89. Band Heft 4
ausgegeben am 19. 10. 1987

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1987

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 88/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

89. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1987

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 89, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

H. Bühlmann: Entwicklungstendenzen in der Risikotheorie
P. L. Butzer, W. Splettstößer, R. L. Stens: The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis
R. Heath-Brown: Differences Between Consecutive Primes
J. Heinhold: Oskar Perron
K.-H. Hoffmann: Steuerung freier Ränder
J. Jost: Das Existenzproblem für Minimalflächen
R. Kühnau: Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve
H. Rohrbach: Alfred Brauer zum Gedächtnis
W. Singhof: Einige Beziehungen zwischen stabiler Homotopietheorie und Zahlentheorie
W. Stute: Empirische Prozesse in der Datenanalyse

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
89 (1987) 149–178
AMS subject classification: 46 E 35

Einige neuere Entwicklungen in der Theorie der Funktionenräume

H. Triebel, Jena

1 Einleitung

In den Jahren 1935 bis 1938 publizierte S. L. Sobolev drei Arbeiten [58, 59, 60], die zusammen mit seinem Buch [61] den Grundstein für die Theorie der Sobolev-Räume W_p^k legten; $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $1 < p < \infty$. In der Folgezeit setzte eine überaus stürmische Entwicklung ein, die bis zum heutigen Tage anhält. Es entstanden Tausende von Arbeiten und mehrere Dutzend Bücher zu diesem Gegenstand. Eine auch nur skizzenhafte Beschreibung in voller Breite ist kaum möglich. Vielmehr sind wir nur am Kernland dieser Theorie (oder was wir dafür halten) im engsten Sinne des Wortes interessiert. Wir beschränken uns auf Funktionenräume (genauer: Räume von Funktionen und Distributionen), die auf dem n-dimensionalen euklidischen Raum R_n und verwandten Strukturen wie vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Geometrie und Lie-Gruppen definiert sind. In technischen Termini ausgedrückt sind die Räume W_p^k nicht-homogen, isotrop und ohne Gewichte*). Alle Räume in dieser Arbeit sind von dieser Art. Mit anderen Worten, homogene Räume, anisotrope Räume, Räume mit dominierenden gemischten Glattheitseigenschaften, gewichtete Räume, Räume vom Sobolev-Orlicz-Typ, aber auch Räume auf Gebieten des R_n werden nicht untersucht. Ausführungen über einige Typen der hier ausgesparten Räume findet man in [37, 38, 56].

Bis Anfang der 60er Jahre entstanden eine Reihe von Funktionenräumen, die für unsere Zwecke von Bedeutung sind: Hölder-Zygmund-Räume, Bessel-Potential-Räume (mit den Sobolev-Räumen als Spezialfall), Besov-Lipschitz-Räume, Hardy-Räume und der Raum BMO. Abschnitt 2 dieser Arbeit enthält eine Beschreibung dieser Räume, einschließlich der notwendigen historischen Bezüge. Anfang der 60er Jahre war damit eine Situation entstanden, die durch eine Vielzahl anscheinend sehr unterschiedlicher Funktionenräume gekennzeichnet war (auch bei der uns auferlegten engsten Begrenzung des Gegenstandes).

*) Ein auf R_n definierter Funktionenraum heißt homogen, falls es eine reelle Zahl κ gibt, so daß $\|f(\lambda\cdot)\| = \lambda^\kappa \|f\|$ für alle Elemente f dieses Raumes und alle $\lambda > 0$ gilt. Hierbei ist $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm oder Quasi-Norm. Ein auf R_n definierter Funktionenraum heißt isotrop, falls alle Richtungen im R_n gleichberechtigt in die entsprechende Definition eingehen.

Ordnende Prinzipien waren gefragt. Ein erster großer Erfolg gelang in den 60er Jahren mit Hilfe der abstrakten Interpolationstheorie (reelle und komplexe Methode). Es zeigt sich, daß man einige der komplizierter-aussehenden Räume durch Interpolation aus einfacher-aussehenden Räumen gewinnen konnte. Im Abschnitt 3 geben wir eine skizzenhafte Beschreibung einiger Resultate hierzu. Abschnitt 4 ist dem Fourier-analytischem Zugang gewidmet. Diese Methode entstand Ende der 60er und Anfang der 70er Jahre und führte bis 1975 zur Herausbildung der beiden Skalen $B^s_{p,q}$ und $F^s_{p,q}$ in voller Allgemeinheit, basierend auf einem einheitlichen Konstruktionsprinzip. Alle oben genannten Räume sind hierin enthalten. Neben vielen Vorteilen hat die Fourier-analytische Methode aber auch einen wesentlichen Nachteil: Sie verwischt den lokalen Charakter vieler Funktionenräume bis zur Unkenntlichkeit. Eine befriedigende Behebung dieses Defektes gelang in systematischer Weise erst in jüngster Zeit (auf Fourier-analytischer Grundlage). Wir geben im Abschnitt 5 einen Einblick in diesen Teil der Theorie. Auf dieser Grundlage war es nunmehr möglich, die Skalen $B^s_{p,q}$ und $F^s_{p,q}$ auch auf andere Strukturen auszudehnen, auf vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Geometrie (Abschnitt 6) und auf Lie-Gruppen (Abschnitt 7). Die Resultate der Abschnitte 5 bis 7 sind erst in den letzten Monaten entstanden und einige Ergebnisse (insbesondere aus Abschnitt 7) werden hier erstmals publiziert.

Wir betrachten die Theorie der Funktionenräume als eigenständigen Gegenstand und gehen auf die zahlreichen Anwendungen, die diese Theorie gefunden hat, nicht ein.

2 Konstruktive Methoden

In diesem Abschnitt beschreiben wir jene klassischen Funktionenräume, die für uns von Interesse sind. Wir folgen hierbei im wesentlichen [71, 2.2.1, 2.2.2]. Alle Räume sind über dem reellen n-dimensionalen Raum R_n definiert, so daß wir „R_n“ weglassen können, ohne Verwechslungen befürchten zu müssen. Wir erinnern an einige grundlegende Begriffe. Es sei

$$(1) \qquad \|f \mid L_p\| = \Big(\int_{R_n} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} \quad \text{für } 0 < p < \infty$$

und

$$(2) \qquad \|f \mid L_\infty\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in R_n} |f(x)|.$$

Die Räume L_p mit $0 < p \leqslant \infty$ haben dann die übliche Bedeutung: Es sind die Quasi-Banach-Räume (Banach-Räume für $p \geqslant 1$) aller komplex-wertigen Lebesgue-meßbaren Funktionen im R_n, so daß (1) bzw. (2) endlich ist. Wir erinnern, daß ein Quasi-Banach-Raum alle Eigenschaften eines Banach-Raumes hat (insbesondere vollständig ist) mit Ausnahme der Dreiecksungleichung für Normen, die durch die allgemeinere Ungleichung

$$(3) \qquad \|a + b\| \leqslant c(\|a\| + \|b\|)$$

für Quasi-Normen zu ersetzen ist. Hierbei ist $c \geqslant 1$ eine Konstante, die von der

Auswahl der Elemente a und b aus dem betreffenden Raum unabhängig ist. Typische Beispiele für Quasi-Normen, die keine Normen sind, werden durch (1) mit $0 < p < 1$ gegeben. Es sei C der Raum aller komplex-wertigen beschränkten gleichmäßig-stetigen Funktionen in R_n, durch (2) normiert. Ist m eine natürliche Zahl, so setzen wir

(4) $\quad C^m = \{f \mid D^\alpha f \in C \text{ für } |\alpha| \leqslant m\}$,

wobei wir die übliche Kurzschreibweise für Ableitungen $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$ mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ Multi-index und $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ benutzen. Schließlich zählen wir auch die Hölder-Räume C^s mit $0 < s \neq$ ganz zu jenen Räumen, die im Vorfeld der beabsichtigten kleinen Geschichtsschreibung liegen: Ist $0 < s < 1$, so setzen wir

(5) $$\|f \mid C^s\| = \|f \mid L_\infty\| + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s},$$

wobei das Supremum über alle $x \in R_n$ und $y \in R_n$ mit $x \neq y$ zu bilden ist. Ist s eine reelle Zahl, so setzen wir wie üblich

(6) $\quad s = [s] + \{s\} = [s]^- + \{s\}^+$,

wobei $[s]$ und $[s]^-$ ganz sind, sowie $0 \leqslant \{s\} < 1$ und $0 < \{s\}^+ \leqslant 1$ gilt. Ist $0 < s \neq$ ganz, so sind die Hölder-Räume C^s definiert durch

(7) $$C^s = \{f \mid f \in C^{[s]}, \|f \mid C^s\| = \|f \mid C^{[s]}\| + \sum_{|\alpha| = [s]} \|D^\alpha f \mid C^{\{s\}}\| < \infty\}.$$

Nach diesen Vorbetrachtungen kommen wir jetzt zu jenen Räumen, die im eigentlichen Sinne für uns von Interesse sind.

2.1 Hölder-Zygmund-Räume

Wir führen Differenzen erster und höherer Ordnung für Funktionen im R_n ein:

(8) $\quad \Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta_h^\ell = \Delta_h^{\ell-1} \Delta_h^1, \quad x \in R_n, \quad h \in R_n$,

$\ell = 2, 3, \ldots$. Ist $s > 0$, so setzen wir

(9) $$\mathcal{C}^s = \{f \mid f \in C^{[s]^-}, \|f \mid \mathcal{C}^s\| = \|f \mid C^{[s]^-}\| + \sum_{|\alpha| = [s]^-} \sup_{0 \neq h \in R_n} |h|^{-\{s\}^+} \|\Delta_h^2 D^\alpha f \mid L_\infty\| < \infty\}$$

(Hölder-Zygmund-Räume). Die wesentliche Erkenntnis, daß es häufig besser ist, zweite (und höhere) Differenzen von Funktionen zu betrachten, statt Ableitungen, kombiniert mit ersten Differenzen, geht auf A. Zygmund [77] zurück. Es gilt

(10) $\quad C^s = \mathcal{C}^s \quad$ für $0 < s \neq$ ganz,

und $C^s \neq \mathcal{C}^s$ für $0 < s =$ ganz. Wählt man als Gütekriterium die Nützlichkeit eines Raumes bei der Behandlung partieller Differentialoperatoren, so sind die Räume $\mathcal{C}^s$ mit $s > 0$ (insbesondere also C^s mit $0 < s \neq$ ganz) gut und die Räume C^s mit

$0 < s =$ ganz schlecht. Das Verdienst von A. Zygmund besteht also u. a. darin, die einfachen aber schlechten Räume C^s mit $0 < s =$ ganz (sofern man das obige Kriterium akzeptiert) durch die besseren Räume $\mathcal{C}^s$ ersetzt zu haben.

2.2 Sobolev-Räume

Ableitungen sind ab jetzt stets im Sinne der Theorie der Distributionen zu verstehen. Ist m eine natürliche Zahl und ist $1 < p < \infty$, so setzen wir

$$(11) \qquad W_p^m = \{f \mid D^\alpha f \in L_p \text{ für } |\alpha| \leqslant m\}, \qquad \|f \mid W_p^m\| = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f \mid L_p\|,$$

(Sobolev-Räume). Wie bereits gesagt wurde, gehen diese Räume auf S. L. Sobolev zurück [58, 59, 60]. Insbesondere nach Erscheinen des Buches [61] im Jahre 1950 lösten diese Räume eine stürmische Entwicklung aus, die u. a. auch dadurch bedingt war, daß sich diese Räume als überaus nützlich zur Behandlung partieller Differentialoperatoren erwiesen (ein Aspekt, auf den wir hier nicht eingehen können).

2.3 Besov-Lipschitz-Räume

Vergleicht man die kontinuierliche Skala $\mathcal{C}^s$, $s > 0$, mit der diskreten Skala W_p^m, $m = 0, 1, 2, \ldots$ (bei fixiertem p, $1 < p < \infty$, und $L_p = W_p^0$), so drängt sich die Frage nach Räumen W_p^s, $0 < s \neq$ ganz, auf. Es hat im wesentlichen 2 erfolgreiche Versuche gegeben, die „Lücken" zwischen den Sobolev-Räumen L_p, W_p^1, W_p^2, ... zu füllen. Der eine Ansatz führte schließlich zu den Besov-Lipschitz-Räumen und der andere Ansatz zu den Bessel-Potential-Räumen, die wir im nächsten Unterabschnitt behandeln. Ende der 50er Jahre wurden durch N. Aronszajn [2], L. N. Slobodeckij [57] und E. Gagliardo [24] Räume vom Typ W_p^s mit $1 < p < \infty$, $0 < s \neq$ ganz, eingeführt. Andererseits hatte S. M. Nikol'skij [45] bereits 1951 Räume beschrieben, die ebenfalls geeignet waren, die Lücken zwischen den Sobolev-Räumen zu schließen. Die Vereinigung dieser z. T. sehr unterschiedlichen Ansätze mit der Idee von Zygmund, höhere Differenzen zu benutzen, führte dann O. V. Besov [7, 8] 1959 zur Definition der Räume $\Lambda_{p,q}^s$. Die Räume von Aronszajn-Slobodeckij-Gagliardo einerseits und von Nikol'skij andererseits waren hierin als Spezialfälle enthalten, nämlich als $W_p^s = \Lambda_{p,p}^s$, $s \neq$ ganz, bzw. als $\Lambda_{p,\infty}^s$. Wir erinnern an die Zerlegung (6). Sind $s > 0$, $1 < p < \infty$ und $1 \leqslant q < \infty$, so setzen wir

$$(12) \qquad \Lambda_{p,q}^s = \{f \mid f \in W_p^{[s]^-}, \|f \mid \Lambda_{p,q}^s\| = \|f \mid W_p^{[s]^-}\| + \sum_{|\alpha| = [s]^-} \left(\int_{R_n} |h|^{-q\{s\}^+} \|\Delta_h^2 D^\alpha f \mid L_p\|^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q} < \infty\}.$$

Sind $s > 0$, $1 < p < \infty$ und $q = \infty$, so setzen wir

$$(13) \qquad \Lambda_{p,\infty}^s = \{f \mid f \in W_p^{[s]^-}, \|f \mid \Lambda_{p,\infty}^s\| = \|f \mid W_p^{[s]^-}\| + \sum_{|\alpha| = [s]^-} \sup_{0 \neq h \in R_n} |h|^{-\{s\}^+} \|\Delta_h^2 D^\alpha f \mid L_p\| < \infty\}$$

(Besov-Lipschitz-Räume). Im Vergleich zu (9) haben wir die beiden dortigen

Normen vom L_∞-Typ zerlegt in zwei Normen von L_p- und L_q-Typ. Ansonsten ist die Analogie deutlich zu sehen.

2.4 Bessel-Potential-Räume

Die andere Methode, die Lücken zwischen den Sobolev-Räumen $L_p, W_p^1, W_p^2, \ldots$ zu füllen, kann als Vorläufer der Fourier-analytischen Methode angesehen werden und geht auf N. Aronszajn, K. T. Smith [3] und A. P. Calderón [14] zurück. S sei der Schwartz-Raum der komplex-wertigen rasch fallenden beliebig oft differenzierbaren Funktionen im R_n. Der zugehörige duale Raum der temperierten Distributionen wird mit S' bezeichnet. Die Fourier-Transformation F ist auf S durch

$$(14) \qquad Ff(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R_n} e^{-ix\xi} f(\xi)\, d\xi, \quad x \in R_n,$$

definiert, wobei $x\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$ das Skalarprodukt im R_n ist. Die inverse Fourier-Transformation F^{-1} ist durch (14) mit $ix\xi$ statt $-ix\xi$ gegeben. Nach bekannten Prozeduren können F und F^{-1} von S auf S' ausgedehnt werden. $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ sei der Laplace-Operator im R_n und E sei der Einheitsoperator. Ist κ eine reelle Zahl, so gilt

$$(15) \qquad I_\kappa f = (E - \Delta)^{\kappa/2} f = F^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{\kappa/2} Ff], \quad f \in S'.$$

Ist $-\infty < s < \infty$ und ist $1 < p < \infty$, so setzen wir

$$(16) \qquad H_p^s = \{f \mid f \in S', \|f \mid H_p^s\| = \|I_s f \mid L_p\| < \infty\}$$

(Bessel-Potential-Räume). Es gilt

$$(17) \qquad H_p^s = W_p^s \quad \text{für } 1 < p < \infty \quad \text{und } 0 \leqslant s = \text{ganz}.$$

Die Bessel-Potential-Räume enthalten die Sobolev-Räume als Spezialfälle, im Gegensatz zu den Besov-Lipschitz-Räumen: Ist $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ und $0 < s = \text{ganz}$, so ist W_p^s mit keinem der Räume $\Lambda_{\tilde{p},q}^\kappa$, $\kappa > 0$, $1 < \tilde{p} < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, identisch (im mengentheoretischen Sinne).

2.5 Eigenschaften der Räume C^s, $\Lambda_{p,q}^s$ und H_p^s

All diese Räume mit den oben angegebenen Grenzen für die jeweiligen Parameter sind Banach-Räume. Nach (17) sind die Sobolev-Räume spezielle Bessel-Potential-Räume. Systematische Darstellungen der Theorie dieser Räume wurden in [9, 46, 68] gegeben, einschließlich Anwendungen auf Approximationstheorie, Fourier-Analysis und partielle Differentialoperatoren. Ferner verweisen wir auf [1, 38, 41, 42, 61, 62, 64]. In diesen Büchern werden einige Aspekte der Theorie der obigen Räume unter verschiedenen Blickwinkeln untersucht. Es ist nicht Anliegen dieser Arbeit, Eigenschaften der obigen Räume im Detail zu diskutieren. Aber wir möchten wenigstens einige Stichworte nennen. Äquivalente Normen auf einem gegebenen Raum werden als nicht wesentlich verschieden angesehen. Das führt zu einer umfangreichen Theorie äquivalenter Normen. (17)

ist ein Beispiel hierfür. Verallgemeinerung von (15), (17) führt für alle Raumklassen zu folgender Lifteigenschaft:

(18) $\quad I_\kappa H_p^s = H_p^{s-\kappa}, \quad \kappa \in R_1, \quad s \in R_1, \quad 1 < p < \infty,$

(19) $\quad I_\kappa \Lambda_{p,q}^s = \Lambda_{p,q}^{s-\kappa}, \quad s > 0, \quad s - \kappa > 0, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty,$

(20) $\quad I_\kappa C^s = C^{s-\kappa}, \quad s > 0, \quad s - \kappa > 0.$

Die Beweise von (17) bis (20) beruhen darauf, daß die diesbezüglichen Räume hinreichend viele Fouriersche Multiplikatoren besitzen. Neben Fourierschen Multiplikatoren spielen punktweise Multiplikatoren eine wesentliche Rolle, also die Frage für welche Funktionen g die lineare Abbildung $f \to gf$ ein stetiger Operator von, sagen wir, $\Lambda_{p,q}^s$ in sich ist. Weitere zentrale Gegenstände sind Einbettungssätze (auch zwischen verschiedenen Raumklassen) und Spuren auf Hyperebenen. Ferner gibt es umfangreiche Untersuchungen entsprechender Raumklassen, die auf Gebieten des R_n definiert sind. Diese Räume haben sich als nützlich erwiesen in der Approximationstheorie, in der Fourier-Analysis, zur Untersuchung von Rand- und Rand-Anfangswertproblemen für partielle Differentialgleichungen und für viele andere Fragen der Analysis. Wir verweisen auf die oben angegebene Literatur.

2.6 Hardy-Räume, der Raum bmo

Die bisher betrachteten Räume sind Banach-Räume. Für unsere Zwecke ist es aber wichtig, die obigen Räume durch die Hardy-Räume h_p mit $0 < p < \infty$ zu ergänzen, die für $0 < p < 1$ Quasi-Banach-Räume, aber keine Banach-Räume sind. Die Hardy-Räume haben eine lange Geschichte, die mit der Untersuchung von Randwerten holomorpher Funktionen im Einheitskreis beginnt. Uns interessiert aber mehr die n-dimensionale reelle Version dieser Räume, die auf E. M. Stein und G. Weiss [63] aus dem Jahre 1960 zurückgeht. (Ausführungen zur Theorie der Hardy-Räume holomorpher Funktionen findet man in [34].) Eine endgültige Loslösung der Hardy-Räume von holomorphen und harmonischen Funktionen gelang 1972 C. Fefferman und E. M. Stein [17]. Wir geben eine Beschreibung dieser Räume, wobei wir allerdings die nichthomogene Variante bevorzugen (im Gegensatz zu den genannten Arbeiten), man vergleiche hierzu auch [27, 28]. Es sei $\varphi(x)$ eine Test-Funktion im R_n (d. h. eine beliebig oft differenzierbare Funktion im R_n mit kompaktem Träger) mit $\varphi(0) = 1$. Es sei

(21) $$\varphi(tD)f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R_n} e^{ix\xi}\varphi(t\xi)Ff(\xi)\,d\xi, \quad t > 0, \quad x \in R_n.$$

Bei geeigneter Interpretation ist (21) für jede Distribution $f \in S'$ sinnvoll, und der Satz von Paley-Wiener-Schwartz zeigt, daß $\varphi(tD)f(x)$ eine holomorphe Funktion bezüglich $x \in R_n$ ist. Ist $0 < p < \infty$, so setzen wir

(22) $$h_p = \{f \mid f \in S', \|f \mid h_p\|^\varphi = \| \sup_{0<t<1} |\varphi(tD)f(\cdot)| \mid L_p\| < \infty\}$$

(nicht-homogene Hardy-Räume), wobei gefragt wird, ob $\sup_{0<t<1} |\varphi(tD)f(x)|$ als Funktion von x zu L_p gehört. Die Räume h_p sind von der Wahl von φ unabhängig. Es sind Quasi-Banach-Räume. Für $1 < p < \infty$ gilt $h_p = L_p$. Schließlich erwähnen wir noch die nicht-homogene Version bmo des Raumes BMO der Funktionen von beschränkter mittlerer Schwankung. Der Raum BMO wurde 1961 von F. John und L. Nirenberg [30] eingeführt und erhielt 1971 durch C. Fefferman [16] neue Aktualität. Ist f(x) lokal Lebesgue-integrierbar und ist Q ein beliebiger Würfel im R_n, so ist

(23) $$f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(x)\,dx$$

der zugehörige Mittelwert. Wir setzen

(24) $$\mathrm{bmo} = \{f \mid f \text{ lokal Lebesgue-integrierbar},$$
$$\|f \mid \mathrm{bmo}\| = \sup_{|Q| \leqslant 1} |Q|^{-1} \int_Q |f(x) - f_Q|\,dx + \sup_{|Q| > 1} |Q|^{-1} \int_Q |f(x)|\,dx < \infty\}.$$

3 Die Methode der Interpolation

Es ist unser Hauptziel, die Fourier-analytische Methode zu entwickeln, die erlaubt, die konkreten Räume aus Abschnitt 2 in die allgemeineren Skalen $B^s_{p,q}$ und $F^s_{p,q}$ einzubetten. Das geschieht im nachfolgenden Abschnitt 4. Etwas abseits von diesem Hauptweg möchten wir aber die Interpolationsmethode wenigstens kurz erwähnen, aus Gründen der Vollständigkeit und der geschichtlichen Entwicklung, aber auch weil an einer späteren Stelle die Skala $B^s_{p,q}$ auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen aus der Skala $F^s_{p,q}$ durch reelle Interpolation gewonnen wird. Aus diesem Grund geben wir im Unterabschnitt 3.2 eine Beschreibung der reellen Interpolationsmethode für Quasi-Banach-Räume. Im Moment setzen wir aber voraus, daß der Leser mit der abstrakten Interpolationstheorie vertraut ist (anderenfalls kann er zumindest Unterabschnitt 3.1 einfach überspringen). Die abstrakte Interpolationstheorie für Banach-Räume entstand Anfang der 60er Jahre durch J.-L. Lions, A. P. Calderón, S. G. Krejn, J. Peetre u. a. Zusammenfassende Darstellungen findet man in [6, 36, 68]. Für Anwendungen sind insbesondere die reelle Methode $(\cdot,\cdot)_{\Theta,q}$ mit $0 < \Theta < 1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ und die komplexe Methode $[\cdot,\cdot]_\Theta$ mit $0 < \Theta < 1$ von Interesse.

3.1 Interpolation von Funktionenräumen

Alle Bezeichnungen haben die gleiche Bedeutung wie im vorhergehenden Abschnitt 2.

Satz 1. (i) *Ist* m *eine natürliche Zahl und ist* $0 < \Theta < 1$, *so gilt*

(25) $$(C, C^m)_{\Theta,\infty} = \mathcal{C}^{\Theta m}.$$

(ii) *Es seien* $1 < p < \infty$ *und* $1 \leqslant q \leqslant \infty$. *Es sei* m *eine ganze Zahl. Ist* $0 < \Theta < 1$, *so gilt*

(26) $$(L_p, W^m_p)_{\Theta,q} = \Lambda^{\Theta m}_{p,q}.$$

(iii) *Es seien* $1 < p < \infty$, $-\infty < s_1 < s_2 < \infty$, $0 < \Theta < 1$ *und* $s = (1-\Theta)s_1 + \Theta s_2$. *Dann gilt*

(27) $$[H_p^{s_1}, H_p^{s_2}]_\Theta = H_p^s.$$

Bemerkung 1. (25) und (26) zeigen, daß man die anscheinend komplizierteren Hölder-Zygmund-Räume $\mathcal{C}^s$ und Besov-Lipschitz-Räume $\Lambda_{p,q}^s$ aus den einfacheren Räumen C^m und W_p^k auf der Grundlage abstrakter Konstruktionen gewinnen kann. Setzt man in (27) $s_1 = 0$ und $0 < s_2 = m =$ ganz, so folgt aus (17)

$$[L_p, W_p^m]_\Theta = H_p^{\Theta m}.$$

Mit anderen Worten, die Bessel-Potential-Räume H_p^s mit $1 < p < \infty$ und $s > 0$ erhält man aus den Sobolev-Räumen durch komplexe Interpolation. Zusammen mit der Dualitätsaussage $(H_p^s)' = H_{p'}^{-s}$ mit $s > 0$, $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ erhält man hieraus alle Bessel-Potential-Räume. Die Interpolationsmethoden erweisen sich also als Ordnungsprinzip. Sie zeigen, daß die oben besprochenen Räume in natürlicher Weise zusammenhängen. In [68] haben wir eine systematische Darstellung der Interpolationstheorie für Funktionenräume gegeben. Wir verweisen auch auf [6].

3.2 Reelle Interpolation

Wie angekündigt, geben wir eine kurze Beschreibung der reellen Methode. A_0 und A_1 seien zwei Quasi-Banach-Räume, die linear und stetig in einen gemeinsamen linearen Hausdorff-Raum A eingebettet sind. (Wie immer in dieser Arbeit sind alle Räume komplex.) Insbesondere ist dann

$$A_0 + A_1 = \{a \mid a \in A,\ \exists\ a_0 \in A_0,\ \exists\ a_1 \in A_1 \text{ mit } a = a_0 + a_1\}$$

sinnvoll. Für jedes $t > 0$ wird $A_0 + A_1$ zu einem Quasi-Banach-Raum, sofern man

$$K(t, a) = \inf (\|a_0 \mid A_0\| + t\|a_1 \mid A_1\|)$$

als Quasi-Norm wählt, wobei das Infimum über alle Darstellungen $a = a_0 + a_1$ mit $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$ zu bilden ist. $K(t, a)$ ist das Peetre-Funktional. Ist $0 < \Theta < 1$ und ist $0 < q < \infty$, so wird

$$(A_0, A_1)_{\Theta,q} = \{a \mid a \in A_0 + A_1,\ \|a \mid (A_0, A_1)_{\Theta,q}\| = \left(\int_0^\infty t^{-\Theta q} K^q(t, a) \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty\}$$

und $$(A_0, A_1)_{\Theta,\infty} = \{a \mid a \in A_0 + A_1,\ \|a \mid (A_0, A_1)_{\Theta,\infty}\| = \sup_{t>0} t^{-\Theta} K(t, a)\}$$

gesetzt. Das ist die reelle Interpolationsmethode für Quasi-Banach-Räume, die in dieser Form auf J. Peetre zurückgeht. Wir verweisen auf [6, 68], wo man weitere Literaturangaben findet.

4 Die Fourier-analytische Methode

4.1 Definitionen

Es sei $\varphi(\xi) \in S$ mit

(28) $$\operatorname{supp} \varphi \subset \{\xi \mid \tfrac{1}{2} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$$

und

(29) $$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad \text{für } 0 \neq \xi \in R_n.$$

Es ist leicht zu sehen, daß es Funktionen φ mit den Eigenschaften (28), (29) gibt. Wir setzen

(30) $$\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi) \quad \text{für } j = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{und } \varphi_0(\xi) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi)$$

für $\xi \in R_n$. Dann hat auch φ_0 einen kompakten Träger. In Analogie zu (21) definieren wir

(31) $$\varphi_j(D)f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R_n} e^{ix\xi}\varphi_j(\xi)Ff(\xi)d\xi, \quad x \in R_n,$$

$j = 0, 1, 2, \ldots$ und $f \in S'$. Dann sind $\varphi_j(D)f(x)$ holomorphe Funktionen bezüglich $x \in R_n$. Mit anderen Worten,

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(D)f$$

ist eine Zerlegung von $f \in S'$ in holomorphe Teile. Die Glattheit von f wollen wir durch das Verhalten der holomorphen Funktionen $\varphi_j(D)f(x)$ bezüglich x und j messen. Einen Hinweis über die Art des Vorgehens erhält man durch einen Satz vom Paley-Littlewood-Typ, wonach

(32) $$\|(\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j(D)f(\cdot)|^2)^{1/2} | L_p\| \sim \|f | L_p\|, \quad 1 < p < \infty,$$

(äquivalente Normen) gilt, $f \in L_p$. Multiplikatortheoreme, (18) mit $\kappa = s$ und (32), führen dann rasch zu

(33) $$\|(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{js}\varphi_j(D)f(\cdot)|^2)^{1/2} | L_p\| \sim \|f | H_p^s\|, \quad s \in R_1, \quad 1 < p < \infty.$$

Man kann nun fragen, ob Ansätze sinnvoll sind in denen man die ℓ_2-Norm auf der linken Seite von (33) durch eine ℓ_q-Norm ersetzt. Ferner könnte man versuchen, in einem derartigen Ausdruck die Rollen von ℓ_q und L_p zu vertauschen. Hierfür spricht die größere Einfachheit der so entstehenden Normen. Es zeigt sich, daß diese Konstruktionen sinnvoll sind. Die eigentliche Überraschung besteht aber darin, daß man diese Ansätze sogar auf Werte p und/oder q ausdehnen kann, die kleiner als 1 sind.

Definition 1. *Es sei φ die obige Funktion. Ferner seien $-\infty < s < \infty$ und $0 < q \leqslant \infty$.*

(i) *Es sei* $0 < p \leqslant \infty$. *Dann setzen wir*

$$B^s_{p,q} = \{f \mid f \in S', \|f \mid B^s_{p,q}\|^\varphi = (\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|\varphi_j(D)f \mid L_p\|^q)^{1/q} < \infty\} \tag{34}$$

(*mit der üblichen Modifikation, falls* $q = \infty$ *ist*).

(ii) *Es sei* $0 < p < \infty$. *Dann setzen wir*

$$F^s_{p,q} = \{f \mid f \in S', \|f \mid F^s_{p,q}\|^\varphi = \|(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{js}\varphi_j(D)f(\cdot)|^q)^{1/q} \mid L_p\| < \infty\} \tag{35}$$

(*mit der üblichen Modifikation, falls* $q = \infty$ *ist*).

Bemerkung 2. Die erste Frage, die man stellen wird, ist, ob $B^s_{p,q}$ und $F^s_{p,q}$ unabhängig von der Wahl von φ sind. Ferner sind die Beziehungen dieser Räume zu den Räumen aus Abschnitt 2 von Interesse. Daß eine solche Frage nicht sinnlos ist, zeigen die Betrachtungen vor der obigen Definition.

Bemerkung 3. Die Räume $B^s_{p,q}$ in der obigen Form wurden von J. Peetre [47, 48] eingeführt, in der ersten Arbeit für $p \geqslant 1$ und in der zweiten Arbeit für $0 < p < 1$. Der große zeitliche Abstand zeigt aber auch die Schwierigkeiten, die mit einer Ausdehnung dieser Theorie vom Banach-Raum-Fall, d. h. $p \geqslant 1$, auf den Quasi-Banach-Raum-Fall, d. h. $p < 1$, verbunden waren (die Größe von q bei der Klärung dieser Fragen für die Räume $B^s_{p,q}$ ist sekundär, im Gegensatz zu den Räumen $F^s_{p,q}$). Die Räume $F^s_{p,q}$ mit $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ wurden von P. I. Lizorkin [39] und dem Autor [67] eingeführt. Die Ausdehnung auf die obigen Werte p und q geht auf J. Peetre [49] zurück. In [71] haben wir eine Darstellung der Theorie dieser Räume gegeben, die etwa dem Stand im Jahre 1981 entspricht. Ferner verweisen wir in diesem Zusammenhang auf die Bücher [6, 50, 68, 69, 70]. In der Zwischenzeit sind einige wesentliche Verbesserungen von Resultaten aus [71] erzielt worden, und es wurden einige offene Probleme aus [71] gelöst. Wir verweisen in diesem Zusammenhang insbesondere auf die Arbeit von J. Franke [22]. Ferner haben sich in letzter Zeit einige neue Entwicklungstendenzen ergeben. Es ist eines der wesentlichsten Anliegen dieser Arbeit, diese neuen Tendenzen in den Abschnitten 5 bis 8 kurz zu beschreiben.

Bemerkung 4. Im Gegensatz zu den Räumen $B^s_{p,q}$ haben wir bei der Definition der Räume $F^s_{p,q}$ den Wert $p = \infty$ ausgeschlossen. In [71, 2.3.4] haben wir eine Modifikation von (35) angegeben, die erlaubt, Räume $F^s_{\infty,q}$ mit $-\infty < s < \infty$, $1 < q < \infty$, in sinnvoller Weise einzuführen. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auch auf [70, 2.4.1], wo wir gezeigt haben, daß eine direkte Ausdehnung von (35) auf $p = \infty$ nicht erfolgreich ist.

4.2 Eigenschaften

Wir beantworten die Fragen aus Bemerkung 2 in zwei Sätzen.

Satz 2. (i) *Es seien* $-\infty < s < \infty$, $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$. *Dann ist* $B^s_{p,q}$ *ein Quasi-Banach-Raum* (*Banach-Raum, falls* $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$). $B^s_{p,q}$ *ist unabhängig von der Auswahl von* φ.

(ii) *Es sei* $-\infty < s < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$. *Dann ist* $F^s_{p,q}$ *ein Quasi-Banach-Raum (Banach-Raum, falls* $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$*).* $F^s_{p,q}$ *ist unabhängig von der Auswahl von* φ.

Bemerkung 5. Die Räume $F^s_{\infty,q}$ mit $-\infty < s < \infty$, $1 < q < \infty$, sind ebenfalls Banach-Räume.

Satz 3. (i) *Für* $s > 0$ *gilt*

(36) $C^s = B^s_{\infty,\infty}$.

(ii) *Für* $s > 0$, $1 < p < \infty$ *und* $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *gilt*

(37) $\Lambda^s_{p,q} = B^s_{p,q}$.

(iii) *Für* $-\infty < s < \infty$ *und* $1 < p < \infty$ *gilt*

(38) $H^s_p = F^s_{p,2}$.

(iv) *Für* $0 < p < \infty$ *ist*

(39) $h_p = F^0_{p,2}$.

Bemerkung 6. Dieser Satz zeigt, daß die im Abschnitt 2 betrachteten konkreten Räume in den natürlichen Grenzen ihrer Parameter in den beiden Skalen $\{B^s_{p,q}\}$ und $\{F^s_{p,q}\}$ enthalten sind. Der obige Satz wurde in [71, 2.5.6 bis 2.5.8] bewiesen. Dort findet man auch weitere Literaturangaben, insbesondere verweisen wir bezüglich (39) auch auf [10, 43]. (38) und (39) sind Theoreme vom Paley-Littlewood-Typ, man vergleiche auch mit (32), (33). Nach (17) gelten diese Aussagen insbesondere für die Sobolev-Räume W^s_p mit $1 < p < \infty$ und $s = 0, 1, 2, \ldots$. In Bemerkung 4 hatten wir erwähnt, daß man nach passender Modifikation Räume $F^s_{\infty,q}$ mit $-\infty < s < \infty$, $1 < q < \infty$, einführen kann. Es gilt der Paley-Littlewood-Satz

(40) $\mathrm{bmo} = F^0_{\infty,2}$,

wobei bmo der Raum aus 2.6 ist. Wir verweisen auf [71, 2.5.8] und die dortigen Literaturangaben.

4.3 Äquivalente Quasi-Normen (Differenzen)

In [71] und in einigen nachfolgenden Arbeiten haben wir eine Vielzahl äquivalenter Quasi-Normen in den Räumen $B^s_{p,q}$ und $F^s_{p,q}$ betrachtet: Charakterisierungen mittels Ableitungen, Differenzen, Mittelbildungen von Ableitungen und Differenzen, Spline-Funktionen, durch Approximationseigenschaften und durch Spuren harmonischer Funktionen $\left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0\right)$ und temperierter Funktionen $\left(\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)$ auf $\{x_{n+1} = 0\}$. Wir beschränken uns hier vorwiegend auf jene äquivalenten Quasi-Normen, die für die nachfolgenden Abschnitte, insbesondere 6 und 7, von Interesse sind. (Wir verweisen aber auch auf Unterabschnitt 5.2, wo wir kurz auf harmonische und thermische Erweiterungen eingehen.) Die Differenzen Δ^m_h haben die gleiche Bedeutung wie in (8).

Satz 4. (i) *Es seien* $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ *und* $n\left(\frac{1}{\min(p, 1)} - 1\right) < s < m$, *wobei* m *eine natürliche Zahl ist. Dann ist*

$$\|f \mid L_p\| + \left(\int_{|h| \leqslant 1} |h|^{-sq} \|\Delta_h^m f \mid L_p\|^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q} \tag{41}$$

(*Modifikation für* $q = \infty$) *eine äquivalente Quasi-Norm in* $B_{p,q}^s$.

(ii) *Es seien* $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ *und* $n/\min(p, q) < s < m$, *wobei* m *eine natürliche Zahl ist. Dann ist*

$$\|f \mid L_p\| + \left\| \left(\int_{|h| \leqslant 1} |h|^{-sq} |\Delta_h^m f(\cdot)|^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q} \Big| L_p \right\| \tag{42}$$

(*Modifikation für* $q = \infty$) *eine äquivalente Quasi-Norm in* $F_{p,q}^s$.

Bemerkung 7. Dieser Satz wurde in [71, 2.5.10, 2.5.12] bewiesen. Dort findet man auch weitere Literaturangaben. Aus (36) bis (38) folgt, daß man für die klassischen Räume $\mathcal{C}^s$, $\Lambda_{p,q}^s$ und H_p^s eine Vielzahl äquivalenter Normen (41) bzw. (42) hat. Derartige Aussagen sind seit langer Zeit gut bekannt. In [68, 71] findet man zahlreiche Literaturangaben hierzu.

4.4 Äquivalente Quasi-Normen (Mittelwerte von Differenzen)

Es zeigt sich, daß (42) ein Analogon für die Räume $F_{p,q}^s$ auf vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Geometrie besitzt, nicht aber (41). Die Situation verbessert sich entscheidend, wenn man die Differenzen Δ_h^m durch Mittelwerte von Differenzen ersetzt. Wir geben eine kurze Beschreibung, wobei wir im Moment natürlich nur an Räumen mit R_n als Grundraum interessiert sind. Es sei d eine beliebig oft differenzierbare nicht-negative rotationsinvariante Funktion im R_n mit $d(0) > 0$ und $\operatorname{supp} d \subset \{y \mid |y| \leqslant 1\}$. Die Differenzen Δ_h^m haben wiederum die gleiche Bedeutung wie in (8). Wir setzen

$$D_m^e(d, t)f(x) = \int_{R_n} d(h)\Delta_{th}^m f(x)dh, \quad x \in R_n, \quad t > 0, \tag{43}$$

(Mittelwerte für Differenzen). Hierbei erinnert „e" an „euklidisch".

Satz 5. (i) *Es seien* $0 < q \leqslant \infty$ *und* $0 < r < \infty$. *Ferner seien* $0 < p \leqslant \infty$ *und* $n\left(\frac{1}{\min(p, 1)} - 1\right) < s < m$, *wobei* m *eine natürliche Zahl ist. Dann ist*

$$\|f \mid L_p\| + \left(\int_0^r t^{-sq} \|D_m^e(d, t) f \mid L_p\|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \tag{44}$$

(*Modifikation für* $q = \infty$) *eine äquivalente Quasi-Norm in* $B_{p,q}^s$.

(ii) *Es seien* $0 < q \leqslant \infty$ *und* $0 < r < \infty$. *Ferner seien* $0 < p < \infty$ *und* $n\left(\frac{1}{\min(p, q, 1)} - 1\right) < s < m$, *wobei* m *eine natürliche Zahl ist. Dann ist*

$$\|f \mid L_p\| + \left\| \left(\int_0^r t^{-sq} |D_m^e(d, t)f(\cdot)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \Big| L_p \right\| \tag{45}$$

(*Modifikation für* $q = \infty$) *eine äquivalente Quasi-Norm in* $F_{p,q}^s$.

Bemerkung 8. Den Satz in der obigen Formulierung findet man in [76]. Die Grundlage ist aber Theorem 7 in [73], das eine Modifikation des Teils (ii) des obigen Satzes darstellt. (Im Gegensatz zu [76] und zur obigen Formulierung haben wir in [73] vorausgesetzt, daß Fd und nicht d selbst einen kompakten Träger hat. Dieser Unterschied ist aber unerheblich.)

4.5 Interpolation

Für die Räume $B^s_{p,q}$ und $F^s_{p,q}$ kann man eine Interpolationstheorie entwickeln. Wir verweisen auf [71, 2.4]. Wir beschränken uns auf jene Interpolationsformel, die wir später auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen ausdehnen: Es seien $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ und $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$. Dann gilt

$$B^s_{p,q} = (B^{s_0}_{p,p}, B^{s_1}_{p,p})_{\Theta,q} \quad \text{mit } s = (1-\Theta)s_0 + \Theta s_1. \tag{46}$$

5 Die lokale-globale Methode

Die Fourier-analytische Methode aus dem vorhergehenden Abschnitt ist ein mächtiges Instrument in der Theorie der Funktionenräume. Man kann aber auch einige kritische Anmerkungen machen. Die erste ist mit den Beweisen der Aussagen aus den Sätzen 3 und 4 verbunden, wie man sie in [71] und den dort verwendeten Arbeiten findet. Diese Beweise wurden stets mit sehr spezifischen Argumenten geführt, die zumindest auf den ersten Blick wenig mit Fourier-Analysis zu tun haben. Um diesen Punkt etwas klarer zu machen, setzen wir $n = 1$ und fragen wann sich etwa Differenzen in der Form (31) darstellen lassen. Es gilt

$$\varphi_j(D)f(x) = \Delta^m_h f(x) \quad \text{mit } h = 2^{-j}$$

für $\varphi = (e^{i\lambda} - 1)^m$. Es wäre somit wünschenswert, Darstellungen der Form (34), (35) auf derartige Funktionen φ auszudehnen (bei festen Werten für p, q für große Werte von s). In gleicher Weise kann man mit anderen Charakterisierungen verfahren, etwa Charakterisierungen durch Spuren harmonischer oder temperierter Funktionen im R^+_{n+1} auf n-dimensionalen Hyperebenen. Auch hier kann man die wünschenswerten Funktionen φ im Sinne von (31), (34), (35) rasch angeben. Wir gehen hierauf in 5.2 kurz ein. Eine Ausdehnung von (31), (34), (35) auf wesentlich allgemeinere Klassen von Funktionen φ ist also wünschenswert, etwa mit der Zielstellung, konkrete Charakterisierungen daraus durch Spezialisierung zu erhalten. Ein grundlegender Schritt in diese Richtung wurde in [71, 2.3.6] getan, der in [72] ausgebaut wurde. Eine systematische Untersuchung erfolgte aber erst in [73]. Bevor wir ein typisches Resultat formulieren, gehen wir noch auf einen zweiten Mangel der Fourier-analytischen Methode ein. Um Differenzen oder Ableitungen einer Funktion $f(\cdot)$ in einem Punkt $x \in R_n$ zu bilden, benötigt man nur die Kenntnis der Funktion f in einer Umgebung von x. Nach Abschluß dieser lokalen Prozedur stellt man die (globale) Frage, ob das Resultat zu L_p gehört, man vergleiche mit (9), (11), (12), (13), aber auch (41), (42) und (44), (45). Die Fourier-analytische Methode verwischt diesen Sachverhalt vollständig: Um $\varphi_j(D)f(\cdot)$ aus (31) im Punkt x zu berechnen, benötigt man die Kenntnis von f im ganzen R_n. Die Frage ist, ob man die Bildung $\varphi_j(D)f(x)$ auf solche φ ausdehnen kann, daß $\varphi_j(D)f$ lokal im obigen Sinne ist. Hierzu müßte $F^{-1}\varphi$ kompakten Träger haben, im Gegensatz zum ursprünglichen Ansatz, wo φ selbst einen kompakten Träger hat. Eine positive Antwort auf diese Frage ist implizit schon in [71, 2.3.6] und den vorangehenden Arbeiten enthalten, obwohl diesem Punkt seinerzeit (zu Unrecht) keine große Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Eine Herausschälung dieses Sachverhalts erfolgte dann in [73, 74] und wurde unabhängig hiervon auch von J. Franke [23] gefunden und benutzt. Wir beschränken uns hier auf die Formulierung zweier typischer Resultate für die angeschnittenen Fragen.

5.1 Äquivalente Quasi-Normen (Allgemeiner Fall)

Wir formulieren einen typischen Satz aus [73], der zeigt, in welchem Maße man die Darstellung (31), (35) von $F^s_{p,q}$ auf allgemeinere Funktionen φ ausdehnen kann. Es seien h(x) und H(x) zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen im R_n mit

$$\operatorname{supp} h \subset \{y \mid |y| \leqslant 2\}, \qquad \operatorname{supp} H \subset \{y \mid \tfrac{1}{4} \leqslant |y| \leqslant 4\},$$

$$h(x) = 1 \quad \text{für } |x| \leqslant 1, \qquad H(x) = 1 \quad \text{für } \tfrac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2.$$

Wir verwenden die Schreibweise $\varphi(tD)f(\cdot)$ aus (21) für die Funktionen φ aus dem nachfolgenden Satz. Aus den Bedingungen an φ und den Umformulierungen aus [73, Corollary 3] (man vergleiche auch mit der nachfolgenden Bemerkung 9) folgt, daß $\varphi(tD)f(\cdot)$ zumindest für $f \in S$ erklärt ist. Eine Ausdehnung auf $f \in F^s_{p,q}$ im Sinne des nachfolgenden Satzes ist dann eine Angelegenheit von Limes-Prozeduren, auf die wir hier nicht eingehen.

Satz 6. *Es seien* $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ *und* $-\infty < s < \infty$. *Es seien* s_0 *und* s_1 *zwei reelle Zahlen mit*

$$s_0 + n\left(\frac{1}{\min(p, q, 1)} - 1\right) < s < s_1 \tag{47}$$

und $s_1 > n\left(\frac{1}{\min(p, 1)} - 1\right)$. *Ferner seien* $\varphi_0(x)$ *und* $\varphi(x)$ *zwei beliebig oft differenzierbare komplex-wertige Funktionen im* R_n *bzw. im* $R_n - \{0\}$, *die den Tauberschen Bedingungen*

$$|\varphi_0(x)| > 0 \quad \textit{für } |x| \leqslant 2, \qquad |\varphi(x)| > 0 \quad \textit{für } \tfrac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2 \tag{48}$$

genügen. Es seien $a > n/\min(p, q)$,

$$\int_{R_n} \left| \left(F^{-1} \frac{\varphi(z)h(z)}{|z|^{s_1}}\right)(y) \right| (1 + |y|)^a dy < \infty, \tag{49}$$

$$\sup_{m=1,2,\ldots} 2^{-ms_0} \int_{R_n} |(F^{-1}\varphi(2^m \cdot)H(\cdot))(y)|(1 + |y|)^a dy < \infty \tag{50}$$

und

(51) $\sup_{m=1,2,\ldots} 2^{-ms_0} \int_{R_n} |(F^{-1}\varphi_0(2^m \cdot)H(\cdot))(y)|(1+|y|)^a dy < \infty.$

Für jede Zahl r > 0 *ist*

(52) $\|\varphi_0(D)f|L_p\| + \left\| \left(\int_0^r t^{-sq}|\varphi(tD)f(\cdot)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} |L_p \right\|$

(*Modifikation für* $q = \infty$) *eine äquivalente Quasi-Norm in* $F^s_{p,q}$.

Bemerkung 9. Dieser Satz stimmt im wesentlichen mit Theorem 1 in [73] überein, im Gegensatz zu diesem Theorem haben wir aber $\varphi(tD)f$ mit $0 < t < r$ statt $\varphi_j(D)f$ aus (31) mit j = 1, 2, 3, . . . verwendet. Diese Änderung vom Diskreten (j = 1, 2, 3, . . .) zum Kontinuierlichen ($0 < t < r$) ist unwesentlich und wurde in [73] häufig benutzt. Die Bedingungen (49) bis (51) sehen etwas unhandlich aus, sind aber gerade in dieser Form sehr nützlich. Andererseits ist es nicht schwierig, (49) bis (51) durch etwas schwächere Bedingungen zu ersetzen, die einfacher aussehen: m sei eine natürliche Zahl mit $m > \frac{n}{2} + a$. Ferner seien

(53) $\left\| \frac{\varphi(x)h(x)}{|x|^{s_1}} |W_2^m \right\| < \infty,$

(54) $\sup_{m=1,2,\ldots} 2^{-ms_0}\|\varphi(2^m \cdot)H(\cdot)|W_2^m\| < \infty$

und

(55) $\sup_{m=1,2,\ldots} 2^{-ms_0}\|\varphi_0(2^m \cdot)H(\cdot)|W_2^m\| < \infty.$

Ersetzt man (49) bis (51) durch (53) bis (55) und gelten die übrigen Voraussetzungen des obigen Satzes, so ist (52) eine äquivalente Quasi-Norm in $F^s_{p,q}$.

Bemerkung 10. In [73] haben wir neben dem obigen Satz einige Modifikationen hergeleitet, die in ihrer Gesamtheit erlauben, die bekannten äquivalenten Quasi-Normen in $F^s_{p,q}$ (ausgedrückt durch Differenzen, Ableitungen, harmonische oder thermische Erweiterungen usw.) auf einheitliche Weise durch Spezialisierung zu gewinnen. Für die Räume $B^s_{p,q}$ gibt es ganz analoge Sätze und somit auch ganz analoge Möglichkeiten der Herleitung konkreter äquivalenter Quasi-Normen aus einem einheitlichen Prinzip. Um einen Eindruck zu vermitteln, wählen wir n = 1 und setzen

(56) $\varphi_0(x) \equiv 1$ und $\varphi(x) = (e^{i\mu x} - 1)^m$, m natürliche Zahl,

wobei μ eine geeignete positive Zahl ist. Dann ist

(57) $\varphi_0(D)f = f$ und $\varphi(tD)f = \Delta^m_{\mu t}f.$

Man kann dann die Bedingungen an s_0 und s_1 ausrechnen, damit (49) bis (51) erfüllt sind, z. B. ist $s_0 = 0$ ausreichend, damit (51) gilt. Losgelöst von expliziten Bedingungen an s, p, q erhält man auf diese Weise äquivalente Quasi-Normen vom Typ (41), (42). Diese Überlegungen kann man auch auf den mehrdimensionalen Fall ausdehnen. Hierzu ist aber eine Modifikation des obigen Satzes notwendig, wie sie in [73, Theorem 2] beschrieben wurde. Die äquivalenten Quasi-Normen aus Satz 5 kann man ebenfalls durch Spezialisierung aus Satz 6 (und seinem Gegenstück für die Räume $B^s_{p,q}$) herleiten. Hierzu hat man (56) durch

$$(58) \qquad \varphi_0(x) \equiv 1 \quad \text{und} \quad \varphi(x) = \int_{R_n} d(h)(e^{i\mu xh} - 1)^m dh$$

zu ersetzen (n-dimensionaler Fall). Wir gehen nicht auf Einzelheiten ein und verweisen auf [73, 74].

5.2 Harmonische und thermische Erweiterungen

Obwohl es etwas abseits vom Hauptanliegen dieser Arbeit ist, möchten wir doch kurz auf harmonische und thermische Erweiterungen von Distributionen aus $F^s_{p,q}$ und $B^s_{p,q}$ eingehen, nicht zuletzt aus geschichtlichen Gründen, aber auch um weitere Anwendungsbeispiele für Satz 6 (und sein $B^s_{p,q}$-Gegenstück) vorzuführen. Wir erinnern an die Cauchy-Poisson-Halbgruppe

$$(59) \qquad P(t)f(x) = c \int_{R_n} \frac{t}{(|x-y|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(y)dy, \quad x \in R_n, \quad t > 0,$$

und an die Gauß-Weierstraß-Halbgruppe

$$(60) \qquad W(t)f(x) = ct^{-n/2} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy, \quad x \in R_n, \quad t > 0.$$

Im (x, t)-R^+_{n+1}-Halbraum genügt $P(t)f(x)$ der Laplace-Gleichung und $W(t)f(x)$ der Wärmeleitungs-Gleichung mit $f(x)$ als Anfangsdaten, wobei c geeignet zu wählen ist. In diesem Sinne sind $P(t)f(x)$ die harmonische und $W(t)f(x)$ die thermische Fortsetzung von $f(x)$ (definiert auf R_n, interpretiert als Hyperfläche $t = 0$) in R^+_{n+1}. $\varphi(tD)f(x)$ hat die gleiche Bedeutung (21) wie oben. Ferner erinnern wir an

$$(61) \qquad \varphi(tD)f(x) = ct^k \frac{\partial^k P(t)f(x)}{\partial t^k} \quad \text{für } \varphi(\xi) = |\xi|^k e^{-|\xi|}$$

und an

$$(62) \qquad \varphi(\sqrt{t}D)f(x) = ct^k \frac{\partial^k W(t)f(x)}{\partial t^k} \quad \text{für } \varphi(\xi) = |\xi|^{2k} e^{-|\xi|^2},$$

wobei k eine nicht-negative ganze Zahl ist. Wir verweisen auf [68, 2.5.2 und 2.5.3]. Man kann jetzt fragen, für welche Werte von k die Bedingungen (49), (50) oder besser noch (53), (54) für die Funktionen φ aus (61) bzw. (62) erfüllt sind. Dann erhält man äquivalente Quasi-Normen im Sinne von (52) für $F^s_{p,q}$ und analog für $B^s_{p,q}$. Wir beschreiben ein Beispiel. Es seien $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $2m > s > -\infty$, wobei m eine nicht-negative ganze Zahl ist. Ist φ_0 eine geeignete Funktion im Sinne von Satz 6, so ist

$$(63) \qquad \|\varphi_0(D)f \,|\, L_p\| + \left\| \left(\int_0^1 t^{(m-s/2)q} \left| \frac{\partial^m W(t)f(\cdot)}{\partial t^m} \right|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \Big| L_p \right\|$$

(Modifikation für $q = \infty$) eine äquivalente Quasi-Norm in $F^s_{p,q}$. Analog erhält man äquivalente Quasi-Normen für $F^s_{p,q}$ mit P(t) statt W(t) und für $B^s_{p,q}$. Die obige Formulierung haben wir aus [73, Theorem 9] übernommen. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auch auf [72], [71, 2.12.2], sowie auf die Arbeiten von H.-Q. Bui [11, 12] und G. A. Kaljabin [31, 32].

Bemerkung 11. Die Charakterisierung von Funktionenräumen durch harmonische und thermische Fortsetzungen im obigen Sinne hat eine lange Geschichte. Soweit es die Besov-Lipschitz-Räume $\Lambda^s_{p,q}$ und die Bessel-Potential-Räume H^s_p betrifft, hat M. H. Taibleson [66] die erste zusammenfassende Darstellung gegeben (wir verweisen in diesem Zusammenhang auch auf T. M. Flett [18]). Weitere Ausführungen zu dieser Problematik findet man in den Büchern [13, 50, 62].

5.3 Lokale-globale Charakterisierungen

Wir kehren zu unserem eigentlichen Anliegen zurück und beschreiben eine weitere Folgerung aus Satz 6 (und seinem $B^s_{p,q}$-Gegenstück). Es sei $B = \{y \mid |y| < 1\}$ die Einheitskugel im R_n. Ferner seien k_0 und k zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen im R_n mit

$$\text{(64)} \qquad \operatorname{supp} k_0 \subset B, \qquad \operatorname{supp} k \subset B,$$

$$\text{(65)} \qquad (Fk)(0) \neq 0 \quad \text{und} \quad (Fk_0)(y) \neq 0 \quad \text{für alle } y \in R_n.$$

Es ist leicht zu sehen, daß Funktionen k_0 mit den angegebenen Eigenschaften existieren. Ist N eine natürliche Zahl, so setzen wir $k_N = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^N k$. (Das ist für die weiteren Betrachtungen bequem, aber nicht wirklich notwendig: Wir benötigen für die Anwendung von Satz 6 und Bemerkung 9 nur, daß $(Fk_N)(\xi)$ für $\xi \to 0$ hinreichend rasch gegen Null geht.) Für N = 0, 1, 2, . . . bilden wir die Mittel

$$\text{(66)} \qquad K^e(k_N, t)f(x) = \int_{R_n} k_N(y) f(x + ty)\, dy, \quad x \in R_n, \quad t > 0,$$

wobei „e" wieder wie in (43) an „euklidisch" erinnert. Bei üblicher Interpretation ist (66) für $f \in S'$ sinnvoll (sogar für $f \in D'$).

Satz 7. *Es seien* $0 < \epsilon < \infty$ *und* $0 < r < \infty$.

(i) *Es seien* $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ *und* $-\infty < s < \infty$. *Ferner sei* N *eine natürliche Zahl mit* $2N > s$ *und* $2N > n\left(\frac{1}{\min(p, 1)} - 1\right)$. *Dann ist*

$$\text{(67)} \qquad \|K^e(k_0, \epsilon)f \mid L_p\| + \left(\int_0^r t^{-sq} \|K^e(k_N, t)f \mid L_p\|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

(Modifikation für $q = \infty$*) eine äquivalente Quasi-Norm in* $B^s_{p,q}$.

(ii) *Es seien* $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ *und* $-\infty < s < \infty$. *Ferner sei* N *eine natürliche Zahl mit* $2N > s$ *und* $2N > n\left(\frac{1}{\min(p, 1)} - 1\right)$. *Dann ist*

$$\text{(68)} \qquad \|K^e(k_0, \epsilon)f \mid L_p\| + \left\| \left(\int_0^r t^{-sq} |K^e(k_N, t)f(\cdot)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \Big| L_p \right\|$$

(Modifikation für $q = \infty$*) eine äquivalente Quasi-Norm in* $F^s_{p,q}$.

Bemerkung 12. Der obige Satz stimmt mit Theorem A in [75] und in [76] überein und ist eine Modifikation von Proposition 1 in [74]. Der Satz folgt aus Satz 6 durch geeignete Wahl der dortigen Funktionen φ_0 und φ.

Bemerkung 13. Dieser Satz spiegelt die lokalen Eigenschaften der Räume $B^s_{p,q}$ und $F^s_{p,q}$ wider wie sie in den einleitenden Bemerkungen zu diesem Abschnitt beschrieben wurden: Zur Berechnung der Mittel aus (66) im Punkt x benötigen wir nur die Kenntnis von f aus einer Umgebung von x.

6 Räume auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Es zeigt sich, daß Satz 7 für zahlreiche Anwendungen gut geeignet ist. Insbesondere kann man mit seiner Hilfe Räume vom $F^s_{p,q} - B^s_{p,q}$-Typ auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben. Wir folgen in diesem Abschnitt im wesentlichen der Darstellung aus [75, 76].

6.1 Vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Geometrie

Wir beschreiben zuerst die Riemannschen Mannigfaltigkeiten M, die in dieser Arbeit betrachtet werden. Wir nehmen stets an, daß M eine zusammenhängende C^∞-Mannigfaltigkeit mit glatter Riemannscher Metrik g ist. g ist somit ein reelles zweifach kovariantes C^∞-Tensorfeld auf M, so daß g_P für jeden Punkt $P \in M$ eine positiv-definite symmetrische Bilinearform ist,

$$(69) \qquad g_P(X, Y) = g_P(Y, X) \quad \text{und} \quad g_P(X, X) > 0 \quad \text{für } 0 \neq X \in T_P M$$

und $Y \in T_P M$. Wie üblich ist $T_P M$ der Tangentialraum im Punkt $P \in M$. Bezüglich einer lokalen Karte (Ω, φ), wobei Ω eine offene Menge auf M und φ eine homöomorphe Abbildung von Ω auf eine offene Menge U im R_n sind, sind die Christoffel-Symbole durch

$$\Gamma^\ell_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\ell} [\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}]$$

gegeben (mit der üblichen Summenkonvention). Es sei $c(t) = c(P, X, t)$ die Geodäte mit $c(P, X, 0) = P \in M$ und $\frac{dc}{dt}(P, X, 0) = X \in T_P M$ mit $X \neq 0$. Ist $C(t) = \varphi(c(t))$ mit den Komponenten $C^j(t)$, so gelten die Geodäten-Gleichungen

$$(70) \qquad \frac{d^2 C^j(t)}{dt^2} + \Gamma^j_{ik}(C(t)) \frac{dC^i(t)}{dt} \frac{dC^k(t)}{dt} = 0$$

mit $C(0) = \varphi(P)$ und $\frac{dC}{dt}(0) = \varphi_* X \in T_{\varphi(P)} U$. Es gilt $\sigma = \|X\| t$, wobei σ die Bogenlänge ist, mit $\sigma = 0$ im Punkt $\varphi(P)$ und $\|X\| = \sqrt{g(X, X)}$. Wir setzen stets voraus, daß M vollständig ist, d. h., daß alle Geodäten bezüglich der Bogenlänge σ unbeschränkt ausgedehnt werden können, $-\infty < \sigma < \infty$. (Nach dem bekannten Satz von Hopf-Rinow ist das gleichbedeutend damit, daß M als metrischer Raum vollständig ist.) Wir erinnern an die Exponentialabbildung $\exp_P$ mit $P \in M$. Hierbei wird T_PM durch

(71) $\quad \exp_P(X) = c(P, X, 1), \quad X \in T_PM,$

in M abgebildet, wobei man $\exp_P(0) = P$ setzt. Ist $r > 0$ hinreichend klein, so ist $\exp_P$ ein Diffeomorphismus von

(72) $\quad B_P(r) = \{X \mid X \in T_PM, \|X\| < r\} \quad$ auf $\Omega_P(r) = \exp_P B_P(r)$.

Identifiziert man T_PM mit R_n, so ist $(\Omega_P(r), \exp_P^{-1})$ die lokale Karte der normalen geodätischen Koordinaten. Es sei r_P das Supremum aller Zahlen $r > 0$, so daß $\exp_P$ ein Diffeomorphismus im Sinne von (72) ist. $r_0 = \inf\limits_{P \in M} r_P$ ist der Injektivitätsradius von M. Wir setzen in Zukunft stets $r_0 > 0$ voraus. In [75, Remark 5] haben wir diese Frage kurz diskutiert. Schließlich verlangen wir, daß M eine Mannigfaltigkeit mit beschränkter Geometrie ist: Ist $0 < r < r_0$, so fordern wir, daß es positive Zahlen c und c_α gibt mit

(73) $\quad \det g_{ij} \geqslant c, \qquad |D^\alpha g_{ij}| \leqslant c_\alpha \quad$ für alle Multi-indizes α,

in den normalen geodätischen Koordinaten der lokalen Karten $(\Omega_P(r), \exp_P^{-1})$ mit $P \in M$ im Sinne von (72). (Hierbei haben wir g mit der Metrik $\exp_P^* g$ bezüglich der normalen geodätischen Koordinaten identifiziert.) Man kann die Forderung, daß M beschränkte Geometrie besitzen soll auch wie folgt ausdrücken: Auf der obigen vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit positivem Injektivitätsradius sind sämtliche kovarianten Ableitungen des Krümmungstensors beschränkt, d. h., die Skalare

(74) $\quad g^{\alpha_1\beta_1} \ldots g^{\alpha_k\beta_k} \nabla_{\beta_1} \ldots \nabla_{\beta_k} R^{stuv} \nabla_{\alpha_1} \ldots \nabla_{\alpha_k} R_{stuv}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

sind beschränkte C^∞-Funktionen auf M. Hierbei sind ∇_α die üblichen kovarianten Ableitungen und R_{stuv} sind die Komponenten des Krümmungstensors. Mit anderen Worten, die hier betrachtete Riemannsche Mannigfaltigkeit ist vollständig, ihr Injektivitätsradius ist positiv, und sie hat eine beschränkte Geometrie (bezüglich der gegebenen Metrik g). Es sei $\delta > 0$ hinreichend klein. Dann gibt es eine höchstens abzählbare Überdeckung von M mit geodätischen Kugeln $\Omega_{P_j}(\delta)$ im Sinne von (72), so daß jede Kugel $\Omega_{P_j}(\delta)$ mit höchstens L weiteren von diesen Kugeln einen nicht-leeren Durchschnitt hat. Hierbei ist L eine passende natürliche Zahl. Die Überdeckung $M = \cup\, \Omega_{P_j}(\delta)$ kann man so wählen, daß es eine zugehörige Zerlegung der 1 mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $\psi_j \in C^\infty(M), \quad 0 \leqslant \psi_j \leqslant 1, \quad \Sigma\, \psi_j = 1$ auf M;

(ii) supp $\psi_j \subset \Omega_{P_j}(\delta), \quad j = 1, 2, \ldots;$

(iii) für jeden Multi-index α gibt es eine positive Zahl b_α mit

$|D^\alpha(\psi_j \circ \exp_{P_j})(x)| \leqslant b_\alpha, \quad x \in B_{P_j}(r), \quad (0 < \delta < r < r_0).$

Wir verweisen auf [75, Remark 6], wo wir diese Frage etwas genauer diskutiert haben. Zerlegungen dieser Art gehen auf Calabi zurück. Wir verweisen auch auf [5, Lemmata 2.25, 2.26].

Bemerkung 14. Die obigen Ausführungen allgemeiner Art basieren im wesentlichen auf [5, 33]. Kompakte Mannigfaltigkeiten besitzen stets einen positiven Injektivitätsradius, [33, S. 131]. Von besonderem Interesse könnten Mannigfaltigkeiten mit Injektivitätsradius $r_0 = \infty$ sein, z. B. Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nicht-positiver Schnittkrümmung, [29, S. 72], und symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeiten vom nicht-kompaktem Typ, [33, S. 152]. Besitzt eine Mannigfaltigkeit beschränkte Geometrie, so kann man weitreichende Aussagen z. B. über das Verhalten des Laplace-Beltrami-Operators machen, die z. T. erst in jüngster Zeit erhalten wurden. Hierzu und zur obigen Äquivalenz im Sinne von (74) verweisen wir auf [4, 15, 40, 44] sowie auf [78, S. 35].

6.2 Spezielle Funktionenräume auf Mannigfaltigkeiten

Es sei M die vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positivem Injektivitätsradius und beschränkter Geometrie aus dem vorhergehenden Unterabschnitt, obwohl man für die Zwecke dieses Unterabschnitts die Voraussetzungen an M wesentlich abschwächen könnte. Für komplexe C^∞-Funktionen f auf M setzen wir wie üblich

$$(75)\qquad |\nabla^k f|^2 = g^{\alpha_1\beta_1} \ldots g^{\alpha_k\beta_k} \nabla_{\alpha_1} \ldots \nabla_{\alpha_k} f \cdot \nabla_{\beta_1} \ldots \nabla_{\beta_k} \bar{f},$$

wobei ∇_α wie oben die üblichen kovarianten Ableitungen sind. Ferner erinnern wir an den Laplace-Beltrami-Operator Δ, der in lokalen Koordinaten die Form

$$(76)\qquad \Delta f = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\, \partial_j(\sqrt{|\det g|}\, g^{jk}\partial_k f)$$

hat. D(M) ist die Gesamtheit der beliebig oft differenzierbaren komplex-wertigen Funktionen auf M mit kompaktem Träger. D'(M) ist der zugehörige duale Raum der komplex-wertigen Distributionen. Bezüglich des Riemannschen Volumenelements, das in lokalen Koordinaten die bekannte Form $\sqrt{|\det g|}dx$ hat, führt man analog zu (1), (2) Quasi-Normen $\|f\,|L_p(M)\|$ mit $0 < p \leqslant \infty$ ein. (Wir erinnern daran, daß L_p stets als $L_p(R_n)$ zu interpretieren ist.) Dann ist auch klar, was $L_p(M)$ bedeutet, zumindest für $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Insbesondere ist $L_2(M)$ ein Hilbert-Raum. E sei der Einheitsoperator. Für $\rho > 0$ ist $\rho E - \Delta$ mit D(M) als Definitionsgebiet ein positiv-definiter wesentlich selbstadjungierter Operator bezüglich des Hilbert-Raumes $L_2(M)$. Über die Spektraltheorie können dann in $L_2(M)$ die Bessel-Potentiale $(\rho E - \Delta)^{-s/2}$ für $s > 0$ definiert werden. Anschließend können sie von $L_2(M)$ auf $L_p(M)$ mit $1 < p < \infty$ ausgedehnt werden. Details zu den letzten Ausführungen findet man bei R. S. Strichartz [65, insbesondere Theorem 3.5 und Abschnitt 4]. Schließlich führen wir in Analogie zu (8) Differenzen auf M ein. m sei eine natürliche Zahl. Für $P \in M$ und $X \in T_PM$ sind dann

$$(77)\qquad \Delta_X^m f(P) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f\left(c\left(P, X, \frac{j}{m}\right)\right)$$

Differenzen im Sinne von (8) längs der Geodäte c(P, X, t).

Definition 2. (i) *Es sei* $1 < p < \infty$. *Ist* k *eine natürliche Zahl, so setzen wir*

$$(78)\qquad \|f\,|W_p^k(M)\| = \sum_{\ell=0}^{k} \|\nabla^\ell f\,|L_p(M)\|.$$

Dann ist $W_p^k(M)$ *die Vervollständigung von* $\{h \mid h \in C^\infty(M), \|h \mid W_p^k(M)\| < \infty\}$ *in der Norm* (78) (*Sobolev-Räume*).

(ii) *Es sei* $1 < p < \infty$. *Für* $s > 0$ *ist* $H_p^s(M)$ *die Gesamtheit aller* $f \in L_p(M)$, *die als* $f = (E - \Delta)^{-s/2} h$ *mit* $h \in L_p(M)$ *darstellbar sind*, $\|f \mid H_p^s(M)\| = \|h \mid L_p(M)\|$. *Es sei* $H_p^0(M) = L_p(M)$. *Für* $s < 0$ *ist* $H_p^s(M)$ *die Gesamtheit aller* $f \in D'(M)$, *die als* $f = (E - \Delta)^k h$ *mit* $h \in H_p^{2k+s}(M)$ *darstellbar sind, wobei* k *eine natürliche Zahl mit* $2k + s > 0$ *ist*, $\|f \mid H_p^s(M)\| = \|h \mid H_p^{2k+s}(M)\|$ (*Bessel-Potential-Räume*).

(iii) *Für* $s > 0$ *ist*

$$C^s(M) = \{f \mid f \in L_\infty(M), \|f \mid C^s(M)\| = \sup_{P \in M} |f(P)| + \sup_{P \in M} \sup_{X \in T_PM} \|X\|^{-s} |\Delta_X^{1+[s]} f(P)| < \infty\} \tag{79}$$

(*Hölder-Zygmund-Räume*),

Bemerkung 15. Die obige Definition der Sobolev-Räume auf M geht auf T. Aubin [4, 5] zurück. Die Bessel-Potential-Räume wurden von R. S. Strichartz eingeführt, [65, insbesondere Definition 4.1]. $C^s(M)$ aus (79) haben wir aus [76, Definition 3] übernommen, wobei [s] die größte ganze Zahl mit $[s] \leq s$ ist. Ist $M = R_n$, so stimmen die obigen Räume $W_p^k(M)$, $H_p^s(M)$ und $C^s(M)$ mit den Räumen W_p^k aus (11), den Räumen H_p^s aus (16) und den Räumen C^s aus (9) überein.

Bemerkung 16. Die obigen Räume $W_p^k(M)$, $H_p^s(M)$ und $C^s(M)$ sind Banach-Räume. Als Folgerung aus den späteren Resultaten ergibt sich insbesondere

$$H_p^s(M) = W_p^s(M) \quad \text{für } 1 < p < \infty \quad \text{und } 0 < s = \text{ganz}. \tag{80}$$

6.3 Definitionen

Es sei M die Riemannsche Mannigfaltigkeit aus 6.1 (vollständig, mit positivem Injektivitätsradius und mit beschränkter Geometrie). Ferner sei $\psi = \{\psi_j\}$ die Zerlegung der 1 aus 6.1 auf M, also $1 = \sum_{j=1}^{J} \psi_j$, wobei J entweder eine natürliche Zahl oder ∞ ist (in Abhängigkeit davon, ob M kompakt oder nicht-kompakt ist). Ferner erinnern wir an die reelle Interpolationsmethode, die wir in 3.2 beschrieben hatten. Auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten sind Räume vom $F_{p,q}^s$-Typ natürlicher als Räume vom $B_{p,q}^s$-Typ. Aus diesem Grund ist es in Vorbereitung der Betrachtungen auf M angebracht, $F_{\infty,\infty}^s = B_{\infty,\infty}^s$, $-\infty < s < \infty$, für die entsprechenden Räume im R_n zu setzen. Auch in Zukunft halten wir an der früheren Vereinbarung fest, daß $B_{p,q}^s$ und $F_{p,q}^s$ die entsprechenden Räume im R_n sind. D'(M) hat die gleiche Bedeutung wie in 6.2.

Definition 3. (i) *Es seien entweder* $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ *oder* $p = q = \infty$. *Es sei* $-\infty < s < \infty$. *Dann setzen wir*

$$F_{p,q}^s(M) = \{f \mid f \in D'(M), \|f \mid F_{p,q}^s(M)\|^\psi = \left(\sum_{j=1}^{J} \|\psi_j f \circ \exp_{P_j} \mid F_{p,q}^s\|^p\right)^{1/p} < \infty\} \tag{81}$$

(*Modifikation für* $p = \infty$).

(ii) *Es seien* $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ *und* $-\infty < s_0 < s < s_1 < \infty$. *Dann setzen wir*

(82) $\quad B^s_{p,q}(M) = (F^{s_0}_{p,p}(M), F^{s_1}_{p,p}(M))_{\Theta,q}$

mit $s = (1-\Theta)s_0 + \Theta s_1$.

Bemerkung 17. $\exp_{P_j}$ und ψ_j haben die frühere Bedeutung, wobei wir stets $0 < \delta < r_0$ (Injektivitätsradius) annehmen. Hierbei setzt man $\psi_j f \circ \exp_{P_j}$ außerhalb der Kugel $B_{P_j}(r_1)$ aus (72), $0 < \delta < r_1 < r_0$, mit Null fort. Dann ist $\psi_j f \circ \exp_{P_j} \in S'$ und folglich ist (81) sinnvoll. Die Art der Fortsetzung ist aber vollkommen uninteressant, wenn man die lokalen Quasi-Normen aus Satz 7 mit hinreichend kleinen positiven Zahlen ϵ und r wählt. Ist $M = R_n$, so gilt $F^s_{p,q}(M) = F^s_{p,q}$, wobei man im R_n annehmen kann, daß die Funktionen ψ_j die Form $\psi_j(x) = \psi(x - x^j)$ mit einer geeigneten Funktion ψ und passenden Gitterpunkten $x^j \in R_n$ haben. Mit anderen Worten, wir haben eine Zerlegungseigenschaft der Räume $F^s_{p,q}$ im R_n als Motiv benutzt, um entsprechende Räume auf M einzuführen. Die Räume $B^s_{p,q}$ mit $p \neq q$ besitzen keine solche Zerlegungseigenschaft. (81) und (82) sind sinnvoll, wenn $F^s_{p,q}(M)$ unabhängig von ψ ist und $B^s_{p,q}(M)$ unabhängig von s_0, s_1 ist. Die obige Definition stimmt mit Definition 3 aus [75] und Definition 2 aus [76] überein.

6.4 Eigenschaften

Gefragt sind Eigenschaften der Räume aus Definition 3, sowie innere Beschreibungen.

Satz 8. (i) *Es seien entweder* $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ *oder* $p = q = \infty$. *Es sei* $-\infty < s < \infty$. *Dann ist* $F^s_{p,q}(M)$ *ein Quasi-Banach-Raum (Banach-Raum für* $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$). *Er ist unabhängig von den lokalen Karten* $\{(\Omega_{P_j}(r), \exp^{-1}_{P_j})\}$ *und den zugehörigen Zerlegungen* $\psi = \{\psi_j\}$ *der* 1.

(ii) *Es seien* $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ *und* $-\infty < s < \infty$. *Dann ist* $B^s_{p,q}(M)$ *ein Quasi-Banach-Raum (Banach-Raum für* $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$). *Er ist unabhängig von der Wahl von* s_0, s_1 *in* (82).

(iii) *Es seien* $0 < p \leqslant \infty$ *und* $-\infty < s < \infty$. *Dann ist*

(83) $\quad B^s_{p,p}(M) = F^s_{p,p}(M).$

Bemerkung 18. Der Satz beantwortet die Fragen, die im Zusammenhang mit Definition 3 aufgetreten waren. Beweise findet man in [75].

6.5 Innere Beschreibungen

Eine befriedigende innere Beschreibung der Räume $F^s_{p,q}(M)$ und $B^s_{p,q}(M)$ erhält man durch die Ausdehnung von Satz 7 von R_n auf M. Wir gehen von den gleichen Funktionen k_0, k und k_N wie in 5.3. aus, nehmen aber zusätzlich an, daß k_0 und k, und folglich auch k_N, rotations-invariant sind, also

$$k_0(x) = k'_0(|x|) \quad \text{und} \quad k(x) = k'(|x|),\ x \in R_n.$$

Auf T_PM existiert ein natürliches invariantes Volumenelement dX, das in einer lokalen Karte (Ω, φ) mit $P \in \Omega$ die Form $\sqrt{|\det g_{\varphi(P)}|}\, d\varphi_* X$ hat. Wie früher sei $U = \varphi(\Omega)$. Dann lautet das Riemannsche Gegenstück zu (66)

$$(84) \quad K(k_N, t)f(P) = \int_{T_P M} k'_N(\|X\|) f(c(P, X, t))\, dX$$
$$= \int_{T_{\varphi(P)}U} k'_N(\|\varphi_* X\|)(f \circ \varphi^{-1})(C(\varphi(P), \varphi_* X, t)) \sqrt{|\det g_{\varphi(P)}|}\, d\varphi_* X,$$

wobei das zweite Integral die invariante Erklärung des ersten ist. Von Interesse sind nur kleine Werte von $t > 0$, etwa $0 < t < r_0$, wobei r_0 wieder der Injektivitätsradius ist. (Außerhalb der Einheitskugel in $T_{\varphi(P)}U$ wird der Integrand von (84) mit Null fortgesetzt.) $\|f \mid L_p(M)\|$ hat die gleiche Bedeutung wie in 6.2.

Satz 9. (i) *Es seien entweder* $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ *oder* $p = q = \infty$. *Es seien* $0 < r < r_0$ *und* $-\infty < s < \infty$. *Ist* $\epsilon > 0$ *hinreichend klein und ist die natürliche Zahl* N *hinreichend groß (in Abhängigkeit von* s, p, q), *so ist*

$$(85) \quad \|K(k_0, \epsilon)f \mid L_p(M)\| + \left\| \left(\int_0^r t^{-sq} |K(k_N, t)f(\cdot)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \Big| L_p(M) \right\|$$

(*Modifikation für* $q = \infty$) *eine äquivalente Quasi-Norm in* $F^s_{p,q}(M)$.

(ii) *Es seien* $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $0 < r < r_0$ *und* $-\infty < s < \infty$. *Ist* $\epsilon > 0$ *hinreichend klein und ist die natürliche Zahl* N *hinreichend groß (in Abhängigkeit von* s, p, q), *so ist*

$$(86) \quad \|K(k_0, \epsilon)f \mid L_p(M)\| + \left(\int_0^r t^{-sq} \|K(k_N, t)f \mid L_p(M)\|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

(*Modifikation für* $q = \infty$) *eine äquivalente Quasi-Norm in* $B^s_{p,q}(M)$.

Bemerkung 19. Der obige Satz ist das Gegenstück zu Satz 7. Er gibt eine befriedigende innere Beschreibung der Räume $F^s_{p,q}(M)$ und $B^s_{p,q}(M)$. Dieser Satz gehört zu den wesentlichsten Aussagen der Arbeit [75], wobei eine dortige zusätzliche Forderung an die Mannigfaltigkeit M in [76, 4.8] beseitigt werden konnte. In [75] findet man auch eine Diskussion wie klein $\epsilon > 0$ und wie groß N sein sollten.

6.6 Äquivalente Quasi-Normen (Differenzen)

Es entsteht die Frage, ob man die Räume $F^s_{p,q}(M)$ und $B^s_{p,q}(M)$ durch andere äquivalente Quasi-Normen kennzeichnen kann, etwa in Analogie zu den Sätzen 4 und 5. Ferner ist von Interesse, in welcher Beziehung die speziellen Räume aus 6.2 zu den Räumen aus Definition 3 stehen. In den nachfolgenden Unterabschnitten formulieren wir einige Resultate in dieser Richtung. Wir erinnern an die Bezeichnungen $B_P(r)$ und $\Delta^m_X f$ aus (72), bzw. (77). Wie immer ist M die obige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem positivem Injektivitätsradius r_0.

Satz 10. *Es seien entweder* $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ *oder* $p = q = \infty$. *Ferner seien* $0 < r < r_0$,

$$(87) \quad s > 2\left(\frac{n}{\min(p, q)} + \frac{n}{\min(p, q, 1)} + 2 - n \right) \quad \textit{und} \quad m > \frac{3}{2}s,$$

wobei m *eine natürliche Zahl ist. Dann ist*

$$(88)\qquad \|f\,|\,L_p(M)\| + \left\| \left(\int_{B_P(r)} \|X\|^{-sq} |\Delta_X^m f(\cdot)|^q \frac{dX}{\|X\|^n} \right)^{1/q} |\,L_p(M) \right\|$$

(*Modifikation für* $q = \infty$) *eine äquivalente Quasi-Norm in* $F^s_{p,q}(M)$.

Bemerkung 20. Der Satz stimmt mit Theorem 2 in [76] überein. Die Bedingungen (87) sind unnatürlich. Man kann vermuten, daß der Satz richtig bleibt, wenn man lediglich $m > s > \frac{n}{\min(p, q)}$ voraussetzt, in genauer Analogie zu Satz 4(ii). Man kann nicht erwarten, daß es ein Gegenstück zu Satz 4(i) gibt. Dazu müßte man die Tangentialräume $T_P M$ für verschiedene Punkte $P \in M$ vergleichen und die Tangentialvektoren zweifelsfrei zuordnen können. I. allg. ist das aber nicht möglich. Damit zeigt sich wiederum, daß die Räume $F^s_{p,q}(M)$ auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten viel natürlicher sind als die Räume $B^s_{p,q}(M)$.

6.7 Äquivalente Quasi-Normen (Mittelwerte von Differenzen)

Im Gegensatz zum vorhergehenden Unterabschnitt darf man bei Mittelwerten von Differenzen in Analogie zu Satz 5 auf äquivalente Quasi-Normen sowohl für $F^s_{p,q}(M)$ als auch für $B^s_{p,q}(M)$ hoffen. Wir folgen der Darstellung in [76, 3.6]. Wie in 4.4 sei d(x) eine beliebig oft differenzierbare rotations-invariante Funktion im R_n mit $d(0) > 0$ und $\operatorname{supp} d \subset \{y \mid |y| < 1\}$. Dann lautet das Analogon zu (43)

$$(89)\qquad D_m(d, t)f(P) = \int_{T_P M} d(X) \Delta_{tX}^m f(P)\,dX, \quad P \in M, \quad t > 0.$$

Hierbei ist m eine natürliche Zahl und dX ist das Volumenelement auf $T_P M$ aus 6.5. Es sei M wieder die obige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem Injektivitätsradius $r_0 > 0$.

Satz 11. (i) *Es seien entweder* $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ *oder* $p = q = \infty$. *Ferner seien* $0 < r < r_0$,

$$(90)\qquad s > 2\left(\frac{n}{p} + 2\right), \quad s > 2n\left(\frac{1}{\min(p, q, 1)} - 1\right) \quad \text{und} \quad m > \frac{3}{2}s,$$

wobei m *eine natürliche Zahl ist. Dann ist*

$$(91)\qquad \|f\,|\,L_p(M)\| + \left\| \left(\int_0^r t^{-sq} |D_m(d, t)f(\cdot)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} |\,L_p(M) \right\|$$

(*Modifikation für* $q = \infty$) *eine äquivalente Quasi-Norm in* $F^s_{p,q}(M)$.

(ii) *Es seien* $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < r < r_0$,

$$(92)\qquad s > 2\left(\frac{n}{p} + 2\right) \quad \text{und} \quad m > \frac{3}{2}s,$$

wobei m *eine natürliche Zahl ist. Dann ist*

$$\|f\,|\,L_p(M)\| + \left(\int_0^r t^{-sq} \|D_m(d, t)f\,|\,L_p(M)\|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \tag{93}$$

(Modifikation für $q = \infty$*) eine äquivalente Quasi-Norm in* $B^s_{p,q}(M)$.

Bemerkung 21. Der Satz stimmt mit Theorem 4 aus [76] überein. Er ist die Ausdehnung von Satz 5 von R_n auf M. Wie im Satz 10 sind die Bedingungen (90) und (92) unbefriedigend, und es sollte möglich sein, sie durch die entsprechenden Bedingungen aus Satz 5 zu ersetzen. Im Gegensatz zu Satz 10 haben wir jetzt sowohl für $F^s_{p,q}(M)$ als auch für $B^s_{p,q}(M)$ äquivalente Quasi-Normen. In [76] findet man weitere äquivalente Quasi-Normen unter Verwendung invarianter Ableitungen und Differenzen.

6.8 Spezialfälle

Wir kehren zu den Räumen aus 6.2, Definition 2, zurück.

Satz 12. (i) *Für* $1 < p < \infty$ *und* $-\infty < s < \infty$ *gilt*

$$H^s_p(M) = F^s_{p,2}(M). \tag{94}$$

(ii) *Für* $1 < p < \infty$ *und* $s = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt*

$$W^s_p(M) = H^s_p(M) = F^s_{p,2}(M). \tag{95}$$

(iii) *Für* $s > 4$ *gilt*

$$C^s(M) = F^s_{\infty,\infty}(M). \tag{96}$$

Bemerkung 22. Beweise für (i) und (ii) findet man in [75], (iii) wurde in [76] bewiesen. Die Einschränkung $s > 4$ in (iii) ist störend, (96) sollte für $s > 0$ gelten. (94) und (95) sind Theoreme vom Paley-Littlewood-Typ. Der obige Satz ist zumindest teilweise das Gegenstück zu Satz 3.

7 Räume auf Lie-Gruppen

Funktionenräume auf einer Lie-Gruppe G sind von mehreren Autoren mit sehr unterschiedlichen Methoden untersucht worden. Unter starken Einschränkungen an G (einfach-zusammenhängend, nilpotent, stratifiziert) haben G. B. Folland [19, 20], G. B. Folland und E. M. Stein [21], S. G. Krantz [35] und K. Saka [55] Hölder-Zygmund-Räume (dort Lipschitz-Räume genannt), Hardy-Räume und Besov-Räume untersucht. Hilfsmittel in diesen Arbeiten sind Differenzen, in Analogie zu (77), Ableitungen, Gauß-Weierstraß-Halbgruppen und insbesondere Cauchy-Poisson-Halbgruppen, in Analogie zu 5.2. Eine zweite Möglichkeit wurde von I. Z. Pesenson [51, 52] und M. Geisler [25, 26] verfolgt: Mit Hilfe invarianter Haarscher Maße und invarianter Vektorfelder wurden die Räume $L_p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, und die Sobolev-Räume $W^m_p(G)$ eingeführt. Die Besov-Räume $\Lambda^s_{p,q}(G)$ werden dann durch reelle Interpolation gemäß (26) definiert. Auf der Grundlage der abstrakten (nicht-kommutativen) Interpolationstheorie für Halbgruppen von Operatoren gelingt es dann, die Besov-Räume $\Lambda^s_{p,q}(G)$ durch äquivalente Normen zu kennzeichnen, die analog zu (42) und verwandten Normen sind. Eine dritte Möglichkeit bietet die Fourier-Analysis und Darstellungstheorie auf Lie-Gruppen, in Analogie zur Fourier-analytischen Methode aus Abschnitt 4. Zumindest für den Fall einer kompakten Lie-Gruppe gibt es erste, z. Z. noch nicht publizierte Resultate von J. Franke. Wir beschreiben hier einen vierten Weg, den Riemannschen Zugang. Diese Methode besteht darin, die Resultate für Funktionenräume auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, wie sie im Abschnitt 6 behandelt wurden, aber auch die Techniken aus [75, 76] auf Lie-Gruppen anzuwenden. Wir geben eine kurze Beschreibung, Details werden später publiziert.

7.1 Der Riemannsche Zugang

Es sei G eine n-dimensionale zusammenhängende Lie-Gruppe mit dem Einheitselement e. Wie üblich erzeugt man dann auf $\mathfrak{G} = T_eG$ die zugehörige Lie-Algebra. Auf $\mathfrak{G}$ sei eine reelle positiv-definite symmetrische Bilinearform g gegeben, analog zu g_P aus (69). Es sei $L_a : x \to ax$, mit $a \in G$, $x \in G$, die Links-Multiplikation auf G. Dann erzeugen wir durch $g_a = (L_{a^{-1}})_a^* g$, $a \in G$, (pull-back) eine links-invariante Riemannsche Metrik auf G. Bezüglich dieser Metrik ist G eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit beschränkter Geometrie im Sinne von 6.1. Das zugehörige Riemannsche Volumenelement auf G erzeugt dann ein links-invariantes Haarsches Maß auf G. Im Sinne äquivalenter Normen auf $\mathfrak{G}$ sind die so erzeugten links-invarianten Riemannschen Metriken äquivalent und die zugehörigen links-invarianten Haarschen Maße unterscheiden sich höchstens um einen positiven Faktor. Nunmehr kann man nach Definition 3 die Räume $F^s_{p,q}(G)_\ell$ und $B^s_{p,q}(G)_\ell$ in den dort gültigen Parameterbereichen von p, q und s einführen. Hierbei erinnert „ℓ" an „links". Es ist leicht zu sehen, daß diese Räume unabhängig von der gewählten links-invarianten Riemannschen Metrik im obigen Sinne sind. Hierbei ist $\exp_{P_j}$ in (81) mit $P_j = a_j \in G$ im Riemannschen Sinne zu verstehen, nicht zu verwechseln mit der Exponentialabbildung exp im Rahmen der Theorie der Lie-Gruppen, die auch hier die übliche Bedeutung hat. Aus (81) und (95) ergibt sich, daß man die zugehörigen Sobolev-Räume $W^k_p(G)_\ell$ auch wie folgt beschreiben kann: $X_j(x)$ mit $j = 1, \ldots, n$ und $x \in G$ seien n linear-unabhängige links-invariante Vektorfelder auf G. Es seien $1 < p < \infty$ und $k = 1, 2, 3, \ldots$. Dann ist

$$(97) \qquad W^k_p(G)_\ell = \{f \mid f \in L_p(G)_\ell, \sum_{m=0}^{k} \sum_{1 \leq n_j \leq n} \|X_{n_1} \ldots X_{n_m} f \mid L_p(G)_\ell\| < \infty\}.$$

Hierbei ist $L_p(G)_\ell$ der L_p-Raum bezüglich des links-invarianten Haarschen Maßes. In gleicher Weise kann man Räume $F^s_{p,q}(G)_r$ und $B^s_{p,q}(G)_r$ auf rechts-invarianter Grundlage einführen. Für alle diese Räume hat man die Aussagen aus Abschnitt 6 zur Verfügung, insbesondere die Sätze 9 bis 11. Es entstehen zwei Fragen:

1. Wann gilt

$$(98) \qquad F^s_{p,q}(G)_\ell = F^s_{p,q}(G)_r \quad \text{und} \quad B^s_{p,q}(G)_\ell = B^s_{p,q}(G)_r?$$

2. Kann man für $F^s_{p,q}(G)_\ell$ und $B^s_{p,q}(G)_\ell$ (und analog für $F^s_{p,q}(G)_r$ und $B^s_{p,q}(G)_r$) äquivalente Quasi-Normen finden, die nichts mit der gewählten Riemannschen Metrik zu tun haben?

In den nachfolgenden beiden Unterabschnitten formulieren wir einige Resultate in dieser Richtung.

7.2 Kompakte Lie-Gruppen

Die Relationen (98) sind erfüllt, falls die oben beschriebene links-invariante Riemannsche Metrik g zugleich auch rechts-invariant ist. Hierfür gibt es notwendige und hinreichende Kriterien, wir verweisen auf [53, S. 88 bis 90]. Insbesondere besitzen kompakte Lie-Gruppen eine invariante (d. h. zugleich rechts- und links-invariante) Riemannsche Metrik. Für Lie-Gruppen mit invarianter Riemannscher Metrik (also insbesondere für kompakte Lie-Gruppen) stimmen die Geodäten im Sinne von (70) mit $x \cdot \exp tX$ überein, $x \in G$, $X \in \mathfrak{G}$, $-\infty < t < \infty$, [53, 4.3]. Damit hat man eine Möglichkeit, die Räume $F^s_{p,q}(G)_\mathfrak{L}$ und $B^s_{p,q}(G)_\mathfrak{L}$ mit (98) wie folgt zu beschreiben: Man wählt auf $\mathfrak{G}$ ein Skalarprodukt (und damit eine Norm) und berechnet für $f \in D'(G)$ die Mittel (84)

$$(99) \qquad K(k_N, t)f(x) = \int_{\mathfrak{G}} k'_N(\|X\|)f(x \cdot \exp tX)dX, \quad x \in G, \quad t \in R_1,$$

wobei k_N die gleichen Funktionen wie früher sind. Satz 9 gibt dann äquivalente Quasi-Normen für die Räume $F^s_{p,q}(G)_\mathfrak{L}$ und $B^s_{p,q}(G)_\mathfrak{L}$ in denen die verwendeten Riemannschen Metriken nicht mehr sichtbar werden. Es erhebt sich die Frage, ob diese Charakterisierungen auch für allgemeine Lie-Gruppen gelten.

7.3 Allgemeine Lie-Gruppen

Es sei G eine beliebige zusammenhängende Lie-Gruppe. (99) ist für $f \in D'(G)$ sinnvoll, wobei dX das Lebesguesche Maß ist (nachdem auf $\mathfrak{G}$ eine euklidische Metrik fixiert wurde). Hierbei sind k_N mit $N = 0, 1, 2, \ldots$ die gleichen Funktionen wie in 6.5. Schließlich sei $\|f \mid L_p(G)_\mathfrak{L}\|$ mit $0 < p \leqslant \infty$ die Quasi-Norm bezüglich eines fixierten links-invarianten Haarschen Maßes.

Satz 13. *Es sei* G *eine zusammenhängende Lie-Gruppe.*

(i) *Genügen* p, q, r, s, ϵ *und* N *den Bedingungen von* Satz 9(i), *so ist* (85) *mit* $L_p(G)_\mathfrak{L}$ *statt* $L_p(M)$ *eine äquivalente Quasi-Norm in* $F^s_{p,q}(G)_\mathfrak{L}$, *wobei* $K(k_0, \epsilon)f$ *und* $K(k_N, t)f$ *durch* (99) *gegeben sind.*

(ii) *Genügen* p, q, r, s, ϵ *und* N *den Bedingungen von* Satz 9(ii), *so ist* (86) *mit* $L_p(G)_\mathfrak{L}$ *statt* $L_p(M)$ *eine äquivalente Quasi-Norm in* $B^s_{p,q}(G)_\mathfrak{L}$, *wobei* $K(k_0, \epsilon)f$ *und* $K(k_N, t)f$ *durch* (99) *gegeben sind.*

Bemerkung 23. Nach 7.2 ist dieser Satz für kompakte Lie-Gruppen eine direkte Folgerung aus Satz 9. Für allgemeine zusammenhängende Lie-Gruppen ist das nicht der Fall. Man kann aber die Techniken aus [75] benutzen, um den obigen Satz zu beweisen. Von besonderem Interesse ist das Paley-Littlewood-Theorem

$$W^k_p(G)_\mathfrak{L} = F^k_{p,2}(G)_\mathfrak{L}, \quad 1 < p < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

das durch Vergleich von (97) mit (85) in der obigen Interpretation entsteht. Im Riemannschen Fall spielt die Struktur der Differentialgleichung (70) für die

Geodäten eine entscheidende Rolle beim Beweis der entsprechenden Sätze. Im Falle einer Lie-Gruppe tritt an Stelle von (70) die vollständige Campbell-Baker-Hausdorff-Formel, einschließlich höherer Terme, die gelegentlich als Dynkin-Polynome bezeichnet werden. Wir verweisen auf [53, S. 65 und S. 76/77] und auf [54, Vorlesung 4]. Es sollte möglich sein, auch die Sätze 10 und 11 in entsprechender Weise auf Lie-Gruppen zu übertragen, wobei Differenzen längs $x \cdot \exp tX$ mit $t \in R_1$ zu nehmen sind. Details findet man in [79].

Danksagung

Dieser Bericht ist eine wesentlich erweiterte Fassung eines Übersichtsvortrages, den der Autor auf dem XI. Österreichischen Mathematikerkongreß (Graz, 16.–20. 9. 1985) gehalten hat. Ich möchte die Gelegenheit nutzen, der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und den Organisatoren des Kongresses für die Einladung zu diesem Vortrag zu danken.

Literatur

[1] Adams, R. A.: Sobolev Spaces. New York, San Franciso, London: Academic Press 1975
[2] Aronszajn, N.: Boundary values of functions with finite Dirichlet integral. Techn. Report 14, Univ. of Kansas 1955, 77–94
[3] Aronszajn, N.; Smith, K. T.: Theory of Bessel potentials. I. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **11** (1961) 385–476
[4] Aubin, T.: Espaces de Sobolev sur les variétés Riemanniennes. Bull. Sci. Math. **100** (1976) 149–173
[5] Aubin, T.: Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations. New York, Heidelberg, Berlin: Springer 1982
[6] Bergh, J.; Löfström, J.: Interpolation Spaces, an Introduction. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976
[7] Besov, O. V.: On a family of function spaces. Embedding theorems and extensions (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR **126** (1959) 1163–1165
[8] Besov, O. V.: On a family of function spaces in connection with embeddings and extensions (Russian). Trudy Mat. Inst. Steklov **60** (1961) 42–81
[9] Besov, O. V.; Il'in, V. P.; Nikol'skij, S. M.: Integral Representations of Functions and Embedding Theorems (Russian). Moskva: Nauka 1975 (Es gibt 2 Übersetzungen ins Englische)
[10] Bui, H.-Q.: Some aspects of weighted and non-weighted Hardy spaces. Kôkyûroku Res. Inst. Math. Sci. **383** (1980) 38–56
[11] Bui, H.-Q.: On Besov, Hardy and Triebel spaces for $0 < p \leqslant 1$. Ark. Mat. **21** (1983) 169–184
[12] Bui, H.-Q.: Characterizations of weighted Besov and Triebel-Lizorkin spaces via temperatures. J. Funct. Anal. **55** (1984) 39–62
[13] Butzer, P. L.; Berens, H.: Semi-Groups of Operators and Approximation. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1967
[14] Calderón, A. P.: Lebesgue spaces of functions and distributions. "Part. Diff. Equations", Proc. Symp. Math. 4, Amer. Math. Soc. 1961, 33–49
[15] Cheeger, J.; Gromov, M.; Taylor, M.: Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds. J. Differential Geometry **17** (1982) 15–53
[16] Fefferman, C.: Characterizations of bounded mean oscillation. Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971) 587–588
[17] Fefferman, C.; Stein, E. M.: H^p spaces of several variables. Acta Math. **129** (1972) 137–193
[18] Flett, T. M.: Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces. Proc. London Math. Soc. **32** (1971) 385–451

[19] F o l l a n d , G. B.: Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. Ark. Mat. (1975) 161–207
[20] F o l l a n d , G. B.: Lipschitz classes and Poisson integrals on stratified groups. Studia Math. **66** (1979) 37–55
[21] F o l l a n d , G. B.; S t e i n , E. M.: Hardy Spaces on Homogeneous Groups. Princeton: Princeton Univ. Press 1982
[22] F r a n k e , J.: On the spaces $F^s_{p,q}$ of Triebel-Lizorkin type: Pointwise multipliers and spaces on domains. Math. Nachr. **125** (1986) 29–68
[23] F r a n k e , J.: Elliptische Randwertprobleme in Besov-Triebel-Lizorkin-Räumen. Dissertation A, Jena 1985
[24] G a g l i a r d o , E.: Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. Ricerche Mat. **7** (1958) 102–137
[25] G e i s l e r , M.: Function spaces on compact Lie groups. Math. Nachr.
[26] G e i s l e r , M.: Equivalent norms for Besov spaces on Lie groups. Anal. Math.
[27] G o l d b e r g , D.: A local version of real Hardy spaces. Duke Math. J. **46** (1979) 27–42
[28] G o l d b e r g , D.: Local Hardy spaces. Proc. Symp. Pure Math. 35, I, 1979, "Harmonic Analysis in Euclidean Spaces", 245–248
[29] H e l g a s o n , S.: Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. New York, San Francisco, London: Academic Press 1978
[30] J o h n , F.; N i r e n b e r g , L.: On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961) 415–426
[31] K a l j a b i n , G. A.: Characterizations of functions of spaces of Besov-Lizorkin-Triebel type (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR **236** (1977) 1056–1059
[32] K a l j a b i n , G. A.: The description of functions of classes of Besov-Lizorkin-Triebel type (Russian). Trudy Mat. Inst. Steklov **156** (1980) 82–109
[33] K l i n g e n b e r g , W.: Riemannian Geometry. Berlin, New York: W. de Gruyter 1982
[34] K o o s i s , P.: Introduction to H_p Spaces. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1980
[35] K r a n t z , S. G.: Lipschitz spaces on stratified groups. Trans. Amer. Math. Soc. **269** (1982) 39–66
[36] K r e i n , S. G.; P e t u n i n , Ju. I.; S e m e n o v , E. M.: Interpolation of Linear Operators. Providence: Amer. Math. Soc. 1982 (Translation from Russian: Moskva: Nauka 1978)
[37] K u f n e r , A.: Weighted Sobolev Spaces. Leipzig: BSB Teubner 1980
[38] K u f n e r , A.; J o h n , O.; F u č i k , S.: Function Spaces. Prague: Academia 1977
[39] L i z o r k i n , P. I.: Properties of functions of the spaces $\Lambda^r_{p\Theta}$ (Russian). Trudy Mat. Inst. Steklov **131** (1974) 158–181
[40] L o h o u é , N.: Comparaison des champs de vecteurs et des puissances du Laplacien sur une variété Riemannienne à courbure non positive. J. Funct. Anal. **61** (1985) 164–201
[41] M a z' j a , V. G.: Sobolev Spaces. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1985 (Translation from Russian)
[42] M a z' y a , V. G.; S h a p o s h n i k o v a , T. O.: Theory of Multipliers in Spaces of Differentiable Functions. Boston, London, Melbourne: Pitman 1985
[43] M e y e r , Y.: Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires [d'après J.-M. Bony]. Sém. Bourbaki, 32e année, 1979/80, n^0 560
[44] M i c h e l , D.: Estimées des coefficients du Laplacien d'une variété Riemannienne. Bull. Sci. Math. **102** (1978) 15–41
[45] N i k o l' s k i j , S. M.: Inequalities for entire functions of finite order and their application in the theory of differentiable functions of several variables (Russian). Trudy Mat. Inst. Steklov **38** (1951) 244–278
[46] N i k o l' s k i j , S. M.: Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. Sec. ed. (Russian). Moskva: Nauka 1977 (English translation of the first ed.: Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1975)
[47] P e e t r e , J.: Sur les espaces de Besov. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B **264** (1967) 281–283
[48] P e e t r e , J.: Remarques sur les espaces de Besov. Le cas $0 < p < 1$. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B **277** (1973) 947–950
[49] P e e t r e , J.: On spaces of Triebel-Lizorkin type. Ark. Mat. **13** (1975) 123–130
[50] P e e t r e , J.: New Thoughts on Besov Spaces. Durham: Duke Univ. Math. Series, Duke Univ. 1976

[51] P e s e n s o n , J. Z.: On interpolation spaces on Lie groups (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR **246** (1979) 1298–1303
[52] P e s e n s o n , J. Z.: Nikol'skij-Besov spaces connected with representations of Lie groups (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR **273** (1983) 45–49
[53] P r i c e , J. F.: Lie Groups and Compact Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1977
[54] P o s t n i k o v , M. M.: Lie Groups and Algebras (Russian). Moskva: Nauka 1982
[55] S a k a , K.: Besov spaces and Sobolev spaces on a nilpotent Lie group. Tôhoku Math. J. **31** (1979) 383–437
[56] S c h m e i s s e r , H.-J.; T r i e b e l , H.: Topics in Fourier Analysis and Function Spaces. Leipzig: Geest & Portig 1987, and Chicester: Wiley 1987
[57] S l o b o d e c k i j , L. N.: Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary value problems of partial differential equations (Russian). Leningrad Gos. Ped. Inst. Učep. Zap. **197** (1958), 54–112
[58] S o b o l e v , S. L.: The Cauchy problem in a function space (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR **3** (1935) 291–294
[59] S o b o l e v , S. L.: Méthode nouvelle à resoudre le probléme de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. Mat. Sb. **1** (1936) 39–72
[60] S o b o l e v , S. L.: On a theorem of functional analysis (Russian). Mat. Sb. **4** (1938) 471–497
[61] S o b o l e v , S. L.: Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik. Berlin: Akademie Verlag 1964 (Übersetzung aus dem Russischen: Leningrad 1950)
[62] S t e i n , E. M.: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton Univ. Press 1970
[63] S t e i n , E. M.; W e i s s , G.: On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H^p spaces. Acta Math. **103** (1960) 25–62
[64] S t e i n , E. M.; W e i s s , G.: Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton: Princeton Univ. Press 1971
[65] S t r i c h a r t z , R. S.: Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold. J. Funct. Anal. **52** (1983) 48–79
[66] T a i b l e s o n , M. H.: On the theory of Lipschitz spaces of distributions on euclidean n-space. I, II. J. Math. Mechanics **13** (1964) 407–479; (1965) 821–839
[67] T r i e b e l , H.: Spaces of distributions of Besov type on euclidean n-space. Duality, interpolation. Ark. Mat. **11** (1973) 13–64
[68] T r i e b e l , H.: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publ. 1978, and Berlin: VEB Deutscher Verlag Wissenschaften 1978
[69] T r i e b e l , H.: Fourier Analysis and Function Spaces. Leipzig: BSB Teubner 1977
[70] T r i e b e l , H.: Spaces of Besov-Hardy-Sobolev Type. Leipzig: BSB Teubner 1978
[71] T r i e b e l , H.: Theory of Function Spaces. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser 1983, and Leipzig: Geest & Portig 1983
[72] T r i e b e l , H.: Characterizations of Besov-Hardy-Sobolev spaces via harmonic functions, temperatures and related means. J. Approximation Theory **35** (1982) 275–297
[73] T r i e b e l , H.: Characterizations of Besov-Hardy-Sobolev spaces: A unified approach. J. Approximation Theory
[74] T r i e b e l , H.: Diffeomorphism properties and pointwise multipliers for function spaces
[75] T r i e b e l , H.: Spaces of Besov-Hardy-Sobolev type on complete Riemannian manifolds. Ark. Mat. **24** (1986) 299–337
[76] T r i e b e l , H.: Characterizations of function spaces on a complete Riemannian manifold with bounded geometry. Math. Nachr. **130** (1987)
[77] Z y g m u n d , A.: Smooth functions. Duke Math. J. **12** (1945) 47–76
[78] P e t r o w , A. S.: Einstein-Räume. Berlin: Akademie Verlag 1964
[79] T r i e b e l , H.: Function spaces on Lie groups, the Riemannian approach. J. London Math. Soc. **50** (1987)

Hans Triebel
Sektion Mathematik
Universität Jena
Universitäts-Hochhaus
DDR-6900 Jena

(*Eingegangen 23. 12. 1985*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein
89 (1987) 179–195

Helmut Werner

D. Braess, Bochum, und R. Schaback, Göttingen

Helmut Werner wurde am 22. März 1931 in Zwenkau bei Leipzig als Sohn des Studienrates Kurt Werner und seiner Ehefrau Charlotte, geb. Zöpfel, geboren.

Nach dem Abitur 1949 an der Petri-Schule in Leipzig begann Helmut Werner sein Studium in Leipzig bei Beckert, Hölder und Kähler. Er ging 1951 in die Bundesrepublik und konnte sofort in Göttingen weiterstudieren, weil das Abitur auch in der Bundesrepublik anerkannt wurde, sofern man schon drei Semester studiert hatte. In Göttingen hörte er bei Deuring, Heinz, Kaluza, Rellich und Siegel. Bis zum Staatsexamen 1954 befaßte er sich vornehmlich mit reiner Mathematik und schwerpunktmäßig mit partiellen Differentialgleichungen, in die er durch F. Rellich tiefer eingeführt wurde. Die Vorliebe für reelle Analysis zieht sich durch seine ganze spätere wissenschaftliche Tätigkeit.

Als Dissertationsthema wählte sich Helmut Werner ein Problem aus der Differentialgeometrie. Infolge des Todes von Rellich wurde die Dissertation 1956 von Siegel und Heinz als Doktorarbeit angenommen. Das Thema betraf die Existenz genau einer n-fach zusammenhängenden Fläche konstanter mittlerer Krümmung H, die von n vorgegebenen rektifizierbaren Jordankurven in der Einheitskugel berandet wird [1]. In seiner Arbeit verallgemeinerte er ein grundlegendes Ergebnis von Heinz, das den Fall n = 1 behandelte und $|H| < (\sqrt{17} - 1)/8$ voraussetzte, auf allgemeine n und $|H| < 1/2$.

Der Beweis wird über a-priori-Abschätzungen erbracht, die für Lösungen des Randwertproblems

$$\Delta x = 2Hx_\mu \times x_\nu$$

in Normalgebieten gelten. Die Existenz solcher Lösungen ergibt sich mit der Leray-Schauderschen Theorie. Die Lösungen werden schließlich in eine Minimalfolge für ein Variationsproblem eingesetzt, und ein Kompaktheitsargument liefert eine Lösung des Variationsproblems, die sich als Fläche konstanter mittlerer Krümmung herausstellt [1].

Die à-priori-Abschätzungen aus seiner Dissertation variierte er, um den Fall n = 1 unter Weglassung der Rektifizierbarkeit der berandenden Jordankurve zu behandeln [4]. Dazu führte er einen zusätzlichen Approximationsprozeß für die Jordankurven ein; die Eindeutigkeit der Lösung geht dabei allerdings verloren.

Während der Anfertigung seiner Dissertation hatte Helmut Werner eine numerische Arbeit für die Reaktorgruppe des Max-Planck-Institutes für Physik ausgeführt und dabei (vorwiegend nachts) die dortigen Rechenanlagen G1 und G2, also die ersten elektronischen Computer des europäischen Kontinents, benutzt. Die numerische Mathematik und ihre Hilfsmittel haben ihn damals so begeistert, daß er nach der Promotion 1957 die angebotene Stelle am Mathematischen Institut ausschlug; er ging als wissenschaftlicher Mitarbeiter an das Max-Planck-Institut in Göttingen, später an die Kernreaktorbau- und Betriebsgesellschaft in Karlsruhe und an das AEG-Forschungsinstitut in Frankfurt.

In dieser Zeit entstanden die Veröffentlichungen [2, 3, 6, 7]. Seine Forschungstätigkeit für die Max-Planck-Gesellschaft und die Industrie war jedoch von kurzer Dauer, weil Angebote aus den Vereinigten Staaten es ihm erlaubten, die Beschäftigung mit numerischer Mathematik mit der Tätigkeit an einer Universität zu verbinden. In Deutschland war damals die numerische Mathematik als mathematisches Fach erst an wenigen Universitäten vertreten.

So ging Helmut Werner 1958 für zwei Jahre in die USA, um auf Einladung der University of Southern California in Los Angeles die Stelle eines Assistant Professors wahrzunehmen. Er lernte dort Lothar Collatz kennen, der als einer der führenden Numeriker in Deutschland den Ausbau dieser Fachrichtung betrieb und deshalb Helmut Werner anbot, sich in Hamburg zu habilitieren. Dieses Angebot nahm er an; er ging 1961 nach Hamburg und habilitierte sich dort 1962 (vgl. [10] und [11]). Mehrfach hat er in seinen Arbeiten die Förderung durch L. Collatz dankbar erwähnt.

1963 folgte Helmut Werner einer Einladung auf eine Gastprofessur an der Stanford University, die er bis zu seiner Berufung nach Münster 1964 wahrnahm. An der Universität Münster wurde er Direktor des Instituts für Numerische und instrumentelle Mathematik und gleichzeitig des Universitäts-Rechenzentrums.

Beide Einrichtungen mußte er erst neu aufbauen; die numerische Mathematik war vorher nicht in Münster institutionalisiert. Die enge Verbindung von Mathematik und einer anwendungsorientierten Informatik in der Personalunion eines Lehrstuhls im Fachbereich Mathematik und der Rechenzentrumsleitung erlaubte es Helmut Werner später, aus beiden Bereichen Nutzen zu ziehen, da er einerseits die numerische Mathematik während des Vormarsches der Computer unter direkter Einbeziehung dieser Rechenhilfsmittel weiterentwickeln und andererseits mathematische Exaktheit in die neuen vielfältigen Rechneranwendungen in andere Wissenschaften tragen konnte.

1980 nahm Helmut Werner einen Ruf an die Universität Bonn an, nachdem er vorher mehrere Rufe abgelehnt hatte. Sicherlich reizte ihn, daß in Bonn eine starke Gruppe in der reellen Analysis existierte und weil starke Wechselwirkungen zwischen der numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen und der reellen Analysis bestehen. Die ihm lieb gewordene Gewohnheit, häufig mit dem Fahrrad ins Institut zu kommen, hat er bei seinem Wechsel nach Bonn beibehalten, obwohl dann zwischen Bonn und seinem Haus in Röttgen eine größere Höhendifferenz überwunden werden mußte.

In den fünfziger Jahren war die numerische Mathematik noch auf die herkömmlichen Rechenhilfsmittel ausgerichtet, nämlich mechanische Tischrechenmaschinen, Nomogramme und Rechenschieber. Die neuen elektronischen Rechenanlagen machten es erforderlich, die numerische Mathematik bis herunter zu den Lehrbüchern neu aufzubauen. Es wurde möglich, Probleme ganz anderer Größenordnung numerisch zu bewältigen, aber die Übertragung der für kleinere Probleme geeigneten Methoden und mit ihren Kontrollen durch Augenschein war mit einem Überdenken und Umdenken verbunden. Während beim Rechnen per Hand die Auswahl des passenden Verfahrens im Einzelfall entschieden werden konnte, fragte man jetzt nach breiter verwendbaren Verfahren mit exakt faßbarem Anwendungsbereich. Die Notwendigkeit neuen Lehrmaterials in dieser Umbruchsituation hat Helmut Werner früh erkannt, und er hat das Schreiben von Lehrbüchern für Studenten zügig in Angriff genommen. Dies begann mit der „Vorlesung über Approximationstheorie“ [17]. Wegen der damals noch ungewohnten gelben Farbe der Springer Lecture Notes und der häufigen Benutzung dieses Bandes gab es im Institut die Redensart „Das steht doch im Telefonbuch!“ Wenn ein jüngerer Mitarbeiter einen ihm unbekannten Gast vom Bahnhof abholte, nahm er selbstredend das „Telefonbuch“ als Erkennungszeichen mit.

Es folgte bald das zweibändige Lehrbuch „Praktische Mathematik“ ([27] und [29] mit 3 bzw. 2 Auflagen, eine englische Neufassung konnte Helmut Werner nicht mehr vollenden), eine für Lehrer gedachte „Einführung in die Probleme der praktischen Mathematik“ ([40], [45], 2 Bände, 2 Auflagen), ein Textbuch „Numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen“ eines Kurses der Fernuniversität Hagen sowie ein fast vollendetes Buch „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ [87].

In allen Fällen entstanden die Bücher nach mehrmaligen „Probeläufen“ in Form von vervielfältigten Vorlesungsausarbeitungen. Sie waren konsequent darauf ausgerichtet, dem Studenten das Material in einer expliziten und daher gut „verdaulichen" Form zu präsentieren. Es wurde stets die Gefahr vermieden, durch den Anspruch auf Vollständigkeit Nachschlagewerke für Wissenschaftler mit kompakter Formulierung anstatt Lehrbücher für Studenten zu schreiben oder andererseits durch Überbetonung des Didaktischen ein Verflachen des wissenschaftlichen Gehalts zu bewirken. Besonders deutlich ist das bei der Behandlung der Splinefunktionen in der „Praktischen Mathematik". Die Darstellung liefert keine vollständige Theorie der Splines; vielmehr soll der Student hier an die für die numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen so wichtige Methode des Arbeitens mit *mehreren* Normen herangeführt werden.

Die wissenschaftlichen Arbeiten von Helmut Werner sind größtenteils dem Gebiet „Numerische Approximation" zuzurechnen. In den Jahren 1958–1969 stand dabei die für die Anwendungen besonders wichtige Tschebyscheff-Approximation mit Polynomen [3, 6] und mit rationalen Funktionen im Vordergrund [9–12, 14–20, 69]. Gesucht ist dabei eine rationale Funktion $R^*_{m,n}[f]$ auf einem Intervall [a, b] mit vorgegebenen maximalen Zähler- und Nennergraden n und m, die in der Maximumsnorm eine gegebene stetige Funktion f bestmöglich approximiert:

$$\|f - R^*_{m,n}[f]\|_\infty := \min_{\partial p \leq n,\, \partial q \leq m,\, q > 0} \|f - \frac{p}{q}\|_\infty .$$

Zu dieser Fragestellung kommt man bei der Berechnung der Werte spezieller Funktionen auf Rechenanlagen: man nutzt in der Regel zunächst Funktionalgleichungen aus, um sich auf ein endliches Intervall beschränken zu können (z. B. $e^x = (e^{\frac{x}{n}})^n$ oder $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$). Man kann dann durch eine optimale rationale Tschebyscheff-Approximation einen gleichmäßig kleinen und a priori abschätzbaren Fehler garantieren. Die Arbeiten [10, 11, 18, 19] lieferten durch Übertragung des aus der linearen Approximation bekannten Remez-Algorithmus ein sehr effizientes Lösungsverfahren, das unempfindlicher gegen Rundungen ist als der theoretisch besser abgesicherte *differential-correction*-Algorithmus. Eine Reihe von technischen Mitteilungen, die im zweiten Teil des Schriftenverzeichnisses aufgeführt sind, demonstrieren den weiten Anwendungsbereich dieses Verfahrens.

Bei der Untersuchung des Remez-Algorithmus für rationale Funktionen ergibt sich die Frage nach der Abhängigkeit der Minimallösung $R^*_{m,n}[f]$ von der gegebenen Funktion f. Es ist zu klären, wann eine Entartung (d. h. Zähler- und Nennergrad sind nicht maximal) möglich ist. So wird in [15] gezeigt, daß die nichtrationalen Funktionen f mit ausgearteter Lösung $R^*_{m,n}[f]$ genau diejenigen Elemente in C[a, b] sind, in denen die Abbildung

$$f \mapsto R^*_{m,n}[f]$$

nicht stetig ist. Mit diesen Unstetigkeiten und ihren Konsequenzen [18] deckte Helmut Werner nichtlineare Phänomene auf, die es bei der formal sonst sehr ähnlichen linearen Approximation nicht gibt.

Das Remez-Verfahren erfordert die sukzessive Lösung einer Folge diskreter rationaler Approximationsaufgaben (auf einer Menge von Punkten $t_1, t_2, \ldots, t_{m+n+2}$

statt auf [a, b]). Im Polynomfall ist deren Lösung kein Problem, aber im rationalen Fall ist, wie Helmut Werner in [14] zeigte, eine Gleichung m + 1-ten Grades zu lösen, die sich dann als Eigenwertaufgabe symmetrischer Matrizen schreiben läßt und somit immer m + 1 reelle Wurzeln hat. Die so gewonnenen rationalen Funktionen können ausarten und in [a, b] Polstellen haben. Deshalb hat Helmut Werner in [24] nach Kriterien gesucht, die sowohl die Nichtausartung als auch die Stetigkeit der diskreten rationalen Approximationen sichern (Hypernormalität). Gleichzeitig ergab sich ein globaler Konvergenzbeweis für das Remez-Verfahren bei rationalen Funktionen.

Die Interpolation mit rationalen Funktionen zeigt ebenfalls Ausartungen, die algorithmische Probleme aufwerfen, weil die üblichen Rechenverfahren gezwungen sind, Fallunterscheidungen wegen verschwindender Nenner durchzuführen [27]. Hier hat Helmut Werner bei der Vorbereitung der zweiten Auflage von [27] Varianten des Kettenbruchverfahrens und des Wetterlingschen Algorithmus entwickelt [28, 55, 57], die ohne nennenswerte Fallunterscheidungen auskommen und sich deshalb wesentlich einfacher praktisch umsetzen lassen.

Schon bei der rationalen Approximation hatte sich Helmut Werner besonders für nichtlineare Phänomene interessiert. Auch bei seinen meisten anderen Forschungen in der Approximationstheorie konzentrierte er sich auf nichtlineare Probleme. Für die Approximation mit Familien von Exponentialsummen,

$$E_n = \left\{ \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j x} \sum_{i=0}^{m_i - 1} a_{i,j} x^i \;\middle|\; a_{i,j}, \lambda_i \in \mathbf{R}, \sum_{i=1}^{m} m_i = n \right\},$$

lieferte er den ersten mathematisch strengen Existenzbeweis mittels a-priori-Abschätzungen der Ableitungen von beschränkten Lösungen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen im Innern des Intervalls [21, 25]. Der von ihm gewählte Zugang zeigt in typischer Weise, wie er Techniken der reellen Analysis (wie z. B. das Heranziehen mehrerer Normen) in die Approximationstheorie einbrachte. Mit dem Existenzbeweis war für die Arbeiten seiner Mitarbeiter und Schüler zur Exponentialapproximation eine sichere Basis geschaffen.

Als gänzlich neue Funktionenfamilie führte Helmut Werner 1969 stückweise stetig oder stetig differenzierbar verheftete rationale Funktionen, die sogenannten rationalen Splinefunktionen ein. Er gab einem der Verfasser die Anregung, doch „einmal auszuprobieren, ob man mit dieser Funktionenklasse etwas anfangen könne". Er hat, als sich jener nach seiner Promotion 1969 anderen Problemen zuwandte, die Untersuchungen systematisch weiter verfolgt und ausgebaut [30, 31, 39, 44, 46, 47, 53, 54, 59, 60, 71, 72, 85]. Wesentliche Fortschritte ergaben sich aus einer verbesserten Axiomatik [31, 44] und einer Darstellung dieser Splines als gestörte kubische Splines [39]. Besonders fruchtbar war seine Vermutung, daß sich rationale Splines sehr gut zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen mit beweglichen Singularitäten eignen. Mit ihnen lassen sich Verfahren konstruieren, die Pole durch Extrapolation gut erkennen und dadurch in praktisch befriedigender Weise über Singularitäten hinwegintegrieren [39, 54, 59, 60, 71, 72, 85].

Die Arbeiten [33, 36, 37, 56] haben Beiträge zu einem anderen nichtlinearen Problem bei Splines geliefert, und zwar zu dem Problem bester Knoten von Quadraturformeln. So gelang es Helmut Werner gemeinsam mit Richard Barrar und Henry Loeb, die bezüglich der Hardy-Räume H_p, $1 < p \leqslant \infty$, optimalen Quadraturformeln zu charakterisieren und ihre Existenz zu beweisen.

In letzter Zeit begann sich Helmut Werner auch den Fragen der mehrdimensionalen Interpolation und Approximation zuzuwenden [61, 62, 74] und (mit L. Wuytack) die Stetigkeitseigenschaften der Padé-Abbildung in einer [70] und mehreren [79] Veränderlichen zu untersuchen. Er hatte gerade begonnen, unterschiedliche Ansätze für die mehrdimensionale Padé-Approximation zu analysieren [80], als der Tod seiner Arbeit ein Ende setzte.

Helmut Werner versuchte auch, auf die Schulmathematik stimulierend einzuwirken. Sein allgemeines Ziel, Sinn und Realisierbarkeit mathematischer Strukturen zu verdeutlichen, sollte in der Schulmathematik Akzente der praktischen und numerischen Mathematik mit einer mehr algorithmischen Denk- und Arbeitsweise setzen, vor allem angesichts des seit einiger Zeit finanziell möglichen Einsatzes von Kleincomputern. So wurden auf seine Anregung hin und unter seiner Leitung in Zusammenarbeit mit der Landesstelle für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (MNU) am Rechenzentrum der Universität Münster von 1971 bis 1979 fast regelmäßig pro Jahr zwei Studienwochen für Mathematiklehrer Nordrhein-Westfalens abgehalten, in denen numerische Verfahren und der Einsatz von Rechnern behandelt wurden. Er hat sich darüber hinaus auch mehrfach mit Vorträgen an Tagungen des Landesinstituts für Curriculumentwicklung und Lehrerfortbildung (Neuß/Soest) zum Themenkreis Mathematikunterricht beteiligt (vgl. Nr. 33 im 2. Teil des Schriftenverzeichnisses). Dem hierin sichtbaren Anliegen von Helmut Werner sind auch die ja vorwiegend für Mathematiklehrer gedachten Bändchen [40], [45], [66] entsprungen, in denen der sonst übliche Aufwand an Formeln zugunsten von mehr Motivationen und verbaler Begründungen der Methoden und der mathematischen Sachverhalte zurückgeschraubt wird.

Für die Numeriker der Wissenschaftlergeneration Helmut Werner war und ist es selbstverständlich, den Einsatz der Datenverarbeitung in Lehre und Forschung zu fördern; nicht zuletzt, um dadurch auch die originäre Verbindung zwischen Mathematik und Informatik zu betonen und zur Weiterentwicklung der anwendungsorientierten Fachrichtung in der Informatik beizutragen. Wie schon erwähnt, hat Helmut Werner in Göttingen an den ersten elektronischen Rechenanlagen G1 und G2 gearbeitet. In Münster hatte er neben dem Lehrstuhl für numerische und instrumentelle Mathematik in Personalunion auch die Leitung des Hochschulrechenzentrums inne, und in Bonn hat er sich sogleich um eine Rechenanlage mittlerer Größenordnung als für seine Arbeit unabdingbares Hilfsmittel bemüht und diese auch für die Aufgaben des Instituts und des Sonderforschungsbereiches 72 erreicht.

Neben den numerischen Forschungsvorhaben, die stets unter Benutzung von Computern durchgeführt wurden – er liebte häufig auch ein experimentelles Vorgehen bei seiner Arbeit – hat Helmut Werner auch auf nichtnumerischem

Gebiet mit seinen Mitarbeitern eine Reihe von Projekten durchgeführt, die nur zum Teil in Veröffentlichungen ihren Niederschlag gefunden haben. Sie belegen eindrücklich, daß er die Leitung eines wissenschaftlichen Rechenzentrums als Möglichkeit benutzte, Mathematik und Informatik in die anderen Wissenschaften zu tragen. Bis zu seinem Wechsel nach Bonn war er mehrere Jahre ein einflußreiches Mitglied des dortigen Sonderforschungsbereiches „Mittelalterforschung". Durch ihn geprägt, war das Rechenzentrum ein Ort interdisziplinärer Forschung; im Gegensatz zu diesem Vorbild erscheinen die heutigen Rechenzentren meistens als reine Dienstleistungsunternehmen. Die fatale Entwicklung, wissenschaftliche Aktivitäten aus den Rechenzentren herauszunehmen und die Verbindung über die Rechneranwendung zwischen verschiedenen Fakultäten zu beseitigen, lag größtenteils nicht an den Rechenzentren selbst, sondern geschah auf politischen Druck. Helmut Werner hat sich immer wieder und mit vollem Einsatz seiner Kräfte dieser Entwicklung entgegengestellt, ohne sie letztlich ändern zu können. Im Rückblick ist zu bedauern, daß diese Auseinandersetzungen einen so großen Anteil seiner Zeit und seiner Energie aufzehrten.

Ein sehr bedeutender Teil der nichtnumerischen Arbeit von Helmut Werner bezieht sich auf ein Projekt, das heute der Informatik zugerechnet werden müßte: der computergesteuerten Übersetzung deutscher Texte in Blindenschrift [23, 38, 50, 72, 79].

Kurz nach ihrer Heirat besuchten Helmut Werner und seine Frau eine Freundin und erfuhren von deren blindem Manne viel über Braille. Das Gespräch inspirierte Helmut Werner dazu, auf Datenträgern erfaßte Texte durch ein geeignetes Computerprogramm so zu bearbeiten, daß damit auf direktem maschinellem Wege Druckvorlagen für Braille-Druckmaschinen herstellbar sind. Zusammen mit seinem Mitarbeiter Winfried Dost hat er ein erstes solches Programm entwickelt, das in der folgenden Zeit ständig weiterentwickelt wurde. Schon das 1968 erreichte Übersetzungssystem für die Blindenschrift (die eigentlich eine Kurzschrift ist) lieferte eine so hohe Übersetzungsgenauigkeit, daß die Herstellung der bekannten Blindenzeitung ZEIT/STERN aufgenommen werden konnte, die seither alle zwei Wochen erscheint, für Blinde kostenlos zu beziehen ist und derzeit von über 5000 Blinden in 35 verschiedenen Ländern abonniert wird. 1973 organisierte und veranstaltete Helmut Werner die erste internationale Tagung über „Computerized Braille Production", der seither weitere dieser Art in London, Kopenhagen, Toulouse und Winterthur folgten.

Wie bei der automatischen Übersetzung jeder gewachsenen Sprache wurde auch hier deutlich, daß man Übersetzungen nur dann in vertretbaren Rechenzeiten erhält, wenn man gewisse Fehler toleriert. In Zusammenarbeit mit Blinden wurde herausgefunden, welche Fehler tolerabel sind. Im Laufe der Zeit brauchte der Leser infolge der ständigen Verbesserung immer weniger Fehler zu akzeptieren. Die Sparsamkeit von Helmut Werner verhinderte, daß die Zunahme der Rechengeschwindigkeiten der Großrechner durch aufwendige Programme kompensiert wurde. Der Fortschritt in der Rechnerentwicklung wurde vielmehr dazu benutzt, das Programmsystem auf Heimcomputer zu übertragen, so daß es an mehreren Stellen im Blindenwesen einsetzbar wurde.

Die Diskussionen über die Fehler bei der Blindenschriftübersetzung können wir uns heute kaum vorstellen, haben wir uns doch inzwischen an Satz- und Trennungsfehler beim Lesen der Tageszeitungen gewöhnt. Viel krasser zeigte sich die Problematik damals bei einer ähnlichen Aufgabe. Das Erstellen einer Konkordanz der Bibel erforderte früher Jahre des Erstellens von Zetteln mit Stichworten, Auszügen, dem Sortieren und dem Abschreiben der Zettel. Dies konnte nun maschinell erfolgen. Wir erinnern uns an heftige Diskussionen, ob die Beseitigung der wenigen Fehler aus dem Computereinsatz noch eine aufwendige Korrektur von Hand lohnt oder nicht (ehe ein Nachschlagewerk in endgültiger Form gedruckt wird).

Da die Herstellung von Büchern und anderer Texte immer mehr über Datenträger erfolgt, wächst die praktische Bedeutung der automatischen Blindenschriftübersetzung ständig weiter. Für seine Verdienste auf diesem Gebiet wurde Helmut Werner 1976 vom Verein blinder Geistesarbeiter Deutschlands zum Ehrenmitglied gewählt; im Oktober 1984 wurde ihm der Louis-Braille-Preis durch den Deutschen Blindenverband verliehen, und im Juni 1985 erhielt er die Carl-Strehl-Plakette des Deutschen Vereins der Blinden und Sehbehinderten in Studium und Beruf und der Deutschen Blindenstudienanstalt Marburg.

Vorbilder dieser Art sind nach Ansicht der Verfasser leider viel zu selten. Hier ist durch Helmut Werner und seine Mitarbeiter etwas geleistet worden, das sich nicht in wissenschaftlichen Publikationen der üblichen Art festhalten läßt und sich auch weitgehend außerhalb des heutigen Selbstverständnisses der Wissenschaft bewegt. Und dennoch ist gerade durch diese Arbeit vielen Menschen, die ein schweres Schicksal zu tragen haben, geholfen worden; deren Dankbarkeit für Helmut Werners Leistung gibt uns Wissenschaftlern durchaus Anlaß zum Überdenken unserer Ziele und Motive.

Auch bei mehreren Projekten, die Probleme aus der Medizin mit Hilfe mathematischer Methoden behandelten, ging es Helmut Werner um ein direktes Nutzbarmachen der Wissenschaft für die Menschen. Nur selten erreichte dabei die zur Anwendung kommende Mathematik ein mathematisch anspruchvolles Niveau, und nur selten ergeben sich bei solchen Projekten neue Impulse für die Mathematik. Das Ansehen der Mathematik im Wissenschaftsbereich wurde dadurch aber erheblich gesteigert, weil sich zeigte, daß die Mathematik kein Orchideenfach ist, sondern sich auf viele medizinische Probleme nutzbringend anwenden läßt. Helmut Werner hat sich hier in vorbildlicher Weise bemüht, den Ausgleich zwischen mathematischem Wissenschaftlichkeitsanspruch und konkreter Hilfeleistung herzustellen, indem er mit seinen Kenntnissen half, wo es etwas zu helfen gab, und dabei auf mathematische Exaktheit und Vollständigkeit der mathematischen Durchdringung achtete.

Die Arbeiten [34, 35, 41, 49, 51, 75, 82, 84] entstammen im wesentlichen der interdisziplinären Arbeit am Münsteraner Rechenzentrum. Sie sind größtenteils aus Beratungsfällen des Rechenzentrumsbetriebs hervorgegangen und gemeinsam mit den Anwendern und Rechenzentrumsmitarbeitern publiziert. Den Anstoß gab meistens die Tatsache, daß zwar wenig Mathematik im engeren Sinne, aber ein größeres Maß an mathematischer Denkweise nötig war, als der Anwender mitbrachte. In einer Folge von Besprechungen zwischen dem Anwender und einigen Rechenzentrumsmitgliedern wurden dann die Grundlagen des Problems herausgearbeitet und das weitere Vorgehen festgelegt. In der Regel waren dabei die Ideen von Helmut Werner Antriebskräfte für das gesamte Projekt bis zu dessen Abschluß; er hat an wesentlich mehr Projekten aktiv mitgearbeitet, als aus dem Schriftenverzeichnis ersichtlich ist; die Liste der *technical reports* gibt einen repräsentativen Überblick. Die innerhalb der einzelnen Projekte zur Anwendung gebrachten Methoden waren sehr vielfältig; sie erstreckten sich von reeller Analysis über numerische Mathematik bis zur Informatik.

Stellvertretend sei das Problem der Berechnung der Parameter von Systemen künstlicher Linsen erwähnt: die gemeinsam mit Augenärzten und Rechenzentrumsmitarbeitern entwickelten Berechnungsverfahren waren einerseits im Ergebnis so einfach, daß sie kaum mathematische Vorkenntnisse erforderten und in kurzer Zeit durchführbar waren; andererseits waren sie so genau, daß Patienten mit *einseitiger Aphakie*, denen an einem Auge eine künstliche Linse eingepflanzt wird, mit Hilfe des so berechneten Systems von Kunstlinse, einer zusätzlichen Kontaktlinse und Brillenlinse wieder ein klares räumliches Sehen vermittelt wird. Mehrere hundert Patienten sind inzwischen auf diese Weise erfolgreich behandelt worden.

Die vielfältigen wissenschaftlichen Aktivitäten von Helmut Werner fanden ihren Niederschlag auch darin, daß er gemeinsam mit anderen, hauptsächlich mit L. Collatz und G. Meinardus, eine größere Anzahl wissenschaftlicher Tagungen leitete und als Herausgeber entsprechender Proceedings auftrat [26, 42, 43, 48, 58, 72, 77]. Ferner war er Mitherausgeber der Zeitschriften „Computing", „Journal for Computational and Applied Mathematics" sowie „Numerische Mathematik" und hat durch eine Vielzahl von Referaten das wissenschaftliche Niveau und den Praxisbezug dieser Journale hochgehalten.

Gleiches gilt für sein gutachterliches Wirken im Rahmen der Deutschen Forschungsgemeinschaft als Fachgutachter für Mathematik von 1972–1979, als Mitglied des Senatsausschusses für die Angelegenheiten der Sonderforschungsbereiche von 1976 bis 1982. Von 1976 bis 1978 war er Mitglied des Ad-hoc-Committee on Mathematics der European Science Foundation (ESF).

Helmut Werner war Mitglied der Fachverbände

- Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)
- Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM)
- Gesellschaft für Informatik (GI)

entsprechend der Breite seiner wissenschaftlichen Interessen und wurde für 1982 und 1983 zum Vorsitzenden des Präsidiums der DMV gewählt.

Auch in dieser Tätigkeit hat er versucht, die bekannten Auseinandersetzungen zwischen reiner Mathematik, angewandter Mathematik und Informatik konstruktiv auszugleichen und für alle drei Gebiete fruchtbar zu wirken. Als Beispiel können die in den Mitteilungen der DMV abgedruckten Grußworte zu den Jahrestagungen 1982 und 1983 oder die Stellungnahme der DMV zum Informatikunterricht an Gymnasien gelten, bei deren Abfassung er Wesentliches beigetragen hat: sie stellt fest, daß die Behandlung von Algorithmen und der Einsatz von

Rechnern im Mathematikunterricht fachgerecht ist und selbstverständlich sein sollte unabhängig von der Frage nach der Notwendigkeit eines eigenen Schulfaches Informatik. Damit sollte einer Schwächung des Mathematikunterrichts zugunsten verfrühter informatikbezogener Lerninhalte entgegengewirkt und gleichzeitig ein solides Fundament für alle drei Disziplinen gelegt werden. Helmut Werners wissenschaftlicher Werdegang ist das beste Beispiel für die Fruchtbarkeit dieses Bildungskonzeptes.

Neben den schon erwähnten Ehrungen für seine Arbeit an der automatisierten Blindenschriftübersetzung wurde Helmut Werner 1978 zum Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher – Leopoldina – gewählt. Sein früher Tod am 22. 11. 1985 hat weitere Auszeichnungen für seine hohen Verdienste zu Lebzeiten verhindert; die nachfolgenden Wissenschaftlergenerationen werden ihn als Vorbild für die Verbindung hoher mathematisch-wissenschaftlicher Qualität mit konkreter und direkter Hilfe für seine Mitmenschen weiterhin in ehrendem Andenken behalten.

Die Verfasser danken Herrn Dr. P. Janßen (Bonn) für seine Hilfe bei der Redaktion des Textes.

Schriftenverzeichnis

[1] Das Problem von Douglas für Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Math. Annalen **133** (1957) 303–319

[2] ... und H. Rief: Physikalische Gesichtspunkte beim Entwurf eines Forschungsreaktors mit leicht angereichertem Uran. Kernreaktorbau- und Betriebsgesellschaft Karlsruhe (1957), 130 Seiten

[3] Tschebyscheffsche Approximationen für Besselfunktionen. Nukleonik **1** (1958) 60–63

[4] The Existence of Surfaces of Constant Mean Curvature with Arbitrary Jordan Curves as Assigned Boundary. Proceedings of the AMS **11** (1960) 63–70

[5] Schwarz's Alternating Method for Boundary Value Problems of the Third Kind. Tech. Report University of Southern California (1960), 20 Pages

[6] ... and R. Collinge: Chebyshev Approximations to the Gamma Function. Math. of Computation **XV** (1961) 195–197

[7] H. Neu und ...: Analytische Näherungsverfahren zur Berechnung azimutal periodischer Magnetfelder in Kreisbeschleunigern. Nuclear Instruments and Methods **10** (1961) 329–334

[8] L. Collatz und ...: Anfangswertprobleme der gewöhnlichen Differentialgleichungen in funktionalanalytischer Behandlung. Math. Phys. Semesterberichte **9** (1962) 22–40

[9] Ein Satz über diskrete Tschebyscheff-Approximation bei gebrochen linearen Funktionen. Num. Math. **4** (1962) 154–157

[10] Tschebyscheff-Approximation im Bereich der rationalen Funktionen bei Vorliegen einer guten Ausgangsnäherung. Arch. Rational Mech. Anal. **10** (1962) 205–219

[11] Die konstruktive Ermittlung der Tschebyscheff-Approximierenden im Bereich der rationalen Funktionen. Arch. Rational Mech. Anal. **11** (1962) 368–384

[12] ... and G. Raymann: An Approximation to the Fermi Integral $F_{1/2}(x)$. Math. of Computation **11** (1963) 193–194

[13] Anwendungen und Fehlerabschätzungen für das alternierende Verfahren von H. A. Schwarz. ZAMM **43** (1963) 55–61

[14] Rationale Tschebyscheff-Approximation, Eigenwerttheorie und Differenzenrechnung. Arch. Rational Mech. Anal. **13** (1963) 330–347
[15] On the rational Tschebyscheff-Operator. Math. Z. **86** (1964) 317–326
[16] Zur einheitlichen Behandlung von Tschebyscheff- und L_p-Approximation mit rationalen Funktionen. ZAMM **45** (1965) 507–511
[17] Vorlesung über Approximationstheorie. Lecture Notes in Mathematics 14, Springer-Verlag 1966, 196 S.
[18] Die Bedeutung der Normalität bei rationaler Tschebyscheff-Approximation. Computing 2 (1967), 34–52
[19] . . ., J. Stoer, W. Bommas; Rational Chebyshev Approximation. Num. Math. **10** (1967) 289–306
[20] Diskretisierung bei Tschebyscheff-Approximation mit verallgemeinerten rationalen Funktionen. Oberwolfach 1966, ISNM 9, Birkhäuser Verlag 1968, 381–391
[21] Der Existenzsatz für das Tschebyscheffsche Approximationsproblem mit Exponentialsummen. Oberwolfach 1967, ISNM 12, Birkhäuser Verlag 1969, 133–143
[22] L. Collatz, . . ., I. Werner: Neuere Entwicklung in der Numerischen Mathematik. In: Grundzüge der Mathematik, Bd. V, Vandenhoeck & Ruprecht 1968
[23] . . . und W. Dost: Automatisierte Herstellung von Blindenschrift mit Hilfe einer Datenverarbeitungsanlage. IBM-Nachrichten **194** (1969) 594–599
[24] . . . und D. Braess: Über den Zusammenhang von Interpolation und diskreter Tschebyscheff-Approximation mit rationalen Funktionen. Num. Math. **13** (1969) 112–128
[25] Tschebyscheff-Approximation with Sums of Exponentials. In: Approximation Theory, A. Talbot (ed.), Academic Press 1970, 109–136
[26] L. Collatz, G. Meinardus, H. Unger, . . . (eds.): Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, Approximationstheorie. ISNM 15, Birkhäuser Verlag 1970
[27] Praktische Mathematik I. Springer Verlag 1970, 275 S., 2. Auflage 1975, 3. Auflage 1982
[28] Eine Faktorisierung der bei der rationalen Interpolation auftretenden Matrizen. Num. Math. **18** (1972) 423–431
[29] . . . und R. Schaback: Praktische Mathematik II. Springer-Verlag 1972, 355 S.
[30] Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Spline-Funktionen I. J. of Approximation Theory **10** (1974) 74–92
[31] D. Braess und . . .: Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Spline-Funktionen II. J. of Approximation Theory **10** (1974) 379–399
[32] Einige Aufgabenstellungen der Informatik: Die Entwicklung des Programmierens und der Betriebssysteme elektronischer Rechenanlagen. Math. Phys. Semesterberichte **20** (1973) 114–134
[33] R. B. Barrar, H. L. Loeb, and . . .: Optimal Integration Formulas for Analytic Functions. Bull. AMS **79** (1973) 1296–1298
[34] . . ., H. Gernet, G. Neuser: Rechenschemata, Nomogramme und Tabellen zur Berechnung der Brennweiten linsenhaltiger ametroper brillen- und haftschalenkorrigierter Augen sowie der Brechkräfte der Augenlinsen. Berichte der GMD Nr. 86 (1974), 35 S.
[35] . . ., H. Gernet, H. Ostholt, G. Neuser: Formeln zur Berechnung der optischen Größen, die bei den mit Brillen und Haftschalen korrigierten Augen auftreten. Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster Nr. 4 (1974), 26 S.
[36] H. L. Loeb and . . .: Optimal Numerical Quadrature in H_p-Spaces. Math. Zeitschrift **138** (1974) 111–117
[37] R. B. Barrar, H. L. Loeb, and . . .: On the Existence of Optimal Integration Formulas for Analytic Functions. Num. Math. **23** (1974) 105–117
[38] R. A. J. Gildea, G. Hübner, . . . (eds.): Computerized Braille Production. Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster Nr. 9 (1974), 95 S.; abgedruckt in ACM SIGCAPH-Newsletter 15, March 1975

[39] Interpolation and Integration of Initial Value Problems of Ordinary Differential Equations by Regular Splines. SIAM J. Num. Anal. **12** (1975) 255–271
[40] . . ., und I. Werner, P. Janßen: Probleme der praktischen Mathematik (Eine Einführung), Bd. 1, Schwann-Verlag 1975, 157 S.
[41] . . ., H. Ostholt, H. Gernet: Beitrag zur augenseitigen Optik. Graefes Arch. Ophtal. **199** (1976) 281–291
[42] L. Collatz, G. Meinardus, . . . (eds.): Numerische Methoden bei graphentheoretischen und kombinatorischen Problemen. ISNM 29, Birkhäuser Verlag 1975
[43] L. Collatz, G. Meinardus, . . . (eds.): Numerische Methoden der Approximationstheorie, Bd. 3, ISNM 30, Birkhäuser Verlag 1976
[44] . . . and H. Loeb: Tschebyscheff Approximation by Regular Splines with Free Knots. In: Lecture Notes in Mathematics, Bd. 556, Springer-Verlag 1976, 439–452
[45] . . ., P. Janßen, H. Arndt: Probleme der praktischen Mathematik (Eine Einführung), Bd. 2, Schwann-Verlag 1976
[46] Neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der nichtlinearen Splines. ZAMM **58** (1978) T 86–95
[47] . . . and L. Wuytack: Nonlinear Quadrature Rules in the Presence of a Singularity. Comp. & Maths. with Appl. **4** (1978) 237–245
[48] L. Collatz, G. Meinardus, . . . (eds.): Numerische Methoden der Approximationstheorie, Bd. 4, ISNM 42, Birkhäuser Verlag 1978
[49] H. Gernet, H. Ostholt, . . .: Intraokulare Optik in Klinik und Praxis. Berlin – Köln – München – Regensburg: Rothacker 1978
[50] . . . (ed.): Computerized Braille Production. Proceedings of the 2nd International Workshop in Copenhagen (September 1974). Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster Nr. 30 (1978)
[51] M. Bestehorn, U. Ebert, D. Steinhausen, . . .: Some Applications of Computational Mathematics to Medical Problems. In: Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, 1977, R. Glowinski and J. L. Lions (eds.), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1979, 377–391
[52] . . ., R. Schaback: Praktische Mathematik II, 2. Auflage. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1979
[53] An Introduction to Non-Linear Splines. In: Polynomial and Spline Approximation, B. N. Sahney (ed.), Dordrecht: Reidel Publishing Company 1979, 247–306
[54] Extrapolationsmethoden zur Bestimmung der beweglichen Singularitäten von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. In: Numerische Mathematik, R. Ansorge, K. Glashoff, B. Werner (eds.), ISNM 49, Birkhäuser Verlag 1979, 159–176
[55] A Reliable Method for Rational Interpolation. In: Padé Approximations and its Applications, L. Wuytack (ed.), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1979, 257–277
[56] R. B. Barrar, H. L. Loeb, . . .: On the Uniqueness of the Best Uniform Extended Totally Positive Monospline. J. of Approximation Theory **28** (1980) 20–29
[57] Ein Algorithmus zur rationalen Interpolation. ISNM 52, Birkhäuser Verlag 1980, 319–337
[58] L. Collatz, G. Meinardus, . . . (eds.): Numerische Methoden der Approximationstheorie, Bd. 5, ISNM 52, Birkhäuser Verlag 1980
[59] Spline Functions and the Numerical Solution of Differential Equations. In: Special Topics of Applied Mathematics, J. Frehse, D. Pallaschke, U. Trottenberg (eds.), North-Holland Publishing Company 1980
[60] The Development of Non Linear Splines and their Applications. In: Approximations Theory III, E. W. Cheney (ed.), Academic Press 1980, 125–150

[61] Remarks on Newton Type Multivariate Interpolation for Subsets of Grids. Computing **25** (1980) 181–191
[62] Numerical Algorithms for Interpolation and Smoothing. In: Map Data Processing, H. Freeman and G. Pieroni (eds.), Academic Press 1980, 331–353
[63] . . ., P. Janßen, W. Slaby (eds.): Das Hochschulrechenzentrum in interdisziplinärer Forschung. Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster Nr. 43 (1979/80)
[64] Ein einfacher Existenzbeweis für das deterministische Epidemiemodell von Waltman und Hoppensteadt. Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster Nr. 45 (1979/80)
[65] Automatischer Lichtsatz wissenschaftlicher Werke. In: Das Hochschulrechenzentrum in interdisziplinärer Forschung, . . ., P. Janßen, W. Slaby (eds.), Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster Nr. 43 (1979/80) 87–98
[66] . . ., I. Werner, P. Janßen, H. Arndt: Probleme der praktischen Mathematik – Eine Einführung, BI-Taschenbücher 134 und 135, 2. Auflage, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1980
[67] . . ., H. Arndt, P. Janßen: Numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Fernstudienbuch eines Kurses der Fernuniversität Hagen, Hagen 1981
[68] Rationale Interpolation von $|x|$ in äquidistanten Punkten. Math. Z. **180** (1982) 11–17
[69] A Remark on the Numerics of Rational Approximation and the Rate of Convergence of Equally Spaced Interpolation of $|x|$. Circuits, Systems, and Signal Processing **1** (1982) 367–377
[70] . . ., L. Wuytack: On the Continuity of the Padé Operator. SIAM J. Num. Anal. **20** (1983) 1273–1280
[71] Calculations of Singularities for Solutions of Algebraic Differential Equations. In: Proceedings of the Conference on Computational Aspects of Complex Analysis, Dordrecht: Reidel Publishing Company 1983, 325–360
[72] . . ., L. Wuytack, E. Ng, and H. J. Bünger (eds.): Computational Aspects of Complex Analysis, Dordrecht: Reidel Publishing Company 1983
[73] D. W. Croisdale, H. Kamp, and . . . (eds.): Computerised Braille Production – Today and Tomorrow. Springer-Verlag 1983
[74] Mathematische Deutung des „Flat Facet Models" zur Bildverarbeitung. ZAMM **63** (1983) 543–548
[75] . . ., I. Schulte: Ein mathematisches Modell für die Blutbildung. ZAMM **63** (1983) T 391–393
[76] A Reliable and Numerically Stable Program for Rational Interpolation of Lagrange Data. Algorithm/Algorithmus 51. Computing **31** (1983) 269–286
[77] . . . and H. J. Bünger (eds.): Padé Approximation and its Applications. Springer-Verlag 1984
[78] L. Collatz, H. Krisch, . . . und P. Janßen: Der Einfluß der Computer auf die numerische Mathematik. In: Computertechnik im Profil, H. R. Schuchmann und H. Zemanek (eds.), München: R. Oldenburg Verlag 1984, 118–125
[79] A. Cuyt, L. Wuytack, and . . .: On the continuity of the multivarate Padé operator. J. Comp. Appl. Math. **11** (1984) 95–102
[80] Zwei Jahrzehnte automatische Herstellung deutscher Blindenschrift. Marburger Schriftenreihe zur Rehabilitation Blinder, Band 5, Marburg 1984
[81] Zur Diagnose verletzter Knie – ein Identifikationsproblem. In: Numerical Methods of Approximation Theory 7, L. Collatz, G. Meinardus, . . . (eds.), ISNM 67, Birkhäuser 1984, 139–148
[82] . . ., Ch. Fesser: Ein mathematisches Modell für den Reifungsprozeß roter Blutkörperchen bei Neugeborenen. In: Delay Equations, Approximation and Application, G. Meinardus and G. Nürnberger (eds.), ISNM 74, Basel: Birkhäuser Verlag 1985, 304–333

[83] Multivariate Padé Approximation. Numer. Math. **48** (1986) 429–440
[84] Beispiele mathematischer Modelle in der Medizin und ihre numerische Behandlung. Erscheint in: Nova acta Leopoldina
[85] . . ., H. Hilgers: Lösung von Differentialgleichungen mit Splinefunktionen. Eine Störungstheorie. Teil I: Divergenzaussagen. Numer. Math. **48** (1986), 323–336
[86] On the Continuity Properties of the Multivariate Padé-Operator $T_{m,n}$. Erscheint 1986
[87] . . ., H. Arndt: Gewöhnliche Differentialgleichungen, eine Einführung in Theorie und Praxis. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag 1986

Veröffentlichte Vortragsauszüge und technische Noten

1. A Mixed Boundary Value Problem with Applications to Periodic Magnetic Fields. In: Partial Differential Equations and Continuum Mechanics, Proceedings of an International Conference Conducted by the MRC at the University of Wisconsin, Madison 1960, 387–389
2. Bemerkungen zur Tschebyscheffschen Approximation mit rationalen Funktionen. ZAMM **41** (1961) T. 67–68
3. Ein Algorithmus zur Berechnung rationaler Tschebyscheff-Approximationen. ZAMM **43** (1962) T. 62–64
4. Eigenwerttheorie und rationale Tschebyscheff-Approximation. ZAMM **43** (1963) T. 35–37
5. Blindenschriftübersetzung mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen. MTW **11** (1964) 5–6
6. On the local behaviour of the rational Tschebyscheff-Operator. Bull. AMS (1964) 554–55
7. . . . und G. Raymann: Darstellung transzendenter Funktionen für elektronische Rechenanlagen.
Programm-Informationen: PI 14-1 Okt. 1965, PI 14-2 Nov. 1965 (Approximationen für die Sinus-Funktion), PI 14-3 Dez. 1965 (Approximationen für die Exponentialfunktion), PI 14-4 (Approximationen für die Logarithmus-Funktion), PI 14-5 Mai 1966 (Approximationen für die Tangens-Funktion), PI 14-6 Mai 1966 (Approximationen für die Arcustangens-Funktion)
8. Heinz Bittel und . . .: Die Datenverarbeitungsanlage der Universität Münster. Jahresschrift 1965 der Gesellschaft zur Förderung der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, 62–79
9. Das Problem der automatischen Blindenschriftübernetzung und seine Lösungsmöglichkeit. In: Kongreßbericht des XXV. Deutschen Blindenlehrerkongresses 1965
10. Ein Auswahlkriterium für diskrete T-Approximationen mit rationalen Funktionen konstanten Zählers. ZAMM **46** (1966) T. 40
11. Die Ausbildung in angewandter Mathematik an der Universität. In: Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen, H. Behnke (ed.), 1967, 243–264
12. Blindendruck mit Hilfe von elektrischen Rechenanlagen. Mitteilungen der DFG 2 (1967) 18–21
13. . . ., W. Dost und P. Seibt: Automatic Translation of Inkprint to Braille by Electronic Data Processing Systems. AFB-Research Bulletin **14** (1967) 99–108
14. Starting Procedures for the Iterative Calculation of Rational Tschebyscheff-Approximation. In: Proc. IFIP-Congress (Edinburgh) 1968
15. H. Gernet, H. Ostholt und . . .: Ein neues Haftschalen-Nomogramm für Aphakie. Die Präoperative Berechnung intraocularer Binkhorst-Linsen. Sitzungsberichte der 122. Versammlung des Vereins Rheinisch-Westfälischer Augenärzte 1970, S. 54
16. Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Spline-Funktionen. ISNM 16, Birkhäuser Verlag 1972, 229–234

17. The Historical Development of Automatic Braille Production in Germany. Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster Nr. 9 (1974) 59–64
18. Tschebyscheff-Approximation mit nichtlinearen Splinefunktionen. In: Spline-Funktionen, K. Böhmer, G. Meinardus, W. Schempp (eds.), BI-Wissenschaftsverlag 1974, 303–313
19. Möglichkeiten interdisziplinärer Zusammenarbeit am Beispiel von Mathematik und Medizin. Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster, Nr. 1 (1974), 14 S., abgedruckt in: EDV in Medizin und Biologie **5** (1974) 101–106
20. The Situation of Braille Production in Germany and Austria. In: 2nd Workshop on automatic Braille Translation, Copenhagen 1974, H. Werner (ed.)
21. Einige Beispiele kombinatorischer Aufgabenstellung in den Geisteswissenschaften. ISNM 32, Birkhäuser Verlag 1976, 159–165
22. An Introduction to Regular Splines and Their Application for Initial Value Problems of Ordinary Differential Equations. Tech. Rep./53 (Juni 1975) Brunel University
23. Numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Hilfe von Splinefunktionen, ISNM 32, Birkhäuser Verlag 1976, 167–175
24. Approximation by Regular Splines with Free Knots. In: Approximationstheorie II, G. G. Lorentz, C. K. Chui, L. L. Schumaker (eds.), Academic Press 1976, 567–573
25. H. Gernet, . . . und H. Ostholt: Zur Blendungsempfindlichkeit des unkorrigierten einseitig Aphaken im Straßenverkehr. Sitzungsbericht der 131. Versammlung des Vereins Rhein.-Westf. Augenärzte 1976, 58–64. Französische Fassung: A propos de l'eblouissement à la circulation de l'aphaque unilateral non corrigé. Bulletin de la Société Belge d'Ophtalmologie **173** (1976) 655–660
26. H. Werner und D. Zwick: Algorithmus for Numerical Integration with Regular Splines. Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster, Nr. 27 (1977)
27. The Situation of Braille Production in Germany and Austria. Schriftenreihe des Rechenzentrums der Universität Münster Nr. 30 (1978) 43–46
28. B. Eickenscheidt, P. Janßen, H. Kamp, W. A. Slaby, . . .: The Development of Automatic Braille Translation in Germany. Braille Research Newsletter **10** (1979) 1–5
29. Mathematische Modelle in der Medizin. In: Approximation in Theorie und Praxis, G. Meinardus (ed.), BI-Taschenbücher, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1979
30. Die Entwicklung des Rechenzentrums der Universität Münster. In: Die Universität Münster von 1780–1980, H. Dollinger (ed.), Münster: Aschendoff-Verlag 1980
31. Non-Linear Splines, some Applications to Singular Problems, In: Proceedings of the Conference on Rational Approximation, Theory and Applications, H. van Rossum, M. G. de Bruin (eds.), Springer Lecture Notes 888, 1981, 64–77
32. Automatic Braille Production by Means of Computer. In: Uses of Computers in Aiding the Disabled, J. Raviv (ed.), Amsterdam: North Holland Publ. Co. 1982, 321–336
33. Zur Methodologie der Numerik. In: Numerische Mathematik in der Sekundarstufe II, Curriculum Heft 28, ed. by Landesinstitut für Curriculumentwicklung, Lehrerfortbildung und Weiterbildung, 1982, 22–65
34. Some Remarks on the Relation between Mathematics, Computer Science and Medicine. In: Selected Topics in Operations Research and Mathematical Economics, G. Hammer and D. Palaschke (eds.), Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems Band 226, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, 465–478

Doktoranden

1.	Lamprecht, Günter	Die Approximation von Funktionen in der L_q-Norm mit Hilfe rationaler Funktionen	1967
2.	Schmidt, Eckard	Normalität und Stetigkeit bei der Tschebyscheff-Approximation mit Exponentialsummen	1968
3.	Schaback, Robert	Spezielle rationale Splinefunktionen	1969
4.	Hornung, Ulrich	Eine Anwendung der Potentialtheorie auf die Approximationstheorie	1970
5.	Bendisch, Jürgen	Approximation von Eigenwerten und Eigenfunktionen bei einem singulären Sturm-Liouvilleschen Randwertproblem	1970
6.	Steinhausen, Detlef	Fehlerschranken für das Eigenwertproblem bei Matrizen mit nichtlinearen Elementarteilern	1970
7.	Zörkendörfer, Siegfried	Rationale Tschebyscheff-Approximation auf kleinen Intervallen	1970
8.	Pudlatz, Hilmar	Normalität und Stetigkeit bei der Tschebyscheff-Approximation mit zeichenregulären γ-Polynomen	1970
9.	Janßen, Paul	Zur Approximation mit mehrparametrigen g-Polynomen insbesondere Exponentialsummen	1970
10.	Schwill, Wolf-Dietrich	Fehlerabschätzung für die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung unter Berücksichtigung der Rundungsfehler	1972
11.	Haverkamp, Richard	Das Verfahren von Raleigh-Ritz bei numerischer Behandlung singulärer Sturm-Liouville-Probleme	1972
12.	Runge, Rüdiger	Lösung von Anfangswertproblemen mit Hilfe nichtlinearer Klassen von Spline-Funktionen	1972
13.	Schomberg, Hermann	Tschebyscheff-Approximation durch rationale Spline-Funktionen mit freien Knoten	1973
14.	Arndt, Herbert	Interpolation mit regulären Spline-Funktionen	1974
15.	Meder, Günter	Beiträge zur Formulierung und Konvergenz des Remes-Algorithmus für rationale Spline-Funktionen	1975
16.	Ebert, Udo	Optimale Auslegung von Bestrahlungsplänen	1975
17.	Bestehorn, Maike	Exponentialapproximation mit polynomialen Exponenten	1975
18.	Schwerhoff, Godehard	Charakterisierung und Realisierung von A- und A(α)-stabilen 2- und 3-Schrittverfahren mit automatischer Kontrolle der Schrittweite und Ordnung	1975
19.	Büsse, Ernst-Joachim	Ein konvergentes Verfahren zur Bestimmung der besten multivariablen rationalen Tschebyscheff-Approximation	1976
20.	Ebert, Jürgen	Operator-Algorithmen auf Matrizen-Darstellungen von Graphen	1977
21.	Wiengarn, Robert	Zweidimensionale quadratische Differentialgleichungssysteme	1979
22.	Unger, Heinz-Jochen	Eine Spline-Methode zur numerischen Lösung von Systemen retardierter Differentialgleichungen mit zustandsabhängigen Verzögerungen und Anwendungen	1980

23.	Stiller-Sieglitz, Silke	Konvergenzverfahren bei der numerischen Lösung des Dirichlet-Problems für Gebiete mit Ecken mittels eines Doppelschicht-Potential-Ansatzes	1981
24.	Farwig, Reinhard	Singularitäten vom regulären Briot-Bouquet-Typ in ebenen Systemen	1982
25.	Spitzer, Klaus	Mathematisches Modell zur effektiven Informationsrepräsentation medizinischer Zusammenhänge und seine Anwendung in einem computerunterstützten neurologischen Therapieentscheidungsverfahren	1985
26.	Stenzel, Horst	Algorithmen zur Auswahl von Tests – ein mathematischer Beitrag zur Diagnose – mit der Anwendung auf Instabilitäten des Kniegelenks	1985

Prof. Dr. D. Braess
Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität
Universitätsstr. 150
4630 Bochum

Prof. Dr. R. Schaback
Institut für Numerische
und Angewandte Mathematik
Lotzestr. 16–18
3400 Göttingen

(*Eingegangen 7. 7. 1986*)

Buchbesprechungen

Lancaster, P., Tismenetsky, M., The Theory of Matrices, With Applications (Second Edition), Orlando – San Diego: Academic Press 1985, xv, 570 pp., $ 59.00

In neuerer Zeit hat die (ja eigentlich klassische) Matrizentheorie eine erhebliche Ausweitung und Diversifizierung erfahren. Dies schlägt sich in einer steigenden Anzahl von Monographien über Teilgebiete nieder. Insbesondere haben Impulse aus den Anwendungen zu weiteren Entwicklungen geführt. Hier sei etwa numerische lineare Algebra, System- und Kontrolltheorie genannt. In einer solchen Situation ist es für das Gebiet wichtig, den Zusammenhang aller Teilgebiete zu betonen und einen Überblick zu geben.

Das vorliegende Buch scheint mir dazu einen sehr guten Beitrag zu leisten. Aufgrund seiner Arbeiten in verschiedenen Teilgebieten der Matrizentheorie ist P. Lancaster wie wenige andere prädestiniert, einen solchen Überblick zu liefern.

Das Buch geht über die erste Auflage, die eine recht knapp geschriebene Einleitung in die Matrizentheorie mit kurzen Abstechern in die Anwendungen darstellte, weit hinaus. Es ist praktisch ein neues Buch entstanden.

Laut Einleitung ist das Buch einerseits gedacht als eine Materialsammlung für Anwender von Matrizentheorie in Mathematik und anderen Gebieten, andererseits kann es als Grundlage diverser Vorlesungen jeglicher Schwierigkeitsstufe dienen.

Der erste Zweck ist sicher erreicht. Viele der von mir eher zufällig gesuchten Ergebnisse waren zu finden. Allerdings wäre hierbei ein besseres Literaturverzeichnis nützlich.

Ich kann es mir auch gut vorstellen, daß man verschiedene Vorlesungen auf dem Buch aufbauen kann. Dazu tragen sicher die vielen Aufgaben verschiedenen Kalibers, die z. T. in den Text integriert sind, und die Ausführlichkeit der Darstellung bei.

Der Inhalt des Buches sei kurz durch die Angabe der Überschriften der einzelnen Kapitel angedeutet.

1. Matrix Algebra, 2. Determinants, Inverse Matrices and Rank, 3. Linear, Euclidean, and Unitary Spaces, 4. Linear Transformations and Matrices, 5. Linear Transformations in Unitary Spaces and Simple Matrices, 6. The Jordan Canonical Form: A Geometric Approach, 7. Matrix Polynomials and Normal Forms, 8. The Variational Method, 9. Functions of Matrices, 10. Norms and Bounds for Eigenvalues, 11. Perturbation Theory, 12. Matrix Equations and Generalized Inverses, 13. Stability Problems, 14. Matrix Polynomials, 15. Nonnegative Matrices.

Das Buch schließt mit drei Anhängen über skalare Polynome, Analysis und weitere Literatur sowie einem ausführlichen Index ab.

Insbesondere in den Kapiteln 7, 9, 11, 12, 13, 14 sind neue Ergebnisse verarbeitet, wobei ich insbesondere die Resultate über Stabilitätstheorie und über Matrizenpolynome hervorheben möchte.

Den Autoren ist eine moderne Darstellung der Matrizentheorie von den Grundlagen bis hin zu vielen nichttrivialen Anwendungen gelungen, die die Lücke zwischen den Textbüchern über lineare Algebra und den Monographien über spezielle Anwendungen der Matrizentheorie abdeckt. Es sollte in keiner Bibliothek fehlen.

Bielefeld L. Elsner

Mazzola, G., Gruppen und Kategorien in der Musik. Entwurf einer mathematischen Musiktheorie (Research and Expositions in Mathematics, Vol. 10), Berlin: Heldermann-Verlag 1985, 205 S., DM 48,–

Wenn von mathematischer Musiktheorie die Rede ist, reagieren Musiker und Musikwissenschaftler zumeist mit α) der Bewunderung desjenigen, der zugibt, von Mathematik keine Ahnung zu haben, oder β) der Sorge, Mathematiker seien wieder einmal so vermessen, die Welt in das Korsett von Zahlen zu pressen. Auch bei β) spielen häufig Schulerinnerungen an Mathematik eine Rolle, die jene ihrerseits verkürzen.

Von Mathematikern kenne ich folgende Reaktionen: γ) Musik wird „naiv" genossen; analytische Energie wird in das eigene Metier gesteckt, nicht in Musik; und „dabei sollte es auch bleiben". δ) „Mathematische Musiktheorie ist doch Spielerei". ϵ) Die Übereinstimmung einiger theoretischer und empirischer Phänomene wird zum Anlaß überzogener Euphorie genommen; trotz höheren Niveaus der mathematischen Argumentation wird der Haltung β) Munition geliefert.

Mit solchen Äußerungen im Gedächtnis bin ich an die Lektüre des vorliegenden Buches gegangen. Zum Verständnis seiner Zielsetzung sollte man etliche der im Literaturverzeichnis erwähnten Arbeiten kennen, z. B. diejenigen von R. Wille und den in den Jber. d. Dt. Math.-Verein. **80** (1978) 151–201 erschienenen Aufsatz „Eine gruppentheoretische Methode in der Musiktheorie" von G. D. Halsey und E. Hewitt. In letzterem werden Reihen und Akkorde auf ihre Symmetrien untersucht, wobei (mathematisch) reizvolle gruppentheoretische Fragen gestellt und beantwortet werden.

Der Ansatz von Mazzola geht ebenfalls von den Automorphismen elementarer musikalischer Phänomene aus; analog zu Mannigfaltigkeiten werden lokale Ereignisse dann aber zusammengeklebt. Auf diese Weise können (melodische, rhythmische) Motive, Reihen, Harmonien, Kadenzen, Modulationen bis hin zur „interpretierten Komposition" begrifflich eingeordnet werden. Dabei wird mit einem Leser gerechnet, der sich z. B. durch die Sprache der Modultheorie, algebraischen Topologie und algebraischen Geometrie nicht abschrecken läßt.

Nach zwei „mathematischen" Kapiteln werden im dritten gründliche wissenschaftstheoretische und ästhetische Überlegungen angestellt, in denen u. a. explizit oder implizit alle unter α), ..., ϵ) genannten Bedenken behandelt werden.

Im vierten Kapitel folgt eine detaillierte Analyse des 1. Satzes der Hammerklaviersonate von Beethoven. Die hier exemplarisch vorgeführte Methode belegt m. E. den Hauptgewinn mathematischer Musiktheorie: Arbeitsweisen, Begriffe und Einsichten für die Musikwissenschaft zur Verfügung zu stellen. Für künstlerische Projekte werden dadurch vermutlich jedoch nur notwendige, keine hinreichenden Kriterien gewonnen: In dem beigefügten Klavier-Sonatensatz des Autors werden eine Messiaen-Skala und (s. Takt 7) klassische Akkorde verwendet, deren Aufeinanderfolge ich als Stilbruch empfinde, auch wenn alle Verklebegesetze erfüllt sein mögen.

Es bleibt die Frage nach der mathematischen Relevanz des Buches und mathematischer Musiktheorie überhaupt. In einer anderen (auch: künstlerischen) mathematischen Disziplin, der Geometrie, bietet der zugehörige Vorstellungsbereich ein reiches Feld für produktive Rückkoppelungen. Beweise werden oft „erschaut", bevor man sie in Worten aufschreibt. Auch physikalische Anwendungen haben in einer ähnlichen Weise Mathematik(er) stimuliert.

Ich kenne aber keine „vorgehörten" Beweise. Liegt das daran, daß die Beziehungen zwischen Mathematik und Musik noch zu jung sind – wie zwischen Mathematik und Physik am Beginn der Neuzeit?

Ich vermute eher, daß nicht Isomorphismen zwischen mathematischen und musikalischen Strukturen (als Analogie zur Beziehung Mathematik – Kunst in der Geometrie) der Grund sind, warum sich (manche) Mathematiker für Musik und (wenige) Musiker für Mathematik begeistern, sondern tiefere schöpferische Antriebskräfte, die beiden gemeinsam sind. Sie bringen jeweils Projekte sui generis hervor, (gelegentlich) auch den Impuls, nach Isomorphismen zu suchen. Diesen sollte man nicht unterdrücken, sondern fördern, der obenerwähnten Hilfen für die Musik wegen. Meine mathematischen und meine musikalischen Projekte, die mich zeitlich voll ausfüllen, werde ich aber ihretwegen nicht aufgeben.

Frankfurt am Main W. Metzler

Payne, S. E., Thas, J. A., Finite generalized quadrangles (Research Notes in Mathematics, vol. 110), Boston – London – Melbourne: Pitman Publ. Ltd. 1984, 312 p., £14.95

Im Jahr 1959 führte J. Tits [4] den Begriff des verallgemeinerten n-Ecks ein, um gewisse Lie-Gruppen geometrisch beschreiben zu können; insbesondere benutzte er gewisse orthogonale, unitäre und symplektische Gruppen, um die Klassen von verallgemeinerten Vierecken (im folgenden kurz: Vierecke) zu konstruieren, die man heute als die klassischen Vierecke bezeichnet. In der Zwischenzeit zeigte sich die Reichhaltigkeit dieser Begriffsbildung: viele neue Vierecke wurden gefunden, eine Anzahl geometrischer Charakterisierungen der klassischen und anderer Vierecke wurden bewiesen, und eine allgemeine Theorie kombinatorischer und algebraischer Eigenschaften von Vierecken und ihrer Unterstrukturen bildete sich heraus. Die Autoren des vorliegenden Buches spielten bei dieser Entwicklung eine einflußreiche Rolle; das läßt sich auch daran ablesen, daß über 30 Prozent der 237 Referenzen Payne oder Thas als Autor (oder Koautor) haben.

In diesem Buch wird der größte Teil der vielen verstreuten Ergebnisse über Vierecke zu einem einheitlichen Ganzen verarbeitet. Die erklärte Absicht der Autoren war es, die Materie möglichst gründlich aus kombinatorischer und geometrischer Sicht zu behandeln, die vielen Zusammenhänge zu anderen geometrischen Strukturen zu beleuchten, und trotzdem die nötigen Voraussetzungen auf Lineare Algebra, elementare Gruppentheorie und affine und projektive Geometrie zu begrenzen. Die ersten beiden Ziele wurden auch voll erreicht. An Vorkenntnissen benötigt man dagegen einiges mehr. Kombinatorische Begriffe werden wiederholt ohne Definition benutzt: z. B. Netze (S. 4), symmetrische Blockpläne (S. 59/60), quadratische Mengen (S. 72), Möbius-, Minkowski- und Laguerre-Ebenen (S. 78–82), abgeleitete Strukturen (S. 81, 84), Flocks (S. 85); der uninformierte Leser ist jeweils gezwungen, die angegebenen Literaturstellen nachzulesen. Außerdem werden in manchen Beweisen Sätze zitiert, die wohl nicht zum Standardstoff einer Geometrievorlesung gezählt werden können; z. B. auf S. 72 eine Charakterisierung quadratischer Mengen (Buekenhout [1]), oder S. 79 die Charakterisierung von Möbius-Ebenen gerader Ordnung (Dembowski [3]). Ein Anhang, der die fehlenden Dinge kurz referiert hätte, wäre angebracht gewesen.

Inhalt: Die ersten beiden Kapitel benutzen grundlegende Abzähl- und Eigenwertmethoden zur Herleitung allgemeiner Zusammenhänge zwischen Parametern, verschiedenen Regularitätskonzepten und Unterstrukturen (Teilvierecke, Ovoide, Spreads). Im dritten Kapitel werden Konstruktionen der bis zur Drucklegung bekanntgewordenen Vierecke angegeben und deren kombinatorische Eigenschaften beschrieben. (Nach einem Vortrag von Thas in Oberwolfach, Mai 1985, wurden inzwischen weitere Familien von Beispielen entdeckt.) Kapitel 4 enthält einen Beweis des Satzes von Buekenhout und Lefèvre [2], daß alle projektiv einbettbaren Vierecke klassisch sind. Kombinatorische Charakterisierungen der einzelnen Vierecke und Eindeutigkeitsbeweise für Vierecke kleiner Ordnung werden im 5. und 6. Kapitel behandelt. Kapitel 7 beschreibt dann die möglichen Einbettungen von Vierecken in affine Räume. Die übrigen Kapitel 8–12 haben einen mehr algebraischen Charakter; sie beschäftigen sich mit Automorphismen, Nebenklassengeometrien, Koordinaten und amalgamierten projektiven Ebenen. Insbesondere wird in Kapitel 9 ein fast vollständiger geometrischer Beweis für Tits' [5] tiefliegende Charakterisierung der klassischen Vierecke durch Moufang-Bedingungen vorgeführt.

Das Buch ist übersichtlich gegliedert; der Inhalt ist interessant und klar dargestellt. Zahlreiche Literaturverweise im Text und eine vollständige Bibliographie erschließen die Literatur über das Thema. Insgesamt ist es ein wertvolles Buch, das allen an Kombinatorik und Geometrie Interessierten empfohlen werden kann.

[1] Buekenhout, F.: Characterizations of semi quadrics: a survey. In: Teorie combinatorie (ed. B. Segre), Roma Accad. Naz. Lincei (1976) 393–421
[2] Buekenhout, F.; Lefèvre, C.: Generalized quadrangles in projective spaces. Arch. Math. 25 (1974) 540–552
[3] Dembowski, P.: Finite geometries. Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1968
[4] Tits, J.: Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 2 (1959) 14–60
[5] Tits, J.: Classification of buildings of spherical type and Moufang polygons: a survey. In: Teorie combinatorie (ed. B. Segre), Roma Accad. Naz. Lincei (1976) 229–246

Freiburg i. Br. A. Neumaier

Heise, W., Quattrocchi, P., Informations- und Codierungstheorie, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1983, x + 370 pp., DM 79,–

Selten wurde der häufig gehörte Vorwurf, reine Mathematik sei ohne Bezug zur Realität, in einem Lehrbuch so eindrucksvoll widerlegt wie in dem vorliegenden Text von W. Heise und P. Quattrocchi, der sich an Studenten der Informatik und/oder Mathematik aus mittleren Semestern wendet, um ihnen einen Überblick über die mathematischen Methoden und die Anwendungsmöglichkeiten der Informations- und Codierungstheorie zu vermitteln. Diesem Anspruch werden die Autoren voll gerecht: Informatikstudenten wird die notwendige Mathematik vorgeführt, an Beispielen erklärt und – wenn nötig – ausführlich bewiesen; angehenden Mathematikern wird die Anwendbarkeit und Nützlichkeit bislang nur abstrakt bekannter Begriffe gezeigt (Zitat S. 5: „... die Lösung eines konkreten Problems umso leichter realisieren läßt, je reichhaltiger die mathematische Struktur ist").

Der Versuch einer kurzen und vollständigen Inhaltsangabe muß bei der Fülle der behandelten Themen mißlingen, wir beschränken uns daher auf die wesentlichen Aspekte: Nach einer Übersicht über den Weg einer Nachricht vom Sender über einen (gestörten) Kanal zum Empfänger werden verschiedene Probleme der Datenübertragung anhand in der Praxis erprobter Codes (z. B. ISBN, Morse, ASCII) diskutiert, ehe Grundbegriffe streng definiert werden. So taucht der Hamming-Abstand erstmals auf S. 39 auf. Danach geht es um den wahrscheinlichkeitstheoretischen Hintergrund der Informationstheorie. Nach Einführung endlicher Wahrscheinlichkeitsräume werden Quellen, Kanäle und Decodierverfahren auf wahrscheinlichkeitstheoretische Füße gestellt. Informationsgehalt, Entropie, Kanalkapazität und weitere Begriffe werden definiert. Obwohl der Schwerpunkt dieses Buches auf Quellen ohne Gedächtnis liegt, werden auch Markoff-Quellen behandelt, ein weiterer Abschnitt ist der thermodynamischen Entropie gewidmet.

Weiter geht es mit der Codierung. Zentraler Begriff ist die Effiziens von Codes. Optimale Codierung gewährleistet der Hufmann-Algorithmus, als weiteres Stichwort sei die Shannon-Fano-Codierung genannt. Der informationstheoretische Teil schließt mit dem grundlegenden Shannonschen Kanalcodierungssatz und seiner Umkehrung. Anders als in vielen anderen Lehrbüchern wird nicht auf einen ausführlichen Beweis verzichtet.

Der codierungstheoretische Teil behandelt weitgehend, aber nicht ausschließlich, lineare Codes. Nach Einführung der Korrekturrate von Block-Codes werden die üblichen Schranken für die Informationsrate einschließlich ihrer asymptotischen Formen eingeführt. In einem Einschub werden die anschließend benötigten mathematischen Hilfsmittel bereitgestellt: Vektorräume, Polynome, Faktorringe, endliche Körper und Einheitswurzeln. Warum die Autoren ausführlich einfache Eigenschaften von Vektorräumen erklären, während sie Ringe als bekannt voraussetzen, bleibt ihr Geheimnis, zumal sie an anderer Stelle schreiben, daß die Theorie linearer Codes mehr sei als lineare Algebra endlich dimensionaler Vektorräume.

Nach einführenden Bemerkungen über Abstandshomogenität und Abschätzungen zur Decodierfehlerwahrscheinlichkeit werden Generator- und Kontrollmatrizen eingeführt, die Syndrom-Decodierung erklärt, die Warschamoff-Schranke angegeben und die MacWilliams-Identitäten für Gewichtszeiger bewiesen, bevor kurz Code-Modifikationen und ausführlich Code-Kombinationen behandelt werden. An Modifikationen werden Erweitern, Vergrößern, Verlängern, Aufblasen und deren Gegenoperationen erwähnt, eine mögliche Anwendung findet der Leser im Abschnitt zur BCH-Schranke. Das direkte Produkt und die Summenkonstruktion sind die wichtigsten der vorkommenden Kombinationen. Näher untersucht werden Elias-Codes. Den in der Praxis (bei der NASA) bewährten Reed-Muller-Codes und ihrer Decodierung ist ein eigener Abschnitt gewidmet. Aussagen über die Existenz von (nicht notwendig linearen) optimalen Codes beenden den Paragraphen über lineare Codes.

Anschließend werden zyklische Codes untersucht. Die Idealstruktur dieser Codes erlaubt es, statt mit Generator- und Kontrollmatrix mit den entsprechenden Polynomen zu arbeiten. An speziellen zyklischen Codes werden unter anderen die optimalen Reed-Solomon-Codes, BCH-Codes und Quadratische-Reste-Codes eingeführt. Danach werden die mathematischen Aspekte der BCH-Decodierungsmethode erläutert, einer auf BCH-Codes zugeschnittenen Variante der Syndrom-Decodierung.

Das Buch schließt mit einer rund 30 Seiten langen Ausführung über Konvolutions-Codes, die Überschriften der einzelnen Abschnitte lauten Kanalcodierer, Generatormatrizen, Zustandsdiagramme (diesem Abschnitt entstammt das Titelbild) und Decodierung, wo mit anschaulichen Worten der Viterbi- und der Fano-Algorithmus vorgestellt werden.

Das Literaturverzeichnis besteht aus 57 Titeln von Büchern der Informations- und Codierungstheorie, die mit Ausnahme des die Theorie begründenden Werkes von Shannon und Weaver „Mathematical Theory of Communication“ aus dem Jahre 1949 alle nach 1958 erschienen sind. Lehrbücher, die andere Teilgebiete der Mathematik betreffen, und wissenschaftliche Aufsätze werden an jeweils relevanter Stelle angegeben.

Das Verständnis fast aller nicht intuitiv klarer Begriffe wird durch viele ausführliche, einfache numerische Beispiele und Diagramme unterstützt, die häufig in späteren Abschnitten weitergeführt werden. Hierdurch kann das vorliegende Buch auch sinnvoll zum Selbststudium benutzt werden. Leider wird der Lesegenuß durch unzählige Tippfehler getrübt. Während man über das Weglassen, Hinzufügen oder Verdrehen von Buchstaben noch hinwegsehen kann, ist das Fehlen von Exponenten (S. 231), das Vertauschen von $\geqslant$ und = Zeichen in Beweisen (S. 214) oder das Hinzufügen/Weglassen von Summanden (S. 301) – dies nur als kleine Auswahl – einfach ärgerlich.

Trotz der genannten Unzulänglichkeiten handelt es sich um ein überdurchschnittlich gut verständliches Buch. Dies liegt sicherlich auch an dem originellen Stil der Autoren, den man sich häufiger in einführenden wissenschaftlichen Werken wünscht. Wer aufgrund früherer Veröffentlichungen von W. Heise das Buch zur Lektüre zwischen den mathematischen Aussagen zur Hand nimmt, wird auch diesmal nicht enttäuscht sein, zum ersten Blättern sei auf die Seiten 8 und 339/356 sowie die zeitlose Bemerkung auf S. 106 verwiesen. Eine abschließende Frage des Besprechers sei erlaubt: Handelt es sich in der Zeichnung auf S. 202 um ein Selbstportrait des deutschen Autors?

Insgesamt ist diesem Buch eine weite Verbreitung zu wünschen.

Hamburg H.-J. Samaga

Bishop, E., Bridges, D., Constructive Analysis (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 279), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, xii, 477 pp., hard cover, DM 138,–

Dieses Buch war ursprünglich geplant als Neuauflage von E. Bishops „Foundations of Constructive Analysis", das 1967 erschienen und bald darauf vergriffen war. Über vielfache Vereinfachungen, Glättungen und Ergänzungen hinaus sind jedoch auch wesentliche Erweiterungen und Änderungen vorgenommen worden, beginnend mit Teil 6 von Kapitel 5 (über den Riemannschen Abbildungssatz). Besonders die Neufassung des Kapitels 6 über Integrationstheorie ist zu begrüßen; zugrunde gelegt wurde dafür das Büchlein von E. Bishop und H. Cheng: „Constructive Measure Theory" (Mem. Amer. Math. Soc. 116 (1972)). Es erschien deshalb angemessen, dem Buch einen neuen Titel zu geben und D. Bridges als Koautor aufzuführen.

Die allgemeine Tendenz des Buches ist jedoch gegenüber der ursprünglichen Fassung unverändert geblieben. Sie wird sehr klar in dem von E. Bishop verfaßten „Prolog" ausgedrückt, aus dem die folgenden Zitate entnommen sind.

„This book is a piece of constructivist propaganda, designed to show that there does exist a satisfactory alternative [zur klassischen Mathematik]. To this end, we develop a large portion of abstract analysis within a constructive framework.

This development is carried through with an absolute minimum of philosophical prejudice concerning the nature of constructive mathematics. There are no dogmas to which we must conform. Our program is simple: to give numerical meaning to as much as possible of classical abstract analysis. Our motivation is the well-known scandal, exposed by Brouwer (and others) in great detail, that classical mathematics is deficient in numerical meaning. ...

The task of making analysis constructive is guided by three basic principles. First to make every concept affirmative. (Even the concept of inequality is affirmative.) Second, to avoid definitions that are not relevant. (The concept of a pointwise continuous function is not relevant; a continuous function is one that is uniformly continuous on compact intervals.) Third, to avoid pseudogenerality. (Separability hypothesis are freely empoyed.)

The book has threefold purpose: to present a constructive point of view, to show that the constructive program can succeed, and to lay a foundation for further work. These immediate ends tend to an ultimate goal – to hasten the inevitable day when constructive mathematics will be the accepted norm.

We are not contending that idealistic mathematics is worthless from the constructive point of view. This would be as silly as contending that unrigorous mathematics is worthless from the classical point of view. Every theorem proved with idealistic methods presents a challenge: to find a constructive version, and to give a constructive proof."

Nach einem einführenden Kapitel (mit dem Titel „A Constructivist Manifesto") beginnt das Buch in Kapitel 2 mit den Anfangsgründen der reellen Analysis bis zur Differentiation und (Riemann-)Integration. Kapitel 3 enthält eine ausführliche Diskussion von Mengen und Funktionen. Insbesondere wird der Begriff einer komplementierten Menge eingeführt, der später für die Behandlung der Maß- und Integrationstheorie grundlegend ist. In Kapitel 4 werden metrische Räume behandelt. Kompakt werden (wie bei Brouwer) solche metrischen Räume genannt, die vollständig und total beschränkt sind. Es wurden Konstruktivierungen verschiedener klassischer Resultate angegeben, so etwa von dem Satz von Arzelà-Ascoli, vom Satz von Stone-Weierstraß und von dem Tietzeschen Erweiterungssatz. Das 5. Kapitel enthält eine konstruktive Entwicklung der elementaren komplexen Analysis, die sich mittels der Cauchyschen Integralformel in recht natürlicher Weise ergibt. Den Abschluß dieses Kapitels bildet eine konstruktive Version des Riemannschen Abbildungssatzes. Kapitel 6 ist der Maß- und Integrationstheorie gewidmet; Ausgangspunkt ist die klassische Theorie des Daniell-Integrals. Eine konstruktive Version dieser Theorie wird in beeindruckender Weise entwickelt; den Abschluß bilden unter anderem die Konvergenzsätze von Lebesgue und der Satz von Fubini. In Kapitel 7, mit dem Titel „Normal Linear Spaces" werden u. a. die L_p-Räume eingeführt sowie die Sätze von Radon-Nikodym und Hahn-Banach bewiesen. Die abschließenden Kapitel 8 und 9 behandeln lokal kompakte abelsche Gruppen bzw. kommutative Banach-Algebren.

In der oben zitierten Passage aus dem „Prolog“ nennt E. Bishop als Ziel des Buches, daß er aufzeigen möchte, daß es eine befriedigende Alternative zum klassischen Aufbau der Mathematik gibt. Diese Formulierung erscheint dem Referenten mißverständlich: es handelt sich um keine Alternative zur, sondern vielmehr um eine Erweiterung der klassischen Mathematik, in der man neben dem klassischen Existenzquantor (der wie üblich durch den Allquantor und Negationen definiert ist) noch zusätzlich einen „starken“ Existenzquantor zuläßt mit der Eigenschaft, daß zu einer Existenzaussage immer auch die Angabe eines Beispiels gehört. Dadurch, daß man in einer gegebenen Aussage (und natürlich auch in den Definitionen sämtlicher vorkommender Hilfsbegriffe) alle oder einige der Existenzquantoren durch starke Existenzquantoren ersetzt, erhält man viele „konstruktive Versionen“ der ursprünglichen Aussage. Sie können mehr oder weniger schwierig zu beweisen, oder aber auch einfach falsch sein; es stellt sich dann die Aufgabe, die verwendeten Begriffe so zu verändern, daß der Satz beweisbar wird und für seinen ursprünglichen Zweck brauchbar bleibt. Dieses Programm ist in dem vorliegenden Buch in beeindruckender Weise durchgeführt.

Schließlich sei noch auf ein Resultat der Beweistheorie hingewiesen, das in diesem Kontext von Interesse ist, nämlich die Gültigkeit der sogenannten Markov-Regel: Hat man einen Existenzsatz $\exists\, yA(x_1, \ldots, x_n, y)$ mit entscheidbarem A und dem klassischen Existenzquantor in einem geeigneten formalen System bewiesen ($x_1, \ldots, x_n$ sind Parameter), so läßt sich aus diesem formalen Beweis ein Berechnungsverfahren für y in Abhängigkeit von $x_1, \ldots, x_n$ ablesen. Für derartige Existenzsätze weiß man also stets, daß ihre konstruktive Version gültig ist, und zwar ohne daß zusätzliche Überlegungen erforderlich sind.

München H. Schwichtenberg

Dedekind, R., Vorlesung über Differential- und Integralrechnung 1861/62, in einer Mitschrift von H. Bechtold, bearbeitet von M.-A. Knus und W. Scharlau (Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 1), Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg 1985, XIV, 349 S. gbd., DM 58,– (DMV-Mitgliedspreis DM 45,30)

In der Einleitung seines epochalen Bändchens „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ (seit 1872 beim selben Verlag erhältlich) schreibt Dedekind:

Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Größe an einen festen Grenzwert und namentlich bei dem Beweise des Satzes, daß jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwert nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen. Auch jetzt halte ich ein solches Heranziehen geometrischer Anschauung bei dem ersten Unterrichte in Differentialrechnung vom didaktischen Standpunkte aus für außerordentlich nützlich, ja unentbehrlich, wenn man nicht gar zu viel Zeit verlieren will. . . .

Der vorliegende erste Band der Reihe „Dokumente zur Geschichte der Mathematik“, in der Vorlesungsmanuskripte und Briefwechsel aus dem 19. und 20 Jh. publiziert werden sollen, legt die oben zitierte Vorlesung für Ingenieure im ersten Studienjahr vor. Reich an Beispielen dokumentiert sie in eindrucksvoller Weise das didaktische Geschick des damals 30jährigen Dedekind. Die Aufnahme Dirichletscher und Riemannscher Ideen macht die Dedekindsche Vorlesung zugleich zu einer der modernsten seiner Zeit. Die ersten 5 Abschnitte behandeln die Analysis von Funktionen einer Variablen, und trotz Zuflüchten zu geometrischen Evidenzen (so wird z. B. die Stetigkeit benutzt, aber nie definiert) ist die Darstellung auch in der studentischen Mitschrift so klar und sauber aufgebaut (selbst der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit ist implizit vorhanden), daß man mit wenig Änderungen (z. B. Einbau des Mittelwertsatzes) noch heute eine Ingenieurvorlesung in solcher Art halten könnte. Bei den letzten 3 Abschnitten, der mehrdimensionalen Analysis, wird allerdings der Boden (d. h. Formulierungen und Beweisansätze) schwammig; die Behandlung des Satzes über implizite Funktionen oder des Oberflächenbegriffes erinnern daran, daß die Grundlegung der mehrdimensionalen Analysis noch nicht begonnen hatte. Sie wird erst in den Vorlesungen von Dini (1878), Genocchi-Peano (1884) und in Jordans Cours d'Analyse (1887) durchgeführt.

Die Herausgeber haben der Vorlesungsmitschrift eine instruktive und inhaltsreiche Einleitung vorangeschickt, die über die Entwicklung der Infinitesimalrechnung und ihrer Lehrbücher, über die Mathematik an der ETH Zürich und über Dedekind informiert. Sie haben die Vorlesungsmitschrift sorgfältig und behutsam redigiert. Die Druckfehler halten sich in Grenzen, nur bei numerischen Konstanten stimmen selten alle Ziffern. Die Mathematiker an Schule und Hochschule haben Dank zu sagen für die Herausgabe dieses für sich selbst sprechenden Dokumentes, das den mathematischen Unterricht vor 125 Jahren in klarer und eindrucksvoller Weise illustriert und uns zugleich Nähe und Entfernung zu dieser Zeit vor Augen führt.

Erlangen W.-D. Geyer

Chandrasekharan, K., Elliptic Functions (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 281), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, xi, 189 pp., hard cover, DM 138,–

Das vorliegende, aus Vorlesungen des Autors an der ETH Zürich hervorgegangene Buch ist der Behandlung der klassischen Theorie der elliptischen Funktionen im Zusammenhang mit Modulfunktionen und Thetareihen nebst Anwendungen auf klassische Probleme der elementaren Zahlentheorie gewidmet.

In den ersten vier Kapiteln werden die Weierstraßschen Funktionen $\wp(z)$, $\zeta(z)$ und $\sigma(z)$ eingeführt und im fünften die vier Thetareihen, wobei der Autor die elliptische Funktion $\wp(z)$ zuerst definiert und anschließend mit $\zeta(z)$ und $\sigma(z)$ in Beziehung setzt sowie das Additionstheorem und die Erzeugung aller elliptischen Funktionen beweist bzw. darlegt. Die absolute Invariante $J(\tau)$ und die Invarianten $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$ sowie die Diskriminante $\Delta(\tau)$ als Modulfunktionen sind Gegenstand von Kapitel sechs, und daran schließen sich in Kapitel sieben die Jacobischen elliptischen Funktionen sn u, cn u und dn u nebst der Modulfunktion $\lambda(\tau)$ und in Kapitel acht die fundamentale Dedekindsche η-Funktion an, wobei für das Transformationsverhalten von $\eta(z)$ auf den berühmten, im Original nur eine Druckseite beanspruchenden Beweis von Siegel zurückgegriffen wird. Die erwähnten zahlentheoretischen Anwendungen finden sich in den letzten drei Kapiteln, und zwar in Kapitel neun das quadratische Reziprozitätsgesetz und in den Kapiteln zehn und elf die Darstellbarkeit ganzer Zahlen als Summen von vier Quadraten bzw. durch quadratische Formen, wobei in Gestalt des Eulerschen Satzes über Pentagonalzahlen die Zahlentheorie auch bereits in das achte Kapitel hineinspielt.

Die Darstellung zeichnet sich durch Klarheit und Kürze aus und ist zudem in sich abgeschlossen. Die ersten acht Kapitel sind funktionentheoretisch, die drei letzten mehr arithmetisch ausgerichtet, wobei beim Leser nur Kenntnisse aus der Funktionentheorie und gelegentlich aus der Algebra vorausgesetzt werden. Sehr aufschlußreich und erhellend sind die historischen Notizen, die der Autor den einzelnen Kapiteln angefügt hat.

Natürlich gibt es inzwischen viele ähnliche, gut lesbare Bücher über elliptische Funktionen wie z. B. das ältere von C. Jordan (Fonctions Elliptiques, Springer Reprint 1981) oder der in sich abgeschlossene zweite Abschnitt des sehr lesenswerten Funktionentheorie-Buches von A. Hurwitz und R. Courant (Springer-Verlag 1964) oder die neueren von Patrick Du Val (Elliptic Functions and Elliptic Curves, Cambridge University Press 1973), B. Schoeneberg (Elliptic Modular Functions, Springer-Verlag 1974) und S. Lang (Elliptic Functions, Addison-Wesley 1973). Aber die Art der Präsentation und die Originalität der Beweise (insbesondere der auf Siegel zurückgehenden, wobei einige Sätze sogar mehrfach bewiesen werden) verleihen dem vorliegenden Buch neben den genannten anderen durchaus seine Existenzberechtigung. Wer allerdings auf eine modernere und weiterführende Darstellung des Gebietes aus ist, sollte sich an das Buch von S. Lang halten.

Saarbrücken H. G. Zimmer

Eichler M., Zagier, D., The Theory of Jacobi Forms (Progress in Mathematics, Vol. 55), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1985, 156 pp., hard cover, DM 46,–

Fourier-Jacobi-Formen zur Gruppe $SL_2(\mathbf{Z})$ sind holomorphe Funktionen

$$\phi : H \times \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad (H = \text{obere Halbebene})$$

mit folgenden drei Eigenschaften:

$$(1) \qquad \phi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k e^{\frac{2\pi i m z}{c\tau+d}} \phi(\tau, z) \quad \text{für} \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$$

$$(2) \qquad \phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e^{-\pi i m(\lambda^2\tau + 2\lambda z)}\phi(\tau, z)$$

$$(3) \qquad \phi(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbf{Z} \\ r^2 \leqslant 4nm}} c(n, r)e^{2\pi i(n\tau + rz)}$$

Dabei sind k und m natürliche Zahlen, das *Gewicht* und der *Index* von ϕ.

Bei festem τ ist ϕ eine sogenannte Thetafunktion, wie sie zur Einbettung der elliptischen Kurve $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z})$ in einen projektiven Raum benutzt wird. Der „Nullwert" $\phi(\tau, 0)$ ist eine elliptische Modulform vom Gewicht k. Wichtigste Beispiele liefern die Fourierentwicklungen einer Siegelschen Modulform

$$F(Z), Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{pmatrix}$$

Entwickelt man F als Fourierreihe in τ',

$$F(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\tau, z)e^{2\pi i m\tau'}$$

so ist ϕ_m eine Fourier-Jacobi-Form vom Gewicht k und Index m.

Ein anderes interessantes Beispiel stammt von der Weierstraßschen $\wp$-Funktion

$$\wp(\tau, z) = z^{-2} + \sum_{\omega \in \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau}' ((z + \omega)^{-2} - \omega^{-2})$$

Sie ist eine meromorphe Funktion, welche sich wie eine Fourier-Jacobi-Form vom Gewicht 2 und Index 0 transformiert. Sie läßt sich als Quotient zweier Fourier-Jacobi-Formen (vom Index 1 und Gewichten 12 und 10) schreiben.

In der Monographie werden Fourier-Jacobi-Formen vom klassischen („Heckeschen") Standpunkt aus eingehend untersucht. Darstellungstheoretische und algebraisch geometrische Aspekte werden dabei nur am Rande berücksichtigt.

Das Buch hat dadurch einen sehr elementaren Charakter und ist ein exzellenter Einstieg in diese noch in verschiedenen Richtungen ausbaufähige Theorie.

Eine der Hauptanwendungen der Theorie, welche in dem Buch ausführlich behandelt wird, ist der Beweis einer Vermutung von Saito und Kurokawa, welche eine Beziehung zwischen elliptischen Modulformen vom Gewicht $2k-2$ und gewissen Siegelschen Modulformen zweiten Grades (den Formen des Maaßschen „Spezialschar") herstellt. Allein diese Beziehung rechtfertigt die Entwicklung einer Theorie von Fourier-Jacobi-Formen und ihren weiteren Ausbau.

In dem Buch selbst werden eine Reihe von Struktursätzen über den Raum der Fourier-Jacobi-Formen $J_{k,m}$ vom Gewicht k und Index m bewiesen. Dieser Raum ist immer endlich dimensional.

Eine Theorie von „Heckeoperatoren" wird für diesen Raum entwickelt. Die Fourier-Jacobi-Formen bei variablem k und m lassen sich zu einer nicht endlich erzeugten bigraduierten Algebra zusammenfassen. Auch über deren Struktur werden Aussagen gemacht. Es würde hier zu weit führen, diese Struktursätze im Einzelnen aufzuführen.

Hervorhebenswert ist die Theorie der Fourier-Jacobi-Formen vom Index 1. Diese entsprechen umkehrbar eindeutig den elliptischen Modulformen zur Gruppe $\Gamma_0(4)$ vom halbzähligen Gewicht $k-1/2$, wobei das Multiplikationssystem mit dem von

$$(\Sigma\, e^{\pi i n^2 \tau})^{2k-1}$$

übereinstimmen soll. Diese Korrespondenz ist eine der Grundlagen für den Beweis der erwähnten Vermutung von Kurokawa Saito.

Das Buch ist äußerst klar geschrieben, als Vorlesungs- und Seminarvorlage bestens geeignet. Es bietet interessierten Studenten eine Möglichkeit, auf raschem Wege an Probleme aktueller Forschung herangeführt zu werden.

Heidelberg E. Freitag

Mumford, D., Tata Lectures on Theta II (Progress in Mathematics, Vol. 43), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1983, 293 pp., hard cover, DM 62,–

In Band I dieses Werkes (s. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **86** (1984) p. *72*) wurde die Riemannsche Thetafunktion

$$\vartheta(z,\tau) = \sum_{n\in Z^g} e^{\pi i\{\tau[n]+2n'z\}}$$

$$z\in \mathbf{C}^g,\ \tau=\tau',\ \mathrm{Im}\tau > 0 \quad \text{(positiv definit)}$$

gemäß ihrer Bedeutung für die abelsche Varietät

$$X(\tau) := \mathbf{C}^g/L$$

eingeführt. Dabei ist L das Gitter, welches von den Einheitsvektoren und den Spalten der Matrix τ aufgespannt wird. Man erhält so alle abelschen Varietäten vom Hauptpolarisationstyp.

Die Bedeutung der Riemannschen Thetafunktion ergibt sich daraus, daß man mit ihrer Hilfe projektive Einbettungen von $X(\tau)$ konstruieren kann. (Die projektiven Koordinaten von $X(\tau)$ sind gewisse Translate von $\vartheta(z,\tau)$.)

Gewisse abelsche Varietäten $X(\tau)$ bekommt man als Jacobische Varietäten von kompakten Riemannschen Flächen (= algebraischen Kurven). Das klassische Schottkyproblem ist: „Welche?" Genauer: *Welche speziellen Eigenschaften besitzt die Funktion* $z \mapsto \vartheta(z,\tau)$, *wenn* $X(\tau)$ *eine Jacobische ist?*

In einer kürzlich erschienenen Arbeit von Arbarello und Concini (on a set of equations characterizing Riemann matrices) wurde eine Lösung des Schottkyproblems angegeben. Leider konnte dieser bedeutsame Beitrag in dem Buch Mumfords nicht mehr berücksichtigt werden, ein Umstand, welcher eine Fortsetzung des Werkes von Mumford wünschenswert erscheinen läßt.

Der Ausgangspunkt von Band II ist die Beobachtung, daß die Riemannsche Thetafunktion $\vartheta(z, \tau)$ bei festem τ Lösung von vielen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen ist. Dies folgt einfach aus der Tatsache, daß mittels gewisser Differentialoperatoren aus $\vartheta(z, \tau)$ Schnitte in gewissen Geradenbündeln auf $X(\tau)$ konstruiert werden können, und daß die Dimension dieser Schnittmoduln nach oben abgeschätzt werden kann. Diese Differentialgleichungen sind nicht explizit bekannt.

Wenn jedoch τ von einer Riemannschen Fläche kommt, insbesondere wenn diese Fläche hyperelliptisch ist, kann man einfache explizite Differentialgleichungen angeben, denen $\vartheta(z, \tau)$ genügen muß.

Am weitesten entwickelt wird der Fall einer hyperelliptischen Periodenmatrix. Hier gelangt Mumford zu einem großen neuen Resultat, nämlich der vollständigen Charakterisierung hyperelliptischer Periodenmatrizen.

Mit Hilfe der Thetafunktion $\vartheta(z, \tau)$ zu hyperelliptischem τ werden explizite Lösungen berühmter Differentialgleichungen konstruiert, beispielsweise

a) der Sine-Gordan-Gleichung: $U_{tt} - U_{xx} = \sin U$

b) der Korteweg-de Vries-Gleichung: $U_t + U_{xxx} + U - U_x = 0$

Etwas komplizierter ist der Fall beliebiger Riemannscher Flächen. Hier werden Lösungen konstruiert zur

c) Kadomtsev-Petriashvili-Gleichung: $U_{yy} + (U_t + U_{xxx} + UU_x)_x = 0$

(ohne allerdings zu einer Lösung des Schottkyproblems auf diesem Wege zu gelangen).

Obwohl das Buch viele neue Resultate enthält, ist es eher im Stile eines (sehr anspruchvollen) Lehrbuchs geschrieben. Es beginnt mit einer kurzen Einführung in die algebraische Geometrie. Ausführlich behandelt wird die Theorie der hyperelliptischen Riemannschen Flächen und ihrer Jacobischen. Hier wird auch viel klassisches Material verarbeitet. Ein Höhepunkt des Buches ist auch die „hyperelliptische p-Funktion", mit Hilfe derer man schöne projektive Modelle relativ niedriger Einbettungsdimension speziell hyperelliptischer Flächen konstruieren kann.

Erwähnenswert ist noch ein Anhang von Umerura, in dem ausgeführt wird, wie man mittels Theta-Konstanten algebraische Gleichungen explizit lösen kann.

Das schöne und wichtige Buch Mumfords ist eine wertvolle Bereicherung der Literatur über Thetafunktionen, es ist richtungsweisend für weitere Forschung auf diesem Gebiet, es bietet aber durch seinen relativ elementaren Charakter auch die Möglichkeit, Studenten in Seminaren und Vorlesungen an ein zwar kompliziertes aber schönes und traditionsreiches Gebiet heranzuführen.

Heidelberg E. Freitag

Lamotke, K., Regular Solids and Isolated Singularities, Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg 1986, x, 224 pp., paperback, DM 48,–

Ein nicht unbedeutender Grund für die Attraktivität des Studiums von isolierten Singularitäten, zumal derjenigen von komplex-zweidimensionalen Hyperflächen, liegt in der Tatsache, daß bei ihrer Untersuchung sowohl Methoden aus verschiedenen mathematischen Gebieten benutzt werden, als auch Zusammenhänge mit anderen Theorien entdeckt wurden. Das vorliegende Buch möchte einen Teil dieser Methoden entwickeln und gleichzeitig die genannten Zusammenhänge herausstellen. Es konzentriert sich dabei auf die Konstruktion, die Auflösung und das Deformationsverhalten der sogenannten einfachen Flächensingularitäten, d. h. derjenigen Singularitäten, die sich als Quotienten der komplexen Ebene $\mathbf{C}^2$ nach endlichen Untergruppen G von $SL_2(\mathbf{C})$ realisieren lassen.

Die endlichen Untergruppen von $SL_2(\mathbf{C})$ stehen nun in engster Beziehung zu den endlichen Untergruppen der Rotationsgruppe $SO_3(\mathbf{R})$ und daher zu den regulären Polyedern des dreidimensionalen Raumes. So widmet sich das erste Kapitel des Buches der Klassifikation der regulären Polyeder in allen Dimensionen, und es studiert ihre Symmetriegruppen im dreidimensionalen Fall. Das zweite Kapitel setzt diese Gruppen in Beziehung zu den endlichen Untergruppen G der unitären Gruppe $SU_2(\mathbf{C})$ oder, was dasselbe ist, der Gruppe der Quaternionen mit Norm Eins. Neben einer darauf aufbauenden Beschreibung der vierdimensionalen regulären Körper findet man hier Erzeugende und Relationen für diese Gruppen, eine topologische Untersuchung des Bahnenraumes S^3/G (S^3 die Einheitssphäre in $\mathbf{C}^2$) und die Invariantentheorie von G, d. h. die algebraisch-geometrische Beschreibung des Bahnenraumes $\mathbf{C}^2/G$, die auf H. A. Schwarz (1872) und F. Klein (1884) zurückgeht. Insbesondere wird gezeigt, wie sich der Quotient $\mathbf{C}^2/G$ als eine Fläche mit isolierter Singularität in den affinen Raum $\mathbf{C}^3$ einbetten läßt. Dem Studium dieser Singularität widmet sich im wesentlichen der verbleibende Teil des Buches.

Im dritten Kapitel werden zunächst die Grundlagen der lokalen Theorie mehrerer komplexer Veränderlicher entwickelt (Vorbereitungssatz, Nullstellensatz, endliche Abbildungen, Dimension, reguläre Folgen). Das vierte Kapitel konstruiert und untersucht dann die Auflösungen der einfachen Singularitäten. Hier trifft man auf die diesen Singularitäten zugeordneten Dynkindiagramme A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 in Gestalt der dualen Auflösungsgraphen (eine Entdeckung, die zuerst von P. DuVal (1934) gemacht wurde). Das letzte Kapitel untersucht schließlich das Deformationsverhalten der einfachen Singularitäten. Neben der Entwicklung der Theorien der Milnorzahl, der endlichen Bestimmtheit und der universellen Entfaltung findet sich hier die Arnol'dsche Charakterisierung der einfachen Singularitäten als derjenigen Singularitäten, in deren Entfaltung bis auf Äquivalenz nur endlich viele verschiedene andere Singularitäten auftreten können. Das Kapitel schließt mit einigen Andeutungen, ohne Details aber mit Literaturverweisen, von weiteren Zusammenhängen, die sich auftun, wenn man die Milnorfaser und das Milnorgitter der einfachen Singularitäten studiert, oder mit Brieskorn die Geometrie von Konjugationsklassen in einfachen Liegruppen untersucht, oder mit McKay die Darstellungstheorie der endlichen Untergruppen von $SL_2(\mathbf{C})$ betrachtet.

Obwohl im Vordergrund des Buches die einfachen Singularitäten mit ihren Querverbindungen zu anderen Gebieten stehen, werden die einzelnen Theorien und Methoden in weit größerer Allgemeinheit entwickelt als es für diese Beispiele erforderlich wäre. Dabei folgt der Autor zahlreichen Originalarbeiten, die sich verstreut in der Literatur finden. Er modifiziert aber auch die ursprünglichen Darstellungen vom Standpunkt später gewonnener methodischer Einsichten. Insgesamt besitzt das Buch durchaus den Charakter eines Lehrbuches, und es eignet sich sicherlich sehr gut als Vorlage zu Vorlesungen oder Seminaren in den höheren Studiensemestern. Wer sich nur für die Beschreibung der erwähnten Querbeziehungen interessiert, wird sich schneller und umfassender anhand von Übersichtsartikeln (auf die der Autor teilweise hinweist) informieren können. Diese Artikel setzen allerdings größere Vorkenntnisse als das Buch voraus. Insofern kommt dem Buch auch das Verdienst zu, einen Teil dieser Beziehungen einem breiteren Publikum zugänglich zu machen.

Liverpool P. Slodowy

Looijenga, E. J. N., Isolated Singular Points on Complete Intersections (London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 77), Cambridge et al.: Cambridge University Press 1984, xi, 200 pp., pb., £ 12.50

Die Theorie der Singularitäten holomorpher Abbildungen bzw. komplexer Räume ist aus der „Sturm und Drang" Periode in eine gewisse Konsolidierungsphase getreten. Dokumentiert wird dies unter anderem dadurch, daß allmählich Bücher entstehen, die Teile der Theorie zusammenfassen. Eines der ersten Bücher aus dieser Phase ist das zu besprechende Buch von Eduard Looijenga, der selbst entscheidend an der Entwicklung der Theorie der isolierten Singularitäten beteiligt war und ist.

Über 15 Jahre war Milnors kleines Buch über „Singular Points of Complex Hypersurfaces" praktisch das einzige Buch über Singularitäten (neben Laufers über normale Flächensingularitäten). Auch wenn die Bedeutung von Milnors Buch für die Verbreitung der Singularitätentheorie kaum unterschätzt werden kann, wurde im Laufe der Jahre eine zusammenfassende Darstellung der weiteren Entwicklung immer dringender. Looijengas Buch, das aus Vorträgen im niederländischen Singularitätenseminar hervorgegangen ist, ist daher außerordentlich zu begrüßen.

Eine komplette Darstellung der gesamten Theorie mit all seinen Verästelungen und Querverbindungen ist heute schon für einen einzelnen kaum noch möglich und das ist auch nicht der Zweck dieses Buches. Vielmehr beschränkt sich der Autor, wie der Titel sagt, vor allem auf isolierte Singularitäten von vollständigen Durchschnitten, wenngleich dort, wo dies ohne größeren Aufwand möglich ist, allgemeine isolierte Singularitäten behandelt werden. Die Verwandtheit des Titels mit dem Titel von Milnors Buch mag andeuten, daß hier vor allem derjenige Teil der Singularitätentheorie dargestellt wird, der sich aus der Weiterentwicklung von Milnors Theorie ergeben hat, obwohl zu sagen ist, daß das Buch wesentlich mehr enthält als nur die Verallgemeinerung von Milnors Resultaten auf vollständige Durchschnitte und auch andere Schwerpunkte setzt.

Die Klasse der vollständigen Durchschnitte umfaßt die Klasse der Hyperflächen und meines Erachtens sind es besonders drei Eigenschaften, die die vollständigen Durchschnitte vor den anderen Singularitäten auszeichnen: Sie haben eine einfache, leicht beschreibbare Deformationstheorie, die Topologie der Milnorfaser ist sehr einfach und sie besitzen hervorragende Eigenschaften im Sinne der homologischen Algebra. Dies hat zur Folge, daß sich einige topologische Invarianten von vollständigen Durchschnitten (z. B. Milnorzahl, komplexe Monodromie) algebraisch mit Hilfe von holomorphen Differentialformen beschreiben lassen. Auch diese Beschreibung, die von Brieskorn für Hyperflächen entwickelt wurde und später von anderen Autoren auf vollständige Durchschnitte verallgemeinert wurde, findet sich in dem Buch.

Im einzelnen wird folgendes behandelt: Umgebungsrand, Milnorfaserung und geometrische Monodromie für beliebige isolierte Singularitäten in Kapitel 2. Die Picard-Lefschetz-Formeln für quadratische Singularitäten in Kapitel 3. Etwas algebraischer wird es in Kapitel 4, wo mit Basiswechsel verträgliche analytische Strukturen auf der Menge der kritischen Werte eingeführt werden. Kapitel 5 enthält als ersten Höhepunkt einen vollständigen Beweis des Monodromiesatzes für beliebige isolierte Singularitäten inclusive der Abschätzung für den Index der Quasiunipotenz. Der Beweis ist induktiv und benutzt die relative Monodromie, die auch verwendet wird, um die bekannten Eigenschaften über die Topologie der Milnorfaser von vollständigen Durchschnitten herzuleiten. In Kapitel 6 werden Deformationen vollständiger Durchschnitte (über glatter Basis) mit Hilfe des Formalismus der lokalen Kodaira-Spencer Abbildung untersucht. Eine der wichtigsten und schon sehr feinen diskreten Invarianten eines vollständigen Durchschnitts ist das Milnor-Gitter oder Verschwindungs-Gitter, das aus der mittleren Homologie der Milnorfaser, der Schnittform und einer Basis von verschwindenden Zyklen besteht. Eine Deformationsbeziehung zwischen zwei Singularitäten führt zu einer Inklusion der Milnor-Gitter. Dieses und den Anfang der Klassifikation der isolierten Singularitäten von vollständigen

Durchschnitten findet man in Kapitel 7. Die beiden letzten Kapitel handeln von dem lokalen Gauß-Manin-Zusammenhang und von Anwendungen und reichen unmittelbar bis an die aktuelle Forschung heran. Das Buch endet mit einer Beschreibung einer von dem Autor zuerst eingeführten Periodenabbildung für vollständige Durchschnitte, die im Fall von Kleinschen (oder einfachen) Singularitäten zu einer Identifikation der Diskriminante der semiuniversellen Deformation mit der Diskriminante der assoziierten Coxeter Gruppe führt.

Natürlich enthält das Buch ein Kapitel 1 und zwar ein sehr gelungenes. Hier werden Klassen von isolierten Singularitäten dargestellt, die jeweils durch eine einheitliche Konstruktionsvorschrift entstehen (Quotientensingularitäten, Quasi-Kegel Singularitäten, Spitzen Singularitäten), die im allgemeinen keine vollständigen Durchschnitte sind, aber in der Hierarchie der Singularitäten eine fundamentale Stelle einnehmen.

Der Vollständigkeit halber ist zu erwähnen, daß in dem Buch nichts zu finden ist über die speziellen Aspekte zweidimensionaler Singularitäten (insbesondere zur Auflösung), über gemischte Hodge-Strukturen, über D-Moduln und oszillierende Integrale oder die Klassifikation nach der Modalität. Zu den beiden letzten Punkten kann man sich aber inzwischen hervorragend in dem zweibändigen Werk von Arnold und seinen Schülern informieren, zu den beiden ersten Punkten sind nach Informationen des Referenten Bücher von Riemenschneider und Steenbrink im Entstehen.

Das Buch ist, seinem Entstehungscharakter entsprechend, kein Lehrbuch im eigentlichen Sinne. Es wendet sich an den Forschenden und setzt daher Grundkenntnisse und wichtige Tatsachen aus der komplexen Analysis (einschließlich Garbenkohomologie) und der algebraischen Geometrie und Topologie voraus. Mit dieser Einschränkung wird im Wesentlichen alles bewiesen und zwar meist auf kurze und elegante, häufig auf neue Weise. Für den Lernenden, der die oben genannten Grundkenntnisse besitzt, ist das Buch eine gelungene Einführung in ein Teilgebiet der komplexen Singularitäten und für den Forschenden sind insbesondere die letzten Abschnitte eine Anregung zu weitergehenden Untersuchungen über isolierte Singularitäten.

Kaiserslautern G.-M. Greuel

Weeks, J. R., The Shape of Space: How to Visualize Surfaces and Three-Dimensional Manifolds (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 96), New York – Basel: Marcel Dekker 1985, x, 324 pp., hardcover, $ 59.50

Dieses Buch führt in die Topologie der niederdimensionalen Mannigfaltigkeiten und ihre Differentialgeometrie zugleich ein. Vorkenntnisse außer Schulmathematik sind nicht erforderlich. Dennoch handelt es sich um mehr als eine weitere populäre Darstellung von „Kugeln mit Henkeln und/oder Kreuzhauben, etc.“. Es hat zum Ziel, die Vorstellungsbausteine zu entwickeln, die den wichtigen Arbeiten von W. Thurston zugrundeliegen und ist auch in Kontakt mit ihm entstanden. Die Kapitelüberschriften mit einigen der behandelten Stichworte: 1. Flächen und 3-Mannigfaltigkeiten (Orientierbarkeit, Zweiseitigkeit, zusammenhängende Summe, Produkte). 2. Geometrien auf Flächen (2-Sphäre, hyperbolische Ebene, Geometrien auf (den übrigen) Flächen, Satz von Gauß-Bonnet und Eulersche Charakteristik). 3. Geometrien auf 3-Mannigfaltigkeiten (3-Sphäre, hyperbolischer Raum, weitere Beispiele, Bündel, Thurston-Vermutung). 4. das Universum (z. B. wird die Frage behandelt, daß es von der Krümmung abhängt, ob das Universum einmal wieder kollabiert).

Je nach Vorkenntnissen kann man den einen oder anderen Punkt überschlagen, es aber auch lassen und sich an der Darstellung oder den Bildern erfreuen.

Eine Vielzahl schöner Aufgaben (mit Lösungen) und ein kommentiertes Literaturverzeichnis runden das Buch ab. Es ist ein Beleg dafür, daß die Förderung geometrischer Intuition und ernsthafter Mathematik sich (auch heute) nicht ausschließen. Außer Nichtspezialisten und Interessenten an 3-Mannigfaltigkeiten ist es z. B. allen denen zu empfehlen, die sich in die neueren Untersuchungen von Thurston, Casson, Birman etc. über Automorphismengruppen von Flächen einarbeiten wollen, und deren Stärke darauf beruht, daß – wie seinerzeit z. B. bei Nielsen – Topologie, Differentialgeometrie und kombinatorische Gruppentheorie nicht getrennt betrachtet werden.

Frankfurt am Main W. Metzler

Penrose, R., Rindler, W., Spinors and Space-Time, Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields, Vol. 2: Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry (Cambridge Monographs on Mathematical Physics), Cambridge et al.: Cambridge University Press 1985/1986, vol. 1: x, 458 pp., hard cover, £ 45.00, vol. 2: 450 pp., hard cover, £ 45,00

Vom Inhalt her ist dieses Werk als „Eine mathematische Grundlegung der Einsteinschen Theorie“ für Relativisten, als „Geometrie von Spinorfeldern“ für Differentialgeometer und als „Spin-n Felder auf flachen und gekrümmten Räumen“ für Feldtheoretiker gleichermaßen interessant.

Entstanden aus einer Seminarmitschrift von 1962 hat dieses Werk in den 23 Jahren vor seinem Erscheinen als Buch die mathematischen Methoden der Allgemeinen Relativitätstheorie revolutioniert, sei es, daß vorhandene Ansätze durch den Spinorkalkül wesentlich vereinfacht und weitergeführt werden konnten (wie: Algebra des Krümmungstensors, Null-Kongruenzen, Positivität der Energie), sei es, daß zu wichtigen Problemen überhaupt erst ein Zugang gefunden wurde, obwohl eine vektorielle Darstellung möglich ist. Der Lohn des langen Wartens ist ein Buch, das in seinen einführenden Abschnitten noch geduldig für eine Idee wirbt, andererseits aber große Gebiete in gewissem Sinne abschließend darstellen kann. Kein Zweifel, daß für Relativisten dieses Buch zum Standardwerk werden wird, wie etwa der Hawking & Ellis, insbesondere, wenn es wie bei diesem eine preiswertere Paperback-Ausgabe geben sollte.

Die beiden anderen oben (und im Klappentext) genannten Lesergruppen werden den Zugang erheblich schwerer finden, da für sie dieses Buch nicht primär geschrieben wurde.

Die bei vielen verpönte Indexnotation wird hier fast durchweg benutzt und dazu streng begründet (Kap. 2), wobei den vier Unterscheidungsmerkmalen von Indizes ein fünftes hinzugefügt wird, das im Schriftbild etwa bei halbfetten griechischen Indizes kaum zu erkennen ist. Wen die Gründe, insbesondere der Hinweis auf die vielen Verjüngungen und Symmetrisierungen, nicht überzeugen, vergleiche einmal die 4-zeilige Formel (4.11.5) mit den gleichwertigen 24 indexfreien Formeln (4.11.12) in 28 Zeilen. Übrigens: die im Anhang zu Band 1 angegebene Diagrammnotation für private Rechnungen kennzeichnet den Geist dieses Werkes hervorragend und ist vor dem Kauf des Buches zur Betrachtung empfohlen.

Mit Ausnahme des Anhanges zu Band II werden nur Räume der Dimension $n = 4$ und Metrik der Signatur -2 betrachtet. Auch wenn das exponentielle Wachstum der Spinorräume ($\dim \approx 2^{n/2}$) die Vorzüge des Spinformalismus bei höheren Dimensionen aufheben mag, werden Differentialgeometer wohl doch gern darüber informiert werden wollen, welche Aussagen dimensions- und signaturunabhängig sind.

Die wichtigen Aussagen des Buches sind in weiten Teilen nicht als „Sätze“ aus dem fortlaufenden Text herausgehoben, was das Lesen oft angenehmer macht, aber das Nachschlagen erschwert. Behandlung von Fundamentalem wird oft unterbrochen durch Formalismen für konkrete Problemstellungen, etwa die Behandlung von Zusammenhang und Krümmung in Kap. 4 durch den „Compact Spin-Coefficient Formalism“, bei dem zwei Nullrichtungen als gegeben angesehen werden, womit eine 2-parametrige Eichgruppe bleibt und der sich etwa bei der Behandlung von charakteristischen Anfangswertproblemen und der lichtartigen Asymptotik und ihren 2-dim sphärischen Schnitten bewährt. Die Ausführlichkeit der Darstellung schwankt stark: Während die Spinoperationen in Kap. 1 ausführlich in mehreren Alternativen geometrisch gedeutet werden, ist die Behandlung der Felder, auch die der Einsteinschen Feldgleichungen auf der Raumzeit in Kap. 5 knapp und formal, hier gibt es auch eine der wenigen Lücken: Die vor kürzerer Zeit gelungene Darstellung der (konformen) Vakuumfeldgleichungen im Spinformalismus als symmetrisch hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen zeigt, daß dieser Formalismus nicht nur zu geometrischen Einsichten, sondern auch zu funktionalanalytischen Existenzaussagen und zu numerischen Berechnungen neue Wege öffnet. Das Buch hingegen beschränkt sich unter Voraussetzung einer analytischen Metrik auf formale Entwicklungen und Integraldarstellungen, wie die verallgemeinerte Kirchhoff-d'Adhemar Formel für masselose Spin-n Felder.

Der Feldtheoretiker wird akzeptieren, weshalb die van der Waerden Spinoren als elementare Objekte den Dirac-Bispinoren sowie die Feldstärken den Potentialen vorgezogen werden, mag aber die Konsequenz bedauern, mit der die gewohnten Darstellungen unterdrückt werden. Den Zielen des Werkes entsprechend wird die Supergravitation nur mit wenigen verstreuten Hinweisen bedacht, während eine praktisch bedeutungslose, prinzipiell interessante vektorielle Darstellung der Dirac-Weyl Gleichung als nichtlineare Differentialgleichung für einen schiefen spurfreien antiselbstdualen Tensor hergeleitet wird.

Das ganze Werk ist getragen von der These, daß Spinoren eine grundlegendere Struktur für die Raumzeit als Vektoren bilden, verblüffend angesichts dessen, daß sie nicht nur eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sondern auch eine (pseudo-) Riemannsche Metrik benötigen, daß so grundlegende Operationen wie die Lie-Verschiebung (für Vektoren in Band I behandelt, für Spinoren im Twistorkapitel Band II versteckt) nur sehr eingeschränkt möglich sind und daß die geometrische Interpretation der Addition trotz der ingeniösen Darstellung in Kap. I doch recht kompliziert ist.

Skeptiker mögen den unbestreitbaren Erfolg des Spinorkalküls bei der praktischen Arbeit der Relativisten als eleganten Trick ansehen, bei dem ein 4-dim reeller Vektorraum durch einen 2-dim komplexen ersetzt wird. Sie werden sich wohl erst überzeugen lassen, wenn das klassische Raumzeit-Konzept abgelöst würde unter Aufgabe der differenzierbaren Mannigfaltigkeit und damit glatter Kurven als Grundstruktur aber Beibehaltung der Kausalordnung und damit der Nullstrahlen.

Diese Hinweise sollen nicht abschrecken, sondern im Gegenteil zu einer anfänglichen Geduld mit einem Buch auffordern, das die (lokale, analytische) Struktur der Allgemeinen Relativitätstheorie wohl in der Form darstellt, in der sie den größten Einfluß auf moderne Differentialgeometrie und Feldtheorie haben kann und von den kompetentesten Autoren verfaßt wurde. Insbesondere Band I mit der Geometrie (Kap. 1), der Algebra (Kap. 3), der Analysis (Zusammenhang und Krümmung, Kap. 4) und der Feldtheorie (Kap. 5) ist eine weite Verbreitung zu wünschen. Band II enthält neben einer glänzenden Zusammenfassung von Band I und einem Anhang über allgemeine Spinoren, der unbedingt zu Band I gehört hätte, im wesentlichen Abschnitte mit Anwendungen für die klassische Raumzeit-Theorie, in denen die Eleganz des Kalküls sich besonders erweist: Kongruenzen von Nullgeodäten (Kap. 7), algebraische Klassifikation des Krümmungstensors (Kap. 8) und das lichtartige Unendliche (Kap. 9) sowie ein Abschnitt über Twistoren (Kap. 6), der im Gegensatz zu dem Rest des Werkes nicht so sehr eine Darstellung von Erfolgen, sondern von Hoffnungen ist.

Hamburg H.-J. Seifert