90. Band Heft 4
ausgegeben am 17. 10. 1988

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
H. Kurzweil, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1988

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 90/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
H. Kurzweil, J. Stoer

90. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1988

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

3. Abteilung

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 90, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Atiyah: The Frontier Between Geometry and Physics
K.-H. Hoffmann: Steuerung freier Ränder
K. Hulek: Elliptische Kurven, abelsche Flächen und das Ikosaeder
J. A. Jenkins: Helmut Grunsky
J. Jost: Das Existenzproblem für Minimalflächen
D. G. Kendall: A Survey of the Statistical Theory of Shape
H. W. Knobloch: Steuerbarkeit als zentraler Begriff beim Aufbau der Kontrolltheorie
P. Roquette: Über die algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten von Max Deuring
W. Singhof: Einige Beziehungen zwischen stabiler Homotopietheorie und Zahlentheorie

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
90 (1988) 155–183
AMS subject classification: 12-02, 12 F 10, 11 R 32

Über das Umkehrproblem der Galoisschen Theorie*)

B. H. Matzat, Karlsruhe

§ 1 Historische Einführung

(1.1) Vor über 150 Jahren hat Galois jedem Polynom ohne mehrfache Nullstellen f(X), dessen Koeffizientenbereich ein Körper K sei, eine endliche Gruppe G zugeordnet: Sind n der Grad von f(X), $\theta_1, \ldots, \theta_n$ die Nullstellen von f(X) (in einer algebraisch abgeschlossenen Hülle $\bar{K}$ von K), $N := K(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ der Zerfällungskörper von f(X) über K und

$$\mathcal{R} := \{r(X_1, \ldots, X_n) \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid r(\theta_1, \ldots, \theta_n) = 0\}$$

die Menge der K-rationalen Relationen zwischen $\theta_1, \ldots, \theta_n$, dann bildet

$$\mathrm{Gal}(f(X)) := \{\sigma \in S_n \mid r(\theta_{\sigma(1)}, \ldots, \theta_{\sigma(n)}) = 0,\ r(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{R}\}$$

eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n. Diese (noch von der Numerierung der Nullstellen abhängende) Gruppe heißt die *Galoisgruppe des Polynoms* f(X). Gal(f(X)) ist isomorph zur Gruppe derjenigen Automorphismen von N, die K elementweise festlassen; letztere Gruppe heißt deswegen die *Galoisgruppe der galoisschen Körpererweiterung* N/K und wird mit Gal(N/K) bezeichnet; es ist also

$$\mathrm{Gal}(f(X)) \cong \mathrm{Gal}(N/K).$$

Für die Galoisgruppe G = Gal(f(X)) gelten unter anderem, daß der Grad [N : K] der Körpererweiterung N/K gleich der Ordnung |G| der Gruppe G ist, daß die Zwischenkörper von N/K bijektiv den Untergruppen von G entsprechen und daß genau dann jede Nullstelle von f(X) durch einen Wurzelausdruck über K darstellbar (durch Radikale auflösbar) ist, wenn G auflösbar ist. Die Galoisgruppe G enthält also wichtige Informationen über die Struktur der Körpererweiterung N/K. Das ist Grund genug, danach zu fragen, ob es zu jeder endlichen Gruppe G ein Polynom $f(X) \in K[X]$ gibt mit $\mathrm{Gal}(f(X)) \cong G$. Dies ist das *Umkehrproblem der Galoistheorie für* K.

(1.2) Obwohl das Umkehrproblem der Galoistheorie für den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bereits von Hilbert [1892] formuliert wurde, blieb es bis heute ungelöst. Teilresultate waren aber bereits im letzten Jahrhundert bekannt: Jede abelsche endliche Gruppe ist als Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ realisierbar. Eine abelsche endliche

---

*) Hauptvortrag auf dem XI. Österreichischen Mathematikerkongreß in Graz 1985.

Gruppe G läßt sich nämlich in ein direktes Produkt zyklischer endlicher Gruppen zerlegen: $G = Z_{n_1} \times \ldots \times Z_{n_r}$. Für die zyklischen Faktoren Z_{n_j} der Ordnung n_j gibt es paarweise verschiedene Primzahlen p_j mit $p_j \equiv 1 \bmod (n_j)$. Bereits Galois wußte, daß der Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/p_j))$ eine über $\mathbb{Q}$ zyklische Galoisgruppe der Ordnung $p_j - 1$ und damit einen Teilkörper N_j mit $\mathrm{Gal}(N_j/\mathbb{Q}) \cong Z_{n_j}$ besitzt. Das Kompositum N dieser Körper N_j ist dann über $\mathbb{Q}$ galoissch mit $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}) \cong \prod_{j=1}^{r} Z_{n_j} = G$. Demnach ist G innerhalb des n-ten Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n))$ für $n = \prod_{j=1}^{r} p_j$ als Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ realisierbar. Dieses Resultat wird durch den folgenden Satz verallgemeinert:

Satz von Kronecker – Weber (Weber [1886]). *Jeder über* $\mathbb{Q}$ *galoissche Körper* N *mit abelscher Galoisgruppe* $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ *ist ein Teilkörper eines* n*-ten Kreisteilungskörpers* $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n))$ *für ein geeignetes* n.

Aus diesem Satz ergibt sich, daß alle über $\mathbb{Q}$ galoisschen Körper mit abelscher Galoisgruppe, diese heißen auch über $\mathbb{Q}$ abelsch, im vollen Kreisteilungskörper

$$\mathbb{K} := \mathbb{Q}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right)$$

enthalten sind. ($\mathbb{K}$ wird von Neukirch [1974] auch der Kroneckersche Körper genannt.) Im weiteren werden die n-ten Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n))$ mit $\mathbb{K}_n$ bezeichnet.

(1.3) Der nächste große Schritt gelang erst Šafarevič 1954, als er zeigen konnte, daß auch jede auflösbare endliche Gruppe, d. h. jede endliche Gruppe G, deren Kompositionsreihe

$$G = G_0 \rhd \ldots \rhd G_n = I$$

zyklische Faktorgruppen G_{i-1}/G_i für $i = 1, \ldots, n$ besitzt, als Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ realisierbar ist.

Satz von Šafarevič [1954c]. *Jede auflösbare endliche Gruppe ist unendlich oft als Galoisgruppe über* $\mathbb{Q}$ *realisierbar.*

Der Beweis zu diesem Satz stellt eine der Großtaten in der algebraischen Zahlentheorie dar (siehe Scholz [1929], [1937], Šafarevič [1954a], [1954b], [1954c]). Polynome mit rationalen Koeffizienten für einige auflösbare Gruppen, insbesondere einige Frobeniusgruppen, findet man bei Sonn [1980], Roland – Yui – Zagier [1982], Jensen – Yui [1982], Bruen – Jensen – Yui [1986], Heider – Kolvenbach [1984], Odoni [1985] und Gow [1986].

(1.4) Adjungiert man zum Körper $\mathbb{Q}$ statt der n-Teilungspunkte des Einheitskreises die Koordinaten aller n-Teilungspunkte einer über $\mathbb{Q}$ definierten elliptischen Kurve ohne komplexe Multiplikation, so sind die so erhaltenen Körper $\mathbb{E}_n$ über $\mathbb{Q}$ galoissch mit $\mathrm{Gal}(\mathbb{E}_n/\mathbb{Q}) \leqslant GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, wobei der Index von $\mathrm{Gal}(\mathbb{E}_n/\mathbb{Q})$ in $GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ durch eine nur von der elliptischen Kurve abhängenden natürliche

Zahl beschränkt ist. Dieser Satz von Serre [1972] (siehe auch Shimura [1966] für ein Teilresultat) verfeinert ein klassisches Resultat über die Galoisgruppen der n-Teilungspolynome einer allgemeinen elliptischen Kurve (siehe Lang [1973], Ch. 6, § 3, Cor. 1, beruhend auf Weber [1908], § 63). Insbesondere sind die allgemeinen linearen Gruppen $GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ unendlich oft als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$ realisierbar.

(1.5) Fast alle weiteren Resultate beruhen auf dem Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, den ich in der für die Galoistheorie passenden Weise formuliere:

Hilbertscher Irreduzibilitätssatz (Hilbert [1892]). *Es seien* $K = \mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_n)$ *ein rationaler Funktionenkörper über* $\mathbb{Q}$ *und* $f(t_1, \ldots, t_n, X) \in K[X]$ *ein irreduzibles Polynom mit der Galoisgruppe* G. *Dann existieren unendlich viele* $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{Q}^n$, *so daß* $f(\tau_1, \ldots, \tau_n, X) \in \mathbb{Q}[X]$ *irreduzibel ist und* $\mathrm{Gal}(f(\tau_1, \ldots, \tau_n, X)) \cong G$ *ist.*

Man nennt nun einen Körper k einen *Hilbertkörper*, wenn der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz für k statt $\mathbb{Q}$ richtig bleibt. Zu diesen zählen unter anderem die über $\mathbb{Q}$ endlich erzeugten Erweiterungskörper (Hilbert [1892]) sowie die über $\mathbb{K}$ endlich erzeugten Erweiterungskörper (Kuyk [1968], [1970], Weissauer [1982], Fried [1985]).

(1.6) Unter Verwendung des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes erhält man sofort, daß die symmetrischen Gruppen S_n als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$ realisierbar sind, da die Galoisgruppe der allgemeinen Gleichung n-ten Grades die S_n ist. Hieraus folgt, daß jede endliche Gruppe als Galoisgruppe über einem endlichen Erweiterungskörper K von $\mathbb{Q}$ realisiert werden kann. Denn jede endliche Gruppe G läßt sich für ein geeignetes n in die symmetrische Gruppe S_n einbetten, für diese gibt es eine Galoiserweiterung $N/\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}) \cong S_n$, und N ist über dem Fixkörper $K = N^G$ von G galoissch mit $\mathrm{Gal}(N/K) \cong G$. Weiter konnte Hilbert mit dem Irreduzibilitätssatz nachweisen, daß auch die alternierenden Gruppen A_n als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$ vorkommen. Explizite Polynome mit den Galoisgruppen A_n für $n \not\equiv 2 \bmod (4)$ fand Schur [1930], [1931] bei der Untersuchung der abgebrochenen Exponentialreihe und der abgeleiteten Laguerreschen Polynome. Polynome mit den Gruppen A_n für alle n sind aufgestellt worden von Matzat [1984] (bereits zitiert von Geyer [1978]) und Nart – Vila [1983]).

(1.7) Polynome mit Koeffizienten aus rationalen Funktionenkörpern über gewissen algebraischen Zahlkörpern, deren Galoisgruppen von den Gruppen S_n und A_n verschieden sind, wurden vor allem innerhalb der Theorie der Modulfunktionen konstruiert (Klein [1884], Klein – Fricke [1897, 1912], Fricke [1928], siehe auch Atkin – Swinnerton-Dyer [1971]). Dabei stellte Weber [1908] fest, daß die Galoisgruppen der Transformationspolynome der elliptischen Modulfunktionen für Primzahlen p über $\mathbb{Q}(j)$ die Gruppen $PGL_2(\mathbb{F}_p)$ sind, die damit auch als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$ vorkommen. Dieses Resultat wurde von Macbeath [1969] auf die Gruppen $PGL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ausgedehnt. Unter zusätzlicher Verwendung der Shimuraschen Theorie der kanonischen Systeme von Modellen (siehe z. B. Shimura [1971]) konnte Shih [1974] (siehe auch Shih [1978]) zeigen, daß auch die einfachen Gruppen

$PSL_2(\mathbb{F}_p)$, für die 2, 3 oder 7 kein quadratischer Rest modulo p ist, als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}(t)$ und $\mathbb{Q}$ vorkommen. Dasselbe gilt auch für die Gruppen $PSL_2(\mathbb{F}_{p^2})$ bei Primzahlen $p \neq 47$, für die 144169 quadratischer Nichtrest modulo p ist (Ribet [1975]).

(1.8) Ein allgemeiner Ansatz geht auf Emmy Noether zurück. Dazu bettet man eine vorgegebene endliche Gruppe G in eine symmetrische Gruppe S_n ein, die die n über k unabhängigen Transzendenten von $K = k(t_1, \ldots, t_n)$ permutiert.

Satz von E. Noether [1918]. *Es seien* k *ein Hilbertkörper,* G *eine Untergruppe der* S_n *und* $K = k(t_1, \ldots, t_n)$. *Weiter sei der Invariantenkörper* K^G *von* K *unter der* $\{t_1, \ldots, t_n\}$ *permutierenden Gruppe* G *ein rationaler Funktionenkörper. Dann ist* G *unendlich oft als Galoisgruppe über* k *realisierbar, und die Menge der Polynome* $f(X) \in k[X]$ *mit einer zu* G *isomorphen Galoisgruppe ist parametrisierbar.*

Die Voraussetzungen zu diesem Satz wurden von E. Noether [1918] selbst für die Untergruppen der S_4 bestätigt, und Seidelmann [1918] berechnete die zugehörigen Parameterdarstellungen. Dieses Programm wurde für spezielle auflösbare Gruppen fortgeführt von Breuer [1921], [1924], [1926], [1932], Furtwängler [1925] und Gröbner [1932]. Chevalley [1955] konnte zeigen, daß die Invariantenkörper der endlichen Spiegelungsgruppen rationale Funktionenkörper sind. Im allgemeinen führt aber dieser Ansatz nicht zum Ziel. Ein erstes Gegenbeispiel fand Swan [1969], indem er zeigte, daß der Invariantenkörper der Z_{47} kein rationaler Funktionenkörper über $\mathbb{Q}$ ist. Für weitere Resultate bezüglich abelscher Gruppen sei auf Lenstra [1974] verwiesen.
Ein Abriß der jüngeren Geschichte dieses Noetherschen Problems ist von Swan [1981], [1983] aufgezeichnet worden. Auf das Umkehrproblem der Galoisschen Theorie wird weiter in den Übersichtsartikeln von Tschebotaröw [1934] (siehe auch das Lehrbuch Tschebotaröw – Schwerdtfeger [1950]), Neukirch [1974], Geyer [1978], Jehne [1979] und Faddeev [1984] eingegangen.

§ 2 Fundamentalgruppen

(2.1) Durch den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz wird das Umkehrproblem der Galoistheorie über $\mathbb{Q}$ verlagert auf ein Umkehrproblem über $\mathbb{Q}(t)$. Denn ist eine endliche Gruppe G als Galoisgruppe über $\mathbb{Q}(t)$ realisierbar, so auch über $\mathbb{Q}$ und im Falle keiner reinen Konstantenerweiterung sogar unendlich oft. Aber auch das Umkehrproblem der Galoistheorie über $\mathbb{Q}(t)$ ist bis heute ungelöst. Einfacher wird eine Lösung des Umkehrproblems erst, wenn man statt des Körpers $\mathbb{Q}(t)$ z. B. den Körper $\mathbb{C}(t)$ der rationalen Funktionen über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Grundkörper wählt. Diesen kann man nämlich auffassen als den Körper der meromorphen Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathcal{K} = \hat{\mathbb{C}}$. Ist nun $\hat{N}/\mathbb{C}(t)$ eine endliche galoissche Körpererweiterung, so ist $\hat{N}$ der Körper der meromorphen Funktionen einer kompakten Riemannschen Überlagerungsfläche $\mathcal{N}$ von $\mathcal{K}$, die an endlich vielen Punkten $P_1, \ldots, P_s$ von $\mathcal{K}$ verzweigt ist, und es sei $\mathcal{S} = \{P_1, \ldots, P_s\}$. $\mathcal{K}^{\cdot} := \mathcal{K} \setminus \mathcal{S}$ ist eine triangulierbare orientierbare topologische Fläche. Also lassen sich die Überlagerungsflächen von $K^{\cdot}$ durch die Fundamentalgruppe $\pi_1(K^{\cdot})$ klassifizieren. Es ergibt sich als Spezialfall aus dem

Fundamentalsatz für Überlagerungen topologischer Flächen. *Die in* $S = \{P_1, \ldots, P_s\}$ *gelochte Riemannsche Zahlenkugel* $K^{\cdot}$ *besitzt eine universelle Überlagerungsfläche* $\hat{K}^{\cdot}$. *Die Gruppe der Decktransformationen von* $\hat{K}^{\cdot}/K^{\cdot}$ *ist isomorph zur Wegeklassengruppe* $\pi_1(K^{\cdot})$, *wird also erzeugt durch die Homotopieklassen* $\bar{a}_j$ *einfacher Schleifen* a_j *von* $P_0 \in K^{\cdot}$ *aus um* P_j *mit der einzigen Relation* $\bar{a}_1 * \ldots * \bar{a}_s = \bar{o}$ (*nullhomotop*), *d. h. es ist*

$$\mathrm{Deck}(\hat{K}^{\cdot}/K^{\cdot}) \cong \pi_1(K^{\cdot}) = \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s \,|\, \bar{a}_1 * \ldots * \bar{a}_s = \bar{o} \rangle.$$

Ist ψ *ein Normalteiler vom Index* n *in* $\pi_1(K^{\cdot})$, *so ist der Bahnenraum* $N^{\cdot} := \hat{K}^{\cdot}/\psi$, *versehen mit der Quotiententopologie, eine* n-*blättrige galoissche Überlagerungsfläche von* $K^{\cdot}$ *mit*

$$\mathrm{Deck}(N^{\cdot}/K^{\cdot}) \cong \pi_1(K^{\cdot})/\psi.$$

Umgekehrt gibt es zu jeder n-*blättrigen galoisschen Überlagerungsfläche* $N^{\cdot}$ *von* $K^{\cdot}$ *genau einen Normalteiler* ψ *vom Index* n *in* $\pi_1(K^{\cdot})$, *so daß* $\hat{K}^{\cdot}/\psi$ *spurhomöomorph zu* $N^{\cdot}$ *ist.*

Die aufgezählten Aussagen ergeben sich z. B. aus Douady [1979], Th. 4.3.5 mit 4.5.3, Th. 4.5.8 mit Cor. 4.5.11, Th. 4.6.7 und Th. 4.8.8 (siehe auch Matzat [1986a], Satz 1.A mit Zusatz 1.B).

(2.2) Nun sind die Flächen $K^{\cdot}$ nicht nur topologische Flächen, sondern besitzen auch eine komplexe Struktur. Diese läßt sich auf die endlichen Überlagerungsflächen $N^{\cdot}$ hochheben und auf eindeutig bestimmte Kompaktifizierungen N von $N^{\cdot}$ fortsetzen (Douady [1979], Cor. 6.1.10 mit Prop. 6.1.11). Damit wird N eine kompakte Riemannsche Überlagerungsfläche von K, die außerhalb der Punktmenge S unverzweigt ist. Weiter ist N/K genau dann galoissch, wenn $N^{\cdot}/K^{\cdot}$ galoissch ist, und es gilt dann

$$\mathrm{Deck}(N/K) \cong \mathrm{Deck}(N^{\cdot}/K^{\cdot}).$$

Folglich bleibt die Klassifikation der endlichen galoisschen Überlagerungsflächen der topologischen Fläche $K^{\cdot}$ durch die Normalteiler von endlichem Index in $\pi_1(K^{\cdot})$ auch für die außerhalb S unverzweigten galoisschen kompakten Riemannschen Überlagerungsflächen der Riemannschen Zahlenkugel K erhalten.

Existenzsatz für Riemannsche Flächen. *Es seien* N *eine kompakte Riemannsche Fläche und* $\hat{\mathrm{N}}$ *der Körper der meromorphen Funktionen auf* N. *Dann gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten* P, Q *von* N *eine Funktion* $f \in \hat{\mathrm{N}}$ *mit* $f(P) \neq f(Q)$.

Aus diesem Satz, der z. B. bei Forster [1977], Satz 14.12, bewiesen ist, folgt, daß bei einer kompakten Riemannschen Überlagerungsfläche N der Riemannschen Zahlenkugel K der Grad der Körpererweiterung $\hat{\mathrm{N}}/\mathbb{C}(t)$ gleich der Blätterzahl von N/K ist. Weiter ergibt sich durch Übertragung der Decktransformationen von N/K auf $\hat{\mathrm{N}}$, daß für galoissche Überlagerungsflächen N/K auch $\hat{\mathrm{N}}/\mathbb{C}(t)$ galoissch ist mit

$$\mathrm{Gal}(\hat{\mathrm{N}}/\mathbb{C}(t)) \cong \mathrm{Deck}(N/K)$$

(siehe z. B. Douady [1979], Th. 6.2.4, oder Forster [1977], Satz 8.12). Hieraus erhält man eine positive Lösung des Umkehrproblems der Galoistheorie für $\mathbb{C}(t)$:

Folgerung 1. *Jede endliche Gruppe ist als Galoisgruppe über* $\mathbb{C}(t)$ *realisierbar.*

Eine endliche Gruppe G besitzt nämlich ein endliches Erzeugendensystem, dessen Elementanzahl r sei. Damit ist G isomorph zu einer Faktorgruppe einer freien Gruppe vom Rang r. Für $K^{\cdot} = K \backslash S$ mit $|S| = r + 1$ ist $\pi_1(K^{\cdot})$ frei vom Rang r. Folglich kommt G als Gruppe der Decktransformationen einer endlichen galoisschen Überlagerung $N^{\cdot}/K^{\cdot}$ sowie der zugehörigen Riemannschen Überlagerung N/K vor. Somit ist G isomorph zur Galoisgruppe der Körpererweiterung $\hat{N}/\mathbb{C}(t)$ des Körpers der meromorphen Funktionen auf N über dem Körper der meromorphen Funktionen auf K:

$$G \cong \mathrm{Deck}(N^{\cdot}/K^{\cdot}) \cong \mathrm{Deck}(N/K) \cong \mathrm{Gal}(\hat{N}/\mathbb{C}(t)).$$

(2.3) Um dieses Resultat auf andere Grundkörper übertragen zu können, benötigt man ein algebraisches Analogon zur Fundamentalgruppe $\pi_1(K^{\cdot})$. Dazu bildet man in einer algebraisch abgeschlossenen Hülle von $\mathbb{C}(t)$ die Vereinigung aller außerhalb einer s-elementigen Teilmenge S von K unverzweigten endlichen galoisschen Erweiterungskörper $\hat{N}$ von $\mathbb{C}(t)$. Der so entstehende Körper $\hat{M}$ ist über $\mathbb{C}(t)$ galoissch, und die Galoisgruppe von $\hat{M}/\mathbb{C}(t)$ ist konstruktionsgemäß der projektive Limes der endlichen Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(\hat{N}/\mathbb{C}(t))$, d. h. $\mathrm{Gal}(\hat{M}/\mathbb{C}(t))$ ist die proendliche Komplettierung $\hat{\pi}_1(K^{\cdot})$ der Fundamentalgruppe $\pi_1(K^{\cdot})$ von $K^{\cdot} = K \backslash S$:

$$\mathrm{Gal}(\hat{M}/\mathbb{C}(t)) = \hat{\pi}_1(K^{\cdot}) = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \,|\, \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_s = \iota \rangle_{\mathrm{top}}.$$

In dieser Form bleibt das Resultat richtig, wenn man den Körper $\mathbb{C}$ durch irgendeinen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 ersetzt, wie Grothendieck ([1971], Exposé X) und Douady [1964] gezeigt haben (siehe auch Šafarevič [1963], Popp [1970], Satz 11.1, und für eine Beweisalternative van den Dries – Ribenboim [1979]). Speziell gilt für den Körper aller algebraischen Zahlen $\overline{\mathbb{Q}}$:

Satz 1 (Grothendieck [1971] – Douady [1964]). *Es sei* $\overline{\mathbb{S}} = \{\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_s\}$ *eine Teilmenge der abstrakten Riemannschen Fläche* $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}})$ *von* $\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}}$. *Dann ist der maximale außerhalb* $\overline{\mathbb{S}}$ *unverzweigte algebraische Erweiterungskörper* $\overline{M}$ *von* $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ *über* $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ *galoissch, und die Galoisgruppe von* $\overline{M}/\overline{\mathbb{Q}}(t)$ *ist eine freie proendliche Gruppe* Φ_r *vom Rang* $r = s - 1$:

$$\mathrm{Gal}(\overline{M}/\overline{\mathbb{Q}}(t)) = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \,|\, \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_s = \iota \rangle_{\mathrm{top}} \cong \Phi_r.$$

Dabei können die Erzeugenden α_j *als Erzeugende von Trägheitsgruppen über* $\bar{\mathfrak{p}}_j$ *liegender Bewertungsideale* $\bar{\mathfrak{P}}_j$ *von* $\overline{M}$ *gewählt werden.*

Hierin kann man analog zu $K = \hat{\mathbb{C}}$ die abstrakte Riemannsche Fläche $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}})$ interpretieren als die Punktmenge $\overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$. $\mathrm{Gal}(\overline{M}/\overline{\mathbb{Q}}(t))$ heißt dann auch die *algebraische Fundamentalgruppe von* $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}}) \backslash \overline{\mathbb{S}}$. Wie oben erhält man daraus eine positive Lösung des Umkehrproblems der Galoistheorie für $\overline{\mathbb{Q}}(t)$:

Folgerung 2. *Jede endliche Gruppe ist als Galoisgruppe über* $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ *realisierbar.*

(2.4) Damit hat man sich dem Umkehrproblem der Galoistheorie über $\mathbb{Q}(t)$ wieder bis auf einen algebraischen Schritt genähert, und die Frage, ob eine vorgegebene Galoiserweiterung $\overline{N}/\overline{\mathbb{Q}}(t)$ mit $\overline{N} \leqslant \overline{M}$ durch ein Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}(t)[X]$ erzeugt werden kann, ist innerhalb der Körpererweiterung $\overline{M}/\mathbb{Q}(t)$ entscheidbar. Deshalb ist es zweckmäßig, zunächst die Struktur dieser Körpererweiterung aufzuklären:

Satz 2 (van den Dries – Ribenboim [1984], Matzat [1985a]). *Es seien* k *ein Zahlkörper,* $\mathbb{S}$ *eine Teilmenge der abstrakten Riemannschen Fläche* $\mathbb{P}(k(t)/k)$ *von* $k(t)/k$ *und* $\overline{\mathbb{S}}$ *die Menge der Fortsetzungen von* $\mathbb{S}$ *auf* $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}})$:

$$\overline{\mathbb{S}} = \{\bar{\mathfrak{p}} \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}}) \mid \bar{\mathfrak{p}} \supseteq \mathfrak{p} \in \mathbb{S}\}, \quad |\overline{\mathbb{S}}| = s.$$

Dann ist der maximale außerhalb $\overline{\mathbb{S}}$ *unverzweigte algebraische Erweiterungskörper* $\overline{M}$ *von* $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ *über* $k(t)$ *galoissch, und die Galoisgruppe von* $\overline{M}/k(t)$ *ist ein semidirektes Produkt:*

$$\mathrm{Gal}(\overline{M}/k(t)) = \Pi \rtimes \Delta$$

mit $\quad \Pi = \mathrm{Gal}(\overline{M}/\overline{\mathbb{Q}}(t)) \cong \Phi_r, \quad r = s-1,$ *und* $\quad \Delta \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k).$

Hierin kann man die Menge $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{P}(k(t)/k)$ interpretieren als eine Menge normierter Primpolynome in $k[t]$ vereinigt eventuell mit $\{1/t\}$ und die Menge $\overline{\mathbb{S}}$ als die Menge der Nullstellen dieser Primpolynome vereinigt eventuell mit $\{\infty\}$. $\mathrm{Gal}(\overline{M}/k(t))$ wurde bei Matzat [1985a] eine *arithmetische Fundamentalgruppe* genannt.

(2.5) Aus der Struktur dieser arithmetischen Fundamentalgruppe ergibt sich unmittelbar ein vorläufiges Rationalitätskriterium (siehe auch Matzat [1984], Satz 1.1):

Vorläufiges Rationalitätskriterium. *Es seien* $\overline{N}/\overline{\mathbb{Q}}(t)$ *eine außerhalb* $\overline{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{P}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}})$ *unverzweigte Galoiserweiterung mit der Galoisgruppe* G, $\overline{M}$ *der maximale außerhalb* $\overline{\mathbb{S}}$ *unverzweigte algebraische Erweiterungskörper von* $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ *und* $\Psi = \mathrm{Gal}(\overline{M}/\overline{N})$. *Dann gelten für* $k \leqslant \overline{\mathbb{Q}}$:

(a) *Genau dann gibt es eine reguläre Körpererweiterung* $N/k(t)$ *mit* $\overline{\mathbb{Q}}N = \overline{N}$, *wenn* $\overline{N}/k(t)$ *galoissch ist bzw. wenn* Ψ *ein Normalteiler von* $\mathrm{Gal}(\overline{M}/k(t))$ *ist.*

(b) *Genau dann gibt es eine reguläre galoissche Körpererweiterung* $N/k(t)$ *mit* $\overline{\mathbb{Q}}N = \overline{N}$, *wenn* $\overline{N}/k(t)$ *galoissch ist mit* $\mathrm{Gal}(\overline{N}/k(t)) = \mathrm{Gal}(\overline{N}/\overline{\mathbb{Q}}(t)) \times \mathrm{Gal}(\overline{N}/N)$. *Dann ist* $\mathrm{Gal}(N/k(t)) \cong G$.

Dabei nennt man $N/k(t)$ eine *reguläre Körpererweiterung*, wenn k in N algebraisch abgeschlossen ist. Im Fall (a) heißt $k(t)$ ein *Definitionskörper von* $\overline{N}/\overline{\mathbb{Q}}(t)$, im Fall (b) ein *eigentlicher Definitionskörper von* $\overline{N}/\overline{\mathbb{Q}}(t)$.

§ 3 Das 1. Rationalitätskriterium

(3.1) Um das vorläufige Rationalitätskriterium anwenden zu können, benötigt man Kenntnisse über die Operation des Komplements Δ von Π in $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{M}/k(t))$ auf den Normalteilern Ψ von Π mit $\Pi/\Psi \cong G$ bzw. auf den Galoiserweiterungen $\overline{N}$ von $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ mit $\overline{N} \leqslant \overline{M}$ und $\mathrm{Gal}(\overline{N}/\overline{\mathbb{Q}}(t)) \cong G$. Eine geeignete Übersicht über diese Normalteiler Ψ erhält man auf die folgende Weise: Jedes $\Psi \trianglelefteq \Pi$ mit $\Pi/\Psi \cong G$ ist der Kern eines Epimorphismus $\psi : \Pi \to G$, dieser bildet das Erzeugendensystem $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ von Π aus Satz 1 ab auf ein Erzeugendensystem $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ von G mit der Relation $\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_s = \iota$. Ein solches Erzeugendensystem $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ von G heißt ein s-*Erzeugendensystem von* G, und

$$\Sigma_s(G) := \{\underline{\sigma} \in G^s | \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_s = \iota, \langle\underline{\sigma}\rangle = G\}$$

sei die Menge der s-Erzeugendensysteme von G. Offenbar sind durch ein s-Erzeugendensystem $\underline{\sigma} \in G^s$ als Bild von $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ ein Epimorphismus $\psi : \Pi \to G$ und $\Psi = \mathrm{Kern}(\psi) \trianglelefteq \Pi$ mit $\Pi/\Psi \cong G$ eindeutig bestimmt, weshalb man auch $\Psi = \mathrm{Kern}(\underline{\sigma})$ schreiben darf. In dieser Bezeichnungsweise ist für zwei s-Erzeugendensysteme $\underline{\sigma}, \underline{\tilde{\sigma}}$ genau dann $\mathrm{Kern}(\underline{\sigma}) = \mathrm{Kern}(\underline{\tilde{\sigma}})$, wenn es einen Automorphismus φ von G gibt mit $\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\sigma}^\varphi = (\sigma_1^\varphi, \ldots, \sigma_s^\varphi)$. Also gibt es eine bijektive Abbildung von der Menge der Normalteiler Ψ mit $\Pi/\Psi \cong G$ auf die Menge der Bahnen von Aut(G) auf $\Sigma_s(G)$, diese habe ich auf Grund der Vorarbeiten von Hurwitz [1891] in Matzat [1984] die Hurwitzklassifikation genannt (siehe auch Shih [1974], App., Prop. 1).

Hurwitzklassifikation (Matzat [1984]). *Die außerhalb einer Teilmenge* $\overline{\mathbb{S}} = \{\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_s\}$ *der abstrakten Riemannschen Fläche* $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}})$ *von* $\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}}$ *unverzweigten Galoiserweiterungen* $\overline{N}/\overline{\mathbb{Q}}(t)$ *mit einer zu* G *isomorphen Galoisgruppe werden klassifiziert durch die Menge der* s-*Erzeugendensystemklassen*

$$\Sigma_s^a(G) := \Sigma_s(G)/\mathrm{Aut}(G).$$

(3.2) Als nächstes ist die auf $\Sigma_s^a(G)$ bzw. $\Sigma_s^i(G) := \Sigma_s(G)/\mathrm{Inn}(G)$ übertragene Operation von Δ zu beschreiben. Hierzu stellt man fest, daß die Einschränkung von Δ auf $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ nach der Voraussetzung zu Satz 2 die Menge $\overline{\mathbb{S}}$ permutiert; es definiert also

$$\Delta \ni \delta : \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{S}}, \qquad \bar{\mathfrak{p}}_j \mapsto \bar{\mathfrak{p}}_j^\delta =: \bar{\mathfrak{p}}_{\delta(j)}$$

eine Permutationsdarstellung von Δ in die symmetrische Gruppe S_s (mit dem inversen Abbildungsprodukt). Weiter wirkt $\delta \in \Delta$ als Automorphismus auf der Gruppe $W_n = \langle e^{2\pi i/n}\rangle$ der n-ten Einheitswurzeln von $\overline{\mathbb{Q}}$:

$$\Delta \ni \delta : W_n \to W_n, \qquad e^{\frac{2\pi i}{n}} \mapsto e^{c(\delta)\frac{2\pi i}{n}},$$

wodurch $c(\delta) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ festgelegt ist. Mit diesen beiden Bezeichnungen gilt der

Satz 3 (Matzat [1985a]). *Es seien* $\overline{M}/k(t)$ *die Körpererweiterung aus* Satz 2, $\Pi = \mathrm{Gal}(\overline{M}/\overline{\mathbb{Q}}(t))$, $\Psi = \mathrm{Kern}(\underline{\sigma})$ *ein Normalteiler von* Π *mit* $\Pi/\Psi \cong G$ *und* $|G| = n$.

Dann ist für $\delta \in \Delta$

$$\Psi^\delta = \delta^{-1}\Psi\delta = \mathrm{Kern}(\tilde{\underline{\sigma}}) \quad \textit{mit} \quad [\tilde{\sigma}_j] = [\sigma_{\delta(j)}^{c(\delta)}],$$

d. h. die Konjugiertenklassen von $\tilde{\sigma}_j$ *und* $\sigma_{\delta(j)}^{c(\delta)}$ *in* G *stimmen überein.*

(3.3) Durch den Satz 3 ist die Operation von $\delta \in \Delta$ zumindest auf den Konjugiertenklassen der Komponenten der s-Erzeugendensysteme von G bekannt. Das veranlaßt die folgenden Definitionen: Sind G eine Gruppe der Ordnung n und C_j Konjugiertenklassen von G, dann heißen

$$\{(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in G^s \mid \sigma_j \in C_j\} = (C_1, \ldots, C_s) =: \mathfrak{C}$$

eine *Klassenstruktur von* G bzw. *von* $\bar{N}/\bar{\mathbb{Q}}(t)$, wenn man die Hurwitzklassifikation vor Augen hat, und

$$\bigcup_{\nu \in Z_n^\times} (C_1^\nu, \ldots, C_s^\nu) =: \mathfrak{C}^*$$

für $Z_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die von $\mathfrak{C}$ aufgespannte *Verzweigungsstruktur von* G bzw. *von* $\bar{N}/\bar{\mathbb{Q}}(t)$. Weiter seien

$$\bar{\Sigma}(\mathfrak{C}) := \{\underline{\sigma} \in \mathfrak{C} \mid \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_s = \iota\}, \qquad \bar{\Sigma}(\mathfrak{C}^*) := \{\underline{\sigma} \in \mathfrak{C}^* \mid \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_s = \iota\},$$

$$\Sigma(\mathfrak{C}) := \{\underline{\sigma} \in \bar{\Sigma}(\mathfrak{C}) \mid \langle\underline{\sigma}\rangle = G\}, \qquad \Sigma(\mathfrak{C}^*) := \{\underline{\sigma} \in \bar{\Sigma}(\mathfrak{C}^*) \mid \langle\underline{\sigma}\rangle = G\}.$$

Durch die komponentenweise Operation von Inn(G) auf $\Sigma(\mathfrak{C})$ bzw. $\Sigma(\mathfrak{C}^*)$ erhält man die Bahnenräume

$$\Sigma^i(\mathfrak{C}) := \Sigma(\mathfrak{C})/\mathrm{Inn}(G), \qquad \Sigma^i(\mathfrak{C}^*) := \Sigma(\mathfrak{C}^*)/\mathrm{Inn}(G),$$

deren Elementanzahlen

$$\ell^i(\mathfrak{C}) := |\Sigma^i(\mathfrak{C})|, \qquad \ell^i(\mathfrak{C}^*) := |\Sigma^i(\mathfrak{C}^*)|$$

Erzeugendensystemklassenzahlen von G *in* $\mathfrak{C}$ bzw. *in* $\mathfrak{C}^*$ sind. Dabei ist $\ell^i(\mathfrak{C})$ ein Teiler von $\ell^i(\mathfrak{C}^*)$, es gibt also eine natürliche Zahl $e(\mathfrak{C})$, die bei Matzat [1985a] der *Einheitswurzelindex von* $\mathfrak{C}$ genannt wurde, mit

$$\ell^i(\mathfrak{C}^*) = \ell^i(\mathfrak{C})\ e(\mathfrak{C}).$$

(3.4) Mit den in (3.3) eingeführten Bezeichnungen kann nun das 1. Rationalitätskriterium formuliert werden (Matzat [1985a], Satz 5.4, bzw. Matzat [1985b], Satz 1):

Satz 4 (Matzat [1985a]). *Es seien* G *eine endliche Gruppe, in der das Zentrum* Z(G) *ein Komplement besitzt, und* $\mathfrak{C}$ *eine Klassenstruktur von* G *mit* $\ell^i(\mathfrak{C}) \neq 0$. *Dann gibt es einen Körper* k *mit einem über* $\mathbb{Q}$ *abelschen Teilkörper* k^e *und*

$$[k : k^e] \leqslant \ell^i(\mathfrak{C}), \qquad [k^e : \mathbb{Q}] \leqslant e(\mathfrak{C}),$$

über dem eine reguläre Galoiserweiterung N/k(t) *existiert mit einer zu* G *isomorphen Galoisgruppe und mit der Verzweigungsstruktur* $\mathfrak{C}^*$ (*von* $\bar{\mathbb{Q}}N/\bar{\mathbb{Q}}(t)$).

Dabei besitzt $Z(G)$ unter anderem dann ein Komplement in G, wenn $Z(G) = I$ ist wie bei den nicht abelschen einfachen Gruppen oder wenn G eine abelsche Gruppe ist. Zwei Sonderfälle dieses Satzes seien als Folgerung hervorgehoben:

Folgerung 3: *Unter den Voraussetzungen zu* Satz 4 *gelten:*

(a) *Besitzt* G *eine Verzweigungsstruktur* $\mathfrak{C}^*$ *mit der Erzeugendensystemklassenzahl* $\ell^i(\mathfrak{C}^*) = 1$, *so ist* G *als Galoisgruppe einer regulären Körpererweiterung über* $\mathbb{Q}(t)$ *realisierbar.*

(b) *Besitzt* G *eine Klassenstruktur* $\mathfrak{C}$ *mit der Erzeugendensystemklassenzahl* $\ell^i(\mathfrak{C}) = 1$, *so ist* G *als Galoisgruppe einer regulären Körpererweiterung über* $\mathbb{K}(t)$ *realisierbar.*

Beweise zu Spezialfällen von Satz 4 wurden von mehreren Autoren geführt: Bereits Shih [1974], Th. 3, gab im Prinzip einen Beweis für vollständige Gruppen G mit $\ell^i(\mathfrak{C}^*) = 1$, bei Belyi [1979], Th. 1, steht ein Beweis für $s = 3$ und $\ell^i(\mathfrak{C}) = 1$, der Berichterstatter bewies den Satz 4 allgemein, aber noch ohne Trennung des Produkts $\ell^i(\mathfrak{C})e(\mathfrak{C})$, in seiner Habilitationsschrift 1980 (siehe Matzat [1984], Satz 5.2), und Thompson [1984] führte einen Beweis für nicht abelsche einfache Gruppen G unter den Voraussetzungen $s \leqslant 6$, $\ell^i(\mathfrak{C}) = 1$ und $\Sigma(\mathfrak{C}) = \overline{\Sigma}(\mathfrak{C})$.

(3.5) Wegen der grundlegenden Bedeutung des 1. Rationalitätskriteriums wird nun dessen Beweis unter den zusätzlichen Annahmen, daß $Z(G) = I$, $\ell^i(\mathfrak{C}^*) = 1$ und die Permutationsdarstellung von Δ auf $\overline{\mathbb{S}}$ trivial sind, auf das vorläufige Rationalitätskriterium zurückgeführt: Dazu seien $\mathfrak{C}^* = (C_1, \ldots, C_s)^*$ eine Klassenstruktur von G mit $\ell^i(\mathfrak{C}^*) = 1$ und $[\underline{\sigma}]$ die einzige Erzeugendensystemklasse in $\Sigma^i(\mathfrak{C}^*)$. Weiter seien $\overline{\mathbb{S}} = \{\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_s\} \subseteq \mathbb{P}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}})$ mit über $\mathbb{Q}(t)$ definierten $\bar{\mathfrak{p}}_j$, $\overline{M}$ der maximale außerhalb $\overline{\mathbb{S}}$ unverzweigte Erweiterungskörper von $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ mit $\mathrm{Gal}(\overline{M}/\overline{\mathbb{Q}}(t)) = \Pi$, $\Psi = \mathrm{Kern}(\underline{\sigma}) \trianglelefteq \Pi$ und $\overline{N} = \overline{M}^{\Psi}$. Dann ist $\overline{N}/\overline{\mathbb{Q}}(t)$ galoissch mit $\mathrm{Gal}(\overline{N}/\overline{\mathbb{Q}}(t)) = G$ und mit der Verzweigungsstruktur $\mathfrak{C}^*$. Für ein Element δ aus einem Komplement Δ von Π in $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{M}/\mathbb{Q}(t))$ ist $\Psi^{\delta} = \mathrm{Kern}(\tilde{\underline{\sigma}}) = \mathrm{Kern}(\underline{\sigma}) = \Psi$, da nach dem Satz 3 wegen $\delta(j) = j$ für $j = 1, \ldots, s$ auch $[\tilde{\underline{\sigma}}] \in \Sigma^i(\mathfrak{C}^*)$ ist. Also sind $\Psi \trianglelefteq \Gamma$ und $\overline{N}/\mathbb{Q}(t)$ galoissch. Nach Teil (a) des vorläufigen Rationalitätskriteriums existiert eine reguläre Körpererweiterung $\tilde{N}/\mathbb{Q}(t)$ mit $\overline{\mathbb{Q}}\tilde{N} = \overline{N}$. Die Galoisgruppe $\overline{\Gamma}$ von $\overline{N}/\mathbb{Q}(t)$ ist ein semidirektes Produkt von G mit $\tilde{\Delta} = \mathrm{Gal}(\overline{N}/\tilde{N})$. Da für $\tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$ auch $[\underline{\sigma}^{\tilde{\delta}}] = [\underline{\sigma}]$ gilt, operiert $\tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$ als innerer Automorphismus auf G. Auf Grund von $Z(G) = I$ ist $\overline{\Gamma}$ das direkte Produkt von G mit dem Zentralisator C von G in $\overline{\Gamma}$: $\overline{\Gamma} = G \times C$. Damit folgt jetzt die Behauptung aus dem Teil (b) des vorläufigen Rationalitätskriteriums mit $N = \overline{N}^C$.

(3.6) Das 1. Rationalitätskriterium läßt sich unmittelbar auf die symmetrischen Gruppen S_n anwenden: Für die Klassenstruktur $\mathfrak{C} = (C_2, C_{n-1}, C_n) = \mathfrak{C}^*$, deren Komponenten die Konjugiertenklassen der Transpositionen C_2, der $(n-1)$-Zyklen C_{n-1} und der n-Zyklen C_n sind, gilt $\ell^i(\mathfrak{C}^*) = 1$, wie mit sukzessiv vereinfachten Beweisen bei Shih [1974], App., Prop. 3, Fried [1977], Ex. 4, und Matzat [1984], Lemma 6.1, festgestellt wurde. Nach dem Satz 4 existiert also eine reguläre Galoiserweiterung $N/\mathbb{Q}(t)$ mit der Galoisgruppe S_n und mit der Verzweigungsstruktur $\mathfrak{C}^*$. Dabei ist der Fixkörper L der alternierenden Gruppe A_n ein rationaler Funktionenkörper über $\mathbb{Q}$. Hieraus ergibt sich ein neuer Beweis für das Hilbertsche Resultat in (1.6):

Resultat 1 (Hilbert [1892]). *Die symmetrischen Gruppen* S_n *und die alternierenden Gruppen* A_n *sind als Galoisgruppen regulärer Körpererweiterungen über* $\mathbb{Q}(t)$ *realisierbar.*

(3.7) Für die zyklischen Gruppen $Z_n = \langle\sigma\rangle$ der Ordnung n ist $\mathfrak{C} = (C, C^{-1})$ mit $C = [\sigma]$ eine zweigliedrige Klassenstruktur mit $\ell^i(\mathfrak{C}) = 1$ und $\ell(\mathfrak{C}) = \varphi(n)$ (Eulersche φ-Funktion). Damit gibt es nach dem 1. Rationalitätskriterium eine reguläre Galoiserweiterung mit der Gruppe Z_n und der Verzweigungsstruktur $\mathfrak{C}^*$ über $\mathbb{K}_n(t)$ (siehe Matzat [1984], Beispiel 4.6).
Galoisrealisierungen von Z_n für $n \geqslant 3$ über $\mathbb{Q}(t)$ erhält man mit der $\varphi(n)$-gliedrigen Klassenstruktur $\tilde{\mathfrak{C}} = (C^\nu \mid \nu \in Z_n^\times)$, deren Komponenten aus den primitiven ν-ten Potenzen von C bestehen. Wählt man hierzu z. B. $\mathbb{S} = \{\mathfrak{p}\}$, wobei $\mathfrak{p}$ durch das n-te Kreisteilungspolynom gegeben ist, dann permutiert $\delta \in \Delta$ die Fortsetzungen $\bar{\mathfrak{p}}_j \in \bar{\mathbb{S}}$ von $\mathfrak{p}$ bei geeigneter Numerierung umgekehrt wie die primitiven Potenzen der Klassenstruktur $\tilde{\mathfrak{C}}$, d. h. es ist $\sigma_{\delta(j)} = \sigma_j^{c(\delta)^{-1}}$. Nach dem Satz 3 ist dann das Erzeugendensystem $\underline{\sigma} \in \Sigma(\tilde{\mathfrak{C}})$ invariant unter Δ, und aus dem Beweis zu Satz 4 folgt, daß es eine reguläre Galoiserweiterung $N/\mathbb{Q}(t)$ mit der Gruppe Z_n und mit der Verzweigungsstruktur $\tilde{\mathfrak{C}}^*$ gibt (Matzat [1986b]). Ganz entsprechend kann man bei allgemeinen abelschen endlichen Gruppen vorgehen und bekommt damit das von Saltman [1982], Th. 3.12(c), auf andere Weise bewiesene Resultat (siehe auch Thompson [1986] und Coombes – Harbater [1985], Ex. 3.1 mit Ex. 3.2, für weitere Beweisalternativen):

Resultat 2 (Saltman [1982]). *Die abelschen endlichen Gruppen sind als Galoisgruppen regulärer Körpererweiterungen über* $\mathbb{Q}(t)$ *realisierbar.*

Für zyklische Gruppen wurde obiges Resultat bereits vorher von Lamprecht [1961], [1962a], [1962b] und Frey – Geyer [1972], Satz 7, bewiesen.

§ 4 Das 2. Rationalitätskriterium

(4.1) Aus dem Beweis zum 1. Rationalitätskriterium folgt, daß man die in $N/k(t)$ verzweigten $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k(t)/k)$ vom Grad 1 wählen kann, d. h. die $\mathfrak{p} \in \mathbb{S}$ entsprechen Polynomen vom Grad 1 einschließlich eventuell $1/t$. Dies ist sicher eine gravierende Einschränkung, wie schon das Beispiel in (3.7) zeigt. Gibt es ein $\mathfrak{p} \in \mathbb{S}$ von höherem Grad, so besitzt die Verzweigungsstruktur von $\bar{\mathbb{Q}}N/\bar{\mathbb{Q}}(t)$ Symmetrien: Sind $\mathfrak{C} = (C_1, \ldots, C_s)$ eine Klassenstruktur einer endlichen Gruppe G und $\mathfrak{C}^*$ die von $\mathfrak{C}$ aufgespannte Verzweigungsstruktur, so heißen

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}) := \{\omega \in S_s \mid \omega\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\}$$

mit $\omega\mathfrak{C} := (C_{\omega(1)}, \ldots, C_{\omega(s)})$ die *Symmetriegruppe von* $\mathfrak{C}$

und $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}^*) := \{\omega \in S_s \mid \omega\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}^*\}$ die *Symmetriegruppe von* $\mathfrak{C}^*$.

Nun betrachtet man die Gruppe derjenigen Automorphismen von $\overline{\mathbb{Q}}(t)/\mathbb{Q}$, die die Menge der Fortsetzungen $\bar{\mathbb{S}} = \{\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_s\} \subseteq \mathbb{P}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}})$ von $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{P}(k(t)/k)$ wie Elemente von $V \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}^*)$ permutieren, diese sei $\mathrm{Aut}_{V\bar{\mathbb{S}}}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\mathbb{Q})$. Von dieser ist via Δ nur die Untergruppe $\mathrm{Aut}_{V\bar{\mathbb{S}}}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\mathbb{Q}(t))$, also eine *Gruppe von $V\bar{\mathbb{S}}$-zulässigen algebraischen Automorphismen von* $\overline{\mathbb{Q}}(t)/\mathbb{Q}$, in das 1. Rationalitätskriterium eingegangen. Daneben enthält $\mathrm{Aut}_{V\bar{\mathbb{S}}}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\mathbb{Q})$ die Gruppe

$$H_{V\bar{\mathbb{S}}} := \mathrm{Aut}_{V\bar{\mathbb{S}}}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}})$$

als Normalteiler, diese Gruppe heißt die *Gruppe der $V\bar{\mathbb{S}}$-zulässigen topologischen Automorphismen von* $\overline{\mathbb{Q}}(t)/\mathbb{Q}$; und $\mathrm{Aut}_{V\bar{\mathbb{S}}}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\mathbb{Q}(t))$ ist ein Komplement von $H_{V\bar{\mathbb{S}}}$ in $\mathrm{Aut}_{V\bar{\mathbb{S}}}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\mathbb{Q})$.

(4.2) Im Gegensatz zu den algebraischen Automorphismen (von den abelschen Gruppen einmal abgesehen) kann man die Bahnen der $V\bar{\mathbb{S}}$-zulässigen topologischen Automorphismen explizit bestimmen.

Satz 5 (Matzat [1986a]). *Es seien* G *eine endliche Gruppe,* $\mathfrak{C} = (C_1, \ldots, C_s)$ *eine Klassenstruktur von* G, $\mathfrak{C}^*$ *die von* $\mathfrak{C}$ *aufgespannte Verzweigungsstruktur und* $\bar{\mathbb{S}} = \{\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_s\} \subseteq \mathbb{P}(\overline{\mathbb{Q}}(t)/\overline{\mathbb{Q}})$. *Dann gelten:*

(a) *Für* $V \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ *bzw.* $V \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}^*)$ *operiert die Gruppe der $V\bar{\mathbb{S}}$-zulässigen topologischen Automorphismen* $H_{V\bar{\mathbb{S}}}$ *von* $\overline{\mathbb{Q}}(t)/\mathbb{Q}$ *in berechenbarer Weise auf* $\Sigma^i(\mathfrak{C})$ *bzw.* $\Sigma^i(\mathfrak{C}^*)$.

(b) *Im Fall* $s = 3$ *gilt* $H_{V\bar{\mathbb{S}}} \cong V \leqslant S_3$ *für* $V \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}^*)$, *und die Operation von* V *ergibt sich aus der Operation der beiden erzeugenden Elemente* $\rho = (123)$ *und* $\tau = (12)$ *der* S_3 *auf* $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \in \Sigma_3^i(G)$:

$$\rho([\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]) = [\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1],$$

$$\tau([\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]) = [\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2\sigma_3\sigma_2^{-1}].$$

Dieser Satz ist bei Matzat [1986a], Satz 4.2 mit Satz 4.4, bewiesen. Weiter enthält der Satz 4.5 derselben Arbeit die expliziten Formeln für $s = 4$. Das Teilresultat für $s = 3$ steht bereits bei Matzat [1984], Zusatz 3.5 (siehe weiter Matzat [1985a], Satz 6.2 mit Zusatz 6.3).

(4.3) Der Satz 5 beruht auf dem topologischen Ursprung der Theorie: Man besinnt sich darauf zurück, daß die Erzeugenden $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ von G in § 2 über $\Pi = \mathrm{Gal}(\bar{M}/\overline{\mathbb{Q}}(t)) \cong \mathrm{Gal}(\hat{M}/\mathbb{C}(t))$ als Bilder der erzeugenden Homotopieklassen $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s$ von $\pi_1(K^\cdot)$ gewonnen wurden, wobei die a_j einfache Schleifen von $P_0 \in K^\cdot$ um $P_j \in S$ bedeuten. Setzt man nun $\eta \in H_{V\bar{\mathbb{S}}}$ fort zu $\hat{\eta} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(t)/\mathbb{C})$, so bildet die Punktmenge

$$\check{\eta}(a_j) := (\hat{\eta}^*)^{-1}(a_j)$$

mit der durch $\hat{\eta}$ auf K induzierten Abbildung $\hat{\eta}^*$ einen geschlossenen Weg auf $K^\cdot$, dessen Homotopieklasse formelmäßig in den Erzeugenden $\bar{a}_j$ von $\pi_1(K^\cdot)$ ausgedrückt werden kann. Das Ergebnis läßt sich dann in G zurückübersetzen und liefert die explizite Beschreibung der Operation von η auf $\Sigma_s^i(G)$.

Da $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ auf $K = \hat{\mathbb{C}}$ dreifach transitiv operiert, ist im Fall $s = 3$ bei gegebener Permutation $\omega \in V$ das Resultat von der Wahl von $\mathbb{S}$ bzw. S unabhängig. Für $\rho = (123)$ kann also $S = \{1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$ gewählt werden, damit wird bei Identifikation von S_3 mit $H_{S_3\mathbb{S}}$

$$\check{\rho} : K \to K, \qquad P \mapsto e^{\frac{2\pi i}{3}} P.$$

Wählt man weiter $P_0 = 0$, so werden die Homotopieklassen $\bar{a}_j$ durch $\check{\rho}$ zyklisch vertauscht, d. h. es gilt

$$\check{\rho}(a_1) \simeq a_2, \qquad \check{\rho}(a_2) \simeq a_3, \qquad \check{\rho}(a_3) \simeq a_1,$$

wobei das Zeichen „$\simeq$“ homotop bedeutet. Dies wird durch Bild 1 veranschaulicht.

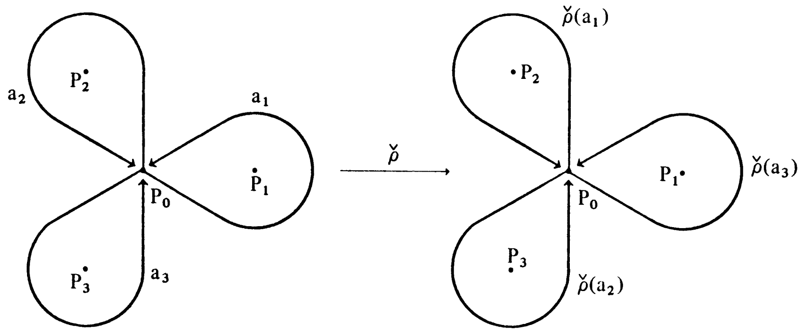


Bild 1

Für $\tau = (12) \in V$ wählt man zweckmäßig $S = \{-1, 1, \infty\}$, dann wird

$$\check{\tau} : K \to K, \qquad P \mapsto -P,$$

und es ist

$$\check{\tau}(a_1) \simeq a_2, \qquad \check{\tau}(a_2) \simeq a_1, \qquad \check{\tau}(a_3) \simeq a_2 * a_3 * a_2^{-1},$$

wie man aus Bild 2 ablesen kann.

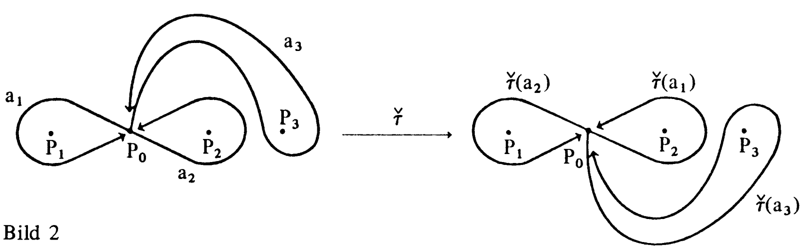


Bild 2

(4.4) Ab jetzt seien $V^* \leqslant \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$ und $V := V^* \cap \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Dann wird $\Sigma^i(\mathbb{C})$ bzw. $\Sigma^i(\mathbb{C}^*)$ durch die Operation von $H_{V\mathbb{S}}$ bzw. $H_{V^*\mathbb{S}}$ in Bahnen zerlegt, deren Anzahlen

$$\tilde{\ell}^i(\mathbb{C}) := |\Sigma^i(\mathbb{C})/H_{V\mathbb{S}}|, \qquad \tilde{\ell}^i(\mathbb{C}^*) := |\Sigma^i(\mathbb{C}^*)/H_{V^*\mathbb{S}}|$$

von V^* und für $s \geqslant 4$ im allgemeinen noch von der Wahl der Menge $\bar{\mathbb{S}}$ abhängen. $\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C})$ bzw. $\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C}^*)$ heißen *Klassenzahlen symmetrisierter Erzeugendensystemklassen von* G *in* $\mathfrak{C}$ bzw. *in* $\mathfrak{C}^*$. Analog zu (3.3) ist wieder $\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C})$ ein Teiler von $\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C}^*)$, es gibt also wieder einen Einheitswurzelindex $\tilde{e}(\mathfrak{C})$ mit

$$\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C}^*) = \tilde{\ell}^i(\mathfrak{C})\tilde{e}(\mathfrak{C}).$$

Dabei ist $\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C}) \leqslant \ell^i(\mathfrak{C})$, und $\tilde{e}(\mathfrak{C})$ ist ein Teiler von $e(\mathfrak{C})$.

(4.5) Sind $\bar{\mathbb{S}} = \{\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_s\} \subseteq \mathbb{P}(\bar{\mathbb{Q}}(t)/\bar{\mathbb{Q}})$ und $V \leqslant S_s$, so heißt ein Teilkörper $K \leqslant \bar{\mathbb{Q}}(t)$ mit $\bar{\mathbb{Q}}K = \bar{\mathbb{Q}}(t)$ ein *Definitionskörper von* $V\bar{\mathbb{S}}$, wenn $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}(t)/K)$ die Menge $\bar{\mathbb{S}}$ permutiert und das Bild der hierdurch definierten Permutationsdarstellung von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}(t)/K)$ eine Untergruppe von V ist. Mit den nun zur Verfügung stehenden Begriffen und Bezeichnungen kann das 2. Rationalitätskriterium formuliert werden:

Satz 6 (Matzat [1985a]). *Es seien* G *eine endliche Gruppe, in der das Zentrum* Z(G) *ein Komplement besitzt*, $\mathfrak{C} = (C_1, \ldots, C_s)$ *eine Klassenstruktur von* G *mit* $s \geqslant 3$ *und* $\Sigma^i(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$. *Weiter seien* $V^* \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}^*)$ *eine Permutationsgruppe mit einem Transitivitätsgebiet ungerader Länge*, $\bar{\mathbb{S}} = \{\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_s\} \subseteq \mathbb{P}(\bar{\mathbb{Q}}(t)/\bar{\mathbb{Q}})$ *und* $\mathbb{Q}(t)$ *ein Definitionskörper von* $V^*\bar{\mathbb{S}}$. *Dann gibt es einen Körper* $\tilde{k}$ *mit einem über* $\mathbb{Q}$ *abelschen Teilkörper* $\tilde{k}^e$ *und*

$$[\tilde{k} : \tilde{k}^e] \leqslant \tilde{\ell}^i(\mathfrak{C}), \qquad [\tilde{k}^e : \mathbb{Q}] \leqslant \tilde{e}(\mathfrak{C}),$$

über dem eine reguläre Galoiserweiterung $\tilde{N}/\tilde{k}(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in \bar{\mathbb{Q}}(t)$, *existiert mit einer zu* G *isomorphen Galoisgruppe und mit der Verzweigungsstruktur* $\mathfrak{C}^*$.

Die Voraussetzung über V^* ist für ungerade s, insbesondere für $s = 3$, stets erfüllt. Der Fall $V^* = I$ entspricht dem 1. Rationalitätskriterium. Wie in (3.4) seien zwei Spezialfälle von Satz 6 als Folgerung hervorgehoben:

Folgerung 4. *Unter den Voraussetzungen zu* Satz 6 *gelten:*

(a) *Besitzt* G *eine Verzweigungsstruktur* $\mathfrak{C}^*$ *mit* $\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C}^*) = 1$, *so ist* G *als Galoisgruppe einer regulären Körpererweiterung über* $\mathbb{Q}(t)$ *realisierbar.*

(b) *Besitzt* G *eine Klassenstruktur* $\mathfrak{C}$ *mit* $\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C}) = 1$, *so ist* G *als Galoisgruppe einer regulären Körpererweiterung über* $\mathbb{K}(t)$ *realisierbar.*

Der Satz 6 ist bei Matzat [1985a], Satz 6.5 mit Zusatz 6.6, bewiesen, ohne Trennung von $\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C})\tilde{e}(\mathfrak{C})$ bereits bei Matzat [1984], Satz 5.4 mit Zusatz 5.5 (siehe für $s = 3$ auch Matzat [1985b], Satz 2 mit Folgerung 2). Eine Verfeinerung des 2. Rationalitätskriteriums erhält man, wenn man die Erzeugendensystemklassen von G in $\mathfrak{C}$ mit verschiedenen Fixgruppentypen in $H_{V^*\bar{\mathbb{S}}}$ getrennt abzählt. Das Resultat ist in Matzat [1986a], Folgerung 7.6, aufgeführt.

(4.6) Unter Verwendung des 2. Rationalitätskriteriums konnte unter anderem gezeigt werden, daß alle primitiven nicht auflösbaren Permutationsgruppen vom Grad $d \leqslant 15$ als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}(t)$ realisierbar sind (siehe Matzat [1984], bereits angekündigt bei Matzat [1979], und Matzat – Zeh-Marschke [1986]).

§ 5 Realisierung einfacher endlicher Gruppen als Galoisgruppen über $\mathbb{K}$ und $\mathbb{Q}$

(5.1) Seit kurzem sind die einfachen endlichen Gruppen klassifiziert, diese sind die zyklischen Gruppen Z_p von Primzahlordnung, die alternierenden Gruppen A_n für $n \geqslant 5$, die einfachen Gruppen vom Lie-Typ und die 26 sporadischen einfachen Gruppen (siehe z. B. den einführenden Bericht von Gorenstein [1982]). So kann man hoffen, das Umkehrproblem der Galoistheorie über $\mathbb{K}$ und vielleicht auch über $\mathbb{Q}$ zu lösen, indem man zunächst die einfachen endlichen Gruppen als Galoisgruppen über dem Körper $\mathbb{K}$ bzw. $\mathbb{Q}$ realisiert und anschließend aus diesen Bausteinen Galoisrealisierungen der nicht einfachen endlichen Gruppen zusammensetzt. Bei der Zusammenstellung bekannter Galoisrealisierungen einfacher Gruppen über $\mathbb{K}(t)$ bzw. $\mathbb{Q}(t)$, diese liefern nach dem Hilbertschen Irreduzibilitätssatz jeweils unendlich viele Galoisrealisierungen über $\mathbb{K}$ bzw. $\mathbb{Q}$, kann hier auf die Gruppen Z_p und A_n verzichtet werden, da diese nach (3.7) bzw. (3.6) über jedem rationalen Funktionenkörper der Charakteristik 0 als Galoisgruppen realisierbar sind.

(5.2) Die Berechnung von Erzeugendensystemklassenzahlen für einfache Gruppen ist ein nichttriviales kombinatorisches Problem, das sich für Gruppen G kleiner Ordnung, d. h. zur Zeit etwa für $|G| < 10^6$, noch mit dem Computer lösen läßt. Bei größeren Gruppen ist man auf zusätzliche Informationen angewiesen. Besitzt zum Beispiel G eine übersichtliche Matrizendarstellung wie im Fall der klassischen einfachen Gruppen, so wird die Bestimmung von Erzeugendensystemklassenzahlen durch das nachstehende Kriterium von Belyi [1979], Th. 2, erheblich vereinfacht:

Zusatz 1 (Belyi [1979]). *Besitzt eine endliche Matrizengruppe* $G \leqslant GL_n(k) =: D$ *über einem Körper* k *ein Erzeugendensystem aus* 2 *Elementen* σ_1, σ_2, *von denen eines einen* $(n-1)$*-dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert* 1 *hat, und wird der Normalisator von* G *in* D *durch* G *und* $Z(D)$ *erzeugt, so ist* $\ell^i(\mathfrak{C}) = 1$ *für die Klassenstruktur* $\mathfrak{C} = ([\sigma_1], [\sigma_2], [\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}])$ *von* G.

(5.3) Mit Hilfe dieses Kriteriums konnte Belyi [1979], [1983] (siehe auch Walter [1984]) zeigen:

Resultat 3 (Belyi [1983], Walter [1984]). *Alle klassischen einfachen Gruppen sind als Galoisgruppen regulärer Körpererweiterungen über* $\mathbb{K}(t)$ *realisierbar, das sind in Lie-Notation die einfachen der Gruppen*

$$A_n(q),\quad {}^2A_n(q),\quad B_n(q),\quad C_n(q),\quad D_n(q),\quad {}^2D_n(q)$$

bzw. in klassischer Bezeichnungsweise die einfachen der Gruppen

$$PSL_{n+1}(\mathbb{F}_q),\quad PSU_{n+1}(\mathbb{F}_{q^2}),\quad P\Omega_{2n+1}(\mathbb{F}_q),$$
$$PSp_{2n}(\mathbb{F}_q),\quad P\Omega_{2n}^{+}(\mathbb{F}_q),\quad P\Omega_{2n}^{-}(\mathbb{F}_q).$$

Über $\mathbb{Q}(t)$ sind bisher weit weniger Galoisrealisierungen bekannt: Sieht man von den in (1.7) aufgeführten nicht mit den beiden Rationalitätskriterien gewonnenen Ergebnissen von Shih und Ribet ab, so ergeben Rechnungen bei Matzat [1984], Satz 7.3 und Satz 10.4, Malle – Matzat [1985], Satz 2 und Schlußbemerkung, Thompson [1984b] und Thompson [1984d] das vorläufige

Resultat 3' (Shih – Matzat – Thompson – Malle – Feit 1974–1985). *Die folgenden klassischen einfachen Gruppen sind als Galoisgruppen regulärer Körpererweiterungen über* $\mathbb{Q}(t)$ *realisierbar:*

$$\begin{array}{lll} PSL_2(\mathbb{F}_p) & \textit{für} & p \not\equiv \pm 1 \bmod (24), \\ PSL_3(\mathbb{F}_p) & \textit{für} & p \not\equiv -1 \bmod (24), \\ P\Omega^-_{\ell-1}(\mathbb{F}_2) & \textit{für} & \textit{Primzahlen } \ell \geqslant 11 \quad \textit{mit} \quad \textit{Primitivwurzel } 2. \end{array}$$

Weitere Galoisrealisierungen klassischer Gruppen über $\mathbb{Q}(t)$ findet man noch bei Matzat [1984], Thompson [1984d] und Feit [1984].

(5.4) Für die sporadischen einfachen Gruppen existieren im allgemeinen keine gut handhabbaren Matrizendarstellungen, dafür kennt man aber deren Charaktertafeln. So ist ein weiterer Zusatz zu den Rationalitätskriterien wünschenswert, der die Berechnung von Erzeugendensystemklassenzahlen aus Bestimmungsstücken möglich macht, die aus der Charaktertafel ablesbar sind. Ein solcher wurde erstmals bei Matzat [1983], Bem. 1, angegeben (siehe auch Thompson [1984a] und Matzat [1985b]). Dazu führt man für eine Klassenstruktur $\mathfrak{C} = (C_1, \ldots, C_s)$ von G die *normalisierte Strukturkonstante*

$$n(\mathfrak{C}) := |Z(G)| \sum_{i=1}^{h} \frac{|G|^{s-2}}{\chi_i(\iota)^{s-2}} \prod_{j=1}^{s} \frac{\chi_i(\sigma_j)}{|C_G(\sigma_j)|},$$

ein, hierbei wird über die h irreduziblen Charaktere χ_i von G summiert, und $C_G(\sigma_j)$ ist der Zentralisator von $\sigma_j \in C_j$ in G.

Zusatz 2 (Matzat [1983]). *Für die Klassenstruktur* $\mathfrak{C}$ *einer endlichen Gruppe* G *ist* $\ell^i(\mathfrak{C}) \leqslant n(\mathfrak{C})$. *Dabei gilt genau dann* $\ell^i(\mathfrak{C}) = n(\mathfrak{C})$, *wenn* $\bar{\Sigma}^i(\mathfrak{C}) = \Sigma^i(\mathfrak{C})$ *ist.*

(5.5) Mit diesem Zusatz 2 konnte gezeigt werden:

Resultat 4 (Matzat – Thompson – Hoyden-Siedersleben – Hunt – Pahlings 1979–1988). *Alle sporadischen einfachen Gruppen sind als Galoisgruppen regulärer Körpererweiterungen über* $\mathbb{K}(t)$ *realisierbar.*

Schreibt man, wenn eine Galoisrealisierung von G über k(t) existiert, kurz G/k, so wurden bisher genauer die folgenden Ergebnisse erzielt: Mathieugruppen $M_{11}/\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ (Matzat [1979]), $M_{11}/\mathbb{Q}$ (Matzat – Zeh-Marschke [1986]), $M_{12}/\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ (Matzat [1983]), $M_{12}/\mathbb{Q}$, $M_{22}/\mathbb{Q}$ (Matzat [1985a], Hunt [1986]), $M_{23}/\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$, $M_{24}/\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$, Jankogruppen $J_1/\mathbb{Q}$ (Hoyden-Siedersleben [1985]), $J_2/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (Matzat [1983]), $J_2/\mathbb{Q}$ (Hoyden-Siedersleben [1985], Hunt [1986]), $J_3/\mathbb{Q}(\cos(2\pi i/9))$ (Hoyden-Siedersleben – Matzat [1986]), $J_4/\mathbb{Q}$ (Pahlings [1988]), Gruppe von Higman – Sims HS/$\mathbb{Q}$, Suzukigruppe Sz/$\mathbb{Q}$ (Hunt [1986]), McLaughlingruppe Mc/$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$, Rudvalisgruppe Ru/$\mathbb{Q}(\sqrt{29})$, Heldgruppe He/$\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ (Hoyden-Siedersleben – Matzat [1986]), He/$\mathbb{Q}$ (Pahlings [1988]), Gruppe von

O'Nan ON/$\mathbb{Q}$, Lyonsgruppe Ly/$\mathbb{K}_{67}^{(3)}$ (Hoyden-Siedersleben – Matzat [1986]), Conwaygruppen $Co_3/\mathbb{Q}$, $Co_2/\mathbb{Q}$, $Co_1/\mathbb{Q}$, Fischergruppen $Fi_{22}/\mathbb{Q}$, $Fi_{23}/\mathbb{Q}$, $Fi_{24}'/\mathbb{Q}$ (Hunt [1986]), Haradagruppe $F_5/\mathbb{Q}$ (Hoyden-Siedersleben – Matzat [1986]), Thompsongruppe $F_3/\mathbb{Q}$, Babymonster $F_2/\mathbb{Q}$ (Hunt [1986]) und Fischer-Griess-Gruppe (Monster) $F_1/\mathbb{Q}$ (Thompson [1984a]). (Dabei ist $\mathbb{K}_{67}^{(3)}$ der Körper vom Grad 3 über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{K}_{67}$.) Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich weiter:

Resultat 4′ (Thompson – Matzat – Hoyden-Siedersleben – Hunt – Pahlings 1984–1988). *Die folgenden* 20 *sporadischen einfachen Gruppen sind als Galoisgruppen regulärer Körpererweiterungen über* $\mathbb{Q}(t)$ *realisierbar:*

$$M_{11},\quad M_{12},\quad M_{22},\quad J_1,\quad J_2,\quad J_4,\quad HS,\quad Sz,\quad He,\quad ON,$$

$$Co_3,\quad Co_2,\quad Co_1,\quad Fi_{22},\quad Fi_{23},\quad Fi_{24}',\quad F_5,\quad F_3,\quad F_2,\quad F_1.$$

(5.6) Die Untersuchung der nichtklassischen Gruppen vom Lie-Typ ist noch nicht so weit gediehen. Bisher hat man das folgende Zwischenresultat:

Resultat 5 (Malle [1986]). *Die folgenden exzeptionellen einfachen Gruppen vom Lie-Typ sind als Galoisgruppen regulärer Körpererweiterungen über* $\mathbb{K}(t)$ *realisierbar:*

$$G_2(q),\quad {}^2G_2(q),\quad {}^3D_4(q)\quad \textit{jeweils für alle}\quad q,$$

$$F_4(q)\quad \textit{für}\quad p \geqslant 3,\qquad E_7(q)\quad \textit{für}\quad p \geqslant 5,\qquad E_8(q)\quad \textit{für}\quad p \geqslant 7$$

sowie bei genügend großen p *und* q *auch*

$$E_6(q)\quad \textit{für}\quad q \equiv -1 \bmod (3),\qquad {}^2E_6(q)\quad \textit{für}\quad q \equiv 1 \bmod (3).$$

Für die beiden übrigen Serien exzeptioneller einfacher Gruppen vom Lie-Typ, das sind die Suzukigruppen ${}^2B_2(q)$ und die Reegruppen ${}^2F_4(q)$ in Charakteristik 2 liegen bis auf ${}^2B_2(8)$ und die Titsgruppe ${}^2F_4(2)'$ (siehe Malle [1986] und Matzat [1986a]) noch keine positiven Ergebnisse vor.
Bereits vorher bewiesen Thompson unter Verwendung von Erzeugenden und Relationen (siehe Thompson [1984c] für $p = 5$) und Feit – Fong [1984] mit Hilfe der Charaktertafeln, daß die Gruppen $G_2(p)$ für $p \geqslant 5$ als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}(t)$ vorkommen. Dies ergibt mit einem weiteren Ergebnis von Malle [1986] das

Resultat 5′ (Thompson [1984c], Feit – Fong [1984], Malle [1986]). *Die Gruppen*

$$G_2(p)\quad \textit{für alle Primzahlen}\ p \geqslant 5\ \textit{und}$$

$$E_8(p)\quad \textit{für}\quad p \geqslant 131\quad \textit{und}\quad p \not\equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 15 \bmod (31)$$

sind als Galoisgruppen regulärer Körpererweiterungen über $\mathbb{Q}(t)$ *realisierbar.*

§ 6 Realisierung zusammengesetzter endlicher Gruppen als Galoisgruppen

(6.1) Um das in (5.1) gesetzte Ziel zu erreichen, Galoisrealisierungen nicht einfacher endlicher Gruppen aus solchen einfacher Gruppen zusammenzubauen, ist die Auswahl besonders geeigneter Galoisrealisierungen vorteilhaft: Es seien k ein

Körper und G eine endliche Gruppe. G besitzt eine GAR-*Realisierung über* $K = k(t_1, \ldots, t_r)$, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(G) Es gibt eine reguläre Körpererweiterung N/K mit $\mathrm{Gal}(N/K) \cong G$ (*Galoisrealisierung*).

(A) Aut(N/k) enthält eine zu Aut(G) isomorphe Untergruppe A, und K ist der Fixkörper von Inn(G) bei Identifikation von Aut(G) mit A (*Automorphismenbedingung*).

(R) Ist K′ ein regulärer Erweiterungskörper von N^A mit $\bar{k}K' = \bar{k}(t_1, \ldots, t_r)$ für eine algebraisch abgeschlossene Hülle $\bar{k}$ von k, so ist K′/k ein rationaler Funktionenkörper (*Rationalitätsbedingung*).

Offenbar werden durch die Automorphismenbedingung die Gruppen mit nichttrivialem Zentrum ausgeschlossen. Weiter erfüllt eine Galoisrealisierung von G über K = k(t), die der Automorphismenbedingung genügt, stets auch die Rationalitätsbedingung, wenn z. B. Out(G) = I ist oder wenn $s \equiv 1 \bmod (2)$ ist (in der bisherigen Bedeutung) oder auch wenn k ein Zwischenkörper von $\mathbb{K}$ und $\bar{\mathbb{Q}}$ ist (siehe Matzat [1985c], Bem. 4 und Bem. 5, basierend auf Serre [1964], Ch. II, Prop. 9)

(6.2) Damit gewinnt man aus den in § 5 aufgeführten Galoisrealisierungen einfacher Gruppen das

Resultat 6 (Matzat [1985c], Malle [1986], Pahlings [1988]). *Die einfachen endlichen Gruppen*

$$A_n, \quad PSL_2(\mathbb{F}_p), \quad P\Omega_{2n+1}(\mathbb{F}_p), \quad PSp_{2n}(\mathbb{F}_p),$$

$$G_2(p) \text{ für } p \geqslant 5, \quad F_4(p) \text{ für } p \geqslant 3, \quad E_8(p) \text{ für } p \geqslant 7$$

sowie alle sporadischen einfachen Gruppen besitzen GAR-*Realisierungen über* $\mathbb{K}(t)$.

Für die alternierenden Gruppen und die von J_4, He und Fi_{22} verschiedenen sporadischen einfachen Gruppen ist der Beweis bei Matzat [1985c], Satz 5 und Satz 6, geführt, für die drei verbliebenen sporadischen Gruppen bei Pahlings [1988]. Das Resultat bezüglich der klassischen einfachen Gruppen bekommt man durch Betrachtung der von Belyi gefundenen Galoisrealisierungen, das Resultat bezüglich der exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ folgt sofort aus dem Resultat 5, da bei den aufgezählten Gruppen die Automorphismenklassengruppe trivial ist (siehe auch Matzat [1985b], Abschn. 3.).

Resultat 6′ (Matzat [1985c], Malle [1986], Pahlings [1988]). *Die einfachen endlichen Gruppen*

$$A_n \text{ für } n \neq 6, \qquad PSL_2(\mathbb{F}_p) \text{ für } p \not\equiv \pm 1 \bmod (24),$$

$$G_2(p) \text{ und } E_8(p) \text{ für die in Resultat } 5' \text{ genannten } p$$

und die 20 *in* Resultat 4′ *aufgezählten sporadischen einfachen Gruppen besitzen* GAR-*Realisierungen über* $\mathbb{Q}(t)$.

GAR-Realisierungen über $\mathbb{Q}(t)$ für die Gruppen A_n, $n \neq 6$, und die von J_4, He und Fi_{22} verschiedenen sporadischen einfachen Gruppen sind bei Matzat [1985c], Satz 5 und Satz 6, angegeben, für J_4, He und Fi_{22} bei Pahlings [1988], für $PSL_2(\mathbb{F}_p)$

mit $p \not\equiv \pm 1 \bmod (24)$ z. B. bei Malle – Matzat [1985], Zusatz 1. Für die Gruppen $G_2(p)$ folgt das Resultat wie oben sofort aus dem Resultat 5' (siehe Matzat [1985b], Abschn. 3).

(6.3) Das wichtigste Resultat für Gruppen mit GAR-Realisierungen über $k(t)$ ist der folgende Einbettungssatz (Matzat [1985c], Satz 2 mit Satz 3):

Satz 7 (Matzat [1985c]). *Es seien* k *ein Hilbertkörper der Charakteristik* 0 *und* G *eine nichttriviale endliche Gruppe, deren Kompositionsfaktoren* GAR-*Realisierungen über* $k(t)$ *besitzen. Dann ist über* k *jedes endliche Einbettungsproblem mit dem Kern* G *lösbar, genauer gibt es zu vorgegebener endlicher Galoiserweiterung* k_0/k *mit der Galoisgruppe* H *und zu vorgegebener Gruppenerweiterung* $E = G \cdot H$ *unendlich viele Körper* $k_\nu \geqslant k$ $(\nu \in \mathbb{N})$ *mit* $\mathrm{Gal}(k_\nu/k) \cong E$.

Dabei ist $E = G \cdot H$ eine Gruppe mit einem zu G isomorphen Normalteiler G_0 und einer zu H isomorphen Faktorgruppe: $E/G_0 \cong H$. Im Spezialfall $H = I$ erhält man aus dem Satz 7 sofort die

Folgerung 5. *Sind* k *ein Hilbertkörper der Charakteristik* 0 *und* G *eine nichttriviale endliche Gruppe, deren Kompositionsfaktoren* GAR-*Realisierungen über* $k(t)$ *besitzen, so ist* G *unendlich oft als Galoisgruppe über* k *realisierbar.*

Im Spezialfall, daß G ein direktes Produkt isomorpher nichtabelscher einfacher endlicher Gruppen G_i mit $\mathrm{Out}(G_i) = I$ ist, dann ist E ein semidirektes Produkt von G mit H, wurde der Satz 7 bereits von Thompson und Fried [1984], Th. 2.2, bewiesen (siehe auch Coombes – Harbater [1985], Th. 3.4, für eine ähnliche Aussage und Sonn [1972] für weitere Resultate über das Einbettungsproblem mit nichtauflösbarem Kern).

(6.4) Um den Begriff einer GAR-Realisierung zu motovieren, wird nun der Beweis zu Satz 7 für den Fall einer einfachen Gruppe G skizziert: Dazu seien $K = k(t)$, N/K eine reguläre Galoiserweiterung mit $\mathrm{Gal}(N/K) \cong G$ nach (G) und $L := N^A$ mit $A \cong \mathrm{Aut}(G)$ nach (A). Bezeichnet man $N_0 := k_0N$ und $L_0 := k_0L$, so ist N_0/L galoissch mit

$$\mathrm{Gal}(N_0/L) = \mathrm{Gal}(N_0/L_0) \times \mathrm{Gal}(N_0/N) \cong \mathrm{Aut}(G) \times H.$$

Nach einem Satz der Gruppentheorie (siehe Suzuki [1982], Ch. II, Th. 7.11) ist E isomorph zu einer Untergruppe U von $\mathrm{Aut}(G) \times H$ mit $U \cap \mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Inn}(G)$ und $p_2(U) = H$ (Projektion auf den zweiten Faktor H). Der Fixkörper K' von U (bei Identifikation von $\mathrm{Gal}(N_0/L)$ mit $\mathrm{Aut}(G) \times H$) ist also ein regulärer Erweiterungskörper von L mit $k_0K' = k_0(t)$. Nach (R) ist K'/k ein rationaler Funktionenkörper. Die Behauptung ergibt sich nun, wenn man den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz auf das Minimalpolynom eines primitiven Elements von N_0/K' anwendet.

(6.5) Der Schönheitsfehler von dem Satz 7 besteht darin, daß zyklische Faktoren ausgeschlossen sind. Diese Lücke wird durch einen Satz von Iwasawa [1953], Th. 3, geschlossen, wenn k hinreichend viele Einheitswurzeln enthält. Hier wird die Formulierung bei Matzat [1986b] wiedergegeben:

Satz 8 (Iwasawa [1953]). *Es seien* k *ein Hilbertkörper mit* $\mathbb{K} \leqslant k \leqslant \overline{\mathbb{Q}}$ *und* G *eine nichttriviale auflösbare endliche Gruppe. Dann ist über* k *jedes endliche Einbettungsproblem mit dem Kern* G *lösbar, genauer gibt es zu vorgegebener endlicher Galoiserweiterung* k_0/k *mit der Galoisgruppe* H *und zu vorgegebener Gruppenerweiterung* $E = G \cdot H$ *unendlich viele Körper* $k_\nu \geqslant k_0$ $(\nu \in \mathbb{N})$ *mit* $\mathrm{Gal}(k_\nu/k) \cong E$.

Aus den beiden Einbettungssätzen ergibt sich als Folgerung (siehe Matzat [1985c], Satz 4):

Folgerung 6. *Sind* k *ein Hilbertkörper mit* $\mathbb{K} \leqslant k \leqslant \overline{\mathbb{Q}}$ *und* G *eine nichttriviale endliche Gruppe, deren Kompositionsfaktoren zyklisch sind oder* GAR-*Realisierungen über* k(t) *besitzen, so ist* G *unendlich oft als Galoisgruppe über* k *realisierbar.*

Wenn man zeigen könnte, daß jedes endliche Einbettungsproblem über $\mathbb{K}$ lösbar ist, Folgerung 6 läßt dies hoffen, so wäre $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{K})$ nach dem Freiheitssatz von Iwasawa [1953], Th. 5, eine freie proendliche Gruppe von abzählbar unendlichem Rang (siehe auch Matzat [1985b], Abschn. 3). Dies würde eine Šafarevič zugeschriebene Vermutung bestätigen (siehe Geyer [1978], § 2, und Belyi [1983], Introd.).

(6.6) Für Zahlkörper k, die nicht genügend viele Einheitswurzeln enthalten, gibt es keine so vollständigen Resultate. Der allgemeinste leicht formulierbare Einbettungssatz geht auf Šafarevič [1958] zurück (siehe auch Išhanov [1976]). Dieser setzt voraus, daß die Gruppenerweiterung $E = G \cdot H$ (vgl. Satz 7) zerfällt, also E ein semidirektes Produkt von G mit H ist:

Satz 9 (Šafarevič [1958]). *Über einem (über* $\mathbb{Q}$ *endlichen) Zahlkörper* k *ist jedes endliche Einbettungsproblem mit einem nilpotenten Kern* G *und einer zerfallenden Gruppenerweiterung* $E = G \rtimes H$ *lösbar.*

Insbesondere ist auch jedes Einbettungsproblem mit einem abelschen Kern und einer zerfallenden Gruppenerweiterung über einem Zahlkörper k lösbar, dieses Resultat wurde im wesentlichen bereits von Scholz [1929] erzielt und von Saltman [1982], Th. 3.12(f), (siehe auch Thompson [1986]) auch für reguläre Körpererweiterungen über rationalen Funktionenkörpern der Charakteristik 0 bewiesen. Aus dem Satz 7 (genauer Matzat [1985c], Satz 1 mit Folgerung) und dem Satz 9 erhält man die

Folgerung 7. *Über einem Zahlkörper* k *ist jede endliche Gruppe* G *als Galoisgruppe realisierbar, die eine Normalreihe*

$$G \trianglerighteq G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_m = I$$

mit den folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

(a) G/G_0 *läßt sich als Galoisgruppe über* k *realisieren.*

(b) *Für* $i = 1, \ldots, m$ *besitzen die Faktorgruppen* G_{i-1}/G_i *entweder* GAR-*Realisierungen über* $k(t_1, \ldots, t_r)$, $r \in \mathbb{N}$, *oder sie sind nilpotent und besitzen ein Komplement in* G/G_i.

Weitere Einbettungssätze über Zahlkörpern, die auch die arithmetische Struktur berücksichtigen, findet man z. B. bei Hoechsmann [1968], Neukirch [1973], [1979] und Serre [1984]. Mit dem Resultat von Serre ist es Vila [1985a], Th. 5.1, (siehe auch Vila [1985b]) z. B. gelungen, die Darstellungsgruppen der alternierenden Gruppen A_n für $n \equiv 0 \bmod (8)$ und $n \equiv 1 \bmod (8)$ als Galoisgruppen regulärer Körpererweiterungen über $\mathbb{Q}(t)$ zu realisieren. (Weitere Resultate für $n \equiv 2 \bmod (8)$ und $n \equiv 3 \bmod (4)$ finden sich bei Vila [1985a], Arenas [1988], Arenas – Bayer [1987] und bei Feit [1986].) Ferner konnte bei Bayer – Llorente – Vila [1986] mit derselben Methode auch die Darstellungsgruppe der Mathieugruppe M_{12} als Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ nachgewiesen werden.

§ 7 Konstruktion von Polynomen mit den Galoisgruppen M_{11} und M_{12}

(7.1) Die hier vorgestellte Theorie liefert nicht nur die Existenz von Galoisrealisierungen endlicher Gruppen, sondern sie gestattet im Prinzip auch deren Konstruktion. Dies soll in diesem abschließenden Paragraphen an dem Beispiel der Mathieugruppen M_{11} und M_{12} vorgeführt werden: Es seien zunächst $G = M_{12}$ und $\mathfrak{C} = (4A, 4A, 10A)$ die Klassenstruktur von G, die aus den Konjugiertenklassen 4A der Doppel-4-Zyklen (in einer Permutationsdarstellung vom Grad 12) und 10A der Elemente der Ordnung 10 von G gebildet ist. Dann ist die von $\mathfrak{C}$ aufgespannte Verzweigungsstruktur $\mathfrak{C}^*$ gleich der Klassenstruktur: $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}$. Weiter erhält man unmittelbar aus der Charaktertafel von G (Frobenius [1904]), daß die normalisierte Strukturkonstante $n(\mathfrak{C}) = 2$ ist. Auf Grund von $\overline{\Sigma}(\mathfrak{C}) = \Sigma(\mathfrak{C})$ ist nach dem Zusatz 2 dann auch $\ell^i(\mathfrak{C}^*) = 2$. Die Symmetriegruppe von $\mathfrak{C}^*$ ist $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}^*) = \langle(12)\rangle$, woraus unter Verwendung des Satzes 5 folgt $\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C}^*) = 1$ (siehe Matzat [1985b], 2., Beispiel 1) $G = M_{12}$). Damit existiert nach dem Satz 6 eine reguläre Galoiserweiterung $N/\mathbb{Q}(\tilde{t})$ mit $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}(\tilde{t})) \cong M_{12}$ und mit der Verzweigungsstruktur $\mathfrak{C}^*$ (von $\overline{\mathbb{Q}}N/\overline{\mathbb{Q}}(\tilde{t})$).
Mit L werde der Fixkörper von $M_{11} \leqslant M_{12}$ in $N/\mathbb{Q}(\tilde{t})$ bezeichnet. Dann ergibt sich die Verzweigung von $\overline{\mathbb{Q}}L/\overline{\mathbb{Q}}(\tilde{t})$ direkt aus der Verzweigungsstruktur $\mathfrak{C}^*$. Nennt man für einen algebraischen Funktionenkörper K/k einer Veränderlichen die Elemente der freien abelschen Gruppe $\mathbb{D}(K/k)$ über der abstrakten Riemannschen Fläche $\mathbb{P}(K/k)$ Divisoren und dann die Elemente von $\mathbb{P}(K/k)$ Primdivisoren, so gilt für die Primdivisoren aus $\overline{\mathbb{S}} = \{\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \bar{\mathfrak{p}}_3\}$ bei Einbettung von $\mathbb{D}(\overline{\mathbb{Q}}(\tilde{t})/\overline{\mathbb{Q}})$ in $\mathbb{D}(\overline{\mathbb{Q}}L/\overline{\mathbb{Q}})$:

(7.1.1) $\bar{\mathfrak{p}}_j = \bar{\mathfrak{P}}_{j,1}^4 \bar{\mathfrak{P}}_{j,2}^4 \bar{\mathfrak{P}}_{j,3} \bar{\mathfrak{P}}_{j,4} \bar{\mathfrak{P}}_{j,5} \bar{\mathfrak{P}}_{j,6}$ für $j = 1, 2$; $\bar{\mathfrak{p}}_3 = \bar{\mathfrak{P}}_{3,1}^{10} \bar{\mathfrak{P}}_{3,2}^2$.

Die Differente von $\overline{\mathbb{Q}}L/\overline{\mathbb{Q}}(\tilde{t})$ (siehe z. B. Artin [1967], Ch. 5)

$$\mathfrak{D}_{\overline{\mathbb{Q}}L/\overline{\mathbb{Q}}(\tilde{t})} = \bar{\mathfrak{P}}_{1,1}^3 \bar{\mathfrak{P}}_{1,2}^3 \bar{\mathfrak{P}}_{2,1}^3 \bar{\mathfrak{P}}_{2,2}^3 \bar{\mathfrak{P}}_{3,1}^9 \bar{\mathfrak{P}}_{3,2}$$

hat den Grad 22, also ist nach der Hurwitzschen Relativgeschlechtsformel (siehe z. B. Lang [1982], Ch. I, Th. 6.1) das Geschlecht von $\overline{\mathbb{Q}}L$ und auch von L gleich 0. Da $\bar{\mathfrak{P}}_{3,1}$ nach der Definition in (4.5) über L definiert ist, besitzt L Divisoren vom Grad 1 und ist (z. B. nach Artin [1967], Ch. 16, Th. 7) ein rationaler Funktionenkörper $L = \mathbb{Q}(\tilde{x})$. Hierdurch ist das Resultat 4′ bezüglich der Gruppen M_{12} und M_{11} verifiziert.

(7.2) Ein Polynom mit der Galoisgruppe M_{12} erhält man, indem man das Minimalpolynom eines primitiven Elements x von $\mathbb{Q}(\tilde{x})/\mathbb{Q}(\tilde{t})$ berechnet, das zu diesem Zweck geeignet ausgewählt wird: Wegen $\ell^i(\mathfrak{C}^*) = 2$ und $\tilde{\ell}^i(\mathfrak{C}^*) = 1$ werden $\bar{\mathfrak{p}}_1$ und $\bar{\mathfrak{p}}_2$ durch $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}(\tilde{t})/\mathbb{Q}(\tilde{t}))$ vertauscht, und $\bar{\mathfrak{p}}_3$ bleibt fest. Es gibt also Primdivisoren $\mathfrak{q}, \mathfrak{p} \in \mathbb{D}(\mathbb{Q}(\tilde{t})/\mathbb{Q})$ mit $\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{p}}_1\bar{\mathfrak{p}}_2$ und $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}_3$ in $\mathbb{D}(\overline{\mathbb{Q}}(\tilde{t})/\overline{\mathbb{Q}})$. Bezeichnet man den Zerlegungskörper von $\bar{\mathfrak{p}}_1$ über $\mathfrak{q}$ mit $k(\tilde{t})$, so ist $[k : \mathbb{Q}] = 2$, und in $\mathbb{D}(k(\tilde{t})/k)$ gelten: $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_3$. Nach (7.1.1) sind die $\mathfrak{p}_j$ in $\mathbb{D}(kL/k)$ wie folgt zerlegt:

(7.2.1) $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{Q}_j^4\mathfrak{R}_j$ für $j = 1, 2$; $\quad \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{P}_{3,1}^{10}\mathfrak{P}_{3,2}^2$,

wobei $\mathfrak{Q}_j = \bar{\mathfrak{P}}_{j,1}\bar{\mathfrak{P}}_{j,2}$ und $\mathfrak{R}_j = \prod_{i=3}^{6} \bar{\mathfrak{P}}_{j,i}$ in $\mathbb{D}(\overline{\mathbb{Q}}L/\overline{\mathbb{Q}})$ gelten. Offenbar gibt es eine $\mathbb{Q}(\tilde{t})$ über $\mathbb{Q}$ erzeugende Funktion t, die den Divisorgleichungen

$$\frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_3} = (t + \delta), \qquad \frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{p}_3} = (t - \delta) \quad \text{mit} \quad \delta^2 \in \mathbb{Q}$$

genügt, wodurch der Divisor (t) von t festgelegt ist. Weiter existieren ein $x \in \mathbb{Q}(\tilde{x})$ mit

$$\frac{\mathfrak{p}_{3,2}}{\mathfrak{p}_{3,1}} = (x)$$

und Polynome $q(X) = X^2 + \omega_1X + \omega_0$, $r(X) = X^4 + \rho_3X^3 + \rho_2X^2 + \rho_1X + \rho_0$ aus $k[X]$ mit

$$\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{P}_{3,1}^2} = (q(x)), \qquad \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{P}_{3,1}^4} = (r(x)).$$

Bezeichnet man die Bilder von $\theta \in k$ bzw. $p(X) \in k[X]$ unter dem nichttrivialen Automorphismus von $k/\mathbb{Q}$ mit $\overline{\theta}$ bzw. $\overline{p}(X)$, so gelten weiter

$$\frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{P}_{3,1}^2} = (\overline{q}(x)), \qquad \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{P}_{3,1}^4} = (\overline{r}(x)).$$

Damit folgen aus (7.2.1) die Divisorgleichungen in $\mathbb{D}(kL/k)$:

$$(7.2.2) \quad \begin{cases} (t + \delta) = \dfrac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_3} = \dfrac{\mathfrak{Q}_1^4\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{P}_{3,1}^{10}\mathfrak{P}_{3,2}^2} = \left(\dfrac{q(x)^4r(x)}{x^2}\right), \\[2ex] (t - \delta) = \dfrac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{p}_3} = \dfrac{\mathfrak{Q}_2^4\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{P}_{3,1}^{10}\mathfrak{P}_{3,2}^2} = \left(\dfrac{\overline{q}(x)^4\overline{r}(x)}{x^2}\right). \end{cases}$$

Elimination von t in (7.2.2) ergibt die Polynomidentität

(7.2.3) $2\tilde{\delta}x^2 = q(x)^4r(x) - \overline{q}(x)^4\overline{r}(x)$.

Durch Koeffizientenvergleich entsteht hieraus ein nichtlineares Gleichungssystem in den Unbestimmten $\rho_i, \overline{\rho}_i, \omega_i, \overline{\omega}_i$, zu dem noch $\omega_1 + \overline{\omega}_1 = 6$ durch Normierung von x hinzugefügt werden kann. Mit einer modularen Version des Buchbergerschen Verfahrens stellt man fest, daß dieses nichtlineare Gleichungssystem in algebraischen Zahlkörpern k mit $[k : \mathbb{Q}] \leqslant 2$ nur ein Paar von Lösungen mit teilerfremden $q(x)$, $\overline{q}(x)$ besitzt (siehe hierzu Trinks [1978], [1984]), dieses ist mit $\theta = \pm\sqrt{5}$:

$$\omega_1 = 3 - \frac{3}{5}\theta, \quad \omega_0 = -\frac{9}{25}\theta,$$

$$\rho_3 = 8 + \frac{12}{5}\theta, \quad \rho_2 = 30 + \frac{336}{25}\theta, \quad \rho_1 = \frac{216}{5} + \frac{108}{5}\theta, \quad \rho_0 = \frac{81}{25}.$$

Nach (7.2.2) gilt für ein passend normiertes t

(7.2.4) $2f(t, x) := q(x)^4 r(x) + \overline{q}(x)^4 \overline{r}(x) - 2tx^2 = 0.$

Setzt man hierin die errechneten Werte für ρ_i, $\overline{\rho}_i$, ω_i, $\overline{\omega}_i$ ein, so erhält man das

Resultat 7 (Matzat – Zeh-Marschke [1986]). *Das folgende Polynom* $f(t, X) \in \mathbb{Q}(t)[X]$ *besitzt eine zu* M_{12} *isomorphe Galoisgruppe:*

$$\begin{aligned} f(t, X) = {} & X^{12} + 20X^{11} + 162X^{10} + 3348 \cdot 5^{-1}X^9 + 35559 \cdot 5^{-2}X^8 \\ & + 5832 \cdot 5^{-1}X^7 - 84564 \cdot 5^{-3}X^6 - 857304 \cdot 5^{-4}X^5 \\ & + 807003 \cdot 5^{-5}X^4 + 1810836 \cdot 5^{-5}X^3 - 511758 \cdot 5^{-6}X^2 \\ & + 2125764 \cdot 5^{-7}X + 531441 \cdot 5^{-8} - tX^2. \end{aligned}$$

(7.3) Ist x eine Nullstelle von f(t, X) über $\mathbb{Q}(t)$, so gilt für $h(X) := f(t, X) + tX^2 \in \mathbb{Q}[X]$ die Gleichung $t = h(x)/x^2$. Daher erzeugen die Nullstellen von

$$g(x, X) := \frac{x^2}{X - x}\left(h(X) - \frac{h(x)}{x^2}X^2\right)$$

den Körper N über $\mathbb{Q}(x)$:

Resultat 7′ (Matzat – Zeh-Marschke [1987]). *Sind* $f(t, X) \in \mathbb{Q}(t)[X]$ *das Polynom aus dem* Resultat 7 *und* $h(X) := f(t, X) + tX^2$, *so besitzt das Polynom*

$$g(x, X) := \frac{x^2 h(X) - h(x)X^2}{X - x} \in \mathbb{Q}(x)[X]$$

eine zu M_{11} *isomorphe Galoisgruppe.*

Auf das Ausschreiben des Polynoms sei hier verzichtet, da die Koeffizienten nicht mehr so erfreulich klein sind wie beim Resultat 7 (siehe Matzat – Zeh-Marschke [1987]).

(7.4) Mit dem Hilbertschen Irreduzibilitätssatz folgt aus dem Resultat 7, daß es unendlich viele $\tau \in \mathbb{Q}$ gibt mit $\mathrm{Gal}(f(\tau, X)) \cong M_{12}$. Nach Dörge [1926a], [1926b] ist die Menge der $\tilde{\tau} \in \mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(f(\tilde{\tau}, X)) \ncong M_{12}$, diese nennt man Ausnahmespezialisierungen von f(t, X), sogar dünn in $\mathbb{Q}$. Da die Geschlechter aller von $\mathbb{Q}(x)$ verschiedenen Zwischenkörper von $N/\mathbb{Q}(x)$ größer als 1 sind, ergibt sich aus einem Satz von Faltings [1983], Satz 7 (Mordellsche Vermutung) – Faltings [1984] ist ein einführender Bericht dazu –, daß die Menge der Ausnahmespezialisierungen von g(x, X) sogar endlich ist (siehe Matzat – Zeh-Marschke [1987], Folg.).
Durch Betrachtung von Zerlegungstypen von f(t, X) bzw. g(x, X) modulo kleiner Primzahlen gewinnt man leicht unendliche Serien von Polynomen über $\mathbb{Q}$ mit den Galoisgruppen M_{12} bzw. M_{11}:

Resultat 8 (Matzat – Zeh-Marschke [1986], [1987]):

(a) *Für* $\tau \in \mathbb{Z}$ *mit* $\tau \equiv 1 \bmod (66)$ *gilt* $\mathrm{Gal}(f(\tau, X)) \cong M_{12}$.

(b) *Für* $\xi \in \mathbb{Z}$ *mit* $\xi \equiv 1 \bmod (133)$ *gilt* $\mathrm{Gal}(g(\xi, X)) \cong M_{11}$;

insbesondere ist die Galoisgruppe von $g(1, X)$ *isomorph zu* M_{11}:

$$\begin{aligned} g(1, X) = {} & X^{11} + 21X^{10} + 183X^9 + 4263 \cdot 5^{-1}X^8 + 56874 \cdot 5^{-2}X^7 \\ & + 86034 \cdot 5^{-2}X^6 + 345606 \cdot 5^{-3}X^5 + 870726 \cdot 5^{-4}X^4 \\ & + 5160633 \cdot 5^{-5}X^3 + 6971469 \cdot 5^{-5}X^2 - 11160261 \cdot 5^{-8}X \\ & - 531441 \cdot 5^{-8}. \end{aligned}$$

(7.5) Faßt man die auf ähnliche Weise konstruierten Polynome bei Matzat [1984], Malle – Matzat [1985], Matzat – Zeh-Marschke [1986], [1987] und Malle [1987] zusammen (siehe auch LaMacchia [1980] für ein anders gewonnenes Polynom mit der Galoisgruppe $PSL_2(\mathbb{F}_7)$), so erhält man das

Resultat 9 (Matzat – Malle – Zeh-Marschke 1984–1987). *Für alle primitiven nichtauflösbaren Permutationsgruppen* G *vom Grad* $d \leqslant 15$ *sind Polynome über* $\mathbb{Q}(t)$ *und* $\mathbb{Q}$ *mit einer zu* G *isomorphen Galoisgruppe berechnet worden.*

Schlußbemerkung

Die hier berichteten Resultate sind keineswegs als endgültig anzusehen, sie stellen vielmehr eine Zwischenbilanz nach einer etwa 10jährigen Beschäftigung mit verschiedenen Versionen der beiden Rationalitätskriterien dar. Dabei wurden in erster Linie die Resultate von Šafarevič und seinem Schüler Belyi, die des Karlsruher Arbeitskreises um den Berichterstatter (Hoyden-Siedersleben, Malle und Zeh-Marschke) und der durch Thompson inspirierten Gruppentheoretiker (Feit, Fong, Hunt und Walter) berücksichtigt und in einheitlicher Form dargestellt (siehe Matzat [1987] für eine ausführliche Fassung).

Fried [1977] wählte einen stärker geometrisch motivierten Zugang, indem er zunächst die Definitionskörper k von Hurwitz-Familien galoisscher Überlagerungen zu bestimmen versucht, wonach aber das schwierige diophantische Problem zu lösen bleibt, k-rationale Punkte auf diesen zu finden. Diese Überlegungen wurden u. a. bei Biggers – Fried [1982], Fried [1984] und Coombes – Harbater [1985] weitergeführt.

In eine andere Richtung entwickelte sich die Fragestellung bei Harbater [1984a], [1984b], [1987]: Er löste das Umkehrproblem der Galoisschen Theorie für den Potenzreihenring $\mathbb{Z}[[t]]$ und dessen Henselisierung sowie für die Körper $\mathbb{Q}_p(t)$ der rationalen Funktionen über den Körpern der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$. Der erhoffte Abstieg zu $\mathbb{Q}$ ist aber bisher nicht gelungen.

Literaturverzeichnis

Arenas, A. [1988]: An arithmetic problem on the sums of three squares. Acta Arithmetica **51** (erscheint demnächst)

Arenas, A.; Bayer, P. [1987]: Arithmetic behaviour of the sums of three squares. J. Number Theory **27** (1987) 283–284

Artin, E. [1967]: Algebraic numbers and algebraic functions. New York – London – Paris: Gordon and Breach 1967

Aschbacher, M.; Gorenstein, D.; Lyons, R.; O'Nan, M.; Sims, C.; Feit, W., eds. [1984]: Proceedings of the Rutgers group theory year, 1983–1984. Cambridge: Cambridge University Press 1984

Atkin, A. O. L.; Swinnerton-Dyer, H. P. F. [1971]: Modular forms on noncongruence subgroups. Proc. Symp. Pure Math. **19** (1971) 1–26

Bayer, P.; Llorente, P.; Vila, N. [1986]: $\tilde{M}_{12}$ comme groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$. C. R. Acad. Sc. Paris **303** (1986) 277–280

Belyi, G. V. [1979]: On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979) 267–276; Math. USSR Izv. **14** (1980) 247–256

Belyi, G. V. [1983]: On extensions of the maximal cyclotomic field having a given classical Galois group. J. reine angew. Math. **341** (1983) 147–156

Biggers, R.; Fried, M. D. [1982]: Moduli spaces of covers and the Hurwitz monodromy group. J. reine angew. Math. **335** (1982) 87–121

Breuer, S. [1921]: Zyklische Gleichungen 6. Grades und Minimalbasis. Math. Ann. **86** (1921) 108–113

Breuer, S. [1924]: Zur Bestimmung der matazyklischen Minimalbasis von Primzahlgrad. Math. Ann. **92** (1924) 126–144

Breuer, S. [1926]: Metazyklische Minimalbasis und komplexe Primzahlen. J. reine angew. Math. **156** (1926) 13–42

Breuer, S. [1932]: Zyklische Minimalbasis zusammengesetzten Grades. J. reine angew. Math. **166** (1932) 54–58

Bruen, A. A.; Jensen, C. U.; Yui, N. [1986]: Polynomials with Frobenius groups of prime degree as Galois groups II. J. Number Theory **24** (1986) 305–359

Chevalley, C. [1955]: Invariants of finite groups generated by reflections. Amer. J. Math. **77** (1955) 778–782

Coombes, K.; Harbater, D. [1985]: Hurwitz families and arithmetic Galois groups. Duke Math. J. **52** (1985) 821–839

Dörge, K. [1926a]: Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Math. Ann. **95** (1926) 84–97

Dörge, K. [1926b]: Über die Seltenheit der reduziblen Polynome und der Normalgleichungen. Math. Ann. **95** (1926) 247–256

Douady, A. [1964]: Détermination d'un groupe de Galois. C. R. Acad. Sc. Paris **258** (1964) 5305–5308

Douady, R. et A. [1979]: Algèbre et théories Galoisiennes II. Paris: Cedic/Fernand Nathan 1979

von den Dries, L.; Ribenboim, P. [1979]: Application de la théorie des modèles aux groupes de Galois de corps de fonctions. C. R. Acad. Sc. Paris **288** (1979) A785–A792

van den Dries, L.; Ribenboim, P. [1984]: The absolute Galois group of a rational function field in characteristic zero is a semidirect product. Canad. Math. Bull. **27** (1984) 313–315

Faddeev, D. K. [1984]: Galois theory (in the Steklov Mathematical Institute of the Academy of Sciences). Proc. Steklov Inst. Math. **168**, 3 (1986) 47–73; Trudy Mat. Inst. Steklov **168** (1984) 46–71

Faltings, G. [1983]: Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. Invent. math. **73** (1983) 349–366

Faltings, G. [1984]: Die Vermutungen von Tate und Mordell. Jber. Deutsch. Math.-Ver. **86** (1984) 1–13

F e i t , W. [1984]: Rigidity of $Aut(PSL_2(p^2))$, $p \equiv \pm 2 \pmod 5$, $p \neq 2$. In: Aschbacher et al., eds. [1984] 351–356

F e i t , W. [1986]: $\tilde{A}_5$ and $\tilde{A}_7$ are Galois groups over number fields. J. Algebra **104** (1986) 231–260

F e i t , W.; F o n g , P. [1984]: Rational rigidity of $G_2(p)$ for any prime $p > 5$. In: Aschbacher et al., eds. [1984] 323–326

F o r s t e r , O. [1977]: Riemannsche Flächen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1977

F r e y , G.; G e y e r , W.-D. [1972]: Über die Fundamentalgruppe von Körpern mit Divisorentheorie. J. reine angew. Math. **254** (1972) 110–122

F r i c k e , R. [1928]: Lehrbuch der Algebra III. Braunschweig: Vieweg 1928

F r i e d , M. D. [1977]: Fields of definition of function fields and Hurwitz families – Groups as Galois groups. Commun. Alg. **5** (1977) 17–82

F r i e d , M. D. [1984]: On reduction of the inverse Galois group problem to simple groups. In: Aschbacher et al., eds. [1984] 289–301

F r i e d , M. D. [1985]: On the Sprindžuk-Weissauer approach to the universal Hilbert subsets. Israel J. Math. **51** (1985) 347–363

F r o b e n i u s , F. G. [1904]: Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen. Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wiss. Berlin 1904, S. 558–571

F u r t w ä n g l e r , Ph. [1925]: Über Minimalbasen von Körpern rationaler Funktionen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, IIa, **134** (1925) 69–80

G e y e r , W.-D. [1978]: The automorphism group of the field of all algebraic numbers. Atas da 5ª Escola de Álgebra, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro 1978

G o r e n s t e i n , D. [1982]: Finite simple groups. New York – London: Plenum Press 1982

G o w , R. [1986]: Construction of some wreath products as Galois groups of normal real extensions of the rationals. J. Number Theory **24** (1986) 360–372

G r ö b n e r , W. [1932]: Über Minimalbasen für die Invariantenkörper zyklischer und metazyklischer Permutationsgruppen. Anz. Akad. Wiss. Wien **5** (1932) 43–44

G r o t h e n d i e c k , A. [1971]: Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture Notes in Math. 224, Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1971

H a r b a t e r , D. [1984a]: Mock covers and Galois extensions. J. Algebra **91** (1984) 281–293

H a r b a t e r , D. [1984b]: Algebraic rings of arithmetic power series. J. Algebra **91** (1984) 294–319

H a r b a t e r , D. [1987]: Galois coverings of the arithmetic line. In: Chudnovsky, D. V. et al., eds.: Number Theory, New York 1984–1985. Berlin etc.: Springer 1987

H e i d e r , F.-P.; K o l v e n b a c h , P. [1984]: The construction of SL(2,3)-polynomials. J. Number Theory **19** (1984) 392–411

H i l b e r t , D. [1892]: Über die Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten. J. reine angew. Math. **110** (1892) 104–129

H o e c h s m a n n , K. [1968]: Zum Einbettungsproblem. J. reine angew. Math. **229** (1968) 81–106

H o y d e n - S i e d e r s l e b e n , G. [1985]: Realisierung der Jankogruppen J_1 und J_2 als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$. J. Algebra **97** (1985) 14–22

H o y d e n - S i e d e r s l e b e n , G.; M a t z a t , B. H. [1986]: Realisierung sporadischer einfacher Gruppen als Galoisgruppen über Kreisteilungskörpern. J. Algebra **101** (1986) 273–285

H u n t , D. C. [1986]: Rational rigidity and the sporadic groups. J. Algebra **99** (1986) 577–592

H u r w i t z , A. [1891]: Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. Math. Ann **39** (1891) 1–61

I š h a n o v , V. V. [1976]: On the semidirect imbedding problem with nilpotent kernel. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **40** (1976); Math. USSR Izv. **10** (1976) 1–23

I w a s a w a , K. [1953]: On solvable extensions of algebraic number fields. Ann. Math. **58** (1953) 548–572

J e h n e , W. [1979]: Die Entwicklung des Umkehrproblems der Galoisschen Theorie. Math.-Phys. Semesterberichte **26** (1979) 1–35

Jensen, C. U.; Yui, N. [1982]: Polynomials with D_p as Galois group. J. Number Theory **15** (1982) 347–375

Klein, F. [1884]: Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig: Teubner 1884

Klein, F.; Fricke, R. [1897, 1912]: Vorlesungen über die Theorie der Modulfunktionen I, II. Leipzig: Teubner 1897, 1912

Kuyk, W. [1968]: Generic approach to the Galois embedding and extension problem. J. Algebra **9** (1968) 393–407

Kuyk, W. [1970]: Extensions de corps Hilbertiens. J. Algebra **14** (1970) 112–124

LaMacchia, M. E. [1980]: Polynomials with Galois group PSL(2, 7). Commun. Algebra **8** (1980) 983–992

Lamprecht, E. [1961]: Zyklische Erweiterungen arithmetischer Funktionenkörper. Math. Z. **77** (1961) 391–413

Lamprecht, E. [1962a]: Zur Charakterisierung zyklischer Erweiterungen rationaler Funktionenkörper. J. reine angew. Math. **209** (1962) 84–95

Lamprecht, E. [1962b]: Zur Charakterisierung zyklischer Erweiterungen rationaler Funktionenkörper II. Arch. Math. **13** (1962) 488–497

Lang, S. [1973]: Elliptic functions. London etc.: Addison – Wesley 1973.

Lang, S. [1982]: Introduction to algebraic and abelian functions. New York – Heidelberg – Berlin: Springer 1982

Lenstra, H. W. [1974]: Rational functions invariant under a finite abelian group. Invent. math. **25** (1974) 299–325

Macbeath, A. M. [1969]: Extensions of the rationals with Galois group PGL(2, Z_n). Bull. London Math. Soc. **1** (1969) 332–338

Malle, G. [1986]: Exzeptionelle Gruppen vom Lie-Typ als Galoisgruppen. Dissertation, Univ. Karlsruhe (TH) 1986

Malle, G. [1987]: Polynomials for primitive nonsolvable permutation groups of degree $d \leqslant 15$. J. Symb. Comput. **4** (1987) 83–92

Malle, G.; Matzat, B. H. [1985]: Realisierung von Gruppen $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$. Math. Ann. **272** (1985) 549–565

Matzat, B. H. [1979]: Konstruktion von Zahlkörpern mit der Galoisgruppe M_{11} über $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. manuscripta math. **27** (1979) 103–111

Matzat, B. H. [1983]: Konstruktion von Zahlkörpern mit der Galoisgruppe M_{12} über $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Arch. Math. **40** (1983) 245–254

Matzat, B. H. [1984]: Konstruktion von Zahl- und Funktionenkörpern mit vorgegebener Galoisgruppe. J. reine angew. Math. **349** (1984) 179–220

Matzat, B. H. [1985a]: Zwei Aspekte konstruktiver Galoistheorie. J. Algebra **96** (1985) 499–531

Matzat, B. H. [1985b]: Realisierung endlicher Gruppen als Galoisgruppen. manuscripta math. **51** (1985) 253–265

Matzat, B. H. [1985c]: Zum Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie mit nicht abelschem Kern. Invent. math. **80** (1985) 365–374

Matzat, B. H. [1986a]: Topologische Automorphismen in der konstruktiven Galoistheorie. J. reine angew. Math. **371** (1986) 16–45

Matzat, B. H. [1986b]: Einbettungsprobleme mit abelschem Kern über Hilbertkörpern. Manuskript 1986, eingearbeitet in Matzat [1987]

Matzat, B. H. [1987]: Konstruktive Galoistheorie. Berlin etc.: Springer 1987

Matzat, B. H.; Zeh-Marschke, A. [1986]: Realisierung der Mathieugruppen M_{11} und M_{12} als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$. J. Number Theory **23** (1986) 195–202

Matzat, B. H.; Zeh-Marschke, A. [1987]: Polynome mit der Galoisgruppe M_{11} über $\mathbb{Q}$. J. Symb. Comput. **4** (1987) 93–97

Nart, E.; Vila, N. [1983]: Equations with absolute Galois group isomorphic to A_n. J. Number Theory **16** (1983) 6–13

Neukirch, J. [1973]: Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie. Invent. math. **21** (1973) 59–116

Neukirch, J. [1974]: Über die absolute Galoisgruppe algebraischer Zahlkörper. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **76** (1974) 18–37

Neukirch, J. [1979]: On solvable number fields. Invent. math. **53** (1979) 135–174

Noether, E. [1918]: Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe. Math. Ann. **78** (1918) 221–229

Odoni, R. W. K. [1985]: The Galois theory of iterates and composites of polynomials. Proc. London Math. Soc. **51** (1985) 385–414

Pahlings, H. [1988]: Some sporadic groups as Galois groups. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (erscheint demnächst)

Popp, H. [1970]: Fundamentalgruppen algebraischer Mannigfaltigkeiten. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970

Ribet, K. A. [1975]: On ℓ-adic representations attached to modular forms. Invent. math. **28** (1975) 245–275

Roland, G.; Yui, N.; Zagier, D. [1982]: A parametric family of quintic polynomials with Galois group D_5. J. Number Theory **15** (1982) 137–142

Šafarevič, I. R. [1954a]: On the construction of fields with a given Galois group of order ℓ^a. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **18** (1954) 261–296; Amer. Math. Soc. Transl. **4** (1956) 107–142

Šafarevič, I. R. [1954b]: On the problem of imbedding fields. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **18** (1954) 389–418; Amer. Math. Soc. Transl. **4** (1956) 151–183

Šafarevič, I. R. [1954c]: Construction of fields of algebraic numbers with given solvable Galois group. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **18** (1954) 525–578; Amer. Math. Soc. Transl. **4** (1956) 185–237

Šafarevič, I. R. [1958]: On the imbedding problem for splitting extensions (russ.). Dokl. Akad. Nauk SSSR. **120** (1958) 1217–1219

Šafarevič, I. R. [1963]: Algebraic number fields. Proc. Int. Congr. of Math. in Stockholm 1962 pp. 163–176, Uppsala: Almqvist-Wiksells 1963; Amer. Math. Soc. Transl. **31** (1963) 25–39

Saltman, D. [1982]: Generic Galois extensions and problems in field theory. Adv. Math. **43** (1982) 250–283

Scholz, A. [1929]: Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer galoisscher Gruppe. Math. Z. **30** (1929) 332–356

Scholz, A. [1937]: Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung I. Math. Z. **42** (1937) 161–188

Schur, I. [1930]: Gleichungen ohne Affekt. Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Klasse 1930, S. 443–449

Schur, I. [1931]: Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome. J. reine angew. Math. **165** (1931) 52–58

Seidelmann, F. [1918]: Die Gesamtheit der kubischen und biquadratischen Gleichungen mit Affekt bei beliebigem Rationalitätsbereich. Math. Ann **78** (1918) 230–233

Serre, J.-P. [1964]: Cohomologie galoisienne. Lecture Notes in Math. **5**, Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1964

Serre, J.-P. [1972]: Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. Invent. math. **15** (1972) 259–331

Serre, J.-P. [1984]: L'invariant de Witt de la forme $\mathrm{Tr}(x^2)$. Comment. Math. Helvetici **59** (1984) 651–676

Shih, K.-y. [1974]: On the construction of Galois extensions of function fields and number fields. Math. Ann. **207** (1974) 99–120

Shih, K.-y. [1978]: P-division points on certain elliptic curves. Compositio Math. **36** (1978) 113–129

Shimura, G. [1966]: A reciprocity law in nonsolvable extensions. J. reine angew. Math. **221** (1966) 209–220

Shimura, G. [1971]: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton University Press 1971

Sonn, J. [1972]: On the embedding problem for nonsolvable Galois groups of algebraic number fields: Reduction theorems. J. Number Theory **4** (1972) 411–436

Sonn, J. [1980]: SL(2, 5) and Frobenius Galois groups over $\mathbb{Q}$. Canad. J. Math. **32** (1980) 281–293

Suzuki, M. [1982]: Group theory I. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1982

Swan, R. G. [1969]: Invariant rational functions and a problem of Steenrod. Invent. math. **7** (1969) 148–158

Swan, R. G. [1981]: Galois Theory. In: Brewer, J. W.; Smith, M. K., eds.: Emmy Noether: A tribute to her life and work. New York: Marcel Dekker 1981, pp. 115–124

Swan, R. G. [1983]: Noether's problem in Galois theory. In: Sally, J. D.; Srinivasan, B., eds.: Emmy Noether in Bryn Mawr. New York: Springer 1983, pp. 21–40

Thompson, J. G. [1984a]: Some finite groups which appear as Gal(L/K), where $K \leqslant \mathbb{Q}(\mu_n)$. J. Algebra **89** (1984) 437–499

Thompson, J. G. [1984b]: PSL_3 and Galois groups over $\mathbb{Q}$. In: Aschbacher et al., eds. [1984] 309–319

Thompson, J. G. [1984c]: Rational rigidity of $G_2(5)$. In: Aschbacher et al., eds. [1984] 321–322

Thompson, J. G. [1984d]: Primitive roots and rigidity. In: Aschbacher et al., eds. [1984] 327–350

Thompson, J. G. [1986]: Regular extensions of $\mathbb{Q}(x)$. In: Tuan, ed.; Group theory, Beijing 1984, S. 210–220. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1986

Trinks, W. [1978]: Über B. Buchbergers Verfahren, Systeme algebraischer Gleichungen zu lösen. J. Number Theory **10** (1978) 475–488

Trinks, W. [1984]: On improving approximate results of Buchberger's algorithm by Newton's method. ACM SIGSAM Bull. **18**, No. 3 (1974) 7–11

Tschebotaröw (Čebotarev), N. G. [1934]: Die Probleme der modernen Galoisschen Theorie. Comment. Math. Helvetici **6** (1934) 235–283

Tschebotaröw (Čebotarev) N. G.; Schwerdtfeger, H. [1950]: Grundzüge der Galoisschen Theorie. Groningen-Djakarta: Noordhoff 1950

Vila, N. [1985a]: On central extensions of A_n as Galois groups over $\mathbb{Q}$. Arch. Math. **44** (1985) 424–437

Vila, N. [1985b]: Polynomials over $\mathbb{Q}$ solving an embedding problem. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **35**, 2 (1985) 79–82

Walter, J. H. [1984]: Classical groups as Galois groups. In: Aschbacher et al., eds. [1984] 357–383

Weber, H. [1886]: Theorie der Abel'schen Zahlkörper. Acta Math. **8** (1886) 193–263

Weber, H. [1908]: Lehrbuch der Algebra III. Braunschweig: Vieweg 1908

Weissauer, R [1982]: Der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz. J. reine angew. Math. **334** (1982) 203–220

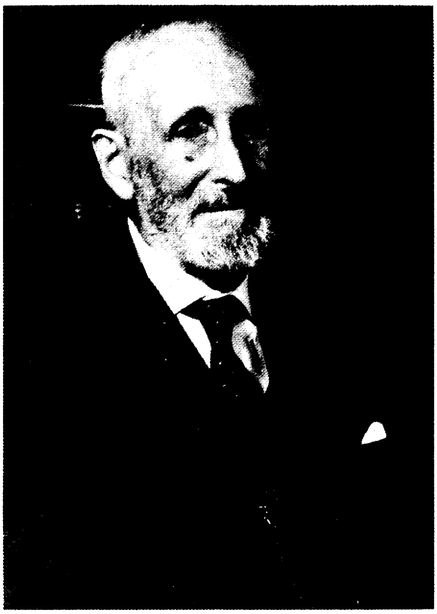
B. H. Matzat
Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
Englerstraße 2
7500 Karlsruhe 1

(*Eingegangen am 9. 1. 1986, revidierte Fassung am 30. 9. 1987*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
90 (1988) 184–199

Oskar Perron*)

J. Heinhold, München



Am 7. Mai 1980 jährt sich zum hundertsten Male der Geburtstag eines der hervorragendsten Mathematikers unseres Jahrhunderts und hochverehrten akademischen Lehrers, des Geheimen Regierungsrates ö. o. Professor der Mathematik Dr., Dr. E. h., Dr. h. c. *Oskar Perron.* Dieser Jahrestag gibt Veranlassung auf Leben und Werk O. P. Perrons zurückzublicken.

Die Perrons stammen aus der südfranzösischen Provinz Dauphiné. Sie waren 1698 nach der Aufhebung des Edikts von Nantes wie so viele Hugenottenfamilien nach Deutschland geflohen. Einer dieser Vorfahren – Jean Pierre Perron – siedelte schließlich 1802 nach Frankenthal in der Pfalz über und gründete dort eine Lederhandlung, die noch Perrons Vater betrieb, als am 7. Mai 1880 Oskar Perron zur

*) Nachdruck mit freundlicher Genehmigung des Herausgebers des „Jahrbuchs Überblicke Mathematik" (Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich 1980), Herrn Prof. Dr. U. Kulisch.

Welt kam. Später eröffnete Heinrich Perron ein Bankgeschäft, das heute eine Filiale der Deutschen Bank in Frankenthal ist. O. Perron schreibt hierüber in einer kurzen biographischen Notiz in dem Buch *Forscher und Gelehrte* (herausgegeben von W. E. Böhm, Stuttgart 1966): „Der Geschäftsgang entwickelte sich befriedigend, und da ich in der Schule gut rechnen konnte, war es für meinen Vater eine ausgemachte Sache, daß ich einmal sein Geschäft übernehmen würde. Als ich in die vierte Klasse der Lateinschule ging, wußte ich zwar, was ein rechter Winkel und was ein Quadrat ist, aber Mathematik gab es noch nicht, sondern kaufmännisches Rechnen und Dreisatzaufgaben, und weil mir das auch Spaß machte, sah mein Vater seinen Weizen blühen. Aber da geschah etwas Ungewöhnliches. In unserer griechischen Grammatik kam der Name Pythagoras vor, und da stieg der Klassenlehrer, der normalerweise ein entsetzliches Rauhbein war und die ganze Klasse dauernd als Saububen titulierte, auf einmal recht manierlich ohne Gepolter vom Katheder, nahm die Kreide, zeichnete ein rechtwinkliges Dreieck an die Tafel, dazu die drei Quadrate und sagte, Pythagoras habe entdeckt, daß die zwei kleineren Quadrate zusammen eine Fläche bedecken, die so groß ist, wie die Fläche des dritten Quadrates. Meinen Kameraden mag das ziemlich „wurscht" gewesen sein. Aber ich war erschüttert, ich verpürte in meiner Seele eine Art Ausgießen des Heiligen Geistes. Es war mir klar, daß das Wort „entdecken" hier etwas ganz anderes besagt, als wenn man von der Entdeckung Amerikas spricht, und daß die Hauptsache nicht gesagt war. Ich sah plötzlich das Ziel meines Lebens: Pythagoras nacheifern, solche Sätze entdecken und beweisen."

Dieses Ziel hat O. Perron in der Folgezeit unbeirrbar verfolgt. Auf Zureden vieler Bekannter war sein Vater schließlich damit einverstanden, daß er, nachdem er 1898 am Großherzoglich Hessischen Gymnasium zu Worms sein Abitur abgelegt hatte, sich dem Studium der Mathematik zuwandte, wie Perron erwähnt „sogar mit einem sehr beachtlichen Monatswechsel" von seiten seines Vaters. O. Perron studiert zunächst in München, wo u.a. Lindemann (durch seinen Transzendenzbeweis von π berühmt) und Pringsheim (der Schwiegervater von Thomas Mann) seine mathematischen Lehrer waren. Er studierte dann noch in Berlin und legte nach neunsemestrigem Studium im Herbst 1902 das Bayerische Staatsexamen für das Höhere Lehramt in Mathematik und Physik an Gymnasien mit der Note I ab. Damals gab es ja den Diplommathematiker noch nicht. Als Abschluß des Mathematikstudiums machte man – schon zur eigenen Sicherheit – das „Lehramtsexamen". Schon vor dem Lehramtsexamen – was damals noch möglich war – im Sommer 1902 hatte Perron mit einer Arbeit „Über die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt bei Wirkung äußerer Kräfte" bei Lindemann summa cum Laude promoviert. Auf Anstellung im Schuldienst durfte er von Hause aus verzichten und konnte in Tübingen und in Göttingen weiter studieren, wo damals der universale Mathematiker David Hilbert wirkte. 1906 habilitierte sich O. Perron an der Universität München mit der Arbeit „Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus". Das Thema seiner Habilitationsschrift und ebenso das seines Habilitationsvortrages „Was sind und sollen die irrationalen Zahlen" waren für Perrons weitere wissenschaftliche Arbeiten bestimmend; Kettenbrüche und Irrationalzahlen gehören zu den Schwerpunkten seiner späteren Arbeiten. Im Jahre seiner Habilitation heiratete O. Perron eine entfernte Cousine Hermine Perron.

1910 erhielt Perron einen Ruf als a. o. Professor an die Universität Tübingen, 1914 wurde er als o. Professor an die Universität Heidelberg berufen im gleichen Jahr, in dem der erste Weltkrieg begann, den er von 1915 bis zu seinem Ende 1918, zuletzt als Leutnant einer Vermessungsabteilung mitmachte. 1922 schließlich wurde er in Nachfolge seines Lehrers Pringsheim an die Universität München berufen, wo er eine äußerst erfolgreiche Tätigkeit als akademischer Lehrer und Forscher entfaltete. 1950 wurde Perron emeritiert. Er hielt aber noch 10 Jahre hindurch kleinere Vorlesungen u.a. über Geometrie, denen er seine eigene Begründung der nichteuklidischen Geometrie zugrunde legte.

Die Perronschen Vorlesungen zeichneten sich durch ihren streng logischen Aufbau, durch ihre mathematische Präzision und ihre Verständlichkeit aus. Sie waren stets aufs Sorgfältigste vorbereitet und wurden völlig frei, bisweilen mit humorvolllen Bemerkungen gewürzt, in einer den Hörer packenden Weise vorgetragen, nur gelegentlich zog Perron ein kleines Zettelchen aus der Tasche, um das Ergebnis längerer Entwicklungen zu kontrollieren. Unser Jahrgang, der 1931 mit dem Studium begann, hatte das große Glück, von der Anfängervorlesung Analysis I und II an über gewöhnliche Differentialgleichungen, Funktionentheorie, partielle Differentialgleichungen, elliptische Funktionen in zusammenhängender Folge bis zu Spezialvorlesungen wie diophantische Approximation, Geometrie der Zahlen, Divergente Reihen Perron als akademischen Lehrer zu haben.

In die Zeit unseres Studiums fiel auch die „Machtergreifung" Hitlers. Man erlebte Tumulte in Vorlesungen, Sprechchöre, Demonstrationen, die Sprengung von Vorlesungen durch Angehörige des NS-Studentenbundes, genau in der Weise, wie das jüngst an manchen Universitäten durch radikale linke Studentengruppen wieder durchgeführt wurde. Das mathematische Colloquium, das gemeinsam von den Dozenten der Universität und der Technischen Hochschule München monatlich veranstaltet wurde und dem auch Pringsheim noch angehörte, mußte eingestellt werden, da verlangt wurde, daß Pringsheim als Jude auszuschließen sei. In einer Zeit, in der so mancher Hochschullehrer (nicht nur der politisch orientierten Wissenschaften) die Kurve zu dem neuen System zu nehmen sich bemühte und in der eine mißbilligende Bemerkung zur Entlassung oder ins Konzentrationslager führen konnte, war für uns Perron nicht allein akademischer Lehrer, sondern auch durch seine aufrechte Haltung ein Halt und ein Vorbild.

Getreu dem Ziel, das ihm bei seiner ersten Begegnung als Schüler mit dem Pythagoräischen Lehrsatz vorschwebte, ist Perron einer der markantesten und produktivsten Vertreter der klassischen Mathematik geworden. Er hatte vielseitige mathematische Interessen. Algebra, Zahlentheorie, insbesondere diophantische Approximationen, Geometrie, Unendliche Reihen, Kettenbrüche und Differentialgleichungen, das waren seine Hauptarbeitsgebiete, denen er sich abwechselnd sowohl in theoretisch, wie in praktisch orientierten Arbeiten widmete. „Ich wechselte häufig den Gegenstand. Denn wenn ich mich intensiv mit einem Problem herumgeplagt hatte und nicht mehr weiterkam, da hatte ich das Gefühl, daß die dafür zuständigen Gehirnzellen ermüdet waren. Andere hatten sich inzwischen ausgeruht und stießen plötzlich das Tor zu einem Problem auf, an dem ich früher gescheitert war". Sich geistig auszuruhen, wieder neue Ideen für weitere Arbeiten zu gewinnen, dazu verhalf ihm auch sein Hobby. „Der Mensch muß ein Hobby haben" sagt Perron in der schon zitierten biographischen Notiz. „Bei mir ist es das Bergsteigen. Ich stieg aus Freude am Fels und zur Erholung von geistiger Arbeit, wobei ich mich an den mittleren Schwierigkeitsgrad hielt. Allein konnte ich mit meinen nicht herkulischen Kräften wohl Fermedaturm und Kleine Zinne meistern, aber die Vajolettürme nur am Seil. Auch auf einem Dutzend Viertausender bin ich gestanden. Auf dem Totenkirchl war ich mehr als 20 mal, zuletzt mit 74 Jahren."

Für die heute üblichen Verallgemeinerungen mathematischer Problemstellungen und Ergebnisse in immer abstraktere Gefilde konnte sich Perron nicht erwärmen – bei ihm gab es noch keine der heute üblichen und nützlichen „Räume" – und er scheute sich nicht, seine Meinung in ironischer, humorvoller und mitunter sarkastischer Weise bei Gelegenheit zu äußern. Besonders pointiert kam sein Verhältnis zur „modernen" Mathematik in seinem „Ceterum censeo" zum Ausdruck, das er der Vorankündigung seiner letzten publizierten Arbeit „Der Jacobi'sche Kettenalgorithmus in einem kubischen Zahlenkörper II." am 2. 2. 1973 als Schlußwort beifügte:

> *Ceterum censeo,*
> novam quam vocant mathematicam esse delendam, classicam autem mathematicam, ut Gaussianam, Dirichletianam, Hilbertianam etc esse amandam neque umquam delendam*).

Bei seiner absoluten Strenge als klassischer Mathematiker war Perron als Mensch von heiterer, humorvoller Natur. So schrieb er mir, als ich mich für die Zusendung seiner oben zitierten letzten Arbeit bedankte, wobei ich, wie gewohnt „Zahlkörper" statt des von Perron gebrauchten Wortes „Zahlenkörper" verwendete: „Lieber Herr Heinhold! Wissen Sie wohl, was ein Zahltag ist? Natürlich ist das der stets freudig begrüßte Tag, an dem gezahlt wird, im allgemeinen der Lohn für geleistete Arbeit. In diesem zusammengesetzten Wort hat nämlich die Silbe „Zahl" gar nichts mit dem Begriff „Zahl" zu tun, sondern es handelt sich um das Verbum aus (be) zahlen. Genauso ist es bei allen anderen Wörtern, die ebenso zusammengesetzt sind: Zahlkellner, Zahlkarte, Zahlmittel etc. Überall geht es ums bezahlen, also ums Geld, um das leidige, etwas anrüchige Geld, von dem man mit vorgehaltener Hand oder mit Augenzwinkern spricht.

Wer nun zum erstenmal das Wort Zahlkörper hört, denkt: Das wird halt auch so irgendein Körper sein, bei dem irgendwas bezahlt wird, das ist mir wurscht, interessiert mich nicht.

Das Wort Zahltheorie werden Sie wohl noch nicht gehört haben, ich auch nicht. Das müßte eine Theorie des Bezahlens sein, in der also etwa untersucht wird, wie man bezahlt, wenn man kein Geld hat. Die schöne Zahlentheorie, von der Sie sicher schon gehört haben, wäre also zur Pumpologie herabgewürdigt.

Das Wort Zahlkörper hat Hilbert eingeführt, der aufs Genaueste definiert hat, welchen Begriff er damit meint. Nur nach der Suche nach einem Namen ist ihm, wohl aus Versehen, ein Malheur passiert und so kam das verkorkste Wort auf

*) Im übrigen meine ich, daß die sogenannte neue Mathematik zerstört werden muß, die klassische Mathematik jedoch, nämlich die von Gauß, Dirichlet, Hilbert usw. geliebt werden muß und niemals zerstört werden darf.

die Welt, das man, wohl aus Ehrfurcht vor Hilbert, nie abgeschafft hat. Ich habe mich immer bemüht, den wertvollen Begriff aus seiner anrüchigen Nachbarschaft zu befreien. Wie das zu machen ist, sehen Sie an der Zahl*en*theorie und nun lesen Sie mal den Titel meiner Arbeit *genau*..."

Perrons Heiterkeit und Frohsinn kommt auch in dem Motto zum Ausdruck, das er dem ersten Teil der zitierten Arbeit über den Jacobischen Kettenalgorithmus in einem kubischen Zahlenkörper (11.12.70) voranstellt:

Mathematik ist eine fröhliche Wissenschaft,
vielleicht die fröhlichste von allen,
lebt stillvergnügt von
Mini-Mammon und Maxi-Mens.

Mini-Mammon und Maxi-Mens in der Tat. Was kam bei den bescheidenen Möglichkeiten, welche die Universität damals bot – die drei Ordinarien, Perron, Carathéodory und Tietze hatten ein gemeinsames Dienstzimmer, in dem ihre drei Schreibtische standen, nur einen Assistenten hatte Perron, Forschungsfreisemester gab es nicht – was kam da an Fülle von tiefgehenden Forschungsergebnissen, an grundlegenden Lehrbüchern zustande! Nicht die Zahl der abhängigen Mitarbeiter oder die Anzahl der qm des Lehrstuhls brauchte hier die Bedeutung des Lehrstuhls zu demonstrieren, sondern das Niveau der daraus hervorgehenden Arbeiten. „*Stillvergnügt*" betrieb er seine mathematischen Forschungen – am Schreibtisch in seinem häuslichen Arbeitszimmer. Obwohl manche seiner Arbeiten heute auch für numerische Verfahren der elektronischen Datenverarbeitung eine wichtige Grundlage sind, er selbst brauchte diese Computer für seine Arbeiten nicht, auch nicht, wo es sich etwa um die Genauigkeit von Näherungen handelt, wie etwa bei der „Winkeldreiteilung" des Schneidermeisters Kopf oder bei dem Nachweis der Primalität der Zahl $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$. Perron nahm jedoch Anteil an deren Entwicklung.

So schrieb er mir, als ich ihm das B. I.-Taschenbuch *Analogrechnen* zugeschickt hatte im November 1969: „Als mir das Wort Informatik vor wenigen Wochen zum ersten Mal begegnete, da dachte ich, da heute soviel Reklame für elektronische Datenverarbeitung gemacht wird und man für Daten ja auch Informationen sagen kann, wie sie zum Beispiel den Meteorologen täglich aus der ganzen Welt zugehen und zu Wetterkarten und Prognosen verarbeitet werden, daß es sich bei der Informatik um die Verarbeitung irgendwelcher Informationen handeln könnte. Da aber die Beschaffung wichtiger Informationen nicht auf allen Gebieten so einfach ist, wie bei den Meteorologen, da vermute ich, daß ein wichtiger Zweig der Informatik, den man vielleicht Spionatik nennen könnte, sich mit dieser Frage der Informationsbeschaffung beschäftigen würde.

Nun aber ersehe ich aus dem linken Teil des zweiseitigen Titelblattes Ihres Buches, daß ich mich gründlich geirrt habe und daß Informatik die Zusammenfassung einer ganzen Reihe recht ernster Wissenschaften ist, zu denen auch Ihr Analogrechnen gehört. Aber als Norbert Wiener mit seiner Kybernetik herauskam, wußte man auch mit dem Wort nichts Rechtes anzufangen...."

Einen wichtigen Teil des wissenschaftlichen Perronschen Lebenswerkes stellen seine Bücher dar.

Les livres sont comme les enfants:
Conçus avec volupté,
Menés à terme avec fatigue,
Enfantés avec douleur*).

Diese Sentenz stellt Perron an den Anfang seiner letzten wissenschaftlichen Veröffentlichung vom 2. Februar 1973 und bemerkt, daß er deren Wahrheit oft bei seinen Büchern und kleineren Druckerzeugnissen deutlich verspürt hat.

Sein erstes Buch, das er als a. o. Professor in Tübingen 1913 in B. G. Teubners „Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendung" veröffentlichte, war die „Lehre von den Kettenbrüchen". Es war das erste Lehrbuch über dieses Gebiet, das eine zusammenhängende, in sich abgeschlossene Darstellung der bisher in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verstreuten Kenntnisse über Kettenbrüche, einschließlich eigener Forschungsergebnisse gab und das für viele bisher schon bekannte Sätze erstmals exakte Beweise lieferte. Hervorgegangen aus einer im Wintersemester 1909/10 als Privatdozent an der Universität München gehaltenen Vorlesung, ist es zu einem Standardwerk auf dem Gebiet der Kettenbrüche geworden. Nach der 1929 erfolgten 2. Auflage erschien eine wesentlich vermehrte und modernisierte 3. Auflage in zwei Teilen und zwar 1954 Teil I, 1957 Teil 2. Nach dem Vorbild seines Lehrers Pringsheim zeichnet sich die Darstellung durch peinliche mathematische Strenge aus, die vorher bei Beweisen keineswegs allgemein üblich war, z. B. nicht bei den zahlreichen Arbeiten Eulers über Kettenbrüche. Der erste elementar mathematische Teil ist den regelmäßigen Kettenbrüchen gewidmet. Im zweiten, analytischen-funktionentheoretischen Teil werden Konvergenzfragen, der analytische Charakter gewisser Kettenbrüche, deren Elemente Funktionen einer Variablen sind, behandelt. Dem Charakter eines Lehrbuches entsprechend, wird große Sorgfalt auf die Formulierung der Lehrsätze verwandt. Diese ist so gehalten, daß sie alles beinhalten, was zu ihrem Verständnis und zur richtigen Anwendung erforderlich ist, was auch die weiteren Lehrbücher Perrons auszeichnet und so ihre Benutzung als Nachschlagwerk ermöglicht und erleichtert.

Die als o. Professor in Heidelberg 1923 als erster Band der Göschenschen Lehrbücherei in der Gruppe Reine Mathematik publizierten „Irrationalzahlen" wenden sich in erster Linie an die Studierenden. Das Buch setzt die Theorie der rationalen Zahlen als bekannt voraus und begründet die Theorie der Irrationalzahlen mit Hilfe des Dedekindschen Schnittes. Dabei werden die verschiedenen Darstellungen der Irrationalzahlen insbesondere durch Kettenbrüche, die Approximation von Irrationalzahlen durch rationale, sowie algebraische und transzendente Zahlen behandelt einschließlich der Transzendenzbeweise für e und π. Die „Irrationalzahlen" waren lange Jahre die einzige zusammenfassende Darstellung dieses Gebietes. 1939 erfolgte die zweite, 1947 die dritte und 1960 die vierte Auflage.

1927 erscheinen die beiden Bände Algebra I und II als Band 8 und 9 von Göschens Lehrbücherei. Sie erlebten 1931 bzw. 1933 die zweite und 1951 als anastatischer Neudruck die dritte Auflage. Generationen von Mathematikstudenten

*) Bücher sind wie Kinder: / Sie werden mit Lust empfangen / mit Mühe ausgetragen / und mit Schmerzen hervorgebracht.

gaben diese beiden Bände in leicht verständlicher und doch mathematisch strenger Weise eine solide Einführung in die klassische Algebra. Band 1 setzt die reellen Zahlen als bekannt voraus und bringt in einer für Anfänger behutsamen Weise als Grundlage den Körperbegriff. Es folgen Polynome, Determinanten, symmetrische Funktionen, Teilbarkeit, sowie die Existenz von Wurzeln von Gleichungen und Gleichungssystemen. Der zweite Band ist der Theorie der algebraischen Gleichungen gewidmet. Neben den bewährten numerischen Verfahren von Newton, Bernoulli und Graeffe werden für die Praxis bequem zu handhabende Abschätzungen von Wurzeln algebraischer Gleichungen gegeben. Der Schwerpunkt dieses Bandes liegt auf der Galoisschen Gleichungstheorie, die hier eine besonders verständliche Darstellung findet, und der daraus sich ergebenden Folgerungen für die Darstellung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Nicht die größtmögliche Allgemeinheit in der Darstellung des Stoffes, wie sie in den neueren Darstellungen der Algebra heute üblich ist, wird hier angestrebt. Das Anliegen des Autors ist es vielmehr, dem Leser unmittelbar anwendbare Methoden und Ergebnisse zur Verfügung zu stellen und das in einer didaktisch geschickten Weise. „Es war meine Absicht, ein Lehrbuch zu schreiben, das obwohl es auch dem Forscher durchaus nicht bloß Bekanntes sagt, doch in erster Linie für die Hand des Studierenden gedacht ist. Deshalb ist in der Darstellung seiner Auffassungsgabe Rechnung getragen, selbstverständlich bei absoluter Strenge in den Beweisen." Diese Grundhaltung wünschte man sich bei manchem modernen Lehrbuch.

Das letzte Lehrbuch Perrons ist die 1962 in den Mathematischen Leitfäden des B. G. Teubner Verlages erschienene Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. „Dieses Büchlein ist im wesentlichen der Niederschlag einer Vorlesung, mit deren Abhaltung ich mich in den Jahren nach meiner Emeritierung unter Abwandlungen mehrfach vergnügt habe" schreibt Perron im Vorwort. „Ich hoffe, daß meine Kollegen von der Hochschule manchen nützlichen Gedanken darin finden werden, geschrieben ist es aber eigentlich für die Schule, das heißt für die Lehrer und die es werden wollen, die Studierenden." Die Grundlage des Perronschen Büchleins ist die Anschauung des Lesers. Es werden nur solche Tatbestände gefordert, die anschaulich unmittelbar klar sind „weil wir sie an den vorgestellten Dingen einfach sehen, d. h. weil sie in unserer Vorstellung mit enthalten sind." Durch die dann eingeführten Axiome wird die Vorstellung genauer beschrieben. Der Anschaulichkeit und des einfacheren Zuganges wegen wird ein weniger rigoroses Axiomensystem zugrundegelegt, das auch Forderungen enthält, die sich aus den anderen Axiomen beweisen lassen. Von diesem Axiomensystem ausgehend, wird dann die nichteuklidische und die euklidische Geometrie mathematisch exakt und mitunter durch Perronschen Humor gewürzt aufgebaut und deren Widerspruchslosigkeit auf das Problem der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik zurückgeführt.

Außer seinen Büchern hat O. Perron über 200 wissenschaftliche Arbeiten in mathematischen Zeitschriften publiziert. Sie behandeln in der Hauptsache fünf große Gebiete: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, unendliche Reihen, Kettenbrüche, diophantische Approximationen und Geometrie. Es ist hier nicht der Raum, ausführlich auf die einzelnen Arbeiten und deren Bedeutung einzugehen. Es kann hier nur in großen Zügen seine Arbeit auf diesem Gebiet skizziert werden.

Die Arbeiten über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen sind nicht nur für die Theorie interessant, sie sind auch für die Praxis von großer Bedeutung. Sie behandeln Fragen der Existenz von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen sowie von Differentialgleichungssystemen und partieller Differentialgleichungen. Ein- und Mehrdeutigkeit von Lösungen, Eigenschaften der Integrale linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie die Abhängigkeit von Parametern, ihr Verhalten für große Werte der unabhängigen Variablen, Fragen der Wachstumsordnung und des Wachstumstypus, das infinitäre Verhalten der Integrale an stark singulären Stellen, die Gestalt der Integralkurven in der Umgebung eines singulären Punktes, Fragen der Stabilität und des asymptotischen Verhaltens von Lösungen von Differential- und Differenzengleichungen, lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten, insbesondere solche unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten, Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen mittels unendlicher Reihen. Viele der Perronschen Ergebnisse gehören heute zum klassischen Bestand auf dem Gebiet der Differentialgleichungen. Auch mit der Anwendung der Differentialgleichungen auf Himmelsmechanik beschäftigte sich Perron und hat in mehreren Arbeiten periodische Lösungen für das Drei-, Vier- und Mehrkörperproblem erhalten.

In seinen Arbeiten über unendliche Reihen befaßte er sich mit der Summation divergenter Reihen mittels konvergenzerzeugender Faktoren, dem Konvergenzverhalten gewisser Reihen, insbesondere in Abhängigkeit von Parametern.

Ein weiteres lohnendes Arbeitsgebiet fand Perron in der Theorie der Kettenbrüche, der ja schon sein erstes Buch gewidmet ist. Hier beschäftigten ihn Konvergenzfragen gewisser Kettenbrüche, die Ermittlung von Konvergenz- und Divergenzkriterien für alternierende Kettenbrüche, für Kettenbrüche mit positiven Gliedern, für periodische Kettenbrüche, des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus mit komplexen Elementen, Kettenbruchentwicklung der Quadrate zweier Besselfunktionen, die Untersuchung gewisser Kettenbrüche auf Periodizität sowie kürzerer Beweise oder Richtigstellung von Beweisen über gewisse Kettenbruchentwicklungen. Probleme über Kettenbrüche haben Perron sein ganzes wissenschaftliches Werk hindurch beschäftigt bis zu seiner letzten Arbeit im Jahre 1973 „Der Jacobische Kettenalgorithmus in einem kubischen Zahlenkörper II“, in der er die Beantwortung der Frage nach der Periodizität ungelöst „jüngeren Kräften überlassen mußte.“

Eng verbunden mit der Theorie der Kettenbrüche ist das Gebiet der Diophantischen Approximationen, ein Lieblingsthema, das Perron seit seiner Habilitation in Fortführung Minkowskischer Verfahren und Ergebnisse in Abständen zeitlebens beschäftigt und in zahlreichen Arbeiten gefördert hat. Er verallgemeinerte Ergebnisse von Hurwitz über die Approximation von Irrationalzahlen durch rationale, gab Schranken an, die im allgemeinen Fall nicht mehr zu verbessern waren. Bei der simultanen Approximation mehrerer Irrationalzahlen durch rationale sind die Perronschen Übertragungssätze entscheidend, welche diese Approximation mit der Approximation einer inhomogenen Linearform dieser Irrationalzahlen mit ganzen Koeffizienten verkoppelt. Perron befaßte sich als erster mit der Approximation komplexer Zahlen durch Zahlen des Körpers $\mathbf{K}(i)$, sowie mit diophantischen Approximationen in imaginär quadratischen Zahlkörpern und damit eng zusammenhängend mit der Frage, in welchen imaginär quadratischen Zahlkörpern ein Euklidischer Algorithmus existiert und gab solche an mit $\mathbf{K}(i)$, $\mathbf{K}(i\sqrt{2})$ und $\mathbf{K}(i\sqrt{3})$. Der Ermittlung von Minima indefiniter quadratischer Formen mit komplexen Koeffizienten, positiv definiter Hermitescher Formen, von Produkten homogener und inhomogener Linearformen sind weitere Arbeiten Perrons gewidmet. Die Frage nach der Periodizität der beim Jacobi-Kettenalgorithmus zweier Zahlen auftretenden Folgen hat Perron noch in seiner letzten Arbeit für den kubischen Zahlenkörper untersucht.

In den letzten Jahren beschäftigte sich Perron mit Fragen der Hyperbolischen Geometrie, worüber er eine größere Zahl von Arbeiten über einen neuen Aufbau der Hyperbolischen Geometrie, Parameterdarstellung von Gerade, Ebene und Raum, Spiegelung, Kreisverwandtschaft, Doppelverhältnis, Sätze von Ceva u. a. publizierte.

Neben den Arbeiten aus den genannten Gebieten, denen sich Perron in Abständen immer wieder widmete, seien auch noch einige andere Arbeiten kurz erwähnt, so zur Integrationstheorie, für die der Perronsche Integralbegriff, der den Lebesgueschen umfaßt, Bedeutung erlangt hat, Existenzsätze für implizite Funktionen, eine Arbeit über singuläre Punkte auf dem Konvergenzkreis, die Ausfüllung des Raumes mit kongruenten Würfeln sowie Probleme der Zahlentheorie, etwa zur Verteilung quadratischer Reste oder ein Beweis des Moessnerschen Satzes und Arbeiten zur Algebra. In einer frühen Arbeit „Zur Theorie der Matrices", Math. Ann. **64** (1907) entdeckt Herr Perron u.a. den folgenden Satz: Bei positiven Matrizen „hat die charakteristische Gleichung eine einfache positive Wurzel, welche alle anderen Wurzeln an absolutem Betrage übertrifft." Er bemerkt dort ferner, daß dieser Satz auch gilt, wenn die Elemente der Matrix nur zum Teil positiv, die übrigen aber gleich Null sind „sofern nur eine gewisse Potenz der Matrix existiert, bei der kein Element mehr verschwindet." Diese Ergebnisse werden heute zusammen mit späteren Ergebnissen von Frobenius (1912) häufig als Satz von Perron und Frobenius zitiert. Sie spielen eine zentrale Rolle in vielen Teilgebieten in der Angewandten Mathematik, so beispielsweise in der Theorie der Iterationsverfahren für lineare und nichtlineare Gleichungssysteme, in der mathematischen Wirtschaftstheorie und bei den Wahrscheinlichkeitsmatrizen.

In seiner letzen Veröffentlichung aus dem Jahre 1973 schrieb Perron: „Mich zwingt meine fortschreitende Erblindung im Verein mit dem Immer-kleiner-Werden von allem sonst vielleicht einmal hilfreichen Gedrucktem jetzt meine Feder aus der Hand zu legen."

Nachdem er sich jedoch erfolgreich einer Augenoperation unterzogen hatte und wieder besser sehen konnte, da war es wieder ein Problem der Zahlentheorie, das ihn beschäftigte und das er mir, als ich ihn bei einem Besuch an seinem letzten (dem 94.) Geburtstag zuhause in geistiger und körperlicher Frische antraf, in der ihm eigenen lebhaften, humorvollen Art darlegte.

Im darauffolgenden Sommer jedoch verließen ihn plötzlich seine körperlichen und geistigen Kräfte, so daß das Leben, wie mir seine Töchter Hedwig und Erika schrieben, für ihn nicht mehr lebenswert war und der Tod nach einem erfüllten Leben als allseits geschätzte Persönlichkeit, als verehrter akademischer Lehrer und erfolgreicher Forscher in dem hohen Alter von nahezu 95 Jahren am 22. Februar 1975 als Erlöser kam.

Werk und Persönlichkeit Perrons fanden Anerkennung in zahlreichen Ehrungen. Er war seit 1917 Mitglied der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, seit 1924 Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, in deren Sitzungsbrichten eine große Zahl seiner Arbeiten erschienen ist, seit 1928 Mitglied der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und Mitglied der Leopoldina zu Halle. Die Universitäten Tübingen und Mainz verliehen ihm 1956 bzw. 1960 die Ehrendoktorwürde. Der Titel Geheimer Regierungsrat (vor 1933) und die Verleihung des Bayerischen Verdienstordens (1959) kennzeichnen die Anerkennung, die Perron als Persönlichkeit auch außerhalb der mathematischen Welt vor und nach dem „Dritten Reich" gefunden hat.

O. Perron ist einer der großen klassischen Mathematiker des 20. Jahrhunderts, dessen Arbeiten und Anregungen noch lange fortwirken und dessen Beispiel als Wissenschaftler und akademischer Lehrer, als eine liebenswerte, humorvolle und aufrechte Persönlichkeit seinen Schülern stets ein leuchtendes Vorbild bleiben wird.

Veröffentlichung von O. Perron in wissenschaftlichen Zeitschriften

[1] Über die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt bei Wirkung äußerer Kräfte. Dissertation, Uni. München, 1902

[2] Über eine Anwendung der Idealtheorie auf die Frage nach der Irreduzibilität algebraischer Gleichungen. M. Ann. **60** (1905)

[3] Note über die Konvergenz von Kettenbrüchen mit positiven Gliedern. Sber. Bay. 1095

[4] Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche. Sber. Bay. 1905

[5] Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus. Leibzig: Teubner-Verl. 1906

[6] Über die singulären Punkte auf dem Konvergenzkreis. Verh. d. Ges. Deut. Naturf. u. Ärzte 1906

[7] Was sind und was sollen die irrationalen Zahlen? Jber. d. dt. Math.-Verein. **16** (1907)

[8] Neue Kriterien für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen J. r. a. M. **132** (1907)

[9] Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus. M. Ann. **64** (1907)

[10] Zur Theorie der Matrices. M. Ann. **64** (1907)

[11] Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen. Sber. Bay. 1907

[12] Über die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselschen Funktionen. Sber. Bay. 1907

[13] Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. J. r. a. M. **134** (1908)

[14] Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes. Sber. Bay. 1908

[15] Fermats Satz. Beilage der Münch. Neuest. Nachr. No. **27** (1908)

[16] Über einen Satz des Herrn Poincaré. J. r. a. M. **136** (1909)

[17] Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen. M. Ann. **66** (1909)

[18] Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. Jber. d. dt. Math.-Verein. **19** (1910)

[19] Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung. J. r. a. M. **137** (1910)

[20] Über eine spezielle Klasse von Kettenbrüchen. Palermo Rend. **29** (1910)

[21] Über lineare Differenzgleichungen. Acta Math. **34** (1911)

[22] Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Acta Math. **34** (1911)

[23] Ein neues Konvergenzkrieterium für Jacobi-Ketten zweiter Ordnung. Arch. d. Math. u. Phys. **17** (1911)

[24] Über Wahrheit und Irrtum in der Mathematik. Jber. d. dt. Math.-Verein. **20** (1911)

[25] Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten. M. Ann. **70** (1911)

[26] Einige Konvergenz- und Divergenz-Kriterien für alternierende Kettenbrüche. Sber. Bay. 1911

[27] Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums. Jber. d. dt. Math.-Verein. **22** (1913)
[28] Über Differentialgleichungen erster Ordnung, die nicht nach der Ableitung aufgelöst sind. Jber. d. dt. Math.-Verein. **22** (1913)
[29] Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist (Erste Mitteilung). J. r. a. M. **142** (1913)
[30] Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reel ist. (Zweite Mitteilung). J. r. a. M. **143** (1913)
[31] Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche. M. Ann. **74** (1913)
[32] Über das Verhalten von $f^{(\nu)}(x)$ für lim $(\nu) = \infty$, wenn $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt. Sber. Bay. 1913
[33] Periodische Funktionen und Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen. Acta Math. **37** (1914)
[34] Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe. Arch. d. Math. u. Phys. **22** (1914)
[35] Abschätzung der Lösung der Pellschen Gleichung. J. r. a. M. **144** (1914)
[36] Beweis für die Existenz von Integralen einer gewöhnlichen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unstetigkeitsstelle. M. Ann. **75** (1914)
[37] Über den Integralbegriff. Sber. Hei. 1914
[38] Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. M. Ann. **76** (1915)
[39] Über konvergente Matrixprodukte. Sber. Hei. 1915
[40] Herleitung des mit $\sqrt{D(x)}$ korrespondierenden Kettenbruchs, wenn $D(x)$ ein Polynom dritten Grades ist. Sber. Hei. 1916
[41] Neue Existenzsätze für implicite Funktionen. Sber. Hei. 1916
[42] Über das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter. 1. Teil. Sber. Hei. 1916
[43] Über Systeme von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. J. r. a. M. **147** (1917)
[44] Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen. Sber. Bay. 1917
[45] Über das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter. 2. Teil. Sber. Hei. 1917
[46] Über das infinitäre Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn die charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat. Sber. Hei. 1917
[47] Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat. Sber. Hei. 1917
[48] Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. M. Ann. **78** (1918)
[49] Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung bei großen Werten der unabhängig Variablen. M. Zeit. **1** (1918)
[50] Über die Abhängigkeit der Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen von einem Parameter. I. Abhandlung. Sber. Hei. 1918
[51] Über die Abhängigkeit der Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen von einem Parameter. II. Abhandlung. Sber. Hei. 1918
[52] Über einen Satz des Herrn Helge von Koch über die Integrale linearer Differentialgleichungen. M. Zeit. **3** (1919)
[53] Über eine spezielle Klasse von Regelflächen. M. Zeit. **4** (1919)
[54] Ein neuer Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. M. Zeit. **5** (1919)
[55] Über Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen durch Reihen. Sber. Hei. 1919
[56] Über die Abhängigkeit der Integrale eines Systems linearer Differentialgleichung von einem Parameter. III. Abhandlung. Sber. Hei. 1919
[57] Über Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen durch Reihen II. Sber. Hei. 1919
[58] Über Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen durch Reihen III. Sber. Hei. 1919
[59] Über Additions- und Subtraktionstheoreme. Arch. d. Math. u. Phys. **28** (1920)
[60] Zur Theorie der divergenten Reihen. M. Zeit. **6** (1920)

[61] Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen. M. Zeit. **6** (1920)
[62] Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. M. Zeit. **6** (1920)
[63] Bemerkung zu der Arbeit „Über eine spezielle Klasse von Regelflächen." M. Zeit. **6** (1920)
[64] Zur Theorie der Summengleichungen. M. Zeit. **8** (1920)
[65] Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes II. Sber. Bay. 1920
[66] Paul Stäckel. Sber. Hei. 1920
[67] Zur Abwehr. Sber. Hei. 1920
[68] Über Integration partieller Differentialgleichungen durch Reihen. Sber. Hei. 1920
[69] Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters. J. r. a. M. **151** (1921)
[70] Über diophantische Approximation. M. Ann. **83** (1921)
[71] Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen. M. Ann. **84** (1921)
[72] Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten. M. Ann. **84** (1921)
[73] Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale. Sber. Hei. 1921
[74] Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale, II. Sber. Hei. 1921
[75] Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn Ogura: „The theory of the tides." Tohoku Math. J. **19** (1921)
[76] Einige elementare Funktionen, welches sich in eine trigonometrische, aber nicht Fouriersche Reihe entwickeln lassen. M. Ann. **87** (1922)
[77] Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. M. Zeit. **15** (1922)
[78] Neue Summationsmethoden und Entwicklungen nach Polynomen. Sber. Hei. 1922
[79] Über Transzendente Funktionen auf Riemannschen Flächen. Sber. Hei. 1922
[80] Ansprache zu Lindemanns 70. Geburtstag. Jber. d. dt. Math.-Verein. **32** (1923)
[81] Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes, Zweiter Teil. M. Zeit. **16** (1923)
[82] Über einen Grenzwertsatz. M. Zeit. **17** (1923)
[83] Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgaben für $\Delta u = O$. M. Zeit. **18** (1923)
[84] Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation. M. Zeit. **18** (1923)
[85] Über Gleichungen ohne Affekt. Sber. Hei. 1923
[86] Beweis eines Satzes von Bézout. M. Zeit. 21, 1924
[87] Bemerkungen zur Algebra. Sber. Bay. 1924
[88] Bestimmung aller geradlinigen rhombischen Netze. Sber. Bay. 1924
[89] Beispiele linearer Differentialgleichungen mit partikulären Integralen, die sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten. Acta Math. **48** (1926)
[90] Die vollständige Induktion im Kontinuum. Jber. d. dt. Math.-Verein. **35** (1926)
[91] Über Ein- und Mehrdeutigkeit des Integrals eines Systems von Differentialgleichungen. M. Ann. **95** (1926)
[92] Über geodätische rhombische Netze auf krummen Flächen. M. Zeit. **24** (1926)
[93] Nachtrag zu meiner Arbeit: Über geodätische rhombische Netze auf krummen Flächen. M. Zeit. **24** (1926)
[94] Über Maxima und Minima und eine Modifikation des Begriffs der höheren Ableitungen. Sber. Bay. 1926
[95] Über elementare Methoden der analytischen Fortsetzung. Jber. d. dt. Math.-Verein. **36** (1927)
[96] Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im reellen Gebiet. M. Zeit. **27** (1928)
[97] Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. M. Zeit. **28** (1928)
[98] Über einen Satz von Besicovitsch. M. Zeit. **28** (1928)
[99] Über den größten gemeinsamen Teiler von zwei Polynomen. Sber. Bay. 1928
[100] Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen. J. r. a. M. **161** (1929)
[101] Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen. M. Zeit. **29** (1929)
[102] Über die Picard-Landauschen Sätze. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1929
[103] Die Winkeldreiteilung des Schneidermeisters Kopf. Sber. Bay. 1929
[104] Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von gewöhnlichen Differentialgleichungen und Differenzengleichungen. Atti Congr. int. Mat. Bologna 1930

[105] Alfred Pringsheim zum 80. Geburtstag. Forschungen und Fortschritt, Korr. blatt d. Deut. Wiss. u. Tech. Berlin **6** (1930)
[106] Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers **K**(i). M. Ann. **103** (1930)
[107] Über eine Formel des Herrn Schwatt. M. Zeit. **31** (1930)
[108] Die Ordnungszahlen linearen Differentialgleichungssysteme. M. Zeit. **31** (1930)
[109] Über eine Matrixtransformation. M. Zeit. **32** (1930)
[110] Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. M. Zeit. **32** (1930)
[111] Über ein vermeintliches Stabilitätskriterium. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1930
[112] Ganze transzendente Funktionen mit rationalen Taylorkoeffizienten und vorgeschriebenen Nullstellen. M. Ann. **104** (1931)
[113] Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers **K**(i). (Zweite Mitteilung). M. Ann. **105** (1931)
[114] Über einen Approximationssatz von Hurwitz und über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln. Sber. Bay 1931
[115] E. Study (Nachruf). Jb. Bay. 1931/32
[116] Eine Abschätzung für die untere Grenze der absoluten Beträge der durch eine reelle oder imaginäre binäre quadratische Form darstellbaren Zahlen. M. Zeit. **35** (1932)
[117] Über mehrfach transzendente Erweiterungen des natürlichen Rationalitätsbereichs. Sber. Bay. 1932
[118] Quadratische Zahlkörper mit Euklidischem Algorithmus. M. Ann. **107** (1933)
[119] Über das Minimum positiver Hermitescher Formen. M. Zeit. **36** (1933)
[120] Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlenkörpern. insbesondere im Körper $K(i\sqrt{2})$. M. Zeit. **37** (1933)
[121] Eine neue Winkeldreiteilung des Schneidermeisters Kopf. Sber. Bay. 1933
[122] Die neue Winkeldreiteilung des Schneidermeisters Kopf. Forschungen und Fortschritte, Korr. blatt d. Deut. Wiss. u. Technik, Berlin **10** (1934)
[123] Explizite Lösung einer gewissen partiellen Differenzengleichung bei vorgegebenen Randwerten auf einem Rechteck. Sber. Hei. 1934
[124] Satz über Jacobi-Ketten 2. Ordnung. Ann. R. Scu. norm. sup. Pisa **4** (1935)
[125] A Remark on Minkowski's theorem about linear forms. J. London math. Soc. **10** (1935)
[126] Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem. Mh. Math. u. Phys. **43** (1936)
[127] Über ein Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems (Mondbahnen). Sber. Bay. 1936
[128] S. Pincherle (Nachruf). Jb. Bay. 1936/37
[129] Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Vierkörperproblems. M. Ann. **113** (1937)
[130] Über die Entwickelbarkeit der Integrale von Differentialgleichungen nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte. M. Ann. **113** (1937)
[131] Bemerkung zu einem Irreduzibilitätskriterium des Herrn Petterson. M. Ann. **114** (1937)
[132] Neue periodische Lösungen des ebenen Drei- und Mehrkörperproblems. M. Zeit. **42** (1937)
[133] Osservazioni riguardo un teorema di C. Biggeri. Boll. Un. mat. Ital. **16** (1937)
[134] Über eine Resultate. Mat. es Fiz. Lapok. **44** (1937)
[135] Über die Lage eines singulären Punktes auf dem Konvergenzkreis. Sber. Bay. 1937
[136] Neuer Beweis eines Satzes von Minkowski. M. Ann. **115** (1938)
[137] Zu Nehring, Konstruktion am regelmäßigen 2n-Eck, Sber. Bay. 1938
[138] Über Bruwiersche Reihen. M. Zeit. **45** (1939)
[139] Über lückenlose Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel. M. Zeit. **46** (1940)
[140] Über lückenlose Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel II. M. Zeit. **46** (1940)
[141] Modulartige lückenlose Ausfüllung des $\mathbf{R}_n$ mit kongruenten Würfeln I. M. Ann. **117** (1940/41)
[142] Modulartige lückenlose Ausfüllung des $\mathbf{R}_n$ mit kongruenten Würfeln II. M. Ann. **117** (1940/41)
[143] Das Verschwinden der Klammersymbole in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungssysteme. M. Ann. **117** (1940/41)

[144] Über die Bedingungen, daß eine binäre Form n-ten Grades einen n-te Potenz ist, und über die rationale Kurve n-ter Ordnung im R_n. M. Ann. **118** (1941/43)
[145] Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker. M. Ann. **118** (1941/43)
[146] Über die Approximation stetiger Funktionen durch trigonometrische Polynome. M. Zeit. **47** (1942)
[147] Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker. M. Zeit. **47** (1942)
[148] Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung. M. Zeit. **48** (1942/43)
[149] Einige Bemerkungen über rationale Flächen. M. Zeit. **48** (1942/43)
[150] Berechnung der Grundeinheit in reellen quadratischen Körpern und Ringen. J. r. a. M. **185** (1943)
[151] Neuer Aufbau der nichteuklidischen (hyperbolischen) Trigonometrie. M. Ann. **119** (1943)
[152] Studien über den Vielfachheitsbegriff und den Bézoutschen Satz. M. Zeit. **49** (1944)
[153] Alfred Pringsheim (Nachruf). Jb. Bay. 1944/48
[154] Kurt Hensel (Nachruf). Jb. Bay. 1944/48
[155] Erich Hecke (Nachruf). Jb. Bay. 1944/48
[156] Godfrey Harold Hardy (Nachruf). Jb. Bay. 1944/48
[157] Ein Analogon zu einem Satz von Minkowski. Sber Bay 1946
[158] Über die Gleichung $X^2 - DY^2 = \pm c \cdot (2^{31} - 1)$, wo c möglichst klein ist. Sber. Bay. 1948, Arbeit von W. Patz, Vorbemerkung von Perron
[159] Ein Beweis für die Primalität der Zahl $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$. Sber. Bay. 1948
[160] Diophantische Ungleichungen in imaginären quadratischen Körpern. Saertryk af Matematisk Tidsskrift B (1949)
[161] Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra im Reellen. Annali di Mathematica, Ser. IV, Bologna (1949)
[162] Neuer Beweis zweier klassischer Sätze über Diophantische Approximationen. Acta Sci. Math. Szeged, **12** (1950)
[163] Über die Abhängigkeit von Polynomen. Sber. Bay. 1950
[164] Ein einfacher analytischer Beweis der Sommerfeldschen Ungleichung. Sber. Bay. 1950 (Sitzung vom 9. Juni 1950)
[165] Harald Bohr (Nachruf). Jb. Bay. 1951
[166] Beweis des Moessnerschen Satzes. Sber. Bay. 1951
[167] Harald Bohr. Jber. d. dt. Math.-Verein. **55** (1952)
[168] Constantin Carathéodory. Jber. d. dt. Math.-Verein. DMV. **55** (1952)
[169] Bemerkungen über die Verteilung der quadratischen Reste. M. Zeit. **56** (1952)
[170] Über eine Formel von Ramanujan. Sber. Bay. 1952
[171] Alfred Pringsheim. Jber. d. dt. Math.-Verein. **56** (1953)
[172] Über die Preece'schen Kettenbrüche. Sber. Bay. 1953
[173] Neuer Beweis zweier Sätze von Zariski über die Multiplizität einer Lösung von k Gleichungen mit k Unbekannten. Sber. Bay. 1954
[174] Neue Periodizitätsbeweise für die regelmäßigen und halbregelmäßigen Kettenbrüche quadratischer Irrationalzahlen. Sber. Bay. 1954
[175] Remark on a certain class of continued fractions. Proc. AMS **5** (1954) (Zusammen mit Evelyn Frank).
[176] Über die Abhängigkeit von Potenzsummen und einen Satz von Polya. M. Zeit **63** (1955)
[177] Über Potenzsummen. M. Zeit. **64** (1956)
[178] Über eine Schlichtheitsschranke von James S. Thale. Sber. Bay. 1956
[179] Ein neuartiges diophantisches Problem. M. Zeit. **67** (1957)
[180] Über zwei Kettenbrüche von H. S. Wall. Sber. Bay. 1957
[181] Über zwei ausgeartete Heinesche Reihen und einen Kettenbruch von Ramanujan. M. Zeit. **70** (1958)
[182] Über einen Kettenbruch von Ramanujan. Sber. Bay. 1958
[183] Über lineare Differenzengleichungen und eine Anwendung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynomkeoffizientne. M. Zeit. **72** (1959)
[184] Leopold Fejér (Nachruf). Jb. Bay. 1960
[185] Über lineare Differentialgleichungen mit reeller unabhängig Variabler. Sber. Bay. 1960
[186] Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung, wenn die unabhängig Variable gegen $+\infty$ geht. Sber. Bay. 1960
[187] Rudolf Steuerwald (Nachruf). Jahres-Chronik der Uni. München 1961/62

[188] Der Satz von Ptolemäus in der hyperbolischen Geometrie. Sber. Bay. 1963
[189] Heinrich Tietze (Nachruf). Jahres-Chronik der Uni. München 1963/64
[190] Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks in der hyperbolischen Geometrie. M. Zeit. **84** (1964)
[191] Miszellen zur hyperbolischen Geometrie. Sber. Bay. 1964
[192] Über Ähnlichkeit, Dehnung und Schrumpfung in der hyperbolischen Geometrie. M. Zeit. **90** (1965)
[193] Miszellen zur hyperbolischen Geometrie II. Sber. Bay. 1965
[194] Spiegelungen in der hyperbolischen Geometrie. M. Ann. **166** (1966)
[195] Kreisverwandtschaften in der hyperbolischen Geometrie. M. Zeit. **93** (1966)
[196] Miszellen zur hyperbolischen Geometrie III. Sber. Bay. 1966
[197] Lehrreiches Beispiel für die guten Dienste, die die hyperbolische Geometrie ihrer Euklidischen Schwester leisten kann. M. Ann. **174** (1967)
[198] Parameterdarstellung von Gerade, Ebene und Raum in der hyperbolischen Geometrie. M. Zeit. **97** (1967)
[199] Parameterdarstellung von Gerade, Ebene und Raum in der hyperbolischen Geometrie II. M. Zeit. **101** (1967)
[200] Die Bewegungen des hyperbolischen Raumes. Sber. Bay. 1967
[201] Über Massenmittelpunkt und Schwerpunkt im hyperbolischen Raum. Der Mathematikunterricht **15** (1969)
[202] Über einen neuen Aufbau der hyperbolischen Geometrie und eine Ungleichung. M. Zeit. **112** (1969)
[203] Der Jacobi'sche Kettenalgorithmus in einem kubischen Zahlenkörper. Sber. Bay. 1971
[204] Eine Liste von zyklischen kubischen Gleichungen. J. r. a. M. **262/263** (1973)
[205] Der Jacobi'sche Kettenalgorithmus in einem kubischen Zahlenkörper II. Sber. Bay. 1973

Verzeichnis der unter O. Perron angefertigten Dissertationen

Zusammengestellt von K. Seebach, München

[1] Haendel, Margarethe: Asymptotische Reihenentwicklungen für die hypergeometrische Funktion bei unbegrenztem Wachstum ihrer Parameter, 1924; Univ. München, U 25.7375
[2] Schmidt, Hermann: Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Funktionenkörper, 1927; Univ. München, U 28.5300
[3] Häusler, Ludwig: Über das asymptotische Verhalten der Taylor-Koeffizienten einer gewissen Funktionenklasse, 1929; Math. Z. **32**; Univ. München, U 30.5572
[4] Vogel, Kurt: Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik in ihrem Zusammenhang mit der 2:n-Tabelle des Papyrus Rhind, 1929; Univ. München, U 29.5172
[5] Winkler, Ernst: Über die hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten, 1931; Univ. München, U 31.6474
[6] Herz, Josef: Über meromorphe transzendente Funktionen auf Riemannschen Flächen, 1933; Univ. München, U 33.4301
[7] Oberseider, Hannskarl: Über das Minimum positiver Hermitescher Formen, 1933; Univ. München, U 34.4998
[8] Mall, Josef: Grundlagen für eine Theorie der mehrdimensionalen Padéschen Tafel, 1934; Univ. München, U 34.7977
[9] Zurl, Erna: Theorie der reduziert-regelmäßigen Kettenbrüche, 1934; Math. Ann. **110**; Univ. München, U 35.2854
[10] Nazim, Ahmet: Über Finslersche Räume, 1936; Univ. München, U 37.8439
[11] Lunz, Paul: Kettenbrüche, deren Teilnenner dem Ring der Zahlen 1 und $\sqrt{2}$ angehören; Univ. München, U 37.8429
[12] Bradistilov, Georgi: Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene, 1938; Math. Ann. **116**; Univ. München, U 38.7874
[13] Forster, Herbert: Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes, 1938; Math. Z. **43** ; Univ. München, U 38.7881

[14] U n k e l b a c h, Helmut: Über beschränkte Funktionen, deren Wertevorrat gewisse Lücken aufweist, 1938; Math. Ann. **115**; Univ. München, U 38.7927
[15] W e i ß, Gottfried: Eine neue Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems, 1938; Math. Z. **43**; Univ. München, U 38.7933
[16] A r a l, Hasan: Simultane diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlenkörpern, 1939; Univ. München, U 39.7915
[17] H e i n h o l d, Josef: Verallgemeinerung und Verschärfung eines Minkowskischen Satzes, 1939; Math. Z. **44**; Univ. München, U 39.7936
[18] R e i s c h, Paul: Periodische Lösungen des ebenen Dreikörperproblems in der Nähe der Lagrangeschen Dreieckslösung, 1939; Math. Z. **45**; Univ. München, U 39.7957
[19] Y u r t s e v e r, Berki: Lösung einer partiellen Differentialgleichung durch unendliche Reihen, 1941; Univ. München, U 41.50000
[20] K e i l, Karl August: Das qualitative Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes, 1952; Univ. München, U 52.7725
[21] P a a s c h e, Iwan: Über das Verhalten der Integrale homogener und inhomogener Summengleichungen im Unendlichen, 1954; Univ. München, U 54.7538

Prof. Dr. J. Heinhold
Römerstr. 49
8035 Gauting

Prof. Dr. K. Seebach
Walhallastr. 5
8000 München 19

(*Eingegangen: 24. 9. 1986*)

Buchbesprechungen

Halmos, P. R., I Want to be a Mathematician, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1985, 43 photographs, xvi, 421 pp., Hard cover, DM 134,–

Man findet sie in dieser Form nicht alle Tage: die Autobiographie eines weltbekannten Mathematikers (vom Autor zu „Automathographie" kontrahiert), in der weniger der Ablauf des Menschenlebens als die Entfaltung und Entwicklung seiner Karriere im Vordergrund steht. Da ist kaum die Rede vom Elternhaus, von der Familie oder gar von der Ehefrau. Die Lehrer, Förderer, Kollegen und Schüler werden hervorgehoben. Die Universitäten, an denen der Autor über fünfzig Jahre seines reichen Lebens gelernt und gelehrt hat, erfahren eine besondere Würdigung. Über Reisen, Sprachen, Hobbies zu berichten, erscheint vorrangig vor der Darlegung von Zeitgeschichte und Zeitgeist. Natürlich ist der rote Faden unübersehbar, die Entwicklung derjenigen Teilgebiete der Mathematik, in denen der Verfasser richtungsweisend gearbeitet hat: in Algebraischer Logik und Funktionalanalysis. Mit Zurückhaltung bewertet der Autor seine eigenen Beiträge, ordnet sie vielmehr in den Fortgang der aktuellen Forschung ein und zeigt ihre Konsequenzen auf. Die Darstellung von Genesis und Wirkung seiner durchweg sehr erfolgreichen Lehrbücher und Monographien trägt zum besseren Verständnis der Neuerungen innerhalb analytischer Disziplinen wie Maß-, Ergodentheorie sowie der Theorie des Hilbertraumes bei.

Aber da ist nicht nur der mathematische Forscher mit Gewicht, der spricht, nicht nur der akademische Lehrer, der über die Veränderungen an den (amerikanischen) Universitäten räsoniert, nicht nur der engagierte Referent oder Herausgeber mathematischen Schrifttums. Bemerkenswert deutlich wird des Autors Interesse am Menschen anläßlich der zahlreichen Begegnungen über fünf Jahrzehnte hinweg, auf mehreren Kontinenten, besonders in den Vereinigten Staaten. Mit Hingabe beschreibt er die angenehmen Charakteristika hochverehrter Lehrer, geschätzter Schüler und befreundeter Kollegen. Mit Intensität weiß er aber auch, mutig wie er ist, die Zeitgenossen zu kritisieren, gelegentlich sogar zu verurteilen. Überhaupt sind die hervorragenden Personen- und Charakterdarstellungen schillernd und durchsichtig zugleich.

Hier ist nun die Stelle, wo der Referent gern gesteht, daß er die Automathographie „verschlungen" hat, daß er nach dem Anlesen bald dem lockeren Kolloquial des Autors verfallen war und daß er als Eingeweihter (selbst den Freaks seiner Spezies ausgesetzt) ein einschlägiges Amusement erfuhr. Letzteres, das zugleich ein Stück lebendiger Mathematik vermittelt, sollte sich auch der diagonal Lesende nicht entgehen lassen, da das humorvoll Vorgetragene über Personen und Fakten, auch wenn es reich ist an Sarkasmen, ernst zu nehmende menschliche Motive erkennen läßt. Solche sind nicht zu übersehen zum Beispiel bei den Charakterisierungen der Kollegen Krein (p. 313) und Milman (p. 386), in den Berichten über die Vorlesungen Alexanders (p. 88), über die Mooresche Methode (p. 255) oder über Gelfands Seminar ("A three-ring circus", p. 307), bei den Hinweisen "How to become a big shot" (p. 224) oder "How not to be a chairman" ("A chairman is simultaneously a papershuffler, a protocoll officer, and a policy maker") und bei den Einsichten in "Democracy ad absurdum" (p. 349), wo es u. a. heißt: "The work of the world is done by people, not by committees" (p. 352). Der akademisch geprägte Leser wird dem Autor Zustimmung gewähren wollen anläßlich dieser nüchternen Beurteilung des gegenwärtigen Universitätsbetriebs ("How to do almost everything", chapter 14).

Der Referent, der den Namen des Autors seit seinen ersten Studienjahren, beginnend mit der Pflicht-Lektüre der „Measure Theory", nicht mehr aus den Augen verloren hat, hält unabhängig von einer natürlichen Befangenheit den mehr als unterhaltsamen Text, welcher nach konsequent geführten Tagebuchnotizen erarbeitet wurde, für einen wichtigen Beitrag zum Gesamtbild der heutigen Mathematik. Mehr mathematikgeschichtliche Zusammenhänge hätten das Buch bereichert (z. B. eine präzise Darlegung der Lösung des Problems invarianter Unterräume, über welches der Autor bestens hätte referieren können), mehr über Entdeckerfreud und -leid des forschenden Mathematikers hätte in den stark persönlich abgesteckten Rahmen des Buches hineingepaßt. Stattdessen folgt der Leser dem Autor auf seinen diversen Wegen der Sonne entgegen (als Freund von Sonne und Meer strapaziert er sich als Chairman in Honolulu), registriert die ausgeprägten wissenschaftlichen und administrativen Aktivitäten, vernimmt die Bewunderung von der großen Zahl der herausragenden Schüler und erlebt einen Meister der mathematischen Kommunikation, dessen gedankliche und sprachliche Äußerungen eine besondere Faszination bewirken.

Tübingen H. Heyer

Loeffel, H., BLAISE PASCAL 1623–1662 (Vita Mathematica, Band 2), Basel – Boston: Birkhäuser-Verlag 1987, 175 S., 84 Abb, gebunden, DM 48,–

Im Frühling der Neuzeit tritt uns Mathematik und Philosophie als Einheit in Gestalt zweier französischer Denker höchsten Ranges entgegen: René Descartes (1596–1650) und Blaise Pascal (1623–1662), umgeben von bedeutenden mathematischen Zeitgenossen wie Gérard Desargues (1591–1661) und Pierre Fermat (1601–1665), gefolgt von Giganten wie Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Christiaan Huygens (1629–1695), Isaac Newton (1642–1727) und schließlich Leonhard Euler (1707–1783). – Mit dem vorliegenden 2. Band der von Anfang an bemerkenswerten Birkhäuser-Serie Vita Mathematica widmet der Autor, Professor für Mathematik und Statistik in St. Gallen, dem *Mathematiker* Pascal eine gründliche und gut geschriebene Studie, ohne den Philosophen und homo religiosus Pascal aus dem Auge zu verlieren. Die datenreiche Darstellung, begleitet von vorzüglichem Abbildungsmaterial, und die dicht am Original bleibende, aber öfters die moderne Ausdrucksweise in Dienst nehmende Präsentation mathematischer Texte von Pascal machen das Buch zu einer Fundgrube für jeden um historisches Verständnis bemühten Mathematiker im weitesten Sinne – der Verfasser kann sie fast alle aufgrund seines eigenen Entwicklungsganges als Kollegen ansprechen. Kap. 1 (Biographie) zeigt Pascal als Sproß seiner Familie und Genossen seiner Zeit; der für ihn prägende Jansenismus (Port-Royal) wird knapp und sorgfältig charakterisiert, vom Mémorial (23. 11. 1654, „nuit de feu") wird eine Seite in Faksimile reproduziert, die These, Pascal habe danach keine Mathematik mehr getrieben, widerlegt. Kap. 2 würdigt Pascals Leistungen zur projektiven Geometrie und Kegelschnitt-Theorie im zeitgenössischen Kontext. In Kap. 3 erfährt man alles Wesentliche zur damaligen Entwicklung der ersten Rechenmaschinen; Schickhardts Skizze vom 20. 9. 1623 ist reproduziert, die „Pascaline" von (ca.) 1652 abgebildet, die spätere Entwicklung angedeutet. Kap. 4 gilt Pascals Untersuchungen zum *triangle arithmétique.* Vielleicht hätte man hier besser ein chinesisches Pascal-Dreieck (von ca. 1261) statt einer Abbildung nach Apianus (1527) reproduzieren sollen. Im Anschluß an Freudenthals bekannten Artikel (1953) wird Pascal die Urheberschaft für das Induktionsprinzip zugewiesen. In Kap. 5 erfahren Pascals Pionierleistungen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung genaue Würdigung. In Kap. 6 werden Pascals Vorleistungen zur Infinitesimalrechnung dargestellt. Das Buch schließt nach einem 7. Kapitel über Pascals allgemeine Ideen zur Methodik der Mathematik und einer Kurzdarstellung (Kap. 8) von Pascals physikalischen Untersuchungen (Vakuum, Flüssigkeitsgleichgewicht), mit einem 9. Kapitel, das Pascal als ganzen, insbesondere als glaubenden Menschen ins Blickfeld rückt. Ein Kuriosum: ein Detail aus Pascals "Pari" (Wette um die Existenz Gottes) erscheint mir wie ein Vorläufer zu Brams „Biblical Games" (1980) bzw. „Superior Beings" (1983). – Der Verfasser zitiert Jacques Chévalier, den Herausgeber von Pascals Oeuvres Complètes: „Pour connaître Pascal, if faut lire tout Pascal. Chez lui, tout se tient". Man kann sich als Mathematiker kaum eine anregendere Aufforderung hierzu denken als dieses Buch.

Erlangen K. Jacobs

Lipschitz, R., Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstraß u. a. (Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Bd. 2), im Auftrag der DMV hrsg. von W. Scharlau, Braunschweig: Vieweg 1986, xviii, 253 S., DM 48,– (DMV-Mitglieder 37,80)

Die als Band 2 der neuen DMV-Reihe „*Dokumente*" publizierten Briefe an Rudolf Lipschitz sind des Lesens wert. Herrn Scharlau, der diese (und andere) Briefe an Lipschitz in Bonn aufgefunden hatte, gelang eine treffliche Auswahl: Man lernt Mathematik und Mathematiker, den Zeitgeist und (natürlich) etwas Klatsch kennen. Die Briefe zusammen mit den Scharlauschen Kommentaren vermitteln auch dem historisch nicht so interessierten Mathematiker einen Kurzeinstieg in die Mathematik-Geschichte des letzten Drittels des 19. Jahrhunderts. So sind besonders die Briefe von Dedekind, Helmholtz und Kronecker wahre Perlen der Zeitgeschichte. „Die 21 Briefe [von Helmholtz] an ihn zählen zu den wertvollsten des gesamten Nachlasses" (Seite 133). Die wenigen (teilweise aus anderen Quellen zitierten) Briefe von Lipschitz selbst zeigen, wie schwierig es für die Zeitgenossen war, die neuen algebraischen Ideen von Dedekind zu verstehen. Aber Lipschitz hatte auch Schwierigkeiten mit dem Begriff des Dedekindschen Schnitts!

Als Anmerkung zu einem Brief von E. Study, in dem er über ein „etwas ausgefallenes Arbeitsgebiet" (Seite 207) berichtet, wird erwähnt, daß die dort beschriebene „geometrische Summe" von sog. „Motoren" durch die Formel

$$((c \times (c \times a)) \times b) \times ((c \times (c \times b)) \times a) = \det(a, b, c) \cdot \{\langle b, c\rangle \cdot a + \langle a, c\rangle \cdot b - \langle a, c\rangle\langle b, c\rangle \cdot c\}$$

beschrieben wird. Dabei sind a, b, c Vektoren des $\mathbf{R}^3$, $|c| = 1$, und $\langle a, b\rangle$ bzw. $a \times b$ bezeichnet das Skalarprodukt bzw. das Vektorprodukt von a und b.
Zum Schluß eine Berichtigung: Die von Lipschitz in Briefen an Hermite und Kronecker erwähnte Funktion

$$Z(u) := \sum_p \frac{1}{p(u^p - u)},$$

bei der über alle Primzahlen zu summieren ist, ist der Kern seiner Arbeit über Bernoullische Zahlen (Nr. 68 der Liste auf Seite 241). Mit der dort entwickelten Theorie kann er u. a. einen neuen Beweis des von Staudt-Clausenschen Satzes geben.

Münster/Westf. M. Koecher

Toepell, M.-M., Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie" (Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, Bd. 2), Göttingen: Vandenhoek und Ruprecht 1986, XIV, 293 Seiten mit 63 Abbildungen, Kart., DM 78,–

Zu den Büchern in der Mathematik, die einen großen Einfluß auf die Entwicklung unserer Wissenschaft ausübten, gehören bekannte Monographien von Hausdorff (über Mengenlehre), Alexandroff und Hopf (über Topologie), Banach (über Funktionalanalysis), van der Waerden (über Algebra) und sicherlich in vorderster Linie auch die Hilbertschen „Grundlagen der Geometrie". Dieses Buch „hat seinem bis dahin nur in Fachkreisen gewürdigten Verfasser den Weltruf eingetragen", schreibt Otto Blumenthal 1935, und Constantin Carathéodory bemerkt 1943: „Im Gegensatz zur algebraischen Zahlentheorie, die Hilbert in der zweiten Hälfte seines Lebens nie wieder angerührt hat, hat ihn die Axiomatik ... nicht wieder ruhen lassen." Das Hilbertsche Buch setzte die axiomatische Methode durch, ohne die große Teile der heutigen Mathematik gar nicht existierten; es beförderte die Geometrie von einer immerhin als „vollkommen" angesehenen Naturwissenschaft zu einer strengen mathematischen Disziplin mit der Möglichkeit der strengen Überprüfung von Unabhängigkeit und Kategorizität, was gerade auch mit Blick auf das Parallelaxiom Euklids ein Segen war. – Michael-Markus Toepell legt, angeregt durch Helmuth Gericke, eine höchst lesenswerte Untersuchung über die Entstehung von David Hilberts Buch vor. Das Verzeichnis des sich bei der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek befindenden Nachlasses von Hilbert führt mehr als 700 Stücke auf, darunter 50 Vorlesungsmanuskripte und auch Briefe mit einem halben Tausend Briefpartnern. Dieser Nachlaß stand dem Autor zur Auswertung zur Verfügung. Mit seiner vorliegenden Darstellung der Entstehungsgeschichte der Hilbertschen „Grundlagen der Geometrie" gelingt Toepell ein abgerundetes Bild, das auch dem historisch interessierten Grundlagengeometer, dem vielleicht über seine Lehrer viele mündliche Äußerungen Hilberts zu dessen Buch zugänglich wurden, noch manchen neuen Blick vermittelt. Als knapp und treffend geschildert erscheint etwa, um nur ein Beispiel zu nennen, die Rolle des viel diskutierten Vollständigkeitsaxioms, das einst Bewunderung und Ablehnung zugleich erfuhr, und der Stetigkeitsforderungen, die heute im Vordergrund stehen.

Die Kapitelüberschriften sind: 1. Vorlesung „Projektive Geometrie" und erste Auseinandersetzung mit Grundlagenfragen (1880–1893), 2. Vorlesung „Die Grundlagen der Geometrie" (SS 1894) und veröffentlichter wissenschaftlicher Brief (14. 8. 1894), 3. Ferienkurs „Über den Begriff des Unendlichen" (Ostern 1898), 4. Vorlesung „Grundlagen der Euklidischen Geometrie" (WS 1898/99), 5. Ausarbeitung „Elemente der Euklidischen Geometrie" (März 1899), 6. Festschrift „Grundlagen der Geometrie" (Juni 1899), 7. Grundlagenfragen im Zusammenhang mit der Festschrift (1899/1900).

Hamburg W. Benz

Gerber, H. U., Lebensversicherungsmathematik, Berlin etc.: Springer-Verlag. Zürich: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker 1986, XIII + 125 S., gbd., DM 98,–

Die Geschichte der deutschen Versicherungsmathematik in den letzten drei, vier Jahrzehnten ist belastet durch Mißverständnisse und Vorurteile und trägt bisweilen komische und auch tragische Züge. Dies darf nicht völlig außer acht gelassen werden, wenn ein neues deutschsprachiges Buch über die Mathematik der Lebensversicherung für den DMV-Jahresbericht zu besprechen ist (verfaßt von einem Schweizer, der an einer französischsprachigen Hochschule arbeitet und viele Jahre in den USA geforscht und gelehrt hat).

Die genannten Irrungen und Wirrungen sollen hier nicht im Detail beschrieben werden. Festzuhalten bleibt jedoch, daß die Versicherungsmathematik von den Mathematikern an den deutschen Hochschulen in dieser Zeit bestenfalls ignoriert wurde (Gauß dagegen hat seinerzeit u. a. ein – wie kolportiert wird – vorbildliches versicherungstechnisches Gutachten über die Göttinger Professoren-Witwenkasse erstattet), während innerhalb der deutschen Assekuranz der Eindruck entstand, von der Hochschulmathematik seien Impulse oder gar Innovationen für das Versicherungswesen nicht zu erwarten. (Gleichzeitig florierten und expandierten die Bereiche Versicherungsrecht und Volks- und Betriebswirtschaftslehre der Versicherung an den Universitäten.)

Auf diese Weise wurde eine neue Richtung innerhalb der Versicherungsmathematik, an deren Entwicklung auf internationaler Ebene renommierte Theoretiker und Praktiker beteiligt waren, die Risikotheorie, in Deutschland zunächst so gut wie gar nicht wahrgenommen. Dies muß um so mehr überraschen, als vergleichbare Bereiche, etwa das Operations Research, von deutschen Wissenschaftlern schon sehr frühzeitig beachtet und vorangetrieben wurden.

Tatsache ist, daß für die Lebensversicherungstechnik mathematisch elementare deterministische Modelle, die auf der Zinseszinsrechnung basieren, durchweg ausreichend sind und wohl auch – zumindest im Massengeschäft – auf absehbare Zeit bleiben werden. Dennoch sind diese traditionellen Modelle unbefriedigend, weil sie einerseits dem Zufallscharakter der Versicherungsvorgänge nicht entsprechen und weil andererseits die elektronische Datenverarbeitung im allgemeinen und die modernen leistungsfähigen Computer im besonderen ständig neue Methoden der Sammlung, Speicherung, Übertragung und vor allem der numerischen Auswertung von Daten erfordern oder aber überhaupt erst ermöglichen.

Hier setzt das Buch von Gerber an: An Stelle der Absterbeordnungen (Sterbetafeln), d.h. der Größen ℓ_x, $x = 0, 1, \ldots,$ – Anzahl der Lebenden des Alters x – und der aus ihnen gebildeten Zahlen ${}_tp_x = \ell_{x+t}/\ell_x$ – die „Wahrscheinlichkeit" dafür, daß eine x-jährige Person t weitere Jahre überlebt –, verwendet er ein stochastisches Modell aufbauend auf der Zufallsvariablen T – der Restlebensdauer einer x-jährigen Person –, und statt Vertafelungen – etwa von Kommutationswerten – führt er Algorithmen – speziell Rekursionsformeln – ein. Demgegenüber ist die Thematik der einzelnen Kapitel durchaus konventionell:

Kapitel 1. *Zinsrechnung.* Ein unumgänglicher Vorspann, der von Gerber in bestechender Kürze und Eleganz aufbereitet wird.

Kapitel 2. *Die zukünftige Lebensdauer eines x-jährigen.* Das stochastische Modell – die Lebensdauervariable bzw. -verteilung – mit der zugehörigen Notation.

Kapitel 3. *Kapitalversicherungen.* Behandlung des Barwerts eines Kapitels, wobei der Barwert hier definitionsgemäß eine Zufallsvariable ist. Somit ist nicht nur sein Erwartungswert, die Nettoeinmalprämie, sondern beispielsweise auch seine Varianz von Interesse.

Kapitel 4. *Leibrenten.* Berechnungen von Barwerten und Nettoeinmalprämien.

Kapitel 5. *Nettoprämien.* Herleitung bekannter Formeln für verschiedene Versicherungsformen.

Kapitel 6. *Das Nettodeckungskapital.* Wiederum werden Standardresultate bewiesen, darüber hinaus aber auch Ergebnisse, die nur im stochastischen Modell auftreten, etwa der Satz von Hattendorff.

Kapitel 7. *Verschiedene Ausscheideursachen.* Einbeziehung einer weiteren Zufallsvariablen, welche die Ausscheideursache beschreibt.

Kapitel 8. *Versicherungen auf mehrere Leben.* Hier werden die Vorteile des stochastischen Modells besonders deutlich, und Analogien zur Zuverlässigkeitstheorie drängen sich auf (Versicherung auf kürzestes Leben/Serienschaltung; Versicherung auf längstes Leben/Parallelschaltung).

Kapitel 9. *Der Gesamtschaden des Portefeuilles.* Einige risikotheoretische Betrachtungen, speziell die Darstellung und numerische Behandlung der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens.

Kapitel 10. *Einbeziehung der Kosten.* Einführung der nach Zins und Sterblichkeit dritten Rechnungsgrundlage.

Kapitel 11. *Über die Schätzung von Sterbenswahrscheinlichkeiten.* Klassische Methoden und Schätzverfahren der Mathematischen Statistik.

Anhang A. *Kommutationszahlen.*

Anhang B. *Einfacher Zins.*

Das Buch von Gerber hat damit gleich viele Kapitel wie der erste Band des Standardwerkes von Saxer (Versicherungsmathematik, 1955), die thematische Übereinstimmung liegt bei etwa sechzig Prozent. Das Werk beeindruckt durch Klarheit, Präzision und Eleganz. Wie in seiner bahnbrechenden Monographie über Risikotheorie (An Introduction to Mathematical Risk Theory, 1979) gelingt es dem Autor spielerisch, die Brücke zwischen Intuition und formaler Strenge zu schlagen.

Demgegenüber ist nur sehr wenig zu bemängeln – zuallererst vielleicht eine bisweilen zu registrierende Halbherzigkeit bei der Benutzung stochastischer Modelle und Methoden (speziell bei den Verbindungen zur Zuverlässigkeitstheorie); symptomatisch dafür ist, daß im Vorwort en passant „der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, A, P) ..., der im folgenden allem zugrundeliegt" Erwähnung findet, während im Text bei der Darstellung von Wahrscheinlichkeiten stets das nie erklärte Symbol *Pr* verwendet wird – auch bei „Wahrscheinlichkeiten" wie $Pr(t < T < t + dt)$.

Für die über das Mathematische hinausgehenden Bedürfnisse der praktischen Versicherungstechnik – die bis in den Bereich der Rechnungslegung führen – kann dieses Buch naturgemäß wenig bieten. Den Praktiker der *Lebens*versicherung dürfte allerdings die Stoffauswahl zum Thema Rückversicherung in Kapitel 9 verwundern.

Diese wenigen Beanstandungen sollen aber die hervorragende Gesamtbeurteilung des Buches von Gerber, dem eine große Verbreitung bei Theoretikern und Praktikern zu wünschen (und auch ohne großes Risiko zu prognostizieren) ist, keinesfalls schmälern.

Karlsruhe W.-R. Heilmann

König, H., Neumann, M., Mathematische Wirtschaftstheorie (Mathematical Systems in Economics, Bd. 100), mit einer Einführung in die konvexe Analysis, Frankfurt: Athenäum Verlag 1986, 252 S., kart., DM 44,–

Das vorliegende Buch ist das Ergebnis der begrüßenswerten Auseinandersetzung zweier Mathematiker mit gewissen grundlegenden Fragestellungen der mathematischen Wirtschaftstheorie. Sie soll – wie die Autoren in ihrem Vorwort anmerken – „bei den Studenten sowohl der Mathematik als auch der Wirtschaftswissenschaften das Interesse für die andere Disziplin erwekken und fördern".

Diesem Anspruch wird das Buch sicherlich gerecht. Für die Studenten der Wirtschaftswissenschaften jedoch, wie mir scheint, in weit höherem Maße als für die der Mathematik. Um zu diesem Urteil zu gelangen, muß man betrachten, was das Buch den beiden Zielgruppen bietet.

Gemäß der beiden im Vorwort angesprochenen Hauptziele besteht das Buch aus zwei verschiedenartigen, allerdings aufeinander bezogenen Teilen, einem mathematischen und einem wirtschaftstheoretischen.

Der mathematische Teil, der aus den Kapiteln II und III besteht, enthält Grundzüge der konvexen Analysis und eine Behandlung der Fixpunkttheorie. Hier werden unter anderem die zentralen im wirtschaftstheoretischen Teil benötigten mathematischen Konzepte und Ergebnisse dargestellt. Fixpunkt- und Trennungssätze bilden nämlich bzw. die Basis für Existenz- und Optimalitätsaussagen für Gleichgewichte in Ökonomien. Der Inhalt des mathematischen Teils des Buches geht aber erheblich über das hinaus, was im ökonomischen Teil benötigt wird. In einer originellen und rigorosen Darstellung werden hier auch die Grundlagen geschaffen für ein tieferes Verständnis der strukturellen Zusammenhänge von Gleichgewichtstheorie, Optimierungstheorie und Spieltheorie.

Besonders wertvoll erscheint mir dabei die ausführliche Behandlung des Hahn-Banach-Theorems. Die Präsentation verschiedener Versionen dieses Satzes stellte seine unterschiedlichen Aspekte und Anwendungsmöglichkeiten klar heraus und fördert das Verständnis des Zusammenhangs zwischen Fortsetzungs- und Trennungsproblematik.

Sehr interessant ist auch die Einbeziehung des Desintegrationssatzes von Strassen in die Darstellung, der nicht nur eine Verallgemeinerung des Summensatzes liefert, sondern auch Ausgangspunkt für einen alternativen Zugang zur Netzwerktheorie ist, innerhalb dessen Versionen der Sätze von Ford-Fulkerson und von Gale hergeleitet werden. Letztere wird angewandt, um das maßtheoretische Marginalproblem darzustellen und ein bekanntes Resultat von Kellerer mit einem alternativen Beweis zu verallgemeinern.

Dieser mathematische Teil des Buches bietet Mathematikstudenten und Ökonomen eine originelle Darstellung eines auch für die Wirtschaftstheorie relevanten Teilgebietes der Mathematik. Darüber hinaus findet der Student der Wirtschaftswissenschaften ein weites Reservoir potentiell für ihn wichtiger Methoden und Ergebnisse. Zudem bietet diesem das Buch Einsichten in mathematische Zusammenhänge, welche die meisten nur der Gleichgewichtstheorie gewidmeten Texte nicht vermitteln. Ich denke daher, daß der Text durchaus geeignet ist, das Interesse von Ökonomen an der Mathematik zu erwecken und zu fördern.

Der wirtschaftstheoretische Teil des Buches, der die entsprechende Wirkung auf Mathematikstudenten erzielen sollte, ist dazu m. E. weniger geeignet. Die Art der Behandlung eines fundamentalen ökonomischen Problems in den Kapiteln I, IV und V dieses Buches könnte ein ohnehin bei Mathematikern häufig auszumachendes Vorurteil bestärken. Es wird nämlich der Eindruck erweckt, als reduzierten sich wirtschaftstheoretische Probleme und Schwierigkeiten im wesentlichen auf solche mathematischer Natur. Die grundlegende ökonomische Problematik wird praktisch nicht erörtert. Die oft erheblichen konzeptionellen Schwierigkeiten bei der formalen Präzisierung ökonomischer Probleme bleiben ebenso unerwähnt wie die Schwierigkeiten einer problemorientierten adäquaten Auswahl mathematischer Methoden bei der Modellbildung.

Auch die Wahl des Buchtitels, in welcher die Behandlung der konvexen Analysis zu Recht als Einführung bezeichnet wird, verschleiert die Tatsache, daß in weit größerem Maße die mathematische Wirtschaftstheorie, die hier präsentiert wird, sich auf eine Einführung in ein weitgehend abgeschlossenes Teilgebiet der Gleichgewichtstheorie beschränkt, die ihrerseits nur einen Teil der mathematischen Wirtschaftstheorie bildet.

Wenngleich eine ausführliche Berücksichtigung dieser Gesichtspunkte im geplanten Rahmen dieses Buches vielleicht nicht möglich war, so wären doch Hinweise auf die neuere Literatur zur Gleichgewichtstheorie, in der diese und andere Aspekte behandlet werden, nützlich. So fehlen beispielsweise im ansonsten reichhaltigen Literaturverzeichnis Bücher wie Arrows Band II seiner *Collected Papers* von 1983 über *General Equilibrium* und Cornwalls *Introduction to the Use of General Equilibrium Analysis* von 1984. Besonders wichtig wäre ein Hinweis auf das von Arrow und Intrilligator herausgegebene dreibändige *Handbook of Mathematical Economics* gewesen, welches nicht nur das weite Spektrum der mathematischen Wirtschaftstheorie widerspiegelt, sondern sich im 1982 erschienenen Band II in verschiedenen Beiträgen ausführlich mit der gesamten Palette gleichgewichtstheoretischer Fragestellungen und Entwicklungen beschäftigt. Insbesondere enthält dieser Band einen Überblick von Gerard Debreu über die historische Entwicklung und den gegenwärtigen Stand bei der Behandlung von Existenzsätzen.

Ich möchte jetzt die kritische Bewertung des ökonomischen Teils des Buches etwas detaillierter begründen.

Im Kapitel I, das eine Einführung in die Gleichgewichtstheorie verspricht, wird weder auf die ökonomische Bedeutung noch auf den historischen Hintergrund der Fragestellung adäquat eingegangen. Gegeben die weiter hinten im Buch vermerkte logische Äquivalenz zwischen Existenz von Fixpunkten und Existenz von Gleichgewichten wäre gerade eine inhaltliche Diskussion notwendig, um die Wiederaufnahme der bereits behandelten mathematischen Themen im neuen, der ökonomischen Fragestellung angepaßten Gewand zu rechtfertigen.

So verbirgt sich beispielsweise hinter einer kurzen Floskel wie „nach einer harmlosen Normierung" der Preissysteme ein für den studentischen Leser kaum erkennbarer, aber ökonomisch interpretierbarer relevanter Sachverhalt, der diskutiert werden sollte.

Die aus der Sicht des Mathematikers vielleicht wünschenswerte, zunächst einheitliche formale Behandlung verschiedener Wirtschaftssubjekte, der Konsumenten und Produzenten, durch Aktionsbereiche und Aktionskorrespondenzen erschweren ein Verständnis der verschiedenen Verhaltsannahmen an diese. Auch später, in dem der Existenz von Gleichgewichten gewidmeten Kapitel IV, werden die spezifischen Eigenheiten von Produzenten und Konsumenten nur unbefriedigend formuliert und diskutiert. Begriffe wie *Kostenfunktionen* und *Finanzgrenze,* als technische Terme eingeführt, werden nur oberflächlich interpretiert. An die Stelle der in der gleichgewichtstheoretischen Literatur üblichen Beschreibung von Produzenten durch Technologiementen tritt im vorliegenden Buch der Begriff der *Kostenfunktion.* Kein Wort zur Dualitätstheorie, die dies als im wesentlichen äquivalenten Zugang sichert. Die Definition der Kostenfunktion weicht von der in der ökonomischen Literatur üblichen ab. Darüber hinaus entzieht sie sich, obwohl formal sinnvoll, d. h. als Abbildung wohldefiniert, einer unmittelbar einsichtigen ökonomischen Interpretation. Von dem durch das Skalarprodukt aus Aktion x und Preisvektor p ermittelten Wert der Aktion x beim Preissystem p, der bereits Erlös des Produkts und Faktorkosten enthält, werden zur Ermittlung des Nettoerlöses des Produzenten noch einmal die mittels der preisunabhängigen Kostenfunktion f ermittelten Kosten f(x) dieser Aktion subtrahiert.

Die unnötige Verwendung konkaver Nutzenfunktionen bei der Beschreibung des Konsumenten ohne Diskussion der Problematik ordinaler versus kardinaler Nutzenfunktionen ist dem ökonomischen Verständnis nicht dienlich. Sogar hinderlich ist die ebenso vage wie irreführende Aussage (S. 145), daß „eine Präferenzstruktur, die von einer Nutzenfunktion induziert wird, automatisch ... eine gewisse Konvexität" besitzt.

Ein weiterer Kritikpunkt betrifft die Terminologie und Notation, die vom Standard häufig abweichen. Besonders störend empfinde ich die von der sonstigen Literatur zur Gleichgewichtstheorie verschiedene Vorzeichenkonvention bei Konsumplänen. Sie schlägt sich nicht nur in umgedrehten Ungleichungen nieder, sondern induziert beim Leser geometrische Vorstellungen, die beim Einstieg in die gleichgewichtstheoretische Literatur erst einer Übersetzung bedürfen.

Die Ergebnisse der Kapitel IV und V über Existenz und Optimalität von Gleichgewichten und die Beziehung von Gleichgewichten zum Kern sind ausführlich und sorgfältig dargestellt. Sie repräsentieren im Kontext eines vollständigen Systems von Märkten mit endlichen Mengen von Gütern und Wirtschaftssubjekten ohne Unsicherheit die allgemeinsten bekannten Aussagen. Wenngleich die Darstellung auf bekannten Sätzen der Literatur basiert (etwa Debreu und Scarf zur Kernkonvergenz, Shafer und Sonnenschein sowie Gale und Mas-Colell zur Existenz), so enthält sie doch interessante Modifikationen, die auf Arbeiten der beiden Autoren zurückgehen. Eine angemessene Würdigung dieser Beiträge wird jedoch durch das Fehlen jeglicher Heuristik erschwert. Das Interesse von Mathematikstudenten an der Ökonomie könnte sicherlich vergrößert werden, wenn sie erfahren würden, daß (im konkret vorliegenden Modell) der allgemeine Existenzsatz die Möglichkeit einer konsistenten dezentralen Organisation der Märkte durch Preise selbst für den Fall gewährleistet, daß das Entscheidungsverhalten individueller Konsumenten inkonsistent ist.

Dem Mathematiker wird nicht genug Ökonomie geboten, um ihn wirklich auf den Geschmack zu bringen.

Alles in allem und trotz der nicht unerheblichen Kritik halte ich das Buch für nützlich: als Seminartext für Mathematikstudenten, als Sammlung wertvoller mathematischer Konzepte und Sachverhalte für Studenten der Wirtschaftswissenschaften, als originelle Quelle konvexer Analysis für interessierte Ökonomen und nicht zuletzt als ein willkommenes Signal von Mathematikern, daß sie zur Kommunikation mit Ökonomen bereit sind.

Bielefeld W. Trockel

Peschel, M., Mende, W., The Predator-Prey Model: Do we live in a Volterra World? Berlin u. a.: Springer-Verlag 1986, 113 fig., 251 pp., Cloth, öS 364,–

Dieses Buch wird durch seinen Untertitel besser als durch den Titel charakterisiert. Es geht weniger um Raub- und Beutetiere als um die Bedeutung der Lotka-Volterra-Gleichung

$$dx_i/dt = x_i(a_{i0} + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) \quad i = 1, \ldots, n$$

(mit $x_i \geqslant 0$) als eines fast universellen Ordnungsprinzips. Das Buch ist also eher ein Beitrag zur Systemtheorie als zur mathematischen Ökologie. Dort freilich sind diese Gleichungen schon längst wohletabliert, doch geht ihre Anwendbarkeit weit darüber hinaus. Dieser Anspruch wird im ersten Kapitel (Phenomenon Evolution: Growth and Structure-Building) sehr deutlich.

Zahlreiche Wachstumsprozesse verschiedenster Art (Weltbevölkerung, Präzision der Zeitmessung, O_2-Anteil der Atmosphäre usw.) werden durch hyperbolische Wachstumskurven beschrieben, Saturationsphasen durch die hypologistische Differentialgleichung

$$dx/dt = K(x-a)^k(B-(x-A)^n)^\varrho.$$

Der Übergang von einer stationären Stufe zur nächsten wird als Evolon bezeichnet, und die Vorhersagekraft des Evolonmodells wird mit der anderer Modelle verglichen.

In den nächsten Kapiteln (Dynamic Behaviour of Chains; Structure Design for Nonlinear and Instationary Processes; Systematisation and Unification of Growth Models with Lotka-Volterra Equation) wird ein konstruktiver, ja ingenieurmäßiger Zugang zu den diversen komplexen Wachstumsprozessen beschrieben. Diese werden durch offene oder geschlossene Ketten von funktionellen Wechselwirkungen beschrieben, wobei die Wachstumsrate (also die logarithmische Ableitung) einer Größe von den Vorgängergrößen abhängt. Aus solchen Moduln wird mittels eines Strukturentwurfprinzips das komplexe Modell aufgebaut. Das führt zu dem erstaunlichen Resultat, daß praktisch jeder Prozeß, der sich durch Differentialgleichungen beschreiben läßt, auch schon in Lotka-Volterra-Gestalt darstellbar ist (allerdings nicht auf eindeutige Weise). An Hand zahlreicher interessanter Beispiele wird dem Leser dieses Struktur-Entwurfsprinzip vertraut gemacht.

Der nächste Teil des Buches (Equivalence Transformations for Lotka Volterra Equations; The Riccati Representation and its Applications; Structure Building and Lotka Volterra Equations) befaßt sich mit den mathematischen Aspekten. So wird etwa das Problem, äquivalente Lotka-Volterra-Darstellungen zu klassifizieren, in einen allgemeinen Rahmen eingebettet (multinomiale Differentialgleichungen) und dort behandelt. Insbesondere erweist sich die Darstellung in „Riccati-Form" als äußerst vorteilhaft. Die Autoren konstruieren eine Systemarchitektur für die Integration sehr großer Systeme von Riccati-Gleichungen, sie geben Verfahren zur Parameteridentifizierung an, behandeln qualitative Aspekte, Replikatorgleichungen und die Analyse von Lotka-Volterra-Systemen mit „Fuzzy Methods". Dann kehrt das Buch wieder zu Anwendungsfragen zurück (Some Large Scale Applications of the Lotka Volterra Concept), etwa zur Kontrolltheorie oder zu Roboter-Entwürfen. Ein letztes Kapitel beschreibt die Simulation von Evolutionsprozessen mit Microcomputern.

Wie schon dieser kurze Abriß zeigt, ist das Buch außerordentlich vielseitig und anregend. Es bezweckt weniger, eine lehrbücherne Darlegung der Eigenschaften von Lotka-Volterra-Gleichungen zu liefern, als vielmehr eine Fülle von Anregungen und Gesichtspunkten aufzuzeigen, welche die systemtheoretische Bedeutung dieser Gleichung für die Evolution komplexer Systeme untermauern. Wie schon der Zuwachs an Stoff gegenüber der deutschsprachigen Auflage zeigt, sind die Untersuchungen auf diesem Gebiet in einer explosiven Phase und weit von einer Sättigung entfernt. Dieses Buch wird einen weiteren Wachstumsschub auslösen.

Wien K. Sigmund

Kohlas, J., Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit, Mathematische Modelle, Methoden und Algorithmen (Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 55), Stuttgart: Teubner-Verlag 1987, 252 S., Kart., DM 38,–

Dies Buch behandelt mathematische Probleme, die bei der exakten Behandlung von Fragen der Stör-Anfälligkeit i. allg. komplizierter technischer Systeme (Kernkraftwerke, Kommunikationssysteme, Verkehrsnetze, Versorgungs-Netzwerke u. dgl.) auftreten. Hierbei stehen graphentheoretisch-kombinatorische Methoden und deren algorithmische Durchführbarkeit im Mittelpunkt; sie werden ergänzt durch mathematisch nicht allzu komplizierte Wahrscheinlichkeitsansätze und -berechnungen.

Die hier betrachteten Systeme werden durch gerichtete bzw. ungerichtete Graphen dargestellt. Besteht die Aufgabe des Systems nach dieser Darstellung darin, von einem Knoten s dieses Graphen zu einem anderen Knoten t zu gelangen, so wird man jeden Pfad von s nach t als eine Möglichkeit des Funktionierens ansehen. Eine Menge S von Kanten, die von jedem dieser Pfade getroffen wird, ist kritisch in dem Sinne, daß der Ausfall aller Kanten aus S das System funktionsuntüchtig macht. Das Funktionstüchtigkeitsproblem hängt auf diese Weise mit dem bekannten Schnitt-Fluß-Problem der Netzwerktheorie zusammen. Das System aller kritischen Mengen S ist stabil gegen den Übergang zu Obermengen; ebenso – dual dazu – das System aller Kantenmengen, die eine bestimmte Verbindung möglich machen; solche Mengensysteme werden in diesem Buch monoton genannt.

Das Buch ist in drei Teile gegliedert: I. Deterministische Analyse, II. Probabilistische Analyse, III. Reparatur und Wartung. – Teil I beginnt mit allgemeinen graphentheoretischen Begriffsbildungen und erläutert die Algorithmik der Verbindbarkeit in Graphen in einer auf den vorliegenden Zweck zugeschnittenen Weise. Das max-flow-min-cut-theorem von Ford-Fulkerson und der Gomory-Hu-Algorithmus zur diskreten Flußoptimierung werden behandelt. Ein letzter Abschnitt gilt der allgemeinen, jedoch beispiel-orientierten Untersuchung monotoner Systeme und monotoner Boolescher Funktionen (Wert 1 bedeutet „intakt", Wert 0 „ausgefallen") auf Teilungen von Mengen von Bedienungseinheiten. Hierbei wird auch die Auflösung solcher Einheiten in Substrukturen behandelt. – Teil II behandelt die Berechnung von Intakt-Wahrscheinlichkeiten eines Systems, dessen Untereinheiten unabhängig voneinander mit je einer gewissen Wahrscheinlichkeit intakt sind. Dabei geht es u. a. um Fragen des Berechnungsaufwands. In einem der Abschnitte werden diese Einzelwahrscheinlichkeiten auch zeitabhängig angesetzt, die sog. Zuverlässigkeitsfunktion = Intakt-Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zeit definiert und in einzelnen Fällen ausgerechnet. Bei all diesen Berechnungen ist der Aufwand im Prinzip exponentiell; daher kommt der Frage der Reduktion eines gegebenen Systems auf einfachere besondere Bedeutung zu, ebenso der Einfügung von Berechnungen, die in Untereinheiten des Systems durchgeführt werden. Diese Fragen werden in zwei Abschnitten ausführlich behandelt. Weitere Abschnitte behandeln graphentheoretische Fragen, die hierfür relevant sind, z. B. die algorithmische Auflistung aller minimalen Verbindungen und Trennungen und aller spannenden Bäume, Teil II schließt mit Abschätzungen für Intaktwahrscheinlichkeiten. – In Teil III werden bei Zugrundelegung exponentiell verteilter Lebensdauern und Reparaturzeiten Markoffsche Modelle für die Übergänge zwischen verschiedenen Systemzuständen behandelt und u. a. Berechnungen von Zuverlässigkeitsfunktionen reparierbarer Systeme durchgeführt.

Das Buch, aus einer Kombination von industrieller und universitärer Arbeit des Autors erwachsen, ist klar geschrieben; es dürfte seinen Zweck als einführendes Lehrbuch gut erfüllen.

Erlangen K. Jacobs

Peitgen, H.-O., Richter, P. H., The Beauty of Fractals, Berlin – Heidelberg – New York – London – Paris – Tokyo: Springer-Verlag 1986, 184 figs. many in color, XII, 199 pp., hardcover, DM 78,–

„The Beauty of Fractals" ist ein ungewöhnliches und schönes Buch. Die beiden Autoren, die durch ihre in vielen Orten gehaltene Ausstellung von Computer-Grafiken „Frontiers of Chaos" zu Prominenz gelangt sind, stellen hier ihre Arbeit vor. Der Titel verrät, daß ihnen sehr daran liegt, den ästhetischen Reiz dieser Bilder zu vermitteln. Sie haben also kein Kaffeetischbuch herausgebracht; in einer Reihe von „Special Sections" werden die Bilder mathematisch diskutiert, so daß auch der professionelle Mathematiker einiges lernen kann.

Der Gegenstand dieses Buches ist die Dynamik von Iterationen einer holomorphen Abbildung f : $\mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ oder f : $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Man studiert diese Dynamik in Abhängigkeit eines (meistens komplexen) Parameters. Die sogenannte Julia-Menge J_f von f ist die Teilmenge von $\mathbf{C}$, auf der f besonders chaotisch operiert. Diese Mengen wurden für verschiedene Klassen von Funktionen f in den frühen Jahrzehnten dieses Jahrhunderts untersucht; es war zu dieser Zeit unmöglich, eine einzige nicht-triviale Julia-Menge annähernd zu zeichnen. Die Theorie der Dynamik dieser Abbildungen wurde in den mittleren Jahrzehnten des Jahrhunderts nur von wenigen Mathematikern untersucht, da auch die richtigen Fragestellungen nicht klar waren. Es war einfach nicht möglich zu experimentieren. Diese Lage änderte sich vor etwa zehn Jahren. Zu dieser Zeit wurde die Computer-Grafik ausgereift, und es ist B. Mandelbrot als erstem eingefallen, daß sich die Julia-Mengen sehr gut mit Computer-Techniken zeichnen lassen. Jetzt kann jeder mit einem Home-Computer auch solche Bilder herstellen; einige Hinweise werden auf den letzten Seiten dieses Buches gegeben. Die Julia-Mengen haben eine reiche Struktur und heißen nach einem nicht sehr präzisen Begriff „Fraktale", d. h., daß sie Mengen sind, deren Hausdorff-Dimension im allgemeinen keine ganze Zahl ist. Darüber hinaus und vielleicht noch wichtiger, haben sie die Eigenschaft der „Selbstähnlichkeit"; wenn man ein kleines Stück einer Julia-Menge unter einem sehr starken Mikroskop betrachtet, dann sieht dieses Stück fast genauso wie das ursprüngliche Stück aus. Diese Eigenschaft bildet die Basis des optischen Reizes der Bilder der Julia-Mengen, und übrigens auch für die Behauptungen über die Bedeutung der Fraktale für die Naturwissenschaften.

Etwas überraschend waren die Ergebnisse von Mandelbrots Versuchen über die Variation von einer Julia-Menge nach einem Parameter. Wir betrachten den Fall von quadratischen Polynomen f : $\mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$. Nach einer geeigneten Normalisierung kann die Menge aller solchen Abbildungen durch eine komplexe Zahl parametrisiert werden. Die Julia-Menge ist entweder zusammenhängend oder total unzusammenhängend. Die Teilmenge von $\mathbf{C}$, die den ersten Fall parametrisiert, heißt die Mandelbrot-Menge („Apfelmännchen"). Diese Menge hat eine sehr reiche Struktur, die wichtige Aufschlüsse über die entsprechende Dynamik erlaubt. Sie ist optisch von einer kaum zu fassenden Komplexität. Zur mathematischen Beschreibung dieser Mengen haben Douady und Hubbert eine sehr schöne Theorie entwickelt, womit man die Äquipotential-Linien der Komplementärmenge der Mandelbrot-Menge berechnen kann. Die Potentialtheorie dieser Menge kann dann in den Farbgrafiken wiedergegeben werden, und diese sind einige der schönsten Bilder in diesem Buch, deren Wirkung die Verfasser durch eine besonders überlegte Wahl der Farben gesteigert haben. Obwohl die Farben aus ästhetischen Gründen gewählt wurden, stellen sie auch mathematische Sachverhalte dar. Wahrscheinlich nie zuvor hat ein Mathematiker die Potentiallinien eines so komplexen Gebildes wie die dieser Menge gesehen. Hier sind sie in wunderbaren Farben abgebildet. Darüber hinaus hat man ein „Mikroskop", das es ermöglicht, jeden beliebigen Teil, so klein er sein mag, weiter zu untersuchen. Die Ergebnisse sind atemberaubend – kaum jemand kann sich vorgestellt haben, daß eine natürlich definierte einfach zusammenhängende Menge so kompliziert sein kann. Andererseits kommt bei der Untersuchung dieser Menge die ganze Tiefe der komplexen Analysis zur Geltung.

Obwohl in diesem Buch hauptsächlich die Dynamik von quadratischen Abbildungen dargestellt wird, sind zwei Abschnitte der Yang-Leeschen Theorie des Magnetismus gewidmet. Hier kommen physikalisch bedeutsame Phasenübergänge vor; sie werden hier mit der Dynamik von gewissen rationalen Abbildungen modelliert, wobei reiche Strukturen auftreten. Diese Strukturen sind analog denen der Mandelbrot-Menge, die auch nach ihrer Definition einen „Phasenübergang" darstellt.

Das Buch enthält auch vier Beiträge von anderen Verfassern, von B. Mandelbrot, A. Douady, G. Eilenberger und H. Franke. Diese beleuchten andere Aspekte, die nicht im Haupttext besprochen werden. Der einzige Mangel ist das Fehlen eines Verzeichnisses der „Maps" (Farbgrafiken); die Hinweise unter „Documentation" sind nicht leicht zu benutzen. Der Springer-Verlag hat dieses Buch sehr schön herausgebracht. Die Farbbilder sind von höchster Qualität und sogar den Einband schmückt ein Mandelbrot-Gebirge mit Julia-Mond vor einem Himmel in Schwarz-Rot-Gold. Für den Mathematiker kommt der erschwingliche Preis von DM 78,– überraschend, vielleicht ein Ausdruck dafür, daß dieses Buch nicht fotokopiert werden kann. Dieses schöne Buch kann allen empfohlen werden, die sich Einblicke in diese neue alte Welt und in die Bilder der Bremer-Gruppe verschaffen wollen.

Göttingen S. J. Patterson

Berger, M., Geometry I u. II (Universitext), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1987, französisches Original Paris 1977, x, 477 und x, 403 pp., Soft cover, je DM 74,–

Nach der Einleitung verfolgt der Verfasser u. a. folgende Ziele: Betonung der anschaulichen Seite der Geometrie. Daher enthält das Werk rund 800 meist ausgezeichnete Figuren. Ergänzung jeden Begriffs, also jeder Definition, durch Beispiele und interessante Resultate. Hinweise auf fortgeschrittene Theorien und (z. T. ungelöste) Probleme in Bemerkungen und Übungen.

Grobe Skizze einer Inhaltsangabe in Stichworten:

Kap. 0 (3 S.): Bezeichnungen und Vorkenntnisse.

Kap. 1 (28 S.): Gruppenoperationen auf Mengen: Erst Standardstoff, dann ebene Pflasterungen mit Bildern (z. B. von Escher), reguläre Polyeder.

Kap. 2 (35 S.): Affine Räume (algebraisch definiert): Lineare und affine Gruppen. Strahlensatz, Sätze von Desargues und Pappus. Fundamentalsatz (Kollineationen werden durch semilineare Abbildungen beschrieben). Reelle affine Punktmengen. Schwerpunkt.

Kap. 3 (18 S.): Schwerpunkte; der Universalraum: Baryzentrische und homogene Koordinaten. Polynome.

Kap. 4 (26 S.): Projektive Räume (algebraisch definiert): Karten. Topologische Eigenschaften. Morphismen und Homographien (projektive Kollineationen). Perspektive.

Kap. 5 (12 S.): Affin-projektive Beziehungen: Standardstoff, Hauptsatz über Kollineationen. Sechseckgewebe mit Bildern (Üb.).

Kap. 6 (20 S.): Doppelverhältnisse: Standardstoff.

Kap. 7 (9 S.): Komplexifizierung $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$.

Kap. 8 (50 S.): Euklidische Vektorräume: Standardstoff, dann: Kompakte Untergruppen der linearen Gruppe „sind" orthogonale Gruppen. Winkel, Ähnlichkeit. Quaternionen. Vektorprodukt.

Kap. 9 (79 S.): Euklidisch affine Räume: Isometrien. Billardpolygone. Ähnlichkeiten: Gram-Determinante. Bogenlänge. k-dimensionaler Inhalt. Steinersche Symmetrisierung. Zykliden (Üb.).

Kap. 10 (52 S.): Dreiecke, Sphären und Kreise: Klassische Elementargeometrie und Trigonometrie. Inversion. Kreisbüschel. Probleme von Apollonius und Malfatti. Villarceau-Kreise am Torus.

Kap. 11 (54 S.): Konvexe Mengen (im $\mathbf{R}^d$): Grundbegriffe. Minkowski-Summe. Parallelkörper. Sätze von Carathéodory, Hahn-Banach, Helly, Brunn-Minkowski. Löwner-Ellipsoid. Minkowskis Gitterpunktsatz (Üb.).

Kap. 12 (85 S.): Polytope, konvexe Körper: Definitionen. Dualisierung. Volumen und Oberfläche. Reguläre Polytope (mit vielen Bildern). Die Ausnahmefälle im $\mathbf{R}^3$ und $\mathbf{R}^4$. Eulerscher Polyedersatz. Isoperimetrische Ungleichung und Verwandtes.

Kap. 13 (30 S.): Quadratische Formen: Zunächst Standardstoff. Reelle und komplexe Normalformen. Hauptachsensatz. Orthogonale Gruppen. Sätze von Witt und Cartan-Dieudonné.

Kap. 14 (30 S.): Projektive Quadriken: Grundbegriffe. Quadrikenbüschel. Topologie reeller und komplexer Quadriken. Regelquadriken. Polaritäten. Dualisierung. Gruppe einer Quadrik. Spiegelungen.

Kap. 15 (24 S.): Affine Quadriken: Grundbegriffe. Reelle und komplexe Normalformen. Affine Polarität. Hauptachsengleichung.

Kap. 16 (48 S.): Projektive Kegelschnitte: Standardstoff einschließlich der Sätze von Pascal und Brianchon. Kegelschnittbüschel (Bilder) mit Dualisierung. Satz von Poncelet über zwei Kegelschnitten ein- bzw. umbeschriebene Polygone. Konstruktion aus 5 Punkten usw.

Kap. 17 (39 S.): Euklidische Kegelschnitte: Brennpunkteigenschaften. Planetenbewegung (kurz und elegant). Fadenkonstruktion. Dandelinsche Sphären. ... Krümmungskreise. Konfokale Kegelschnitte.

Kap. 18 (63 S.): Die Sphäre: Karten. Das Geoid. Kartenprojektionen. Topologie der Sphären (Literaturhinweise). Inhalt auf Sphären. Dreiecksfläche = Exzeß. Sphärische Trigonometrie. Clifford-Parallelen in der 3-Sphäre. Möbiusgruppe. Stereographische Projektion. Konforme Abbildungen (Satz von Liouville).

Kap. 19 (31 S.): Elliptische und hyperbolische Geometrie: Definition des elliptischen Raumes. Riemannsche Struktur. Inhaltsmessung. Clifford-Parallelismus. – Kleinsches Modell. Hyperbolischer Abstand. Hyperbolische Trigonometrie. Spiegelungen. Inhaltsmessung. Poincaré-Modell. Grenzkreise. Hyperbolische Pflasterungen mit Bildern. Pseudosphäre.

Kap. 20 (14 S.): Der Raum der Sphären. ... Polysphärische Koordinaten. Zykliden (mit Bildern).

Das zweibändige Werk bietet eine Fülle schöner Geometrie mit den zugehörigen Figuren. Es kann Mathematikdozenten und Studienräten sehr helfen, mehr Anschaulichkeit in ihre Lehre zu bringen. Die zahlreichen Bemerkungen und Aufgaben weisen – mit entsprechenden Hinweisen auf das umfangreiche Literaturverzeichnis – auf weiterführende Ergebnisse und Probleme hin.

Allerdings kann man auf rund 900 Seiten nicht alle Zweige der Geometrie ausführlich darstellen. So entfallen a) die „synthetische" Geometrie, die auf Axiomen und nicht auf algebraischen Definitionen aufbaut (Hilberts Grundlagen werden nicht erwähnt), b) die Geometrie der algebraischen Kurven dritten und höheren Grades, c) die elementare Differentialgeometrie der Raumkurven und Flächen.

Im Sinne der französischen herrschenden Lehre werden alle geometrischen Begriffe algebraisch definiert, manchmal nach meinem Eindruck komplizierter als nötig, so bei der pedantischen Unterscheidung von Vektorräumen und affinen Räumen. Ich hätte lieber einen etwas sparsameren Gebrauch mathematischer Abkürzungssymbole gesehen (die in einem eigenen Index zusammengestellt sind): an manchen Stellen merkte ich nach mühsamem Studium, daß es sich um ganz einfache Dinge handelt. Andererseits erlauben die Abkürzungen die Aufnahme von mehr Stoff, dessen Fülle ein Vorzug des Werkes ist.

Ich habe kaum Schreib- und Druckfehler gefunden [z. B. horror cycles statt horocycles (II. 338) oder einige Namen wie Apollonius, Riccati, Hugo Hadwiger oder Marcel Berger (I. 386, II. 364)].

Berlin H. Lenz

Horn, R. A., Johnson, C. R., Matrix Analysis, Cambridge etc: Cambridge University Press 1985, xiii, 561 pp., hardcover, £ 35.00

Wie soll man ein Lehrbuch über Matrizentheorie schreiben? Wenn man bedenkt, wie viele zu diesem Gebiet Beiträge geliefert haben (ohne es oftmals selbst als Matrizentheorie zu deklarieren), wo sie überall verwendet wird, wer sie alles benutzt bzw. benützen könnte, und die Tatsache bedenkt, daß jeder etwas anderes darunter versteht, weiß man, daß die Aufgabe sehr schwer ist. Hier liegt nun ein respektabler Versuch vor.

Das Buch ist etwa gleichzeitig mit der Neubearbeitung der „Theory of Matrices with Applications" von Lancaster – Tismenetsky erschienen und versucht wie dieses in Lehrbuchform eine einigermaßen vollständige Darstellung des Gebietes. In der Einleitung begründen die Autoren die Wahl des Buchtitels „Matrix Analysis" einerseits damit, daß sie nicht zögern, einen analytischen Zugang zu Problemen zu wählen, wenn er effizienter und natürlicher als der rein algebraische Zugang erscheint, andererseits daß sie bei der Auswahl der Themenbereiche diejenigen, die aus den Bedürfnissen der Analysis kommen, bevorzugt haben. Das scheint mir den Charakter des Buches gut zu beschreiben und hebt es auch von älteren Texten ab. Der eingenommene Standpunkt impliziert auch eine weitgehende Beschränkung auf reelle und komplexe Matrizen und einen weitgehenden Verzicht auf kombinatorische Aspekte.

Eine grobe Inhaltsangabe ermöglichen die Kapitelüberschriften.

0: Review and miscellania
1: Eigenvalues, eigenvectors, and similarity
2: Unitary equivalence and normal matrices
3: Canonical forms
4: Hermitian and symmetric matrices
5: Norms for vectors and matrices
6: Location and perturbation of eigenvalues
7: Positive definite matrices
8: Nonnegative matrices
Ein Anhang stellt einige Hilfsmittel bereit.

Das Buch enthält sehr viel, auch sehr viel neues, bisher nur in Zeitschriften publiziertes Material, manches in Übungen versteckt. Das trifft insbesondere für die Themengebiete zu, auf denen den Autoren aufgrund ihrer Forschungstätigkeit besondere Kompetenz bescheinigt werden muß. Ich zähle dazu die Kapitel 2, 3, 4, 5 und 7.

Dagegen halte ich den Abschnitt über Eigenwerteinschließungen für nicht so gelungen. So ist z. B. der Beweis des Satzes von Hoffman-Wielandt unnötig aufwendig. So wird nicht angeführt, daß sich im allgemeinen die Störung eines Eigenwertes wie die n-te Wurzel der Störung der Matrix verhalten kann (n = Dimension des Vektorraumes), dazu hätte man Problem 11 in 6.3 nur geringfügig zu modifizieren brauchen.

Ein zweiter Band mit dem Titel „Topics in Matrix Analysis“ ist angekündigt. Er behandelt u. a. Wertebereiche von Matrizen sowie ihre Verallgemeinerungen, Trägheitssätze, stabile Matrizen, M-Matrizen, Matrizengleichungen, Kronecker- und Hadamardprodukte.

Auch unter Berücksichtigung des mir noch nicht vorliegenden zweiten Bandes scheinen mir einige wichtige Themen mit Anwendung in Analysis zu fehlen. So kommen die verallgemeinerten Inversen nur sehr kurz weg, es fehlen auch die im Zusammenhang mit der linearen Systemtheorie und Kontrolltheorie entwickelten Gebiete.

Es war im ganzen jedoch eine Freude, dies Buch zu lesen. Dazu trug auch die Sorgfältigkeit bei, mit der geschrieben und korrigiert wurde. Das sieht man u. a. an den Zitaten insbesondere älterer Werke (die sonst gern ignoriert werden) und an den korrekten Zitaten deutschsprachiger Quellen.

Bielefeld L. Elsner

Delgado, A., Goldschmidt, D., Stellmacher, B., Groups and Graphs: New Results and Methods, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1985, 256 pp., Paperback, DM 48,–

Das Ziel des vorliegenden Buches ist es, den Leser mit graphentheoretischen Methoden vertraut zu machen, die angeregt durch die fundamentale Arbeit von D. Goldschmidt (Ann. Math. **111** (1980) 377–404) Eingang in die Gruppentheorie gefunden haben, und dort inzwischen zu sehr schönen Resultaten geführt haben. Dazu enthält das vorliegende Buch zwei mehr oder weniger voneinander unabhängige Aufsätze.

Der erste Teil (50 Seiten) wurde von D. Goldschmidt geschrieben und enthält eine Darstellung der Bass-Serre-Theorie der Gruppen und Graphen, die im wesentlichen durch die Darstellung, die W. Dicks in „Groups, trees, and projective modules“, Springer Lecture Notes 790, gegeben hat, beeinflußt ist. Kurz gesagt geht es bei dieser Theorie um das folgende: Man hat eine Gruppe, die auf einem Graph operiert. Dann kann man Informationen über diese

Gruppe dazu benutzen, um einen Baum zu konstruieren, auf dem die Gruppe operiert. Nun liefert ein zentraler Struktursatz eine Beschreibung der Gruppe als Fundamentalgruppe eines gewissen Graphen von Gruppen. Dies ist natürlich nur dann nützlich, wenn man Struktursätze für solche Fundamentalgruppen hat. Solche Sätze bereitzustellen ist das Ziel dieses ersten Teiles. Der Autor erhält Erzeuger und Relationen für Gruppen, die auf einem zusammenhängenden Graphen operieren. Ist dieser Graph ein Baum, so wird eine explizite Präsentation angegeben.

Der sicherlich nicht ganz einfache Stoff wird sehr elementar und mit einer Vielzahl guter Beispiele hervorragend dargestellt. Das Ziel dieser Serie, nämlich eine Einführung in ein Gebiet der Mathematik für Nichtspezialisten zu geben, wurde eindeutig erreicht. Darüber hinaus dürfte diese Darstellung sicherlich auch für Fachleute auf diesem Gebiet von Interesse sein.

Der zweite Teil des Buches (180 Seiten) beschäftigt sich mit der Klassifikation der „schwachen (B,N)-Paare vom Rang 2" durch A. Delgado und B. Stellmacher. Hierbei geht es um das folgende: Sei p eine Primzahl und G ein Amalgam der endlichen Gruppen P_1, P_2 über B. Für $i = 1, 2$ soll es Normalteiler P_i^* in P_i geben, so daß $O_p(P_i) \leqslant P_i^*$, $P_i = P_i^*B$, $C_{P_i}(O_p(P_i)) \leqslant O_p(P_i)$, $P_i^* \cap B$ ist der Normalisator einer Sylow-p-Untergruppe von P_i^* und $P_i^*/O_p(P_i)$ ist eine endliche Gruppe vom Lietyp und Lierank 1 über einem Körper der Charakteristik p (hierbei sind auch ausgeartete Fälle erlaubt). Ist keine nichttriviale Untergruppe von $P_1 \cap P_2$ normal in G, so heißt (P_1, P_2) ein schwaches (B,N)-Paar vom Rang 2 für G. Mit der sog. Graphenmethode bestimmen die Autoren alle diese Paare. Dabei gehen sie so vor, daß sie zunächst alle P_i besimmen (Kapitel 5–13), d. h. sie bestimmen im wesentlichen die Multiplikationstafel der P_i. Danach zeigen sie, daß es bis auf wenige genau angegebene Ausnahmen eine normale Untergruppe D in G gibt, so daß G/D ein wirkliches BN-Paar vom Rang zwei besitzt. Diese wirklich sehr schöne geometrische Konstruktion wird in Kapitel 3 und Kapitel 14 ausgeführt. Das Buch schließt mit einer Reihe von Übungsaufgaben, die allerdings teilweise einen Schwierigkeitsgrad aufweisen, der sie zu Forschungsprojekten macht. Der F_3-Fall in Aufg. 5 wurde inzwischen von A. Delgado gelöst und wird demnächst im Journal of Algebra erscheinen. Die in der Arbeit als sehr schwierig angesprochene Verallgemeinerung auf höheren Rang ist derzeit ein Mittelpunkt der Forschung auf diesem Gebiet. Im Rang drei liegen die ersten Ergebnisse vor.

Dieser zweite Teil des Buches erfordert einen anderen Leser als der erste Teil. Dies ist eine Arbeit, die, für den auf diesem Gebiet arbeitenden Leser, äußerst anregend ist. Allein schon wegen der Konstruktion der BN-Paare lohnt sich die Lektüre. Um dem Nichtspezialisten, auf den diese Buchreihe eigentlich zielt, eine Einführung in die Methoden zu geben, ist dieser Teil nicht unbedingt zu empfehlen. Zunächst ist die vorliegende Arbeit mit 180 Seiten für solche Zwecke zu lang. Weiter gibt es eine Menge von Schwierigkeiten, die von den auftauchenden Gruppen herrühren, aber eigentlich nichts mit der allgemeinen Methode zu tun haben. Dennoch, wenn man sich auf Kapitel 1 bis 3 beschränkt, so bekommt man einen hervorragenden Überblick über die Methoden. Besonders geeignet ist hierfür Kapitel 3, wo wesentliche Teile der eingangs erwähnten Goldschmidt-Arbeit bewiesen werden (der Rest befindet sich in den Übungsaufgaben 1, 2, 6). Es handelt sich dabei um die Situation $p = 2$, $P_1/O_2(P_1) \simeq P_2/O_2(P_2) \simeq S_3$. Für diesen Teil wird ein sehr kurzer und klarer Beweis gegeben, der hervorragend geeignet ist, die Kraft, die hinter der Methode steckt, zu erleben. In den Kapiteln 5 bis 13 kommt nichts Neues hinzu, nur wird alles etwas komplizierter, da die Gruppen $P_i/O_p(P_i)$ komplizierter sind. Um einen Einstieg in die Theorie zu bekommen, seien diese ersten drei Kapitel empfohlen.

Leider gibt es eine Menge von Druckfehlern, die allerdings oft leicht zu korrigieren sind. Einige gravierende sollen hier korrigiert werden: In (5.12) fehlt die Voraussetzung $V = \langle \mathbf{C}_V(S)^G \rangle$, in (13.10) (a) sollte es statt V_β besser $Z(W_\beta)$ lauten, und in (14.14) fehlt die Voraussetzung, daß $Z(S) \leqslant Z(N_X(S))$ für $S \in Syl_3(X)$ ist.

Mit der oben gemachten Einschränkung eignet sich das vorliegende Buch hervorragend für den Nichtfachmann, der Einblick in die in diesem neuen Gebiet der Gruppentheorie benutzten Methoden sucht. Darüber hinaus bietet es auch dem sog. Experten eine Menge neuer Resultate. Für diesen Leserkreis lohnt sich die Lektüre allein schon wegen der Konstruktion der BN-Paare.

Berlin G. Stroth

Pressley, A., Segal, G., Loop groups (Oxford Mathematical Monographs), Oxford: Oxford University Press 1986, 318 pp., £ 40

Jeder Liegruppe G ist eine „loop group" oder Schleifengruppe LG von Abbildungen von S^1 nach G zugeordnet. Die Multiplikation auf LG ist dabei punktweise zu verstehen, und die Natur der Abbildungen (polynomial, analytisch, differenzierbar, stetig, . . .) nach Bedarf oder Geschmack wählbar. Ist G kompakt oder komplex-reduktiv, so handelt es sich bei LG im wesentlichen um eine Kac-Moody-Gruppe vom affinen Typ. Solche Gruppen sind in der letzten Zeit in verschiedenen Zusammenhängen auf größeres Interesse gestoßen, so bei kombinatorischen Potenzreihenidentitäten, bei elliptischen Singularitäten, bei Gleichungen vom Korteweg-de Vries-Typ, bei der Konstruktion der sporadischen Monstergruppe und schließlich bei der augenblicklich viel diskutierten „string theory".

Im vorliegenden Buch präsentieren die Autoren einen Aufbau der Theorie der differenzierbaren Schleifengruppen und ihrer Darstellungen. Obwohl sie dabei die genannten Anwendungen nicht explizit berühren, versuchen sie den Gegenstand nicht isoliert für sich zu entwickeln, sondern stets im Zusammenhang mit anderen mathematischen Themen zu behandeln. Dies gilt insbesondere für die Hauptkonstruktionen des Buches, die sich eng an Konstruktionen der Quantenfeldtheorie anlehnen (Shale-Weil-Darstellung, Schrödinger- und Spindarstellungen auf bosonischen und fermionischen Fockräumen, Vertexoperatoren). Weniger gilt dies für die allgemeinere Theorie der Kac-Moody-Algebren und Gruppen, die abgesehen von einem kurzen Überblickskapitel nur gelegentlich gestreift wird.

Die erste Hälfte des Buches widmet sich den Schleifengruppen und ihren fundamentalen homogenen Räumen, den unendlichdimensionalen „Flaggenmannigfaltigkeiten". Nach einer Übersicht über die endlichdimensionale Theorie und die allgemeine Theorie von Gruppen differenzierbarer Abbildungen $X \to G$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X in eine endlichdimensionale Liegruppe G werden im 4. Kapitel die bei der Darstellungstheorie wichtigen zentralen Erweiterungen der Schleifengruppen diskutiert. Sowohl für die explizite Konstruktion dieser zentralen Erweiterungen als auch für die Beschreibung der fundamentalen homogenen Räume erweist sich eine Einbettung der Schleifengruppen in die „eingeschränkte" lineare Gruppe $GL_{res}(H)$ eines polarisierten Hilbertraumes $H = H_+ \oplus H_-$ als hilfreich. Diese Gruppe, ihre zentrale Erweiterung und ihre transitive Aktion auf einer geeigneten Graßmannvarietät Gr(H) von H sind Gegenstand der Kapitel 6 und 7. Das Kapitel 8 schließt den ersten Teil des Buches mit einer Diskussion der Geometrie der den Schleifengruppen assoziierten Flaggenmannigfaltigkeiten ab. Neben der Bruhat- und Birkhoff-Zerlegung finden sich hier auch Ausführungen zur Bott-Periodizität, zu Vektorbündeln über Riemannschen Flächen und zur Streutheorie.

Die zweite Hälfte des Buches widmet sich der Darstellungstheorie der Schleifengruppen, d. h. genauer ihrer zentralen Erweiterungen. Dabei handelt es sich nicht um beliebige Darstellungen, sondern um solche mit „positiver Energie" oder, mathematischer gesprochen, mit einem niedrigsten Gewicht. Diese Klasse von Darstellungen steht in engster Analogie zu den endlichdimensionalen Darstellungen kompakter Liegruppen. Dies zeigt sich auf verschiedenen Ebenen: der Klassifikation der irreduziblen Darstellungen durch antidominante Gewichte (Kap. 9), der Konstruktion dieser Darstellungen durch die Schnitte von Geradenbündeln auf den fundamentalen homogenen Räumen (Borel-Weil-Theorie, Kap. 11), und der inneren Struktur der Darstellungen in der Gestalt der Weyl-Kac-Charakterformel und der Bernstein-Gelfand-Gelfand-Auflösung (Kap. 14). Ebenso wie sich die Darstellungen der klassischen Gruppen durch ihnen spezifische Konstruktionen erhalten lassen, gilt dies auch für ihre Schleifengruppen. So lassen sich die fundamentalen Darstellungen von L SU_n in unendlichdimensionalen äußeren Potenzen realisieren (Kap. 10), und für L SO_{2n} gibt es eine Spindarstellung (Kap. 12). Kein Analogon im endlichdimensionalen Fall gibt es allerdings für die Konstruktion der fundamentalen Darstellungen mittels Vertexoperatoren, die in Kapitel 13 beschrieben wird. Diese Konstruktion, die auf I. Frenkel, V. Kac und unabhängig auf G. Segal zurückgeht, dürfte einer der Hauptanstöße für die Abfassung des vorliegenden Buches gewesen sein. Während sie einige Ideen bei der „klassischen" Stringtheorie der Jahre 1970–1975 entleiht, ist sie von der „modernen" Stringtheorie der letzten Jahre u. a. bei dem Versuch aufgegriffen worden, die dort auftretenden überzähligen Raum-Zeit-Dimensionen zu „kompaktifizieren".

Seit Erscheinen dieses Buches haben sich die Wechselwirkungen zwischen physikalischen und mathematischen Theorien, die dem Buch thematisch nahestehen, erheblich ausgedehnt. Für alle, die an diesen Entwicklungen interessiert sind, wird diese Monographie eine höchst willkommene Einführung in einen Teil der mathematischen Grundlagen sein, zumal Originalarbeiten schwer zugänglich und nur für ein spezialisiertes Publikum geschrieben sind. Gewisse inhaltliche Überschneidungen gibt es mit dem Buch von V. Kac über unendlichdimensionale Liealgebren (Birkhäuser 1983, Cambridge Univ. Press 1985). Letzteres ist jedoch vornehmlich an den algebraischen und „infinitesimalen" Aspekten der allgemeineren Theorie der Kac-Moody-Algebren orientiert. Komplementär dazu stellen sich die Autoren dieses Buches auf einen „globalen" Standpunkt, der vor allem Geometer und Analytiker mehr ansprechen mag. Die Anforderung mathematischer Korrektheit impliziert dabei an einigen wenigen Stellen eine gewisse Schwerfälligkeit der Argumentation, die bei einem bescheideneren, algebraischen Vorgehen, das auch Physikern näher liegt, vermieden worden wäre. Aber die Autoren sind keine Puristen, was bei dem Entwicklungsstand der Materie auch unangebracht wäre. Da wo es sinnvoll oder unvermeidbar ist, folgen sie den algebraischen oder kombinatorischen Argumenten (z. B. beim Beweis der Charakterformel).

Die Darstellung des Textes ist mehr erklärend und deskriptiv als systematisch und deduktiv gehalten. Das erfordert zwar vom Leser eine höhere Bereitschaft, Details einzufügen oder Sachverhalte zu glauben, aber es ermöglicht ihm auch eine äußerst flexible und individuelle Lektüre. Zum Beispiel lassen sich die meisten Kapitel des Buches ohne weiteres separat oder nur mit wenigen Querverweisen lesen und verstehen. Insgesamt gesehen, handelt es sich bei dieser Neuerscheinung um eine anspruchsvolle Monographie, die einen mathematisch reiferen Leser in einer erleuchtenden und genüßlichen Weise in einen Themenkreis äußerster Aktualität einführt.

Liverpool P. Slodowy

Iwasawa, K., Local Class Field Theory (Oxford Mathematical Monographs), Oxford: Oxford Universtiy Press 1986, 155 S., £ 35.00

Die durch Artin, Hasse und Takagi in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts entwikkelte Klassenkörpertheorie beschreibt die abelschen Erweiterungen algebraischer Zahlkörper durch Objekte, die dem Grundkörper in direkter Weise zugeordnet sind. Historisch ist die sogenannte lokale Theorie, d. h. die Klassenkörpertheorie $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, von der globalen abgeleitet. Erst in den dreißiger Jahren wurde von F. K. Schmidt und Chevalley die lokale Theorie unabhängig begründet.

Mit kohomologischen Methoden entwickelten um 1950 Hochschild, Nakayama, Artin und Tate eine abstrakte Klassenkörpertheorie, wie sie im Buch von Neukirch 1969 sehr gut dargestellt ist. Dies hat den Vorteil, die lokale und globale Theorie in direkter Weise aus gewissen Axiomen abzuleiten, wie dies auch in der neuen Darstellung von Neukirch 1986 geschieht, die aber darüber hinaus ganz ohne den kohomologischen Apparat auskommt.

In dem vorliegenden Buch von Iwasawa beschränkt sich der Autor völlig auf die lokale Theorie und entwickelt sie mit Hilfe der Theorie formaler Gruppen. Dieser Weg, der einen großen ästhetischen Reiz ausübt, ist sicherlich nicht der kürzeste, liefert aber auch weitreichende Resultate für lokale Körper (das explizite Reziprozitätsgesetz von Wiles) und elegante Beweise bekannter Sätze wie zum Beispiel das Theorem von Hasse/Arf (siehe hierzu auch Neukirch 1986).

Das Buch, das sehr klar und ausführlich geschrieben ist, stellt in den ersten drei Paragraphen die Theorie lokaler Körper zur Verfügung, entwickelt in den folgenden beiden Abschnitten die Theorie der formalen Gruppen, um dann in Paragraph V und VI die Hauptsätze der lokalen Klassenkörpertheorie zu beweisen. Abschließend wird das explizite Reziprozitätsgesetz hergeleitet.

Sicherlich ist es eine Geschmacksfrage, welche Methoden zum Aufbau der Klassenkörpertheorie benutzt werden und ob die lokale aus der globalen Theorie oder umgekehrt hergeleitet werden soll. (Das beste ist, man studiere alle Vorgehensweisen.) Aber es ist auf jeden Fall ein großer Fehler, nur die lokale Theorie kennenzulernen, und diese Beschränkung stellt den einzigen, allerdings wesentlichen Nachteil des Buches dar. Es sollte ein zweiter ebenso guter Band folgen zur Darstellung der globalen Klassenkörpertheorie.

Erlangen K. Wingberg

P. Bundschuh

Einführung in die Zahlentheorie

1988. 7 Abbildungen. XIV, 332 Seiten. Broschiert DM 78,-.
ISBN 3-540-15305-5

Inhaltsübersicht: Teilbarkeit. - Kongruenzen. - Potenzreste, insbesondere quadratische Reste. - Additive Probleme und diophantische Gleichungen. - Verschiedene Entwicklungen reeller Zahlen. - Transzendenz. - Primzahlen. - Literaturverzeichnis. - Namen- und Sachverzeichnis.

Das Buch gibt eine umfassende Darstellung der wichtigsten Grundlagen der elementaren Zahlentheorie; dabei wird die historische Entwicklung in stärkerem Maße als üblich berücksichtigt. Behandelt wird in den ersten fünf Kapiteln (Teilbarkeit, Kongruenzen, Potenzreste und quadratische Reste, additive Probleme und diophantische Gleichungen, verschiedene Entwicklungen reeller Zahlen) etwa der Stoff einer einsemestrigen Einführungsvorlesung. Dabei ergeben sich schon früh neue Probleme, die in späteren Kapiteln wieder aufgegriffen werden. So kommen bereits im ersten Kapitel arithmetische und Primzahlfragen zur Sprache, die in den beiden letzten (Transzendenz, Primzahlen) erheblich vertieft werden. In diesen Kapiteln soll der Leser beispielhaft lernen, wie sich die Zahlentheorie zur Lösung ihrer Probleme bisweilen anderer mathematischer Disziplinen bedient: Beide Kapitel zeigen die Leistungsfähigkeit analytischer Methoden bei zahlentheoretischen Fragestellungen.

N. Koblitz

A Course in Number Theory and Cryptography

1987. 5 figures. VII, 208 pages. (Graduate Texts in Mathematics, Volume 114). Hard cover DM 74,-.
ISBN 3-540-96576-9

Contents: Some Topics in Elementary Number Theory. - Finite Fields and Quadratic Residues. - Cryptography. - Public Key. - Primality and Factoring. - Elliptic Curves. - Answers to Exercises. - Index.

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris
Tokyo Hong Kong

Heidelberger Platz 3, D-1000 Berlin 33 · 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA · 28, Lurke Street, Bedford MK40 3HU, England · 26, rue des Carmes, F-75005 Paris · 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan · Citicorp Centre, Room 1603, 18 Whitfield Road, Causeway Bay, Hong Kong

tm.8681/5/1

Springer