauen die Arbeiten [32] und [37] auf, die eine algebraische Begründung der *komplexen Multiplikation* elliptischer Funktionenkörper enthalten. Klassische Ergebnisse dieser Theorie beschreiben die Erzeugung abelscher Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörper K durch spezielle Werte der Modulfunktion j und der Weierstraßschen $\wp$-Funktion. Bei der algebraischen Begründung konstruiert man dagegen zu gegebenem K nach [22] rein algebraisch eine elliptische Kurve E, deren Endomorphismenring eine Ordnung in K ist (z. B. die Hauptordnung) und ersetzt dann die speziellen Werte von j und $\wp$ durch die algebraisch definierte j-Invariante und Koordinaten der Teilpunkte von E. Das ist in [32] unter Zuhilfenahme der allgemeinen Klassenkörpertheorie durchgeführt, während in [37] umgekehrt die Sätze der Klassenkörpertheorie für imaginäre quadratische Grundkörper aus der algebraischen Theorie der elliptischen Funktionenkörper abgeleitet werden. Dagegen enthält die Arbeit [39] eine Variante zur analytischen Erzeugung der Klassenkörper von K, während in dem Enzyklopädie-Artikel [45] zusammenfassend über die klassische Theorie der komplexen Multiplikation berichtet wird. Ein am Schluß von [45] angekündigter zweiter Teil, der die algebraische Begründung enthalten sollte, ist leider nicht erschienen.

Die letzte Serie von Arbeiten, die hier zu besprechen sind [38], [40], [43], [44], führt uns noch einmal zu einem Höhepunkt in Deurings mathematischem Schaffen, in dem wiederum die Methoden aus [22] und [37] zum Tragen kommen. Nach Hasse und Weil ordnet man jeder über einem Zahlkörper definierten algebraischen Kurve eine Zetafunktion in Gestalt eines Eulerprodukts zu, von der vermutet wird, daß sie in die ganze komplexe Ebene meromorph fortgesetzt werden kann und einer Funktionalgleichung genügt, wie sie von anderen Zetafunktionen bekannt ist. Als erstes nicht triviales Beispiel hatte Weil [W] Kurven vom Typ $y^e = ax^f + b$ behandelt, indem er zeigte, daß sich die zugeordneten Zetafunktionen durch Heckesche L-Reihen mit Größencharakteren ausdrücken lassen. Deuring beweist eine entsprechende Darstellung für die Zetafunktion einer elliptischen Kurve mit komplexer Multiplikation, und zwar in der ersten Mitteilung [38] zunächst nur bis auf endlich viele Eulerfaktoren. Die Behandlung der verbleibenden „irregulären" Faktoren erfordert in [40] und [43] die genauere Untersuchung des Verhaltens elliptischer Kurven bei Konstantenreduktion. In der vierten Mitteilung [44] schließlich wird der Fall behandelt, daß die komplexen Multiplikatoren von E nicht über dem Konstantenkörper sondern erst über einer quadratischen Erweiterung definiert sind.

Viele der von Deuring stammenden Ergebnisse über elliptische Kurven sind seither auf abelsche Varietäten beliebiger Dimension übertragen worden – man vergleiche nur für komplexe Multiplikation und Zetafunktionen die ausführliche Darstellung von Shimura und Taniyama [Sh Tn], oder die Arbeit von Serre und Tate zur Konstantenreduktion [Se Tt]. Dabei mußten meist die bei elliptischen Kurven möglichen konkreten Rechnungen durch allgemeinere Schlußweisen ersetzt werden. Andererseits erlauben die expliziten Formeln im Spezialfall gelegentlich präzisere Aussagen als sie die allgemeine Theorie liefert.

Deuring hat die Mathematik nicht nur durch seine Arbeiten gefördert, er war auch ein beliebter akademischer Lehrer. Bedingt durch die Zeitumstände fand er erst ziemlich spät den ihm angemessenen Wirkungskreis, eigentlich erst ab 1950 in Göttingen. Hier war er fünfundzwanzig Jahre lang bis zu seiner Emeritierung im Frühjahr 1976 zahlreichen Schülern ein verständnisvoller Betreuer, auch wenn er sich nach einem 1967 erlittenen Herzinfarkt Beschränkungen auferlegen mußte. Teilnehmer an seinen Seminaren werden sich gern an meist knappe aber treffende Diskussionsbemerkungen erinnern, aus denen eine umfassende mathematische Bildung, von klassischer Analysis bis zu abstrakter Algebra, erkennbar war, und die so als Ansporn zu eigener Fortbildung dienten. Persönlich war Max Deuring ein stiller, zurückhaltender Mensch, der sich aber gerade in dieser Art das Vertrauen derer erwarb, die ihn näher kannten.

Literaturhinweise

[A] Artin, E.: Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927) 353–363. Abgedruckt in Collected Papers S. 131–141

[GZ] Gross, B.; Zagier, D.: On singular moduli. J. reine u. angew. Math. **355** (1985) 191–220

[Ha 1] Hasse, H.: Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. II: Reziprozitätsgesetz. Jber. d. Dt. Math.-Verein. Ergänzungsband 6 (1930)

[Ha 2] Hasse, H.: Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I., II., III. J. reine u. angew. Math. **175** (1936) 55–62, 69–88, 103–208. Abgedruckt in Mathematische Abhandlungen, Bd. 2, S. 223–266

[Hee] Heegner, K.: Diophantische Analysis und Modulfunktionen. Math. Z. **56** (1952) 227–253

[Hei] Heilbronn, H.: On the class-number in imaginary quadratic fields. Quart. J. Math. (2) **5** (1934) 150–160

[N] Noether, E.: Algebra der hyperkomplexen Größen. Vorlesung Göttingen W.S. 1929/30. Ausgearbeitet von M. Deuring, Maschinenschr. Abgedruckt in Gesammelte Abhandlungen S. 711–763

[Se Tt] Serre, J.-P.; Tate, J.: Good reduction of abelian varieties. Ann. of Math. **88** (1968) 492–517

[Sh] Shimura, G.: Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field. Amer. J. Math. **77** (1955) 134–176

[Sh Tn] Shimura, G.; Taniyama, Y.: Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory. Publ. Math. Soc. Japan, no. 6, Tokyo 1961

[Si] Siegel, C. L.: Analytische Zahlentheorie. Vorlesung Göttingen S.S. 1930. Ausgearbeitet von M. Deuring, Maschinenschr.

[Ts] Tschebotareff, N.: Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören. Math. Ann. **95** (1926) 191–228

[W] Weil, A.: Jacobi sums as „Größencharaktere". Trans. AMS **73** (1952) 487–495

Veröffentlichungen von Max Deuring

I. Artikel in Zeitschriften und Sammelbänden

[1] Verzweigungstheorie bewerteter Körper. Math. Ann. **105** (1931) 277–307

[2] Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. Math. Ann. **106** (1932) 77–102

[3] Zur Theorie der Idealklassen in algebraischen Funktionenkörpern. Math. Ann. **106** (1932) 103–106

[4] Galoissche Theorie und Darstellungstheorie. Math. Ann. **107** (1932) 140–144

[5] Zur Theorie der Normen relativzyklischer Körper. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1931, 246–247

[6] Imaginäre quadratische Zahlkörper und die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. Verh. Int. Math.-Kongr. Zürich 1932, Bd II, 4–5

[7] Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 1. Math. Z. **37** (1933) 405–415

[8] On the zeros of certain zeta functions. Bull. AMS **39** (1933) 350

[9] Über den Tschebotareffschen Dichtigkeitssatz. Math. Ann. **110** (1935) 414–415

[10] Zetafunktionen quadratischer Formen. J. reine u. angew. Math. **172** (1935) 226–252

[11] Neuer Beweis des Bauerschen Satzes. J. reine u. angew. Math. **173** (1935) 1–4

[12] Über den Hauptsatz der Algebrentheorie. J. reine u. angew. Math. **175** (1936) 63–64

[13] Einbettung von Algebren in Algebren mit kleinerem Zentrum. J. reine u. angew. Math. **175** (1936) 124–128

[14] Anwendungen der Darstellungen von Gruppen durch lineare Substitutionen auf die galoissche Theorie. Math. Ann. **113** (1937) 40–47

[15] Lösung der Aufgabe 209. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **47** (1937) 2. Abt. 69–70

[16] Automorphismen und Divisorenklassen der Ordnung l in algebraischen Funktionenkörpern. Math. Ann. **113** (1937) 208–215

[17] On Epstein's Zeta function. Ann. of Math. **38** (1937) 585–593

[18] Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. I. J. reine u. angew. Math. **177** (1937) 161–191

[19] Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. II. J. reine u. angew. Math. **183** (1941) 25–36

[20] Zur Theorie der Moduln algebraischer Funktionenkörper. Math. Z. **47** (1942) 34–46

[21] Invarianten und Normalformen elliptischer Funktionenkörper. Math. Z. **47** (1942) 47–56

[22] Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **14** (1941) 197–272

[23] Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers. Math. Z. **47** (1942) 643–654

[24] Aufgabe 308. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **51** (1941) 2. Abt., 23

[25] La teoria aritmetica delle funzioni algebriche di una variabile. Rend. Mat. Roma (5) **2** (1941) 361–412

[26] Die Anzahl der Typen von Maximalordnungen einer definiten Quaternionenalgebra mit primer Grundzahl. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **54** (1950) 24–41

[27] Die Anzahl der Typen von Maximalordnungen in einer Quaternionenalgebra von primer Grundzahl. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1945, 48–50

[28] Eine Bemerkung über die Bürmann-Lagrangesche Reihe. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1946, 33–35

[29] Teilbarkeitseigenschaften der singulären Moduln der elliptischen Funktionen und die Diskriminante der Klassengleichung. Comment. Math. Helv. **19** (1946) 74–82

[30] Teilbarkeitseigenschaften der singulären Moduln der elliptischen Funktionen. Ber. Math.-Tagung Tübingen 1946, 62–63
[31] Zur Theorie der elliptischen Funktionenkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **15** (1947) 211–261
[32] Algebraische Begründung der komplexen Multiplikation. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **16** (1949) 32–47
[33] Algebraische Funktionenkörper und algebraische Geometrie. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946, Bd. 2, 149–162. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung 1948
[34] Sinn und Bedeutung der Mathematischen Erkenntnis. Das Problem der Gesetzlichkeit 2. Bd., 25–34. Hamburg: R. Meiner-Verlag 1949
[35] Eine Bemerkung zum Cauchyschen Integralsatz. Arch. Math. **1** (1948/49) 321–322
[36] Die Gruppentheorie. Akad. Wiss. u. Lit. Mainz Jahrbuch 1951, 270–276
[37] Die Struktur der elliptischen Funktionenkörper und die Klassenkörper der imaginären quadratischen Zahlkörper. Math. Ann. **124** (1951/52) 393–426
[38] Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1953, 85–94
[39] Zur Transformationstheorie der elliptischen Funktionen. Akad. Wiss. u. Lit. Mainz, Abh. Math.-Nat. Kl. 1954, 95–104
[40] Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins (Zweite Mitteilung). Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1955, 13–42
[41] On the zeta-function of an elliptic function field with complex multiplications. Proc. Int. Symp. Algebraic Number Theory, Tokyo & Nikko 1955, 47–50
[42] The zeta-functions of algebraic curves and varieties. J. Indian Math. Soc. **20** (1956) 89–101
[43] Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins (Dritte Mitteilung). Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1956, 37–76
[44] Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins (Vierte Mitteilung). Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1957, 55–80
[45] Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 2. Aufl., Bd. I 2, Art. 23 (1958)
[46] Asymptotische Entwicklungen der Dirichletschen L-Reihen. Math. Ann. **168** (1967) 1–30
[47] Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl Eins. Invent. math. **5** (1968) 169–179
[48] Analytische Klassenzahlformeln. Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Erinnerung an Edmund Landau, 57–75. Berlin: Dt. Verlag d. Wiss. 1968
[49] Carl Ludwig Siegel, 31. 12. 1896 – 4. 4. 1981. Acta Arithmetica **45** (1985) 93–107
[50] Einige Erinnerungen an Hans Heilbronn in Göttingen. The Collected Papers of Hans Arnold Heilbronn (E. Kani & R. A. Smith, eds.) New York: John Wiley and Sons 1985

II. Bücher

Algebren. Berlin: Springer-Verlag 1935. = Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Zweite korrigierte Aufl. 1968

III. Vorlesungsausarbeitungen

Algebraische Zahlen. Göttingen, WS 1951/52, Maschinenschr.
Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Göttingen, SS 1952, Maschinenschr.
Klassenkörpertheorie I, II. Göttingen, SS 1965, WS 1965/66, Maschinenschr., vervielfältigt
Lectures in the Theory of Algebraic Functions of one Variable. Bombay 1959, Maschinenschr., vervielfältigt,
wiederabgedruckt als Lecture Notes in Mathematics Bd. 314, Springer-Verlag 1973

Prof. Dr. M. Kneser
Math. Institut der Universität
Bunsenstr. 3–5
3400 Göttingen

(*Eingegangen 25. 11. 1985*)

Von Max Deuring betreute Dissertationen

Name	Datum der mündl. Prüfung
Promotion in Hamburg:	
Richert, Hans-Egon	21. 11. 50
Promotionen in Göttingen:	
Koecher, Max	23. 2. 51
Bortfeld, Reinhard	18. 7. 51
Meinhardt, Dietrich	18. 12. 53
Hesse, Kurt	16. 2. 55
Pisula, Karl	13. 5. 55
Scheibe, Erhard	19. 7. 55
Rangachari, Sundavaradan S.	19. 6. 59
Madan, Manohar	20. 7. 60
Kempfert, Horst	14. 12. 60
Plünnecke, Helmut	17. 11. 61
Hsü, Tao-ning	20. 12. 61
Warlimont, Richard	20. 12. 61
Miller, Leonhard	27. 7. 62
Brandis, Albrecht	14. 11. 62
Haneke, Wolfgang	14. 11. 62
Göllnitz, Hellmuth	27. 5. 63
Würges, Gerhard	16. 6. 64
Guthschmidt, Norman	26. 6. 64
Schmidt, Peter-Georg	31. 7. 64
Nguyen, Ba	26. 10. 67
Lange, Herbert	9. 7. 70
Hasemann, Klaus	10. 5. 73
Recke, Klaus-Günther	2. 5. 74
Gabcke, Wolfgang	15. 2. 79

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
89 (1987) 144–148

D. Rödding: Ein Nachruf

E. Börger, Pisa

D. Rödding wurde am 24. 8. 1937 in Hattingen an der Ruhr als erstes Kind von Walter und Lia Rödding, geb. Bovensiepen, geboren und starb am 4. 6. 1984 in Münster (Westf.).

Nach dem Besuch des Hattinger Gymnasiums nahm er im Sonnersemester 1956 das Studium der Mathematik, Physik und Mathematischen Logik an der Westf. Wilhelms-Universität in Münster auf.

1961 promovierte er dort bei Gisbert Hasenjaeger mit der Arbeit: „Darstellungssätze über die (im Kalmár-Csillagschen Sinne) elementaren Funktionen" und habilitierte sich 1964 mit der Habilitationsschrift „Theorie der Rekursivität über dem Bereich der endlichen Mengen von endlichem Rang". Mit nur 29 Jahren wurde er 1966 Nachfolger von Hans Hermes auf dem Münsteraner Lehrstuhl für mathematische Logik und Grundlagenforschung und Direktor des gleichnamigen Instituts.

D. Rödding wurde in den 60er Jahren bekannt durch seine Arbeiten über Klassifikationen rekursiver Funktionen [1–3, 5, 10–12], Reduktionstypen der klassischen Prädikatenlogik [4, 13], das Scholzsche Spektrumproblem [16] sowie Anzahlquantoren in der Prädikatenlogik und der arithmetischen Hierarchie von Kleene-Mostowski [7, 8]. Er war einer der ersten, der einen maschinenorientierten Komplexitätsbegriff mit Erfolg für das Studium rekursiver Funktionen und logischer Entscheidungsprobleme einsetzte, womit er konsequent den von Hans Hermes und Gisbert Hasenjaeger übernommenen algorithmisch orientierten Zugang zur Logik zu einer Zeit weiterentwickelte, als in Deutschland von Informatik noch nicht die Rede war.

Typisch für die Art, wie aus dem scheinbaren Spiel mit Maschinen- (und Eisenbahn-!) Modellen am Münsterschen Logikinstitut wissenschaftlich fruchtbar gewordene Ideen entsprungen sind, ist eine Episode, die mir im Verlaufe eines in der Pfingstwoche 1983 gemeinsam mit G. Hasenjaeger und D. Rödding in Münster veranstalteten Symposiums bekannt wurde, als G. Hasenjaeger und D. Rödding den Symposium-Teilnehmern mehrere Generationen funktionstüchtiger Modelle von Rechenmaschinen vorführten, die unter ihrer Anleitung seit den 50er Jahren im sogenannten Turingraum des Instituts gebaut worden waren. Von der Wangschen Idee (Wang, H.: A variant to Turing's theory of computing machines, J. Assoc. Comp. Mach. 4 (1957) 63–92) einer nicht löschenden Turingmaschine ausgehend, bauten G. Hasenjaeger und D. Rödding zwischen 1958 und

1960 im Turingraum des Münsterschen Logikinstituts eine programmierbare (universelle) kleine 3-Band-Turingmaschine. Aus dem dabei aufgetretenen Hardwareproblem der Realisierung eines „einfachen" Zahlenspeichers kristallisierte G. Hasenjaeger die folgende theoretische Frage: Kann man beliebige (endliche Folgen von) Zahlen auf einem 0-1-Band einer universellen Turingmaschine so darstellen, daß nur eine a priori festgelegte Anzahl von Vorkommen des Symbols 1 auf dem Band benutzt wird? Die positive Lösung dieser Frage durch D. Rödding führte hardwaremäßig zur Konstruktion des neuen „Registerspeichers" der oben erwähnten sogenannten Wang-Maschine. Die wesentliche Idee war, Zahlen n als Entfernung des linken Bandanfangs eines halbseitig unendlichen Bandes zur Position eines einzigen Vorkommens von 1 auf dem sonst leeren Band darzustellen. Die Auffassung von Turingbändern als Zahlen„register" und von Mehrband-Turingmaschinen als „Registermaschinen" mit entsprechenden zahlentheoretischen Grundoperationen $+1$, -1 und Nulltest war die Geburtsstunde eines damals neuen Begriffs, der D. Rödding in den Jahren 1960/61 zur Lösung zahlreicher Fragen über die Leistungsfähigkeit verschiedener kombinatorischer Systeme führte. Vieles davon wurde unabhängig in den berühmt gewordenen Arbeiten von M. L. Minsky (Recursive unsolvability of Post's problem of „Tag" and other topics in theory of Turing machines. Ann. of Math. **74** (1961), 437–455) und J. C. Shepherdson & H. E. Sturgis (Computability of recursive functions. J. Assoc. Comp. Mach. **10** (1963) 217–255) entdeckt und ist heute Allgemeingut einführender Vorlesungen und Bücher in die Grundbegriffe der (theoretischen) Informatik. D. Rödding hat später diesen Begriff von Registermaschinen (und Normalformen davon) zum Ausgangspunkt seiner Analyse von Hierarchien rekursiver Funktionen und der mit H. Schwichtenberg erarbeiteten Approximation der Spektren beliebiger endlicher Stufen gemacht.

Seit Ende der 60er Jahre entwickelte D. Rödding mit mehreren seiner Schüler seine logische Analyse der Konstruktionsprinzipien endlicher (und unendlicher) Automaten. Die daraus entstandene weit entwickelte modulare Zerlegungstheorie endlicher Automaten hat Anwendungen nicht nur in der Logik, sondern auch in der Systemtheorie und der Informatik gefunden – hier speziell für das hochaktuelle Problem einer mathematischen Analyse von Modellen parallelen und verteilten Rechnens (siehe zum Beispiel die beiden Arbeiten: Priese, L.: Automata and concurrency. Theor. Comp. Sci. **25** (1983) 221–265, und Broy, M.: Specification and Top Down Design of Distributed Systems. SLNCS, vol 185, 1985, 4–28). D. Rödding hat selbst nur wenig über diese Theorie veröffentlicht [20–25]; ein großer Teil der Ergebnisse sind in Veröffentlichungen der Schüler, ein anderer Teil in zahlreichen bisher unveröffentlichten institutsinternen Arbeitspapieren oder Examensarbeiten niedergelegt. Einen guten Einblick geben die Arbeiten [20] und [25].

Als akademischer Lehrer stellte D. Rödding an sich selbst wie an seine Schüler höchste Ansprüche. Er zwang seine Gesprächspartner, unmittelbar und bedingungslos zur Sache durchzustoßen; es gab keine Möglichkeit, sich dem Auf-den-Kern-stoßen-Wollen durch Ausflüchte oder auch Umschweife zu entziehen. Bei größter Zurückhaltung, um nicht jemandem zu nahe zu treten, die sich manchem Außenstehenden als Unzugänglichkeit darstellte, zeichnete sich D. Rödding durch ein

nicht alltägliches Menschenverständnis und eine bis an die Selbstverleugnung grenzende Toleranz und Respekt vor der Freiheit des Anderen aus.
In seinen Vorlesungen experimentierte D. Rödding ständig an neuen Darstellungen oder Zugängen zu Problemen. Wie kreativ er dabei war, zeigen die Rezensionen mehrerer seiner ursprünglich nur für den Gebrauch der Studenten gedachten Vorlesungsausarbeitungen in Mathematical Reviews und Zentralblatt (s. [13–15, 17, 18]). Beispielhaft seien erwähnt die in Berechenbarkeitsvorlesungen Ende der 60er Jahre ohne es zu wissen entwickelte Verschärfung des berühmten Normalformsatzes von Böhm-Jacopini, der in der Informatik eine grundlegende Rolle für die begriffliche Entwicklung strukturellen Programmierens gespielt hat; oder die später als Meyer-Ritchie-Hierarchie bekannt gewordene LOOP-Charakterisierung der primitiv rekursiven Funktionen; oder den kurzen, auf einer geometrischen Interpretation von Registermaschinen in der Ebene beruhenden Beweis für den scharfen Präfix-Reduktionstyp AEA von Kahr.
D. Rödding führte 14 (+1) Studenten zur Promotion (s. Anhang), zum Diplom ca. 30 Studenten (von denen 5 später an anderen Universitäten promoviert haben). 10 seiner früheren Schüler sind heute in der BRD, Italien und den USA als Hochschullehrer in der Logik oder der Informatik tätig.
Als Direktor des von Heinrich Scholz gegründeten ersten Instituts für Logik in Deutschland bemühte sich D. Rödding Zeit seines Lebens um eine Erweiterung des Spektrums logischer Forschung an seiner Universität. Es ist seinem nachdrücklichen Einsatz zu verdanken, daß in Münster 1973 (und einmalig für die BRD) ein zweiter Lehrstuhl für math. Logik eingerichtet wurde, und ebenso, daß sich 10 Jahre später der Fachbereich Mathematik der Wilhelms-Universität Münster zur Einrichtung des Nebenfachstudiengangs Informatik entschied. Nach den weit in die Zukunft weisenden und auf tiefer Kenntnis der Logik wie der Informatik beruhenden Ideen von D. Rödding sollte sich der Logik im Rahmen dieses neuen Studienganges ein reiches Feld wechselseitiger theoretischer und praktischer Befruchtung eröffnen. Der frühzeitige Tod hat D. Rödding daran gehindert, diese Pläne in Münster zu realisieren.

Anhang 1 Liste der wissenschaftlichen Veröffentlichungen von D. Rödding

[1] Darstellungen der (im Kalmar'schen Sinne) elementaren Funktionen. International Congress of Math., Stockholm 1962, S. 10–11

[2] Theorie der Rekursivität über dem Bereich der endlichen Mengen von endlichem Rang. Habilitationsschrift, Münster 1964

[3] Über die Eliminierbarkeit von Definitionsschemata in der Theorie der rekursiven Funktionen. Z. Math. Logik Grundlagen Math. **10** (1964) 315–330

[4] A method for producing reduction types in the restricted lower predicate calculus (gemeinsam mit H. Hermes). In: Formal Systems & Recursive Functions, Oxford 1965, 42–47

[5] Darstellungen der (im Kalmar-Csillagschen Sinne) elementaren Funktionen. Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. 7 (1965) 139–158

[6] Einige äquivalente Präzisierungen des intuitiven Berechenbarkeitsbegriffs. Math. Unterricht **11** (1965) 21–38

[7] Anzahlquantoren in der Prädikatenlogik. Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. **9** (1966) 66–69
[8] Anzahlquantoren in der Kleene-Hierarchie. Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. (1966) 61–69
[9] Der Entscheidbarkeitsbegriff in der mathematischen Logik. Stud. Gen. **19** (1966) 516–522
[10] Über Darstellungen der elementaren Funktionen II. Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. **9** (1966) 36–48
[11] Primitiv-rekursive Funktionen über einem Bereich endlicher Mengen. Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. **10** (1967) 13–29
[12] Klassen rekursiver Funktionen. In: M. H. Löb (Ed.): Proceedings of the Summer School in Logic, Leeds 1967. Springer LNM 70, 1968, 159–222
[13] Reduktionstypen der Prädikatenlogik. Inst. Math. Logik, Münster 1970, pp. 59. Siehe MR **57** # 2903, Zbl. **267** # 02034
[14] Arithmetische und hyperarithmetische Prädikate I. Inst. Math. Logik, Münster 1971, pp. 75. Siehe Zbl. **252** # 02043
[15] Arithmetische und hyperarithmetische Prädikate II. Inst. Math. Logik, Münster 1972, pp. 93. Siehe Zbl. **252** # 02044
[16] Bemerkungen zum Spektralproblem (mit H. Schwichtenberg). Z. Math. Logik Grundlagen Math. **18** (1972) 1–12
[17] Einführung in die Theorie der berechenbaren Funktionen II. Inst. Math. Logik, Münster 1972, pp. 117. Siehe MR **56** # 15384b
[18] Einführung in die Theorie der berechenbaren Funktionen I. Inst. Math. Logik, Münster 1972, pp. 113. Siehe MR **56** # 15384a
[19] Registermaschinen. Math. Unterricht **18** (1972) 32–41
[20] A combinatorial approach to selfcorrection (mit L. Priese). J. Cybernet. **4** (1974) 7–25
[21] Network of finite automata (mit W. Rödding). In: Progress Cybern. & Syst. Res. '72, Wien 1979, 139–158
[22] Modular decomposition of automata. In: M. Karpinski (Ed.): Foundations of Computation Theory. Springer LNCS, vol. 158, 1983, 394–412
[23] Logic and machines: decision problems and complexity. Herausgabe (mit E. Börger und G. Hasenjaeger): Proceedings of the Symposium „Rekursive Kombinatorik", held from May 23–28, 1983 at the Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung der Universität Münster/Westfalen. Springer Lecture Notes in Computer Science Vol. 171, 1984
[24] Modular decomposition of automata (mit A. Brüggemann, L. Priese, R. Schätz). Springer LNCS 171, 1984, 198–236
[25] Some logical problems connected with a modular decomposition theory of automata. In: M. M. Richter, E. Börger, W. Oberschelp, B. Schinzel, W. Thomas (Eds.): Computation and proof theory. Springer LNM 1104, 1984, 365–388
[26] Begriffe und Automaten. In: G. Patzig, E. Scheibe, W. Wieland (Hrsg.): Logik, Ethik, Theorie der Geisteswissenschaften. Hamburg 1977, 94–98

Anhang 2 Liste der Doktoranden von D. Rödding

Schwichtenberg, Helmut	1968	Eine Klassifikation der mehrfach-rekursiven Funktionen
Deutsch, Michael	1968	Normalformen aufzählbarer Prädikate
Ottmann, Thomas	1971	Eine Theorie sequentieller Netzwerke
Cohors-Fresenborg, Elmar	1971	Subrekursive Funktionsklassen über binären Bäumen

Börger, Egon	1971	Reduktionstypen in Krom- und Hornformeln
Bartnick, Jürgen	1971	Eine algebraisch-kombinatorische Darstellung der Prädikatenlogik
Carstens, Hans Georg	1972	Über die Kompliziertheit numerischer Modelle
Brämik, Hansjürgen	1972	Beweistheoretische Charakterisierung der ω_3-rekursiven Funktionen
Priese, Lutz	1974	Über einfache unentscheidbare Probleme: Computational – und constructional – universelle asynchrone cellulare Räume
Müller, Helmut	1974	Klassifizierungen der primitiv-rekursiven Funktionen
Koerber, Peter	1976	Untersuchungen an sequentiellen, durch normierte Konstruktionen gewonnenen Netzwerken endlicher Automaten
Kleine Büning, Hans	1977	Über Probleme bei homogener Parkettierung von Z x Z durch Mealy-Automaten bei normierter Verwendung
Kniza, Klaus-Peter	1981	Automaten und rekursive Funktionale endlichen Typs
Müller, Joachim	1982	Die mathematische Behandlung von Präferenz und Tausch unter Zugrundelegung des Automatenbegriffs
Brüggemann, Anne	1985	Stochastische Zuverlässigkeiten fehlertoleranter Netzwerke

NB. Die folgenden Diplomanden von D. Rödding haben später an anderen Universitäten resp. Lehrstühlen promoviert:

F. Pache (Universität Dortmund)
W. Slaby (Universität Münster)
P. Altmann (RWTH Aachen)
P. Päppinghaus (Universität Heidelberg)
W. Sieg (Stanford University)

E. Börger
Dip. di Informatica
Università
Corso Italia 40
I-56100 Pisa

(*Eingegangen am 25. 2. bzw. 25. 9. 1986*)

Buchbesprechungen

Serre, J-P., Œuvres (Collected Papers, Vol. 1, 2, 3), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, 2090 pp., hard cover, DM 398,–

Die vorliegenden drei Bände der gesammelten Werke von J-P. Serre enthalten den weitaus größten Teil seiner publizierten Artikel, sehr viele seiner Vorträge in Seminaren (insbesondere Séminaire Bourbaki), seine Berichte über seine Kurse am Collège de France und einige bislang noch nicht publizierte Schriften. Es fehlen die Bücher und Lecture Notes und einige Arbeiten, die mit Koautoren geschrieben wurden, und die in deren gesammelten Werken publiziert wurden (insbesondere die Artikel mit A. Borel). Am Ende eines jeden Bandes findet man sehr nützliche Fußnoten zu den einzelnen Arbeiten, in denen Serre kurz auf den aktuellen Stand in der jeweiligen Fragestellung hinweist.

J-P. Serre ist sicher einer der bedeutendsten Mathematiker der Nachkriegsgeneration, und er hat einen ungeheuren Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik gehabt. Dabei ist die Art und Weise, wie er diesen Einfluß genommen hat, einmalig. Er überdeckt mit seinen Arbeiten ein sehr breites Spektrum der Mathematik. In vielen seiner Artikel gibt er entscheidende Impulse, wobei er aber immer auch die verschiedensten neuen Entwicklungen zur Kenntnis nimmt und auf seine Art verarbeitet.

In diesen drei Bänden findet der Leser zu sehr vielen fundamentalen Problemstellungen der heutigen Mathematik einen grundlegenden Artikel, oder eine Arbeit, die überhaupt erst den entscheidenden Anstoß gab.

Ich möchte dies an einigen Beispielen erläutern. Im ersten Band nenne ich zunächst seine Arbeiten über Faserräume und die Spektralsequenz, die die Entwicklung der modernen Topologie entscheidend geprägt haben. Seine berühmten Artikel „Faisceaux algébriques cohérents“ und „Géométrie algébrique et géométrie analytique“ waren richtungsweisend für die Entwicklung der algebraischen Geometrie und der Funktionentheorie.

In den Bänden II und III wendet Serre sich dann Themen aus der Arithmetik und der algebraischen Geometrie zu. Aus diesem Bereich möchte ich als weiteres Beispiel für einen Artikel, von dem entscheidende Impulse ausgingen, seinen Seminarvortrag „Une interprétation des congruences relatives a la fonction τ de Ramanujan“ nennen. In diesem Vortrag werden Fragen formuliert und Beziehungen zwischen ganz klassischen Ergebnissen und modernen Methoden hergestellt, deren Untersuchung heute ganz aktuell ist, und die auch zu eindrucksvollen Resultaten geführt haben.

Dieses Thema hat Serre selber auch oft wieder aufgegriffen, zuletzt in seinem Artikel „Quelque applications du théorème de densité de Chebotarev“, in dem er zusätzlich noch die Methoden der analytischen Zahlentheorie implementiert.

Damit möchte ich die Liste der Beispiele abschließen. Jeder Mathematiker, der sich für Topologie, Funktionentheorie, algebraische Geometrie oder Zahlentheorie (im weitesten Sinne) interessiert, findet in diesen Büchern eine Fülle von Anregungen und fundamentalen Artikeln. Es gelingt Serre eigentlich immer, den Leser durch die sehr konkrete und klare Art der Darstellung für den jeweiligen Gegenstand zu interessieren. Das Studium dieser drei Bände bringt Gewinn.

Bonn G. Harder

Vinogradov, I. M., Selected Works, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, viii, 401 pp., cloth, DM 168,–

Der vorliegende Band enthält 16 ausgewählte Arbeiten von I. M. Vinogradov aus den Jahren 1917–1961 und den Text der beiden Bücher „The Method of Trigonometric Sums in Number Theory“ (2. Auflage, 1980, 1. Auflage Moskau 1971 – nicht zu verwechseln mit dem (fast) gleichbetitelten, 1947 bei Interscience Publishers erschienenen Buch von I. M. Vinogradov) und „Special Variants of the Method of Trigonometric Sums“, weiterhin eine kurze, von K. K. Mardzhanishvili verfaßte Übersicht über das Leben und die Arbeiten von Vinogradov und ein chronologisches Schriftenverzeichnis. Alle Beiträge sind in englischer Sprache.

Das verwendete Prinzip bei der Auswahl der Arbeiten wird vielleicht durch das Vorwort etwas deutlicher, das hier wörtlich wiedergegeben wird:

„Springer-Verlag has invited me to bring out my *Selected Works*. Being aware that Springer-Verlag enjoys high esteem in the scientific world as a reputed publisher, I have willingly accepted the offer.

Immediately, I was faced with two problems. The first was that of acquainting the reader with the important stages in my scientific activities. For this purpose, I have included in the *Selected Works* certain of my early works that have greatly influenced my later studies. For the same reason, I have also included in the book those works that contain the first, crude versions of the proofs for many of my basic theorems.

The second problem was that of giving the reader the best possible opportunity to familiarize himself with the most important results and to learn to use my method. For this reason I have included the later improved versions of the proofs for my basic results, as well as the monographs *The Method of Trigonometric Sums in Number Theory* (Second Edition) and *Special Variants of the Method of Trigonometric Sums.* I. M. Vinogradov“

Bezüglich der Aufnahme der beiden obengenannten Bücher ist der Referent geteilter Meinung: einerseits ist es bequem, die beiden genannten, wichtigen Bücher leicht zugänglich in englischer Sprache vorzufinden, andererseits hätten an Stelle der beiden Bücher[1]) eine Reihe weiterer Zeitschriftenaufsätze aufgenommen werden können, die nicht so gut zugänglich sind.

Zu bemerken wäre noch, daß bereits 1952 Ausgewählte Werke Vinogradov's (Moskau, Izd. Akad. Nauk SSSR 1952, Math. Reviews, 14–610; in russischer Sprache) herausgegeben worden sind.

Das vorliegende Buch ist drucktechnisch sehr sorgfältig hergestellt und bietet Studierenden und Wissenschaftlern, die auf zahlentheoretischem Gebiet arbeiten, eine bequeme Möglichkeit, die grundlegenden Methoden und Ergebnisse von Vinogradov (z. B. zur Verteilung der Potenzreste, zum Waringschen Problem, zur Abschätzung von Exponentialsummen mit Primzahlen, und über die nicht-ganzen Teile (fractional parts) der Werte von Polynomen) kennenzulernen.

Frankfurt am Main W. Schwarz

Pillay, A., An Introduction to Stability Theory (Oxford Logic Guides 8), Oxford: Clarendon Press 1983, xi, 146 pp., hardbound, £ 15.00

Die vollständige Theorie T eines Modells M ist die Menge aller Sätze des Prädikatenkalküls, die in M gelten. Wie weit ist M durch T bestimmt? Da T Modelle jeder unendlichen Mächtigkeit hat (abzählbare Sprache und Existenz eines unendlichen Modells vorausgesetzt), muß wenigstens noch die Mächtigkeit von M festgelegt werden.

---

[1]) zumal bereits eine englische Übersetzung der 1. Auflage der „Trigonometrical Sums in Number Theory“ (1971) vorlag (man vgl. Math. Reviews 80a: 10055).

Zwei extreme Beispiele:

Die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte hat zwar bis auf Isomorphie genau ein abzählbares Modell (T ist „$\aleph_0$-kategorisch") aber 2^κ viele Modelle – die größtmögliche Zahl – jeder überabzählbaren Mächtigkeit κ.

Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper einer festen Charakteristik ist κ-kategorisch für jedes überabzählbare κ. Im Überabzählbaren stimmt nämlich der Transzendenzgrad mit der Mächtigkeit überein.

S. Shelah hat im letzten Jahr folgenden Haupt-Satz angekündigt („Classification of first order theories which have a structure theorem", Bulletin AMS, April 1985, Vol. 12/2, 227–232): Eine vollständige Theorie T hat entweder in jeder überabzählbaren Mächtigkeit κ 2^κ-viele Modelle oder es gibt eine Strukturtheorie, die es gestattet, die Modelle von T (von genügend großer Mächtigkeit) durch Ordinalzahlinvarianten zu bestimmen.

Die zum Beweis dieses Satzes verwendeten Techniken und „Seitenergebnisse" sind Gegenstand der Stabilitätstheorie. Diese Theorie wurde in der Hauptsache von Shelah entwickelt und in seiner monumentalen „Classification Theory and Number of Non-Isomorphic Models" (North Holland, Amsterdam et al., 1978) dargestellt. Der angekündigte Satz wird in der zweiten Auflage enthalten sein.

Eine vollständige Theorie ist stabil, wenn sich in keinem ihrer Modelle eine unendliche lineare Ordnung definieren läßt. Shelah hat gezeigt, daß unstabile Theorien in jeder überabzählbaren Mächtigkeit κ 2^κ-viele Modelle haben. Andererseits lassen sich Modelle von stabilen Theorien schon erstaunlich weit analysieren. Wichtigstes Hilfsmittel ist die Theorie des Forking, eine Abhängigkeitsrelation („A ist von B abhängig über C" oder „der Typ von A über $B \cup C$ forkt über C"), die der algebraischen Abhängigkeit in algebraisch abgeschlossenen Körpern entspricht.

Shelahs Buch ist schwer zu lesen. Hier entfaltet sich nicht eine Theorie aus einfachen Grundsätzen. Es erscheint vielmehr als ein Steinbruch komplizierter Sätze, die für mögliche Anwendungen bereit liegen. So wurden von Anderen Teile (oder Querschnitte) des Buches in neue Form gebracht. Insbesondere haben Lascar und Poizat die Theorie des Forking auf neue Beine gestellt. („An introduction to forking", J. symbolic logic, Vol. 44, 330–350).

Pillays Buch enthält die allgemeine Theorie des Forking für stabile Theorien, eingeführt à la Lascar & Poizat. Anwendungen gehen auf das Stabilitätsspektrum und Primerweiterungen (u. a.). Im letzten Kapitel werden reguläre Typen diskutiert und die Baldwin-Lachlan Theorie $\aleph_1$-kategorischer Theorien vom Forkingstandpunkt aus dargestellt, Morleys Satz wird bewiesen. Morleys Satz (1967) und die Baldwin-Lachlan Strukturtheorie der Modelle $\aleph_1$-kategorischer Theorien (1971) (sie sind Primerweiterungen von maximal unabhängigen Mengen) waren die ersten Ergebnisse der Stabilitätstheorie.

Der Leser sollte bereits ein gutes Stück Modelltheorie kennen: $\aleph_0$-kategorische Theorien, Primmodelle, saturierte Modelle, Beths Satz; man findet alles in Chang-Keisler „Model Theory", North-Holland 1973. Pillays Buch ist ausgezeichnet geschrieben, mit Übungsaufgaben versehen und hat sich in einem Seminar, das einer Modelltheorie Vorlesung folgte, bei meinen Studenten bewährt. (Leider wurde kein Gebrauch von imaginären Elementen gemacht, was einige Beweise unglücklich macht.)

Nur ein Teil der im Buch behandelten Gegenstände ist von eigenem Interesse (z. B. Klärung des Begriffs der stabilen Theorie und die allgemeinen Eigenschaften der Forkingrelation.) Der Rest ist wenig motiviert, sieht man das Buch nicht als Vorbereitung für weiterführende Literatur z. B. von Makkai „A survey of stability theory" (Israel J. of Math. Vol. 49 (1984)). Dieser Artikel wiederum ist die Grundlage von Harnik-Makkai „An exposition of Shelahs „Main Gap": Counting uncountable models of ω-stable and superstable theories" Notre Dame J. formal logic Vol. 26, 1985. Jetzt befindet man sich in der Nähe des oben erwähnten Shelahschen Haupt-Satzes.

Bonn M. Ziegler

Smoryński, C., Self-Reference and Modal Logic (Universitext), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, xii, 333 pp., soft cover, DM 88,–

C. Smoryński ist einem größeren Leserkreis von seinen populären Artikeln im Mathematical Intelligencer her bekannt. Nun legt er ein klar verfaßtes Buch vor über ein Thema, das gerade in letzter Zeit große Fortschritte gemacht hat. Es geht um die Logik der formalen Beweisbarkeit, und zwar meist um die Situation *im* Kalkül, d. h. um die Logik der *beweisbaren* Beweiszusammenhänge; aber auch die Logik aller *wahren* Sprachzusammenhänge wird behandelt. Daß hier ein Unterschied besteht, wurde 1931 von Gödel bewiesen.

Das Buch besteht aus drei Teilen und einem Kapitel 0. Letzteres heißt „Einführung", enthält jedoch wesentliche Ingredienzien: die Argumentation von Gödel, die Gödel-Bernays-Löb-Ableitbarkeitsbedingungen, die Arithmetisierung der Syntax (am Beispiel der leicht verallgemeinerten primitiv-rekursiven Arithmetik PRA) und beweisbare rekursionstheoretische Resultate (wie Wahrheitsdefinitionen, Rekursionstheorem, Reflexionsprinzipien). – Generell ist folgendes zu sagen: (i) Im Buch wird durchweg der beweisbare modus ponens zugrunde gelegt. Die zugehörige Logik ist also die der Kalküle mit beweisbarem Schnitt (wie Frege/Hilbert-Kalküle u. ä.). Damit werden viele Kalküle der Praxis erfaßt, die für theoretische Untersuchungen wichtigen schnittfreien Systeme von Gentzen jedoch nicht. Daß Gödels Sätze auch hierfür gelten, wurde erst 1973 von Jeroslov (jetzt vom Ref. vereinfacht) gezeigt. Es ist eine zur Zeit offene Frage, wie die Beweislogik schnittfreier Kalküle aussieht, ja ob sie überhaupt vollständig axiomatisierbar ist. (ii) Das Buch behandelt die Beweis-Aussagenlogik, nicht die Beweis-Prädikatenlogik, die Artyomov und Vardanian 1985 als nicht axiomatisierbar nachwiesen. – Wir geben nun eine Inhaltsübersicht.

Kap. 1: Provability as modality. Zur Sprache der Aussagenlogik wird $\Box$ für die (arithmetisierte) Beweisbarkeit in hinreichend ausdrucksstarken Kalkülen zugefügt. Darüber wird zunächst die basic modal logic BML gebildet, die aus Aussagenlogik plus $\Box$-Ableitbarkeitsbedingungen besteht. Für die logischen Fixpunkte ist mindestens die Erweiterung PRL um das formalisierte Löb-Theorem nötig. Hauptresultat: Jede Formel A(p), in der die Aussagenvariable p nur unter $\Box$ auftritt, hat (bzgl. p) genau einen in PRL explizit definierbaren logischen Fixpunkt. Der syntaktische Beweis konstruiert diesen Fixpunkt.

Kap. 2: Modal model theory. Zugrundegelegt werden Kripke-Modelle. BML und PRL sind bezüglich ihrer Axiommodelle vollständig. Für PRL ist ferner folgende prägnante Modellklasse charakteristisch: Kripke-Modelle mit wohlfundiertem $\check{R}$ auf Bäumen. Da endliche Knotenmengen ausreichen, sind BML und PRL rekursiv entscheidbar. Für PRL gilt Interpolation und der Satz von Beth. – Auch die logischen Fixpunkte werden modelltheoretisch behandelt samt einer Berechnung im parameterfreien Fall und einer Normalform für variablenfreie Ausdrücke. – Schließlich wird noch die Logik PRL^{ω}, die alle wahren Formeln axiomatisieren soll, eingeführt und finit auf PRL zurückgeführt.

Kap. 3: Arithmetic interpretations of PRL. Intendiert sind für $\Box$ arithmetisierte Beweis-Interpretationen. Die Modelltheorie wird benützt, um dafür die Solovayschen Vollständigkeitssätze zu beweisen: PRL ist die in PRA beweisbare und PRL^{ω} die arithmetisch-wahre PRA-Beweislogik. Es folgen Übertragungsprinzipien (Solovay, Visser): für viele T $\supseteq$ PRA ist PRL die in PRA, T beweisbare T-Beweislogik und PRL, PRL^{ω} die T-wahre, wahre T-Beweislogik.

Kap. 4: Bimodal logics and their arithmetic interpretations. Die Betrachtungen werden auf zwei Modaloperatoren $\Box$, $\triangledown$ verallgemeinert. $\Box$ wird auf PRA bezogen und $\triangledown$ auf die Beweisbarkeit in einer *beliebigen* PRA-Erweiterung oder in einer abzählbaren Vereinigung solcher Erweiterungen oder in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ZF. Die zugehörigen Logiken heißen PRL_1, MOS und PRL_{ZF}. Eindeutige logische Fixpunkte lassen sich bereits in einem gemeinsamen Subsystem SR explizit definieren. SR scheint im Gegensatz zu seinen Extensionen PRL_1 und MOS keine schöne Modelltheorie zu haben. Für letztere werden zwei Kripke-Modell-Versionen angegeben und diesbezüglich Vollständigkeit bewiesen. Vollständigkeit bezüglich arithmetischer Interpretationen wird daraus mittels einer Variante der Kripke-Modelle, den sog. Carlson-Modellen, gewonnen. Von Carlson wurde dies auf PRL_{ZF}, also ein spezielles Theorienpaar, ausgedehnt.

Kap. 5: Fixed point algebras. Hier wird der algebraische Hintergrund der bisherigen Beweise studiert: sie beruhen alle auf der (teilweisen) Simulation durch endliche Subalgebren von *Beweis-orientierten* diagonalisierbaren Fixpunkt-Algebren. Ein Repräsentationstheorem für diagonalisierbare Fixpunkt-Algebren beweist: im endlichen Fall ist das immer so. Der Verfasser schließt daraus: solche *endlichen* Modalanalysen gelingen nur für Beweis-orientierte Modaloperatoren. Über unendliche Modalanalysen ist nur wenig bekannt.

Kap. 6: Non-extensional self-reference. Rosser sentences. Nicht-extensional heißt, daß beweisbar-äquivalente Sätze nun eventuell unterschieden werden. Die bekannteste derartige Fixpunktkonstruktion stammt von Rosser 1936. Nach Guaspari (1976) wird die zugehörige Logik mit den neuen Begriffen „witness comparisons" $\leqslant, <$ gebildet. Der Kalkül R^- ist vollständig bezüglich Kripke-Modelle, seine Erweiterung R ist vollständig für T-beweisbare arithmetische Interpretationen ($T \supseteq PRA$), und R^{ω} ist vollständig für „sound" Kripke-Modelle sowie wahre arithmetische Interpretationen (Guaspari, Solovay). Dabei ist jede Beweis-Reihenfolge zugelassen. – Rosser-Fixpunkte können eindeutig oder nicht, explizit definierbar oder nicht sein.

Kap. 7: An ubiquitous fixed point calculation. Hier werden häufiger auftretende Rosser-ähnliche Fixpunkt-Eigenschaften in einem Modalsystem CML mit drei Modaloperatoren sowie $\leqslant, <$ uniformisiert. Daraus folgen Sätze von Rosser, Mostowski, Shepherdson, Friedman-Harrington und starke Semi-Repräsentationen von Zahlmengen in Theorien. – Schließlich wird noch Švejdars Modalsystem basierend auf $\Box, \leqslant, <$ und arithmetischer Interpretierbarkeit als zweitem Modaloperator mit Anwendungen vorgeführt.

Das Buch ist reichhaltig. Hinzu kommen viele schöne Übungen. Die wenigen Druckfehler sollte der Leser selbst verbessern können. Zwei Mängel seien nicht verschwiegen: bei diesem Umfang wäre ein Stichwortverzeichnis nützlich; die Buchstaben dürfen bei der phototechnischen Wiedergabe weder kleiner noch heller (nur größer und dunkler) werden.

Frankfurt a. M. H. Luckhardt

Aigner, M., Graphentheorie (Teubner Studienbücher), Stuttgart: Teubner 1984, 269 S., kart., DM 29,80

Leitidee dieses Buches ist, die Theorie der endlichen Graphen aus dem Vierfarbenproblem zu entwickeln, gleichsam als eine Folge von Variationen zu einem gegebenen Thema. Es zeigt sich, daß man tatsächlich die meisten, zum Grundbestand der Graphentheorie gewordenen Resultate in Verbindung mit diesem Problem, das etwa hundert Jahre lang die wichtigste offene Frage in dieser Disziplin war, sehen kann. So ergeben sich in einem natürlichen Aufbau die Sätze von Kuratowski, Whitney und MacLane zur Charakterisierung der planaren Graphen, Färbungsprobleme (für abstrakte Graphen und für Graphen auf Flächen), Hadwigers Vermutung mit dem Äquivalenzsatz von K. Wagner, Faktor- und matching-Probleme, Zusammenhangsprobleme mit dem Satz von Menger, Hamiltonsche Linien (mit den Kriterien von Dirac bis Chvátal), Extremalprobleme (Satz von Turán), Ramseyprobleme, Beziehungen zwischen Matroiden und Graphen. Im Schlußabschnitt wird die Lösung des Vierfarbenproblems mit Hilfe des Computers ausführlich, in ihren Grundgedanken und ihrer methodischen Problematik, erörtert. Durch das Interesse an der geschichtlichen Entwicklung der behandelten Probleme wird die Darstellung aufgelockert und verlebendigt.

Hamburg R. Halin

Tutte, W. T., Graph Theory (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 21), Menlo Park, Calif. u. a.: Addison-Wesley 1984, xxi, 333 pp., cloth, $ 49.50

Das Buch von Tutte behandelt die Graphentheorie in einer Entwicklungsrichtung, wie sie von H. Whitney in den dreißiger Jahren inauguriert und vom Verfasser selbst in zahlreichen wichtigen Beiträgen weitergeführt worden ist. So ist stets die Matroidtheorie mit ihrer Dualität, die von Whitney speziell auch zur Charakterisierung der planaren Graphen entworfen wurde, als gedanklicher Hintergrund präsent. Dies betrifft auch die Theorie des Zusammenhangs, die den hauptsächlichen Inhalt der ersten gut 100 Seiten bildet. Hier werden neben des Verfassers Theorie des 2- und 3-fachen Zusammenhangs auch der Mengersche Satz und der Heiratssatz von P. Hall behandelt. Als weitere wichtige Themen der Graphentheorie folgen das Rekonstruktionsproblem, Bäume und Gerüste (mit dem Matrix-Gerüst-Satz), das Faktorproblem (auf der Grundlage alternierender Wege) sowie planare Graphen (u. a. mit dem Satz von Kuratowski und einem Algorithmus zur Entscheidung der Planarität). Interessant ist die Behandlung des Klassifikationsproblems für geschlossene Flächen auf graphentheoretischer Grundlage. Einen breiten Raum nehmen die diversen Polynome ein, die einem Graphen zugeordnet werden können, insbesondere im Zusammenhang mit chromatischen Problemen. Eine ausführliche Behandlung der Kettengruppen stellt den Zusammenhang zwischen Graphen und Matroiden her.

Insgesamt handelt es sich hier um ein originelles Buch, das die persönliche Sichtweise des Verfassers wiedergibt, der durch bedeutende Beiträge zur Graphentheorie ausgewiesen ist. Dieser Vorzug wird allerdings fraglich, wenn man sich vor Augen hält, daß das Werk im Rahmen einer Enzyklopädie der Mathematik erscheint, die sich zum Ziel gesetzt hat, alle wesentlichen Richtungen einer Disziplin vorzustellen und Zugang zu der einschlägigen relevanten Literatur zu ermöglichen. Hier müssen doch erhebliche Bedenken erhoben werden. Viele zentrale Themenkreise fehlen völlig, so die Extremalprobleme (wie sie von der ungarischen graphentheoretischen Schule im Anschluß an Turán in zahlreichen tiefen Arbeiten behandelt wurden), die Ramseyprobleme, die klassischen Kriterien für Hamiltonlinien, perfekte Graphen, Graphen und Gruppen, der Färbungssatz von Heawood-Ringel-Youngs. Der Begriff des n-fachen Zusammenhangs eines Graphen wird in einer Weise definiert, wie sie in der Graphentheorie ansonsten ganz unüblich ist, und die Theorie des (höheren) Zusammenhangs, die so breiten Raum einnimmt, wird auf dem Stand der sechziger Jahre behandelt, ohne daß auf die seitherigen bedeutenden Fortschritte eingegangen wird. So wird zwar jeder, der sich für Graphentheorie interessiert, das Buch mit Gewinn lesen; aber als „reference book" scheint es wenig geeignet.

Hamburg R. Halin

Grosswald, E., Representations of Integers as Sums of Squares, New York – Berlin – Heidelberg – Tokyo: Springer-Verlag 1985, xi, 251 pp., hard cover, DM 148,–

Es ist zu begrüßen, daß in diesem Buch der Versuch gemacht wird, einen klar umrissenen Gegenstand, nämlich die Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von Quadraten, zusammenhängend darzustellen und dabei alle relevanten Methoden von der Antike bis zur Moderne zu berücksichtigen. Allerdings ist das Buch ein etwas merkwürdiger Zwitter zwischen elementarer Einführung und Ergebnisbericht. Für Spezialisten dürfte insbesondere das umfangreiche Literaturverzeichnis von ca. 300 „References" (auf die im Text an passender Stelle verwiesen wird) und 300 weiteren Arbeiten unter der Überschrift „Bibliography" wertvoll sein. Dagegen bleibt der Text von immerhin 220 Seiten etwas an der Oberfläche, d. h. die elementaren Beweisteile werden elegant ausgeführt, die schwereren Beweise aber nur skizziert. Gelegentlich werden Beweise in Bruchstücke zerlegt, auf mehrere Paragraphen verteilt und durch teilweise irrelevante Zwischenbemerkungen unterbrochen (z. B. in den Kapiteln 3 und 4).

Die Kapitel 1 bis 7 sind im wesentlichen elementar und behandeln die Darstellung einer natürlichen Zahl n als Summe von k Quadraten für $k \leq 4$, Formeln und Abschätzungen für die Darstellungsanzahl $r_k(n)$ sowie verwandte Fragen (Darstellungen als Summe von paarweise verschiedenen oder nichtverschwindenden Quadraten, Partitionen, Satz von Legendre über ternäre quadratische Formen). Der Dirichletsche Primzahlsatz, L-Reihen, die Klassenzahlformel für imaginär-quadratische Zahlkörper und die Geschlechtertheorie von Gauß werden erwähnt und teilweise benutzt, aber nicht bewiesen.

Die Kapitel 8 und 9 behandeln Theta-Funktionen, Lambert-Reihen und Formeln für $r_k(m)$, $k = 2, 4, 6, 8, 10, 12$. Kapitel 10 bringt ohne Beweis einige Ergänzungen dazu, z. B ein Theorem von Stieltjes über $r_5(n)$.

Die Kapitel 11 bis 13 behandeln die Kreismethode von Hardy-Littlewood zur Abschätzung von $r_s(n)$ für $s \geq 5$. Es gilt dann (Theorem 1 auf S. 155): $r_s(n) = \rho_s(n) + O(n^{s/4})$ mit

$$\rho_s(n) = \pi^{s/2}\Gamma(^s/2)^{-1} n^{s/2-1} S(s, n),$$

wobei die „singuläre Reihe" $S(s, n)$ ihrerseits einer Abschätzung $c_2(s) \leq S(s, n) \leq c_1(s)$ mit positiven von n unabhängigen reellen Zahlen $c_{1,2}(s)$ genügt. Kapitel 12 ist m. E. besonders gut gelungen.

Das letzte Kapitel 14 „Recent Work" bringt ohne Beweis eine Fülle von Resultaten über Quadratsummen von ganz-algebraischen Zahlen, die Probleme 11 und 17 von Hilbert, das Hasse-Prinzip für quadratische Formen usw.

Sehr ärgerlich sind eine Fülle von leicht fehlerhaften Definitionen, unklaren Formulierungen und Druckfehlern, die hier nicht alle aufgeführt werden können. Besonders kraß ist die Behauptung auf S. 5/6, daß (1,1,1) eine Lösung von $2x^2 - 5y^2 + 2z^2 = 0$ sei, und ein fehlender Faktor x im Hauptglied der Formel für $N_2(x)$ auf S. 22.

Mainz A. Pfister

Kranakis, E., Primality and Cryptography (Wiley-Teubner series in computer science), Stuttgart: Teubner, Chichester: Wiley 1986, xv + 235 pp, gbd.

Die Kunst der Ver- und Entschlüsselung als angewandte Mathematik hat eine lange Tradition – so soll z. B. John Wallis seinen Geometrie-Lehrstuhl in Oxford 1649 der Entschlüsselung zahlreicher Geheim-Nachrichten von königstreuen Partisanen verdanken, die in die Hände Cromwells fielen. Das klassische Schema der Kryptographie besteht aus zwei geheimzuhaltenden Codes für Ver- und Entschlüsselung, die vor der Nachrichtenübermittlung zwischen Absender und Empfänger zu vereinbaren waren. Mit der Ausbreitung der elektronischen Kommunikation und schneller Computer hat das Streben nach Geheimhaltung und Sicherung vor Fälschungen seit 1976 (Diffie-Hellman) zu neuen, zahlentheoretischen Verfahren zur Verschlüsselung von Nachrichten geführt, bei denen der Verschlüsselungsmechanismus öffentlich zugänglich ist. Von diesen Entwicklungen des letzten Jahrzehnts berichtet dieses Buch.

Es ist in 6 Kapitel eingeteilt, von denen die ersten 4 (etwa 2/3 des Buches) die mathematischen Grundlagen behandeln. Das 1. Kapitel (Number Theory) gibt einen Querschnitt durch die elementare Zahlentheorie inklusive quadratisches Reziprozitätsgesetz und Primzahlsatz. Das 2. Kapitel (Primality Tests) behandelt eine Fülle von Primtests (Solovay-Strassen, Rabin, Rumeley-Adleman ...). Kapitel 3 (Probability Theory) gibt einen Abriß der Grundbegriffe der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie. Kapitel 4 (Pseudorandom Generators) untersucht zahlreiche Erzeugungen von Pseudozufallszahlen auf die Frage, wie zufällig derartige Folgen sind, d. h. welche statistischen Tests sie erfüllen. Kriterium ist, ob Gesetze in polynomialer Zeit zu entdecken sind – und durch dieses Kriterium fallen die häufig benutzten linearen Kongruenzen und der $\frac{1}{p}$-Generator. Kandidaten für bessere Generatoren (Quadrate bzw. Logarithmen mod n) werden diskutiert – ob sie in polynomialer Zeit ihren Zufallscharakter bewahren oder nicht, hängt allerdings von der bisher nicht geklärten Komplexität zahlentheoretischer Fragestellungen ab (Berechnung von Indizes bzw. Feststellen, ob eine Zahl quadratischer Rest mod pq ist).

In Kapitel 5 (Public Key Cryptosystems) kommt der Autor zum eigentlichen Thema. Behandelt werden insbesondere das RSA-System von Rivest, Shamir, Adleman, dessen Sicherheit auf der Langsamkeit der Faktorisierung großer Zahlen beruht; die Rabinsche Variante; das Merkle-Hellman-System, dessen Sicherheit angeblich auf der Schwierigkeit des NP-vollständigen „knapsack" Problems beruht – die Entlarvung dieses Irrtums durch Shamir wird im Text nur skizziert; das Goldwasser-Micali-System, dessen Sicherheit auf der Schwierigkeit beruht, quadratische Reste modulo zusammengesetzter Zahlen zu erkennen. Das letzte Kapitel (Towards a General Theory) behandelt allgemeine Sicherheits-Tests für Zufallsgeneratoren, Konstruktion besserer Zufallsgeneratoren und Verschlüsselungen sowie Zusammenhänge mit der Komplexitätstheorie.

Das Buch ist lebendig, aber trotz Wiederholungen bisweilen etwas knapp geschrieben, viele Beweise werden als Übungsaufgaben an den Leser delegiert. Die durchgeführten Beweise begnügen sich meist mit Rechnungen, auch dort, wo ein begriffliches Argument kürzer und klarer gewesen wäre. Jedes Kapitel ist in zahlreiche Paragraphen geteilt, was der Übersichtlichkeit dient, aber auch den Eindruck des unabhängig Aneinandergereihten erweckt (das Buch ist mit LaTeX geschrieben): Die gleiche Idee wird an verschiedenen Stellen neu entwickelt, Benutzung früherer Resultate hätte manchen Beweis kürzen können, Rabins Theorem über die Äquivalenz von Quadratwurzelziehen mod pq und Faktorisierung von pq tritt zweimal auf als Theorem 4.7 bzw. 5.3. Ärgerlicher ist, daß die mangelnde Überarbeitung des Ganzen auch zahlreiche Fehler und Unklarheiten stehen ließ: So fehlt bei dem Algorithmus zum Ziehen der Quadratwurzel mod p auf S. 23 bei Step 2 der Schritt $b := b^p$; der Abschnitt 1.16 über Kettenbrüche enthält mehrere falsche Ungleichungen; bei Pratts Primtest in 2.6 wird eine falsche Definition des Abschlußoperators Γ gegeben, die nicht zu dem behaupteten Resultat führt; in 2.10 wird zweimal behauptet, jede endliche abelsche Gruppe habe eine treue 1-dimensionale Darstellung; die Wertetabelle in 2.15 paßt nicht zu der dort definierten Funktion; Bernsteins Gesetz der großen Zahl 3.6 folgt in der angegebenen Fassung nicht aus dem vorstehenden Lemma.

Sieht man von solchen Ausführungsdetails ab, ist das Buch ein fundiertes Zeugnis für die Art und Weise, wie Anwendungsprobleme zu interessanten und neuartigen Fragestellungen in der Mathematik (hier in der Zahlentheorie) führen.

Erlangen W.-D. Geyer

Neukirch, J., Class Field Theory (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 280), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1986, viii, 140 pp., hard cover, DM 84,–

Die Klassenkörpertheorie ist das Herzstück der algebraischen Zahlentheorie und zweifellos eine der bedeutendsten Kulturleistungen des 20. Jahrhunderts. Sie gibt eine Beschreibung der abelschen Erweiterungen eines algebraischen Zahlkörpers K, d. h. der normalen Erweiterungen von K mit abelscher Galoisscher Gruppe, mit Hilfe von Bestimmungsstücken, die im Grundkörper K selbst definiert sind, nämlich mit Hilfe der Untergruppen der Ideleklassengruppe von K von endlichem Index. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus der entsprechenden Faktorgruppe auf die Galoissche Gruppe der zugehörigen abelschen Erweiterung, der als weitgehende Verallgemeinerung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes angesehen werden kann und als Artinsches Reziprozitätsgesetz bezeichnet wird.

Mit dem Beweis dieses Gesetzes durch E. Artin im Jahre 1927 war die Klassenkörpertheorie in ihren Grundzügen vollendet. Während sich die Sätze der Theorie verhältnismäßig leicht darstellen lassen, waren die Beweise, die vor allem von T. Takagi stammten, zu dieser Zeit überaus kompliziert. Der Leser kann sich davon ein Bild machen an Hand der Lektüre des Zahlberichts von H. Hasse [4]. Die folgende Periode etwa bis zum Jahre 1960 ist gekennzeichnet durch eine Vereinfachung der Beweise und einen Umbau der Theorie, die in den Kalkül der Gruppenkohomologie eingebettet, sich schließlich als eine Theorie beliebiger normaler Erweiterungen algebraischer Zahlkörper und algebraischer Funktionenkörper in einer Unbestimmten über einem endlichen Konstantenkörper darstellt. Seit 1960 schließlich tritt der Zusammenhang mit der Theorie der Modulformen und der Darstellungstheorie halbeinfacher Gruppen über dem Adelering in den Vordergrund. Von zentraler Bedeutung sind hier die bisher unbewiesenen Langlands-Vermutungen. Gewisse Ansätze zu dieser Theorie stammen bereits von Artin und Hecke aus den zwanziger Jahren.

Das vorliegende Buch von J. Neukirch ist eine Einführung in die Klassenkörpertheorie. Es bietet eine Variante der algebraischen Begründung der Theorie, wobei es dem Verfasser vor allem darauf ankommt, das Artinsche Reziprozitätsgesetz in möglichst einfacher Form abzuleiten, d. h. ohne Benutzung des Satzes von J. Tate, der die Reziprozitätsabbildung kohomologisch interpretiert. Dies gelingt durch Einbeziehung von Standarderweiterungen mit Galoisscher Gruppe $\hat{\mathbb{Z}}$, d. h. der maximalen unverzweigten Erweiterung im lokalen und eines unendlichen Kreisteilungskörpers im globalen Fall, in die Axiomatik der Klassenformation sowie durch die Definition der Reziprozitätsabbildung mit Hilfe der Durchkreuzung mit einer Standarderweiterung; ein Prozeß, der auf N. Čebotarev zurückgeht und in jeder Begründung der Klassenkörpertheorie eine zentrale Rolle spielt.

Im einzelnen besteht das Buch aus fünf Kapiteln. Im ersten Kapitel werden gruppen- und körpertheoretische Hilfsmittel bereitgestellt. Hierzu gehören vor allem die Einführung der Kohomologiegruppen der Dimension $-1, 0, 1$ und die Ableitung von Sätzen über diese Gruppen, insbesondere über den Herbrand-Quotienten.

Das zweite Kapitel bringt eine axiomatische Theorie der Artinschen Reziprozitätsabbildung. Der Kenner der Theorie lese vor allem dieses Kapitel, in dem die neue Begründung der Klassenkörpertheorie durch den Verf. zum Ausdruck kommt.

Kapitel 3 enthält die lokale Klassenkörpertheorie unter Einschluß von Lubin-Tate-Erweiterungen, Kapitel 4 entsprechend die globale Klassenkörpertheorie. Die erste und zweite Ungleichung werden in der üblichen Weise, d. h. im wesentlichen nach dem Vorgehen von Chevalley (siehe z. B. [2], Chap. 7) bewiesen.

Das fünfte Kapitel über Zeta-Funktionen und L-Reihen gibt einen Ausblick auf die weitere Theorie bis hin zur „Langlands-Philosophie".

Zusammenfassend kann man sagen, daß das vorliegende Buch vor allem von pädagogischem Wert ist. Eine vollständigere Darstellung kann nicht ohne die Theorie der Brauer-Gruppe, die kanonische Klasse, den Satz von Šafarevič-Weil über Galois-Gruppenerweiterungen und den Satz von Nakayama-Tate auskommen und wird sich daher auf den vollständigen Gruppen-Kohomologie-Kalkül stützen müssen, der sowieso zur Allgemeinbildung eines Algebraikers gehören sollte.

Die Bedeutung des Buches liegt darin, eine geschlossene und relativ zu anderen Darstellungen ([1]–[8]) leichter faßliche Einführung in die Klassenkörpertheorie zu geben, die hoffentlich der Theorie viele neue Liebhaber zuführen wird.

[1] Artin, E.; Tate, J.: Class field theory. New York – Amsterdam: Benjamin 1967
[2] Cassels, J. W. S.; Fröhlich, A. (Hrsg.): Algebraic Number Theory. Washington W.C.: Thompsen Book Comp. Inc. 1967
[3] Chevalley, C.: Class Field Theory. Universität Nagoya 1954
[4] Goldstein, L. J.: Analytic Number Theory. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall 1971

[5] H a s s e , H.: Zahlbericht. Würzburg – Wien: Physika-Verlag 1970
[6] I y a n a g a , S. (Hrsg.): The Theory of Numbers. North-Holland 1975
[7] N e u k i r c h , J.: Klassenkörpertheorie. Mannheim 1969
[8] W e i l , A.: Basic Number Theory. New York: Springer-Verlag 1967

Berlin H. Koch

Cohn, H., Introduction to the Construction of Class Fields (Cambridge Studies in Advanced Mathematics 6), Cambridge: Cambridge University Press 1985, x, 213 pp., hard cover, £ 30.00

Das vorliegende Buch gibt eine breite Einführung in die klassische Klassenkörpertheorie und die Zusammenhänge mit Modulfunktionen, wobei der Akzent auf die konstruktive Seite gesetzt wird. Der theoretische Aufbau der Klassenkörpertheorie wird größtenteils aus der vorhandenen Literatur zitiert. Ein reichhaltiges Übungsangebot begleitet den Text und trägt wesentlich zum Verständnis bei. Nützlich sind auch die ausführlichen Literaturangaben am Ende eines jeden Kapitels.

Zum Inhalt im einzelnen: In *Kapitel 1* wird in Form einer motivierenden Vorschau das elementar zahlentheoretische Problem, eine Primzahl p bei vorgegebenem $t \in \mathbf{N}$ in der Form $p = x^2 + 4^t y^2$, $x, y \in \mathbf{Z}$, darzustellen, behandelt und mitgeteilt, wie man durch Betrachtung abelscher Erweiterungen über $\mathbf{Q}(i)$ und deren Erzeugung durch singuläre Werte von Modulfunktionen zu einem rationalen Kriterium für das Darstellungsproblem gelangt. Dieses Problem zieht sich wie ein Leitfaden durch die restlichen Kapitel des Buches, wo dann unter anderem die für die Lösung benötigten theoretischen Grundlagen entwickelt werden.

Kapitel 2: Ausgangspunkt ist die Kummersche Definition der Zerlegung einer Primzahl p im Zahlkörper K über die Faktorisierung einer erzeugenden Gleichung modulo p. Unter Bezug auf die in Kap. 4 bewiesene Kennzeichnung eines über $\mathbf{Q}$ normalen Körpers K durch die Menge P der in ihm voll zerfallenden Primzahlen wird K Klassenkörper zu P genannt. In dieser Sprechweise werden sodann quadratische Körper und deren Geschlechter- und Ringklassenkörper als Klassenkörper zu rationalen Primzahlmengen definiert und in diesem Zusammenhang binäre quadratische Formen, Dirichletsche Charaktere und das quadratische Reziprozitätsgesetz abgehandelt.

Kapitel 3 und 4 enthalten in moderner Sprechweise die Grundlagen der Arithmetik in algebraischen Zahlkörpern. Nach Entwicklung der Idealtheorie der Maximalordnung eines algebraischen Zahlkörpers K und des Zerlegungsgesetzes rationaler Primzahlen in K werden in Kapitel 4 die Begriffe Diskriminante, Klassenzahl, Einheitengruppe und Regulator eingeführt und ihre grundlegenden Eigenschaften in kompakter Form referierend zusammengestellt.

Eine Einführung in Zeta- und L-Funktionen schließt sich an mit Anwendung auf die Kennzeichnung normaler Zahlkörper durch die in ihnen voll zerfallenden Primzahlen und den Dirichletschen Satz von der arithmetischen Progression.

Kapitel 5 gibt eine einführende Zusammenstellung für die in Kapitel 10 und 11 benötigten Dinge über algebraische Funktionenkörper mit komplexem Konstantenkörper: Die Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion, Differentiale, Geschlecht und der Satz von Riemann-Roch. Elliptische Funktionenkörper werden gesondert betrachtet, und eine Analogiebetrachtung zu algebraischen Zahlkörpern beendet das Kapitel.

In Kapitel 6 werden die algebraischen Zahlkörper wieder aufgegriffen, Zahlkörpererweiterungen K/k betrachtet, der Begriff der Differente und Relativdiskriminante eingeführt und die Hilbertsche Theorie entwickelt. Wie an vielen Stellen des Buches erfolgt auch hier eine reichhaltige Illustration durch Beispiele unter Einschluß des „Funktionenkörperfalls".

In Kapitel 7 wird zunächst die Entstehung des Hilbertschen Klassenkörpers aus historischen Fragestellungen geschildert und danach der Hauptsatz der Klassenkörpertheorie mit den dazu notwendigen Begriffsbildungen sowie der Führerdiskriminanten- und Hauptidealsatz referiert. In Erinnerung an Weber, Hilbert, Artin und Takagi wird der Hauptsatz „WHAT-theorem" genannt. Den Abschluß bilden Dirichletsche L-Funktionen und ihre Anwendung auf die Verallgemeinerung des Satzes von der Arithmetischen Progression auf Strahlklassen.

Kapitel 8: Die in Kapitel 2 eingeführten Klassenkörper insbesondere Geschlechterkörper zu binären quadratischen Formen werden hier im allgemeineren Rahmen der Ringklassenkörper erneut behandelt und die zugehörige Idealklasseneinteilung durch Ringideale von Nichtmaximalordnungen in quadratischen Zahlkörpern beschrieben. Danach wird die allgemeinere Situation $K \supset k \supset \mathbb{Q}$ mit K/k und $k/\mathbb{Q}$ abelsch betrachtet, in der das Analogon des Geschlechterkörpers durch den maximalen über $\mathbb{Q}$ abelschen Teilkörper K_g gegeben ist. Aus der Struktur der Galoisgruppe von $K/\mathbb{Q}$ läßt sich insbesondere für quadratische Körper k der Geschlechterkörper K_g bestimmen. Abschließend wird dann noch für quadratische Körper k und vorgegebenen Grad $(K : k) = 2, 3, 4$ sowie Galoisgruppe $G(K/\mathbb{Q})$ der Frage nach der Existenz unverzweigter Erweiterungen K/k nachgegangen.

Kapitel 9 gibt eine Einführung in die Konstruktion von Klassenkörpern, insbesondere ℓ-Klassenkörpern durch Radikale, wie sie beim Existenzsatz der Klassenkörpertheorie verwendet wird. Ausführlich wird dabei auf die Konstruktion des 2-Klassenkörpers über $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$, p Primzahl, $p \equiv 1 \bmod 8$ eingegangen.

Den Abschluß des Kapitels bildet die Einführung sog. „governing fields" Ω. Im Falle ihrer Existenz kann man aus dem Zerlegungsgesetz $\Omega/\mathbb{Q}$ auf die Struktur der Galoisgruppe gewisser Klassen quadratischer Körper schließen.

Kapitel 10 enthält die grundlegenden Dinge über Modulfunktionen, die im folgenden Kapitel für die Klassenkörperkonstruktion über imaginär-quadratischem Körper benutzt werden. Entsprechend der Beschränkung auf Ringklassenkörper in Kapitel 11 wird dabei der Schwerpunkt auf die Behandlung der absoluten Invarianten j und der Diskriminante Δ aus der Theorie der Modulfunktionen gelegt.

Kapitel 11: Der erste Teil des Kapitels enthält die Konstruktion der Ringklassenkörper über imaginär-quadratischen Körpern durch singuläre Werte von j. Beim Beweis wird im Wesentlichen der von der allgemeinen Klassenkörpertheorie unabhängige Weg beschritten, der auf der Verwendung von j und Δ beruht und in diesem Zusammenhang auch der Hauptidealsatz genannt und in abgeschwächter Form bewiesen.

Der zweite Teil des Kapitels enthält eine sehr eindrucksvolle Anwendung von Klassenkörpertheorie und Modulfunktionen, die auf die Lösung des in Kapitel 1 genannten Darstellungsproblems und verwandter Probleme führt. Grundlage hierfür ist die iterative Berechnung der Ringklasseninvarianten $j(\tau), j(b\tau), j(b^2\tau), \ldots, \tau$ imaginär-quadratisch, $b = 2, 3, 4, 5$. Die entsprechenden Formeln stammen von Felix Klein und beruhen auf der Tatsache, daß der Normalkörper von $\mathbb{C}(j, j_b)$ über $\mathbb{C}(j)$, $(j_b(z) = j(bz))$, für die oben angegebenen Werte von b das Geschlecht Null hat, also ein rationaler Funktionenkörper ist.

Obwohl das Buch einführenden Charakter hat, ist es doch eher für den Leser mit einigen Vorkenntnissen in algebraischer Zahlentheorie geschrieben. Ihm wird durch dieses Buch insbesondere der Zugang zu den klassischen Arbeiten über Modulfunktionen und algebraische Zahlentheorie erleichtert. Daß diese Arbeiten eine Fundgrube für neuere Entwicklungen sind, zeigt das letzte Kapitel dieses Buches.

Augsburg R. Schertz

Fuchs, L., Salce, L., Modules over Valuation Domains (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 97), New York – Basel: Marcel Dekker, Inc. 1985, xi, 317 pp., softcover, $ 66.00

Seit etwa 10 Jahren haben sich die Autoren dieses Bandes und andere verstärkt darum bemüht, die „klassische Theore" der abelschen Gruppen (= Stand vor 1974) auf Moduln über Bewertungsringen auszudehnen. In der vorliegenden Monographie sind die bisher nur verstreut zugänglichen Ergebnisse, basierend auf Pionierarbeiten von Kaplansky, Matlis, Orsofsky und Warfield in gut lesbarer, verständlicher und stimulierender Weise zusammengestellt; der Seniorpartner hat dafür ein besonderes Talent! Bequemlichkeit hat leider seinen Preis, den Marcel Dekker fordert. Eine frühere Fassung ist (billiger) als Essener Vorlesungsausarbeitung zu haben.

Während sich Ergebnisse über abelsche Gruppen meistens trivial auf Moduln über Hauptidealbereichen erweitern lassen und mit etwas Mühe auch über Dedekindbereichen gelten, treten neue Effekte der Analysis auf, wenn der kommutative Grundring nicht mehr noethersch ist. Diese Phänomene kann man an klassischen Ergebnissen abelscher Gruppen gut studieren, und sie treten schon im „lokalen Fall", also bei Bewertungsringen voll auf. Deshalb ist die Einschränkung auf klassische Fragen über Bewertungsringen sinnvoll und die Erweiterung auf nicht-noethersche Ringe von besonderem Reiz. Die zusammengestellten Ergebnisse sind eine gute Startbasis und Referenzquelle für künftige Untersuchung, insbesondere unter Berücksichtigung neuerer Resultate über abelsche Gruppen der Zeit nach 1974.

Dem eiligen Leser seien die Gegenbeispiele besonders empfohlen; sie sind ein Nebenprodukt der genauen Analyse, die hier nur kurz für den algebraisch Interessierten skizziert werden soll: Die Limesstellen im Idealverband des Grundringes R führen zu Neuerungen, z. B. beim Sockel eines R-Moduls. Ebenso spalten Begriffe wie zyklisch, endlich erzeugt, rein, . . . auf. Die Grundlagen werden in (I) (II) zusammengestellt, in (III) (IV) folgen die homologischen Methoden. Verstreut findet man die Sätze, die jene Ringe charakterisieren, wo „alles beim alten" bleibt. Besonderes interessant ist der Zusammenhang von Topologie und Ext-Funktor (V), der in (XI) für die Łoš-Kaplansky-Warfieldschen rein injektiven Hüllen nützlich ist. A. Ostrowskis alte Ultravollständigkeit wird ein neues wichtiges Hilfsmittel. Ab Kap. VI werden spezielle Klassen von Moduln untersucht. Am einfachsten ist die Behandlung von teilbar-injektiv (VI). Die zyklischen Gruppen werden zu „Einreiher" (mit linearem Teilmodulverband). Einige von ihnen sind Quotienten von Idealen. Gibt es andere, sog. Nicht-Standard-Einreiher? Diese ältere Frage von Kaplansky hat Shelah für gewisse Modelle der Mengenlehre mittels „forcing" bejaht. Hier wird die Existenz in Gödel's universum V = L (VII) gezeigt. [Der auf S. 150 gegebene Beweis wird in Franzen, Göbel (Non-standard uniserial modules over valuation domains, einger. bei Math. Z.) korrigiert, und V = L wird durch die schwächere mengentheoretische Forderung $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ ersetzt.] Varianten des Fundamentalsatzes abelscher Gruppen findet man in (IX), und Kulikovs Basisuntergruppe führt zu den Ulm-Kaplansky-Invarianten. Besonders interessant ist das Beispiel von Fuchs-Salce eines Torsionsmodules $\neq 0$, der keine reinen Einreiher $\neq 0$ enthält. Derartige Bösewichte kann man zum Glück charakterisieren (XIII). Die gut verstandenen torsionsvollständigen abelschen Gruppen und Harrisons Cotorsionsgruppen werden in neuem Lichte in (XII) analysiert. Torsionsfreie Moduln unendlichen Ranges können naturgemäß nur sehr sporadisch untersucht werden, da schon über $\mathbf{Z}$ bzw. $\mathbf{Z}_{(p)}$ die Verhältnisse chaotisch sind; vgl. Jahresber. DMV **88**, Heft 1 (1986).

Essen R. Göbel

Evans, E. G., Griffith, Ph., Syzygies (London Mathematical Society Lecture Note Series 106), Cambridge – London – New York et al.: Cambridge University Press 1985, 124 pp., paperback, £ 9.95

Die Syzygientheorie beginnt mit der Entdeckung von Hilbert, daß Ideale in Polynomringen stets endliche Auflösungen durch freie Moduln besitzen. Dieser berühmte Satz war der Hauptausgangspunkt für die Entwicklung homologischer Methoden in der kommutativen Algebra, die in den fünfziger Jahren begann. Die vorliegende Lecture-Note enthält einige ausgewählte neuere Ergebnisse aus diesem Gebiet. Zunächst eine kurze Beschreibung des Inhalts.

In einem Kapitel 0 werden einige grundlegende Resultate der kommutativen Algebra ohne Beweis beschrieben sowie die Notationen festgelegt.

Das Kapitel 1: Counting depths, behandelt die Tiefe von lokalen Ringen. Es werden einige Kriterien für die Exaktheit von Komplexen hergeleitet, etwa das Lemma d'acyclicité von Peskine-Szpiro. Als mächtiges Hilfsmittel haben sich die Big Cohen-Macaulay Moduln von Hochster erwiesen, die nebst einigen Anwendungen ebenfalls in diesem Kapitel beschrieben werden. Allerdings wird die Existenz dieser großen Cohen-Macaulay Moduln nicht gezeigt.

Das Kapitel 2 hat die Überschrift „Basic Elements". Basische Elemente haben sich als nützliche Technik bei Strukturuntersuchungen von Syzygien erwiesen. Neben dem Existenzsatz von Eisenbud und Evans sind einige weitere interessante Aussagen, wie der Serresche Abspaltungssatz und der verallgemeinerte Hauptidealsatz von Bruns, Eisenbud und Evans enthalten.

Kapitel 3: Fundamental Theorems on Syzygies, enthält als zentrale Aussage den Syzygiensatz von Evans-Griffith, welcher besagt, daß ein k-ter Syzygienmodul von endlicher homologischer Dimension entweder frei ist oder mindestens den Rang k besitzt. Einige Struktursätze von Bruns über Syzygien ergänzen diesen Abschnitt.

In Kapitel 4 werden ausgewählte Anwendungen dieser Aussagen beschrieben. Die wohl interessanteste ist die Anwendung auf die Hartshorne-Vermutung, wobei sich ergibt, daß normale isolierte Singularitäten der Kodimension 2 und Dimension $\geqslant 5$ vollständige Durchschnitte sind.

Kapitel 5: Filtrations on modules and cohomology, hat etwas technischen Charakter und ist vor allem bestimmt für die Anwendungen in Kapitel 6: „Vector bundles on the punctured spectrum of a regular local ring". Dieses letzte Kapitel beschreibt Anwendungen der vorstehenden Aussagen auf ein Problem von Horrocks. Dieses Problem wurde zwischenzeitlich mit anderen Methoden gelöst. Dadurch verliert dieses Kapitel etwas von seiner Aktualität, aber einige der dargestellten Aussagen behalten auch unabhängig ihr Interesse.

Wie die Autoren in ihrem Vorwort bemerken, ist dieses Buch konzipiert als eine zusammenfassende Darstellung einiger neuerer Ergebnisse über Syzygien, wobei die Auswahl des Stoffes die Neigungen und Interessen des Autoren widerspiegelt. Dies bestätigt ohne Zweifel die obige Schilderung des Inhalts, und für eine Lecture Note über ein spezielleres Gebiet ist das auch legitim. Auf der anderen Seite hätte der Einschluß einiger über das engere Gebiet hinausgehender Themen – ich denke dabei etwa an die Konstruktion der großen CM-Moduln – sicherlich dies Buch bereichern können.

Der Text ist angenehm geschrieben. Einige der Kapitel werden abgerundet durch die Beschreibung weiterführender Resultate und Verweise auf Originalarbeiten. Jedem Kapitel sind einige Übungsaufgaben angehängt, in denen der behandelte Stoff vertieft und erweitert wird. Dadurch sind vor allem die ersten vier Kapitel des Buches gut geeignet als Grundlage für eine Spezialvorlesung oder ein Seminar über kommutative Algebra, wobei man als Voraussetzung die kommutative Algebra etwa im Umfang des Buchs von Atiyah-Macdonald und etwas homologische Algebra benötigt.

Nicht verschwiegen sei zum Schluß, daß sich an einigen, wenn auch nicht vielen Stellen lästige Fehler eingeschlichen haben. Beispielsweise ist in Ex. 7 in Kap. I. nicht klar, was L sein soll, in Ex. 8 fehlt die Voraussetzung über die Endlichkeit von M, im Satz von Auslander-Bridger, p. 52 oben, muß R in der Kodimension $k-1$ (statt 1) Gorensteinsch sein, ein Fehler, der sich in einigen nachfolgenden Aussagen fortpflanzt.

Göttingen H. Flenner

Karpilovsky, G. Projective Representations of Finite Groups (Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Vol. 94), New York – Basel: Marcel Dekker 1985, 645 S., $ 107.50

Die Theorie der projektiven Darstellungen endlicher Gruppen wurde von I. Schur in drei großen Arbeiten in der Zeit von 1904 bis 1911 entwickelt. Obwohl die vorliegende Monographie äußerst umfangreich ist, ist Schurs Konstruktion der irreduziblen projektiven Charaktere der symmetrischen Gruppen $\mathfrak{S}_n$ hier nicht dargestellt worden. Weiter heißt es in der Einleitung: „The theory of projective representations of classical groups, whose main contributors are Schur and A. O. Morris, has been largely omitted, as the computational technicalities involved would necessitate a separate volume." Es fehlen auch wesentliche Ergebnisse von R. Steinberg. Bezüglich der Schur-Multiplikatoren der einfachen sporadischen Gruppen kann sich der interessierte Leser im Überblicksartikel von R. Griess informieren, der wie alle hier vermißten Arbeiten im ausführlichen Literaturverzeichnis angegeben ist.

Der Autor begründet seine Darstellung der Theorie der projektiven Darstellungen auf das Studium der endlich erzeugten Moduln über getwisteten Gruppenalgebren $F^{\alpha}G$ endlicher Gruppen G über beliebigen Körpern F, wobei α ein Kozyklus von G ist. Dieser Gesichtspunkt wird im gesamten Buch beibehalten. Hierdurch gelingt es dem Autor, das erste grundlegende Werk über die Struktur der unzerlegbaren Moduln und der Blöcke der getwisteten Gruppenalgebren endlicher Gruppen vorzulegen.

Die beiden ersten Kapitel stellen die Grundlagen aus der Algebren- und Kohomologietheorie zusammen. Projektive Darstellungen und getwistete Gruppenalgebren werden in Kapitel 3 ausführlich eingeführt. Kapitel 4 enthält Schurs grundlegende Resultate über den Schurschen Multiplikator. Es finden sich hier aber neuere Ergebnisse, wie die von F. Beyl und J. Tappe über den Multiplikator einer extra-speziellen p-Gruppe. In den Kapiteln 5 und 6 werden induzierte Darstellungen und die Clifford-Theorie für projektive Darstellungen über beliebigen Körpern studiert. Dabei wird auch die Greensche Vertextheorie für projektive Darstellungen verallgemeinert. Das Kapitel 7 „Projektive Charaktere" enthält neben einem Analogon von Artins Induktionstheorem auch die von J. F. Humphreys stammende Verallgemeinerung von R. Brauers Charakterisierung eines verallgemeinerten Charakters.

In Kapitel 8 wird der projektive Schur Index eingeführt und das Verhalten von projektiven Darstellungen bei Körpererweiterung studiert. Im inhaltlich völlig neuen Kapitel 9 wird die Blocktheorie getwisteter Gruppenalgebren dargestellt. Dabei weist der Autor auf technische Schwierigkeiten hin, die hier gegenüber der klassischen modularen Darstellungstheorie als neue Phänomene auftreten. Die meisten Resultate stammen vom Autor und werden hier erstmals veröffentlicht. Das abschließende Kapitel 10 enthält Ergebnisse zu sehr verschiedenen Fragestellungen. Ein Abschnitt ist B. Külshammers Ergebnissen über Sockel und Kommutatorräumen von symmetrischen Algebren gewidmet.

Das vorliegende Werk des Autors erforderte seinerseits eine große Energieleistung, zumal er gleichzeitig mit der Abfassung des Buches seine ersten Veröffentlichungen auf diesem Arbeitsgebiet vorbereitete. Er hat zahlreichen Kollegen in aller Welt umfangreiche Tippfehlerlisten zugesandt, weshalb hier auf diese Einzelheiten nicht eingegangen wird.

Meiner Meinung nach ist der Preis des vorliegenden Werkes seinem Inhalt nicht angemessen; denn es ist eines der teuersten Bücher auf dem Gebiet der Darstellungstheorie, aber nicht eines der besten.

Essen G. Michler

Bröcker, T., tom Dieck, T., Representations of Compact Lie Groups (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 98), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, 24 fig., x, 313 pp., hard cover, DM 128,–

The text by Bröcker and tom Dieck on "Representations of Compact Lie Groups" is an inspired and mature book on an inspired and mature subject. It presents a fairly complete introduction to Lie group theory in the first fifty pages of the book. There is no nonsense. Bröcker and tom Dieck start off with manifolds, tangent bundles, vector fields, flows, differential forms, principal bundles, the lot. Invariant integration on Lie groups is secured by transporting some fixed volume element in the tangent space at the identity via left translation. Examples accompany the development from the first page. Commendably, the authors alert the physics-oriented readers at an early stage that certain standard notation in the physics literature deviates from that in the mathematical one. A complete treatment of Clifford algebras and the construction of the spinor groups conclude *Chapter I*. Armed with an adequate invariant integration for Lie groups, the authors can take up "Elementary Representation Theory" in *Chapter II*. After clearing out the required linear algebra, they define representative functions and characters and develop the complete orthogonality formalism and its first consequences. They hasten to give an immediate survey of the representations of the low dimensional compact Lie groups SU(2), SO(3), U(2) and O(3) in their concrete manifestations, complete with the link to special functions such as the spherical harmonics. A particularly neat source of reference is Section 6, in which the theory of real and quaternioni representations is linked to complex representation theory: The former are manifestations of the latter, augmented by additional elements of structure. The chapter continues with the introduction of the character ring, complete with its – ring structure and the Adams operations. Compact abelian Lie groups and their representations are next in line. Of course, they have to be thoroughly understood because the whole of the fine structure of the representation theory of compact Lie groups is based on the representation of abelian groups, as the reader will learn in the second half of the book. Weights are introduced here. In the pursuit of associating with each of them an infinitesimal weight, in passing, we learn that each representation of a compact Lie group induces one of its Lie algebra. The Lie algebra aspect is expressly de-emphasized in this book, but at any rate, from p. 23 on, we know that the assignment of the Lie algebra is functional. The chapter concludes with the structure and representation theory of $sl(2, \mathbf{C})$. Again the authors point out the classical nature of the representation theory of the three dimensional simple algebras and groups through its relation to special functions such as the Legendre polynomials. *Chapter III* is entitled "Representative Functions". Now, the authors are ready for the celebrated Theorem of Peter and Weyl. The authors have an excellent selection of immediate consequences, all of them instructive and useful (Section 4). The first consequence, of course, is that every compact Lie group is a closed subgroup of some unitary or orthogonal group. After a brief discourse on the "Large Peter-Weyl-Theorem", the canonical decomposition of Hilbert modules into isotypic components is given; in general, Hilbert spaces belong to the de-emphasized material in this book. We have a compact course on induced representations and a half-introduction to the duality of compact Lie groups in the form given to it by Hochschild; the missing half is that by which we start from a Hopf algebra and pass to its spectrum. This discussion sets the stage for a nice introduction to the complexification of compact Lie groups; the necessary reminders of algebraic geometry are provided. At this point we reach the halfway mark of the book.

The second part of the book begins with the compact group theoreticians' Sylow theorem, to wit: Every compact connected Lie group is covered by torus groups, and the maximal ones among them are conjugate. Everything else that follows evolves from there. The fact that every compact Lie group G contains at least one maximal torus T is not hard to grasp. But then, one way or another, we have to come to grips with the function $q : G/T \times T \to G$ given by $q(gT, t) = gtg^{-1}$. First we want to show that it is surjective and thereby prove the maximal torus theorem, and secondly we want to utilize it in order to establish Weyl's integral formula, which says that Haar measure on G is the forward image under q of the measure $\mu \otimes w(G)^{-1}\delta_G\tau$ with w(G) being the order of the Weyl group, μ the invariant normalized measure on G/T, further τ Haar measure on T, and $\delta_G(t) = \det(\mathrm{Ad}_{L(G)/L(T)}(t) - 1)$. At this point in the book, we finally realize why, in the introductory chapter, we had to know Stokes' and Sard's Theorems in order to have full command of the Fundamental Theorem on the Mapping Degree of smooth maps between compact connected orientable manifolds of the same dimension; this theorem indeed will secure the surjectivity of q, and more. Once the Maximal Torus Theorem is available, a rich harvest can be reaped right away, and so *Chapter IV*, even though with its 25 pages being one of the shorter ones, is packed with powerful information on the structure, the representation ring, the Weyl group the regular elements, and the Cartan subgroups of a compact Lie group. At this point, we are ready to go into root geometry and Weyl chambers (*Chapter V*). As soon as we have identified the groups of rank one (the rank is the dimension of a maximal torus!), we enter the basic geometry of root systems. This branch of geometry is elementary, but highly nontrivial. Basically, there are two ways to come upon these root systems naturally: In the classification of complex semisimple Lie algebras, and in the classification of compact connected semisimple Lie groups. (From hindsight, these two approaches are equivalent due to the existence of a real compact form for every complex semisimple Lie algebra; but this is outside the scope of this book.) The study of root systems occupies a portion of Chapter V, the classification of Dynkin diagrams is wisely referred to the numerous and accessible sources on the subject. There is one place however, where compact Lie group theory and complex semisimple Lie algebra theory do part ways, and that is where Stiefel diagrams and alcoves are discussed in Section 7, in which the fundamental group is computed as a factor group of the kernel of the exponential function of a maximal torus modulo the subgroup generated by the inverse roots. The last section of the chapter deals with the decomposition of a compact connected Lie group into its central component and its commutator group; in particular it is shown that the latter, as a semisimple compact Lie group, has a compact universal covering group. It is not recorded that every element in the semisimple part of a compact connected Lie group is in fact a commutator (Bourbaki, LIE IX.33) which is useful information. There remains *Chapter VI*, the climax: Irreducible characters and weights with the Weyl Character Formula being at the heart of this chapter and of the whole book (p. 242). The first section takes care of the objective of establishing this formula. This state of affairs allows the completion of the proof that the character ring R(G) is isomorphic to the fixed point ring $R(T)^W$ of the character ring of a maximal torus under the action of the Weyl group W. Partial orders are introduced on the set of weights, and the dominant weight of an irreducible representation is defined. This allows us to identify the representation ring R(G) (which contains most of the information on the irreducible representations of G) as a factor ring of an integral polynomial ring $\mathbf{Z}[X_\lambda : \lambda \in \Lambda]$, and if G is simply connected and has rank k, we obtain an isomorphism with $|\Lambda| = k$. In Section 3, Konstant's multiplicity formula is proved. It permits us to compute how often an irredudible representation of a maximal torus T is contained in the restriction of a given irreducible representation of G to T. Section 4 deals with the real and quaternionic cases. Last, but not least, the final Section 5, 6 and 7 present a thorough discussion and cataloguing of the irreducible representations of the groups in the series SU(n), U(n), Sp(n), So(2n + 1), SO(2n), Spin(2n + 1), Spin(2n) and the nonconnected groups of the series O(n). The information on the representation rings among many other things, is complete and explicit.

The style and the flow of presentation of this book are superb. Its individual units are well engineered and fine-tuned. The text benefits from the authors' apparent experience in teaching this material. Complicated proofs are broken up into bitesize palatable chunks. To keep the flow of thoughts steady, the authors will occasionally defer suitable portions of an argument for later clearance. From time to time they give hints which offer psychological help.

There is no tedium, the pace is brisk, and the style elegant. I expect that some readers should be prepared to supply details according to their own state of preparation and to their own satisfication.

Each section has servicable collection of exercises. Sometimes they complement the material of the book by providing additional information, usually broken down into manageable partial problems. The bibliography is representative but makes no claim towards completeness. The Symbol Index is helpful, the Subject Index is seven pages long and still remains insufficient for a book of this content and ambition; others may find it adequate. The book is obviously well proof-read and exhibits the grade of typography one has come to expect from Springer-Verlag. The geometric flavor of the book is heightened by a series of excellent illustrations in the form of line drawings. Occasionally, an additional diagram here and there would be helpful, for instance in the section on duality. A Hopf algebra cannot be appreciated without diagrams (p. 147).

This book, of course, has competitors on the market, and many of them are quoted by the authors. As a text book, it is a front runner. As a source of reference, it has Bourbaki's Chapter IX (N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap 1–9, Paris. 1960–1982) as a formidable competitor. My advice is to use the two books side by side, because in their respective aspirations, they are complementary.

Since I made no great effort to hide my enthusiasm and respect for this book, one might wonder whether I saw any room for criticisms. I see very little, but some, and that depends largely on personal perspective; I think it is legitimate to have different perspectives in this area.

I am fully prepared to accept the authors' attitude to use whatever mathematics they happen to need to go about the business at hand. This posture provides the reader with the motivation to delve deeper into the required mathematics. The authors provide specific guidance to the literature to start the reader on such a treasure hunt. The price they pay is that the book is less selfcontained that one might expect. But let us accept this basis. Then I find it hard to acquiesce to the fact that the authors failed to provide, in their preparatory chapter, a proof of the existence and uniqueness of Haar measure on compact groups. Certainly proofs of this much Haar measure theory are available on the level which the authors expect from their readers, and if we buy Sard's Theorem on the exact homotopy sequence of fibrations, then we can afford a few extra pages for such a proof. Perhaps, as a spin-off, a few additional insights into, say, the convolution of measures might result which are not more involved that the convolutions used in a variety of contexts in this book. The entire representation theory of compact groups centers around Haar measure and, for a long stretch has nothing to do with Lie theory or manifolds. I would certainly advise the users of this book to complement it for themselves by supplementing Haar measure on compact groups. I think the authors have provided for this contingency, because nothing needs to be changed and most of Chapters II and III becomes instantaneously available for arbitrary compact groups.

Continuing in the same vein, it does surprise me that the authors put off the Theorem of Peter and Weyl till the middle of the book. In fact, the presentation here is excellent, self contained (modulo compact operators which are always used in one form or another and for which the necessary theory is expressly provided and modulo the Ascoli Theorem), and it does not depend on anything else that precedes it in this book. As it stands, we get a substantial portion of the representation theory of compact Lie groups before we know that in general there are any finite dimensional continuous representations at all, let alone that they separate points. It is really stunning that we should have to wait till page 136 until we finally realized that in this book we have been dealing with closed subgroups of unitary or orthogonal groups all along, a fact which we could just as easily have had on the first few pages. The users of this book should be aware of the possibility of restructuring the global architecture of the first half of the book and of getting by with fewer prerequisites.

Another test that any theory of compact Lie groups has to stand up to is the Maximal Torus Theorem. As we have observed, this theorem is proved in the middle of the book, but its proof throws long shadows back into the first chapter where the Theorem on Mapping Degrees looms large, consuming Stokes' Theorem as well as Sard's (although for the present purpose we could get by without the latter if we used available ad hoc information; the authors explain this). The essence always is the canonical map $Q : G/T \times T \to G$, and the crux is its surjectivity. The Theorem on Mapping Degrees is a beautiful result on its own, and the application made of it here is splendid. However, I prefer other proofs. In particular, Bourbaki's proof (loc. cit. LIE IX.7 through LIE IX.9) is elementary by comparison. It is based on the linear algebra required to deal with Cartan algebras to secure the conjugacy statement on the algebra level, and it uses a surprisingly direct argument for the surjectivity of q. The first part of this proof rests on an elementary, but astute lemma (LIE IX.7, Hunt's Lemma 1956). Cartan algebras are not mentioned in this book but Cartan subgroups are; this seems to carry the de-emphasis of the Lie algebra aspect a bit too far, in particular in a context where Cartan algebras are so nearby. Granted, with Bourbaki one always has to watch out for references to earlier material, but I still opt for Bourbaki's choice in a proof of the Maximal Torus Theorem. Of course, there are numerous alternatives. As soon as we have Lemma 4.5 on p. 178 of the present book, the we have a proof, because it applies to q. Now this Lemma is actually true for continuous maps between topological manifolds (with f a local homeomorphism at c), and the proof is in fact not hard given some basic homology or cohomology on the level of the Eilenberg-Steenrod axioms. At least by way of exercise, this is on a plane on which this book operators in other spots, say in the line of homotopy theory. One has to consider, however, that the authors almost simultaneously handle the Weyl Integral Formula. Not all of the alternative approaches serve in this capacity. But Bourbaki has a good treatment (loc. cit. LIE IX 52ff.).

I feel I have to say a word or two on some remarks in the Preface and the Book Jacket. This book, one reads there, is "a leisurely paced introduction to the subject" and "is at the level of the advanced undergraduate/graduate student assuming little more than a knowledge of calculus on manifolds and linear algebra or, that "this book can be read by German students in their third year, or by first-year graduate students in the US". We saw the authors assume Stokes' Theorem without as much as a blink (and I *mean* Stokes' Theorem $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$). They calmly invoke Sard's Theorem (p. 51, p. 179). When they are in need of covering spaces and the lifting of maps to the universal cover, they use such information (p. 91). Multilinear algebra is, of course, used on a massive scale (see e.g. p. 76, where the exponential laws for the exterior and the symmetric algebras amongst other facts are hailed as "an excellent opportunity for the reader to check his understanding of linear algebra"). It would be a good thing if the reader knew what adjoint functors are, since Frobenius reciprocity is indeed a superb example of an adjoint situation (p. 144). He or she should also be current on such facts as locally trivial fibrations giving rise to the exact homotopy sequence (p. 187, p. 226). His or her algebraic background includes, one hopes, Frobenius Theorem on the classical division rings. A knowledge of the basic notions of algebraic geometry up to algebraic varieties are expected of him or her; how else could one interpret the wording that such information is being "recalled" (p. 152). If I consider the level of mathematical sophistication indicated by these spot checks and read the book jacket then I am reminded of the Coca Cola commercials on TV where muscular males and beautifully tanned females frolic in the sun on elegant sailboats under incredibly blue skies sipping their soft drink and plunging into improbably green waters. Now I have downed a coke here and there, but somehow, the muscles, the yachts, the deep blue skies, the green waves, letting alone the beautiful girls simply fail to turn up. And somehow, the same streak of ill fortune in my life apparently prevents me from encountering these incredibly astute and ingenious advanced undergraduates who stroll leisurely through a book like this.

Let us just say that this book is for motivated and experienced students, and it will require endurance from them and concentration and judgment from the teacher. Given these prerequisites, it will be immensely rewarding. It will be used in many a course, and it will enter into the standard references in the field. Go out and treat yourself to it.

Darmstadt / New Orleans K. H. Hofmann

Olver, P. J., Applications of Lie Groups to Differential Equations (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 107), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1986, 495 S., hard cover, DM 158,–

Der Titel des Buches erinnert an eines der großen Themen der Mathematik: Die orthogonale Gruppe zum Beispiel läßt die Potentialgleichung invariant, operiert daher auf dem Vektorraum der harmonischen Funktionen, und so entsteht – auch in vielen analogen Fällen – der Zusammenhang zwischen der Darstellungstheorie von Liegruppen, über Charaktere und spezielle Funktionen, zur Theorie klassischer linearer partieller Differentialgleichungen. Das ist ein schönes, ein wichtiges und tiefes Gebiet, aber wir dürfen uns nicht darin verlieren, denn es ist nicht das Thema dieses Buches.

Was denn also? Hier geht es um das, was ursprünglich zur Geburt der Liegruppen bei Lie selbst geführt hat: Einer (partiellen) Differentialgleichung für Funktionen u(x) ist eine lokale Symmetriegruppe zugeordnet, die auf den unabhängigen Variablen x und den abhängigen u und damit (lokal um die Identität) auf den Jets von Abbildungen $x \mapsto u(x)$ operiert und die das Nullstellengebilde der Differentialgleichung (eine Teilmenge eines entsprechenden Jetraumes) invariant läßt, also Lösungen in Lösungen überführt. Diese Gruppe sollte nach Lies Intention für die Theorie der Lösung von Differentialgleichungen durch Quadraturen dieselbe Rolle spielen, wie die Galoisgruppe für die Theorie der Auflösung von Gleichungen durch Radikale. Heute wird der gebildete Mathematiker im allgemeinen hiervon nur wissen wie von einer Sage aus der Zeit der Anfänge – nicht als ob die Theorie hinter den Erwartungen zurückgeblieben wäre, aber die Theorie der Liegruppen und insbesondere auch ihre Verbindung mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen hat eben ein Eigenleben entwickelt, das nie weit über die väterlichen Kreise hinausgeführt hat. Hier aber geht es um das Ursprungsthema, und ein Analogon zum Satz über Auflösung durch Radikale findet man auf S. 155 des vorliegenden dicken Buches. In der Folge werden gruppeninvariante Lösungen behandelt; man denke z. B. an die hohe Symmetrie der Grundlösungen der Potentialgleichung. Einen zweiten Teil des Buches, beginnend mit Kapitel 4, Seite 246, bildet das Thema: Symmetrie und Erhaltungssätze in der Theorie der Lagrangeschen und Hamiltonschen Systeme. Ein zentrales Resultat von Emmy Noether beschreibt, wie aus einer lokalen Einparameter-Symmetriegruppe eines Variationsproblems auf systematische Weise ein Erhaltungsgesetz für die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen hervorgeht.

Ich wüßte keinen Konkurrenten für dieses Buch zu nennen, ein großer Stoff wird hier zum ersten Mal in einem Lehrbuch behandelt. Der Text ist leicht und flüssig geschrieben, und reich gespickt mit Beispielen.

Hier nun freilich gibt es nicht nur zu rühmen: Das Buch hält es eigentlich nach Physikerart. Oft genug müssen Beispiele die Stelle genauer begrifflicher Erklärungen vertreten, und wie viele Physiker glaubt der Autor, die Verständlichkeit und Kommunikation zu fördern, wenn er neue vom üblichen abweichende Namen und Notationen erfindet, so insbesondere „prolongation" statt „jet", mit allem Unheil, das daraus hervorgeht. Vergnügt sieht der Leser, wie sich der Autor auf S. 178 über sinnlose Abstraktionen in der Theorie der Jets ausläßt, nachdem er das Buch von Golubitsky-Guillemin grade noch als „readable account“ hat durchgehen lassen, und dann – es muß ja so kommen – feiert er auf S. 241 die Definition der „extended jet bundels“ als seine eigne Originalentdeckung (1979), obwohl er sie in dem Buch von Golubitsky-Guillemin (1973) auf S. 172f. besser hätte finden können. Sehr oft bleibt unklar, ob Behauptungen global gelten, oder lokal, oder im ganzen $\mathbf{R}^n$. Selbst zentrale Theoreme kann man so wie sie dastehen nicht verstehen, ohne ein weiteres Umfeld zu studieren. Zum Beispiel heißt es auf S. 155 in dem schon erwähnten Theorem 2.64: Unter gewissen, (freilich restriktiven) „technical conditions“ gilt: Wenn eine Differentialgleichung „Δ admits an n-parameter solvable group of symmetries, then ... the general solution to Δ can be found by quadratures alone“. Was soll das überhaupt heißen? Alle gewöhnlichen autonomen Differentialgleichungen lokal um reguläre Punkte lassen sich durch Koordinatentransformation ineinander überführen, besitzen also alle die gleiche lokale Symmetrie, sind aber natürlich nicht alle durch Quadraturen zu lösen.

Wir wollen dem Autor dankbar sein für das, was er gibt: reiches Material, überaus verläßlich im einzelnen, in Rechnungen, Beispielen, Formeln, eine erste Übersicht und Gliederung eines großen Stoffes. Und anregend zu lesen, denn es bleibt noch viel zu tun.

Regensburg Th. Bröcker

VITA MATHEMATICA

Georg Cantor

BIRKHÄUSER

Neue Reihe

Herausgegeben von Emil A. Fellmann

Die neue Buchreihe *Vita Mathematica* bringt unter einheitlichen Gesichtspunkten verfasste *Werkbiographien* bedeutender Mathematiker von der Antike bis in unsere Zeit – unter Berücksichtigung der wissenschaftshistorischen Forschung der letzten Jahrzehnte. Diese Bücher sind nicht primär für professionelle Mathematikhistoriker geschrieben, sondern wenden sich an Studierende der Mathematik, der

VITA MATHEMATICA

Physik und der technischen Wissenschaften in den ersten bis mittleren Semestern, an Mathematik- und Physiklehrer, Mathematiker und Physiker, die ihre Fachdisziplinen in ihrer Einbettung in die Kultur- und Geistesgeschichte kennenlernen und studieren möchten. Mindestens die ausgesprochen biographisch gehaltenen Teile dieser Mathematiker-Biographien sind einem noch breiteren Publikum zugänglich und verständlich. Die Publikationssprachen sind Deutsch, Englisch oder Französisch.

Weitere Bände in Vorbereitung

«Vita Mathematica» Band 1

Walter Purkert
Hans Joachim Ilgauds

Georg Cantor

1987. 264 Seiten,
25 Abbildungen. Gebunden
sFr. 48.–/DM 58.–
ISBN 3-7643-1770-1

Seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung hat es wohl kaum eine mathematische Theorie gegeben, die das Gesicht der Mathematik so einschneidend verändert hat und die zugleich so kontroverse Diskussionen auslöste wie CANTORS Mengenlehre. Das vorliegende Buch hat es sich zum Ziel gestellt, CANTORS faszinierende Persönlichkeit möglichst allseitig darzustellen und die Genesis seiner Ideen vor dem Hintergrund der Entwicklung der Mathematik in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts nachzuzeichnen. In einem Ausblick werden die Konsequenzen von CANTORS Werk für die moderne Wissenschaft skizziert. Das Buch enthält eine Reihe neuer Quellen, darunter Auszüge aus Briefen CANTORS an Hilbert, die ein völlig neues Licht auf seine Stellung zur Antinomienproblematik werfen.

Detaillierten Prospekt anfordern bei:
Birkhäuser Verlag AG
P.O. Box 133
CH-4010 Basel/Switzerland

Birkhäuser Verlag
Basel · Boston · Stuttgart

Preisänderungen vorbehalten 3/87