

90. Band Heft 2  
ausgegeben am 15. 4. 1988

**DMV**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer  
unter Mitwirkung von  
P. L. Butzer, U. Felgner,  
H. Kurzweil, J. Stoer



**B. G. Teubner Stuttgart 1988**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende dieses Heftes zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069  
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1988 – Verlagsnummer 2903/2

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim

Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Inhalt Band 90, Heft 2

### 1. Abteilung

D. R. Heath-Brown: Differences Between Consecutive Primes . . . . .	71
R. Kühnau: Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve . . . . .	90

### 2. Abteilung

Euler, L., Opera omnia, Band IV A 6 ( <i>E. Knobloch</i> ) . . . . .	1
Field, J. V., Gray, J. J. (editors), The Geometrical Work of Girard Desargues ( <i>G. Pickert</i> ) .	2
Harish-Chandra, Collected Papers, 4 Vol. ( <i>W. Borho</i> ) . . . . .	3
Landau, E., Collected Works, Vol. 3 ( <i>E. Hlawka</i> ) . . . . .	4
Borel, A., et al., Intersection Cohomology ( <i>L. Kaup</i> ) . . . . .	5
Iversen, B., Cohomology of Sheaves ( <i>H. Lange</i> ) . . . . .	8
Grauert, H., Remmert, R., Coherent Analytic Sheaves ( <i>G. Trautmann</i> ) . . . . .	9
Henkin, G. M., Leiterer, J., Theory of Functions on Complex Manifolds ( <i>K. Wolffhardt</i> ) .	11
Jank, G., Volkmann, L., Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen ( <i>G. Frank</i> ) . . . . .	12
Deimling, K., Nonlinear Functional Analysis ( <i>Ch. Fenske</i> ) . . . . .	13
König, H., Eigenvalue Distributions of Compact Operators ( <i>H. Triebel</i> ) . . . . .	15
Young, R. M., An Introduction to Nonharmonic Fourier Series ( <i>G. Ritter</i> ) . . . . .	16
Zaanen, A. C., Riesz Spaces II ( <i>K. Donner</i> ) . . . . .	16
Kunen, K., Vaughan, J. (editors), Handbook of Set-Theoretic Topology ( <i>N. Brunner</i> ) . . .	18
Arnold, V. I., Catastrophe Theory ( <i>G. Wassermann</i> ) . . . . .	20
Irwin, M. C., Smooth Dynamical Systems ( <i>J. Gamst</i> ) . . . . .	21
Szlenk, W., An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems ( <i>J. Gamst</i> ) . . .	22
Girault, V., Raviart, P.-A., Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations ( <i>M. Dobrowolski</i> ) . . . . .	23
Wahl, W. von, The Equations of Navier-Stokes and Abstract Parabolic Equations ( <i>H. Sohr</i> ) . . . . .	24

## In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

- M. Atiyah: The Frontier Between Geometry and Physics  
H. Bühlmann: Entwicklungstendenzen in der Risikotheorie  
J. Heinhold: Oskar Perron  
K.-H. Hoffmann: Steuerung freier Ränder  
K. Hulek: Elliptische Kurven, abelsche Flächen und das Ikosaeder  
J. Jost: Das Existenzproblem für Minimalflächen  
D. G. Kendall: A Survey of the Statistical Theory of Shape  
H. W. Knobloch: Steuerbarkeit als zentraler Begriff beim Aufbau der Kontrolltheorie  
B. H. Matzat: Über das Umkehrproblem der Galoisschen Theorie  
H. Rohrbach: Alfred Brauer zum Gedächtnis  
P. Roquette: Über die algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten von Max Deuring  
W. Singhof: Einige Beziehungen zwischen stabiler Homotopietheorie und Zahlentheorie  
W. Stute: Empirische Prozesse in der Datenanalyse

---

## Anschriften der Herausgeber

- Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, 8520 Erlangen  
Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen  
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen  
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, 8520 Erlangen  
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

## Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

## Differences Between Consecutive Primes

D. R. Heath-Brown, Oxford

### 1 Introduction – a Probabilistic Model

Looking at tables of primes, or testing successive numbers for primality, one is struck by their apparent irregularity. There are large gaps and small gaps, following no apparent pattern. It is almost as though primality were a probabilistic phenomenon. Perhaps God decided whether or not each successive integer  $n$  should be prime, by picking labels “prime” and “composite” at random, from a suitable infinite supply. The purpose of this survey is to look at what is known about the differences between consecutive primes, to examine various conjectures on these differences, and to consider the evidence of numerical calculations. The primes have been tabulated up to  $10^8$  (Baker and Gruenberger [1]), and for short ranges of larger numbers (such as  $10^{15} < p < 10^{15} + 150\,000$  – Jones, Lal and Blundon [25]). Thus considerable numerical evidence is available.

The first question we must answer is: how many primes are there, up to a given bound  $x$ ? Clearly, the fewer primes there are, the larger the gaps must be, at least on average. We therefore define

$$\pi(x) = \#\{p \leq x\},$$

where  $p$  runs over primes (as it will throughout this paper). It was proved by Euclid that the sequence of primes is infinite, so we are assured that  $\pi(x)$  tends to infinity. Values of  $\pi(x)$ , for various  $x$ , may be obtained from counts in tables of primes, but there are also formulae for evaluating  $\pi(x)$  without knowing the individual primes up to  $x$ . The largest  $x$  for which  $\pi(x)$  is currently known is  $x = 4 \times 10^{16}$  (Lagarias, Miller and Odlyzko [28]). On the basis of early calculations, Gauß (in a letter dated 1849) suggested that  $\pi(x)$  should be approximately equal to

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad (x \geq 2).$$

The conjecture that

$$\frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty)$$

(i.e. that  $\pi(x) \sim \text{Li}(x)$ ) was eventually proved in 1896 by Hadamard and de la Vallée Poussin (independently). The estimate is known as the Prime Number Theorem. The figures in Table 1 illustrate the approximation.

Table 1

$x$	$\pi(x)$	$\text{Li}(x) - \pi(x)$
$10^8$	5761455	754
$10^9$	50847534	1701
$10^{10}$	455052511	3104
$10^{11}$	4118054813	11588
$10^{12}$	37607912018	38263
$10^{13}$	346065536839	108971
$10^{14}$	3204941750802	314890
$10^{15}$	29844570422669	1052619
$10^{16}$	279238341033925	3214632

The Prime Number Theorem tells us that if a number  $n$ , roughly equal to  $x$ , is chosen at random, then there is a probability  $1/\log x$  that  $n$  is prime. We may therefore formulate conjectures about differences between consecutive primes by taking numbers of order  $x$ , and supposing the gaps to have a Poisson distribution, with mean  $\log x$ . The idea that the primality of a given integer  $n$  should be a probabilistic event is clearly nonsense. However this simple model does lead in many situations to consistent, plausible conjectures on the distribution of the primes. One word of caution is due here though: as we shall see later, the model is definitely too simple, and in certain cases suggests results which are actually known to be false — an example is given at the end of § 3.

## 2 The Conjectures — Small Gaps and Large Gaps

We shall write  $p_n$  for the  $n$ -th prime, starting with  $p_1 = 2$ , and we shall let  $d_n$  denote the difference  $p_{n+1} - p_n$ . According to the Prime Number Theorem the mean size of  $d_n$  is  $\log p_n$ , so that there is a tendency for  $d_n$  to grow at that rate. In this section we shall consider extreme variations from the average size.

Since  $p_n$  is odd for  $n \geq 2$  we have  $d_n \geq 2$  for  $n \geq 2$ . It is immediately clear from inspection of the tables that the case  $d_n = 2$  happens fairly frequently. Primes  $p_n$  and  $p_{n+1}$  for which  $p_{n+1} - p_n = 2$  are known as prime twins, and it is conjectured that there are infinitely many of them. The largest pair known is

$$260497545 \times 2^{6625} \pm 1$$

(Atkin and Rickert). Our naive heuristic model suggests that the “probability” of  $n$  and  $n + 2$  being prime is  $(\log n)^{-2}$ , so that one might expect of the order of  $x(\log x)^{-2}$  prime pairs up to  $x$ . This is enough to allow us to predict the existence of infinitely many prime twins with a fair degree of confidence. For a more accurate argument, we ought to take account of the fact that primes have no proper factors! Thus if  $p$  is an odd prime, then  $p + 2$  cannot be a multiple of 2, so that its “probability” of being prime is doubled. Similarly, if it is known that  $p \equiv 1 \pmod{3}$ , then  $p + 2$  cannot be prime. As a result of such conditions there is a correction factor to be applied for each potential prime factor. If we write

$$\pi_2(x) = \#\{p \leq x : p + 2 \text{ prime}\}$$

then we are led to the conjecture (Hardy and Littlewood [11]) that

$$(2.1) \quad \pi_2(x) \sim \mathfrak{S} \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}$$

where the constant  $\mathfrak{S}$  is given by

$$\mathfrak{S} = 2 \prod_{p > 2} \left( 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \doteq 1.32032.$$

For comparison, the largest value of  $\pi_2(x)$  actually computed is

$$\pi_2(10^9) = 3424506$$

(Brent [4]). When  $x = 10^9$  the right hand side of (2.1) is approximately 3425301.

Turning now to the question of large differences between consecutive primes, we consider  $p_n$  in the range  $x < p_n \leq 2x$ . For such a prime, the “probability” of having  $d_n > N$  is about

$$\left( 1 - \frac{1}{\log x} \right)^N.$$

Since there about  $x/\log x$  primes in the interval  $x < p_n \leq 2x$  we may estimate the “probability” that  $d_n \leq N$  for each such  $n$ , to be

$$\left\{ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\log x} \right)^N \right\}^{x/\log x}.$$

Taking  $N = C(\log x)^2$  this is roughly

$$(1 - x^{-C})^{x/\log x} \doteq \begin{cases} \exp \left( -\frac{x^{1-C}}{\log x} \right), & 0 < C < 1 \\ 1 - \frac{x^{1-C}}{\log x}, & C > 1. \end{cases}$$

If we now let  $x = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ , we deduce that the “expected” number of  $x = 2^m$ , such that  $d_n \leq C(\log p_n)^2$  for every prime in the range  $x < p_n \leq 2x$ , is

$$\sum_{x=2^m} \exp \left( -\frac{x^{1-C}}{\log x} \right) < \infty,$$

if  $0 < C < 1$ . Similarly, the “expected” number of  $x = 2^m$ , such that  $d_n \geq C(\log p_n)^2$  for some prime in the range  $x < p_n \leq 2x$ , is

$$\sum_{x=2^m} \frac{x^{1-C}}{\log x} < \infty,$$

if  $C > 1$ . We are therefore led to the conjectures that

$$(2.2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{(\log p_n)^2} = 1,$$

(Cramér [8]) and, more precisely,

$$\max_{p_n \leq x} d_n \sim (\log x)^2,$$

(Shanks [38]). A more careful argument suggests that a better approximation to the maximal size of  $d_n$  would be

$$(\log p_n)(\log p_n + \log \log \log p_n).$$

Evidence for these conjectures is presented in Table 2, which shows the smallest prime  $p_n$  corresponding to various values of  $d_n$ . The figures in the final column should be tending to 1.

Table 2

$p_n$	$d_n$	$d_n(\log p_n)^{-2}$
31397	72	0.6715
370261	112	0.6812
2010733	148	0.7025
20831323	210	0.7394
25056082087	456	0.7953
2614941710599	652	0.7975

### 3 Small Gaps

In this section we shall look at the results which have been proved about the existence of small gaps between primes. On the one hand one has  $d_n \geq 2$  for all  $n \geq 2$ , and on the other one sees that

$$(3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\log p_n} \leq 1,$$

since  $\log p_n$  is the average size for  $d_n$ . The question then is: can one improve on (3.1)? In fact the best unconditional results established thus far merely reduce the constant 1 in (3.1).

Three different approaches to the problem have been used. The first is due to Erdős [10]. The crucial input is an upper bound for the number

$$\pi_{2k}(x) = \#\{p \leq x: p + 2k \text{ prime}\}.$$

In analogy to (2.1) one conjectures that

$$\pi_{2k}(x) \sim \mathfrak{S}_k \frac{x}{(\log x)^2},$$

but we are only able to prove upper bounds of the form

$$(3.2) \quad \pi_{2k}(x) \leq (C + o(1)) \mathfrak{S}_k \frac{x}{(\log x)^2}, \quad (x \rightarrow \infty),$$

where  $C$  is a positive constant. Such bounds come from sieve methods. The simplest Selberg sieve leads to  $C = 8$ , and the best value obtained so far is  $C = 3.917\dots$ ,



(Chen [6]). As far as the numbers  $\mathfrak{S}_k$  are concerned, all we shall need to know is that their average is 2; that is to say

$$\sum_{1 \leq k \leq K} \mathfrak{S}_k \sim 2K \quad (K \rightarrow \infty).$$

Erdős's method begins by assuming that  $d_n \geq \mu \log p_n$  for sufficiently large  $n$ . Taking  $y = x(\log x)^{-2}$ , we observe that

$$(3.3) \quad \sum_{y < p_n \leq x} d_n \sim x,$$

since the sum is essentially just the difference between the smallest and largest primes occurring. Now let  $\lambda > 1$  be constant, and suppose that there are  $N$  primes  $p_n$  with  $y < p_n \leq x$  and  $p_n \leq \lambda \log p_n$ . Then  $N$  cannot be too small, at least if  $\mu$  and  $\lambda$  are close to 1. Specifically we have

$$\sum_{y < p_n \leq x} d_n \geq N\mu(\log y) + (\pi(x) - \pi(y) - N)\lambda(\log y) \sim \lambda x - (\lambda - \mu)N \log x,$$

by the Prime Number Theorem. Thus (3.3) yields

$$(3.4) \quad N \geq \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu} + o(1) \right) \frac{x}{\log x}.$$

However

$$N \leq \sum_{k_1 < k \leq k_2} \pi_{2k}(x),$$

where  $k_1 \sim (\mu \log x)/2$  and  $k_2 \sim (\lambda \log x)/2$ . The upper bound (3.2) therefore produces

$$\begin{aligned} N &\leq (C + o(1)) \left\{ \sum_{k_1 < k \leq k_2} \mathfrak{S}_k \right\} \frac{x}{(\log x)^2} \sim 2C(k_2 - k_1) \frac{x}{(\log x)^2} \\ &\sim C(\lambda - \mu) \frac{x}{\log x}. \end{aligned}$$

On comparing with (3.4) we conclude that  $C(\lambda - \mu)^2 \geq \lambda - 1$ . The optimal choice for  $\lambda$  is  $\mu + \frac{1}{2C}$ , whence  $\mu \leq 1 - \frac{1}{4C}$ . It follows that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\log p_n} \leq 1 - \frac{1}{4C}.$$

The second approach to the problem is due to Bombieri and Davenport [2], and uses analytic methods. One takes  $x, y$  and  $\mu$  as before, and sets

$$S(\alpha) = \sum_{y < p \leq x} e^{2\pi i p \alpha}, \quad T(\alpha) = \sum_{n \leq \mu \log y} e^{2\pi i n \alpha}.$$

$$\text{Then } \int_0^1 |S(\alpha)T(\alpha)|^2 d\alpha = \#\{p, p', n, n': p + n = p' + n', y < p, p' \leq x, n, n' \leq \mu \log y\} \\ \sim \pi(x)\mu \log y \sim \mu x,$$

since only 4-tuples with  $p = p', n = n'$  can contribute. On the other hand, we may bound the integral from below by using the large-sieve inequality. In general this

tells us that

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \left| \sum_1^N a_n e^{2\pi i n a/q} \right|^2 \leq (N + Q^2) \int_0^1 \left| \sum_1^N a_n e^{2\pi i n \alpha} \right|^2 d\alpha,$$

for any exponential sum  $\sum a_n e^{2\pi i n \alpha}$ . In our case the choice  $Q = x^{1/2}(\log x)^{-10}$  therefore yields

$$(3.5) \quad \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \left| S\left(\frac{a}{q}\right) T\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \leq (\mu + o(1))x^2.$$

The estimation of the sum on the left is a little messy. (This is partly because one needs to know how the primes  $p$  in the range  $y < p \leq x$  are distributed modulo  $q$ , in order to get information on  $S(a/q)$ . However, the constraint  $q \leq x^{1/2}(\log x)^{-10}$  allows us to use the Bombieri-Vinogradov theorem at this point.) The outcome is the asymptotic formula

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \left| S\left(\frac{a}{q}\right) T\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \sim (\mu \log y + \log Q)\pi(x)^2 (\mu \log y).$$

On comparing this with (3.5) we obtain  $\mu \leq 1/2$  and hence

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\log p_n} \leq 1/2.$$

The method of Bombieri and Davenport may be combined with that used by Erdős. The best result obtained in this way is that due to Huxley [17], namely

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\log p_n} \leq 0.4425.$$

The third approach to the problem is a very recent one due to Maier, and not yet published. It is based on the observation that there are certain regions where the primes may be expected to be denser than average. If one defines

$$P = \prod_{p < z} p$$

and  $H = z(\log z)^2$ , then

$$\#\{h: 1 \leq h \leq H, (h, P) = 1\} = 1 + \#\{p: z \leq p \leq H\} \sim \pi(H).$$

Now, if  $(a, q) = 1$ , then

$$\#\{p \leq x: p \equiv a \pmod{q}\} \sim \frac{\pi(x)}{\phi(q)},$$

at least if  $q$  is relatively small compared with  $x$ . Hence if

$$S = \{n \leq x : n \equiv h \pmod{P} \text{ for some } h \leq H\}$$

then  $\#\{p \in S\} \sim \frac{\pi(x)\pi(H)}{\phi(P)}.$

On the other hand, since the primes here lie in  $x/P$  intervals of length  $H$ , our probabilistic model would lead us to expect an answer roughly

$$\frac{xH}{P \log x}.$$

Thus the primes are denser in  $S$  than expected, by a factor

$$\frac{\pi(H)/\phi(P)}{H/P} \sim \frac{1}{\log H} \prod_{p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \sim e^\gamma \frac{\log z}{\log H} \sim e^\gamma.$$

Here we have used Merten's Theorem:

$$(3.6) \quad \prod_{p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log z} \quad (z \rightarrow \infty),$$

where  $\gamma = 0.577\dots$  is Euler's constant.

If we now take  $z = (\log x)/(\log \log x)$ , so that  $H \sim (\log x)(\log \log x)$ , then each interval  $nP < p \leq nP + H$  contains an average of  $e^\gamma \log \log x$  primes, so that the average spacing is  $e^{-\gamma} \log x$ . This shows that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\log p_n} \leq e^{-\gamma} = 0.531\dots$$

Maier's method can be combined with that used by Bombieri and Davenport, and then leads to the bound

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\log p_n} \leq 0.248\dots$$

This is the best unconditional result known.

Another consequence of Maier's method is worthy of note (see Maier [33]), namely that for any  $\lambda > 1$  there exists  $c(\lambda) > 0$  such that each of

$$\pi(x + (\log x)^\lambda) - \pi(x) > \{1 + c(\lambda)\} (\log x)^{\lambda-1}$$

$$\text{and} \quad \pi(x + (\log x)^\lambda) - \pi(x) < \{1 - c(\lambda)\} (\log x)^{\lambda-1}$$

has arbitrarily large solutions  $x$ . This shows the inadequacy of the probability model given in § 1, which would predict that

$$\pi(x + (\log x)^\lambda) - \pi(x) \sim (\log x)^{\lambda-1}$$

for any given  $\lambda > 2$ .

#### 4 Lower bounds on large gaps

In this section we discuss the problem of proving the existence of large gaps. Here there is only one method of significance, due to Erdős [9] and refined by Rankin [37].

In order to make  $q + 1, q + 2, \dots, q + n$  all composite one uses the primes  $p \leq m$  and determines a residue  $r_p$  for each prime in such a way that each integer

$k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , lies in one of the residue classes

$$(4.1) \quad k \equiv r_p \pmod{p}.$$

One then chooses  $q$  to satisfy the simultaneous conditions  $q \equiv -r_p \pmod{p}$ , so that for each  $k$  the corresponding prime  $p$  divides  $q + k$ . By the Chinese Remainder Theorem, the simultaneous congruences for  $q$  are indeed solvable with  $\prod p < q \leq 2\prod p$ , say. It follows from the Prime Number Theorem that  $\log q \sim m$  as  $m \rightarrow \infty$ , so that the goal of the method is to make  $n$  significantly larger than  $m$ . A simple choice might be  $m = n + 1$  and  $r_p = -1$  for each prime  $p$ . Since every number  $k + 1$  is in the range  $2 \leq k + 1 \leq n + 1$ , each will have a factor  $p \leq m$ . The resulting system of congruences (4.1) therefore covers each value of  $k$ , as required. However this merely produces

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\log p_n} \geq 1,$$

which one already knew, from the fact that  $d_n$  has average  $\log p_n$ .

In the Erdős-Rankin method one uses parameters  $1 \leq s < t < m/2$  with  $n \leq ms/2$ , and sets  $r_p = 0$  for  $p \leq s$  and  $t < p < m/2$ . Then  $k$  will already satisfy one of the congruences (4.1) unless  $k$  is either prime, or composed solely of primes  $p$  from the range  $s < p \leq t$ . According to an estimate of de Bruijn [5] the number of integers  $k \leq n$  composed solely of primes  $p \leq t$  is at most

$$n \exp \left\{ -\frac{\log \log \log t}{\log t} \log n + \log \log t + O \left( \frac{\log \log t}{\log \log \log t} \right) \right\} \leq \frac{n}{\log n}$$

on taking

$$t = \exp \left( \frac{1}{3} \frac{\log \log \log n}{\log \log n} \log n \right),$$

and  $n$  sufficiently large. Thus there remain  $O(n/\log n)$  integers  $k$  to be covered by congruences modulo primes in the ranges  $s < p \leq t$  and  $m/2 < p \leq m$ . Given any set of  $N$  integers  $k$  it is always possible to choose a residue  $r_p$  such that at least  $N/p$  elements of the set are in the congruence class  $k \equiv r_p \pmod{p}$ , thereby leaving at most  $N(1 - 1/p)$  elements. Using such a construction successively for the primes between  $s$  and  $t$ , we reduce the values of  $k$  yet to be covered to at most

$$O \left( \frac{n}{\log n} \prod_{s < p < t} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right) = O \left( \frac{n \log s}{\log n \log t} \right) = O \left( \frac{n \log \log n}{(\log n)^2 \log \log \log n} \log s \right)$$

in number. Here we use again the estimate (3.6) of Mertens. Providing that there are no more than  $\pi(m) - \pi(m/2)$  integers  $k$  left, we can eliminate one for each prime  $p$  in the range  $m/2 < p \leq m$ , by suitable choice of  $r_p$ . We therefore define  $s$  by taking

$$\frac{n \log \log n}{(\log n)^2 \log \log \log n} \log s = A \frac{m}{\log m},$$

with an appropriately small constant A. The condition  $ms/2 \geq n$  is then satisfied if

$$n = O\left(m(\log m) \frac{\log\log\log m}{(\log\log m)^2}\right).$$

It follows that

$$(4.2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{(\log p_n)(\log\log p_n)(\log\log\log p_n)^2(\log\log\log\log p_n)} > 0.$$

In fact a more careful argument shows that this lim sup is at least  $e^\gamma$ . This is the best result currently known. However it may be noted that Maier [32] has shown that, for any fixed integer  $r$ , there exist sets of consecutive primes  $p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+r}$ , each of whose differences satisfies (4.2).

### 5 The Riemann Zeta-function and the Prime Number Theorem

Before we can begin discussing the problem of upper bounds for  $p_{n+1} - p_n$  we must look at the Riemann Zeta-function. This is defined by

$$(5.1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (\sigma > 1).$$

Here, as is traditional, we have written  $s = \sigma + it$ . One can extend  $\zeta(s)$  by analytic continuation to the whole complex plane, and it is then regular everywhere apart from a first order pole at  $s = 1$ . The connection with prime numbers stems from the Euler product:

$$(5.2) \quad \zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad (\sigma > 1).$$

If one expands the product on the right hand side as

$$\prod_p (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots),$$

and multiplies out termwise, then for every positive integer  $n$ , the term  $n^{-s}$  arises exactly once, by the unique factorization property. Hence, formally at least, one recovers the sum on the right of (5.1).

The Euler product is usually used via its logarithmic derivative:

$$(5.3) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} p^{-ms} \log p = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s},$$

where  $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^m, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

In order to obtain useful information from the expression (5.3), one needs to know about the singularities of the function  $\zeta'(s)/\zeta(s)$ , and this leads us to consider the zeros of  $\zeta(s)$ .

The convergence of the Euler product shows that  $\zeta(s)$  cannot vanish for  $\sigma > 1$ . The zeta-function has a functional equation

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

from which it follows that  $\zeta(s)$  is non-zero for  $\sigma < 0$ , save for simple zeros at  $s = -2, -4, -6, \dots$ . These are known as the “trivial zeros”. Moreover one sees that any other zeros must lie in the “critical strip”  $0 \leq \sigma \leq 1$ , and be symmetrically distributed about the real axis and the “critical line”  $\sigma = 1/2$ . The Riemann Hypothesis is the conjecture that all the non-trivial zeros actually lie on the critical line. In what follows we shall abbreviate the phrase “Riemann Hypothesis” to RH. It was stated by Riemann, and proved by von Mangoldt, that the number of zeros  $\rho = \beta + i\gamma$  (counted according to multiplicity) in the box  $0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \gamma \leq T$  is

$$(5.4) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \left( \log \frac{T}{2\pi e} \right) + O(\log T).$$

Calculations have shown that the first  $1.5 \times 10^9$  zeros, that is to say roughly those with  $0 < \gamma \leq 5 \times 10^8$ , do indeed lie on the critical line, (van de Lune, te Riele and Winter [31]). Moreover Levinson [29] has proved that the number of zeros  $\rho = \beta + i\gamma$  with  $0 < \tau \leq T$  and  $\beta = 1/2$  is at least  $N(T)/3$ , if  $T$  is large enough. Thus “at least 1/3 of the zeros obey the Riemann Hypothesis”.

Using the relation (5.3) one can derive formulae for the function

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

in terms of zeros  $\rho$  of  $\zeta(s)$ . One may argue formally as follows. We have

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 1, & y > 1, \\ 0, & 0 < y < 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Hence } \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left( \frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s} \right\} \\ &= \psi(x), \quad (x > 0, x \notin \mathbf{N}). \end{aligned}$$

Moving the line of integration to  $\text{Re}(s) = -1$ , and allowing for poles at  $s = 1, s = 0$  and at the zeros  $s = \rho$ , we find that

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} I + x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0),$$

$$\text{where } I = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds,$$

and  $\sum_{\rho}$  runs over the non-trivial zeros  $\rho$  of  $\zeta(s)$ , counted according to multiplicity.

Since  $x^s = O(x^{-1})$  for  $\text{Re}(s) = -1$  one might expect that  $I = O(x^{-1})$ , and hence that

$$\psi(x) \doteq x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}.$$

In fact a rigorous argument yields

$$(5.5) \quad \psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\left(\frac{x}{T} + 1\right) \log^2 x\right) \quad (2 \leq T \leq x).$$

If one assumes RH then one may use the bound  $x^\rho = O(x^{1/2})$  in (5.5), so that the choice  $T = x$  produces

$$\psi(x) = x + O(x^{1/2} \sum_{|\gamma| \leq T} |\rho|^{-1}) + O(\log^2 x).$$

From (5.4) one may deduce that the sum in the first error term is  $O(\log^2 x)$ , whence

$$(5.6) \quad \psi(x) = x + O(x^{1/2} \log^2 x).$$

RH therefore gives us a good estimate for  $\psi(x)$ . There is usually little problem in deducing results about  $\pi(x)$  from those concerning  $\psi(x)$ , and vice-versa. In the present context it is  $\psi(x)$  which appears more naturally in the analysis, but there is no difficulty in deriving the estimate

$$(5.7) \quad \pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{1/2} \log x)$$

from (5.6). Here we have a strong form of the Prime Number Theorem, with a good error term, subject of course to our assumption that RH holds.

In order to prove the Prime Number Theorem unconditionally it suffices to know that  $\psi(x) \sim x$ , and to do this it is clear that we need to know, at the very least, that each individual term  $x^\rho/\rho$  in (5.5) is  $o(x)$ . In fact it turns out, via some rather delicate arguments, that this is sufficient: It is enough to know that  $\beta \neq 1$  for every zero  $\rho = \beta + i\gamma$ . That  $\beta$  is always less than 1 was eventually proved in 1896 by Hadamard and de la Vallée Poussin, independently, thereby establishing the Prime Number Theorem. Later researchers have given quantitative bounds for  $1 - \beta$ , the best currently available being the estimate

$$(5.8) \quad \beta < 1 - c_1 (\log |\gamma|)^{-2/3} (\log \log |\gamma|)^{-1/3},$$

where  $c_1$  is a certain positive numerical constant (Korobov [27], Vinogradov [39]). This leads to the Prime Number Theorem in the form

$$(5.9) \quad \pi(x) = \text{li}(x) + O\left(x \exp\left\{-c_2 \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right\}\right),$$

where  $c_2$  is also a positive constant. This is the sharpest known bound for the error term.

## 6 Upper Bounds for $p_{n+1} - p_n$ via Zero-Density Estimates

It is clear from (5.9) that  $\pi(x+y) > \pi(x)$  if

$$y \geq x \exp\left\{-c_3 \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right\}$$

and  $x$  is large enough. Taking  $x = p_n$  we therefore obtain

$$(6.1) \quad p_{n+1} - p_n \ll p_n \exp \left\{ -c_3 \frac{(\log p_n)^{3/5}}{(\log \log p_n)^{1/5}} \right\}.$$

Significantly better results are however known. The first such was proved by Hoheisel [15] in 1930, namely

$$(6.2) \quad p_{n+1} - p_n \ll p_n^\vartheta \quad \text{for any } \vartheta > \vartheta_0$$

with  $\vartheta_0 = 1 - \frac{1}{33000}$ . Here one saves a power of  $p_n$ . Since Hoheisel's work a number of successively better values for  $\vartheta_0$  have been obtained. According to Cramér's conjecture (2.2) one should be able to take  $\vartheta_0 = 0$ . However, even assuming RH the best one could obtain would be  $\vartheta_0 = 1/2$ . Thus current research is largely devoted to reducing  $\vartheta_0$  towards  $1/2$ . There seems little prospect as yet of getting smaller values.

Before proceeding it is perhaps of interest to note that RH yields slightly more than the statement (6.2) with  $\vartheta_0 = 1/2$ . In fact (5.7) leads to

$$p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2} \log^2 p_n$$

in the same way that (5.9) produces (6.1). However, according to Cramér [7] one even has

$$p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2} \log p_n$$

on RH. It is an old conjecture that there is a prime between any two consecutive squares. Cramér's result falls short of this by a factor  $\log p_n$ .

Let us now look briefly at a modern approach to theorems of Hoheisel type. One takes  $2 \leq y \leq x$  and sets  $T = xy^{-1} \log^3 x$ . Then (5.5) yields

$$\psi(x+y) - \psi(x) = y - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{(x+y)^\rho - x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{y}{\log x}\right).$$

If  $\rho = \beta + i\gamma$  then

$$\frac{(x+y)^\rho - x^\rho}{\rho} = \int_x^{x+y} t^{\rho-1} dt \ll yx^{\beta-1},$$

so that  $\psi(x+y) - \psi(x) \sim y$  providing that

$$(6.3) \quad \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\beta-1} = o(1).$$

We now introduce the function  $N(\sigma, T)$ , where  $1/2 \leq \sigma \leq 1$  and  $T > 0$ . This counts zeros  $\rho$  of  $\zeta(s)$  in the box  $\sigma \leq \beta \leq 1$ ,  $0 \leq |\gamma| \leq T$ , with any repeated zeros being counted according to their multiplicities. One trivially has

$$(6.4) \quad N(\sigma, T) \leq 2N(T) \ll T \log T$$

by (5.4). However the key fact about  $N(\sigma, T)$  is the availability of bounds of the type

$$(6.5) \quad N(\sigma, T) \ll T^{k(1-\sigma)} (\log T)^A$$

holding uniformly for  $1/2 \leq \sigma \leq 1$ , with positive constants  $k$  and  $A$ . Hoheisel



used a bound of this form with  $k = 4$ . These “zero-density estimates” save a power of  $T$  over the trivial bound (6.4), at least if  $\sigma$  is close to 1, and show that zeros become increasingly rare near  $\sigma = 1$ . Of course the zero-free region (5.8) means that  $N(\sigma, T) = 0$  if

$$\sigma \geq \sigma_0 = 1 - c_1 (\log T)^{-2/3} (\log \log T)^{-1/3}.$$

We can now return to the sum (6.3). By partial summation we have

$$\sum_{|\gamma| \leq T, \beta \geq 1/2} x^{\beta-1} = N(1/2, T)x^{-1/2} + \int_{1/2}^{\sigma_0} N(\sigma, T)x^{\sigma-1} \log x \, d\sigma \\ \ll \{T^{k/2}x^{-1/2} + (T^k x^{-1})^{(1-\sigma_0)}\} (\log x)^{A+1}$$

by (6.5). We shall assume that  $x^\delta \leq T^k \leq x^{1-\delta}$  for some positive constant  $\delta$ . Then

$$1 - \sigma_0 \gg (\log x)^{-2/3} (\log \log x)^{-1/3}$$

and so  $x^{-\delta(1-\sigma_0)} \ll (\log x)^{-B}$

for any constant  $B$ . It follows that

$$\sum_{|\gamma| \leq T, \beta \geq 1/2} x^{\beta-1} = o(1).$$

For  $\beta < 1/2$  we trivially have

$$\sum_{|\gamma| \leq T, \beta < 1/2} x^{\beta-1} \leq N(T)x^{-1/2} \ll T(\log T)x^{-1/2} = o(1)$$

if  $T^k \leq x^{1-\delta}$  and  $k \geq 2$ .

Hence  $\psi(x+y) - \psi(x) \sim y$  providing that  $y = x^\vartheta$  with  $1 - \frac{1}{k} < \vartheta < 1$ .

From this one may easily deduce that

$$(6.6) \quad \pi(x+y) - \pi(x) \sim \frac{y}{\log x} \quad y = x^\vartheta, 1 - \frac{1}{k} < \vartheta < 1.$$

We therefore see that one may take  $\vartheta_0 = 1 - \frac{1}{k}$ . When Hoheisel did his work the

Korobov-Vinogradov zero-free region was not available, and a weaker bound for  $\sigma_0$  had to be used. It transpired that this weaker bound imposed restrictions on  $\vartheta_0$ ,

leading to the value  $\vartheta_0 = 1 - \frac{1}{33000}$ .

Two points about this line of argument are now apparent. Firstly, one actually proves an asymptotic formula, (6.6), when it would suffice to have  $\pi(x+y) - \pi(x) > 0$ . Secondly the admissible size of  $\vartheta_0$  depends merely on the value of  $k$  in (6.5). We shall therefore examine the various estimates (6.5) that have been proved. In the first place one should observe that  $N(1/2, T) \gg T \log T$ , by (5.4) and the symmetry of the zeros about the critical line. Thus one necessarily has  $k \geq 2$ . RH would immediately yield  $N(\sigma, T) = 0$  for  $\sigma > 1/2$ , so that  $k = 2$  would be admissible. The conjecture that (6.5) holds for any  $k > 2$  is known as the Density Hypothesis, which we shall abbreviate to DH. Thus RH implies DH, and DH allows  $\vartheta_0 = 1/2$ .

Ingham [18] showed how to estimate  $N(\sigma, T)$  using bounds of the form

$$(6.7) \quad \zeta(1/2 + it) \ll t^c (\log t)^{c'} \quad (t \geq 2)$$

with constants  $c$  and  $c'$ . The result obtained is  $k = 2 + 4c$ . Thus the estimate

$$(6.8) \quad \zeta(1/2 + it) \ll t^{1/6} (\log t)^{3/2},$$

due to Littlewood [30], yields  $k = 8/3$  and hence  $\vartheta_0 = 5/8$ . Ingham was able to deduce for example, that any interval  $m^3 < p < (m + 1)^3$  must contain a prime, if  $m$  is large enough. It is conjectured that (6.7) holds with any  $c > 0$ . This is the so-called Lindelöf Hypothesis (which we shall abbreviate to LH). It is known that LH would follow from RH. In view of Ingham's result one then has the important chain of implications

$$RH \Rightarrow LH \Rightarrow DH \Rightarrow \vartheta_0 \leq 1/2.$$

Since Littlewood's work at least 10 different values for  $c$  have been given, the best currently available being a very recent result of Bombieri and Iwaniec [3], which has  $c = 9/56 = 1/6 - 1/168$ . This yields  $k = 37/14$  and  $\vartheta_0 = 23/37$ .

After Ingham's work the next important advance was made by Montgomery [34], who adapted an idea of Halász to estimate  $N(\sigma, T)$  without using a value for  $c$ . Montgomery obtained  $k = 5/2$  and hence  $\vartheta_0 = 3/5$ . His analysis was sharpened by Huxley [16] who gave the values  $k = 12/5$  and  $\vartheta_0 = 7/12$ . These are the best values for  $k$  and  $\vartheta_0$  which are known.

Much work has been done on zero-density estimates since Montgomery's introduction of Halász's method. One considers in general the bound

$$N(\sigma, T) \ll T^{k(\sigma)(1-\sigma)} (\log T)^A, \quad (1/2 \leq \sigma \leq 1),$$

where  $k(\sigma)$  is a function of  $\sigma$ . Some of the estimates are shown in Figure 1. Several points are worth noting. It is only at  $\sigma = 3/4$  that the value  $k(\sigma) = 12/5$  occurs. Indeed for  $\sigma \geq 11/14$  one has  $k(\sigma) \leq 2$  (Jutila [26]) so that DH holds in this restricted range. As  $\sigma \rightarrow 1$  one even has  $k(\sigma) \rightarrow 0$ . The Halász method is only useful when  $\sigma > 3/4$ , and the best result for  $\sigma \leq 3/4$  is an old one of Ingham [19].

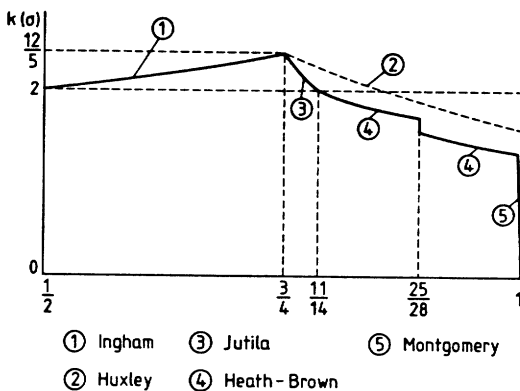


Fig. 1. Bounds for  $k(\sigma)$

7 Upper Bounds for  $p_{n+1} - p_n$  Using Sieve Methods

The most recent work on  $p_{n+1} - p_n$  uses sieve ideas. In order to prove that  $p_{n+1} - p_n \ll p_n^\vartheta$  for some particular value of  $\vartheta$  in the range  $1/2 < \vartheta < 1$ , one shows that

$$\pi(x) - \pi(x - y) \gg \frac{y}{\log x} \quad (y = x^\vartheta).$$

This contrasts with the zero-density method which, if it works at all, will produce the asymptotic formula (6.6). There are two different approaches via sieve methods. We shall begin by describing that used by Heath-Brown [12], [13] which shows more clearly the underlying principles.

One takes  $z = x^\phi$  with  $0 < \phi < 2\vartheta - 1$ , and writes

$$\Pi(s) = \prod_{p < z} (1 - p^{-s}).$$

The Euler product (5.2) then yields

$$(7.1) \quad \sum_{p \geq z} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{3p^{3s}} + \dots = \log \zeta(s)\Pi(s) = \log (1 + \{\zeta(s)\Pi(s) - 1\}) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \{\zeta(s)\Pi(s) - 1\}^k.$$

We now sum the coefficients of  $n^{-s}$  on each side, for  $x - y < n \leq x$ . The left hand side gives us  $\pi(x) - \pi(x - y) + o(y/\log x)$ , on allowing for the contribution of prime power values of  $n$ . To compute the corresponding contribution on the right hand side, we first note that

$$\zeta(s)\Pi(s) - 1 = \sum_{n \geq z} a(n)n^{-s},$$

with  $a(n) = 1$  if  $p \geq z$  for each  $p|n$ , and  $a(n) = 0$  otherwise. Thus the right hand side of (7.1) contributes

$$(7.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} S_k,$$

where  $S_k = \sum_{x-y < n \leq x} a_k(n)$

and  $a_k(n)$  is the  $k$ -fold convolution of  $a(n)$ . Hence  $a_k(n) = 0$  unless  $n \geq z^k$ , and so it suffices to take  $k \leq K$ , where  $z^K \leq x < z^{K+1}$ .

One therefore wants to estimate  $S_k$ . It turns out that one can give asymptotic formulae in certain cases, depending on the values of  $k$  and  $\vartheta$ . In particular one can handle  $S_k$  for any  $\vartheta > 1/2$ , if  $k \leq 4$ , and also  $S_5$ , if  $\vartheta > 11/20$ . At present one can only deal satisfactorily with  $S_6$  when  $\vartheta > 7/12$ . This information suffices, when  $\vartheta > 7/12$ , to prove an asymptotic formula for (7.2), and hence for  $\pi(x) - \pi(x - y)$ . (Here one chooses  $\phi = 1/6$  and  $K = 6$ .) We therefore recover Huxley's theorem that (6.6) holds with  $k = 12/5$ . When  $4/7 < \vartheta < 7/12$  we may

take  $\phi = 1/7$  and  $K = 6$ . It follows that

$$\pi(x) - \pi(x - y) \sim \sum_{k=1}^6 \frac{(-1)^{k-1}}{k} S_k \leq \sum_{k=1}^5 \frac{(-1)^{k-1}}{k} S_k.$$

Here we can evaluate the right hand side, which turns out to be

$$\frac{y}{\log x} \left\{ 1 + o(1) + \frac{1}{6} \int \int \int \int \int_{\substack{u_1 + \dots + u_5 \leq 6/7 \\ u_i \geq 1/7}} \frac{1}{1 - u_1 - \dots - u_5} \frac{du_1}{u_1} \dots \frac{du_5}{u_5} \right\}.$$

Hence  $\pi(x) - \pi(x - y) \leq 1.005 \frac{y}{\log x}$  ( $y = x^\vartheta$ ,  $4/7 < \vartheta < 1$ )

for large enough  $x$ .

To get corresponding lower bounds a modified combinatorial argument is needed. For  $\phi = 1/7$  and  $n \leq x$  one has  $a_6(n) \leq 2a_5(n)/5$ , so that  $S_6 \leq 2S_5/5$ , and hence

$$\pi(x) - \pi(x - y) \sim \sum_{k=1}^6 \frac{(-1)^{k-1}}{k} S_k \geq \sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^{k-1}}{k} S_k + \frac{2}{15} S_5.$$

When  $4/7 < \vartheta < 7/12$  the right hand side may be evaluated asymptotically as

$$\frac{y}{\log x} \left\{ 1 + o(1) - \frac{1}{15} \int \int \int \int_{\substack{u_1 + \dots + u_4 \leq 6/7 \\ u_i \geq 1/7}} \frac{1}{1 - u_1 - \dots - u_4} \frac{du_1}{u_1} \dots \frac{du_4}{u_4} \right\},$$

whence

(7.3)  $\pi(x) - \pi(x - y) \geq 0.889 \frac{y}{\log x}$  ( $y = x^\vartheta$ ,  $4/7 < \vartheta < 1$ )

for large  $x$ .

For smaller values of  $\vartheta$  the combinatorial argument needed becomes increasingly complicated, and uses generalizations of the sums  $S_k$ . Moreover, the proofs of the asymptotic formulae for these sums become increasingly involved. However a preliminary calculation suggests that one has

(7.4)  $\pi(x) - \pi(x - y) \geq 0.9964 \frac{y}{\log x}$  ( $y = x^\vartheta$ ,  $17/31 < \vartheta < 1$ )

for large  $x$ . The combinatorial argument for the range  $4/7 < \vartheta < 1$  may also be improved, and yields

(7.5)  $0.999980 \frac{y}{\log x} \leq \pi(x) - \pi(x - y) \leq 1.00000125 \frac{y}{\log x}$ .

It is remarkable how close to 1 these constants are.

The approach described above has not yet appeared in full in print. The second method is the only one for which details have been published. As before one uses a combinatorial argument to write  $\pi(x) - \pi(x - y)$  as a sum  $U + V$ , where  $U$  can be estimated asymptotically and  $V$  is non-negative. The difference between the methods is that the combinatorial side is now based on the "linear sieve". This is a very general device whose theory has been developed independently of the present problem (Iwaniec [20], [21]). There are therefore a number of techniques

and results which one can immediately bring to bear in estimating  $p_{n+1} - p_n$ . However, as we shall see, the application is not altogether natural, and some *ad hoc* arguments have to be added.

The linear sieve takes a set  $A$  of integers and a parameter  $z$ , and writes

$$(7.6) \quad \#\{n \in A: p|n \Rightarrow p \geq z\} = S(A, z) = U + V,$$

where  $U$  can be estimated asymptotically, and  $V$  is non-negative. The form of the decomposition (7.6) will depend partly on  $z$ , and partly on a second parameter  $D$ , called the “level of distribution” of  $A$ . This latter parameter describes the extent to which  $A$  is well distributed in arithmetic progressions. The asymptotic estimate for  $U$  gives a lower bound for  $S(A, z)$ , which will depend on  $z$  and  $D$ . (In fact the linear sieve gives an upper bound for  $S(A, z)$  in an analogous manner.) It transpires that the lower bound is positive only when  $z^2 < D$ .

When  $A = \{n: x - y < n \leq x\}$  with  $y = x^\vartheta$ , it turns out that one may (essentially) take  $D = x$ , providing that  $\vartheta > 7/12$ . Since one needs to have  $z = x^{1/2}$ , one just misses getting a positive lower bound for  $\pi(x) - \pi(x - y)$ . This is remedied by a further examination of the terms that make up  $V$  in the combinatorial decomposition (7.6). Although in general none of these can be estimated asymptotically, it transpires that, for the particular set  $A$  in question, certain of the terms can indeed be dealt with. The result is that one obtains a positive lower bound for  $S(A, z)$ , even though  $z^2 \geq D$ . This enables one to take  $\vartheta < 7/12$ .

The first application of this method, by Iwaniec and Jutila [23], gave

$$(7.7) \quad \pi(x) - \pi(x - y) \geq 0.056 \frac{y}{\log x} \quad (y = x^\vartheta, 13/23 \leq \vartheta \leq 1).$$

They also indicated how a result for  $\vartheta > 5/9$  might be obtained. This was bettered by Heath-Brown and Iwaniec [14] who showed that

$$(7.8) \quad \pi(x) - \pi(x - y) \geq 0.0047 \frac{y}{\log x} \quad (y = x^\vartheta, 11/20 < \vartheta \leq 1).$$

Iwaniec [22] and Pintz [35], [36] independently then lowered the exponent to  $\vartheta > 17/31$ , and the best to date is now

$$(7.9) \quad \pi(x) - \pi(x - y) \geq 0.010 \frac{y}{\log x} \quad (y = x^\vartheta, 23/42 < \vartheta \leq 1),$$

due to Iwaniec and Pintz [24]. For comparison we note that

$$\begin{array}{ll} \frac{7}{12} = 0.5833\dots & \frac{4}{7} = 0.5714\dots \\ \frac{13}{23} = 0.5652\dots & \frac{5}{9} = 0.5555\dots \\ \frac{11}{20} = 0.5500\dots & \frac{17}{31} = 0.5483\dots \\ \frac{23}{42} = 0.5476\dots & \end{array}$$

The method is a little unnatural on two counts. Firstly, the underlying philosophy of the linear sieve is to produce the optimal decomposition  $U + V$  in (7.6) – optimal, that is, given the general assumptions about  $A$ . Because of this optimality the bounds for  $S(A, z)$  have many elegant properties. But then one admits that, for this particular problem, the decomposition (7.6) is not best possible, and that more can be “squeezed out” from the term  $V$ . Clearly the formulation of the optimization problem is at fault. The second point is that one starts from an estimate

$$\pi(x) - \pi(x - y) \geq (c + o(1)) \frac{y}{\log x} \quad (y = x^\vartheta, 7/12 < \vartheta \leq 1)$$

with  $c = 0$ , which one successively improves by small amounts, by considering additional terms from  $V$ . However one already knows that one can take  $c = 1$ . This explains why the lower bound constants appearing in (7.7), (7.8) and (7.9) are so much smaller than those in (7.3), (7.4) and (7.5).

### References

- [1] Baker, C. L.; Gruenberger, E. J.: The first six million prime numbers, Microcard Found., Madison 1959
- [2] Bombieri, E.; Davenport, H.: Small differences between prime numbers. Proc. Royal Soc. Ser. A, **293** (1966) 1–18
- [3] Bombieri, E.; Iwaniec, H.: On the order of  $\zeta(1/2 + it)$ , to appear
- [4] Brenti, R. P.: The distribution of small gaps between successive primes. Math. Comp. **28** (1974) 315–324
- [5] de Bruijn, N. G.: On the number of integers  $\leq x$  and free of prime factors  $\geq y$ . Indag. Math. **13** (1951) 50–60
- [6] Chen, J.-R.: On the Goldbach’s problem and the sieve methods. Sci. Sinica **21** (1978) 701–739
- [7] Cramér, H.: Some theorems concerning prime numbers. Ark. Mat. Astronom. Fys. **15** (1920) 1–32
- [8] Cramér, H.: On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. Acta Arith. **2** (1937) 23–46
- [9] Erdős, P.: On the difference of consecutive primes. Quart. J. Math. Oxford **6** (1935) 124–128
- [10] Erdős, P.: The difference of consecutive primes. Duke Math. J. **6** (1940) 438–441
- [11] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.: Some problems of “partitio numerorum”; III: On the expression of a number as the sum of primes. Acta Math. **44** (1923) 1–70
- [12] Heath-Brown, D. R.: Sieve identities and gaps between primes. Astérisque **94** (1982) 61–65
- [13] Heath-Brown, D. R.: Finding primes by sieve methods. Proc. Internat. Cong. Math., Warsaw 1983, 487–492
- [14] Heath-Brown, D. R.; Iwaniec, H.: On the differences between consecutive primes. Invent. Math. **55** (1979) 49–69
- [15] Hoheisel, G.: Primzahlprobleme in der Analysis. Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. (1930) 580–588
- [16] Huxley, M. N.: On the difference between consecutive primes. Invent. Math. **15** (1972) 164–170
- [17] Huxley, M. N.: Small differences between consecutive primes II. Mathematika **24** (1977) 142–152
- [18] Ingham, A. E.: On the difference between consecutive primes. Quart. J. Math. Oxford **8** (1937) 255–266
- [19] Ingham, A. E.: On the estimation of  $N(\sigma, T)$ . Quart. J. Math. Oxford **11** (1940) 291–292

- [20] Iwaniec, H.: Rosser's sieve. *Acta Arith.* **36** (1980) 171–202
- [21] Iwaniec, H.: A new form of the error term in the linear sieve. *Acta Arith.* **37** (1980) 307–320
- [22] Iwaniec, H.: Primes in short intervals. *Unpublished*
- [23] Iwaniec, H.; Jutila, M.: Primes in short intervals. *Arkiv för Mat.* **17** (1979) 167–176
- [24] Iwaniec, H.; Pintz, J.: Primes in short intervals. *Monatsh. Math.* **98** (1984) 115–143
- [25] Jones, M. F.; Lal, M.; Blundon, W. J.: Statistics on certain large primes. *Math. Comp.* **21** (1967) 103–107
- [26] Jutila, M.: Zero density estimates for L-functions. *Acta Arith.* **32** (1977) 55–62
- [27] Korobov, N. M.: Estimates of exponential sums and their applications. *Uspehi Mat. Nauk* **13** (1958) 185–192
- [28] Lagarias, J.; Miller, V. S.; Odlyzko, A. M.: Computing  $\pi(x)$ : the Meissel-Lehmer method. *Math. Comp.* **44** (1985) 537–560
- [29] Levinson, N.: More than one third of the zeros of Riemann's zeta-function are on  $\sigma = 1/2$ . *Adv. Math.* **13** (1974) 383–436
- [30] Littlewood, J. E.: Researches in the theory of the Riemann  $\zeta$ -function. *Proc. London Math. Soc.* (2), **20** (1922) Records xxii–xxviii
- [31] van de Lune, J.; te Riele, H. J. J.; Winter, D. T.: On the zeros of the Riemann Zeta-function in the critical strip, IV. *Math. Comp.* **46** (1986) 667–681
- [32] Maier, H.: Chains of large gaps between consecutive primes. *Adv. Math.* **39** (1981) 257–269
- [33] Maier, H.: Primes in short intervals. *Mich. Math. J.* **32** (1985) 221–225
- [34] Montgomery, H. L.: Zeros of L-functions. *Invent. Math.* **8** (1969) 346–354
- [35] Pintz, J.: On primes in short intervals, I. *Stud. Sci. Math. Hungar.* **16** (1981) 395–414
- [36] Pintz, J.: On primes in short intervals, II. *Stud. Sci. Math. Hungar.*, to appear
- [37] Rankin, R. A.: The difference between consecutive primes. *J. London Math. Soc.* **13** (1938) 242–247
- [38] Shanks, D.: On maximal gaps between successive primes. *Math. Comp.* **18** (1964) 646–651
- [39] Vinogradov, I. M.: A new estimate for  $\zeta(1 + it)$ . *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **22** (1958) 161–164

D. R. Heath-Brown  
Magdalen College  
Oxford OX1 4AU  
England

(Eingegangen 5. 8. 1986)

## Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve\*)

*Herrn Professor M. Schiffer zum 75. Geburtstag gewidmet*

R. Kühnau, Halle an der Saale

### 1 Einleitung

Bekanntlich existiert zu einer Kreislinie eine elementare schlichte konforme Abbildung des Äußeren auf das Innere, die die Kreislinie punktwies festhält. Wir stellen folgende allgemeinere Frage. Gegeben sei eine (geschlossene doppelpunktfreie) Jordankurve  $\mathcal{C}$  auf der Riemannschen Zahlenkugel. Gibt es dann eine schlichte konforme Abbildung der Zahlenkugel auf sich, die die beiden durch  $\mathcal{C}$  getrennten einfach zusammenhängenden Gebiete vertauscht und  $\mathcal{C}$  punktwies festhält (und dabei notwendig orientierungsumkehrend ist)? Man erkennt leicht, daß es keine solche „konforme Spiegelung“ geben kann, wenn  $\mathcal{C}$  keine Kreislinie ist. Denn eine solche Abbildung hätte mindestens drei Fixpunkte und wäre bis auf eine zusätzliche Spiegelung an der reellen Achse eine lineare Transformation.

Wie kann man also an einer nichtkreisförmigen Jordankurve  $\mathcal{C}$  „möglichst konform“ spiegeln, d. h. so, daß die Abweichung von der Konformität möglichst gering ausfällt? Dieser Frage wollen wir nachgehen, dabei auch äquivalente Fragen darstellen, Beispiele betrachten und Zusammenhänge bis hin zu den sog. Fredholm-schen Eigenwerten beleuchten. Zur Gegenüberstellung noch diese andere Sicht: Während man an einer analytischen nichtkreisförmigen Jordankurve  $\mathcal{C}$  konform immer nur innerhalb eines je nach  $\mathcal{C}$  mehr oder weniger schmalen Uferstreifens spiegeln kann (vgl. hierzu [5]), wollen wir eine globale Spiegelung finden, die dann nicht durchweg konform sein kann, deren Abweichung von der Konformität aber minimal werden soll.

### 2 Präzisierung der Fragestellung

Unter einer glatten  $Q$ -quasikonformen Abbildung versteht man eine stetig differenzierbare Abbildung, bei der infinitesimale Kreise in infinitesimale Ellipsen übergehen, deren Achsenverhältnis ( $\geq 1$ ) stets  $\leq Q$  ist. Für die allgemeine Defini-

---

\*) Nach einem Vortrag auf dem XI. Intern. Österr. Mathematiker-Kongreß 1985 in Graz.



tion dieser Abbildungen ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen vgl. man z. B. [24]. Die „Dilatationsschranke“  $Q$  liefert uns ein Maß für die Abweichung von der Konformität;  $Q = 1$  bedingt Konformität. Daneben betrachten wir aus technischen Gründen auch die Größe

$$(1) \quad q = (Q - 1)/(Q + 1) < 1.$$

In Präzisierung unserer Formulierung der Einleitung können wir zu einer auf der Zahlenkugel fest gegebenen Jordankurve  $\mathcal{C}$  folgendes fragen.

**F r a g e 1.** Gibt es eine schlichte quasikonforme Abbildung der Zahlenkugel auf sich, die die beiden durch  $\mathcal{C}$  getrennten einfach zusammenhängenden Gebiete vertauscht und  $\mathcal{C}$  punktweis festhält?

Falls eine solche Abbildung existiert, heißt sie quasikonforme Spiegelung an  $\mathcal{C}$ .

**F r a g e 2.** Gibt es unter den quasikonformen Spiegelungen (falls vorhanden) an  $\mathcal{C}$  eine solche, bei der die kleinste Dilatationsschranke minimal ist?

Im Falle der Existenz werden wir eine solche Abbildung „möglichst konforme Spiegelung an  $\mathcal{C}$ “ nennen, im Anschluß an eine suggestive Formulierung von H. Grötzsch [8]; daneben existiert noch nach O. Teichmüller die etwas farblosere Bezeichnung „extremal quasikonforme Spiegelung“. Die zugehörige minimale Dilatationsschranke  $Q_{\mathcal{C}}$  bzw. das gemäß (1) hiermit gebildete  $q_{\mathcal{C}}$  nennen wir „Spiegelungskoeffizienten“ von  $\mathcal{C}$ . Die beiden gestellten Fragen sowie die Größen  $Q_{\mathcal{C}}$  und  $q_{\mathcal{C}}$  sind in naheliegender Weise invariant bei linearer Transformation. Diejenigen Jordankurven  $\mathcal{C}$ , für die Frage 1 positiv zu beantworten ist, heißen „quasikonforme Jordankurven“ (oder „Quasikreise“). Es gibt heute zahlreiche analytische und geometrische Charakterisierungen für dieselben, die in [24], [7] dargestellt sind. Die wohl einfachste geometrische Charakterisierung nach L. V. Ahlfors [2] lautet so: Falls  $\infty \in \mathcal{C}$  (was durch lineare Transformation erreichbar ist), so ist  $\mathcal{C}$  genau dann eine quasikonforme Jordankurve, wenn eine Konstante  $C$  existiert, so daß

$$(2) \quad |w_3 - w_1|/|w_2 - w_1| \leq C$$

für jede drei Punkte  $w_1, w_2, w_3$  auf  $\mathcal{C}$ , bei denen  $w_3$  zwischen  $w_1$  und  $w_2$  liegt (Fig. 1).

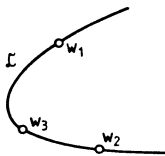


Fig. 1

Man erkennt, daß bei stückweis glatten quasikonformen Jordankurven keine Spitzen möglich sind, wogegen Ecken nicht hinderlich sind (vgl. hierzu auch unten (11)). Eine quasikonforme Jordankurve kann sehr unerfreulich sein. Sie braucht z. B. nicht rektifizierbar zu sein – vgl. [24], S. 109. Ferner kann eine solche Kurve spiralisches Verhalten haben – vgl. z. B. [14] (Bemerkung 4 auf S. 9).

Als eine analytische Charakterisierung der quasikonformen Jordankurven heben wir die folgende hervor, die unten eine wichtige Rolle spielen wird. Wir können dazu wegen der Invarianz der Fragestellung bei linearer Transformation annehmen, daß  $\mathfrak{C}$  in der komplexen  $w$ -Ebene bei einer schlichten konformen Abbildung des Einheitskreisäußeren  $|z| > 1$  als Bild des Randes  $|z| = 1$  entsteht, wobei die Abbildung durch

$$(3) \quad w(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

„hydrodynamisch normiert“ ist (entsprechend der sog. Abbildungsklasse  $\Sigma$ , so daß also  $\mathfrak{C}$  den transfiniten Durchmesser 1 besitzt). Gemäß

$$(4) \quad -\log \frac{w(z) - w(\xi)}{z - \xi} = \sum_{k, \ell = 1}^{\infty} a_{k\ell} z^{-k} \xi^{-\ell} \quad (|z| > 1, |\xi| > 1)$$

werden die sog. „Grunsky-Koeffizienten“  $a_{k\ell}$  gebildet. Dann gelten mit einem  $\kappa \leq 1$  die „Grunskyschen Koeffizientenbedingungen“ (vgl. [25], S. 60)

$$(5) \quad \left| \sum_{k, \ell = 1}^n a_{k\ell} x_k x_\ell \right| \leq \kappa \sum_{k=1}^n |x_k|^2 / k$$

für alle Systeme komplexer Zahlen  $x_k$ . Die quasikonformen  $\mathfrak{C}$  lassen sich nun dadurch charakterisieren [25] (s. 286 ff.), daß genau bei diesen (5) mit einem  $\kappa < 1$  (für alle Systeme  $x_k$ ) gültig ist.

Es gab einige Zeit die inzwischen [18] als irrig erkannte Vermutung, die darauf hinauslief, daß der in (5) kleinstmögliche Faktor  $\kappa$  (bei fester Abbildung bzw. festem  $\mathfrak{C}$ ) gleich  $q_{\mathfrak{C}}$  ist; hierzu vgl. unten (12).

Unser eigentliches Thema ist die Frage 2. Die Existenz einer möglichst konformen Spiegelung an einer quasikonformen Jordankurve  $\mathfrak{C}$  wird sich verhältnismäßig leicht aus klassischen Konvergenzsätzen ergeben. Wir werden die Frage 2 in andere äquivalente Formen umgießen und dabei u. a. einen Zusammenhang mit Untersuchungen von K. Strebel erhalten.

### 3 Äquivalente Formen der Fragestellung

a) **Möglichst konforme Fortsetzung einer schlichten konformen Abbildung der Klasse  $\Sigma$ .** Es liege  $\mathfrak{C}$  in der bei (3) beschriebenen Form (mit transfinitem Durchmesser 1) vor mit der schlichten konformen Abbildung (3) von  $|z| > 1$  auf das Äußere von  $\mathfrak{C}$ . Wenn dazu eine schlichte  $Q$ -quasikonforme Abbildung der Voll-ebene auf sich existiert, die für  $|z| > 1$  mit  $w(z)$  übereinstimmt, dann heißt die so für  $|z| < 1$  entstehende Abbildung eine  $Q$ -quasikonforme Fortsetzung von  $w(z)$ . Um die Existenz einer  $Q$ -quasikonformen Fortsetzung bei  $w(z)$  zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir  $w(z) \in \Sigma(Q)$ . Durch die Zusammensetzung  $w(1/\overline{z(\overline{w})})$  entsteht (vgl. Fig. 2) hieraus offenbar eine  $Q$ -quasikonforme Spiegelung an  $\mathfrak{C}$ . Umgekehrt kann man in ebenso naheliegender Weise aus einer  $Q$ -quasikonformen Spiegelung an  $\mathfrak{C}$  eine  $Q$ -quasikonforme Fortsetzung der zunächst nur für  $|z| > 1$  vorliegenden Abbildung  $w(z) \in \Sigma$  erzeugen. Somit lassen sich die in § 2 formulierten

Fragen 1 und 2 umgießen in entsprechende für die quasikonforme Fortsetzung:  
 1. Frage nach der Existenz einer quasikonformen Fortsetzung, und bei positiver  
 Antwort weiter 2. Frage nach einer möglichst konformen Fortsetzung. Insbesondere  
 sind die bei möglichst konformer Spiegelung und möglichst konformer Fortsetzung  
 entstehenden kleinstmöglichen  $Q$ -Werte die gleichen.

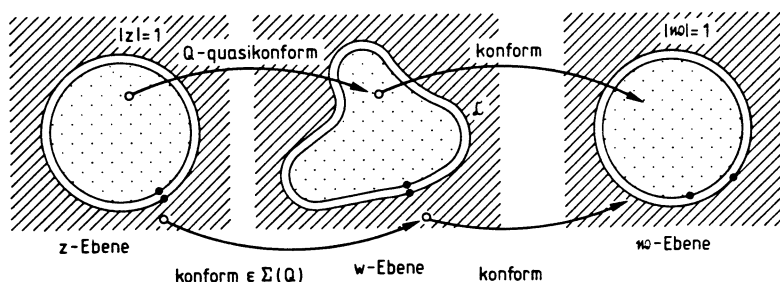


Fig. 2

**b) Möglichst konforme Abbildung des Äußeren des Einheitskreises aufs Innere desselben bei fest gegebener Randabbildung.** Wir schließen an eine  $Q$ -quasikonforme Fortsetzung von  $w(z)$ , wie eben betrachtet, noch eine schlichte konforme Abbildung des Inneren von  $C$  aufs Innere des Einheitskreises einer  $w$ -Ebene an (vgl. wieder Fig. 2). Setzt man noch  $w(w)$  im Äußeren von  $C$  konform an mit  $z$ . B.  $w(w(z)) \equiv z$ , so entsteht durch die Zusammensetzung  $w \rightarrow w \rightarrow z \rightarrow 1/\bar{z} \rightarrow w \rightarrow w$  eine  $Q$ -quasikonforme Abbildung von  $|w| > 1$  nach  $|w| < 1$ . Insbesondere wird so aus der Jordankurve  $C$  eine Abbildung der Einheitskreislinie  $|w| = 1$  auf sich erzeugt. Diese Abbildung ist „quasisymmetrisch“; man vgl. hierzu z. B. [24]. Ist umgekehrt eine solche quasisymmetrische Abbildung gegeben, kann man (vgl. [24], S. 96) durch konforme Verheftung von  $|w| > 1$  und  $|w| < 1$  – in Umkehrung der vorgetragenen Überlegung entsprechend Fig. 2 – zu einer Jordankurve  $C$  mit Existenz einer quasikonformen Fortsetzung der zugehörigen Abbildung  $w(z)$  entsprechend (3) gelangen. Somit lassen sich die in § 2 formulierten beiden Fragen bzw. die beiden oben unter a) gegebenen äquivalenten beiden Fragen weiter umgießen in die entsprechenden bei Abbildungen des Äußeren des Einheitskreises auf das Innere bei gegebener quasisymmetrischer Randabbildung. Wieder sind die bei möglichst konformer Spiegelung an  $C$  und möglichst konformer Abbildung des Äußeren des Einheitskreises aufs Innere mit gegebener Randabbildung entstehenden kleinstmöglichen  $Q$ -Werte die gleichen.

In dieser nun vorliegenden äquivalenten Form ist unsere Aufgabe von O. Teichmüller [32] gestellt worden. Dabei wurden seit der Arbeit [29] grundlegende Resultate von K. Strebel, E. Reich u. a. erzielt. Die Existenz einer möglichst konformen Abbildung zu quasisymmetrischer Randabbildung ergibt sich dabei schnell aus Kompaktheitssätzen. Es zeigte sich aber überraschenderweise [30], daß diese nicht immer eindeutig bestimmt ist. Immerhin ist sie jedoch z. B. dann eindeutig bestimmt, falls  $C$  analytisch ist bzw. die genannte quasisymmetrische Randabbildung auf dem Einheitskreis analytisch ist mit nicht verschwindender Ableitung. Dann kann man [31] weiter über die möglichst konforme Abbildung

sagen: *Es gibt eine für  $|w| < 1$  reguläre Funktion  $Q(w)$ , so daß bei der möglichst konformen Abbildung infinitesimale Kreise von  $|w| > 1$  in infinitesimale Ellipsen übergehen, die in  $|w| < 1$  liegen, konstantes Achsenverhältnis  $Q \geq 1$  besitzen, wobei die großen Achsen auf der durch*

$$(6) \quad Q(w)dw^2 > 0$$

*charakterisierten Kurvenschar liegen.*

Man spricht von einer Beschreibung der möglichst konformen Abbildung durch das quadratische Differential  $Q(w)dw^2$ . Diese quadratischen Differentiale treten in statu nascendi schon in Arbeiten von H. Grötzsch auf, wurden dann explizit durch O. Teichmüller in diesem Zusammenhang eingeführt – vgl. z. B. [32].

Durch Überpflanzung gemäß den obigen Überlegungen gelangt man auch bei einer analytischen Jordankurve zu einer Beschreibung durch ein quadratisches Differential bei der (eindeutig bestimmten) möglichst konformen Spiegelung bzw. bei der (eindeutig bestimmten) möglichst konformen Fortsetzung von  $w(z)$  (gemäß (3) normiert). Die minimalen  $Q$ -Werte stimmen wieder überein.

Falls  $\mathcal{C}$  nicht analytisch ist, ergibt sich durch Übertragung der Strebelschen Ergebnisse, daß die möglichst konforme Spiegelung an  $\mathcal{C}$  u. U. nicht eindeutig bestimmt ist. Es ist reizvoll, wie sich das hier am konkreten Beispiel artikuliert – vgl. unten den Fall  $\mathcal{C} =$  Quadratlinie.

**c) Möglichst konforme Abbildung der Vollkugel auf sich, wobei  $\mathcal{C}$  in eine Kreislinie übergeht.** Um zu einer weiteren äquivalenten Formulierung zu gelangen, betrachten wir zunächst den folgenden

**Hilfssatz** *Genau dann gibt es eine  $Q$ -quasikonforme Abbildung der Vollkugel auf sich, bei der  $\mathcal{C}$  in eine Kreislinie oder Gerade übergeht, wenn eine  $Q^2$ -quasikonforme Spiegelung an  $\mathcal{C}$  existiert.*

**B e w e i s.** Ist nämlich  $Z(w)$  eine  $Q$ -quasikonforme Abbildung, die das in der  $w$ -Ebene gelegene  $\mathcal{C}$  z. B. in  $|Z| = 1$  transformiert, so stellt in bekannter Schlußweise (vgl. z. B. [24], S. 103) der Übergang  $w \rightarrow Z \rightarrow 1/\bar{Z} \rightarrow w$  eine  $Q^2$ -quasikonforme Spiegelung an  $\mathcal{C}$  dar, da hier zwei  $Q$ -quasikonforme Abbildungen und eine konforme Abbildung (Spiegelung am Einheitskreis) teilhaben.

Ist umgekehrt eine  $Q^2$ -quasikonforme Abbildung  $w^* = w^*(w)$  des einen von  $\mathcal{C}$  berandeten Gebietes  $\mathcal{G}_1$  auf das andere  $\mathcal{G}_2$  unter Festhaltung der Punkte von  $\mathcal{C}$  gegeben, dann konstruieren wir hieraus so eine  $Q$ -quasikonforme Abbildung  $Z = Z(w)$  der Kugel, die  $\mathcal{C}$  z. B. in  $|Z| = 1$  transformiert; vgl. hierzu die Fig. 3,

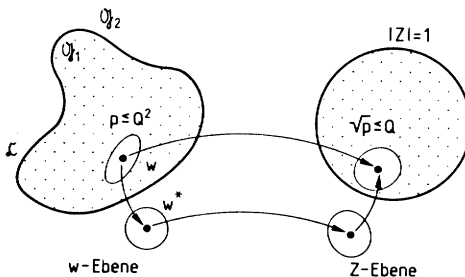


Fig. 3

in der die im folgenden genannten infinitesimalen Ellipsen mit der Dilatation angedeutet sind.

Bei  $w^*(w)$  gehen gewisse in  $\mathfrak{G}_1$  gelegene infinitesimale Ellipsen des Achsenverhältnisses  $p \leq Q^2$  in infinitesimale Kreise (in  $\mathfrak{G}_2$  gelegen) über (das läßt sich in Form der „Beltramischen Differentialgleichung“ für  $w^*(w)$  exakt ausdrücken). Wir betrachten dazu eine (Q-quasikonforme) Abbildung  $Z = Z(w)$  von  $\mathfrak{G}_1$  auf  $|Z| < 1$ , wobei infinitesimale Ellipsen gleicher Orientierung der großen Achsen, aber des Achsenverhältnisses  $\sqrt{p}$  in infinitesimale Kreise übergehen (dieses  $Z(w)$  ergibt sich wieder nach dem zugehörigen Existenzsatz [24] für die entsprechende Beltramische Differentialgleichung). Dann entsteht durch  $w^* \rightarrow w \rightarrow Z \rightarrow 1/\bar{Z}$  insgesamt eine Q-quasikonforme Abbildung von  $\mathfrak{G}_2$  auf das Äußere von  $|Z| = 1$ , wie man durch Verfolgung infinitesimaler in  $\mathfrak{G}_2$  gelegener Kreise bzw. durch Zusammensetzung der zugehörigen Differentialgleichungen sieht. Nimmt man die so entstandene Abbildung von  $\mathfrak{G}_2$  zu der Abbildung  $Z(w)$  von  $\mathfrak{G}_1$  hinzu, entsteht insgesamt die gesuchte Q-quasikonforme Abbildung der Vollkugel auf sich, die  $\mathfrak{C}$  in  $|Z| = 1$  transformiert.

In der Literatur findet sich (vgl. z. B. [4], Lemma 3.1) der als zweites bewiesene Teil des Hilfssatzes in schwächerer Form. Der in diesem Beweisteil verwendete Gedanke der „Faktorisierung“ kommt in etwas anderem Zusammenhang schon in [29] (S. 129) vor.

Aus dem Hilfssatz ergibt sich nach dem oben unter a) und b) Gesagten sofort der

**Satz** *Bei analytischem  $\mathfrak{C}$  existiert unter den quasikonformen Abbildungen der Vollkugel auf sich, bei denen  $\mathfrak{C}$  in eine Kreislinie übergeht, bis auf anschließende lineare Transformation genau eine mit minimaler Maximaldilatation. Letztere ist  $\sqrt{Q\mathfrak{C}}$ .*

Die betrachteten möglichst konformen Abbildungen sind wieder in analoger Weise durch ein quadratisches Differential beschreibbar, was sich durch die Transformation im Beweis des Hilfssatzes ergibt. Die eindeutige Bestimmtheit im Satz (bis auf anschließende lineare Transformation) ergibt sich aus der eindeutigen Bestimmtheit der möglichst konformen Spiegelung an  $\mathfrak{C}$ , da im Beweis des Hilfssatzes die Beltramiabbildung  $Z(w)$  bis auf lineare Transformationen des Einheitskreises in sich eindeutig bestimmt ist. Und es muß bei jeder Zerlegung der  $Q^2$ -quasikonformen Spiegelung an  $\mathfrak{C}$  in zwei Q-quasikonforme Abbildungen für  $Z(w)$  die gleiche im Beweis des Hilfssatzes genannte Beltramiabbildungsdifferentialgleichung erfüllt sein. Andernfalls ergäbe sich so ein Widerspruch. Man betrachte in  $\mathfrak{G}_1$  ein beliebiges topologisches Viereck, berandet von zwei Gegenseiten auf den Trajektorien des quadratischen Differentials und zwei Gegenseiten auf den orthogonalen Trajektorien. Hiervon werden die Bilder bei der Spiegelung und bei den beiden Q-quasikonformen Faktoren betrachtet, was mit der Modulungleichung (bzw. mit der Diskussion des Gleichheitszeichens in dieser) einen Widerspruch ergäbe.

4 Der Fredholmsche Eigenwert von  $\mathfrak{C}$ 

Es erweist sich als zweckmäßig, neben dem Spiegelungskoeffizienten  $q_{\mathfrak{C}}$  als zweites Kurvenfunktional noch den zugehörigen Fredholmschen Eigenwert  $\lambda_{\mathfrak{C}}$  zu betrachten. Dieser trat ursprünglich im Zusammenhang mit einer Integralgleichung der klassischen Potentialtheorie auf. Ist nämlich  $\mathfrak{C}$  hinreichend glatt, so ist  $\lambda_{\mathfrak{C}}$  kleinster nichttrivialer Eigenwert  $> 1$  der Integralgleichung (vgl. z. B. [6], S. 27, sowie [28])

$$(7) \quad u(w) = \lambda_{\mathfrak{C}} \int_{\mathfrak{C}} K(w, t) u(t) ds_t$$

mit dem Neumannschen Kern

$$K(w, t) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_t} \log |w - t|$$

( $w, t$  Punkte auf  $\mathfrak{C}$ ,  $n_t$  Normale in  $t$ ,  $ds_t$  Bogenelement). Der Grenzfall  $\lambda_{\mathfrak{C}} = \infty$  tritt genau für den trivialen Fall eines Kreises auf. Man kann  $\lambda_{\mathfrak{C}}$  heute auch für beliebige Jordankurven  $\mathfrak{C}$  (also ohne Glattheitsvoraussetzungen) definieren – vgl. z. B. [28]. Das hängt mit der folgenden physikalischen Bedeutung von  $\lambda_{\mathfrak{C}}$  zusammen (vgl. z. B. [29]): Zu allen elektrostatischen Feldern, die außerhalb und innerhalb von  $\mathfrak{C}$  vorliegen, dabei auf  $\mathfrak{C}$  gleiches Potential besitzen, ist der Quotient der Energieinhalte, für das Äußere und das Innere von  $\mathfrak{C}$  genommen, stets  $\leq (\lambda_{\mathfrak{C}} + 1)/(\lambda_{\mathfrak{C}} - 1)$ . Diese Abschätzung ist scharf.

Es läßt sich nun beweisen ([18], [20], für hinreichend glatte  $\mathfrak{C}$  vgl. auch [26]), daß zu festem  $\mathfrak{C}$  das in (5) kleinstmögliche  $\kappa$  gerade  $1/\lambda_{\mathfrak{C}}$  ist. Zur schreibtechnischen Vereinfachung setzen wir

$$(8) \quad \kappa_{\mathfrak{C}} = 1/\lambda_{\mathfrak{C}}.$$

Da nun [12], [25] (S. 289) auch (5) mit  $\kappa = q_{\mathfrak{C}}$  gültig ist, haben wir die Ungleichung

$$(9) \quad \kappa_{\mathfrak{C}} \leq q_{\mathfrak{C}},$$

die von L. V. Ahlfors [1] andersartig hergeleitet wurde. Durch (9) ist uns eine wichtige Abschätzungsmöglichkeit für  $q_{\mathfrak{C}}$  an die Hand gegeben, da sich nach [21]  $\kappa_{\mathfrak{C}}$  bei Kenntnis der Riemannschen Abbildungsfunktion (d. h. der Grunsky-Koeffizienten  $a_{k\ell}$  in (4)) numerisch mit beliebiger Genauigkeit berechnen läßt. Ein solches Berechnungsverfahren existiert leider für  $q_{\mathfrak{C}}$  bis heute nicht. Das hängt damit zusammen, daß noch keine Bedingungen an die Riemannsche Abbildungsfunktion existieren, die zugleich notwendig und hinreichend für  $Q$ -quasikonforme Fortsetzbarkeit sind.

Weiter liefert jede Abschätzung der Form  $\kappa_{\mathfrak{C}} \geq \dots$  sofort nach (9) auch eine Abschätzung der Form  $q_{\mathfrak{C}} \geq \dots$ . So folgt z. B. aus (5) die in [20] angegebene Ungleichung

$$(10) \quad \kappa_{\mathfrak{C}} \geq |1 - \alpha|,$$

falls bei  $\mathfrak{C}$  eine analytische Ecke des Knickwinkels  $\pi\alpha$  auftritt. Das ergibt dann mit (9) sofort [30]

$$(11) \quad q_{\mathfrak{C}} \geq |1 - \alpha|.$$

Dabei wird die Abschätzung (19) für  $w'(z)$  mit dem Verhalten von  $w'(z)$  an der Ecke bei der konformen Abbildung  $w(z)$  verglichen. Da Letzteres (vgl. neuere Resultate von S. E. Warschawski, D. Gaier, F. D. Lesley, R. Näkki, B. Palka u. a.) unter schwächeren Voraussetzungen an  $\mathfrak{C}$  bzw. die Ecke untersucht wurde, kann man entsprechend auch die Voraussetzungen an  $\mathfrak{C}$  bei (10), (11) abschwächen.

Würde die nach (5) genannte Vermutung richtig sein, würde jetzt in (9) immer das Gleichheitszeichen stehen. Daß dies nicht zutrifft, wurde zunächst in [18] an einem Beispiel belegt. Wir bilden nämlich  $|z| > 1$  durch

$$(12) \quad w(z) = z(1 - qz^{-3})^{2/3}, \quad 0 < q < 1,$$

schlicht konform auf das Äußere einer dreifach symmetrischen Jordankurve  $\mathfrak{C}$  ab, die aus einer zu  $w = 0$  konzentrischen Ellipse durch die Transformation  $w = w^{2/3}$  entsteht. Hier ist  $q\mathfrak{C} = q$  nach [18], aber  $\kappa_{\mathfrak{C}} < q\mathfrak{C}$ .

Inzwischen [22] konnte allgemein für analytische  $\mathfrak{C}$  geklärt werden, wann in (9) das Gleichheitszeichen steht: Dies ist genau dann der Fall, wenn das zugehörige quadratische Differential in der  $w$ -Ebene (entsprechend § 3) innerhalb  $\mathfrak{C}$  nur Nullstellen gerader Ordnung (oder gar keine) besitzt. (Im Fall der durch (12) definierten Jordankurve  $\mathfrak{C}$  haben wir innerhalb  $\mathfrak{C}$  genau eine Nullstelle, und diese ist von erster Ordnung.) In diesem Falle läßt sich übrigens die möglichst konforme Fortsetzung von  $w(z)$  bzw. die möglichst konforme Spiegelung an  $\mathfrak{C}$  in Zusammenhang setzen zu gewissen komplexen Eigenfunktionen von  $\mathfrak{C}$ . Im Anschluß an [16] bezeichnen wir als komplexe Eigenfunktion von  $\mathfrak{C} \ni \infty$  eine komplexwertige Funktion  $W(w) \neq 0$ , die für alle  $w$  erklärt und stetig ist, dabei außerhalb  $\mathfrak{C}$  regulär mit  $W(\infty) = 0$ , und wobei  $W(w) - \lambda \overline{W(w)}$  mit einer Konstanten  $\lambda > 1$  regulär ist innerhalb  $\mathfrak{C}$ . Solche Eigenfunktionen existieren gerade dann, wenn  $\lambda$  ein Eigenwert zu  $\mathfrak{C}$  ist (und nicht nur zum kleinsten Eigenwert  $\lambda = \lambda_{\mathfrak{C}}$ ). Dann sind folgende Aussagen äquivalent nach [22] bei analytischem  $\mathfrak{C}$ , in der Lage wie in (3) normiert:

(a) Aus der Gültigkeit der Grunskyschen Koeffizientenbedingungen (5) für alle Systeme  $x_k$  mit  $\kappa = q$  folgt stets (also auch zum dabei kleinstmöglichen  $q$ ) die  $Q$ -quasikonforme Fortsetzbarkeit von  $w(z)$  mit  $Q = (1 + q)/(1 - q)$ .

(b) In (9) steht das Gleichheitszeichen.

(c) Das die möglichst konforme Fortsetzung von  $w(z)$  (bzw. die möglichst konforme Spiegelung) beschreibende quadratische Differential besitzt innerhalb  $\mathfrak{C}$  nur Nullstellen gerader Ordnung (oder gar keine).

(d) Es gibt eine komplexe Eigenfunktion  $W(w)$  (diese gehört dann notwendig zum kleinsten nichttrivialen Eigenwert  $\lambda_{\mathfrak{C}}$ ), für die  $W(w)$  innerhalb  $\mathfrak{C}$  darstellbar ist in der Form  $W(w^*(w))$ , wobei  $w^*(w)$  eine quasikonforme Spiegelung des Inneren von  $\mathfrak{C}$  ins Äußere ist (übrigens dann notwendig die möglichst konforme). Insbesondere bildet  $W(w)$  dann das Äußere von  $\mathfrak{C}$  und das Innere auf die gleiche Riemannsche Fläche ab, d. h. insbesondere liegen bei diesen Riemannschen Flächen die Windungspunkte übereinander.

Speziell ergibt sich [20] aus der Schlichtheit einer Eigenfunktion  $W(w)$  innerhalb und auch außerhalb  $\mathfrak{C}$  die Gültigkeit dieser vier Aussagen. Dies wurde in [11] auch aus der Voraussetzung der lokalen Schlichtheit bewiesen.

Als Gegenstück zu (9) ergibt sich noch aus [13]

$$(13) \quad q_{\mathcal{C}} \leq 3\kappa_{\mathcal{C}}.$$

Diese Ungleichung ist aber wahrscheinlich sehr grob und für  $\kappa_{\mathcal{C}} \geq 1/3$  natürlich sogar wertlos. Eine interessante und wichtige Aufgabe ist es, (13) zu verschärfen.

## 5 $\kappa_{\mathcal{C}}$ und $q_{\mathcal{C}}$ als Maß für Kreisnähe von $\mathcal{C}$

Die Größe  $q_{\mathcal{C}}$  ist offenbar invariant bei linearer Transformation. Das Gleiche ist für  $\kappa_{\mathcal{C}}$  richtig [28], wenn auch nicht unmittelbar an der klassischen Definition erkennbar. Diesen Bemerkungen entnimmt man zunächst, daß man sich der Vorstellung entschlagen muß, mit Krümmungseinschränkungen allein ließen sich Abschätzungen für  $q_{\mathcal{C}}$  oder  $\kappa_{\mathcal{C}}$  gewinnen. Der Einleitung entnimmt man weiter, daß  $q_{\mathcal{C}} = 0$  genau für die Kreise der Zahlenkugel eintritt. Das Analogon  $\kappa_{\mathcal{C}} = 0$  tritt ebenfalls – wie bemerkt – genau für diese Fälle ein [28]. Es ist jedoch nicht so, daß Kleinheit von  $q_{\mathcal{C}}$  bzw.  $\kappa_{\mathcal{C}}$  folgt, wenn die Abweichung zwischen  $\mathcal{C}$  und einem Kreis koordinatenmäßig hinreichend klein ist. Dies zeigen die Ungleichungen (10), (11): Wird bei  $\mathcal{C}$  eine kleine Ecke eingestoßen, können  $q_{\mathcal{C}}$  und  $\kappa_{\mathcal{C}}$  eine gewisse positive Größe nicht mehr unterschreiten. Diese Kurvenfunktionale  $q_{\mathcal{C}}$  und  $\kappa_{\mathcal{C}}$  hängen also sehr empfindlich von der Gestalt von  $\mathcal{C}$  ab, nicht nur im Großen, sondern auch im Infinitesimalen. Allerdings folgt bei entsprechend verschärfter Kreisnähe von  $\mathcal{C}$  in der Tat Kleinheit von  $q_{\mathcal{C}}$  und  $\kappa_{\mathcal{C}}$  – vgl. z. B. unten (16), dazu (13). Eine genauere Klärung hierzu wäre wünschenswert, d. h.: welches Maß der Kreisnähe erzwingt schon Kleinheit von  $q_{\mathcal{C}}$  und  $\kappa_{\mathcal{C}}$ ?

Zur umgekehrten Frage: Kann man aus der Kleinheit von  $q_{\mathcal{C}}$  bzw.  $\kappa_{\mathcal{C}}$  auf die Kreisnähe von  $\mathcal{C}$  schließen? Diese Frage bejahend wurde in [20] bewiesen der

**Satz** Falls  $\kappa_{\mathcal{C}} < 1/2$  ist, dann liegt  $\mathcal{C}$ , wenn  $\infty \notin \mathcal{C}$ , in einem konzentrischen Kreisring des Radienverhältnisses ( $> 1$ )

$$(14) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \kappa_{\mathcal{C}}\right)}{\Gamma(1 - \kappa_{\mathcal{C}})} - 1 \quad (\Gamma = \text{Eulersche Gammafunktion}).$$

Für kleine  $\kappa_{\mathcal{C}}$  ist dabei dieses Radienverhältnis  $= 1 + \kappa_{\mathcal{C}} \cdot 2,77 \dots + O(\kappa_{\mathcal{C}}^2)$ . Da dieses in (14) angegebene Radienverhältnis nicht kleinstmöglich ist, tut sich hier wieder ein offenes Problem auf.

Wegen (9) ergibt sich bei der Voraussetzung  $q_{\mathcal{C}} < 1/2$  eine zu (14) analoge Größe mit  $q_{\mathcal{C}}$  statt  $\kappa_{\mathcal{C}}$ . Es gilt aber dann nach [14] sogar etwas mehr.

**Satz** Falls  $q_{\mathcal{C}} < \sin[(\sqrt{2} - 1)\pi/2] = 0,605\dots$  ist, dann liegt  $\mathcal{C}$ , wenn  $\infty \notin \mathcal{C}$ , in einem konzentrischen Kreisring des Radienverhältnisses ( $> 1$ )

$$(15) \quad [2 - 4\pi^{-2} \arccos^2 q_{\mathcal{C}}] / [2 - (1 + 2\pi^{-1} \arcsin q_{\mathcal{C}})^2].$$

Für kleine  $q_{\mathcal{C}}$  ist jetzt dieses Radienverhältnis  $= 1 + q_{\mathcal{C}} \cdot 2,54\dots + O(q_{\mathcal{C}}^2)$ .

Diese beiden Sätze lassen sich auch lesen als Abschätzungen der Form  $\kappa_{\mathcal{C}} \geq \dots$  bzw.  $q_{\mathcal{C}} \geq \dots$ , falls  $\mathcal{C}$  sich nicht in einen Kreisring gegebenen Radienverhältnisses einbetten läßt.



Es gibt eine Vielzahl von Abschätzungen von  $\kappa_{\mathcal{C}}$  in der anderen Richtung. Wir erwähnen z. B. folgendes Resultat von M. Schiffer (vgl. [6], S. 36, Verschärfungen in [28]).

**Satz** Ist  $\mathcal{C}$  das Bild von  $|z| = 1$  durch eine im Kreisring  $r < |z| < R$  ( $r < 1 < R$ ) schlichte konforme Abbildung, dann gilt

$$(16) \quad \kappa_{\mathcal{C}} \leq \frac{1 + (rR)^2}{r^2 + R^2}.$$

Dies bedeutet: Aus der Kreisnähe in dem in diesem Satze vorausgesetzten Sinne (man beachte, daß für  $r = 0$ ,  $R = \infty$  folgt  $\mathcal{C} =$  Kreis bzw. Gerade) folgt Kleinheit von  $\kappa_{\mathcal{C}}$ . Ob die entsprechende Ungleichung für  $q_{\mathcal{C}}$  richtig ist, ist unbekannt (vgl. auch unten § 6c). Aber es gibt auch hier Abschätzungen der Form  $q_{\mathcal{C}} \leq \dots$ . Ganz einfach erhält man z. B. folgende Ungleichung von L. V. Ahlfors [1], [29], [6] (S. 36) durch explizite Konstruktion einer quasikonformen Spiegelung an  $\mathcal{C}$ , ähnlich gestaltet wie die gewöhnliche Spiegelung an einem Kreis.

**Satz** Es sei  $\mathcal{C}$  glatt und zu  $w = 0$  sternig. Wird mit  $\alpha = \alpha(\varphi)$  der Winkel zwischen  $\arg w = \varphi$  und der Tangente an  $\mathcal{C}$  im Punkte mit dem Polarwinkel  $\varphi$  bezeichnet, dann gilt

$$(17) \quad q_{\mathcal{C}} \leq \max_{\varphi} |\cos \alpha(\varphi)|.$$

Durch (9) erhält man eine entsprechende Ungleichung für  $\kappa_{\mathcal{C}}$ . In [6] sind noch einige weitere Abschätzungen für  $\kappa_{\mathcal{C}}$  zusammengestellt. Diese sind i. allg. recht grob. Wie numerische Experimente zeigten, führt in den Fällen, bei denen man die Riemannsche Abbildungsfunktion kennt, selbst bei ersten einfachen Näherungen das schon genannte numerische Berechnungsverfahren für  $\kappa_{\mathcal{C}}$  in [21] zu erheblich schärferen Ungleichungen.

## 6 Weitere Abschätzungen für $\kappa_{\mathcal{C}}$ und $q_{\mathcal{C}}$ bei Kenntnis der Riemannschen Abbildungsfunktion

a) Abschätzungen der Form  $\kappa_{\mathcal{C}} \geq \dots$  bzw.  $q_{\mathcal{C}} \geq \dots$ . Es liegen viele notwendige Bedingungen dafür vor, daß bei einer Abbildung der Klasse  $\Sigma$  das Bild  $\mathcal{C}$  von  $|z| = 1$  einen reziproken Fredholmschen Eigenwert  $\kappa_{\mathcal{C}}$  bzw. Spiegelungskoeffizienten  $q_{\mathcal{C}}$  besitzt, der einen vorgegebenen Wert nicht übersteigt. Eine jegliche solche Bedingung gibt als Ungleichung Anlaß, zu gegebenem  $\mathcal{C}$  mit dazu gehöriger Abbildung  $w(z)$  von  $|z| > 1$  auf das Äußere von  $\mathcal{C}$  die uns interessierende Größe  $\kappa_{\mathcal{C}}$  bzw.  $q_{\mathcal{C}}$  nach unten abzuschätzen. Dabei kann wieder o. E. d. A.  $\mathcal{C}$  in solcher Lage angenommen werden, daß  $w(z) \in \Sigma$  ist. Als erstes Beispiel möge nochmals genannt werden das System der Grunskyschen Ungleichungen (5), das – wie genannt – mit  $\kappa = \kappa_{\mathcal{C}}$  gültig ist. Mit diesen Grunskyschen Koeffizientenbedingungen hängt eng zusammen das System der folgenden Ungleichungen von Golusinschen Typ. Es gilt für alle komplexen Wertesysteme  $\gamma_k$  und alle paarweis verschiedenen  $z_k$  mit

$|z_k| > 1$  ( $n =$  beliebige natürliche Zahl) bei  $w(z) \in \Sigma$  stets [18]

$$(18) \quad \left| \sum_{k, \ell=1}^n \gamma_k \gamma_\ell \log \frac{w(z_k) - w(z_\ell)}{z_k - z_\ell} \right| \leq \kappa \cdot \sum_{k, \ell=1}^n \gamma_k \bar{\gamma}_\ell \log \frac{1}{1 - (z_k \bar{z}_\ell)^{-1}}$$

mit  $\kappa = \kappa_{\mathcal{C}}$ , also erst recht mit  $\kappa = q_{\mathcal{C}}$ . Auch hier gilt: Wenn man in (18) irgendein System von  $\gamma_k$  und  $z_k$  fest wählt, entsteht eine Ungleichung der Form:  $\kappa_{\mathcal{C}} \geq$  bzw.  $q_{\mathcal{C}} \geq$  explizit berechenbare untere Schranke.

Der Spezialfall  $n = 1$  von (18)

$$(19) \quad |\log w'(z)| \leq \kappa \cdot \log \frac{1}{1 - |z|^{-2}}$$

führt übrigens zu (10) bzw. (11), wenn  $z$  gegen das Urbild einer Ecke strebt.

Aus den in Fülle heute existierenden weiteren notwendigen Bedingungen in der Klasse  $\Sigma(Q)$  (vgl. § 3a) – vgl. z. B. die Darstellung in [10] nebst Literatur – lassen sich entsprechend Ungleichungen für  $q_{\mathcal{C}}$  gewinnen. Für die Klasse der Abbildungen aus  $\Sigma$ , bei denen für das Bild  $\mathcal{C}$  von  $|z| = 1$  gilt  $\kappa_{\mathcal{C}} \leq \text{const}$  (mit fest gegebener Konstanten) liegen leider nicht entsprechend viele Ungleichungen vor. Solche herzuleiten (etwa durch eine noch zu entwickelnde Variationsmethode), wäre eine dankbare Aufgabe.

Wir geben hier noch folgendes handliche Beispiel [27] (Corollary 3) an. Falls  $\infty \notin \mathcal{C}$ , dann gilt für den Durchmesser  $D$  und den transfiniten Durchmesser  $d$  von  $\mathcal{C}$ :

$$(20) \quad 2 \leq D/d \leq 4 \cdot \exp \left[ - \int_0^1 (x^{-\alpha/2} - x^{\alpha/2})^2 \frac{dx}{1 - x^2} \right] \text{ mit } \alpha = \frac{1}{\pi} \arccos q_{\mathcal{C}}.$$

Als ein offenes Problem und eine Art Gegenstück hierzu werde noch genannt: Man bestimme die bestmögliche Abschätzung für die Größe  $R/d$  nach unten, wenn  $R$  den Radius der größten von  $\mathcal{C}$  umschlossenen Kreisscheibe bezeichnet! Eine unscharfe Abschätzung von  $R/d$  ergibt sich sofort aus [15] (vgl. auch [10], S. 129, mit weiterer Literatur) durch Stürzung:

$$(21) \quad 1 \geq R/d \geq \exp \{ 2C + 6 \log 2 + 2\psi(\alpha/2) + \pi\sqrt{Q_{\mathcal{C}}} \}.$$

Dabei bezeichnet  $C = 0,577\dots$  die Eulersche Konstante und  $\psi = \Gamma'/\Gamma$  die Eulersche Psi-Funktion; die rechte Seite von (20) läßt sich übrigens ähnlich wie die rechte Seite von (21) schreiben. (Vermutlich entsteht für hinreichend kleines  $Q$  für ein extremales  $\mathcal{C}$  – im Sinne eines Extremalproblems in der Klasse  $\Sigma(Q)$  betrachtet – ein quadratisches Differential, das auf  $\mathcal{C}$  drei einfache Pole besitzt, die die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden; nach [10], S. 119 ff. ließe sich dann der analytische Ausdruck für die Extremalfunktionen gewinnen und hieraus die scharfe Abschätzung für  $R/d$ .)

b) Neben den schon im vorigen Paragraphen erwähnten Abschätzungen der Form  $\kappa_{\mathcal{C}} \leq \dots$  gibt es (hieraus nicht folgende, weil jetzt die Ahlfors'sche Ungleichung (9) nicht greift) Ungleichungen der Form  $q_{\mathcal{C}} \leq \dots$  bei Kenntnis der zum Inneren oder Äußeren von  $\mathcal{C}$  gehörigen Riemannschen Abbildungsfunktion. Zur Herleitung wird zu dieser Abbildungsfunktion – allgemein gesprochen – aus

deren funktionentheoretischen Eigenschaften eine quasikonforme Fortsetzung konstruiert, deren Maximaldilatation dann eine Abschätzung  $q_{\mathcal{C}} \leq \dots$  liefert. Dies ist wohl zuerst von L. V. Ahlfors und G. Weill und dann in mehreren Arbeiten von J. Becker u. a. geschehen. Auf eine genauere Darstellung können wir hier verzichten, da eine solche mit Literaturangaben in [4] existiert. Wir erwähnen hier nur beispielhaft [4]: Ist  $w(z) \in \Sigma$  und gilt für die Schwarzsche Ableitung

$$(22) \quad |\{w, z\}| \leq 2\kappa(|z|^2 - 1)^{-2} \text{ bei } |z| > 1,$$

dann folgt  $q_{\mathcal{C}} \leq \kappa$ .

c) Außerdem stellt sich auch die Aufgabe, Abschätzungen der Form  $q_{\mathcal{C}} \leq \dots$  zu gewinnen aus der Eigenschaft (= „ $\rho$ -Bedingung“) von  $\mathcal{C}$ , daß z. B. die Abbildung  $w(z) \in \Sigma$  sogar für  $|z| > \rho$  mit  $\rho < 1$  regulär (bis auf den Pol in  $z = \infty$ ) und schlicht ist. (Auf die entsprechenden Abschätzungen  $\kappa_{\mathcal{C}} \leq \dots$  wurde schon bei (16) hingewiesen.) Eine erste (wohl unscharfe) solche wurde in [9] (Satz 5) gegeben. Es wird vermutet [20] (S. 387), daß  $q_{\mathcal{C}} \leq \rho^2$  gilt. Diese Abschätzung – falls sie richtig ist – kann sicher nicht verbessert werden, wie die bekannte Abbildung  $w(z) = z + \rho^2/z$  mit  $\mathcal{C} = \text{Ellipse}$  und  $q_{\mathcal{C}} = \rho^2$  zeigt. Immerhin wurde in [22]  $q_{\mathcal{C}} \leq \rho^2$  gezeigt bei der Zusatzvoraussetzung, es ist in (3)  $a_1 \neq 0$  und  $\rho$  kleiner als eine nur von  $|a_1|$  abhängende Größe. Es gibt analoge Vermutungen und Aussagen betreffend die Abbildungen  $\in S$  – vgl. [22].

Es wäre auch sinnvoll, [9] evtl. verschärfende Aussagen aus den Becker'schen Resultaten usw. [4] so zu suchen, daß man aus der  $\rho$ -Bedingung für  $w(z) \in \Sigma$  zunächst verschärfte Abschätzungen geeigneter Funktionale herleitet, woraus dann Fortsetzungskriterien folgen könnten.

Die ganze Betrachtung läßt sich noch so verallgemeinern. Es sei  $w(z) \in \Sigma$  noch für  $|z| > \rho$  ( $\rho < 1$ ) wenigstens  $Q^*$ -quasikonform fortsetzbar. Dann ist das Bild  $\mathcal{C}$  von  $|z| = 1$  eine quasikonforme Kurve. Man schätze  $Q_{\mathcal{C}}$  durch  $Q^*$  und  $\rho$  ab, was nach [24] (S. 100) prinzipiell möglich sein muß. Für  $Q^* = 1$  erhält man wieder den vorherigen Sachverhalt. Unschärfe Abschätzungen sind nach [33] oder (13) mit [28] möglich.

## 7 Beispiele

Es lag bis vor kurzem die seltsame Situation vor, daß zur quasikonformen Spiegelung an Jordankurven  $\mathcal{C}$  bzw. zu den Fredholmschen Eigenwerten zwar eine umfangreiche Theorie existierte, aber nur für ganz wenige  $\mathcal{C}$  deren  $q_{\mathcal{C}}$  bzw.  $\kappa_{\mathcal{C}}$  explizit bekannt war. Im folgenden soll für die bekannten Fälle eine Zusammenstellung gegeben werden. Für diese Fälle ist  $q_{\mathcal{C}} = \kappa_{\mathcal{C}}$ , und die praktische Bestimmung dieser Werte und der Beweis dieser Gleichheit geschieht oft so, daß man zuerst eine Abschätzung  $\kappa_{\mathcal{C}} \geq c$  herleitet (z. B. bei Vorliegen einer Ecke aus (10)) und dann z. B. eine quasikonforme Spiegelung an  $\mathcal{C}$  konstruiert mit einem Betrag der komplexen Dilatation  $\leq c$ . Dann muß nach (9) sicher  $q_{\mathcal{C}} = \kappa_{\mathcal{C}} = c$  sein. Statt der Spiegelung kann man auch entsprechend § 3a) eine quasikonforme Fortsetzung der äußeren oder inneren Riemannschen Abbildungsfunktion konstruieren, was eigentümlicherweise mal einfacher, mal schwieriger ist, je nach Kurve  $\mathcal{C}$ . Es

scheint übrigens noch kein Beispiel bekannt zu sein, bei dem die Antwort über § 3b) oder 3c) am einfachsten entsteht.

a) *Ellipse* mit den Halbachsen  $a \geq b > 0$ :  $q_{\mathfrak{C}} = \kappa_{\mathfrak{C}} = (a - b)/(a + b)$  (dies kommt in statu nascendi schon vor in klassischen Arbeiten, die ins vorige Jahrhundert zurückreichen). Schon dieses einfachste nichttriviale Beispiel ist recht instruktiv.

Wegen der Invarianz von  $q_{\mathfrak{C}}$  und  $\kappa_{\mathfrak{C}}$  insbesondere bei Ähnlichkeitstransformation können wir zu derjenigen Ellipse übergehen, die durch

$$(23) \quad w(z) = z + [(a - b)/(a + b)]\bar{z}$$

(komplex geschriebene Affinität) aus  $|z| = 1$  entsteht. Dann stellt (23) zu der Abbildung

$$(24) \quad w(z) = z + [(a - b)/(a + b)]/z \in \Sigma$$

die eindeutig bestimmte möglichst konforme Fortsetzung nach  $|z| < 1$  dar, was sich durch die Methode der Extremalmetrik ergibt und einen der einfachsten Spezialfälle zur Strebel'schen Theorie darstellt. Also ist  $q_{\mathfrak{C}} \leq (a - b)/(a + b)$ . Andererseits ergibt sich  $\kappa_{\mathfrak{C}} = (a - b)/(a + b)$  (vgl. z. B. [16]) und damit die Gleichheit  $q_{\mathfrak{C}} = \kappa_{\mathfrak{C}}$ .

Nach § 3a) läßt sich aus (23), (24) die eindeutig bestimmte möglichst konforme Spiegelung an der Ellipse errechnen. Diese wird nicht durch elementare Funktionen geliefert, da die konforme Abbildung des Einheitskreisinneren auf das Ellipseninnere nicht durch elementare Funktionen ausdrückbar ist. Analoges gilt für die gemäß § 3c) ebenfalls gewinnbare möglichst konforme Abbildung der Vollkugel auf sich, bei der die Ellipsenlinie in die Einheitskreislinie übergeht. Hier ist die Dilatation  $> 1$  gegeben durch  $\sqrt{Q_{\mathfrak{C}}}$ , also jedenfalls kleiner als bei der Affinität (23). Somit ergibt sich das im ersten Augenblick frappante Ergebnis: *Eine Affinität, die eine gegebene Ellipse in eine Kreislinie transformiert, ist nicht möglichst konform unter allen quasikonformen Abbildungen der Vollkugel auf sich, die diese Ellipse in eine Kreislinie überführen.*

b) Der Fall  $\mathfrak{C} = \text{Hyperbelast}$  ist noch ungeklärt (aber wohl angreifbar) außer für eine gleichseitige Hyperbel (s. u.). (Eine vollständige Hyperbel ist natürlich keine Jordankurve auf der Zahlenkugel, fällt also nicht unter unsere Betrachtungen.)

c) Eine *Parabel*  $\mathfrak{C}$  ist keine quasikonforme Kurve (also sinngemäß  $q_{\mathfrak{C}} = \kappa_{\mathfrak{C}} = 1$ ) wegen der Spitze im unendlich fernen Punkte.

d) Eine aus einem Zuge bestehende *Cassinische Kurve*  $\mathfrak{C}$  der Gestalt  $|w - c| \cdot |w + c| = 1$  mit  $0 < c < 1$  in der  $w$ -Ebene (vermöge Ähnlichkeitstransformation o. E. d. A. in dieser Lage annehmbar). (Eine Lemmiskate oder eine zweiseitige Cassinische Kurve fällt natürlich nicht unter unsere Betrachtung.) Nach [17] gilt mit der üblichen Bezeichnung für die vollständigen elliptischen Integrale 1. Gattung

$$(25) \quad q_{\mathfrak{C}} = \kappa_{\mathfrak{C}} = 1/\mathfrak{C}\alpha\mathfrak{f} \left\{ \frac{\pi}{2} K'(c^2)/K(c^2) \right\}$$

(in einer klassischen in [17] zitierten Arbeit von J. Blumenfeld und W. Mayer fehlerhaft). Die Gleichheit  $q_{\mathfrak{C}} = \kappa_{\mathfrak{C}}$  ergibt sich dabei nach Satz 7 in [20], da sich danach die (eindeutig bestimmte) möglichst konforme Spiegelung aus der nach [17] schlichten ersten komplexen Eigenfunktion gewinnen läßt.

Nicht bekannt sind  $q_{\mathfrak{C}}$  und  $\kappa_{\mathfrak{C}}$  für den einen Teil einer zweiteiligen Casinischen Kurve, wohl aber ergibt sich  $q_{\mathfrak{C}} = \kappa_{\mathfrak{C}} = 1/2$  für die eine Hälfte einer Lemniskate [20]; die möglichst konforme Spiegelung ist dabei nicht eindeutig bestimmt. Da eine Lemniskatenhälfte bei linearer Transformation (die Ecke dabei nach  $\infty$  zu werfen) in einen *gleichseitigen Hyperbelast* übergeht, hat letzterer ebenfalls  $q_{\mathfrak{C}} = \kappa_{\mathfrak{C}} = 1/2$ .

e) Der Fall  $\mathfrak{C} = \text{Kreisbogenzweieck}$  läßt sich durch lineare Transformation auf den Spezialfall zurückführen,  $\mathfrak{C}$  besteht aus zwei vom gleichen Punkt ausgehenden Strahlen. Nach [20] ergibt sich aus der Knickbedingung (10)

$$(26) \quad q_{\mathfrak{C}} = \kappa_{\mathfrak{C}} = |1 - \alpha|,$$

wenn  $\alpha\pi$  der in einer Ecke anliegende (innere oder äußere) Knickwinkel ist. Nach [30] (Satz 4) ist die möglichst konforme Spiegelung eindeutig bestimmt.

f) Auch im Falle  $\mathfrak{C} = \text{reguläres Kreisbogen-}n\text{-Eck}$  gilt (26) nach [21], falls  $\alpha\pi$  jetzt die Innen- oder Außenwinkel zwischen den in den Ecken (z. B.  $n$ -te Einheitswurzeln) zusammenstoßenden Kreisbögen sind. Zum Beweis wird wieder (9) und (10) benutzt und dazu explizit eine Spiegelung mit  $|1 - \alpha|$  als Maximalbetrag der komplexen Dilatation konstruiert, so daß noch  $q \leq |1 - \alpha|$  gilt. Das Prinzip der Konstruktion dieser Spiegelung soll am folgenden einfachen aber instruktiven Beispiel  $\mathfrak{C} = \text{Quadratlinie}$  dargetan werden (vgl. Fig. 4). Wir zeichnen durch die Gegenecken die beiden Diagonalen und betrachten in einem der durch die Diagonalen entstehenden Quadranten die Spiegelung näher. Wir zeichnen dazu noch den Kreis  $K$  durch die Ecken  $A$  und  $B$ , der die Diagonalen berührt. Dann wird außerhalb von  $K$  in diesem Quadranten die Spiegelung an  $\mathfrak{C}$  definiert als die gewöhnliche Spiegelung an dem Kreis durch die vier Quadratecken. Innerhalb von  $K$  hingegen führen wir eine lineare Transformation mit  $A \rightarrow 0, B \rightarrow \infty$  durch, so daß  $K$  in eine Gerade übergeht. Nach weiterer Logarithmusabbildung wird eine naheliegende gewisse 3-quasikonforme Affinität angesetzt, was insgesamt zum Ergebnis führt, nachdem man die Abbildung in die übrigen Quadranten durch Spiegelung fortgesetzt hat.

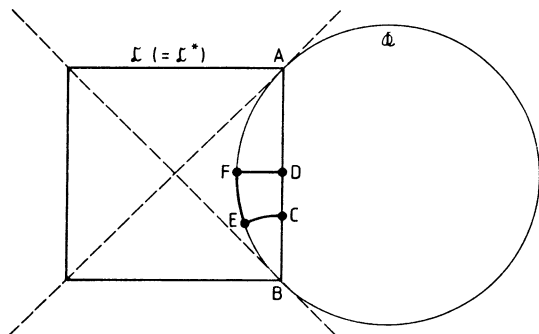


Fig. 4

Da man außerhalb  $K$  im bewußten Quadranten wegen der dort vorliegenden Konformität die Abbildung noch weitgehend abändern kann, solange sie 3-quasikonform bleibt, ist die möglichst konforme Spiegelung an  $\mathfrak{C}$  hier nicht eindeutig bestimmt. Das Gleiche gilt für den allgemeinen Fall des regulären Kreisbogen- $n$ -Eckes. (Gilt es auch allgemein bei  $\mathfrak{C}$  = Polygonzug o. ä.?)

Für den Fall eines regulären Geraden- $n$ -Eckes ergab sich in [1] durch (17) nur die Abschätzung

$$\kappa_{\mathfrak{C}} \leq q_{\mathfrak{C}} \leq \sin(\pi/n).$$

g) Der Fall  $\mathfrak{C}$  = allgemeine *Dreieckslinie* (Seiten = geradlinige Strecken) ist noch ungeklärt.

h) Der Fall  $\mathfrak{C}$  = *Rechtecklinie* ist ebenfalls i. allg. noch ungeklärt. Überraschenderweise gilt hier aber immerhin für „quadratnahe“ Rechtecklinie der

**Satz** Falls das Seitenverhältnis  $\geq 1$  eine gewisse (noch nicht näher bekannte) Zahl  $> 1$  nicht übersteigt, gilt wie beim Quadrat  $q_{\mathfrak{C}} = \kappa_{\mathfrak{C}} = 1/2$ .

Zum **B e w e i s** zeigen wir einfach, daß sich die im Zusammenhang mit Fig. 4 beschriebene Spiegelung an der Quadratlinie – sagen wir jetzt  $\mathfrak{C}^*$  – so abändern läßt, daß die Dilatation  $< 3 - \delta$  ist ( $\delta$  geeignete positive Zahl) in einem zu einem Seitenpaar parallelen hinreichend schmalen Parallelstreifen, auf dessen Symmetrielinie der Mittelpunkt von  $\mathfrak{C}^*$  liegt. Durch den in diesem Parallelstreifen gewonnenen „Spielraum“ für die Dilatation läßt sich dort eine Affinität durchführen, so daß aus  $\mathfrak{C}^*$  ein (quadratnahes) Rechteck entsteht mit immer noch 3-quasikonformer Spiegelungsmöglichkeit.

Diese Abänderung der Spiegelung am Quadrat  $\mathfrak{C}^*$  beschreiben wir in dem Kreisbogenviereck CDEF innerhalb  $\mathfrak{C}^*$  (vgl. Fig. 4), wobei CD eine Strecke auf der Quadratseite AB ist, EF ein Bogen auf  $K$  innerhalb  $\mathfrak{C}^*$ , DF eine Strecke auf der Mittelsenkrechten zu AB, EC ein zu  $K$  und AB orthogonaler Kreisbogen. In den Kreisbogenvierecken, die aus CDEF durch Spiegelung an FD bzw. an der durch den Mittelpunkt von  $\mathfrak{C}^*$  verlaufenden und zu AB parallelen Geraden hervorgehen, wird die Abänderung dann symmetrisch angesetzt.

In CDEF entstehen aus infinitesimalen innerhalb  $K$  gelegenen Kreisen infinitesimale Ellipsen des Achsenverhältnisses 3. Nach (elementar herstellbarer) eckpunkttreuer schlichter konformer Abbildung von CDEF auf ein im ersten Quadranten der  $u, v$ -Ebene gelegenes Rechteck, wobei CD in eine Strecke der  $u$ -Achse mit linkem Endpunkt  $u = 0, v = 0$  übergeht, entstehen aus diesen infinite-

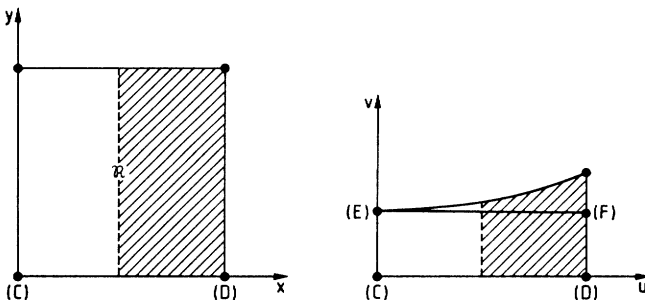


Fig. 5

simalen Ellipsen solche des gleichen Achsenverhältnisses 3, wobei jetzt die großen Achsen parallel zur  $u$ -Achse liegen. Man vgl. zum folgenden Fig. 5. Wird eine entsprechende geeignete konforme Abbildung in eine  $x, y$ -Ebene mit dem (außerhalb von  $\mathcal{C}^*$  gelegenen) Urbild bei der Spiegelung an  $\mathcal{C}^*$  vorgenommen, überpflanzt sich die Spiegelung an  $\mathcal{C}^*$  in dem betrachteten Teilstück in die Affinität  $u = x, v = y/3$ . Wir zeigen nun, daß die Dilatation  $\leq 3$  bleibt und in dem schraffierten rechten Teilrechteck sogar  $< 3 - \delta$  wird ( $\delta > 0$ ), wenn wir bei dem Rechteck der  $u, v$ -Ebene die obere Begrenzungsseite unter Festhaltung des linken Endpunktes etwas geeignet „hochbiegen“. Diesem „Hochbiegen“ entspricht in Fig. 4 ein Nach-Links-Drücken des Kreisbogens  $EF$  incl. entsprechende Behandlung der Spiegelbilder, was zulässig ist, da in einen Bereich hineingedrückt wird, wo Konformität vorliegt.

Wir präzisieren unsere Aussage im folgenden

**Hilfssatz** *In dem fest gegebenen achsenparallelen Rechteck  $\mathcal{R}$  der  $x, y$ -Ebene mit linker unterer Ecke in  $x = 0, y = 0$  ist die Abbildung*

$$(27) \quad u = x, \quad v = y \cdot (1 + \alpha \cdot x^2)/Q$$

*bei fest gegebenem  $Q > 1$ , sofern nur  $\alpha > 0$  hinreichend klein ist, sicher  $Q$ -quasi-konform, dabei sogar  $(Q - \delta)$ -quasikonform mit einem gewissen  $\delta > 0$  in der rechten Hälfte von  $\mathcal{R}$ .*

**B e w e i s.** Bei der Abbildung (27) mit der Jacobischen Determinante  $J$  errechnet man für die Dilatation  $p$

$$p + \frac{1}{p} = \frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{J} \\ = [Q + Q^{-1} \cdot (1 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^4 + 4\alpha^2 x^2 y^2)] / (1 + \alpha x^2).$$

Hieran läßt sich leicht die Behauptung herauspräparieren.

Ansonsten ist über  $q_{\mathcal{C}}$  und  $\kappa_{\mathcal{C}}$  bei Rechtecken wenig bekannt. Für ein Rechteck  $\mathcal{C}$  mit Achsenverhältnis  $\geq 3,31$  gilt nach [21] jedenfalls  $q_{\mathcal{C}} \geq \kappa_{\mathcal{C}} > 1/2$ . Damit können  $q_{\mathcal{C}}$  und  $\kappa_{\mathcal{C}}$  beim Rechteck keine durchweg reell-analytischen Funktionen des Achsenverhältnisses sein. Übrigens scheint nicht auf der Hand zu liegen, daß diese Funktionen (uneigentlich) monoton sind, was man natürlich vermuten möchte.

Natürlich lassen sich leicht Abschätzungen für  $q_{\mathcal{C}}$  und  $\kappa_{\mathcal{C}}$  errechnen. Durch eine zu Fig. 4 analoge Konstruktion einer Spiegelung an der Rechteckslinie  $\mathcal{C}$  mit Seitenverhältnis  $a/b$  ( $\geq 1$ ) ergibt sich z. B.

$$(28) \quad Q_{\mathcal{C}} \leq (\pi / \operatorname{arctg}(b/a)) - 1.$$

Das ist sicher für hinreichend kleine  $a/b$  nach obigem unscharf. Dies ist wahrscheinlich sogar immer bei  $a/b > 1$  unscharf. Ein numerischer Algorithmus zeigte z. B.  $q_{\mathcal{C}} \leq 0,728..$  für  $a/b = 5$  (im Gegensatz zu  $q_{\mathcal{C}} \leq 0,874..$  nach (28)).

i) Eine große Klasse von Kurven  $\mathcal{C}$  mit „im Prinzip“ angebbarem  $q_{\mathcal{C}}$  ergibt sich so. Man betrachte in der Klasse  $\Sigma(Q)$  ein Funktional vom Grötzsch-Teichmüller-Typ, welches von endlich vielen Funktionswerten (für in  $|z| \geq 1$  gelegene

Punkte) und Ableitungen (für in  $|z| > 1$  gelegene Punkte) der betrachteten Abbildungen abhängt, so daß die Lösungen des Extremalproblems „Funktional  $\rightarrow \max$ “ in bekannter Weise durch ein quadratisches Differential beschrieben werden und für  $|z| < 1$  konstante Dilatation  $Q$  besitzen (wobei keine Fortsetzung mit kleinerer Maximaldilatation existiert nach der Strebelschen Theorie). Dann hat das bei einer Extremalfunktion entstehende Bild  $\mathfrak{C}$  von  $|z| = 1$  sicher  $Q_{\mathfrak{C}} = Q$ . Über den Wert  $\kappa_{\mathfrak{C}}$  ist dabei i. allg. zunächst nichts Genaueres gesagt; jedenfalls kann  $\kappa_{\mathfrak{C}} < q_{\mathfrak{C}}$  sein – vgl. oben bei (12) (das zugehörige Extremalproblem in der Klasse  $\Sigma(Q)$  lautet  $|a_2| \rightarrow \max$  mit dem Koeffizienten  $a_2$  aus (3)).

Da bei den möglichst konformen Spiegelungen an derartigen  $\mathfrak{C}$  also die Dilatation  $\equiv Q$  ist, folgt durch Vergleich mit dem beim Beispiel f) oben zum Quadrat Gesagten dieses merkwürdige Nebenresultat: Bei keinem Extremalproblem der betrachteten Art in der Klasse  $\Sigma(Q)$  kann bei einer Extremalabbildung als Bild von  $|z| = 1$  eine Quadratlinie entstehen.

Konkret im analytisch-formelmäßigen Ausdruck lassen sich übrigens mit mehr oder weniger großem Aufwand diese über Extremalprobleme in der Klasse  $\Sigma(Q)$  entstehenden  $\mathfrak{C}$  mit zugehörigem  $Q_{\mathfrak{C}}$  bestimmen nach einer allgemeinen Strukturformel – vgl. [10] (S. 119ff., Beispiel auf S. 135 abgebildet).

j) Besonders günstig gestaltet sich unter i) alles, wenn das zugehörige quadratische Differential ein vollständiges Quadrat ist. Dann gilt erstens nach [22]  $\kappa_{\mathfrak{C}} = q_{\mathfrak{C}}$ , und zweitens ist die analytisch-formelmäßige Bestimmung von  $\mathfrak{C}$  ungleich einfacher. Man vgl. als Beispiele in [10] S. 105f. und S. 111.

## 8 Zusatzbemerkungen

a) Bei der linearen Transformation, die in § 3a) die gegebene Kurve in die angegebene Lage (transfiniten Durchmesser 1) bringt, kann man willkürlich einen vorgegebenen Punkt (nicht auf der Kurve gelegen natürlich) in den unendlich fernen Punkt bringen. In anderer Sicht bedeutet das: Bei möglichst konformer Fortsetzung der konformen Abbildung des Äußeren des Einheitskreises auf das Äußere von  $\mathfrak{C}$  einerseits und bei möglichst konformer Fortsetzung der konformen Abbildung des Inneren des Einheitskreises auf das Innere von  $\mathfrak{C}$  andererseits entstehen die gleichen Minimaldilatationen  $= Q_{\mathfrak{C}}$ .

b) Es wäre sicher lohnend, die Auswirkung von Symmetrisierungsprozessen auf die Kurvenfunktionale  $\kappa_{\mathfrak{C}}$  und  $q_{\mathfrak{C}}$  zu studieren.

c) Auswirkungen der Quadratwurzeloperation bei  $\mathfrak{C}$  auf die Werte  $\kappa_{\mathfrak{C}}$  und  $q_{\mathfrak{C}}$  werden in [22] untersucht.

d) Oben wurde stets die Abweichung von der Konformität durch die größte vorkommende Dilatation gemessen. An sich könnte man auch als ein solches Maß ein geeignetes Mittel der Dilatationswerte zugrundelegen. Dies aber führt zu wesentlich schwierigeren Fragen – vgl. z. B. [19]. Auch geht die Invarianz der Fragestellung bei linearer Transformation verloren.



e) Ist eine Jordankurve  $\mathfrak{C}$  gegeben und hierzu eine quasikonforme Abbildung der Vollkugel, bei der  $\mathfrak{C}$  in eine Kreislinie übergeht, wobei in dem einen von  $\mathfrak{C}$  berandeten einfach zusammenhängenden Gebiete  $Q_1$ -Quasikonformität vorliegt, in dem anderen  $Q_2$ -Quasikonformität, dann gilt offenbar

$$(29) \quad Q_1 \cdot Q_2 \geq Q_{\mathfrak{C}}^2,$$

und es existiert zu jeder Wertekombination  $Q_1, Q_2$  mit  $Q_1 \geq 1, Q_2 \geq 1$  und  $Q_1 \cdot Q_2 = Q_{\mathfrak{C}}^2$  eine solche quasikonforme Abbildung der Vollkugel mit den gegebenen Dilatationsschranken. Das alles zeigt eine kleine Modifizierung des Beweises des Hilfssatzes von § 3c).

f) Sind zwei Jordankurven  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{D}$  gegeben, so kann man nach den möglichst konformen Abbildungen der Vollkugel auf sich fragen, bei denen  $\mathfrak{C}$  in  $\mathfrak{D}$  übergeht. Für die zugehörige Dilatation  $Q_{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}$  kann hier nur die Abschätzung

$$(30) \quad Q_{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}^2 \leq Q_{\mathfrak{C}} \cdot Q_{\mathfrak{D}}$$

angegeben werden. Diese ergibt sich sofort durch Zwischenschalten einer dritten Ebene, in der  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{D}$  einer Kreislinie entsprechen. In (30) steht i. allg. nicht das Gleichheitszeichen – vgl. z. B. den Fall  $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{D}$ , wo sogar  $Q_{\mathfrak{C}\mathfrak{D}} = 1$  ist. Man vgl. auch [37].

g) Mit unserer Thematik hängt eng zusammen die folgende Fragestellung. Gegeben sei ein Jordankurvenbogen  $\mathfrak{c}$  mit Endpunkten A und B. Betrachtet werden alle quasikonformen Abbildungen der Vollkugel, die  $\mathfrak{c}$  punktwies festhalten und orientierungsumkehrend sind (= „quasikonforme Spiegelungen an  $\mathfrak{c}$ “). Wann ist wieder die Maximaldilatation minimal? Bildet man die zweiblättrige Riemannsche Fläche mit Windungspunkten in A und B auf die schlichte Ebene ab, so entsteht aus  $\mathfrak{c}$  eine Vollkurve  $\mathfrak{C}$ . Einer  $Q$ -quasikonformen Spiegelung an  $\mathfrak{c}$  entspricht so eine  $Q$ -quasikonforme Spiegelung an  $\mathfrak{C}$  und umgekehrt. Gleichwohl entstehen bei der Spiegelung an  $\mathfrak{c}$  Fragen von eigenständigem Interesse. Was wird z. B. in der Grenze entstehen, wenn  $\mathfrak{c}$  auf einer festen Trägerkurve liegt und auf einen Punkt schrumpft?

Noch ein Beispiel hierzu:  $\mathfrak{c}$  bestehe aus zwei unter dem Winkel  $\alpha\pi$  zusammenstoßenden Strecken. Dann ist nach (11) sicher  $q_{\mathfrak{C}} \geq |1 - \alpha|$ . Hier muß sogar das Gleichheitszeichen stehen, da man wieder elementar (wie oben beim Kreisbogenzweieck) eine entsprechende quasikonforme Spiegelung finden kann (bei der sogar die beiden kompletten Trägerstrahlen der Strecken punktwies festbleiben).

h) Einer Mitteilung von Herrn D. Gaier zufolge spielt der Spiegelungskoeffizient  $Q_{\mathfrak{C}}$  neuerdings eine wichtige Rolle bei der Approximation der Riemannschen Abbildungsfunktion zum Inneren von  $\mathfrak{C}$  durch die  $n$ -ten Bieberbachschen Polynome: Der Fehler ist  $\leq \text{const} \cdot n^{-\gamma}$ , wobei für  $\gamma$  jeder Wert  $< 1/(20\mathfrak{C})$  wählbar ist; vgl. [23], [3].

**Zusatz bei der Korrektur.** Interessante Beiträge wurden jüngst von S. L. Krushkal' durch neue Ansätze (u. a. Kobayashi-Metrik, Teichmüllersche Räume) gewonnen. Die Frage des Gleichheitszeichens in (9) wurde unter schwächeren Voraussetzun-

gen an  $\mathbb{C}$  betrachtet in [34]. Die in § 6c genannte Vermutung  $q_{\mathbb{C}} \leq \rho^2$  wurde in [36] bewiesen, ebenfalls, daß (16) richtig bleibt bei Ersetzung von  $\kappa_{\mathbb{C}}$  durch  $q_{\mathbb{C}}$ . Die in § 6c erwähnten offenen entsprechenden Fragen für die Klasse  $S$  wurden in [35] beantwortet.

### Literatur

- [1] Ahlfors, L. V.: Remarks on the Neumann-Poincaré integral equation. *Pacific J. Math.* **2** (1952) 271–280
- [2] Ahlfors, L. V.: Quasiconformal reflections. *Acta Math.* **109** (1963) 291–301
- [3] Anderson, J. M.; Gehring, F. W.; Hinckanen, A.: Polynomial approximation of quasidisks. *Differential Geometry and Complex Analysis*, Vol. dedic. H. E. Rauch (1985) 75–86
- [4] Becker, J.: Conformal mappings with quasiconformal extensions. *Aspects of Contemporary Complex Analysis*. London: Academic Press 1980, S. 37–77
- [5] Davis, P. J.: The Schwarz Function and its Application. *The Math. Assoc. of America* 1974
- [6] Gaier, D.: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1964
- [7] Gehring, F. W.: Characteristic properties of quasidisks. *Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal* 1982
- [8] Grötzsch, H.: Über möglichst konforme Abbildungen von schlichten Bereichen. *Ber. Math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **84** (1932) 114–120
- [9] Hübner, O.: Die Faktorisierung konformer Abbildungen und Anwendungen. *Math. Z.* **92** (1966) 95–109
- [10] Kruschkal, S. L.; Kühnau, R.: *Quasikonforme Abbildungen – neue Methoden und Anwendungen*. Leipzig: BSB Teubner 1983 (in Russ.: Novosibirsk: Nauka 1984)
- [11] Krzyż, J. G.: Conjugate holomorphic eigenfunctions and extremal quasiconformal reflection. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* **10** (1985) 305–311
- [12] Kühnau, R.: Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen. *Math. Nachr.* **48** (1971) 77–105
- [13] Kühnau, R.: Koeffizientenbedingungen bei quasikonformen Abbildungen. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Lublin, Sect. A* **22/23/24** (1968/1969/1970) 105–111
- [14] Kühnau, R.: Eine funktionentheoretische Randwertaufgabe in der Theorie der quasikonformen Abbildungen. *Indiana Univ. Math. J.* **21** (1971) 1–10
- [15] Kühnau, R.: Eine Verschärfung des Koebeschen Viertelsatzes für quasikonform fortsetzbare Abbildungen. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* **1** (1975) 77–83
- [16] Kühnau, R.: Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen. *Math. Nachr.* **76** (1977) 139–152
- [17] Kühnau, R.: Bemerkung zu einer klassischen Arbeit von J. Blumenfeld und W. Mayer. *Proc. Conf. Math. and Num. Methods in Halle/Saale 1979. Math. Forschung Bd. 1*. Berlin: Akademie-Verlag 1979, S. 161–164
- [18] Kühnau, R.: Zu den Grunskyschen Coeffizientenbedingungen. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* **6** (1981) 125–130
- [19] Kühnau, R.: Über Extremalprobleme bei im Mittel quasikonformen Abbildungen. *Complex Analysis – 5. Romanian-Finnish Seminar, I., Bucharest 1981. Lect. Notes Math.* **1013** (1983) 113–124
- [20] Kühnau, R.: Quasikonforme Fortsetzbarkeit, Fredholmsche Eigenwerte und Grunskysche Koeffizientenbedingungen. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* **7** (1982) 383–391
- [21] Kühnau, R.: Zur Berechnung der Fredholmschen Eigenwerte ebener Kurven. *ZAMM* **66** (1986) 193–201
- [22] Kühnau, R.: Wann sind die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen hinreichend für Q-quasikonforme Fortsetzbarkeit? *Comm. Math. Helv.* **61** (1986) 290–307
- [23] Leclerc, M.: A note on a theorem of V. V. Andrievskii. *Arch. Math.* **46** (1986) 159–161

- [24] Lehto, O.; Virtanen, K. I.: Quasikonforme Abbildungen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1965
- [25] Pommerenke, Chr.: Univalent Functions. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1975
- [26] Schiffer, M.: Fredholm eigenvalues and Grunsky matrices. Ann. Polon. Math. **39** (1981) 149–164
- [27] Schiffer, M.; Schöber, G.: Coefficient problems and generalized Grunsky inequalities for schlicht functions with quasiconformal extensions. Arch. Rat. Mech. Anal. **60** (1976) 205–228
- [28] Schöber, G.: Estimates for Fredholm eigenvalues based on quasiconformal mapping. Lect. Notes Math. **333** (1973) 211–217
- [29] Springer, G.: Fredholm eigenvalues and quasiconformal mapping. Acta Math. **111** (1964) 121–142
- [30] Strebel, K.: Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises. Comm. Math. Helv. **36** (1962) 306–323
- [31] Strebel, K.: On the existence of extremal Teichmüller mappings. J. D'Analyse Math. **30** (1976) 464–480
- [32] Teichmüller, O.: Gesammelte Abhandlungen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1982, hier S. 518 (auch in: Abh. Preuß. Akad. Wiss., math.-nat. Kl. 22 (1939), hier S. 184)
- [33] Kellogg, J. A.: On the maximal dilatation of quasiconformal extensions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **478** (1971) 1–8
- [34] Krushkal', S. L.: Über die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen. Sibirsk. Mat. Zh. **28** (1987) 138–145 [Russ.]
- [35] Krushkal', S. L.: Über eine interpolierende Familie schlichter analytischer Funktionen. Sibirsk. Mat. Zh. (im Druck) [Russ.]
- [36] Krushkal', S. L.: Kobayashi-Metrik, Teichmüllersche Räume, quasikonforme Fortsetzung schlichter Funktionen und Spiegelung bezüglich analytischer Kurven. Dokl. Akad. Nauk SSSR (im Druck) [Russ.]
- [37] Rickman, S.: Extension over quasiconformally equivalent curves. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **436** (1969) 1–12

Dr. Reiner Kühnau  
 Sektion Mathematik der  
 Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg  
 Universitätsplatz 8/9  
 DDR-402 Halle an der Saale

(Eingegangen 5. 6. 1986)



## Buchbesprechungen

**Euler, L., Opera omnia, Series quarta A, Vol. 6, Commercium epistolicum P.-L. Maupertuis et Friderico II, Correspondence of Leonhard Euler with P.-L. Maupertuis and Frederic II,** edited by Emil A. Fellmann, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1986, 560 pp., hardcover, DM 240,—

Nach den Bänden IV A 1 und IV A 5 ist der Band IV A 6 der dritte, der aus der auf 8 Bände geplanten Reihe IV A von Eulers Opera omnia erscheint. Diese Reihe wird einmal Eulers gesamte Korrespondenz im Druck zugänglich machen.

Der vorliegende Band enthält Eulers Korrespondenz mit dem Präsidenten der Berliner Akademie der Wissenschaften, während der Regierungszeit von Friedrich II, mit P.-L. Moreau de Maupertuis (1698–1759), sowie mit dem König selbst. Den Briefwechseln geht jeweils eine Einführung der hauptverantwortlichen Herausgeber P. Costabel bzw. E. Winter voraus, die zum Inhalt der Briefe und deren Zusammenhang mit Eulers Aufsätzen Stellung nehmen. Die Briefe und mitveröffentlichten Dokumente sind durchgängig mit zahlreichen erläuternden Anmerkungen versehen.

Die Texte sind in der Originalsprache Deutsch, Französisch bzw. Latein abgedruckt. Den lateinischen Stücken ist eine französische Übersetzung beigegeben.

Der vollständige Text der erhaltenen Korrespondenz zwischen Maupertuis und Euler ist hier zum ersten Mal veröffentlicht. Es handelt sich um 124 Briefe Eulers und 7 Briefe Maupertuis' aus der Zeit 1738 bis 1759. Hinzukommen sechs erschlossene Briefe Eulers (Nr. 33a, 84a, 85a, 112a, 126a, 127a), so daß 137 Stücke zu unterscheiden sind. Sie sind 127 Nummern zugeordnet. Die behandelten Themen sind wissenschafts- wie sozialgeschichtlich hochinteressant: Prinzip der kleinsten Wirkung, Gestalt der Erde, schwingende Saiten, Stoßprobleme, kürzeste Dämmerung, optische Probleme (Brillenanfertigung), Logarithmen negativer Zahlen, kubische Gleichungen, wahrscheinlichkeitstheoretische Fragen bei Spielen, Leibnizsche Monadologie, Wahl und Zuteilung von Akademiepreisen, neue Mitglieder. Zwangsläufig spiegelt sich in der Korrespondenz der berühmt-berüchtigte Streit von Maupertuis mit S. König um das Prinzip der kleinsten Wirkung wider.

Der Korrespondenz voraus gehen Übersichten über die Anwesenheit von Maupertuis auf den Akademiesitzungen in Berlin zwischen 1746 und 1756 sowie über die Aufenthaltsorte von Maupertuis zwischen 1756 und seinem Tod im Jahre 1759. Der Korrespondenz nachgestellt ist ein zweiteiliger Anhang, der ein Schreiben Eulers an Maupertuis für Friedrich II, vier Briefe aus dem Briefwechsel zwischen Maupertuis und Friedrich II bzw. A. N. Grischow sowie zwei zusätzliche Dokumente enthält.

83 der 87 Briefe zwischen Euler (18) und Friedrich II (59) wurden bereits 1852 veröffentlicht, vier sind neu hinzugekommen. Euler hatte wenig unmittelbaren Kontakt mit dem König. Ihre Beziehungen verliefen über die Administration oder Vertrauensperson des Königs. Deshalb wurden 17 zusätzliche Dokumente aus der indirekten Korrespondenz mitveröffentlicht, die sehr zum Verständnis der direkten Korrespondenz beitragen. Es handelt sich insbesondere um Eulers Entwurf für eine Akademie reform, um seine Gutachten zum Kanal von Finow, zu hydraulischen Maschinen, über ein Projekt zur Mühlenverbesserung sowie um ein Inventarverzeichnis der physikalischen Instrumente und Maschinen von Musschenbroeck in Leiden.

Nach der allgemeinen Einleitung unterscheidet Winter fünf Abschnitte der Beziehungen zwischen den beiden grundverschiedenen Männern:

1. Friedrich II Bemühungen, um Euler nach Berlin zu holen, Eulers Anfänge in der preußischen Hauptstadt,
2. die Umgestaltung der Akademie durch Euler unter Friedrich II. Führung,

3. Euler und Friedrich II während des 7jährigen Krieges,
4. der schwierige Weggang Eulers aus Berlin,
5. die Wiederaufnahme der Beziehungen zwischen Euler und Friedrich II.

Die Korrespondenz behandelt hauptsächlich die Organisation der akademischen Arbeiten, das tägliche Leben der Akademie, den Universitätsunterricht in Preußen, praktische Probleme, deren Lösung Euler vorschlug (Artillerie, Kanäle, Lotterien usf.), wie sie den beigegebenen Dokumenten zu entnehmen sind.

Euler wie Maupertuis waren intellektuell gleichgesinnte Schüler von Johann I Bernoulli in Basel. Während Euler den Ton der Akademie angab, repräsentierte sie Maupertuis nach außen. Nach Maupertuis' Weggang aus Berlin verweigerte der König Euler die Präsidentschaft. Als sein Wunschkandidat d'Alembert das angetragene Amt ablehnte, übernahm Friedrich II selbst die Leitung der Akademie. Hierin lag einer der wesentlichen Gründe für die Abkühlung der Beziehungen zwischen Euler und dem König, wie sie sich im Briefwechsel widerspiegelt.

Den dritten Teil des Bandes bildet ein Anhang, durch den dessen Inhalt in vorbildlicher Weise dem Leser erschlossen wird. Er enthält vor allem Verzeichnisse der erwähnten Veröffentlichungen und Handschriften Eulers bzw. anderer Personen, ein Verzeichnis der zitierten Personen und behandelten Themen sowie eine Konkordanztafel der Schriften Eulers, wie sie – bezogen auf Eneströms Werknummern – in den Opera omnia abgedruckt sind.

Dieser überaus sorgfältig edierte, äußerst inhaltsreiche Band läßt den Leser mit Spannung auf das Erscheinen des nächsten Bandes warten.

Berlin

E. Knobloch

**The Geometrical Work of Girard Desargues**, Editors: Field J. V., Gray, J. J., Berlin u. a.: Springer-Verlag 1987, 69 figs., x, 237 pp, hardcover, DM 158,–

Die große Bedeutung, die der Satz von Desargues (über perspektive Dreiecke) gerade in unserem Jahrhundert für die projektive Geometrie und insbesondere die Theorie der projektiven Ebenen gewonnen hat, läßt eine historische Würdigung des Werkes von Desargues (1591–1661), wie sie in diesem Buch vorgelegt wird, als äußerst wünschenswert erscheinen. Im Vorwort erklären die Herausgeber als ihr Hauptziel, eine englische Übersetzung der Schrift von Desargues über die Kegelschnitte (*Brouillon project d'une atteinte aux evenements des recontres du Cone avec un plan*, 1639) vorzulegen; das geschieht in Kap. VI, während die 5 ersten Kapitel eine Einführung bilden und die folgenden 3 Kapitel andere Arbeiten von Desargues in englischer Übersetzung vorlegen. Hier ist besonders auf Kap. VIII hinzuweisen. Es enthält 3 Lehrsätze, die einer von A. Bosse 1648 herausgegebenen Ausarbeitung „*La Perspective de Mr. Desargues*“ (die Schrift von Desargues über Perspektive, 1636 – als Faksimile in App. 5 – umfaßt nur 12 Seiten) angeführt sind und dem Stil nach von Desargues selber formuliert, aber anscheinend vorher nie veröffentlicht wurden. Der erste dieser Lehrsätze ist der berühmte „Satz von Desargues“ über perspektive Dreiecke. In Kap. I (*The Greek Legacy*) wird darauf hingewiesen, daß man zwar (van der Waerden 1961) aus einer Bemerkung bei Pappus die Desargues-Figur sowohl wie den Beweis der Umkehrung des Desargues-Satzes herauslesen könne, daß dies jedoch die Urhebererschaft von Desargues nicht beeinträchtigt (Halley fand 1706 die Pappus-Stelle „unzugänglich“, und erst 1723 wurde sie von Stevin wirklich verstanden). Der zweite der in Kap. VIII wiedergegebenen Lehrsätze besagt: Sind zwei vollständige Vierecke in perspektiver Lage (bez. ihrer Ecken) und schneiden sich die durch eine Ecke gehenden 3 Seiten des einen Vierecks mit den entsprechenden Seiten des anderen in Punkten einer Geraden, so liegen auf dieser auch die Schnittpunkte der übrigen 3 Seiten des einen Vierecks mit den entsprechenden Seiten des anderen (die Herausgeber verzichten leider auf eine derartige, für den Leser vorteilhafte, kommentierende Formulierung).

Die Kegelschnittschrift wird deshalb in den Mittelpunkt des Buches gestellt, weil sie mit Ausnahme der in Kap. VIII wiedergegebenen Lehrsätze der einzige Teil des Desarguesschen Werkes ist, der nicht zur „niedereren“ mathematischen Tradition der praktischen Geometrie gehört. Kap. III berichtet ausführlich über die Aufnahme der Schrift bei den Zeitgenossen und die Fortführung der dadurch begonnenen projektiven Geometrie in späterer Zeit, wobei auf die Ähnlichkeit der „social origins“ der projektiven Geometrie bei Monge (1746–1818) und Desargues aufmerksam gemacht wird (Poncelet hat 1822 Desargues als den „Monge seines Jahrhunderts“ bezeichnet). In dem in App. 1 englisch übersetzten Brief (1639) weist Descartes Desargues darauf hin, daß er einerseits die Fachleute durch seine neue, z. T. der Botanik entlehnte, französische Terminologie abstößt (z. B. *tronc, rameau, arbre*; Ellipse, Parabel, Hyperbel heißen *ovale, égalation, outrepassement*), andererseits aber für die Anfänger, denen diese anschaulichen Bezeichnungen helfen sollen, nicht ausführlich genug schreibt. In einem ähnlichen Dilemma befinden sich ja auch heutzutage viele Lehrbuchschreiber. Kap. IV gibt als Inhaltsbeschreibung eine gute Einführung für den in Kap. VI folgenden Text (Kap. V informiert hinsichtlich Übersetzungsfragen). Besonders hervorzuheben ist bei diesem die gleich zu Beginn erfolgende Einführung eines Fernpunktes („Punkt in unendlicher Entfernung“) als „but“ der Geraden eines Parallelenbüschels. Damit wird dann eine einheitliche Behandlung der Kegelschnitte möglich (App. 4 beschreibt eine ganz ähnliche Verwendung von Fernpunkten bei Kepler, 1604, betont aber, daß Desargues wohl davon keine Kenntnis hatte). Als Hauptergebnis werden in Kap. IV das Desarguesche Involutionstheorem und die Polarensätze hervorgehoben.

Das Buch ist jedem zu empfehlen, der sich für das Werk von Desargues und den Ursprung der projektiven Geometrie darin interessiert. Die Herausgeber haben dem heutigen Mathematiker das Eindringen in die schwierig geschriebenen Texte von Desargues sehr erleichtert. Leider sind die mathematischen Erläuterungen der Herausgeber nicht ganz fehlerfrei; z. B. S. 7, Mitte:  $\delta$  ist durch  $\delta'$  zu ersetzen; S. 10: bei der ersten Pappus-Gleichung fehlen Kollinearitätsvoraussetzungen; S. 17 oben: Der Augenpunkt ist fälschlich mit D statt mit E bezeichnet; S. 37, Z. 8/7 v. unten: hier fehlen Inzidenzbeziehungen zwischen Punkten und Tangenten; S. 38, Z. 6: „without loss of generality“ ist nicht gerechtfertigt; Z. 7: B, O sollen offenbar die Einheitspunkte auf den Achsen sein, daher besser AB statt AD; Z. 9: Im Zähler des 2. Bruches muß es  $+ yc$  statt  $+ yx$  heißen; S. 47: im 2. Absatz ist „collinear“ vor „points“ einzufügen. Ferner sind einige Figuren (der Herausgeber), in denen Kegel und ihre ebenen Schnitte dargestellt werden, schlecht gezeichnet (S. 6, 102, 131 links oben).

Gießen

G. Pickert

**Harish-Chandra, Collected Papers**, 4 Vol., Editor: V. S. Varadarajan. Berlin u. a.: Springer-Verlag 1983, 566 + 539 + 670 + 461 pp., Leinen, 4 Bände geschlossen DM 398,—

Harish-Chandras Lebenswerk galt vor allem dem Aufbau der Darstellungstheorie halbeinfacher Lie-Gruppen, sowie deren vielfältigen Beziehungen zu vielen anderen Bereichen der Mathematik. Die hier vorgelegte vierbändige, monumentale Werkausgabe stellt eine angemessene Würdigung seines mathematischen Schaffens dar. Dem Herausgeber V. S. Varadarajan gebührt unser Dank für seine gediegene Arbeit. Diese Werkausgabe enthält nicht nur 85 wissenschaftliche Arbeiten (mit zusammen 2236 Seiten), sondern ist daneben auch mit einer umfangreichen Einleitung des Herausgebers ausgestattet, ergänzt durch Beiträge von N. R. Wallach und R. Howe. Außerdem beginnt jeder Band mit einem Portrait-Foto aus der in diesem Band behandelten Schaffensperiode. Das ist 1944–1954 im ersten, 1955–1958 im zweiten, 1959–1968 im dritten und 1970–1983 im vierten Band. (Die Anordnung der Arbeiten ist rein chronologisch, die Einteilung in handliche Bände entspricht aber auch einer inhaltlichen Unterteilung).

Harish-Chandra wurde 1923 in Kaupur, Indien, geboren. Er promovierte 1945–1947 bei Dirac in Cambridge, war 1950–1963 an der Columbia-Universität in New York und danach in Princeton, wo er 1983 verstarb, nur kurz vor der Fertigstellung dieser Werkausgabe.

Die ersten wissenschaftlichen Arbeiten Harish-Chandras waren der Theoretischen Physik gewidmet. Auf Vorschlag von Dirac begann er dann mit der Untersuchung von unendlich-dimensionalen Darstellungen der Lorentz-Gruppe. Damit begann seine lange und intensive Beschäftigung mit der Darstellungstheorie von Gruppen, in deren Verlauf er eine monumentale Theorie der harmonischen Analyse auf reductiven Gruppen und ihren homogenen Räumen schuf. Sein Werk ist eine tiefgründige Synthese von Algebra, Geometrie und Analysis. Die große Kraft und fortgesetzte Resonanz seiner Ideen haben eine ganze Generation von Mathematikern inspiriert. Der Mut, mit dem er seine Ziele verfolgte, die Schönheit seiner Resultate, die Kraft und Originalität seiner Methoden, und die letztendliche Einfachheit seiner Philosophie, wie auch die zugrundeliegende Überzeugung, rufen unsere Bewunderung hervor. „Es kann keinen Zweifel geben, daß sein Verdienst zu den größten in der Mathematik unserer Zeit gehört.“ In solchen Worten würdigt Varadarajan in seiner Einleitung die großen wissenschaftlichen Verdienste Harish-Chandras.

Im weiteren Verlauf dieser – glücklicherweise sehr ausführlichen – Einleitung gibt uns Varadarajan eine inhaltliche Gesamtübersicht über das gewaltige Werk Harish-Chandras. Er geht dabei so vor, daß er zunächst einmal in einer „impressionistischen Weise“ die Hauptlinien dieses Werkes skizziert, und dann in weiteren Abschnitten zusätzliche Einzelheiten über ausgewählte Teile ergänzt. So stellt er zum Beispiel die harmonische Analyse von  $L^2(G)$  für eine reelle reductive Gruppe  $G$  als eines der großen Verdienste Harish-Chandras in einen der Brennpunkte seines Übersichtsberichtes. Zusätzliche Aspekte von Harish-Chandras Werken über reelle bzw.  $p$ -adische reductive Gruppen sprechen dann Nolan Wallach und Roger Howe an. Wallach geht dabei auf eine Reihe von Arbeiten einzeln ein. Jedem Leser, der sich heute mit halbeinfachen Gruppen und Lie-Algebren befaßt, wird bei der Lektüre auffallen, wie viele Gedanken und Resultate, die uns aus den schönen modernen Text-Büchern vertraut sind, tatsächlich auf Arbeiten von Harish-Chandra zurückgehen. In einer Arbeit von 1951 zum Beispiel zeigt Harish-Chandra, wie man aus einer vorgegebenen Cartan-Matrix gleichzeitig die zugehörige halbeinfache Lie-Algebra sowie alle ihre irreduziblen endlich-dimensionalen Darstellungen konstruieren kann. Um noch ein weiteres Beispiel zu erwähnen: In einer Arbeit von 1953 werden gleichzeitig zwei wichtige neue Konzepte eingeführt: Erstens die Theorie der analytischen Vektoren für eine Banach-Raum-Darstellung einer Lie-Gruppe  $G$ . Diese bilden einen für die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  invarianten Unterraum. Harish-Chandra betrachtet ihn als Modul für die Einhüllende Algebra  $U(\mathfrak{g})$ . Zweitens: Dieser Modul hat eine äußerst interessante rein algebraische Struktur, die uns heute als ein  $(\mathfrak{g}, K)$ -Modul geläufig ist, oder noch besser als ein sogenannter Harish-Chandra-Modul.

Für die noch zu schreibende Geschichte der modernen Lie-Theorie werden sich die Gesammelten Werke Harish-Chandra's sicher immer wieder als unentbehrliches Quellenbuch erweisen.

Wuppertal

W. Borho

Landau, E., *Collected Works*, Vol. 3 (Editors: P. T. Bateman, L. Mirsky, H. L. Montgomery, W. Schaal, I. J. Schoenberg, W. Schwarz, H. Wefelscheid with the assistance of P. L. Butzer, W. Heise, D. Laugwitz, A. Pfister, E. L. Stark), Essen: Thales Verlag 1986, Vol. III: 544 p., hardcover, DM 224,–

Der vorliegende 3. Band enthält weitere Arbeiten aus dem Zeitraum 1906–1909 von Landau. Davon hebe ich die Arbeit Nr. 44 „Über den Picardschen Satz“ hervor. Diese Arbeit ist auch heute noch sehr lesenswert. Da, wie es Landau immer geliebt hat, nichts an Kenntnissen



vorausgesetzt wird, ist sie außerordentlich erhellend. Weiters erscheint auch die Arbeit Nr. 45 „Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers“ von großem Interesse.

Landau hat sich mit diesem Fragekreis sehr gerne beschäftigt, und er hat ihn auch dazu geführt, seine neue Methode zur Behandlung des Primzahlsatzes auch am klassischen Fall zu entwickeln. Damals war ja der Satz von Hecke über die Fortsetzbarkeit der Dedekindschen Zetafunktion noch nicht zur Verfügung. Dadurch war er gezwungen, andere Wege einzuschlagen. Seine, die von ihm entwickelte, Methode ist als klassische Methode in die analytische Zahlentheorie eingegangen. Hervorheben möchte ich auch seine Darstellung des Tauberschen Satzes und seine Verallgemeinerung auf Dirichlet-Reihen in der Arbeit Nr. 47. Auf diese Reihen bezieht sich auch die Arbeit Nr. 54. Zur Analysis gehört seine berühmte Arbeit Nr. 55 „Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganz rationale Funktion“, die einen neuen Beweis des Weierstrassschen Approximationssatzes durch das, heute nach ihm benannte, Landausche Integral enthält. Es wäre an sich notwendig, jede dieser dreizehn Arbeiten zu besprechen, dies würde allerdings den Rahmen einer Buchbesprechung sprengen.

Das Besondere ist aber, daß ausführliche Kommentare zu den Arbeiten von Landau in den bisher erschienenen drei Bänden, in diesem Band enthalten sind (manche Kommentare erstrecken sich auch auf Arbeiten, die erst in späteren Bänden enthalten sein werden). Solche Kommentare wurden von W. Schwarz verfaßt, und er behandelt die Arbeiten von Landau zur analytischen Zahlentheorie. Auf das gleiche Gebiet bezieht sich der Kommentar von W. Schaal. Wolfgang Schwarz behandelt den Inhalt dieser Arbeiten im Detail sehr liebevoll. Er bespricht auch die Weiterentwicklung dieser Arbeiten bis in die letzte Zeit, so daß der Leser sieht, wie sich die behandelten Gegenstände entwickelt haben. W. Heise bespricht den Beitrag von Landau zur Schachmathematik. Ein weiterer Kommentar liegt von A. Pfister über die Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten vor. Weiteres ist ein Kommentar von D. Laugwitz über die Arbeiten von Landau über Geometrische Konstruktionen enthalten. In diesem Kommentar ist auch die (unpublierte) Arbeit des Studenten Landau, die sich im Nachlaß von H. A. Schwarz gefunden hat und die einen einfachen Beweis über die Unmöglichkeit der Dreiteilung des Winkels enthält, der wohl der einfachste Beweis überhaupt ist und sich sofort auf Lösungen kubischer Gleichungen verallgemeinern läßt. Während sich diese Kommentare im allgemeinen auf mehrere Arbeiten beziehen, gilt dies nicht für den Kommentar von P. L. Butzer und Eberhard L. Stark (der leider so früh verstorben ist) zur Arbeit Nr. 55. Dieser Kommentar, der dreimal so lang wie die kommentierte Arbeit ist, ist ein Essay über den Weierstrassschen Approximationssatz. Die Geschichte dieses Satzes wird sehr ausführlich behandelt und wird durch eine umfangreiche Bibliographie, die mehrere Seiten umfaßt, und die von E. Stark stammt, abgeschlossen. Eine ganz großartige Leistung. Durch diese überaus wertvollen Kommentare, hat die Herausgabe der Landauschen Abhandlungen eine überaus wertvolle Bereicherung erfahren. Die Lektüre auch dieses dritten Bandes, kann nur auf das wärmste empfohlen werden. Der dritte Band ist mit einem Photo geschmückt, das Landau mit Frau, Tochter Susanne und Mathematikerkollegen (z. B. Karl Menger) vor dem Metro-Goldwyn-Studio in Hollywood 1931 zeigt.

Wien

E. Hlawka

**Borel, A., et al., Intersection Cohomology** (Progress in Mathematics, Vol. 50), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1984, 248 pp., hard cover, DM 58,–

Eines der wesentlichen geometrischen Hilfsmittel für die topologische Untersuchung von Mannigfaltigkeiten  $X$  ist die Schnitttheorie: Das Schnittprodukt  $H_j(X) \times H_k(X) \rightarrow H_{n-(j+k)}(X)$  liefert für eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in komplementären Dimensionen ( $j + k = n$ ) modulo Torsion eine perfekte Paarung. Die der Paarung entsprechende Abbildung  $H_j(X) \rightarrow$

$\rightarrow H_{n-j}(X)^* \cong H^{n-j}(X)$  modulo Torsion ist ein Isomorphismus. Vielfach wird heute die umgekehrte Abbildung  $P_j(X) : H^{n-j}(X) \rightarrow H_j(X)$  betrachtet; dieser durch das Cap-Produkt mit der Fundamentalklasse definierte Homomorphismus ist ein Isomorphismus (Poincaréscher Dualitätssatz), und die Schnitttheorie übersetzt sich in Aussagen über das Cup-Produkt von Kohomologieklassen.

Beim Versuch, topologische Sätze von Mannigfaltigkeiten auf Räume mit Singularitäten zu übertragen, ergeben sich zahlreiche Probleme daraus, daß der Poincarésche Dualitätssatz nicht mehr gilt: Zykel, die durch den singulären Ort laufen, können nicht durch dazu transversale homologe Zykel ersetzt werden. Es sind mehrere Ansätze bekannt, dennoch zu einer brauchbaren Dualitätstheorie zu gelangen: Nimmt man einen Wechsel der Koeffizienten(garbe) in Kauf und ersetzt die Orientierungsgarbe durch den dualisierenden Komplex, so erhält man Dualitätsisomorphismen (Verdier-Dualität). – Die singuläre Poincaré-Dualität untersucht die Poincaré-Homomorphismen  $P_j : H^{n-j}(X) \rightarrow H_j(X)$ , die auch im singulären Fall bei unveränderten Koeffizienten existieren, und bringt Kern und Kokern mit der lokalen Homologie des Raumes in Beziehung. – Der Ansatz der Schnitttheorie von Goresky-MacPherson besteht darin, nur solche Ketten bei der Konstruktion der Homologie zuzulassen, deren Schnittverhalten mit dem singulären Ort kontrollierbar ist, wobei diese Kontrolle für das zulässige Maß der Nicht-Transversalität durch eine Toleranz  $\mathfrak{p}$  („perversity“) ausgedrückt wird. Für die Kontrollfunktionen gibt es eine natürliche Halbordnung „ $\leq$ “ zu der ein kleinstes Element  $\mathfrak{u}$  und ein größtes  $\mathfrak{t}$  existieren. Setzt man zusätzlich voraus, daß  $X$  normal ist, so entspricht in dem Spektrum so konstruierter Schnitttheorien  $I_{\mathfrak{p}}H(X)$  die Theorie  $I_{\mathfrak{u}}H(X)$  der Kohomologie  $H^{n-\cdot}(X)$  und  $I_{\mathfrak{t}}H(X)$  der Homologie  $H(X)$ . Für Toleranzen  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$  und  $\mathfrak{r}$  mit  $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} \leq \mathfrak{r}$  existiert ein natürliches Schnittprodukt  $I_{\mathfrak{p}}H_j(X) \times I_{\mathfrak{q}}H_k(X) \rightarrow I_{\mathfrak{r}}H_{n-(j+k)}(X)$ , das für  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = \mathfrak{r} = \mathfrak{u}$  mit dem Cup-Produkt und für  $\mathfrak{p} = \mathfrak{u}, \mathfrak{q} = \mathfrak{r} = \mathfrak{t}$  mit dem Cap-Produkt übereinstimmt. Für Toleranzen  $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$  existieren Vergleichshomomorphismen  $\mu_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} : I_{\mathfrak{p}}H(X) \rightarrow I_{\mathfrak{q}}H(X)$ , von denen  $\mu_{\mathfrak{u}\mathfrak{t}}$  gerade den Poincaré-Homomorphismus  $P(X)$  ergibt. – Natürlich hat man einen Preis dafür zu zahlen, daß die Schnitttheorie eine größere Nähe zur Geometrie aufweist als die singuläre Homologie: sie ist nicht funktoriell für die üblicherweise betrachteten Abbildungen, sie ist nicht homotopie-invariant etc.

Aus den angedeuteten geometrisch-topologischen Ansätzen ihrer „Kindertage“ hat die Theorie mittlerweile unter dem Einfluß der französischen Schule eine garbentheoretisch-axiomatische Ausprägung erfahren, die ihren Anwendungsbereich erheblich ausgeweitet hat. Es seien dazu einige Stichworte vorab erwähnt, da sie über den Rahmen des zu besprechenden Buches hinausgehen: Verschwindungssätze für Steinsche Räume, Lefschetzsätze,  $L^2$ -Kohomologie, topologische Eigenschaften algebraischer Abbildungen, Darstellungstheorie algebraischer Gruppen, D-Moduln.

Der vorliegende Bericht über das Seminar 1983 in Bern hat ein doppeltes Ziel: Einerseits will er in die ursprüngliche geometrische Konstruktion homologischer Art einführen, andererseits spannt er den Bogen zur auf Deligne zurückgehenden axiomatischen Charakterisierung als Hyperkohomologie eines geeigneten Komplexes von Garben. Denn, so wichtig die geometrische Intuition auch ist, die Schlagkraft der Theorie kann sich erst in Sprache und Technik der derivierten Kategorien voll entfalten.

Im Einzelnen bringt der Text folgende nur stichwortartig angedeutete Inhalte:

*Kapitel I* (Haefliger): Definition einer  $n$ -dimensionalen stratifizierten Pseudomannigfaltigkeit  $X$ : geometrische Einführung der Schnitttheorie auf PL-Pseudomannigfaltigkeiten, Hinweis auf grundlegende Eigenschaften und Berechnung im Falle isolierter Singularitäten.

*Kapitel II* (Habegger): Verhalten der Schnitttheorie beim Übergang von  $X$  zu  $X \times \mathbb{R}$  und bei der Bildung offener reeller Kegel. Als Konsequenz ergeben sich die für die axiomatische Beschreibung in Kapitel V entscheidenden Eigenschaften

- i) Normierung auf dem singularitätenfreien Teilbereich  $U_2$ ,
- ii) Verschwindungsbedingung auf dem Stratum  $S_{n-k}$  für  $j \geq p(k) + 1$ ,
- iii) Anheftungsbedingung auf  $S_{n-k}$  für  $j \leq p(k)$  für die Homologie  $H(I_p C_{n-\bullet})$  des Komplexes  $I_p C_{n-\bullet}$  der Schnittkohomologiegarben.

*Kapitel III* (Goresky-MacPherson): Explizite Berechnung der globalen und der lokalen Schnittkohomologie eines fünfdimensionalen Beispiels mit eindimensionalem singularären Ort.

*Kapitel IV* (A'Campo): Für reindimensionale komplexe Räume  $X$  wird skizziert: Erfüllt eine komplexe Stratifikation  $\mathfrak{X}$  auf  $X$  die Whitneybedingungen  $A$  und  $B$ , so macht  $\mathfrak{X}$  den Raum  $X$  zu einer stratifizierten Pseudomannigfaltigkeit.

*Kapitel V* (Borel): In diesem Herzstück des Berichtes geht es zunächst darum, die geometrische Konstruktion aus Kapitel I durch die Hyperkohomologie eines (bis auf Quasiisomorphie eindeutig bestimmten) Komplexes zu ersetzen. Dazu werden die einschlägigen Axiome Normierung, Verschwindungsbedingung und Anheftungsbedingung in mehreren (äquivalenten) Versionen erörtert. Besondere Sorgfalt wird auf die genaue Bedeutung des verwendeten Konstruierbarkeitsbegriffes („ $\mathfrak{X} - cc$ “) gelegt; dabei ergibt sich, daß die Benutzung dieser Eigenschaft eine Konstruierbarkeitsforderung an den Quasiisomorphietyp des Schnittkohomologiekomplexes obsolet macht. Es wird gezeigt, daß die Schnittkohomologie unabhängig von der Wahl der Stratifikation und daß die geometrische Konstruktion in Kapitel I unabhängig von der verwendeten PL-Struktur ist. – Da also die Schnittkohomologie wesentlich in der derivierten Garbenkategorie lebt, wird diese in dem erforderlichen Umfang eingeführt und diskutiert; für den neugierig gewordenen, an Genauerem interessierten Leser wird im letzten Paragraphen des Kapitels eine systematische Darstellung angeboten. – Nach einer mehr technischen Einführung in  $c$ -welke und in platte Garben wird der dualisierende Komplex  ${}_X D$  eingeführt und für eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und Garbenkomplexe  $A'$  auf  $X$  bzw.  $B'$  auf  $Y$  die Verdierdualität  $R Hom(Rf_! A', B') \cong Rf_* R Hom(A', f^! B')$  als zentrale Aussage bewiesen. Daraus ergibt sich dann die Bidualität auf einer Pseudomannigfaltigkeit  $X$ : Die Transformation  $S' \rightarrow D' D' S'$  ist ein Isomorphismus auf der derivierten Kategorie der beschränkten Garbenkomplexe, die  $\mathfrak{X} - cc$  sind. – Dieses Resultat läßt sich auf die Schnittkohomologie anwenden. Ist etwa  $L$  ein lokal konstanter Koeffizientenbereich über einem Körper  $K$  und die  $n$ -dimensionale Pseudomannigfaltigkeit  $X$  orientiert, so erhält man den Isomorphismus  $I_p H^j(X, L^*) \cong I_{t-p} H^{n-j}(X, L)^*$ .

*Kapitel VI* (Grivel) diskutiert ausführlich die zu einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  gehörenden Funktoren  $f_!$  (direktes Bild mit kompakten Trägern) und den „adjungierten“ Funktor  $f^!$ . Beide spielen eine entscheidende Rolle in der Verdierdualität aus Kapitel V.

*Kapitel VII* (Goresky) berichtet über Cobordismustheorie für die Klasse der Witträume. Dabei heißt eine Pseudomannigfaltigkeit ein Wittraum, wenn die untere mittlere Toleranz  $\mathfrak{m}$  und die obere mittlere Toleranz  $\mathfrak{n} = t - \mathfrak{m}$  auf  $X$  bezüglich  $\mathbf{Q}$  quasiisomorph sind. Wenn  $X$  nur Strata gerader Kodimension besitzt, dann ist das offensichtlich erfüllt. Auf einem kompakten Wittraum  $X$  definiert die Schnittform  $I_{\mathfrak{m}} H_j(X, \mathbf{Q}) \times I_{\mathfrak{m}} H_{n-j}(X, \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}$  eine nicht ausgeartete Bilinearform. Die Cobordismengruppe  $\Omega_j^W$  verschwindet für  $j \neq 0(4)$ ; für  $j = 4k$  definiert die Zuordnung der Schnittform auf  $I_{\mathfrak{m}} H_{2k}(X, \mathbf{Q})$  einen Isomorphismus von  $\Omega_{4k}^W$  auf die Wittgruppe  $W(\mathbf{Q})$ .

*Kapitel VIII* (Goresky-MacPherson) erörtert den Lefschetzschen Fixpunktsatz in der Schnittkohomologie. Dazu sei  $X$  eine rein  $n$ -dimensionale kompakte Pseudomannigfaltigkeit mit nur gerade-kodimensionalen Strata. Die Selbstabbildung  $f : X \rightarrow X$  sei „placid“ (d. h. kein Stratum wird von  $f$  auf ein niederdimensionales zusammengedrückt). Es wird gezeigt, daß die Diagonale  $\Delta$  von  $X \times X$  und der Graph  $\Gamma(f)$  Klassen in  $I_{\mathfrak{m}} H_n(X \times X, K)$  definieren, so daß deren Schnittpunkt existiert. Wie in der klassischen Theorie ergibt sich, daß  $\Gamma(f) \cap \Delta$  mit der Lefschetzzahl  $IL(f)$  übereinstimmt. Hat  $f$  nur isolierte Fixpunkte, so lassen sich die Beiträge der einzelnen Fixpunkte bestimmen.

*Kapitel IX* geht auf eine Reihe offener Probleme im Zusammenhang mit der Schnitt-homologie ein und bringt darüber hinaus eine ausführliche Bibliographie.

Das vorliegende Buch verbindet also in seinem Aufbau geometrische Motivation, harte technische Durchführung, interessante Anwendungen und den Einblick in offene Probleme. Der unvermeidliche Einstieg in die Theorie der derivierten Kategorien verläuft behutsam und problemorientiert; erst die Anhänge zwingen einen weiterfragenden Leser zur systematischen Beschäftigung. Zur inhaltlichen Fortführung der Schnitt-homologie selbst ist vor allem die Klärung der Konstruierbarkeitsfragen hervorzuheben. Es wäre erfreulich, wenn das Buch in der verwirrenden Vielfalt verwendeter Notationen als „Berner Konvention“ zu einer Vereinheitlichung führen würde. Das sorgfältig und klar geschriebene, übersichtlich und auch optisch schön gestaltete Buch eignet sich zum Einarbeiten in die Grundlagen dieser sich rasch entwickelnden Theorie, dient aber auch dem Fachmann für einschlägige Referenzen. Dennoch wäre ein Schlagwortverzeichnis dazu wünschenswert. Sicher wird der vorliegende Band einer faszinierenden Theorie weitere Freunde hinzugewinnen.

Konstanz

L. Kaup

**Iversen, B., Cohomology of Sheaves** (Universitext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1986, xi + 464 pp., DM 75,—

Die Kohomologie eines topologischen Raumes mit Koeffizienten in einer Garbe stellt ein wichtiges Hilfsmittel zum Studium geometrischer Probleme in vielen Gebieten der Mathematik dar. Hierfür seien als Beispiele die Algebraische Topologie, die Differentialgeometrie, die Funktionentheorie und die Algebraische Geometrie genannt. Ein Lehrbuch über dieses Gebiet sollte deshalb nicht alleine die Theorie der Garbenkohomologie darstellen, sondern möglichst viele Anwendungen liefern. Während dieser Aspekt bei den meisten bisherigen Büchern nicht genügend berücksichtigt wurde, enthält Iversens Buch viele Beispiele aus allen obengenannten Gebieten. Daneben ist das zentrale Thema die Poincaré-Verdier-Dualität auf lokal kompakten Räumen, und auch sie ist in dieser Form meines Wissens bisher nicht in Lehrbüchern erschienen.

Zum Inhalt im Einzelnen: In den ersten drei Kapiteln werden die Grundlagen der Homologischen Algebra, der Garbentheorie und der Kohomologie mit kompaktem Träger zusammengestellt. Bereits hier bleibt der Autor nicht im Abstrakten stecken, sondern berechnet unter anderem die Kohomologie des  $\mathbf{R}^n$  und der  $n$ -Sphäre. Als Anwendung ergibt sich zum Beispiel der Fundamentalsatz der Algebra. Kapitel 4 enthält Anwendungen aus der Analysis. Es werden auf elegante Weise die wesentlichen Sätze eines Grundkurses über Funktionentheorie bewiesen sowie einige Differentialgleichungen und natürlich der Satz von de Rham behandelt. Kapitel 5 bis 7 enthält Dualitätssätze in verschiedener Form. Grundlage ist die Verdier-Dualität mit Koeffizienten in einem noetherschen Ring sowie in ihrer relativen Form als Aussage über die Funktoren  $f^!$  und  $f_!$ . Spezialfälle hiervon sind Poincaré-, Alexander- und Lefschetz-Dualität. Als Folgerungen ergeben sich Beweise des Residuensatzes für  $(n - 1)$ -Formen auf  $\mathbf{R}^n$  und des Jordan-Brouwerschen Separationssatzes für  $\mathbf{R}^n$ . Die Kapitel 8 bis 10 enthalten Anwendungen für die Algebraische Topologie, nämlich die Theorie der charakteristischen Klassen und die Borel-Moore-Homologie, und für die Algebraische Geometrie, nämlich eine Einführung in die (topologische) Schnitttheorie. Hierbei ist der Einfluß des Buches von Fulton deutlich spürbar. Im letzten Kapitel werden im Stile eines Appendixes die im Buche benötigten Ergebnisse über derivierte Kategorien bewiesen.

Beeindruckend ist, daß sehr viel Stoff auf verhältnismäßig wenig Raum untergebracht ist. (Man beachte, daß das Buch nicht gesetzt, sondern photomechanisch reproduziert wurde und dementsprechend nicht viel Text auf einer Seite erscheint.) Ermöglicht wird das durch eine

sehr gute Organisation: die Ergebnisse bauen stark aufeinander auf. Zweitens werden viele Beweisschritte dem Leser überlassen. Da das aber immer die einfachen sind, möchte ich die Beweise als vollständig bezeichnen. Drittens, und das kann man auch negativ interpretieren, wird die Kürze auf Kosten der historischen Erläuterungen und der erklärenden Literaturangaben erreicht.

Zu den Beweisen ist zu sagen, daß Spektralsequenzen nicht benutzt werden. Die vorherrschende Beweistechnik ist, die Aussagen über Garben auf Aussagen über Komplexe von Garben zu verallgemeinern beziehungsweise als solche zu interpretieren und dann die Kohomologiegruppen als Gruppen von Homotopieäquivalenzklassen von Abbildungen zwischen Komplexen aufzufassen. In einem geringen Maße wird auch die Technik der derivierten Kategorien verwendet.

Die nun folgende Kritik ist in der Zeit der schnellen Publikationen leider fast schon üblich geworden: Obwohl der Autor sehr viel Zeit für die fachliche Zusammenstellung des Textes benötigt haben muß, wurde der Text zum Schluß anscheinend nicht mehr Korrektur gelesen. Wie anders ist es zu erklären, daß eine Seite im Durchschnitt ein bis zwei Druckfehler enthält, ja daß sogar ganze Seiten vertauscht sind (z. B. die Seiten 317 und 318). Da jedoch der Inhalt wichtiger ist als die Form, fällt das bei der Qualität des Buches nicht zu sehr ins Gewicht: Zusammenfassend möchte ich das Buch wärmstens empfehlen. Es wird sicher zumindest für den Bereich der Algebraischen Geometrie zu den Standardreferenzen zählen.

Erlangen

H. Lange

**Grauert, H., Remmert, R., Coherent Analytic Sheaves** (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 265), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer 1984, xi, 249 pp., cloth, DM 128,—

Die komplex-analytische Geometrie sieht heute – nach einer längeren Entwicklungsphase der Begriffsbildungen im Dialog mit der algebraischen Geometrie – ihre Grundlagen in der Sprache der komplexen Räume, der kohärenten analytischen Garben, deren Kohomologie, sowie in einer Reihe von Theoremen über diese, die zum Teil erheblichen Aufwand erfordern. Dieser ist in einigen Fällen wie z. B. dem der Kohärenz von Bildgarben bei eigentlichen Abbildungen ungleich größer als in der algebraischen Geometrie. In dem vorliegenden Buch werden diese Grundlagen konsistent dargestellt bzw. bewiesen.

Obwohl unter dem Titel „Coherent Analytic Sheaves“ erschienen, liegt es in der Natur der Sache, daß es gleichzeitig ein Buch über komplexe Räume ist, indem es alle wichtigen Grundlagen über diese mitentwickelt. Zu seinen Schwerpunkten gehören die Beweise zur Oka- und Cartan-Kohärenz, die Beschreibung analytisch verzweigter Überlagerungen, die Beweise für die Existenz der Normalisierung komplexer Räume und last but not least des Grauert'schen Bildgarbensatzes.

Nach einer Einführung im 1. Kapitel in die Sprache der komplexen Räume, wie sie heute üblich ist, führt das 2. Kapitel vom Weierstraß'schen Vorbereitungssatz zum Beweis der Oka-Kohärenz und zur ausführlichen Behandlung der endlichen holomorphen Abbildungen im 3. Kapitel. In die Theorie der endlichen Abbildungen eingebettet ist auch die lokale Beschreibung der analytischen Mengen des  $\mathbf{C}^n$ , die eigentlich am Anfang der komplex-analytischen Geometrie stehen sollte. Nachdem sich aber die Begriffe des komplexen Raumes und der kohärenten Garbe als maßgeblich erwiesen haben, ist es ökonomischer, auch die ursprünglichen Dinge zu subsummieren. Das dient nicht zuletzt auch der Klarheit nach dem heutigen Stand. So erscheint auch der Fortsetzungssatz für analytische Mengen von R. Remmert – K. Stein als ein Korollar der globalen Theorie komplexer Räume im 9. Kapitel. Im 4. Kapitel wird wie üblich mit der lokalen Beschreibung der analytischen Mengen die Kohärenz ihrer Idealgarben

bewiesen. Im 5. ist dann in sehr klarer Weise die Dimension komplexer Räume behandelt, wobei sich der Begriff der aktiven Funktion als sehr hilfreich erweist. Ein breiter Raum einschließlich der Vorbereitungen ist den Normalisierungsfragen in den Kapiteln 6–8 (53 Seiten) gewidmet. Die meromorphen Funktionen und die Normalisierungsgarbe werden mit großer Sorgfalt behandelt, es werden analytische Überlagerungen analysiert und in dieser Sprache Eigenschaften und die Existenz von Normalisierungen hergeleitet. Im 9. Kapitel ergeben sich die globalen Eigenschaften komplexer Räume und ihre irreduziblen Zerlegungen dann sehr elegant.

Ein bedeutender Teil des Buches schließlich ist dem Beweis des Bildgarbensatzes bei eigentlichen holomorphen Abbildungen gewidmet, dem schwierigsten der im Buch behandelten vier Kohärenzsätze. Der Beweis orientiert sich an dem zehn Jahre nach dem Originalbeweis von H. Grauert gelieferten Beweis von O. Forster – K. Knorr. Die Fülle der Anwendungen des Bildgarbensatzes kann weder hier noch in dem Buch beschrieben werden. Aber als Hinweis auf die Anwendungsmöglichkeiten werden im 10. Kapitel die Vergleichssätze bei Deformationen kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten behandelt, wie auch Modifikationen komplexer Räume und die Stein-Faktorisierung. Auch der Satz von W. Thimm, C. L. Siegel, R. Remmert über die algebraische Abhängigkeit meromorpher Funktionen findet sich unter den Anwendungen.

Begriffssprache und Beweisgänge sind sehr übersichtlich und nach dem neueren Stand der Theorie durchorganisiert. Dies hat natürlich auch dazu geführt, daß der Aufbau nicht mehr unbedingt dem historischen entspricht, dafür aber viel eleganter geworden ist. In der Organisation der Beweise bemerkt man auf Schritt und Tritt Verbesserungen und Vereinfachungen der ursprünglichen. Sehr angenehm für die Lektüre wirkt sich das Verhältnis zwischen Erläuterungen und Formalismen aus. Fast vor jedem Abschnitt finden sich erläuternde Bemerkungen über den folgenden Vorgang und seine Bedeutung, während die Autoren es verstanden haben, den Bezeichnungsapparat so übersichtlich und so frei von unnötigen Symbolen wie möglich zu halten, und trotzdem sorgfältig zu verfahren. Gelegentlich sind historische Bemerkungen eingestreut.

Das vorliegende Buch ergänzt die beiden anderen Bände der Autoren über „Analytische Stellenalgebren“ und „Theory of Stein-Spaces“, die ebenfalls in der Springerschen Grundlehren-Reihe erschienen sind, zu einer Trilogie. Während die „Stellenalgebren“ algebraische Grundlagen für die Halme der Strukturgarben und Moduln über diesen bereitstellt, ergänzt sich das neuere Buch hauptsächlich mit der „Theory of Stein Spaces“. Während nun die fundamentalen Sätze für das Traktat über Steinsche Räume bereitstehen, wird andererseits das ebenfalls fundamentale Theorem B für Steinsche Räume in diesem Buch mehrfach benötigt. Trotzdem ist jedes Buch für sich lesbar, die gegenseitigen Ergänzungen und auch auftretenden Überschneidungen sind nur von Vorteil. Aber obwohl die „Coherent Analytic Sheaves“ als letzte erschienen sind, sollten sie nun zuerst gelesen werden.

Die „Coherent Analytic Sheaves“ stellen eine längst fällige zusammenfassende Aufbereitung der Basics der komplex-analytischen Geometrie dar. Sie ergänzen damit auch die Lecture Notes „Complex Analytic Geometry“ von G. Fischer und die beiden Bände „Méthodes algébriques dans la théorie globale des espace complexes“ von C. Banica – O. Stanasila, Gauthier-Villars, indem sie weitere Grundlagen und dort nicht bewiesene Sätze bereitstellen, und sie machen eine Reihe von Vorlesungsausarbeitungen überflüssig.

Die Lektüre des Buches verlangt als Voraussetzungen Grundkenntnisse über holomorphe Funktionen in mehreren Veränderlichen, sowie elementare Dinge aus der kommutativen und homologischen Algebra. Es ist deshalb bereits für Studenten gut lesbar. Diese sollten jedoch gut durch Beispiele motiviert sein, denn diese treten bei der Auslegung des Stoffes in den Hintergrund. Andererseits stellt das Buch für den Experten eine willkommene und übersichtliche Aufbereitung seiner Grundlagen dar, und in den Beweisen finden sich viele wertvolle Details.

**Henkin, G. M., Leiterer, J., Theory of Functions on Complex Manifolds** (Monographs in Mathematics, vol. 79), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1984, 226 pp., hard cover, DM 79,—

Dies ist eine Monographie über Funktionen auf komplexen Mannigfaltigkeiten, nicht über das viel weitere Gebiet der Funktionentheorie in mehreren Veränderlichen. Es ist ein Buch der Analysis: Begriffe, die der Algebra, Geometrie oder Topologie näher liegen, werden nicht behandelt. Das Hauptthema bilden Integraloperatoren, die auf Räumen von Funktionen (oder Differentialformen) wirken. Definitionsbereiche dieser Funktionen sind offene Mengen in  $\mathbb{C}^n$  oder (allgemeiner) in steinschen Mannigfaltigkeiten. Die Methode ist im Prinzip konstruktiv; das ist mühsam, bringt aber wertvolle Ergebnisse, oft Abschätzungen, die man anders nicht gewinnen konnte.

Vom Leser werden nur Kenntnisse aus der reellen Analysis und Grundlagen der Funktionentheorie einer Veränderlichen vorausgesetzt. Die Grundbegriffe der mehrdimensionalen Funktionentheorie werden im ersten Kapitel entwickelt.

Worum geht es nun bei den untersuchten Integraloperatoren? Für eine Veränderliche hat Pompeiu 1904 die Cauchy-Greensche Integralformel angegeben: Ist  $D$  eine beschränkte, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^1$  mit glattem Rand  $\partial D$  und  $f$  eine  $C^1$ -Funktion in einer Umgebung von  $\bar{D}$ , so ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_D \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

für alle  $z \in D$ . (Es bezeichne  $\bar{\partial}$  die äußere Differentiation nach  $\bar{\zeta}$ :  $\bar{\partial} f(\zeta) := \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta}$ .) Ist  $f$  holomorph, also  $\bar{\partial} f = 0$ , so ist dies die Cauchysche Integralformel. Pompeius Formel wird zu mannigfachen Integraldarstellungen auf  $n$ -dimensionalen, relativ-kompakten, offenen Mengen  $D$  verallgemeinert.

Eine unmittelbare Übertragung auf glatt berandete  $D \subset \mathbb{C}^n$  ist die Formel von Bochner-Martinelli; allgemeiner ist die Leraysche Integralformel, in die eine weitgehend frei wählbare Abbildung  $w(z, \zeta)$  eingeht. Eine ähnliche Integraldarstellung für alternierende Differentialformen ist die Koppelman-Leraysche Formel. Ist  $D$  strikt pseudokonvex, so kann man daraus Integraloperatoren  $T_q$  für Differentialformen  $f$  vom Bigrad  $(0, q)$  bei  $\bar{D}$  (also  $f = \sum a_{i_1 \dots i_q}(z) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_q}$ ) gewinnen ( $q \geq 1$ ), derart, daß stets  $f = \bar{\partial} T_q f + T_{q+1} \bar{\partial} f$  ist. Wie man sieht, ist  $u := T_q f$  eine Lösung der sog.  $\bar{\partial}$ -Gleichung  $\bar{\partial} u = f$ , falls die Integrabilitätsbedingung  $\bar{\partial} f = 0$  erfüllt ist. Um solche Ergebnisse auch bei nicht glattem Rand zu erhalten, ersetzt man die Oberflächenintegrale durch Volumenintegrale. Die Theorie wird weiter auf Teilmengen  $D$  beliebiger steinscher Mannigfaltigkeiten ausgedehnt; an die Stelle der oben genannten Funktionen  $\zeta - z$  und  $w(z, \zeta)$  treten jetzt Schnitte im Tangentialbündel von  $D$ . Für analytische und andere strikt pseudokonvexe Polyeder  $D$  werden besondere Integralformeln hergeleitet, die die klassische Integralformel von A. Weil als Spezialfall einschließen; hier braucht nur über einen Teil von  $\partial D$  integriert zu werden. Schließlich werden auch Differentialformen mit Werten in Vektorbündeln behandelt, was z. B. gestattet, alle Überlegungen auf Differentialformen von beliebigem Bigrad  $(p, q)$  anzuwenden. Es werden auch wichtige Anwendungen gebracht, so die Lösung des Levi-Problems in steinschen Mannigfaltigkeiten, die Charakterisierung der steinschen Mannigfaltigkeiten durch die Existenz strikt plurisubharmonischer Ausschöpfungsfunktionen, Sätze über holomorphe Approximation stetiger Funktionen auf pseudokonvexen kompakten Mengen und über die beschränkte holomorphe Fortsetzung auf strikt pseudokonvexe offene Mengen von Untermannigfaltigkeiten aus.

Das Studium dieses Gebietes kostet viel Mühe. Zum Beispiel erfordern schon die Definitionen der Integraloperatoren komplizierte Formeln. Umso mehr sind die Verfasser zu bewundern, die es verstanden haben, durch einen klaren Aufbau, geschickte Bezeichnungen und prä-

zise, aber nicht umständliche Formulierungen das Wesentliche der einzelnen Sätze ebenso zu vermitteln wie einen Überblick über die ganze Theorie. Dazu verhelfen Zusammenfassungen zu Beginn jedes Kapitels, einführende Bemerkungen in den Paragraphen und die gesonderte Behandlung einiger Ungleichungen in einem Anhang. Jedes Kapitel schließt mit historischen Bemerkungen und einer Zusammenstellung weiterer interessanter Sätze und Probleme, die neben der Hauptlinie des Werkes liegen. Laufend informieren Hinweise auf das umfangreiche Literaturverzeichnis über die Herkunft der einzelnen Ergebnisse.

Mit der einheitlichen Behandlung der Integralformeln der komplexen Analysis ist den Autoren ein wichtiges Werk gelungen. Die Theorie, die großenteils von ihnen selbst stammt, hat ihre Bedeutung erst in den Siebzigerjahren gezeigt. Man konnte sie bisher nur in den Originalarbeiten finden; von den Lehrbüchern geht lediglich S. G. Krantz' „Function Theory of Several Complex Variables“, New York u. a. 1982, näher auf Integraldarstellungen ein. Die Monographie von Henkin und Leiterer wird daher für jeden an diesem Gebiet interessierten Mathematiker unentbehrlich sein.

München

K. Wolffhardt

**Jank, G., Volkmann, L., Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen**, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1985, 256 S., geb., DM 68,—

Eine erste Zusammenfassung der Ergebnisse über die Anwendung der Werteverteilungslehre meromorpher Funktionen auf Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen findet man in dem Buch von H. Wittich, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, von 1955. In den vergangenen dreißig Jahren haben, nicht zuletzt angeregt und gefördert von H. Wittich, diese Untersuchungen viele interessante Resultate hervorgebracht. Es war ein Anliegen der Autoren dieser Entwicklung in Form eines Lehrbuches gerecht zu werden. Dies ist Ihnen vollständig gelungen.

Das Studium dieses Buches setzt an Vorkenntnissen über die Analysis hinaus nur den Inhalt einer Vorlesung Funktionentheorie I voraus. Im Kapitel I werden die elementaren Eigenschaften ganzer Funktionen zusammengestellt, wozu u. a. auch der Zentralindex ganzer Funktionen wegen seiner Anwendung auf algebraische Differentialgleichungen gehört. Das zweite Kapitel behandelt die Nevanlinnaschen Hauptsätze für meromorphe Funktionen. Kapitel III ist der iterierten Wachstumsordnung und damit zusammenhängenden Fragen gewidmet. In diesem Teil findet man u. a. viele Ergebnisse, die ursprünglich auf die beiden Autoren zurückgehen und Verallgemeinerungen der klassischen Resultate sind. Im Kapitel IV wird ein noch allgemeinerer Ordnungsbegriff zu Grunde gelegt, den man A. Schönhage verdankt. Er dient der Untersuchung des Wachstumsverhaltens zusammengesetzter Funktionen. Das fünfte und letzte Kapitel enthält nun die Anwendung der Theorie meromorpher Funktionen auf gewöhnlichen Differentialgleichungen. Schon sein Umfang – etwa ein Drittel des gesamten Buches – zeigt die Vielfalt der Ergebnisse, die hier vorgestellt werden. Im Vordergrund stehen hier die Untersuchungen über lineare und binomische Differentialgleichungen mit besonderer Berücksichtigung der Riccati-schen Differentialgleichung.

Wie schon im Vorwort erwähnt, war es nicht das Ziel der Autoren, alle inzwischen gewonnenen Erkenntnisse vollständig und ausführlich darzustellen; dies würde zweifellos den Rahmen eines Lehrbuches sprengen. Der Wert dieses Buches liegt in der sorgfältigen und einheitlichen Wiedergabe wichtiger Themen aus der Theorie meromorpher Funktionen und deren Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Dafür gebührt den Autoren Dank. Daß der Leser an die neueste Literatur herangeführt wird, ist selbstverständlich. Ebenso wenig fehlen



die Hinweise auf die nicht explizit vorgestellten Resultate und Probleme. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis – mehr als 200 Literaturstellen werden nachgewiesen – beschließt dieses erfreuliche und sicherlich auch wünschenswerte Lehrbuch für alle Freunde der klassischen Theorie meromorpher Funktionen.

Dortmund

G. Frank

**Deimling, K., Nonlinear Functional Analysis**, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer 1985, XIV, 450 pp., hard cover, DM 98,–

Unter Eingeweihten sprach man schon seit Jahren darüber, daß sich in Herrn Deimlings Schublade ein gewichtiges Manuskript über nichtlineare Funktionalanalysis befände, und einigen Auserwählten war es sogar vergönnt gewesen, einen Blick hineinzuzwerfen. Nun besteht an Büchern zu diesem Thema kein Mangel; erwähnt seien nur

Schwarz, J.: *Nonlinear functional analysis*, New York: Gordon & Breach, 1969.

Martin, R. H.: *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*. New York: Wiley 1976.

Berger, M. S.: *Nonlinearity and functional analysis*. New York: Academic Press 1977.

Zeidler, E.: *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis*, 3 Bände. Leipzig: BSB B. G. Teubner 1976–1978.

Hinzufügen müßte man eigentlich noch ein paar brauchbare und etliche unbrauchbare Bücher über Fixpunkttheorie. Nun liegt uns dies neue opus magnum vor, und es ist wahrhaftig durch keines der genannten Bücher zu ersetzen. Im Gegensatz zu Schwarz ist dieses Buch durch und durch zuverlässig – selbst in Kleinigkeiten, anders als bei Martin ist die Darstellung nicht einseitig an Differentialgleichungen ausgerichtet, obwohl ihnen die Vorliebe auch dieses Autors gilt, was die Darstellung erfolgreich vor dem Abgleiten in abseitige Abstraktionen bewahrt. Auch haben wir es mit einem sorgfältig durchformulierten Text zu tun, während Zeidler nur Stichworte statt vollständiger Sätze bietet. Berger (offen gesagt, der Favorit des Rezensenten) verwendet alles an Technik, was gut und modern ist, unser Autor dagegen legt größtes Gewicht darauf, stets mit elementaren Methoden auszukommen. Vorsichtigerweise spezifiziert er allerdings nie, welche Vorkenntnisse er genau erwartet. Im Vorwort erweckt er den Eindruck, es reiche aus, wenn man sich Funktionen als Elemente eines Raumes vorstellen könne. Realistischerweise sollte ein Leser allerdings je einen Kurs über Funktionalanalysis und Topologie überstanden haben, wenn er denn in der Lage sein soll, die Originalliteratur durchzuarbeiten, auf die ihn der Autor statt eines Beweises gelegentlich verweist, oder wenn er auf p. 357 einsehen soll, daß „by general results on coverings and fibrations such a lifting exists“.

Nun hat schon Schwarz (op. cit.) festgestellt „nonlinear functional analysis is of course not so much a subject, as the complement of another subject, namely, linear functional analysis“. Dennoch besteht eine bemerkenswerte Übereinstimmung darüber, was man in einem Buch zu diesem Thema finden sollte: zum mindesten die Theorie des Abbildungsgrades, etwas über monotone Operatoren und nach Möglichkeit Verzweigungstheorie. Dies und vieles andere bietet das vorliegende Buch. Im einzelnen findet man zunächst eine ungewöhnlich gründliche Einführung in die Theorie des Abbildungsgrades (für kompakte und verdichtende Abbildungen). Hervorgehoben sei der adäquate Beweis für den Satz von Borsuk. Hingegen stellt der Autor wohl die Historie auf den Kopf, wenn er (p. 4) behauptet, der topologische Zugang zum Abbildungsgrad sei der ältere. Der Eindruck, daß die analytische Methode moderner sei, entsteht wohl durch die Vielzahl elementarer Einführungen, wo man mit Analysis tatsächlich gut bedient ist. Monotone und akkretive Abbildungen trifft man zum ersten Mal im dritten Kapitel. Wie in allen Kapiteln findet man auch hier wirkliche Anwendungen (und nicht ad hoc fabrizierte Beispiele) sowie eine Fülle zum Teil höchst origineller Übungsaufgaben. Es ist wirklich faszinierend, was

der Autor hier zusammengetragen und so aufbereitet hat, daß es im Anschluß an den Text tatsächlich zu bewältigen ist.

Kapitel 4 beginnt zunächst ganz hausbacken mit dem Satz über implizite Funktionen, führt dann aber über die „harte“ Version dieses Satzes zu einer vorbildlichen Diskussion des Problems der kleinen Nenner. In Kapitel 5 über Fixpunkttheorie zeigt sich der Verfasser von der unterhaltsamen Seite. Seit seiner Karlsruher Antrittsvorlesung ist er immer wieder durch pointierte Meinungen aufgefallen – so auch hier in dem Abschnitt „some descendants of Banach“. Hier streift er nur kurz die mathematische Nonsense-Literatur zum Kontraktionsprinzip und legt sich dann mit einem Altmeister und notorischen Vielschreiber an (auch einige deutsche Kollegen werden die Beschreibung ihrer bahnbrechenden Verallgemeinerungen in einem späteren Kapitel nicht goutieren). Besonders gefallen hat dem Rezensenten die lichtvolle Behandlung der nichtexpandierenden Abbildungen. Hier zeigt der Verfasser, wie man ausgehend vom Banachschen Kontraktionssatz zwangsläufig auf den Begriff der normalen Struktur geführt wird. Das Kapitel schließt mit Fixpunktsätzen unter Kompaktheitsvoraussetzungen. Die beiden folgenden Kapitel befassen sich mit Fixpunktsätzen in Kegeln und Näherungslösungen (hauptsächlich A-eigentliche Abbildungen). Im achten Kapitel („Multis“) wendet sich der Verfasser etwas widerstrebend dem „totally overemphasized multivalued stuff“ zu, was zu interessanten Ergänzungen des Kapitels über monotone Abbildungen führt. Mit den „Multis“ ist der Grund gelegt für ein Kapitel, das man in solch einem Buch gar nicht erwarten würde. Hier wird eine knappe und kompetente Einführung in die konvexe Analysis geboten, die nach wenigen Seiten zu Extrema mit Nebenbedingungen und der Theorie der kritischen Punkte (Lusternik-Schnirelman-Kategorie) führt. Das Buch schließt (wenn wir den Epilog ignorieren) mit einem besonders schönen Kapitel über Verzweigungstheorie. Der Verfasser beginnt mit lokaler Theorie, kommt dann zur globalen (wo wir eine gute Darstellung des Satzes von Rabinowitz finden) und gelangt bis zur Hopf-Verzweigung. In dieses Buch ist wirklich eine ungeheure Fülle an Material eingearbeitet, und die Vielzahl neuester Arbeiten läßt vermuten, daß der Autor den Text bis zum letzten Moment ergänzt und umgearbeitet haben muß. Dabei sind Darstellung und Stil stets einheitlich geblieben. Auch hat der Rezensent trotz hartnäckiger Suche keinen Fehler finden können.

Ein paar Fragen an den Verlag bleiben allerdings: Warum wird ein Buch in dieser hervorragenden technischen Ausstattung nicht anständig lektoriert? Den abscheulichen adjektivischen Gebrauch von „onto“ könnte man noch dem Mathematikerslang zurechnen. (Allerdings war dem Verfasser in seinem schönen Hochschultext über Abbildungsgrade noch das Wort „surjektiv“ geläufig. Sollte das Gesamthochschulmilieu dem elaborierten Code abträglich sein?) Der falsche Gebrauch von „hopefully“ gereicht einem hochsprachlichen Text (und das in einem Buch, das laut Vorwort in „(sometimes too) proper English“ abgefaßt sein soll!) auch nicht zur Zierde. Wie der BBC-Guide „The spoken word“ ausweist, hat keine Sprachschlamperei derartiger viele Proteste hervorgerufen wie der Gebrauch von „hopefully“ als „hoffentlich“. Ein Lektor alter Schule hätte dem Autor sicher auch die manierierte Idee ausgeredet, seinen Text als imaginäres Zwiegespräch mit dem Leser zu arrangieren. Solange man nur die Einleitungen der Kapitel liest, ist das ganz unterhaltsam. Bei konzentrierter Lektüre kann es dem Leser aber auf die Nerven gehen, sich ständig angeredet zu finden. Hinwiederum wird sich Roger Nussbaum nicht freuen, wenn er sich vom Verlag (p. 32 et passim) als Nußbaum regermanisiert findet. Abgesehen von diesen Quisquilien fragt man sich, warum dies Buch keinen Platz in einer Reihe des Springer Verlages gefunden hat – dabei hätte es selbst der renommiertesten Reihe gut zu Gesicht gestanden.

**König, H., Eigenvalue Distribution of Compact Operators** (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 16), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1986, 262 pp., hard cover, DM 78,-

Es sei  $\Omega$  ein Gebiet im euklidischen Raum  $\mathbb{R}_n$ . Seit vielen Jahrzehnten werden Integraloperatoren

$$(T_k f)(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y)dy, \quad x \in \Omega,$$

betrachtet. Neben qualitativen Aussagen, wie Kompaktheit und Stetigkeit von  $T_k$  als Abbildung zwischen Funktionenräumen, interessiert man sich insbesondere für die Verteilung der Eigenwerte  $\{\lambda_i\}$  von  $T_k$ . Eine typische Fragestellung lautet: Welche Eigenschaften muß der Kern  $k(x, y)$  besitzen, damit  $\{\lambda_i\}$  zu  $l_p$  mit  $0 < p < \infty$  gehört? Naturgemäß wurden Fragen dieser Art zuerst in Hilberträumen untersucht. Die Ausdehnung dieser Betrachtungen auf Banachräume führte im letzten Jahrzehnt zu umfangreichen eigenständigen Theorien, die jetzt einen gewissen vorläufigen Abschluß erreicht zu haben scheinen. Losgelöst von der konkreten Gestalt der Integraloperatoren wurden quantitative Eigenschaften stetiger Operatoren zwischen Banachräumen untersucht. Die Stichworte lauten: Operatorenideale,  $s$ -Zahlen, Durchmesser (Kolmogorov, Gelfand, Weyl), Entropie-Zahlen usw. Eine Kernfrage lautet: Was kann bei Kenntnis der Durchmesser, Entropie-Zahlen usw. über die Verteilung der Eigenwerte der betrachteten Operatoren gesagt werden (Weylsche Ungleichung)? Wesentliche Beiträge zur abstrakten Theorie stammen von A. Pietsch (Jena), B. Carl (Jena) und dem Autor des Buches. Es entsteht die Frage, wie die Resultate der abstrakten Theorie auf Integraloperatoren angewandt werden können, insbesondere auf die Frage nach der Verteilung der Eigenwerte. Hierbei hat sich die Sprache der Sobolev-Besov-Räume (mit dominierenden gemischten Glattheitseigenschaften) als angemessen erwiesen.

Das Buch von H. König behandelt den genannten Problemkreis. Es umfaßt 4 Kapitel. Im ersten Kapitel (Banach spaces and operators) werden Eigenschaften von Operatoren in Banachräumen,  $s$ -Zahlen, Operatorenideale und klassische Banachräume untersucht. Kapitel 2 (Eigenvalues of operators on Banach spaces) behandelt die abstrakte Theorie: Weylsche Ungleichung,  $s$ -Zahlen, Entropie-Zahlen, aber auch Interpolation von Operatorenidealen. Kapitel 3 (Eigenvalue distribution of integral operators) wendet die Resultate aus Kapitel 2 auf Integraloperatoren an. Hierbei spielen vektorwertige Sobolev-Besov-Räume eine Rolle. Das abschließende kurze Kapitel 4 (Further applications) enthält Untersuchungen über Spuren und Projektionskonstanten.

Das Buch ist gut geschrieben und gibt einen vorzüglichen zusammenfassenden Einblick in den derzeitigen Stand der Theorie. Beim Leser werden lediglich Grundkenntnisse der Funktionalanalysis vorausgesetzt. Insbesondere das erste Kapitel genügt dem Anspruch, als Vorlage für Seminare dienen zu können.

Bemerkung 1. Wie von H. König hervorgehoben, wurde ein nicht unwesentlicher Anteil dieser Theorie in Jena, insbesondere von A. Pietsch und B. Carl, entwickelt. Ende 1986/Anfang 1987 erscheint das Buch von A. Pietsch „Eigenvalues and  $s$ -numbers“, in dem ebenfalls ein Teil dieser Theorie dargestellt wird.

Bemerkung 2. Die Verwendung vektorwertiger Sobolev-Besov-Räume zur Behandlung von Integraloperatoren ist üblich. Die Übertragung von Eigenschaften des skalaren Falles auf den vektorwertigen Fall ist aber eine sehr delikate Angelegenheit. Eine weitgehende Klärung dieser Frage findet man in einem Übersichtsartikel von H.-J. Schmeisser (Seminar Analysis. Leipzig: BSB B. G. Teubner 1987).

**Young, R. M., An Introduction to Nonharmonic Fourier Series** (Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 93), New York – London: Academic Press 1980, x, 246 pp., \$ 32.00

Das systematische Studium nichtharmonischer Fourier-Reihen, d. h. Reihen der Form  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n x}$ , wurde von Paley und Wiener 1934 begonnen. Ihre Motivation war eine Arbeit von G. D. Birkhoff über Sturm-Liouville-Reihen. Paley und Wiener kannten schon die engen Beziehungen zwischen Vollständigkeitseigenschaften von Funktionensystemen der Form  $(e^{i\lambda_n x})$  in  $L^2[-\pi, \pi]$  und funktionentheoretischen Räumen, insbesondere den exponentiell wachsenden ganzen Funktionen, und deren Interpolationseigenschaften. Heute treten daneben Beziehungen zur Theorie der Schauder-Basen in Banachräumen, der kompakten Operatoren, zur Spektraltheorie und zu funktionalen Hilberträumen. Das vorliegende Buch ist eine sehr gelungene Einführung in diesen Themenkreis.

Das Buch besteht aus 4 Kapiteln, einem 24-seitigen Kommentar über die historische Entwicklung der Theorie, einem Literaturverzeichnis sowie einer Symbol-, Autoren- und Schlüsselwortliste. Kapitel 1 beschreibt den funktionalanalytischen Hintergrund: Schauder-Basen, reproduzierende Kerne, Riesz-Basen, das Paley-Wienersche Stabilitätskriterium und zwei seiner Folgerungen – Stabilitätssatz von Krein-Milman-Rutman und Kadec's 1/4-Satz.

Das Kapitel 2 besteht aus dem funktionalanalytischen Hintergrund: Weierstraß- und Hadamard-Faktorisierung, Phragmen-Lindelöf'sches Maximumprinzip, Jensens und Carlemans Nullstellenformeln, ganze Funktionen von exponentiellem Wachstum, Paley-Wiener Raum.

Mit Kapitel 3 beginnt der Hauptteil des Buches. Es behandelt die Vollständigkeit und Stabilität von Systemen komplexer Exponentiale: Levinsons Vollständigkeitsbedingung, Redheffer's und Elsners Stabilitätssätze und Levinsons Beziehung zwischen dem Vollständigkeitsradius und der Polyaschen Dichte der Frequenzenfolge  $(\lambda_n)$ . Die diesbezüglichen tiefen Arbeiten von Beurling und Malliavin (1967) werden zitiert, sind aber nicht in das Buch aufgenommen.

Kapitel 4 schließlich widmet sich dem Hilbertraum, speziell  $L^2(-\pi, \pi)$ , und behandelt die Beziehungen zwischen Bessel-Folgen (deren Momenten-Raum ein Teilraum von  $\ell^2$  ist), Riesz-Fischer-Folgen (deren Momenten-Raum  $\ell^2$  enthält), Riesz-Basen (Basen isomorph zu einer Orthonormal-Basis) und der Interpolation ganzer Funktionen. Eine besondere Rolle spielt dabei der Paley-Wiener-Raum, der über seinen reproduzierenden Kern eine reiche Struktur in den Hilbert-Raum trägt. Als Anwendungen ergeben sich Duffin und Schaeffer's Stabilitätssatz und Youngs Verbesserung des Kadec'schen 1/4-Satzes. Das Buch schließt mit einer Behandlung des Äquikonvergenzsatzes über nichtharmonische Fourier-Reihen.

Das Buch ist sehr sorgfältig geschrieben und gut gegliedert. Darüber hinaus ist es mit vielen Übungsaufgaben angereichert, die teilweise die Theorie fortsetzen. Es kann jedem, der sich in diese Theorie einarbeiten möchte, nur empfohlen werden.

Passau

G. Ritter

**Zaanan, A. C., Riesz Spaces II** (North-Holland Math. Library, Vol. 30), Amsterdam – New York: North-Holland Publishing Company 1983, X + 720 p., Dfl. 160,-

Mit mehrjährigem zeitlichem Abstand ist nun der lang erwartete zweite Band dieses Standardwerkes über Riesz-Räume erschienen (der erste Band wurde gemeinsam mit W. A. J. Luxemburg verfaßt). Da zwischenzeitlich umfassende und hervorragende Lehrbücher über Banachverbände (etwa H. H. Schaeffer's Buch über positive Operatoren und Banachverbände) zum gleichen Themenkreis im Buchhandel erhältlich sind, schien die Frage nach der Notwendigkeit eines Nachfolgers zu „Riesz Spaces I“ gerechtfertigt. Der Autor widerlegt jedoch in Stoffauswahl und Darstellung alle Einwände und Zweifel in dieser Richtung.

Eine Fülle von neuesten Entwicklungen und Resultaten auf dem Gebiet der Vektorverbände und der Theorie der ordnungsbeschränkten linearen Operatoren hat Eingang in Zaanens Buch gefunden. Die Betonung der (Norm-)Vollständigkeit tritt in der allgemeinen Theorie etwas zurück, während gleichzeitig die Behandlung konkreter Beispiele – hierunter etwa besonders bemerkenswert die Kapitel über Orlicz-Räume sowie über Kernoperatoren – exemplarisch gestaltet wird.

Die zehn Kapitel dieses Buches bauen nur zum Teil auf den Resultaten des ersten Bandes auf, erfordern jedoch vom Leser eine gewisse Vertrautheit mit der allgemeinen Theorie der Riesz-Räume. Nur in dem einführenden Kapitel über Primideale ist der Bezug zu den in „Riesz Spaces I“ erarbeiteten Grundlagen relativ stark.

Der Schwerpunkt der Themenauswahl liegt jedoch – motiviert durch den beachtlichen Fortschritt der wissenschaftlichen Forschung auf diesem Gebiet in den letzten Jahren – im Bereich der Theorie der ordnungsbeschränkten linearen Operatoren auf Riesz-Räumen.

Als besondere Stärke des Buches fällt hierbei die bewußte Vertiefung ausgewählter Fragestellungen aus diesem Themenkreis ins Auge. Dies trifft etwa auf die ausführliche und beispielhafte Behandlung von Kernoperatoren und Absolutkernoperatoren im dritten Kapitel des Buches zu. Erst an den hier im Detail und an klassischen Beispielen erläuterten Resultaten gewinnt auch der Nichtexperte in Riesz-Räumen einen Eindruck von der Bedeutung der allgemeinen Vektorverbandstheorie.

Während das Buch in hinlänglich durch andere Lehrbücher abgedeckten Gebieten – etwa der Darstellungstheorie von Banachverbänden und bei Tensorprodukten – bewußt Lücken läßt, wird die Stoffauswahl und der Aufbau auch in so allgemein gehaltenen Abschnitten wie über normierte Riesz-Räume, ordnungstetige Normen und Bidualeinbettungen geprägt von einer die Standardtheorie in hervorragender Weise ergänzenden Sicht der Dinge (dies zeigt etwa die Behandlung der Zusammenhänge zwischen der Riesz-Fischer-Eigenschaft, der (Norm-)Vollständigkeit und der schwachen Riesz-Fischer-Eigenschaft in normierten Vektorverbänden).

Nach einem Kapitel über die mittlerweile klassischen Darstellungssätze für  $L^p$ -Räume von Bohnenblust, Ando und Kakutani stößt die idealtheoretische Untersuchung von kompakten ordnungsbeschränkten Operatoren in Banachverbänden wieder zu den wissenschaftlichen Erkenntnissen der letzten Jahre vor. Die lange Zeit vorhandenen, erheblichen und für die Anwendungen oft unangenehmen Wissenslücken über positive kompakte Operatoren selbst in klassischen Banachverbänden werden durch eine detaillierte Behandlung der Zusammenhänge geschlossen (aufbauend auf Arbeiten von P. Dodds und D. H. Fremlin) und demonstrieren erneut die Nützlichkeit der allgemeinen Theorie am konkreten Beispiel.

Das neunte Kapitel des Buches zerfällt in zwei praktisch getrennte Teilgebiete: Orlicz-Räume einerseits und irreduzible ordnungsbeschränkte lineare Operatoren andererseits. Die Darstellung von Orlicz-Räumen besticht dabei durch ihre Klarheit und Einfachheit. Sie liefert demjenigen, der ausreichende Grundkenntnisse in der Vektorverbandstheorie besitzt, einen hervorragenden Einstieg in das Spezialgebiet.

Während sonst die Spektraltheorie positiver linearer Operatoren in Zaanens Buch eher in den Hintergrund tritt, bewegt sich der zweite Teil dieses Kapitels im Themenkreis der Erweiterungen der Sätze von O. Perron und G. Frobenius. Auch hier liefern neueste wissenschaftliche Forschungen wesentliche Beiträge zur Abrundung der Theorie.

Der letzte Abschnitt des Buches behandelt ausführlich Grundlagentheorie und neuere Resultate über Orthomorphismen und  $f$ -Algebren. (Ein ordnungsbeschränkter linearer Operator von einem Riesz-Raum in sich heißt Orthomorphismus, wenn er banderhaltend ist.) Da der Raum der Orthomorphismen eine  $f$ -Algebra ist (eine Verbandsalgebra mit der Eigenschaft  $uw \wedge v = wu \wedge v = 0$  für jede Wahl von  $u, v, w \geq 0$  mit  $u \wedge v = 0$ ), sind beide Gebiete thematisch stark verzahnt.

Eine Fülle von Beispielen und (teilweise anspruchsvollen) Übungsaufgaben bereichern das Buch, so daß es nicht nur als unverzichtbares Standardwerk für den Experten, sondern auch für den fortgeschrittenen Studenten mit entsprechenden Grundlagkenntnissen zu empfehlen ist.

Passau

K. Donner

**Kunen, K., Vaughan, J. (editors), Handbook of Set-Theoretic Topology**, Amsterdam – New York: North Holland 1984, vi, 1273 pp., hard cover, \$ 98.00/Dfl. 275.00

Das Gebiet der mengentheoretischen Topologie hat in den vergangenen 15 Jahren einen großen Aufschwung erlebt. Das vorliegende Handbuch dokumentiert diese Erfolge. Es ist ein Sammelband von sorgfältig geschriebenen Übersichtsartikeln über die aktuellen Problemkreise. Alle Beiträge sind von führenden Fachleuten verfaßt worden, die ausführlich die Beweismethoden und (noch) offenen Probleme ihres Gebiets darstellen. Manche Artikel sind schon kleine Monografien, durch die sonst schwer zugängliches Material einer breiten Öffentlichkeit dargelegt wird. Im Rahmen dieser Besprechung ist es unmöglich, auf jeden Beitrag einzeln einzugehen. Da den Spezialisten dieses Handbuch ohnehin wärmstens als Nachschlagewerk empfohlen werden kann, beschränkt sich der Referent darauf, einige Beispiele anzuführen, die Mathematikern, die in verwandten Gebieten arbeiten, zeigen sollen, inwieweit für sie dieses Buch von Nutzen sein kann.

*Topologie in Modellen von ZFC:* Allgemein bekannt ist das „Normal Moore Space Problem“. Ein regulärer Raum ist ein Moore-Raum, wenn es eine Folge  $\mathcal{G}_n$ ,  $n \in \omega$ , von offenen Überdeckungen gibt mit folgender Eigenschaft: Für jeden Punkt  $x \in X$  und jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  gibt es eine Überdeckung  $\mathcal{G}_n$  mit  $\text{st}(x, \mathcal{G}_n) = \cup \{0 \in \mathcal{G}_n : x \in 0\} \subseteq U$ . Schon 1937 veröffentlichte F. B. Jones die Vermutung: Jeder normale Moore-Raum ist metrisierbar. Ein wichtiger Beitrag wurde dazu 1951 von Bing geleistet: Ein Moore-Raum ist genau dann metrisierbar, wenn er kollektionsweise normal ist. Dieser Satz und die fast gleichzeitig veröffentlichten Metrisierungssätze von Nagata und Smirnov sind der Beginn der modernen Metrisierungstheorie. Mit ihren topologischen Aspekten beschäftigen sich die Artikel von Burke (Parakompaktheitseigenschaften) und Gruenhagen (verallgemeinerte metrische Räume). Nach einem grundlegenden Satz von Nyikos (1980) hängt die Lösung des Problems von Moore stark von den zugrundegelegten Modellen der Mengenlehre ab. Die Beiträge von Tall und Fleissner befassen sich damit: Wenn das Axiom von Fisher gilt, dann ist jeder normale Moore-Raum metrisierbar. Das Axiom von Fisher fordert, daß sich das Produktmaß auf  $2^M$ ,  $M$  beliebig, zu einem  $c$ -additiven Maß  $\mu$  fortsetzen läßt, das auf ganz  $P(2^M)$  definiert ist; dabei ist  $c = 2^{\aleph_0}$ . Es ist inkonsistent mit der Kontinuumshypothese CH und unter CH hat Fleissner auch ein Gegenbeispiel zur Vermutung von Moore konstruiert. In seinem Artikel beweist er den Satz von Kunen, daß man ein Modell von ZFC + Fishers Axiom erhält, wenn man das Grundmodell (simultan) um eine stark kompakte Anzahl von Solovay-generischen Zahlen erweitert. Zu den aktuellen Forschungsaktivitäten zählt das Programm, die topologischen Konsequenzen des Fisherschen Axioms mit Cohen-generischen Zahlen zu beweisen und dadurch Verallgemeinerungen zu ermöglichen. So haben noch während der Fertigstellung des Buchs Tall und Weiss gezeigt: In der Erweiterung des Grundmodells um superkompakt viele Cohen-generische Zahlen ist jeder normale Moore-Raum metrisierbar. Schließlich sei noch erwähnt, daß große Kardinalzahlen eine wesentliche Rolle in solchen Modellen spielen: Wenn es kein inneres Modell mit einer meßbaren Kardinalzahl gibt, dann gibt es einen normalen Moore-Raum, der nicht metrisierbar ist.

*Martins Axiom:* Sehr populär unter Topologen ist Martins Axiom (MA): Ein kompakter  $T_2$ -Raum mit der abzählbaren Antikettenbedingung kann nicht die Vereinigung von weniger als  $c$  nirgends dichten Mengen sein. Dieses Axiom wurde 1970 als diejenige Eigenschaft

eines Modells von Martin, Solovay und Tennenbaum erkannt, die zusammen mit  $\sim$  CH die Existenz von Souslin-Kontinua ausschließt. Damit war für die mengentheoretisch interessierten Topologen erstmals die Möglichkeit gegeben, in Modellen zu arbeiten, wo CH nicht gilt, ohne sich mit den Einzelheiten der Konstruktion solcher Modelle beschäftigen zu müssen. Der Beitrag von Weiss über die wichtigsten Varianten von MA ist unter diesem Aspekt geschrieben worden und daher ohne einschlägige Vorkenntnisse lesbar. Wie das im Buch von Fremlin (Consequences of MA, Cambridge 1984) herausgearbeitet wurde, kann man MA als Aussage über die Kardinalität gewisser Teilfamilien von  $P(\omega)$  auffassen. Dieser Standpunkt wird im Artikel von Van Douwen vertreten, der an instruktiven Beispielen zeigt, wie diese Familien in topologische Konstruktionen eingehen. Vor allem Fragen der Äquivalenz verschiedener Varianten der Kompaktheit lassen sich elegant beantworten, wie im Beitrag von Vaughan demonstriert wird.

Als Verallgemeinerung von  $MA + \sim$  CH hat Shelah das Proper Forcing Axiom PFA aufgestellt. Der Artikel von Baumgartner enthält einige typische Anwendungen von PFA. Ein schönes Beispiel für den Unterschied an Beweiskraft zwischen PFA und  $MA + \sim$  CH liefert die Theorie der S- und L-Räume, die in den Beiträgen von Roitmann und Abraham, Todorčević besprochen wird. Ein regulärer Raum  $X$  ist S (bzw. L), wenn jeder Teilraum separabel (Lindelöf) ist,  $X$  aber nicht Lindelöf (separabel) ist. Zum Beispiel ist ein Souslin-Kontinuum ein L-Raum (Kurepa 1935). Daß schon CH für die Konstruktion von S- und L-Räumen mit abzählbaren Umgebungsbasen (AA 1) ausreicht, wurde 1973 von Hajnal und Juhász gezeigt. Die Frage, ob MA genügt, blieb lange offen. Sie wurde um 1980 von Szentmiklóssy, Todorčević und Abraham beantwortet, wobei manche ihrer Beweise erstmals in diesem Buch veröffentlicht werden. Ihre diesbezüglichen Resultate lauten: (1)  $MA + \sim$  CH impliziert, daß es keine L-Räume mit AA 1 gibt. (2)  $MA + \sim$  CH ist relativ konsistent mit der Existenz von AA 1 + S-Räumen. (3) PFA impliziert, daß es keine S-Räume gibt.

Viel Forschung wird gegenwärtig im Zusammenhang mit dem Axiom „Martins Maximum“ von M. Magidor durchgeführt. Leider war es offensichtlich nicht mehr möglich, auch darüber einen Artikel aufzunehmen.

*Anwendungen:* Aus einer Anwendung mengentheoretisch-topologischer Überlegungen auf die Homotopietheorie ist die Theorie der Dowker-Räume entstanden. Der Ausgangspunkt ist der Homotopieerweiterungssatz von Borsuk (1937): Ist  $X$  binormal (d. h.  $X \times [0, 1]$  ist normal und  $T_2$ ),  $A \subseteq X$  abgeschlossen,  $Y$  ein kompakter  $T_2$ -Raum und  $H: (A \times [0, 1]) \cup (X \times \{0\}) \rightarrow Y$  stetig, dann kann  $H$  auf ganz  $X \times [0, 1]$  stetig fortgesetzt werden. Die Frage, ob jeder normale Raum binormal ist, wurde 1951 von Dowker untersucht, der zeigte, daß ein normaler Raum genau dann binormal ist, wenn er abzählbar-metakompakt ist, und 1955 von M. E. Rudin aufgegriffen: Sie konstruierte aus einem Souslin-Baum einen Dowker-Raum; d. h.: einen normalen Raum, der nicht binormal ist. Die wichtigsten Resultate, über die der Artikel von Rudin berichtet, sind: (1) Man kann einen Dowker-Raum ohne zusätzliche Axiome (d. h. in ZFC) konstruieren (Rudin 1971). (2) Der Satz von Borsuk gilt auch für Dowker-Räume (Morita 1975 und Starbird 1975). Produktfragen für andere Klassen von Räumen werden im Artikel von Przymusiński besprochen. Für geometrische Topologen ist sicher auch die Arbeit von Nyikos über nichtmetrisierbare Mannigfaltigkeiten von Interesse.

Analytiker finden viel für sie relevantes Material in den Artikeln von Gardner, Pfeffer über topologische Maßtheorie, Miller über die Konstruktion von singulären Teilmengen von  $\mathbf{R}$ , Negreontis über geometrische Banachraumtheorie und Comfort über topologische Gruppen. Die angeführten Beiträge haben mehr den Charakter von Ergebnisberichten. Sie sind dicht mit Information gefüllt, die wie das Buch insgesamt dem Leser die Anwendbarkeit mengentheoretischer Methoden an eleganten Resultaten demonstrieren, und jedem, der sich eingehender mit diesem Werk auseinandersetzt, eine Hilfe bei der Lösung eigener Probleme sind.

*Zusammenfassung:* Das Handbuch ist eine wertvolle Bereicherung der mathematischen Literatur. Es wendet sich zwar primär an Fachleute aus den Gebieten Allgemeine Topologie

und Mengenlehre, kann aber auch Mathematikern empfohlen werden, die über geometrische Topologie, Funktionalanalysis, harmonische Analysis, Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung arbeiten.

Wien

N. Brunner

**Arnold, V. I., Catastrophe Theory** (Second, Revised and Expanded Edition), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, 1986, 108 S., pbk., DM 26,80

Prof. Arnold ist der bekannteste und wichtigste Vertreter der Singularitätentheorie in der Sowjetunion; so lag es nicht fern, daß er 1979, zur Zeit der großen Mode der Katastrophentheorie, gebeten wurde, darüber für die russische populärwissenschaftliche Zeitschrift *Priroda* („Die Natur“) einen Artikel zu schreiben. Arnold ist auch für die Schärfe seiner Ansichten berühmt, und dieser Artikel wurde zu einer bissigen Attacke auf die Arbeiten von Zeeman und Thom und auf die unseriöse Art, mit der die Katastrophentheorie von ihren Anhängern als Allheilmittel zur Erklärung aller möglichen natürlichen und soziologischen Vorgänge verkauft wird.

Wäre es bei diesem Inhalt geblieben, hätte der Artikel höchstens philosophisches Interesse geweckt, aber zum Glück wurde er von Arnold ergänzt und erweitert, und erschien 1981 in russisch als kleines Taschenbuch, das dann auch in einer ersten englischen Übersetzung Ende 1983 beim Springer-Verlag herauskam. Nach der zweiten, erweiterten russischen Ausgabe von 1984 entstand eine neue, überarbeitete Übersetzung, die soeben als zweite englische Ausgabe erschienen ist.

Nur ein kleiner Teil des Buchs, der wohl etwa dem ursprünglichen Zeitschriftenartikel entspricht, befaßt sich mit der eigentlichen Katastrophentheorie im Sinne von Thom und Zeeman. Neben einem flüchtigen Umriss dieser Theorie und seiner Grundlagen in den Arbeiten von Whitney, besteht dieser Teil, wie schon erwähnt, im wesentlichen aus einem Schmähruf auf diese Art von Anwendungen der Singularitätentheorie.

Der Rest des Buchs, d. h., die Ergänzungen, die aus dem Zeitschriftenartikel ein Buch gemacht haben, sind zum Glück ganz anderer Natur. Diese Kapitel beschreiben die vielfältigen und mathematisch rigorosen Anwendungen der Whitney-Thom-Matherschen Singularitätentheorie, die prinzipiell von Arnold und seinen Schülern in den letzten Jahren erforscht wurden und die in ihren Arbeiten und Veröffentlichungen ständig wiederkehren. Es handelt sich hierbei praktisch um Singularitätentheorie mit verschiedenartigen Nebenbedingungen. Zu den Themen gehören: Bifurkationen und andere qualitative Veränderungen (z. B. Stabilitätsverlust) von Gleichgewichtslagen parameterabhängiger dynamischer Systeme; Kaustiken und Wellenfronten, und als „Anwendung“ dieses Themas, die Entstehung von Materieanhäufungen in einem ursprünglich homogenen Universum als „Kaustiken“ der Wellenfront der sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegenden Masseteilchen; die Singularitäten der Maxima oder Minima einer parametrisierten Funktion in Abhängigkeit von den Parametern. Ein Kapitel behandelt *kontrollierte Systeme* (das sind Verallgemeinerungen von dynamischen Systemen, bei denen es an jedem Punkt nicht nur einen, sondern einen ganzen Bereich von zulässigen Geschwindigkeitsvektoren gibt). Hier ist interessant, welches Gebiet von einem Ausgangspunkt durch zulässige Bahnen erreicht werden kann, und wie die Randsingularitäten dieses Gebiets aussehen. Weitere Themen sind die Singularitäten der Projektionen glatter Flächen im Raum (oder damit gleichbedeutend, die Klassifikation der Tangentengeraden zu einer Fläche), die Singularitäten der kürzesten Entfernung zwischen zwei Punkten unter Umgehung eines Hindernisses, symplektische und Kontaktgeometrie (die den geeigneten Rahmen für die mathematische Mechanik bilden) und die dort auftretenden Lagrangeschen bzw. Legendreschen Singu-



laritäten. Und schließlich gibt es, neu in der zweiten Auflage, ein Kapitel über komplexe Singularitäten und die Unterschiede zum reellen Fall.

Das Buch ist an mathematische Laien gerichtet und enthält keine Beweise und oft auch keine genaue Formulierung der Resultate, dafür aber eine große Anzahl Bilder, die unter anderem für die vielen in dem Buch erwähnten Klassifikationsergebnisse alle auftretenden Singulartypen zeigen. Ob das Buch für Laien *verständlich* ist, möchte ich bezweifeln, denn Arnold kann aus seiner Haut nicht heraus, und seine Sprache und Betrachtungsweise bleiben die eines Mathematikers; wo mathematische Begriffe sich schwer erklären lassen, werden sie eben nicht oder kaum erklärt, aber sie werden weiterhin verwendet. Aber für *Mathematiker* finde ich das Buch ausgezeichnet, denn es bietet auf kleinem Raum eine Übersicht über die sehr weitläufigen und vielfältigen, aber im Westen nicht immer bekannten Forschungen der russischen Schule in der Singularitätentheorie; über viele der behandelten Themen sind bisher nur in der Sowjetunion Veröffentlichungen erschienen. Wer sich für eines der Themen näher interessiert, kann sich an die in der zweiten Auflage neu hinzugekommene sehr ausführliche kommentierte Bibliographie halten, die nach den Kapiteln des Haupttexts gegliedert ist, so daß man sofort zu jedem Thema die relevante Literatur findet.

Neben der erweiterten Bibliographie und dem neuen Kapitel über komplexe Singularitäten wurden in der zweiten Auflage einige Sachfehler berichtigt, und durch kleine Textergänzungen wurde auf aktuelle Forschungsergebnisse hingewiesen.

Aber nicht nur der Umfang des Buches hat sich zwischen den beiden Auflagen geändert. Auch der schon vorhandene Teil wurde sorgfältig überarbeitet, und der russische Text neu übersetzt. Da ich selber der Übersetzer der zweiten Auflage bin, kann ich über die Qualität der neuen Übersetzung nicht ganz objektiv berichten (anders als über den Inhalt; das Buch habe ich ja nicht geschrieben!). Aber die erste Auflage wurde in der Tat mit sehr wenig Sorgfalt erstellt, und enthielt nicht nur viele Druckfehler, sondern auch einige grobe Patzer und Verzerrungen in der Übersetzung. Teile des Textes, mit denen der Übersetzer nicht fertig geworden war, sind anscheinend sogar von Arnold selber übersetzt worden, und obwohl er gut englisch kann, es ist eben nicht seine Muttersprache. Ich habe mir auf jeden Fall viel Mühe gegeben, eine sachlich richtige und auch die Nuancen und den Stil des Originals möglichst genau wiedergebende Übersetzung anzufertigen, aber das Urteil darüber, ob mir das gelungen ist, muß ich anderen überlassen.

Bochum

G. Wassermann

**Irwin, M. C., Smooth Dynamical Systems** (Pure and Applied Mathematics, vol. 94), London – New York – Toronto – Sydney – San Francisco: Academic Press 1980, vii, 259 pp., hardbound, \$ 54.50

Die stürmische Entwicklung, welche in der Theorie der differenzierbaren Dynamischen Systeme in den Sechziger und Siebziger Jahren stattgefunden hat, findet mittlerweile auch ihren Niederschlag in der Lehrbuchliteratur. Bekannte Beispiele sind der Bericht in Abraham/Marsden [1], das Werk [2] von Arnold und die Einführung [5] von Palis/de Melo.

Das hier zu besprechende Buch von Irwin behandelt wichtige Teile des Standardmaterials in erfrischend eigenständiger Weise. Ausgehend von nur geringen Vorkenntnissen in der Allgemeinen Topologie und über differenzierbare Mannigfaltigkeiten wird zunächst sogar der Existenz- und Abhängigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen bewiesen und zur Konstruktion des Flusses von Vektorfeldern auf kompakten Mannigfaltigkeiten benutzt. Dabei arbeitet der Autor systematisch mit dem Kontraktionslemma und der Differentialrechnung in Funktionenräumen; die relevanten Tatsachen, insbesondere die Differenzierbarkeit der Kompositionsabbildung, finden sich in gesonderten Anhängen.

Nach Möglichkeit wird auch der unendlichdimensionale Fall berücksichtigt, das geschieht bereits im Kapitel über lineare Dynamische Systeme (und erfordert nur ein wenig Spektraltheorie). Den Kern des Buches bildet die „hyperbolische Theorie“: Satz von Hartman/Grobman über die topologische Linearisierung von Vektorfeldern um hyperbolische Gleichgewichte oder hyperbolische geschlossene Orbits und Konstruktion der stabilen Mannigfaltigkeiten. Für Letzteres wird eine Methode benutzt, die von Irwin selbst stammt und auf einer Anwendung des Kontraktionslemmas in einem Folgenraum beruht. Wie gesagt, diese Tatsachen werden für Banach-Mannigfaltigkeiten behandelt, so daß sich dann auch die stabile Mannigfaltigkeit einer beliebigen kompakten invarianten hyperbolischen Teilmenge als stabile Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes einer assoziierten Abbildung zwischen Banachräumen von Schnitten ergibt.

Das Schlußkapitel ist einer Diskussion strukturell stabiler Systeme gewidmet. Es enthält zwar keine formellen Beweise, aber überzeugende Bilder und einleuchtende Beschreibungen des intuitiven Hintergrundes. Hier kann man sich orientieren, bevor man sich auf das Studium der technisch verwickelten Originalarbeiten einläßt. Bemerkenswert ist der stilistische Kontrast zu den vorangehenden Kapiteln: dort leidet die Darstellung gelegentlich unter einem selbst auferlegten Zwang, sich auf elementare Begriffe und explizite Abschätzungen zu beschränken, hier werden mit leichter Hand komplizierte geometrische Zusammenhänge in beträchtlichem Detail geschildert.

Natürlich fehlt Vieles, vgl. die konkurrierende Literatur. Aber auf jeden Fall: ein anregendes und schönes Buch, welches sehr gut als Einführung in die Theorie der differenzierbaren Dynamischen Systeme geeignet ist.

- [1] Abraham, R.; Marsden, J. E.: Foundations of Mechanics, 2nd edition. Reading, Mass.: Benjamin/Cummings Publ. Comp. 1978
- [2] Arnold, V. I.: Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. New York etc: Springer-Verlag 1983
- [3] Bröcker, Th.: Besprechung von [5]. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **86** (1984) 19
- [4] Hirsch, M. W.: Besprechung von [2]. Bull. AMS **10** (1984) 305–310
- [5] Palis, J.; de Melo, W.: Geometric Theory of Dynamical Systems. New York etc: Springer-Verlag 1982

Bremen

J. Gamst

**Szlenk, W., An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems**, Warszawa: PWN – Polish Scientific Publishers 1984, distributed by John Wiley & Sons, x, 369 pp., hard-bound, £ 29.50

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen entstanden, welche der Autor 1971/72 in Aarhus gehalten hat. Das mag den gelegentlich informellen Stil erklären und auch, warum große Teile wie ein Dokument aus längst vergangenen Tagen wirken. Jedenfalls enthält es etwas zu den meisten Teilbereichen der Theorie der differenzierbaren Dynamischen Systeme.

Das erste Kapitel kommt nach einigen Allgemeinheiten zu einer ziemlich uninspirierten Darstellung der „hyperbolischen Theorie“; dabei werden die stabilen Mannigfaltigkeiten mit einer nach Hadamard und Perron benannten Methode, also nicht mit der von Irwin, konstruiert. Im zweiten Kapitel findet man etwas über Homöomorphismen der Kreislinie (die Resultate von M. Herman werden jedoch nicht einmal erwähnt) sowie einige Bemerkungen über Flüsse und lineare Automorphismen auf dem Torus.

Transversalität und Generezitätsbeweise werden im 3. Kapitel in enger Anlehnung an das Buch von Abraham/Robbin behandelt, es fehlen allerdings Beweise für den Satz von Sard oder für den von Tarski/Seidenberg über semialgebraische Mengen. Es folgt ein Kapitel über strukturelle Stabilität. Hier ist die Darstellung besonders unvollständig: Resultate werden nur

zitiert oder im Spezialfall bewiesen, Begriffe wie  $\Omega$ -Stabilität, strange attractor und Chaos bleiben ungenannt.

Im Schlußkapitel geht es um ergodentheoretische Aspekte. Nützlich ist dort ein kurzer Beweis des individuellen Ergodensatzes von Birkhoff nach M. Garsia sowie ein einfacher Beweis von M. Misiurewicz dafür, daß bei Homöomorphismen kompakter metrischer Räume die topologische Entropie mit dem Supremum der maßtheoretischen Entropien bezüglich invarianter Wahrscheinlichkeitsmaße übereinstimmt. Eine Besonderheit des Buches sind die vielen Übungsaufgaben, die meist mit Hinweisen versehen sind. Für den eiligen Leser ist es allerdings störend, daß häufig Beweiseinheiten an die Aufgaben delegiert werden.

Das Buch von Szlenk wird es schwer haben, sich neben den schönen Einführungen von Irwin oder Palis/de Melo zu behaupten.

Bremen

J. Gamst

**Girault, V., Raviart, P.-A., Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations**

(Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 5), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1986, 374 pp., hard cover, DM 198,—

Das vorliegende Werk geht auf ein Manuscript zurück, das im Jahre 1979 in den Lecture Notes in Mathematics 749 im Springer-Verlag veröffentlicht wurde. Gegenüber dem Vorläufer sind nicht nur neuere Entwicklungen berücksichtigt worden, sondern die Autoren haben sich nun außerordentlich darum bemüht, die in der alten Präsentation bestehenden Lücken zu schließen.

Das Kapitel I gibt eine exzellente „Einbettung“ der Vektoranalysis in die Theorie der Sobolevschen Funktionenräume, mit der verschiedene variationelle Formulierungen der linearen Stokes-Gleichung untersucht werden. Die hier behandelten Fragestellungen haben in der Vergangenheit zu zahlreichen Irrtümern geführt, nicht zuletzt, weil eine zusammenfassende Darstellung bisher gefehlt hat. Aus diesem Grunde könnte dieses Kapitel auch für den Analytiker als Referenz bedeutsam sein. In den Kapiteln II und III werden die Finite-Element-Methoden zur Diskretisierung der Stokes-Gleichung beschrieben und Fehlerabschätzungen bewiesen. Besonders hervorzuheben ist die ausführliche Darstellung auch unbekannter Verfahren zur Approximation der dreidimensionalen Gleichung, die sich wesentlich vom ebenen Fall unterscheidet. Kapitel IV ist der nichtlinearen stationären Navier-Stokes-Gleichung gewidmet, die mit ähnlichen Methoden wie in den vorherigen Kapiteln behandelt werden kann. Mit Ausnahme der Untersuchung eines „upwind-schemes“ wird auf die Approximation turbulenter Strömungen bzw. hohen Reynoldszahlen nicht eingegangen. Einige numerische Algorithmen zur Lösung der entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme runden das Buch ab.

Wie in der französischen Schule üblich wird auf die funktionalanalytische Struktur der einzelnen Verfahren sehr viel Wert gelegt, was das Buch für Nur-Numeriker oder Ingenieure nicht leicht lesbar machen dürfte. Obwohl die Autoren auf die Präsentation numerischer Ergebnisse oder eine Abwägung der Verfahren gegeneinander bewußt verzichten, steht das Buch aufgrund seiner Vollständigkeit und seiner eleganten Darstellung in der mathematischen Literatur zu diesem Thema einzigartig da.

Erlangen

M. Dobrowolski

**Wahl, W. von, The Equations of Navier-Stokes and Abstract Parabolic Equations**

(Aspects of Mathematics, Bd. E8), Braunschweig: Vieweg 1985, xxiv, 264 S., kart., DM 54,—

In diesem Buch werden zeitlich lokale Lösungen abstrakter nichtlinearer Gleichungen  $u' + Au + M(u) = f$  untersucht. Dabei ist  $-A$  Erzeuger einer stetigen Halbgruppe (hyperbolischer Fall) oder einer analytischen Halbgruppe (parabolischer Fall) und die Nichtlinearität  $M(u)$  genügt gewissen Lipschitzbedingungen. Die betrachteten Anfangswerte liegen zunächst im Definitionsbereich von  $A$ ; später wird im parabolischen Fall zugelassen, daß sie im Definitionsbereich einer gebrochenen Potenz von  $A$  oder im zugrunde liegenden Banachraum liegen können.

Viele in der Literatur der letzten Jahre verstreut vorkommende Resultate werden in diesem Buch mit einer einheitlichen Methode behandelt und dargestellt; in einigen Fällen können die Ergebnisse verbessert und bis zu den Grenzfällen hin verschärft werden. Dies geschieht im Hinblick auf die Anwendungen. Auch die Auswahl der behandelten Resultate erfolgt unter diesem Gesichtspunkt. Überhaupt widmet der Verfasser dieses Buches den Anwendungen insbesondere auf die Gleichungen von Navier-Stokes sein Hauptinteresse. Daher ist Kapitel IV der eigentliche Hauptteil des Buches. Dort wird die lokale Existenztheorie verwendet, um die Struktur der schon länger bekannten schwachen globalen Lösungen genauer zu studieren. So gelangt man z. B. zu Verschärfungen der bekannten Regularitätskriterien von Serrin. Originell und zweckmäßig ist auch die Herleitung höherer Regularitätsaussagen für lokale Lösungen mit Hilfe eines Interpolationssatzes für nichtlineare analytische Abbildungen.

Alle lokalen Existenzresultate liefern zugleich jeweils ein Kriterium für die Existenz einer in der Zeit globalen Lösung. Die Frage nach der globalen Lösbarkeit wird in Kapitel V noch einmal aufgenommen. Dort wird ein Kriterium für globale Existenz für abstrakte parabolische Gleichungen bewiesen, für deren linearen Hauptteil man sog. Abschätzungen mit maximaler Regularität hat. Dieses Kriterium scheint nach dem heutigen Stand der Erkenntnisse scharfe Ergebnisse für die globale Existenz zu liefern. Es wird sowohl auf die Gleichungen von Navier-Stokes als auch auf parabolische Systeme angewendet. So folgt z. B., daß jede schwache Lösung der Gleichungen von Navier-Stokes regulär ist, wenn sie in  $C^0([0, T], L^p(\Omega))$  enthalten ist.

Das Buch wendet sich in erster Linie an wissenschaftlich Tätige. Es erleichtert oder ermöglicht die Einarbeitung in ein Gebiet, auf dem seit Erscheinen des Buches „The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow“ von O. A. Ladyzhenskaja einige wichtige Fortschritte mit neuen Methoden erzielt wurden. Leider haben sich einige sinnentstellende Schreibfehler eingeschlichen. Auf S. 122, 1. Zeile von oben und 3. Zeile von unten, muß es jeweils heißen „Thus we get that, if  $T(\varphi)$  is  $< +\infty$ , then ...“ und auf S. 123 muß in der 8. Zeile von unten  $[0, T(\varphi))$  statt  $(0, T(\varphi))$  stehen.

## Hinweise für Autoren

Für den Abdruck vorgesehene Manuskripte sind in einwandfrei leserlicher und völlig satzfertiger Form (einseitig beschriebenes Manuskript, Schreibmaschinenschrift 1 1/2-zeilig) und entsprechend den nachstehenden Richtlinien ausgezeichnet einzureichen.

Der Beginn von Absätzen oder neuen Abschnitten sollte deutlich durch Einrücken gekennzeichnet sein. In jedem Fall sollte ein Hinweis für den Setzer, in dem alle Besonderheiten aufgeführt sind, beigelegt werden.

Ferner sollten die Manuskripte entsprechend dem Subject Classification Schemes der Mathematical Reviews (AMS/MOS) klassifiziert sein. Am Ende der Manuskripte sollte die genaue Anschrift des oder der Verfasser angegeben werden. Zuschriften sowie die Versendung der Korrekturabzüge erfolgen, sofern nicht anders vermerkt, immer an den erstgenannten Autor.

Zeichnungen sollten fortlaufend nummeriert werden und auf gesonderten Blättern in Form von klaren Bleistiftzeichnungen im richtigen maßstäblichen Verhältnis möglichst in doppelter Größe dem Manuskript beigelegt werden. Am linken Rand des Textes sollte ein Hinweis auf die jeweils einzufügende Figur angebracht werden.

Fußnoten sollten auf der jeweiligen Seite, auf die sie Bezug nehmen, angebracht werden (nicht am Ende des Textes). Literatur sollte in folgender Weise zitiert [1] und dann am Ende des Textes in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt werden. Verweise sollten in folgender Form vorgenommen werden:

[1] Neven, J.: Martingale Problems. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 79 (1957) 175–180

[2] Wittenburg, J.: Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner 1977. = Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 33.

Um eine rasche Veröffentlichung zu erreichen, erhalten die Autoren nur einen Korrekturabzug. Die Autoren werden gebeten, nur Druckfehler zu korrigieren. Sollten weitere Korrekturen wie Einfügungen oder Streichungen vorgenommen werden, müssen diese dem Autor berechnet werden. Die von den Autoren durchgesehenen Korrekturabzüge sind umgehend an den Herausgeber zurückzusenden.

Die Autoren erhalten von ihren Arbeiten nach Veröffentlichung 75, von Buchbesprechungen 2 Sonderdrucke unentgeltlich. Zusätzliche Sonderdrucke können gegen entsprechende Berechnung zum Zeitpunkt der Rückgabe der Korrekturen bestellt werden.



## Auszeichnungen für den Satz

Die im Manuskript enthaltenen Formelbuchstaben werden generell steil gesetzt. Besondere Schriftarten sind entsprechend den folgenden Richtlinien farblich auszuzeichnen.

gestrichelte schwarze Unterstreichung	– Sperrung
doppelte schwarze Unterstreichung	– <b>halbfett</b> (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in Formeln)
grüne Unterstreichung	– <i>kursiv</i> (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in den Formeln)
doppelte grüne Unterstreichung	– <b>halbfette lateinische Buchstaben</b> (in Formeln)
rote Unterstreichung	– griechische Buchstaben
lila Unterstreichung	– Groteskbuchstaben
doppelte lila Unterstreichung	– halbfette Groteskbuchstaben z. B. für <b>R, N, C</b> usw.
blaue Unterstreichung*)	– Fraktur
gelbe Unterstreichung	– Großbuchstabe O (zur Unterscheidung von der Ziffer Null)
gelb eingekastelt*)	– Skript
lila eingekastelt	– logische und mengentheoretische Symbole wie z. B. $\exists, \forall, \nu, \wedge, \neg$ , Malkreuz $\times$ , Verknüpfungssymbole $\circ, \cap, \cup, \Pi, \mathbb{U}, \in, \subset$ , Laplace-Operator $\Delta$ , Nabla $\nabla$
grün eingekastelt	– Kleinbuchstabe $\ell$ (zur Unterscheidung zur Ziffer eins (1))

Die Bezeichnungen Theorem, Lemma, Korollar, Proposition, Definition usw. werden üblicherweise **halbfett** gesetzt. Der danach folgende Text (bis auf Formelbuchstaben) wird **kursiv** gesetzt. Die Bezeichnungen Beweis, Bemerkung, Hinweis usw. werden normal gesetzt, jedoch gesperrt. Der nachfolgende Text wird in normaler Schrift gesetzt.

Mathematische Formeln sollten so deutlich geschrieben werden, daß kein Mißverständnis möglich ist. Die Autoren werden gebeten, insbesondere deutlich zu unterscheiden zwischen Großbuchstaben und Kleinbuchstaben, Null sowie kleinem o oder großem O, griechischen Buchstaben  $\varphi, \phi, \Phi, \kappa, K, \vartheta, \theta, \Theta$ , Strich (z. B. Ableitungsstrich) und Apostroph. Ferner sollte darauf geachtet werden, daß keine Verwechslung zwischen  $k, K, r, u, v$  (lateinisch) und  $\kappa, \mu, \nu$  (griechisch) sowie  $\in$  und  $\epsilon$  (griechisch) möglich ist.

---

\*) Von der Verwendung dieser Schriftarten ist beim Compositorsatz nach Möglichkeit abzuweichen.



# Johann Radon

## Collected Papers

### Gesammelte Abhandlungen

## Vol. 1 + 2

Published by the  
Austrian Academy of Science  
Verlegt von der Österreichischen  
Akademie der Wissenschaften

Edited by /  
Herausgegeben von

**Peter M. Gruber**  
**Edmund Hlawka**  
**Wilfried Nöbauer**  
**Leopold Schmetterer**

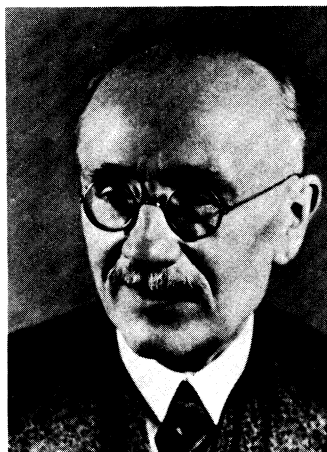
1987. 890 pages, Hardcover  
ISBN 3-7643-1894-5  
sFr. 298.- / DM 360.-  
(Set price)

The *Collected Papers* are a compilation of Johann Radon's scientific papers, published lectures and memorial addresses. Field experts offer commentary on specific topics (Measure and Integration Theory, Matrices, Convexity, Radon Transform, Calculus of Variations, and Geometry) as well as personal reminiscences and a brief biography of the mathematician. The publication of these collected works is a natural consequence of the ever-increasing importance ascribed to Radon's work. For the reader's convenience, the commentary and biography are printed in English as well as German.

**Please order from your bookseller or**

Birkhäuser Verlag, P. O. Box 133,  
CH-4010 Basel/Switzerland

Änderungen vorbehalten 11/87



Johann Radon  
1887–1956

Die «Gesammelten Abhandlungen» enthalten alle von Johann Radon verfassten wissenschaftlichen Arbeiten, ferner die publizierten Vorträge und die von ihm verfassten Nachrufe. Die einzelnen Arbeitsgebiete (Mass- und Integrationstheorie, Matrizen, Konvexität, Radontransformation, Variationsrechnung, Geometrie) wurden von Fachleuten sorgfältig kommentiert. Insbesondere wird seine Bedeutung für die Mass- und Integrationstheorie und die Grundlegung der Computertomographie klar herausgestellt. Die Kommentare werden durch Erinnerungen an Radon und ein Lebensbild abgerundet. Die Herausgabe der gesammelten Werke Radons erscheint gerechtfertigt durch das stetige Wachstum der Bedeutung seiner Arbeiten, insbesondere auch in der jüngsten Vergangenheit. Zur Bequemlichkeit des Lesers sind das Lebensbild und die Kommentare auf deutsch und englisch wiedergegeben.

**Birkhäuser**  
**Verlag**  
Basel · Boston

*new from de Gruyter*

Volume 1 · 1989

# Forum Mathematicum

An international journal devoted to pure and applied mathematics  
as well as mathematical physics

## Editorial Board:

- M. Brin (College Park, USA)  
F. R. Cohen (Lexington, USA)  
V. Enss (Berlin, FRG)  
R. Fintushel (East Lansing, USA)  
M. Fliess (Gif-sur-Yvette, France)  
M. Fukushima (Osaka, Japan)  
G. Gallavotti (Rome, Italy)  
R. Göbel (Essen, FRG)  
K. H. Hofmann (Darmstadt, FRG)  
J. Lindenstrauss (Jerusalem, Israel)  
D. H. Phong (New York, USA)  
D. Ramakrishnan (Ithaca, USA)  
A. Ranicki (Edinburgh, GB)  
P.-A. Raviart (Palaiseau, France)  
D. S. Scott (Pittsburgh, USA)  
D. Segal (Oxford, GB)  
B. Shiffman (Baltimore, USA)  
F. Skof (Torino, Italy)  
K. Strambach (Erlangen, FRG)  
G. Talenti (Florence, Italy)  
R. B. Warfield (Seattle, USA)

Authors may submit original research articles for publication  
directly to one of the editors or to:

## “Forum Mathematicum”

Mathematisches Institut der Universität  
Bismarckstrasse 1 1/2  
D-8520 Erlangen, Federal Republic of Germany



**de Gruyter**  
Berlin · New York