

91. Band Heft 2  
ausgegeben am 21. 4. 1989

**DMV**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer  
unter Mitwirkung von  
P. L. Butzer, U. Felgner,  
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil



**B. G. Teubner Stuttgart 1989**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 90/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069  
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1989 — Verlagsnummer 2904/2

Printed in Germany — ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim

Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Inhalt Band 91, Heft 2

### 1. Abteilung

<b>W. Singhof:</b> Einige Beziehungen zwischen stabiler Homotopietheorie und Zahlentheorie . . .	55
<b>K.-H. Hoffmann:</b> Steuerung freier Ränder . . . . .	67
<b>D. G. Kendall:</b> A Survey of the Statistical Theory of Shape . . . . .	93

### 2. Abteilung

Finn, R., Equilibrium Capillary Surfaces ( <i>M. Grüter</i> ) . . . . .	11
Bliedtner, J., Hansen, W., Potential Theory ( <i>U. Schirmeier</i> ) . . . . .	12
Dacunha-Castelle, D., Duflo, M., Probability and Statistics I/II ( <i>H. Rost</i> ) . . . . .	14
Stroock, D. W., An Introduction to the Theory of Large Deviations ( <i>G. Leha</i> ) . . . . .	15
Kolchin, V. F., Random Mappings ( <i>K. Jacobs</i> ) . . . . .	16
Krengel, U., Ergodic Theorems ( <i>H. v. Weizsäcker</i> ) . . . . .	17
Kiefer, J. C., Introduction to Statistical Inference ( <i>M. Milbrodt</i> ) . . . . .	18
Øksendal, B., Stochastic Differential Equations ( <i>G. Leha</i> ) . . . . .	19

### **In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:**

- M. Atiyah:** The Frontier Between Geometry and Physics  
**M. Denker:** Eberhard Hopf 04–17–1902 to 07–24–1983  
**K. Hulek:** Elliptische Kurven, abelsche Flächen und das Ikosaeder  
**J. A. Jenkins:** Helmut Grunsky  
**P. Roquette:** Über die algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten von Max Deuring  
**B. Schoeneberg:** Erich Hecke 1887–1947  
**A. Schoenhage:** Numerik analytischer Funktionen und Komplexität  
**J. R. Whiteman, A. E. Beagles, M. K. Warby:** Theoretical and Practical Aspects  
of Finite Elements in the Context of Some Problems of Solid Mechanics  
**J. M. Wills:** Kugellagerungen und Konvexgeometrie

---

### **Anschriften der Herausgeber**

- Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, 8520 Erlangen  
Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen  
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen  
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Memminger Str. 6, 8900 Augsburg  
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, 8520 Erlangen

### **Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

## Einige Beziehungen zwischen stabiler Homotopietheorie und Zahlentheorie\*)

W. Singhof, Düsseldorf

### Einleitung

Zwischen der Homotopietheorie und anderen mathematischen Disziplinen gibt es zahlreiche Beziehungen. Häufig beruhen sie darauf, daß sich Klassifikationsprobleme der verschiedensten Art auf die Bestimmung der Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen zwischen zwei Räumen reduzieren. Solche Klassifikationssätze sind vielfach, ganz schematisch gesprochen, von folgender Form:

Es gibt eine natürliche Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von Zusatzstrukturen eines Typs  $A$  auf einem Raum  $X$  einerseits und den Homotopieklassen stetiger Abbildungen von  $X$  nach  $B$  andererseits, wobei  $B$  ein topologischer Raum ist, der nur von  $A$  und nicht von  $X$  abhängt;  $B$  ist ein sogenannter klassifizierender Raum für Strukturen vom Typ  $A$ .

Dabei kann und soll hier nicht präzisiert werden, was eine Struktur eines bestimmten Typs ist. Es genügt, sich die folgenden Beispiele für „Strukturen“ auf dem Raum  $X$  vorzustellen:

- a) Topologische oder differenzierbare Vektorraumbündel mit der Basis  $X$ .
- b) Kohomologieklassen des Raumes  $X$ .
- c) Differenzierbare Strukturen auf der topologischen Mannigfaltigkeit  $X$ . (In diesem Fall nimmt das Resultat in Wirklichkeit eine etwas kompliziertere Form an, doch braucht uns dies für die Zwecke dieses Überblicks nicht zu stören.)

Am Beispiel a) kann man etwa eine Beziehung zwischen der Homotopietheorie und der komplexen Analysis erkennen: Will man alle holomorphen Vektorraumbündel über der komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  beschreiben, so zerlegt sich diese Aufgabe in zwei Schritte: Der erste Schritt besteht darin, die verschiedenen topologischen Typen von Vektorraumbündeln über  $X$  zu klassifizieren; dies ist ein rein homotopietheoretisches Problem, und es gibt nur abzählbar viele Lösungen.

---

\*) Niederschrift eines Vortrags, der bei der DMV-Tagung 1986 in Marburg gehalten wurde.

Im zweiten Schritt muß für ein festes topologisches Bündel untersucht werden, ob es analytische Strukturen zuläßt; dabei können durchaus kontinuierliche Familien verschiedener Strukturen auftreten.

Dieses Prinzip, nach dem topologische Klassifikationsprobleme äquivalent zur Berechnung von Homotopiemengen sind, ist, wie am Rande bemerkt sei, freilich nicht uneingeschränkt gültig: Seit einigen Jahren weiß man, daß es auf dem  $\mathbf{R}^4$  verschiedene, und zwar sogar überabzählbar viele, differenzierbare Strukturen gibt, die nicht zueinander diffeomorph sind (und darin unterscheidet sich der  $\mathbf{R}^4$  vom  $\mathbf{R}^n$  für alle anderen Werte von  $n$ ). Da der  $\mathbf{R}^4$  zusammenziehbar ist, sich also vom Standpunkt der Homotopietheorie aus nicht von einem Punkt unterscheidet, sieht man, daß die Beschreibung der differenzierbaren Strukturen auf dem  $\mathbf{R}^4$  nicht auf homotopietheoretischem Wege erfolgen kann.

Jedenfalls sollte es klar sein, daß die Berechnung von Mengen von Homotopieklassen kein esoterisches Spiel, sondern auch für andere Zweige der Mathematik relevant ist. Viele weitere Belege dafür könnten beigebracht werden; hier sei nur noch die Algebraische K-Theorie genannt.

In dem folgenden Bericht wird von Beziehungen der Homotopietheorie zur Zahlentheorie die Rede sein, bei denen die erstere nicht nur – wie in den obigen Beispielen – eine dienende Rolle spielt. Es scheint nämlich so zu sein, daß für ein Eindringen in die Geheimnisse der stabilen Homotopiegruppen der Sphären die Zahlentheorie unerläßlich ist. Wer genaueres hierüber wissen will, als in einem solchen Übersichtsartikel gesagt werden kann, sei auf das kürzlich erschienene Buch [R] von Ravenel verwiesen.

## § 1 Einige Grundlagen der Homotopietheorie

Der Stoff dieses Abschnitts findet sich in den Standard-Lehrbüchern wie [Sp] oder [W]. Zunächst erinnern wir an die Definition der Homotopiegruppen der Sphären (Homotopiegruppen anderer Räume treten im folgenden nur an untergeordneter Stelle auf; ihre Einführung erfordert etwas mehr Sorgfalt.)

Mit  $S^k$  bezeichnen wir die  $k$ -dimensionale Einheitssphäre, also  $S^k = \{x \in \mathbf{R}^{k+1} \mid \|x\| = 1\}$ , wobei  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm ist. Sind  $f, g: S^k \rightarrow S^n$  zwei stetige Abbildungen, so heißen  $f$  und  $g$  homotop, wenn sie durch eine stetige Familie von Abbildungen miteinander verbunden werden können, wenn es also eine stetige Abbildung  $F: S^k \times [0, 1] \rightarrow S^n$  gibt mit  $F(x, 0) = f(x)$  und  $F(x, 1) = g(x)$  für alle  $x \in S^k$ .

Es sei  $\pi_k(S^n)$  die Menge aller Homotopieklassen  $[f]$  stetiger Abbildungen  $f: S^k \rightarrow S^n$ . Um auf  $\pi_k(S^n)$  die Struktur einer abelschen Gruppe zu definieren, führt man zunächst folgende Bezeichnung ein: Ist  $t \in [-1, 1]$  und  $y \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ , so sei  $m_t(y)$  dasjenige skalare Vielfache von  $y$ , für welches gilt:

$$t^2 + \|m_t(y)\|^2 = 1.$$

Dies ist für  $t = \pm 1$  auch für  $y = 0$  sinnvoll.

Sind nun  $\alpha, \beta \in \pi_k(S^n)$ , so findet man Repräsentanten  $f, g: S^k \rightarrow S^n$  von  $\alpha$  bzw.  $\beta$  mit  $f(1, 0, \dots, 0) = g(-1, 0, \dots, 0)$ . Man kann dann  $h: S^k \rightarrow S^n$  durch

$$h(t, x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} f(2t + 1, m_{2t+1}(x_1, \dots, x_k)) & \text{für } t \leq 0 \\ g(2t - 1, m_{2t-1}(x_1, \dots, x_k)) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

definieren und setzt  $\alpha + \beta := [h]$ .

Für manche Werte von  $k$  und  $n$  läßt sich  $\pi_k(S^n)$  relativ elementar berechnen

a) Ist  $k < n$ , so ist  $\pi_k(S^n) = 0$ .

b)  $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ ; ein Isomorphismus wird durch den Abbildungsgrad, für  $n = 1$  also durch die Windungszahl geliefert.

c) Für  $k > 1$  ist  $\pi_k(S^1) = 0$ ; dies folgt aus der Überlagerungstheorie.

Schon 1931 zeigte H. Hopf [Ho], daß  $\pi_3(S^2) \neq 0$ . Er betrachtete die sogenannte Hopf-Abbildung  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ , die gegeben ist durch

$$\eta(x_0, \dots, x_3) := (2(x_0 x_2 + x_1 x_3), 2(x_1 x_2 - x_0 x_3), x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

Um einzusehen, daß  $\eta$  nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist, betrachtet man die Urbilder einzelner Punkte; dabei stellt man sich  $S^3$  als den uns umgebenden Raum  $\mathbf{R}^3$  zusammen mit einem unendlich fernen Punkt vor. Es ist

$$\eta^{-1}(0, 0, 1) = \{(x_0, \dots, x_3) \in S^3 \mid x_2 = x_3 = 0\}$$

und

$$\eta^{-1}(0, 0, -1) = \{(x_0, \dots, x_3) \in S^3 \mid x_0 = x_1 = 0\}.$$

Diese Urbilder sind also Kreislinien, und eine leichte Überlegung zeigt, daß sie wie in Fig. 1 miteinander verschlungen sind.

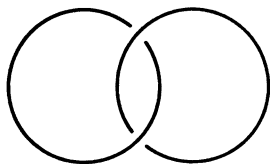


Fig. 1

Es ist anschaulich klar, daß ein solches Verschlingungsverhalten bei einer nullhomotopen Abbildung nicht auftreten kann.

Nicht ganz so elementar ist die von Serre [Se 1] bewiesene Tatsache, daß die Gruppen  $\pi_k(S^n)$  endlich erzeugt sind. Damit wird die Aufgabe, die Struktur von  $\pi_k(S^n)$  in Abhängigkeit von  $k$  und  $n$  zu berechnen, zu einem sinnvollen Problem, von dessen Lösung man aber noch weit entfernt ist.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß  $\pi_k(X)$  für große Klassen von Räumen endlich erzeugt ist. Daraus folgt das in der Einleitung erwähnte Faktum, daß homotopietheoretische Klassifikationsprobleme in der Regel nur abzählbar viele Lösungen besitzen.

Eine wichtige Gesetzmäßigkeit im Chaos der Gruppen  $\pi_k(S^n)$  wurde durch eine Konstruktion und einen Satz von Freudenthal [F] aus dem Jahre 1937 enthüllt: Ist eine Abbildung  $f : S^k \rightarrow S^n$  gegeben, so definiert man  $Ef : S^{k+1} \rightarrow S^{n+1}$

folgendermaßen: Die Punkte von  $S^{k+1}$  sind von der Form  $(\sqrt{1-s^2} \cdot x, s)$  mit  $s \in [-1, 1]$  und  $x \in S^k$ . Man setzt

$$E(\sqrt{1-s^2} \cdot x, s) := (\sqrt{1-s^2} \cdot f(x), s)$$

und erhält auf diese Weise einen Homomorphismus  $E : \pi_k(S^n) \rightarrow \pi_{k+1}(S^{n+1})$ , die sog. Einhängung, die für  $n < 2k - 1$  ein Isomorphismus ist.

Dies bedeutet, daß die Gruppe  $\pi_{n+r}(S^n)$  für großes  $n$  nicht von der Wahl von  $n$  abhängt. Man bezeichnet sie mit  $\pi_r^S$  und nennt sie den stabilen  $r$ -Stamm. Dieser „Einhängungssatz“ von Freudenthal ist der Ausgangspunkt der stabilen Homotopietheorie. Nach Serre sind die Gruppen  $\pi_r^S$  für  $r > 0$  nicht nur endlich erzeugt, sondern tatsächlich endlich. Im Laufe der letzten vierzig Jahre hat man außerordentlich viel Information über die stabilen Stämme zusammengetragen, ohne sie bis heute vollständig zu kennen.

Die niedrigsten von ihnen können wir explizit beschreiben: Wir wissen bereits, daß  $\pi_0^S = \mathbf{Z}$ . Ferner ist  $\pi_1^S = \mathbf{Z}/2$ , wobei  $E^{n-2}[\eta]$  für  $n \geq 3$  das von 0 verschiedene Element von  $\pi_{n+1}(S^n)$  ist;  $\eta$  ist die Hopf-Abbildung. Schließlich ist auch  $\pi_2^S = \mathbf{Z}/2$ , wobei  $E^{n-2}[\eta \circ E(\eta)]$  für  $n \geq 4$  das von 0 verschiedene Element von  $\pi_{n+2}(S^n)$  ist. Ähnliche Beschreibungen der 19 ersten stabilen Stämme finden sich in dem Buch von Toda [To].

## § 2 Stabile Homotopieklassen und stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten

Die Berechnung von  $\pi_2^S$ , deren Ergebnis gerade angegeben wurde, wurde im Jahre 1950 von G. W. Whitehead und von Pontrjagin mit gänzlich verschiedenen Methoden durchgeführt, nachdem Pontrjagin schon früher eine falsche Lösung angekündigt hatte. Er führt die Bestimmung der stabilen Stämme auf ein differentialtopologisches Problem zurück. Man kann heute rückblickend sagen, daß seine Methode sich als Berechnungsverfahren für die Homotopietheorie nicht bewährt hat. Wirkliche Bedeutung gewann sie in den Händen von Thom [Th], der die Zielrichtung genau umkehrte, also differentialtopologische Probleme auf homotopietheoretische reduzierte, wie es der in der Einleitung geschilderten Stellung der Homotopietheorie im Aufbau der Mathematik zu entsprechen scheint.

Im folgenden seien einige Grundgedanken von Pontrjagins Arbeit [P] geschildert:

Es sei  $X$  eine  $r$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für unsere Zwecke genügt es, sich  $X$  als Untermannigfaltigkeit von  $\mathbf{R}^N$  vorzustellen. Für

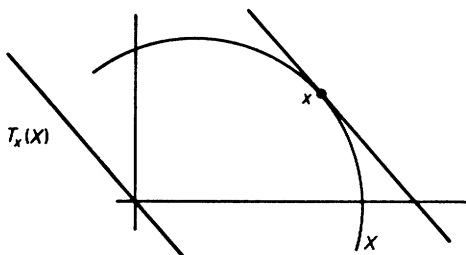


Fig. 2



$x \in X$  sei  $T_x(X)$  der Tangentialraum an  $X$  im Punkt  $x$ ; dies ist ein  $r$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathbf{R}^N$  (Fig. 2).

Ein *Vektorfeld* auf  $X$  ist eine glatte Abbildung  $v : X \rightarrow \mathbf{R}^N$  mit der Eigenschaft, daß  $v(x) \in T_x(X)$  für alle  $x \in X$ . Wir nennen  $X$  *parallelisierbar*, wenn es Vektorfelder  $v_1, \dots, v_r$  auf  $X$  gibt, so daß für jedes  $x$  die Vektoren  $v_1(x), \dots, v_r(x)$  eine Basis von  $T_x(X)$  bilden.

Abgesehen von ihrer Bedeutung innerhalb der Topologie eignen sich parallelisierbare Mannigfaltigkeiten besonders gut dazu, Analysis auf ihnen zu treiben: So lassen sich Differentialformen und viele andere Größen global als Tupel von Funktionen beschreiben und nicht nur lokal, wie es üblicherweise der Fall ist.

Wichtige Beispiele von parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten stellen die Lieschen Gruppen dar. Man kann nämlich einfach eine Basis des Tangentialraumes in einem Punkt wählen und diese mittels der Gruppenstruktur in die anderen Punkte translateren. Offensichtlich gilt sogar etwas mehr: Ist  $G$  eine Liesche Gruppe und  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe von  $G$ , so ist  $G/\Gamma$  parallelisierbar.

Man nennt  $X$  *stabil parallelisierbar*, wenn  $X \times \mathbf{R}$  parallelisierbar ist.

Es gelten die folgenden Beziehungen:

- a) Ist  $X$  parallelisierbar, so ist  $X$  auch stabil parallelisierbar.  
 b) Genau dann ist  $X$  stabil parallelisierbar, wenn es für eine geeignete Einbettung von  $X$  in  $\mathbf{R}^M$  glatte Abbildungen  $w_1, \dots, w_{M-r} : X \rightarrow \mathbf{R}^M$  gibt, so daß für jedes  $x \in X$  die Vektoren  $w_1(x), \dots, w_{M-r}(x)$  eine Basis des Orthogonalkomplements  $T_x(X)^\perp$  von  $T_x(X)$  im  $\mathbf{R}^M$ , also des Normalenraums, bilden.

Aus der Beschreibung b) erkennt man sofort, daß alle Sphären stabil parallelisierbar sind – man betrachte die übliche Einbettung von  $S^n$  in  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Hingegen sind nur  $S^1$ ,  $S^3$  und  $S^7$  parallelisierbar ([BM], [K] oder [A2]).

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Korrespondenz von Pontrjagin formulieren:

Sei  $\alpha \in \pi_r^S$  und  $f : S^{n+r} \rightarrow S^n$  ein glatter Repräsentant von  $\alpha$ . Wir wählen einen regulären Wert  $x \in S^n$  von  $f$ , der nicht gerade das Bild des Nordpols von  $S^{n+r}$  ist. Dann ist  $f^{-1}(x)$  offensichtlich eine  $r$ -dimensionale kompakte stabil parallelisierte Untermannigfaltigkeit von  $S^{n+r} \setminus \{\text{Nordpol}\} = \mathbf{R}^{n+r}$ . Natürlich wurden bei der Konstruktion dieser Mannigfaltigkeit etliche Wahlen vorgenommen. Um wirklich der Klasse  $\alpha$  ein wohlbestimmtes Objekt zuzuordnen, ist man also gezwungen, auf der Menge der auftretenden Mannigfaltigkeiten eine Äquivalenzrelation einzuführen, welche „Kobordismus“ heißt.

Es gilt dann, daß man einen Isomorphismus von  $\pi_r^S$  auf die Gruppe der Kobordismusklassen stabil parallelisierter kompakter  $r$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten erhält, wobei die Addition in dieser Gruppe einfach als die disjunkte Vereinigung erklärt ist.

Die Umkehrabbildung, die also jeder solchen Mannigfaltigkeit  $X$  eine stabile Homotopieklasse  $[X]$  zuordnet, läßt sich ebenfalls leicht beschreiben, doch soll hier darauf verzichtet werden.

### § 3 Bernoulli-Zahlen, der Dirac-Operator und die Zeta-Funktion

Daß ein wirklicher Zusammenhang zwischen der stabilen Homotopietheorie und der Zahlentheorie besteht, wurde zuerst durch den berühmten Periodizitätssatz von Bott [B] aufgedeckt. Dabei betrachtet man für eine feste Zahl  $n$  die orthogonale Gruppe  $O(n)$  und ihre Homotopiegruppen  $\pi_1(O(n))$ ,  $\pi_2(O(n))$ , ...,  $\pi_{n-2}(O(n))$ . Bott konnte sie berechnen und hat insbesondere gezeigt, daß diese Folge von Gruppen periodisch mit der Periode 8 ist.

Weil  $O(n)$  auf  $S^{n-1}$  operiert, ist es nicht verwunderlich, daß dieses Resultat Konsequenzen für die stabilen Homotopiegruppen der Sphären hat, und eine dieser Konsequenzen lautet, wie Milnor und Kervaire [MK] zeigten: Die Ordnungen der Gruppen  $\pi_{4k-1}^S$  haben etwas mit den Bernoulli-Zahlen zu tun.

Die Bernoulli-Zahlen  $B_k$  sind definiert durch die Taylorentwicklung

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{B_1}{2!} z^2 - \frac{B_2}{4!} z^4 + \frac{B_3}{6!} z^6 - + \dots;$$

sie sind rationale Zahlen; ihre Folge beginnt mit  $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$ . Mit  $N_k$  bezeichnen wir den Nenner von  $\frac{B_k}{4k}$ , wenn dieser Bruch so weit wie möglich gekürzt ist.

Adams brachte diese Überlegungen 1966 zu einem Abschluß, indem er (bis auf einen kleinen Rest, der später von Mahowald, Quillen, Sullivan und anderen erledigt wurde) zeigte [A3]:

Es gibt einen Homomorphismus  $e : \pi_{4k-1}^S \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ , dessen Bild eine zyklische Gruppe der Ordnung  $N_k$  und dessen Kern ein direkter Summand ist.

Zur Konstruktion von  $e$  benutzt Adams die K-Theorie; seine Definition kann also hier nicht gut angegeben werden. Später zeigten Atiyah, Patodi und Singer [APS], daß sich die  $e$ -Invariante durch das Spektrum des Dirac-Operators ausdrücken läßt, wenn man wie in § 2 stabile Homotopieklassen als Mannigfaltigkeiten interpretiert. Diese Darstellung soll nun wenigstens in einem Spezialfall kurz geschildert werden.

Wir gehen aus von einer kompakten Mannigfaltigkeit  $X$  der Dimension  $r = 4k - 1$ , die mit einer Parallelisierung, also einem System  $v_1, \dots, v_r$  von überall linear unabhängigen Vektorfeldern versehen ist. Damit ist  $X$  ein differentialgeometrisches Objekt: Zum Beispiel erhält man eine Riemannsche Metrik auf  $X$ , indem man die Vektoren  $v_1(x), \dots, v_r(x)$  zu einer Orthonormalbasis erklärt. Nun hat man (vgl. etwa [Sh]) den Dirac-Operator  $D$  auf  $X$ ; dies ist ein elliptischer Differentialoperator erster Ordnung, der in der vorliegenden Situation den Raum der (glatten) Abbildungen von  $X$  in  $\mathbf{C}^{2^{2k-1}}$  in sich selbst abbildet.

Um die Lage noch weiter zu vereinfachen, wollen wir annehmen, daß, wie bereits in §2 ins Auge gefaßt,  $X$  von der Form  $G/\Gamma$  ist, wobei  $G$  eine Liesche Gruppe und  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe von  $G$  ist. Dann sind die Funktionen auf  $X$  nichts anderes als die  $\Gamma$ -invarianten Funktionen auf  $G$ . Wenn wir nun schließlich auch noch annehmen, daß  $G$  nilpotent und einfach zusammenhängend ist, so ist  $G$  diffeomorph zu  $\mathbf{R}^r$ ; wir identifizieren  $G$  in geeigneter Weise mit  $\mathbf{R}^r$ , und  $D$  wird einfach zu einer  $2^{2k-1} \times 2^{2k-1}$ -Matrix, deren Einträge partielle Differentialopera-

toren 1. Ordnung auf dem  $\mathbb{R}^r$  sind und die auf  $2^{2k-1}$ -Tupeln von  $\Gamma$ -invarianten Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^r$  wirkt. Nun können wir natürlich  $D$  in der Form  $D = D_0 + D_1$  zerlegen, wobei  $D_0$  gerade der konstante Anteil von  $D$  ist, und die folgende Dirichlet-Reihe bilden:

$$\eta(s) := \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(D_1) \\ \lambda \neq 0}} \frac{\text{sign } \lambda}{|\lambda|^s}$$

Hierbei ist  $\sigma(D_1)$  das Spektrum von  $D_1$ ; die Reihe konvergiert für komplexe Zahlen von hinreichend großem Realteil.

In vielen Fällen reduziert sich jetzt der Satz von Atiyah-Patodi-Singer auf die Formel

$$e[X] = \epsilon \cdot (\eta(0) + \dim \text{Kern } D_1),$$

wobei  $\epsilon = \begin{cases} 1/4 & \text{für } r \equiv 3(8), \\ 1/2 & \text{für } r \equiv 1(8). \end{cases}$

Dabei ist natürlich der Wert  $\eta(0)$  nicht einfach mittels der Definition zu bilden – das ist im allgemeinen nicht sinnvoll, sondern der Satz sagt, daß sich die für  $\text{Re } s \geq 0$  definierte Funktion  $\eta$  zu einer Funktion fortsetzen läßt, die in ganz  $\mathbb{C}$  meromorph und in 0 regulär ist.

Manchmal lassen sich das Spektrum von  $D_1$  und die zugehörige  $\eta$ -Funktion explizit berechnen, etwa dann, wenn  $G$  eine Heisenberg-Gruppe ist [DS1]: Sei  $H(n)$  die Gruppe der regulären reellen  $(n + 2) \times (n + 2)$ -Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n & z \\ & 1 & & & y_1 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & & 1 & y_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

und  $H(n)_Z$  die Untergruppe, die aus allen Matrizen mit ganzzahligen Einträgen besteht. Wählt man  $G = H(2k - 1)$  und  $\Gamma = H(2k - 1)_Z$ , so zerlegt sich  $D_1$  in der Form  $D' \oplus D''$ , wobei das Spektrum von  $D''$  symmetrisch ist, d. h.  $\sigma(D'') = -\sigma(D')$ . Daher liefert  $D''$  keinen Beitrag zur  $\eta$ -Funktion. Ferner hat  $D'$  die Eigenwerte  $2\pi m$  mit  $m \in \mathbb{N}$ , und  $2\pi m$  hat die Vielfachheit  $2m^{2k-1}$ . Damit ergibt sich:

$$\eta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m^{2k-1}}{(2\pi m)^s} = \frac{2}{(2\pi)^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s-(2k-1)}}.$$

Folglich ist  $\eta(0) = 2\zeta(-(2k - 1))$ , wobei  $\zeta$  die Riemannsche Zeta-Funktion ist. Schon Riemann selbst hat gezeigt, daß

$$2\zeta(-(2k - 1)) = (-1)^k \frac{B_k}{k}.$$

Somit hat man eine weitere Erklärung für das Auftreten von Bernoulli-Zahlen in der stabilen Homotopietheorie. Man kann sich aber auch auf einen anderen Standpunkt stellen: Da man aus der Topologie weiß, welche Werte die e-Invariante annehmen kann, erhält man aus der obigen Beziehung einen neuen Beweis für die Rationalität der Zeta-Funktion an den ungeraden ganzen negativen Stellen und eine Bestimmung der auftretenden Nenner; dieser Beweis benutzt von der Zeta-Funktion nichts als ihre Definition, insbesondere nicht ihre Funktionalgleichung.

#### § 4 Formale Gruppen und Verallgemeinerte Kohomologietheorien

Die im vorigen Abschnitt beschriebenen Homotopieklassen bilden in einem ganz präzisen Sinn die einfachste Schicht der stabilen Stämme. Um einen Einblick in diesen geschichteten Aufbau zu gewinnen, sind die formalen Gruppen von großem Nutzen. Ihre Bedeutung für die Topologie hat als erster Quillen [Q] erkannt; siehe auch [A4], [Ha] und [R].

Will man etwa auf  $\mathbf{R}$  die Struktur einer kommutativen analytischen Gruppe mit 0 als neutralem Element definieren, so kann man versuchen, dies zu machen, indem man eine Potenzreihe in zwei Variablen

$$F(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$$

mit reellen Koeffizienten  $a_{ij}$  angibt, die für alle  $x$  und  $y$  konvergiert und die folgenden Eigenschaften hat:

- a)  $F(x, 0) = 0 = F(0, x)$ ,
- b)  $F(x, y) = F(y, x)$ ,
- c)  $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$ .

Bei einer formalen Gruppe sieht man von der Konvergenz ab; dann ist es auch überflüssig, sich bei den Koeffizienten auf reelle Zahlen zu beschränken, und man definiert eine *formale Gruppe* über dem kommutativen Ring  $\mathbf{R}$  mit 1 einfach als eine formale Potenzreihe  $F(x, y) \in \mathbf{R}[[x, y]]$  mit den Eigenschaften a), b), c).

Wie treten formale Gruppen in der Algebraischen Topologie auf? Dazu muß man den unendlich-dimensionalen komplexen projektiven Raum  $\mathbf{CP}^\infty$  betrachten. Zunächst sei daran erinnert, daß  $\mathbf{CP}^N$  für  $N \in \mathbf{N}$  die Menge der durch 0 gehenden Geraden in  $\mathbf{C}^{N+1}$  ist. Eine solche Gerade ist durch einen auf ihr liegenden, von 0 verschiedenen Punkt  $(z_0, \dots, z_N)$  bestimmt; wir bezeichnen sie mit  $[z_0 : z_1 : \dots : z_N]$ . Man hat natürliche Inklusionen  $\mathbf{CP}^1 \hookrightarrow \mathbf{CP}^2 \hookrightarrow \mathbf{CP}^3 \hookrightarrow \dots$  und setzt  $\mathbf{CP}^\infty = \bigcup_N \mathbf{CP}^N$ . Die Elemente von  $\mathbf{CP}^\infty$  werden mit  $[z_0 : z_1 : \dots]$  bezeichnet, wobei die  $z_i$  komplexe Zahlen sind, die nicht alle 0, aber von denen nur endlich viele von 0 verschieden sind.

Eine wichtige Eigenschaft von  $\mathbf{CP}^\infty$  ist nun, daß es eine stetige Abbildung  $m : \mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty \rightarrow \mathbf{CP}^\infty$  gibt, die definiert ist durch

$$m([x_0 : x_1 : \dots], [y_0 : y_1 : \dots]) := [x_0 y_0 : x_1 y_0 + x_0 y_1 : \dots],$$

und durch die auf  $\mathbf{CP}^\infty$  eine Struktur geliefert wird, die fast so gut wie die einer topologischen Gruppe ist. (Natürlich ist die Multiplikation  $m$  keine Kuriosität, sondern sie beschreibt, wie die meisten Leser wissen werden, das Tensorprodukt komplexer Geradenbündel.)

Damit sind wir aber noch nicht bei den formalen Gruppen. Eine formale Gruppe erhält man, wenn man auf  $m$  eine Kohomologietheorie anwendet. Unter einer *Kohomologietheorie* versteht man einen kontravarianten Funktor  $h$  von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Ringe; dieser Funktor muß einige Eigenschaften haben, von denen uns hier aber nur eine einzige interessiert:

Bezeichnet man den Ring  $h(\text{Punkt})$  mit  $h_*$ , so ist  $h(X)$  für jeden Raum  $X$  eine  $h_*$ -Algebra.

Die Projektionen  $p_1, p_2 : \mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty \rightarrow \mathbf{CP}^\infty$  induzieren Homomorphismen  $h(p_i) : h(\mathbf{CP}^\infty) \rightarrow h(\mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty)$ . Man nennt die Kohomologietheorie  $h$  *orientierbar*, wenn gilt:

$$h(\mathbf{CP}^\infty) = h_*[[t]] \quad \text{und} \quad h(\mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty) = h_*[[x, y]]$$

mit  $x = h(p_1)(t)$  und  $y = h(p_2)(t)$ .

Wenn nun  $h$  eine orientierbare Kohomologietheorie ist, so betrachtet man

$$\begin{array}{ccc} h(m) : h(\mathbf{CP}^\infty) & \rightarrow & h(\mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty) \\ \parallel & & \parallel \\ h_*[[t]] & & h_*[[x, y]]; \end{array}$$

es ist klar, daß  $F_h := h(m)(t) \in h_*[[x, y]]$  eine formale Gruppe über  $h_*$  ist.

Alle Kohomologietheorien, die heute von Bedeutung sind, sind Varianten der folgenden drei orientierbaren Kohomologietheorien:

- 1) *Die gewöhnliche Kohomologietheorie*  $H$ : Es ist  $H_* = \mathbf{Z}$  und  $F_H(x, y) = x + y$ .
- 2) *Die K-Theorie*  $K$ : Wiederum ist  $K_* = \mathbf{Z}$ ; diesmal ist aber  $F_K(x, y) = x + y + xy$ . Es ist bemerkenswert, daß bei den beiden einfachsten Kohomologietheorien auch die beiden einfachsten formalen Gruppen herauskommen.
- 3) *Die komplexe Kobordismustheorie*  $MU$ : Für das Folgende ist es nicht erforderlich, zu wissen, wie  $MU$  definiert ist. Von Belang ist allein, daß, wie Quillen zeigte,  $F_{MU}$  die universelle formale Gruppe ist; die tatsächliche Konstruktion von  $MU$  kann als ein Existenzbeweis für eine Theorie mit dieser Eigenschaft angesehen werden. Man nennt dabei einen Ring  $L$  den universellen Ring (oder Lazard-Ring) und eine formale Gruppe  $F(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j$  über  $L$  die universelle formale Gruppe, wenn es für jede formale Gruppe  $G$  über einem beliebigen Ring  $R$  genau einen Ringhomomorphismus  $\theta : L \rightarrow R$  mit  $G(x, y) = \sum \theta(a_{ij})x^i y^j$  gibt.

## § 5 Systematische Zugänge zu den stabilen Homotopiegruppen

Zahlreiche Berechnungen von Homotopiegruppen beruhen letzten Endes auf dem von Hurewicz, dem eigentlichen Begründer der Homotopietheorie, herführenden Satz, der folgendes besagt:

Ist  $X$  ein einfach zusammenhängender Raum und  $\pi_i(X) = 0$  für  $i < k$ , so ist  $\pi_k(X) \cong H_k(X)$ .

Natürlich ist damit unmittelbar für die Homotopiegruppen der Sphären nicht viel zu erreichen; aber Cartan und Serre [CS] haben darauf ein iteratives Verfahren aufgebaut, mit dem man versuchen kann, die Homotopiegruppen eines Raumes zu berechnen. Es besteht grob gesprochen in folgendem:

Wenn man  $\pi_k(X)$  berechnen will und  $\pi_i(X)$  für  $i < k$  kennt, so konstruiert man einen Raum  $\tilde{X}$  mit  $\pi_i(\tilde{X}) = 0$  für  $i < k$  und  $\pi_j(\tilde{X}) = \pi_j(X)$  für  $j \geq k$  und berechnet  $H_k(\tilde{X})$ . (Für  $k = 2$  ist  $\tilde{X}$  gerade die universelle Überlagerung von  $X$ .)

Natürlich hat man keine Gewähr, daß man die erforderliche Homologiegruppe tatsächlich ausrechnen kann; doch immerhin gelang es mit diesem Verfahren, ein gutes Dutzend der stabilen Stämme zu bestimmen.

Adams [A1] hat diese Methode systematisiert; das Ergebnis ist die sogenannte Adams-Spektralsequenz. Novikov [N] ging einen Schritt weiter und ersetzte in der Adams-Spektralsequenz die gewöhnliche (Ko-)Homologietheorie durch die komplexe Kobordismustheorie  $MU$ . Das Ergebnis ist die gleich zu erläuternde Adams-Novikov-Spektralsequenz

$$(*) \quad \text{Ext}_{MU_*(MU)}(MU_*, MU_*) \Rightarrow \pi_*^S,$$

die insbesondere für die Bestimmung der ungeraden Torsionsanteile der stabilen Stämme der ursprünglichen Version von Adams weit überlegen ist.

Natürlich kann hier nicht erklärt werden, was Spektralsequenzen, die das wichtigste Werkzeug in der Homotopietheorie darstellen, sind. Mit der Notation  $\dots \Rightarrow \dots$  wird angedeutet, daß zwischen den links und rechts des Pfeils stehenden Objekten ein präziser, wenn auch komplizierter Zusammenhang besteht, wobei die Pfeilrichtung einen Informationsfluß bezeichnet. Im Fall von (\*) erhält man also Information über  $\pi_*^S$ , die Gesamtheit der stabilen Stämme  $\pi_r^S$ .

Nun zur linken Seite von (\*): Aus § 4 wissen wir bereits, was  $MU_*$  ist – der Lazard-Ring, über dem die universelle formale Gruppe definiert ist.  $MU_*(MU)$  ist dual zu den natürlichen Transformationen des Funktors  $MU$  in sich, wichtiger als die genaue Definition ist aber, daß  $MU_*(MU)$  wie  $MU_*$  ebenfalls eine algebraische Interpretation besitzt: Es repräsentiert die strikten Isomorphismen formaler Gruppen.

(Sind  $F$  und  $G$  formale Gruppen über dem Ring  $R$ , so ist ein *Homomorphismus* von  $F$  in  $G$  eine Potenzreihe  $f(x) \in R[[x]]$  mit konstantem Term 0, so daß  $f(F(x, y)) = G(f(x), f(y))$ . Der Homomorphismus  $f(x)$  heißt *striktter Isomorphismus*, wenn  $x$  den Koeffizienten 1 hat.)

Schließlich ist  $\text{Ext}$  der bekannte Funktor der Homologischen Algebra, der aus den geschilderten Daten eine bigraduierte Gruppe macht.

Damit steht auf der linken Seite von (\*) ein rein algebraisches Objekt von fundamentaler Bedeutung, in dem sich die strikten Automorphismen aller formalen Gruppen widerspiegeln.

Manche formalen Gruppen besitzen hochinteressante Automorphismengruppen, wie der folgende Satz von Dieudonné und Lubin zeigt:

Ist  $k$  ein separabel abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p > 0$  und  $n$  eine natürliche Zahl, so existiert eine formale Gruppe  $F$  über  $k$ , deren Endomor-

phismenring isomorph ist zum Ring der ganzen Zahlen in der Divisionsalgebra mit Zentrum  $\mathbf{O}_p$  (dem Körper der  $p$ -adischen Zahlen), die den Rang  $n^2$  über  $\mathbf{O}_p$  und die Invariante  $1/n$  hat. (Für die Theorie dieser Divisionsalgebren vgl. man [Se2] oder [Ha].)

Die strikten Automorphismen von  $F$  entsprechen dann natürlich den Elementen der Gruppe  $S(p, n)$  der Einseinheiten dieses Ringes;  $S(p, n)$  ist eine  $p$ -adische Lie-Gruppe. Die Bedeutung der Gruppen  $S(p, n)$  für die Homotopietheorie hat als erster Morava [Mo] erkannt. Er zeigte, daß der Anfangsterm der Adams-Novikov-Spektralsequenz, also die linke Seite von (\*), in gewissem Sinn aus den stetigen Kohomologiegruppen  $H_{\text{cont}}^*(S(p, n); \mathbf{F}_p)$  aufgebaut ist.

Dabei entspricht der in § 3 beschriebene Anteil der stabilen Stämme, der von der stabilen Homotopie der orthogonalen Gruppen herrührt, genau dem, was von  $S(p, 1)$ , also von der kommutativen Divisionsalgebra, geliefert wird.

Die Dimension von  $H_{\text{cont}}^*(S(p, n); \mathbf{F}_p)$  wächst sehr schnell mit  $n$  an [DS2].

Die bisher bekannten expliziten topologischen Konsequenzen dieser Entwicklung können hier nicht geschildert werden; dafür sei nochmals auf [R] verwiesen. Es wird niemanden überraschen, daß die Einzelheiten dieses Geschäfts außerordentlich diffizil sind. Was von dem ganzen algebraisch-zahlentheoretischen Reichtum schließlich in den Homotopiegruppen wiederzufinden ist, muß die Zukunft lehren.

## Literatur

- [A1] Adams, J. F.: On the structure and applications of the Steenrod algebra. *Comment. Math. Helv.* **32** (1958) 180–214
- [A2] Adams, J. F.: On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math.* **72** (1960) 20–104
- [A3] Adams, J. F.: On the group  $J(X)$ , IV. *Topology* **5** (1966) 21–71
- [A4] Adams, J. F.: *Stable Homotopy and Generalised Homology*. Univ. of Chicago Press 1974
- [APS] Atiyah, M. F., Patodi, V. K.; Singer, I. M.: Spectral asymmetry and Riemannian Geometry. I, II, III. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **77** (1975) 43–69; **78** (1975) 405–432; **79** (1976) 71–99
- [B] Bott, R.: The stable homotopy of the classical groups. *Ann. of Math.* **70** (1959) 313–337
- [BM] Bott, R.; Milnor, J. W.: On the parallelizability of spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958) 87–89
- [CS] Cartan, H.; Serre, J.-P.: *Espaces fibrés et groupes d'homotopie*. I. Constructions générales. II. Applications. *C. R. Acad. Sci. Paris* **234** (1952) 288–290, 393–395
- [DS1] Deninger, Ch.; Singhof, W.: The  $e$ -invariant and the spectrum of the Laplacian for compact nilmanifolds covered by Heisenberg groups. *Invent. math.* **78** (1984) 101–112
- [DS2] Deninger, Ch.; Singhof, W.: On the cohomology of nilpotent Lie algebras. *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988) 3–14
- [F] Freudenthal, H.: Über die Klassen der Sphärenabbildungen. *Compositio Math.* **5** (1937) 299–314
- [Ha] Hazewinkel, M.: *Formal Groups and Applications*. Academic Press 1978
- [Ho] Hopf, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.* **104** (1931) 639–665
- [K] Kervaire, M.: Non-parallelizability of the  $n$ -sphere for  $n > 7$ . *Proc. Nat. Acad. Sci., USA* **44** (1958) 280–283

- [L] Landweber, P. S.:  $BP_*(BP)$  and typical formal group laws. Osaka U. Math. **12** (1975) 357–363
- [MK] Milnor, J. W.; Kervaire, M.: Bernoulli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin. Proc. Int. Cong. Math., Edinburgh 1958. Cambridge Univ. Press 1960
- [Mo] Morava, J.: Noetherian localisations of categories of cobordism comodules. Ann. of Math. **121** (1985) 1–39
- [N] Novikov, S. P.: The methods of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theories. Math. USSR – Izv. (1967) 827–913
- [P] Pontrjagin, L. S.: Smooth manifolds and their applications in homotopy theory. Transl. Amer. Math. Soc., Series 2, **11** (1959)
- [Q] Quillen, D. G.: On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory. Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969) 1293–1298
- [R] Ravenel, D. C.: Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres. Academic Press 1986
- [Se1] Serre, J.-P.: Groupes d’homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. **58** (1953) 258–294
- [Se2] Serre, J.-P.: Corps locaux. Hermann 1962
- [Sh] Shnaha, P.: The Atiyah-Singer Index Theorem. Springer Lecture Notes in Math. **638** (1978)
- [Sp] Spanier, E. H.: Algebraic Topology. McGraw-Hill 1966
- [Th] Thom, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comment. Math. Helv. **28** (1954) 17–86
- [To] Toda, H.: Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres. Ann. of Math. Studies **49** (1962)
- [W] Whitehead, G. W.: Elements of Homotopy Theory. Springer 1978

Wilhelm Singhof  
 Mathematisches Institut  
 der Universität  
 Universitätsstr. 1  
 4000 Düsseldorf

(Eingegangen am 9. 4. 1987)



## Steuerung freier Ränder

K.-H. Hoffmann, Augsburg

Der Artikel bringt eine Übersicht über neuere Resultate auf dem Gebiet der Steuerungstheorie partieller Differentialgleichungen. Wir beschränken uns dabei auf die Behandlung freier Randwertaufgaben, ein Teilaspekt, dem gerade in neuerer Zeit verstärkte Aufmerksamkeit gewidmet wird. Nahezu alle Resultate wurden bisher für Phasenübergänge von flüssiger Materie in feste oder umgekehrt erzielt, so daß es angemessen erscheint, hier nur Steuerungsprobleme vom Stefanischen Typ darzustellen. Es werden allerdings heute auch große Anstrengungen unternommen, Phasenübergänge in Festkörpern durch mathematische Modelle zu beschreiben. Von einer Steuerung solcher Vorgänge ist man jedoch noch weit entfernt.

Wir unterscheiden in dieser Arbeit nach Steuerungsproblemen, bei denen nach einer automatischen Regelung („feedback“) gefragt ist und solchen, bei denen ein Gütekriterium in der Form eines Kostenfunktionsals minimiert werden soll („optimal control“). Erstere werden hier nur bei Stefan-Problemen in einer Raumdimension dargestellt, obwohl bereits Resultate in mehreren Raumdimensionen vorliegen, während wir die Resultate und Beispiele der Optimalsteuerung an räumlich mehrdimensionalen Stefan-Problemen demonstrieren werden. Die numerischen Resultate wurden auf einer Norsk Data 540 des Rechenzentrums der Universität Augsburg erzielt. Meinen Mitarbeitern K. Bernt und W. Kolbe danke ich für die Hilfe bei der Durchführung der Rechnungen.

### 1 Automatische Steuerung freier Randwertprobleme

Kristallisations- und Schmelzvorgänge treten bei zahlreichen technischen Anwendungen auf. Als einen Modellfall führen wir ein Beispiel aus der Glasindustrie an. Die Qualität des Glases hängt stark von der Verfestigungsgeschwindigkeit der flüssigen Schmelze während des Erstarrungsprozesses ab. Um etwa Risse zu vermeiden, ist es wichtig, die Geschwindigkeit der Verfestigungsfront zu kontrollieren. Von technischen, praktischen Gesichtspunkten aus ist es äußerst wünschenswert, die Steuerung der Abkühlung an der aktuellen Lage der Kristallisationsgrenze – des freien Randes – zu orientieren. Ein vereinfachtes mathematisches Modell stellt das Zweiphasen-Stefan-Problem dar. In einer Raumdimension versteht man darunter das folgende Differentialgleichungsproblem.

Gesucht wird eine von Ort und Zeit abhängige Temperaturverteilung  $u(x, t)$  sowie die von der Zeit abhängige Lage  $s(t)$  der Kristallisationsgrenze, die das folgende Anfangs-Randwertproblem lösen:

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0$$

für  $0 < x < s(t)$ ,  $t > 0$  und  $s(t) < x < a$ ,  $t > 0$ ,

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = 0 \quad \text{für } t > 0,$$

$$(1.3) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } 0 < x < a, \quad \text{wobei } u_0(x) > 0 \\ \text{für } 0 < x < s_0 \quad \text{und } u_0(x) < 0 \quad \text{für } s_0 < x < a \quad \text{gilt,}$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial x} u(a, t) + u(a, t) = g(t) \quad \text{für } t > 0, \quad \text{wobei } g(t) \leq 0 \quad \text{gilt,}$$

$$(1.5) \quad u(s(t), t) = 0 \quad \text{für } t > 0 \quad \text{und}$$

$$(1.6) \quad \frac{d}{dt} s(t) = -u_x^+(s(t), t) + u_x^-(s(t), t) \quad \text{für } t > 0, \\ s(0) = s_0 \quad \text{mit } 0 < s_0 < a.$$

Hierbei ist  $u_x^\pm(s(t), t) := \frac{\partial}{\partial x} u(s(t) \mp 0, t)$ , und  $u_0$  eine stetige Funktion.

Die Gleichung (1.2) entspricht der Symmetrie des Problems, die Randbedingung (1.4) enthält eine Steuergröße  $g$ , während (1.5) und (1.6) den freien Rand charakterisieren. Dort herrscht nämlich die Temperatur Null, und es besteht ein energetisches Gleichgewicht.

Das Problem (1.1)–(1.6) wurde von vielen Autoren behandelt. Die uns hier interessierenden Resultate findet man etwa bei A. Friedman [15], [16], [17] und L. A. Caffarelli und A. Friedman [3]. Das Problem (1.1)–(1.6) hat für jedes  $g \in L_{loc}^\infty[0, \infty)$  eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn der freie Rand  $s$  den festen Rand  $x = a$  und  $x = 0$  nicht trifft. Für  $s$  gilt die Regularität  $s \in C^\infty(0, \infty) \cap C^0[0, \infty)$ .

Die Steuerfunktion  $g \in L_{loc}^\infty[0, \infty)$  soll nun so gewählt werden, daß der freie Rand  $s$  sich möglichst innerhalb gegebener Schwellenwerte  $\rho_1$  und  $\rho_2$  für alle Zeiten  $t > 0$  aufhält. Dazu betrachten wir das Problem (1.1)–(1.6) und konstruieren zwischen  $g$  und  $s$  eine wohldefinierte Rückkopplung. Es sei  $0 < \rho_1 < \rho_2 < a$  und  $\rho := (\rho_1, \rho_2)$ . Wir unterscheiden zwei mögliche Anfangszustände des Steuerungsmechanismus:

$$M_\rho^0(s_0) := \begin{cases} -1 & \text{für } s_0 \geq \rho_2, \\ 0 & \text{für } \rho_1 < s_0 < \rho_2, \text{ und} \\ 0 & \text{für } s_0 \leq \rho_1, \end{cases} \quad \text{und} \quad M_\rho^1(s_0) := \begin{cases} -1 & \text{für } s_0 \geq \rho_2, \\ -1 & \text{für } \rho_1 < s_0 < \rho_2, \\ 0 & \text{für } s_0 \leq \rho_1. \end{cases}$$

Für einen „Input“  $s \in C[0, \infty)$  mit  $s(0) = s_0$  wird nun der Steuermechanismus für  $t > 0$  induktiv definiert:

Setze  $t_0 := 0$  und  $M_\rho^0(s(0)) := M_\rho^0(s_0)$ .

Für jedes  $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  werden Schaltzeiten  $t_{k+1}$ ,

$$t_{k+1} := \begin{cases} \inf T_{k+1} & \text{für } T_{k+1} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{für } T_{k+1} = \emptyset, \end{cases}$$

definiert, wobei

$$T_{k+1} := \{t \in (t_k, \infty) \mid s(t) = \rho_1 \text{ und } k+1 \text{ gerade}\} \\ \cup \{t \in (t_k, \infty) \mid s(t) = \rho_2 \text{ und } k+1 \text{ ungerade}\}$$

in den Fällen  $\rho_1 < s_0 < \rho_2$  und  $s_0 \leq \rho_1$ , sowie

$$T_{k+1} := \{ t \in (t_k, \infty) | s(t) = \rho_1 \text{ und } k+1 \text{ ungerade} \} \\ \cup \{ t \in (t_k, \infty) | s(t) = \rho_2 \text{ und } k+1 \text{ gerade} \}$$

im Fall  $s_0 \geq \rho_2$  gesetzt wurde. In den Schaltintervallen reagiert nun der Steuermechanismus wie folgt:

$$M_\rho(s(t)) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \in [t_k, t_{k+1}) \text{ und } k+1 \text{ ungerade,} \\ -1 & \text{falls } t \in [t_k, t_{k+1}) \text{ und } k+1 \text{ gerade} \end{cases}$$

in den Fällen  $\rho_1 < s_0 < \rho_2$  und  $s_0 \leq \rho_1$  und

$$M_\rho(s(t)) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \in [t_k, t_{k+1}) \text{ und } k+1 \text{ gerade,} \\ -1 & \text{falls } t \in [t_k, t_{k+1}) \text{ und } k+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

im Fall  $s_0 \geq \rho_2$ .

Für den Anfangszustand  $M_\rho(s(0)) = M_\rho^1(s_0)$  definiert man den Steuermechanismus analog. Aus der Abbildung 1 liest man ab, daß der Zustand des Schalters  $M_\rho$  in Abhängigkeit vom Input  $s(t)$  eine elementare Hysteresis-Schleife beschreibt.

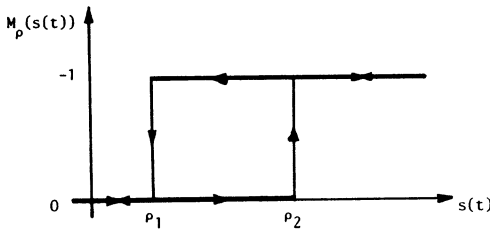


Abbildung 1

Diese ist geeignet, im Falle des freien Randwertproblems (1.1)–(1.6) den freien Rand  $s(t)$  durch die Schwellenwerte  $\rho_1, \rho_2$  zu kontrollieren, wenn man  $g(t) := M_\rho(s(t))$  setzt. Dann wird die Kühlung  $g$  bei Überschreiten des Schwellenwertes  $\rho_2$  ein- und bei Unterschreitung des Schwellenwertes  $\rho_1$  ausgeschaltet, wie es in Abbildung 2 durch Punkte angezeigt wird.

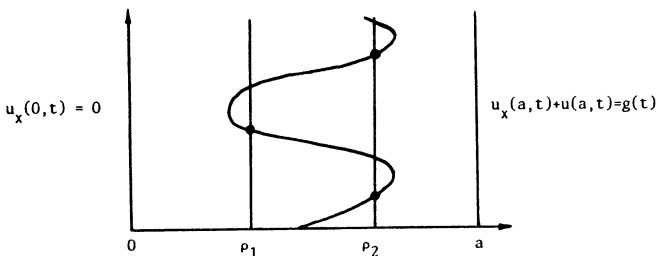


Abbildung 2

Es stellt sich nun erneut die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Problems (1.1)–(1.6), wenn  $g$  in der Rückkopplungsform  $g(t) = M_\rho(s(t))$  gegeben ist. Dieses Problem wurde in [23] gelöst.

**Satz 1.1** (K.-H. Hoffmann und J. Sprekels). *Das rückgekoppelte Steuerungsproblem (1.1)–(1.6) hat für  $g(t) = M_\rho(s(t))$  genau eine Lösung. In jedem endlichen Zeitintervall  $[0, T]$  schaltet  $g$  nur endlich oft zwischen den Werten 0 und  $-1$ .*

Der Beweis dieses Satzes erfolgt konstruktiv. Man beweist zunächst, daß  $|\dot{s}|$  einer a-priori-Abschätzung genügt. Damit läßt sich dann der minimale Abstand zweier aufeinanderfolgender Schaltpunkte durch eine von Null verschiedene Zahl abschätzen. Folglich ist die Lösung des Problems dann sukzessive konstruierbar. Dieses Vorgehen läßt sich auch zur numerischen Konstruktion der Lösung verwenden. Gerechnete Testbeispiele findet man in [23]. Eine Verallgemeinerung des Resultates von Satz 1.1 auf ein Problem in mehreren Raumdimensionen mit den entsprechenden Modifikationen, sowie anderen Steuerungsregeln wurde in [22] entwickelt.

Das Rückkopplungsgesetz in der Form einer elementaren Hysteresis-Schleife läßt aber noch eine unmittelbare Erweiterung zu. Es kann sich in vielen Anwendungen als ungeschickt erweisen, wenn man bei Überschreiten eines Schwellenwertes das System vollkommen abschaltet oder auch voll anschaltet. Eine feinere Dosierung des Schaltens wäre wünschenswert. Das läßt sich durch Überlagerung mehrerer Hysteresis-Schleifen mit verschiedenen Schwellenwerten erreichen. Diese Idee führt auf das von F. Preisach [51] eingeführte Hysteresis-Modell zum Studium des Ferromagnetismus. Der Vorteil besteht in einem flexibleren Schalter sowie der Möglichkeit, aus einer Klasse von Feedbackgesetzen ein optimales zu bestimmen; Wir führen das Preisach-Modell kurz ein:

Es sei  $\Omega := \{(\rho_1, \rho_2) \mid 0 < \rho_1 < \rho_2 < a\}$  und  $M(\Omega)$  die Menge aller nichtnegativen Maße  $\mu$  auf  $\Omega$  mit den Eigenschaften:

- (i)  $\mu$  ist absolut stetig bezüglich des Lebesgue Maßes  $d\rho = d\rho_1 d\rho_2$ ,
- (ii)  $\int_{\Omega} d\mu(\rho) = 1$ .

Wir betrachten dann das Problem (1.1)–(1.6) mit der rückgekoppelten Steuerungsfunktion

$$(1.7) \quad g(t) := M_\mu(s(t)) := \int_{\Omega} M_\rho(s(t), M_\rho^i) d\mu(\rho),$$

$i = 0$  oder  $i = 1$ . Dabei ist  $M_\rho(s(t), M_\rho^i)$  der früher definierte Steuermechanismus zu den Schwellenwerten  $\rho = (\rho_1, \rho_2)$  und dem Anfangswert  $M_\rho^i$  ( $i = 0$  oder  $1$ ) bei Input  $s(t)$ . Dieses Problem wurde von A. Friedman und K.-H. Hoffmann in [18] behandelt.

**Satz 2.1** (A. Friedman und K.-H. Hoffmann)

- i. Für jedes Maß  $\mu \in M(\Omega)$  gibt es eine Lösung  $(u, s)$  des Problems (1.1)–(1.7).
- ii. Die Lösung ist eindeutig bestimmt.
- iii. Sei  $K := \{d\mu(\rho) = f(\rho)d\rho \mid \int_{\Omega} f^{1+\delta}(\rho)d\rho \leq C\}$  für fest gewählte Konstanten  $\delta > 0$  und  $C > 0$ . Ferner sei  $\sigma \in C[0, \infty)$  eine gegebene stetige Funktion sowie  $\gamma \in C(\bar{\Omega})$  und nichtnegativ. Dann besitzt das Optimalsteuerungsproblem

$$J(f, s) := \max_{0 \leq t \leq T} |s(t) - \sigma(t)| + \int_{\Omega} \gamma(\rho) f(\rho) d\rho \stackrel{!}{=} \min$$

unter den Nebenbedingungen  $f \in K$  und  $(u, s)$  Lösung des Problems (1.1)–(1.7) mit  $g(t) = \int_{\Omega} M_{\rho}(s(t), M_{\rho}^i) f(\rho) d\rho$  ( $i = 0$  oder  $1$ ) eine Lösung.

Dabei ist  $T$  eine feste Endzeit für den Prozeß.

iv. Die Lösung  $(u, s)$  des Problems (1.1)–(1.7) ist stabil in dem Sinne, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$$

existiert und endlich ist.

Wir bemerken, daß die Hauptschwierigkeiten in den Beweisen von der Unstetigkeit der Hysterisis-Regel im Preisach-Modell herkommen. Das macht die Beweisführung zum Teil sehr technisch. Zentral für alle Überlegungen ist ein

**Stetigkeitslemma.** *Es sei  $s \in C^1(0, T] \cap C^0[0, T]$  für ein  $0 < T < \infty$  und  $s_n \in C^0[0, T]$  mit  $s_n(t) \rightarrow s(t)$  für  $n \rightarrow \infty$ , gleichmäßig in  $t \in [0, T]$ . Dann gilt:*

$$\int_0^T |M_{\mu}(s_n(t)) - M_{\mu}(s(t))| dt \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und für jedes  $\mu \in M(\Omega)$ .

**Beweiskizze.** Es sei  $\eta > 0$  und klein. Dann folgt für  $\tau \leq 2\eta/a^2$ :

$$(1.8) \quad \int_0^{\tau} |M_{\mu}(s_n(t)) - M_{\mu}(s(t))| dt < 2\eta.$$

Für eine kleine Zahl  $\epsilon_0 > 0$  definieren wir die Menge

$$A_{\epsilon_0} := \{ \rho = (\rho_1, \rho_2) \in \Omega \mid |\rho_1 - s_0| < \epsilon_0 \text{ oder } |\rho_2 - s_0| < \epsilon_0 \}.$$

Die Zahl  $\epsilon_0$  kann so gewählt werden, daß  $\mu(A_{\epsilon_0}) < \eta$  gilt. Nun verkleinert man  $\tau$ , so daß für alle  $\rho \notin A_{\epsilon_0}$  und alle  $n \in \mathbf{N}$  im Intervall  $[0, \tau]$  gilt:

$$s(t) \neq \rho_1, s(t) \neq \rho_2$$

$$\text{und } s_n(t) \neq \rho_1, s_n(t) \neq \rho_2.$$

Damit stimmen die Hysterisis-Regeln für die Inputs  $s(t)$  und  $s_n(t)$  überein, wenn  $0 \leq t \leq \tau$  und  $\rho \notin A_{\epsilon_0}$  gilt. Solche  $\rho$  brauchen deshalb jetzt für  $0 \leq t \leq \tau$  nicht mehr betrachtet zu werden. Als nächstes sehen wir uns die Menge

$$B_{\epsilon_0} := \{ (\rho_1, \rho_2) \in \Omega \mid 0 < \rho_2 - \rho_1 < \epsilon_0 \}$$

an. Für hinreichend kleine  $\epsilon_0$  folgt:

$$(1.9) \quad \mu(B_{\epsilon_0}) < \eta.$$

Auch solche  $\rho$  liefern in den Integralen einen Beitrag, der klein wird.

Es sei nun

$$S^* := \{ s^* \in \mathbf{R} \mid \exists t \in [\tau, T] : s(t) = s^* \text{ und } \dot{s}(t) = 0 \}.$$

Nach Sard's Lemma hat  $S^*$  das Lebesgue-Maß Null. Die Menge  $S^*$  wird jetzt ver-

größert zu

$$S_k^* := \left\{ s \in \mathbf{R} \mid \exists t \in [\tau, T] : s(t) = s \text{ und } |\dot{s}(t)| < \frac{1}{k} \right\}, k \in \mathbf{N}.$$

Es folgt:

$$S^* = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} S_k^*.$$

Da  $L(S^*) = 0$  ( $L$  bezeichne das Lebesgue-Maß), gilt

$$L(S_k^*) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Wir setzen jetzt:

$$\tilde{S}_k := \{(\rho_1, \rho_2) \in \Omega \mid \rho_1 \in S_k^* \text{ oder } \rho_2 \in S_k^*\}.$$

Dann folgt  $\mu(\tilde{S}_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  und somit

$$(1.10) \quad \mu(\tilde{S}_k) < \eta \quad \text{für hinreichend große } k.$$

Wir bemerken: Wenn  $s = s(\bar{t})$  für  $\tau \leq \bar{t} \leq T$  und  $s \notin S_k^*$  ist, so folgt  $|\dot{s}(\bar{t})| > 1/k$ . Das impliziert, daß es ein von  $\bar{t}$  unabhängiges  $\delta > 0$  gibt, so daß für alle  $|t - \bar{t}| < \delta$  die Abschätzung

$$|\dot{s}(t)| > \frac{1}{2k}$$

gilt.

Wegen  $|\dot{s}(t)| \leq C$  für alle  $\tau \leq t \leq T$ , kann für irgendein  $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in B_{\epsilon_0}$  die Kurve  $x = s(t)$  zwischen  $\rho' = \rho_1$  und  $\rho' = \rho_2$  nur endlich oft (etwa  $\leq N$  mal) oszillieren, wobei  $N = N(\epsilon_0, \eta)$  aber unabhängig von  $\rho$  ist.

Sei jetzt  $[t_1, t_2]$  ein Intervall mit  $s(t_1) = \rho_2$ ,  $s(t_2) = \rho_1$  und  $s(t) > \rho_1$  für alle  $t_1 < t < t_2$ , sowie  $s(t) < \rho_2$  in einem Intervall  $t_1 - \epsilon < t < t_1$ . Falls nun  $\rho = (\rho_1, \rho_2) \notin \tilde{S}_k$  ist, so folgt:

$$\dot{s}(t) > \frac{1}{2k} \quad \text{für } |t - t_1| < \delta$$

$$\text{und } \dot{s}(t) < -\frac{1}{2k} \quad \text{für } |t - t_2| < \delta.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $s_n(t) \rightarrow s(t)$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbf{N}$ , so daß für alle  $n \geq n_0$  die Beziehungen

$$s_n(t_{1,n}) = \rho_2, \quad s_n(t_{2,n}) = \rho_1$$

gelten und im Intervall  $t_{1,n} < t < t_{2,n}$  die Abschätzung  $s_n(t) > \rho_1$  sowie in einem Intervall  $t_{1,n} - \delta < t < t_{1,n}$  entsprechend  $s_n(t) < \rho_2$  folgen. Hierbei läßt sich  $\delta$  mit einem  $c > 0$  abschätzen zu  $\delta \geq c/k$ , und für die Intervalle gilt  $|t_{1,n} - t_1| \leq \delta_n$ ,  $|t_{2,n} - t_2| \leq \delta_n$  mit  $\delta_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Ähnlich schließt man für den Fall  $s(t_1) = \rho_1$ ,  $s(t_2) = \rho_2$  mit  $t_1 < t_2$  und  $(\rho_1, \rho_2) \notin \tilde{S}_k$ . Wir fassen zusammen: Für  $\rho \in A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0} \cup \tilde{S}_k$  gilt:

$$(1.11) \quad \int_0^T |M_\rho(s_n(t), M_\rho^1) - M_\rho(s(t), M_\rho^1)| dt \leq 2N\delta_n.$$

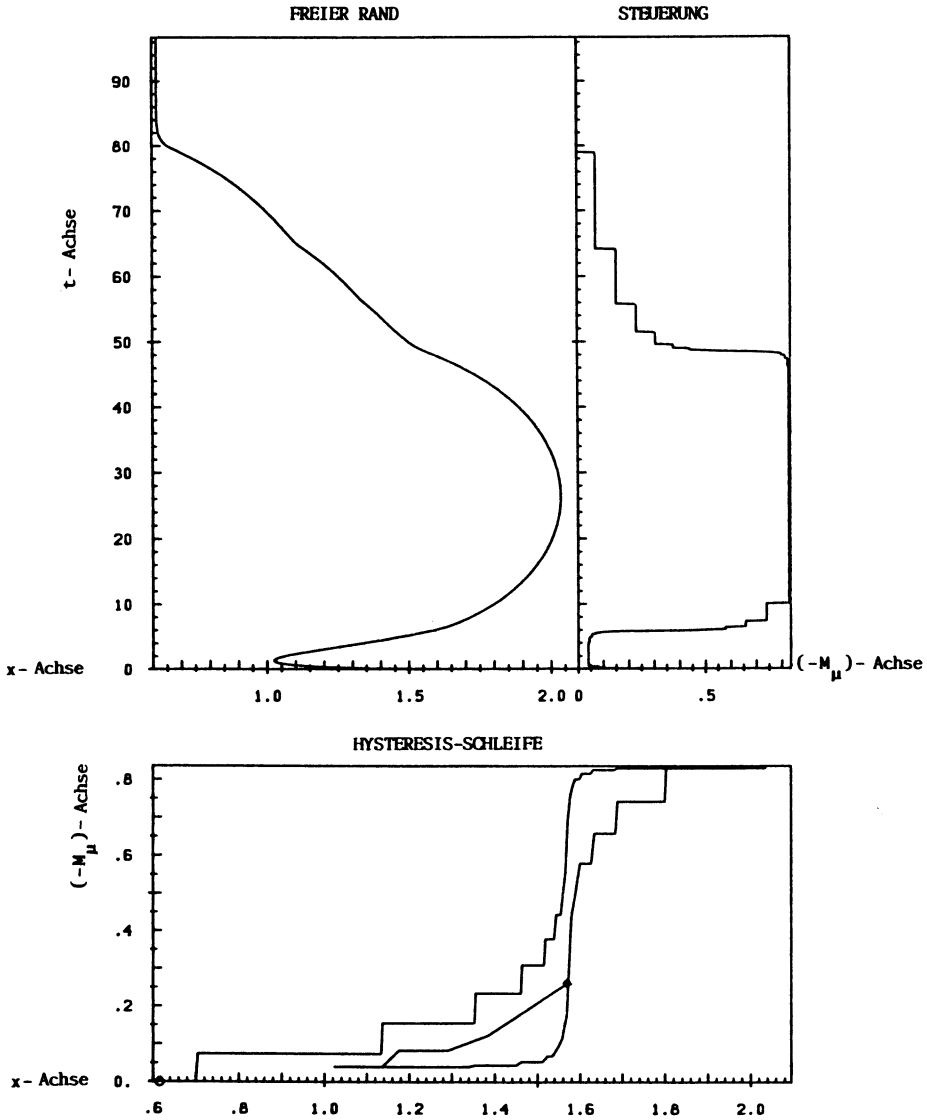


Abbildung 3

Hierbei wurde benutzt, daß  $M_\rho(s_n(t), M_\rho^i)$  und  $M_\rho(s(t), M_\rho^i)$  übereinstimmen für alle  $t < \tau$ , wegen  $\rho \in A_{\epsilon_0}$ .

Aus den Abschätzungen folgt nun

$$\int_0^T |M_\mu(s_n(t)) - M_\mu(s(t))| dt \leq (2 + 3T)\eta + 2N\delta_n,$$

wobei  $N = N(\eta, \epsilon_0)$ . Mit  $n \rightarrow \infty$  und anschließend  $\eta \rightarrow 0$  folgt die Behauptung des Stetigkeitslemmas.  $\square$

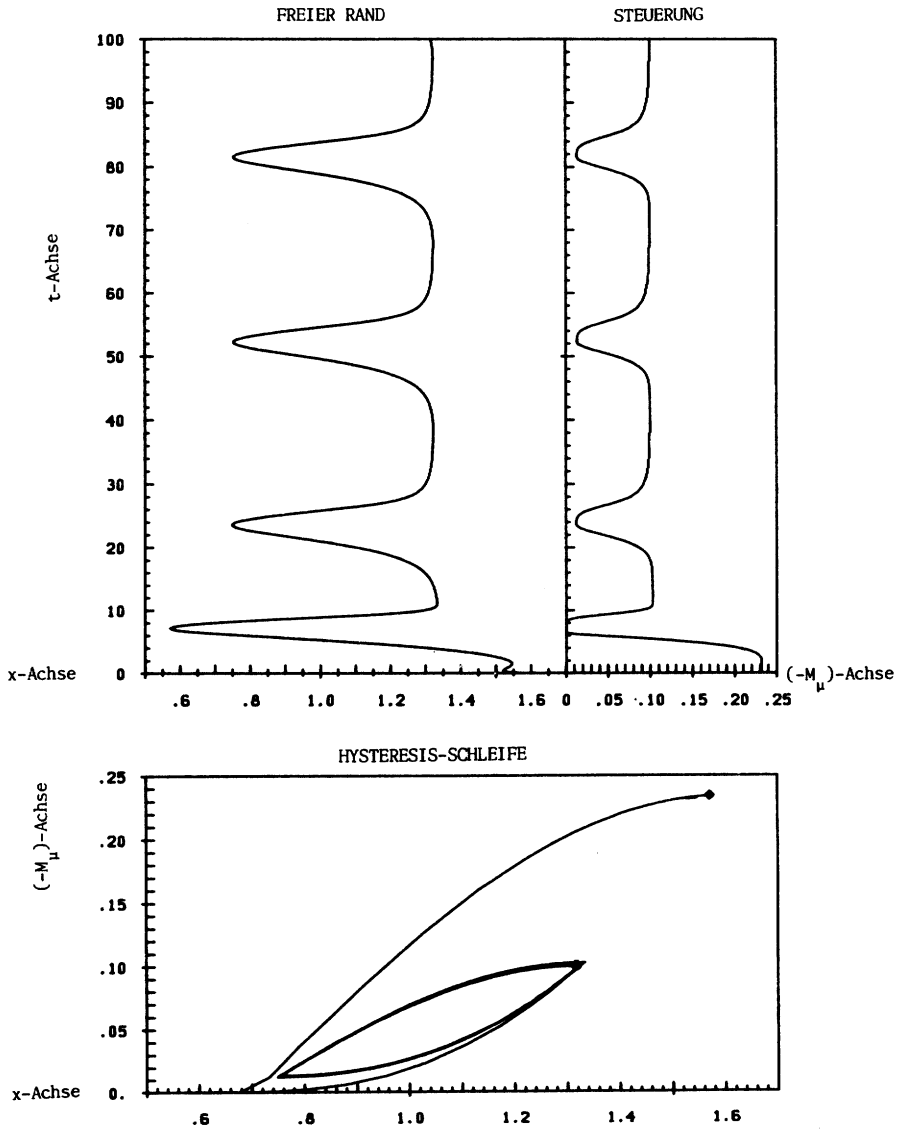


Abbildung 4

Dieses Lemma erweist sich als zentral bei den meisten Anwendungen des Preisach-Modells. Eine ähnliche Aussage sogar unter schwächeren Voraussetzungen wurde mit anderen Methoden von A. Visintin [57] bewiesen. Eine unmittelbare Folgerung aus dem Lemma ist, daß  $M_\mu(s(t))$  eine stetige Funktion in  $0 \leq t \leq T$  ist, und  $M_\mu(s_n(t))$  gleichmäßig gegen  $M_\mu(s(t))$  im Intervall  $[0, T]$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert. Zum Beweis von Satz 1.2(i) wird jetzt die „Stefan-Bedingung“  $\dot{s}(t) = -u_x^-(s(t), t) + u_x^+(s(t), t)$  ersetzt durch



$$\dot{s}_\tau = -u_x^-(s_\tau(t - \tau), t) + u_x^+(s_\tau(t - \tau), t)$$

und  $s_\tau(t) \equiv s_0$  im Intervall  $0 \leq t \leq \tau$ .

Das Stetigkeitslemma erlaubt den Grenzübergang  $\tau \rightarrow 0$  im Hysteresis-Funktional. Die Eindeutigkeit (ii) folgt mit dem zitierten Resultat von Visintin. Zum Nachweis von (iii) betrachtet man eine Minimalfolge und verwendet beim Grenzübergang ähnliche Techniken, wie im Beweis des Stetigkeitslemmas. Die Stabilitätsaussage (iv)

folgt aus der Tatsache, daß die Gesamtenergie  $\int_0^\infty |M_\mu(s(t))| dt$ , die in das System gesteckt wird, endlich bleibt. Diese beweist man durch Konstruktion geeigneter Vergleichsfunktionen unter Verwendung des Maximumprinzips.

Die Abbildungen 3 und 4 zeigen typische Plotts von numerischen Lösungen des Systems (1.1)–(1.7). Dabei spiegelt der freie Rand in Abbildung 3 die Stabilitätsaussage des Satzes 1.2 wider. Im Gegensatz dazu wurden die Rechnungen zur Abbildung 4 mit der auf  $u_x(0, t) \equiv -1$  abgeänderten linken Randbedingung durchgeführt. Die Stabilitätsaussage gilt hier nicht. Es zeigt sich nach einer Einschwingphase ein periodisches Verhalten des freien Randes, der Steuerung und der Hysteresis-Schleife. Diese Beobachtung konnte bei allen numerischen Rechnungen gemacht werden. Der mathematisch strenge Nachweis der Existenz periodischer Lösungen steht noch aus.

Die hier dargestellte Technik der Steuerung durch Hysteresis-Schleifen ist nicht auf das Stefan-Problem beschränkt. Andere freie Randwertaufgaben lassen sich auf diese Weise steuern. Auch die Steuerung von Schadstoffausstoß mit dem Ziel, die Luftverschmutzung zu kontrollieren, scheint möglich. Schließlich wollen wir noch erwähnen, daß über den steuerungstheoretischen Ansatz auch eine Identifizierung der Hysteresis-Schleife aus Messungen angegangen werden kann, falls man das Preisach-Modell zugrunde legt. Eine andere Vorgehensweise zur Bestimmung von Hysteresis-Schleifen wurde in [26] entwickelt.

## 2 Optimale Steuerung freier Randwertprobleme

In Erweiterung des im Abschnitt 1 betrachteten Problems wollen wir jetzt Schmelz- und Kristallisationsvorgänge in mehreren Raumdimensionen untersuchen. Dazu sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein Gebiet mit Rand  $\Gamma := \partial\Omega$  und  $N > 1$ . Dieses zerfalle in zwei disjunkte Teilgebiete mit jeweils flüssiger und fester Phase der Materie, wie in Abbildung 5 zur Zeit  $t = 0$  dargestellt.

Dabei haben wir angenommen, daß der Rand  $\Gamma$  sich aus zwei disjunkten Teilstücken  $\Gamma'$  und  $\Gamma''$  zusammensetzt ( $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$  und  $\Gamma' \cap \Gamma'' = \emptyset$ ). Auf diesen Teilrändern, die in keiner Beziehung zur Lage der Phasengrenze  $S_0$  stehen und die sich auch mit

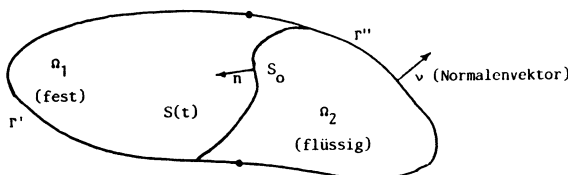


Abbildung 5

der Zeit nicht ändern sollen, werden später unterschiedliche Typen von Randbedingungen vorgegeben.

Es ist das Ziel, bei Kühlung der festen und Erwärmung der flüssigen Phase die Wärmeverteilung und die Lage der Schmelzgrenze zu bestimmen und dann später durch Veränderung der Randbedingungen zu steuern. Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein:

$$Q := \Omega \times (0, T),$$

$$\Phi := \bigcup_{t \in (0, T)} S(t) \times \{t\} \quad (\text{freie Randfläche}),$$

$\Theta$  Temperatur,

$c(\Theta) \geq 0$  Wärmekapazität,

$k(\Theta) > 0$  Wärmeleitfähigkeit,

$L \geq 0$  latente Wärme,

$v$  Permeabilität von  $\Gamma$ .

Es wird hier durchaus zugelassen, daß die Wärmekapazität und die latente Wärme verschwinden, um auch gewisse entartete Fälle betrachten zu können.

Mit diesen Bezeichnungen genügt die Temperatur und die freie Randfläche dem folgenden Anfangs-Randwertproblem vom Stefan-Typ:

Die Wärmeleitungsgleichung mit Anfangs- und Randwertbedingungen:

$$(2.1) \quad c(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\Theta) \operatorname{grad} \Theta) = f \quad \text{in } Q \setminus \Phi$$

$$(2.2) \quad \Theta(x, 0) = \Theta_0(x) \quad \text{in } \Omega$$

$$(2.3) \quad \Theta = u \quad \text{auf } \Gamma' \times (0, T) =: \Sigma'$$

$$(2.4) \quad k(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} + v \int_0^\Theta k(\xi) d\xi = w \quad \text{auf } \Gamma'' \times (0, T) =: \Sigma''$$

Bedingungen auf der freien Randfläche  $\Phi$ :

$$(2.5) \quad \Theta = 0$$

$$(2.6) \quad [k(\Theta) \operatorname{grad} \Theta]_{\text{fest}}^{\text{flüssig}} \cdot \vec{n}_x = Ln_t \quad \text{auf } \Phi.$$

Dabei bedeutet  $[f]_{\text{fest}}^{\text{flüssig}}$  den Sprung von  $f$  auf der freien Randfläche  $\Phi$  und  $\vec{n}_x$  die Projektion von  $\vec{n}$  in den Teilraum der Ortskoordinaten bzw.  $n_t$  die Projektion von  $\vec{n}$  auf die Zeitkoordinate.

Durch das (räumlich mehrdimensionale) Stefan-Problem (2.1)–(2.6) werden zahlreiche Anwendungen aus Technik und Physik modelliert. Etwa die Glättung von Oberflächen durch einen elektrochemischen Prozeß [32] führt auf ein entartetes Stefan-Problem mit  $c(\Theta) \equiv 0$  und  $L = 0$ . Der Verfestigungsprozeß von Stahl beim Stranggießen [31] läßt sich im einfachsten Fall durch die Gleichungen (2.1)–(2.6) beschreiben. Schließlich sei noch auf die mathematische Formulierung des Kristallzieh-Vorganges [11], [27] hingewiesen. Diese Beispiele werden uns im weiteren Verlauf dieses Artikels bei den numerischen Rechnungen wieder begegnen.

## 2.1 Die Variationsungleichung

Zur Vereinfachung der Differentialgleichung (2.1) führen wir die Kirchhoff-Transformation durch:

$$\Theta := K(\Theta) := \int_0^\Theta k(\xi) d\xi.$$

Man beachte, daß hierbei die „Kirchhofftemperatur“ wieder mit  $\Theta$  bezeichnet wurde. Das Anfangs-Randwertproblem (2.1)–(2.6) vereinfacht sich dann:

$$(2.7) \quad \rho(\Theta)\Theta_t - \Delta\Theta = f \quad \text{in } Q \setminus \Phi,$$

$$(2.8) \quad \Theta(x, 0) = \Theta_0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(2.9) \quad \Theta = u \quad \text{auf } \Sigma' := \Gamma' \times (0, T),$$

$$(2.10) \quad \Theta_\nu + \nu\Theta = w \quad \text{auf } \Sigma'' := \Gamma'' \times (0, T),$$

$$(2.11) \quad \Theta = 0 \quad \text{auf } \Phi,$$

$$(2.12) \quad [\text{grad } \Theta]_{\text{fest}}^{\text{flüssig}} \cdot \vec{n}_x = L n_t \quad \text{auf } \Phi.$$

In den Gleichungen (2.8)–(2.10) bedeutet  $\Theta_0$  bzw.  $u$  und  $w$  jeweils die Kirchhoff-transformierte Ausgangsgröße. Ferner wurde zur Abkürzung

$$\rho(\Theta) := \frac{c(K^{-1}(\Theta))}{k(K^{-1}(\Theta))}$$

gesetzt.

Das Problem (2.7)–(2.12) hat im allgemeinen keine klassische Lösung global in der Zeit. Wir benötigen allerdings für die Formulierung des Kontrollproblems eine globale Lösung. Das macht es nötig, einen schwächeren Lösungsbegriff einzuführen. Dazu erweist sich der Übergang zur Enthalpie als neuer Variablen als besonders geeignet. Wir führen zunächst die charakteristische Funktion  $\chi$  durch

$$\chi(x, t) := \begin{cases} 1 & \text{für } (x, t) \in Q_2 \\ 0 & \text{für } (x, t) \in Q \setminus Q_2 \end{cases}$$

ein, wobei  $Q_2 := \bigcup_{t \in (0, T)} \Omega_2(t) \times \{t\}$  gesetzt wurde. Der „innere Teil“ des Gleichungssystems (2.7)–(2.12) läßt sich dann in der Form

$$\rho(\Theta)\Theta_t - \Delta\Theta = f - L \cdot \chi_t \quad \text{in } \mathcal{D}'(Q)$$

schreiben. Mit Einführung des Enthalpiegraphen

$$\gamma_0(\Theta) := \tilde{\gamma}_0(\Theta) + L \cdot H(\Theta),$$

wobei  $\tilde{\gamma}_0(\Theta) := \int_0^\Theta \rho(\xi) d\xi$  und  $H$  der Heaviside-Graph ist, kommen wir zu der folgenden Enthalpie-Formulierung des Stefan-Problems:

$$(2.13) \quad w_t - \Delta\Theta = f \quad \text{in } Q,$$

$$(2.14) \quad w \in \gamma_0(\Theta) \quad \text{in } Q,$$

$$(2.15) \quad w_0 \in \gamma_0(\Theta_0) \quad \text{in} \quad \Omega,$$

wobei  $w_0(x) = w(x, 0)$  die Enthalpie zur Anfangszeit  $t = 0$  bezeichnet.

Die Formulierung (2.13)–(2.15) hat den Vorteil, daß man die freie Randfläche

nicht mehr mitberechnen muß. Allerdings ist jetzt eine Ungleichung zu lösen.

Um die Variable  $w$  zu eliminieren, führen wir die Baiocchi-Transformation durch:

$$\Theta(x, t) := \int_0^t \Theta(x, s) ds.$$

Hierbei wurde die Transformierte, auch „Freezing index“ genannt, wieder mit  $\Theta$  bezeichnet. Aus (2.13)–(2.15) fließt dann das System:

$$(2.16) \quad \gamma_0(\Theta_t) - \Delta \Theta \in f \quad \text{in} \quad Q,$$

$$(2.17) \quad \Theta = u \quad \text{auf} \quad \Sigma',$$

$$(2.18) \quad \partial_\nu \Theta + \nu \Theta = w \quad \text{auf} \quad \Sigma'',$$

$$(2.19) \quad \Theta(0) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Man beachte, daß jeweils  $f(x, t) := \int_0^t f(x, s) ds + w_0(x)$ ,  $u(x, t) := \int_0^t u(x, s) ds$  und  $w(x, t) := \int_0^t w(x, s) ds$  gesetzt wurde.

Nun läßt sich der Heaviside-Graph  $H(r)$  als Subdifferential der Funktion  $\psi_0(r) := \max\{0, r\}$  schreiben:

$$H(r) = \partial \psi_0(r).$$

Aus der Definition des Subdifferentials fließt dann unmittelbar die folgende Variationsgleichung vom parabolischen Typ:

$$\begin{aligned} & (\tilde{\gamma}_0(\Theta_t(t)) - f(t), z - \Theta_t(t))_{L^2(\Omega)} + a(\Theta(t), z - \Theta_t(t)) - \\ & - (w(t), z - \Theta_t(t))_{L^2(\Gamma'')} + L \int_{\Omega} \psi_0(z) - L \int_{\Omega} \psi_0(\Theta_t(t)) \geq 0, \\ & \Theta(0) = 0, \end{aligned}$$

für alle  $z \in K(t) := \{z \in H^1(\Omega) \mid z|_{\Gamma'} = u(t)\}$  und für fast alle  $t \in [0, T]$ .

Die Bilinearform  $a$  wurde hierbei definiert durch

$$\begin{aligned} a(\Theta(t), z - \Theta_t(t)) := & (\text{grad } \Theta(t), \text{grad } (z - \Theta_t(t)))_{L^2(\Omega)} - \\ & - (\nu \Theta(t), z - \Theta_t(t))_{L^2(\Gamma'')}. \end{aligned}$$

Nach geeigneter Fortsetzung von  $u$  und einem Shift um diese Funktion erhält man schließlich das Variationsproblem, mit dem wir uns hier befassen wollen:

(VU) Gesucht wird eine Funktion  $\Theta \in H^1(0, T; V_0)$ ,  $V_0 := \{z \in H^1(\Omega) \mid z|_{\Gamma'} = 0\}$ , so daß die Ungleichung

$$\begin{aligned} & (\tilde{\gamma}_0(\Theta_t(t) + u_t(t)) - f(t), z - \Theta_t(t))_{L^2(\Omega)} + \\ & + a(\Theta(t) + u(t), z - \Theta_t(t)) - (w(t), z - \Theta_t(t))_{L^2(\Gamma'')} + \\ & + L \int_{\Omega} \psi_0(z + u_t(t)) - L \int_{\Omega} \psi_0(\Theta_t(t) + u_t(t)) \geq 0, \end{aligned}$$

$$\Theta(0) = 0,$$

für alle  $z \in V_0$  und fast alle  $t \in [0, T]$  gilt.

Wir nehmen jetzt an, daß die Funktion  $\rho$  sich in der Form

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \tilde{\rho}(\tau) & \text{für } \tau < 0, \\ \tilde{\rho}(\tau) + \bar{\rho} & \text{für } \tau \geq 0 \end{cases}$$

darstellen läßt mit einer Funktion  $\tilde{\rho} \in C^1(\mathbf{R})$ , die noch weitere Beschränktheitseigenschaften haben soll, die wir hier nicht weiter auflisten wollen. Unter den nachfolgenden Voraussetzungen an die Daten erhält man die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Variationsungleichung (VU).

Voraussetzungen:

$$(A1) \quad 0 \leq \bar{\rho} \leq \rho(\tau) \leq \bar{\rho} < \infty, \quad \tau \in \mathbf{R}$$

$$(A2) \quad f \in L^2(Q)$$

$$(A2) \quad f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$$

$$(A3) \quad \Theta_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \Theta_0|_{\Gamma'} = u(0)$$

$$(A4) \quad v \in L^\infty(\Gamma''),$$

$$v \geq 0, \text{ meas}(\Gamma' \cup \{x \in \Gamma'' \mid v(x) > 0\}) > 0$$

$$(A5) \quad w \in L^2(\Sigma'')$$

$$(A5)' \quad w \in H^1(0, T; L^2(\Gamma''))$$

$$(A6) \quad u \in W^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega))$$

$$u|_{\Sigma'} = \text{Randwerte von } u$$

Um die Existenz einer Lösung der Variationsungleichung nachzuweisen, werden folgende Teilschritte durchgeführt:

(a) Parabolisierung des eventuell entarteten Problems:

$$\tilde{\rho}_\mu(r) := \tilde{\rho}(r) + \mu,$$

mit  $0 \leq \mu \leq 1$ .

(b) Glättung des Heaviside-Graphen:

Wähle  $\chi_\epsilon \in C^2(\mathbf{R})$ , mit  $0 < \epsilon \leq 1$  und definiere

$$\rho_{\mu\epsilon}(r) := \tilde{\rho}_\mu(r) + \tilde{\rho}\chi_\epsilon(r), \quad \gamma_{\mu\epsilon}(r) := \tilde{\gamma}_{\mu\epsilon}(r) + L\chi_\epsilon(r).$$

Als Konsequenz des Glättungsprozesses wird aus der Variationsungleichung eine Standard-Variationsgleichung, die mit Galerkin-Approximation behandelt werden kann:

$$\left( \gamma_{\mu\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Theta_{\mu\epsilon}(t) + u_t(t) \right) - f_{\mu\epsilon}(t), z \right)_{L^2(\Omega)} + a(\Theta_{\mu\epsilon}(t) + u(t), z) - (w(t), z)_{L^2(\Gamma'')} = 0$$

$$\Theta(0) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

für alle  $z \in V_0$  und fast alle  $t \in [0, T]$ .

**Satz 2.1** (vgl. [25, 49]). *Die Variationsungleichung (VU) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung mit folgender Regularität:*

1. *Im parabolischen Fall ( $\bar{\rho} > 0$ ) mit*

$$(a) \ w \in H^1(0, T; L^2(\Gamma'')): \quad \Theta \in H^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(b) \ w \in L^2(\Sigma''): \quad \Theta \in H^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)).$$

2. *Im degenerierten Fall ( $\bar{\rho} = 0$ ) mit*

$$(a) \ w \in H^1(0, T; L^2(\Gamma'')): \quad \Theta \in H^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega)),$$

$$(b) \ w \in L^2(\Sigma''): \quad \Theta \in H^1(0, T; H^1(\Omega)). \quad \square$$

Die Eindeutigkeit erhält man als Zusatzinformation aus geeigneten Stabilitätsabschätzungen.

Der Existenzsatz gibt einen Hinweis darauf, aus welchem Raum die mögliche Steuervariable  $w$  genommen werden darf und wie die zugehörigen Zustandsräume aussehen.

## 2.2 Das Kontrollproblem

Der Einfachheit halber beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf  $\Gamma = \Gamma''$ , also reine 3. Randbedingungen. Als Steuerungsraum  $W$  bieten sich nach Satz 2.1 zwei Möglichkeiten an:

$$W := W_0 := L^2(\Sigma) \quad \text{oder} \quad W := W_1 := H^1(0, T; L^2(\Gamma)).$$

Das Kostenfunktional zur Bewertung der gewählten Steuerung wird durch

$$\begin{aligned} J(y, y|_{\Sigma}, y|_{\Gamma}; w) := & \alpha_1 \|y - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \alpha_2 \|y|_{\Sigma} - y_{d\Sigma}\|_{L^2(\Sigma)}^2 \\ & + \alpha_3 \|y|_{\Gamma} - y_{d\Gamma}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_4 \|w\|_W^2 \end{aligned}$$

definiert, wobei  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) nichtnegative und  $\alpha_4$  positive Konstanten sind.

Das Kontrollproblem läßt sich jetzt formulieren:

(CP)<sub>1</sub> Minimiere  $J(\Theta_t, \Theta_t|_{\Sigma}, \Theta_t|_{\Gamma}; w)$  bezüglich  $w \in W_1$ , wobei  $\Theta = \Theta(w)$  die Variationsungleichung löst,

oder

(CP)<sub>2</sub> Minimiere  $J(\Theta, \Theta|_{\Sigma}, \Theta|_{\Gamma}; w)$  bezüglich  $w \in W_0$ , wobei  $\Theta = \Theta(w)$  die Variationsungleichung löst.

Es läßt sich zeigen, daß beide Probleme eine Lösung besitzen [25, 49], die jedoch im allgemeinen nicht eindeutig ist. Aus Gründen der Berechenbarkeit interessiert uns hier mehr die differenzierbare Abhängigkeit des Zustandes von der Steuerung  $w$ . Wir beschränken uns dabei auf den Fall  $W = W_0$  und  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_4 = \alpha/2$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Leider ist der Beobachtungsoperator

$$O : W_0 \rightarrow L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega),$$

$$w \mapsto (\Theta, \Theta|_{\Sigma}, \Theta|_{\Gamma})$$

im allgemeinen nur Lipschitz-stetig. Es wird also erneut nötig, den zum  $\mu\epsilon$ -geglätteten Problem gehörenden Beobachtungsoperator  $O_{\mu\epsilon}$  zu betrachten.

**Satz 2.2** (vgl. [25, 49]). *Es sei  $\bar{\rho}_\mu > 0$ . Der Operator  $\partial_{\mu\epsilon}$  hat eine Gateaux-Ableitung  $D\partial_{\mu\epsilon}(w)\delta w$  an der Stelle  $w \in W_0$  in Richtung von  $\delta w$ , und*

$$D\partial_{\mu\epsilon}(w)\delta w =: \dot{\xi}_{\mu\epsilon}$$

genügt der Variationsgleichung

$$\left( D\gamma_{\mu\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Theta_{\mu\epsilon}(t) \right) \frac{\partial}{\partial t} \xi_{\mu\epsilon}(t), z \right)_{L^2(\Omega)} + a(\xi_{\mu\epsilon}(t), z) = \left( \int_0^t \delta w(s) ds, z \right)_{L^2(\Gamma)},$$

$$\xi_{\mu\epsilon}(0) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

für alle  $z \in H^1(\Omega)$  und fast alle  $t \in [0, T]$ .

Mit  $D\gamma_{\mu\epsilon}$  wurde die Gateaux-Ableitung der Abbildung  $\gamma_{\mu\epsilon} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  bezeichnet.

**Beweisskizze.** Es sei  $\lambda > 0$  gegeben.

$$\dot{\Theta}_{\lambda\mu\epsilon} := \partial_{\mu\epsilon}(w + \lambda\delta w), \quad \dot{\Theta}_{\mu\epsilon} := \partial_{\mu\epsilon}(w),$$

$$\xi_{\lambda\mu\epsilon} := \frac{\dot{\Theta}_{\lambda\mu\epsilon} - \dot{\Theta}_{\mu\epsilon}}{\lambda}, \quad \eta_{\lambda\mu\epsilon} := \frac{\gamma_{\mu\epsilon}(\dot{\Theta}_{\lambda\mu\epsilon}) - \gamma_{\mu\epsilon}(\dot{\Theta}_{\mu\epsilon})}{\lambda}.$$

Für diese Größen folgt durch Subtraktion der entsprechenden Variationsgleichungen:

$$(\eta_{\lambda\mu\epsilon}(t), z)_{L^2(\Omega)} + a(\xi_{\lambda\mu\epsilon}(t), z) = \int_0^t (\delta w(s), z)_{L^2(\Gamma)} ds,$$

$$\xi_{\lambda\mu\epsilon}(0) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

für alle  $z \in H^1(\Omega)$  und fast alle  $t \in [0, T]$ .

Diese Gleichung wird mit  $z := \dot{\xi}_{\lambda\mu\epsilon}$  getestet und über  $[0, t]$  integriert. Nach partieller Integration der rechten Seite und unter Beachtung, daß  $\gamma_{\mu\epsilon}$  streng monoton und die Bilinearform  $a$   $H^1(\Omega)$ -elliptisch ist, folgt mit Hilfe der Youngschen und Gronwallschen Ungleichung die Beziehung

$$\|\xi_{\lambda\mu\epsilon}\|_{L^\infty(0, T; V)} + \bar{\rho}_\mu^{1/2} \|\dot{\xi}_{\lambda\mu\epsilon}\|_{L^2(Q)} \leq C$$

mit einem von  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\epsilon$  unabhängigen  $C$ .

Aus dem Mittelwertsatz und der Konstruktion von  $\gamma_{\mu\epsilon}$  schließt man:

$$\|\eta_{\lambda\mu\epsilon}\|_{L^2(Q)} \leq \frac{C}{\epsilon} \|\xi_{\lambda\mu\epsilon}\|_{L^2(Q)} \leq \frac{C}{\epsilon \bar{\rho}_\mu^{1/2}}.$$

**Folgerung:**

$$\xi_{\lambda\mu\epsilon} \rightarrow \xi_{\mu\epsilon} \quad \text{schwach* in } L^\infty(0, T, V),$$

$$\quad \quad \quad \text{schwach in } H^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\eta_{\lambda\mu\epsilon} \rightarrow \eta_{\mu\epsilon} \quad \text{schwach in } L^2(Q).$$

Damit kann man in der Variationsgleichung zum Limes übergehen.

Es bleibt noch

$$\eta_{\mu\epsilon} = D\gamma_{\mu\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Theta_{\mu\epsilon} \right) \dot{\xi}_{\mu\epsilon}$$

zu zeigen. Das geschieht mit Hilfe der Taylorentwicklung.  $\square$

Der Nachweis der Differenzierbarkeit des Operators  $\mathcal{O}_{\mu\epsilon}$  ist die Voraussetzung zur Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen. Dazu führen wir die adjungierte Variationsgleichung ein:

$$(AP) \quad \left( D\gamma_{\mu\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Theta_{\mu\epsilon}(t) \right) \frac{\partial}{\partial t} p_{\mu\epsilon}(t), z \right)_{L^2(\Omega)} - a(p_{\mu\epsilon}(t), z) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \Theta_{\mu\epsilon}(t) - \Theta_d(t), z \right)_{L^2(\Omega)}$$

$$p_{\mu\epsilon}(T) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

für alle  $z \in H^1(\Omega)$  und fast alle  $t \in [0, T]$ .

**Satz 2.3** (vgl. [25, 49]). *Es sei  $w_{\mu\epsilon} \in W$  eine optimale Steuerung. Dann gilt: Es gibt ein  $p_{\mu\epsilon} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$  mit der Eigenschaft:*

- (i)  $p_{\mu\epsilon}$  löst (AP) $_{\mu\epsilon}$ ,
- (ii)<sub>1</sub>  $p_{\mu\epsilon}|_\Sigma = \alpha w_{\mu\epsilon}$  für  $W = W_0$
- (ii)<sub>2</sub>  $\tilde{p}_{\mu\epsilon}|_\Sigma = \alpha \dot{w}_{\mu\epsilon}$ ,
- $\tilde{p}_{\mu\epsilon}(0) = \alpha w_{\mu\epsilon}(0)$  für  $W = W_1$ ,

wobei  $\tilde{p}_{\mu\epsilon}(t) = \int_t^T p_{\mu\epsilon}(s) ds$  gesetzt wurde.

**B e w e i s** (nur für den Fall  $W = W_0$ ).

$$\begin{aligned} DJ_{\mu\epsilon}(w)\delta w &= (\mathcal{O}_{\mu\epsilon}(w) - \Theta_d, D\mathcal{O}_{\mu\epsilon}(w)\delta w)_{L^2(Q)} + \alpha(w, \delta w)_{L^2(\Sigma)} \\ &= \int_0^T [(D\gamma_{\mu\epsilon}(\dot{\Theta}_{\mu\epsilon}(t))\dot{p}_{\mu\epsilon}(t), \dot{\xi}_{\mu\epsilon}(t))_{L^2(Q)} - a(p_{\mu\epsilon}(t), \dot{\xi}_{\mu\epsilon}(t))] dt + \alpha(w, \delta w)_{L^2(\Sigma)} \\ &= \int_0^T \left( \int_0^t \delta w(s) ds, \dot{p}_{\mu\epsilon}(t) \right)_{L^2(\Gamma)} dt + \alpha \int_0^T (w, \delta w)_{L^2(\Gamma)} dt \\ &= - \int_0^T (\delta w, p_{\mu\epsilon})_{L^2(\Gamma)} dt + \alpha \int_0^T (w, \delta w)_{L^2(\Gamma)} dt \\ &= \int_0^T (-p_{\mu\epsilon}(t) + \alpha w(t), \delta w(t))_{L^2(\Gamma)} dt \end{aligned}$$

Folglich:

$$DJ_{\mu\epsilon}(w) = 0 \Rightarrow p_{\mu\epsilon}|_\Gamma(t) = \alpha w(t). \quad \square$$

Der Frage der Konvergenz des Wertes des Kostenfunktional für  $\mu \rightarrow 0$  und  $\epsilon \rightarrow 0$  wird in [25, 49] nachgegangen. Es zeigt sich, daß Konvergenz gegen den Optimalwert des ungeglätteten und nichtregularisierten Ausgangsproblems vorliegt.



Die notwendigen Bedingungen von Satz 2.3 sind der Ausgangspunkt für numerische Berechnungen.

### 2.3 Numerische Lösung des Steuerungsproblems

Zur Anwendung eines Gradientenverfahrens muß in jedem Schritt der Gradient von  $J_{\mu\epsilon}$  berechnet werden. Das geschieht in folgenden Schritten.

0. Setze  $n = 0$  und gebe  $w(0) \in W$  vor.

1. Löse die Variationsgleichung zur Berechnung von

$$\frac{\partial}{\partial t} \Theta_{\mu\epsilon}^{(n)} := \partial_{\mu\epsilon}(w^{(n)}).$$

2. Berechne  $J_{\mu\epsilon}(w^{(n)})$  und teste auf Abbruch.

3. Löse die adjungierte Variationsgleichung zur Berechnung von  $p_{\mu\epsilon}^{(n)}$ .

4. „Line search“ zur Bestimmung von  $w^{(n+1)}$ :

$$w^{(n+1)} = w^{(n)} - \beta_n [\alpha w^{(n)} - p_{\mu\epsilon}^{(n)}].$$

5. Gehe zu 1.

Mit diesem Algorithmus wurden einige numerische Testrechnungen durchgeführt.

**Experiment 1** (Ziel: Realisierung eines vorgegebenen freien Randes zur Endzeit  $T$ , s. S. 85)

$$\rho(\Theta) := \begin{cases} 1 & \text{für } \Theta < 0 \\ 0.2 & \text{für } \Theta > 0; \end{cases}$$

$$L = 1, \quad \nu = 1;$$

$$J(w) := \frac{1}{2} \|\chi(w) - \chi_T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta_0 \|w(0)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \beta_1 \|\dot{w}\|_{L^2(\Sigma)},$$

$$w \in W_1,$$

$\chi(w)$  charakteristische Funktion von  $Q_2$  zur Endzeit  $T$ ,

$\chi_T \in L^2(\Omega)$  charakteristische Funktion eines Teilgebietes von  $\Omega$ , die als Referenzfunktion dient.

**Experiment 2** (Ziel: Realisierung einer vorgegebenen räumlichen Verteilung der Temperatur  $\Theta$  zur Endzeit  $T$ , s. S. 86/87)

$$\rho(\Theta) := \begin{cases} 10 & \text{für } \Theta < 0 \\ 5 & \text{für } \Theta > 0 \end{cases}$$

$$L = 0.5, \quad \nu = 1;$$

$$J(w) := \frac{1}{2} \|\Theta(w) - \Theta_T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta_0 \|w(0)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \beta_1 \|\dot{w}\|_{L^2(\Sigma)},$$

$$w \in W_1,$$

$\Theta_T \in L^2(\Omega)$  Referenz-Verteilung der Temperatur zur Endzeit  $T$ .

**Experiment 3** (Ziel: Realisiere eine erwünschte Bewegung des freien Randes, s. S. 88/89)

$$\rho(\Theta) := \begin{cases} 10 & \text{für } \Theta < 0 \\ 5 & \text{für } \Theta > 0 \end{cases}$$

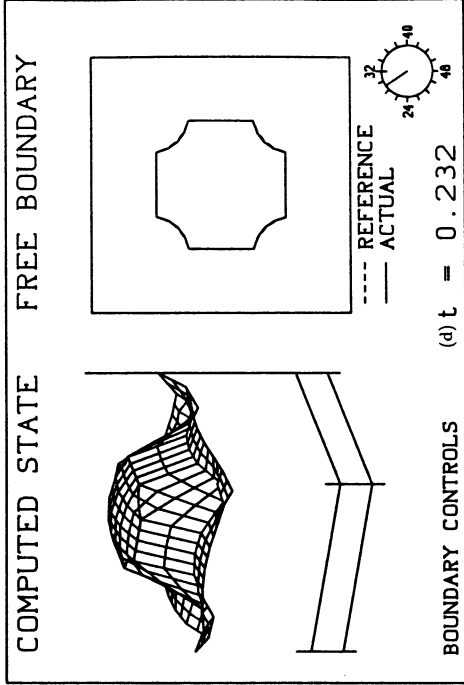
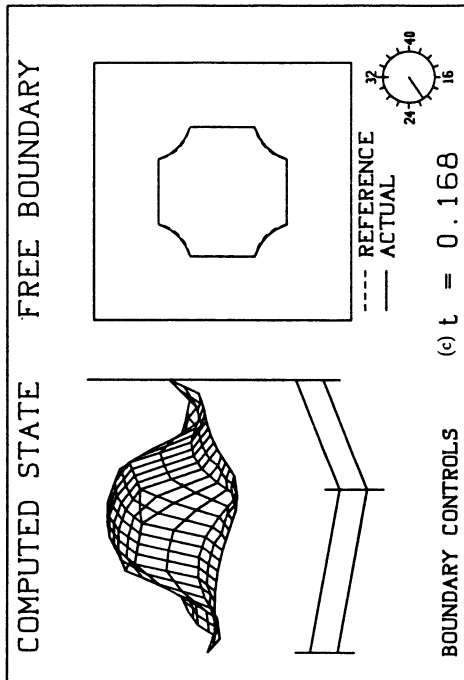
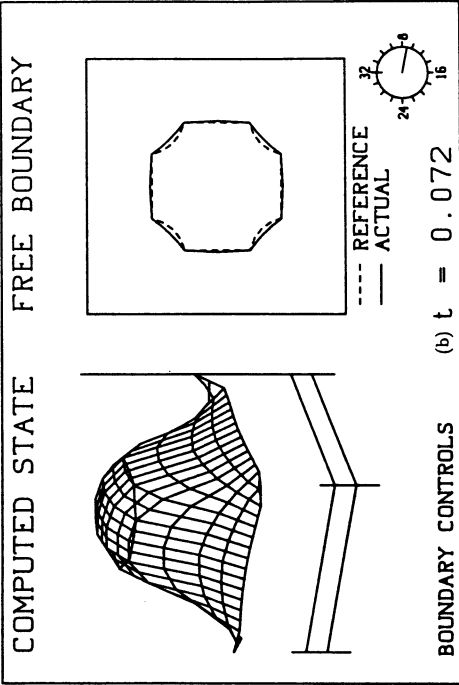
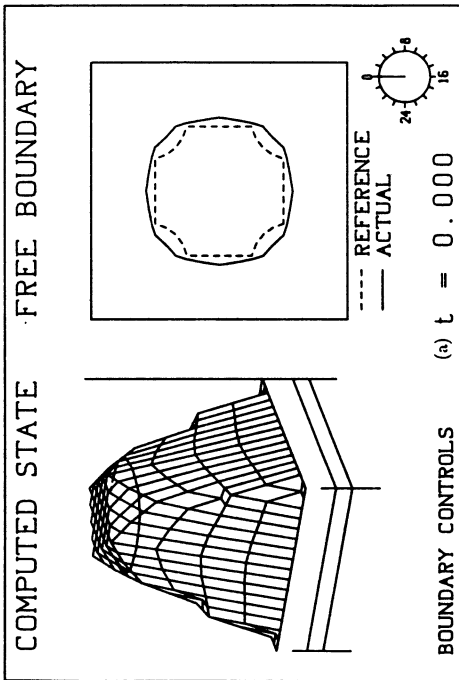
$$L = 5, \quad \nu = 1;$$

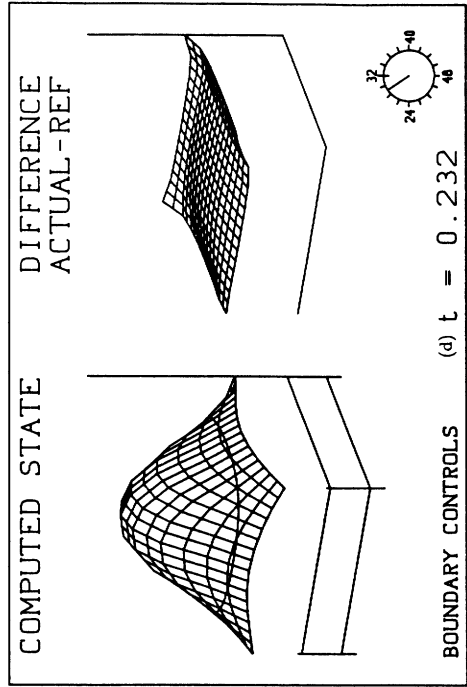
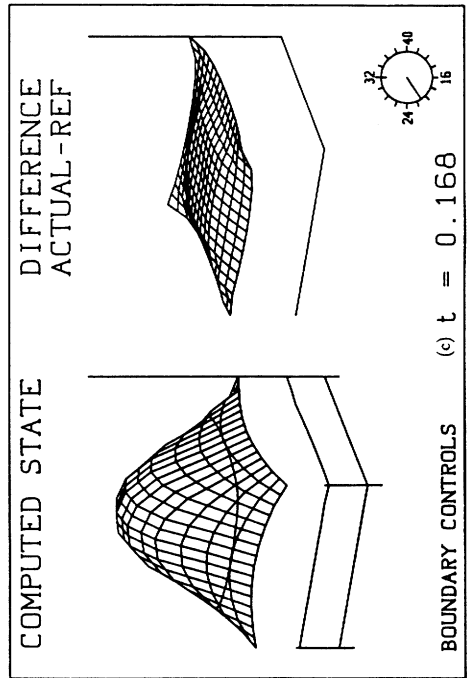
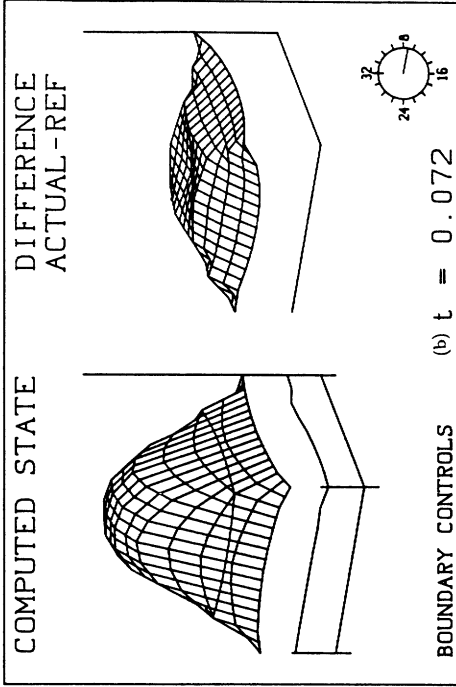
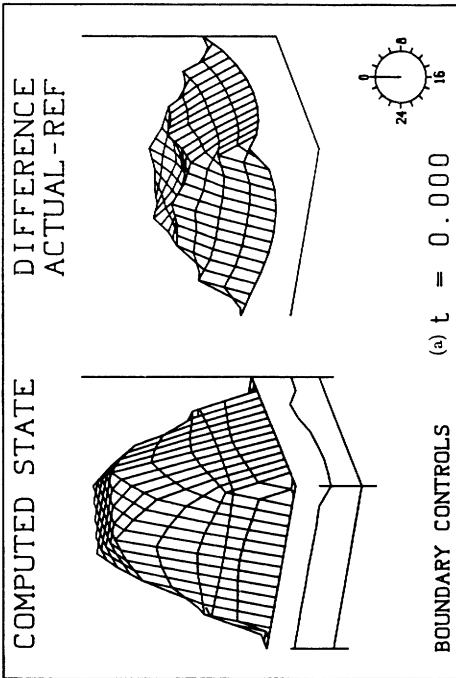
$$J(w) := \frac{1}{2} \|\chi(w) - \Theta_g\|_{L^2(Q)}^2 + \beta_0 \|w(0)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \beta_1 \|\dot{w}\|_{L^2(\Sigma)},$$

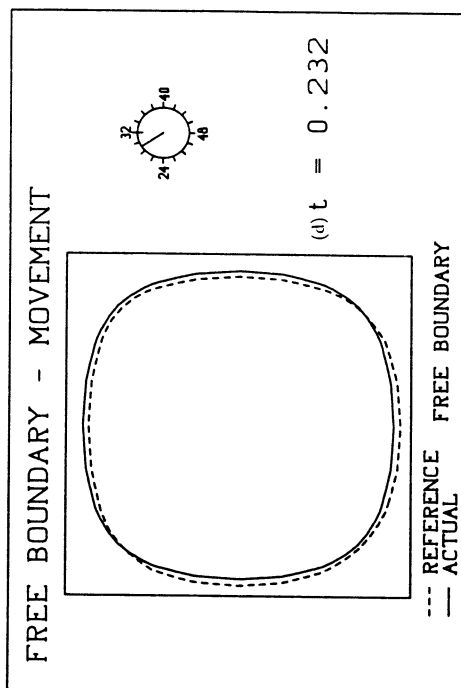
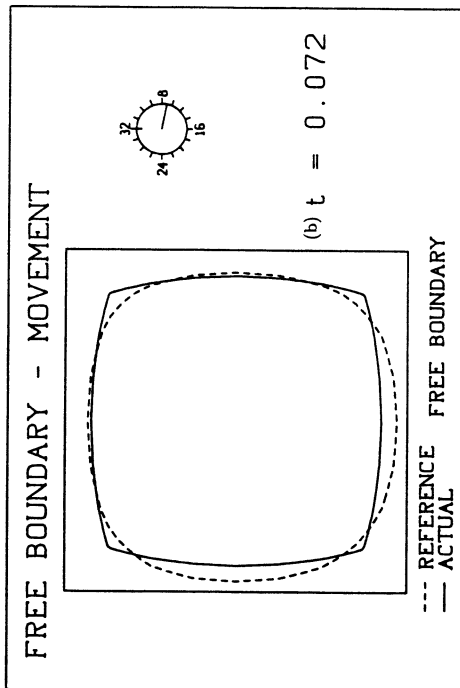
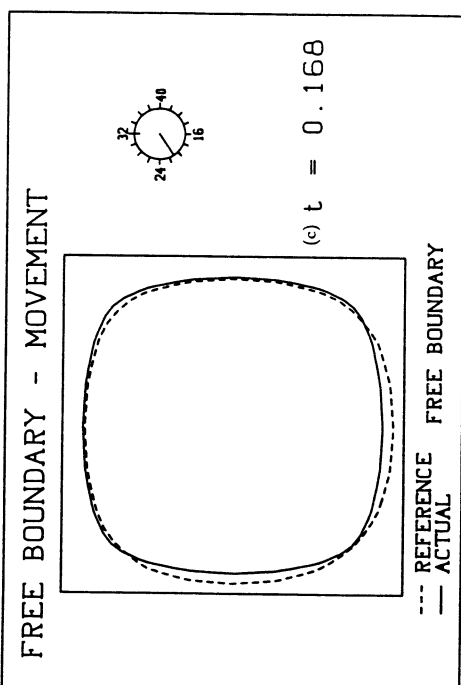
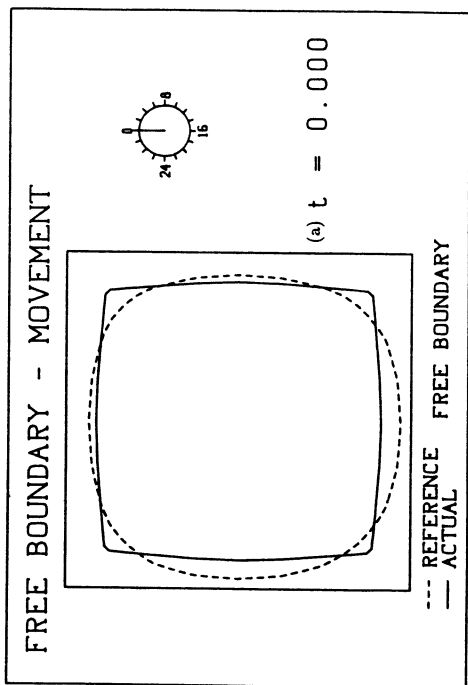
$$w \in W_1,$$

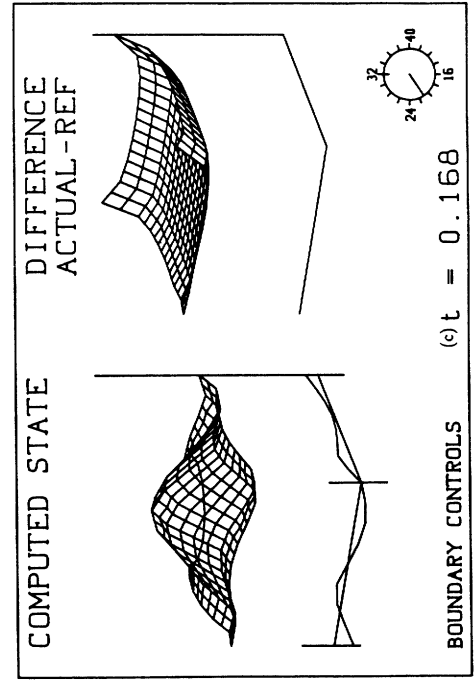
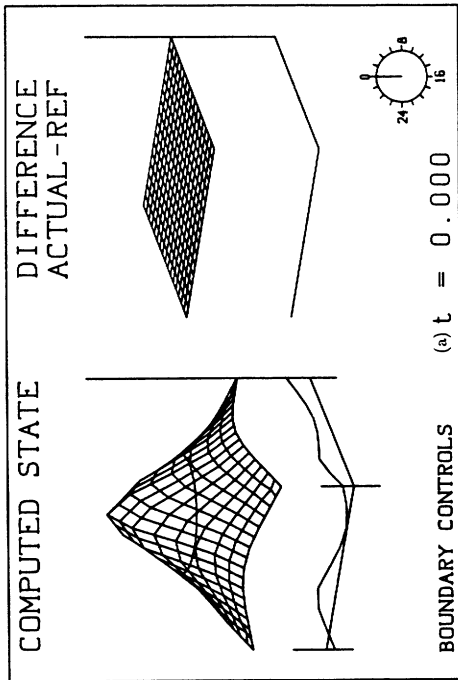
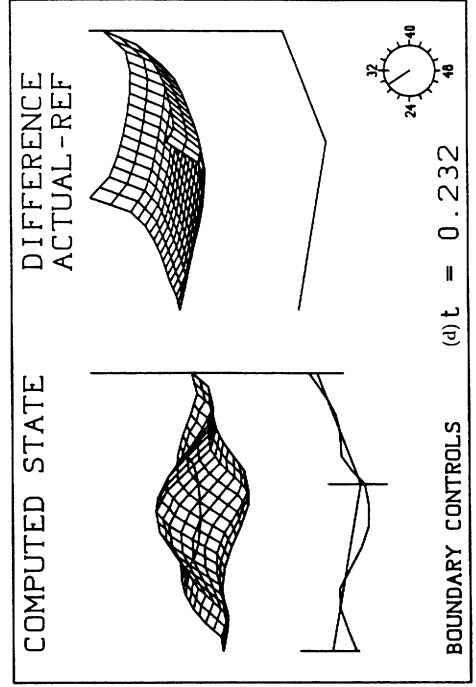
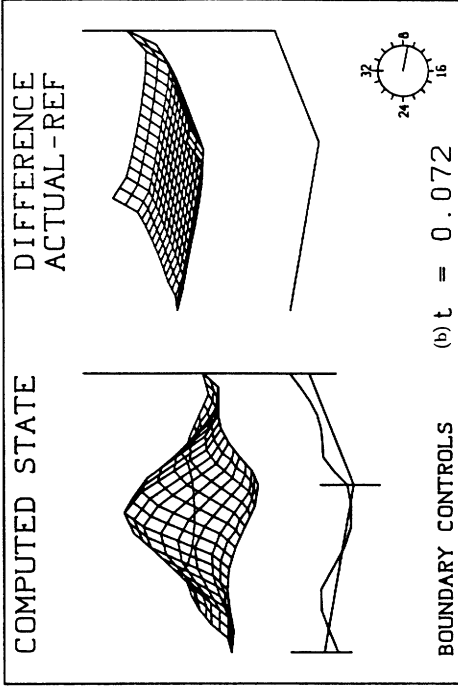
$\chi(w)$  charakteristische Funktion von  $\{(x, t) \mid \Theta(x, t; w) > 0\}$

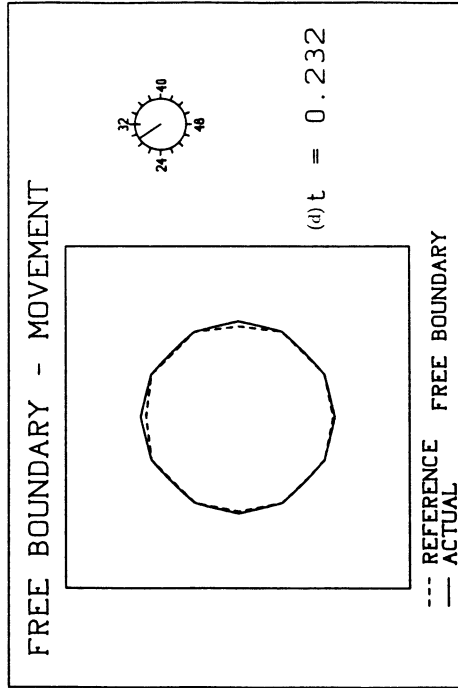
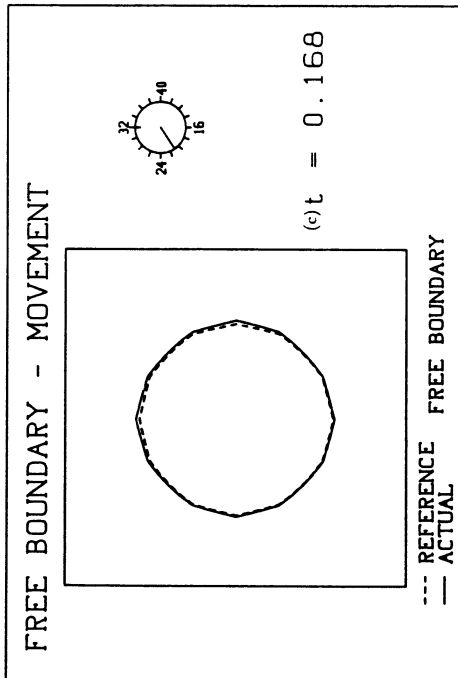
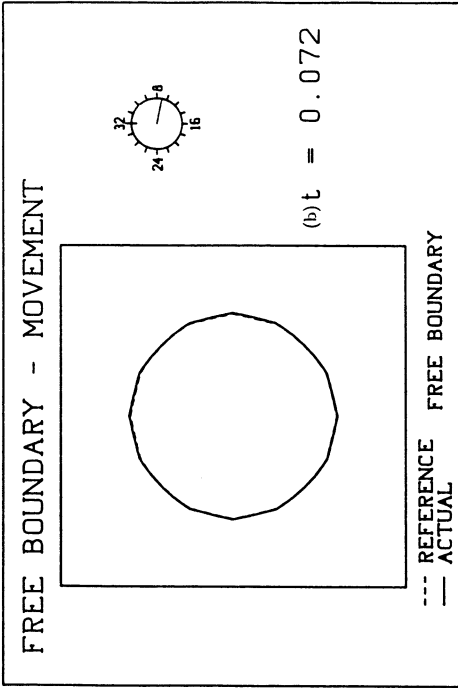
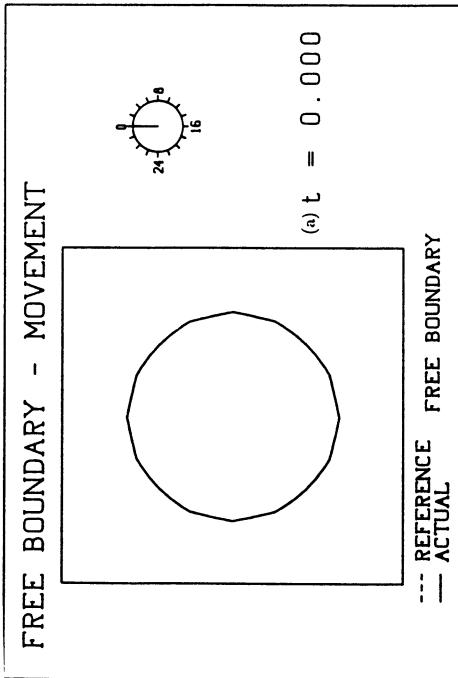
$\chi_g = \chi_g(x, t)$  gegebene charakteristische Funktion einer Referenzphase  $\{(x, t) \in Q \mid \Theta_g(x, t) > 0\}$ .











## Literatur

- [1] Albrecht, J.; Collatz, L.; Hoffmann, K.-H. (eds.): Numerische Behandlung freier Randwertaufgaben. Basel: Birkhäuser-Verlag 1981. = ISNM, Vol. 58
- [2] Arnautu, V.; Barbu, V.: Optimal control of the free boundary in a two-phase Stefan problem. Preprint No. 11, Math. Inst., INCREST, Bucharest 1985
- [3] Caffarelli, L. A.; Friedman, A.: Continuity of the temperature in the Stefan problem. *Indiana Univ. Math. J.* 28 (1979) 53–70
- [4] Barbu, V.: Necessary conditions for distributed control problems governed by parabolic variational inequalities. *SIAM J. Control Optim.* 19 (1981) 64–86
- [5] Barbu, V.: Boundary control problems with nonlinear state equation. *SIAM J. Control Optim.* 20 (1982) 125–143
- [6] Barbu, V.: Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Leyden: Noordhoff 1976
- [7] Barbu, V.: Optimal control of variational inequalities. Boston: Pitman 1984
- [8] Bermudez, A.; Saguez, C.: Optimal control of variational inequalities; optimality conditions and numerical methods.
- [9] Bermudez, A.; Saguez, C.: Optimal control of variational inequalities. *Control & Cyber.* 14 (1985) 9–30
- [10] Cannon, J. R.; Fasano, A.: Boundary value multidimensional problems in fast chemical reactions. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 53 (1973) 1–13
- [11] Crowley, A. B.: Mathematical modelling of heat flow in Czochralski crystal pulling. *IMA J. Appl. Math.* 30 (1983) 173–189
- [12] Elliott, C. M.: On a variational inequality formulation of an electrochemical machining moving boundary problem and its approximation by the finite element method. *J. Inst. Math. Applications* 25 (1980) 121–131
- [13] Elliott, C. M.; Ockendon, J. R.: Weak and variational methods for moving boundary problems. Boston: Pitman 1982
- [14] Fasano, A.; Primicerio, M. (Eds.): Free boundary problems – theory and applications, Vols. I, II. Boston: Pitman, 1983
- [15] Friedman, A.: Free boundary problems for parabolic equations: Melting of solids. *J. Math. and Mech.* 8 (1959) 499–518
- [16] Friedman, A.: Analyticity of the free boundary for the Stefan problem. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 61 (1976) 97–125
- [17] Friedman, A.: Variational principles and free-boundary problems. New York: J. Wiley 1982
- [18] Friedman, A.; Hoffmann, K.-H.: Control of free boundary problems with hysteresis. To appear in *SIAM J. on Control and Optimization* (1987)
- [19] Hoffmann, K.-H.: Identifizierungsprobleme bei Partiellen Differentialgleichungen. In: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Basel: Birkhäuser-Verlag 1981, 97–116. = ISNM 56
- [20] Hoffmann, K.-H.; Niezgodka, M.: Control of parabolic systems involving free boundaries. In: Fasano, A., Primicerio, M. (Eds.): Free Boundary Problems – Theory and Applications, Vol. II. Boston: Pitman 1983, 431–462
- [21] Hoffmann, K.-H.; Niezgodka, M.; Pawlow, J.; Sprekels, J.: Mathematical modelling of thermal and diffusive phase transitions – identification of parameters, numerical treatment. In: *Gel et Genie Civil. Technical University Warsaw* 1985, 39–54
- [22] Hoffmann, K.-H.; Niezgodka, M.; Sprekels, J.: Feedback control via thermostats of multidimensional two-phase Stefan problems. *Nonlinear Analysis, TMA*, to appear.
- [23] Hoffmann, K.-H.; Sprekels, J.: Real-time control in a free boundary problem connected with the continuous casting of steel. Basel: Birkhäuser-Verlag 1984, 127–143. = ISNM 68
- [24] Hoffmann, K.-H.; Sprekels, J.: On the identification of heat conductivity and latent heat in a one-phase Stefan problem. *Control & Cyber.* 14 (1985) 37–51
- [25] Hoffmann, K.-H.; Niezgodka, M.; Pawlow, J.; Sprekels, J.: Optimal control of free boundary problems. Monographie, in Vorbereitung.
- [26] Hoffmann, K.-H.; Sprekels, J.; Visintin, A.: Identification of hysteresis loops. To appear in *J. of Comp. Physics* (1987)



- [27] Jiang, Q.: An optimal control problem in crystal pulling process. Preprint Universität Augsburg 1986
- [28] Jerome, J. W.: Approximation of Nonlinear Evolution Systems. New York: Academic Press 1983
- [29] Kenmochi, N.; Pawlow, I.: A class of nonlinear elliptic-parabolic equations with time-dependent constraints. *Nonlinear Analysis, TMA*, in print
- [30] Kikuchi, N.; Ichikawa, Y.: Numerical methods for a two-phase Stefan problem by variational inequalities. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **14** (1979) 1221–1239
- [31] Laitinen, E.: Numerical approximation of heat transfer problems. University of Jyväskylä, Department of Mathematics, Licentiate Research 1986
- [32] McGeough, J. A.: Free and moving boundary problems in electrochemical machining and flame fronts. In: Fasano, A.; Primicerio, M. (Eds.): *Free Boundary Problems – Theory and Applications*, Vol. II. Boston: Pitman 1983, 472–482
- [33] Meirmanov, A. M.: On the classical solution of the multi-dimensional Stefan problem for quasilinear parabolic equations. *Matem. Sbornik* **112** (1980) 170–192
- [34] Mignot, F.; Puel, J. P.: Optimal control in some variational inequalities. *SIAM J. Control & Optim.* **22** (1984) 466–476
- [35] Neittaanmäki, P.; Tiba, D.: A descent method for the boundary control of a two-phase Stefan problem. Report No. 2, Lappeenranta Univ. Techn. 1983
- [36] Neittaanmäki, P.; Tiba, D.: A finite element approximation of the boundary control of two-phase Stefan problems. Report No. 4, Lappeenranta Univ. Techn. 1983
- [37] Niezgódka, M.: Some aspects of approximation of optimal control problems for systems governed by parabolic problems involving free boundaries. In: Albrecht, J.; Collatz, L.; Hoffmann, K.-H. (Eds.): *Numerische Behandlung freier Randwertaufgaben*. Basel: Birkhäuser-Verlag 1981, 211–223. = ISNM 58
- [38] Niezgódka, M.; Pawlow, I.: Optimal control for parabolic systems with free boundaries: existence of optimal solutions, approximation results. In: Iracki, K.; Malanowski, K.; Walukiewicz, S. (Eds.): *Optimization Techniques*. Berlin: Springer-Verlag 1980, 412–420
- [39] Niezgódka, M.; Pawlow, I.: A generalized Stefan problem in several space variables. *Applied Math. Optim.* **9** (1983) 193–224
- [40] Niezgódka, M.; Pawlow, I.: Numerical analysis of degenerate Stefan problems. *Control & Cybern.* **14** (1985) 127–143
- [41] Nochetto, R.: Error estimates for two-phase Stefan problems in several space variables. I: Linear boundary conditions, II: Non-linear flux conditions. *Calcolo*, to appear
- [42] Ockendon, J. R.; Hodgkins, A. R.: *Moving boundary problems in heat flow and diffusion*. Oxford: Clarendon Press 1975
- [43] Parker, R. L.: *Crystal growth mechanism: energetics, kinetics and transport*. New York: Academic Press 1970
- [44] Pawlow, I.: A variational inequality approach to generalized two-phase Stefan problem in several space variables. *Annali Mat. Pura Appl.* **131** (1982) 333–373
- [45] Pawlow, I.: Variational inequality formulation and optimal control of nonlinear evolution systems governed by free boundary problems. In: Hoffmann, K.-H.; Gorenflo, R. (Eds.): *Applied Nonlinear Functional Analysis*. Frankfurt/Main: Verlag P. Lang 1983, 213–250
- [46] Pawlow, I.: Approximation of boundary control problems for evolution variational inequalities arising from free boundary problems. In: Thoft-Christensen, P. (Ed.): *Modeling and Optimization of Systems*. Berlin: Springer-Verlag 1984, 362–372
- [47] Pawlow, I.: Error estimates for Galerkin approximation of boundary control problems for two-phase Stefan type processes. In: Barbu, V., et al. (Eds.): *Differential Equations and Control Theory*. INCREST, Bucharest 1983, 129–147
- [48] Pawlow, I.: Approximation of an evolution variational inequality arising from free boundary problems. In: Hoffmann, K.-H.; Krabs, W. (Eds.): *Optimal Control for Partial Differential Equations*. Basel: Birkhäuser-Verlag 1984, 188–209. = ISNM 68
- [49] Pawlow, I.: Analysis and control of evolution multi-phase problems with free boundaries. *Habilitationsschrift*, Technische Universität Warschau, 1986
- [50] Pawlow, I.; Shindo, Y.; Sakawa, Y.: Numerical solution of a multidimensional two-phase Stefan problem. *Numer. Func. Anal. Optim.* **8** (1985) 55–82
- [51] Preisach, F.: Über die magnetische Nachwirkung. *Z. Phys.* **94** (1935) 277–302
- [52] Rubinstein, L.: *The Stefan problem*. Riga: Zvaigzne 1967

- [53] S a g u e z , C.: Controle optimal de systèmes á frontiere libre. Thèse, Univ. Techn., Compiègne 1980
- [54] T i b a , D.: Boundary control for a Stefan problem. In: Hoffmann, H.-H.; Krabs, W. (Eds.): *Optimal Control for Partial Differential Equations*. Basel: Birkhäuser-Verlag 1984, 229–242. = ISNM 68
- [55] T i b a , D.; T i b a , M.: Regularity of the boundary data and the convergence of the finite element discretization in two-phase Stefan problems. Preprint No. 41, INCREST, Bucharest 1983
- [56] V i s i n t i n , A.: The Stefan problem for a class of degenerate parabolic equations. In: Fasano, A.; Primicerio, M. (Eds.): *Free Boundary Problems – Theory and Applications*. Vol. II. Boston: Pitman 1983, 419–430.
- [57] V i s i n t i n , A.: On the Preisach model for hysteresis. *Nonlinear Analysis* 8 (1984) 977–996
- [58] W h i t e , R. E.: An enthalpy formulation of the Stefan problem. *SIAM J. Numer. Anal.* 19 (1982) 1129–1157
- [59] W h i t e , R. E.: A numerical solution of the enthalpy formulation of the Stefan problem. *SIAM J. Numer. Anal.* 19 (1982) 1158–1172
- [60] Y v o n , J. P.: Contrôle optimal de systèmes gouvernées par inéquations variationnelles. Rapport No. 53, INRIA-Laboria, 1974
- [61] Y u r i i , A. D.: On an optimal Stefan problem. *Dokl. AN SSSR* 251 (1980) 1317–1321
- [62] Z l á m a l , M.: A finite element solution of the nonlinear heat equation. *RAIRO Numer. Anal.* 14 (1980) 203–216
- [63] B o s s a v i t , A.; D a m l a m i a n , A.; F r é m o n d , M. (eds.): *Free boundary problems – applications and theory*. Vols. III, IV, Boston: Pitman 1985
- [64] N i e z g ó d k a , M.; P a w l o w , I. (eds.): *Recent advances in free boundary problems*. *Control & Cybernetics* 14 (1985), Warsaw: PWN – Polish Scientific Publishers

Karl-Heinz Hoffmann  
 Institut für Mathematik  
 der Universität Augsburg  
 Memminger Straße 6  
 8900 Augsburg

(Eingegangen am 27. 3. 87)

## A Survey of the Statistical Theory of Shape

D. G. Kendall, Cambridge, UK\*)

1.

There are several different approaches to the *statistical analysis* of shape (see for example recent reviews by Bookstein [1] and Small [25]). There is an equal diversity of approaches to the *geometric description* of shape, but here I will only describe one that I have developed in a series of papers starting in 1977, the first [5] of these being associated with what now seems a very premature attempt to study shape-valued stochastic processes. W. S. Kendall's most recent work [12] on shape-diffusions substantiates and considerably generalises that exploratory essay, and links it with recent researches in stochastic physical chemistry by Clifford, Green and Pilling [3].

My interest in shape theory was prompted by a topic on the fringes of archaeology. When one looks at Stonehenge one accepts the underlying circular structure without asking for statistical authentication, and the same is true of the underlying linear structures in the monuments of Carnac. Statistical tests would here be quite out of place. But there are other archaeological situations in which a linear structure is accepted by some, and dismissed by others. Thus the set of 52 standing stones studied by Broadbent [2] yields  $\binom{52}{3} = 22\,100$  triplets of stones, and there are those who say that "too many" of these are "too nearly" collinear, while others dismiss such claims as ridiculous. Who is right?

We can quantify "nearly collinear" by interpreting this to mean "the obtuse angle of the triangle defined by the triplet differs from two right angles by less than  $\epsilon = 0.5$  degrees". Figure 1 shows a map of the plan positions of the 52 stones; there are 81 such nearly collinear triplets (Figure 2). Is 81 "too many"?

One's first attempt at answering that question could be to pretend that the stones are independently uniformly distributed inside a rectangular frame whose length/breadth ratio is equal to the ratio of the component standard deviations of the configuration, and on that basis one finds that the expected number of triplets meeting the half-degree standard of near-collinearity is about 73, so that assuming approximately Poisson variation (here reasonable) the comment "too many" is to

---

\*) Lecture to "Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Berlin," September 1987.

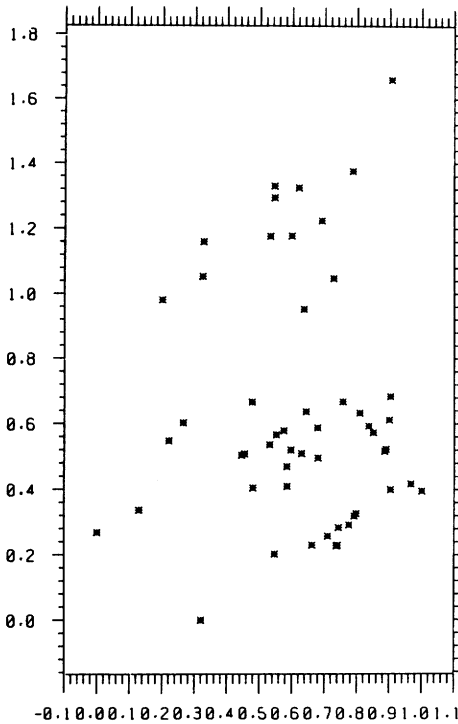


Figure 1. The plan positions for the 52 standing stones

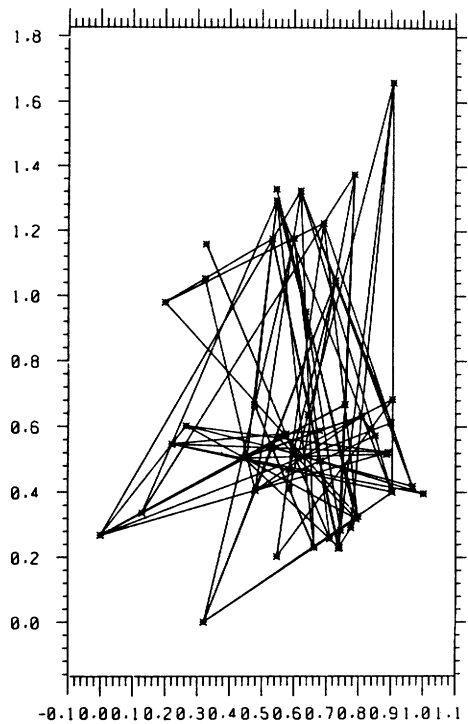


Figure 2. The 81 collinearities

be rejected. I should add that it is preferable to avoid such artificial models, and instead to devise a *data-based* simulation test employing random lateral perturbations, as was done by W. S. Kendall and myself [11] in a study complementary to that of Broadbent and leading to the same conclusions. Our approach also avoids the objectionable feature of fixing  $\epsilon$  in advance; instead we set a rather broad tolerance region for  $\epsilon$ . A detailed account of that and of the method of lateral perturbations would however take us too far from our theme.

2.

It was Broadbent's work on the 52 Land's End stones that made me ask the question: *what is the natural mathematical home for the shape of a labelled set of  $k$  not totally coincident points in  $m$  dimensions?* The idea is to filter out effects resulting from translations, changes of scale, and rotations, and to declare that shape is "what is left". It is natural first to move the origin to the centroid  $G$  of the  $k$  points, and then to eliminate size we can compute  $L = \sqrt{(\sum GP_j^2)}$  and change the scale by making  $L = 1$ . That, to a statistician, is the most natural way to standardise for size, but it is not the only possible one, and as we shall see there are contexts in which a different standardisation may be worth consideration.

This leaves us with an  $m \times k$  matrix of rank at most  $m(k - 1)$ , and to clarify the rank situation we multiply this matrix on the right by a *fixed* element of  $O(k)$  that maps the column vector  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  to a column vector all of whose elements are equal to  $1/\sqrt{k}$ . The new matrix will then have a final column of zeros. Omitting that column, we are left with an  $m \times (k - 1)$  matrix the squares of whose elements sum to unity, and we identify this with a point on a sphere of unit radius and  $m(k - 1) - 1$  dimensions. That sphere we shall call *the sphere of pre-shapes*. Each of its points is identified with an  $m \times (k - 1)$ -matrix on which  $SO(m)$  acts from the left, and we define the *shape space*  $\Sigma_m^k$  to be the quotient of the pre-shape sphere by  $SO(m)$ . (For further details see [7, 8, 9].)

Note that it is in the process of standardisation for size that we lose the opportunity to include the totally degenerate  $k$ -ad all of whose points are coincident. This does, of course, have a distinct shape, and if we wish we can adjoin it to the shape-space as a non-Hausdorff point. Normally the totally degenerate situation is ignored, but an exception is made when discussing the diffusion of shape; there the non-Hausdorff point representing total degeneracy is of importance as specifying an entrance law.

Geometrically a maximal set of pre-shapes equivalent modulo  $SO(m)$  forms what is called a *fibre* in the sphere of pre-shapes, and two  $k$ -ads will be said to have the same shape if and only if they determine pre-shapes lying on the same fibre. Thus we get the shape space by using the quotient operation that maps fibres to points (= shapes), and we then throw as much as we can of the structure of the pre-shape sphere down the projection into the shape space. That we can metrize the quotient space in this way is well known, but we can do better.

This is because the projection  $\pi$  that maps fibres to shapes is (away from certain singularities when  $m \geq 3$ , to be discussed below) a riemannian submersion endowing the shape space with a natural smooth riemannian structure in such a way that pairs of *horizontal* tangent vectors at any pre-shape on a given fibre (that is, tangent vectors orthogonal to the fibre) map to a pair of tangent vectors at the  $\pi$ -image of the fibre in the shape space, *these last tangent vectors having the same inner product as the original pair*. For all  $(k, m)$  this holds generically (and I believe universally) outside the singular set, but there are a few awkward special cases for which the details are still being worked out.

In such a situation it is known [21, 22] that the geodesics in the shape space are exactly the projections of the horizontal geodesics (here horizontal great circles) in the pre-shape sphere, and that these project with preservation of arc-length, so that the geodesic geometry of the shape space can be read off with ease. Moreover O’Neill has shown how in such a situation one can greatly shorten the computation of sectional curvatures, and the relation between the riemannian structures associated with pre-shapes and shapes is in fact such that it can also be used to relate diffusions in the two spaces.

For  $m = 1$  the shape space is  $S^{k-2}(1)$ , where 1 denotes the radius, while for  $m = 2$  it is the complex projective space  $CP^{k-2}(4)$ , where 4 denotes the constant holomorphic sectional curvature. For  $m = 2$  and  $k = 3$  we thus find that

$$\Sigma_2^3 = S^2 \left( \frac{1}{2} \right).$$

Accordingly that is the shape space for labelled triangles.

The singularities that arise when  $m \geq 3$  correspond to the  $k$ -ads that lie in an  $(m - 2)$ -dimensional subspace. Thus the singular set is a projective image of  $\Sigma_{m-2}^k$  in  $\Sigma_m^k$ .

The natural generalisation of the set of “collinear” labelled triangles in the plane is the set of  $(m + 1)$ -ads in  $R^m$  that happen to lie in an  $(m - 1)$ -dimensional subspace, and the corresponding set of shapes is a projective image  $Eq_m$  of  $\Sigma_{m-1}^{m+1}$  in  $\Sigma_m^{m+1}$ . In particular when  $m = 2$  this tells us that the collinearity set  $Eq_2$  is the projective image  $S^1\left(\frac{1}{2}\right)$  of  $S^1(1)$  in  $S^2\left(\frac{1}{2}\right)$ , so that it is a special great circle in  $S^2\left(\frac{1}{2}\right)$ . We call this the *equator*, and it is useful to employ that terminology even when  $m$  is not equal to 2.

These projective nestings of shape spaces in other shape spaces are very useful, and are possible because we have chosen to standardise the size measure  $L$  to a value (unity) that does not depend on  $k$  or  $m$ .

### 3.

If we arrange the shape spaces in an array labelled by  $(k, m)$ , where the number of points  $k \geq 2$  increases down the columns and the dimension  $m \geq 1$  increases along the rows, then *all the spaces along the diagonal  $m = k - 1$  are topological spheres* (this result is due to A. J. Casson). Clearly they cannot be *metrical* spheres when  $m \geq 3$  because then they must contain singularities. Notice that these “diagonal” shape spaces are those needed for the discussion of the shapes of labelled simplexes. Beyond this diagonal, that is when  $m > k - 1$ , the shape spaces in the  $k$ -th row are all the same and can be identified with a “hemisphere” of the topological sphere  $\Sigma_k^{k-1}$ . (There are two such “hemispheres” in this topological “sphere” that are metrically congruent under a reflection operation and intersect in what we have called  $Eq_{k-1}$ .)

These “hemispheres” and “equators” play an important role when one studies the shape-diffusion induced via a time change by a given  $k$ -point diffusion in the ambient space  $R^m$ . The paper by W. S. Kendall already referred to starts with a brownian or an Ornstein-Uhlenbeck diffusion for a set of  $k$  points in  $R^m$ , where  $m = k - 1, k, k + 1, \dots$ , and then examines the corresponding time-changed diffusions in  $\Sigma_m^k$  as was done in a very tentative way in [5]. The first of these shape spaces is a (topological) sphere, and all the others are copies of one and the same “hemisphere” whose boundary is the “equator” defined above. But the successive diffusions in this hemisphere are *not* the same, and that fact leads to interesting and indeed surprising conclusions about the nature of the stochastic motion when the ambient dimension  $m$  tends to infinity.

There remains a triangular region of the array defined by the inequalities  $m \geq 3$  and  $m < k - 1$  about which we have so far said nothing, but I can now make a fairly complete statement concerning the homology-properties of the spaces in question.

- (i) None of these spaces is a sphere even in the crudest sense; i.e. none has the homology of a sphere.

- (ii) None is a topological manifold.
- (iii) All have torsion in homology.
- (iv) Any two such spaces are homologically distinct.

The details are long and complicated, but depend chiefly on the interesting fact that if we write

$$\Sigma_m^k \leq \Sigma_n^\ell$$

when both  $k \leq \ell$  and  $m \leq n$ , then one can set up an elegant topological 3-term recurrence that constructs  $\Sigma_m^k$  up to homeomorphy out of the topological spaces  $\Sigma_{m-1}^{k-1}$  and  $\Sigma_m^{k-1}$ , and so up to homeomorphy we can (in principle) construct all the shape spaces inductively, following the partial order and starting with the spaces at the margins of the array (for those are already known).

For the Euler-Poincaré characteristic  $\chi$  we thus obtain a numerical 3-term recurrence that is easily solved explicitly. This reveals that the triangular region contains some even-dimensional spaces with  $\chi = 2$  and some odd-dimensional spaces with  $\chi = 0$ . However these are *not* topological spheres; for the proof of that we require a corresponding recurrence in homology.

In homology the recurrence yields a short exact sequence that can be extended to a long exact sequence with homomorphisms whose action on the homology groups can be identified. I have found the  $Z_2$ -homology explicitly for all the shape spaces  $\Sigma_m^k$  from this information, and a corresponding determination of the  $Q$ -homology is in progress. Fitting these together via the General Coefficient Theorem should yield the integer homology. For our present purposes the  $Z_2$ -results suffice.

One might expect that the shape spaces with singularities would prove to be of no practical interest, but that is not so. In fact the spaces  $\Sigma_3^k$  are precisely those that are important in the work of Clifford, Green and Pilling on stochastic problems in physical chemistry.

#### 4.

It might seem that this concentration on the geometry of shape spaces is excessive, but recent events have justified it in a striking way. When this program began in the nineteen seventies, C. G. Small and I knew that a diffuse probability law  $L$  in  $R^m$  must determine in a natural way an induced law  $L^*$  on the shape space  $\Sigma_m^k$ , this being the law of distribution of the shape of a labelled  $k$ -ad of points each of which is independently distributed with law  $L$ , but we only knew one or two examples of such situations that we were able to study in explicit detail. It therefore seemed exceedingly desirable to find a wide range of such explicit shape distributions, at least in the basically important case  $k = 3, m = 2$ . In particular we thought it would substantially remedy the situation if we could find the shape distribution for three points independently uniform in a square or perhaps an equilateral triangle.

Unfortunately what we thought a modest objective proved for ten years unattainable, even in the "simple" cases just mentioned. To assist the mechanics

of such calculations we used a stereographic projection of the sphere  $\Sigma_2^3$ , projecting it from the shape point where “ $A = B \neq C$ ” onto the tangent plane at the shape point where “ $C$  is the midpoint of  $AB$ ”. This is a plane projection, and in the plane we took cartesian coordinates  $(x, y)$  such that the shape point where “ $A = C \neq B$ ” had the coordinates  $(-1/\sqrt{3}, 0)$ , and the shape point where “ $A \neq C = B$ ” had the coordinates  $(+1/\sqrt{3}, 0)$ . The occurrence here of  $\sqrt{3}$  may seem peculiar, and some writers (e.g. Small [23, 24, 25]) omit it, but it is the kind of wrinkle that remains however much one pushes it under the carpet, and I prefer to accept it at this point for the sake of getting cleaner formulae elsewhere. With these coordinates we find that  $y = 0$  is the locus of all collinearities apart from the one corresponding to the shape projected to the point at infinity. Thus  $y = 0$  together with the point at infinity is the projected version of  $\text{Eq}_2$ .

With these conventions it is natural to seek an explicit form for the shape density  $m(x, y)$  that is the Radon-Nikodym derivative of the shape measure relative to the  $\sigma$ -finite measure  $dx dy$ . After many years of unsuccessful attempts to find  $m(x, y)$  in the two “simple” cases, the situation has changed dramatically with the work of the young chinese mathematician Le Hui-ling, who succeeded in obtaining explicit formulae for the function  $m(x, y)$  whenever the probability model is:

*three points  $A, B,$  and  $C$  are independently and uniformly distributed inside a compact convex polygon  $K$ .*

Her solution ([16, 17]; see also [13, 14, 15]) is perfectly general, and covers all compact convex polygons  $K$  whatsoever.

What led to this remarkable achievement was the observation that for given  $K$  the function  $m(x, y)$  is real-analytic inside each tile of a  $K$ -dependent “singular tessellation”  $T$ , and jumps abruptly in analytic form when any edge of the tessellation is crossed. As there is a continuum of possible shapes for  $K$ , and so a continuum of possible tessellations, this seemed at first to make a complete solution even more unattainable, but the tradition of doing the geometry first, and tackling the probability calculations when that was fully understood, turned out to be the key to the situation. The geometric dependence of  $T$  on the shape of  $K$  was fully investigated [14], and once that was done the outline of what might be a possible way to a solution came into view, although many difficulties had to be overcome before this intuition was shown to be correct.

Next, the jump suffered on crossing any tile-edge of the tessellation was shown via an analytic continuation argument to be completely characterised by a real-analytic *jump-function* attached to that tile-edge and free of singularities in a two-dimensional open set containing the edge after removal of its end-points. Thus if one were given the function  $m(x, y)$  in some “basic tile” and if also one knew all the jump-functions, then it could in principle be extended to an arbitrary “target” tile by a “stepping-stone” procedure following a sequence of pair-wise contiguous tiles. It was moreover clear that if the argument could be pushed through then all such stepping-stone routes would provide equally good ways of arriving at a solution, though in practice one would expect some routes to be more convenient than others.



Another vital step was Le Hui-ling’s reduction of the problem to finite form. She followed this by finding explicitly (a) the function  $m(x, y)$  in a particular so-called “basic” tile for all polygons  $K$ , and (b) the jump-functions for all tile-edges of all tiles in the tessellations associated with all polygons  $K$ . Her solution has now been implemented in a computer-algebra language, although in practice the choice of the stepping-stone route itself is best performed by eye after inspecting the tessellation. The successive contributions to the (finite) stepping-stone expansion of  $m(x, y)$  can contain terms having singularities in the target tile, but the theory guarantees that in a computer-algebra implementation all singularities in the target tile will automatically cancel out when their sum is formed, to give a version of  $m(x, y)$  that is real-analytic inside that tile.

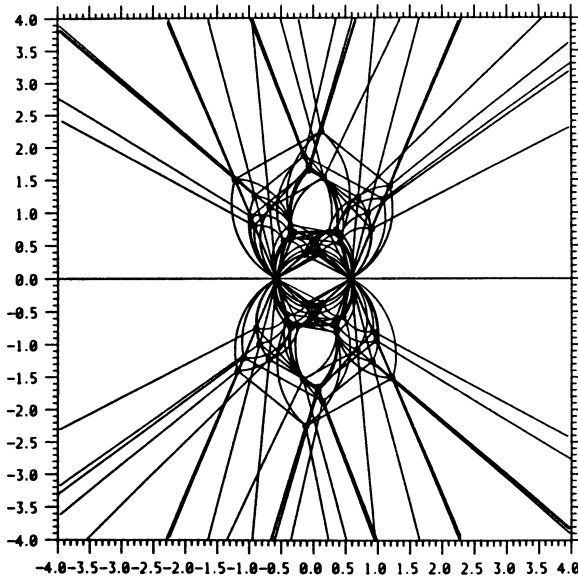


Figure 3. A singular tessellation for an irregular pentagon

Figure 3 shows a typical tessellation; here  $K$  is an irregular pentagon. The shape density  $m(x, y)$  is always  $C^2$ -smooth save at the three shapes corresponding to coincidences among the triangle-vertices, and the presence of the jump-functions at the tile-edges is revealed by numerical jumps there in the 3rd or 4th normal derivatives. It was indeed the detection of these in earlier numerical studies [13] that first gave us the necessary insights into the geometrical and analytical structure underlying such tessellations.

An interesting subsidiary question is: can we find the shape of  $K$  when the associated shape-density  $m(x, y)$  is known? We can prove that the answer to this is affirmative if we exclude a nowhere-dense set in the shape space  $\Sigma_2^n = \mathbb{C}P^{n-2}(4)$ , where  $n$  is the number of vertices of  $K$ . The proof of this depends on the geometrical fact that the tessellation  $T$  is made up of three components: finite segments, semi-infinite half-lines, and arcs of circles. If the semi-infinite half-lines

and arcs of circles are removed, then what remains is the superposition of  $n(n - 1)$  scaled, rotated and shifted copies of  $K$  itself (built out of the finite-segment components). The residual ambiguity is associated with the peeling apart of these  $n(n - 1)$  copies of  $K$ , and that can always be done if it is given in advance that the ratios of interpoint distances between all pairs of vertices of  $K$  are distinct.

This result contrasts surprisingly with a general result of Small [24] telling us that the solution to the corresponding inversion problem can be non-unique if the common law  $L$  of the three triangle-vertices is arbitrary.

In all the above it has been supposed that the  $k$  vertices are given a definite labelling, which could be either intrinsic, or assigned at one's convenience. When the labelling is arbitrary, or of subsidiary importance, one is free to quotient out the permutation group on  $k$  letters to obtain a reduced shape space, but that is usually less well behaved, and such additional quotienting is normally avoided except in very special circumstances. One such is the situation in which information about an unknown shape density  $m(x, y)$  is to be obtained by simulating  $k$ -point configurations in  $m$  dimensions and then recording their shapes as a preliminary to plotting scatter diagrams, contour plots, etc. in the shape space or some transform of it. In such circumstances an extra factor  $k!$  in the effective size of the simulation can be gained by exploiting the relabelling group. Having established the result on the reduced shape-space it will then often be convenient to construct its equivalents in the other  $k! - 1$  permutation transforms in order to bring out more clearly the global structure that is being studied.

## 5.

Some of the above is now in a sense rather old work, because during the last two years interest in the Cambridge group has gradually shifted away from the shape spaces  $\Sigma_m^k$  towards the associated *size-and-shape* spaces, and also towards the shape spaces derived from an ambient space that is a riemannian manifold  $M$  (instead of  $R^m$ ) and an appropriate group  $G$  (instead of  $SO(m)$ ) with respect to which the quotient operations take place. There is evidently a connexion with the moduli spaces of the algebraic geometers, but this does not seem to lead to any further insights.

We note in passing that the size-and-shape space corresponding to  $\Sigma_m^k$  contains a point corresponding to the totally degenerate  $k$ -ad that was omitted from  $\Sigma_m^k$  itself; this is the point corresponding to  $L = 0$ .

An instructive example with a non-euclidean ambient space is that in which  $k = 3$ ,  $M = S^2(1)$ , and  $G = SO(3)$ . This is the space of spherical triangles with labelled vertices, though not the space of spherical triangles that was studied by Grace Chisholm Young in her celebrated Göttingen doctoral thesis under Felix Klein (1895). (She considered a triangle with sides that need not be minimal geodesics; also its sides were allowed to intersect at points other than the vertices.) Topologically our space is  $S^3$ ; this is easily demonstrated by a technique using the properties of identification topologies. But viewed within the differentiable category it possesses four point-singularities; one of these is the shape of total coincidence, while the other three correspond to the situations in which two of the vertices are

coincident and the third is antipodal to them. Another interesting feature of our space is that it is in effect a size-and-shape space, because size for spherical triangles is just an aspect of shape. Moreover “location” is now irrelevant, because a change of location can be effected by using the group  $SO(3)$ . A determined attack on this problem has been made during the last year by T. K. Carne, Le Hui-ling, and myself. We have now obtained (by three different methods, two involving computer algebra) the riemannian structure, the sectional curvatures, the brownian differential generator, the geodesic geometry, and the different but related metric which arises from a parallel procrustean study. We therefore now know almost as much about this shape space  $\Sigma_2^3$  as we do about  $\Sigma_2^3$ . Still more recent investigations by Carne and by Le Hui-ling have extended many of these results to the shape space for  $k$  points in  $S^m$ .

It is thus appropriate to turn to the statistical problem of finding interesting shape measures on  $\Sigma_2^3$ , and in the last few months Le Hui-ling has found the probability law for shapes of spherical triangles whose (labelled) vertices are independently uniform inside a spherical cap of angular radius  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ ). The whole bundle of these calculations taken together puts us in a position to resolve a problem of interest in quasar astronomy; this is, how should one analyse the claims that “too many” triplets of quasars lie on or suspiciously close to short arcs of great circles on the celestial sphere. Or, to put it more roughly, how should one analyse the evidence for there being too many triplets of “nearly collinear” quasars. It is known that the effect of the curvature of the celestial sphere is not negligible here. We are now in a position to make an accurate assessment of it, by examining the above results for small  $\alpha$  and comparing them with comparable results for the size-and-shape version of  $\Sigma_2^3$ . Note that size must come into this comparison, on the one hand because it is not separable from shape in the spherical triangle context, and on the other hand because in the collection of the astronomical data a selection for size will have been exercised.

## 6.

Another problem in which size plays a significant role is that in which one studies the shapes of the simplexes that are the tiles of the Delaunay tessellation of a realisation of an  $m$ -dimensional Poisson point-process. We shall call these simplexes PDLY tiles, for short. The present account summarises the papers [6, 10] and adds some more recent results.

We first recall that the Delaunay tessellation of a (suitable) infinite set of distinct isolated points in  $R^m$  was introduced by the Soviet number-theorist Boris Nikolaevitch Delone (1890–1980). The construction goes as follows. We look at each  $(m + 1)$ -ad of points in turn. If its circumsphere contains a point of the set in its interior we do nothing, but if its circumsphere is “empty” in that sense we draw in the simplex determined by these  $m + 1$  points. When all  $(m + 1)$ -ads have been examined in this way we obtain a non-overlapping covering of  $R^m$ , and that is the Delaunay tessellation, the component simplexes being the tiles thereof. We omit the necessary restrictions on the original set of points but remark that with prob-

ability one they will all be satisfied if we apply the construction to a realisation of an  $m$ -dimensional Poisson process.

At first sight this looks like a problem involving  $\Sigma_m^{m+1}$ , but that turns out to be a partly misleading clue. Some years ago Miles [18, 19] proved that for PDLY tiles the circumradius  $R$  (which has a scaled chi-square distribution) is statistically independent of a complete set of shape-variables, so that *if* we use  $R$  as the measure of size, then size and shape will be independent. This suggests that the connexion with  $\Sigma_m^{m+1}$  should be abandoned altogether, but that too would be a mistake. A more fruitful procedure is to compare

- (i) the shape distribution for PDLY tiles, and
- (ii) the shape distribution for a simplex with independent gaussian vertices.

This gives us two shape measures  $\mu_1$  and  $\mu_2$ , say. I have proved that the Radon-Nikodym density  $d\mu_1/d\mu_2$  is of the form

$$c_m/\rho^{m^2},$$

where  $c_m$  is a known function of  $m$  only, and  $\rho = R/L$  (note that this is a shape-variable with  $1/\sqrt{(m+1)}$  as its minimum value). It follows that on constructing by simulation an independent sequence of simplexes with independent gaussian vertices, and at each step computing  $\rho$  and using the obvious acceptance-rejection rule based on

$$(\rho_{\min}/\rho)^{m^2},$$

then *the resulting sequence of accepted simplexes will be a sequence of independent PDLY tiles.*

In other words, *we have found a way of creating "lone" PDLY tiles without doing any tessellating*, with consequent immense gains in speed! This work is still in progress, but a few comments will illustrate what has so far been done.

First, the procedure just outlined works spectacularly well for dimensions  $m$  from 1 up to about 6 or 7. After that the random sample size obtained falls off drastically because the chance of acceptance (which is known exactly) tends rapidly to zero as  $m$  tends to infinity, and so eventually nearly all the gaussian simulations are rejected. Recently Miles has pointed out to me that such "lone tile simulations" could also be carried out in another way; there  $\mu_2$  is to be replaced by  $\mu_3$ , the shape measure for a simplex whose vertices are independently uniform on a unit sphere. A decomposition formula given by Miles [19] then yields the Radon-Nikodym derivative, and thereafter one proceeds as before. It will be interesting to see how these two methods compare. I have also looked at the effect of replacing the acceptance/rejection rule by an importance-sampling procedure, the (normed) weights being proportional to the Radon-Nikodym derivatives. Here every simulation is retained, but the weights vary wildly because of their dependence on  $\rho$ , and so a suitable smoothing procedure has to be used. My experiments so far show that useful information on the distribution of shape can be obtained by this technique even when  $m = 10$ . This is remarkable when we consider that, from yet another formula established by Miles [19], at dimension 15 the expected number of PDLY

tiles having a given point as vertex is about

44,000,000,000,000.

Thus at  $m = 15$  we are working with a stochastic tessellation of PDLY tiles of fantastic complexity, *even when viewed from such a narrowly local standpoint*. It will be interesting to see how much more insight we can gain when trying new ways of studying this formidable stochastic object.

The main conclusions arrived at so far are that a typical PDLY tile is (1) more likely to be nearly regular (i.e. equilateral), and (2) less likely to be nearly degenerate than is the case for a typical gaussian simplex. Figures 4 and 5 illustrate a few of the results that have been obtained in this way. I hope, by pushing the simulation technique out to higher dimensions, and by supplementary asymptotic calculations, to get some idea of what happens as  $m \rightarrow \infty$ .

One would very much like to be able to make comparable statements about groups of "adjacent" tiles in the tessellation, but while some limited progress is possible, this problem seems to be exceedingly difficult. It will be observed that the whole tessellation could be thought of as a somewhat novel form of stochastic field. This remark does not appear to be very helpful, however.

## 7.

I conclude with a few notes on applications. It is well known that no classical test for two-dimensional stochastic point processes can match the performance of the human eye and brain in detecting the presence of improbably large "holes" in the realised pattern of points. This fact has generated a great deal of research in the last few years, especially in connexion with the "large voids" and "long strings" which the eye sees (or declares that it sees) in maps of the Shane and Wirtanen catalogue of positions of galaxies (see for example [20]). Astronomers are interested in both (i) whether these phenomena are sufficiently extreme to require explanation, and if so (ii) whether any of the various model universes now in vogue can be said to display them to just the same degree. Recently Icke and van de Weijgaert [4] have suggested that useful progress might be made by studying the 2- and 3-dimensional Delaunay tessellations generated by the galaxy positions, and in particular by examining the observed distributions of various size and shape characteristics for the Delaunay triangles and tetrahedra. The investigation summarised in section 6 was planned as a contribution to this enquiry.

There is another interesting application of the Poisson-Delaunay theory to geography. Geographers studying the spatial distribution of human settlements claim to see an underlying quasi-hexagonal structure, and speak of "central-place theory". Some years ago Mardia, Edwards and Puri pointed out that this effect, if it exists, should increase the proportion of nearly equilateral Delaunay tiles. Now we have seen, in Figures 4(i) and 5(i), that the Delaunay tessellation of a two-dimensional Poisson distribution will in any case contain a high proportion of nearly equilateral tiles, so that a small excess of this due to other causes might be difficult to detect.

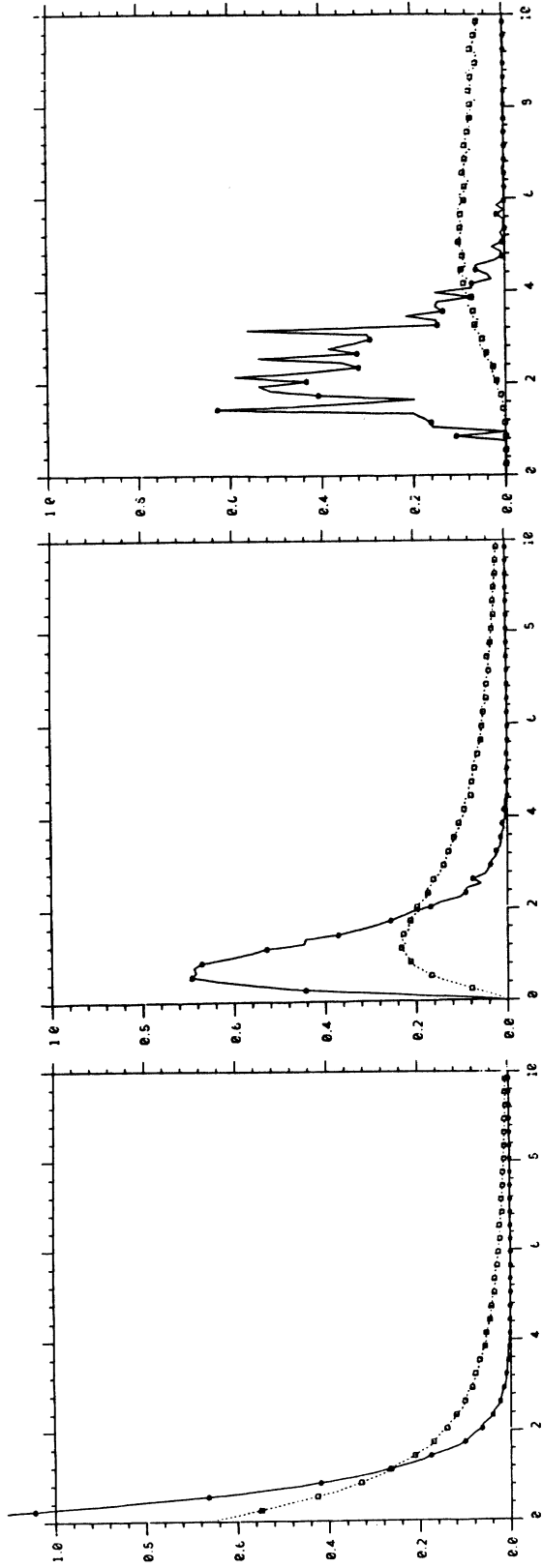


Figure 4. Distribution of  $\ln(V_{\text{reg}}/V)$ . Here  $V$  is the volume of the PDLY simplex, and  $V_{\text{reg}}$  is the volume of a regular simplex of equal circumradius (Dotted line: gaussian simplex, full line: PDLY simplex;  $m = 2, 3, 6$ )

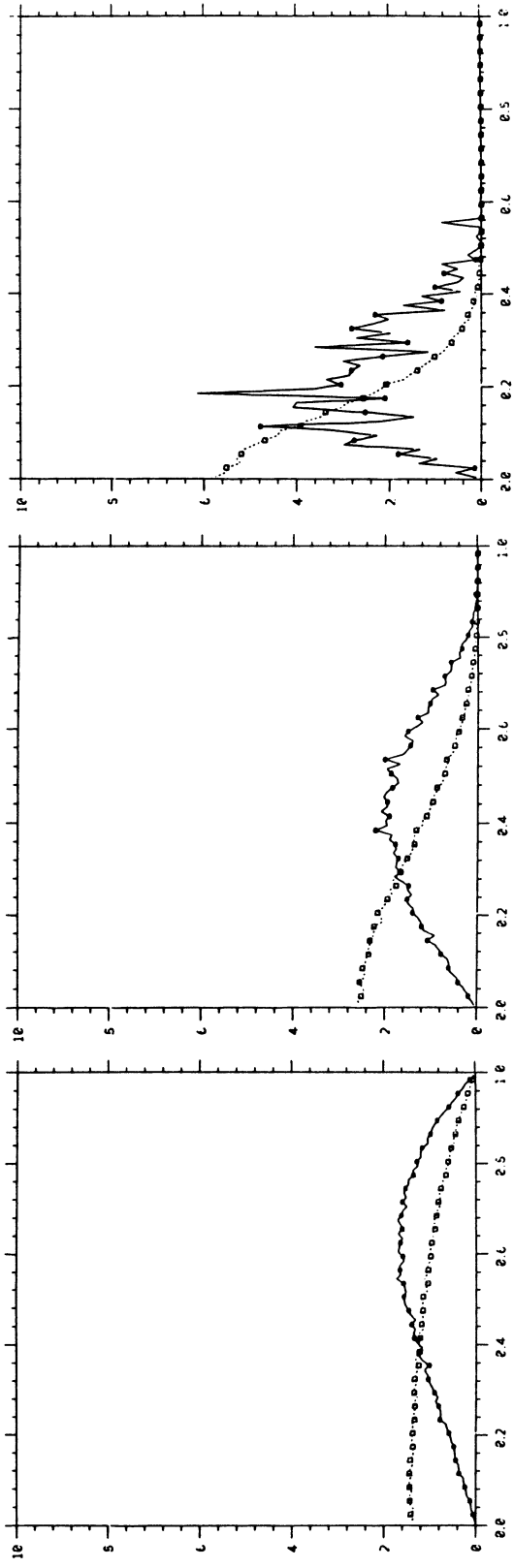


Figure 5. Distribution of  $\lambda\sqrt{m}$  ( $\lambda =$  least singular value)  
 (Dotted line: gaussian simplex, full line: PDLY simplex;  $m = 2, 3, 6$ )

In fact there is indeed a striking number of nearly equilateral tiles in the Delaunay tessellation of 224 towns, villages and hamlets in Wisconsin, the other noticeable feature of that data-set being a high proportion of thin splinter-shaped tiles round the edges of the region being tessellated. Of course these latter tiles are not true Delaunay tiles at all; they arise solely because their circumcircles lie mostly outside the region, and so they are “empty” in virtue of the cut-off at the edges.

Now central-place theory also has something to say about distances. Thus one mechanism that has been invoked to explain central-place effects in East Anglia is the tendency for neighbouring market-towns to be separated by the maximum distance over which one can drive sheep in a day.

Accordingly we ought to treat this as another problem that belongs to size-and-shape theory rather than to shape theory. And this presents no difficulties because for PDLY tiles in two dimensions the size (measured by the circumradius  $R$ ) has a simple distribution; in fact  $R^2$  has the law of a scaled  $\chi^2_4$ , the scaling constant being known. The shape-distribution is also known from the work of Miles, and size and shape are statistically independent.

This suggests a new approach to such data, as follows. (i) Sort the tiles according to their shapes, and select those that by some convenient angular criterion are “nearly equilateral”. Then (ii) examine the distribution of circumradial size *within the selected set of tiles*, and examine the departures from independence and from the theoretical  $\chi^2$  law.

This procedure has the attractive feature that it will not be corrupted by the splinter-shaped tiles associated with the edge-effects. Normally in spatial statistics edge-effects are very difficult to deal with. Here we are lucky!

This research was carried out with support from the Royal Society of London (TKC) and the Science and Engineering Research Council (LHL and DGK).

## References

- [1] Bookstein, F. L.: Size and shape spaces for landmark data in two dimensions. *Statist. Sci.* **1** (1986) 181–242 (with discussion)
- [2] Broadbent, S. R.: Simulating the ley-hunter. *J. Royal Statist. Soc. (A)* **143** (1980) 109–140 (with discussion)
- [3] Clifford, P.; Green, N. J. B.; Pilling, M. J.: Statistical models of chemical kinetics in liquids. *J. Royal Statist. Soc. (B)* **49** (1987) 266–300
- [4] Icke, V.; van de Weijgaert, R.: Fragmenting the Universe, I. Statistics of two-dimensional Voronoi foams. *Astron. and Astrophys.* **184** (1987) 16–32
- [5] Kendall, D. G.: The diffusion of shape. *Adv. Appl. Probab.* **9** (1977) 428–430
- [6] Kendall, D. G.: The shape of Poisson-Delaunay triangles. In: *Studies in probability and related topics etc.* (ed. Demetrescu, M. C. and Iosifescu, M.), pp. 321–330. Nagard, Montreal 1983
- [7] Kendall, D. G.: Shape manifolds, procrustean metrics and complex projective spaces. *Bull. London Math. Soc.* **16** (1984) 81–121
- [8] Kendall, D. G.: Exact distributions for shapes of random triangles in convex sets. *Adv. Appl. Probab.* **17** (1985) 308–329
- [9] Kendall, D. G.: Further developments and applications of the statistical theory of shape. *Teorija Verovatnostei* **31** (1986) 467–473; English translation in: *Theory of Probability.* **31** (1987) 407–412
- [10] Kendall, D. G.: Random Delaunay simplexes in  $R^m$ . *J. Statist. Planning and Inference*, to appear



- [11] Kendall, D. G.; Kendall, W. S.: Alignments in two-dimensional random sets of points. *Adv. Appl. Probab.* **12** (1980) 380–424
- [12] Kendall, W. S.: Symbolic computation and the diffusion of shapes of triads. *Adv. Appl. Probab.*, submitted
- [13] Kendall, D. G.; Le, Hui-ling: Exact shape-densities for random triangles in convex polygons. *Analytic and Geometric Stochastics. Suppl. Adv. Appl. Probab.* (1986) 59–72
- [14] Kendall, D. G.; Le, Hui-ling: The structure and explicit determination of convex-polygonally generated shape-densities. *Adv. Appl. Probab.* **19** (1987) 896–916
- [15] Kendall, D. G.; Le, Hui-ling: A brief account of the structure and explicit determination of convex-polygonally generated shape-densities. *Proc. 1st Internat. Congress Bernoulli Society*, **1** (1987) 611–613
- [16] Le, Hui-ling: Explicit formulae for polygonally-generated shape-densities in the basic tile. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **101** (1987) 313–321
- [17] Le, Hui-ling: Singularities of convex-polygonally generated shape-densities. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **102** (1987) 587–596
- [18] Miles, R. E.: On the homogeneous planar Poisson point process. *Math. Bioscience* **6** (1970) 85–127
- [19] Miles, R. E.: A synopsis of ‘Poisson flats in euclidean spaces’. In: *Stochastic Geometry* (ed. Harding, E. F. and Kendall, D. G.), pp. 202–227. Wiley, London 1974
- [20] Moody, J. E.; Turner, E. L.; Gott, J. R.: Filamentary galaxy clustering: a mapping algorithm. *Astrophys. J.* **273** (1983) 16–23
- [21] O’Neill, B.: The fundamental equations of a submersion. *Michigan Math. J.* **13** (1966) 459–469
- [22] O’Neill, B.: Submersion and geodesics. *Duke Math. J.* **34** (1967) 363–373
- [23] Small, C. G.: Random uniform triangles and the alignment problem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **91** (1982) 315–322
- [24] Small, C. G.: Distributions of shape, and maximal invariant statistics. Ph.D. thesis, University of Cambridge, 1981
- [25] Small, C. G.: Techniques of shape analysis on sets of points: a survey. *Internat. Statist. Rev.*, submitted

Further references will be found in the survey papers [1, 7, 9, 25].

Prof. David G. Kendall  
16, Mill Lane  
Cambridge CB2 1SB, U.K.

(Eingegangen: 11. 11. 1987)



## Buchbesprechungen

**Finn, R., Equilibrium Capillary Surfaces** (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 284), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1986, 98 figs., XVI, 245 pp., hardcover, DM 158,—

Kapillaritätsphänomene sind ständig um uns herum zu beobachten und werden als solche schon gar nicht mehr wahrgenommen. Sei es in der weniger angenehmen Form eines tropfenden Wasserhahns oder in dem faszinierenden Anblick von Tautropfen auf einem Blatt. Merkwürdiger erscheint uns da schon das Ansteigen einer Flüssigkeit in einem dünnen Röhrchen. Aufgrund der herrschenden Schwerkraft muß das Röhrchen allerdings sehr dünn sein — das lateinische Wort „capillus“ bedeutet Haar. Im Allgemeinen spricht man von einer Kapillaritätsfläche, wenn eine Flüssigkeit mit einer anderen oder einem Gas zusammentrifft und dabei eine Trennfläche bildet. Obwohl dieses Buch also von physikalischen Erscheinungen handelt, ist es im besten Sinn eine mathematische Abhandlung. Besonders erwähnenswert ist, daß es sich hierbei um die erste mathematische Darstellung der Kapillaritätstheorie handelt.

Im einführenden ersten Kapitel wird aus bestimmten physikalischen Grundannahmen (Energieerhaltungssatz) mit Variationsmethoden die zugrunde liegende Gleichung und die dabei auftretende Randbedingung hergeleitet. Man schließt, daß es sich um geometrischen Standpunkt aus bei Kapillaritätsflächen um Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung mit vorgegebenem Randwinkel handelt. Aus analytischer Sichtweise hat man es mit einer nichtlinearen (quasilinearen) elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer nichtlinearen Neumannbedingung zu tun.

In den ersten drei Kapiteln nach der Einführung behandelt Finn den rotations-symmetrischen Fall, so daß eine gewöhnliche Differentialgleichung zu analysieren ist. Zunächst untersucht er eine Flüssigkeit in einer Röhre kreisförmigen Querschnitts, wobei sehr präzise Abschätzungen für die innere und äußere Höhe der Flüssigkeit sowie für deren Differenz hergeleitet werden. Das nächste Kapitel behandelt den sitzenden Tropfen. Eine entscheidende Beobachtung ist die, daß es eine bijektive Beziehung — gewonnen durch eine Translation und Spiegelung — zwischen solchen Tropfen und den vorher behandelten Kapillaritätsflächen in Röhren gibt. Der hängende Tropfen ist das Thema von Kapitel vier. Die jetzt zu behandelnde Gleichung besitzt ein gänzlich anderes Lösungsverhalten als die aus dem vorigen Kapitel.

Im zweiten Teil des Buches wird auf Symmetriannahmen verzichtet und zunächst ein allgemeines Vergleichsprinzip hergeleitet, das für Kapillaritätsflächen in zylindrischen Behältern unter Einfluß nicht-negativer Schwerkraft gilt. Als Spezialfall enthält dieses Vergleichsprinzip das klassische Maximumprinzip. Es ist aber wesentlich stärker und ignoriert niederdimensionale Teilmengen des Randes, was zum Beispiel die Hebbbarkeit isolierter Singularitäten erlaubt. Das ist eine Konsequenz der nichtlinearen Struktur der Gleichung sowie der richtigen Vorzeichenbedingung für den Term nullter Ordnung. Der Zusammenhang mit Lösungen der Minimalflächen-gleichung (keine Volumen-nebenbedingung und Abwesenheit von Schwerkraft) wird hier offenbar. Verblüffende Konsequenzen sind u. a. eine lokale Höhenabschätzung (Maximumsnorm) unabhängig von den Randdaten, und eine unstetige Abhängigkeit von den Randdaten in Gebieten mit „spitzen“ Ecken. Das sechste Kapitel ist Kapillaritätsflächen ohne Schwerkraft gewidmet. Die mittlere Krümmung ist in diesem Fall eine Konstante (Volumen-nebenbedingung), die sich auf einfache Weise aus dem Randwinkel, dem Flächeninhalt des Querschnitts und der Länge seines Randes berechnet. Notwendig für die Existenz einer Lösung ist eine geometrische Bedingung an den Querschnitt, die vom gegebenen Randwinkel abhängt. Um hinreichende Bedingungen für die Existenz zu erhalten, muß man eine gewisse Regularität des Querschnitts voraussetzen. Die notwendige Bedingung führt auf ein Hilfsproblem, das man als neues Minimumproblem ansehen kann und das eine verblüffende Ähnlichkeit mit dem ursprünglichen Energiefunktional

besitzt. Es stellt sich heraus, daß ein Existenz-Nichtexistenz-Prinzip gilt, d. h. die Nichtexistenz eines (nichttrivialen) Minimums des Hilfsproblems ist äquivalent zur Existenz einer Lösung des Ausgangsproblems.

Im siebten Kapitel wird ein anderer Zugang zur Existenz dargestellt, bei dem das Auftreten und die Abwesenheit von Schwerkraft einheitlich behandelt werden können. Im Rahmen der BV-Theorie (Mengen von endlichem Perimeter, Caccioppoli-Mengen) wird zunächst die Existenz einer verallgemeinerten Lösung bewiesen. Unter i. w. denselben Bedingungen wie im vorigen Kapitel kann diese als sogenannte Variationslösung identifiziert werden, die als solche eindeutig ist und mit der klassischen Lösung übereinstimmt (falls diese existiert). Als interessante Anwendung dieser Existenzsätze erhält man eine allgemeine Gradientenschranke für nichtparametrische Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Im vorletzten Kapitel wird die physikalische Annahme diskutiert, die zu konstantem Randwinkel führt. Den Abschluß des Buches bildet ein kurzer Abschnitt über gewisse Identitäten und isoperimetrische Beziehungen.

In jedem Kapitel finden sich viele Beispiele, Ergebnisse von numerischen Berechnungen und Experimenten, die die Theorie sehr gut ergänzen. Dazu tragen auch die historischen Bemerkungen und Kommentare zu den einzelnen Sätzen und zur Literatur bei, die jeweils den letzten Abschnitt eines Kapitels bilden. Die eigentliche Darstellung wird durch motivierende Bemerkungen und durch zahlreiche Illustrationen aufgelockert, die das Verständnis erleichtern und Zusammenhänge deutlich machen. Darunter leidet allerdings in keinem Fall die notwendige analytische Strenge. Das Thema und die Auswahl des Stoffes erlauben es, den vorliegenden Text zur Grundlage einer Spezialvorlesung oder eines Seminars zu machen, wobei nicht mehr als solide Grundkenntnisse in der Analysis vorausgesetzt werden müssen. Im Gegensatz zu vielen anderen mathematischen Monographien ist das Buch aber auch zum Selbststudium hervorragend geeignet. Man lernt einerseits klassische Methoden kennen und wird andererseits bis an die Grenzen heutiger Forschung herangeführt. Dabei finden sich viele neue, bisher unveröffentlichte Ergebnisse, so daß auch Spezialisten angesprochen werden.

Der Text enthält erfreulich wenig Druckfehler, und die Tatsache, daß ein Stichwortverzeichnis fehlt, wird einem nur selten bewußt. Dafür wird man mit einem ausführlichen Inhaltsverzeichnis entschädigt und einer Literaturliste, bei der positiv hervorzuheben ist, daß hinter jeder Literaturangabe die Zahlen der Seiten aufgeführt sind, auf denen diese zitiert wird.

Dem Autor ist, nicht zuletzt durch seine Art der Darstellung, ein Buch gelungen, das die Faszination des behandelten Gegenstandes vermitteln kann und das man mit wachsendem Interesse liest. Dem Buch sind viele Leser zu wünschen.

Bonn

M. Grüter

**Bliedner, J., Hansen, W., Potential Theory** (Universitext), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1986, xiv, 435 pp., Soft cover, DM 84,—

Die axiomatische Potentialtheorie entstand in den Jahren 1957–1963, angestoßen durch M. Brelot [4] und H. Bauer [1]. Der Ausgangspunkt war dabei ein Garbendatum von Vektorräumen stetiger Funktionen, welche die Rolle der harmonischen Funktionen übernahmen.

In den folgenden Jahren wurde die Potentialtheorie dann hauptsächlich aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht beleuchtet: P. A. Meyer, C. Constantinescu, A. Cornea und W. Hansen zeigten, wie man einem harmonischen Raum in geeigneter Weise einen Hunt-Prozeß zuordnen kann. Schließlich entwickelten R. M. Blumenthal und R. K. Gettoor [2] eine Potentialtheorie für Standard-Prozesse und führten so die fundamentalen Arbeiten von G. A. Hunt aus dem Jahre 57/58 fort.

In der im Jahre 1972 erschienenen Monographie [6] *Potential Theory on Harmonic Spaces* von C. Constantinescu und A. Cornea hatte sich der Blickwinkel geändert: Nicht mehr

das Garbendatum der harmonischen Funktionen stand im Vordergrund, sondern vielmehr die Kegel der hyperharmonischen Funktionen und der Potentiale. Exponierte Vertreter dieser Richtung sind G. Mokobodzki und D. Sibony mit ihren *Cônes de potentiels* [7] und die rumänische Schule um N. Boboc, Gh. Bucur und A. Cornea mit ihren H-Kegeln [3].

Am Anfang des zu besprechenden Buches von J. Bliedtner und W. Hansen steht das wichtigste Beispiel und Modell jeder Potentialtheorie, die sogenannte klassische Potentialtheorie der Lösungen der Laplace-Gleichung und ihr Zusammenspiel mit der Brownschen Bewegung und dem Newton-Kern. In den folgenden Kapiteln wird der zentrale Begriff eines Balayage-Raumes eingeführt und von verschiedenen Seiten beleuchtet: Ein *Balayage-Raum* ist ein Funktionenkegel  $W$  auf einem lokalkompakten Raum  $X$ , der die fundamentalen Eigenschaften von Kegeln hyperharmonischer Funktionen mit der Forderung nach der Existenz „genügend vieler“ stetiger „Potentiale“ vereint. Wie bei harmonischen Räumen liegen auch Balayage-Räumen geeignete Markoff-Prozesse zugrunde, deren Pfade aber nicht mehr stetig zu sein brauchen. Dies hat den Vorteil, daß als wichtiges Anwendungsbeispiel auch die Theorie der Riesz-Potentiale mit einbezogen werden kann. In den Kapiteln III und IV wird gezeigt, daß ein Balayage-Raum auch durch eine Familie harmonischer Kerne beschrieben oder als Kegel exzessiver Funktionen eines geeigneten Standard-Prozesses interpretiert werden kann.

Das Kernstück des Buches bildet Kapitel VI, wo die Balayage-Theorie, das Fegen von Maßen und Funktionen, auf diese Situation übertragen wird. Hier finden sich auch viele von den Autoren gefundene und bislang nur in Zeitschriften veröffentlichte Ergebnisse über die Konvergenz von gefegten Maßen und die „essential base“, sowie die wahrscheinlichkeitstheoretischen Interpretationen der analytisch eingeführten Begriffe. In dem anschließenden Kapitel VII über das Dirichlet-Problem wird die Simplizialität einiger für die Potentialtheorie typischer Funktionenkegel bewiesen.

Besonders gut gefallen hat mir das Kapitel V „Examples“, wo Anwendungen, wie die schon erwähnten Riesz-Potentiale, der Raum der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, sowie zahlreiche weitere Beispiele zu finden sind. Die Theorie der Balayage-Räume zeichnet sich durch gute Permanenzeigenschaften aus, und so werden in diesem Abschnitt auch die Unterordnung, Störung und Produkt von Balayage-Räumen behandelt. Ein weiteres Kapitel mit Beispielen von Lösungsräumen partieller Differentialgleichungen beschließt das Buch.

Abgesehen von den grundlegenden Fakten überschneidet sich der Inhalt des Buches von J. Bliedtner und W. Hansen kaum mit den bereits vorhandenen Büchern. Das liegt vor allem daran, daß in ihm die wichtigsten, in den letzten Jahren auf diesem Gebiet erzielten Ergebnisse auf klare und durchsichtige Art und Weise dargestellt sind, insbesondere die grundlegenden Arbeiten der beiden Autoren über Simplizialität und der Brückenschlag von den Markoff-Prozessen zurück zur analytischen Potentialtheorie. Allein aufgrund der Fülle des in sehr geordneter Form dargestellten gesammelten Materials wird das Buch einen wichtigen Platz im Bücher-schrank eines Potentialtheorie-Forschers einnehmen.

Als Lehrbuch möchte ich das Buch besonders für fortgeschrittene Leser – nach der Lektüre eines klassischen Potentialtheoriebuches – empfehlen. Der rote Faden – das Zusammenspiel zwischen Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie – durchzieht das Buch, macht es abwechslungsreich und gut lesbar. Besonders erwähnenswert sind die sorgfältig ausgearbeiteten wahrscheinlichkeitstheoretischen Abschnitte, welche so bislang höchstens in Originalarbeiten oder Vorlesungsmitschriften zu finden waren.

Überhaupt fällt auf, daß das Buch sehr sorgfältig geschrieben und redigiert ist, die Beweise gut ausgearbeitet und praktisch (druck-) fehlerfrei sind. Als einzigen Mangel ist die angesichts der Verfügbarkeit moderner Textverarbeitungsprogramme nicht mehr zeitgemäße typographische Gestaltung zu nennen. Ein fünfzehnteiliges Literaturverzeichnis, ein Stichwort- und Symbolverzeichnis sowie historische Anmerkungen und ein Führer zu den Standard-Beispielen erleichtern den Gebrauch des Buches.

## Referenzen

- [1] Bauer, H.: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie (Lecture Notes in Mathematics Nr. 22), Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1966
- [2] Blumenthal, R. M.; Gettoor, R. K.: Markov Processes and Potential Theory. Academic Press 1968
- [3] Boboc, N.; Bucur, Gh.; Cornea, A.: Order and Convexity in Potential Theory: H-Cones (Lecture Notes in Mathematics Nr. 853), Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1981
- [4] Brelot, M.: Lectures on Potential Theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1960
- [5] Brelot, M.: Éléments de la théorie classique du potentiel, 4<sup>ème</sup> edition. Centre de Documentation Universitaire, Paris 1969
- [6] Constantinescu, C.; Cornea, A.: Potential Theory on Harmonic Spaces, Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1972
- [7] Mokobodzki, G.; Sibony, D.: Cônes de fonctions et théorie du potentiel I, II. In: Sémin. Brelot-Choquet-Deny „Théorie du potentiel“ 11 (1968), 8.01–8.35, 9.01–9.29.

Eichstätt

U. Schirmeier

**Dacunha-Castelle, D., Duflo, M., Probability and Statistics I/II**, translated from French by D. McHale, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1986, VI + 362 p./XIV + 410 p., hardcover, DM 89,-/DM 68,-

Das vorliegende Werk ist gedacht als integrierter Kurs in Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Ein solcher Kurs der gesamten Stochastik ist natürlich auf 770 Seiten nur in Maßen realisierbar; außerdem wird es kaum möglich sein, derart heterogene Denkweisen wie die (teilweise unmathematische) der Statistik und die der stochastischen Analysis in einem einzigen Werk so zu präsentieren, daß nichts verbogen wird. Um ein Urteil vorwegzunehmen: herausgekommen ist ein Vorlesungsmanuskript (besser zwei Texte, in elementarer Stochastik und in Prozeßstatistik), das manches Unübliche enthält.

Was das Werk nicht ist, ist ein auf Dauer angelegtes Lehrbuch. Ich vermissе generell – dieser Vorwurf trifft allerdings viele andere Bücher gleichermaßen – die „philosophische Komponente“: Erklärung, Diskussion, Vermittlung von Einsichten statt Faktenwissen. Meist gibt es nur dürre Andeutungen, die oft in rätselvollen drei Punkten ... enden. In der Statistik sollte man sich m. E. nicht damit begnügen, Standardlehrstoff aneinanderzureihen ohne dem Leser zu sagen, welche Rolle die diversen theoretischen Prinzipien spielen, was sich mit ihnen gut oder weniger gut begründen läßt und wo schwere oder sogar ungelöste Probleme liegen. (Darüber kann man auch auf elementarem Niveau durchaus sprechen.) Während Sätzen über schwache Konvergenz und dem Aspekt der „Théorie générale“ viel Raum gegeben wird, vermissе ich manches aus dem Kanon der stochastischen Prozesse: Birkhoff, Markovsche Halbgruppen und Generatoren, Lokalzeit. (Übrigens auch Lévy-Chintschin, obwohl von unabhängigen Zuwächsen länger gesprochen wird.) Gilt dies als bekannt? Warum dann nicht auch die Lebesguesche Integration? (Die wird nämlich abgehandelt.) Kritisch urteilend würde ich sagen, eine überzeugende Idee, welche die Stoffauswahl leitet, sei nicht recht sichtbar; wohlwollender formuliert: das Buch ist nur in Verbindung mit anderen Texten zum Erlernen der Stochastik geeignet.

Die schriftstellerische Sorgfalt der Autoren ist nicht übermäßig groß gewesen. (Dies als handfeste Kritik nach den obenstehenden mehr ideologischen Einwänden.) Erwähnt seien: Stolperstellen im Prosatext (I. S. 53: „Moreover it should clarify the table of contents.“); dunkle oder logisch unklare Passagen (II. S. 283: „Kompensator als Prädiktor“. II. Def. 6.3.18 mit folgendem Beweis: Was ist Voraussetzung und was Behauptung?); unsaubere Formulierungen von Definitionen (II. S. 23: „Poissonprozeß“; verfehlt hier auch der Hinweis auf Kolmogorov), Lücken in Beweisen (I. S. 121: warum bleibt  $\|a\|$  beschränkt?), nicht lebensfähige zu allgemeine

Begriffe (II. S. 276: ein Kompensator braucht hier nicht vorhersehbar zu sein; die Autoren geben aber kein Beispiel, wo dies sinnvoll ist). Auf der technischen Ebene sind zu monieren: ein nicht alle Stichworte befriedigend aufführendes Register, viele nicht identifizierbare Titel in den bibliographischen Hinweisen in Bd. I, die Orthographie von Eigennamen, vor allem russischen, sowie eine – gegenüber dem französischen Original deutlich verschlechterte – Lesbarkeit des Drucks.

Schließen wir mit einer positiven Bemerkung: die Übungsaufgaben zu Bd. I sind schön konstruiert; sie tragen einen Teil des Stoffs und laden zum Selbststudium ein.

Heidelberg

H. Rost

**Stroock, D. W., An Introduction to the Theory of Large Deviations** (Universitext), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1984, 196 pp., Soft cover, DM 56,–

Im Umkreis der klassischen Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie gab man sich schon sehr früh nicht zufrieden mit den in diesen Sätzen enthaltenen Aussagen über die asymptotische Verteilung von Stichprobenmitteln großen Umfangs. So entstand eine ganze Reihe von „neuen Grenzwertsätzen“, die sich mit subtileren Aussagen über „große Abweichungen“ der Stichprobenmittel von ihrem Mittelwert beschäftigten (vgl. z. B. Khintchine, A., *Math. Ann.* **101** (1929) 745–752, Smirnof, N., *Mat. Sbornik* **40** (1933) 441–454, oder Feller, W., *Introd. to Prob. Th.* I, Kap. VII.6). Heute versteht man unter „Large Deviations“ jedoch in der Regel Weiterführungen des Beitrages von H. Cramér (*Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités*, Paris 1937), wo die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die Stichprobenmittel nicht in eine vorgegebene Umgebung des Mittelwertes fallen, genauer studiert und etwa für die Konvergenz gegen Null (bei wachsendem Stichprobenumfang) exponentielle Geschwindigkeit nachgewiesen wurde. Die herausragende Bedeutung des Cramérschen Satzes liegt in seinem engen Zusammenhang mit dem Entropiebegriff, so daß sich naturgemäß sehr wichtige Beziehungen zur Informationstheorie sowie zur Physik ergeben.

Das vorliegende Buch von D. W. Stroock gründet sich in erster Linie auf Arbeiten von M. Donsker – S. R. S. Varadhan (1975/76/83) und von R. R. Bahadur – S. Zabell (1979), in denen das Cramérsche Ergebnis und seine Methode auf Zufallsvariable mit Werten in topologischen Vektorräumen, insbesondere in Banachräumen, erweitert wurden. Darüber hinaus stellt der Autor eigene Beiträge vor, in denen er Donsker-Varadhan-Resultate auf ergodische Markovsche Prozesse überträgt.

Genauer wird in Stroocks Buch folgende allgemeine Thematik behandelt: Gegeben sei auf einem polnischen Raum  $E$  (z. B. ein separabler Banachraum) eine Familie  $(\mu_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  von  $W$ -Maßen  $\mu_\epsilon$  die schwach gegen ein Punktmaß  $\delta_{x_0}$  mit  $x_0 \in E$  konvergiert. Die Aufgabe besteht in der Angabe einer Funktion („rate function“  $I : E \rightarrow [0, +\infty]$ ), für die das „Large Deviations Principle“ gilt:

$$-\inf_{x \in G} I(x) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(G), \quad G \text{ offen } \subset E,$$

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(F) \leq -\inf_{x \in F} I(x), \quad F \text{ abgeschlossen } \subset E.$$

Nach einer kurzen, sehr abstrakten Einführung wird dieses Programm in drei grundsätzlich verschieden scheinenden Situationen durchgeführt, und zwar für Diffusionsprozesse (Satz von Schilder und Wentzel-Freidlin-Theorie), für i.i.d. Variable (Cramérs Satz und Donsker-Varadhan-Verallgemeinerungen) sowie schließlich für ergodische Markov-Prozesse (mit dem Sanovschen Satz als speziellen Fall). Der Schildersche Satz wird zwar im ersten Kapitel separat vorgestellt, aber später wird auch er (allerdings als Übungsaufgabe) ebenso wie die ergodischen

Fälle aus den Donsker-Varadhan-Resultaten abgeleitet. Im letzten Kapitel des Buches wird schließlich noch eine Brücke zu „Logarithmischen Sobolev-Ungleichungen“ und zu „Hyperkontraktionsresultaten“ von L. Gross und E. Nelson geschlagen, speziell für den eindimensionalen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.

Das Buch, im wesentlichen Ausarbeitung einer Vorlesung des Autors aus dem Jahre 1983/84, stellt an den Leser hohe Ansprüche. So werden fundierte Kenntnisse stochastischer Prozesse vorausgesetzt; besonders im Zusammenhang mit Diffusionsprozessen faßt sich der Autor meist äußerst kurz (während etwa elementare Tatsachen über halbstetige Funktionen ausführlich bewiesen werden). Ebenso sollte der Leser gute Grundlagen in Funktionalanalysis mitbringen. Die Verwendung des Terminus „Introduction“ im Titel des Buches sollte nicht als *erste* Einführung verstanden werden. Einem Nichtexperten würde ich vor (oder zumindest neben) dem Studium des vorliegenden Buches zunächst die St. Flour-Vorlesung von R. Azencott (Springer Lecture Notes in Math. 774), die im ersten Teil des Buches in wesentlich gestraffter Form übernommen wurde, oder das Springer Grundlehren-Buch von R. S. Ellis „Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics“ empfehlen, wo die Ursprünge und das weitere Umfeld der Theorie der Large Deviations mit ausgeleuchtet werden, worauf im vorliegenden Buch jedoch fast völlig verzichtet wird. Daß der Autor auch gar nicht auf eine umfassende Einführung im angesprochenen Sinne abzielt, zeigt meines Erachtens schon das extrem knappe Literaturverzeichnis (6 Titel). Die wohl durch das Druckverfahren bedingten Druckfehler halten sich in Grenzen; ärgerlich ist aber, daß einige der verwendeten Symbole aufgrund fehlender Erklärung dem Leser längere Rätsel aufgeben (wie etwa die Operator-Norm auf S. 78 oben). Ein ohnehin wünschenswertes Symbolverzeichnis (ebenso wie ein Stichwortverzeichnis) hätte derartige Mängel vielleicht ausgeschlossen.

Für alle, die an neueren Entwicklungen in der Theorie der Large Deviations interessiert sind, bietet das Buch jedoch eine Vielzahl hochinteressanter Ergebnisse, die darin in hervorragender Manier zusammengestellt sind. Für diesen Leserkreis ist das Buch wohl auch gedacht und derzeit auch unentbehrlich.

Schlußbemerkung: Eine Besprechung des vorliegenden Buches (zusammen mit dem o. a. Buch von R. S. Ellis) findet man auch in *The Annals of Prob.*, **14(4)** (1986), 1428–1431.

Passau

G. Leha

**Kolchin, V. F., Random Mappings** (Translation Series in Mathematics and Engineering), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1986, XIV, 207 pp., DM 194,–

Iteriert man eine beliebige Abbildung  $T$  von  $\{1, \dots, n\}$  in sich, so läuft jeder Punkt nach endlich vielen Schritten in einen Zyklus hinein. Die Zyklen mit ihren Einzugsgebieten bilden die Zusammenhangskomponenten eines  $T$  repräsentierenden Graphen. Ist  $T$  eine Permutation, so besteht jede dieser Komponenten nur aus ihrem Zyklus, im allgemeinen ist jede Komponente jedoch ein Zyklus mit einem daraufgepflanzten Wald von Bäumen: jeder Punkt läuft seinen Baum hinab zur Wurzel und ist dann in seinem Zyklus angelangt. – Wählt man  $T$  zufällig gemäß der Gleichverteilung über die  $n^n$  möglichen Abbildungen  $T$ , so stellen sich Charakteristika, die für die Beschreibung von  $T$  von Interesse sind, als Zufallsvariable dar, jede mit ihrer Verteilung. Beispiele: die Anzahl der bei  $T$  auftretenden Zyklen, die Anzahl der Punkte mit  $r$  Urbildern, die maximale Dauer bis zum Einschwenken in einen Zyklus. Viele dieser Charakteristika sind Charakteristika von Bäumen und Wäldern von solchen: Anzahl der Bäume, der Knoten der Valenz  $r$ , maximale Baumhöhe. Die Untersuchung zufälliger Abbildungen  $T$  ist daher eng mit der Untersuchung zufälliger Bäume und Wälder verknüpft. – Da man eine Abbildung  $T$  dadurch festlegen kann, daß man die Punkte aus  $\{1, \dots, n\}$  auf einige von ihnen neu verteilt, hängt die Untersuchung zufälliger Abbildungen eng mit der Untersuchung zufälliger Verteilun-



gen von Gegenständen auf Schubläden zusammen. — Viele der bei alledem auftretenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen entpuppen sich als bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilungen (WVen), die man aus einem Produkt von mehreren gleichen WVen herausschneidet. Beispielsweise schneidet man die Multinomialverteilung der Multiplizitätsmuster zufälliger Abbildungen aus einem Produkt von Poisson-Verteilungen durch die Bedingung „Summe der Partikel ist gleich  $n$ “ heraus. — Zufällige Bäume entstehen, wenn man einen Verzweigungsprozeß mit einem Individuum beginnen und dann bis zum Aussterben laufen läßt — falls dies geschieht, was z. B. im sog. kritischen Fall (Erwartungswert der Kinderzahl = 1) fastsicher der Fall ist; beginnt man mit  $N$  Individuen, so entsteht ein zufälliger Wald mit  $N$  Bäumen. Der Lebensdauer eines Verzweigungsprozesses entspricht z. B. die maximale Höhe der entstehenden zufälligen Bäume. Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie können in dem hiermit umrissenen Bereich dazu dienen, asymptotische Aussagen über die Verteilungen von Zufallsvariablen der beschriebenen Art zu gewinnen. Die vorliegende Forschungsmonographie faßt Forschungs-Ergebnisse, die zum großen Teil aus den letzten 15 Jahren stammen, und in denen lokale Grenzwertsätze à la Gnedenko-Kolmogorov bzw. über Verzweigungsprozesse eine Hauptrolle spielen, zusammen und dürfte für weitere Untersuchungen ein wichtiges Stimulans werden. Durch die Fülle interessanter, z. T. relativ elementarer Querverbindungen ist sie nicht nur für Spezialisten, sondern auch für generell mit Fragen der Stochastik befaßte Mathematiker, insbesondere Kombinatoriker, wert, sorgfältig studiert zu werden.

Erlangen

K. Jacobs

**Krengel, U., Ergodic Theorems, with a supplement on Harris Processes written by A. Brunel** (de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 6), Berlin — New York: Walter de Gruyter 1985, VIII, 357 pp., Leinen, DM 128,—

Ergodentheorie bedeutet heute vielerlei. Sie führt ein blühendes, wenngleich gelegentlich esoterisch erscheinendes Leben zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie, dynamischen Systemen, Funktionalanalysis,  $C^*$ -Algebren, topologischen Gruppen, Zahlentheorie und schließlich ihrer Heimat, der statistischen Physik.

Nur noch ein kleinerer Teil davon ist den eigentlichen „Ergodensätzen“ im Sinne des vorliegenden Buches gewidmet. Krengels Monographie überlappt sich daher, d. h. durch diese Eingrenzung und die dadurch mögliche lokale Gründlichkeit kaum mit den anderen in letzter Zeit erschienenen Texten über Ergodentheorie.

#### Die Kapitelüberschriften

- 1: Measure preserving and null preserving point transformations;
- 2: Mean ergodic theory;
- 3: Positive contractions in  $L_1$ ;
- 4: Extensions of the  $L_1$ -Theory;
- 5: Operators in  $C(K)$  and in  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ );
- 6: Pointwise ergodic theorems for multiparameter and amenable semigroups;
- 7: Local ergodic theorems and differentiation;
- 8: Special topics (v. Neumann algebras, entropy and information, nonlinear nonexpansive mappings);

supplement (A. Brunel): Harris processes, Special functions, Zero-Two-Law

deuten das Spektrum des behandelten Stoffes an, lassen aber nicht die unglaubliche Fülle des verarbeiteten Materials sichtbar werden.

Diese Fülle hat zweierlei Effekte. Einerseits Vollständigkeit, genauer Sucher-Freundlichkeit: Der Leser, der nach einer speziellen Form eines Ergodensatzes innerhalb des angesproche-

nen Rahmens sucht, wird meistens schnell fündig, wenn vielleicht auch nur mit einem Ein-Satz-Referat der betreffenden Originalarbeit. Diese Art Orientierung wird erleichtert durch die Unabhängigkeit der einzelnen Abschnitte und eine große Disziplin in der Verwendung spezieller Begriffe. (So hatte ich bei einer Vorlesungsvorbereitung Mühe mit dem Codierungstheorem und fand bei Kregel die entscheidenden Ideen klar und ohne terminologische Schnörkel erklärt, allerdings mit einem Druckfehler.)

Andererseits provoziert das Nebeneinander von so vielen trickreichen Varianten des gleichen Themas beim Außenstehenden leicht die entnervte Frage: Wozu all diese Bastelei? Darauf sind ja wohl zwei Antworten möglich. Die eine, die dem Autor näher zu liegen scheint: Wenn du dich wirklich hineinkniest, wirst du sehen, daß die meisten Strukturfragen sich ganz natürlich gleichsam von selber stellen. Auf diese Weise ist tatsächlich vieles entstanden, etwa im Gefolge der bahnbrechenden Ideen von Eberlein. Die zu dieser Antwort gehörige Arbeit, verschiedene Ansätze unter beweistechnischem Blickwinkel möglichst durchsichtig zu verknüpfen, ist in dem Buch nach meinem Eindruck vorbildlich durchgeführt. (So hatte ich nach einem Seminar über mehrparametrische Ergodensätze erst bei der Kregelschen Darstellung das Gefühl: Ja, so muß man es offenbar machen.)

Die andere Antwort würde Beispiele und Motivationen auch von „außerhalb“ erläutern. Hier läßt der Verfasser trotz vieler Literaturhinweise den Leser allein. Wenig in dem Text hilft mir dabei, die Brücke zu schlagen zu dem großen (und eben für die meisten von uns zu großen) Atem von etwa Mackeys klassischem „Ergodic Theory and its significance for statistical mechanics and probability“ in *Adv. Math.* 12 (1974). Gerade auch für die inzwischen entstandene subadditive und mehrparametrische Theorie gäbe es genügend Anschauungsmaterial, das nahe an der Wurzel dieser Sätze liegt. Bei einem professionellen Arrangement von Schnittblumen wird man leicht enttäuscht, wenn man auch noch das Gras wachsen hören will.

Insgesamt ist dies Buch eine außerordentlich hilfreiche und informative Stütze für den, der schon weiß, warum er sich für das Gebiet interessiert.

Kaiserlautern

H. v. Weizsäcker

**Kiefer, J. C., Introduction to Statistical Inference** (Springer Texts in Statistics), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1987, 60 figs., VIII, 334 pp., gebunden, DM 98,—

Das vorliegende Einführungslehrbuch der Mathematischen Statistik basiert auf Vorlesungen von Jack Kiefer, die posthum redigiert und zu einem leicht verständlichen Grundkurs der induktiven Statistik zusammengefaßt wurden.

Die Kapitel 1–4 dienen der Einführung entscheidungstheoretischer Konzepte (Entscheidungsraum, Verlust- und Risikofunktion, Zulässigkeit, vollständige Klassen), der Klassifikation von Entscheidungsproblemen aufgrund der Struktur des Entscheidungsraumes (Punkt- und Intervallschätzprobleme, Testprobleme, ...) und der Besprechung von Kriterien für die Auswahl von Verfahren (Bayes, Minimax, Invarianz, Erwartungstreue, ...).

Kapitel 5 behandelt ausführlich die erwartungstreue, lineare Schätzung linearer Parameter in linearen Modellen unter Momentannahmen (Satz von Gauß-Markoff).

Kapitel 6 befaßt sich mit Suffizienztheorie. Ausgangspunkt ist die Definition über bedingte Wahrscheinlichkeiten, aus der das Faktorisierungskriterium und die entscheidungstheoretische Interpretation („kein Informationsverlust“) abgeleitet werden.

Kapitel 7 ist der Schätztheorie gewidmet und enthält u. a. den Satz von Rao-Blackwell, die Cramér-Rao-Ungleichung, einiges über Pitman-Schätzer, eine einfache schätztheoretische Version des Satzes von Hunt-Stein, eine Diskussion der ML-Methode und – eng damit zusammenhängend – etwas asymptotische Effizienztheorie.

Die Schwerpunkte des testtheoretischen Kapitels 8 liegen beim Neyman-Pearson-Lemma und univariater Normalverteilungstheorie.

Den Abschluß des Buches bilden ein Kapitel über Konfidenzintervalle und drei kurze Anhänge, in denen einige Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Grundlagen über bedingte Wahrscheinlichkeiten und einfache Minimierungstechniken zusammengestellt werden.

Der Autor betont die entscheidungstheoretische Sichtweise der Statistik, etwa wenn er (auf p. 61 und p. 65 unten) an der ML-Methode und dem Unverfälschtheitskonzept kritisiert, daß sie sich nicht mit Hilfe von Verlust und Risiko formulieren lassen oder indem er die Verwendung von Bayes-Verfahren mit Hilfe des Complete-Class-Theorems sowie des Zulässigkeitskonzeptes rechtfertigt. Das Schwergewicht liegt auf der Vermittlung von Ideen und nicht auf der größtmöglichen Allgemeinheit. So werden nur diskrete und Lebesgue-stetige Modelle behandelt und Beweise, falls dies eine signifikante Vereinfachung zur Folge hat, oft nur im diskreten Fall geführt (Beispiele: Complete-Class-Theorem, Faktorisierungskriterium). Oft werden schon vor der Formulierung allgemeiner Sachverhalte die Resultate in Beispielen und Spezialfällen behandelt, was insbesondere dem Kapitel über lineare Modelle sehr zugute kommt. Generell besticht das Buch durch seine Fülle von Beispielen, die auch über mehrere Abschnitte fortgesetzt werden und gut mit dem ausführlichen, sich an jedes Kapitel anschließenden Aufgabenteil verzahnt sind. In den Formulierungen entbehrt der Text nicht eines gewissen Humors („Do not worry if this – eine Determinante – is something you haven't ever seen,“ p. 96); auch enthält er einen Teil allgemeiner Lebensweisheit („... most bosses will tolerate incompetence but not insubordination,“ p. 63). Die zum Verständnis erforderlichen wahrscheinlichkeitstheoretischen Vorkenntnisse sind – gemessen an der Fülle der vermittelten statistischen Ideen – sehr moderat. Diese Ideen und ihre entscheidungstheoretische Fundierung können daher auf der Grundlage des vorliegenden Lehrbuches ohne weiteres schon im ersten Semester eines Stochastik-Vorlesungszyklus' behandelt werden. Insofern stellt das Buch einen wertvollen Beitrag zur Lösung eines wichtigen hochschuldidaktischen Problems der Stochastik dar.

Dortmund

H. Milbrodt

**Øksendal, B., Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications** (Universitext), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1985, xiii, 205 pp., softcover, DM 42,—

Wie im deterministischen Fall liegen auch für stochastische Bewegungsvorgänge die Steuerungsdaten in der Regel in differentieller Form vor, so daß das Studium von Differentialgleichungen eine der Hauptaufgaben der mathematischen Behandlung stochastischer dynamischer Phänomene ist. Nun ist es für den Prototyp der stochastischen Bewegungen, nämlich für die (mathematische) Brownsche Bewegung, schon ein ziemlich diffiziles Unterfangen, ihren „differenziellen Gehalt“, das sogenannte Weiße Rauschen, mathematisch exakt zu definieren. Eine Möglichkeit, derartige Schwierigkeiten zu überwinden, ist die Itôsche Vorgehensweise, die, aufbauend auf dem Itôschen stochastischen Integral, Lösungen stochastischer Differentialgleichungen durch integrale (statt differentielle) Forderungen charakterisiert. Die damit einer präzisen mathematischen Behandlung zugängliche und in vielerlei Hinsicht hinreichend große Klasse von Itôschen stochastischen Differentialgleichungen ist das Thema des vorliegenden Buches. Als Lösungen solcher Gleichungen tritt eine Teilklasse der Diffusionsprozesse auf, deren schon angesprochener Prototyp Brownsche Bewegung mehrere Schlüsselrollen spielt: Einmal ist sie als Dynamisierung von (Meß-)Vorgängen zu sehen, die zufälligen Störungen unterworfen sind und die bereits von Gauß durch Normalverteilungen adäquat modelliert wurden. Sodann ist sie (oder besser ihre Varianten, wie etwa der Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß) ein mathematisches Modell für die physikalische Brownsche Molekularbewegung. Drittens ist sie Zeit-Integral des oben erwähnten Weißen Rauschens, das ja vor allem im Nachrichtenwesen eine fundamentale Rolle spielt.

Viertens wird ihre Übergangshalbgruppe vom Laplace-(Beltrami-)Operator erzeugt, so daß man nahezu jede Situation, in denen der Laplace-Operator oder auch allgemeinere elliptische Operatoren auftreten, als makroskopischen Aspekt einer zugrundeliegenden (allerdings meist nicht real zu interpretierenden) stochastischen Bewegung auffassen kann. Dies gilt speziell für die Potentialtheorie. Schließlich wird gerade in jüngster Zeit der schon im Jahre 1900 von L. Bachelier unternommene Versuch, die Brownsche Bewegung zur Modellierung ökonomischer Phänomene heranzuziehen, verstärkt fortgeführt.

Aus all dem ergibt sich die hohe Bedeutung und große Anwendungsbreite der Diffusionsprozesse allgemein und der Itô'schen Diffusionen im besonderen, die ihren Niederschlag demgemäß auch in einer Reihe hervorragender Lehrbücher gefunden haben (vgl. Literaturverzeichnis im vorliegenden Buch). Aber, wie der Autor wohl mit einiger Berechtigung im Vorwort schreibt: „Unglücklicherweise scheint der Großteil der Literatur über stochastische Differentialgleichungen soviel Wert zu legen auf Strenge und Vollständigkeit, daß viele Nichtexperten verschreckt werden.“ [Ein ähnliches Argument führt auch D. Williams in seinem Buch „Diffusions, Markov Processes, and Martingales. J. Wiley, 1979“ an, wenn er P. A. Meyer mit den Worten zitiert: „... sechs Monate Vorlesung sind nötig, um die Definitionen bereitzustellen.“] Gerade hier setzt nun der Autor an, der als Anliegen formuliert: Zugang zum Stoff aus dem Blickwinkel des Nichtexperten – Beschränkung auf die wichtigsten Spezialfälle unter Beiseitelassen des allgemeinsten Falles – gelegentlich nur Wiedergabe von Beweisideen – Darstellung der wichtigsten Anwendungen.

Mein Eindruck ist, daß der Autor die gesteckten Ziele ohne jeden Zweifel erreicht, auch wenn ich meine, daß an einigen Stellen mehr Eleganz der Darbietung ohne Gefährdung des „down to earth“-Zieles möglich wäre. Seiner ihm vom Autor (so wörtlich) zgedachten Rolle als Appetit-Anreger für weitere Studien scheint mir das Buch jedenfalls sehr gut gerecht zu werden.

Kurz zum Inhalt: Nach Bereitstellung einiger Grundlagen, speziell zur Brownschen Bewegung, wird das stochastische Integral im Itô'schen Sinne eingeführt (mit einigen Bemerkungen zum Stratonovich-Integral). Mit der Itô-Formel sowie einem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen stochastischer Differentialgleichungen (hier allerdings sehr stringente Bedingungen, wie global Lipschitz und lineares Wachstum für die Koeffizienten) schließt der allgemeine Teil. Der weit überwiegende Teil (etwa drei Viertel) des Buches ist dann Anwendungen (teils innerhalb der Mathematik) gewidmet: Beginnend mit Grundlagen der stochastischen Filterung (lineare Filter, speziell Kalman-Bucy-Filter) werden dann wichtige Aspekte der Theorie der Diffusionsprozesse behandelt (Markov-Eigenschaft, Erzeuger, Feynman-Kac-Formel, Zeittransformation, Cameron-Martin-Girsanov-Transformation). Danach geht es um Anwendungen auf elliptische und parabolische Differentialoperatoren, speziell um das Dirichlet- und Poisson-Problem, wofür jeweils stochastische Versionen angegeben und Beziehungen zu klassischen Lösungen untersucht werden. Schließlich wendet sich der Autor noch (getrennt voneinander) dem optimalen Stoppen und der optimalen stochastischen Steuerung zu. Beidesmal werden bekannte Problemstellungen (teils auch diskreter Art) mit eingebunden, wie Sekretärinnenproblem, linearer Regulator, optimale Portfolio-Auswahl.

An Vorkenntnissen verlangt das Buch im wesentlichen gute Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie. Da der Leser durch seine Lektüre mit den wichtigsten Ideen und Anwendungen der stochastischen Differentialgleichungen – wenigstens in den Grundzügen – vertraut gemacht wird, kann ich das vorliegende Buch als erste Einführung in das im Titel genannte Gebiet jedem Interessenten nur empfehlen.

# Théorie des nombres / Number Theory

Comptes Rendus de la Conférence internationale de Théorie des nombres tenue à l'Université Laval en 1987 / Proceedings of the International Number Theory Conference held at Université Laval in 1987

Editeurs / Editors: JEAN MARIE DE KONINCK · CLAUDE LEVESQUE

1989. XXI, 1002 pages. 17 x 24 cm. Cloth DM 268,-  
ISBN 3 11 011791 6; ISBN 0-89925-510-8

New developments in the field of number theory are reported in these Proceedings of the International Number Theory Conference held at Université Laval from July 5 to 18, 1987. The book contains 74 refereed articles which, apart from a few survey papers of peculiar interest, are mostly research papers.

The topics covered reflect the full diversity of the current trends and activities in modern number theory: elementary, algebraic and analytic number theory; constructive (computational) number theory; elliptic curves and modular forms; arithmetical geometry; transcendence; quadratic forms; coding theory.

## From the Contents:

*L. J. Alex, L. L. Foster*: Exponential Diophantine equations · *A. Arenas*: Quantitative aspects of the representations of integers by quadratic forms · *R. C. Baker*: Diagonal cubic equations, I · *D. Berend*: Irrational dilations of approximate multiplicative semigroups of integers · *R. Berndt*: Some special features of the Jacobi group · *M. J. Bertin*: Généralisation de suites de Pisot et de suites de Boyd · *D. W. Boyd*: Salem numbers of degree four have periodic expansions · *J. L. Brenner, R. J. List*: Applications of partition theory to groups: Covering the alternating group by products of conjugacy classes · *G. S. Call*: Variation of local heights on an algebraic family of abelian varieties · *H. Cohen*: Sur une fausse forme modulaire liée à des identités de Ramanujan et Andrews · *D. R. Dorman*: Global orders in definite quaternion algebras as endomorphism rings for reduced CM-elliptic curves · *M. Drmota, R. F. Tichy*: Distribution properties of continuous curves · *D. S. Dummit*: On the torsion in quotients of the multiplicative groups in abelian extensions · *A. G. Earnest*: Binary quadratic forms over rings of algebraic integers: a survey of recent results · *M. Emsalem*: Places totalement décomposées dans des  $Z_p$ -extensions d'un corps de nombres · *P. Erdős, J.-L. Nicolas*: Grandes valeurs de fonctions liées aux diviseurs premiers · *J. Fabrykowski, M. V. Subbarao*: The maximal order and the average order of multiplicative function  $\sigma^{(e)}(n)$  · *H. Faure*: Discrépance quadratique de suites infinies en dimension un · *M. E. Flahive*: Integral solutions of linear systems · *J. B. Friedlander*: Fractional parts of sequences · *E. Friedman, L. C. Washington*: On the distribution of divisor class groups of curves over a finite field · *A. Fujii*: Diophantine approximation, Kronecker's limit formula and the Riemann Hypothesis · *P. Gérardin*: Le théorème de Riemann-Roch et les corps de nombres algébriques · *P. Gérardin, W.-Ch. W. Li*: Functional equations and periodic sequences · *R. Gold, H. Kisilevsky*:  $Z_p$ -extensions of function fields · *D. M. Gordon*: Pseudoprimes on elliptic curves · *A. Granville*: Least primes in arithmetic progressions · *C. Greither*: Cyclic Galois extensions and normal bases ...



de Gruyter · Berlin · New York

# European Consortium for Mathematics in Industry

ECMI VOL. 2

## Case Studies in Industrial Mathematics

Edited by Prof. Dr.-Ing. H. W. Engl, Prof. Dr. Hj. Wacker and Dr. W. Zulehner,  
University of Linz

1988. X, 218 pages. 16,2 x 23,5 cm. Coproduction Kluwer-Teubner

ISBN 3-519-02171-4 (Teubner) Bound DM 72,-

ISBN 90-277-2731-7 (Kluwer) Bound Dfl 140.00 / £ 43,00

In the book eight projects are presented, which were treated by groups of mathematicians from the Johannes Kepler Universität at Linz, Austria. As the title of the book indicates, the projects are "real world" problems from industry. They were studied in close contact with engineers. Numerical methods play a crucial role in all projects. The book concentrates on problems close to the mathematical expertise of the working groups, which includes nonlinear equations, optimization and control, inverse and ill-posed problems. Most of the presented problems come from a few areas of applications, namely hydro energy production, various phases of steel production and modelling of large-scale chemical systems.

### *Contents*

- Project 1** H. W. Engl/E. H. Lindner: Computing Eddy Current Losses in Reactor Coils
- Project 2** W. Zulehner: Calculation of the Hydrodynamic Coefficients for Bodies of Revolution
- Project 3** H. W. Engl/T. Langthaler: Control of the Solidification Front by Secondary Colling in Continuous Casting of Steel
- Project 4** D. Auzinger/Hj. Wacker: Optimal Reheating of Slabs in a Pusher Type Reheating Furnace
- Project 5** W. Zulehner: On the Design of the Volute of a Centrifugal Pump
- Project 6** D. Auzinger/L. Peer/Hj. Wacker/W. Zulehner: Numerical Calculation of Separation Processes
- Project 7** W. Bauer/E. H. Lindner/Hj. Wacker: Optimization of Systems of Hydro Energy Power Plants
- Project 8** E. H. Lindner/Hj. Wacker: A Black Box Technique for Determining the Efficiency Function of a Hydroelectric Storage Power Plant

# European Consortium for Mathematics in Industry

ECMI VOL. 3

Proceedings of the

## Second European Symposium on Mathematics in Industry

ESMI II March 1-7, 1987, Oberwolfach

Edited by Prof. Dr. H. Neunzert, University of Kaiserslautern

1988. VIII, 359 pages. 16,2 x 23,5 cm. Coproduction Kluwer-Teubner

ISBN 3-519-02172-2 (Teubner) Bound DM 82,-

ISBN 90-277-2732-5 (Kluwer) Bound Dfl 180.00 / £ 56,00

Industrial mathematics is a special method to get interesting problems; a special attitude of curiosity for technical or economical questions; a general rather broad knowledge in all branches of mathematics. These proceedings include only examples of "how to do". On the one hand classical topics in industrial mathematics as questions of mathematical modelling, e.g. in chemical industry; numerics, e.g. process simulation, CAD; optimization problems, e.g. in steel industry; and finally image and signal processing are treated. On the other hand the applicability of "pure" mathematics to practical problems is demonstrated by examples in system theory (filtering) and in the application of the analysis of the wave equation to control problems in space technology.

### *Contents*

R. V. Mendes, M. Faria, L. Streit: Map Dynamics in Gearbox Models / R. M. M. Mattheij, S. W. Rienstra: On an Off-shore Pipe Laying Problem / K. Merten: Mathematische Probleme des rechnergestützten Entwurfs höchstintegrierter Schaltungen / P. S. Teigen, Statoil: Stability Problems in Offshore Installation Operations / J. Struckmeier, F.-J. Pfreundt: Identification of Deterministic Nonlinear Dynamical Systems / M. Hazewinkel: Introduction to Nilpotent Approximation Filtering / M. Primicerio: Dynamics of "Slurries" / C. Bardos: Practical Applications of the Notions of Propagation of Singularities / S. D. Howison: Complex Variables in Industrial Mathematics / E. Cumberbatch: Mosfet Modelling / V. Capasso: Reaction-Diffusion Models for the Spread of a Class of Infectious Diseases / G. Stoyan: Numerical Solution of Pipeline System Problems by Monotone Difference Approximations / S. A. Halvorsen: Dynamic Model of a Metallurgical Shaft Reactor with Irreversible Chemical Kinetic and Moving Lower Boundary / P. F. Hodnett: Wave Induced Washout of Submerged Vegetation in Shallow Irish Lakes / J. Hoschek: Approximate Conversion of Spline Curves / P. Rentrop, U. Wever: Interpolation Algorithms for the Control of a Sewing Machine / M. Bercovier, E. Jankovich, M. Durand: The Development of a Mechanical Model for a Tire: A 15 Year Story to Replace Test Machines / D. Auzinger, L. Peer, Hj. Wacker: Steady State Simulation of Chemical Plants - Flow-sheeting / H. W. Engl, G. Landl: A Scheduling Problem in the Production Line "Steel Making - Continuous Casting - Hot Rolling" / W. Schempp: A Reference Model for Laser Opto-Electronics, Digital Signal Processing, and Holography / U. Eckhardt, G. Maderlechner: Application of the Projected Radon Transform in Picture Processing

# Neuerscheinungen – Neuauflagen

Heuser

## **Gewöhnliche Differentialgleichungen**

**Eine Einführung in Lehre und Gebrauch**

Von Prof. Dr. H. Heuser, Universität Karlsruhe

1989, 628 Seiten mit zahlreichen Bildern, Aufgaben mit Lösungen und Beispielen. 16,2 × 22,9 cm. Kart. DM 68,-  
(Mathematische Leitfäden)  
ISBN 3-519-02227-3

Dieses Buch möchte nicht nur ein theoretisches Gerüst aufbauen (Lösungsmethoden, Existenz-, Eindeutigkeits- und Abhängigkeitssätze, Reihenentwicklungen, Eigenwert- und Stabilitätstheorie usw.), sondern auch eine Brücke zu den Anwendungen schlagen. Es übt deshalb neben dem Lösen das Aufstellen von Differentialgleichungen ein und zeigt detailliert, wie besonders wichtige Differentialgleichungen und Differentialgleichungstypen aus konkreten naturwissenschaftlichen Fragestellungen herauswachsen und dann umgekehrt wieder helfen, die aller verschiedensten Probleme befriedigend zu klären. Dieses Ineinandergreifen von Theorie und Praxis wird an zahlreichen Beispielen und Aufgaben (mit Lösungen) aus den Ingenieurwissenschaften, der Mechanik, Physik, Chemie, Biologie, Medizin und Wirtschaftswissenschaft sachlich verdeutlicht und historisch beleuchtet.

Louis

## **Inverse und schlecht gestellte Probleme**

Von Prof. Dr. Alfred Louis, Technische Universität Berlin

1989, ca. 200 Seiten. 13,7 × 20,5 cm. Kart. ca. DM 25,-  
(Teubner Studienbücher)  
ISBN 3-519-02084-X

Motiviert durch Probleme aus Technik und Medizin werden Regularisierungsverfahren zur Behebung der Instabilität eingeführt und Kriterien für optimale Verfahren diskutiert. Stabilisierungsverfahren werden verglichen und ihre numerische Realisierung untersucht. Schließlich werden Ergebnisse auf ein Problem der diagnostischen Medizin angewandt.

Grundlage für dieses Buch sind Vorlesungen, die sich an Hörer mittlerer Semester der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften richteten. Über Vordiplomkenntnisse hinausgehende mathematische Hilfsmittel werden bereitgestellt. Somit ist dieses Buch sowohl als Lektüre zu einer entsprechenden Vorlesung als auch zum Selbststudium geeignet.



B. G. Teubner Stuttgart