90. Band Heft 3
ausgegeben am 21. 7. 1988

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
H. Kurzweil, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1988

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 90/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 90, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

3. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Atiyah: The Frontier Between Geometry and Physics
J. Heinhold: Oskar Perron
K.-H. Hoffmann: Steuerung freier Ränder
K. Hulek: Elliptische Kurven, abelsche Flächen und das Ikosaeder
J. A. Jenkins: Helmut Grunsky
J. Jost: Das Existenzproblem für Minimalflächen
D. G. Kendall: A Survey of the Statistical Theory of Shape
H. W. Knobloch: Steuerbarkeit als zentraler Begriff beim Aufbau der Kontrolltheorie
B. H. Matzat: Über das Umkehrproblem der Galoisschen Theorie
P. Roquette: Über die algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten von Max Deuring
W. Singhof: Einige Beziehungen zwischen stabiler Homotopietheorie und Zahlentheorie

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 90 (1988) 111–128

Entwicklungstendenzen in der Risikotheorie*)

H. Bühlmann, Zürich

0 Einleitende Bemerkungen

Risikotheorie im weiten Sinne verstanden ist die Gesamtheit aller quantitativen Methoden, die sich mit dem Phänomen Risiko auseinandersetzen. Ein Teil davon ist die versicherungsorientierte Risikotheorie, bei welcher das Risiko ausschließlich nach seinen möglichen *finanziellen Konsequenzen* (Schadenzahlungen) beurteilt wird.
Das Risiko wird damit zur reellwertigen Zufallsvariablen X;

$$X: \underset{\text{Elementar-ereignisse}}{\Omega} \overset{X}{\rightarrow} \underset{\text{Schaden-zahlungen}}{\mathbf{R}}$$

das Risikogeschehen in der Zeit wird zum reellwertigen *stochastischen Prozeß* $(X_t; t \in T)$

$$X_t : \Omega \overset{X_t}{\rightarrow} \mathbf{R} \text{ für alle t in der „Zeitmenge" T.}$$

Aus dieser Sicht ist es natürlich, die Risikotheorie als eine Anwendung der Stochastik zu verstehen, deren Begriffe für die Modellbildung verwendet werden. Es hat in der Risikotheorie aber auch immer wieder eine Befruchtung durch ökonomisches Gedankengut stattgefunden. Die Synergiewirkung von Stochastik und Ökonomie hat denn auch oft zu reizvollen Entwicklungen geführt.

1 Der kollektive Ansatz von Filip Lundberg

Die Versicherungsmathematik hat sich seit ihren Anfängen im 17. Jahrhundert [1] mit dem *individuellen Risiko* (Einzelperson, Einzelpolice, individueller Automobilist etc.) befaßt. Wenn man dieses Einzelrisiko stochastisch versteht – was im Verlauf der Entwicklungsgeschichte der Versicherungsmathematik beileibe nicht immer der Fall war –, so kann man es z. B. durch die folgenden zwei

*) Vortrag auf der Jahrestagung der DMV in Marburg 1986.

Zufallsvariablen beschreiben (siehe z. B. [2]).

D: Die Variable nimmt die Werte 1 oder 0 an, je nachdem, ob in einem bestimmten Zeitraum das versicherte Ereignis eintritt oder nicht. Wenn man den Zeitraum mit dem Zeitintervall (0, t] identifiziert, ist es sinnvoll

D(t) zu schreiben.

Wir verwenden die Bezeichnungen

$q(t) = P[D(t) = 1]$ Sterbenswahrscheinlichkeit in (0, t]
$p(t) = P[D(t) = 0]$ Überlebenswahrscheinlichkeit in (0, t]

mit $p(t) + q(t) = 1$.

Bemerkung. Es ist sinnvoll, hier an eine Lebensversicherung zu denken, bei welcher $D(t) \geqslant 2$ unmöglich ist. Die anschließend skizzierten Überlegungen könnten aber auch für Policen, die mehrere Schäden im Intervall (0, t] zulassen, durchgeführt werden. Entscheidend ist, daß $q(t) + p(t) = 1$ „infinitesimal" klappt.

C: Diese Variable steht für die Schadenhöhe, falls ein Schaden eintritt.

Wir verwenden die Bezeichnung

$F(x) = P[C \leqslant x]$ Verteilungsfunktion der Schadenhöhe

Jede *Police* i des Versicherers ist durch das Paar $(D_i(t); C_i)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ charakterisiert. Dieser ist dann im Abschnitt (0, t] mit dem

(1) Gesamtschaden $S(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i(t)C_i$ konfrontiert.

Wir verwenden die Bezeichnungen $q_i(t) = P[D_i(t) = 1]$ und $F_i(x) = P[C_i \leqslant x]$, unabhängig von t.

Fazit. *Wir sind am Verhalten der Zufallsvariablen* S(t) *für festes* t *oder des stochastischen Prozesses* (S(t); t ∈ T) *interessiert, beides Größen, die wir aus dem* individuellen Modell *gewonnen haben.*

Filip Lundberg publizierte 1909 [3] die bahnbrechende Idee, den Gesamtschaden eines Versicherers *gedanklich anders aufzubauen.* Als Baustein des Modells solle nicht die *Police,* sondern der *Schadenfall* verwendet werden. Dieser Ansatz ist als kollektives Modell in die Literatur eingegangen. Lundberg schlug vor, die Zufallsvariablen $(R(t); t \in T)$ zu studieren, wobei

(2) $R(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$

N(t) Anzahl Schadenereignisse in (0, t],
Y_j Höhe des Schadenfalles Nummer j.

Lundbergs Grundgedanke war nun der, für das Studium von $(R(t); t \in T)$ folgende Wahrscheinlichkeitsstruktur zu verwenden:

N(t) homogener Poissonprozeß

$(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion G(x) (auch unabhängig von N(t), für alle t)

Historische Bemerkung. Im Jahre 1909 war natürlich die Theorie der stochastischen Prozesse noch nicht vorhanden. Lundbergs Ideen erschienen denn auch eher kryptisch verpackt [4]. Erst in den 30er Jahren wurden sie von Prof. Cramér [5] mit der notwendigen mathematischen Präzision beschrieben.

Nehmen wir für das Folgende an, die Policen seien voneinander stochastisch unabhängig. Die übliche Anpassung der kollektiven Parameter erfolgt dann durch zwei Formeln: Bei vorgegebenem und festem t wählt man

$$\text{(3)} \qquad \underbrace{\lambda = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} q_i(t)}_{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \qquad \text{mit} \quad \lambda_i = \frac{q_i(t)}{t} \quad \text{(im allgemeinen zeitabhängig!)}$$

$$\text{(4)} \qquad G(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)$$

Lundberg hat bereits gemerkt, daß er statt der Anpassungsformel (3) besser die Zeitskala transformieren sollte, um dann *immer* mit dem gleichen λ (z. B. = 1) arbeiten zu können. Das Risikogeschehen sollte also bereits in Lundbergs Auffassung in der Zeitskala „Erwartete Anzahl Schadenfälle“ beschrieben werden, welche wir im folgenden *operationelle Zeit* nennen wollen.
Trotz dieses Kunstgriffs ist es mit den Mitteln, die anfangs dieses Jahrhunderts zur Verfügung standen, schlechthin unmöglich, die beiden Prozesse $(S(t); t \in T)$ und $(R(t); t \in T)$ zu vergleichen. Es bedurfte dazu der Einsichten der modernen Theorie der Punktprozesse:
Es ist instruktiv, zunächst nur *eine* Police (Nr. i) anzuschauen.
Wir führen *neu* die *Sterbeintensität* ${}_s\mu_i$ ein, und zwar durch die Formel

$$\text{(5)} \qquad 1 - q_i(t) = e^{-\int_0^t {}_s\mu_i \, ds} \qquad \text{oder} \qquad \frac{q_i'(t)}{1 - q_i(t)} = {}_t\mu_i .$$

Solche Sterbeintensitäten waren in der Versicherungsmathematik des 19. Jahrhunderts [6] bereits beliebte Werkzeuge. Wir definieren nun die Lundbergsche operationelle Zeit

$$M_i(t) = \begin{cases} \int_0^t {}_s\mu_i \, ds & \text{für } \textit{eine} \text{ Police, falls das Risiko im Zeitpunkt t am Leben ist} \\ \int_0^\tau {}_s\mu_i \, ds & \text{falls das Risiko im Zeitpunkt } \tau < t \text{ gestorben} \end{cases}$$

und

$$\text{(6)} \qquad M(t) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t) \quad \text{für das ganze Portfeuille.}$$

$M(t)$ ist in der Tat eine previsible Intensität für den Zählprozeß $(N(t); t \geqslant 0)$ mit der „Geschichte" $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, wobei $N(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i(t)$.

Dazu haben wir uns von der Richtigkeit der folgenden Beziehung zu überzeugen

$$(7) \qquad E[I_A \cdot (N_t - N_s)] = E\left[I_A \cdot \int_s^t M_\tau d_\tau \right] \quad \text{für alle } s, t; (s \leqslant t) \text{ und alle } A \in \mathcal{F}_s$$

Die für die Menge A relevante Information besteht in der Angabe, welche Risiken im Zeitpunkt s noch „am Leben" sind. Wir bezeichnen die durch diese gebildete Menge mit J_s. Wir können also auch prüfen, ob

$$E[N_t - N_s/J_s] = E\left[\int_s^t M_\tau d\tau/J_s \right] \quad \text{oder} \quad \text{für eine Einteilung } s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$$

$$(8) \qquad \sum_k E[N_{t_k} - N_{t_{k-1}}/J_s] = \sum_k E\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} M_\tau d\tau/J_s \right]$$

Nun gilt sogar

$$E[N_{t_k} - N_{t_{k-1}}/J_s \cap J_{t_{k-1}}] = \sum_{i \in J_{t_{k-1}}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} {}_s\mu_i \, ds + \underset{\uparrow}{0((t_k - t_{k-1})^2)}$$

falls die ${}_s\mu_i$ beschränkt, gilt hier eine gleichmäßige Schranke

woraus (8) folgt.

Nach einem grundlegenden Satz über „Random Time Change" (siehe z. B. Brémaud [7] Seite 41) gilt dann

$$(\tilde{N}_m; m \geqslant 0) \quad \text{ist ein homogener Poissonprozeß mit Intensität 1}$$

wobei

$$\tilde{N}_m \doteq N_{\tau(m)} \quad \text{mit } \tau(m), \text{ so daß } M(\tau(m)) = m$$
$$\text{(insbesondere gilt also } \tilde{N}_{M(t)} = N_t)$$

Der Poissonprozeß läuft selbstverständlich nur solange, bis die operationelle Zeit stillsteht. Für die Risikotheorie, in der man gern auch langfristige Überlegungen anstellen will, ist deshalb die *Erneuerung* der Risiken von fundamentaler Bedeutung.

Diese hat vor allem auf die *Schadenhöhenverteilung* $G_t(x)$ einen Einfluß.

Es gilt

$$(9) \qquad G_t(x) = \sum_{i \in J_t} {}_t\mu_i F_i(x) / \sum_{i \in J_t} {}_t\mu_i; \quad \text{in der Regel } \textit{zeitabhängig}$$

In folgenden Fällen besteht jedoch *keine* Abhängigkeit von t (das Lundbergsche Modell ist also – in operationeller Zeit – korrekt).

Fall 1. Alle Schadenhöhenverteilungen $F_i(x)$ sind *gleich*. Erneuerungen irgendwie, aber so daß

$$M(\infty) = \lim_{t \to \infty} M(t) = \infty$$

Fall 2. Das Versicherungsportfeuille ist stabil: mathematisch

i) ${}_t\mu_i = f(t) \cdot \mu_i$

ii) Jede ausscheidende Police wird durch eine gleiche andere Police ersetzt, d. h. die Menge J_t bleibt konstant.

2 Die beiden klassischen Grundprobleme der Risikotheorie

a) Die Gesamtschadenverteilung

Betrachten wir jetzt den zusammengesetzten Poissonprozeß $(R(t); t \geqslant 0)$. Für die Praxis von großem Belang ist die *numerische* Berechnung der Verteilungsfunktion

$$(10) \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gesamtschaden-} \\ \text{verteilung}}}{H_t(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} G^{*k}(x) \quad \text{für die Zufallsvariable } R(t)$$

In diskreter Version (Wahrscheinlichkeit auf ganzzahligen Werten konzentriert)

$$(11) \qquad h_j = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} g_j^{*k} \ (j \in \mathbf{Z}); \quad h_j = P[R(t) = j]$$

stellt sich das Problem

aus *gegebener* Schadenhöhenverteilung $(g_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ die *Gesamtschadenverteilung* $(h_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ zu berechnen.

Nach einer längeren Periode, in welcher Approximationen für die Gesamtschadenverteilung Mode waren, stehen für die Lösung des eben geschilderten numerischen Problems zwei Methoden im Vordergrund:

1. Die Rekursion von Panjer [8]. Sei die Schadenhöhenverteilung auf den Argumenten 1, 2, . . . s konzentriert (nur *positive* Schadenhöhen).
Dann berechnet man (11) nach der Rekursion

$$(12) \qquad h_j = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j \wedge s} k \lambda_k h_{j-k} \quad (j \in \mathbf{N}) \quad \text{mit } \lambda_k = \lambda t g_k, \ k = 1, 2, \ldots s$$

und Anfangswert

$$h_0 = e^{-\lambda t}.$$

2. Die Schnelle Fourier-Transformation (FFT) [9]. Auch hier sei der Einfachheit halber die Schadenhöhenverteilung auf 1, 2, . . ., s konzentriert.
Dann betrachtet man die charakteristische Funktion $\Phi(u)$ von $H_t(x)$ resp. $\chi(u)$ von $G(x)$. Es gilt

$$(13) \qquad \Phi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} h_k = e^{\lambda t[\chi(u)-1]} \qquad \chi(u) = \sum_{k=1}^{s} e^{iuk} g_k$$

Das Prozedere ist wie folgt: (Bezeichnung F_n = FFT der periodischen Folgen der Länge n.)

$$(14) \quad \begin{cases} \text{i) Berechne } \chi\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right) \ (k = 0, 1, 2, \ldots -1) \quad \text{mittels } F_n^{-1}(g) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g = \text{Folge } \underbrace{0, g_1, \ldots g_s, 0, \ldots 0}_{n} \\ \text{ii) Bestimme } \Phi\left(\dfrac{2\pi k}{u}\right) = e^{\lambda t\left[\chi\left(\frac{2\pi k}{u}\right) - 1\right]} \quad (k = 0, 1, \ldots n-1) \\ \text{iii) Invertiere } \underset{\substack{\uparrow \\ h = \text{Folge } h_0, h_1, \ldots h_{n-1}}}{h} = F_n\left(\Phi\left(\dfrac{2\pi k}{u}\right)_{k=0,1,\ldots n-1}\right) \end{cases}$$

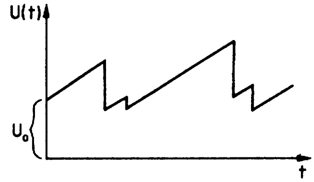
Bemerkung. Das Resultat h ist nur eine *Approximation* der *exakten* kontinuierlichen Fouriertransformation. Es ist aber leicht möglich, Fehlerschranken anzugeben.

Gerade gegenwärtig erleben wir in der Schweiz, wie die Gesamtschadenverteilung unter den Praktikern zum wichtigen Instrument wird. Diese Entwicklung ist interessanterweise ausgelöst durch das neue Pensionskassengesetz, nach welchem der Pensionsversicherungsmathematiker von Gesetzes wegen die Ausgeglichenheit der Risikengesamtheit zu beurteilen hat.

b) Die langfristige Stabilität des Risikoverlaufes

Wir nehmen an, das Versicherungsunternehmen stehe im Zeitpunkt t = 0, und die anfänglichen freien Mittel seien U_0. Diese verändern sich im Verlaufe der Zeit nach der Beziehung

$$(15) \qquad U(t) = U_0 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prämien-} \\ \text{einnahme}}}{ct} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schaden-} \\ \text{zahlungen}}}{\underbrace{\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j}_{R(t)}}$$



Seit Beginn der Risikotheorie ist als Stabilitätskriterium für den Risikoverlauf die „Ruinwahrscheinlichkeit" im Vordergrund gestanden,

$$(16) \qquad \psi(x) = P[U(t) < 0 \text{ für } \textit{ein } t \geqslant 0 / U_0 = x]$$

von der man verlangt, daß sie nicht unter ein Niveau ϵ (z. B. 1‰) fallen soll.

Diese Ruinwahrscheinlichkeit ist 1 für $c \leqslant \lambda E[Y]$. Für $c > \lambda E[Y]$ kann man sie durch Lösung einer Integralgleichung mittels der Wiener-Hopf-Technik (Cramér [10]) oder mit Methoden der Erneuerungstheorie (Feller [11]) berechnen. Am elegantesten ist die Martingalmethode (Gerber [12]). Dazu konstruiert man das Martingal

$$(17) \qquad M(t) = e^{-kU(t)}$$

Die Martingalbedingung liefert ($m(k) = E[e^{kY}]$)

$$(18) \qquad \begin{cases} e^{kct} = e^{\lambda t[m(k)-1]} \\ kct = \lambda t[m(k) - 1] \\ \lambda + ck = \lambda m(k) \quad \text{zur Bestimmung von } k \text{ (Wegen } c > \lambda E[Y] \text{ wird } k > 0.) \end{cases}$$

Man stoppt dann im Zeitpunkt des Ruins τ und verwendet die Konstanz des Erwartungswertes im gestoppten Martingal

$$(19) \qquad e^{-kU_0} = E[e^{-kU(\tau)}] = P[\tau < n]E[e^{-kU(\tau)}/\tau < n] + \\ + P[\tau > n]E[e^{-kU(\tau)}/\tau > n]$$

Läßt man $n \to \infty$ streben, so strebt das zweite Glied gegen Null. Damit haben wir

$$(20) \qquad \psi(x) = \frac{e^{-kx}}{E[e^{-kU(\tau)}/\tau < \infty]} \leqslant e^{-kx} \quad \text{da definitionsgemäß } U(\tau) < 0$$

Dieses langfristige Stabilitätskriterium ist sehr grobschlächtig. An Vorschlägen, wie man z. B. Zinserträgnisse einbauen soll oder zukünftige Prämienkorrekturen miteinbeziehen könnte, hat es nicht gefehlt [13]. Insbesondere ist es natürlich vor allem mathematische Konvenienz, wenn die langfristige Stabilität über dem *unendlichen* Planungshorizont behandelt wird. Interessant ist auch der Vorschlag von de Finetti [14], statt der Ruinwahrscheinlichkeit den erwarteten Barwert aus der optimalen Dividendenstrategie eines Versicherungsunternehmens als Stabilitätsmaßstab zu verwenden.

3 Schwankende Grundwahrscheinlichkeiten

Die Versicherungspraktiker haben das eben beschriebene Modell der Risikotheorie

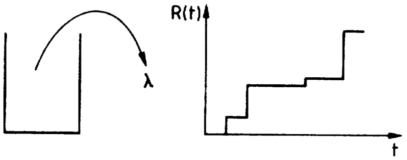
$$R(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} Y_j \quad \text{mit } P[R(t) \leqslant x] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} G^{*k}(x)$$

vor allem wegen der Annahme kritisiert, daß der Versicherer die Parameter seines Risikogeschehens kenne (resp. diese sich aus seinen Statistiken ermitteln ließen). Das kollektive Risikomodell – so die Kritiker – ließe sich schlecht oder gar nicht an die konkrete Situation des Versicherers anpassen.
Um dies tun zu können, müsse man

$$H_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} G^{*k}(x)$$

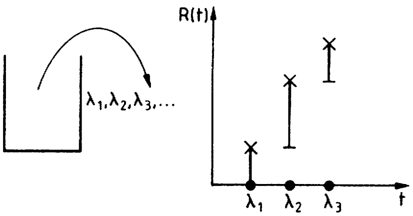
als die *bedingte* Gesamtschadenverteilung verstehen und λ als Realisation einer Zufallsvariablen Λ (Qualität des Risikos) verstehen.
Dabei gibt es prinzipiell zwei Ansätze:

I. Verallgemeinerung von Ove Lundberg [15]: λ wird zu *Beginn* des Prozesses gezogen und bleibt dann fest.



Prozeßpfad für festes λ

II. Verallgemeinerung von Ammeter [16]: In jedem ganzzahligen Punkt der Zeitachse wird unabhängig ein neuer Wert von λ gezogen.



Die Inkremente sind unabhängige Zufallsvariablen (zusammengesetzt Poisson mit Parameter-Werten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$).

Beide Vorstellungen charakterisieren Extremfälle: Bei Ove Lundberg bleibt die Qualität des Portfeuilles über die Zeit gleich, bei Ammeter wird die Qualität immer wieder ausgewürfelt (komplette Erneuerung). Der zweite Fall läßt sich wiederum mit einer geeigneten Transformation auf das ursprüngliche Modell von F. Lundberg/Cramér zurückführen; der erste bringt aber gedanklich eine *neue* Situation.
Es lohnt sich, dazu den Risikoprozeß $(R(t); t \geq 0)$ mit der Geschichte $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ so zu verstehen, daß der Poissonparameter λ zu einer Zufallsvariablen Λ verallgemeinert wird, die bezüglich keiner der σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ meßbar ist und die Verteilungsfunktion (Strukturfunktion) $W(\lambda)$ besitzt. Aus technischen Gründen für die folgenden Überlegungen verlangen wir $E[\Lambda] < \infty$.
In diesem verallgemeinerten Modell wird die Gesamtschadenverteilung

$$(21) \qquad H_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(t) G^{*k}(x) \qquad p(t) = \int e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \, dW(\lambda)$$

Auch die Ruinwahrscheinlichkeit läßt sich durch Konditionierung mittels der Zufallsvariablen Λ einfach berechnen. Es gilt

$$(22) \qquad \psi(x) = \int \psi(x/\lambda) dW(\lambda)$$

Die *Überraschung* geschieht, wenn man in diesem neuen Modell die Ruinwahrscheinlichkeiten numerisch berechnet.

Wegen $\psi(x/\lambda) = 1$ für $\lambda \geqslant c/E[Y]$ sieht man, daß gelten muß

$$\psi(x) \geqslant P\left[\Lambda \geqslant \frac{c}{E[Y]}\right] \quad \text{für alle x!!}$$

Jeder, der in diesem verallgemeinerten Modell mit schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten schon Ruinwahrscheinlichkeiten gerechnet hat, weiß von dieser Erfahrung zu berichten: Die Ruinwahrscheinlichkeiten wachsen auch bei recht vernünftigen Modellspezifizierungen in eine ganz andere Größenordnung!!
Es lohnt sich, dieses Dilemma etwas unter die Lupe zu nehmen. Betrachten wir nochmals den Überschußprozeß

$$U(t) = U_0 + ct - \sum_{j=0}^{N(t)} Y_j \quad (t \geqslant 0)$$

c steht für die Prämieneinnahme pro Zeiteinheit des Versicherungsunternehmens. Dieses ist aber einem Schadenverlauf R(t) unterworfen, der vom *unbekannten* Parameterwert λ wesentlich beeinflußt wird. Durch Kenntnis des Schadenverlaufes sollten wir dann aber andererseits auch den Wert λ sukzessive besser schätzen können! Das Versicherungsunternehmen, welches nicht laufend den Wert c adjustiert, der seine Prämieneinnahmen steuert, geht zu Recht in Ruin!

K o n s e q u e n z [17]: Im Modell mit schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten muß die Prämieneinnahme ebenfalls stochastisch verstanden werden: $c = (1 + r)\hat{\lambda}(t)E[Y]$. Man wählt dabei im Sinne der Bayes-Umkehrformel

$$(23) \qquad \hat{\lambda}(t) = E[\Lambda/N(s); s \leqslant t] = \frac{\int \lambda \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{N(t)}}{N(t)!} dW(\lambda)}{\int \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{N(t)}}{N(t)!} dW(\lambda)}$$

Die letzte Formel wird besonders einfach, wenn man als Strukturfunktion für Λ die Γ-Verteilung wählt. Diese besitzt bekanntlich die Dichte

$$f_\Gamma(x) = \frac{c^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-cx} \quad (x > 0)$$

mit Parameterwerten $c \in (0, \infty)$ $\gamma \in (0, \infty)$.
Dann wird

$$(24) \qquad \hat{\lambda}(t) = \frac{\gamma + N(t)}{c + t}$$

Also wird, um den Prozeß jetzt formal noch hinzuschreiben,

$$(25) \qquad U(t) = U_0 + (1 + r)E[Y] \int_0^t \frac{\gamma + N(s)}{c + s} ds - R(t)$$

oder allgemein

$$(26) \qquad U(t) = U_0 + (1 + r)E[Y] \int_0^t E[\Lambda/N(s)] ds - R(t)$$

Im allgemeinen Falle (26) sprechen wir von *Erfahrungstarifierung* der Prämie, im speziellen Falle (25) findet die Erfahrungstarifierung nach der *Credibility-Formel* (= lineare Funktion der Beobachtungen) statt.
Die Credibility-Formel (24) wird allerdings meistens wie folgt geschrieben

$$
(27)\quad \begin{cases} \hat{\lambda}(t) = \dfrac{c}{c+t}\dfrac{\gamma}{c} + \dfrac{t}{c+t}\dfrac{N(t)}{t} \\[2ex] \qquad = (1 - Z(t)) \cdot E[\Lambda] + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Credibility-Gewicht}}}{Z(t)} \cdot \dfrac{N(t)}{t} \\[2ex] \qquad = \text{gewichtetes Mittel zwischen Erwartungswert und} \\ \qquad\ \ \text{beobachtetem Durchschnitt.} \end{cases}
$$

Wir werden auf die Credibility-Formel im nächsten Abschnitt nochmals zurückkommen. Soviel zur Begriffsbildung.
Lassen wir das und stellen uns die Frage: Hat unsere Dynamisierung der Konstanten c den Zweck erreicht, den wir anvisiert haben, nämlich die Rückführung der Ruinwahrscheinlichkeit auf vernünftige Größenordnungen?
Wir wenden zu diesem Zweck nochmals den Satz über stochastische Zeittransformation an. $\hat{\lambda}(t)$ ist nämlich wiederum eine Intensität für den Zählprozeß $(N(t); t \geqslant 0)$. Zu prüfen ist, ob die folgende Beziehung stimmt:

$$
(28)\qquad E[N(t) - N(s)/\mathcal{F}_s] = E\left[\int_s^t \hat{\lambda}(\tau)d\tau/\mathcal{F}_s\right] \qquad \text{für alle } t \geqslant s
$$

Die linke Seite liefert für den bedingten Erwartungswert bezüglich der von Λ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{G}$ und bezüglich $\mathcal{F}_s$

$$
E[N(t) - N(s)/\mathcal{G} \vee \mathcal{F}_s] = \lambda(t-s)
$$

also $\quad E[N(t) - N(s)/\mathcal{F}_s] = E[\Lambda/\mathcal{F}_s](t-s)$

Die rechte Seite liefert durch Vertauschung von bedingtem Erwartungswert und Integral

$$
E \int_s^t E[\Lambda/\mathcal{F}_\tau]d\tau/\mathcal{F}_s = E[\Lambda/\mathcal{F}_s](t-s)
$$

Für die operationelle Zeit $m(t) = \int_0^t \hat{\lambda}(\tau)d\tau$ wird also der Zählprozeß wiederum zum homogenen Poissonprozeß, und wir haben dann in der neuen Zeitskala

$$
(29)\qquad U(m) = U_0 + (1+r)E[Y]m - \tilde{R}(m) \text{ mit } \textit{festem} \text{ Poissonparameter } \underset{\uparrow}{\lambda} = 1
$$

Das Ruinproblem ist damit auf das *klassische* Ruinproblem zurückgeführt, und der Ruinwahrscheinlichkeit ist die gleiche wie im klassischen Fall mit Zuschlagfaktor (1 + r). Insbesondere liefert

$$
(30)\qquad 1 + (1+r)E[Y]k = E[e^{kY}]
$$

wiederum den maßgebenden exponentiellen Parameter für

$$\psi(x) \leqslant e^{-kx}$$

Beachte. $E[Y] \cdot m(t)$ ist der Kompensator des Prozesses $R(t)$. Die grundlegende Prämienstrategie eines Versicherungsunternehmens ist es also, laufend die Prämien dem Kompensator anzupassen.

4 Erfahrungstarifierung und Credibility

In unserem Modell des kollektiven Risikos haben wir feststellen müssen, daß das Überleben der Versicherungsinstitution wesentlich davon abhängt, daß im Risikogeschehen zufällige (und nicht direkt beobachtbare) Parameter aufgrund der Beobachtungen des Risikogeschehens laufend revidiert werden. Dies kommt für das kollektive Risiko typischerweise so zustande, daß wir dieses Vorgehen für die individuellen Risiken (oder bestimmte Gruppen von individuellen Risiken) übernehmen. Selbstverständlich gilt das auch, falls mehrere Parameter als zufällig aufgefaßt werden, insbesondere auch solche, die sich auf die Schadenhöhe beziehen.
Auf dem Niveau des individuellen Risikos und bei diskreter Zeitrechnung formulieren wir wie folgt:
Sei θ der Risikoparameter für das individuelle Risiko, welches wir über die Perioden $1, 2, \ldots n$ beobachtet haben.
Die entsprechenden Zufallsvariablen seien

$$X_1, X_2, \ldots X_n$$

und die noch nicht beachtete nächste Zufallsvariable sei X_{n+1}.
Entsprechend unserem Risikoprozeß machen wir folgende Annahmen über das zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsgesetz. (Ich konzentriere mich hier auf den einfachsten Fall, für allgemeinere Modelle sei auf die Literatur verwiesen.)

i) $(X_i)_{i=1,2,3,\ldots n+1}$ sind bei gegebenem θ i.i.d. mit Erwartungswert $\mu(\theta)$, Varianz $\sigma^2(\theta)$

ii) θ ist Realisation einer Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $W(\theta)$

Die in der Periode $n + 1$ zu verlangende Erfahrungstarifierungsprämie ist dann das $(1 + r)$-fache der *Erfahrungsnettoprämie*

$$E[X_{n+1}/X_1, X_2, \ldots, X_n] = E[\mu(\theta)/X_1, X_2, \ldots, X_n] \tag{31}$$

Mit $S_n = \sum_{i=1}^{n} Xi$ suchen wir die im Sinne der kleinsten Quadrate beste lineare Approximation von (31). Diese erhält man aus der Lösung des Problems

$$E[(\mu(\theta) - a - bS_n)^2] = \min \tag{32}$$

Nach einfacher Rechnung findet man [18]

$$(33)\qquad a + bS = Z(n)\,\frac{S_n}{n} + (1 - Z(n))E[\mu(\theta)] \quad \text{mit} \quad Z(n) = \frac{n}{n + \dfrac{E[\sigma^2(\theta)]}{\mathrm{Var}\,[\mu(\theta)]}}$$

Diese lineare Approximation, die Credibility-Prämie, ist die in der Praxis verwendete Quantifizierung der Prämienanpassungsstrategie. Die Credibility-Technik war in den letzten zwei Jahrzehnten ein zentraler Gegenstand versicherungsmathematischer Forschung. Zum Einstieg in dieses Gebiet sei [19] empfohlen. Eine umfassende Bibliographie [20] ist eben publiziert worden.

5 Prämienberechnung als Strategie des Versicherungsunternehmens

In unserer Vorgehensweise haben wir gedanklich die Erfahrungstarifierung auf der Stufe des individuellen Risikos als Konsequenz eines *Stabilitätskriteriums* des Versicherungsunternehmens formuliert. Diese Vorgehensweise bezeichnet man als strategisch oder als „von oben nach unten“ [21].
Nun hat das Versicherungsunternehmen aber auch *finanzielle Ziele.* In Analogie zu unserem Vorgehen bei dem Postulat nach Stabilität, wären diese auch zunächst auf der kollektiven Ebene zu formulieren und dann zu fragen, welche Konsequenzen dies für die Prämienberechnung auf dem individuellen Niveau habe.
Dazu ist allerdings zunächst ein Element in unsere Modellbildung einzubeziehen, welches wir bis jetzt vollständig vernachlässigt haben: der *Zins.*
Gehen wir zu diesem Zweck auf die Formeln (15) resp. (26) zurück, welche den Überschußprozeß definieren. Diese lassen sich auch in Form einer stochastischen Differentialgleichung schreiben

$$\begin{array}{ll} \text{Anfangsbedingung:} & U(0) = U_0 \\ \text{Rekursion:} & dU(t) = c\,dt - dR(t) \\ \text{wobei je nachdem } c & \left\{ \begin{array}{ll} \text{fest} & \text{Formel (15)} \\ \text{oder stochastisch} & \text{Formel (26)} \end{array} \right. \end{array}$$

verstanden wird. Unter Hinzunahme eines Zinsbeitrages

$U(t)\,\delta dt$ mit Zinsintensität δ

wird dann wie folgt verallgemeinert

$$(34)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Anfangsbedingung:} & U(0) = U_0 \\ \text{Rekursion:} & dU(t) = c\,dt + U(t)\,\delta dt - dR(t) \end{array} \right.$$

Folgende Tabelle zeigt die Spielmöglichkeiten in der Modellbildung [22]:

Schadenprozeß $R(t)$	Kontrollvariable c	Zinsintensität	Ruinproblem
ZP	fest	0	klassisch; gelöst
GZP	$(1 + r)E[Y]\hat{\lambda}(t)$	0	gelöst durch Dubey
ZP	fest	fest $\neq 0$	gelöst durch Segerdahl, Gerber
GZP	$(1 + r)E[Y]\hat{\lambda}(t)$	fest $\neq 0$	A
ZP	fest	$\delta(t)$ Diffusionsprozeß	B
GZP	$(1 + r)E[Y]\hat{\lambda}(t)$	$\delta(t)$ Diffusionsprozeß	C

ZP: Zusammengesetzt Poisson; GZP: Gewichtet zusammengesetzt Poisson (schwankender Parameter λ)

Die Fälle A, B, C sind meines Wissens in der Literatur nirgends gelöst. Am erfolgversprechendsten ist noch B, für welches mindestens eine Integralgleichung angegeben werden kann. In den Fällen A und C ist das Problem deshalb äußerst kompliziert, weil eine Zeittransformation zwar den reinen Schadenprozeß vereinfacht, dafür aber den Prozeß der Zinseinnahmen (Zinsen werden in „real time“ bezahlt!) ganz erheblich verkompliziert.
Allerdings, wenn wir unsere Kontrollvariable c genügend allgemein verstehen, können wir mit dem Problem zurechtkommen. Um technische Schwierigkeiten zu umgehen, lassen Sie mich dies im Fall diskreter Zeit illustrieren:
Seien U_0 die Anfangsreserve im Zeitpunkt 0

$X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$	die Schadenbelastungen in den Zeitabschnitten $1, 2, \ldots, n \ldots$
$i_1, i_2, \ldots, i_n \ldots$	die Zinssätze in den Zeitabschnitten $1, 2, \ldots, n \ldots$

Dann lautet das diskrete Analogon zu (34)

$$(35) \quad U_n = (1 + i_n)U_{n-1} + P_n - X_n$$

Folgenden Satz schreibt Dubourdieu [23] de Finetti zu:
Wähle P_n so, daß

$$E[e^{-k(i_n U_{n-1} + P_n - X_n)}/U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}] = 1$$

Dann gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit: $\psi(U_0) \leqslant e^{-kU_0}$. Daraus finden wir

$$(36) \quad P_n = \frac{1}{k} \ln E[e^{k(X_n - i_n U_{n-1})}/U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}]$$

$$\sim E[X_n - i_n U_{n-1}/U_1, \ldots U_{n-1}]$$

$$+ \frac{k}{2} \operatorname{Var}[X_n - i_n U_{n-1}/U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}]$$

Im Falle, wo der stochastische Zinssatz i_n von X_n und $U_1, \ldots, U_{n-1}$ unabhängig ist, gilt also

$$(37)\quad P_n \sim E[X_n/U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}] - E[i_n]U_{n-1} + \frac{k}{2}\operatorname{Var}[X_n/U_1, \ldots, U_{n-1}] + \frac{k}{2}U_{n-1}^2 \operatorname{Var}[i_n]$$

Bei Verwendung der Tarifierungsformel (37) ist das strategische Unternehmerziel Stabilität erfüllt: Die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(U_0)$ wird durch die Schranke e^{-kU_0} kontrolliert.
Die finanzielle Unternehmerstrategie kann nun so verstanden werden, daß man bei vorgegebenem Produkt kU_0 ($\rightarrow$ vorgegebener Ruinwahrscheinlichkeit) das durch die Prämie ebenfalls zu entschädigende Anfangskapital U_0 optimal wählt. Das kann auf viele Arten geschehen. Eine Möglichkeit ist in [21] aufgezeigt.

6 Prämienberechnungsprinzipien

Die Tarifierungsformel (37) gilt für das kollektive Risiko. Sei $X_n = \sum_{i=1}^{N} X_{in}$ die kollektive Schadenbelastung, welche erzeugt wird durch die Summe individueller Schadenbelastungen X_{in} (Schadenbelastung des Risikos i (i = 1, 2, ..., N) im Zeitabschnitt n).
Wie ist das *Total* gemäß (37) fairerweise aufzuteilen auf die individuellen Risiken? Wir fragen nach der *Prämie* P_{in} für das *Risiko* X_{in}. Allgemein nennen wir das reellwertige Funktional

$$\mathcal{H} : X_{in} \rightarrow \mathcal{H}(X_{in}) = P_{in}$$

ein *Prämienberechnungsprinzip.* Dieses soll so gewählt werden, daß das Problem der fairen Aufteilung gelöst wird. Das Studium solcher Prämienberechnungsprinzipien ist in den letzten 20 Jahren sehr intensiv betrieben worden [24]. Um die Dinge möglichst kompakt darzustellen, argumentieren wir im folgenden *ohne* Zinselement.
Im Falle unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n \ldots$ wird dann (37) zu

$$(38)\quad P_n = \frac{1}{k}\ln E[e^{kX_n}]$$

oder

$$(39)\quad P_n \sim E[X_n] + \frac{k}{2}\operatorname{Var}[X_n]$$

Beide Formeln, (38) (Exponentialprinzip) und (39) (Varianzprinzip), stellen Prämienberechnungsprinzipien dar. Da sie beide additiv sind (additiv heißt: für X, Y unabhängig gilt $\mathcal{H}(X + Y) = \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$), lassen sie sich direkt auf das *individuelle* Risiko X_{in} anwenden. Eine interessante Frage ist die nach der Charakterisierung *aller* additiven Prämienberechnungsprinzipien. Es ist dazu nützlich, die kumulantenerzeugende Funktion

$$\ln E[e^{tX}]$$

und ihre Ableitung

(40) $\phi_X(t) = \frac{d}{dt} \ln E[e^{tX}]$ (deren Existenz vorausgesetzt sei)

zu betrachten. Wir fassen das Prämienberechnungsprinzip dann als Funktional

$\mathcal{H} : \phi_X \mapsto \mathcal{H}(\phi_X)$ auf.

Additiv bedeutet dann

(41) $\mathcal{H}(\phi_X + \phi_Y) = \mathcal{H}(\phi_X) + \mathcal{H}(\phi_Y)$ für bel. ϕ_X, ϕ_Y

(beachte, daß in dieser Formulierung X, Y *automatisch* unabhängig sind).
Folgender Satz von Gerber und Goovaerts [25] ist instruktiv: Die 3 Bedingungen

i) $\mathcal{H}(\phi_X + \phi_Y) = \mathcal{H}(\phi_X) + \mathcal{H}(\phi_Y)$ Additivität

ii) $\mathcal{H}(c) = c$ Preis einer Konstanten ist diese selbst

iii) $\phi_X(t) \leqslant \phi_Y(t) \Rightarrow \mathcal{H}(\phi_X) \leqslant \mathcal{H}(\phi_Y)$ Monotonie
für alle t

sind genau dann erfüllt, wenn

(42) $\mathcal{H}(\phi) = L(-\infty)\phi(-\infty) + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(h) dL(h) + (1 - L(\infty))\phi(\infty)$

L monoton zunehmend mit $0 \leqslant L \leqslant 1$.
$\mathcal{H}$ ist also additiv (+ Regularitätsbedingungen ii), iii)) genau dann, wenn es *Mischung* von Prinzipien der Form

(43) $\mathcal{H}(\phi) = \phi(h)$ ist.

Man rechnet leicht nach, daß

(44) $\phi_X(h) = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}$

Auf der rechten Seite steht der Erwartungswert der Esscher-Transformation von X, weshalb $\phi_X(h)$ auch *Esscherprämie* für das Risiko X heißt. Das Prämienberechnungsprinzip (43) heißt entsprechend *Esscher-Prinzip.*
Es ist höchst interessant, daß das Esscher-Prinzip auch aus einem ökonomischen Gleichgewichtsmodell gewonnen werden kann [26]: Wir betrachten m Risikoträger, die untereinander Risiken *austauschen.*

Agent i – hat sein eigenes Risiko X_i
(i = 1, 2, . . ., m)

– bewertet Zufallsvariablen mit der Nutzenfunktion
$u_i(x) = 1 - e^{-\alpha_i x}$

Auf dem *Markt* können Zufallsvariablen (konditionelle Zahlungen) Y_i gekauft werden. (Falls ω eintritt, erhält man $Y_i(\omega)$) und zwar zum Preis

$$\text{Preis}\,[Y_i] = E[\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Preisdichte}}}{\varphi} \cdot Y_i] = \int \varphi(\omega) Y_i(\omega)\, dP(\omega) \tag{45}$$

Das Gleichgewichtsproblem ist die Suche nach

$$\left\{\begin{array}{l} (\tilde{\varphi}, \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_m), \text{ so daß} \\ \text{1) Für alle } i = 1, 2, \ldots, m \\ E[u_i(-X_i + Y_i - E[\varphi Y_i])] = \max \text{ für alle möglichen Wahlen von } Y_i \\ \text{(Optimalität für Risikoträger i)} \\ \text{2) } \sum_{i=1}^{m} Y_i(\omega) \equiv 0 \text{ für alle } \omega \text{ (Gleichgewichtsbedingung)} \end{array}\right. \tag{46}$$

Man findet, daß es genau einen Gleichgewichtspreis gibt, und zwar

$$E[\tilde{\varphi} X_i] = \frac{E[X_i e^{\alpha \sum_{j=1}^{m} X_j}]}{E[e^{\alpha \sum_{j=1}^{m} X_j}]} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\alpha} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha_j} \tag{47}$$

Falls die X_i unabhängig sind, liefert (47) genau die Esscher-Prämie mit $h = \alpha$.
Das Resultat, welches hier nur für exponentielle Nutzenfunktionen formuliert ist, gilt lokal allgemein. Im allgemeinen Falle tritt an die Stelle der festen Parameter α_i die variable Risikoaversion $\rho_i(x) = -u_i''(x)/u_i'(x)$, womit eine höchst interessante Verbindung zur Prattschen Theorie der Risikoaversion hergestellt ist.
Diese letzten Gedankengänge zeigen, wie auf natürliche Weise Begriffsbildungen aus der Ökonomie in die Risikotheorie eingehen und diese befruchten. Diese Querverbindung gehört – wie ja schon einleitend gesagt – eben auch dazu, wenn man versuchen will zu sagen, was Risikotheorie sei.

Literaturangabe mit Hinweisen

[1] Als Anfang der Versicherungsmathematik wird oft die Publikation der ersten Sterbetafel von Edmond Halley betrachtet: „An estimate of the degrees of Mortality of Mankind drawn from curious Tables of Births and Funerals at the City of Breslau with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives"; erschienen in den Londoner Philosophical Transactions 1693

[2] Gerber, H. U.: An Introduction to Mathematical Risk Theory. Huebner Foundation Monograph, Wharton School University of Pennsylvania 1980

[3] Lundberg, F.: Zur Theorie der Rückversicherung. Berichte des Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker in Wien 1909

[4] Weitere Arbeiten von F. Lundberg sind:
–: Theöri för riskmassor (Forsäkringsinspektionen) Stockholm 1919
–: Försäkringsteknisk riskutjämning (F. Englund) Stockholm 1926–1928

–: Approximerod fromställning av samoliketsfunktionen (Almquist and Wiksell) Uppsala 1903
–: Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1930

[5] Cramér, H.: Review of F. Lundberg Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1926
–: On the Mathematical Theory of Risk. Skandia Jubilee Volume. Stockholm 1930
–: Collective Theory of Risk, a Survey of the Theory from the Point of View of the Theory of Stochastic Processes. Skandia Jubilee Volume. Stockholm 1955

[6] Die ausgedehnte Verwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik scheint mindestens im deutschen Sprachgebrauch zurückzugehen auf
Karup, J.: Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Wittwen-Societät, Dresden 1893
Zwinggi bezeichnet in seinem Lehrbuch „Versicherungsmathematik" (Basel: Birkhäuser 1945) J. H. Lambert (1728–1777) als ersten Mathematiker, der Sterbeintensitäten verwendete.

[7] Brémaud, P.: Point Processes and Queues, Martingale Dynamics. Springer-Verlag 1980
Brémaud schreibt den zitierten Satz Bismut und Boel zu. Eine frühere Referenz ist:
Papangelou, F.: Integrability of Expected Increments of Point Processes and a Related Random Change of Scale. Transactions of the American Mathematical Society 1972

[8] Panjer, H.H.: The Aggregate Claims Distribution and Stop Loss Reinsurance. Transactions of the Society of Actuaries 1980
Panjer hat den Algorithmus in die versicherungsmathematische Literatur eingebracht. In anderen Gebieten war er aber schon bekannt.
Adelson, R. M.: Compound Poisson Distribution. Operations Research Quarterly **17** (1966)
Neyman, J.: On a New Class of 'Contagious' Distributions, Applicable in Entomology and Bacteriology. Annual of Math. Stat. **10** (1939

[9] siehe z. B.
Henrici, P.: Fast Fourier methods in computational complex analysis. SIAM J. **21**, no. 4 (1979)
Bühlmann, H.: Numerical Evaluation of the Compound Poisson Distribution: Recursion on Fast Fourier Transform? Scandinavian Actuarial Journal (1984)

[10] Cramér, H.: On some questions connected with mathematical risk. University California Publication in Statistics 1954

[11] Feller, W.: An introduction to probability theory and its application, vol. 2. New York: Wiley 1966

[12] Gerber, H. U.: Martingales in Risk Theory. Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 2 (1973)

[13] siehe z. B.
Davidson, Å.: Om ruinproblemet i den kollektiva riskteorien under antagande av variabel säkerhetsbelastning. F. Lundberg Jubilee volume, 1946
Segerdahl, C. O.: A Survey of Results in the Collective Theory of Risk. Harald Cramér Volume. Stockholm and New York: Wiley 1959

[14] de Finetti, B.: Su un'impostazione alternativa della teoria colletiva del rischio. Trans. XV. Int. Congr. Act. **2** (1957)

[15] Lundberg, O.: On random processes and their applications to sickness and accident statistics. University of Stockholm thesis. Uppsala 1940

[16] Ammeter, H.: A generalisation of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic probabilities. Skandinavisk Aktuarietidskrift (1948)

[17] Bühlmann, H.: Ruinwahrscheinlichkeit bei erfahrungstarifiertem Portfeuille. Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 2 (1972)
Dubey, A.: Probabilité de ruine lorsque le paramètre de Poisson est ajusté a posteriori. Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 2 (1977)

[18] Bühlmann, H.: Experience Rating and Credibility. ASTIN Bulletin **IV**, Part III (1967)

[19] Jewell, W. S.: A survey of Credibility Theory. ORC 76-31, Operations Research Center, University of California, Berkeley 1976

Norberg, R.: The Credibility Approach to Experience Rating. Scandinavian Actuarial Journal, no. 4 (1979)

[20] Insurance Abstracts and Reviews. Special Issue on Credibility Theory, vol. 2, number 2. North Holland 1986

[21] Bühlmann, H.: Premium Calculation from Top down. ASTIN Bulletin **15**, no. 2 (1985)

[22] Die Modellvariationen finden sich in:
Dubey, A. Referenz [17]
Segerdahl, O. Referenz [13]
Gerber, H. U. Referenz [2]

[23] Dubourdieu, J.: Théorie mathématique des assurances. Paris: Gauthier-Villars 1952

[24] Goovaerts, M. J.; de Vylder, F.; Haezendonck, H.: Insurance Premiums. North Holland 1984

[25] Gerber, H., Goovaerts, M.: On the representation of additive principles of premium calculation. Scandinavian Actuarial Journal (1981)

[26] Bühlmann, H.: An Economic Premium Principle. ASTIN Bulletin **11** (1980)
–: The General Economic Premium Principle. ASTIN Bulletin **14** (1984)

Prof. Dr. H. Bühlmann
Eidgen. Techn. Hochschule
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich

(*Eingegangen: 8. 9. 1986,*
korrigierte Fassung: 28. 11. 1986)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1988 B. G. Teubner Stuttgart
90 (1988) 129–144
AMS subject classification: 60 G 57, 62 G 05

Empirische Prozesse in der Datenanalyse*)

Winfried Stute, Gießen

0 Einleitung

Empirische Prozesse zählen heute ohne Zweifel mit zu den wichtigsten Werkzeugen bei der statistischen Analyse von Datenfolgen. Ziel meiner Ausführungen ist es, dem Leser eine kleine Auswahl ihrer Einsatzmöglichkeiten vorzustellen. Insbesondere kommt es mir darauf an, deutlich zu machen, daß es nicht nur „den“ Empirischen Prozeß gibt (s. (1) unten), sondern eine Vielzahl von Prozessen verwandter Bauart, die entsprechend der Problemstellung Verwendung finden. Natürlich setzt ein effektiver Einsatz solcher Größen die genaue Kenntnis der wahrscheinlichkeitstheoretischen Eigenschaften voraus. Einen Überblick dazu findet man für den klassischen Empirischen Prozeß in dem Artikel von Gaenssler und Stute [8], und weitaus detaillierter im kürzlich erschienenen Buch von Shorack und Wellner [30].
Daten sind aufzufassen als Realisierungen von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n, \ldots$; $n \in \mathbf{N}$ ist also der Stichprobenumfang.
Im engeren Sinne beschäftigt sich die Theorie vorwiegend mit solchen Folgen, die unabhängig und identisch verteilt sind, im weiteren Sinne mit solchen Variablen, wo z. B. unabhängige Größen nur als bestimmte Teilkomponenten auftreten, oder die Unabhängigkeit durch eine geeignete Mischungseigenschaft ersetzt wird.
In der Mehrzahl der Fälle sind die Daten endlich-dimensional und als Punkte in einem Euklidischen Raum $\mathbf{R}^d$ interpretierbar.
Betrachten wir zunächst den Fall $d = 1$, also reelle Daten, und sei F die allen X_i gemeinsame Verteilungsfunktion, d. h. F(t) ist die (in der Regel unbekannte) Wahrscheinlichkeit, daß ein zukünftiges wie die X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, verteiltes X einen Wert kleiner oder gleich t annimmt. Das gesamte stochastische Verhalten von X wird durch F beschrieben, deshalb muß es unser Bestreben sein, über die bereits gewonnenen Daten $X_1, \ldots, X_n$ Information über F zu gewinnen. Ein Schätzer, welcher jeder Beobachtung gleiches Gewicht zumißt, ist die sogenannte Empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,\, t]}(X_i), \quad t \in \mathbf{R}$$

*) Vortrag gehalten auf der DMV-Tagung in Marburg am 18. 9. 1986.

wobei 1_A wie üblich die Indikatorvariable zu einer Menge A bezeichnet. Offenbar ist F_n eine Verteilungsfunktion, die in den Daten um $1/n$ springt (falls keine Bindungen vorhanden sind) und sonst konstant ist. Für multivariate Daten sind die Halbstrahlen $(-\infty, t]$ durch entsprechende Viertelräume (Quadranten) zu ersetzen. Wir zitieren nur zwei fundamentale Ergebnisse über das asymptotische Verhalten von F_n, $n \geqslant 1$. Das erste Resultat sagt aus, daß für wachsenden Stichprobenumfang $(F_n)_n$ in der Tat eine konsistente Schätzerfolge für F ist:

G l i v e n k o – C a n t e l l i [9], [4]: $\sup_t |F_n(t) - F(t)| \to 0$ für $n \to \infty$ (fast sicher).

Um die genaue Konvergenzrate zu bestimmen, haben wir $F_n - F$ so mit einer gegen ∞ konvergierenden Folge zu multiplizieren, daß der entstehende Prozeß asymptotisch nicht degeneriert ist. Der zentrale Grenzwertsatz legt die Standardisierung $n^{1/2}$ nahe, d. h. wir betrachten

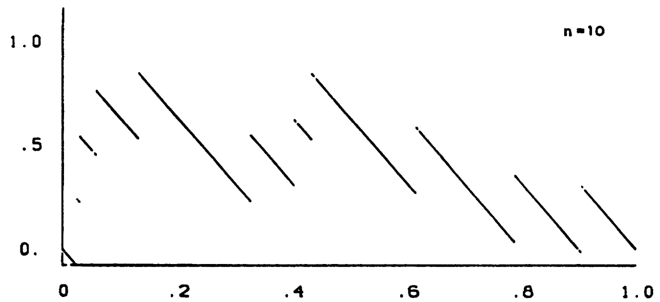
(1) $\quad \alpha_n(t) = n^{1/2}[F_n(t) - F(t)], \quad t \in \mathbf{R}.$

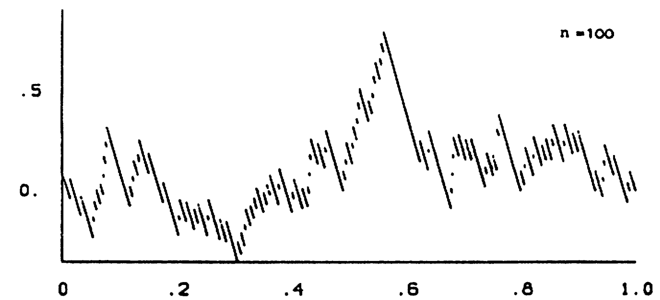
α_n heißt E m p i r i s c h e r P r o z e ß zum Stichprobenumfang n. Seine Pfade sind rechtsseitig stetig und besitzen linksseitige Limiten.

D o n s k e r [7]: $\alpha_n \to B^0 \circ F$ in Verteilung für $n \to \infty$.

Dabei ist B^0 eine Brownsche Brücke, und die Verteilungen aller auftretenden Prozesse sind erklärt über dem vorher beschriebenen Funktionenraum; vgl. Billingsley [1] und Pollard [23].

Den drei folgenden Plots liegen auf [0, 1] gleichverteilte Daten zugrunde. Bereits bei n = 500 sind die einzelnen Sprünge kaum noch auszumachen. Asymptotisch spiegelt sich dieser Verschmierungseffekt in der Stetigkeit von B^0 wider.





Sowohl was die theoretischen Ergebnisse als auch die praktischen Verfahren anbetrifft, nimmt der Fall d = 1 eine Ausnahmestellung ein. Dies hat letzten Endes damit zu tun, daß $\mathbf{R}^1$ totalgeordnet und für jedes $n \geq 1$ der Prozeß $\{F_n(t): t \in \mathbf{R}\}$ ein Markovprozeß ist, also für die Behandlung von F_n eine umfangreiche Kollektion technischer Hilfsmittel verfügbar ist. Es kommt hinzu, daß sich jedes F_n unter Zuhilfenahme der Inversen oder Quantilfunktion F^{-1} in Form einer uniformen empirischen Verteilungsfunktion schreiben läßt. Dies führt, wie wir sofort sehen werden, zu wichtigen v e r t e i l u n g s f r e i e n Statistiken.
Sei U gleichverteilt über [0, 1], d. h. U besitzt die Verteilungsfunktion

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ t & \text{für } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq t \end{cases}$$

Dann ist $F^{-1} \circ U$ wie X nach F verteilt, wobei

$$F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbf{R}: F(t) \geq u\} \quad \text{für } 0 < u < 1$$

die Quantilfunktion zu F ist. Dies hat zur Folge, daß man sich sämtliche X_i in der Form $X_i = F^{-1}(U_i)$ erzeugt vorstellen kann. Sei $\bar{F}_n$ die empirische Verteilungsfunktion zu $U_1, \ldots, U_n$, und $\bar{\alpha}_n$ der zugehörige Empirische Prozeß. Dann gilt

$$(2) \qquad F_n(t) = \bar{F}_n(F(t)), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

und

$$(3) \qquad \alpha_n(t) = \bar{\alpha}_n(F(t)), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Empirische Verteilungsfunktion ermöglichen eine kompakte Darstellung vieler elementarer Statistiken. (2) und (3) können dann sehr hilfreich sein z. B. bei der Untersuchung der zugehörigen Verteilungen.
Zunächst kann man wie für F auch Inverse für F_n bilden. Setzt man u = i/n, erhält man

$$F_n^{-1}(i/n) = X_{i:n}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

die i-te O r d n u n g s s t a t i s t i k der Stichprobe, d. h. das i-t größte Datum (Totalordnung von $\mathbf{R}$!).
(2) liefert

$$F_n^{-1}(u) = F^{-1}(\bar{F}_n^{-1}(u))$$

und damit eine Zurückführung auf den gleichverteilten Fall. Die letzte Gleichung liefert sofort, daß zu einem vorgegebenen Konfidenzniveau $1-\alpha$ und für ein festes $0<u<1$ ein verteilungsfreies Konfidenzintervall für das unbekannte u-Quantil $F^{-1}(u)$ gegeben ist durch $[X_{u_1 n:n}, X_{u_2 n:n}]$ mit $u_1 < u < u_2$ geeignet.
Wertet man F_n an den Daten selbst aus, erhält man den Vektor der R ä n g e :

$$F_n(X_i) = n^{-1} \text{ Anzahl der Daten} \leqslant X_i = n^{-1} \text{ Rang } X_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Ist F stetig, folgt $F \circ F^{-1}(u) = u$, also mit (2)

$$F_n(X_i) = \bar{F}_n(F(X_i)) = \bar{F}_n(F \circ F^{-1}(U_i)) = \bar{F}_n(U_i).$$

Da F „herausgefallen“ ist, wird deutlich, daß die Verteilung des Rangvektors nicht von F abhängt (Stetigkeit vorausgesetzt), d. h. die Ränge sind verteilungsfrei.
Ein Maß für die Güte der Approximation von F durch F_n ist z. B.

$$D_n = \sup_t |F_n(t) - F(t)|$$

(2) liefert

$$D_n = \sup |\bar{F}_n(F(t)) - F(t)|,$$

also bei Stetigkeit von F (Zwischenwertsatz)

$$D_n = \sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} |\bar{F}_n(u) - u|$$

und damit die Verteilungsfreiheit von D_n.
Faßt man F_n als Maß auf und ist ψ eine zu integrierende Funktion, so ist

$$\int \psi(t) F_n(dt) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \psi(X_i),$$

insbesondere erhält man für $\psi = \mathrm{Id}$ das arithmetische Mittel.
Ist $\psi = \psi(s,t)$ eine Funktion von zwei Variablen, die man bzgl. $F_n \otimes F_n$ integriert, liefert dies

$$\int \psi(s,t) F_n(ds) F_n(dt) = n^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} \psi(X_i, X_j),$$

also eine Statistik, die eng mit einer U-Statistik (vom Grade 2) zusammenhängt. Der in den Jber. erschienene Artikel von Denker [5] macht deutlich, daß allein diese Klasse von Statistiken Gegenstand einer gesonderten Erörterung sein kann.
Wir wollen zum Abschluß dieser Einleitung noch einmal auf die Schwierigkeiten zu sprechen kommen, die sich im Zusammenhang mit der Verteilungsfreiheit bei multivariaten Daten ergeben. Sei o. E. $d = 2$ und $X = (Y_1, Y_2)$. Bezeichne F die Marginalverteilung von Y_1 und sei $m(\cdot|\cdot)$ die bedingte Verteilungsfunktion von Y_2 gegeben Y_1, also (W für Wahrscheinlichkeit)

$$W(Y_1 \leqslant t_1, Y_2 \leqslant t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} m(t_2 | t) F(dt)$$

Sei (U, V) gleichverteilt über $[0, 1]^2$. Man sieht sehr leicht, daß

$$(F^{-1}(U), m^{-1}(V|F^{-1}(U))) \sim X = (Y_1, Y_2) \text{ in Verteilung.}$$

Der Versuch, analog zu (2) F_n durch die Empirische Verteilungsfunktion von Größen (U_i, V_i) auszudrücken, scheitert i. allg. daran, daß das Auftreten von U_i innerhalb der bedingten Verteilungsfunktion zu einer Bedingung an die (U_i, V_i) führt, die nicht durch Quadranten beschreibbar ist. Umgekehrt ist (unter einer Glattheitsannahme) (F(X), m(Y|X)) zwar gleichverteilt über $[0, 1]^2$, will man aber „zweidimensionale Ränge" einführen, d. h. $(F(X_i), m(Y_i|X_i))$ durch eine empirische Größe ersetzen, erforderte dies die Schätzung der bedingten Verteilungsfunktion. Obwohl dies prinzipiell möglich ist, sagen wir mittels m_n, geht dabei die Verteilungsfreiheit von $(F_n(X_i), m_n(Y_i|X_i))$ verloren.

1 Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt wollen wir einige Fragestellungen kennenlernen, zu deren statistischer Analyse Empirische Prozesse äußerst hilfreich sein können. Bei der Angabe von Literatur habe ich mich auf Schlüsselstellen beschränkt.

A. Schätzung von Parametern

Häufig interessieren nur gewisse Parameter von F. Ist f = F' z. B. symmetrisch um ein nicht bekanntes θ_0, so stellt sich die Frage, wie θ_0 aus den Daten zu schätzen ist. Oder ist $\mathcal{F} = \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ eine parametrische Familie, so interessiert der (Minimum-Distanz-)Parameter θ_0, für den

$$\|F - F_{\theta_0}\| = \min_\theta \|F - F_\theta\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ ein geeignetes Distanzmaß auf dem Raum der Verteilungsfunktionen ist. Im ersten Fall gilt z. B. für jede punktsymmetrische Funktion ψ

$$\int \psi(x - \theta_0)F(dx) = 0,$$

d. h. θ_0 ist identifizierbar als Lösung einer gewissen Gleichung. Da F nicht bekannt ist, haben wir es hier mit einer für den Nichtstochastiker sicherlich paradoxen Situation zu tun, insofern man eine Gleichung zu lösen hat, die man gar nicht kennt. Ich betone diesen Sachverhalt ausdrücklich, da er in verschiedenen Varianten immer wieder auftritt. Da nun F durch F_n konsistent geschätzt wird, kann man versuchen, in der obigen Gleichung F durch F_n zu ersetzen und θ_0 durch die Lösung θ_n von

$$\int \psi(x - \theta)F_n(dx) \stackrel{!}{=} 0 \tag{4}$$

zu schätzen. Da F_n ein zufälliges Maß ist, ist θ_n eine zufällige Größe. Insofern macht es Sinn, über Verteilungsaussagen von θ_n nachzudenken. Natürlich wird dabei die Wahl von ψ eine Rolle spielen. Untersuchungen dieser Art findet man innerhalb der sogenannten Robusten Statistik; vgl. Huber [13], Serfling [29]. Der obige Schätzer heißt M-Schätzer. Diese Bezeichnung soll daran erinnern, daß er die gleiche Struktur besitzt wie der Maximum-Likelihood-Schätzer zu einer parametrischen Familie $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ von Dichten, wo man als Score-Funktion nicht $(x, \theta) \to \psi(x - \theta)$, sondern $(x, \theta) \to \frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(x)/f_\theta(x)$ zu wählen hat. Der durch (4) definierte Schätzer ist nicht skaleninvariant. Um dies zu erreichen, hat man anstelle von (4)

$$(5) \qquad \int \psi\left(\frac{x-\theta}{\sigma_n}\right) F_n(dx) = 0$$

zu lösen, wobei $\sigma_n = \sigma_n(F_n)$ ein lokationsinvarianter und skalenequivarianter Schätzer des Skalenparameters ist. Allgemein gesprochen bedeutet dies, daß wir eine Gleichung vom Typ

$$(6) \qquad \int T(x, \theta, F_n)F_n(dx) = 0$$

zu lösen haben. In der Tat lassen sich z. B. Cramér-von-Mises-Minimum-Distanz-schätzer, L- und R-Schätzer mit geeignetem T sämtlich in der Form (6) schreiben; vgl. Stute [36]. Mathematisch hat man es mit einem nach θ indizierten stochastischen Prozeß zu tun, der unter einer entsprechenden Glattheitsannahme an T als Funktion in θ seine Pfade im Raum der stetigen Funktionen über Θ annimmt. Für Konsistenzaussagen über θ_n kommt es darauf an, geeignete stochastische Ungleichungen für das Oszillationsverhalten dieser Prozesse zu gewinnen.

B. Größen-verzerrte Schätzungen

Daten sind nur dann analysierbar, wenn sie im wahrsten Sinne des Wortes (also nicht nur abstrakt maßtheoretisch) meßbar sind. Häufig tritt zwischen der Realisierung dieser Variablen und der Messung eine Informationssperre ein. Z. B. kann es beim Studium von Wildbeständen aus der Luft vorkommen, daß kleine Gruppen bei Zählungen aufgrund ihrer Größe gar nicht als solche erkannt werden; vgl. Patil und Rao [21]. Zur stochastischen Modellierung führt man für jedes $1 \leq i \leq n$ eine „Transportvariable" Y_i ein mit

$Y_i = 1$ bedeutet X_i ist verfügbar
$Y_i = 0$ bedeutet X_i ist nicht verfügbar

Sei $\quad w(x) = W(Y_i = 1 \mid X_i = x)$

die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, daß ein Informationstransport stattfindet, wenn das Datum den Wert x annimmt. Offenbar muß unsere Schätzung für F nun modifiziert werden, da F_n nicht in jedem Falle zur Verfügung steht. Setzt man

$$G(t) = W(X_1 \leq t, Y_1 = 1) = \int_{-\infty}^{t} w(x)F(dx)$$

so läßt sich G konsistent durch

$$G_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq t, Y_i = 1\}}$$

schätzen. Nun ist aber

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} w^{-1}(x) G(dx),$$

also $$\hat{F}_n(t) = \int_{-\infty}^{t} w^{-1}(x) G_n(dx) = n^{-1} \sum_{i:Y_i = 1} w^{-1}(X_i) 1_{\{X_i \leq t\}}$$

ein sinnvoller Schätzer für das eigentlich interessierende F.
In der Regel ist $w > 0$ G fast sicher, aber nicht gegen 0 weg beschränkt. Mathematisch bedeutet dies, daß man das Konvergenzverhalten von G_n in einer im Vergleich zur Sup-Topologie feineren Topologie untersuchen muß; vgl. Horváth [12].
Eine sowohl praxisnahe als auch mathematisch interessante Variante ergibt sich im Fall von zwei (oder mehr) Meßreihen

$$X_1^1, \ldots, X_{n_1}^1$$
$$X_1^2, \ldots, X_{n_2}^2,$$

wenn die erste Meßreihe mittels w_1, die zweite mittels w_2 verzerrt wird mit $w_1 \neq w_2$. Vardi [42], [43] bestimmte eine nichtparametrische Maximum-Likelihood-Schätzung für F auf der Basis der gepoolten Stichprobe $X_1^1, \ldots, X_{n_1}^1, X_1^2, \ldots, X_{n_2}^2$.

C. Empirische Bayes-Schätzungen

In unserer bisherigen Diskussion haben wir einen typisch frequentistischen Ansatz vertreten, insofern wir zur Schätzung von F keinerlei Vorinformation benötigt hatten. Im Gegensatz dazu geht man in der Bayesschen Statistik davon aus, daß nicht alle F gleich plausibel sind und sich dies in einer sogenannten a priori Verteilung niederschlagen sollte. Konkret bedeutet dies, daß sich eine Parametermenge Θ und darüber eine Verteilung G angeben läßt, so daß F die Mischung von G mit einem Kern $K(x, \theta)$ ist, d. h. es gilt (falls $\Theta = \mathbf{R}$ und F bzw. G Dichten besitzen)

(7) $$f(x) = \int K(x, \theta) G(d\theta) = \int K(x, \theta) g(\theta) d\theta$$

Stochastisch läßt sich dieser Vorgang wie folgt beschreiben: mittels G wählt die Natur einen Parameter $\theta = \theta_0$, und erst in einer zweiten Stufe realisiert sich die eigentliche Stichprobe nach $K(\cdot, \theta_0)$. Die Frage, ob der „Natur“ Kräfte innewohnen, die in der Lage sind, den eigentlichen Parameter in einem Vorexperiment noch zu bestimmen, hat zwischen Frequentisten und Baysianern lange Zeit zu einem heftigen Streit auf philosophischer Ebene geführt. Die Diskussionsbeiträge zum Artikel von Diaconis und Freedman [6] machen deutlich, daß auf „führender“ Ebene diese Gegensätze immer noch nicht „emotionsfrei“ gehandhabt werden können.
Mathematisch gesehen setzt ein effektiver Einsatz von Vorinformation deren genaueste Kenntnis voraus. In der Tat ist dies ein Hauptkritikpunkt am Bayesschen Ansatz, da eine empirische Überprüfung von K *und* g nicht möglich ist. In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, G bei bekanntem K zu

schätzen. Beobachtet werden unabhängige nach f verteilte Größen $X_1, \ldots, X_n$. Das zu jedem X_i gehörige θ_i ist natürlich unbekannt.
Offenbar stellt (7) nichts anderes dar als eine (Fredholm-)Integralgleichung 1. Art. Es ist bekannt, daß (7) nicht immer lösbar ist (was uns hier nicht interessiert, da die Existenz von g vorausgesetzt wird). Teicher [39] und Blum und Susarla [2] haben Bedingungen an K untersucht, unter denen die Lösung eindeutig ist. Da f nicht direkt bekannt ist, sondern nur mithilfe von $X_1, \ldots, X_n$ sagen wir durch f_n geschätzt werden kann, ist es naheliegend, die Gleichung

$$(8) \qquad f_n(x) = \int K(x, \theta)h(\theta)d\theta = \int K(x, \theta)H(d\theta)$$

(approximativ) zu lösen. Dies macht zumindest dann Sinn, wenn der zu

$$Th(x) := \int K(x, \theta)h(\theta)d\theta$$

inverse Operator stetig in f ist. Wie bekannt (vgl. Tikhonov und Arsenin [40]), ist dies nicht ohne weiteres der Fall.
Die Frage der sogenannten Empirischen-Bayes-Schätzungen, also der (nichtparametrischen) Schätzung von a-priori-Größen, wurde von Robbins [25] initiiert; vgl. auch Robbins [26], [27]. Von Neyman [19] als „breakthrough" gewürdigt, entbehrt der ganze Vorgang nicht einer gewissen Pikanterie, war es doch ein Frequentist, der damit den Baysianern in ihrem Motivationsdilemma beistand.
Es hat unterschiedliche Ansätze zur Schätzung von G bzw. g gegeben. Blum und Susarla [2] lösen (8) (approximativ) innerhalb der Familie aller diskreten Maße auf einem für $n \to \infty$ immer feiner werdenden Gitter, was praktisch auf die Lösung eines linearen Programms hinausläuft. Walter [44] betrachtete den Fall $K(x, \cdot) \in L^2$. Ist dann $\{w_k\}$ ein vollständiges orthonormales System in L^2 und ist $v_k \in L^2$ so, daß

$$w_k(t) = \int K(x, t)v_k(x)dx$$

so ist $\{w_k, v_k\}$ biorthonormal, und mit der Parsevalschen Gleichung folgt (im L^2-Sinne)

$$g(t) = \sum_k w_k(t) \int w_k g \sim \sum_{k=-m}^{m} w_k(t) \int w_k g = \sum_{k=-m}^{m} w_k(t) \int v_k f$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} w_k(t) \int v_k(x)F(dx) \leftarrow \sum_{k=-m}^{m} w_k(t) \int v_k(x)F_n(dx),$$

d. h. ein sinnvoller Schätzer für g ist

$$\hat{g}_{mn}(t) = \sum_{k=-m}^{m} \sum_{i=1}^{n} w_k(t)v_k(X_i)/n$$

Dabei sind (typischerweise) zwei Fragen von besonderem Interesse:

(i) die Berechnung von v_k (bei vorgegebenen w's)

(ii) die Wahl der Truncierungsstelle m

Einen Überblick über die ältere Literatur gibt Susarla [37].

D. Zensierte Daten

Das in diesem Abschnitt zu behandelnde Beispiel hat mit den beiden letzten gemeinsam, daß das eigentliche Objekt unseres Interesses nur verzerrt, gestört etc. meßbar ist. In der Biostatistik treten (als Lebensdauern interpretierbare) Daten häufig in zensierter Form auf. Sei z. B. $X_i \sim F$ die Lebensdauer des i-ten Patienten und $Y_i \sim G$ ein nicht mit dem Tode zusammenhängender Zeitpunkt (z. B. Wegzug), zu dem die Behandlung abgebrochen wird. Beobachtet werden

$$Z_i = \min(X_i, Y_i) \quad \text{und} \quad \delta_i = 1_{\{X_i \leqslant Y_i\}},$$

d. h. $\delta_i = 1$, falls die Behandlung mit dem Tode des Patienten endet, und $\delta_i = 0$, falls die Behandlung aus anderen Gründen enden muß. Bezeichnet man mit

$$1 - F(t) = W(X_i > t)$$

die Überlebensfunktion der X_i, so ist jetzt ein Schätzer für $1 - F$ gesucht, der nur die Kenntnis von (Z_i, δ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, benutzt. Wir wollen uns hier auf die Herleitung des Schätzers beschränken. Da (Z_i, δ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, bekannt ist, kann man (setze i.f. voraus, daß F auf $[0, \infty)$ konzentriert ist)

$$\tilde{H}(t) := W(Z_1 \leqslant t, \delta_1 = 1) = W(X_1 \leqslant t, \delta_1 = 1) = \int_0^t (1 - G(y))F(dy) \tag{9}$$

konsistent und unverzerrt durch

$$\tilde{H}_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{Z_i \leqslant t, \delta_i = 1\}}$$

schätzen. Desgleichen ist

$$H(t) = W(Z_1 \leqslant t)$$

durch $H_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{Z_i \leqslant t\}}$

schätzbar. Die Frage ist nun, wie man durch Kombination von H_n und $\tilde{H}_n$ zu einem Schätzer von F gelangt. Dazu muß man den Zusammenhang zwischen H, F, G und $\tilde{H}$ analysieren. Aufgrund der Unabhängigkeit von X und Y gilt

$$(1 - H) = (1 - F)(1 - G)$$

und damit, und das ist die entscheidende Idee,

$$-\ln(1 - F(t)) = \int_0^t f(x)/(1 - F(x))dx = \int_0^t 1/(1 - F(x))F(dx)$$

$$= \int_0^t 1/(1 - H(x))\tilde{H}(dx),$$

wobei die letzte Gleichung aus (9) folgt. Die Funktion

$$t \to -\ln(1 - F(t))$$

heißt kumulative Hazardfunktion, und ihre Ableitung Hazardfunktion. Einsetzen von $\tilde{H}_n$ bzw. H_n liefert einen Schätzer für $-\ln(1 - F(t))$. Löst man diesen Schätzer nach dem F-Term auf und ersetzt $\ln(1 - x)$ durch den ersten Term in der Taylorentwicklung, führt dies zum sogenannten Produkt-Limes-Schätzer

$$(10) \qquad 1 - \hat{F}_n(t) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} \left(\dfrac{n - R_j}{n - R_j + 1} \right)^{\beta_j(t)} & t < Z_{n:n} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $R_j = \text{Rang } Z_j$ und $\beta_j(t) = 1_{\{Z_j \leq t, X_j \leq Y_j\}}$.
Dieser Schätzer wurde von Kaplan-Meier [14] vorgestellt; vgl. auch Nelson [18]. Es zeigt sich, daß $1 - \hat{F}_n$ mit $1 - F_n$ übereinstimmt, falls alle Daten unzensiert sind. Ein wesentlicher Unterscheid zu F_n im Fall von zensierten Daten ist darin zu sehen, daß $\hat{F}_n$ wie F_n zwar einen zufälligen Träger besitzt, nämlich die nichtzensierten Daten, die ihnen zugewiesenen Massen aber selbst zufällig sind. Eine ausführliche Behandlung von $\hat{F}_n$ findet man im Buch von Shorack und Wellner [30].

E. Autoregressive Schemata

Dies ist eines der wichtigsten Beispiele, in dem unabhängige Größen nur als Teilkomponenten der gemessenen Daten auftreten, die Daten selbst aber stark abhängig sind. Konkret läßt sich X_i schreiben in der Form

$$X_i = \rho X_{i-1} + \epsilon_i, \quad |\rho| < 1,$$

wobei $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ unabhängig und nach F verteilt seien mit Erwartungswert 0 (der Einfachheit halber betrachten wir nur Schemata 1. Ordnung). Da ρ unbekannt ist, sind zur Schätzung von F zunächst ρ durch ρ_n zu schätzen und anschließend die Residuen ϵ_i durch

$$\hat{\epsilon}_i = X_i - \rho_n X_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n$$

zu ersetzen. Setzt man

$$\hat{F}_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{\hat{\epsilon}_i \leq t\}}$$

so erhält man eine Empirische Verteilungsfunktion zu abhängigen Größen, von der man nur hoffen kann, daß im Fall einer guten Schätzung von ρ durch ρ_n die Funktion $\hat{F}_n$ das zu den ϵ_i gehörige F_n gut approximiert. In diesem Zusammenhang hat Boldin [3] gezeigt, daß $n^{1/2} \|\hat{F}_n - F_n\| \to 0$ in Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$, also insbesondere ein Invarianzprinzip für $\hat{F}_n$ Gültigkeit hat. Was die Schätzung von ρ anbetrifft, so ist bei normalverteilten Fehlern der Kleinst-

Quadrate-Schätzer

$$\rho_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i X_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^2}$$

optimal. Eine bemerkenswerte Variante einer (robusten) Minimum-Distanz-Schätzung von ρ im Fall autoregressiver Schemata wurde von Koul [15] untersucht. Die nichtparametrische Schätzung von F im Fall $|\rho| > 1$ (Explosion) ist unseres Wissens bisher noch nicht studiert worden.

F. Dichteschätzungen

Bereits in Abschnitt C hatte man in Zusammenhang mit Empirischen-Bayes-Schätzungen die Dichte $f = F'$ von F zu schätzen. Da F_n nicht überall differenzierbar ist, bleibt nur die Möglichkeit, F_n zu glätten und die Ableitung als Schätzung für f zu wählen. Die Frage ist dann nur, wie der Glättungsparameter zu wählen ist. In der Literatur kennt man grob gesprochen drei Glättungsverfahren:

1. Kernverfahren
2. Spline-Glättung
3. Reihen-Glättung

Die Bücher von Tapia und Thompson [38], Wertz [46], Rao [24] und Silverman [31] geben ausführlich Auskunft über Detailfragen. Um die Rolle der Empirischen Verteilungsfunktion zu verstehen, beginnen wir mit dem aus der Approximationstheorie wohlbekannten Resultat, daß für eine in t stetige Funktion f

$$\lim_{a_n \to 0} a_n^{-1} \int K\left(\frac{t-x}{a_n}\right) f(x)dx = f(t),$$

wobei K ein Kern mit $\int K(u)du = 1$ ist. Da $f(x)dx = F(dx)$ ist, erhalten wir als natürlichen (Kern-)Schätzer

$$f_n(t) = a_n^{-1} \int K\left(\frac{t-x}{a_n}\right) F_n(dx) = \frac{1}{na_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{t-X_i}{a_n}\right);$$

vgl. Rosenblatt [28], Parzen [20]. Dabei ist der Glättungsparameter $a_n > 0$ irgendwie optimal zu wählen. Unter Zugrundelegung des L^2-Abstandes hat man

$$D_n = \int (f_n(x) - f(x))^2 dx$$

zu minimieren, was gleichbedeutend mit der Minimierung von

$$D_n^* = \int f_n^2(x)dx - 2 \int f_n(x)F(dx)$$

ist. Da D_n^* von F abhängt und somit unbekannt ist, müssen wir D_n^* erst schätzen und dann (fehlerbehaftet) die Minimierung durchführen. Z. B. ist

$$D_n^{**} = \int f_n^2(x)dx - 2 \int f_n(x)F_n(dx) = \int f_n^2(x)dx - 2n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_n(X_i)$$

$$= \int f_n^2(x)dx - \frac{2}{n^2 a_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{X_i - X_j}{a_n}\right)$$

ein sinnvolles Substitut für D_n^*. Summiert man in der Doppelsumme nur über Paare $i \neq j$, führt dies zu

$$D_n^{***} = \int f_n^2(x)dx - \frac{2}{n(n-1)a_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K\left(\frac{X_i - X_j}{a_n}\right).$$

Hall [10] wies die (asymptotische) Optimalität dieser (per cross-validation) durch Minimierung adaptiv bestimmten Bandbreite nach. Im Rahmen einer Spline-Glättung hat man zu vorgegebenen Knoten F_n zu matchen. Schließlich gibt man sich bei der Reihenglättung ein vollständig orthonormales System $\{w_n\}$ in L^2 vor. Für $f \in L^2$ gilt dann im L^2-Sinn

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} w_n(t)b_n \quad \text{mit} \quad b_n = \int w_n(x)f(x)dx.$$

Um einen Schätzer für f zu gewinnen, hat man

a) b_n durch $b_n^* = \int w_n(x)F_n(dx)$ zu schätzen

b) die Reihe durch eine Summe $\sum_{n=-m}^{m}$ zu ersetzen

Wir sehen, daß die Rolle des Glättungsparameters a_n beim Spline-Schätzer von den Knoten und beim Reihenschätzer vom Truncierungsindex m übernommen wird.

G. Regressionsfunktionen und bedingte Empirische Verteilungsfunktionen

In diesem Abschnitt diskutieren wir eine Fragestellung, die typischerweise bei multivariaten Daten auftritt. Seien $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ unabhängige identisch verteilte Variable in der Ebene, und bezeichne

$$m(x) = E(Y_1 | X_1 = x)$$

die Regressionsfunktion von Y gegeben X. Interpretiert man X als Input- und Y als Output-Variable, so kann man m(x) deuten als mittleren Output bei gegebenem Input (Dosis) X = x. Regressionsfunktionen haben innerhalb der parametrischen Statistik von jeher interessiert. Ein Verfahren zur nichtparametrischen Schätzung von m wurde unabhängig von Nadaraya [17] und Watson [45] vorgeschlagen. Es hängt eng mit der im letzten Abschnitt eingeführten Kernmethode für Dichteschätzer zusammen:

$$m_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{x - X_i}{a_n}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{a_n}\right)} = \frac{a_n^{-1} \int yK\left(\frac{x-t}{a_n}\right) H_n(dt, dy)}{a_n^{-1} \int K\left(\frac{x-t}{a_n}\right) F_n(dt)},$$

wobei K wieder ein Kern, $a_n > 0$ eine geeignete Folge von „Fenstern" und H_n die zu den (X_i, Y_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, gehörende zweidimensionale Empirische Verteilungsfunktion ist. Um m_n zu motivieren, ersetzen wir Zähler und Nenner durch ihre Erwartungswerte, d. h. H_n und F_n durch H bzw. F. Besitzt F zudem noch eine Dichte f, folgt (unter schwachen Regularitätsannahmen)

$$a_n^{-1} \int yK\left(\frac{x-t}{a_n}\right) H(dt, dy) = a_n^{-1} \int m(t)f(t)K\left(\frac{x-t}{a_n}\right) dt \to m(x)f(x)$$

Spezielle Wahl von $Y_i \equiv 1$ liefert für den Nenner den Grenzwert f(x), also (falls $f(x) > 0$) für den Quotienten der Erwartungswerte m(x), wie gewünscht. Um das Ersetzen von H_n und F_n durch H bzw. F zu rechtfertigen, bedarf es (wie bei den Dichteschätzern) einer genauen Kenntnis der lokalen Eigenschaften von $H_n - H$ und $F_n - F$. Dies wird verständlich, da es sich sowohl bei f als auch bei m um Größen handelt, die eine Verteilungsfunktion lokal beschreiben; vgl. Stute [33], [34]. Setzt man

$$W_{ni}(x) = W_{ni}(x, X_1, \ldots, X_n) = \frac{K\left(\frac{x - X_i}{a_n}\right)}{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x - X_j}{a_n}\right)},$$

so hat m_n die Gestalt

$$m_n(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i W_{ni}(x)$$

mit $\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) = 1$. Deutet man $W_{ni}(x)$ als Gewicht, so wird deutlich, daß $m_n(x)$ wie das gewöhnliche arithmetische Mittel ein gewichtetes Mittel der Y_i ist, nur sind die Gewichte jetzt zufällig und hängen von x und seiner Lage zu den X_i ab. Gewöhnlich ist W_{ni} um so größer, je näher X_i bei x liegt; vgl. Stone [32]. Bezeichnet man mit $m(\cdot|\cdot)$ eine reguläre bedingte Verteilungsfunktion von Y_1 gegeben X_1, d. h. gilt

$$W(X_1 \leqslant t_1, Y_1 \leqslant t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} m(t_2 \mid x)F(dx),$$

so folgt,

$$m(x) = \int t_2 m(dt_2 \mid x),$$

d. h. die Regressionsfunktion ist ein recht einfaches Funktional der bedingten Verteilung. Es ist naheliegend, anstelle von $m(\cdot)$ die bedingte Verteilung $m(\cdot|\cdot)$

selbst zu schätzen, um dann mit einem Stetigkeitsargument die Konsistenz von $m_n(\cdot)$ oder auch anderer Schätzer nachzuweisen. In Stute [35] wurde gezeigt, daß mit

$$m_n(t_2 \mid x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1_{\{Y_i < t_2\}} K\left(\frac{x - X_i}{a_n}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{a_n}\right)}$$

für eine große Klasse von Fensterbreiten $a_n \to 0$ die Folge $m_n(\cdot \mid x)$ gleichmäßig gegen $m(\cdot \mid x)$ konvergiert.

H. Gleichmäßige Konvergenz von Maßen

Bezeichne man mit μ_n (die zu F_n gehörende) Empirische Verteilung, d. h. es ist

$$\mu_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i},$$

wobei δ_x = Dirac-Maß zu x. Für eine feste Teilmenge C des Stichprobenraumes folgt mit dem Gesetz der großen Zahlen.

$$\lim_n \mu_n(C) = \mu(C) \quad \text{fast sicher,}$$

wenn μ die Verteilung der X_i ist. In vielen Anwendungen, z. B. bei Minimierungsproblemen in der Clusteranalyse (vgl. Pollard [22]), kommt es darauf an, daß μ_n über einem System $\mathfrak{C}$ von Mengen gleichmäßig gegen μ konvergiert. Setzt man

$$D_n = \sup_{C \in \mathfrak{C}} |\mu_n(C) - \mu(C)|,$$

so führt dies zu einem Diskrepanzbegriff, der für spezielle Systeme konvexer Mengen in der sogenannten Theorie der Gleichverteilung untersucht wurde, und wo es darauf ankommt, die Punkte X_i (deterministisch) so zu wählen, daß D_n minimal wird; vgl. Hlawka [11], Kuipers und Niederreiter [16]. Im Fall von zufälligen Punkten hat man unterschiedliche Methoden zur Handhabung von D_n entwickelt. So wird z. B. in dem von Vapnik und Chervonenkis [41] gemachten Ansatz die stochastische Problematik auf das folgende kombinatorische Problem zurückgeführt: Für $C \in \mathfrak{C}$ betrachte man die aus $X_1, \ldots, X_n$ herausgeschnittene Menge $C \cap \{X_1, \ldots, X_n\}$. Ist $\mathfrak{C}$ z. B. das System aller konvexen Mengen in der Ebene und sind $X_1, \ldots, X_n$ n Punkte auf einem Kreis, so schneidet $\mathfrak{C}$ aus $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 2^n Mengen heraus. Für kleinere Systeme (wie Rechtecke, Kugeln oder Halbräume) hat das System der herausgeschnittenen Mengen (bei beliebig gewählten n Punkten) eine polynomiale Ordnung, was sich als entscheidend herausstellt.

Literaturverzeichnis

[1] Billingsley, P.: Convergence of probability measures. New York: Wiley 1968
[2] Blum, J. R.; Susarla, V.: Estimation of a mixing distribution function. Ann. Prob. **5** (1977) 200–209
[3] Boldin, M. V.: Estimation of the distribution of noise in an autoregressive scheme. Theor. Prob. Appl. **27** (1982) 866–871
[4] Cantelli, F. P.: Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari **4** (1933) 421–424
[5] Denker, M.: Schwache Invarianzprinzipien für reguläre Funktionale von Verteilungsfunktionen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **84** (1982) 163–195
[6] Diaconis, P.; Freedman, D.: On the consistency of Bayes estimates (mit Diskussion). Ann. Statist. **14** (1986) 1–67
[7] Donsker, M. D.: Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems. Ann. Math. Statist. **23** (1952) 277–281
[8] Gaenssler, P.; Stute, W.: Empirical processes: A survey of results for independent and identically distributed random variables. Ann. Prob. **7** (1979) 193–243
[9] Glivenko, V.: Sulla determinazione empirica della legge di probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari **4** (1933) 92–99
[10] Hall, P.: Large sample optimality of least squares cross-validation in density estimation. Ann. Statist. **11** (1983) 1156–1174
[11] Hlawka, E.: Theorie der Gleichverteilung. Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag 1979
[12] Horváth, L.: Estimation from a length-biased distribution. Stat. and Decis. **3** (1985) 91–113
[13] Huber, P. J.: Robust statistics. New York: Wiley 1981
[14] Kaplan, E. L., Meier, P.: Nonparametric estimation from incomplete observations. J. Amer. Statist. Assoc. **53** (1958) 457–481
[15] Koul, H. L.: Minimum distance estimation and goodness-of-fit tests in first-order autoregression. Ann. Statist. **14** (1986) 1194–1213
[16] Kuipers, L.; Niederreiter, H.: Uniform distribution of sequences. New York: Wiley 1974
[17] Nadaraya, E. A.: On estimating regression. Theor. Probab. Appl. **9** (1964) 141–142
[18] Nelson, W.: Theory and applications of hazard plotting for censored failure data. Technometrics **14** (1972) 945–966
[19] Neyman, J.: Two breakthroughs in the theory of statistical decision making. Rev. Intern. Statist. Inst. **30** (1962) 11–27
[20] Parzen, E.: On estimation of a probability density function and mode. Ann. Math. Statist. **33** (1962) 1065–1076
[21] Patil, G. P., Rao, C. R.: The weighted distributions: a survey of their applications. In: Appl. of statistics (P. R. Krishnaiah ed.) (1977) 383–405. Amsterdam – New York – Oxford: North Holland
[22] Pollard, D.: Strong consistency of K-means clustering. Ann. Statist. **9** (1981) 135–140
[23] Pollard, D.: Convergence of stochastic processes. New York – Berlin – Heidelberg – Tokyo: Springer 1984
[24] Prakasao Rao, B. L. S.: Nonparametric functional estimation. Orlando: Academic Press 1983
[25] Robbins, H.: An empirical Bayes approach to statistics. Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. **1** (1956) 157–163
[26] Robbins, H.: The empirical Bayes approach to statistical decision problems. Ann. Math. Statist. **35** (1964) 1–20
[27] Robbins, H.: Some thoughts on empirical Bayes estimation. Ann. Statist. **11** (1983) 713–723
[28] Rosenblatt, M.: Remarks on some nonparametric estimates of a density function. Ann. Math. Statist. **27** (1956) 832–837
[29] Serfling, R. J.: Approximation theorems of mathematical statistics. New York: Wiley 1980
[30] Shorack, G. R.; Wellner, J. A.: Empirical processes with applications to statistics. New York: Wiley 1986

[31] S i l v e r m a n , B. W.: Density estimation for statistics and data analysis. London: Chapman and Hall 1986
[32] S t o n e , C.: Consistent nonparametric regression. Ann. Statist. **5** (1977) 595–645
[33] S t u t e , W.: The oscillation behavior of empirical processes. Ann. Prob. **10** (1982) 86–107
[34] S t u t e , W.: The oscillation behavior of empirical processes: the multivariate case. Ann. Prob. **12** (1984) 361–379
[35] S t u t e , W.: On almost sure convergence of conditional empirical distribution functions. Ann. Prob. **14** (1986) 891–901
[36] S t u t e , W.: Parameter estimation in smooth empirical processes. Stoch. Proc. and their Appl. **22** (1986) 223–244
[37] S u s a r l a , V.: Empirical Bayes theory. In: Encyclopedia of statistical sciences (S. K o t z und N. L. J o h n s o n , eds.) Vol. 2, 490–503. New York: Wiley 1982
[38] T a p i a , R. A., T h o m p s o n , J. R.: Nonparametric probability density estimation. Baltimore: The Johns Hopkins Univ. Press 1978
[39] T e i c h e r , H.: Identifiability of mixtures. Ann. Math. Statist. **32** (1961) 244–248
[40] T i k h o n o v , A. N., A r s e n i n , V. Y.: Solutions of ill-posed problems. New York: Wiley 1977
[41] V a p n i k , V. N., C h e r v o n e n k i s , A. Ya.: On uniform convergence of the frequencies of events to their probabilities. Theor. Prob. Appl. **16** (1971) 264–280
[42] V a r d i , Y.: Nonparametric estimation in the presence of length bias. Ann. Statist. **10** (1982) 616–620
[43] V a r d i , Y.: Empirical distributions in selection bias models. Ann. Statist. **13** (1985) 178–203
[44] W a l t e r , G. G.: Orthogonal series estimators of the prior distribution. Sankhyā, Ser. A **43** (1981) 228–245
[45] W a t s o n , G. S.: Smooth regression analysis. Sankhyā Ser. A **26** (1964) 359–372
[46] W e r t z , W.: Statistical density estimation. A survey. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1978

Prof. Dr. Winfried Stute
Math. Institut der Justus-Liebig-
Universität Gießen
Arndtstr. 2
D-6300 Gießen

(*Eingegangen 15. 11. 1986*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
90 (1988) 145–154

Alfred Brauer zum Gedächtnis

H. Rohrbach, Mainz

Am 23. Dezember 1985 starb Alfred Theodor Brauer in Chapel Hill, North Carolina, USA, im Alter von 91 Jahren. Er war nicht nur ein bedeutender Mathematiker, der als Forscher und als Lehrer überall, wo er wirkte, außerordentlich geschätzt und verehrt wurde. Er war auch ein Mensch besonderer Prägung: von selbstloser Bescheidenheit und aufrichtigem Großmut, von tiefstem Familiensinn und herzlichster Zuneigung zu Freunden. Kurzum, es ging von ihm eine Ausstrahlung aus, die jeden gefangennahm, der ihm begegnete. Im wissenschaftlichen Bereich war es seine selten tiefe Liebe zur Mathematik – als Wissenschaft, als Lehrgebiet, als Kunst –, die alle, ob Kollegen oder Studenten, in seine große Begeisterung mit hineinnahm.

Alfred Brauer wurde am 9. April 1894 als ältester Sohn des Großkaufmanns und Handelsrichters Max Brauer und seiner Frau Lilly Brauer in Berlin-Charlottenburg geboren. Ostern 1912 bestand er die Reifeprüfung an der Kaiser Friedrich Schule in Charlottenburg. Anschließend versuchte er sich – wohl dem Vater zuliebe – ein Jahr in einer praktischen, kaufmännischen Tätigkeit. Doch zeigte es sich bald, daß die Liebe zur Mathematik alles andere überwog. So entschied er sich zum Studium der Mathematik mit Physik und Philosophie. Mit diesem Studium begann er im Sommersemester 1913 in Heidelberg. Die beiden folgenden Semester studierte er an der Universität Berlin. Als Anfang August 1914 der erste Weltkrieg ausbrach, war es für Alfred Brauer – trotz seiner jüdischen Abstammung ein national empfindender Deutscher – selbstverständlich, sich als Kriegsfreiwilliger zu melden. Zugeteilt zu Maschinengewehrkompanien, zuletzt als Zugführer, stand er vier Jahre in Kämpfen auf dem westlichen, auf dem östlichen und auf dem Balkankriegsschauplatz. Beim Sturm auf Stojnik in Serbien wurde er verwundet. Als Auszeichnung erhielt er das Eiserne Kreuz II. Klasse, kam aber nur bis zum Unteroffizier. Der Offiziersstand blieb ihm verschlossen.

Nach der Rückkehr aus Gefangenschaft im Januar 1919 nahm er, durch den Ausgang des Krieges stark deprimiert und von vier Jahren Kriegseinsatz schwer mitgenommen, sein Studium an der Universität Berlin wieder auf, in den ersten Jahren infolge gesundheitlicher Schädigung durch die Kampfhandlungen stark behindert. Der Abschluß des Studiums erfolgte im Februar 1928 mit der Promotion zum Dr. phil. summa cum laude. Ihr folgte die feierliche Promotion durch den Dekan der Philosophischen Fakultät (die damals auch die naturwissenschaftlichen Fächer umfaßte) am 19. Dezember 1928. Sein Bruder Richard Brauer, geboren 1901, der sein Studium unbehindert 1919 beginnen konnte, hat es, ebenfalls summa cum laude, bereits im Juli 1925 mit der Promotion abgeschlossen, der die feierliche Promotion im März 1926 folgte*). Beide Brüder waren hervorragende Schüler von Issai Schur.

Dem selbstlosen Wesen von Alfred Brauer entsprach es, daß er sich vieler der Mitstudenten annahm, die gleich ihm aus der Kriegsgefangenschaft zurückkamen. Mit anderen Kriegsteilnehmern, die sich dem Studium der Mathematik und Physik zuwandten, gründete er 1919 die Mathematisch-Physikalische Arbeitsgemeinschaft, kurz die „MAPHA" genannt. Ihr Ziel war es, den Studierenden vor allem bei den Anfangsschwierigkeiten im Studium zu helfen. Das begann mit der Beratung der Erstsemester über die zu belegenden Vorlesungen und den Aufbau des Studiums. Es setzte sich fort mit den sogenannten Arbeitszirkeln zu den Grundvorlesungen, je geleitet von einem älteren Studenten, in denen Fragen zum Vorlesungsstoff durchgesprochen wurden. Ferner wurden Lehrbücher zu Vorzugspreisen vermittelt, ebenso Darlehen und finanzielle Hilfen anderer Art. Und es wurden gesellige Kontakte durch Hauskonzerte, Ausflüge, Wanderungen, Weihnachtsfeiern u. a. hergestellt. Die an Hochschulen vielfach gefürchtete Anonymität gab es für Naturwissenschaftler an der Universität Berlin dank der Mapha nicht, und die Leistungen der Studierenden steigerten sich in einem hohen Maße durch diesen persönlichen und arbeitsmäßigen Zusammenhalt. Spiritus rector aller dieser didaktischen, sozialen und kulturellen Hilfen war stets Alfred Brauer. Doch er selbst hielt sich immer im Hintergrund. Die Leitung überließ er bewußt nichtjüdischen Studenten.

Die Liebe zur Mathematik blieb bei dieser Aktivität für andere ungestört. Schon während des Studiums hat Alfred Brauer neben Aufgabenlösungen im Jahresbericht der DMV kleinere, aber nicht unbedeutende Arbeiten publiziert (die Nummern [3], [4] und [9] im Schriftenverzeichnis). 1928 wurde er Assistent bei I. Schur; er unterstützte ihn vor allem bei den Übungen zu den Vorlesungen und bei den Seminaren. Im Mathematischen Institut, damals noch Mathematisches Seminar genannt, war seine Aufgabe die laufende Unterhaltung und der Ausbau der Bibliothek. 1929 wurde ich dort ebenfalls Assistent, zugeordnet zu Erhard Schmidt. Damit hat sich unsere während des Studiums begründete enge Freundschaft in der gemeinsamen Arbeit am Institut für die mathematische Wissenschaft weiter vertieft.

1932 hat sich Alfred Brauer an der Universität Berlin habilitiert, konnte aber als Privatdozent nur zwei Semester ungehindert wirken. Denn 1933 brach die Katastrophe der antijüdischen Gesetzgebung durch den Nationalsozialismus auch über ihn herein. Zwar blieben sowohl I. Schur, als langjähriger Beamter, und A. Brauer, als Kriegsteilnehmer, zunächst von dem Schlimmsten verschont; sie durften weiter lesen. Aber Demonstrationen gegen sie und Störungen ihrer Vorlesungen durch nationalsozialistische Studenten (die wenigsten davon Mathematiker!) ereigneten sich immer wieder. Die im September 1935 erlassenen Nürnberger Gesetze verschärften die Ausschaltung der Juden rigoros. Sie machten für Schur und Brauer die weitere Ausübung ihrer Lehrtätigkeit unmöglich, ebenso den

---

*) Vgl. Rohrbach, H.: Richard Brauer zum Gedächtnis. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **83** (1981) 125–134.

Aufenthalt an Universität und Bibliotheken. 1938 erlosch auch das Recht der Publikation in deutschen mathematischen Zeitschriften.

Trotz aller Diskriminierungen und schweren Sorgen um seine Mutter, Schwester und Schwager war es Alfred Brauer vergönnt, in dieser Zeit eine Lebensgefährtin zu finden. Daß ich ihm dabei helfen konnte, war mir ein gern geleisteter Freundesdienst. Im August 1934 heiratete er Hilde Wolf aus Stadthagen, Tochter eines Großkaufmanns, ähnlich wie es sein Vater gewesen war. Eine eindrückliche Trauungszeremonie, von einem Rabbiner nach dem Ritual der jüdischen Religion in der elterlichen Wohnung vorgenommen, vereinte beide für ihr Leben. Viele Verwandte und Freunde nahmen an der Feier teil und bezeugten ihre Freude, aber auch ihre Bewunderung für den Mut der beiden Partner, den ungewissen Lebensweg gemeinsam zu gehen. Immerhin war Alfred Brauer noch „im Amt", und sie fanden auch eine Wohnung in Charlottenburg. Nur ein Jahr später, ihr erstes Kind Ellen war noch nicht geboren, machten die Nürnberger Gesetze jeder Zukunftsaussicht in Deutschland ein jähes Ende.

Nur schwer war Alfred Brauer davon zu überzeugen, daß er um der Familie willen auswandern müßte, solange dazu noch Zeit war. Er fühlte sich nach wie vor als Deutscher, und Deutschland war für ihn seine Heimat. Noch 1937 lehnte er eine Einladung von H. Weyl in die USA zugunsten von stärker bedrohten jüdischen Wissenschaftlern ab. Erst im Sommer 1939 gelang es mir, ihn zu der notwendigen Trennung zu bewegen. Im Juni 1939, $2^1/_2$ Monate vor Ausbruch des zweiten Weltkrieges, schifften sie sich zur Überfahrt nach New York ein. Aber selbst auf dem (deutschen) Schiff wurden sie als Juden durch Absonderung diskriminiert. Die Mutter von Alfred Brauer starb 1943, schwer mitgenommen, aber noch in ihrer Wohnung. Schwester und Schwager wohnten der Beerdigung bei, wurden aber bald darauf in ein Vernichtungslager deportiert. Ihre Kinder waren bereits im Ausland in Sicherheit.

In New York wurde die Familie Brauer sehr warm von Paul Erdös, als Vertreter des Institute for Advanced Study, und von Verwandten begrüßt, die sich bereits nach den Vereinigten Staaten abgesetzt hatten. Von dort ging es dann sofort nach Princeton, N.J., in eine Assistentenstelle bei Hermann Weyl. Richard Brauer, der 1934/35 eine solche Stelle innegehabt hatte, konnte sich für seinen Bruder einsetzen. Ebenso waren John von Neumann, Oswald Veblen u. a. bemüht, ihm zu einer Anstellung zu verhelfen. Dadurch war Alfred Brauer finanziell und wohnungsmäßig rasch in den Vereinigten Staaten integriert. Wer ihn kannte, weiß aber, wie schwer es ihm geworden ist, in dem fremden Land, dessen Sprache er kaum kannte, zu leben und heimisch zu werden. Auch das Schicksal der Juden in Deutschland bedrückte ihn sehr. Er wollte Deutschland nie wiedersehen, zumal auch alle Versuche scheiterten, seine Schwester und seinen Schwager nachkommen zu lassen. Erst Ende 1960 sind Alfred und Hilde Brauer wieder nach Deutschland gekommen, um im Dezember 1960 an der 150-Jahr-Feier der Berliner Universität teilzunehmen, bei der A. Brauer einen Vortrag über das Wirken von I. Schur als Forscher und Lehrer zu halten hatte.

In wissenschaftlicher Hinsicht hat sich Alfred Brauer sehr bald in der neuen Heimat trotz der andersartigen Verhältnisse durchgesetzt. Bereits von 1939 an erschienen Arbeiten von ihm in englischer Sprache in amerikanischen mathematischen Zeitschriften. Von 1939 bis 1942 währte die Assistentenzeit bei Hermann Weyl am Institute for Advanced Study in Princeton, N.J. Von da aus nahm er ab 1940 zugleich eine Beauftragung als Lecturer an der New York University in New York wahr. Im übrigen widmete er sich am Institute for Advanced Study sehr bald seiner besonderen Gabe, dem Aufbau einer wissenschaftlichen Bibliothek. Das Institut hatte, trotz seines hervorragenden Rufes, zuvor nichts, das den Namen einer Bibliothek verdient hätte.

Im Jahre 1942 fiel dann die Entscheidung, die sein weiteres Leben in den Vereinigten Staaten bestimmte. Er erhielt einen Ruf an die University of North Carolina in Chapel Hill, N.C., zunächst als Instructor. Aber noch im gleichen Jahr wurde er dort Assistant Professor, ein Jahr später Associate Professor. Diese Stellung hatte er von 1943 bis 1947 inne. 1944 empfingen er und seine Frau Hilde die Staatsangehörigkeit der Vereinigten Staaten, die Naturalisation. 1945 wurde ihnen das zweite Kind, Carolyn, geboren.

Alfred Brauers wissenschaftliche und persönliche Anerkennung wuchs ständig, wie bei seinem Wesen und seinen Gaben nicht anders zu erwarten war. Viele Mathematiker, Statistiker und Computerwissenschaftler an staatlichen und industriellen Forschungsinstituten erhielten sachliche Hilfe von ihm, der sich ihrer Probleme in echtem Interesse und in selbstloser Bereitwilligkeit annahm. Oft genügten schon Hinweise und Anregungen von ihm, um Fragende zu Lösungen zu inspirieren. 1946 wurde er Mitglied der North Carolina Academy of Science. 1947 erfolgte die Ernennung zum Full Professor of Mathematics. In dieser Stellung lehrte und forschte er bis 1959. Danach wurde ihm die Kenan Professorship verliehen, eine Auszeichnung, die von neuem deutlich machte, wie sehr die University of North Carolina ihn für sein Wirken ehren wollte. Diese Stiftungsprofessur nahm er bis zu seiner Emeritierung wahr, blieb aber Kenan Professor emeritus.

Sein Ruf als ein besonders befähigter Hochschullehrer ging weit über seine Heimatuniversität hinaus. Referate auf Fachtagungen wurden ihm angetragen. An der University of Colorado in Colorado Springs lehrte er 1962 und 1967 als Gast in der Summer School. Eine gleiche Stellung, jedoch als ständige Gastprofessur, erhielt er im Anschluß an seine Lehrtätigkeit in Chapel Hill für die akademischen Jahre 1965 bis 1975 an der Wake Forest University in Winston Salem, N.C. Seine wissenschaftliche Anerkennung wird weiter an den Auszeichnungen ersichtlich, die ihm zuteil wurden.

Bereits 1949 empfing er den Science Research Award vom Oak Ridge Institute for Nuclear Studies für „hervorragende Beiträge zur Naturwissenschaft im Süden der USA". 1971 erhielt er die G.W.F. Hegel Medaille von der Humboldt Universität in Ost-Berlin für sein eindrucksvolles Referat über I. Schur anläßlich der 150-Jahr-Feier der Universität, zugleich in Anerkennung seiner wissenschaftlichen Leistungen. 1965 verlieh ihm die University of North Carolina den Tanner Award für seine „ausgezeichnete Lehrweise", und 1972 wurde ihm von seiner Universität der Ehrendoktor LLD (Legal Lectures Degree) verliehen.

Es war selbstverständlich, daß Alfred Brauer sich intensiv der Bibliothek im Mathematics Department der Universität annahm. Ihrem Ausbau hat er unermeßlich viel Zeit und Mühe gewidmet. Das Ergebnis ist eine der schönsten und umfassendsten mathematischen Bibliotheken, die es an Universitäten überhaupt gibt. Ihm zu Ehren wurde sie 1976 Alfred T. Brauer Library genannt. Sie umfaßt nicht nur Mathematik komplett, sondern auch Physik, insbesondere Theoretische Physik, ferner Statistik und Informatik. In gleicher Weise baute er auch die Bibliothek im Mathematics Department der Wake Forest University in Winston Salem zu einer höchst leistungsfähigen aus. Zum Dank ehrte ihn diese Universität 1976 mit der Errichtung einer Alfred T. Brauer Instructorship.

1984 vollendete Alfred Brauer sein 90. Lebensjahr. Das war ein Anlaß für neue Ehrungen. Das Mathematics Department der University of North Carolina gründete den Alfred T. Brauer Gift Trust Fund zur Förderung mathematischer Forschung an der Universität. Dieser Fonds schließt einen Alfred T. Brauer Preis ein, der alljährlich einem hervorragenden jüngeren Studenten (undergraduate student of outstanding ability) für Leistungen in Algebra oder Zahlentheorie verliehen werden soll, den beiden Gebieten, auf denen Brauer sich besonders hervorgetan hat. Außerdem richtete das Mathematics Department seiner Universität die Alfred T. Brauer Lectures ein, zu denen alljährlich ein hervorragender Mathematiker eingeladen werden soll, um in zwei Vorträgen des Lehrers und Forschers Alfred Brauer zu gedenken. Die beiden ersten wurden im April 1985 von Daniel Gorenstein von der Rutgers University in New Brunswick, N.J., die beiden zweiten von Richard Stanley vom Massachusetts Institute of Technology in Cambridge, Mass., im April 1986 gehalten. Der April ist der Geburtsmonat von Alfred Brauer. Bei der erstmaligen Ehrung durch die Lectures konnte er noch anwesend sein. Ende Dezember 1985 wurde er von dieser Erde abberufen.

An dieser Stelle möchte ich einem, mir unbekannten, jüdischen Freunde von Alfred Brauer das Wort geben, der offenbar der Beisetzungsfeier in Chapel Hill, N.C., beigewohnt und sehr eindrucksvoll von ihm gesprochen hat. Seine Würdigung, die mir vorliegt, gebe ich (in Übersetzung) auszugsweise wieder.

„Um Alfreds Wesen zu kennzeichnen, möchte ich zunächst davon sprechen, was Alfred und seine Frau Hilde in dieses Land gebracht hat. Sie waren vor einem Volk geflohen, das eine dämonische Grausamkeit praktizierte, die ohne Beispiel in der Geschichte der Menschheit ist. Diese Jahre voll entsetzlichem Alpdrücken führten zu der tief erregenden Frage, wie Gott die Existenz der Menschheit weiter zulassen könne. Wir Menschen haben unerhörte Akte der Grausamkeit aneinander begangen. Wir haben unsere Gewässer verdorben und die Atmosphäre verunreinigt. Wir haben schwere Zweifel an unserer Berechtigung und Fähigkeit hervorgerufen, das uns anvertraute Gut recht zu verwalten. Diese Frage, wie Gott ein solches unverantwortliches Handeln weiter zulassen könne, haben wir Juden mit der Legende von den Lamed-vavnicks (den Sechsunddreißig) zu beantworten versucht*). Danach gibt es 36 auserwählte Männer, um derentwillen Gott die Erde weiter bestehen läßt. Es sind 36 Individuen, die – ohne einander und anderen Menschen bekannt zu sein – mit ihrem Leben bezeugen, was es heißt, ein menschliches Wesen zu sein, nicht im natürlichen, sondern im geistlichen Sinne. Sie sind, was Gott mit der Erschaffung von Menschen beabsichtigte, was er von ihrer Entwicklung erhoffte.

Eine Legende? Vielleicht – jedoch nach meiner Überzeugung war Alfred Brauer ein Vorbild für diese Sechsunddreißig. Nichts Besseres kann man sagen von einem Mann, der nichts

---

*) Vav ist der sechste Buchstabe, lamed der zwölfte Buchstabe im hebräischen Alphabet, mit Buchstaben werden die entsprechenden Zahlen bezeichnet: 1, 2, . . ., 9, 10, 20, 30, . . . So bedeutet lamed als Zahl die 30, vav als Zahl die 6. Die Lamed-vavnicks sind also die „Sechsunddreißig".

von seinen wunderbaren Gaben an Geist und Seele zurückgehalten hat. Und nun ist er von uns gegangen. Wenn die Legende mehr ist als eine Legende, dann wird er durch einen anderen ersetzt werden. Aber für uns war es ein Geschenk, daß wir all diese Jahre einen von ihnen unter uns gehabt haben."

Das wissenschaftliche Interesse Alfred Brauers erstreckte sich, ähnlich wie bei seinem Bruder Richard Brauer, auf die (klassische) Algebra und Zahlentheorie. Auf diesen Gebieten haben sich beide Brüder besonders hervorgetan, angeleitet von ihrem gemeinsamen Lehrer Issai Schur. Im Laufe der Zeit spezialisierten sich beide. Richard Brauer wandte sich vor allem der Gruppentheorie, Alfred Brauer vor allem der Matrizentheorie zu. Denn 1946 sollte er seinen Kollegen E. T. Browne, der für ein Jahr (sabbatical year) nach Europa beurlaubt war, an der University of North Carolina in einer Vorlesung über Theorie der Matrizen vertreten. Und da waren es Arbeiten von E. T. Browne über Matrizen, die er dieser Vorlesung zugrunde legte und die den ersten Anstoß zu eigenen Untersuchungen auf diesem Gebiet gaben.

In der Zahlentheorie ging es Alfred Brauer in erster Linie um Fragen multiplikativer Natur (diophantische Gleichungen, Verteilung von Potenzresten, insbesondere Vorkommen von Sequenzen, Abschätzungen des kleinsten quadratischen Nichtrests nach bestimmten Moduln, Nichtexistenz des Euklidischen Algorithmus in gewissen quadratischen Zahlkörpern, Nichtexistenz ungerader vollkommener Zahlen bestimmter Form, Primzahlanzahlen u. a.). Hiervon erschienen Arbeiten wegen ihrer großen Bedeutung in den Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Sodann waren es Fragen der additiven Zahlentheorie, denen er sich mit Erfolg zuwandte (Partitionen, Problem von Frobenius, Additionsketten, Dichte der Summe zweier Mengen natürlicher Zahlen, sogar mit Anwendungen).

In der klassischen Algebra arbeitete er über die Lage von Nullstellen bestimmter Polynome, über Irreduzibilität spezieller Polynome, untersuchte gemeinsam mit R. Brauer Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya, u. a. Sein Hauptinteresse galt dann aber den Eigenschaften charakteristischer Wurzeln von Matrizen, ihrer Lage, ihren Grenzen, ihrer Berechnung, ihrem Abstand u. a. Hier ist ihm insbesondere die Entdeckung der Cassinischen Ovale zu verdanken, in denen Eigenwerte liegen. Ferner ergeben sich Aussagen über Eigenvektoren. Und nicht vergessen werden wird ihm das große Verdienst, das er der Mathematik mit der Herausgabe der Gesammelten Abhandlungen von I. Schur gemacht hat.

Alle Arbeiten von Alfred Brauer zeigen deutlich seine Besonderheit, mathematische Zusammenhänge in einer elementaren und verständlichen Art anzugehen und so ihre Eigenart und Schönheit klar hervortreten zu lassen mit Ergebnissen, die jahrzehntelang nicht verbessert werden konnten. Von daher ist auch seine außerordentliche Ausstrahlung als Lehrer und Förderer zu verstehen, für die ihm zahllose Studierende tiefe Zuneigung und Bewunderung gezollt haben. Eine eingehende Würdigung seines Wesens gaben zum 90. Geburtstag R. H. Hudson and T. L. Markham mit ihrem Beitrag: Alfred Brauer as a Mathematician and Teacher. Linear Alg. and its Appl. **59** (1984) 1–17. Eine weitere Würdigung seiner Persönlichkeit und seines Wirkens gab R. D. Carmichael in: Alfred T. Brauer: Teacher, Mathematician and Developer of Libraries. J. Elisha Mitchell Scient. Soc. **102** (1986) 88–106.

Schriftenverzeichnis

[1] Aufgaben aus der Zahlentheorie 124, 125, 126. In: G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 2, Berlin 1925, 137; Lösungen 347–350 (mit R. Brauer)

[2] Lösung der Aufgabe 21. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **34** (1925) Abt. 2, 98–100

[3] Über einige spezielle diophantische Gleichungen. Math. Z. **25** (1926) 499–504

[4] Über die Irreduzibilität einiger spezieller Klassen von Polynomen. Jber d. Dt. Math.-Verein. **35** (1926) 99–112 (mit R. Brauer und H. Hopf)

[5] Lösung der Aufgabe 30. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **35** (1926) Abt. 2, 92–94

[6] Lösung der Aufgabe 31. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **35** (1926) Abt. 2, 94–95

[7] Lösung der Aufgabe 32. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **35** (1926) Abt. 2, 95–96

[8] Lösung der Aufgabe 46. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **36** (1927) Abt. 2, 90–92 (mit R. Brauer)

[9] Über Sequenzen von Potenzresten. Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse, 1928, 9–16

[10] Problem 263, Solution and Note. Amer. Math. Monthly **35** (1928) 494–495

[11] Über diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen. J. reine angew. Math. **160** (1928) 70–99 (Dissertation 1. Teil)

[12] Über die Approximation algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **38** (1928) Abt. 2, 47

[13] Über diophantische Gleichungen der Form $g^2(x, y) - \mu h^2(x, y) = \gamma y^n$. J. reine angew. Math. **161** (1929) 1–13 (Dissertation 2. Teil)

[14] Über den kleinsten quadratischen Nichtrest. Math. Z. **33** (1930) 161–176; auch Jber. d. Dt. Math.-Verein. **40** (1931) Abt. 2, 32

[15] Über eine zahlentheoretische Behauptung von Legendre. Sitz. Ber. Berliner Math. Gesellschaft **29** (1930) 116–125 (mit H. Zeitz)

[16] Über Sequenzen von Potenzresten. II. Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse, 1931, 329–341

[17] Über die Verteilung der Potenzreste. Math. Z. **35** (1932) 39–50

[18] Über die Nullstellen der Hermiteschen Polynome. Math. Ann. **107** (1932) 87–89

[19] Questions concerning the maximum term in the diatomic series. Proposed by A. A. Bennett. Reply. Amer. Math. Monthly **40** (1933) 409–410

[20] Bemerkungen zu einem Satz von G. Pólya. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **43** (1933) 124–129

[21] Nachruf auf Hermann Zeitz. Sitz. Ber. Berliner Math. Gesellsch. **33** (1934) 2–6

[22] Über die Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya. Math. Z. **40** (1935) 242–265 (mit R. Brauer)

[23] Über die Erweiterung des kleinen Fermatschen Satzes. Math. Z. **42** (1937) 255–262

[24] Über die Dichte der Summe von Mengen positiver Zahlen. Ann. Math. **39** (1938) 322–340

[25] Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist. Math. Z. **44** (1938) 212–232

[26] On addition chains. Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939) 736–739

[27] On the non-existence of the Euclidean algorithm in certain quadratic number fields. Amer. J. Math. **62** (1940) 697–716

[28] On a property of k consecutive integers. Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941) 328–331

[29] On the density of the sum of sets of positive integers, II. Ann. Math. **42** (1941) 959–988

[30] On the least quadratic non-residue (Abstract). Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941) 690

[31] On a problem of partitions. Amer. J. Math. **64** (1942) 299–312

[32] On the non-existence of odd perfect numbers of the form $p^\alpha q_1^2 q_2^2 \ldots q_{t-1}^2 q_t^4$. Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943) 712–718

[33] Note to the afore-mentioned paper. Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943) 937

[34] On certain limits. National Math. Mag. **18** (1943) 64–66

[35] An inequality of triangles, Solution of Problem 4070. Amer. Math. Monthly **51** (1944) 235–236 (mit I. S. Cohen)

[36] Problem 4121. Amer. Math. Monthly **51** (1944) 290

[37] A problem of additive number theory and its application to electrical engineering, J. Elisha Mitchell Scient. Soc. **61** (1945) 55–66; auch in: Studies in Science, Sesquicentennial Publications Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C., 1946

[38] Solution of Problem 4121. Amer. Math. Monthly **52** (1945) 464–467
[39] On a theorem of M. Bauer. Duke Math. J. **13** (1946) 235–238
[40] Consecutive primes. Solution of Problem 4143. Amer. Math. Monthly **53** (1946) 400–401
[41] Limits for the characteristic roots of a matrix. Duke Math. J. **13** (1946) 387–395
[42] On the exact number of primes below a given limit. Amer. Math. Monthly **53** (1946) 522–523
[43] On the irreducibility of certain polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946) 844–856 (mit Gertrude Ehrlich)
[44] Problem E 755. Amer. Math. Monthly **54** (1947) 39
[45] Solution of Problem E 733. Amer. Math. Monthly **54** (1947) 224–225
[46] Limits for the characteristic roots of a matrix, II. Duke Math. J. **14** (1947) 21–26
[47] On the characteristic equations of certain matrices. Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947) 605–607
[48] A conjecture by Srinivasan. Solution of Problem E 755. Amer. Math. Monthly **54** (1947) 472–473
[49] On the irreducibility of polynomials with large third coefficient. Amer. J. Math. **70** (1948) 423–432
[50] Limits for the characteristic roots of a matrix, III. Duke Math. J. **15** (1948) 871–877
[51] On the approximation of irrational numbers by the convergents of their continued fractions. Amer. J. Math. **71** (1949) 349–361 (mit Nathaniel Macon)
[52] On the approximation of irrational numbers by the convergents of their continued fractions, II. Amer. J. Math. **72** (1950) 419–424 (mit Nathaniel Macon)
[53] A criterion for a common root of k algebraic equations. Amer. Math. Monthly **57** (1950) 322–324
[54] Some number theory and its applications to elementary mathematics. Mathematics at Work – Highlights of the Ninth Annual Math. Institute, Duke University, Durham 1949, 62–79
[55] On algebraic equations with all but one root in the interior of the unit circle. Mathem. Nachr. **4** (1951) 250–267
[56] On the irreducibility of polynomials with large third coefficient, II. Amer. J. Math. **73** (1951) 717–720
[57] On the theorem of Aubry-Thue. Can. J. Math. **3** (1951) 367–374 (mit T. L. Reynolds)
[58] Fun with numbers. Mathematics at Work – Highlights of the Tenth Annual Math. Institute, Duke University, Durham 1950, 16–17
[59] On algebraic equations with all but one root in the interior of the unit circle. Proc. Int. Congr. Math. Cambridge, Mass. 1950. **1** (1952) 330
[60] Limits for the characteristic roots of a matrix, IV: Applications to stochastic matrices. Duke Math. J. **19** (1952) 75–91
[61] The proof of the law of sines. Amer. Math. Monthly **59** (1952) 319
[62] Limits for the characteristic roots of a matrix, V. Duke Math. J. **19** (1952) 553–562
[63] Matrices with all their characteristic roots in the interior of the unit circle. J. Elisha Mitchell Scient. Soc. **68** (1952) 180–183
[64] Letter to the Editor. Econometrica **21** (1953) 218–219
[65] On a new class of Hadamard determinants. Math. Z. **58** (1953) 219–225
[66] On the distribution of the Jacobian symbols. Math. Z. **58** (1953) 226–231
[67] Bounds for characteristic roots of matrices. In: Simultaneous linear equations and the determination of eigenvalues, National Bureau of Standards Applied Math. Series **29** (1953) 101–106
[68] Über die Lage der charakteristischen Wurzeln einer Matrix. J. reine angew. Math. **192** (1953) 113–116
[69] On a problem of partitions, II. Amer. J. Math. **76** (1954) 343–346 (mit B. M. Seelbinder)
[70] Elementary estimates for the least primitive root. Studies in Math. and Mech. Presented to Richard von Mises, New York 1954, 20–29
[71] Bounds for the ratios of the coordinates of the characteristic vectors of a matrix. Proc. Nat. Acad. Sciences **41** (1955) 162–164
[72] Limits for the characteristic roots of a matrix, VI: Numerical computation of characteristic roots and of the error in the approximate solution of linear equations. Duke Math. J. **22** (1955) 253–263 (mit H. T. LaBorde)

[73] The Schnirelmann density of the sum of two sequences one of which has positive density. Research Conference on the Theory of Numbers. Cal. Inst. Techn. Pasadena 1955, 53–55
[74] Book Review: A. Y. Khinchin, Three pearls of number theory (Rochester 1952). Bull. Amer. Math. Soc. **61** (1953) 351–353
[75] On the Schnirelmann density of the sum of two sequences. Math. Z. **63** (1956) 529–541
[76] The theories of Lederman and Ostrowski on positive matrices. Duke Math. J. **24** (1957) 265–274
[77] A new proof of theorems of Perron and Frobenius on non-negative matrices, I: Positive matrices. Duke Math. J. **24** (1957) 367–378
[78] Intervals for the characteristic roots of an Hermitian matrix. J. Elisha Mitchell Scient. Soc. **73** (1957) 247–254 (mit A. C. Mewborn)
[79] A method for the computation of the greatest root of a positive matrix. J. Soc. Industr. Appl. Math. **5** (1957) 250–253
[80] Determinants. Encyclopedia Americana **9** (1958) 18–24
[81] Limits for the characteristic roots of a matrix, VII. Duke Math. J. **25** (1958) 583–590
[82] On the greatest distance between two characteristic roots of a matrix. Duke Math. J. **26** (1959) 653–661 (mit A. C. Mewborn)
[83] E. T. Browne as a mathematician. J. Elisha Mitchell Scient. Soc. **75** (1959) 82–85
[84] Introduction to density problems. Report of the Institute in the Theory of Numbers, Boulder 1959, 111–116
[85] A note on a numbertheoretical paper of Sierpinski. Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960) 406–409
[86] Stochastic matrices with non-trivial greatest positive root. Duke Math. J. **28** (1961) 291–296
[87] On the characteristic roots of power-positive matrices. Duke Math. J. **28** (1961) 439–446
[88] On Diophantine equations of the form $x^n + y^n = hp^m$. Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961) 951–953 (mit J. E. Shockley)
[89] Matrix. Encyclopedia Americana **18** (1961) 437–438
[90] On the theorems of Perron and Frobenius on non-negative matrices. Studies in Mathem. Analysis and related Topics, Stanford Press 1962, 48–55
[91] Problem 1555 (a system of diophantine equations). Amer. Math. Monthly **69** (1962) 1009 (mit Aubrey Kempner)
[92] On a problem of Frobenius. J. reine angew. Math. **211** (1962) 215–220 (mit J. E. Shockley)
[93] On the characteristic roots of non-negative matrices. In: Recent Advances in Matrix Theory (H. Schneider Ed.). Madison, Wis., 1964, 1–38
[94] Some elementary results on the distribution of the quadratic residues. Proc. 1963 Number Theory Conference. Colorado Springs 1964, 11–12
[95] A method for the computation of the greatest root of a non-negative matrix. SIAM J. Numer. Anal. **3** (1966) 564–569
[96] A problem of partitions. Solution of Problem E 1811. Amer. Math. Monthly **74** (1967) 88–89
[97] On the characteristic roots of stochastic matrices. J. Elisha Mitchell Scient. Soc. **84** (1968) 382–383
[98] On the characteristic roots of tournament matrices. Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968) 1133–1135 (mit Ivey C. Gentry)
[99] A new proof of a theorem by H. G. Landau on tournament matrices. J. Combin. Theory **5** (1968) 289–292 (mit Ivey C. Gentry and Kay Shaw)
[100] Einige Anwendungen der Matrizentheorie auf algebraische Gleichungen. J. reine angew. Math. **236** (1969) 11–25 (mit Hans Rohrbach)
[101] Combinatorial methods on the distribution of the k-th power residues. Combin. Math. and its Appl. Chapel Hill 1969, 14–36
[102] K-sequences with small divisors. Amer. Math. Monthly **77** (1970) 407–408
[103] A remark on the paper of H. H. Schaefer: Abschätzung der nichttrivialen Eigenwerte stochastischer Matrizen. Numer. Math. **17** (1971) 163–165
[104] On stochastic matrices whose absolute smallest characteristic root is real. Duke Math. J. **39** (1972) 265–266 (mit Ivey C. Gentry)
[105] Some remarks on tournament matrices. Linear Alg. and its Appl. **5** (1972) 311–318 (mit Ivey C. Gentry)

[106] An unpublished numbertheoretical paper by I. Schur. Proc. 1972 Number Theory Conference at Boulder, 19
[107] Gedenkrede auf Issai Schur (presented at the University of Berlin). In: I. Schur, Gesammelte Abhandlungen 1, 1973, V–XIV
[108] I. Schur, Gesammelte Abhandlungen 1–3. (Hrsg. A. Brauer und H. Rohrbach) Berlin – Heidelberg – New York 1973
[109] Bounds for the greatest characteristic root of an irreducible non-negative matrix. Linear Alg. and its Appl. **8** (1974) 105–107 (mit Ivey C. Gentry)
[110] A lower bound for the greatest root of an irreducible non-negative matrix. Int. Congr. Math. Vancouver. Abstracts of Communications (1974) 164 (mit Ivey C. Gentry)
[111] Bounds for the greatest characteristic root of an irreducible non-negative matrix, II. Linear Alg. and its Appl. **13** (1976) 109–114 (mit Ivey C. Gentry)
[112] Eine Bemerkung zum Vornamen Schurs. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **77** (1976) 165–166
[113] On the exact number of primes in the arithmetic progressions 4n ± 1 and 6n ± 1. J. reine angew. Math. **291** (1977) 23–29 (mit Richard H Hudson)

Prof. Dr. Hans Rohrbach
Fachbereich Mathematik
Universität Mainz

Privatadresse:
In der Fischzucht 5
8743 Bischofsheim

(*Eingegangen: 26. 1. 1987*)

Buchbesprechungen

Fischer, G., Mathematische Modelle, Aus den Sammlungen von Universitäten und Museen, Bildband und Kommentarband, Braunschweig: Vieweg 1986. Bildband: XII 129 S. mit 132 Fotografien, Kommentarband: VIII, 89 S. mit 90 Figuren 22 x 24 cm, geb., DM 118,–

Das Erscheinen der „Mathematischen Modelle", mit Photos in optimaler Beleuchtung von Gerd Fischer, in einem prachtvollen Band und mit Kommentaren in einem zweiten Band (in deutscher oder englischer Sprache erhältlich) ist ein höchst erfreuliches Ereignis für jeden Geometer.

Am Ende des neunzehnten Jahrhunderts entdeckten E. Kummer und viele andere den Reichtum der algebraischen Flächen vom Grad drei und vier im reellen und komplexen Raum. Dieser Reichtum konnte besonders gut genossen werden an dreidimensionalen Modellen, und so entstanden die ersten Gipsmodelle (Kummers Steinersche Fläche). Projektive und topologische Eigenschaften, Singularitäten und ihre Verteilung über die Fläche werden hier anschaulich gemacht. Anschließend wurden dann auch in anderen mathematischen Gebieten Modelle angefertigt und sogar für den Verkauf produziert. Viele mathematische Institute legten so um 1900 eine Sammlung an.

Gerd Fischer hat nur die schönsten Modelle ausgesucht und photographiert. Im Kommentarband gibt es dazu Erläuterungen, die in sieben Kapitel gegliedert sind: 1. Elementare analytische Geometrie. 2. Algebraische Flächen. 3. Differentialgeometrie. 4. Körper konstanter Breite. 5. Reguläre Sternpolyeder. 6. Modelle der reellen projektiven Ebene. 7. Funktionen. Die Kommentare stammen von den Herren Fischer, Barth, Knörrer, do Carmo, Pinkall, Reckziegel, Böhm, Quaisser und Leiterer. Sie sind aktuell und nicht nur für Spezialisten verständlich.

Um 1920 wurde die Produktion der Modelle eingestellt, nicht zuletzt weil das Interesse daran abnahm. Das entsprach dem Glauben vieler Mathematiker, wie z. B. später N. Bourbaki, daß geometrische Figuren als Hilfsmittel in der Mathematik eher stören als helfen.

Neuerlich hat die Geometrie, wohl nicht nur für mich mehr eine Lebenskunst als ein Fachgebiet, mit einer Fülle von Beispielen, neuen Entdeckungen und Resultaten wieder an Interesse zugenommen. Das wurde besonders klar beim letzten Internationalen Kongreß in Berkeley (1986), wo die Geometrie Thema mehrerer Übersichtsvorträge war. Damit paßt das Buch „Mathematische Modelle" gut in die Aktualität.

Die Autoren für jedes Kapitel haben ihre Kommentare, wenn möglich, mit den neuesten Entwicklungen in Verbindung gebracht. Dies trifft insbesondere für die algebraische Geometrie und die Differentialgeometrie zu. Zum Beispiel hat man gerade in der Flächentheorie erstaunliche Entdeckungen gemacht. Costa, Meeks und Hoffmann haben neue, eingebettete, vollständige Minimalflächen im $\mathbf{R}^3$ entdeckt, wo es seit 1776 (Meusnier) bis 1984 nur drei gab: Ebene, Katenoid und Helicoid. Wente entdeckte immersierte Torusflächen konstanter mittlerer Krümmung im $\mathbf{R}^3$. Karcher, Pinkall und Sterling fanden neue Minimalflächen in S^3.

Die heutigen Mathematiker machen auch ihre Modelle, aber das sind meist Computergrafiken, oft mit raffinierter Färbung verdeutlicht. Die Komputermodelle (nicht gefärbt) der reellen projektiven Ebene von Banchoff sind im Buch aufgenommen. Das Buch kann jedem Mathematiker mit geometrischem Interesse herzlich empfohlen werden.

IHES, Bures-sur-Yvette (France) N. H. Kuiper

Knörrer, H., u. a., Arithmetik und Geometrie (Mathematische Miniaturen 3), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1986, 141 S., gbd., DM 42,–

Das in Band 1 dieser Reihe (vgl. Besprechung in diesem Jber. **84** (1982), *13/14*) begonnene Unternehmen, Antrittsvorlesungen als populärwissenschaftliche Vorstellung unseres Faches auf höchstem Niveau zu publizieren, hat mit diesem Band eine Fortsetzung gefunden, die der Reihe glänzend zu Gesicht steht und auf weitere derartige Bändchen hoffen läßt. Die vier hier präsentierten Vorlesungen stellen für die Forschung aktuelle Themen aus Zahlentheorie und Geometrie in ihren Entwicklungslinien und im Wechselspiel zwischen diesen beiden Disziplinen in verständlicher und spannender Form vor.

C. G. Schmidt beginnt mit dem trotz der in jüngster Zeit erzielten Fortschritte noch immer ungelösten Problem von Fermat, eilt durch dessen Geschichte, mit den pythagoreischen Tripeln beginnend, zieht die Verbindungslinien zur Funktionentheorie und algebraischen Geometrie und endet bei den Konsequenzen des Satzes von Mordell-Faltings für die Fermatsche Vermutung.

Ein Thema aus dem Zentrum der algebraischen Zahlentheorie hat J. Schwermer gewählt: Er berichtet über die mit Euler beginnende Geschichte der Reziprozitätsgesetze; die Entwicklung führt über Legendre, Gauß, Jacobi, Eisenstein, Kummer zu Artins allgemeinem Reziprozitätsgesetz in der Klassenkörpertheorie. Damit ist das Thema nur im Falle einer abelschen Galoisgruppe bearbeitet. Der nichtabelsche Fall steht heute im Zentrum arithmetischer Untersuchungen und wird hier durch Shimuras Reziprozitätsgesetz, das in den Torsionspunkten elliptischer Kurven wurzelt, und durch einen Blick auf den großen Entwurf einer nichtabelschen Klassenkörpertheorie von Langlands vorgestellt.

Das Thema der dritten Vorlesung sind Kleins „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade" aus dem Jahr 1884. Das von Klein inszenierte Wechselspiel zwischen Algebra (Gleichung fünften Grades), Geometrie (Ikosaeder) und Analysis (hypergeometrische Differentialgleichung) wird von P. Slodowy aus heutiger Sicht beleuchtet und in Verbindung gebracht mit Galoiskohomologie, kubischen Flächen, kanonischen Raumkurven vom Geschlecht 4, Kepler-Poinsotschen Sternkörpern und den von Faltings bewiesenen Tate-Vermutungen. Für Beziehungen zu anderen aktuellen Themen (Singularitäten, einfache Liegruppen, Hilbertsche und elliptische Modulflächen) wird auf Literatur verwiesen.

Beschlossen wird das Viergespann mit einer Vorlesung von H. Knörrer über ein kristalloptisches Thema, die Fresnelsche Wellenfläche, die komplexifiziert zu einer speziellen Kummerfläche wird und nach Auflösung der Singularitäten zu einer K3-Fläche, genauer zu einem Produkt zweier elliptischer Kurven modulo einer Involution. Dieser Beitrag weist insbesondere auch auf die mannigfachen, heute besonders aktuellen, wechselseitigen Beziehungen zwischen Physik (hier Optik und Quantenmechanik) und Mathematik (hier algebraische Geometrie) hin.

Naturgemäß wird in keiner der Vorlesungen ein Thema bis ins Detail ausgelotet, der Rückgriff auf die Original-Literatur bleibt niemandem erspart, der es ganz genau wissen will. Aber als gut dokumentierter Wegweiser, als lebendige, anregende Berichterstattung, als facettenreiche Dokumentation der Einheit der Mathematik ist das vorliegende Buch ein wertvoller Beitrag, den zu lesen für jeden mathematisch Interessierten, vom Abiturienten bis zum Hochschullehrer, ein Gewinn wäre.

Erlangen W.-D. Geyer

Kunz, E., Kähler Differentials (Advanced Lectures in Mathematics, ed. by Gerd Fischer), Wiesbaden: Vieweg 1986, VIII, 402 pp., softcover, DM 76,–

Das Buch ist aus Vorlesungen über Kählersche Differentiale und ihre Anwendungen in der kommutativen Algebra hervorgegangen, die der Autor für fortgeschrittene Studenten gehalten hat. Es beginnt ganz vorn mit der Einführung der Begriffe Derivation und Differentialalgebra und entwickelt ausführlich den Formalismus der universellen Ausdehnungen, universellen Derivationen und universellen Differentialalgebren (deRham-Algebren). Konstruktionen für die universelle Ausdehnung werden für die wichtigsten Fälle angegeben. Nach diesen soliden formalen Grundlagen ist der Hauptteil des Buches (§§ 5–17) den Anwendungen in der kommutativen Algebra gewidmet. In § 5 werden Differentialmoduln von Körpererweiterungen studiert. Neben den üblichen Fakten über Separabilität, Transzendenz- und p-Basen wird der sehr interessante Begriff einer „zulässigen Derivation" und eines „zulässigen Unterkörpers" eingeführt. Diese Begriffe erlauben die Formulierung vieler Resultate unabhängig von Separabilitätsvoraussetzungen. Besonders nützlich ist eine Verallgemeinerung auf Algebren, die wesentlich von endlichem Typ sind, die im folgenden § 6 angegeben wird. Hier leitet der Autor zunächst die bekannten exakten Folgen für den Differentialmodul $\Omega^1_{S/R}$ eines lokalen Ringes S her, die es erlauben, die minimale Erzeugendenzahl $\mu(\Omega^1)$ durch die Einbettungsdimension und den p-Grad der Restklassenkörpererweiterung im absoluten und relativen Fall zu berechnen. Er diskutiert Anwendungen auf den Verzweigungsbegriff und beweist einen Struktursatz für unverzweigte Erweiterungen. Zulässige Unterkörper spielen eine entscheidende Rolle in allen differentiellen Regularitätskriterien (Jacobi-Kriterien) bei Primzahlcharakteristik p. Solche Kriterien für Regularität und geometrische Regularität sind der Hauptinhalt von § 7. In § 8 werden diese Kriterien auf den Fall angewandt, daß S/R glatt ist. Differentielle Glattheitskriterien werden ebenso hergeleitet wie Aussagen über den glatten Ort in verschiedenen Situationen. In § 9 werden lokale und globale vollständige Durchschnitte durch Differentialmoduln gewisser zulässiger Derivationen charakterisiert. § 10 führt die Kählerschen Differenten von S/R bezüglich einer zulässigen Derivation von R ein und zeigt, wie sich die Kriterien der vorangehenden Abschnitte über Regularität, Glattheit, Verzweigung und vollständige Durchschnitte durch diese Differenten ausdrücken lassen. Beziehungen zu den Differenten von Dedekind und Noether werden hergestellt. Als Vorbereitung auf die Behandlung von Komplettierungen und analytischen Algebren wird der Begriff der universell endlichen Derivation in § 11 eingeführt und diskutiert. In § 12 wird das Verhalten von Differentialalgebren unter I-adischer Komplettierung studiert. Die Existenz der universell endlichen Differentialalgebra Ω wird für gewisse komplette Algebren sichergestellt. In den §§ 13–14 werden viele Resultate der §§ 5–7 auf den Fall übertragen, daß R eine analytische oder semianalytische k-Algebra über einem kompletten noetherschen lokalen Ring k ist, dessen maximales Ideal von der Charakteristik p seines Restklassenkörpers erzeugt wird. Jede reduzierte semianalytische k-Algebra S enthält eine eindeutig bestimmte maximale analytische Unteralgebra A. Die universelle S-Ausdehnung des universell endlichen Differentialmoduls von A/k stellt sich als der angemessene Differentialmodul für das Studium semianalytischer k-Algebren heraus. Falls S ein Körper ist, ist $Q(A) = k((X_1, \ldots, X_d))$ ein Potenzreihenkörper und S/k heißt „analytische (semianalytische) Körpererweiterung". Für analytische Körpererweiterungen spielt die Zahl d dieselbe Rolle wie der Transzendenzgrad bei endlich erzeugten Körpererweiterungen. Daher wird d der „analytische Transzendenzgrad" von S/k genannt. Der Begriff eines zulässigen Unterkörpers wird ebenfalls auf den Fall semianalytischer Körpererweiterungen verallgemeinert. Er spielt wieder eine wesentliche Rolle bei den Verallgemeinerungen der Kriterien für Regularität und geometrische Regularität auf die (semi-)analytische Situation.

In § 15 wird der Fall eines „Frobenius Sandwich" $S^p \subset R \subset S$ (wobei S einen Körper der Charakteristik $p > 0$ enthält) im Hinblick auf die Frage betrachtet, wann lokal p-Basen von S/R existieren. Es besteht eine enge Verbindung zwischen p-Basen und differentiell einfachen Ringen, die zu einem Kriterium von Yuan für die Existenz von p-Basen führt. Daraus wird nach einem Beweis von Matsumura ein Satz von Kimura-Niitsuma hergeleitet: Falls S regulär ist, ist die lokale Existenz von p-Basen äquivalent damit, daß $\Omega^1_{S/R}$ projektiv ist, und auch damit, daß R regulär ist. Anwendungen auf die inseparable Galoistheorie werden erwähnt. Die beiden letzten Abschnitte handeln von der Definition von Spuren (§ 16) und Residuen (§ 17) von Differentialformen. Sei S/R eine endliche, lokal freie Algebra, Ω eine Differentialalgebra von R und Ω_S die universelle S-Ausdehnung von Ω. Gibt es eine „Spurabbildung" von Ω_S nach Ω? Der Autor formuliert zunächst 7 „Spuraxiome" welche eine solche Abbildung erfüllen sollte. Er konstruiert dann eine Spur für den Fall, daß R noethersch und S/R lokal vollständiger Durchschnitt ist. Diese Spur ist schon durch die ersten vier Spuraxiome eindeutig bestimmt (Linearität und Verträglichkeit mit der kanonischen Spur von S/R, Basiswechsel und direkten Produkten). An einem Beispiel aus den Übungen wird gezeigt, daß es nicht möglich ist, ohne einschränkende Voraussetzungen über S/R vernünftige Spuren zu konstruieren. Weitere Fälle, in denen Spurabbildungen mit anderen Methoden konstruiert werden, werden am Ende des Abschnittes aufgeführt. In § 17 wird die Spur benutzt, um Residuen für Differentialformen in einem algebraischen Funktionskörper L/K einer Variablen an jedem Bewertungsring R von L über K zu definieren. Zunächst wird eine Residuenabbildung $\mathrm{Res}_R : \Omega^1_{L/K} \to K$ definiert und der Residuensatz bewiesen. Diese reicht aber im inseparablen Falle nicht aus, um den Dualitätssatz zu beweisen. Hier muß man einen zulässigen Unterkörper K_0 anstelle von K als Differentialkonstantenkörper und Differentialformen $\omega \in \Omega^{r+1}_{L/K_0}$ mit $r := \dim_K \Omega^1_{K/K_0}$ benutzen. Die Residuen für solche Differentialformen werden mittels der zuvor konstruierten Residuen für $\Omega^1_{L/K}$ definiert. Schließlich wird der Serresche Dualitätssatz für diese Differentialformen bewiesen. Zusammenhänge mit dem Poincaré-Residuum und der Cartier-Operator werden als Übung angegeben.

Schließlich enthält das Buch noch sieben Anhänge, die etwa ein Viertel des Gesamtumfanges ausmachen. Sie enthalten interessantes Material aus der kommutativen Algebra. Besonders in den Anhängen C und F über vollständige Durchschnitte und Spuren werden Resultate aufbereitet, die man nur schwer anderswo findet. Die Anhänge sind unabhängig vom Rest des Buches und bilden eine wertvolle Ergänzung zu den Büchern von Matsumura und Bourbaki über kommutative Algebra, die als Standardreferenz angegeben werden.

Das Buch stellt eine ausgezeichnete Einführung in die Theorie der Kählerschen Differentiale und ihrer Anwendung in der kommutativen Algebra dar. Es führt von den Grundlagen zu offenen Problemen. Viele eigene Resultate des Autors finden in ihm ihren Niederschlag. Natürlich kann ein solches einführendes Buch nicht alle einschlägigen Fragen behandeln. So sind etwa reguläre Differentiale, Residuen in höheren Dimensionen und Dualitätstheorie (bis auf den Serreschen Dualitätssatz) bewußt ausgespart. Die große Zahl gut ausgesuchter Übungen, die zum Teil weiterführenden Stoff bringen, ist besonders begrüßenswert.

Ich kann dieses Buch jedem Mathematiker, der auf dem Gebiet der kommutativen Algebra arbeitet, aber auch jedem fortgeschrittenen Studenten mit entsprechenden Interessen nur wärmstens zur Lektüre empfehlen.

Saarbrücken R. Berger

Milne, J. S., Arithmetic Duality Theorems (Perspectives in Mathematics, Vol. 1), Boston – New York – Tokyo: Academic Press 1986, X + 419 S., gebunden, $ 38,–

In dem vorliegenden Buch hat der Autor die große Mühe auf sich genommen, alle wesentlichen Resultate der arithmetischen Dualitätstheorie in Galois-,étaler und flacher Kohomologie mit vollständigen Beweisen darzustellen. Dies ist um so verdienstvoller, da es für eine ganze Reihe wichtiger Sätze in diesem Gebiet bisher keine Beweise in der Literatur gab. Das Buch enthält zudem einige neue Erkenntnisse und eine Fülle von Verallgemeinerungen und Verschärfungen bekannter Resultate unter einheitlichen Gesichtspunkten.

Das Buch gliedert sich in drei Kapitel: Galois-, étale und flache Kohomologie. Sofern möglich werden die Sätze in ihrem Kontext bewiesen: Sätze über Galois-Kohomologie nur mit Hilfe von Galois-Kohomologie etc. Die Verbindungen zwischen den verschiedenen Kohomologietheorien werden natürlich auch herausgearbeitet.

Im ersten Kapitel werden zunächst die lokalen und globalen Dualitätssätze von Tate und Poitou behandelt. Hier sind die Koeffizienten endlich erzeugte Moduln oder abelsche Varietäten. Ein weiterer Abschnitt ist höher-dimensionalen lokalen Körpern und ihrer Dualitätstheorie mit Koeffizienten in Quillenschen K-Gruppen gewidmet. Nach einem Abschnitt über die globale Euler-Poincaré-Charakteristik folgen verschiedene Anwendungen: auf die Isogenie-Invarianz der Birch und Swinnerton-Dyer Vermutung, auf Tori, das Hasse-Prinzip für lineare algebraische Gruppen u. a. Ein knapper Anhang, in dem die meisten Sätze der Klassenkörpertheorie für Funktionenkörper mit Hilfe von etwas algebraischer Geometrie bewiesen werden, schließt das erste Kapitel ab.

In Kapitel 2 über étale Kohomologie werden zunächst der lokale und globale Dualitätssatz von Artin und Verdier behandelt und zwar gleich für **Z**-konstruierbare Garben. Auch hier gibt es einen n-lokalen Dualitätssatz mit Werten in étalen K-Garben und Resultate, wenn als Koeffizienten abelsche Schemata betrachtet werden. Nach Verallgemeinerungen auf singuläre Basis-Schemata kommt der Autor auf die höher-dimensionale Theorie und die Philosophie der Lichtenbaum-Komplexe zu sprechen. Unter geeigneten Annahmen über diese läßt sich leicht ein allgemeiner höher-dimensionaler arithmetischer Dualitätssatz beweisen. Leider sagt der Autor nichts über Anwendungen auf die höher-dimensionale (abelsche) Klassenkörpertheorie und die Beziehungen zu Resultaten von Bloch, Kato und Saito. Diese Zusammenhänge sind allerdings auch noch nicht gut verstanden.

Im letzten Kapitel über flache Kohomologie werden Sätze von Artin, Bester, Bégueri, Mazur, MacCallum, Milne, Roberts, Shatz, Kredenskii behandelt. Der Autor geht dabei systematisch die Fälle durch: lokale Theorie für gleiche und verschiedene Charakteristiken, als Koeffizienten (quasi-)endliche Gruppenschemata oder abelsche Varietäten. Dann globale Theorie im Zahl- und Funktionenkörperfall mit Koeffizienten in quasi-endlichen Gruppenschemata und Néronmodellen etc.

Der Beweis des lokalen Dualitätssatzes von Artin-Mazur wird sehr elegant und viel kürzer als in der Originalarbeit über ein Einbettungsresultat von Raynaud bewiesen. Dieses wird in einem Anhang gezeigt.

Mit Hilfe von étaler Artin-Verdier Dualität folgt dann der Beweis des globalen flachen Dualitätssatzes von Artin-Mazur, der hier übrigens zum ersten Mal publiziert wird.

Der Autor hat das Buch abgerundet durch eine ganze Reihe von Übungsaufgaben, durch historische Bemerkungen hinter jedem größeren Abschnitt und durch verschiedene nützliche Anhänge. Insgesamt ist das Buch ein Königsweg in die vormals recht schlecht zugängige Dualitätstheorie; jeder, der sich für dieses Gebiet interessiert, sollte es besitzen.

Regensburg C. Deninger

Zimmer, R. J., Ergodic Theory and Semisimple Groups (Monographs in Mathematics 81), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1984, 311 S., Hardcover, DM 90,–

Ziel des Buches ist es, eine zugängliche Darstellung der tiefliegenden Resultate von Margulis über die Starrheit, Arithmetizität und Struktur von diskreten Untergruppen von halbeinfachen Lie-Gruppen zu geben. Margulis ist für diese Resultate beim Internationalen Mathematiker-Kongreß 1978 in Helsinki mit einer Fields-Medaille ausgezeichnet worden.

Ich werde zuerst die Hauptresultate ohne technischen Aufwand darstellen.

Diskrete Untergruppen von halbeinfachen Lie-Gruppen wurden zuerst im Zusammenhang mit Riemannschen Flächen studiert (Poincaré, Fricke, Klein): Wenn M eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $\geqslant 2$ ist, ist ihre universelle Überlagerung die Poincarésche obere Halbebene. Die Fundamentalgruppe von M kann also mit einer diskreten Untergruppe Γ von $PSL_2(\mathbf{R})$ identifiziert werden.

Beim Studium quadratischer Formen (Hermite, Minkowski, Siegel) traten die diskreten Untergruppen $SL_n(\mathbf{Z})$ von $SL_n(\mathbf{R})$ auf und, für eine gegebene quadratische Form q mit ganzzahligen Koeffizienten, die Gruppe $O(q, \mathbf{Z})$ ihrer „Einheiten", das ist die Untergruppe derjenigen Matrizen aus der orthogonalen Gruppe $O(q)$ der Form q, die ganzzahlige Einträge haben. Bei der Konstruktion eines Modulraums für abelsche Varietäten wurde Siegel auf die Untersuchung der Modulgruppe $Sp_{2n}(\mathbf{Z})$ geführt, einer diskreten Untergruppe der symplektischen Gruppe $Sp_{2n}(\mathbf{R})$.

Alle diese Untergruppen – $SL_n(\mathbf{Z})$ in $SL_n(\mathbf{R})$, $O(q; \mathbf{Z})$ in $O(q)$ und $Sp_{2n}(\mathbf{Z})$ in $Sp_{2n}(\mathbf{R})$ – sind Beispiele von arithmetischen Gruppen im Sinne von Borel und Harish-Chandra. Diese Autoren haben auch bewiesen, daß für jede arithmetische Untergruppe Γ einer halbeinfachen Lie-Gruppe G das Volumen von G/Γ für jedes G-invariante Maß endlich ist. Dieser Satz ist für die obigen Beispiele klassisch (Hermite, Fricke, Klein, Siegel). Man sagt, daß Γ dann endliches Kovolumen in G hat. Dasselbe gilt auch, wenn $\Gamma \subset PSL_2(\mathbf{R})$ die Fundamentalgruppe einer kompakten Riemannschen Fläche oder einer kompakten Riemannschen Fläche minus einer endlichen Teilmenge ist.

Die Vermutung (Selberg, Pyatetski-Shapiro), daß für die meisten halbeinfachen Lie-Gruppen G jede diskrete Untergruppe Γ von endlichem Kovolumen arithmetisch ist, erscheint absurd, wenn man $PSL_2(\mathbf{R})$ betrachtet: Es gibt kontinuierlich viele nicht konjugierte solche Untergruppen. Andererseits war $PSL_2(\mathbf{R})$ lange Zeit die einzige einfache Lie-Gruppe, in der man nicht-arithmetische diskrete Untergruppen von endlichem Kovolumen kannte. Die von Makarov und Vinberg 1965 entdeckten weiteren Beispiele betrafen nur ganz spezielle Gruppen, solche vom reellen Rang 1 (s. u.).

Der Arithmetizitätssatz von Margulis besagt nun, daß die Vermutung richtig ist. Genauer gesagt: Es sei G eine halbeinfache Lie-Gruppe, die wir uns – um unwesentliche technische Probleme zu vermeiden – als Zusammenhangskomponente der Gruppe der Automorphismen ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ vorstellen. G habe keine kompakten Faktoren. Es sei Γ eine diskrete Untergruppe von G von endlichem Kovolumen, die irreduzibel ist, d. h. die Projektion p auf jeden nicht trivialen direkten Faktor von G hat nicht diskretes Bild $p(\Gamma)$. Setzen wir voraus, daß G reellen Rang $\geqslant 2$ hat, d. h. G ist nicht die Gruppe der Isometrien eines reellen, komplexen oder quaternionischen hyperbolischen Raumes oder einer hyperbolischen Ebene über den Cayleyschen Oktaven. Dann sagt der Arithmetizitätssatz von Margulis, daß Γ arithmetisch ist. Im Falle, daß G/Γ nicht kompakt ist, bedeutet das einfach, daß es eine Basis des $\mathbf{R}$-Vektorraums $\mathfrak{g}$ gibt, so daß die Gruppe $\mathcal{G}(\mathbf{Z})$ derjenigen Automorphismen von $\mathfrak{g}$, die bezüglich dieser Basis ganzzahlige Einträge haben, zu Γ kommensurabel ist, d. h. $\Gamma \cap \mathcal{G}(\mathbf{Z})$ ist von endlichem Index in Γ und $\mathcal{G}(\mathbf{Z})$. Im Falle, daß G/Γ kompakt ist, ist der Begriff der arithmetischen Gruppe schwieriger zu formulieren. Γ ist dann nicht notwendig kommensurabel zur Gruppe der ganzzahligen Punkte in G selbst, sondern zum Bild $\alpha(\mathcal{H}(\mathbf{Z}))$ für eine über $\mathbf{Q}$ definierte algebraische Gruppe $\mathcal{H}$, wobei $\alpha : \mathcal{H}(\mathbf{R}) \to G$ ein surjektiver Homorphismus mit kompaktem Kern ist.

Für einige Gruppen von reellem Rang 1 sind nicht-arithmetische diskrete Untergruppen bekannt, für die meisten nicht (Vinberg, Mostow u. a.).

Arithmetische Gruppen sind in einem gewissen Sinne starr. Das ist intuitiv plausibel, weil man algebraische Zahlen nicht kontinuierlich variieren kann, ohne die Algebraizität zu zerstören. Die Starrheitsresultate vor Margulis' Arbeiten (Selberg, Weil, Mostow) kann man daher als Schritte in Richtung auf den Arithmetizitätssatz ansehen. Tatsächlich folgert Margulis seinen Arithmetizitätssatz aus seinem Superstarrheitssatz, der besagt, daß unter den obigen Voraussetzungen jeder Homomorphismus $p : \Gamma \to GL_n(F)$, F lokal kompakter nicht diskreter Körper, entweder relativ kompaktes Bild hat oder F = $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ ist und p sich zu einer Darstellung G $\to$ $GL_n(F)$ fortsetzen läßt.

Der in der Einleitung erwähnte Struktursatz von Margulis besagt, daß unter den obigen Voraussetzungen jeder Normalteiler $\neq \{e\}$ von Γ von endlichem Index in Γ ist. Beide Sätze, der Superstarrheitssatz und der Struktursatz, sind offensichtlich für die freie nicht-abelsche endlich erzeugte Gruppe Γ, eine diskrete Untergruppe von endlichem Kovolumen in $PSL_2(\mathbf{R})$, falsch.

Die Sätze von Margulis gelten in größerer Allgemeinheit als hier beschrieben. Statt $\mathbf{Q}$ sind algebraische Zahlkörper zugelassen, außer der Komplettierung $\mathbf{R}$ von $\mathbf{Q}$ bezüglich der archimetischen Bewertung sind auch solche für nichtarchimedische Bewertungen, z. B. $\mathbf{Q}_p$, zugelassen und entsprechend gelten die Sätze auch für S-arithmetische Gruppen. Eine Verallgemeinerung auf den Fall positiver Charakteristik ist von T. N. Venkataramana (CR Acad. Sci. Paris 302 (1986) 371–373) angekündigt worden.

Die Beweise von Margulis sind eine geniale Kombination von Methoden aus zwei ganz verschiedenen Theorien, nämlich der ergodischer Wirkungen und der der algebraischen Gruppen. Das Buch von Zimmer enthält eine gute und zugängliche Darstellung der Resultate und Beweise von Margulis und eine Einführung in die Resultate des Autors über ergodische Wirkungen. Es stellt die benutzten Ergebnisse der beiden verwendeten Theorien dar – die über ergodische Wirkungen ausführlich und mit Beweisen, die über algebraische Gruppen meistens ohne Beweis und oft nur für SL_n. Ich empfehle das Buch als zugängliche, mit guten Motivationen versehene Darstellung der tiefliegenden Arbeiten von Margulis.

Bielefeld H. Abels

Burde, G., Zieschang, H., Knots (de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 5), Berlin – New York: de Gruyter 1985, xiv, 399 pp., cloth, DM 138,–

„Das Phänomen eines Knotens ist eine grundlegende Erfahrung in unserer Anschauung des dreidimensionalen Raumes.“ Mit diesen Worten beginnt die vorliegende langerwartete Monographie, deren „neun erste Kapitel (außer dem sechsten) den Standardstoff der klassischen Knotentheorie behandeln“. Diesen Nachsatz aus dem Vorwort des Buches darf man allerdings nicht so verstehen, als hätte sich durch wiederholte Darstellungen in Lehrbüchern ein Standardstoff als klassisch herauskristallisiert. Seit Reidemeisters Ergebnisbericht von 1932 ist keine Gesamtdarstellung der Knotentheorie mehr erschienen, und nur ein kleiner Teil des heute klassischen Stoffes war 1932 schon bekannt. An Büchern gab es seither nur eine elementare Einführung (Crowell and Fox, Introduction to Knot Theory, New York 1963) sowie ein paar Bücher, die speziellen, vorwiegend algebraischen Aspekten gewidmet sind. Vergleichbar erscheint nur D. Rolfsen, Knots and Links, Berkeley 1976, vor allem wegen des beiden Büchern gemeinsamen geometrischen Zugangs. Aber Rolfsens Buch ist eher eine Einführung in das Gesamtgebiet der dreidimensionalen Topologie unter besonderer Berücksichtigung der Knoten und Verschlingungen als eine systematische Darstellung der Knotentheorie im engeren Sinne, wie sie das vorliegende Werk bringt.

Die grundlegenden Definitionen beruhen auf Begriffen der Topologie und zwar vorzugsweise der stückweise linearen Topologie. Sie werden im 1. Kapitel eingeführt. Die folgenden Kapitel enthalten eine systematische Darstellung dessen, was in 75 Jahren in der Knotentheorie geleistet wurde. Die Autoren gehen auf die Quellen und die Geschichte am Ende eines jeden Kapitels kurz ein. Im 2. Kapitel werden alle wesentlichen geometrischen Konstruktionen vorgestellt: Zyklische Überlagerungen, Seifertsche Flächen (1934), Produkt- und Begleitknoten (Schubert 1949), Zöpfe (Artin 1925). Das 3. Kapitel handelt vom Knotenaußenraum. Seine Fundamentalgruppe ist die wichtigste algebraische Invariante des Knotens und wird als Knotengruppe G bezeichnet. Die abelsch gemachte Gruppe G/G' ist unendlich zyklisch, die Kommutatoruntergruppe G' ist also die Fundamentalgruppe der unendlich zyklischen Überlagerung des Außenraumes. Dies wird im 4. Kapitel benutzt, um Ergebnisse von Neuwirth (1960) und Brown-Crowell (1965) über die Struktur von G' herzuleiten. Im 5. Kapitel folgt der Beweis des Faserungssatzes von Stallings (1961): Wenn G' endlich erzeugt ist, ist der Außenraum ein Faserbündel über der Kreislinie. Das 6. Kapitel enthält die von den Autoren 1966 entdeckte Charakterisierung der Torusknoten: Es sind die einzigen, deren Gruppe G ein nicht triviales Zentrum hat. Die eindeutige Zerlegung in Primknoten (Schubert 1949) wird im 7. Kapitel bewiesen. Die komplizierte Struktur der Knotengruppe G hat schon früh dazu geführt, daß man nach Invarianten suchte, die sich einfach berechnen und vergleichen lassen. Die bekannteste ist das Alexandersche Polynom (1928). Es wird im 8. Kapitel nach Seifert (1934) in geometrischer Weise eingeführt und im 9. Kapitel mittels des Differentialkalküls von Fox (1953) berechnet.

Über diesen „Standardstoff der klassischen Knotentheorie" hinaus behandeln die Autoren sechs weitere Themen. 10. Kapitel: Zöpfe (Artin 1925, 1947), 11. Kapitel: dreidimensionale Mannigfaltigkeiten als verzweigte Überlagerungen der Dreisphäre (Alexander 1920, Hilden-Montesinos 1976), 12. Kapitel: Klassifikation der Viergeflechte und ihre Verallgemeinerung (Bankwitz-Schumann 1934, Schubert 1956, Montesinos 1973), 13. Kapitel: Quadratische Formen (Goeritz 1933, Trotter 1962, Murasugi 1965, Milnor-Erle 1969), 14. Kapitel: Darstellungen der Knotengruppe. Im letzten Kapitel kommen die Autoren auf zwei grundsätzliche Fragen zurück, die sich schon ganz am Anfang stellen: Wie weit ist der Knoten durch seinen Außenraum und wie weit ist der Außenraum durch seine Fundamentalgruppe G bestimmt? Aufgrund tiefliegender Ergebnisse von Waldhausen (1967) über große Dreimannigfaltigkeiten gibt es weitreichende aber noch nicht vollständige Antworten. Neueste Ergebnisse der hier zur Zeit besonders intensiven Forschung werden einbezogen.

Durchweg bemühen sich die Autoren um eine möglichst elementare Darstellung aus anschaulich geometrischer Sicht. Aber die Standardbegriffe und -ergebnisse der algebraischen Topologie werden vorausgesetzt. Überdies werden bei Beweisen neuerer Resultate tiefliegende Ergebnisse der dreidimensionalen Topologie herangezogen. Der eigentliche Text der Monographie beansprucht nur 300 Seiten. Ein 100 Seiten langer Anhang enthält für Knoten bis zu 9 und teilweise bis zu 10 Überkreuzungen Tabellen der wichtigsten Invarianten und Bilder dieser Knoten. Die Bibliographie mit über 1200 Titeln umfaßt auch die Arbeiten zu Themen, die nicht im Text behandelt werden. Eine Klassifikation nach Sachgebieten erlaubt dem Leser, schnell alle relevanten Veröffentlichungen zu jedem Teilgebiet zu finden.

Die Knotentheorie hat auf weiten Strecken keine Beziehung zu anderen Gebieten der Mathematik als der Gruppentheorie und der algebraischen Topologie. Das mindert das Interesse vieler Mathematiker. Um einen breiteren Leserkreis anzusprechen, hätten algebraische Knoten und Singularitäten oder die hyperbolische Struktur im Knotenaußenraum vielleicht nicht nur erwähnt, sondern ausführlicher behandelt werden sollen. Aber dem stand die erklärte Absicht entgegen, allein die topologischen Aspekte ausführlich darzustellen. Mit dieser Beschränkung wurde ein Buch geschaffen, welches für die kommenden Jahre das Standardwerk der Knotentheorie sein wird. Dem Fachmann wird es als Nachschlagwerk dienen, aber jeder topologisch vorgebildete Leser kann es als Lehrbuch benutzen, um die Knotentheorie zu erlernen. Zahlreiche Aufgaben kontrollieren den Erfolg.

Köln K. Lamotke

Hardt, R., Simon, L., Seminar on Geometric Measure Theory (DMV-Seminar, Band 7), Basel: Birkhäuser Verlag 1986, 117 pp., paperback, DM 26,10

Dieser Bericht über das DMV-Seminar über Geometrische Maßtheorie im Juni 1984 enthält Ausarbeitungen der dort von den beiden Autoren gehaltenen Vorträge. L. Hardt gab einen Abriß der Theorie der Ströme (currents) mit Schwerpunktsetzung bei rektifizierbaren Strömen mit ganzer Vielfachheit bis hin zur Regularitätstheorie bei Strömen minimaler Masse. L. Simon referierte über rektifizierbare Mengen, rektifizierbare Varifaltigkeiten (varifolds), Monotonieformel für stationäre Varifaltigkeiten und Allards Regularitätssatz.

Zur Theorie der Ströme liegt seit 1969 die ausführliche Monographie von H. Federer vor (Geometric Measure Theory, Springer-Verlag). Die von F. J. Almgren und W. K. Allard initiierte Theorie der Varifaltigkeiten sowie Entwicklungen in der Theorie der Ströme nach 1969 sind noch nicht in einem Lehrbuch abgehandelt worden, aber L. Simons Lecture Notes von 1983 – wohl eine Vorstufe zu einer Monographie – enthält ausführliche Darstellungen dieses Materials (Lectures on Geometric Measure Theory, Proc. of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Vol. 3). Der Wert des vorliegenden Bändchens besteht hauptsächlich darin, daß eine konzentrierte und durch viele Abbildungen anschaulich gestaltete Einführung in die Geometrische Maßtheorie gegeben wird, welche dem Leser rasches Vordringen zu einigen tieferen Sätzen der Theorie ermöglicht und die zum Beweis benötigten Konstruktionen und Begriffsbildungen auch für nicht Fachkundige verständlich präsentiert. Die Lektüre des Seminarberichts ist daher für Interessenten an der Geometrischen Maßtheorie in erster Linie als Vorstufe zu einem intensiveren Studium von Federers Monographie oder von Simons Lecture Notes geeignet.

Da die fundamentalen Begriffe „Ströme" und „Varifaltigkeiten" in der mathematischen Öffentlichkeit noch nicht so bekannt sind, wie sie es angesichts ihrer vielfältigen Anwendungen in Analysis und Differentialgeometrie verdienen, ist es wohl angebracht, an dieser Stelle eine kurze Beschreibung dieser Konzepte zu geben. Bei den k-dimensionalen Strömen handelt es sich um eine distributionstheoretische Verallgemeinerung von differentialgeometrischen k-dimensionalen orientierten Flächen: Ganz wie man Funktionen als lineare Funktionale auf Räumen von Testfunktionen auffaßt und daher allgemeine lineare Funktionale auf Testräumen als „verallgemeinerte Funktionen" einführt, gelangt man von k-dimensionalen orientierten Flächen durch Integration von Differentialformen des Grades k zu linearen Funktionalen auf Räumen von Testformen und zur Interpretation allgemeiner Funktionale auf diesen Testräumen als „verallgemeinerte k-dimensionale orientierte Flächen", genannt „Ströme". So gesehen sind Ströme nichts weiter als spezielle vektorwertige Distributionen – geometrische Objekte erhält man erst durch Spezialisierung zu k-rektifizierbaren Strömen. Diese werden gegeben durch eine k-rektifizierbare Menge, die versehen wird mit Orientierungen ihrer (im k-dimensionalen Sinne) fast überall maßtheoretisch definierten Tangentialräume und mit einer Vielfachheitenfunktion. Varifaltigkeiten verallgemeinern in ähnlicher Weise das Konzept der nicht-orientierten k-dimensionalen differentialgeometrischen Fläche. Jede solche Fläche definiert ein Maß auf der Graßmann-Mannigfaltigkeit aller k-dimensionalen Tangentialebenen an den umgebenden Raum, und allgemeine derartige Maße nennt man „k-dimensionale Varifaltigkeiten". Die speziellen k-rektifizierbaren Varifaltigkeiten werden definiert durch eine k-rektifizierbare Menge, deren Tangentialräume und eine nicht-negative Vielfachheitenfunktion. Varifaltigkeiten sind gewissermaßen maßtheoretische Verteilungen von Flächenelementen; Rektifizierbarkeit bedeutet, daß diese Flächenelemente an (fast) jeder Stelle mit dem Tangentialraum an die Trägermenge (zugehörige Menge der Fußpunkte) übereinstimmen.

Maßgebend für die Einführung der verallgemeinerten Flächen in Form der Ströme bzw. Varifaltigkeiten war das Bemühen, k-dimensionale Flächen von kleinster Masse (= k-dimensionaler Flächeninhalt) bei diversen gegebenen Randbedingungen zu finden und zu analysieren. Gemäß der direkten Methode der Variationsrechnung hat man zur Lösung der Existenzfrage Klassen verallgemeinerter Flächen und eine Topologie darauf so zu bestimmen, daß einerseits die Masse noch unterhalbstetig ist, andererseits Masse-beschränkte Folgen von Flächen kompakt sind. Genau dies wird durch geeignete Klassen von rektifizierbaren Strömen bzw. Varifaltigkeiten geleistet. Der Preis, den man für den Übergang zu verallgemeinerten Flächen zu zahlen hat, ist natürlich, daß die gewonnenen Existenzsätze keine klassischen Flächen mehr liefern. Daher ist eine schwierige Regularitätstheorie erforderlich, welche klärt, inwieweit die Masse-minimierenden Ströme bzw. Varifaltigkeiten tatsächlich klassischen differentialgeometrischen Flächen entsprechen.

Wer nach diesen notwendigerweise recht vagen Erläuterungen Interesse gewonnen hat, die für die moderne Variationsrechnung fundamentalen Begriffsbildungen und Resultate der Geometrischen Maßtheorie genauer kennenzulernen, dem sei der vorliegende Seminarbericht nachdrücklich empfohlen.

Düsseldorf K. Steffen

Landau, E., Gaier, D., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1986, 3. erw. Auflage, 10 Abb., XI, 201 S., gebunden, DM 96,–

Die Mathematik hat sich in diesem Jahrhundert enorm erweitert. Dabei ist die klassische Funktionentheorie etwas ins Hintertreffen gekommen. Landau's Buch zeigt, warum dies Feld in den zwanziger und dreißiger Jahren so beliebt war. Inzwischen ist die Verallgemeinerung modern geworden und konkrete Resultate sind verpönt.

Dies Buch will zeigen, daß der Landausche Ideenkreis immer weiter Schönes erzielt hat und noch erzielt. Mir scheint Herrn Gaiers Beweis unwiderleglich.

Der erste Teil besteht aus der zweiten Auflage von 1929, unverändert abgedruckt. Im zweiten Teil beschreibt der zweite Autor die Resultate auf diesem Feld, die seitdem stattgefunden haben. Ich fand den Bericht über die Tauberschen Sätze besonders interessant. Mit funktionentheoretischen Mitteln und der Theorie der normalen Funktionen ist manches einfacher geworden. Auch die Restgliedsätze werden erwähnt. Man findet den Beweis von de Branges der Bieberbachschen Vermutung (1984) und die scharfe Form des Landau-Satzes von Hempel und Lai (1979). Der Schottky-Satz wird in der Form

$$\log|f(z)| \leqslant (A + \log^+ |a_0|)\frac{1+r}{1-r}$$

allerdings nur mit $A = 7$ (Ahlfors 1938) und nicht dem scharfen $A = \pi$ (Hayman 1947) zitiert.

Sonst fehlt aber kaum ein interessantes Resultat über Funktionen im Einheitskreis, und der Autor beschreibt auch manches über ganze Funktionen, zum Beispiel die Theorie von Edrei, Saff und Varga (1983) der Nullstellen von Partialsummen. Es werden 368 Arbeiten zitiert.

Im dritten Teil beweist Herr Gaier noch eine Reihe moderner markanter Sätze. Hier finden sich u. a. der High-Indices-Satz von Hardy und Littlewood, das Turansche Lemma, mit Anwendung auf den Fabry-Lückensatz und Wermers Maximalitätssatz. Die Eleganz der Beweise steht hinter der von Landau nicht zurück.

Dies Buch ist nicht nur Bibliotheken, sondern auch jedem Funktionentheoretiker warm zu empfehlen.

York W. K. Hayman

Lelong, P., Gruman, L., Entire Functions of Several Complex Variables (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 282), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, 285 S., hardcover, DM 148,–

Ganze Funktionen mehrerer Veränderlicher – das sind holomorphe Funktionen $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ ($n > 1$). Es geht hier also um ein Teilgebiet der komplexen Analysis. Ein recht beschränktes, mag man auf den ersten Blick meinen. Wenn man jedoch an all die „elementaren" transzendenten Funktionen denkt, die in diese Klasse fallen und wenn man an die Anwendungen in anderen Gebieten denkt (etwa in der Zahlentheorie, dargestellt im Kapitel 6, oder im Zusammenhang mit funktionalanalytischen Fragen über Räume holomorpher Funktionen, Kapitel 8 und 9), so wird man rasch eines anderen belehrt.

Ganze Funktionen zu studieren, das heißt, sich mit Wachstumsfragen zu beschäftigen. Die Einführung der wichtigsten Wachstumsbegriffe steht denn auch am Anfang des Buches. Um tiefere Ergebnisse gewinnen zu können, werden dann *die* zwei nicht-analytischen Hilfsmittel bereitgestellt: plurisubharmonische Funktionen und vor allem Ströme (current) (Kapitel 2 und Appendix I). Gerade die Theorie der Ströme – insbesondere die positiven geschlossenen Ströme – ist auch in anderen Gebieten der komplexen Analysis von großer Bedeutung. Ein wichtiges Verdienst dieser Monographie ist es daher, daß hier die Theorie der positiven, geschlossenen Ströme wohl zum ersten Mal in Lehrbuchform erscheint (einschließlich z. B. eines vollständigen Beweises des Satzes von Lelong, daß die Integration über i. a. singuläre analytische Mengen einen Strom definiert). Kapitel 2 verdient daher Interesse über die Theorie der ganzen Funktionen hinaus.

Einiges aus dem weiteren Inhalt des Buches: Es wird das sog. 2. Cousinsche Problem mit Wachstumsbedingungen gelöst; es wird das Wachstum von $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ im Zusammenhang mit dem Volumen von $f^{-1}(0)$ untersucht; es wird gefragt, wann eine analytische Menge $Y \subset \mathbf{C}^n$ sich als $f^{-1}(0)$, $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$ mit gewissen Wachstumsbedingungen schreiben läßt – alles zentrale Probleme.

Der gesamte Inhalt des vorliegenden Buches wurde in den letzten drei, vier Jahrzehnten entwickelt. Es wird hier m. W. zum ersten Mal als Monographie präsentiert, schon daran erkennt man die Bedeutung des Werkes. Leicht lesbar ist es nicht: Abschätzungen, Rechnungen, Technik beherrschen die Szene. Das liegt aber in der Natur der Sache. Rein optisch hätte ein nicht so gedrängter Druck sicher das Lesen zumindest psychologisch erleichtert. An Vorkenntnissen erfordert das Buch nicht viel – wenigstens theoretisch. In der Praxis sind aber wohl doch gute Kenntnisse der „gewöhnlichen" komplexen Analysis erforderlich. Schon aus diesem Grund darf man sagen: ein wichtiges und interessantes Buch – für Spezialisten.

Bayreuth Th. Peternell

Gray, J., Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1986, 490 pp., hardcover, DM 95,–

Mit einer stärkeren Zuwendung zu konkreteren und historisch motivierten Fragestellungen in der Mathematik der letzten Jahre hat auch das Interesse an der Entstehung der heutigen Mathematik beträchtlich zugenommen. Eine besondere Rolle spielt dabei das neunzehnte Jahrhundert, das die meisten der die heutige reine Mathematik kennzeichnenden Begriffe hervorgebracht hat. Im Gegensatz zu der vielleicht noch bis vor kurzem vorherrschenden Tendenz, Strukturen isoliert für sich zu betrachten (und zu lehren), zeigen die Entwicklungen des vorigen Jahrhunderts dieselben nicht nur in ihrem Entstehungszusammenhang, sondern auch in Wechselwirkung mit anderen Strukturen (wobei natürlich beides oft zusammenfällt).

Das vorliegende Buch beschreibt die Herausbildung der Theorie der automorphen Funktionen in den Händen von Klein und Poincaré als Resultat eines involvierten Wechselspiels zwischen der Theorie linearer Differentialgleichungen im komplexen Gebiet und der Gruppentheorie, beide eingebettet in damals aktuelle Fragestellungen über elliptische Funktionen, algebraische Gleichungen, Modulfunktionen, algebraische Kurven und Riemannsche Flächen. Es wendet sich explizit an Mathematiker in der Hoffnung „that this historical treatment will re-acquaint many mathematicians with a rich and important area of mathematics perhaps known only to specialists today". Dabei setzt der Autor die Voraussetzungen an den Leser als genügend gering an („no more than an undergraduate knowledge of the subject").

Der etwas über 300 Seiten lange, in 6 Kapitel aufgeteilte Haupttext des Buches beschäftigt sich mit einem äußerst umfangreichen mathematischen und historischen Material. Da der Text selber in kondensierter Weise über Mathematik berichtet, wird die folgende kurze Inhaltsangabe nur einen sehr vagen Eindruck von den behandelten Themen vermitteln können.

Das erste Kapitel berichtet über frühe Untersuchungen der hypergeometrischen Differentialgleichungen in den Arbeiten von Euler, Pfaff und Gauss, den Zusammenhang mit den Perioden elliptischer Integrale (Legendre, Jacobi), Kummers 24 Lösungen und deren Relationen, die in impliziter Weise Monodromiebeziehungen enthalten, und Riemanns globalen funktionentheoretischen Standpunkt, der die Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung durch ihre lokale Monodromie charakterisiert. Das zweite Kapitel widmet sich hauptsächlich den analytisch orientierten Arbeiten von L. Fuchs, in denen die singulären Punkte linearer Differentialgleichungen ausführlich untersucht werden (reguläre singuläre Punkte, lokale Lösungen und Monodromietransformationen). Es schließt mit einem Bericht über Arbeiten von Frobenius und Thomé sowie die Einführung der Jordanschen Normalform durch Hamburger und C. Jordan. Das dritte Kapitel verfolgt die Antworten auf das von Fuchs gestellte Problem der Charakterisierung komplexer linearer Differentialgleichungen mit ausschließlich algebraischen Integralen: von Schwarz' geometrischer Lösung des hypergeometrischen Falles über Fuchs' invariantentheoretische Behandlung der Gleichungen zweiter Ordnung zur expliziten Heranziehung und Klassifikation der endlichen Monodromiegruppen in $PGL_2(\mathbf{C})$ bei Klein und Gordan und schließlich zu den Arbeiten Jordans, die das Problem der Klassifikation der endlichen Untergruppen von $SL_n(\mathbf{C})$ in Angriff nehmen. Im vierten Kapitel werden andere Entwicklungslinien, die von der Gleichungstheorie kommen, aufgegriffen, so die Ideen von Galois zu den niedrigen Modulargleichungen und deren Verarbeitung in den Händen von Betti, Hermite, Brioschi und Kronecker, die sie für die transzendente Lösung der Gleichungen fünften Grades nutzbar machten. Neben Dedekinds und Kleins Zugang zu den elliptischen Modulfunktionen wird auch Kleins Synthese der Untersuchungen zu den Gleichungen fünften Grades eingehend beschrieben. Die Kleinsche Theorie der Gleichungen siebten Grades mit Galoisgruppe $PSL_2(\mathbf{F}_7)$ involviert elliptische Modulfunktionen, Gruppentheorie und die Theorie der Quartiken. Diesem Komplex widmet sich das fünfte Kapitel nach einer vorhergehenden historischen Zusammenfassung der wesentlichen Resultate aus der Theorie der algebraischen Kurven und der Abelschen Funktionen.

Im letzten und wichtigsten Kapitel des Buches, das sich der Entstehung der Theorie der automorphen Funktionen widmet, laufen nun verschiedene der bisher besprochenen Entwicklungen zusammen. Nach einem Bericht über Untersuchungen von Hermite, Picard und Fuchs zur Laméschen Differentialgleichung sowie Fuchs' Betrachtung (bei Differentialgleichungen 2. Ordnung) der zum Quotienten zweier Fundamentallösungen inversen Funktion wendet sich der Text den ersten Arbeiten Poincarés zu, in denen die funktionentheoretische Natur der Fuchsschen Funktionen und ihre Rolle bei der Lösung von Differentialgleichungen aufgeklärt werden. Im Anschluß an die Schilderung von Poincarés Interpretation der projektiven Monodromiegruppen als Bewegungsgruppen in der nichteuklidischen Ebene und seiner von der Differentialgleichungstheorie unabhängigen Konstruktion der Fuchsschen Funktionen durch invariante Reihenbildungen (Theta-Fuchssche Funktionen) zeichnet der Briefwechsel zwischen Poincaré und Klein ein lebhaftes Bild ihres Ideen- und Erfahrungsaustausches. Sachlicher Höhepunkt ist dabei die Aufstellung der Uniformisierungssätze für Riemannsche Flächen im Jahr 1882. Das Kapitel endet mit einer Übersicht über die unmittelbar folgenden Arbeiten von Klein und Poincaré zur Geometrie und Funktionentheorie der Fuchsschen und Kleinschen Gruppen, in denen Beweise für die Hauptsätze der Uniformisierungstheorie skizziert wurden, deren vollständige Ausführung allerdings erst im Jahre 1907 gelang.

Der Haupttext des Buches wird begleitet von zahlreichen Anmerkungen, die etwas versteckt am Ende des Buches untergebracht sind, sowie vier Anhängen zu speziellen, vorher nur kurz berührten Themen und, was für ein historisch orientiertes Buch ungewöhnlich sein dürfte, einer Sammlung von Übungsaufgaben.

Wie diese Angaben zum Inhalt des Buches verdeutlichen, beschäftigt es sich mit einem äußerst attraktiven Thema. In Anbetracht der spärlichen historischen Literatur zu den behandelten Gebieten kommt dem Autor das große Verdienst zu, aus einem erdrückend umfangreichen Originalmaterial ein konzentriertes Bild der Hauptentwicklungslinien gezeichnet zu haben, das einem breiteren mathematischen Publikum ohne allzu große Mühen zugänglich ist. Wer sich irgendwie für mathematische Entwicklungen während des vorigen Jahrhunderts interessiert, die Themen dieses Buches streifen, wird an ihm nicht vorübergehen können.

Ein vorwiegend mathematisch interessierter Leser sollte allerdings keine falschen Erwartungen in dieses Buch setzen. So ist der Rezensent in Passagen, bei denen er sich mit der behandelten Materie vertraut fühlte, auf einige mathematische Unklarheiten und Fehlübersetzungen gestoßen. Wer ihnen entgehen will, wird den mühseligen, aber oft lohnenden Weg durch die Originalliteratur gehen müssen. Aber auch dabei dürfte das vorliegende Buch ein äußerst wertvoller Reisebegleiter sein.

Liverpool P. Slodowy

Chae, S. B., Holomorphy and Calculus in Normed Spaces (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 92), New York – Basel: Marcel Dekker Inc. 1985, bound, xii, 421 pp., $65.–

The theory of holomorphic mappings in infinite dimensions, which is receiving increasing attention in recent times, has been developing along several different lines since its beginnings, which can be traced back, with some approximation, in two papers of H. von Koch (1899) and D. Hilbert (1909), and in a monograph of F. Riesz (1913). In the case of maps from domains in the complex plane to complex Banach spaces, the development of the theory followed essentially the pattern of scalar-valued holomorphic functions of one complex variable after N. Wiener's remark (1923) whereby Cauchy's integral theorem is valid in the general context of Banach-space valued functions. Applications to spectral properties of linear operators, which were more or less latent in the book of F. Riesz, were developed in the thirties and early forties when the principle of uniform boundedness was applied by N. Dunford, A. E. Taylor and E. Hille to establish a characterization of vector-valued and operator-valued holomorphic functions. A Cauchy-type integral formula – the Dunford integral – whose kernel is the resolvent function of a linear operator, became a basic tool of calculus in Banach algebras, algebras of operators, theory of analytic functionals, etc. That formula was anticipated, within the framework of matrix theory, by G. Frobenius in 1896, H. Poincaré in 1899 and, more recently, by G. Giorgi and L. Fantappié in 1928 and 1930. In the thirties also the theory of holomorphic functions of a vector variable, which originated in the pioneering papers of H. von Koch and D. Hilbert, found a natural sequel in the hands of A. D. Michal, A. E. Taylor and others, who, using Wiener's remark, replaced the Cauchy-Riemann point of view to the Weierstrass approach which was present in the papers of H. von Koch and D. Hilbert.

Infinite dimensions appear in real function theory and real differential geometry as a natural environment for basic problems in global analysis. There the interest of algebraic topologists and differential geometers was aroused when in 1965 N. Kuiper proved that the unitary group of an infinite dimensional separable Hilbert space is contractible. At about the same time A. Douady (1966) showed that the problem of moduli for certain compactly supported coherent analytic sheaves requires the consideration of (infinite dimensional) analytic spaces of Banach type.

Since then calculus and differential geometry in infinite dimensions became the center of a renewed interest. The treatise of E. Hille and R. S. Phillips, which contained one of the most exhaustive accounts of calculus in Banach spaces up to 1957, found a sequel in several reports and monographs, which were autored, among others, by J. Dieudonné, S. Lang, J. Eells, R. S. Palais, J. T. Schwartz in the real case, and by L. Nachbin, J. P. Ramis, Ph. Noverraz, G. Coeuré, T. Franzoni-E. Vesentini, S. Dineen, J. F. Colombeau, J. Mujica, J. A. Barroso in the complex case.

The book of Soo Bong Chae is designed to give a systematic exposition of the elementary theory of holomorphic mappings of normed spaces which should be accessible to a large number of graduate students in mathematics with only a rudimentary knowledge of classical complex analysis in one variable and of elementary topology. The book provides a self-contained exposition of the relevant facts of functional analysis which are needed, and does not hesitate to introduce supplementary hypotheses to simplify some proof. That is the case, for instance, of the strong maximum principle which is established for holomorphic maps into the unit ball using a device, due to L. Harris, which simplifies considerably the original proof given by E. Thorp and R. Whitley in a more general setting.

The elementary presentation covers the first two parts of the book. The first one, after a sketchy discussion of the three basic principles of linear functional analysis (the theorem of Hahn-Banach, the Banach open mapping theorem and the theorem of Banach-Steinhaus), is concerned with the differential calculus in normed spaces. In the second part the theory of holomorphic mappings is developed, starting with vector-valued holomorphic functions of one complex variable and passing then to holomorphic mappings between domains of complex Banach spaces. Here the book establishes H. Cartan's uniqueness theorem, Earle-Hamilton's fixed point theorem, and provides an accurate discussion of Gateaux holomorphy and the implications of local boundedness, illustrating then the notion of radius of boundedness of a holomorphic map.

In the third and last part of the book several locally convex topologies in the space of holomorphic maps are investigated with particular attention to the Nachbin topology and the Nachbin-Coeuré topology. A proof of the completeness of the Nachbin topology for any open subset of a normed space is presented. Finally the solution of the Levi-problem for C^n is extended to any complex Banach space with a Schauder basis: a result which is due to L. Grulan and C. O. Kiselman.

Unlike the first two parts, the third one is not self-contained, and the pace becomes much quicker giving the volume also the character of a interesting research monograph.

Pisa E. Vesentini

Upmeier, H., Symmetric Banach Manifolds and Jordan C*-algebras (North-Holland Mathematics Studies, 104, Notas de Mathemática (96), Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland 1985, xii, 444 pp., $ 55.50

Die symmetrisch hermiteschen komplexen Mannigfaltigkeiten (endlicher Dimension) wurden unter Verwendung von Liegruppen und der Klassifikation der halbeinfachen komplexen

Liealgebren (endlicher Dimension) von E. Cartan vollständig klassifiziert. Neben diesem Lie-theoretischen Zugang gibt es auch einen Jordan-theoretischen Zugang, der von M. Koecher vorgeschlagen wurde. Anstelle von Liealgebren werden dabei Jordanalgebren und deren Verallgemeinerung, die sogenannten Jordan-Tripelsysteme verwendet. In den letzten zehn Jahren hat eine stürmische und erfolgreiche Entwicklung stattgefunden mit dem Ziel, wesentliche Resultate dieser Theorie auf den beliebig dimensionalen Fall zu verallgemeinern. An dieser Entwicklung sind W. Kaup, J. P. Vigué und H. Upmeier, ein Schüler von W. Kaup, maßgeblich beteiligt. Dabei wurde festgestellt, daß sich der Jordan-theoretische Zugang in geeignet modifizierter Form erstaunlich gut auf den unendlich dimensionalen Fall verallgemeinern läßt. Die auf diesem Gebiet erzielten Ergebnisse waren bisher nur verstreut über die Originalarbeiten zugänglich. Bisher fehlte eine Darstellung, die in systematischer Weise die benötigten Grundlagen zusammenstellt und bis zu den neuesten Resultaten führt. Diese Lücke wird durch das Buch geschlossen.

Abgesehen von einigen Resultaten, die aus der Funktionalanalysis, der Analysis in Banachräumen und der komplexen Analysis einer und mehrerer Veränderlicher übernommen werden, stellt das Buch eine in sich abgeschlossene Einführung in die Theorie symmetrischer normierter Banach-Mannigfaltigkeiten (einer Verallgemeinerung hermitesch symmetrischer Mannigfaltigkeiten endlicher Dimension) und in die Theorie hermitescher Jordan-Tripelsysteme dar. Wie der Titel schon andeutet, ist das Buch in zwei Teile unterteilt.

Teil I (§§ 1–13) beschäftigt sich in allgemeinem Rahmen mit analytischen Banach-Mannigfaltigkeiten und der Theorie der Transformationsgruppen auf diesen Mannigfaltigkeiten. Von zentraler Bedeutung ist dabei, daß gewisse Gruppen biholomorpher Transformationen auf Banachmannigfaltigkeiten mit der analytischen Struktur einer Banach-Liegruppe versehen werden können. In diesem Zusammenhang sind als zentrale Resultate des Teiles I, die Ergebnisse (11.14) und (13.14) zu nennen, die vom Autor in seiner Dissertation entwickelt wurden.

Im zweiten Teil (§§ 14–23) werden systematisch die Funktionalanalytischen und algebraischen Hilfsmittel bereitgestellt, um C*-Jordanalgebren und hermitesche Jordan-Tripelsysteme einzuführen. Eines der zentralen Resultate (18.17) ist eine algebraische Charakterisierung der Klasse symmetrischer, zusammenhängender, komplexer, normierter Banach-Mannigfaltigkeiten durch hermitesche Banach-Jordantripel, die auf W. Kaup zurückgeht. Zum Beweis werden die im Teil I bereitgestellten Hauptresultate wesentlich benutzt. Anschließend wird der Spezialfall beschränkter symmetrischer Gebiete in Banach-Räumen ausführlich behandelt. Dabei stellt sich nach W. Kaup heraus, daß die beschränkten symmetrischen Gebiete bis auf biholomorphe Äquivalenz die offenen Einheitskugeln von positiven hermiteschen C*-Jordantripeln (sogenannten JB*-Tripeln) sind.

Neben vielen illustrierenden Beispielen enthält das Buch zu Beginn eines jeden Paragraphens eine kurze Einführung in den Problemkreis. Erst am Ende eines jeden Paragraphen wird in den NOTES auf die Quellen eingegangen. Das Buch ist systematisch aufgebaut und klar geschrieben. Die Lesbarkeit wird durch das ausführliche Sachregister mit Symbolindex erleichtert.

Da in dem Buch eine Brücke geschlagen wird zwischen der Komplexen Analysis auf der einen Seite und der Operatortheorie auf der anderen Seite, dürfte das Buch sowohl bei Analytikern, als auch bei Spezialisten in der Operatortheorie auf reges Interesse stoßen.

Tübingen R. Braun

Fomenko, A. T., Fuchs, D. B., Gutenmacher, V. L., Homotopic Theory, Budapest: Akadèmiai Kiadò 1986, 310 S., geb., DM 73,–

Ich bin einmal durch eine mathematische Bibliothek geführt worden, die mir als eine der größten überhaupt vorgestellt wurde, und ich kannte dort weniges und fand weniges, was ich kannte – denn es handelte sich um eine Bibliothek des Ostens. Aber neuerdings, wo bei uns aus mancherlei Gründen nicht so viele neue Bücher erscheinen (von Lehrbüchern über Lineare Algebra einmal abgesehen), haben die Verlage für ihre Lust zu produzieren die Bücherwelt des Ostens entdeckt: Lehrbücher, Handbücher und Enzyklopädien werden aus dem Russischen übersetzt. Auf das Lehrbuch, von dem hier die Rede ist, muß man besonders aufmerksam machen; es ist in Budapest erschienen und kommt nicht jedermann von selbst in die Hände.

Es handelt sich um ein Buch aus den sechziger Jahren über die klassischen Gegenstände der algebraischen Topologie. Fast wie in resignierendem Rückblick auf die wunderlichen Ziele der Jugend schreibt Fuchs im Vorwort: „Eines Dozenten Hauptziel war, einen Tunnel zu graben, der die Unwissenden von den Grundbegriffen zur „Höhe der Höhen", der Adams-Spektralfolge brachte, und nur durch glücklichen Zufall führte dieser Tunnel durch ein paar Goldadern". Nun, damit ist jedenfalls das Thema genannt. Das Buch hat den lockeren Stil einer gelungenen Vorlesungsausarbeitung, und es geht zügig voran mit einem Aufbau, den ich hier zur selben Zeit in einer Vorlesung von D. Puppe gesehen habe. Es beginnt mit Homotopietheorie, Faserungen, exakten Homotopiesequenzen, und durch Einhängungssätze und einen kleinen Trick mit der Hopffaserung für die ersten Dimensionen berechnet man direkt $\pi_n(S^n)$. Das liefert viele klassische Anwendungen. Danach erst, im 2. Kapitel, kommt die singuläre Homologie und Kohomologie. Damit, zusammen 120 Seiten, hat man schon eine gute Grundausbildung in algebraischer Topologie, und wie es vorgemacht ist, kann man soweit in einem gut geführten Semester kommen.

Und jetzt geht es los: Spektralsequenzen mit allen Schikanen, den unvermeidlich vielen Indices oben und unten und Diagrammen für die Randoperatoren des E_2-Terms, das ist das 3. Kapitel, und es endet, substanzreich genug, mit der Berechnung der Kohomologie der Eilenberg-MacLane-Komplexe. Das Ergebnis wird im 4. Kapitel benutzt, um die Steenrodalgebra zu konstruieren und zu erkunden, und das 5. Kapitel bringt die Adams-Spektralfolge mit Anwendungen.

Wer selber auf dem Gebiet arbeitet und sich nicht fürchtet, kann mit tüchtigen Studenten so weit in einem Jahr kommen, und das Buch ist ein guter Leitfaden, wie man vorankommt und über mancherlei hinwegkommt. Es ist kürzer als das von Spanier oder das von Dold, und es geht viel weiter, mindestens doppelt so weit, wenn man das als sinnvolle Aussage gelten läßt. Natürlich kann man da nichts wirklich systematisch vollständig erkunden; das ist auch nicht das Ziel des Buches.

Die Übersetzung ist brauchbar, die Hauptschwierigkeit, bestimmte und unbestimmte Artikel richtig zu setzen, ist überall wo es darauf ankommt gemeistert (was man auch Erscheinungen aus renommierten Verlagen nicht immer nachrühmen kann). Dafür sind Druckfehler sehr häufig.

Eine Besonderheit des Buches sind Fomenkos Illustrationen. Es gibt nicht nur zahlreiche in der Topologie immer hilfreiche Strichfiguren, sondern darüber hinaus viele teils ganzseitige Graphiken, die zwar von Topologischem, nicht nur von der Geometrie, sondern auch von gewaltigen Diagrammen, inspiriert sind, die aber oft wie Träume aussehen, in denen die mathematischen Gestalten, mit denen sich das Hirn am Tage abgemüht hat, zu beänstigendem nächtlichem Eigenleben erwachen. Und dieses seltsam organische Wesen greift manchmal auch auf die dem hellen Tage angehörenden Diagramme und Figuren über. Das gehört zum Lebendigen des Buches, und bleibt dabei unaufdringlich: nicht zur Metaphysik hochstilisierte Vexierbilder, nicht als Wissenschaft verkaufte Computer-Kaleidoskopie, doch Ausdruck des Persönlichen, des Menschen, der mit der Wissenschaft kämpft. Als das Buch entstand, war Fomenko noch ein junger Student.

Regensburg Th. Bröcker

Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T., Manifolds, Tensor Analysis and Applications (Global Analysis Series, No. 2), London: Addison Wesley 1983, XIX, 582 S., zahlr. graph. Darst., hard, £ 44.95

Die Verfasser definieren im Vorwort die Globale Analysis: Sie ist eine – historisch gewachsene – Synthese aus Klassischer Analysis und Geometrie.

Schon seit Poincaré und Liapounov liegt das Motiv für diese Synthese in den Anwendungen der Mathematik in Astronomie, Physik und Ingenieurwissenschaften. Daher ist heute Globale Analysis wichtig und war wohl bisher etwas schwer erlernbar. Explizit ist der Zweck dieses Buches, dieses zu ändern, und das geschieht so:

Die Autoren bieten nacheinander eine Übersicht über Topologie (just im „richtigen Umfang"), Funktionalanalysis, Analysis auf Mannigfaltigkeiten, über Vektorfelder und Dynamische Systeme. Sehr bemerkenswert und bequem ist, daß grundsätzlich Räume und Mannigfaltigkeiten unendlichdimensional sein dürfen, ohne daß die Notationen so beladen werden, daß der $\mathbf{R}^N$ als Spezialfall nicht mehr zu sehen wäre. Im 7. Kapitel über Integration auf Mannigfaltigkeiten wird die Endlichkeit der Dimension für die Hodge-de Rham-Theorie notwendig. Das 8. und letzte Kapitel führt Anwendungen der Globalen Analysis vor, nämlich für Hamiltonische Systeme und bei den Gleichungen von Navier-Stokes, den Maxwellgleichungen und in der Kontrolltheorie.

Gerade dieser Teil ist glänzend zu lesen und durch sehr viele Forschungen und Resultate der Verfasser gut belegt. Höchstens sähe hier mancher Praktiker, wie weit der schöne Formalismus vom wirklichen und expliziten Hantieren etwa mit den Maxwellschen Gleichungen weg ist. Aber der Konflikt zwischen dem Auflösen der Struktur und dem Lösen der Differentialgleichungen ist vielleicht selber nicht lösbar. Dies ist nur eine fast unfaire Anmerkung zu einem lesenswerten Buch über moderne Mathematik, das gefällig und didaktisch gearbeitet ist und wo man die Konsequenz bewundern muß.

Bochum R. Böhme

Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K., Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele, 4 Bände, Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg 1985, kart., Bd. 1: 279 S., DM 48,–, Bd. 2: 184 S., DM 42,–, Bd. 3: 284 S., DM 48,–, Bd. 4: 173 S., DM 42,–

„They sought it with thimbles, they sought it with care."
(Lewis Carroll: The Hunting of the Snark)

Berlekamps, Conways und Guys „Winning ways" (vgl. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **86**, H. 3 (1986)) liegt nun in einer Übersetzung vor. Die Autoren des englischen Originals gaben 15 Jahre Plackerei (toil) für die Zeitdauer ihrer Beschäftigung mit dem Thema an – die Übersetzer schweigen sich über die Zeit ihres Einsatzes aus.

Das von den Originalautoren anfangs erwähnte Polylemma (keine Enzyklopädie – weil nicht hinreichend umfassend; keine Unterhaltungsmathematik – weil viel zu schwer; kein Lehrbuch für Anfänger – schließlich sind die Übungsaufgaben unordentlich verstreut; und auch kein Lehrbuch für fortgeschrittene Studenten – so viel würden die gar nicht lernen wollen) wird von den Übersetzern angemessen verallgemeinert (sie sagen es nur nicht): keine Übersetzung für den rein deutschsprachigen Leser – dazu ist zu viel englischer Text erhalten; kein deutschsprachiges Glossar eines englischsprachigen Textes – dazu hält man sich zu strikt an den Text und übermittelt zu genau, was im englischen Original gesagt, gespielt und gerechnet wird.

Ihrem Anspruch, die ungeheure Vielfalt der Information des Originals weiterzugeben, werden die Übersetzer sicherlich gerecht – dazu gehört auch die sehr schöne Übertragung und

Kommentierung der Zeichnungen, Figuren, Pläne, Diagramme, Spielbretter, Landkarten, Leichensteine, ...

Auch im englischen Original besteht das zweibändige Werk aus vier Büchern. Diese sind den vier Farben des Kartenspiels zugeordnet und dem entspricht auch die Aufteilung der deutschen Übersetzung in vier Bände.

Schon bei den Titeln dieser Bände (wie auch beim Titel des Werkes) muß die Übersetzung zögerlich vorgehen.

Band 1 (Spadeworks – von der Pieke auf, also klar, welche Kartenfarbe) diskutiert anhand einer Fülle von Beispielen Baumspiele. Stets sind es 2-Personen-Spiele mit vollständiger Information und ohne Zufallszüge, die nach endlich vielen Schritten abbrechen. Wer als erster nicht mehr ziehen kann, verliert. Spiele werden addiert, indem man in wenigstens einer Komponente zieht. Bereits in diesem ersten Band erfahren wir auch etwas über den Zusammenhang zwischen Spielen und (Ordinal-)Zahlen: im wesentlichen wird Conways hervorragende Idee der Zuordnung von „Vorteilsgrößen" zu gewissen Spielen und der induktiven Definition dieser Größen dem Leser nahegebracht. Brilliant: eine Fülle von Spielen, Beispielen, Informationen, kleinen Tricks, optimalen Strategien, Berechnung von Spielwerten, Berechnung von Vorteilswerten usw. „Hackenbush" und „Nim" dominieren in zahllosen Variationen diesen Band. Hier wird die Grundlage zur Theorie der mathematischen Spiele (und das ist, wie es scheint, nicht mehr die mathematische Theorie der Spiele) gelegt; für diese Theorie finden wir im Buch auch den Terminus „kombinatorische Spieltheorie".

Band 2 (Change of Heart – Bäumchen wechsle dich) beginnt mit einiger Modifizierung der Grundregeln. Produkte und Vereinigungen von Spielen erscheinen. Ferner läßt man im Spielbaum Schleifen und unendlich viele Positionen zu. Die Einführung höherer Ordinalzahlen in Kapitel 3 und der Zusammenhang zur Vorteilstheorie der Baumspiele geht sicher über das Anfangssemester hinaus – es wird denn auch ausdrücklich erwähnt, daß die dort entwickelten Methoden später nicht mehr gebraucht werden. Dennoch ist es faszinierend, eine unendliche Hackenbush-Kette vom Werte π oder χ_0 leibhaftig zu erblicken. Kapitel 5 dieses Bandes behandelt die Wildnis und führt den Leser in ein interessantes Land ein, in dem zahme Spiele, insbesondere althergebrachte zahme, halbzahme und zähmbare Spiele leben. Diese Gebiete kennt man gut. Beim weiteren Eindringen in das Land findet man unstete, gerade eben erst wild gewordene und zum Schluß auch außerordentlich wilde Spiele.

Band 3 (Games in clubs – Fallstudien – weil Fallunterscheidungen das Spieleland kreuzweise in exklusive Klubs zerlegen). Dieses Buch wird im englischen Original („Games in particular") als Beginn des Anwendungsbereiches verstanden und enthält eine eingehende Spielesammlung. Man sieht, welcher vielfältigen Modifikation die anfangs erlernten Prinzipien bedürfen, um Spiele wie Grunzen, Sümp (ler), die akrostischen Zwillinge, Fünfertreppe und Zweierkegeln, Käsekästchen, magische 15, Lukata, Fuchs und Gänse, Hase und Hund und viele andere einigermaßen strategisch zu beherrschen. Zum Schluß bekommt auch der Leser das erhebende Gefühl, hindurchzuschauen (all is found for the small board hound – alles ist nun kund für den Kleinbretthund; diese und andere nette Reime bilden feste Schranken für den Übersetzer). Auch unseren Bekannten Sporgersi (vgl. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **86**) finden wir auf S. 242 wieder.

In Band 4 (Solitaire Diamonds – Solitärspiele; also keine Diamanten? – dafür aber Perlen: denn der Übersetzer nimmt sich nunmehr auch der Sinnsprüche zu den Kapitelanfängen an.) Dieses letzte Buch befaßt sich ausschließlich mit 1-Personen-Spielen, und dies mit den verschiedensten Motivierungen; wichtig erscheint insbesondere die zu Anfang des Kapitels 1 per Sinnspruch hervorgehobene, aus Allbutts „Systematic Medicine" (1899), in welchem Buch erwähnt wird, daß „Pflockbretter ... und sonstige Apparate ... sich in der Beschäftigungstherapie und im Unterricht für Schwachsinnige bewährt haben".

Zunächst bekommt der Leser flotte Schnellkochpackungen und andere Software-Pakete fürs Solitärspiel geliefert. Dudeneys 19-Züge-Lösung des Zentralproblems war also doch nicht die schnellste (1908), Bergholt schaffte es in 18 (1912), und erst 1964 hat Beasley bewiesen, daß es schneller nicht geht – das ist nur ein Detail im Mosaik. In Kapitel 2 spürt man des Puzzles Spuren auf, wobei Puzzle nicht nur zweidimensional bildlich zerlegt verstanden wird, sondern allerhand raffinierte Draht- und Seilkonstruktionen zu entwirren sind – bis hin zum ungarischen Würfel (Ernö Rubiks Büres Kocka). Die große Hirnmarter wird fortgeführt bis zur genauen Berechnung des Todestages für Erzbischof Whitgift oder einer leichten Anleitung zur Berechnung des jüdischen Neujahrsfestes Rosh Hashana – und dies ist nicht das erste Mal, daß man sich an einen anderen Übersetzer erinnert fühlt, der sich ja sogar an den Finnegan gewagt hat.

Das Buch endet lebendig mit Gleitern und Kanonen – dem game of life (der Referent muß nicht übersetzen). Einfache Konfigurationen (oder sinds patterns?) vom Bienenkorb über den Tümpel bis hin zur Immenfarm mag der Leser noch ohne Rechner nachvollziehen. Aber alsbald, wenn Fermat und die universelle Turingmaschine imitiert werden, verlassen wir die Niederungen des stillen Lebens im halbschweren Raumschiff – was dann passiert: life is universal!

Das Buch steckt voller Punks, Kalauer, Anspielungen, Anzüglichkeiten (auch in der affinen Sitara-Ebene zweiter Stufe), Alliterationen, Selbstironisierung und andere raffinierte Methoden, den Leser zum Schmunzeln und den Übersetzer zum Verzweifeln zu bringen. Oft muß man in der Übersetzung gemischte Strategien einpflocken, gelegentlich auch sehr erfolgreich (vollständige Obduktion von Kröten und Fröschen für toads and frogs completely desected – keine Angst, gemeint ist nur das Spiel). Hier und da bringt die Lektüre der Übersetzung sogar Schwächen des Originals zutage (sinds nun Nattern oder Schlangen auf S. 113ff.?), und tatsächlich bekommen ja auch die Autoren des englischen Originals mitunter Angst vor der eigenen Courage: wenigstens wird uns (auf S. 38 II) erläutert, wer eigentlich Falada ist. Insgesamt beweist die Übersetzung doch sehr viel Fingerspitzengefühl. Jenes andere Gefühl, das der Leser beim Durchackern dieses oder jenes Spiels oftmals hat, mag auch die Übersetzer gelegentlich angestarrt haben. Wir finden es beschrieben auf der Karte, die auf S. 150 uns nicht nur die Welt mancher Tiere oder Spiele zeigt. Ganz unten, wo man in besonders wilde Gegenden kommt, endet's im Unübersetzten. Und um zu wissen, was einem blüht, erinntert man sich an jene Schilderung des Grauens, die so nur unser Lieblingsschriftsteller gegeben hat: „– For the Snark was a Boojum, you see".

Bielefeld J. Rosenmüller

Natterer, F., The Mathematics of Computerized Tomography, Stuttgart: Teubner; Chichester – New York – Brisbane – Toronto – Singapore: Wiley 1986, ix, 240 pp., $ 46.50

Die Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Theoretischer Physik sind trotz nicht zu unterschätzender Kommunikationsschwierigkeiten in vielfältiger Weise lebendig. Tatsächlich spielen in der gegenwärtigen Theoretischen Physik moderne mathematische Theorien, beispielsweise die Kohomologietheorie, eine wichtige Rolle, während umgekehrt Erfordernisse der Theoretischen Physik wesentlich zum Ausbau mathematischer Disziplinen beigetragen haben. Als Beispiel einer solchen Verbindung sei an dieser Stelle nur die Theorie der dynamischen Systeme genannt. Stärker hat sich dagegen das Auseinanderdriften zwischen Mathematik und Ingenieurwissenschaften entwickelt. Die Elektrotechniker beispielsweise bedienen sich in sehr viel geringerem Maße der Methoden der modernen Mathematik und sehen oft in der Informatik die näherstehende Wissenschaft. Um so erfreulicher ist, daß mit dem vorliegenden Buch über die Computertomographie eine besonders wichtige Querverbindung zwischen moderner Mathematik und ihren Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften erschlossen worden ist.

Bekanntlich versteht man unter Computertomographie die Rekonstruktion von Dichtefunktionen aus ihren Radon-Transformierten. Die entscheidende mathematische Idee der Rekonstruktion aus Linienintegralen wurde bereits in der ein halbes Jahrhundert unbeachtet gebliebenen Arbeit von Johann Radon „Über die Bestimmung von Funktionen durch die Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten", Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. **69**, 262–277 (1917), entdeckt. Durch die Monographie von S. Helgason „The Radon transform" (Birkhäuser, Basel – Boston – Stuttgart 1980) ist diese zurecht berühmt gewordene Arbeit leicht zugänglich geworden. – Die praktische Bedeutung der Computertomographie liegt vor allem in der radiologischen Diagnostik. Heutzutage besitzen die neurologischen Abteilungen fast aller Krankenhäuser Zugriff zu einem Computertomographen (X-ray CT), und in Anbetracht des raschen Fortschritts der Physik „warmer" Supraleiter werden in absehbarer Zukunft an allen Medizinischen Zentren auch Kernspintomographen (NMR zeugmatography) zur Verfügung stehen. – Für eine Übersicht der Anwendungen in Gebieten außerhalb der Medizin, etwa auf die Radar-Astronomie oder die holographische Interferometrie, sollte die Monographie von S. R. Deans „The Radon transform and some of its applications" (J. Wiley & Sons, New York 1983) konsultiert werden.

Im Mittelpunkt des vorliegenden Buches steht zunächst das Problem der Abgrenzung eines Raums von Funktionen, deren Radon-Transformierte effizient abgetastet werden können. Es zeigt sich, daß die wesentlich bandbeschränkten Funktionen eine für das praktische scanning geeignete Klasse bilden. Eine Schwierigkeit des dann in einem zweiten Schritt zu lösenden Rekonstruktionsproblems besteht nicht nur in der „ill-posedness" des Problems, sondern auch darin, daß jeder kompakte Teil des Raums $\mathbf{R}^n$ mit Hilfe rasch oszillierender Funktionen so abgeändert werden kann, daß seine Projektionen in endlich vielen vorgegebenen Richtungen verschwinden. Schätzt man jedoch die Radon-Transformierte mit Hilfe von Sobolev-Normen ab, so kann die Unbestimmtheit durch Beschränkung im Sobolev-Raum aufgehoben werden. Durch Einschalten von Tiefpassfiltern geeigneter Bandbreite in Inversionsformeln der Radon-Transformation und anschließendes Diskretisieren lassen sich dann, auch bei unvollständigen Datenvorräten, praktisch brauchbare Rekonstruktionsalgorithmen angeben, deren Wirksamkeit anhand von Farbfotos eindrucksvoll dokumentiert wird.

Der Vorzug des Buchs liegt in den Fehlerabschätzungen, mit welchen die zu erwartende Genauigkeit der Rekonstruktionsalgorithmen konsequent erfaßt wird. Weniger gut gelungen erscheinen die theoretischen Überlegungen zur Radon-Transformation. Die Singulärwertzerlegung der Radon-Transformation, die eine zentrale Rolle spielt, kann mit Hilfe des Projektionssatzes und des diskreten Spektrums des reduktiven Dualpaares $(\tilde{O}(n, \mathbf{R}), \tilde{S}p(1, \mathbf{R}))$ durchsichtiger hergeleitet werden. Sporadisches Heranziehen der nicht-kommutativen harmonischen Analyse, etwa des Gelfand-Paares $(SO(n, \mathbf{R}), SO(n-1, \mathbf{R}))$, vermittelt keine tiefere Einsicht, sondern läßt den unzutreffenden Eindruck entstehen, im Zusammenhang mit der Radon-Transformation spielten nichtabelsche topologische Gruppen eine mehr zufällige Rolle. Insgesamt gesehen ist trotz dieser Einschränkung ein wertvolles, inhaltsreiches Buch entstanden, das die Bedeutung moderner mathematischer Methoden für ein ebenso wichtiges wie zukunftsträchtiges Anwendungsgebiet überzeugend darlegt.

Siegen W. Schempp

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.

Jahreschronik der DMV für das Jahr 1986

Von Wolfgang Schwarz (Frankfurt am Main)[1])

1 Ämter und Gremien

1.1 in der DMV

Vorsitzender		*W. Schwarz* (Frankfurt)
Schriftführer		*J. Flum* (Freiburg i. Br.)
Schatzmeister		*K. P. Grotemeyer* (Bielefeld)
Geschäftsführender Herausgeber des DMV-Jahresberichts		*K. Jacobs* (Erlangen)
Vorstand	*J. Flum, K. P. Grotemeyer, K. Jacobs*	
Präsidium	*K.-D. Bierstedt* (Paderborn)	*O. H. Kegel* (Freiburg)
	G. Fischer (Düsseldorf)	*U. Krengel* (Göttingen)
	J. Flum (Freiburg)	*B. Pareigis* (Univ. München)
	K. P. Grotemeyer (Bielefeld)	*W. Schwarz* (Frankfurt)
	F. Hirzebruch (Bonn)	*W. Törnig* (Darmstadt)
	K. Jacobs (Erlangen)	
Protokollführer	*A. Hofmann* (Oberwolfach)	
Ständige Gäste	*M. Barner* (Math. Forschungsinst. Oberwolfach)	
	F. Lorenz (Münster, Konferenz der math. FBe)	
	W. Kuich (ÖMG-Vorsitzender)	

Als Organisatoren der Jahrestagungen waren zu entsprechenden Punkten eingeladen
V. Mammitzsch, W. Schaal (J. Tag. Marburg), *R. Mennicken* (J. Tag. Regensburg), *J. Gamst* (J. Tag. Bremen 1990)

Bei Präsidiums-Sitzungen der DMV (Februar, Juni, September 1986) waren zeitweilig als Gäste anwesend die Herren
F. Barth (MNU-Förderverein), *R. Bulirsch* (München), *P. Flor* (Graz, ÖMG), *W. Scharlau* (Münster), *E. Schwarz* (Bonn), *R. Wallisser* (Freiburg), *B. Wegner* (Berlin, Zentralblatt)

Presse-Beauftragter der DMV *B. Pareigis* (München), ab 19. September 1986
EuroMath-Beauftragter der DMV *K.-D. Bierstedt* (Paderborn), ab 19. September 1986

1.2 in anderen Organisationen

1.2.1 Fachgutachter bei der DFG sind die Herren *Bulirsch, Grauert, Krabs* und *Scharlau.*

---

[1]) Frau *Wagner-Klimt* (Freiburg) danke ich für ihre Mithilfe, Herrn *Bierstedt* für die Abfassung von Punkt 3.10.

1.2.2 Die DMV wird bei der Sitzung des Database Committee des EMC am 17. und 18. Januar 1986 durch ihren Beauftragten *B. Wegner* (Berlin) vertreten.

1.2.3 *W. Schwarz* zusammen mit *B. Wegner* vertritt die DMV bei der Sitzung des European Math. Council (Vorsitz *Sir M. Atiyah*) in Liblice bei Prag (19.–21. 11. 1986).

1.2.4 *K. Habetha* ist Mitglied des Benutzerrates für das Zentralblatt beim FIZ Karlsruhe.

1.2.5 Mitglieder des Deutschen Unterausschusses der IMUK sind die Herren *M. Barner, A. Bergmann, W. Böddecker, H. Griesel, K. P. Grotemeyer, H. Kunle* (Vorsitz), *G. Pickert, H. Schupp, H. G. Steiner, H. J. Vollrath.*

1.2.6 Bei der *General Assembly der International Mathematical Union* (31. 7.–2. 8. 1986 in Oakland) wurde die DMV durch *G. Fischer, F. Hirzebruch, O. H. Kegel, W. Schwarz* und *W. Walter* (GAMM) vertreten. Der IMU-Beitrag wurde für die Jahre 1987–1990 um ca. 17% erhöht.

2 Jahrestagung und Mitgliederversammlung 1986

2.1 Vom 15. bis zum 20. September 1986 fand die Jahrestagung der DMV in Marburg statt. Örtliche Tagungsleiter waren die Herren *V. Mammitzsch* und *W. Schaal.*

Eingeladene *Hauptvorträge* wurden gehalten von *P. Slodowy* (Bonn), *A. Connes* (Bures-sur-Yvette), *R. Bulirsch* (München), *G. Jäger* (Zürich), *W. Singhof* (Kaiserslautern), *Ch. Sims* (New Jersey), *U. Pinkall* (Bonn), *W. Stute* (Gießen), *H. Bühlmann* (Zürich), *J. Jost* (Bochum) und *R. Heath-Brown* (Oxford).

Am Donnerstag Nachmittag sprachen zu
Mathematiker in der Schule: *W. Schupp* (Darmstadt) und *W. Kroll* (Marburg),
Mathematiker in der Industrie: *H. Schwärtzel* (München) und *A. Reich* (Köln).

2.2 Die 24 *Sektionen* wurden geleitet von *K. B. Gundlach* (Marburg), *H. Luckhardt* (Frankfurt), *E. Wirsing* (Ulm), *E. Lamprecht* (Saarbrücken), *H.-J. Nastold* (Münster), *E. Mues* (Hannover), *J. Neubüser* (Aachen), *H. Petersson* (Hagen), *W. Schempp* (Siegen), *W. Luh* (Trier), *K. Diederich* (Wuppertal), *W. Eberhard* (Duisburg), *H. Niemeyer* (Aachen), *K. Floret* (Oldenburg), *W. Weil* (Karlsruhe), *R. Walter* (Dortmund), *P. Löffler* (Göttingen), *J. Steinebach* (Marburg), *Ch. Zenger* (München), *C. P. Schnorr* (Frankfurt), *E. Meister* (Darmstadt), *D. Jungnickel* (Gießen), *H. Griesel* (Kassel) und *K. P. Hadeler* (Tübingen).

2.3 Die *Mitglieder-Versammlung der DMV* fand am Donnerstag, den 19. 9. 1986 statt.

– Der Schatzmeister *K.-P. Grotemeyer* und die Präsidiums-Mitglieder *K.-D. Bierstedt* und *B. Pareigis* werden wiedergewählt.

– *B. Pareigis* wird als Pressebeauftragter der DMV, *K.-D. Bierstedt* als EuroMath-Beauftrater der DMV vorgestellt.

– Die Kassenprüfung wurde von *H. Lenz* und *G. Preuß* durchgeführt.

– Die Herren *J. Lehn* und *E. Heil* (beide Darmstadt) werden als Kassenprüfer gewählt.

– Eine ausführliche *Allgemeine Aussprache* befaßt sich mit EuroMath, Lehrerfortbildung und Informatik an den Schulen, sowie mit Öffentlichkeitsarbeit.

2.4 Die nächsten Jahrestagungen sind vorgesehen für Berlin (21.–25. 9. 1987), Regensburg (19.–23. 9. 1988), Wien (18.–22. 9. 1989, Tagung der ÖMG), Bremen (Jubiläumstagung zum hundertjährigen Bestehen der DMV, 17.–22. 9. 1990), Bielefeld (16.–20. 9. 1991).

2.5 Beim ICM in Berkeley vom 3.–11. 8. 1986 wurden *Michael Freedman, Simon Donaldson* und *Gerd Faltings* mit der *Fields*-Medaille ausgezeichnet. Das Presse-Echo in der Bundesrepublik blieb gering. Hauptvorträge beim ICM Berkeley (3.–11. 8. 1986) wurden u. a. von *G. Faltings* und *A. Schönhage* gehalten. Der nächste ICM wird vom 21.–29. 8. 1990 in Kyoto stattfinden.

2.6 Herr *W. Schwarz* wird durch die Mitglieder des Präsidiums in Briefwahl zum *Vorsitzenden* der DMV für das Amtsjahr 1987 wiedergewählt.

3 Aktivitäten der DMV

3.1 *DMV-Seminare.* Die DMV veranstaltete in Zusammenarbeit mit dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach unter der fachlichen Leitung von *G. Fischer* (Düsseldorf) im Jahre 1986 vier einwöchige DMV-Seminare, die der fachlichen Fortbildung jüngerer Mathematiker dienten. Die Teilnehmer konnten finanzielle Unterstützung für Reise- und Aufenthaltskosten erhalten. Folgende Themen wurden behandelt.

8. 6.–15. 6. 1986 *Nonlinear Methods in Complex Differential Geometry*
(*J. Jost,* Bochum; *Y.-T. Siu,* Cambridge Mass.)

31. 8.–7. 9. 1986 *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*
(*H. Kraft,* Basel; *T. A. Springer*, Utrecht; *P. Slodowy,* Bonn/Liverpool)

21. 9.–28. 9. 1986 *Neuere Multivariate Methoden in der Statistik*
(*P. J. Huber,* Cambridge Mass.; *W. Stuetzle*, Seattle)

5. 10.–12. 10. 1986 *Numerische Behandlung steifer Differentialgleichungen*
(*P. Deuflhardt,* Heidelberg; *E. Hairer,* Genf; *G. Wanner,* Genf)

Die DMV-Seminare fanden statt im Schloß Mickeln, Düsseldorf-Himmelgeist.

Die Finanzierung erfolgt durch die Stiftung Volkswagenwerk, läuft aber zum Ende 1986 aus. Die Ausarbeitungen der DMV-Seminare erscheinen beim Birkhäuser-Verlag.

Das *Programmkomitee* für DMV-Seminare besteht aus den Herren *G. Fischer, F. Hirzebruch, W. Jäger* und *H. Witting.*

3.2 *D. Puppe* wird der WRK als Sachverständiger für Mathematik in Fragen der KapVO und der Curricular-Norm-Werte genannt.

3.3 In Zusammenarbeit zwischen DMV (verantwortlich *W. Scharlau*) und Vieweg-Verlag wurde Band 2 der Reihe *Dokumente zur Geschichte der Mathematik* herausgegeben (R. Lipschitz, Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass und anderen).

3.4 *Mitarbeit beim Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultätentag*

W. Schwarz vertrat die DMV beim MNFT (12./13. Mai 1986) in Bonn. Resolutionen des MNFT wurden u. a. verabschiedet zum Fiebiger-Plan und Stelleneinsparung, zur Überprüfung der Curricularnormwerte durch die WRK, zur Informationstechnischen Bildung in der Sekundarstufe, zur Nachstiftung für die Stiftung Volkswagenwerk und zur Lehrerfortbildung.

3.5 In Oberwolfach treffen sich am 24. Mai 1986 Vertreter der GAMM (*Ansorge, Bulirsch, Kulisch, Neunzert, Walter*), Herr *E. Schwarz* und Vertreter der DMV (*Krengel, W. Schwarz, Törnig*), um die Möglichkeit gemeinsamer Aktivitäten zu diskutieren.

3.6 *Angelegenheiten der Lehrer-Ausbildung und Informatik an den Schulen*

3.6.1 *W. Törnig* vertritt die DMV bei der Lehrplankonferenz des MNU-Fördervereins vom 11.–14. 11. 1985 in Bad Honnef.

3.6.2 *G. Fischer* vertritt die DMV bei der Hauptversammlung des MNU-Fördervereins in Würzburg.

3.7 *B. Pareigis* vertritt die DMV bei der Eröffnungssitzung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in München, der „Muttergesellschaft" der DMV, am 13. 9. 1986.

3.8 *Kontakte mit der Gesellschaft für Informatik*

G. Fischer und *W. Schwarz* treffen sich am 10. 11. 1986 in Bonn mit den Herren *Krückeberg* und *Rampacher,* um über die Aufnahme der DMV als Gesellschafterin beim FIZ Karlsruhe und mögliche gemeinsame Interessen von GI und DMV zu sprechen.

3.9 Die DMV wird bei der Herbstsitzung der SMF in Bern vom 9.–12. 10. 86 durch *O. H. Kegel* vertreten.

3.10 *EUROMATH.* Das EuroMath-Projekt hat zum Ziel, die Forschungs- und Kommunikations-Möglichkeiten für europäische Mathematiker durch den Einsatz von Computern (zur mathematischen Textverarbeitung, zu Computeralgebra und *electronic mail* etc.) und durch den Aufbau einer Datenbank zu verbessern. Das Projekt wurde vom *European Mathematical Council* (EMC) im Rahmen seines *Database Committee* vorgeplant, Vertreter der DMV in diesem Komitee ist Herr *B. Wegner* (Berlin/Zblatt f. Math.). Mitte 1986 wurde eine Einigung über Inhalt und Form des Projektes erzielt. Das DMV-Präsidium ist an dem Projekt auch im Hinblick auf das FIZ Karlsruhe/Zentralblatt für Mathematik und dessen Datenbank MATH interessiert. Auf der Jahrestagung in Marburg wurde *K.-D. Bierstedt* zum EuroMath-Beauftragten bestellt. Ende 1986 wurde im Namen des noch zu gründenden *European Mathematical Trust* (EMT) beim *Stimulation*-Programm der EG ein Antrag eingereicht, auf den hin für die erste Phase des Projektes die Summe von 1.6 Millionen DM bewilligt wurde. Dänemark stellte zusätzlich eine Viertel Million DM zu Verfügung. Das EuroMath-Projekt soll in der zweiten Hälfte des Jahres 1987 anlaufen.

4 Organisation

4.1 Zum 15. 8. 1986 hatte die DMV 1842 Mitglieder.

4.2 Frau *D. Sauer* scheidet zum Jahresende 1986 auf eigenen Wunsch aus der Geschäftsstelle der DMV in Freiburg aus. Frau *Schleiff* (Berlin) scheidet auf eigenen Wunsch zum 1. September 1986 aus. Sämtliche Geschäftsangelegenheiten werden nach Freiburg verlegt. Frau *B. Windscheid* (MFO) leistet wertvolle Überbrückungshilfe.

4.3 Die DMV leistet einen einmaligen freiwilligen Beitrag von 2000.– $ für das EuroMath-Projekt an den EMC.

4.4 In der deutschen Unterkommission der IMUK wird Herr *Griesel* (GDM) durch Herrn *Winter* (GDM) ersetzt, zusätzlich wird Herr *F. Barth* (MNU) aufgenommen.

5 Kolloquien, Ehrungen

5.1 In Münster findet am 21./22. 11. 1986 ein Gedenk-Kolloquium für Prof. *H. Werner* statt. Herr *Krengel* würdigt dessen Verdienste als früherer DMV-Vorsitzender.

5.2 Beim Kolloquium aus Anlaß des 65. Geburtstags von Herrn *Barner,* siebenmaliger Vorsitzender der DMV, wird Würdigung und Grußadresse des Präsidiums überbracht.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.

Jahreschronik der DMV für das Jahr 1987

Von Wolfgang Schwarz (Frankfurt am Main)[1])

1 Ämter und Gremien

1.1 in der DMV

Vorsitzender		*W. Schwarz* (Frankfurt)
Schriftführer		*J. Flum* (Freiburg i. Br.)
Schatzmeister		*K. P. Grotemeyer* (Bielefeld)
Geschäftsführender Herausgeber des DMV-Jahresberichts		*K. Jacobs* (Erlangen)
Vorstand	*J. Flum, K. P. Grotemeyer, K. Jacobs*	
Präsidium	*K.-D. Bierstedt* (Paderborn)	*O. H. Kegel* (Freiburg)
	G. Fischer (Düsseldorf)	*U. Krengel* (Göttingen)
	J. Flum (Freiburg)	*B. Pareigis* (Univ. München)
	K. P. Grotemeyer (Bielefeld)	*W. Schwarz* (Frankfurt)
	F. Hirzebruch (Bonn)	*W. Törnig* (Darmstadt)
	K. Jacobs (Erlangen)	
Protokollführer	*A. Hofmann* (Oberwolfach)	
Ständige Gäste	*M. Barner* (Math. Forschungsinst. Oberwolfach)	
	F. Lorenz (Münster, Konferenz der math. FBe)	
	W. Kuich (ÖMG-Vorsitzender)	

Als Organisatoren der Jahrestagungen waren eingeladen
M. Aigner, J. Winkler (Jahrestagung Berlin), *R. Mennicken* (J. Tag. Regensburg)

Bei Präsidiums-Sitzungen der DMV (Februar, Juni, September 1987) waren zeitweilig als Gäste anwesend die Herren
Sir Michael Atiyah (Oxford, EMC), *F. Barth* (MNU-Förderverein), *B. Fuchssteiner* (Paderborn), *K. Habetha* (Benutzerrat Zentralblatt, Aachen), *F. Krückeberg* (GI-Vorsitzender), *D. Puppe* (Zentralblatt, Heidelberg), *W. Walter* (Präsident der GAMM, Karlsruhe)

Presse-Beauftragter der DMV	*B. Pareigis* (München)
EuroMath-Beauftragter der DMV	*K.-D. Bierstedt* (Paderborn)
Nachlaßbeauftragte der DMV	*H. Wefelscheid* (Duisburg) und *K. Jacobs* (Erlangen)

[1]) Frau *Wagner-Klimt* (Freiburg) danke ich für ihre Mithilfe, Herrn *Bierstedt* für die Abfassung von Punkt 3.9.

1.2 in anderen Organisationen

1.2.1 Als Fachgutachter bei der DFG hat die DMV in Absprache mit der GAMM für den Bereich Reine Mathematik die Herren *T. tom Dieck, J. Elstrodt, W.-D. Geyer, O. H. Kegel, O. Riemenschneider, W. Scharlau* und *D. Vogt* vorgeschlagen, aus denen zwei Fachgutachter durch die Gesamtheit der Wahlberechtigten gewählt werden. In Übereinstimmung zwischen GAMM und DMV wurden für Angewandte Mathematik die Herren *W. Krabs, T. Meis, W. Niethammer, S. Schach, W. Velte* und *W. Wendland* vorgeschlagen.

1.2.2 Herr *Kirchgäßner* (Stuttgart) wurde am 7. 7. 87 für drei Jahre in den Senat der DFG gewählt.

1.2.3 Herr *Habetha* (Aachen) wurde für die Amtsperiode 1987–1990 in den Benutzerrat des Zentralblattes beim Fachinformationszentrum Karlsruhe wieder berufen.

2 Jahrestagung und Mitgliederversammlung 1987

2.1 Vom 21. September bis zum 25. September 1987 fand die Jahrestagung der DMV in Berlin statt. Örtliche Tagungsleiter waren die Herren *Aigner* (FU) und *Winkler* (TU). Eingeladene *Hauptvorträge* wurden gehalten von Sir *M. Atiyah* (Oxford), *A. Baernstein* (St. Louis), *H. J. Baues* (Bonn), *J. Conway* (Princeton), *R. Graham* (Murray Hill), *K. Hulek* (Bayreuth), *D. Kendall* (Cambridge), *H. Neunzert* (Kaiserslautern) und *G. Wüstholz* (Wuppertal/Zürich).

Am Donnerstag Nachmittag sprachen zu
Mathematiker in der Schule: *B. Artmann* (Darmstadt) und *E. Lehmann* (Berlin)
Mathematiker in der Industrie: *R. Böer* (Erlangen) und *M. Gipser* (Stuttgart).

Die 26 *Sektionen* wurden geleitet von *S. Koppelberg* (Berlin), *W. Deuber* (Bielefeld), *E. Maus* (Göttingen), *W. Schaal* (Marburg), *G. Scheja* (Tübingen), *G. Michler* (Essen), *G. Stroth* (Berlin), *E. Kaniuth* (Paderborn), *J. Becker* (Berlin), *R. Remmert* (Münster), *J. Schwermer* (Eichstätt), *U. Kirchgraber* (Zürich) und *H. O. Walther* (München), *M. Schneider* (Karlsruhe), *H. Heuser* (Karlsruhe), *J. Zowe* (Bayreuth), *R. Schneider* (Freiburg), *D. Ferus* (Berlin), *K. H. Knapp* und *E. Ossa* (Wuppertal), *E. Bolthausen* (Berlin), *R. D. Grigorieff* (Berlin), *V. Enß* (Berlin), *K. Mehlhorn* (Saarbrücken), *A. Bachem* (Köln), *W. Jäger* (Heidelberg), *H. Zeitler* (Bayreuth), *B. Fuchssteiner* (Paderborn).

2.2 Zu Beginn der Tagung fand eine *Pressekonferenz* statt, Teilnehmer waren die Herren *Aigner, Pareigis, Schwarz* und *Winkler.* Die TU hat exakt zu Beginn der Tagung ein Heft „Mathematik" des *Wissenschaftsmagazins* herausgegeben. Im Anschluß an die DMV-Tagung fand eine *Anschlußtagung* über „Die Bedeutung der von Berlin ausgegangenen Mathematik" (*H. Begehr* und *E. Knobloch*) statt.

2.3 Die *Mitgliederversammlung der DMV* fand am Donnerstag, den 24. 9. 1987, statt.

– Als *geschäftsführender Herausgeber* des DMV-Jahresberichtes (Nachfolge *K. Jacobs*) wird Herr *W.-D. Geyer* (Erlangen) gewählt. Herr *Krengel* (Göttingen) wird als *Präsidiums-Miglied* wiedergewählt, Herr *Hirzebruch* war zweimal vier Jahre Mitglied des Präsidiums; zu seinem Nachfolger im Präsidium wird Herr *W. Scharlau* (Münster) gewählt.

– Der wegen Einwänden des Finanzamtes Tübingen notwendige Antrag auf Änderung der die Gemeinnützigkeit betreffenden Stellen der Satzung (§ 2, § 10) wird angenommen, ebenso wird eine Ehrenmitglieder betreffende Regelung in die Satzung aufgenommen.

– Herr *R. Königs* (DFG) spricht über *Forschungsförderung durch die DFG.*

2.4 Die nächsten Jahrestagungen sind geplant für Regensburg (19.–23. 9. 1988), Wien (18.–22. 9. 1989, Tagung der ÖMG), Bremen (Jubiläumstagung zum 100-jährigen Bestehen der DMV, 17.–22. 9. 1990), Bielefeld (16.–20. 9. 1991). Für Regensburg sind derzeit 11 Hauptvorträge und 28 Sektionen vorgesehen.

2.5 Herr *W. Törnig* (Darmstadt) wird durch die Mitglieder des Präsidiums in Briefwahl zum *Vorsitzenden* der DMV für das Amtsjahr 1988 gewählt.

3 Aktivitäten der DMV

3.1 *DMV-Seminare.* Die Gesellschaft für Mathematische Forschung veranstaltete in Zusammenarbeit mit der DMV unter der fachlichen Leitung von *G. Fischer* (Düsseldorf) im Jahre 1987 sieben einwöchige DMV-Seminare, die der Fortbildung jüngerer Mathematiker dienten. Die Teilnehmer konnten finanzielle Unterstützung für Reise- und Aufenthaltskosten erhalten. Folgende Themen wurden behandelt.

26. 4.–3. 5. 1987 *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*
(*H. Kraft*, Basel; *P. Slodowy*, Liverpool; *T. A. Springer*, Utrecht)

31. 5.–7. 6. 1987 *Operator Algebras and Geometry*
(*A. Connes*, Bures-sur-Yvette; *R. G. Douglas*, Stony Brook, N.Y.; *B. Gramsch*, Mainz; *M. A. Rieffel*, Berkeley)

7. 6.–14. 6. 1987 *Mathematische Theorie der finiten Element- und Randelementmethoden*
(*A. Schatz*, Ithaca; *V. Thomee*, Göteborg; *W. L. Wendland*, Stuttgart)

28. 6.–5. 7. 1987 *Surgery Theory and the Geometry of Representations*
(*T. tom Dieck*, Göttingen; *I. Hambleton*, Hamilton)

20. 7.–27. 7. 1987 *Mathematical Theory and Numerical Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations*
(*R. Glowinski*, Houston; *J. Heywood*, Vancouver)

4. 10.–11. 10. 1987 *Mathematical Aspects of Strings*
(*E. Corrigan*, Durham; *W. Nahm*, Davis)

15. 11.–22. 11. 1987 *Codierungstheorie und Algebraische Geometrie*
(*G. B. M. van der Geer*, Amsterdam; *J. H. van Lint*, Eindhoven)

Die DMV-Seminare fanden statt in Blaubeuren, Schloß Reisensburg bei Günzburg und Schloß Mickeln, Düsseldorf-Himmelgeist. Nach Auslaufen der Finanzierung durch die VW-Stiftung erfolgt die Finanzierung der DMV-Seminare nun durch das Land Baden-Württemberg über die Gesellschaft für Mathematische Forschung; daß dies möglich wurde, ist dem besonderen Einsatz von Herrn *M. Barner* (Freiburg) zu danken.

Die Ausarbeitungen der DMV-Seminare erscheinen beim Birkhäuser-Verlag.

3.2 Das erste von GAMM und DMV gemeinsam veranstaltete Seminar fand statt über *Road-Vehicle Systems and Related Mathematics* in Turin, vom 22.–26. 6. 1987, unter der Leitung der Herren *H. Neunzert* (Kaiserslautern), *N. Bellomo* (Turin), *U. Krengel* (Göttingen) und *W. Walter* (Karlsruhe).

Ein weiteres GAMM-DMV-Seminar ist über *Chip-Entwicklung* für 1988 geplant.

Der zuständigen Kommission gehören an von Seiten der DMV die Herren *W. Törnig* (ff.) und *U. Krengel*, von Seiten der GAMM die Herren *K. H. Hoffmann* und *F. Natterer*.

3.3 In Zusammenarbeit zwischen DMV (verantwortlich *W. Scharlau*) und Vieweg-Verlag wurde Band 3 der Reihe *Dokumente zur Geschichte der Mathematik* herausgegeben (Erich Hecke, Analysis und Zahlentheorie, Vorlesung Hamburg 1920). Band 4 (K. Weierstrass, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen) ist in Vorbereitung.

3.4 *Mitarbeit beim Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultätentag*

3.4.1 *W. Törnig* vertrat die DMV beim MNFT am 1./2. Juni 1987 in Hannover, *W. Schwarz* bei der Beiratssitzung des MNFT in Rauischholzhausen am 9. 10. 1987. Der MNFT hat u. a. Resolutionen verabschiedet zur Hochschulplanung, zur Länge und Struktur des Studiums, zu Wehrübungen während der Vorlesungszeit, zur Verleihung des Dr. rer. nat., zur Lage des habilitierten wissenschaftlichen Nachwuchses und zur Überalterung des Lehrkörpers an den Schulen.

3.4.2 Die auf Initiative des BMBW von der WRK finanzierte, vom Vorsitzenden des MNFT organisierte Tagung *Bildungswerte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer* fand am 9. und 10. 10. 1987 in Rauischholzhausen statt. Das die Mathematik betreffende Referat wurde von Herrn *Schwarz* gehalten. Diskussionsteilnehmer waren die Herren *U. Krengel, F. Lorenz, J. Weidmann* (Mitglied des Beirats des MNFT).

3.5 *Angelegenheiten der Lehrer-Ausbildung und Informatik an den Schulen*

3.5.1 Die von Herrn *W. Oberschelp* (Aachen) in Absprache mit der DMV erarbeiteten *Beispiele zum Informatikunterricht* liegen als Kursunterlage der Fernuniversität Hagen vor; eine Veröffentlichung im Teubner-Verlag ist vorgesehen.

3.5.2 Der deutsche Unterausschuß der IMUK unter Vorsitz von *H. Kunle* hat ein Papier zur Lehrerfortbildung verabschiedet.

3.5.3 *A. Bergmann* und *W. Schwarz* vertreten die DMV in einer Kommission des MNU-Fördervereins zur Frage der künftigen Lehrer(aus)bildung. Diese tagte erstmals vom 18.–20. November 1987 in Bad Honnef.

3.6 *Kontakte mit der Gesellschaft für Informatik.* Bei Treffen in Bonn und Oberwolfach wurde versucht, eine Zusammenarbeit zwischen GI und DMV anzubahnen in Fragen, die beide Gesellschaften betreffen. DMV, GI und GAMM zusammen haben eine Arbeitsgruppe *Computeralgebra und symbolisches Rechnen* gegründet.

Dieser gehören an die Herren *A. Blaser, Th. Beth, B. Fuchssteiner, R. Janßen, B. H. Matzat, J. Neubüser, F. Schwarz, Stoyan , V. Weispfenning* und *H. G. Zimmer.* Den Vorsitz führt Herr *F. Schwarz* (GI).

Weitere Zusammenarbeit ist für die Fachgruppen Verifikationsnumerik und Statistische Software vorgesehen.

3.7 Die DMV war vertreten bei der Hauptversammlung des Fördervereins MNU in Köln durch Herrn *Fischer.*

3.8 Im Projekt *Studieneingangsvoraussetzungen* des Hochschulverbandes haben die Herren *Oberschelp* und *Tietz* das die Mathematik betreffende Papier verfaßt (Mitteilungen des Hochschulverbandes, Heft 5/1987).

3.9 *EuroMath.* Der *European Mathematical Trust* (EMT) wurde in Großbritannien gegründet; federführend war *Sir Michael Atiyah* (Präsident des EMC). Der Beginn des EuroMath-Projektes verzögerte sich wegen der komplizierten Vertragsstruktur auf den 1. 1. 1988; die erste Phase soll bis Mitte 1989 dauern. Im Juni 1987 beschloß das Präsidium der DMV, dem EMT beizutreten. *B. Fuchssteiner* (Paderborn) wurde für das *Committee of Management* des EMT nominiert. In Abstimmung mit der GAMM wurde ein nationales EuroMath-Komitee gegründet; diesem gehören an: *K.-D. Bierstedt* (Paderborn, Vorsitzender), *B. Wegner* (Berlin, 2. Vors.), *B. Fuchssteiner* (Paderborn), *K. Habetha* und *J. Neubüser* (Aachen, gemeinsamer Sitz), *W. Niethammer* (Karlsruhe, GAMM), *D. Puppe* (Heidelberg) und *W. Törnig* (Darmstadt). Die erste Sitzung von EMT und des *Committee of Management* fand am 28./29. 11. 1987 in Frankfurt statt. Dabei wurde u. a. über die Mitwirkung des FIZ Karlsruhe am EuroMath-Projekt (vor allem in der geplanten 2. Phase) gesprochen. *B. Fuchssteiner,* Mitglied im *Committee of Management,* wurde zum Vorsitzenden des *Advisory Board* von EMT ernannt, dem auch *K.-D. Bierstedt* als Vorsitzender des nationalen EuroMath-Komitees angehört.

3.10 *Öffentlichkeitsarbeit.* Herr *Pareigis* hat viele Kontakte geknüpft und eine Reihe von Pressemitteilungen über inzwischen gut eingespielte Kanäle an die Presse gegeben. Eine einstündige Rundfunksendung (Teilnehmer *Hirzebruch, Pareigis , G. Fischer*) wurde vom NDR im August ausgestrahlt.

3.11 Das Heft „Diplom-Mathematiker" der *Blätter zur Berufskunde* der Bundesanstalt für Arbeit wird überarbeitet. Die Herren *O. H. Kegel, E. Martensen* und *A. Peyerimhoff* steuern die Aktivitäten, das neue Manuskript verfassen die Herren *O. H. Kegel* (Freiburg) und *E. Schwarz* (Königswinter).

4 Organisation

4.1 Im Jahre 1987 wurde ein neues Mitgliederverzeichnis der DMV herausgegeben.

4.2 Zum 15. 8. 1987 hatte die DMV 1898 Mitglieder.

4.3 Ab 1. 2. 1987 ist Frau *Wagner-Klimt* in der Geschäftsstelle der DMV in Freiburg tätig, nachdem Frau *D. Sauer* zum Jahresende 1986 auf eigenen Wunsch ausgeschieden war. Überbrückungshilfe wurde durch Frau *B. Windscheid* (MFO) geleistet.

4.4 Die DMV ist als Gesellschafterin beim Fachinformationszentrum Karlsruhe aufgenommen worden. Die Stammeinlage beträgt 3000,– DM.

4.5 *Reziprozitätsabkommen* wurden abgeschlossen mit der Brasilianischen Math. Gesellschaft (Sociedade Brasileira de Matemática). Abschlüsse mit den Mathematikerorganisationen Mexikos und Indiens (Indian Math. Society) sind demnächst zu erwarten.

5 Kolloquien, Ehrungen

5.1 Am 5. 5. 1987 fand in Erlangen aus Anlaß des 100. Geburtstages von *Otto Haupt* ein Festkolloquium statt. Das Präsidium der DMV hat diesen Geburtstag zum Anlaß genommen, gemäß dem bei den bisherigen Ehrenmitgliedern *Klein, Brill, Hilbert* und *Heffter* üblichen Verfahren Herrn *Haupt* die Ehrenmitgliedschaft der DMV anzutragen.

5.2 Bei Kolloquia aus Anlaß der 60. Geburtstage der Herren *Grotemeyer* (Schatzmeister) und der früheren Vorsitzenden *Hirzebruch* und *Witting* sowie beim Kolloquium aus Anlaß des 80. Geburtstages des früheren Vorsitzenden *G. Nöbeling* wurden Grußadressen des Präsidiums überbracht.

5.3 Beim Kolloquium zu Ehren des Fields-Medaillen-Trägers *Faltings* am 1. 7. 1987 in Wuppertal ging der Vorsitzende auf Bedeutung dieser Ehrung, die Bedeutung der Mathematik und die Lage des Wissenschaftlichen Nachwuchses ein.

5.4 Am Kolloquium *Mathématiques à venir* am 9. und 10. Dezember 1987 der SMF in Palaiseau hat Herr *K. Jacobs* teilgenommen. Anlaß der Tagung war die Sorge der französischen Kollegen um die zukünftige Entwicklung der Mathematik. Es ging um Fragen der Altersstruktur, der Nachwuchsförderung und um das Problem, der Mathematik in der Öffentlichkeit angemessene Aufmerksamkeit zu verschaffen.