91. Band Heft 1
ausgegeben am 23. 1. 1989

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
H. Kurzweil, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1989

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 90/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 91, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Atiyah: The Frontier Between Geometry and Physics
M. Denker: Eberhard Hopf 04–17–1902 to 07–24–1983
K.-H. Hoffmann: Steuerung freier Ränder
K. Hulek: Elliptische Kurven, abelsche Flächen und das Ikosaeder
J. A. Jenkins: Helmut Grunsky
D. G. Kendall: A Survey of the Statistical Theory of Shape
P. Roquette: Über die algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten von Max Deuring
B. Schoeneberg: Erich Hecke 1887–1947
A. Schoenhage: Numerik analytischer Funktionen und Komplexität
W. Singhof: Einige Beziehungen zwischen stabiler Homotopietheorie und Zahlentheorie
J. R. Whiteman, A. E. Beagles, M. K. Warby: Theoretical and Practical Aspects of Finite Elements in the Context of Some Problems of Solid Mechanics
J. M. Wills: Kugellagerungen und Konvexgeometrie

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
91 (1988) 1–32
AMS subject classification: 53 A 10

Das Existenzproblem für Minimalflächen

J. Jost[1]), Bochum

1 Zur Geschichte des Plateauschen Problems

Seifenblasen galten üblicherweise als Allegorie des Illusionshaften, als Symbole der Unbeständigkeit und Vergänglichkeit, und so konnte ein (in mehreren Versionen existierendes) Bild des französischen Rokokomalers Chardin (1699–1779), welches einen in seine ephemere Tätigkeit vertieften jugendlichen Seifenbläser zeigt, auch nur allzuleicht als vollkommener Ausdruck der Geisteshaltung seiner Epoche verstanden werden.

Als aber dann im letzten Jahrhundert der belgische Physiker Plateau (1801–1883) durch Experimente, bei denen er eine Drahtschlinge in Seifenlauge tauchte und dann die Form der sich in dem Draht einspannenden Seifenhaut beobachtete, aufgrund der Vielfalt und Schönheit der auftretenden Formen und Gestalten die Faszination seiner Zeitgenossen erregte, waren Seifenblasen nunmehr zum anschaulichen und ästhetisch reizvollen Ausdruck physikalischer Gesetzmäßigkeiten geworden.

Da Seifenhäute sehr dünn und daher leicht sind, läßt sich meist der Einfluß der Schwerkraft auf ihre Gestalt vernachlässigen, und sie streben aufgrund inhärenter Molekularkräfte dazu, sich soweit wie möglich zusammenzuziehen. Aufgrund der Experimente Plateaus lag es daher nahe, das mathematische Problem zu studieren, in eine vorgegebene Jordankurve im dreidimensionalen Raum eine Fläche kleinsten Inhaltes – eine Minimalfläche – einzuspannen. Da das Problem von ihm popularisiert worden war und er auch die Vermutung ausgesprochen hat, daß eine Lösung stets existiert, wird es seither Plateausches Problem genannt, auch wenn es als mathematisches Problem schon im Jahre 1762 (also übrigens zur Lebzeit Chardins, allerdings ohne jeden Zusammenhang mit Seifenblasen) von Lagrange formuliert worden war. Lagrange formulierte es als Problem im Rahmen der Variationsrechnung, und eine Lösung der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen für das Oberflächenfunktional – um deren Existenz es bei dieser Version des Problems geht – ist dann in diesem Sinne eine Minimalfläche, obwohl das Funktional im allgemeinen auch andere kritische Punkte als lokale Minima besitzt, so daß eine Mini-

1) In dem vorliegenden Artikel werden u. a. Erkenntnisse vorgestellt, die der Autor gewonnen hat, während er vom SFB 72 der Universität Bonn und der Stiftung Volkswagenwerk unterstützt wurde.

malfläche nicht notwendigerweise ein Flächenminimum realisieren muß. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint der Terminus „Minimalfläche“ dann nicht völlig glücklich gewählt. Was man unter einer Minimalfläche versteht, hängt aber sowieso von der betrachteten Version des Problems und insbesondere vom gewählten Zugang ab – und, wie im folgenden dargestellt werden soll, gibt es sehr verschiedenartige Zugänge zum Existenzproblem für Minimalflächen. Es stellt sich übrigens heraus, daß eine differentialgeometrische Charakterisierung stationärer Punkte des Flächenfunktionals darin besteht, daß (zumindest in geometrisch regulären Punkten) die mittlere Krümmung H verschwindet, und so wird daher auch häufig eine Minimalfläche als Fläche mit $H \equiv 0$ definiert.

Minimalflächen wurden im letzten Jahrhundert eifrig studiert, u. a. von einigen der bedeutendsten Mathematiker wie Riemann, Schwarz und Weierstraß. Jedoch gelang die Lösung des Plateauschen Problems nicht, und es mag vielleicht ideengeschichtlich aufschlußreich sein, ein wenig über die Gründe zu spekulieren.

Zunächst war es vielleicht hinderlich für die Entwicklung des Gebietes, daß die Riemannschen Untersuchungen über Minimalflächen erst nach der durch Weierstraß erfolgten Kritik an der Gültigkeit des Dirichletschen Prinzips stattfanden, als sich also gezeigt hatte, daß man kein Verfahren kannte, um die Existenz eines Minimums für ein Variationsproblem sicherzustellen. Eine Begründung der sog. direkten Methoden der Variationsrechnung gelang bekanntlich erst später Hilbert. Ganz allgemein waren jedoch damals die geeigneten allgemeinen Begriffsbildungen aus der Maßtheorie noch nicht vorhanden, und die Einführung der auf der Lebesgueschen Integrationstheorie basierenden Funktionenräume (insbesondere L^2 und der Sobolevraum $H^{1,2}$) war später sehr hilfreich für ein auf allgemeinen Prinzipien basierendes Studium des Problems.

Überhaupt waren aber damals die Fragen nach der Existenz einer Lösung und nach deren expliziter Angabe in Abhängigkeit von den vorgegebenen Daten eines Problems noch nicht klar geschieden. Dies ist wiederum erst später durch Hilbert erfolgt.

Natürlich läßt sich beim heutigen Vorgehen kritisch fragen, was denn das Wissen um die Existenz einer Lösung nützt, wenn man sie nicht auch gleichzeitig für ein vorgegebenes konkretes Beispiel explizit konstruieren kann, aber es zeigt sich eben, daß die Trennung des Problems in zwei nacheinander behandelte Teilfragen – erst die Existenz und dann die Konstruktion – häufig wesentliche Fortschritte ermöglicht. Beispielsweise lassen sich heutzutage aus Existenzbeweisen auch numerische Verfahren zur Berechnung von Minimalflächen mit vorgegebener Berandung konstruieren, worauf später noch einmal kurz eingegangen werden soll.

Im letzten Jahrhundert ging man aber eher umgekehrt vor. Man bemühte sich, übrigens in dieser allgemeinen Form vergeblich, zunächst explizite Formeln zu finden, die zu einer vorgegebenen polygonalen Berandung eine zugehörige Minimalfläche angeben, und knüpfte daran wohl die Hoffnung, zu einer allgemeinen (analytischen) Jordankurve dann eine Lösung durch polygonale Approximation und Grenzübergang zu erhalten, vielleicht in Form von Reihendarstellungen.

Man studierte übrigens auch allgemeinere Randwertprobleme; man betrachtete nämlich sog. Schwarzsche Ketten, d. h. Konfigurationen aus Polygonzügen und Stücken ebener Flächen, auf die die Minimalflächen senkrecht auftreffen mußte.

Letzteres wird als freie Randbedingung bezeichnet, weil sich die Spur der Minimalfläche ja noch auf diesem Ebenenstück bewegen kann und die Bedingung des senkrechten Auftreffens dann gerade besagt, daß die Minimalfläche auch stationär bezüglich Variationen ist, die ihre Spur in dieser Ebene verschieben. Wir werden im folgenden unsere Aufmerksamkeit daher nicht nur dem Plateauschen, sondern u. a. auch dem freien Randwertproblem zuwenden.
Auch wenn, wie gesagt, das allgemeine Problem nicht gelöst wurde, so ist es doch nach dem Vorhergehenden nicht verwunderlich, daß im letzten Jahrhundert viele interessante und schöne Beispiele von Minimalflächen gefunden wurden, und zwar nicht nur als Lösungen von Randwertproblemen, sondern auch vollständige (offene) Minimalflächen im dreidimensionalen Raum, wie diejenigen von Scherk und Enneper. Eine besondere Rolle hierbei spielten die von Weierstraß angegebenen Darstellungsformeln für Minimalflächen, die eine Verbindung zur Funktionentheorie herstellten.
In diesem Jahrhundert konzentrierte man sich dann auf allgemeine Existenzprobleme, und interessante neue Beispiele sind lange Zeit nicht gefunden worden. Diesbezügliche Untersuchungen haben jedoch auch inzwischen wieder eingesetzt, und das wohl schönste Beispiel ist eine von Costa [Cs] angegebene vollständige Minimalfläche im $\mathbf{R}^3$ mit drei Enden. Hoffmann-Meeks [HM] zeigten, daß diese Fläche eingebettet ist, verallgemeinerten die Konstruktion und stellten die erhaltenen Flächen durch Computergraphiken dar.

2 Die ursprüngliche Lösung von Douglas und Radó

Nach wichtigen Teilerfolgen durch Haar [Ha] und Garnier [Ga], welcher übrigens die oben angesprochenen Methoden von Riemann und Schwarz fortführte, wurde dann im Jahre 1930 eine Lösung des Plateauschen Problems unabhängig voneinander und auf verschiedenen Wegen von Douglas [D1] und Radó [R2] gefunden. Beide Ansätze waren recht kompliziert, aber kurz darauf wurden zwei erheblich einfachere Beweisgedanken von McShane [Mc] und Courant [C1] (und in ähnlicher Form von Tonelli [Tn]) entwickelt. Beide Ansätze beruhen übrigens jeweils auf einem Gedanken von Lebesgue, und Lebesgue selber hätte mit diesen beiden Gedanken schon das Plateausche Problem lösen können, wenn ihm noch die nachfolgende Beobachtung von Douglas bekannt gewesen wäre[1]). Wir formulieren diese Beobachtung im Rahmen des dann von Courant durchgeführten Lösungsverfahrens.
Dazu betrachten wir das Plateausche Problem in der folgenden Fassung:
Es sei γ eine rektifizierbare Jordankurve im $\mathbf{R}^3$ (oder allgemeiner im $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$). $D := \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ sei die Kreisscheibe in der Ebene. Wir betrachten dann Abbildungen $x : D \to \mathbf{R}^3$, die ∂D auf γ abbilden. Es erweist sich hierbei als

---

[1]) Diese Beobachtung ist übrigens in doppelter Hinsicht historisch merkwürdig: einmal, weil sie trotz ihrer augenscheinlichen Einfachheit von allen vorherigen Mathematikern übersehen worden war, zum anderen, weil Douglas sie trotz ihres erheblichen Nutzens zur Vereinfachung des Problems bei seiner eigenen Lösung des Problems nicht benutzt hat.

zweckmäßig, nur solche Abbildungen zu betrachten, die ∂D in monotoner Weise auf γ abbilden.
Das Flächenfunktional[2]) ist nun gegeben durch

$$A(x) = \int_D |x_u \wedge x_v| \, du \, dv$$

(hierbei ist zur Abkürzung $x_u = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u}, \frac{\partial x^2}{\partial u}, \frac{\partial x^3}{\partial u}\right)$ und weiter unten dann auch

$$x_u^2 := x_u \cdot x_u := \frac{\partial x^1}{\partial u}\frac{\partial x^1}{\partial u} + \frac{\partial x^2}{\partial u}\frac{\partial x^2}{\partial u} + \frac{\partial x^3}{\partial u}\frac{\partial x^3}{\partial u}, \quad \text{etc.}$$

mit $x = (x^1, x^2, x^3)$).
Gesucht ist dann ein Minimum von A in der oben beschriebenen Klasse von Funktionen. Nun ist das Flächenfunktional A invariant unter der vollen Diffeomorphismengruppe von D, d. h. $A(x \circ \tau) = A(x)$ für jeden Diffeomorphismus $\tau : D \to D$. In der betrachteten („parametrisch" genannten) Fassung ist daher das Flächenfunktional analytisch sehr schwer zu behandeln, weil die Klasse der Lösungen hierbei viel zu groß ist. (Wir werden später einige ganz andersartige maßtheoretische Ansätze skizzieren, die diese Schwierigkeit vermeiden.) Douglas bemerkte nun, daß man stattdessen das Dirichletintegral

$$D(x) := \frac{1}{2} \int_D (x_u^2 + x_v^2) \, du \, dv$$

betrachten kann. Es gilt nämlich allgemein

$$D(x) \geqslant A(x),$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn x (fast überall) konform ist, also

$$(1) \qquad x_u^2 = x_v^2 \qquad x_u \cdot x_v = 0$$

fast überall in D gilt. Das Dirichletintegral besitzt nun den großen Vorteil, daß es nur noch invariant unter konformen Automorphismen, nicht aber unter allgemeinen Diffeomorphismen von D ist.
Das Lösungsverfahren besteht darin, D(x) zu minimieren, und zwar in der Klasse aller Abbildungen aus $C^0 \cap H^{1,2}(D, \mathbf{R}^3)$, die ∂D monoton auf γ abbilden. (Damit die Nichtkompaktheit der konformen Gruppe von D nicht zu Schwierigkeiten führt, wählt man noch drei verschiedene Punkte $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in D$ und drei verschiedene Punkte $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \gamma$ aus und verlangt noch $x(\theta_i) = \xi_i$, $i = 1, 2, 3$, eine Normalisierung, die wegen der konformen Invarianz von D(x) keine Einschränkung bedeutet.) Ein Minimum muß dann natürlich die Eulergleichungen für D(x) erfüllen, also harmonisch sein:

$$(2) \qquad \Delta x = 0 \quad \text{in } D.$$

---

[2]) Wir werden den Wert dieses Funktionals als „Oberfläche" oder „Flächeninhalt" und gelegentlich auch einfach, wenn keine Mißverständnisse auftreten sollten, als „Fläche" bezeichnen.

Die nichtlineare Plateaurandbedingung drückt sich in einer weiteren Gleichung für ein Minimum aus, nämlich daß

$$(3)\qquad (x_u^2 - x_v^2 - 2ix_u \cdot x_v)(du + i\,dv)^2$$

auf ∂D reell ist. Diese quadratische Differential ist nun andererseits wegen (2) holomorph, und muß deswegen identisch verschwinden, so daß (1) gilt, und unser Minimum von D deswegen gleichzeitig ein Minimum des Flächenfunktionals A liefert, also das Plateausche Problem löst.

Bei diesem Argument haben wir die Tatsache benutzt, daß ein holomorphes quadratisches Differential, das reell auf ∂D ist, in D identisch verschwindet. Dies bleibt nun nicht mehr gültig, wenn wir statt D eine Riemannsche Fläche mit Rand von höherem Geschlecht oder Zusammenhang benutzen, und dies führt zu einer neuen Schwierigkeit bei der Suche nach Minimalflächen von höherem Geschlecht, ein Problem, welches wir später noch genauer diskutieren wollen.

Wir wollen vielleicht auch kurz skizzieren, wie man nun die Existenz eines Minimums von D in der angegebenen Funktionenklasse beweist. Man wählt eine beliebige Minimalfolge von Elementen aus $H^{1,2} \cap C^0$,[1]) welche ∂D monoton auf γ abbilden und der Dreipunktebedingung genügen. Jedes Element der Folge wird dann durch den harmonischen Vektor mit den gleichen Randwerten ersetzt. Da ein harmonischer Vektor das Dirichletintegral bezüglich seiner eigenen Randwerte minimiert, ist die neue Folge ebenfalls eine Minimalfolge. Die verbesserte Minimalfolge ist nun gleichgradig stetig. Dies folgt aus dem Maximumprinzip und dem nachfolgenden Lemma, dessen Grundgedanke, wie gesagt, von Lebesgue stammt (am Rande muß man noch die gewählte Normalisierung ausnutzen, um aus diesem Lemma tatsächlich die Gleichstetigkeit herleiten zu können):

Lemma 1. *Sei* $x \in H^{1,2}(D)$, $p_0 \in \bar{D}$, $\delta < 1$, $D(x) \leqslant K$. *Dann existiert ein* $r \in (\delta, \sqrt{\delta})$, *für das* $x_{|\partial B(p_0, r) \cap D}$ *absolutstetig ist und für irgendzwei Punkte* $p_1, p_2 \in \partial B(p_0, r) \cap D$

$$|x(p_1) - x(p_2)| \leqslant 2\pi K^{1/2} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{1/2}}$$

erfüllt.

$$(B(p_0, r) := \{p \in \mathbf{R}^2 : |p_0 - p|^2 \leqslant r^2\}).$$

Nach Auswahl einer Teilfolge konvergiert die Minimalfolge dann gleichmäßig und schwach in $H^{1,2}$ gegen einen harmonischen Grenzvektor x, der zudem aufgrund der Unterhalbstetigkeit von D bei schwacher $H^{1,2}$-Konvergenz ein Minimum für D in unserer Funktionenklasse liefert. Aus bekannten Sätzen der Potentialtheorie erhalten wir daher die folgende Lösung des Plateauschen Problems.

---

[1]) $H^{1,2}$ ist der übliche Sobolevraum derjenigen L^2-Funktionen, die verallgemeinerte Ableitungen absitzen, welche ebenfalls in L^2 liegen, die also endliches Dirichletintegral haben.

Satz 1. *Es gibt eine Abbildung* $x : D \to \mathbf{R}^3$, $x \in C^0(\bar{D}) \cap C^\omega(D)$, *mit*

(4) $\Delta x = 0 \quad \text{in } D$

(5) $x_u^2 - x_v^2 - 2ix_u \cdot x_v = 0 \quad \text{in } D,$

welche ∂D *monoton auf* γ *abbildet und dem Dirichletintegral und auch dem Flächenfunktional A ein Minimum in der gewählten Funktionenklasse verleiht.*

Ein Vektor x, der (4) und (5) erfüllt, wird dann (bei diesem Zugang) als Minimalfläche bezeichnet.
Die Regularität am Rande konnte erst später durch Hildebrandt [H] geklärt werden, mit Verschärfungen oder Vereinfachungen durch Nitsche [N1], Kinderlehrer [Ki], Heinz-Tomi [HT] und Heinz-Hildebrandt [HH2]; es gilt

Satz 2. *Ist* γ *von der Klasse* $C^{k,\alpha}$ $(k = 1, 2, \ldots, 0 < \alpha < 1)$, C^∞ *oder* C^ω, *so auch* x.

3 Kritikpunkte zu dieser Lösung und weiterführende Fragen

So eindrucksvoll die Leistung von Douglas und Radó auch zunächst erschien, so ist doch die gerade skizzierte Lösung des Plateauschen Problems nicht in jeder Hinsicht zufriedenstellend. Es ergeben sich beispielsweise die folgenden Kritikpunkte und/oder weiterführenden Fragen.

1) Zunächst besitzt x als Abbildung zwar optimale Regularitätseigenschaften, aber es ist dies ein analytischer Regularitätsbegriff, während man eigentlich gerne die geometrische Regularität in dem Sinne, daß x(D) eine eingebettete Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^3$ mit Rand γ ist, fordern würde. Aus den Gleichungen (4) und (5) läßt sich jedoch nur schließen, daß x eine möglicherweise verzweigte Immersion ist. Durch zusätzliche Untersuchungen von Osserman [O], Gulliver [G] und Alt [Alt1], [Alt2] konnte allerdings später gezeigt werden, daß wegen des Minimumcharakters von x innere Verzweigungspunkte nicht auftreten können. Randverzweigungspunkte konnten bisher jedoch nur für den Fall ausgeschlossen werden, daß γ reellanalytisch ist (cf. [GL]), während der allgemeine Fall weiterhin offen ist.
Jedenfalls muß die Lösung x aber oft aus topologischen (wenn γ verknotet ist) oder geometrischen Gründen Selbstdurchschneidungen besitzen. Ein Beispiel ist in Fig. 1 dargestellt.

Fig. 1

Man bemerkt dabei, daß die Minimalfläche x(D) sogar in unphysikalischer Weise die Randkurve durchsetzt. Eine solche Lösung kann also insbesondere nicht experimentell beobachtet werden.

2) Häufig ist die Minimalfläche aus Satz 1 nicht die Fläche kleinsten Inhaltes mit Randkurve γ. Fig. 2 zeigt einen einfachen Fall.

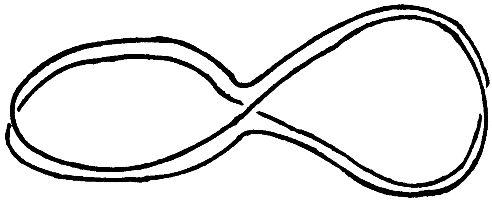

Fig. 2

Es ist offensichtlich, daß man hier eine Fläche vom Geschlecht 1 finden kann, die kleineren Flächeninhalt als jede Fläche x(D), also vom Geschlecht 0, hat. Wenn man unendlich viele, immer kleiner werdende Kurven von der Art der in Fig. 2 gezeichneten miteinander verbindet, läßt sich sogar eine rektifizierbare Jordankurve konstruieren, für die das Infimum des Flächeninhaltes von überhaupt keiner Fläche endlichen Geschlechts angenommen werden kann, cf. [Fl].
Es zeigt sich übrigens auch, daß man immer, wenn eine Minimalfläche Selbstdurchschneidungen hat, durch Vergrößerung des Geschlechtes den Flächeninhalt verkleinern kann.
Aber natürlich existiert nicht zu jeder Randkurve eine Minimalfläche vorgegebenen Geschlechtes. Beispielsweise berandet eine ebene Kreislinie nur eine einzige Minimalfläche, nämlich eine ebene Kreisscheibe. Isotopiert man daher die Kurve aus Fig. 2 in eine ebene Kreislinie, so kann irgendwann die verbogene Kurve keine Minimalfläche vom Geschlecht 1 beranden. Es ist klar, daß diese Art von Unstetigkeit zusätzliche Probleme bei der Frage nach der Existenz von Minimalflächen höheren Geschlechtes aufwirft.
Es läßt sich auch der Fall betrachten, wo mehrere disjunkte Jordankurven vorgegeben sind. Es stellt sich dann die Frage, ob eine zusammenhängende Fläche mit mehreren Randkomponenten einem niedrigeren Flächeninhalt besitzen kann als die Vereinigung der aus Satz 1 zu den einzelnen Kurven gewonnenen Minimalflächen. Betrachtet man zwei nahe beieinanderliegende Kreislinien in parallelen Ebenen, so hat eine geeignet gewählte Ringfläche natürlich kleineren Inhalt als zwei von diesen Kurven berandete Kreisflächen. Vergrößert man jedoch den Abstand der beiden Kreislinien, so erreicht man bald einen kritischen Abstand, bei dem die Ringfläche nicht mehr kleineren Inhalt hat, und vergrößert man den Abstand noch weiter, so kann schließlich weder experimentell noch mathematisch eine Ringfläche als Lösung des Plateauschen Problems existieren.
Schließlich kann man auch fragen, zu welchen Jordankurven nichtorientierbare Minimalflächen, beispielsweise vom Typ des Möbiusbandes existieren, und ob solche Flächen vielleicht sogar manchmal das Infimum des Flächeninhaltes realisieren können.

3) Im allgemeinen ist ein Minimum des Flächeninhaltes zu einer vorgegebenen Jordankurve γ nicht eindeutig bestimmt. Daher wäre es wünschenswert, für gegebene Kurven die Anzahl der Lösungen zu kontrollieren, wie auch die Existenz von Sattelpunktlösungen nachzuweisen. Hat man nämlich zwei isolierte lokale Minima, so erwartet man auch die Existenz einer weiteren instabilen Minimalfläche zu der gegebenen Randkurve.

4) Freie oder halbfreie Randwertprobleme sind zu lösen. Man gibt sich eine Stützfläche S sowie möglicherweise einen Jordanbogen γ vor, der entweder völlig disjunkt zu S und geschlossen ist oder mit S nur seine beiden Endpunkte gemein hat. Man sucht dann eine Minimalfläche, meist in einer durch bestimmte topologische Bedingungen (beispielsweise vorgeschriebene Verschlingungszahlen) eingeschränkten Klasse, deren Rand teils auf γ, teils auf S liegt und dort senkrecht auftrifft. In dieser Fassung stammt das Problem von Courant, vgl. z. B. [C7]. Die ursprünglichen Lösungen haben aber wiederum den Nachteil, daß sie oft die Stützfläche S in unphysikalischer Weise durchdringen und daher natürlich experimentell nicht beoachtet werden können.

5) Es stellt sich die Frage, ob man das Plateauproblem auch allgemeiner in Riemannschen Mannigfaltigkeiten lösen kann. Während im euklidischen Raum aufgrund des Maximumprinzips keine kompakten Minimalflächen ohne Rand existieren können, sind solche Flächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten im allgemeinen nicht ausschließbar, und man kann daher auch nach diesbezüglichen Existenzsätzen fragen.
(Jedenfalls wurde das Plateauproblem in Riemannschen Mannigfaltigkeiten schon 1948 von Morrey [M] gelöst.)

6) Weiterhin stellt sich die Frage nach – geeignet verallgemeinerten – Minimalflächen in höheren Dimensionen.

7) Wenn die Unbeständigkeit von Seifenblasen auch nicht ohne einen gewissen poetischen Reiz ist, so war sie doch Mathematikern, die sich experimentell eine geometrische Vorstellung von den auftretenden Formen verschaffen wollten, meist ein Ärgernis, gelegentlich Wutausbrüche über das ständige Zerplatzen der fragilen Gebilde hervorrufend, und es hat nicht an Versuchen gefehlt, Minimalflächen in einem dauerhafteren Medium herzustellen. Heutzutage läßt sich dieses Problem natürlich auch dadurch umgehen, daß man versucht, eine Minimalfläche zu vorgegebener Berandung numerisch zu berechnen. Gefragt ist dann nach konstruktiven und numerisch stabilen Existenzbeweisen mit geeigneter theoretischer Fehlerkontrolle, damit man das vom Rechner gelieferte Ergebnis auch interpretieren und in seiner Güte beurteilen kann.

In diesem Artikel wollen wir nun die verschiedenen heute bekannten Antworten und Lösungsansätze auf diese Kritikpunkte und Fragen vorstellen (und auch deren jeweilige Vor- und Nachteile diskutieren). Es ergeben sich hierbei interessante Wechselwirkungen mit anderen Bereichen der Mathematik, beispielsweise der hyperbolischen Geometrie und Teichmüllertheorie, der nichtlinearen Funktionalanalysis, der dreidimensionalen Topologie und der Riemannschen Geometrie, um nur einige zu nennen.[1])
Ein ganzer Zweig der Mathematik, die geometrische Maßtheorie, hat sogar seine grundliegenden Problemstellungen und entscheidenden Entwicklungsimpulse aus

---

[1]) Die im letzten Jahrhundert entwickelten Beziehungen zur Funktionentheorie und algebraischen Geometrie werden hier allerdings in den Hintergrund treten.

dem Minimalflächenproblem erfahren und umgekehrt dann Methoden von großer Allgemeinheit und Reichweite für die Existenztheorie von Minimalflächen bereitgestellt.

4 Parametrische Methoden

Einige Arbeiten, die sich mit in 2) und 3) angeschnittenen Fragen beschäftigen, erschienen bereits in den dreißiger Jahren.
Douglas [D5], Courant [C4] und Shiffman [S1] behandelten die Frage nach der Existenz von Minimalflächen höheren Geschlechtes. Im Lichte der obigen Plausibilitätsbetrachtungen muß eine Jordankurve γ natürlich noch eine zusätzliche Bedingung erfüllen, damit sie eine Minimalfläche vom Geschlecht g beranden kann. Douglas führte das folgende Kriterium ein: Es sei

$$d(g, \gamma) := \inf \{ \int_\Sigma |\nabla x|^2 : \Sigma \text{ Fläche vom Geschlecht } g,\ x \in C^0 \cap H^{1,2}(\Sigma),$$
$$x \text{ bildet } \partial\Sigma \text{ monoton auf } \gamma \text{ ab}\}.$$

Man überlegt sich leicht

$$d(g, \gamma) \leqslant d(g-1, \gamma)$$

und das Douglaskriterium ist dann (in äquivalenter Formulierung)

$$(6) \qquad d(g, \gamma) < d(g-1, \gamma).$$

Es ist nicht schwer, nachzuweisen, daß die Kurve aus Fig. 2 dies Kriterium für $g = 1$ erfüllt. In den zitierten Arbeiten wurde dann gezeigt, daß (6) hinreichend für die Existenz einer Minimalfläche vom Geschlecht g mit Rand γ ist. Analoge Kriteria und Antworten wurden für den Fall mehrerer Randkurven, also für die Frage nach der Existenz von Minimalflächen höheren Zusammenhangs, sowie für nichtorientierbare Minimalflächen angegeben, cf. [D3].
Jedoch wurden die genannten Zugänge kürzlich von Tromba [T1] aus sehr unterschiedlichen Gründen kritisiert. Die Douglasschen Arbeiten sind zunächst äußerst kompliziert, und er bemühte sich zudem noch, das Problem in immer größerer Allgemeinheit zu behandeln, cf. [D7]. Es bestehen jedoch auch prinzipielle Schwierigkeiten. Wir wollen das grundsätzliche Problem für die Existenz von Minimalflächen höheren Geschlechtes kurz erläutern: γ sei gegeben. Eine Fläche Σ (mit Rand) von Geschlecht $\geqslant 1$ kann verschiedene konforme Strukturen tragen, und man kann nicht erwarten, daß man für jede konforme Struktur eine Minimalfläche mit Rand γ finden kann. Ist nämlich S eine Fläche vom Geschlecht g, versehen mit einer konformen Struktur, und minimiert man D(x) in der Klasse aller $x \in C^0 \cap H^{1,2}(S)$ mit Plateauschen Randbedingungen, so erhält man, wie oben erläutert, einen harmonischen Vektor x, für den

$$(x_u^2 - x_v^2 - 2i x_u \cdot x_v)(du + i\, dv)^2$$

(u + iv lokaler konformer Parameter auf S) reell auf ∂S ist. Jedoch ist dieser Ausdruck nicht notwendig Null, und so erhält man im allgemeinen keine Minimalfläche. Um eine Minimalfläche zu bekommen, muß man dann noch zusätzlich zum Vektor x auch die konforme Struktur von S variieren, also über den Modulraum der konformen Strukturen auf Σ minimieren.[1]) Dieser Modulraum ist nun nicht kompakt, und um die Existenz eines Minimums zu sichern, muß er daher kompaktifiziert werden. Der Rand des kompaktifizierten Modulraumes sollte dann aus konformen Strukturen auf Flächen vom Geschlecht $\leqslant g-1$ bestehen. Die Douglasbedingung sollte dann ausschließen, daß das Infimum auf dem Rande angenommen wird.

Wie schon im Falle $g = 0$, hat auch hier Courant wiederum einen erheblich einfacheren Zugang gefunden, wiederum basierend auf Argumenten in der Art von Lemma 1. Hier kritisierte Tromba jedoch, daß Courant sich gelegentlich in allzu salopper Weise über einige Schwierigkeiten hinwegsetzte. Shiffman trug dann einige der fehlenden Details nach, formulierte allerdings selber nur einen etwas schwächeren Satz – wie übrigens auch Tromba in [T1]. Luckhaus bereitete später den Zugang von Courant und Shiffman noch einmal systematisch für den allgemeineren Fall von Flächen konstanter mittlerer Krümmung auf, cf. [Lu]. In jedem Fall bleibt das Verfahren aber deswegen etwas unanschaulich, weil die gewählte konforme Darstellung von Flächen höheren Geschlechtes durch Parallelschlitzgebiete die geometrisch-topologischen Argumente recht unübersichtlich macht.

Die Existenz von Sattelpunktlösungen wurde von Morse-Tompkins [MT1] und Shiffman [S2] studiert. Ein weiterer Zugang, auf polygonaler Approximation basierend, wurde später von Courant entwickelt, cf. [C7]. Es wurde gezeigt, daß aus der Existenz zweier lokaler Minima, die in der C^0-Topologie isoliert sind, die Existenz einer dritten instabilen Minimalfläche folgt. Allgemeiner wurde auch eine Morsetheorie für Minimalflächen entwickelt. Man formulierte jedoch wiederum die Definition des Indexes eines kritischen Punktes des Dirichletintegrales bezüglich Plateauscher Randbedingungen in der C^0-Topologie, während eine natürliche Entwicklung von D(x) in der Nähe eines kritischen Punktes aber in der $H^{1,2}$-Topologie stattfindet. (Die Wahl der C^0-Topologie liegt in der Tatsache begründet, daß wegen Lemma 1 Funktionenfolgen mit beschränktem Dirichletintegral in dieser Topologie relativ kompakt sind. Jedoch ist D in dieser Topologie nur unterhalbstetig, aber nicht stetig, d. h. aus $x_n \rightrightarrows x$ folgt nur

$$D(x) \leqslant \liminf D(x_n),$$

aber im allgemeinen keine Gleichheit. Dies führt zu technischen Komplikationen, wenn man einen Minimaxwert tatsächlich durch eine Minimalfläche realisieren will. Cf. auch unten die analoge Schwierigkeit bei Currents.) Aus diesem Grunde sind die erzielten Ergebnisse nicht ganz zufriedenstellend.

Auch dieses Problem wurde kürzlich von Tromba [T3], [T4] wieder aufgegriffen, und er bewies wiederum ein partielles Resultat, nämlich die sogenannte letzte Morseungleichung in der natürlichen $H^{1,2}$-Topologie.

Jedoch konnten in den letzten Jahren auch neuartige, durchsichtige und vollständige Beweise all dieser Ergebnisse aus den dreißiger Jahren erbracht werden. Struwe

---

[1]) Das angegebene holomorphe quadratische Differential erweist sich übrigens gerade als Ableitung des Dirichletintegrals bei Variation der konformen Struktur von S. Man erhält also genau dann eine Minimalfläche, wenn die Ableitung bzgl. der konformen Struktur verschwindet.

[St2], [St3] gelang es, eine vollständige Morsetheorie für Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe und des Kreisringes zu entwickeln, die mit der $H^{1,2}$-Topologie kompatibel ist[1]). Der Autor [J2] behandelte das Douglasproblem, also bei Vorliegen von (6) die Existenz einer Minimalfläche vom Geschlecht g nachzuweisen, und zwar direkt in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. (Das Plateauproblem in Riemannschen Mannigfaltigkeiten für den Fall einer oder mehrerer Randkurven war schon früher von Morrey [M] gelöst worden.) Diese Lösung des Douglasproblems benutzt Hilfsmittel aus der hyperbolischen Geometrie, nämlich das Kragenlemma und den Mumfordschen Kompaktheitssatz. (Vgl. auch [TT3], wo sich durch Kombination des Ansatzes aus [T1] mit einem Argument aus [J2] ebenfalls eine Lösung des Douglasproblems ergibt.)
Existenzsätze für geschlossene Minimalflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten in diesem parametrischen Rahmen ergeben sich aus [SU], [SY] und [J2].
In diesen Arbeiten wird das Dirichletintegral in einer gegebenen Homotopieklasse von Abbildungen einer geschlossenen Fläche S in die Mannigfaltigkeit N minimiert. Das Dirichletintegral wird dabei mittels der Metrik von N definiert; schreibt sich nämlich die Metrik von N in lokalen Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n)$ als $\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$, so ist

$$D(x) := \frac{1}{2} \int\limits_S g_{ij}(x(u+iv))\{x_u^i x_u^j + x_v^i x_v^j\}\, du\, dv,$$

falls u + iv wieder ein lokaler konformer Parameter auf S ist. Ist N kompakt und $\pi_2(N) = 0$, so existiert ein Minimum in einer gegebenen Homotopieklasse aus [S, N]; ist $\pi_2(N) \neq 0$, so wird zwar im allgemeinen das Minimum nicht mehr in jeder Homotopieklasse angenommen, aber es läßt sich wenigstens die induzierte Abbildung $x_* : \pi_1(S) \to \pi_1(N)$ auf den Fundamentalgruppen noch vorschreiben[2]). Ist nun S homöomorph zur 2-Sphäre S^2, so bekommt man, falls das minimierende x nicht gerade konstant ist, auf diese Weise schon eine Minimalfläche, genauer eine möglicherweise verzweigte minimale Immersion in N. Man erhält nämlich wieder ein holomorphes quadratisches Differential

$$g_{ij}(x_u^i x_u^j - x_v^i x_v^j - 2i x_u^i x_v^j)(du + i\, dv)^2,$$

welches für $S = S^2$ wiederum verschwindet, weswegen x dann konform ist. Hat S höheres Geschlecht, so muß man wieder zusätzlich über den Modulraum variieren. Um die Existenz eines Minimums im Innern des Modulraumes sicherzustellen, kann man wie in [SU] und [SY] annehmen, daß die induzierte Abbildung $x_* : \pi_1(S) \to \pi_1(N)$ injektiv ist, oder allgemeiner wie in [J2] eine Ungleichung vom Typ von (6) voraussetzen.

---

[1]) Allerdings wird noch die Nichtausgeartetheit der kritischen Punkte des Dirichletintegrals verlangt, welche generisch nur in $\mathbf{R}^n$ für $n \geqslant 4$ erfüllt ist, cf. [BT].

[2]) Für den hierbei bestehenden Zusammenhang mit harmonischen Abbildungen verweisen wir auf [J1].

In den früheren Arbeiten gab es auch schon Versuche, eine Morsetheorie für Minimalflächen beliebigen Geschlechtes zu entwickeln. Allerdings lösten Morse-Tompkins [MT2] den in ihrem Titel „Unstable minimal surfaces of higher topological structure" erhobenen Anspruch nicht ein, da sie nur Flächen vom Typ des Kreisringes betrachten.
Eine allgemeine Morsetheorie für Minimalflächen beliebigen Geschlechtes ist nun in [JS] entwickelt worden. Einerseits ermöglichen es hierbei neuere Entwicklungen der Morsetheorie von Conley-Zehnder, Salamon, Benci u. a. (cf. [Bc]), auf die Voraussetzung der Nichtdegeneriertheit von Minimalflächen als kritischer Punkt des Dirichletintegrals zu verzichten, und andererseits erlaubt ein genaueres Studium der Modulräume Riemannscher Flächen, die Übergänge zwischen verschiedenen topologischen Typen in den analytischen Ansatz einzubinden.
Sowohl in der Bailyschen [Ba] als auch in der Mumfordschen [Mu2] Kompaktifizierung des Modulraumes der Flächen vom Geschlecht g treten als Randelemente gerade Flächen niedrigeren Geschlechtes auf, und wenn man nun Flächen beliebigen Geschlechtes betrachtet, so muß man mit einem universellen Modulraum arbeiten, der dann gerade durch die einzelnen Modulräume für variierendes Geschlecht g stratifiziert wird.
Es zeigt sich übrigens, daß für den Morseindex einer Minimalfläche der Einbettungs- oder Immersionscharakter dieser Fläche eine Rolle spielt, so daß sich hierdurch ein neuer – parametrischer – Zugang zur Gewinnung eingebetteter Minimalflächen zu eröffnen scheint.
(In diesem Zusammenhang verweisen wir auch auf die Arbeiten [T2], [T3], [T4] von Tromba.)
Dieser parametrische Zugang erlaubt es also, sowohl den Wechsel des topologischen Typs als auch die Variation der konformen Struktur der auftretenden Minimalflächen zu studieren, und erweist sich daher in dieser Hinsicht den weiter unten skizzierten maßtheoretischen Ansätzen als prinzipiell überlegen, denn bei diesen Ansätzen wird die konforme Struktur der Minimalflächen grundsätzlich ignoriert. Wie unten genauer erläutert, haben die maßtheoretischen Ansätze den Vorteil, immer eingebettete, also geometrische reguläre Lösungen zu liefern. Andererseits bedingt dies aber auch, daß andere Lösungen nicht beachtet werden, und der parametrische Zugang kann daher die Struktur der gesamten Lösungsmenge des Plateauproblems besser beschreiben (vgl. hierzu auch [BT] und [St4]).

5 Konzepte der geometrischen Maßtheorie I: Currents

Beim parametrischen Zugang wird eine Minimalfläche immer als eine Abbildung von einem Parametergebiet in einen Bildraum betrachtet. Durch die Konzentration auf die Untersuchung der Eigenschaften der Abbildung ist es dann schwierig, die Frage der geometrischen Regularität zu beantworten, während die Festlegung des Parametergebietes von vorneherein den topologischen Typ in einer dem speziellen Problem vielleicht unangemessenen Weise einschränkt. Der Ansatz der geometrischen Maßtheorie betrachtet nun die Abbildung als ein sekundäres Element, das mit der eigentlichen Minimalfläche gar nichts direkt zu tun hat und

insbesondere mit mancherlei Willkürlichkeiten behaftet ist, und studiert stattdessen eine Minimalfläche als eine Menge im Raum, oder allgemeiner als Maß, um dadurch insbesondere die geometrischen Eigenschaften besser in den Griff zu bekommen.
Die Frage nach der Existenz eingebetteter Minimalflächen als Lösungen des Plateauproblems ist mit diesen Methoden vollständig von Hardt-Simon [HS] beantwortet worden:

Satz 3. *Jede geschlossene Jordankurve* $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ *der Klasse* $C^{1,\alpha}(0 < \alpha < 1)$ *berandet eine eingebettete orientierbare Minimalfläche.*

Wir wollen kurz die diesem Satz zugrundeliegenden Konzepte diskutieren (und gleichzeitig auch die Frage 6) behandeln).[1])
Will man eine eingebettete Untermannigfaltigkeit als Lösung des Plateauproblems mit gegebenem Rand erhalten, so kann man nicht einfach in der Klasse der eingebetteten Untermannigfaltigkeiten minimieren, weil diese Klasse nicht abgeschlossen bezüglich irgendeines natürlichen Konvergenzbegriffes ist und ein Grenzwert einer Folge aus dieser Klasse alle möglichen Singularitäten entwickeln kann. Daher muß man, wie ähnlich auch im parametrischen Fall, prinzipiell in zwei Schritten vorgehen, und zwar zunächst die gewünschte Klasse geeignet abschließen, so daß das Minimum nunmehr angenommen werden kann, und dann zeigen, daß ein Minimum des Flächenfunktionals tatsächlich so gute Regularitätseigenschaften besitzt, daß es doch in der ursprünglichen Klasse liegt.
Wir werden gelegentlich den Begriff des Hausdorffmaßes verwenden. Für $m \geqslant 0$ und $\delta > 0$, $A \subset \mathbf{R}^n$ sei

$$\mathcal{H}^m_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{\operatorname{diam}}{2} C_j \right)^m : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \operatorname{diam} C_j < \delta \right\}$$

wobei ω_m das Maß der m-dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet. Das m-dimensionale Hausdorffmaß von A ist dann

$$\mathcal{H}^m(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^m_\delta(A) \quad (= \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^m_\delta(A))$$

Der geeignete Begriff, der Mannigfaltigkeiten verallgemeinert und Klassen definiert, die unter maßtheoretischer Konvergenz abgeschlossen sind, ist nun derjenige des Current (Strom). Es seien

$$U \subset \mathbf{R}^m$$

$$\omega \in \mathcal{D}^n(U) := \{C^\infty \text{ n-Formen mit kompaktem Träger in } U\}$$

$$\|\omega\| := \sup \{\langle \omega, \xi \rangle : \xi \in \Lambda_n(\mathbf{R}^m), |\xi| = 1, \xi \text{ einfach}\}$$

(alle Begriffsbildungen lassen sich in offensichtlicher Weise auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern). Der Raum der Currents ist dann

$$\mathcal{D}_n(U) := \{\text{Stetige lineare Funktionale auf } \mathcal{D}^n(U)\}.$$

---

[1]) Referenzen für die geometrische Maßtheorie sind [F2] und [Si].

Die Masse eines Current T ist definiert als

$$M_U(T) := \sup \{T(\omega) : \|\omega\| \leqslant 1, \omega \in \mathcal{D}^n(U)\}.$$

Wir wollen uns kurz klarmachen, daß eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbf{R}^m$ (mit lokal endlichem n-dimensionalem Hausdorffmaß $\mathcal{H}^n$) einen Current definiert; die Orientierung sei durch $\xi(x) = \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n$ (τ_i Orthonormalbasis von $T_x M$) gegeben; dann setzen wir für $\omega \in \mathcal{D}^n(U)$

$$[\![M]\!](\omega) := \int_M \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \, d\mathcal{H}^n(x).$$

Im Grunde bedeutet dies natürlich einfach nur, daß man eine Differentialform über eine Mannigfaltigkeit integrieren kann. Umgekehrt spielen diejenigen Currents eine wichtige Rolle, die fast überall so aussehen wie eine (möglicherweise mit Vielfachheit versehene) Mannigfaltigkeit. Es sind dies die (lokal) rektifizierbaren (in der Terminologie von [F]) bzw. ganzzahligen (in der Terminologie von [Si]) Currents. Wir definieren

$$T \in \mathcal{R}_n^{(\mathrm{loc})}(U):$$
$$\Leftrightarrow \forall\, \omega \in \mathcal{D}^n(U):$$
$$T(\omega) = \int_M \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \, \theta(x) \, d\mathcal{H}^n(x),$$

wobei $M \subset U$ $\mathcal{H}^n$-meßbar und $(\mathcal{H}^n, n)$ abzählbar rektifizierbar ist (d. h. bis auf eine Menge vom $\mathcal{H}^n$-Maß Null abzählbare Vereinigung von C^1-Mannigfaltigkeiten), die Vielfachheit $\theta : M \to \mathbf{N}$ (lokal) $\mathcal{H}^n$-integrabel ist und die Orientierung $\xi : M \to \Lambda_n(\mathbf{R}^m)$ $\mathcal{H}^n$-meßbar ist, wobei für $\mathcal{H}^n$-fast alle $x \in M$ $\xi(x) = \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n$, τ_i Orthonormalbasis von $T_x M$, ist.
(Ein solches T heißt deswegen ganzzahlig, weil die Vielfachheitsfunktion nur natürliche Zahlen als Werte annehmen darf.)
Wir haben auch einen Randoperator für Currents, nämlich

$$\partial T(\omega) := T(d\omega).$$

Das folgende elementare Lemma drückt die schwache Kompaktheit massenbeschränkter Currents und die Unterhalbstetigkeit der Masse bei schwacher Konvergenz aus:

Lemma 2. *Es sei* $(T_j)_{j \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{D}_n(U)$,

$$\sup M_W(T_j) < \infty \quad \textit{für alle } W \subset\subset U.$$

Dann konvergiert T_j *nach Auswahl einer Teilfolge schwach gegen ein* $T \in \mathcal{D}_n(U)$, *und*

$$M_W(T) \leqslant \liminf_{j \to \infty} M_W(T_j).$$

Erheblich schwieriger ist die folgende Kompaktheitsaussage von Federer-Fleming [FF].

Lemma 3. *Es sei* $(T_j)_{j \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}_n^{loc}(U)$,

$$\sup_{j \in \mathbf{N}} (M_W(T_j) + M_W(\partial T_j)) < \infty \quad \textit{für alle } W \subset\subset U.$$

Dann konvergiert T_j *nach Auswahl einer Teilfolge schwach gegen ein* $T \in \mathcal{R}_n^{loc}(U)$.

(Die Schwierigkeit besteht natürlich darin, zu zeigen, daß der Limes T ebenfalls ganzzahlig ist.)
Aus diesem Lemma und der Unterhalbstetigkeit der Masse bei schwacher Konvergenz folgt dann, daß man das Plateauproblem in beliebiger Dimension und Kodimension in der Klasse der ganzzahligen Currents lösen kann.

Satz 4. *Es sei* $S \in \mathcal{R}_{n-1}(\mathbf{R}^{n+k})$, $\partial S = 0$, spt S *kompakt. Dann existiert ein* $T \in \mathcal{R}_n(\mathbf{R}^{n+k})$ *mit* $\partial T = S$, spt T *kompakt, für das*

$$M(T) \leqslant M(R)$$

für alle anderen solchen R *gilt* (zur Notation: spt M ist der Träger der Menge M).

Es läßt sich auch die Existenz von Currents in Riemannschen Mannigfaltigkeiten zeigen, die in ihrer Homologieklasse minimal sind:

Satz 5. *Es sei* N *eine* (n + k)*-dimensionale* C^1*-Mannigfaltigkeit,* $R_1 \in \mathcal{D}_n(N)$, $\partial R_1 = 0$, *und es sei*

$$I(R_1) := \{R \in \mathcal{D}_n(N) : R - R_1 = \partial S \textit{ für ein } S \in \mathcal{R}_{n+1}(N)\}.$$

Dann existiert ein $T \in I(R_1)$ *mit*

$$M(T) = \inf \{M(R) : R \in I(R_1)\}.$$

Der zweite Schritt besteht dann in der Untersuchung der Regularität eines minimierenden Currents. Wir definieren

$$\text{Reg}\,(T) := \{x \in \text{spt}\, T : x \text{ besitzt eine Umgebung } U(x), \text{ für die spt } T \cap U(x) \text{ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist}\}$$

und dann die singuläre Menge als

$$\text{Sing}\,(T) := \text{spt}\, T \setminus \text{Reg}\,(T).$$

In der Kodimension 1 gilt der folgende Regularitätssatz für minimierende Currents, welcher von J. Simons [Sms] und Federer [F1] stammt.

Satz 6. *Es sei* $T \in \mathcal{R}_n(U)$, U *offen in* $\mathbf{R}^{n+1}$,

$$M(T) \leqslant M(R) \textit{ für alle } R \textit{ mit } \text{spt}\,(T - R) \subset\subset U.$$

Dann ist Sing $T \cap U = \emptyset$ *für* $n \leqslant 6$, *lokal endlich für* $n = 7$, *und* $\mathcal{H}^{n-7+\alpha}(\text{Sing } T \cap U) = 0$ *für alle* $\alpha > 0$ *für* $n > 7$.

Ein Beispiel von Bombieri-de Giorgi-Giusti [BdGG], später von Lawson [La2] verallgemeinert, zeigt, daß diese Aussage scharf ist.
In beliebiger Kodimension gilt der folgende Satz von Almgren [A3]:

Satz 7. *Es sei* $T \in \mathcal{R}_n(U)$, U *offen in* $\mathbf{R}^{n+k}$, *und* T *sei im gleichen Sinne wie in Satz 6 minimierend. Dann ist für alle* $\alpha > 0$

$$\mathcal{H}^{n-2+\alpha}(\operatorname{Sing} T \cap U) = 0.$$

Entsprechende Aussagen gelten in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Da komplexe Untervarietäten von Kählermannigfaltigkeiten homologisch minimierend sind und schon komplexe Kurven Verzweigungspunkte, also Singularitäten der (reellen) Kodimension 2 besitzen können, ist Satz 7 für $\alpha = 0$ nicht mehr gültig. Übrigens hat Chang [Ch] kürzlich gezeigt, daß für zweidimensionale minimierende Currents im wesentlichen nur solche Verzweigungspunkte als Singularitäten auftreten können. Hardt-Simon [HS] haben dann gezeigt, daß bei Kodimension 1 in der Situation von Satz 4 für $S \in C^{1,\alpha}$ ein minimierendes T am Rande überhaupt keine Singularitäten haben kann. Am Rande gilt also eine bessere Aussage als im Innern, wo nach Satz 6 ja durchaus Singularitäten, wenn auch mit hoher Kodimension, auftreten können. Aus der Randregularität und den Sätzen 4 und 6 folgt dann Satz 3, und sogar eine analoge Aussage bis zur Dimension 6.
Schließlich hat Grüter [Gr1], [Gr2] eine zu Satz 6 analoge Aussage für minimierende Currents mit freien Randbedingungen erhalten. Hierfür können teilweise ähnliche Methoden wie für die innere Regularität benutzt werden.

6 Eingebettete Minimalflächen von vorgeschriebenem topologischem Typ. Das freie Randwertproblem

Nun produziert Satz 3 zwar eine Lösung mit optimalen geometrischen Regularitätseigenschaften, aber andererseits hat man keine Kontrolle mehr über den topologischen Typ der so erhaltenen Lösung (abgesehen von einer oberen Schranke für das Geschlecht in Abhängigkeit von der Gesamtkrümmung von γ, falls $\gamma \in C^{2,\alpha}$). Currents sind auch prinzipiell ungeeignet, um Minimalflächen von vorgegebenem topologischem Typ zu erhalten. Dies liegt im wesentlichen an der Tatsache, daß die Konvergenz, die man aus Kompaktheitssätzen erhält, die schwache Konvergenz ist, während die Masse nur unterhalbstetig, aber nicht stetig unter schwacher Konvergenz ist. So kann beispielsweise eine Folge von Kreisscheiben gegen eine Fläche vom Geschlecht 1 konvergieren, weil in der Grenze Teilstücke mit entgegengesetzter Orientierung zusammenkommen und sich gegenseitig aufheben können. Eine kleine Skizze mag dies veranschaulichen (Fig. 3).

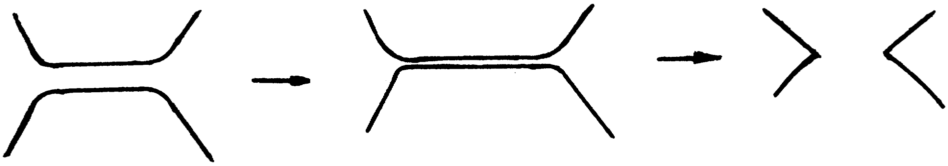

Fig. 3

(Aus einem ähnlichen Grunde sind Currents auch für Sattelpunktkonstruktionen ungeeignet).
Es stellt sich aber die Frage, ob man in bestimmten Fällen, wo geeignete geometrische Voraussetzungen erfüllt sind, auch eingebettete Minimalflächen von vor-

geschriebenem topologischem Typ bekommen kann. In der Tat gibt es nun derartige Aussagen, und wir wollen zunächst die folgende diskutieren:

Satz 8. *Es sei* A *ein strikt konvexer Körper der Klasse* C^2 *im* $\mathbf{R}^3$, $\gamma \subset \partial A$ *eine geschlossene Jordankurve. Dann berandet* γ *eine eingebettete Minimalfläche vom Typ der Kreisscheibe.*

Dieser Satz wurde zunächst von Gulliver-Spruck [GS] unter der Einschränkung, daß die Gesamtkrümmung von γ höchstens 4π ist, und dann von Tomi-Tromba [TT1], Almgren-Simon [AS] und Meeks-Yau [MY1] in voller Allgemeinheit bewiesen. Alle vier Methoden sind völlig unterschiedlich, und jede Methode liefert ein stärkeres Ergebnis als die vorhergehende.
Tomi-Tromba benutzen Methoden der globalen Analysis; ihr Ergebnis sagt nicht aus, ob die gefundene Minimalfläche flächenminimierend ist.[1]) Almgren-Simon minimieren die Oberfläche in der Klasse der eingebetteten Kreisscheiben und erhalten als Grenzwert einer Minimalfolge eine Varifaltigkeit (ein Begriff, den wir weiter unten genauer erläutern werden), deren Regularität sie dann nachweisen. Diese Varifaltigkeit entspricht dann einer eingebetteten Kreisscheibe, die stabil (im Sinne der zweiten Variation der Oberfläche) ist. Es ist aber aus diesem Ansatz nicht klar, ob sie auch in der Klasse der immersierten Kreisscheiben minimiert. Meeks-Yau zeigen, daß in der vorliegenden Situation die ursprüngliche Lösung von Douglas und Radó eingebettet ist (und damit übrigens mit der von Almgren-Simon gelieferten übereinstimmt). Sie benutzen u. a. Methoden der geometrischen Topologie, die zum Beweis des Dehnschen Lemmas entwickelt worden waren. Das Dehnsche Lemma besagt, daß eine Jordankurve auf dem Rande einer kompakten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M, die in M zusammenziehbar ist, eine eingebettete Kreisscheibe in M berandet. Umgekehrt ist die Methode von Meeks-Yau so allgemein, daß hiermit auch ein neuer Beweis des Dehnschen Lemmas geliefert wird. (Der entscheidende Vorteil des Verfahrens von Meeks-Yau im Vergleich zu den anderen ist eben, daß hierbei nicht vorausgesetzt wird, daß γ überhaupt eine eingebettete Kreisscheibe berandet. Vielmehr folgt dies als Korollar.) Sie zeigen nämlich, daß eine Jordankurve γ auf dem Rand einer konvexen Riemannschen Mannigfaltigkeit, wobei γ wieder zusammenziehbar ist, eine eingebettete minimale (flächenminimierende) Kreisscheibe berandet. (Man kann auf M immer eine Riemannsche Metrik einführen, die die obigen Voraussetzungen erfüllt, um die topologische Aussage des Dehnschen Lemmas als Korollar zu bekommen.) Dies stellt sogar eine wichtige Verschärfung des Dehnschen Lemmas dar, weil man nämlich aus der Minimumeigenschaft oft starke Folgerungen ziehen kann. Sind beispielsweise die Metrik von M und γ invariant unter der Aktion einer endlichen Gruppe, so ist auch die minimale Kreisscheibe invariant. Mit ähnlichen Argumenten beweisen Meeks-Yau auch, cf. [MY2].

Satz 9. M *sei eine kompakte dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konvexem Rand.*

---

[1]) Man vgl. jedoch [Li] und [Wh3] zu diesem Punkt.

a) *Die durch die Inklusion induzierte Abbildung*

$i_*: \pi_1(\partial M) \to \pi_1(M)$

sei nicht injektiv.
Dann existiert in M *eine eingebettete Kreisscheibe, die* ∂M *senkrecht trifft, also ein freies Randwertproblem löst.*

b) *Es sei* $\pi_2(M) \neq 0$. *Dann existiert in* M *eine eingebettete minimale* S^2 *oder projektive Ebene.*
Die in a) *und* b) *erhaltenen Flächen minimieren jeweils in ihrer Homotopieklasse die Oberfläche.*

Außerdem sind zwei verschiedene derartige minimierende Flächen immer im Innern disjunkt. Ansonsten könnte man nämlich durch Austausch von Teilen die Oberfläche verkleinern. Eine Skizze mag dies verdeutlichen (Fig. 4).

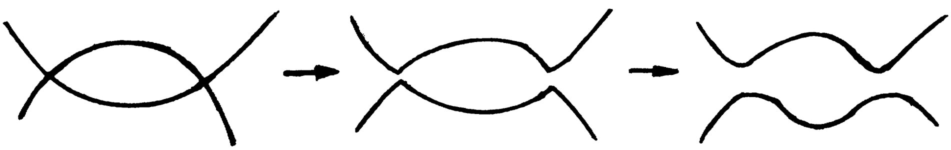

Fig. 4

Dieser Gedanke spielt auch beim Nachweis der Einbettung eine wichtige Rolle. Die Untersuchungen von Meeks-Yau wurden von Freedman-Hass-Scott [FHS] auf Flächen höheren Geschlechtes ausgedehnt. Allerdings braucht man hierbei noch zusätzlich topologische Voraussetzungen, um tatsächlich eingebettete Minimalflächen zu erhalten.
Ein weiteres Ergebnis für eingebettete Minimalflächen eines vorgegebenen Geschlechtes stammt vom Autor [J3]:

Satz 10. *Es sei* A *eine kompakte dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Rand* ∂A *nichtnegative mittlere Krümmung bezüglich der inneren Normalen besitzt.* A *sei homöomorph zum Volltorus vom Geschlecht* 2g.
$a_1, \ldots, a_{2g}$ *seien Erzeugende von* $\pi_1(A)$, *und* $\gamma \subset \partial A$ *sei eine Jordankurve, die in* A *homotop zu*

$$(7) \qquad a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1}$$

ist. Dann berandet γ *eine eingebettete Minimalfläche vom Geschlecht* g.

Der Beweis arbeitet mit Varifaltigkeiten, benötigt aber im Vergleich zu [AS] allgemeinere Aussagen über die Randregularität. Die Bedingung (7) war vorher von Tomi-Tromba [TT2] eingeführt worden, die auch die Existenz einer (nicht notwendig eingebetteten) Minimalfläche mit Rand γ vom Geschlecht g mit parametrischen Methoden gezeigt hatten ([TT3]).
Meeks-Yau hatten ihre Methode zur Gewinnung einer eingebetteten minimalen Kreisscheibe übrigens ebenfalls auf den Fall ausgedehnt, wo der Rand der Mannigfaltigkeit nichtnegative mittlere Krümmung besitzt.
Schließlich wurde das Verfahren aus [AS] von Meeks-Simon-Yau [MSY] erweitert, um die Oberfläche in einer Isotopieklasse eingebetteter Flächen in einer Riemann-

schen Mannigfaltigkeit zu minimieren. In der Grenze erhält man dann eine eingebettete Minimalfläche von möglicherweise kleinerem Geschlecht als die Ausgangsflächen, die sich unter Umständen auch in mehrere Komponenten aufspalten kann, von denen einige auch nicht orientierbar sein können, auch wenn die Ausgangsflächen orientierbar waren. (Diese nicht orientierbaren Flächen besitzen dann die Vielfachheit 2, werden also vom Limes der Ausgangsflächen doppelt überdeckt.) Aus diesem Resultat ließen sich wichtige Aussagen über die Topologie dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten ableiten, cf. [MSY].
In diesem Zusammenhang soll nun noch die Existenz von eingebetteten Minimalflächen, die ein freies Randwertproblem lösen, diskutiert werden. Während man beim Plateauproblem das Geschlecht der Fläche variabel halten mußte, um in einer allgemeinen Situation zu vermeiden, daß die Minimalfläche die Randkurve in unphysikalischer Weise durchsetzt (cf. Satz 3), so stellt sich heraus, daß man beim freien Randwertproblem den Zusammenhang, also die Anzahl der Randkurven der Minimalfläche auf der Stützfläche, variieren muß, damit die erhaltene Fläche nicht die Stützfläche durchdringen kann. Im parametrischen Kontext wurde dies erstmals von Tolksdorf [To1] herausgestellt, während für eingebettete, also geometrisch reguläre Minimalflächen die diesbezüglichen Resultate sämtlich vom Verfasser [J3], [J8] stammen. Um das Auftreten zweifach überdeckter, nicht orientierbarer Flächen im Limes zu vermeiden und nicht durch zusätzliche topologische Bedingungen (nach Art der Courantschen Verschlingungsbedingungen, cf. [C7]) ausschließen zu müssen, daß sich die Flächen der untersuchten Klasse zu einem Punkt zusammenziehen können, wollen wir an dieser Stelle nur ein sogenanntes gemischtes Randwertproblem vorstellen, wo also sowohl freie als auch Plateausche Randbedingungen vorkommen.

Satz 11. M *sei eine kompakte dreidimensionale Mannigfaltigkeit,* A *und* K *abgeschlossene Teilmengen mit Rand der Klasse* C^2. ∂A *habe nichtnegative mittlere Krümmung bezüglich der inneren Normalen.* γ_j, $j = 1, \ldots, \ell$, *seien disjunkte Jordankurven in* ∂A, $\gamma_j \cap K = \emptyset$ $(j = 1, \ldots, \ell)$. ν_A *und* ν_K *seien die äußeren Normalenvektoren von* ∂A *bzw.* ∂K, *und es gelte*

$$\nu_A \cdot \nu_K \geqslant 0 \quad \text{in } \partial A \cap \partial K.$$

Sofern dies topologisch möglich ist, existiert dann eine eingebettete Minimalfläche Σ *vom Geschlecht* 0 *in* $X \backslash K$, *welche* $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$ *als Plateausche Randkurven sowie möglicherweise freie Randkurven* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ *auf* ∂K *besitzt, längs denen* Σ *senkrecht auf* ∂K *auftrifft.*

Man stelle sich K dabei als für die Minimalfläche undurchdringlichen Körper vor. Im Experiment ist ∂K also ein physikalisches Hindernis für die Minimalfläche. Die Barriere ∂A nichtnegativer mittlerer Krümmung ist dagegen nur ein geometrisches Hindernis, welches erlaubt, das Geschlecht der auftretenden Minimalfläche zu kontrollieren. Setzt man analog voraus, daß ∂K nichtpositive mittlere Krümmung bezüglich der inneren Normalen hat, so läßt sich entsprechend die Anzahl der freien Randkurven, also der Zusammenhang von Σ kontrollieren, cf. [J3], wie wir es ähnlich ja auch schon in Satz 9a) gesehen haben. Es sei noch auf gewisse Verallgemeinerungen hingewiesen: Zunächst braucht M nicht unbedingt kompakt zu sein, son-

dern nur geeignete Homogenitätsforderungen zu erfüllen, da die Plateausche Randbedingung verhindert, daß der Limes einer Minimalfolge im Unendlichen verschwinden kann. Weiterhin brauchen, genauso wie in den zitierten Untersuchungen von Meeks-Yau, ∂A und ∂K nur stückweise C^2 zu sein. Dies ist z. B. wichtig, wenn man eine Minimalfläche mit Rand in einem weiteren Schritt als geometrisches Hindernis für eine andere Minimalfläche benutzen will.
Schließlich ist die Existenzfrage für Minimalflächen höheren Geschlechtes in der Situation von Satz 11 in [J8] studiert worden.
Um den Überblick zu vervollständigen, wollen wir noch auf einige neuere Regularitätsresultate für parametrische Minimalflächen mit freien Rändern hinweisen, nämlich [GHN], [Dz], [J6], [J7], [Y1], [Y2], sowie die Untersuchungen von Hildebrandt-Nitsche [HN1], [HN2], [HN3] erwähnen, die ein halbfreies Randwertproblem studieren. Sie betrachten als Stützfläche eine Halbebene S im $\mathbf{R}^3$, also eine Fläche, die selber einen Rand besitzt, sowie einen Jordanbogen γ mit Endpunkten auf zwei verschiedenen Seiten von S. Interessant hierbei ist, daß für geeignet gewähltes γ die erhaltene Minimalfläche einen Verzweigungspunkt auf ∂S besitzt, und zwar sowohl mathematisch als auch experimentell.

7 Konzepte der geometrischen Maßtheorie II: Varifaltigkeiten. Sattelpunktkonstruktionen

Wir wollen nun, wie schon angekündigt, das Konzept der Varifaltigkeit (varifold[1])) vorstellen, welches die oben beschriebenen Nachteile des Currents vermeidet und sich zur Gewinnung von Minimalflächen von kontrolliertem topologischem Typ wie auch zur Gewinnung instabiler Minimalflächen verwenden läßt, wie wir weiter unten noch sehen werden. Es sei $U \subset \mathbf{R}^{n+k}$ offen, $G_n(U) := U \times G(n+k, n)$ das Grassmannsche Bündel über U (die Faser in einem Punkt x besteht aus den n-dimensionalen affinen Unterräumen des $\mathbf{R}^{n+k}$, die durch x hindurchgehen). Eine n-dimensionale Varifaltigkeit V in U ist dann einfach ein Radonmaß auf $G_n(U)$, also ein positives Element in $C^*(G_n(U))$, dem Dualraum der stetigen Funktionen auf $G_n(U)$, versehen mit der schwach-*-Topologie. In Symbolen:

$$V \in V_n(U).$$

Das Gewicht von V, definiert durch

$$\mu_V(A) := V(G_n(A)) \quad \text{für } A \subset U$$

ist dann ein Radonmaß auf U.
Wir benötigen auch die flache Metrik

$$F_U(V, W) := \sup \{|V(f) - W(f)| : f \in \operatorname{Lip}(G_n(U)), |f| \leq 1, \operatorname{Lip}(f) \leq 1\}$$
$$\text{für } V, W \in V_n(U).$$

---

[1]) Sprachlich ist dies eine Zusammenziehung aus „calculus of variations" und „manifold", die sich im Deutschen gut nachmachen läßt.

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist $F_U(V, W)$ stetig unter schwach-*-Konvergenz. Einer n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M von U läßt sich eine Varifaltigkeit zuordnen

$$v(M)(B) := \mathcal{H}^n\{x : T_x M \subset B\} \quad \text{für } B \subset G_n(U).$$

Das so erhaltene Maß von B drückt also aus, wieviele Tangentialebenen von M in B liegen.
Das Gewicht $\mu_{v(M)}$ der so erhaltenen Varifaltigkeit ist dann gerade das n-dimensionale Hausdorffmaß, eingeschränkt auf die ursprüngliche Mannigfaltigkeit M. Man erhält diese also wieder zurück.
Wir schreiben auch (für $V \in V_n(U)$, $A \subset U$)

$$\|V\|(A) := \mu_V(A) = \sup\{V(g) : \operatorname{spt} g \subset G_n(A), |g| \leqslant 1\}$$

Konvergenz von Radonmaßen $\mu_j \to \mu$ impliziert nun

$$\mu_j(A) \to \mu(A) \text{ für alle kompakten A mit } \mu(\partial A) = 0$$

Daher ist $\|.\|(\mathbf{R}^{n+k})$ stetig unter Varifaltigkeitskonvergenz, falls alle Varifaltigkeiten ihren Träger in einer festen kompakten Menge haben.
Es reicht aber nicht aus, nur die Konvergenz der Gewichtsmaße zu betrachten, und hierin liegt die Motivation für die Begriffsbildung der Varifaltigkeit. Hat man nämlich eine Folge beispielsweise von Mannigfaltigkeiten $M_j \subset U$ und betrachtet die zugehörigen Maße $\mathcal{H}^n \llcorner M_j$, so konvergiert zwar eine Teilfolge als Radonmaße, aber das Grenzmaß ist zu allgemein, als daß man noch sinnvolle Aussagen machen kann. Insbesondere kann man nicht die erste Variation eines Radonmaßes bzgl. des Flächeninhaltes definieren, und deswegen kann man auch nicht sagen, ob ein Radonmaß stationär, also eine verallgemeinerte Minimalfläche ist. Aus diesem Grunde betrachtet man als Varifaltigkeit die Mannigfaltigkeit nicht nur als Untermenge des $\mathbf{R}^{n+k}$, sondern zusammen mit der Gesamtheit ihrer Tangentialräume.
Für eine Varifaltigkeit V läßt sich dann die erste Variation wie folgt definieren:
Für eine eigentliche Abbildung $f \in C^1(\mathbf{R}^{n+k}, \mathbf{R}^{n+k})$ und $(x, S) \in G_n(U)$ setzen wir

$$J_s f(x) := (\det((df(x)_{|S})^* \circ (df(x)_{|S})))^{1/2}$$

und $$f_\# V(A) := \int_{F^{-1}(A)} J_s f(x)\, dV(x, S)$$

wobei $F(x, S) = (f(x), df(x)(S)) : \{(x, S) \in G_n(U) : J_s f(x) \neq 0\} \to G_n(f(U))$.

Ist nun X ein (glattes) Vektorfeld mit kompaktem Träger $K \subset U$, so integrieren wir X zu einer glatten einparametrigen Familie $(\phi_t)_{-\epsilon < t < \epsilon}$ von Diffeomorphismen von $\mathbf{R}^{n+k}$ mit

$$\phi_0 = \mathrm{id}, \quad \phi_t = \mathrm{id} \quad \text{außerhalb von K für alle t}$$

$$X(x) = \frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x)_{|t=0}.$$

Schließlich setzen wir

$$\delta V(X) := \frac{d}{dt} M(\phi_{t\#} V \llcorner G_n(K))_{|t=0}$$

(M ist die Masse wie oben)

$$= \int_{G_n(U)} \operatorname{div}_S X(x)\, dV(x, S)$$

(Ist $e_1, \ldots, e_{n+k}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbf{R}^{n+k}$, $\tau_1, \ldots, \tau_n$ eine Orthonormalbasis von S, so ist

$$\operatorname{div}_S X = \sum_{j=1}^{n+k} e_j \sum_{i=1}^{n} (D_{\tau_i} X^j)\tau_i$$

für $X = (X^1, \ldots, X^{n+k})$).
Die erste Variation drückt also aus, wie sich die Masse ändert, wenn wir die Varifaltigkeit durch Isotopien des umgebenden Raumes variieren.
Hat V beschränkte erste Variation, also

$$|\delta V(X)| \leqslant c \sup |X|$$

für alle Vektorfelder in U, so läßt sich die erste Variation mittels Darstellungssätzen der Funktionalanalysis aufspalten in einen Anteil, der von der verallgemeinerten mittleren Krümmung herrührt, sowie einen Anteil, der den verallgemeinerten Rand von V beschreibt.
Besonders nützlich sind natürlich rektifizierbare und ganzzahlige Varifaltigkeiten, also solche, deren Träger eine rektifizierbare Menge mit einer positiven reellwertigen bzw. ganzzahligen Vielfachheitsfunktion ist, genauso wie oben bei den Currents.
Varifaltigkeiten wurden erstmals von Almgren eingeführt. Die zentralen Sätze stammen von Allard [Al1], insbesondere ein Rektifizierbarkeitssatz, d. h. ein Kriterium dafür, wann eine Varifaltigkeit rektifizierbar ist, und ein Kompaktheitssatz in der Klasse der rektifizierbaren bzw. ganzzahligen Varifaltigkeiten, welcher dann wie oben die Lösbarkeit von Variationsproblemen in dieser Klasse sichert.
Es gilt auch ein Regularitätssatz für Varifaltigkeiten, die nahe an einer Kreisscheibe in dem Sinne liegen, daß (aus Normierungsgründen) die Dichte mindestens 1 in fast allen Punkten ihres Trägers ist, ihr Maß in einer Kugel mit Radius ρ dasjenige der n-dimensionalen Kreisscheibe mit gleichem Radius ρ nur wenig übersteigt und schließlich die L^p-Norm der verallgemeinerten mittleren Krümmung für ein $p > n$ genügend klein ist. Dann läßt sich der Träger von V in einer kleineren Kugel als Graph einer $C^{1,1-n/p}$-Funktion über einer Tangentialebene darstellen. Ein solcher Satz wurde von Allard im Innern [Al1] und für Plateaurandbedingungen [Al2] und von Grüter-Jost [GJ1] für freie Ränder bewiesen.
Varifaltigkeiten vermeiden nun die bei Currents auftretende Schwierigkeit, daß im Limes die Masse nach unten springen kann. In der oben angegebenen Topologie ist, wie erläutert, das Gewicht stetig. Allerdings ist der Begriff der stationären Varifaltigkeit (d. h. $\delta V(X) = 0$ für alle für das Problem zulässigen Vektorfelder X) noch zu allgemein, um noch starke Regularitätsaussagen machen zu können. Insbesondere

lassen sich Selbstdurchschneidungen durch die erlaubte Variationen, also Isotopien des umgebenden Raumes, nie wegkriegen.
Es reicht also nicht aus, durch Sattelpunktkonstruktionen einfach nur irgendwelche instabilen Varifaltigkeiten zu erzeugen. Pitts [P] entwickelte jedoch den folgenden nützlichen Gedanken (zur Erzeugung minimaler Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1): Führt man beispielsweise eine Sattelpunktkonstruktion erster Ordnung durch, so wird die erzeugte Lösung (höchstens) den Index 1 haben. Betrachtet man daher irgendzwei disjunkte offene Mengen, die den Träger der als Lösung erhaltenen Varifaltigkeit schneiden, so muß die Lösung in mindestens einer der beiden Mengen stabil (für das Flächenfunktional) sein. Dann lassen sich Regularitätssätze für stabile Hyperflächen der Dimension $\leqslant 5$ (bzw. $\leqslant 6$ in [SS]) von Schoen-Simon-Yau [SSY] (später von Schoen-Simon [SS] verschärft) anwenden, um zu folgern, daß der Träger in dieser Menge eine eingebettete Minimalfläche ist. Da diese Überlegung für irgendzwei offene Mengen gilt, ist die Lösung daher eingebettet mit Ausnahme höchstens eines einzigen Punktes. Dieser Punkt stellt sich dann als hebbare Singularität heraus, denn eine (stabile) Hyperfläche der Dimension $\geqslant 2$ kann sich nicht in einem isolierten Punkt selbst durchschneiden.
Aus der Untersuchung von Pitts [P] und dem Regularitätssatz von Schoen-Simon [SS], die gezeigt haben, daß für stabile minimale Hyperflächen die gleichen Regularitätsaussagen wie für minimierende Currents (s. o.) gelten, folgt

Satz 12. *Es sei* M *eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension* n, $3 \leqslant n \leqslant 7$. *Dann existiert in* M *eine kompakte eingebettete minimale Untermannigfaltigkeit* Σ *der Kodimension 1.*

Beispiele zeigen, daß das konstruierte Σ nicht unbedingt zusammenhängend sein muß und auch höhere Vielfachkeit haben kann.
Obwohl man also erwartet, daß die erhaltene Sattelpunktlösung instabil sein sollte, kann sie doch einfach eine mehrfache Überlagerung einer homologisch minimierenden Untermannigfaltigkeit sein. Sein größtes Interesse hat dieser Satz daher, wenn $H_{n-1}(M)$ verschwindet, wenn also die oben diskutierte Existenztheorie für homologisch minimierende Hyperfläche nur triviale Lösungen liefert.
Der Grundgedanke des Existenzbeweises aus [P] sieht folgendermaßen aus:
Man betrachtet stetige Familien $(\Sigma_t)_{t \in [0,1]}$ eingebetteter Untermannigfaltigkeiten, für die Σ_0 und Σ_1 Punkte sind und Σ_t für $0 < t < 1$ die Kodimension 1 hat und M in zwei Teile M_t' und M_t'' zerlegt, und zwar dann nur solche Familien, für die

$$\mathrm{vol}\, M_0' = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{vol}\, M_1' = \mathrm{vol}\, M$$ [1])

ist, die also das Volumen von M ausschöpfen. Nach einem topologischen Satz von Almgren [A1] kann man jeden solchen Pfad mit einem Element von $H_n(M)$ identifizieren, also einem Vielfachen der Fundamentalklasse [M], wobei die Vielfachheit gerade angibt, wie oft das Volumen von M ausgeschöpft wird. (Technisch muß man allgemeiner mit Currents arbeiten.) Dies zeigt, daß die Konstruktion topologisch nichttrivial ist und insbesondere $\inf_{(\Sigma_t)\text{ wie oben}} \sup_t |\Sigma_t| > 0$ ist.

---

[1]) Dabei sollen M_t' und M_t'' natürlich stetig von t abhängen.

Satz 12 gibt wiederum keinerlei Kontrolle über den topologischen Typ der gewonnenen minimalen Untermannigfaltigkeit. Eine Betrachtung von White [Wh1] zeigt nun, daß man für $n \geqslant 4$ nicht einmal eine topologische Kontrolle von flächenminimierenden Untermannigfaltigkeiten, beispielsweise von Lösungen des verallgemeinerten Plateauproblems, erwarten kann, und daher erst recht nicht von minimalen Untermannigfaltigkeiten, die durch Sattelpunktkonstruktionen gewonnen werden. Für $n = 3$, also für Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, ist dies aber, wie schon angedeutet, anders; in der Tat zeigten Simon-Smith [SSm]

Satz 13. *Jede zu* S^3 *diffeomorphe Riemannsche Mannigfaltigkeit enthält eine eingebettete minimale 2-Sphäre.*

Die Konstruktionen von Simon-Smith sind dann von Pitts-Rubinstein [PR] auf andere topologische Typen von Mannigfaltigkeiten und Flächen erweitert worden. Für das freie Randwertproblem bewies der Autor [J4], [J5] in Verallgemeinerung von [St1] und [GJ2]:

Satz 14. *Es sei* A *eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, homöomorph zur Kugel, mit Rand* $\partial A \in C^2$.

a) *Dann existiert in* A *eine eingebettete Minimalfläche vom Geschlecht* 0, *also entweder eine Sphäre, eine Kreisscheibe oder eine Kreisscheibe mit Löchern, die* ∂A *senkrecht längs ihres Randes trifft.*

b) *Hat* ∂A *nichtnegative mittlere Krümmung bezüglich der inneren Normalen, so existiert in* A *eine eingebettete Minimalfläche vom Typ der Sphäre oder Kreisscheibe, die (im zweiten Fall) wiederum* ∂A *senkrecht trifft.*

Liegt A beispielsweise im $\mathbf{R}^3$, oder hat A allgemeiner nichtpositive Schnittkrümmung, so kann der Fall der Sphäre nicht auftreten. Die Barrierenbedingung im Falle b) ist natürlich die gleiche wie oben.
In topologischer Analogie zu der Tatsache, daß es nach dem Satz von Lusternik-Schnirelman auf jeder zu S^2 homöomorphen Fläche mindestens drei geschlossene Geodätische ohne Selbstdurchschneidungen gibt, erwartet man nun, daß es in der Situation von Satz 13 sogar vier verschiedene eingebettete minimale Sphären und in derjenigen von Satz 14b) drei verschiedene minimale Kreisscheiben gibt.
Hierzu zeigte White [Wh2] zunächst, daß es zu einer Metrik auf der S^3 mit positiver Riccikrümmung mindestens zwei Lösungen gibt. Nach Vorarbeiten in [J4], wo Sattelpunktkonstruktionen höherer Ordnung und Analoga der topologischen Konstruktionen von Lusternik-Schnirelman für Minimalflächen entwickelt wurden, hat der Autor dann in [J9] das allgemeine Problem gelöst; es gilt

Satz 15. a) *Jede zu* S^3 *diffeomorphe Riemannsche Mannigfaltigkeit enthält mindestens vier eingebettete minimale 2-Sphären.*

b) *Es sei* A *ein kompakter, zur Kugel homöomorpher Körper im* $\mathbf{R}^3$, *dessen Rand von der Klasse* C^4 *ist und positive mittlere Krümmung bezüglich der inneren Normalen besitzt.*
Dann enthält A *mindestens drei eingebettete minimale Kreisscheiben, die* ∂A *senkrecht treffen.*

Eine Schwierigkeit bei diesem Problem besteht darin, daß eine durch eine Sattelpunktkonstruktion höherer Ordnung gewonnene Lösung einfach die Lösung erster Ordnung mit höherer Vielfachheit sein kann, also von dieser nicht geometrisch verschieden zu sein braucht. Bei einer genaueren Analyse dieses Phänomens stellt sich jedoch heraus, daß in einem solchen Fall weitere sukzessive Sattelpunktkonstruktionen möglich sind, die zu nichttrivialen Lösungen führen. Nach genügend vielen Schritten bekommt man dann doch schließlich neue Lösungen.
Schon vorher hatte Smyth [Sy] die folgende Aussage erzielt, die eine schon von H. A. Schwarz diskutierte Situation behandelt:

Satz 16. *Es sei* T *ein Tetraeder im* $\mathbf{R}^3$. *Dann existieren im Innern drei eingebettete minimale Kreisscheiben, die senkrecht auf den Seitenflächen auftreffen, transversal durch die Kanten hindurchgehen und disjunkt zu den Ecken sind.*

Diese Aussage ist zwar einerseits viel spezieller und auch viel elementarer zu beweisen als diejenige von Satz 15b), wird aber andererseits wegen der fehlenden Glattheit hiervon nicht erfaßt. Es scheint übrigens auch, daß die von Smyth gefundenen Lösungen alle Sattelpunkte erster Ordnung sind.
In S^3 mit der Standardmetrik entsprechen die minimalen Sphären aus Satz 15a) natürlich Äquatorsphären. Es gibt aber in der S^3 auch noch andere eingebettete Minimalflächen, z. B. den Clifford-Torus $\left(S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset S^3 \subset \mathbf{R}^4\right)$ wie auch Flächen höheren Geschlechtes (Beispiele von Lawson [La1] und Karcher-Pinkall-Sterling [KPS]). Es fragt sich daher, ob man auch Existenzaussagen für zu S^3 diffeomorphe Mannigfaltigkeiten machen kann. Abgesehen von partiellen Resultaten von White [Wh2] für die Existenz minimaler Tori und von Pitts-Rubinstein [PR] für Mannigfaltigkeiten mit speziellen Gruppenoperationen ist dieses Problem aber noch offen.

8 Verschiedenes. Schlußbetrachtung: Die Nichteindeutigkeit von Minimalflächen

Nur kurz erwähnen wollen wir noch ein anderes, von Almgren [A2] eingeführtes Konzept aus der geometrischen Maßtheorie, welches ein gutes mathematisches Modell für manche experimentell bei Seifenfilmen beobachteten Konfigurationen liefert. Eine n-dimensionale Teilmenge S des $\mathbf{R}^m$ mit Rand $B = \partial S$ heißt (M, 0, δ)-minimal bezüglich B ($\delta > 0$), falls für jede Lipschitzdeformation ϕ des $\mathbf{R}^m$, für die der Träger von $(\phi - \mathrm{id})$ in einer zu B disjunkten Kugel mit Radius δ enthalten ist,

$$\mathcal{H}^m(\phi(S)) \geqslant \mathcal{H}^m(S)$$

gilt. Da ϕ nicht differenzierbar, sondern nur Lipschitzstetig sein muß, kann ein solches ϕ auch Teile von S zusammendrücken. Fig. 5 zeigt eine nicht (M, 0, 1) minimierende Teilmenge des $\mathbf{R}^2$ (nach [Mg3]).
Taylor [Ty] zeigte, daß zweidimensionale (M, 0, δ)-minimale Teilmengen des $\mathbf{R}^3$ nur zwei mögliche Arten von Singularitäten haben können, nämlich einmal drei

Flächen, die sich längs einer Kurve in einem Winkel von 120° treffen, und zweitens vier solcher Kurven, die sich in einem Winkel von etwa 109° in einem Punkte treffen. Dies sind genau die von Plateau experimentell beobachteten Singularitäten von minimalen Seifenhautkonfigurationen.

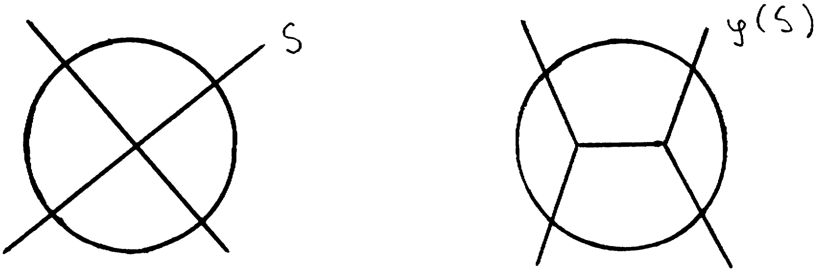

Fig. 5

Ein parametrischer Ansatz zur Behandlung derartiger Strukturen wurde von Tolksdorf [To3] vorgeschlagen.
Nicht weiter eingehen wollen wir in diesem Artikel auf explizite Beispiele von Minimalflächen. (Wir haben schon die Fläche von Costa und Hoffman-Meeks [HM] genannt sowie Beispiele von Minimalflächen in der S^3 [La1], [KPS] erwähnt.)
Nach mehreren speziellen Ansätzen, die meist nur Minimalflächen liefern können, die sich als Graphen darstellen lassen, wurde das Plateauproblem numerisch erstmals von Jarausch [Ja] gelöst. Er arbeitete mit parametrischen Methoden und erhielt die Douglas-Radó-Lösung. Wohlrab [Wo] konnte dann allgemeiner auch freie Randwertprobleme numerisch lösen. In diesem Rahmen liegen inzwischen auch Ansätze zur numerischen Konstruktion von Minimalflächen höheren Geschlechtes vor.
Schließlich wurden Ideen der geometrischen Maßtheorie in einem numerischen Verfahren von Almgren-Super [ASu] verwandt.
Abschließend wollen wir vielleicht noch einmal darauf hinweisen, daß das Plateausche Problem im allgemeinen einen hohen Grad von Nichteindeutigkeit aufweist. Eindeutige Lösbarkeit gilt nur in sehr speziellen Fällen. Radó [R4] bewies, daß eine Kurve $\gamma \subset \mathbf{R}^3$, die eine eindeutige Parallel- oder Zentralprojektion auf eine ebene konvexe Kurve besitzt, nur eine einzige Minimalfläche beranden kann, die sich überdies als Graph darstellen läßt. Nitsche [N2] zeigte, daß, falls die Gesamtkrümmung von γ höchstens 4π beträgt, γ nur eine einzige minimale Kreisscheibe beranden kann; ob Lösungen höheren Geschlechtes in diesem Fall auftreten können, ist noch offen (außer wenn γ zusätzlich auf dem Rand eines konvexen Körpers liegt, cf. [MY3]).
Courant und P. Lévy gaben sogar ein Beispiel einer (allerdings mit einer Singularität behafteten) Jordankurve $\gamma \subset \mathbf{R}^3$, die unendlich viele verschiedene Minimalflächen berandet; die Konstruktion basiert allerdings auf dem erst später von Meeks-Yau [MY3] gezeigten Brückensatz.
Die Frage, ob eine glatte Jordankurve im $\mathbf{R}^3$ unendlich viele Minimalflächen beranden kann, ist dagegen noch offen. Morgan [Mg1] und Gulliver-Hildebrandt [GH] gaben Konfigurationen von vier bzw. drei koaxialen Kreisen im $\mathbf{R}^3$ an, die sogar Kontinua von Minimalflächen beranden.

Böhme [Bö] zeigte für jedes $m \in \mathbf{N}$ und $\epsilon > 0$ die Existenz einer reellanalytischen Jordankurve im $\mathbf{R}^3$ mit Totalkrümmung höchstens $4\pi + \epsilon$, die mindestens m minimale Kreisscheiben berandet. Quien-Tomi [QT] konstruierten zu jedem $m \in \mathbf{N}$ eine glatte Jordankurve γ, die mindestens m stabile immersierte minimale Kreisscheiben berandet. Der Gedanke besteht darin, daß γ sich zu einer Immersion der Kreislinie in die Ebene parallel projizieren läßt, die wenigstens m topologisch nicht äquivalente Immersionen der Kreisscheibe berandet.
Schließlich weisen wir auf den sehr allgemeinen und systematischen Ansatz von Böhme-Tromba [BT] hin, mit dem man zeigen kann, daß eine generische Jordankurve im $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 4$, nur endlich viele minimale Kreisscheiben berandet, sowie auf den Endlichkeitssatz von Tomi [Tm], der besagt, daß, falls man Randverzweigungspunkte für lokale Minima mit Rand γ ausschließen kann, es nur endlich viele solcher lokalen Minima gibt; diese Voraussetzung ist z. B. erfüllt, wenn γ reellanalytisch ist, cf. [GL], oder auch in der Situation von [HS].
Erweiterungen dieser Ergebnisse stammen von Schüffler [Sü1], [Sü2], Thiel [Th], Quien [Q], Meeks-Yau [MY3] und Morgan [Mg2].
Da die verschiedenen hier vorgestellten Ansätze Lösungen des Plateauproblems mit verschiedenen Eigenschaften liefern, so können sie zu einer gegebenen Jordankurve γ auch sehr unterschiedliche Minimalflächen liefern. Ein abschließendes Beispiel möge diese Vielfalt verdeutlichen. Wir betrachten die skizzierte Kurve in Fig. 6.

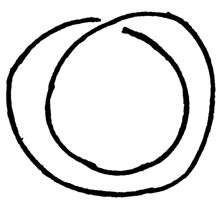

Fig. 6

Zunächst berandet γ eine minimale Kreisscheibe mit einem Verzweigungspunkt sowie ein minimales eingebettetes Möbiusband, cf. [N3, § 370]. Weiterhin berandet γ eine minimale immersierte Kreisscheibe als Douglas-Radó-Lösung sowie eine orientierte eingebettete Minimalfläche nach Hardt-Simon [HS].

Literaturverzeichnis

[Al1] A l l a r d , W.: On the first variation of a varifold, Ann. Math. **95** (1972) 417–491

[Al2] A l l a r d , W.: On the first variation of a varifold: Boundary behavior. Ann. Math. **101** (1975) 418–446

[A1] A l m g r e n , F.: The homotopy groups of the integral cycle groups. Top. **1** (1962) 257–299

[A2] A l m g r e n , F.: Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints. Memoirs AMS **165** (1976)

[A3] A l m g r e n , F.: Q valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area minimizing rectifiable currents up to codimension two. Preprint

[As] A l m g r e n , F.; S i m o n , L.: Existence of embedded solutions of Plateau's problem. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **6** (1979) 447–495

[ASu] A l m g r e n , F.; S u p e r , B.: Multiple valued functions in the geometric calculus of variations, Astérisque **118** (1984) 13–32

[AT] Almgren, D., Thurston, W.: Examples of unknotted curves which bound only surfaces of high genus within their convex hull. Ann. Math. **105** (1977) 527–538
[Alt1] Alt, H. W.: Verzweigungspunkte von H-Flächen, I. MZ **127** (1972) 333–362
[Alt2] dto., II. Math. Ann. **201** (1973) 33–55
[Ba] Baily: On the moduli of Jacobian varieties, Ann. Math. **71** (1960) 303–314
[Bc] Benci, C.: A new approach to the Morse-Conley theory; erscheint in Proc. Conf. Hamiltonian Systems L'Aquila 1986
[Be] Besicovitch, A.: Parametric surfaces (III): On surfaces of Minimum area. J. Lond. Math. Soc. **23** (1948) 241–246
[Bö] Böhme, R.: New results on the classical problem of Plateau on the existence of many solutions. Sém. Bourbaki, 34e anneé, 1981/82, no. 579
[BT] Böhme, R.; Tromba, A.: The index theorem for classical minimal surfaces. Ann. Math. **113** (1981) 447–499
[BdGG] Bombieri, E.; de Giorgi, E., Giusti, E.: Minimal cones and the Bernstein problem. Inv. math. **7** (1969) 243–268
[Ch] Chang, S.: Dissertation, Princeton 1986; erscheint in Journal AMS
[Cs] Costa, C.: Example of a complete minimal immersion in $\mathbf{R}^3$ of genus one and three embedded ends. Bol. Soc. Brasil. Math. **15** (1985) 1
[C1] Courant, R.: On the problem of Plateau. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **22** (1936) 367–372
[C2] Courant, R.: Plateau's problem and Dirichlet's principle. Ann. of Math. (2) **38** (1937) 679–724
[C3] Courant, R.: The existence of a minimal surface of least area bounded by prescribed Jordan arcs and prescribed surfaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **24** (1938) 97–101
[C4] Courant, R.: The existence of minimal surfaces of given topological structure under prescribed boundary conditions. Acta Math. **72** (1940) 51–98
[C5] Courant, R.: Critical points and unstable minimal surfaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **27** (1941) 51–57
[C6] Courant, R.: On Plateau's problem with free boundaries. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **31** (1945) 242–246
[C7] Courant, R.: Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. New York: Interscience 1950
[D1] Douglas, J.: Solution of the problem of Plateau. Transact. Amer. Math. Soc. **33** (1931) 263–321
[D2] Douglas, J.: The problem of Plateau for two contours. J. Math. Phys., Massachusetts Inst. of Tech. **10** (1930–1931) 315–359
[D3] Douglas, J.: One sided minimal surfaces with a given boundary. Transact. Amer. Math. Soc. **34** (1932) 731–756
[D4] Douglas, J.: Minimal surfaces of general topological structure with any finite number of assigned boundaries. J. Math. and Phys. **15** (1936) 105–123
[D5] Douglas, J.: Minimal surfaces of higher topological structure. Ann. of Math. (2) **40** (1939) 205–298
[D6] Douglas, J.: The higher topological form of the problem of Plateau. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **8** (1939) 195–218
[D7] Douglas, J.: The most general form of the problem of Plateau. Amer. J. Math. **61** (1939) 590–608
[Dz] Dziuk, G.: C^2-regularity for partially free minimal surfaces. Math. Z. **189** (1985) 71–79
[F1] Federer, H.: The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of are minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension. Bull. AMS **76** (1970) 767–771
[F2] Federer, H.: Geometric Measure Theory. New York: Springer 1969
[FF] Federer, H., Fleming, W. H.: Normal and integral currents. Ann. of Math. **72** (1960) 478–520
[Fl] Fleming, W.: An example in the problem of least area, Proc. AMS **7** (1956) 1063–1074
[FHS] Freedman, M.; Hass, J.; Scott, P.: Least area incompressible surfaces in 3-manifolds. Inv. Math. **71** (1983) 609–642
[Ga] Garnier, R.: Le problème de Plateau. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **45** (1928) 53–144

[Gr1] G r ü t e r , M.: Regularity results for minimizing currents with a free boundary. Preprint 1985

[GR2] G r ü t e r , M.: Optimal regularity for codimension one minimal surfaces with a free boundary. Preprint 1985

[GHS] G r ü t e r , M.; H i l d e b r a n d t , S.; N i t s c h e , J.: On the boundary behavior of minimal surfaces with a free boundary which are not minima of the area. Man. math. **35** (1981) 387–410

[GJ1] G r ü t e r , M.; J o s t , J.: Allard type regularity results for varifolds with free boundaries. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (Ser. IV) **13** (1986) 129–169

[GJ2] G r ü t e r , M.; J o s t , J.: On embedded minimal disks in convex bodies. Anal. non-lin. **3** (1986) 345–389

[G] G u l l i v e r , R.: Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature. Ann. Math. **97** (1973) 275–305

[GH] G u l l i v e r , R.; H i l d e b r a n d t , S.: Boundary configurations spanning continua of minimal surfaces. Man. math. **54** (1986) 323–347

[GL] G u l l i v e r , R.; L e s l i e , J.: On boundary branch points of minimizing surfaces. Arch. Rat. An. Mech. **52** (1973) 20–25

[GS] G u l l i v e r , R., S p r u c k , J.: On embedded minimal surfaces. Ann. Math. **103** (1976) 331–347; Korrektur in: Ann. Math. **109** (1979) 407–412

[Ha] H a a r , A.: Über das Plateausche Problem. Math. Ann. **97** (1927) 124–158

[HS] H a r d t , R.; S i m o n , L.: Boundary regularity and embedded solutions for the oriented Plateau problem. Ann. Math. **110** (1979) 439–486

[HH1] H e i n z , E.; H i l d e b r a n d t , S.: On the number of branch points of surfaces of bounded mean curvature. J. Diff. Geom. **4** (1970) 227–235

[HH2] H e i n z , E., H i l d e b r a n d t , S.: Some remarks on minimal surfaces in Riemannian manifolds. Comm. P. Appl. Math. **23** (1970) 371–377

[HT] H e i n z , E.; T o m i , F.: Zu einem Satz von Hildebrandt über das Randverhalten von Minimalflächen. Math. Z. **111** (1969) 372–386

[H] H i l d e b r a n d t , S.: Boundary behavior of minimal surfaces. Arch. Rat. Mech. Anal. **35** (1969) 47–82

[HN1] H i l d e b r a n d t , S.; N i t s c h e , J.: Minimal surfaces with free boundaries. Acta Math. **143** (1979) 251–272

[HN2] H i l d e b r a n d t , S.; N i t s c h e , J.: A uniqueness theorem for surfaces of least area with partially free boundaries as obstacles. Arch. Rat. Mech. Anal. **79** (1982) 189–218

[HN3] H i l d e b r a n d t , S.; N i t s c h e , J.: Optimal boundary regularity for minimal surfaces with a free boundary. Man. math. **33** (1981) 357–361

[HM] H o f f m a n , D.; M e e k s , W.: A complete embedded minimal surface in $\mathbf{R}^3$ with genus one and three ends. J. Diff. Geom. **21** (1985) 109–127

[Ja] J a r a u s c h : Zur numerischen Behandlung von parametrischen Minimalflächen mit finiten Elementen. Dissertation, Bochum 1978

[J1] J o s t , J.: Harmonic maps between surfaces. Springer LNM **1062**, 1984

[J2] J o s t , J.: Conformal mappings and the Plateau-Douglas problem in Riemannian manifolds. J. reine angew. Math. **359** (1985) 37–54

[J3] J o s t , J.: Existence results for embedded minimal surfaces of controlled topological type, I. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (Ser. IV) **13** (1986) 15–50

[J4] J o s t , J.: dto., II. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (Ser. IV) **13** (1986) 401–426

[J5] J o s t , J.: dto., III. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (Ser. IV) **14** (1987) 165–167

[J6] J o s t , J.: On the regularity of minimal surfaces with free boundaries in Riemannian manifolds. Man. math. **56** (1986) 279–291

[J7] J o s t , J.: Continuity of minimal surfaces with piecewise smooth free boundaries. Math. Ann. **276** (1987) 599–614

[J8] J o s t , J.: On the existence of embedded minimal surfaces of higher genus with free boundaries in Riemannian manifolds. In: P. C o n c u s ; R. F i n n (Hrsg.): Variational methods for free surface interfaces. New York: Springer 1987

[J9] J o s t , J.: Embedded minimal surfaces in manifolds diffeomorphic to the three-dimensional ball or sphere, J. Diff. Geom., erscheint demnächst

[JS] J o s t , J., S t r u w e , M.: Morse-Conley theory for minimal surfaces of varying topological type

[KPS] Karcher, H.; Pinkall, U.; Sterling, I.: New minimal surfaces in S^3. Preprint MPI 86-27 Max Planck-Inst. f. Math., Bonn
[Ki] Kinderlehrer, D.: The boundary regularity of minimal surfaces. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **23** (1969) 711–744
[La1] Lawson, H. B.: Complete minimal surfaces in S^3. Ann. Math. **92** (1970) 335–374
[La2] Lawson, H. B.: The equivariant Plateau problem and interior regularity. Trans. AMS **173** (1972) 231–249
[Li] Lin, F. H.: Plateau's problem for H-convex curves. Man. math. **58** (1987) 491–511
[Lu] Luckhaus, St.: The Douglas-problem for surfaces of prescribed mean curvature. SFB-72 Preprint 234, Bonn, 1978
[Mc] McShane, E.: Parametrization of saddle surfaces with applications to the problem of Plateau. Trans. AMS **35** (1933) 716–733
[MSY] Meeks, W.; Simon, L.; Yau, S. T.: Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature. Ann. Math. **116** (1982) 621–659
[MY1] Meeks, W.; Yau, S. T.: The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds. Top. **21** (1982) 409–442
[MY2] Meeks, W.; Yau, S. T.: Topology of three dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory. Ann. Math. **112** (1980) 441–484
[MY3] Meeks, W., Yau, S. T.: The existence of embedded minimal surfaces and the problem of uniqueness. MZ **179** (1982) 151–168
[Mg1] Morgan, F.: A smooth curve in $\mathbf{R}^3$ bounding a continuum of minimal surfaces. Arch. Rat. Mech. Anal. **75** (1980) 193–197
[Mg2] Morgan, F.: On finiteness of the number of stable minimal hypersurfaces with a fixed boundary. Ind. U. Math. J.
[Mg3] Morgan, F.: Geometric measure theory: A beginner's guide. San Diego: Academic Press 1988
[M] Morrey, C.: The problem of Plateau on a Riemannian manifold. Ann. Math. **49** (1948) 807–851
[MT1] Morse, M.; Tompkins, C.: The existence of minimal surfaces of general critical types. Ann. of Math. (2) **40** (1939) 443–472; (2) **42** (1941) 331
[MT2] Morse, M., Tompkins, C.: Unstable minimal surfaces of higher topological structure. Duke Math. J. **8** (1941) 350–375
[Mu1] Mumford, D.: A remark on Mahler's compactness theorem. Proc. AMS **28** (1971) 289–294
[Mu2] Mumford, D.: Stability of projective varieties. L'Ens. Math. **23** (1977) 39–110
[N1] Nitsche, J.: The boundary behavior of minimal surfaces, Kellogg's Theorem and branch points on the boundary. Inv. math. **8** (1969) 313–333
[N2] Nitsche, J.: A new uniqueness theorem for minimal surfaces. Arch. Rat. Mech. Anal. **52** (1973) 319–329
[N3] Nitsche, J.: Vorlesungen über Minimalflächen. Springer 1975
[O] Osserman, R.: A proof of the regularity everywhere of the classical solution of Plateau's problem. Ann. Math. **91** (1970) 550–569
[Q] Quien, N.: Über die endliche Lösbarkeit des Plateau-Problems in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Man. math. **39** (1982) 313–338
[QT] Quien, N.; Tomi, F.: Nearly planar Jordan curves spanning a given number of minimal immersions of the disk. Arch. Math. **44** (1985) 456–460
[P] Pitts, J.: Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds. Princeton, Tokyo: Princeton Univ. Press, 1981
[PR] Pitts, J.; Rubinstein, H.: Existence of minimal surfaces of bounded topological type in three-manifolds. Miniconference on Geometry and partial differential equaring (Canberra 1985) 163–176, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. 10, Austral. Nat. Univ., Canberra 1986
[R1] Radó, T.: On Plateau's problem. Ann. of Math. (2) **31** (1930) 457–469
[R2] Radó, T.: The problem of the least area and the problem of Plateau. Math. Z. **32** (1930) 763–796
[R3] Radó, T.: An iterative process in the problem of Plateau. Transact. Amer. Math. Soc. **35** (1933) 869–887
[R4] Radó, T.: On the problem of Plateau. Berlin: Springer, 1933
[SU] Sacks, J., Uhlenbeck, K.: Minimal immersions of closed Riemann surfaces. Trans. AMS **271** (1982) 639–652

[SS] Schoen, R., Simon, L.: Regularity of stable minimal hypersurfaces. CPAM **34** (1981) 741–797

[SSY] Schoen, R.; Simon, L.; Yau, S. T.: Curvature estimates for stable minimal hypersurfaces. Acta Math. **134** (1975) 27–6288

[SY] Schoen, R.; Yau, S. T.: Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of threedimensional manifolds with non-negative scalar curvature. Ann. Math. **110** (1979) 127–142

[Sü1] Schüffler, K.: Eine globalanalytische Behandlung des Plateauschen Problems. Man. math. **48** (1984)

[Sü2] Schüffler, K.: Function theory and index theory for minimal surfaces of genus 1. Arch. Math. **48** (1987), I:250–266, II: 343–352, III: 446–457

[S1] Shiffman, M.: The Plateau problem for minimal surfaces of arbitrary topological structure. Amer. J. Math. **61** (1939) 853–882

[S2] Shiffman, M.: The Plateau problem for non-relative minima. Ann. of Math. (2) **40** (1939) 834–854

[S3] Shiffman, M.: Unstable minimal surfaces with several boundaries. Ann. of Math. (2) **43** (1942) 197–222

[Si] Simon, L.: Lectures on geometric measure theory. Canberra: ANU-Press 1984

[SSm] Simon, L.; Smith, F.: On the existence of embedded minimal 2-spheres in the 3-sphere, endowed with an arbitrary metric; unveröffentlicht

[Sms] Simons, J.: Minimal varieties in Riemannian manifolds. Ann. Math. **88** (1968) 62–105

[Sy] Smyth, B.: Stationary minimal surfaces with boundary on a simplex. Inv. math. **76** (1984) 411–420

[St1] Struwe, M.: On a free boundary problem for minimal surfaces. Inv. math. **75** (1984) 547–560

[St2] Struwe, M.: On a critical point theory for minimal surfaces spanning a wire in $\mathbf{R}^N$. J. reine angew. Math. **349** (1984) 1–23

[St3] Struwe, M.: A Morse theory for annulus-type minimal surfaces. J. Reine Angew. Math. **368** (1986) 1–27

[St4] Struwe, M.: Plateau's problem and the calculus of variations

[Ty] Taylor, J.: The structures of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces. Ann. Math. **103** (1976) 489–539

[Th] Thiel, U.: The index theorem for k-fold connected minimal surfaces

[To1] Tolksdorf, P.: A parametric variational principle for minimal surfaces of varying topological type. J. Reine Angew. Math. **354** (1984) 16–49

[To2] Tolksdorf, P.: On minimal surfaces with free boundaries in given homotopy classes. Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. non Linéaire **2** (1985), no. 3, 157–165

[To3] Tolksdorf, P.: in Vorbereitung

[Tm] Tomi, F.: On the local Uniqueness of the problem of least area. Arch. Rat. Mech. Anal. **52** (1973) 312–318

[TT1] Tomi, F., Tromba, A.: Extreme curves bound embedded minimal surfaces of the type of the disc. Math. Z. **158** (1978) 137–145

[TT2] Tomi, F., Tromba, A.: On Plateau's problem for minimal surfaces of higher genus in $\mathbf{R}^3$. Bull. AMS **13** (1985) 169–171

[TT3] Tomi, F., Tromba, A.: Existence theorems for minimal surfaces of non-zero genus spanning a contour. Memoirs AMS **71**, no. 382 (1988)

[Tn] Tonelli, L.: Opere scelte, 4 Bde. Roma: Ed. Cremonese 1960–63, insbes. Bd. 1 u. 3

[T1] Tromba, A.: On Plateau's problem for minimal surfaces of higher genus in $\mathbf{R}^n$

[T2] Tromba, A.: On the Morse number of embedded and nonembedded minimal immersions spanning wires on the boundary of special bodies in $\mathbf{R}^3$. Math. Z. **188** (1985) 149–170

[T3] Tromba, A.: Degree theory on oriented infinite dimensional varieties and the Morse number of minimal surfaces spanning a curve in $\mathbf{R}^n$, I : $n \geqslant 4$. Trans. AMS **290** (1985) 383–413

[T4] Tromba, A.: dto. II : $n = 3$, Man. math. **48** (1984) 139–161

[Wh1] White, B.: Existence of least area mappings of N-dimensional domains. Ann. Math. **118** (1983) 179–185

[Wh2] W h i t e , B.: The space of minimal submanifolds of a manifold with varying metrics. Preprint

[Wh3] W h i t e , B.: New applications of mapping degrees to minimal surface theory

[Wo] W o h l r a b , O.: Zur numerischen Behandlung von Minimalflächen mit halbfreien Rändern. Dissertation, Bonn 1985

[Y1] Y e , R.: Regularity of a minimal surface at its free boundary

[Y2] Y e , R.: A priori estimates for minimal surfaces with free boundary, which are not minima of the area, Man. math. 58 (1987) 95–107

[Y3] Y e , R.: On the existence, regularity and finiteness of minimal surfaces with free boundary. SFB 256, prp. No. 1.

Prof. Dr. J. Jost
Mathematisches Institut
der Ruhr-Universität
4630 Bochum

(*Eingegangen am 17. 10. 1986, rev. 12. 10. 1987*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 91 (1989) 33–54
AMS subject classification: 93, 93 B, 93 C 05, 93 C 10, 93 C 15

Steuerbarkeit als zentraler Begriff beim Aufbau der Kontrolltheorie

H. W. Knobloch, Würzburg

1 Einleitung

Kontrolltheorie beschäftigt sich mit der Analyse und Synthese von Kontrollsystemen. Das sind dynamische Systeme, die von außen her – über den *Eingang* – beeinflußt werden und die ihrerseits nach außen hin – über den *Ausgang* – wirken können. Wir wollen den Rahmen unserer Betrachtungen von vorneherein einengen, indem wir annehmen, daß Eingang bzw. Ausgang endlich-dimensionale Größen u bzw. y sind und daß eine weitere endlich-dimensionale Größe – der *Zustand* x – in folgendem Sinne die Rolle eines Bindegliedes spielt: Die zeitliche Evolution von x wird durch eine von u abhängige Differentialgleichung beschrieben, der Ausgang ist eine Funktion des Zustandes. Dies ergibt dann die mathematische Beschreibung eines endlich-dimensionalen Kontrollsystemes in der Form

$$(1.1) \qquad \dot{x} = f(x, u), \qquad y = c(x),$$

mit der üblichen Interpretation: Man denke sich u auf alle möglichen Weisen zu Funktionen der Zeit spezialisiert – diese Funktionen repräsentieren die denkbaren zeitlichen Verläufe der Eingangsgröße – und integriere die Differentialgleichung. Die Lösung x(t) und damit auch die Ausgangsfunktion y(t) = c(x(t)) ist dann durch die Vorgabe der Eingangsfunktion u(t) und die Fixierung des Anfangszustandes zu einem festen Zeitpunkt eindeutig bestimmt.
Mit dem Hinschreiben einer Relation der Form (1.1) ist für uns ein Kontrollsystem definiert. Daß wir diesen – keineswegs unumstrittenen – Standpunkt von Anfang an einnehmen, liegt am Thema dieses Berichtes. Der Begriff der Steuerbarkeit basiert auf einer Beschreibung eines Kontrollsystems in der Form (1.1), er benutzt – genauer gesagt – den Teil dieser Darstellung, der sich auf das Eingangs/Zustandsverhalten bezieht. Mit anderen Worten: Es geht uns primär um Möglichkeiten, den Zustand (und nicht nur den Ausgang) eines Systems auf dem Weg über den Eingang zu beeinflussen. Es besteht daher auch nicht die Notwendigkeit, in eine generelle Diskussion über das Thema Modellbildung einzutreten, doch seien zwei Bemerkungen erlaubt.
1. Es gibt oft so etwas wie einen „natürlichen" Zugang zu den dynamischen Gesetzen, welche die Vorgänge im Inneren eines Kontrollsystems beherrschen. Er führt über Bilanzgleichungen nach dem Vorbild der Kirchhoffschen Gesetze für elektri-

sche Kreise. Eingang und Ausgang reichen aber nicht immer aus, um Bilanzgleichungen formulieren zu können; man muß weitere Größen hinzunehmen, die dann zusammen mit Eingang und Ausgang den Zustand repräsentieren. Eine solche ad-hoc-Definition läßt den Zustand oft als eine Zusammenstellung von Hilfsvariablen erscheinen, deren Wahl nicht von vorneherein frei von Redundanz und Willkür ist. Hier liegt eine der Wurzeln für die Vorbehalte gegenüber dem Arbeiten mit Zustandsraum-Modellen. Es gibt nun aber Möglichkeiten, um über die sogenannten Normalformen (von denen auch in diesem Bericht die Rede sein wird) ein Zustandsraum-Modell nachträglich auf den für das Eingangs-/Ausgangsverhalten relevanten Kern zu reduzieren, so daß die tatsächliche Modellierung realer Kontrollsysteme von inhaltlichen Diskussionen über die Wahl der geeigneten Zustandsgröße entlastet werden kann. Die algebraische Systemtheorie, die dies leistet und deren wesentliche Entwicklungsphasen hier dargestellt werden sollen, ermöglicht daher nicht nur einen methodischen Zugang zu Kontrollsystemen, die bereits in der Form (1.1) vorliegen, sondern sie erleichtert auch die Aufstellung solcher Modelle. In dieser Hinsicht gibt es eine gewisse Parallele zwischen der Entstehung der modernen Systemtheorie und dem historischen Prozeß der Formalisierung der klassischen Mechanik, der ja nicht nur Selbstzweck gewesen ist, sondern die mathematische Modellierung komplexer physikalischer Sachverhalte wesentlich angeregt hat.

2. Wenn wir hier den Standpunkt einnehmen, daß mit dem Hinschreiben von Relationen der Form (1.1) das Thema Modellbildung abgeschlossen ist und die Zuverlässigkeit des mathematischen Modelles nicht mehr zur Diskussion steht, so ist dies streng genommen keine realistische Haltung. Unsicherheit bezüglich der Modellbildung ist sehr oft das Hauptproblem bei der Analyse und Synthese von Kontrollsystemen. Wie man wenigstens mit der mildesten Form der Unsicherheit – dem Auftreten unbekannter Parameter in den Funktionen f und c (siehe (1.1.)) – fertig werden kann, dazu sind vom Themenkreis Steuerbarkeit einige Anstöße ausgegangen, die im folgenden an verschiedenen Stellen sichtbar werden, etwa bei den methodischen Überlegungen zum Reglerentwurf (Abschnitt 3). Hinter diesen Vorschlägen scheint ein allgemeines Prinzip zu stecken, das, auf eine kurze Formel gebracht, so lautet:

Man löse das Problem so, als ob die fraglichen Parameter und somit das komplette Modell bekannt wäre und ersetze anschließend die noch unbekannten Größen durch Schätzwerte, die man durch Auswerten von Messungen des Ausganges erhält. Die Philosophie des Schätzens von Parametern aus gegebenen Meßreihen ist hier nicht identisch mit der in der Statistik gebräuchlichen. Wenn man vom „Schätzen" in der Kontrolltheorie spricht, orientiert man sich an dem Spezialfall der Zustands-Rekonstruktion. Es geht dabei um die Frage, ob und wie sich der gesamte Zustand des Systems aus einigen seiner Komponenten, die direkt gemessen werden können, hochrechnen läßt. Rekonstruierbarkeit ist in der linearen Kontrolltheorie der zur Steuerbarkeit duale Begriff; die Dualität geht im Detail so weit, daß man nur die eine Hälfte der Theorie zu entwickeln braucht und die andere dann mit Hilfe eines Lexikons gewinnen kann (ein Beispiel ist der Begriff des Beobachters, vgl. Abschnitt 2). Der Zustandsbegriff ist nun flexibel genug, um die Identifizierung unbekannter Parameter auch als Rekonstruktionsaufgabe formulieren zu können. Damit ist zunächst wenig gewonnen, denn man erhält jetzt in jedem Falle ein

nichtlineares Problem (auch wenn das zugrundegelegte Zustandsraum-Modell linear ist), das bisher außerhalb des Gültigkeitsbereiches des klassischen Dualitätsprinzips liegt. Doch gibt es keinen Grund anzunehmen, daß dies immer so bleiben wird; auf jeden Fall bietet die Entwicklung des methodischen Instrumentariums für das Thema Steuerbarkeit nichtlinearer Systeme auch potentielle Ansatzpunkte für die Lösung von Identifizierungsaufgaben.
Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir den Gegenstand dieses Berichtes näher beschreiben. Ein Kontrollsystem der Form (1.1) heißt steuerbar, wenn man durch Wahl einer Steuerfunktion einen vorgegebenen Zustand x_0 in einen vorgegebenen Zustand x_1 überführen kann. Mit anderen Worten: Wenn sich das Randwertproblem

(1.2) $\quad x(t_0) = x_0, \qquad x(t_1) = x_1$

zu vorgegebenen x_0, x_1 stets lösen läßt. Ohne die Wahlmöglichkeit bezüglich der Steuerfunktion wäre dies keine sinnvolle Fragestellung, denn der Zustand wäre dann ja Lösung einer von vorneherein vollständig fixierten gewöhnlichen Differentialgleichung und somit alleine durch Angabe von x_0 (und t_0) bereits festgelegt. Das Auftreten des Begriffes der Steuerbarkeit markiert daher – historisch gesehen – die Loslösung der Kontrolltheorie von der Theorie der Differentialgleichungen.
Die Definition bedarf noch der Präzisierung in einer Reihe von Punkten, z. B. muß gesagt werden, ob Anfangs- und Endzeit t_0, t_1 fest vorgegeben oder frei wählbar sind. Steuerbarkeit unter Einschränkungen bezüglich des Wertevorrates der Kontrollfunktion lassen wir hier außer Betracht, da es uns um die *prinzipiellen* Möglichkeiten der Veränderung des Zustandes des Kontrollsystems geht. Ob man die Eingangsgröße u zu einer meßbaren, stetigen oder analytischen Funktion der Zeit spezialisiert, ist für manche Feinheiten der Theorie bei nichtlinearen Systemen durchaus von Belang. Doch können wir hier darauf nicht näher eingehen und verstehen daher im folgenden – wenn nichts anderes gesagt ist – unter einer zulässigen Kontrollfunktion eine für alle t definierte, ansonsten beliebige stückweise stetige Funktion der Zeit. Ein Paar (u(t), x(t)), wo u(t) eine zulässige Kontrollfunktion und x(t) Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x, u(t))$ ist, nennen wir kurz eine Lösung des Kontrollproblems (1.1). Wenn es uns nur auf x(t) selber ankommt, sprechen wir einfach von einer zulässigen Trajektorie.

2 Steuerbarkeit linearer Kontrollsysteme

Wir setzen in diesem und dem nächsten Abschnitt voraus, daß f eine lineare (und homogene) Funktion von x, u ist und somit das Eingangs-/Zustandsverhalten des Kontrollsystems durch eine Differentialgleichung der Form

(2.1) $\quad \dot{x} = Ax + Bu$

beschrieben wird, wo A, B Matrizen passender Dimension sind. Ob das Randwertproblem (1.2) für beliebige x_0, x_1 lösbar ist, hängt dann nicht von der Wahl von Anfangs- und Endzeit t_0, t_1 ab. Mit anderen Worten: (2.1) heißt steuerbar, wenn man – bei irgendwie gewählten t_0, $t_1 > t_0$ – die Randbedingungen (1.2) für jede Wahl von x_0, x_1 mittels einer zulässigen Trajektorie erfüllen kann.

Für die Steuerbarkeit des linearen Systems (2.1) gibt es einen einfachen Standard-Test, der in zwei äquivalenten Formen (Kalman- bzw. Hautuskriterium) vorliegt. Er stellt den Prototyp eines Steuerbarkeitskriteriums der Kontrolltheorie dar: Nicht mehr von der Integration einer Differentialgleichung ist die Rede, sondern von formalen Prozessen, die an der rechten Seite der Differentialgleichung auszuführen sind.
Ein drittes Kriterium wollen wir an dieser Stelle ausführlicher kommentieren, weil es beim Aufbau der linearen Kontrolltheorie eine Schlüsselrolle spielt.

Satz 1. *Das System* (2.1) *ist dann und nur dann steuerbar, wenn sich jedes reelle normierte Polynom vom Grad* n (= *Dimension von* x) *als charakteristisches Polynom einer Matrix der Form* $A - BF$ *auffassen läßt.* F *ist dabei eine beliebig wählbare* (m, n)-*Matrix* (m = *Dimension von* u).

In der Regelungstheorie wird die Aussage des Satzes zumeist unter dem Stichwort „Polvorgabe" zitiert. Diese Bezeichnung rührt von folgender systemtheoretischer Interpretation her. Nimmt man in (2.1) formal die Substitution

$$u = -Fx + u' \tag{2.2}$$

vor, so erhält man das lineare System mit der Gleichung

$$\dot{x} = (A - BF)x + Bu' \tag{2.3}$$

und der neuen Eingangsgröße u'. (2.2) bedeutet, daß man sich die Entscheidung für die Wahl der Steuerung aufgespalten denkt in einen frei wählbaren und einen rückgekoppelten, d. h. an den Zustand gebundenen Term. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer Rückkoppelungstransformation. Das Wort Transformation ist insofern irreführend, als die Substitution (2.2) die Dynamik des Systems (2.1) verändert und nicht etwa den gleichen mathematischen Sachverhalt nur in ein anderes Koordinatensystem überträgt. Satz 1 besagt nun genau dieses: Für ein steuerbares System läßt sich durch Wahl von F stets erreichen, daß die Eigenwerte der Systemmatrix nach der Transformation eine vorgegebene zur reellen Achse symmetrische Konfiguration komplexer Zahlen bilden. Da die Eigenwerte der Systemmatrix aber zu den Polen der Übertragungsfunktion werden, wenn man das Eingangs-/Ausgangsverhalten statt im Zustandsraum mit Hilfe von rationalen Funktionen beschreibt, ist es üblich geworden, nicht von Eigenwert-Vorgabe, sondern von Polvorgabe zu sprechen.
Setzt man $u' = 0$, so wird die Steuerung zu einer Funktion des Zustandes. In der Systemtheorie spricht man dann auch von einer Rückführung des Zustandes oder von der Herstellung eines geschlossenen Kreises aus dem offenen Kreis (2.1). Die Dynamik des geschlossenen Kreises wird durch die Differentialgleichung $\dot{x} = (A - BF)x$ beschrieben, und hier kann man durch Wahl von F stets erreichen, daß die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil wird, sofern der offene Kreis steuerbar ist. Mit dieser Feststellung pflegt man die Bedeutung des Satzes von der Polvorgabe gerne zu demonstrieren. Seine Tragweite ist aber damit keineswegs erschöpft. Er ist ein vielseitiges methodisches Instrument, daß auch und gerade bei der Analyse von Sachverhalten, die direkt mit Steuerbarkeit nichts zu tun haben, mit Vorteil einge-

setzt werden kann. Auf drei Beispiele wollen wir im folgenden näher eingehen: Zustandsrekonstruktion, Steuerungsinvarianz, Normalformen.

Rekonstruierbarkeit. Ein lineares System

$$(2.4)\qquad \dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx$$

hat diese Eigenschaft, wenn sich aus der Kenntnis von u(t) und y(t) auf einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$, der Zustand x(t) exakt bestimmen läßt. Wegen der Linearität des Kontrollsystems führt ein elementarer Schluß à la Fredholmscher Alternative zu folgender Charakterisierung rekonstruierbarer Systeme, die üblicherweise als Definition genommen wird: (2.4) heißt rekonstruierbar, wenn für jede Lösung u(t), x(t) und jedes Intervall $[t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$, aus dem identischen Verschwinden von u(t) und y(t) auf das identische Verschwinden von x(t) geschlossen werden kann.

Die Dualität zwischen Steuerbarkeit und Rekonstruierbarkeit, die schon in der Einleitung angesprochen wurde, läßt sich nicht aus der Definition, wohl aber aus den Kriterien herauslesen und auf die kurze Formel bringen: Rekonstruierbarkeit des Systems (2.4) ist eine Eigenschaft, die von der Wahl der Matrix B unabhängig und mit der Steuerbarkeit des „dualen" Systems $\dot{x} = A^T x + C^T u$ äquivalent ist. Damit ist klar, daß es für rekonstruierbare Systeme ein Analogon zum Satz von der Polvorgabe gibt und daß es sich hier so formulieren läßt: Man kann durch Wahl von K die Eigenwerte der Matrix A − KC in der komplexen Ebene beliebig plazieren, insbesondere sie alle in die linke Halbebene legen. Die Verwertung dieser Aussage in der linearen Systemtheorie ist wohlbekannt und bildet die Grundlage für die dynamische Rekonstruktion des Zustandes, wenn Eingang u(t) und Ausgang y(t) für alle $t \geqslant t_0$ gegeben sind: Die Schätzung des unbekannten Zustandes x(t) durch den Zustand $\hat{x}(t)$ des Systems

$$(2.5)\qquad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x})$$

wird asymptotisch exakt, unabhängig davon, welchen Anfangswert $\hat{x}(t_0)$ man dem Beobachter – so nennt man das System (2.5) – eingibt.

Bei einem rekonstruierbaren System kann man die Aufgabe der Schätzung des Zustandes also einem Beobachter anvertrauen, statt sie selbst gemäß der Definition auszuführen. Mit dem Unterschied allerdings, daß der Beobachter unendlich lange Zeit braucht, während die exakte Rekonstruktion sich über jedem Zeitintervall bewerkstelligen läßt. Die Gründe, warum man dennoch einem Beobachter den Vorzug gibt, sind völlig analog zu den Motiven, aus denen heraus man eine Zustandsrückführung wählt, um die duale Aufgabe – Überführung des Zustandes eines steuerbaren Systems in die Ruhelage – zu lösen: Der Beobachter schätzt den Zustand nicht nur zu einem bestimmten Zeitpunkt, sondern kontinuierlich, und nutzt einmal gesammelte Erfahrung aus: Die Schätzung zur Zeit t'' hängt nur ab von der Schätzung zur Zeit $t' < t''$ und dem Verlauf von $u(\cdot)$ und $y(\cdot)$ im Intervall $[t', t'']$.

Die Parallele zwischen Aussagen über Steuerbarkeit und solchen über Rekonstruierbarkeit ist in einem Punkte unvollständig: Die erste Eigenschaft bleibt bei Rückkoppelungstransformationen erhalten, die zweite im allgemeinen nicht. Der Grund ist sehr einfach: Rekonstruierbarkeit ist eine Eigenschaft des ungesteuerten Systems

(es wird u = 0 gesetzt), bezieht sich daher lediglich auf das Zustands-/Ausgangsverhalten des Systems.
Wie man den Begriff der Rekonstruierbarkeit weiterentwickelt hat, um diesem Mangel abzuhelfen, dazu wird im nächsten Abschnitt einiges gesagt werden.

3 Steuerungsinvarianz, Äquivalenz und Normalformen linearer Systeme

Den Betrachtungen dieses Abschnittes liegt wieder ein lineares System der Form (2.4) zugrunde. Wir befassen uns jetzt mit den Möglichkeiten, die Steuerung nicht zum Zwecke der Veränderung, sondern zum entgegengesetzten Zwecke, nämlich zur Erhaltung des Zustandes einzusetzen. Genau gesagt geht es um die Frage, ob sich mit Hilfe der Steuerung der Zustand in einem vorgegebenen Teilraum des Zustandsraumes festhalten läßt.

Definition 1. Ein Unterraum V des Zustandsraumes heißt invariant bezüglich des linearen Systems $\dot{x} = Ax + Bu$, falls es zu jedem $x_0 \in V$ eine zulässige Trajektorie durch x_0 gibt, die für alle Zeiten in V verbleibt, d. h. also, falls eine zulässige Steuerfunktion u(t) existiert derart, daß die Lösung x(t) des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

der Bedingung $x(t) \in V$ für alle t genügt.

Es gibt mehrere äquivalente Fassungen der Definition der Steuerungsinvarianz. Aus der vorliegenden kann man sich in wenigen Schritten die Richtigkeit folgender Aussage klarmachen: Jeder lineare Unterraum U des Zustandsraumes enthält einen maximalen steuerungsinvarianten Unterraum, und dieser kann charakterisiert werden als die Gesamtheit der Punkte von U, durch die sich eine zulässige und ganz in U verlaufende Trajektorie legen läßt. Von besonderem Interesse ist der maximale steuerungsinvariante Unterraum von $U = \{x : Cx = 0\}$, er wird im folgenden mit V^* bezeichnet. $V^* = [0]$ ist die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß es keine nicht-triviale zulässige Trajektorie x(t) mit identisch verschwindendem Ausgang y(t) = Cx(t) gibt. Anders gewendet: $V^* = [0]$ bedeutet, daß sich mittels der Steuerung keine nicht-triviale Bewegung im System erzeugen läßt, die am Ausgang verborgen bleibt. Man beachte den Unterschied zur Forderung der Rekonstruierbarkeit: Von einem rekonstruierbaren System verlangt man lediglich, daß jede ungesteuerte (u = 0!) nicht-triviale Bewegung am Ausgang in Erscheinung tritt. $V^* = [0]$ ist eine Forderung an den gesamten Komplex Eingang-Zustand-Ausgang, eine Tatsache, die auch im nachstehenden Kriterium ihren Niederschlag findet.

Satz 2. *Dann und nur dann reduziert sich der maximale in* $\{x : Cx = 0\}$ *enthaltene steuerungsinvariante Unterraum auf* [0], *wenn jedes aus* (2.4) *vermittels einer Rückkoppelungstransformation* (2.2) *entstehende System rekonstruierbar ist.*

$V^* = [0]$ ist also eine Verschärfung der Rekonstruierbarkeitsforderung, die unter Rückkoppelungstransformationen erhalten bleibt. Wichtig ist nun, daß sich diese Bedingung durch eine Art Faktorisierungsprozeß stets durchsetzen läßt. Das ist der wesentliche Inhalt des nachstehenden Satzes 3, in dessen Formulierung der Begriff der Äquivalenz eingeht, über den zuvor einiges gesagt werden soll.

Äquivalenz wird durch Ausführen von Transformationen an einem linearen System erklärt, wobei man jedoch von vorneherein so wenige Unterschiede wie möglich zwischen x und u zu machen versucht. Präziser: Man denke sich auf das Paar (x, u) alle linearen Transformationen angewendet, welche die Form der Relationen (2.4) nicht ändern, d. h. nicht zum Auftreten von formalen Ableitungen nach u führen. Es ist unmittelbar einzusehen, daß eine Äquivalenztransformation sich stets zusammensetzen läßt aus je einer Transformation in x und u alleine sowie einer Rückkoppelungstransformation (vgl. (2.2)), und daß steuerungsinvariante Unterräume unter einer solchen Transformation in Räume mit der gleichen Eigenschaft übergehen.

Satz 3. *Jedes lineare System besitzt eine äquivalente Darstellung der Form*

(3.1) $\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u_1, \qquad \dot{x}_2 = A_{22}x_2 + B_2u_2, \; y = C_2x_2.$

Zur Beschreibung des Eingangs-/Ausgangsverhaltens des gesamten Systems reichen also die Relationen

(3.2) $\dot{x}_2 = A_{22}x_2 + B_2u_2, \qquad y = C_2x_2$

aus, und für dieses Teilsystem gilt: Der maximale in $\{x_2 : C_2x_2 = 0\}$ *enthaltene steuerungsinvariante Unterraum des* x_2*-Raumes reduziert sich auf* $[0]$.

Zu dem Satz ist dies zu bemerken. 1. Die Aufspaltung von x bzw. u in der Form (x_1, x_2) bzw. (u_1, u_2) muß nicht echt sein. Es kann x mit x_2 und u sowohl mit u_1 wie auch mit u_2 zusammenfallen. 2. Eine gewisse Eindeutigkeit der Normalform kommt darin zum Ausdruck, daß in der Aufspaltung von x bzw. u die jeweiligen ersten Komponenten x_1 bzw. u_1 einen Unterraum des Zustands- bzw. Kontrollraumes parametrisieren, der eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung hat. Es gilt nämlich

(i) der maximale in $\{x = (x_1, x_2) : Cx = C_2x_2 = 0\}$ enthaltene steuerungsinvariante Unterraum des Systems (3.1) ist der Raum $\{x = (x_1, x_2) : x_2 = 0\}$.

(ii) Bei fest gewähltem Anfangszustand $x(0) = 0$ erzeugt eine zulässige Steuerfunktion $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ dann und nur dann eine identisch verschwindenden Ausgang, wenn u_2 identisch verschwindet.

Die Gültigkeit von Satz 3 ist an keine speziellen Voraussetzungen bezüglich des zugrunde gelegten Systems gebunden. Für die Klärung prinzipieller Fragen – etwa beim Reglerentwurf, s. u. – ist die Annahme, daß das System in der Normalform des Satzes 3 vorliegt, daher oft von Vorteil, wie sich bei der Behandlung folgender klassischer Fragestellung zeigt. Es geht um die Entkopplung des Ausganges von einem Teil des Einganges. Wir nehmen an, daß der gesamte Eingang sich in zwei Teile zerlegen läßt, die wir mit u und v bezeichnen. Entsprechend schreiben wir die Systemgleichung (2.4) jetzt in der Form

(3.3) $\dot{x} = Ax + Bu + Gv, \qquad y = Cx.$

y von v entkoppeln heißt: Eine Zustandsrückführung $u = -Fx$ zu finden, derart daß der Ausgang des Systems

$$\dot{x} = (A - BF)x + Gv, \qquad y = Cx$$

nicht mehr von der Wahl der Eingangsfunktion v(t) sondern nur noch vom Anfangszustand $x(0)$ abhängt. Die Fragestellung bleibt ersichtlich unberührt von Äquivalenztransformationen, sofern sie sich nur auf das Paar (x, u) erstrecken. Man kann daher annehmen, daß das System in der Normalform des Satzes 3 vorliegt, wobei man auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen (3.1) sich aber jetzt je einen Zusatzterm $G_1 v$ bzw. $G_2 v$ angefügt zu denken hat. $G_2 = 0$ ist dann die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß y von v entkoppelt werden kann. Auf das System (3.3) zurückgerechnet führt dies – im Hinblick auf eine frühere Bemerkung über die inhaltliche Bedeutung der Komponenten x_1, x_2 in der Darstellung (3.1) – zur Bedingung

$$(3.4) \qquad Gv \in \mathcal{V}^* \quad \text{für alle } v,$$

wobei $\mathcal{V}^*$ wie bisher der maximale in $\{x : Cx = 0\}$ enthaltene steuerungsinvariante Unterraum des Systems

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

ist.

Entkoppelung ist die radikalste Lösung eines grundlegenden Problems der Kontrolltheorie, das in der anwendungsorientierten Literatur als „Reglerentwurf“ apostrophiert wird und sich in etwas vagen und allgemein gehaltenen Formulierungen so darstellt. Es soll der Eingang u des Systems dazu benutzt werden, um den Einfluß, den ein externes Störsignal v – das nicht beherrscht und auch nicht exakt gemessen werden kann – auf den Ausgang ausübt, zu reduzieren. Daß Entkoppelung kein realistischer Lösungsvorschlag ist, liegt zum einen an der Bedingung (3.4), die ja auf exakt einzuhaltende Gleichungen zwischen den einzelnen Komponenten des Störsignals hinausläuft. Zum anderen daran, daß die Realisierung einer Zustandsrückführung, d. h. einer Bindung des Einganges an den Zustand, voraussetzt, daß letzterer in jedem Zeitpunkt exakt gemessen werden kann.

Es gibt nun realitätsnähere Lösungen des Entwurfsproblemes; auf zwei von ihnen wollen wir zum Abschluß dieses Abschnittes näher eingehen. Gemeinsam ist beiden, daß a-priori-Annahmen über die Natur des Störsignals nicht in der „harten“ quantitativen Form (3.4), sondern als „weiche“ Forderungen hinsichtlich des dynamischen Verhaltens der Störung gestellt werden. Ferner tritt an Stelle der Zustandsrückführung das Konzept der Ausgangsrückführung: Das mathematische Modell des Reglers ist eine Anweisung zur Spezialisierung der Steuerung u in jedem Zeitpunkt t, wobei die Ausführung nur die Messung von y zu Zeitpunkten $s \leqslant t$ voraussetzt. Mit anderen Worten: Eine Ausgangsrückführung zu entwerfen bedeutet nichts anderes, als eine nicht-vorgreifende Abbildung des Raumes der Ausgangsfunktionen in den Raum der Eingangsfunktionen zu konstruieren, mit deren Hilfe sich das Entwurfsziel – Reduktion des Einflusses von v auf y – realisieren läßt. Wie das Entwurfsziel dabei im einzelnen definiert wird, hängt von den a-priori-Annahmen über die Natur der Störung ab. Trotz der hierdurch bedingten Unterschiede in den beiden Entwurfskonzepten gibt es ein gemeinsames Grundmuster für die Strategie, mit der sich das jeweilige Entwurfsziel realisieren läßt: Die Ausgangsrückführung baut sich gemäß den nachstehenden Beziehungen aus einem dynamischen und einem statischen Anteil auf, nämlich so:

$$(3.5) \qquad u(t) = -F\hat{x}(t) - Ly(t), \quad \hat{x}(t) \text{ Lösung von } \dot{\hat{x}} = N\hat{x} + My(t),$$

wobei F, L, M, N Matrizen geeigneter Dimensionen sind, die auch von t explizit abhängen können.
In diesem Resultat und den Verfahren zur tatsächlichen Konstruktion der dynamischen Reglerstruktur (3.5) dürften wohl die wichtigsten Ergebnisse der linearen Kontrolltheorie zusammengefaßt sein. Da in diese Ergebnisse die Theorie der Steuerbarkeit und Steuerungsinvarianz wesentlich einfließt, sind die folgenden kurzen Ausführungen durchaus geeignet, die Bedeutung des Themas unseres Berichtes für die Anwendungen zu demonstrieren.
1. *Der optimale (lineare) stochastische Regler.* Das Störsignal v(t) wird als Realisierung eines stochastischen Prozesses angenommen, Entwurfsziel ist die Minimierung der mittleren quadratischen Abweichung von y zu einem vorgegebenen Zeitpunkt t_e. Um dieses Ziel durchsetzen zu können, muß ein expliziter Zusammenhang zwischen den statistischen Daten des Störprozesses, der Steuerung und dem Wert des Ausganges zur Zeit t_e herstellbar sein. Unter welchen Voraussetzungen dies möglich ist und wie sich das stochastische Optimierungsproblem dann in ein deterministisches übersetzen läßt, ist aus der Lehrbuchliteratur wohlbekannt. Nur zwei Anmerkungen über die Grenzen dieses Ansatzes dürfen hier am Platze sein. Voraussetzung für die Konstruktion ist die Kenntnis des vollständigen Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Störung, optimal ist der Regler nur im statistischen Sinne, seine Wirksamkeit gegen ein individuelles Störsignal ist nur grob abschätzbar.
2. *Störgrößenkompensation.* Dieser Terminus wird in der regelungstechnischen Umgangssprache verwendet, wenn
a) für den Prozeß der Regelung (unendlich) lange Zeit zur Verfügung steht,
b) die Störung v(t) – zumindest näherungsweise – als deterministische Funktion der Zeit angesehen werden kann, die von endlich vielen „verborgenen“ Parametern linear abhängt (Beispiel: v(t) ist eine periodische Funktion mit bekannter Periode, aber a priori unbekannten Fourierkoeffizienten),
c) das Entwurfsziel die asymptotische Entkoppelung des Ausgangs vom Störsignal ist, d. h. es soll

$$(3.6)\qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

gelten.
Die Forderung b) wird dabei üblicherweise so präzisiert: Es existiert ein – als bekannt vorausgesetztes – dynamisches Störgrößenmodell in Form einer Differentialgleichung und einer linearen Abbildung T der Menge ihrer Lösungen auf die Menge der in Frage kommenden Störsignale:

$$(3.7)\qquad \dot{z} = Sz, \qquad v = Tz.$$

Ein Kompensator wird dann durch eine dynamische Reglerstruktur (3.5) definiert, wobei die Kenntnis von S und T bei der Konstruktion von F, L, M, N verwendet werden kann. Entwurfsziel ist die asymptotische Entkoppelung gemäß (3.6), und zwar simultan für alle Störsignale aus der durch (3.7) festgelegten Funktionenmenge. Eine schärfere – aber aus der Sicht des Anwenders realistischere – Formulierung des Entwurfszieles c) hört sich in der ϵ-δ-Sprache so an: Es soll

$$(3.6')\qquad \lim_{t\to\infty} \sup \|y(t)\| \leqslant \epsilon$$

gelten, falls man vom Störsignal $v(t)$ weiß, daß es sich mittels einer – a priori unbekannten – Lösung $z(t)$ der Differentialgleichung $\dot{z} = Sz$ in der Form

(3.8) $\|v(t) - Tz(t)\| \leqslant \delta, \quad t \geqslant t_0,$

approximieren läßt.

Man kennt heute einfache und relativ schwache Bedingungen (an die Systemgleichungen (2.4) und das dynamische Störmodell (3.7)), welche die Möglichkeit einer Störgrößenkompensation in der schärferen Form (3.6′), (3.8) garantieren. Sie machen die Stärke des Kompensators im Vergleich zum stochastischen Regler deutlich. Sie liegt nicht allein in der Form des Entwurfsziels – die ja individuellen Erfolg und nicht nur gutes „mittleres" Abschneiden garantiert –, sondern vor allem in der größeren Flexibilität hinsichtlich der Modellbildung des Störsignals. Unsicherheiten lassen sich hier unter Umständen dadurch überspielen, daß man das Modell (3.7) von vorneherein so reichhaltig ansetzt, daß alle in Frage kommenden Typen von Störsignalen vertreten sind. Die richtige Auswahl aus der ihm angebotenen Palette trifft der Regler selber, denn Störgrößenkompensation hat – im Gegensatz zu Entkoppelung und stochastischer Regelung – eine lernende Komponente. Der Kompensator identifiziert die verborgenen Parameter in einem solchen Ausmaße, daß er die Störung schließlich ausmanövrieren kann. Daß diese Eigenschaft ihren Preis hat, und zwar in Form eines (unendlich) großen Zeitaufwandes, ist plausibel.

Wer den historischen Weg vom Konzept der Steuerbarkeit und Steuerungsinvarianz bis hin zu Entkoppelung und Kompensation verfolgen will, möge das Buch von Wonham (1979), mittlerweile ein Klassiker der Kontrolltheorie, zur Hand nehmen. Einen einheitlichen und konsequent in der Wonhamschen Sprache geschriebenen Zugang zu Entkoppelung und Kompensation findet man bei Schumacher (1981), eine weniger auf begriffliche Systematik, aber mehr auf konstruktive Möglichkeiten abgestellte Darstellung bei Knobloch/Kwakernaak (1985). Für eine erste Einführung in den Themenkreis Steuerbarkeit/Beobachtbarkeit steht eine Vielzahl von Lehrbüchern zur Auswahl. Wir nennen hier Kwakernaak/Sivan (1972) und Brockett (1970).

Will man das Entwurfsproblem von inhaltlichen Erörterungen über die Natur der externen Störung losgelöst betrachten und über $v(\cdot)$ nicht mehr als etwa die Zugehörigkeit zu Klasse $L^p(0, \infty)$ voraussetzen, so werden sich sinnvolle Entwurfskriterien an der Beziehung

$$\|y(\cdot)\|_q \leqslant K\|v(\cdot)\|_p$$

orientieren. Solche Beziehungen ergeben sich aus der Interpretation von $v(\cdot)$ als Eingangs- und $y(\cdot)$ als dazugehöriges Ausgangssignal desjenigen Systems, welches durch (3.3) und (3.5) definiert wird. Die Anfangszustände $x(0)$, $\hat{x}(0)$ hat man sich zu 0 normiert zu denken und muß asymptotische Stabilität des ungestörten Systems ($v = 0$) voraussetzen.
Kann man durch Wahl der Koeffizienten in (3.5) erreichen, daß K zu 0 wird, so ist der Ausgang y von der Störung v entkoppelt. Man spricht von Fast-Entkoppelung, falls sich mittels dynamischer Reglerstrukturen (3.5) beliebig kleine K erreichen lassen. Daß sich auch diese Möglichkeit im wesentlichen algebraisch charakterisie-

ren läßt, ist ein etwas überraschendes Resultat und demonstriert die Tragweite der Methoden, die in diesem Abschnitt vorgestellt wurden, vgl. Willems (1981), Scherer (1988). Die naheliegende Frage, wie man K durch Wahl der Reglerstruktur minimieren kann, führt auf nicht weniger interessante funktionentheoretische Probleme. Man muß dann allerdings das Problem vom Zustandsraum in den Frequenzbereich verlagern, vgl. Francis (1987).

4 Lokale Steuerbarkeit

Wir wenden uns jetzt nichtlinearen Problemen zu, d. h. wir setzen voraus, daß das Eingangs-/Zustandsverhalten des Kontrollsystems durch eine Differentialgleichung mit weitgehend willkürlicher rechter Seite beschrieben wird:

(4.1) $\dot{x} = f(t, x, u)$.

Um Diskussionen zu vermeiden, die am Kern der Sache vorbeiführen, werden wir im folgenden stets voraussetzen, daß f eine für alle t, x, u definierte C^∞-Funktion ist. Die Randwertaufgabe (1.2) wird jetzt ein typisches globales Problem, das sich aus dem Stand heraus oder etwa durch Analogien mit andernorts behandelten Problemen nicht angreifen läßt. Die Entstehung einer Vielzahl von Spielarten des ursprünglichen Steuerbarkeitsbegriffes (accessibility, attainability, local controllability, small time local controllability, vgl. etwa Sussmann (1983b), Sec. 1) war wohl nötig, um überhaupt Bewegung in die nichtlineare Systemtheorie zu bringen.
Wir beschränken uns hier auf die Diskussion einer einzigen dieser Varianten, die von der Definition her etwas hausbackener wirkt als die anderen, aber wohl den geradlinigsten Einstieg in die Elemente der geometrischen Theorie darstellt.

Definition 2. Es sei $\tilde{u}(t)$, $\tilde{x}(t)$ eine Lösung der Gleichung (4.1) über einem Intervall $[t_0, t_1]$ (im folgenden kurz „Referenzlösung" genannt). Das System heißt entlang der Referenzlösung lokal steuerbar, falls es eine volle Umgebung von $\tilde{x}(t_1)$ im x-Raum gibt, deren Punkte zur Zeit t_1 entlang zulässiger Trajektorien, die zur Zeit t_0 in $\tilde{x}(t_0)$ starten, erreichbar sind.

Mit anderen Worten: Der Spielraum, den die Steuerung bietet, ist wenigstens so groß, daß sich von einem vorgegebenen Anfangspunkt aus alle Punkte des Zustandsraumes zum Zeitpunkt t_1 ansteuern lassen, die von einem einmal erreichten Endzustand hinreichend wenig abweichen.
Für lineare zeitunabhängige Systeme ist lokale Steuerbarkeit mit der in Abschnitt 2 erörterten Eigenschaft der Steuerbarkeit identisch, für lineare zeitabhängige Systeme

(4.2) $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$

bedeutet lokale Steuerbarkeit, daß die Randwertaufgabe (1.2) für beliebige x_0, x_1 lösbar ist. Für lineare Systeme ist lokale Steuerbarkeit daher das gleiche wie globale Steuerbarkeit über einem vorgegebenen Zeitintervall $[t_0, t_1]$. Damit ist ein Begriff vorprogrammiert, den man als „lokale Steuerbarkeit in erster Näherung" bezeichnen könnte. Er beinhaltet die Steuerbarkeit desjenigen Systems, welches durch Linearisierung von (4.1) entlang der Referenzlösung gebildet wird. Man prüft also die Steuerbarkeit von (4.2) über dem Intervall $[t_0, t_1]$ für folgende Wahl der Koeffizienten:

$$(4.3) \quad A(t) := f_x(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)), \qquad B(t) := f_u(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)).$$

Daß Steuerbarkeit in erster Näherung eine hinreichende Bedingung für lokale Steuerbarkeit darstellt, kann man sich mit einfachen Hilfsmitteln (Parameterabhängigkeit der Lösungen einer Differentialgleichung) klarmachen. Interessant wird erst die Frage nach der Schärfe dieses Kriteriums; hier klafft die Schere zwischen hinreichend und notwendig weiter auseinander als man zunächst im Hinblick auf ähnliche Situationen in der Analysis vermuten würde. Das klassische Demonstrationsobjekt sind Systeme, deren rechte Seite analytisch, zeitinvariant und zudem linear und homogen in $u = (u_1, \ldots, u_m)$ sind:

$$(4.4) \quad \dot{x} = \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu b_\nu(x).$$

Ein solches System besitzt die stationäre Lösung $u = 0$, $x = 0$. Die entlang dieser Lösung linearisierte Gleichung

$$(4.5) \quad \dot{x} = \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu b_\nu(0)$$

ist so einfach gebaut, daß man dies auf einen Blick sieht: Steuerbarkeit – über irgendeinem Zeitintervall – ist dann und nur dann gewährleistet, wenn die $b_\nu(0)$, $\nu = 1, \ldots, m$, den vollen Zustandsraum $\mathbf{R}^n$ aufspannen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (4.4) entlang der Referenzlösung und über jedem Zeitintervall lokal steuerbar ist, lautet jedoch: Es ist $L_0 = \mathbf{R}^n$, wobei L_0 die lineare Hülle der folgendermaßen definierten Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ ist: Man nimmt zu den $b_\nu(x)$ noch alle Vektoren, die aus ihnen durch wiederholte Bildung von Lie-Klammern erzeugt werden können, hinzu und wertet dann alles, was man auf diese Weise an von x abhängigen Vektoren erhält, an der Stelle $x = 0$ aus.
Die offensichtliche Diskrepanz zwischen den Bedingungen für lokale Steuerbarkeit der Systeme (4.4) und (4.5) hat einen plausiblen Grund. Linearisierung hat im Falle des Systems (4.4) eine eklatante Vergröberung der Dynamik zur Folge. Die möglichen Richtungen, in denen die Evolution des Zustandes erfolgen kann – wenn man statt von (4.4) von (4.5) ausgeht – liegen ein für allemal fest und können sich mit dem Zustand selbst nicht mehr verändern. In (4.4) dagegen findet ein Zusammenspiel zwischen Veränderung der Dynamik und Veränderung des Zustandes statt. Diese gegenseitige Abhängigkeit mathematisch erfassen zu können war – so erscheint es zumindest im nachhinein – ein für die Entwicklung der modernen Systemtheorie wesentlicher Schritt. Erleichtert wurde er durch den Umstand, daß das benötigte Instrumentarium schon zum richtigen Zeitpunkt bereitstand. Die Vorarbeiten befaßten sich freilich mit einem anderen Thema, nämlich der Integration von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Dies ist auch – sinngemäß – der Titel einer Arbeit von Chow aus dem Jahre 1939, die heute als einer der Ausgangspunkte der geometrischen Orientierung in der modernen Systemtheorie angesehen wird. Wiederentdeckung und Nutzbarmachung dieser Quelle läßt sich in der Literatur gut verfolgen, instruktiv

ist hier vor allem die Lektüre der frühen Arbeiten: Hermann (1962/63) Nagano (1966), Haynes/Hermes (1970), Lobry (1970), Sussmann (1973).

Die differentialgeometrische Charakterisierung lokaler Steuerbarkeitseigenschaften hat heute einen gewissen Abschluß erreicht, jedenfalls sofern man sich auf das Studium analytischer affiner Systeme und stationärer Referenzlösungen beschränkt. Man spricht von einem affinen System, falls die rechte Seite der Systemgleichung (4.1) von der Zeit nicht explizit abhängt und eine lineare Funktion der Steuerung ist, wenn das System sich also in der Form

$$(4.6) \quad \dot{x} = f_0(x) + \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu b_\nu(x), \quad u = (u_1, \ldots, u_m),$$

schreiben läßt. $(u, x) = (0, 0)$ ist eine stationäre Lösung, falls $f_0(0) = 0$ gilt. Lokale Steuerbarkeit über dem Zeitintervall $[0, t_1]$ bedeutet dann, daß $x = 0$ innerer Punkt in der Menge $A(t_1)$ der zum Zeitpunkt t_1 von 0 aus ansteuerbaren Punkte ist. Der nachstehende Satz ist ein Extrakt aus verschiedenen in der Literatur verstreuten Resultaten, die in ihren Aussagen teilweise weitergehen. Wir haben uns für die vorliegende Fassung entschieden, weil in ihr deutlich wird, in welchem Ausmaß die Theorie der affinen Systeme über die der linearen Systeme hinausgewachsen ist.
Zur Vorbereitung brauchen wir lediglich die Definition der dem System (4.6) zugeordneten Kontroll-Lie-Algebra L. Wir benutzen die Abkürzungen

$$(4.7) \quad [f, g] := g_x f - f_x g, \quad ad_f^0 g := g, \quad ad_f^\rho g := [f, ad_f^{\rho-1} g], \quad \rho = 1, 2, \ldots .$$

L ist dann die von den n-dimensionalen und vom Zustand x abhängigen Vektoren

$$(4.8) \quad ad_{f_0}^\rho b_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, m, \quad \rho = 0, 1, 2, \ldots$$

erzeugte Lie-Algebra. Multiplikation bedeutet dabei natürlich die Operation $[\,..,\,..]$ (vgl. (4.7)), so daß L auch erklärt werden kann als der von den Lie-Monomen der Elemente (4.8) aufgespannte lineare Raum. Den linearen Raum, der sich durch Auswerten der Elemente von L an der Stelle $x = 0$ ergibt, bezeichnen wir mit L_0.

Satz 4. *Voraussetzung:* $f_0, b_\nu, \nu = 1, \ldots, m,$ *sind analytisch in einer Umgebung von* $x = 0$, $f_0(0) = 0$. $L_0 = \mathbf{R}^n$ *ist dann die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Referenz-Trajektorie* $x = 0$ *zur abgeschlossenen Hülle des Inneren von* $A(t_1)$ *für jedes* $t_1 > 0$ *gehört.*

Die Aussage des Satzes findet sich wohl erstmals bei Sussmann/Jurdjevjc (1972); inwieweit man von der Analytizität abgehen und mit C^∞ als Voraussetzung arbeiten kann, hat Krener (1974) untersucht. Einen Eindruck von den Anwendungsmöglichkeiten des Satzes vermitteln die ersten Kapitel der Lecture Note von Isidori (1985). $L_0 = \mathbf{R}^n$ ist insbesondere eine notwendige Bedingung dafür, daß $x = 0$ innerer Punkt von $A(t_1)$ ist, für jedes $t_1 > 0$. Daß sie im allgemeinen nicht hinreichend ist, zeigen einfache Gegenbeispiele. Das Bemühen, Forderungen an die Elemente von L zu formulieren, die garantieren, daß $x = 0$ zum Inneren der erreichbaren Menge $A(t_1)$ gehört, hat erst nach mehreren Anläufen zu einem befriedigenden, nämlich zu einem die wichtigsten Spezialfälle umfassenden, Kriterium geführt (Sussmann (1987)). Zu den Spezialfällen, die man unter einem gemeinsamen Dach vereint sehen möchte, gehört einmal der Satz von Chow (für den homogenen Fall $f_0 = 0$) und seine Verallgemeinerung auf den inhomogenen Fall (Knobloch und Wagner (1984)) wie auch die Bedingungen für lokale Steuerbarkeit in erster Näherung. Letztere lassen sich nämlich – für ein affines System und eine stationäre Referenzlösung – ebenfalls mit Hilfe von Elementen der Lie-Algebra L bzw. des Raumes L_0 erklären: Wertet man die Vektoren (4.8) an der stationären Stelle $x = 0$ aus, so erhält man gerade die Spalten der Kalman-Matrix, die zum linearisierten (und in diesem Falle auch zeitinvarianten) System (4.2), (4.3) gehört (siehe auch Hermes (1976), Sec. 1).

Als Haupthindernis beim Versuch, die Beweismethode des Satzes von Chow auf allgemeinere Situationen zu übertragen, erwies sich ein Verlust an Symmetrie beim Übergang von homogenen zu inhomogenen affinen Systemen. Genauer gesagt, die Unmöglichkeit, die Umkehr der Evolutionsrichtung, d. h. den Übergang von $f(x, u)$ zu $-f(x, u)$, mittels einer geeigneten Steuerung zu realisieren. Die Idee, an Stelle dieser allzu vordergründigen (und daher unrealistischen) Symmetrieforderung an die rechte Seite von (4.1) eine wesentlich subtilere Symmetriebedingung an die Lie-Algebra L zu stellen, ist der eigentliche Hintergrund für die – noch im Gang befindliche – Entwicklung eines Types von Steuerbarkeitskriterien, die auf die folgende Vermutung zurückgehen: Unter der Annahme $L_0 = \mathbf{R}^n$ wird $x = 0$ innerer Punkt von $A(t_1)$, falls jedes Lie-Monom, welches aus einer geraden Zahl von Faktoren der Form (4.8) besteht, aus Lie-Monomen niedrigeren Grades linear kombiniert werden kann. Diese Vermutung ist – für den Fall einer skalaren Steuerung u – von Hermes aufgestellt und von Sussmann (1983b) erstmals bewiesen worden.
Es sind in der Zwischenzeit Verschärfungen dieser Aussage bekannt geworden, die eines deutlich machen: Es sind tatsächlich Lie-Monome gerader Ordnung, die Hindernisse auf dem Wege zur lokalen Steuerbarkeit aufbauen, und diese Hindernisse lassen sich nach dem Vorschlag von Hermes aus dem Weg räumen, indem man ihre „Neutralisierung" durch Lie-Monome niedriger Ordnung verlangt. Eine solche Forderung braucht man aber offenbar nicht generell zu stellen, die gegenwärtige Forschung unternimmt daher u. a. den Versuch, die Menge der Lie-Monome, die neutralisiert werden müssen, möglichst scharf einzugrenzen. Wie weit man auf diesem Wege gekommen ist, verdeutlicht wohl wieder die Arbeit Sussmann (1987) am besten. Für detailliertere Informationen zum Thema lokale Steuerbarkeit sei im übrigen auf den Übersichtsartikel von Sussmann (1983a) hingewiesen.

Zum Schluß dieses Abschnittes wollen wir noch auf einen wichtigen Anwendungsaspekt des Themas „lokale Steuerbarkeit" eingehen. Er bezieht sich auf Variationsprobleme, bei denen u. a. eine Nebenbedingung in Form einer Differentialgleichung (4.1) gestellt wird. Man kann das Problem oft so formulieren, daß die zu optimierende Größe gleich einer Komponente des Endzustandes wird. Denkt man sich dann eine mögliche Lösung eines solchen Variationsproblemes als Referenzlösung gewählt, so tritt Verlust der lokalen Steuerbarkeit ein – jedenfalls sofern keine Kontrollrestriktionen (Einschränkungen des Wertevorrates der Steuerung) bestehen. Durch logische Negation erhält man daher aus jeder hinreichenden Bedingung für lokale Steuerbarkeit eine notwendige Bedingung für optimale Lösungen von Steuerungsaufgaben. Daß längs eines singulären Bogens (das ist ein Teil einer optimalen Lösung, für den eventuelle Kontrollrestriktionen nicht aktiv sind) Steuerbarkeit in erster Näherung nicht bestehen kann, war längst bekannt. Es folgt dies einfach aus dem Pontryaginschen Maximumprinzip und läßt sich durch eine Multiplikatorenregel (Orthogonalität der Spalten der Kalman-Matrix der linearisierten Gleichung (4.2), (4.3) zur adjungierten Variablen y(t)) in Evidenz setzen. Weitere notwendige Bedingungen – die nicht aus dem Maximumprinzip folgen und daher als „Bedingungen höherer Ordnung" apostrophiert werden – sind von Anwendern mit heuristischen Argumenten erraten und als Mittel zur Charakterisierung singulärer Bögen in großem Ausmaß eingesetzt worden. Die fehlende mathematische Fundierung und Systematik bildete lange Zeit hindurch ein Desideratum innerhalb der Variationsrechnung, das auch von den Fortschritten der allgemeinen Optimierungstheorie unberührt blieb. Das Verständnis der notwendigen Bedingungen höherer Ordnung kommt von der geometrischen Seite her, denn diese Bedingungen können zumeist als Multiplikatorenregel

(4.9) $y(t)^T a \leqslant 0$

geschrieben werden, wobei a ein (entlang der optimalen Trajektorie auszuwertendes) Lie-Monom ist. Zudem läßt sich die typische Voraussetzung für das Bestehen einer solchen Beziehung – nämlich triviales Erfülltsein der entsprechenden Relation für Lie-Monome niedrigeren Grades – in natürlicher Weise als die Forderung nach Neutralisierbarkeit gewisser Lie-Monome in dem vorhin erwähnten Sinne interpretieren. Trotz dieser deutlichen Parallelen ist eine direkte Umsetzung der geometrischen Theorie in Multiplikatorenregeln vom Typ (4.9) aus vielerlei Gründen nicht möglich. So hat z. B. die unumgängliche Umformulierung eines Kontrollproblems (Einbeziehung des Zielfunktionals in den Zustand) in der Regel zur Folge, daß die rechte Seite der Systemgleichung (4.1) nicht mehr linear in u wird.

Es existiert heute ein mathematisch ausgereifter Zugang zu den notwendigen Bedingungen höherer Ordnung, der streng genommen unabhängig vom Gegenstand dieses Berichtes ist, ideologisch aber der geometrischen Theorie so nahe steht, daß er eigentlich nur von dorther motiviert werden kann. Hier haben wir ein erstes Beispiel für das Eindringen geometrischer Begriffsbildungen in konkrete Anwendungsbereiche der Kontrolltheorie, eine weitere Anwendung wird im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

Der Formalismus der Lie-Klammern ist als ordnendes Prinzip beim Verständnis der notwendigen Bedingungen höherer Ordnung erstmals von Krener (1977) und Knobloch (1981) eingesetzt worden. Daß er offenbar weiter trägt als herkömmliche Multiplikatorenregeln und zu Aussagen über optimale Lösungen führt, die schärfer und spezifischer sind als alles, was sich etwa durch Einordnung in die allgemeine Optimierung gewinnen läßt, zeigen neuere Beiträge (Wagner (1986)). Insbesondere scheint sich hier ein systematischer Zugang zu Steuergesetzen vom Rückkoppelungstyp zu eröffnen, mit deren Hilfe mögliche Kandidaten für singuläre Extemalen besser explizit als bisher ausgesondert werden können.

5 Stabilisierung und Entkoppelung affiner Systeme

Wir nehmen jetzt an, daß ein Kontrollsystem in der allgemeinen Form (1.1) gegeben ist und daß das Problem des Reglerentwurfes zur Diskussion steht. Mathematische Konzepte zur Konstruktion von Reglerstrukturen stecken noch in den Kinderschuhen, wenn man vom linearen Fall einmal absieht (vgl. Abschnitt 3). Doch läßt sich auch für nichtlineare Systeme zu den in der Überschrift aufgeführten Themen heute einiges sagen, was auch in absehbarer Zukunft noch Gültigkeit haben dürfte.

Stabilisierung. Das zentrale Problem besteht hier zunächst einmal darin, eine sinnvolle Verallgemeinerung des Satzes von der Polvorgabe (vgl. Abschnitt 2) zu formulieren. Eines ist sicher: Sie liegt nicht im Bereich der lokalen Stabilität. Fragt man nämlich nur danach, ob eine instabile Ruhelage des ungesteuerten Systems durch Zustandsrückführung stabilisierbar ist, so erkennt man sofort, daß die lineare Theorie zur Beantwortung dieser Frage allein ausreicht – von gewissen „kritischen" Ausnahmefällen abgesehen. Gilt nämlich der Satz von der Polvorgabe für das linearisierte System, so läßt sich die Ruhelage stabilisieren, und zwar durch lineare Zustandsrückführung. Umgekehrt: Wenn für jede Wahl von F die aus den Jacobi-Matrizen $A := f_x$, $B := f_u$ gebildete und aus der linearen Theorie wohlbekannte Matrix $A - BF$ (vgl. (2.3)) mindestens einen Eigenwert in der offenen rechten Halbebene besitzt, so kann auch eine noch so geschickt gewählte nichtlineare Zustandsrückführung der Gleichgewichtslage nicht zur Stabilität verhelfen. Dies folgt einfach aus wohlbekannten elementaren Stabilitätskriterien.

Stabilisierbarkeit im Großen, d. h. die Erzeugung explizit angebbarer oder zumindest abschätzbarer Einzugsbereiche mittels nichtlinearer Zustandsrückführung ist die eigentlich reizvolle Aufgabe auf diesem Teilgebiet der modernen Systemtheorie. Abseits der eingefahrenen Wege der direkten Methode zeichnet sich bisher aber nur eine neue Entwicklung ab, vgl. Knobloch (1988b). Wenn keine expliziten Kontrollrestriktionen bestehen, so kann man mit dem Ansatz

$$u = \epsilon^{-1}\tilde{u}(x)$$

in die Systemgleichung eingehen und ϵ als kleinen Parameter auffassen. In der ingenieurwissenschaftlichen Literatur spricht man von „high gain feedback". Aus mathematischer Sicht stellt dieser Ansatz einen Anschluß an die singuläre Störungstheorie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen her. Hier gibt es nun in der Tat ein zentrales Resultat über globales asymptotisches Lösungsverhalten, nämlich den Satz von Tychonov. Er dürfte zum zukünftigen Handwerkszeug des Systemtheoretikers gehören. Eine Darstellung, die dem heutigen Wissensstand über den gesamten Komplex des Tychonovschen Satzes gerecht wird, findet sich bei Nipp (1988).

Entkoppelung. Wir nehmen jetzt wieder an, daß der gesamte Eingang sich in zwei Teile u, v aufspalten läßt und daß der erste Anteil dazu benutzt werden soll, um den Einfluß des zweiten auf den Ausgang zu reduzieren. Die Systemdarstellung nimmt also jetzt die Form an

$$\text{(5.1)} \quad \dot{x} = f(x, u, v), \qquad y = c(x).$$

Von den beiden im Abschnitt 3 behandelten Vorschlägen zur Lösung des Entwurfsproblems im linearen Fall – Entkoppelung und Kompensation – hat sich bisher nur der erste als verallgemeinerungsfähig erwiesen, und zwar auch dann nur, wenn man die Betrachtungen auf das einfachste Regelgesetz, nämlich sogen. statische Zustandsrückführung $u = u(x)$, beschränkt. Aus der Sicht des Anwenders sind solche Einschränkungen deswegen gravierend, weil die Realisierung des Steuergesetzes voraussetzt, daß man zu jedem Zeitpunkt über den gesamten Systemzustand voll informiert ist. Aber auch bei dieser extensiven Interpretation der Zulässigkeit einer Strategie stellt die Möglichkeit einer vollen Entkoppelung des Ausgangs von der Störung eher die Ausnahme als die Regel dar, eine Erfahrung, die man ja bereits in der linearen Kontrolltheorie macht. Daran ändert auch die Tatsache nichts, daß es vorzeigbare Beispiele für gelungene nichtlineare Entkoppelung gibt (Nijmeijer et al. 1984)).
Die zukünftige Bedeutung der Theorie, die in ihren Grundzügen jetzt skizziert werden soll, dürfte daher wohl eher in einem Anwendungsbereich liegen, den man als partielle Entkoppelung bezeichnen könnte, und der erhebliche praktische Bedeutung besitzt. Es geht hierbei nicht mehr darum, das Eingangs-/Ausgangsverhalten des Systems mittels Rückkoppelung auf die triviale Möglichkeit – der Ausgang hängt überhaupt nicht vom Eingang ab – zu reduzieren. Vielmehr möchte man eine Entflechtung des Eingangs-/Ausgangsverhaltens in dem Sinne erreichen, daß gewisse Komponenten des Ausganges von gewissen Komponenten des Einganges nicht mehr abhängen. In der ingenieurwissenschaftlichen Literatur spricht man von „non-interacting control“. Eine präzise Definition dieses wie auch aller anderen später auftauchenden Begriffe findet man bei Isidori (1985); wir werden diese Lecture Note – die bisher einzige in sich geschlossene moderne Einführung in die nichtlineare Kontrolltheorie – im folgenden mit [I] zitieren.

Grundlegend für die Lösung des Problems der Entkoppelung ist das im nachstehenden Satz formulierte Kriterium für eine Systemeigenschaft, die man als Ausgangs-Invarianz (output invariance, vgl. [I], III.3) bezeichnet. Was dieser Terminus bedeutet, wollen wir für affine Kontrollsysteme erklären, wobei die Bezeichnung im Hinblick auf spätere Anwendungen abweichend von der bisherigen Praxis gewählt wird:

$$(5.2)\qquad \dot{x} = \tilde{f}(x) + \sum_{\mu=1}^{k} v_\mu g_\mu(x), \qquad y = c(x).$$

Der Wert des Ausganges zur Zeit $t \geqslant 0$ hängt dann zunächst ab von den Werten der Steuerfunktionen $v_\mu(\cdot)$ im Intervall $[0, t]$ sowie vom Anfangszustand x_0 zur Zeit $t = 0$ und wäre daher korrekterweise so zu schreiben

$$(5.3)\qquad y(t, x_0, v_1(\cdot) \ldots, v_k(\cdot)).$$

Ausgangsinvarianz besagt einfach: (5.3) hängt in Wirklichkeit nur von t, x_0, nicht aber von den $v_i(\cdot)$ ab.

Satz 5. *Es seien* $\tilde{f}, g_1, \ldots, g_k, c$ *überall erklärte und analytische Funktionen von* x. *Notwendig und hinreichend dafür daß der Systemausgang* (5.3) *nicht von den Eingangsfunktionen* $v_1(\cdot), \ldots, v_k(\cdot)$ *abhängt, ist dann das Bestehen* (*identisch in* x)

der nachstehenden Relationen

(5.4) $(\partial c/\partial x)\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{\rho} g_\mu = 0, \quad \mu = 1, \ldots, k \quad \rho = 0, 1, \ldots .$

Zum Verständnis der Formel (5.4): $\partial c/\partial x$ ist die Funktionalmatrix der Ausgangsfunktion $c(x)$, der ad-Operator ist gemäß (4.7) definiert.

Die Aussage des Satzes gehört ohne Zweifel zur mathematischen Grundausrüstung jedes angehenden Systemtheoretikers. Wo sie innerhalb der Mathematik einzordnen ist, wird sicherlich eine Geschmacksfrage bleiben. Man kann in ihr nicht mehr als eine kultivierte Variante elementarer Resultate über die Abhängigkeit der Lösungen von den rechten Seiten einer gewöhnlichen Differentialgleichung sehen, wobei die Rolle der sonst üblichen Parameter jetzt von den frei wählbaren Eingangsfunktionen übernommen werden. Ein Kalkül, der ganz auf dieser Linie liegt und auf eine (formale) Potenzreihenentwicklung der Lösungen abzielt, ist in Knobloch (1981) entwickelt worden. Aus dem dortigen Theorem 7.1 kann man sich ohne allzu großen Aufwand selbst einen Beweis von Satz 5 zurechtzimmern. Auf die Analytizität (als Funktion des Zustandes) und die Linearität bezüglich der v_μ der rechten Seite der Differentialgleichung (5.2) kann dabei allerdings nicht verzichtet werden. Dagegen spielt die Tatsache, daß t explizit nicht vorkommt, keine wesentliche Rolle. Eine entsprechende Verallgemeinerung von Satz 5 ist für weitere Anwendungen nützlich (vgl. Knobloch 1988a).

Ausgangs-Invarianz ist – für ein affines System – gleichbedeutend mit dem Erfülltsein unendlich vieler Relationen. Die formale Struktur dieser Relationen legt den Versuch nahe, dem Kriterium eine andere Fassung zu geben, die unter Umständen auf das Nachprüfen nur endlich vieler Beziehungen hinausläuft. Diese Fassung wird in der Literatur zumeist verwendet (siehe z. B. [I], III.3, insbesondere Theorem 3.12) und benützt einige Begriffe der Differentialgeometrie wie Distribution, Invarianz einer Distribution, involutive Distribution. Wir begnügen uns mit einer summarischen Definition, wer es genauer wissen will, sei auf [I], Ch. I oder auf Bishop/Crittenden (1964), Ch. I, verwiesen.

Wir gehen aus von irgendeiner Menge von C^∞-Vektorfeldern im Zustandsraum. Den von ihnen erzeugten Modul – wobei als Koeffizientenbereich der Ring der C^∞-Funktionen von x fungiert – nennen wir eine Distribution und bezeichnen ihn im folgenden mit Δ. Wir schreiben ferner $\Delta = \{k_1, \ldots, k_r\}$, falls Δ von den Vektorfeldern $k_1, \ldots, k_r$ erzeugt wird. Δ heißt invariant bezüglich des Vektorfeldes f, falls $[f, \Delta] \subseteq \Delta$ gilt. Dabei bezeichnet $[f, \Delta]$ die Menge aller Vektorfelder der Form $[f, d]$, $d \in \Delta$, $[\ldots, \ldots]$ bedeutet wie bisher Lie-Klammer-Bildung. Δ heißt schließlich involutiv, falls es bezüglich jedes seiner Elemente invariant ist.

Die Bedingung (5.4) läßt sich offenbar auch so formulieren: Es existiert eine Distribution Δ mit den Eigenschaften

(5.5) $\{g_1, \ldots, g_k\} \subseteq \Delta \subseteq \ker(c_x)$,

(5.6) $[\tilde{f}, \Delta] \subseteq \Delta$.

Zum intuitiven Verständnis der Beziehungen (5.4)–(5.6) geben wir hier eine Interpretation der Größe

(5.7) $(\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{\rho} g)(x_0), \quad \rho = 0, 1, \ldots$

an, die man durch simples Nachrechnen direkt verifizieren kann. Man betrachte die Lösung $x(t) = x(t, x_0)$ der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit Anfangswert $x(0) = x_0$ sowie die Matrix-Lösung $X(t)$ der adjungierten Variationsgleichung $\dot{y} = -f_x(x(t))^T y$ mit Anfangswert $X(0) = E$ (= Einheitsmatrix). (5.7) wird dann gerade die ρ-te Ableitung von

$$(5.8) \qquad X(t)^T g(x(t))$$

an der Stelle $t = 0$. $X(t)^T$ läßt sich andererseits aus der Jacobi-Matrix

$$(\partial x/\partial x_0)(-t, x_0)$$

durch die Substitution $x_0 \to x(t)$ gewinnen. Die Potenzreihe

$$\sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{t^\rho}{\rho!} (\mathrm{ad}_f^\rho g)(x)$$

stellt daher die Taylorentwicklung einer Funktion dar, für die sich in der Literatur die Bezeichnung

$$(5.9) \qquad (\mathrm{Ad}_f^t g)(x)$$

eingebürgert hat (vgl. Krener (1985), p. 524) und deren Rolle für die Dynamik des Systems

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v$$

folgendermaßen beschrieben werden kann. Man denke sich die Störung v über einem kleinen Zeitintervall $[\tau - \epsilon, \tau]$ mit Stärke 1 wirksam, außerhalb dieses Intervalls gleich 0 gesetzt. Näherungsweise – d. h. bis auf Größen, die bezüglich ϵ von höherer als erster Ordnung sind – resultiert aus dieser Störung zum Zeitpunkt $t > \tau$ eine Abweichung vom Zustand des ungestörten Systemes, die gerade durch

$$\epsilon(\mathrm{Ad}_f^{\tilde{t}} g)(x(t)), \quad \tilde{t} := \tau - t,$$

gegeben ist. (5.9) muß also im Kern von $c_x(x)$, liegen, damit eine durch eine Störung induzierte Zustandsabweichung nicht eine Abweichung zwischen den jeweiligen Ausgängen zur Folge hat.

Wir betrachten nun ein System der Form (5.1), bei dem die rechte Seite der dynamischen Gleichung linear in der Störung v ist, d. h. wir nehmen an, daß sich (5.1) jetzt in der Form

$$\dot{x} = f_1(x, u) + \sum_{\mu=1}^{k} v_\mu g_\mu(x), \qquad y = c(x)$$

schreiben läßt. Unter der Voraussetzung, daß alle auftretenden Funktionen analytisch von x abhängen, läßt sich dem Problem der Entkoppelung (des Ausganges y von der Störung v) die folgende mathematische Fassung geben, welche verdeutlicht, welchen Dienst Satz 5 der Kontrolltheorie zu erweisen vermag: Es ist eine Distribution Δ und eine analytische Steuerfunktion $\tilde{u}(x)$ so zu konstruieren, daß die Beziehungen (5.5), (5.6) mit

$$(5.10) \quad \tilde{f}(x) := f_1(x, \tilde{u}(x))$$

erfüllt sind. Mit der Umformulierung ist das Problem der Entkoppelung freilich noch nicht gelöst, man erkennt aber, wo die wirkliche Crux liegt: Bei der Bedingung (5.6), die ja eine simultane Forderung an Δ und $\tilde{u}(x)$ ist. Wie man versucht, diese Forderung prinzipiell in den Griff zu bekommen, ist naheliegend: Durch Aufspaltung in je eine Bedingung für Δ und für $\tilde{u}(x)$ alleine. In der Tat hat man damit auch Erfolg, sofern f_1 linear in u ist, sich also in der Form

$$f_1(x, u) = f_0(x) + \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu b_\nu(x)$$

schreiben läßt. Von der Distribution wird jetzt verlangt:

(5.6′) $[f_0, \Delta] \subseteq \Delta + \{b_1, \ldots, b_m\}, \qquad [b_\nu, \Delta] \subseteq \Delta + \{b_1, \ldots, b_m\}.$

Welche Motive einen veranlassen, die Forderung (5.6) – jedenfalls soweit sie sich auf Δ alleine bezieht – gegen (5.6′) einzutauschen, kann im Rahmen eines kurzen Berichtes nicht näher ausgeführt werden. Man müßte dazu den Begriff „Entkoppelung" genauer definieren; tatsächlich möchte man nämlich mehr erreichen als was von uns postuliert wurde (vgl. [I], IV.1). Dagegen ist es sicher angebracht, kurz auf die nun anstehende und letztlich entscheidende Frage einzugehen: Unter der Annahme, daß eine Distribution Δ den beiden Forderungen (5.5), (5.6′) genügt, läßt sich dann die Bedingung (5.6), (5.10) durch Wahl eines geeigneten $\tilde{u}(x)$ erfüllen und wie kann dies geschehen? Im linearen Fall ist die Antwort sehr einfach: Man mache den Ansatz $\tilde{u}(x) = -Fx$ und kommt dann auf ein lineares Gleichungssystem für die Elemente der Matrix F. Die Lösbarkeit wird in diesem Falle eine Folge der Bedingung (5.6′) (Knobloch/Kwakernaak (1985), Kap. 5, Satz 5.1).

Im allgemeinen Fall ist es nun nicht damit getan, nach bekanntem Muster die Argumentation im linearen Fall der neuen Situation anzupassen. (5.6), (5.10) stellen nämlich jetzt ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung dar, und zu der Problematik des Umganges mit nichtlinearen Gleichungssystemen kommt noch eine weitere: Das Einhalten von Integrabilitätsbedingungen. Auch dies läßt sich durch Forderungen an die Distribution Δ erreichen, von denen die wesentliche so lautet

(5.11) Δ ist eine involutive Distribution.

Die Diskussion des Themas Störgrößenentkoppelung hat damit einen gewissen Abschluß erreicht. Zweierlei ist festzuhalten:
1. Die Mathematisierung des Problems: Eine Steuerfunktion $\tilde{u}(x)$ bewirkt dann und nur dann Entkoppelung, wenn sie Lösung der Gleichungen (5.6), (5.10) ist.
2. Die Auflösbarkeit (im Kleinen) dieser Gleichungen ist gewährleistet, wenn die Distribution Δ die Eigenschaften (5.6′), (5.11) besitzt (und gewissen technischen Zusatzvoraussetzungen genügt, vgl. [I]).
Die zweite Feststellung liegt nicht auf der Hand, ihr Beweis stellt eine der schwierigeren Passagen von [I] dar (Kap. IV, Abschnitt 1, siehe insbesondere Lemma (1.10)). Was man bei der Lektüre lernen kann, ist vor allem dies: Das geometrische Element setzt sich in der Kontrolltheorie mehr und mehr durch, es dient nicht nur kosmetischen Verbesserungen, sondern leistet auch unersetzliche methodische Hilfestellung. Ein Beispiel hierfür ist der Ideenkreis um den klassischen Satz von

Frobenius über die Integrierbarkeit von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Dieser Satz zählt heute zu den wichtigsten mathematischen Grundlagen der Systemtheorie. In vielen der gängigen Lehrbücher der Differentialgeometrie vermißt man ihn allerdings, so daß wir uns mit den folgenden Literaturhinweisen begnügen müssen: [I], I.3 und Bishop/Crittenden (1964), Ch. I.

Literatur

Bishop, R. L.; Crittenden, R. J. (1964): Geometry of Manifolds. Academic Press, New York

Brockett, R. W. (1970): Finite Dimensional Linear Systems. John Wiley, New York

Chow, W. L. (1940): Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Ann. **117**, pp. 98–105

Francis, A. (1987): A Course in H_∞ Control theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 88. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg

Haynes, G. W.; Hermes, H. (1970): Nonlinear controllability via Lie theory. SIAM J. Control **8**, pp. 450–460

Hermann, R. (1962): The Differential Geometry of Foliations II. J. of Math. and Mech. **11**, pp. 303–315

Hermann, R. (1963): On the Accessibility Problem in Control Theory. In: Internat. Symposium on Nonlinear Differential Equations. LaSalle, Lefschetz eds., Academic Press, London, pp. 325–332

Hermes, H. (1974): On local and global controllability. SIAM J. Control **12**, pp. 252–261

Hermes, H. (1976): Local Controllability and Sufficient Conditions in Singular Problems. J. Diff. Eq. **20**, pp. 213–232

Hermes, H. (1978): Lie algebras of vector fields and local approximation of attainable sets. SIAM J. Control Optim. **16**, pp. 715–727

Hirschhorn, R. M. (1981): (A, B) Invariant Distributions and Disturbance Decoupling of Nonlinear Systems. SIAM J. Control **19**, pp. 1–19

Isidori, A. (1985): Nonlinear Control Systems: An Introduction. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 72. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg

Knobloch, H. W. (1981): Higher Order Necessary Conditions in Optimal Control Theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 34. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg

Knobloch, H. W.; Wagner, K. (1984): On Local Controllability of Nonlinear Systems. In: Dynamical Systems and Microphysics, A. Blaquière and G. Leitmann eds., Academic Press, Orlando, pp. 243–286

Knobloch, H. W. (1988a): On the dependence of solutions on the right hand side of an ordinary differential equation. Aequationes Math. **35**, pp. 140–163

Knobloch, H. W. (1988b): Stabilization of nonlinear control systems by means of "high-gain" feedback. In: Optimal Control Theory and Economic Analysis 3., G. Feichtinger ed., North-Holland, pp. 153–173

Knobloch, H. W.; Kwakernaak, H. (1985): Lineare Kontrolltheorie. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg

Krener, A. J. (1974): A generalization of Chow's theorem and the bang-bang theorem to nonlinear control problems. SIAM J. Control **12**, pp. 43–52

Krener, A. J. (1977): The High Order Maximal Principle and Its Application to Singular Extremals. SIAM J. Control Optim. **15**, pp. 256–293

Krener, A. J. (1985): $(Ad_{f,g})$, $(ad_{f,g})$ and locally $(ad_{f,g})$ invariant and controllability distributions. SIAM J. Control Optim. **23**, pp. 523–549

Kwakernaak, H.; Sivan, R. (1972): Linear Optimal Control Systems. Wiley-Interscience, New York

Lobry, C. (1970): Contrôlabilité des systèms non lineaires. SIAM J. Control **8**, pp. 573–605. (Erratum: SIAM J. Control Optim. **14** (1976) p. 387)

Nagano, T. (1966): Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras. J. Math. Soc. Japan **18**, pp. 398–404

Nijmeijer, N.; van der Schaft, A. (1984): Controlled Invariance for Nonlinear Systems: Two worked examples. IEEE Trans. Aut. Control **AC-29**, pp. 361–364

Nipp, K. (1988): An Algorithmic approach for solving singularly perturbed initial value problems. In: Dynamics Reported, U. Kirchgraber, H. O. Walther eds., Vol. 1, B. G. Teubner, Stuttgart, pp. 173–263

Scherer, C. (1988): Almost Disturbance Decoupling with Stability by Dynamic Output Feedback: A Sufficient Condition. Systems Control Lett. **10**, pp. 291–299

Schumacher, J. M. (1981): Dynamic feedback in finite- and infinite-dimensional linear systems. Tract Series No. 143. Mathematisch Centrum Amsterdam

Sussmann, H. J.; Jurdjévic, V. (1972): Controllability of nonlinear systems. J. Diff. Eq. **12**, pp. 95–116

Sussmann, H. J. (1973): Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Trans. Am. Math. Soc. **180**, pp. 171–188

Sussmann, H. J. (1983a): Lie Brackets, Real Analyticity and Geometric Control. In: Differential Geometric Control Theory, R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussmann eds., Birkhäuser, Boston, pp. 1–116

Sussmann, H. J. (1983b): Lie brackets and local controllability: A sufficient condition for scalar-input systems. SIAM J. Control Optim. **21**, pp. 686–713

Sussmann, H. J. (1987): A General Theorem on Local Controllability. SIAM J. Control Optim. **25**, pp. 158–194

Wagner, K. (1986): Über den Steuerbarkeitsbegriff bei nichtlinearen Kontrollsystemen. Arch. Math. **47**, pp. 29–40

Willems, J. C.: Almost Invariant Subspaces: An Approach to High Gain Feedback Design – Part I: Almost Controlled Invariant Subspaces. IEEE Trans. Aut. Contr. **AC-26**, pp. 235–252

Wonham, W. M. (1979): Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg

Prof. Dr. H. W. Knobloch
Universität Würzburg
Am Hubland
8700 Würzburg

(*Eingegangen: 23. 11. 1986*)

Buchbesprechungen

Elliott, P. D. T. A., Arithmetic Functions and Integer Products (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Band 272), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1985, xv, 461 pp., Hard cover, DM 198,–

Die vorliegende Monographie stellt ein schwer zu charakterisierendes Buch dar; teilweise werden (später benötigte) Ergebnisse lehrbuchmäßig abgehandelt, teilweise werden Forschungsarbeiten des Autors zusammenfassend dargestellt, und zu einem guten Teil hat das Buch den Charakter einer umfangreichen Originalarbeit.

Das Buch wendet sich vor allem an Mathematiker, die im Gebiet der zahlentheoretischen Funktionen selbst aktiv sind oder über Beziehungen dieses Gebietes zu anderen mathematischen Disziplinen wie Siebtheorie, Dualitätstheorie, Maßtheorie auf Gruppen, Ringtheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie etc., etwas erfahren möchten. Der Leser wird einen erstaunlichen Reichtum an Informationen und Ideen in diesem Buch finden, angefangen mit einem ausführlichen Literaturverzeichnis, meist Originalarbeiten[1]), eine Sammlung von 108 meist keineswegs leichten „Übungsaufgaben", 18 research-problems (Unsolved Problems, p. 417ff.), die zum Teil derzeit sicherlich „apparently beyond reach" sein dürften, weiter eine Fülle einfacherer, sehr nützlicher Standard- oder Weniger-Standard-Ergebnisse über zahlentheoretische Funktionen, neben den zum Teil nachstehend aufgeführten vielen neuen Ergebnissen.

Ein ausführlicher Anhang ergänzt die beiden früheren Springer-Bände des Verfassers über Probabilistic Number Theory durch neue, seither erzielte Ergebnisse; zum Beispiel werden die bestmögliche Konstante in der Turán-Kubiliusschen Ungleichung und Analoga dieser Ungleichung gegeben.

Besonders interessant scheint, daß der Verfasser allgemeinere Gesichtspunkte aus der Funktionalanalysis (Stichwort ‚Dualität') einfließen läßt; auf diese Weise ergeben sich neue Resultate, neue Beweise und neue Einsichten im Bereich der zahlentheoretischen Funktionen und – last not least – neue Ansatzpunkte, die weitere Untersuchungen ermöglichen. Weitgehendst werden Gegenstände behandelt, die bisher anscheinend noch keinen Eingang in die Lehrbuchliteratur gefunden haben. Vielleicht ist deswegen die Darstellung gelegentlich etwas ungeglättet, und der Leser hat Mühe, die Querverbindungen, die der Verfasser aufdeckt oder andeutet, sofort zu durchschauen.

Ein entscheidender Ausgangspunkt des Buches ist das alte Erdössche Problem, den Logarithmus als additive reellwertige zahlentheoretische Funktion zu kennzeichnen; eine hinreichende Bedingung ist z. B. $f \nearrow$ oder $f(n+1) - f(n) \to 0$. So beschäftigt sich der Verfasser in weiten Teilen des Buches mit dem Problem, Aussagen über eine additive Funktion f (z. B. Abschätzungen nach oben, Charakterisierung, Größenaussagen im Mittel, Aussagen über $\sum_{p,k} p^{-k} |f(p^k)|^2, \ldots$) aus Kenntnissen über Differenzen $f(a \cdot n + b) - f(A \cdot n + B)$ zu gewinnen. Als Beispiel sei die „Basic inequality" (Theorem 10.1) genannt:
Sind $a > 0$, $A > 0$, b, B mit $\Delta = aB - bA \neq 0$ gegeben, so gilt die Ungleichung

$$\sum_{\substack{q \leq x \\ (q, Aa\Delta) = 1}} q^{-1} \cdot |f(q) - F(x) \cdot \log q|^2 \ll \sup_{x \leq w \leq x^c} \frac{1}{w} \cdot \sum_{x < n \leq w} |f(an+b) - f(An+B)|^2,$$

---

[1]) Man ergänze die beiden Arbeiten von K. H. Indlekofer in: Math. Z. **146** (1976) 285–290, und Illinois J. **25** (1981) 251–257, MR **52** # 10567 bzw. **82e** # 10011.

mit

$$F(x) = \sum_{\substack{x^{1/2} < q < x \\ (q, aA\Delta) = 1}} q^{-1} f(q) \cdot \left(\sum_{\substack{x^{1/2} < q < x \\ (q, aA\Delta) = 1}} q^{-1} \log q \right)^{-1},$$

gleichmäßig für alle additiven Funktionen f, wenn $x \geqslant x_0$.

Im 13. Kapitel ergibt sich hieraus die Lösung eines Kátaischen Problems[2]) und im 14. Kapitel eine Verallgemeinerung tiefer Wirsingscher Ergebnisse (Additive and completely additive functions with restricted growth, Proc. Symp. Durham 1979, Vol. 2, 231–280, Amer. Math. Soc. Proc. of Symp. in Pure Math. **20** (1971) 375–381).

Ein weiteres Problem, das auch im Zusammenhang mit Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen auftaucht, ist das der Darstellung ganzer Zahlen als Produkte ganzer Zahlen vorgegebenen Typs (siehe Kap. 15 bis 19), etwa in der Gestalt

$$n = \prod_i (p_i + 1)^{\epsilon_i}, \qquad \epsilon_i = \pm 1, \qquad p_i \text{ prim.}$$

Als ein Ergebnis über simultane Darstellung sei Theorem 19.1 zitiert. Sind $a > 0$, b, $A > 0$, B ganze Zahlen ungleich Null, die $aB - bA \neq 0$, $(A, B) = 1 = (a, b)$ erfüllen, dann gibt es eine positive ganze Zahl v derart, daß jedes Paar m_1, m_2 ganzer Zahlen mit $(m_1, a) = 1$, $(m_2, A) = 1$ eine simultane Darstellung

$$m_1^v = \prod_{i=1}^{r} (an_i + b)^{\epsilon_i}, \qquad m_2^v = \prod_{i=1}^{r} (An_i + B)^{\epsilon_i}$$

mit natürlichen Zahlen n_i und $\epsilon_i = \pm 1$ besitzt.

Als Anwendung der grundlegenden Ergebnisse des zehnten Kapitels werden im 21. Kapitel notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gegegen, daß für reellwertige additive Funktionen die relativen Häufigkeiten

$$\nu_x\{n; f(n+1) - f(n) \leqslant z \cdot \beta(x)\}$$

für $x \to \infty$ gegen eine Grenzverteilung streben (Satz 21.1).

In Kapitel 22 wird ein sehr allgemeiner Satz über multiplikative Darstellungen natürlicher Zahlen mit Hilfe des folgenden Theorems 22.2 hergeleitet.

Ist $a_1 < a_2 < \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen mit positiver oberer Dichte d und f eine additive zahlentheoretische Funktion, mit Werten in $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, die auf den a_j konstant ist, so gibt es eine ganze Zahl m in $1 \leqslant m \leqslant d^{-1}$ so daß die Reihe $\sum\limits_{\|m \cdot f(p)\| \neq 0} p^{-1}$ konvergiert. ($\|\beta\|$ bezeichnet den Abstand von β zur nächsten ganzen Zahl.)

Ruzsas Ergebnis {Ist $L : \mathbf{N} \to H$ (H ist abelsche Gruppe) additiv, so besitzt die Urbildmenge $L^{-1}(h)$ für jedes $h \in H$ eine asymptotische Dichte; siehe Acta Arith. **32** (1977), 313–347} wird neu bewiesen.

Dieses wichtige, inhaltsreiche und ideenreiche Buch, das nebenbei bemerkt, sich kaum mit Elliotts beiden Bänden zur Probabilistic Number Theory überschneidet, verdient es, gründlich studiert zu werden.

Frankfurt am Main W. Schwarz

[2]) Ist f reellwertig und additiv und gilt $f(an + b) - f(An + B) \to C$ für $n \to \infty$ (bei vorgegebenen positiven a, b, A, B, mit $\Delta = aB - bA \neq 0$), so ist $f(d) = F \cdot \log d$ für alle d, die zu $a \cdot A \cdot \Delta$ teilerfremd sind.

Guaraldo, F., Macri, P., Tancredi, A., Topics on Real Analytic Spaces (Advanced Lectures in Mathematics, ed. by Gerd Fischer), Braunschweig: Vieweg 1986, x, 164 pp., DM 42,–

Neben der umfangreichen Lehrbuchliteratur über komplex analytische Geometrie hier nun einmal ein Buch über reell analytische Geometrie. Ein nützliches Buch. Es ist nicht das Ziel dieses Buches, die Grundlagen der reell analytischen Geometrie darzulegen. Vielmehr wird eine gewisse Vertrautheit mit reell analytischen Räumen und komplex analytischen Räumen vorausgesetzt. In diesem Buch werden einige spezielle Themen der reell analytischen Geometrie behandelt: Komplexifizierung reell analytischer Räume, Einbettungsfragen reell analytischer Varietäten, Approximationsprobleme. Es ist das Verdienst der Autoren, daß sie wichtige Ergebnisse aus diesen Gebieten, die bisher nur über die Literatur verstreut waren, zum ersten Mal in einem Buch zusammengefaßt haben. Die angesprochenen Themen werden bei weitem nicht in allen ihren Aspekten ausgeleuchtet und behandelt. Dazu ist allein schon der Umfang des Buches viel zu gering.

Leider ist das Buch nicht mit allzu großer Sorgfalt geschrieben. Allein schon die lange Liste der Druckfehler ist hinderlich beim Lesen. Das Buch enthält zahlreiche Ungenauigkeiten und mathematische Versehen. Einige Beweise sind unklar. Zwar werden die verwendeten Ergebnisse genau zitiert, aber das Verzeichnis der weiterführenden Literatur könnte ausführlicher sein.

Der Inhalt im einzelnen: Das Buch ist in acht Kapitel aufgeteilt. Im ersten Kapitel werden die üblichen Begriffsbildungen über lokal geringte Räume eingeführt. Das zweite Kapitel beschäftigt sich neben den einfachsten Eigenschaften reell analytischer Räume mit Antiinvolutionen auf komplex analytischen Räumen. Es ist jedoch nicht zu erkennen, warum Antiinvolutionen auf komplex analytischen Räumen hier so umständlich definiert wurden. Im dritten Kapitel wird die Komplexifizierung eines reell analytischen Raumes konstruiert. Als erste Anwendung hiervon werden Theorem A und Theorem B für reell analytische Räume bewiesen. Im vierten Kapitel werden die Normalisierung und Desingularisierung reell analytischer Varietäten kurz abgehandelt. In der Verlagsankündigung heißt es hierzu „comprehensive treatment". Dies ist es nun wirklich nicht. Kapitel VII beschäftigt sich mit der Approximation differenzierbarer Abbildungen durch analytische Abbildungen. Diese Approximationsaussagen dienen zum Beweis der Einbettungseigenschaften einer reell analytischen Varietät in einen $\mathbf{R}^n$ (Kapitel VI) und dazu, die Klassifikation analytischer Vektorbündel auf reell analytischen Varietäten auf die Klassifikation topologischer Vektorbündel zurückzuführen.

Regensburg M. Knebusch

Marchenko, V. A., Sturm-Liouville Operators and Applications (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 22), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1986, xi und 367 pp., paper, DM 148,–

Es ist wohl unbestritten, daß zahlreiche bedeutende Entwicklungen in Mathematik und Physik ihren Ursprung in der Untersuchung ganz simpler Objekte haben. Als Beispiel dieses Sachverhalts seien hier die Sturm-Liouvillesche Gleichung $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$ und der ihr zugeordnete Sturm-Liouville-Operator $L \equiv -(d^2/dx^2) + q(x)$ genannt. Beginnend mit dem Studium der eindimensionalen Wellengleichung durch D. Bernoulli und L. Euler (an dem real vorliegenden Problem der Transversalschwingungen einer elastischen Saite), wurden in der zeitlichen Abfolge unzählige Erkenntnisse und Ideen über dieses spezifische Objekt gesammelt, durch die nicht nur eine ständige Befruchtung der Spektraltheorie stattfand, sondern die auch andere verwandte Gebiete der Analysis nachhaltig beeinflußten. Unter den aufregendsten Entdeckungen neuerer Zeit ist in diesem Zusammenhang die Verbindung zu erwähnen, die von C. Gardner,

J. Green, M. Kruskal und R. Miura ("A method for solving the Korteweg-de Vries equation", Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1095–1098) zwischen der Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren und den Solitonlösungen spezieller nichtlinearer partieller Differentialgleichungen gefunden wurde.

Bereits in den vierziger Jahren hatten J. Delsarte und B. M. Levitan das Instrumentarium der Spektraltheorie durch das Konzept der Transformationsoperatoren bereichert, mit deren Hilfe es gelang, Entwicklungssätze für Eigenfunktionssysteme allgemeiner Sturm-Liouvillescher Gleichungen zu beweisen. Transformationsoperatoren stehen auch im Mittelpunkt des Interesses des Autors der zur Besprechung vorliegenden Monographie. Vladimir A. Marchenko, Professor für Mathematik im ukrainischen Charkov, zählt zu den intimen Kennern der Materie, ist er doch selbst einer der herausragenden Exponenten in der modernen Geschichte der Spektraltheorie.

Das erklärte Ziel des Buches ist es, durch konsequente Verwendung von Transformationsoperatoren nicht nur zu einer Reformulierung der klassischen Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren zu gelangen, sondern darüber hinaus auch nicht kanonische Verbindungen zum Bereich nichtlinearer partieller Differentialgleichungen aufzuzeigen. Der Autor will ferner das vorliegende Werk verstanden wissen als Aktualisierung einer bereits früher erschienenen Monographie, welche allerdings nur in russischer Sprache publiziert wurde ("Spectral Theory of Sturm-Liouville Operators", Naukova Dumka, Kiev 1972). Nach unserem Urteil wird Marchenko dem zweiten Anliegen nur zum Teil gerecht. In dem vorliegenden Buch wird die Entwicklung der Materie aus der Sicht der russischen Schule nur etwa bis zum Jahre 1978 einigermaßen umfassend aufgearbeitet. Diesem Manko begegnet allerdings der Übersetzer A. Iacob durch eine zwar bescheidene, aber doch repräsentative Ergänzung des ohnehin knappen Literaturverzeichnisses, in welcher die Trends der letzten zehn Jahre in der Theorie nichtlinearer Evolutionsgleichungen vom Korteweg-de Vries-Typ und in der damit verbundenen Spektral- und Streutheorie aufgezeigt werden.

Die Schlüssel zum Verständnis des Buches liefern die Transformationsoperatoren $\mathrm{Id} + K$, $\mathrm{Id} + K_h$, $\mathrm{Id} + K_\infty$ und ihre Inversen. Wir stellen hier eine kurze Beschreibung dieser Operatoren voran. Gegeben sei ein stetiges Potential $q : I \to \mathbf{C}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$, welches den Ursprung $x = 0$ enthalte. Dann hat die Sturm-Liouvillesche Gleichung $L[y] = \lambda^2 y$ zu vorgegebenen Anfangsdaten

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = i\lambda \tag{1}$$

bei beliebiger Wahl von $\lambda \in \mathbf{C}$ bekanntlich genau eine (klassische) Lösung $y(x) \equiv e_0(\lambda, x)$. Man zeigt leicht, daß die Funktion $u(x, t) := e^{i\lambda t} e_0(\lambda, x)$ auf $I \times \mathbf{R}$ das folgende Cauchy-Problem löst:

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u; \qquad u(0, t) = e^{i\lambda t}, \quad u_x(0, t) = i\lambda e^{i\lambda t}. \tag{2}$$

Mit Hilfe der Riemannschen Integrationsmethode gewinnt man andererseits die Lösungen dieses Problems in der Form

$$u(x, t) = e^{i\lambda(t + x)} + \int_{t-x}^{t+x} R(x, t; 0, \tau) e^{i\lambda\tau} d\tau.$$

Dabei bezeichnet $R(x, t; \xi, \tau)$ die in allen Variablen stetige Riemann-Funktion des Problems (2). Wird hier speziell $t = 0$ gesetzt, so resultiert mit $K(x, \tau) := R(x, 0; 0, \tau)$ die Darstellungsformel

$$e_0(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_{-x}^{x} K(x, \tau) e^{i\lambda\tau} d\tau \equiv (\mathrm{Id} + K) e^{i\lambda x}. \tag{3}$$

Der Integraloperator $\mathrm{Id} + K$ transformiert mithin die Lösung $f(x) = e^{i\lambda x}$ der simplen Gleichung $-y'' = \lambda^2 y$ in die Lösung $y = (\mathrm{Id} + K)f$ der (weitaus komplizierteren) Sturm-Liouvilleschen

Gleichung $L[y] = \lambda^2 y$ unter Beibehaltung derselben Anfangsdaten (1). Ganz analoge Korrespondenzen zwischen den Lösungen der beiden Differentialgleichungen $L[y] = \lambda^2 y$ und $-y'' = \lambda^2 y$ werden durch die Transformationsoperatoren $\mathrm{Id} + K_h$ und $\mathrm{Id} + K_\infty$ vermittelt, wenn man an die Stelle von (1) die Anfangsdaten

$$y_h(0) = 1, \qquad y_h'(0) = h \quad \text{bzw.} \quad y_\infty(0) = 0, \qquad y_\infty(0) = 1$$

setzt und die Kerne der Integraloperatoren K_h, K_∞ gemäß

$$K_h(x, \tau) = h + K(x, \tau) + K(x, -\tau) + h \int_\tau^x [K(x, \xi) - K(x, -\xi)] d\xi,$$
$$K_\infty(x, \tau) = K(x, \tau) - K(x, \tau)$$

erklärt.

Im ersten Kapitel des vorliegenden Buches werden die wesentlichen Eigenschaften der oben genannten Transformationsoperatoren und ihrer Inversen herausgearbeitet. Damit gelingt es, die klassische Theorie der nichtentarteten Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgaben auf endlichen Intervallen mit unkonventionellen Mitteln erneut aufzurollen. Selbstverständlich muß auch dieser neue Weg zu den bekannten Vollständigkeits- und Entwicklungssätzen für das zugeordnete System der verallgemeinerten Eigenfunktionen führen. Es ist aber doch überraschend, mit welcher Eleganz unter anderem Aussagen über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte $\mu = \sqrt{\lambda}$ für große Moduli $|\mu|$ herausspringen. Darüber hinaus zeigt es sich, daß mit Hilfe der Transformationsoperatoren ein genauer Zusammenhang hergestellt werden kann zwischen den Regularitätseigenschaften eines periodischen Potentials $q(x)$ und dem asymptotischen Verhalten der Lücken im Spektrum des zugrundeliegenden Hill-Operators $-(d^2/dx^2) + q(x)$.

Das zweite Kapitel bringt nach einer kurzen Einführung in die Distributionentheorie eine Diskussion der Sturm-Liouvilleschen Gleichung auf der Halbachse $0 \leqslant x < \infty$ für ein komplexes Potential $q(x)$ und für Randbedingungen der Form $y'(0)$ n $hy(0) = 0$. Unter Verwendung von distributionswertigen Spektralfunktionen werden auch in diesem Fall Vollständigkeits- und Entwicklungssätze gewonnen, die im Einklang stehen mit klassischen Resultaten von H. Weyl. Es wird ferner gezeigt, daß der Kern $K(x, \tau)$ des Transformationsoperators $\mathrm{Id} + K$ die Integralgleichung von I. M. Gelfand und B. M. Levitan löst ("On the determination of a differential equation from its spectral function", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **15**, No. 4 (1951) 309–360 = Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **1** (1955) 253–304). Damit gelingt es, das inverse Problem der Spektralanalyse, nämlich der Rekonstruktion des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems aus der Vorgabe der Spektraldaten, zu lösen. Es werden in der Tat durch notwendige und hinreichende Bedingungen diejenigen Distributionen charakterisiert, die als distributionelle Spektralfunktionen eines Sturm-Liouville-Operators auf der Halbachse in Frage kommen.

Im dritten und wohl wichtigsten Kapitel des Buches werden neben dem inversen Problem für den (periodischen) Hill-Operator weitere inverse Probleme der Streutheorie behandelt. Hier wird ausführlich Bezug genommen auf das inverse Streuproblem der klassischen Quantenmechanik: Läßt sich das interaktive Potential zweier Elementarteilchen mit gegebenen Massen aus dem asymptotischen Verhalten (im Unendlichen) der Wellenfunktion der zugeordneten Schrödinger-Gleichung rekonstruieren? Die vollständige Lösung des Rekonstruktionsproblems gelingt wieder unter Verwendung eines Transformationsoperators $\mathrm{Id} + K$ für diejenigen Potentiale, die die Nebenbedingung $\int_0^\infty x\,|q(x)|\,dx < \infty$ erfüllen. Man erhält das gesuchte Potential aus der Kernfunktion $K(x, \tau)$ über die simple Beziehung $q(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx} K(x, x)$. In engem Zusammenhang mit diesem Resultat stehen auch Aussagen über die Stabilitätszonen der Hillschen Differentialgleichung.

Das letzte Kapitel bringt schließlich einen knappen Abriß der Integrationsmethode von P. D. Lax ("Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968) 467–490), mit deren Hilfe eine große Zahl nichtlinearer Gleichungen der mathematischen Physik behandelt werden kann. Eine detailliertere Diskussion wird am Beispiel der Korteweg-de Vries-Gleichung $\dot{v} = 6vv' - v'''$ durchgeführt, wobei wiederum die vorher etablierten Methoden der Spektraltheorie zum Tragen kommen.

Es wäre falsch, in der vorliegenden Monographie ein Lehrbuch der Spektraltheorie sehen zu wollen. Mit der Beschränkung auf eindimensionale Schrödinger-Operatoren wird nur eine der schillernden Facetten dieser Theorie beleuchtet. Die Einstiegsvoraussetzungen an den prospektiven Leser werden nicht zu hoch angesetzt. Gute Kenntnisse der Funktionentheorie und einiger Grundtatsachen der Funktionalanalysis genügen als Rüstzeug. Das übrige Instrumentarium wird in angemessener Weise bereitgestellt. Jedem Abschnitt ist ein Katalog von Aufgaben mit ausführlichen Lösungshinweisen angefügt. Das Buch mag nicht nur dem Spezialisten als Leitfaden dienen; ein sehr sorgfältiger Aufbau des Werkes und eine sehr detaillierte Beweisführung machen es auch für interessierte Studenten der Mathematik und der Physik im Hauptstudium brauchbar.

Erlangen H. Grabmüller

Leis, R., Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics, Chichester: Wiley & Sons 1986, Stuttgart: Teubner 1986, 266 pp., DM 62,–

Die beiden letzten Jahrzehnte führten unter wesentlicher Mitwirkung des Autors und seiner Schüler zu einem vertieften mathematischen Verständnis linearer Wellenausbreitungsvorgänge. Die neuere Entwicklung ist vor allem durch die verstärkte Anwendung funktionalanalytischer Hilfsmittel, insbesondere der Spektraltheorie und der Hilbertraummethoden für lineare partielle Differentialgleichungen gekennzeichnet. Die Spektraltheorie läßt sich als eine sehr allgemeine Form des klassischen Prinzips der Trennung der Variablen auffassen und ermöglicht auf zwei verschiedenen Stufen die Zurückführung zeitabhängiger Prozesse auf zeitunabhängige Probleme. Zunächst zeigt man, daß sich der Ortsanteil des Differentialoperators unter Berücksichtigung der jeweiligen Randbedingungen zu einem selbstadjungierten Operator A erweitern läßt. Dieser Schritt läuft im wesentlichen auf die schwache Lösung eines (im allgemeinen elliptischen) Randwertproblems im Hilbertraum L_2 („gedämpfter Fall") hinaus. Die Lösung des zeitabhängigen Problems ergibt sich mit Hilfe des Funktionalkalküls für selbstadjungierte Operatoren. Auf der zweiten Stufe stehen die qualitativen Eigenschaften der Lösung im Vordergrund, insbesondere ihr asymptotisches Verhalten für $t \to \pm\infty$. Diese Fragen erfordern im mathematisch besonders interessanten ungedämpften Fall eine eingehende Diskussion der Spektralschar P_λ von A. Aufgrund des Zusammenhangs zwischen P_λ und den Grenzwerten der Resolvente $(A - z)^{-1}$ für $\mathrm{Im}\, z \to 0$ läßt sich P_λ durch die Lösungen des zeitunabhängigen Problems im dämpfungsfreien Grenzfall ausdrücken. Diese Lösungen liegen nicht im L_2 und sind durch geeignete Ausstrahlungsbedingungen zu kennzeichnen. Die Gültigkeit des Prinzips der Grenzabsorption ist im allgemeinen ein Indikator für ein „normales" asymptotisches Verhalten der zeitabhängigen Lösung für $t \to \pm\infty$.

Methoden der Spektraltheorie wurden zunächst mit großem Erfolg auf die Quantenmechanik angewendet. Bezüglich einer detaillierten Darstellung sei auf das vierbändige Werk von M. Reed und B. Simon („Methods of Modern Mathematical Physics", 1972–1978) verwiesen. Bei den Anwendungen auf Wellenausbreitungsvorgänge der klassischen Kontinuumsphysik ist vor allem der Einfluß eingebetteter reflektierender Hindernisse von Interesse, so daß sich in natürlicher Weise Randwertaufgaben für Außenräume ergeben. Die weitere Entwicklung des Gebiets wurde insbesondere durch die Monographien von P. D. Lax und R. S. Phillips („Scattering Theory",

1967) und von C. H. Wilcox („Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains", 1975) beeinflußt. Im Mittelpunkt dieser beiden Werke steht die skalare Wellengleichung, die die Ausbreitung akustischer Wellen beschreibt.

In dem vorliegenden Werk werden die oben erwähnten Methoden auf die wichtigsten Wellenausbreitungsvorgänge der klassischen Mathematischen Physik angewendet. Insbesondere werden akustische, elektromagnetische, elastische und thermoelastische Wellen unter einheitlichen Gesichtspunkten behandelt. Als Beispiel für einen Wellenausbreitungsprozeß, der durch einen Differentialoperator von höherer als zweiter Ordnung beschrieben wird, ist die Plattengleichung in die Darstellung einbezogen. In allen Fällen wird zunächst die Wellenausbreitung im hindernisfreien, homogenen, isotropen Raum („ungestörter Fall") untersucht. Hierbei ergeben sich in natürlicher Weise die zur Kennzeichnung des Lösungsverhaltens im Unendlichen erforderlichen Ausstrahlungsbedingungen. Die Untersuchung des allgemeinen Falls, der Störungen durch Anisotropien und Inhomogenitäten des Mediums sowie durch (nicht notwendig glatt berandete) Hindernisse in einem beschränkten Teil des Raums einschließt, wird bis zum Nachweis der Existenz von Wellenoperatoren geführt, die den Vergleich des asymptotischen Verhaltens der Lösungen im gestörten und im ungestörten Fall ermöglichen. Die Existenz und die Unitarität der Wellenoperatoren wird mit Hilfe der Methode der Spurklassenoperatoren von Kato und Birman bewiesen. Besonders interessant ist die kombinierte Darstellung der Akustik und der Elektromagnetik in Kapitel 9, die auf Ideen von R. Picard beruht und die wechselseitige Strukturierung der Nullräume herausarbeitet. Am Beispiel der Schrödingerschen Gleichung mit Coulombschem Potential, die mit Hilfe der Dollardschen Modifikation des Wellenoperators behandelt wird, weist der Autor auf die zusätzlichen Schwierigkeiten hin, die sich ergeben, falls sich die Störungen bis ins Unendliche erstrecken. Die im abschließenden Kapitel untersuchten thermoelastischen Wellen führen auf nicht-selbstadjungierte Operatoren, wobei sich die Theorie der stark-stetigen Halbgruppen als adäquates Hilfsmittel für die Untersuchung der Rand- und Anfangswertprobleme erweist.

Das vorliegende Werk gibt eine anspruchsvolle Einführung in ein aktuelles, vielseitiges und anwendungsreiches Teilgebiet der Mathematischen Physik und kann dem in Forschung und Industrie arbeitenden Mathematiker, Physiker und Ingenieur, aber auch dem fortgeschrittenen Studenten mit guten Kenntnissen in Funktionalanalysis und Partiellen Differentialgleichungen uneingeschränkt empfohlen werden.

Stuttgart P. Werner

Hale, J. K., Magalhães, L. T., Olivia, W. M., An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems – Geometric Theory, with an Appendix by K. P. Rybakowski (Applied Mathematical Sciences, Vol. 47), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, 17 fig., vii, 195 pp., softcover, DM 54,–

Das vorliegende Buch ist der Untersuchung spezieller Klassen von Halbflüssen mit unendlichdimensionalen Zustandsräumen gewidmet. Es ist wohlbekannt, daß Halbflüsse auf unendlich-dimensionalen Räumen u. a. von partiellen Differentialoperatoren und von Funktional-Differentialgleichungen erzeugt werden. Dies zeigt einerseits die große Bedeutung solcher Halbflüsse für die Beschreibung des qualitativen Verhaltens dieser Systeme, andererseits ihre große Komplexität.

Den Autoren geht es darum, eine Theorie aufzubauen, welche möglichst viel Ähnlichkeit mit der qualitativen (generischen) Theorie endlichdimensionaler Systeme besitzt. Um dies zu erreichen, sind sie bereit, drastische Einschränkungen an die zugrunde liegenden Strukturen in Kauf zu nehmen. Dies bedeutet, daß sie praktisch nur gewisse Klassen retardierter Funktionaldifferentialgleichungen auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten behandeln können.

Diese Einschränkung scheint – vom Standpunkt der Anwendungen aus – ziemlich unnatürlich zu sein, was sich auch im Fehlen interessanter konkreter Beispiele bemerkbar macht.

Aufgrund der erwähnten Einschränkungen dürfte das Buch nur für wenige Spezialisten von Interesse sein.

Es sei noch erwähnt, daß Rybakowski einen 45seitigen Anhang beigefügt hat, in dem er die grundlegenden Ideen und Sätze seiner unendlichdimensionalen Verallgemeinerung des Conley-Eastonschen Homotopieindex' erläutert und deren Anwendbarkeit (auf Funktionaldifferentialgleichungen) aufzeigt. Diese Theorie benötigt weit weniger Restriktionen und ist deshalb auf viel größere Klassen von Problemen anwendbar (z. B. auf semilineare parabolische Gleichungen). Sie liefert dafür aber auch weit schwächere Aussagen.

Zürich H. Amann

Hackbusch, W., Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen (Teubner Studienbücher), Stuttgart: Teubner 1986, 280 S., 40 Bilder, Kart., DM 38,–

Die Entwicklung effizienter Diskretisierungsmethoden für partielle Differentialgleichungen und ihre fundierte mathematische Analyse setzt in der Regel gute Grundkenntnisse aus der Theorie der kontinuierlichen Probleme voraus. Im vorliegenden Buch über die Behandlung elliptischer Randwertaufgaben wird dies durch eine weitgehend einheitliche Darstellung von Theorie und Numerik berücksichtigt. Dadurch ist eine mathematisch geschlossene, kompakte Einführung in diesen wichtigen Themenkomplex entstanden, welche sich deutlich von vielen reinen „Rezeptsammlungen" zur Aufstellung und Lösung der diskreten Gleichungen abhebt.

Von Umfang und Stoffauswahl her geht das Buch über den möglichen Inhalt einer vierstündigen Einführungsvorlesung erheblich hinaus, ist aber bei Konzentration auf die wesentlichen Abschnitte als konzeptionelle Grundlage wie als Begleittext einer solchen Veranstaltung gut geeignet. Die in jedes Kapitel eingeflochtenen Übungsaufgaben sind gut gewählt; ein kurzer Anhang mit stichwortartigen Musterlösungen wäre für das Selbststudium nützlich. Auch wenn die meisten der benötigten Sätze aus der Existenz- und Regularitätstheorie elliptischer Randwertaufgaben ausführlich dargestellt sind, ist das Buch angesichts der erforderlichen analytischen Vorkenntnisse und der mathematischen Ansprüche in vielen Beweisen zugeschnitten auf Mathematikstudenten im Hauptstudium. Für die vom Verlag zusätzlich genannten Zielgruppen der Physiker und Ingenieure wäre wohl eine mehr praxisorientierte Darstellung vorzuziehen.

Der Kürze des Textes angemessen beschränkt sich der Autor auf lineare Probleme. Auch werden nur die gebräuchlichsten Diskretisierungsmethoden angesprochen: finite Differenzenverfahren und die Methode der finiten Elemente.

Beim Aufbau des Buches fällt eine weitgehende Verzahnung der Darstellung von theoretischen Grundlagen und Lösungseigenschaften der kontinuierlichen Probleme und ihrer diskreten Analoga auf. So werden beispielsweise Regularitätsresultate nicht unmittelbar nach der Existenztheorie behandelt, sondern gemeinsam mit der „diskreten Regularität" von Differenzenschemata diskutiert. Dadurch wird eine innermathematische Motivation für die Wahl der verschiedenen Diskretisierungsansätze gewonnen, und die Vorgehensweise bei ihrer Analyse erscheint weitgehend durch die Theorie vorgegeben.

Der Inhalt läßt sich wie folgt gliedern:

1. Klassischer Zugang zur Potential- bzw. Poissongleichung: Maximumprinzip, explizite Darstellung der kontinuierlichen Lösung; Differenzendiskretisierungen mit M-Matrix-Eigenschaften, diskretes Maximumprinzip, Techniken der Randapproximation
2. Behandlung allgemeiner Randwertaufgaben: Maximumprinzip und Differenzenverfahren für skalare Probleme 2. Ordnung, Behandlung der biharmonischen Gleichung

3. Variationeller Zugang und die Methode der finiten Elemente: Funktionalanalytische Grundlagen, Sobolevräume, schwache Formulierung von Randwertaufgaben, wesentliche und natürliche Randbedingungen; Ritzsches Verfahren, konforme finite Elemente für Probleme 2. und 4. Ordnung, L^2-Fehlerabschätzungen, Ausblick auf weitere Zugänge
4. Regularitätsfragen: Differenzenquotiententechnik zum Nachweis innerer Regularität, Randregularität bei glattem Rand und auf Polygongebieten; Regularität von Differenzenschemata bzgl. diskreter Sobolevnormen, Konvergenz unter minimalen Regularitätsvoraussetzungen
5. Spezielle Gleichungen: Operatoren mit unstetigen Koeffizienten, Konvektions-Diffusions-Probleme
6. Eigenwertprobleme: Theoretische Behandlung von Eigenwertaufgaben, qualitative und quantitative Konvergenzaussagen
7. Lineare elliptische Systeme am Beispiel der Stokes-Gleichungen: Funktionalanalytische Behandlung von Sattelpunktproblemen, Finite-Elemente-Diskretisierung, Nachweis der Brezzi-Babuška-Bedingung

Trotz der Fülle des Stoffes ist eine übersichtliche Darstellung gelungen. Die Beweise der wesentlichen Sätze sind vollständig ausgeführt oder zumindest soweit skizziert, daß eine Vervollständigung mit etwas Aufwand möglich ist. Anzumerken ist eine starke Gewichtung sonst häufig vernachlässigter Themen wie die Behandlung von Eigenwertaufgaben oder die Frage nach optimaler Konvergenz von Differenzenverfahren unter realistischen Regularitätsvoraussetzungen. Zugunsten einer vertieften mathematischen Analyse hat der Autor hingegen auf die sonst in Einführungen übliche Präsentation von Testrechnungen, eine Diskussion des numerischen Aufwands und einen Vergleich der betrachteten Zugänge verzichtet. Gleichfalls ausgeklammert bleiben Techniken zur effizienten Lösung der entstehenden Gleichungssysteme.

Der Text weist eine Vielzahl von ergänzenden Bemerkungen und Ausblicken auf mögliche Verallgemeinerungen auf. An einigen Stellen sind diese jedoch so knapp ausgefallen, daß sie dem nicht geübten Leser nur als erweiterter Hinweis auf die zusätzlich angegebene Literatur dienen können. Hier haben sich auch einige kleine Ungenauigkeiten eingeschlichen, die aber in einer überarbeiteten Fassung leicht korrigiert werden können. Das Literaturverzeichnis bietet eine gute Auswahl aus der Fülle der vorhandenen Arbeiten und Lehrbücher. Wünschenswert wäre höchstens die Ergänzung um einige neuere Arbeiten zur Diskretisierung der Stokes-Gleichungen.

Insgesamt steht mit diesem Buch ein wertvoller Beitrag zur Einführung in die Numerik partieller Differentialgleichungen zur Verfügung, der in keiner Lehrbuchsammlung fehlen sollte.

Saarbrücken H. Blum

Nikol'skiĭ, N. K., Treatise on the Shift Operator (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Band 273), translated from the Russian by J. Peetre, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1985, 7 figs., 505 pp., Hard cover, DM 184,–

Bei der vorliegenden Übertragung des russischen Originals (1980) handelt es sich um die Niederschrift (auch Ausarbeitung) von insgesamt 11 Vorlesungen, die etwas mehr als die Hälfte des ca. 500 Seiten starken Werkes ausmachen; der verbleibende Teil ist einer Reihe von 5 Anhängen gewidmet, die teils als Voraussetzungen, teils als Ergänzungen des Hauptteils dienen.

In den Vorlesungen handelt es sich um ein eingehendes Studium der innigen Beziehung zwischen den (vornehmlich spektraltheoretischen) Eigenschaften des (zweiseitigen) Shiftoperators $\mathcal{S}$ auf dem Raum $L^2(T)$ (T die Kreisgruppe) sowie seiner Einschränkung S auf den Raum $H^2(D)$ (den Hardyraum auf der Kreisscheibe D), und der Funktionentheorie einer komplexen Variablen auf D. (Diese Beziehung ist sofort daran erkennbar, daß für $f \in H^2(D)$ und $z \in D$ stets $Sf(z) = zf(z)$ gilt.) Die Fülle des dargebotenen Materials ist so groß, daß der Referent nur versuchen kann, durch Auswahl einiger Kostproben dem Leser dieser Besprechung die Entscheidung zu erleichtern, ob er sich diesem Buch im Detail zuwenden will. So wird in der 1. Vorlesung (Invariante Teilräume von S) zunächst das Beurling-Helson-Theorem über die Gestalt der invarianten Teilräume von S diskutiert, aus dem sich zahlreiche wichtige Folgerungen ergeben: Existenz und Eindeutigkeit äußerer und innerer Funktionen, Bestimmung von $f \in H^2(D)$ durch seine Randwerte ($m[f(z) = 0] > 0 \Rightarrow f = 0$, wobei $z \in T$ und m das Haarmaß auf T) sowie der Satz der Gebrüder Riesz über analytische Maße auf T, d. h. Maße der Form $\mu = h \cdot m$, $h \in H^1(D)$. Der Verfasser erhält viele klassische Resultate der Funktionentheorie und der harmonischen Analyse auf sehr einfache Weise über Eigenschaften des Shiftoperators; dazu gehören auch die Sätze von Helson-Lowdenslager und Szegö-Kolmogoroff. Andere Beispiele für Gegenstand und Reichweite des Werkes liefern die dritte und vierte Vorlesung, die sich mit den „Kompressionen" $PS|K$ (P die orthogonale Projektion auf den bezgl. S^* invarianten Teilraum K) beschäftigen. Hier werden die Spektren dieser Kompressionen sowie ein Funktionalkalkül (über H^∞) und spektrale Abbildungssätze untersucht. Dies führt zu der im wesentlichen auf B. Sz.-Nagy und C. Foias zurückgehenden Theorie der Operatoren der Klasse C_0 (vollständig nichtunitäre Kontraktionen T, welche eine annullierende Funktion $0 \neq \varphi \in H^\infty$ besitzen), die u. a. eine weitgehende Verallgemeinerung der klassischen Elementarteilertheorie zulassen. Die weiteren 7 Vorlesungen greifen Themen wie Dreiecksgestalt von Shiftkompressionen, Rieszsche Basen und Interpolation, verallgemeinerte Spektraleigenschaft, die Carleson-Vasyunin-Bedingung und anderes auf.

Insgesamt wird hier, wie der Titel es verspricht, eine umfassende Abhandlung über die Theorie des Shiftoperators vorgetragen; am stärksten beeindruckend ist dabei die angestrebte (und gelungene) Synthese von Methoden und Ergebnissen der Funktionentheorie, der harmonischen Analyse und der Funktionalanalysis. Das Buch besticht durch die, bei aller Vielfalt des Details, großartige Synopsis dieser Gebiete; dem mit dem Gegenstand einigermaßen Vertrauten wird es daher auch ein willkommenes Nachschlagewerk sein. Zum anderen ist es aber oft, vor allem durch die Fülle der verwendeten Symbole, nicht leicht zu lesen; die Andersartigkeit von Vorlesung und Lehrbuch wird doch gelegentlich deutlich. Als Einführung in dieses faszinierende Gebiet jedenfalls dürfte das Werk nur demjenigen hilfreich sein, der es mit großer Motivation studiert.

Tübingen H. H. Schaefer

Michel Hervé
Analyticity in Infinite Dimensional Spaces

1989. VIII, 206 pages. 17 x 24 cm. Cloth DM 118,- ISBN 3 11 010995 6

(de Gruyter Studies in Mathematics, Volume 10)

In recent years, infinite dimensional holomorphy has been the object of intensive research, both in its own right and because of the often unexpected, nontrivial applications to other areas such as, for instance, potential theory and quantum field theory. Much of the impetus for the study of holomorphic functions in infinite dimensions has been provided by the investigation of topological properties of spaces of such mappings. The aim of this book is to present the analytic aspects of the theory in its setting of complex analysis in locally convex spaces. The exposition is entirely self-contained and links together the beautiful results obtained in the last twenty years mainly by Cœuré, Dineen, Lelong, Vigué, but also by Kiselman, Nguyen, Noverraz, Siciak, Vesentini, and others.

Contents: