91. Band Heft 3
ausgegeben am 20. 7. 1989

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1989

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 90/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 91, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Atiyah: The Frontier Between Geometry and Physics
M. Denker: Eberhard Hopf 04–17–1902 to 07–24–1983
J. A. Jenkins: Helmut Grunsky
B. Schoeneberg: Erich Hecke 1887–1947
A. Schoenhage: Numerik analytischer Funktionen und Komplexität
J. R. Whiteman, A. E. Beagles, M. K. Warby: Theoretical and Practical Aspects of Finite Elements in the Context of Some Problems of Solid Mechanics
J. M. Wills: Kugellagerungen und Konvexgeometrie
D. Zagier: Elliptische Kurven: Fortschritte und Anwendungen

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Memminger Str. 6, 8900 Augsburg
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
91 (1989) 109–125

Über die algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten von Max Deuring*)

P. Roquette, Heidelberg

§ 1 Einleitung

Der Mathematiker, als forschender Wissenschaftler, arbeitet in der Regel nicht isoliert und für sich allein. Vielmehr schließt er in seinen Arbeiten an die Leistungen und Entdeckungen früherer Mathematikergenerationen an, und mit den Wissenschaftlern seiner eigenen Zeit steht er in regem Gedankenaustausch, er empfängt und vergibt mannigfaltige Anregungen und Impulse. Die Entwicklung unserer Wissenschaft vollzieht sich also in einem Spannungsfeld zwischen individueller Originalität des einzelnen Forschers und kollektivem Bewußtsein ganzer Mathematikergenerationen. Im Werk des einzelnen Mathematikers können wir daher auch die großen Entwicklungstendenzen der Mathematik erkennen: einerseits weil durch diese Tendenzen die Arbeit des einzelnen beeinflußt wird, andererseits weil er eben durch seine Arbeit auf den Fortschritt der Mathematik Einfluß nimmt. In diesem Sinne erscheint es reizvoll, die Entwicklungslinien der Mathematik in ihrer Projektion auf das Werk eines Mathematikers zu verfolgen.

Als im vergangenen Jahr die Aufgabe an mich herangetragen wurde, hier heute über das Werk von *Max Deuring* zu berichten, da habe ich das gerne übernommen, weil es mir unter den genannten Gesichtspunkten ganz besonders interessant und ergiebig erschien. Bei der Vorbereitung dieses Vortrages merkte ich jedoch bald, daß ich mich da eigentlich auf ein viel zu anspruchsvolles Vorhaben eingelassen hatte. Das mathematische Werk Deurings ist in vielfältiger Verflechtung eingebettet in die großen zentralen Entwicklungslinien der heutigen Mathematik; es erhält von daher seine Bedeutung und sein Wirkungsfeld. Angesichts der kurzen Vorbereitungszeit, die mir zur Verfügung stand, ist es mir hier nicht recht möglich, eine vollständige und einigermaßen erschöpfende Würdigung zu liefern. So bitte ich um Verständnis und Nachsicht für den reichlich fragmentarischen und zunächst subjektiven Charakter meiner Ausführungen; vielleicht können diese als eine erste, vorläufige Grundlage für eine spätere ausführlichere Darstellung dienen. Nur ein Gefühl der Verpflichtung, die einmal übernommene Aufgabe auch auszuführen, hat mich bewogen, meine Arbeit an diesem Vortrag trotz mancher erkennbarer Unzu-

*) Manuskript eines Vortrages, gehalten am 15. Mai 1986 im Mathematischen Institut der Universität Göttingen.

länglichkeiten nicht vorzeitig aufzugeben. Ich möchte mich an dieser Stelle auch bei Martin Kneser bedanken, der freundlicherweise dadurch Hilfestellung gegeben hat, daß er mir seinen Nachruf auf Max Deuring zugänglich machte, den er für den Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung angefertigt hat*).

Persönlich habe ich Deuring nicht oft getroffen. Jedoch haben seine Arbeiten einen starken und nachhaltigen Eindruck auf mich ausgeübt und üben ihn noch heute aus. Ich habe vieles von ihm gelernt und, in diesem Sinne, kann ich ihn durchaus als meinen Lehrmeister bezeichnen, auch wenn er das nicht im üblichen akademischen Sinne gewesen ist.

§ 2 Algebren

Meine erste Bekanntschaft mit dem Namen und dem mathematischen Werk von Max Deuring wurde vermittelt durch sein berühmtes Buch über *Algebren*. Es war in den ersten Nachkriegsjahren, und ich war junger Student in Erlangen, wo u. a. *Heinrich Grell* lehrte, ein Mathematiker aus dem Kreis um *Emmy Noether*, aus dem ja auch Deuring kam. Grell verstand es durch seinen lebendigen, anspruchsvollen Unterricht, uns für die großartigen Ideen von Emmy Noether zu interessieren und, ich kann wohl sagen, zu faszinieren.

Somit fand ich mich schon in den ersten Studiensemestern tief hineingezogen in die *Klassenkörpertheorie* und die Theorie der sog. *hyperkomplexen Systeme*, also der *Algebren*. In dem für uns Anfänger ja doch ziemlich schwierigen Stoff fanden wir Halt und Ausrichtung eben in Deurings Buch. Hier war in zwar knapper, aber klarer und durchsichtiger Form das gesamte damals relevante Wissen über Algebren dargestellt. Ich kann mich daran erinnern, daß ich damals derart von dem Deuringschen Buch angetan war, daß ich es in einem Zug durcharbeitete – unter vollständiger Vernachlässigung des von uns Anfängerstudenten verlangten Standardstoffes. Es wurde mir gar nicht bewußt, daß es sich bei Deuring ja nicht um ein Anfänger-Lehrbuch handelte, sondern um einen *Ergebnisbericht*, konzipiert als Handbuch für Fachleute, die mit der Materie bereits vertraut sind. In dem Buch fehlte so manches, was heutzutage ein professioneller Didaktiker bei einem Lehrbuch für erforderlich halten würde. Wie so oft, bestätigt sich auch hier, daß Kompetenz, Klarheit und Präzision die besten didaktischen Ingredienzen für ein mathematisches Werk sind und durch keine sekundären Qualitäten ersetzbar sind. Meine eigenen damaligen Erfahrungen sind, glaube ich, nicht singulär gewesen. Das Deuringsche Buch wurde nicht nur als Handbuch benutzt, sondern es hat viele Mathematikergenerationen in die Algebrentheorie eingeführt. Unter allen Ergebnisberichten, die in den dreißiger Jahren in der bekannten Springer-Reihe entstanden, hat wohl das Deuringsche Buch die breiteste Wirkung gehabt – vergleichbar höchstens mit dem Krullschen Idealbericht (der jedoch einen ganz anderen Charakter besitzt). Es gab zwei Nachdrucke: einmal nach Kriegsende im Chelsea Verlag, sozusagen als

---

*) Erschienen in Band 89, Heft 3 (1987) des Jahresberichts. Dort findet sich auch ein Verzeichnis der mathematischen Publikationen von Deuring. Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf jenes Verzeichnis.

Kriegsbeute der Alliierten, und das zweite Mal im Jahre 1968 mit einigen kleineren Korrekturen, aber sonst unverändert.

Worin besteht nun die besondere Qualität des Deuringschen Buches und wie ist seine große Wirkung zu erklären?

Versuchen wir, uns die Göttinger Jahre um 1930 zu vergegenwärtigen! Wie Deuring selbst berichtet, gab es damals in Göttingen ganz inoffiziell verschiedene Arbeitsgruppen, die den einzelnen Professoren zugeordnet waren. Es gab die Gruppe um *Landau*, die Gruppe um *Hilbert* (der damals schon schwerkrank war), die Gruppe um *Courant* und schließlich die Gruppe der Algebraiker um *Emmy Noether* und *van der Waerden*. Deuring, der 1926 sein Mathematikstudium begonnen hatte, schloß sich nach eigenem Bekunden sehr bald den Algebraikern um Emmy Noether und van der Waerden an. Wir können uns also vorstellen, daß er direkt und aus unmittelbarer Nähe die großen Entdeckungen in der Algebrentheorie miterlebt hat, und diese waren damals ziemlich aufregend. Deuring selbst berichtet uns im Vorwort seines Buches, wie die algebrentheoretische Aktivität der damaligen Jahre initiiert worden war, nämlich durch das Erscheinen der deutschen Übersetzung des Buches von *Dickson*, mit dem Titel *„Algebren und ihre Zahlentheorie"*. Die englische, in Amerika erschienene Fassung war von den deutschen Mathematikern kaum beachtet worden; erst nachdem die deutsche Übersetzung, angeregt durch *Andreas Speiser*, herausgekommen war, begann man auch hierzulande darauf aufmerksam zu werden. Das war im Jahre 1927, also gerade zu der Zeit, in der die Klassenkörpertheorie in der uns heute geläufigen Form entdeckt wurde. Erinnern wir uns: 1925 auf der DMV-Tagung in Danzig hatte *Helmut Hasse* seinen berühmten Vortrag zur *Takagischen Klassenkörpertheorie* gehalten, 1927 erschien Hasses Klassenkörperbericht (Teile I und Ia), und im selben Jahr entdeckte *Emil Artin* nach langjährigen Vorarbeiten das allgemeine *Reziprozitätsgesetz*. In diesem Zustand des Übergangs zur modernen Zahlentheorie wirkte das Buch von Dickson wie ein Katalysator. Man erkannte, daß die Dicksonsche Zahlentheorie der nichtkommutativen Algebren eine wesentliche Erweiterung des Horizonts der kommutativen Zahlentheorie bedeutet.

Andererseits war man sich bewußt, daß die neu entwickelten zahlentheoretischen Methoden, insbesondere auch die sogenannte *lokale Methode*, ein viel mächtigeres Werkzeug auch im Nichtkommutativen abgeben. Und man ging sofort ans Werk. In diese Jahre der stürmischen Entwicklung, die Deuring sozusagen hautnah miterlebte (wie man heute vielleicht sagen könnte), fallen die bahnbrechenden Entdekkungen von *Hasse, Brauer und Noether* zur Struktur der einfachen zentralen Algebren über einem Zahlkörper endlichen Grades. Es handelte sich um die Bestimmung der sog. *Brauerschen Gruppe*. Ferner wurde der Zusammenhang der lokalen Arithmetik von Algebren mit dem lokalen Normenrestsymbol der Klassenkörpertheorie entdeckt, und damit der algebrentheoretische, nichtkommutative Beweis der *globalen Produktformel für das Hilbertsche Symbol*. Die Entdeckung der engen Verflechtung zwischen den kommutativen Klassenkörpertheorie und der nichtkommutativen Algebrentheorie stellt nach meiner Meinung einen Höhepunkt des mathematischen Schaffens der damaligen Epoche dar. In späteren Jahren, nach dem Eindringen der Kohomologie in die Zahlentheorie, hat man oft die Meinung gehört, die Rolle der Algebren in der Zahlentheorie sei nur von untergeordneter Bedeutung und lasse sich vollständig reduzieren auf die zweite *Kohomologiegruppe*. Heute, im Zuge der Arbeit an dem sogenannten *Langlandsschen Programm*, setzt sich wieder die Erkenntnis durch, daß die Algebren wesentlich mehr zahlentheoretische Information tragen als es in der Kohomologie zum Ausdruck gebracht werden kann. Der frühere, insbesondere von Emmy Noether vertretene Standpunkt, der den Algebren eine bedeutende Rolle in der Zahlentheorie zuweist, kommt heute wieder zur Geltung.

Parallel zu der geschilderten Entwicklung entstand die *Brandtsche Theorie* der Arithmetik der *Maximalordnungen* einer Algebra, offenbar angeregt durch Emmy Noether. Die mit dieser Theorie verbundenen sog. Brandtschen *Gruppoide* sind als nichtkommutatives Äquivalent der Divisorenklassengruppen im Kommutativen anzusehen. Und schließlich kam noch die auf Algebren bezogene *analytische Theorie* hinzu. Diese ganze Entwicklung geschah innerhalb weniger Jahre, etwa 1927–1932. Danach entstand das Bedürfnis, die erhaltenen Ergebnisse zu sichten, zu ordnen und zu ergänzen, und in systematischer Form darzustellen. Die Publikation sollte in der damals gerade vom Springer-Verlag eingerichteten Serie der „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" erfolgen. Die Aufgabe, einen solchen Ergebnisbericht zu schreiben, fiel auf den jungen Max Deuring, damals 23 Jahre alt.

Deuring hatte damals schon einige Publikationen, allerdings nicht eigentlich in Algebrentheorie, sondern in der Galoistheorie der algebraischen Zahlen und Funktionen. Deuring war also damals nicht einer von denen, die Wesentliches beigetragen hatten zur Entwicklung der Algebrentheorie, über die sein Buch berichtet; er war sozusagen Berichterstatter, nicht selbst einer der Akteure.

Seine Meisterschaft zeigte sich in der Art der Berichterstattung. Ich kann hier nicht auf alles eingehen, was zu den Höhepunkten dieses Buches zu zählen ist. Ich möchte jedoch eines davon hervorheben, nämlich das Prinzip der *lokalen Methode* zur Untersuchung von Algebren. Sicherlich stammt dieses Prinzip nicht von Deuring selbst, sondern es hatte sich bereits einige Jahre früher in der bereits oben erwähnten Zusammenarbeit von Emmy Noether, Helmut Hasse und Richard Brauer als fruchtbar und fundamental herausgestellt. Bei Deuring handelt es sich jedoch historisch um die erste zusammenfassende Darstellung in Buchform, in der die lokale Methode systematisch benutzt und als Forschungsprinzip verwendet wurde. Es ist bemerkenswert, mit welcher Sicherheit der damals 23jährige Autor die lokale Methode ansetzt, und sie auch dort verwendet, wo sie in der Literatur bis dahin noch nicht üblich war, z. B. im Zuge der Brandtschen Theorie der Gruppoide von Idealklassen.

Sicherlich könnte man heute einiges aus dem Deuringschen Buch in moderner Form etwas besser darstellen, z. B. die Struktursätze der Algebren, oder die sog. modulare Darstellungstheorie. Auch ist die Entwicklung in so manchen Richtungen weitergegangen, z. B. könnte man sich heute nicht mehr auf die Arithmetik der Maximalordnungen beschränken, sondern wir wissen jetzt, daß zumindest die inzwischen entdeckten hereditären Ordnungen (beziehungsweise die Benzschen Hauptordnungen) mit in den Kreis der Betrachtung eingeschlossen werden sollten. Aber diese Weiterentwicklung der Algebrentheorie beruht ja zu einem erheblichen Teil gerade auf dem Einfluß, den das Deuringsche Buch weltweit ausgeübt hat.

Als Beispiel für die Wirkung des Deuringschen Buches kann ich aus eigener Kenntnis folgendes erwähnen: Im Jahre 1955 fand in Princeton am Institute for Advanced Study ein Seminar über Darstellungstheorie statt. Aus unseren damaligen Seminarnotizen ist deutlich das Bestreben zu erkennen, die algebrentheoretischen Methoden des Deuringschen Buches auch für die ganzzahlige und modulare Darstellungstheorie nutzbar zu machen. An dem damaligen Seminar nahmen auch *Irving Reiner* und *Charles Curtis* teil, deren Arbeiten in späteren Jahren zu dem gemeinsamen Buch über Darstellungstheorie führten, einem bekannten Standardwerk. Irving Reiner hat mir gegenüber öfters betont, daß die Wurzel seines Buches in dem damaligen Seminar in Princeton zu suchen sei und somit also auch in dem Algebren-Bericht von Deuring.

Fassen wir zusammen: Deuring hat in seinem Buch den Wissensstand seiner Zeit unter damals neuen und modernen Gesichtspunkten dargestellt, und er hat dadurch bedeutenden Einfluß auf die weitere Entwicklung der Algebrentheorie aber auch der Darstellungstheorie genommen. Durch diese focussierende Wirkung ist das Buch zu einem „Klassiker“ geworden, wenn ich hier dieses etwas abgedroschene Wort gebrauchen darf. Vorbildlich ist auch die Diktion: Klar, präzis, vollständig, aber knapp und ohne unnötige Wiederholungen. Es kommt nicht gerade häufig vor, daß einem Wissenschaftler bereits in so jungen Jahren ein so großer Wurf gelingt.

Was übrigens die häufig lobend erwähnte Knappheit des Stils betrifft, so entspricht sie einerseits wohl dem Wesen von Deuring: auch in Diskussionen sagte er selten ein Wort zuviel. Andererseits hatte wahrscheinlich auch der Verleger, *Ferdinand Springer*, einen gewissen Einfluß auf die Ausbildung dieses knappen Deuring-Stils in dem Buch über Algebren. Denn in dem ursprünglichen Autorenvertrag mit Deuring war nur der Umfang von 5 Druckbögen vorgesehen, das wären also 80 Seiten. Es wurde damals vom Verlag aus Kostengründen sehr darauf geachtet, daß der vorgesehene Umfang nicht überschritten wurde, und Deuring mußte also auch darauf achten. Immerhin wurde schließlich, als Deuring im November 1934 das Manuskript an den Verlag lieferte, der doppelte Umfang erreicht, nämlich 10 Druckbögen. Daß dies vom Verlag dann doch akzeptiert wurde, lag wohl an der Fürsprache von *Emmy Noether*, die das Manuskript offenbar genau durchgesehen hatte, so daß daraufhin *Neugebauer*, einer der Herausgeber der Sammlung, dem Springer-Verlag versichern konnte, es handele sich um ein Thema von höchster Aktualität*). Und das war ja in der Tat der Fall. Aus der Zeittafel (Anhang 2) ersehen wir, daß wichtige Arbeiten von H. Hasse, R. Brauer, E. Noether, C. Chevalley, Ch. Tsen, E. Witt in den Jahren 1931–1934 erschienen waren, unmittelbar vor der Publikation von Deurings Buch 1935. Deuring hatte jene Arbeiten in seinem Buch voll berücksichtigt.

---

*) Nach Mitteilung von Dr. Heinze, Springer Verlag, Heidelberg.

§ 3 Deuring als akademischer Lehrer

Soviel zu dem Buch über Algebrentheorie, das, wie gesagt, meine erste Bekanntschaft mit dem Deuringschen Werk darstellte. Einige Jahre später geriet ich ein zweites Mal unter den Einfluß von Deuring, und diesmal ganz persönlich. Ich war inzwischen als Student von Erlangen nach Hamburg übergewechselt. Es hatte sich dort um die Person von *Hans Zassenhaus* ein Kreis von Studenten gesammelt, die sich aktiv für Algebra und Zahlentheorie interessierten. Im Jahre 1948 ging Zassenhaus nach Kanada, und Deuring nahm einen Ruf nach Hamburg an. Er erklärte sich bereit, unser bisher von Zassenhaus betreutes Seminar weiterzuführen. Somit hatte ich nun aus nächster Nähe Gelegenheit, Deuring als akademischen Lehrer zu erleben. Er ließ den Seminarteilnehmern völlige Freiheit in der Auswahl und Gestaltung der Vortragsthemen. Er gab auch nur spärlich Ratschläge für die zu konsultierende Literatur. Er war jedoch bei jedem Vortrag aufmerksam dabei. Seine knappe, stets präzise und zutreffende Kritik war für uns äußerst lehrreich; er verstand es, durch eine kurze, scheinbar harmlose Frage zum Nachdenken anzuregen und uns dadurch auf seine eigene Weise Erkenntnisse zu vermitteln, die in geschriebener Form schwer oder nur mit sehr viel größerem Aufwand erläutert werden können. Ich entsinne mich an einen Seminarvortrag, den ich selbst zu halten hatte, und in dem ich an einer bestimmten Stelle voller Enthusiasmus eine elegante, abstrakte Schlußweise vortrug (die ich eben gelernt hatte), anstelle der sonst üblichen etwas mühsamen Rechnungen und Abschätzungen. Deuring erkundigte sich, wo ich denn diese Schlußweisen her hätte. Danach forderte er uns durch eine kurze Frage auf, doch einmal darüber nachzudenken, ob denn wirklich die mathematische Erkenntnis aufgrund einer abstrakten Schlußweise wertvoller sei als aufgrund eines konstruktiven Rechenverfahrens. Ich kann den Wortlaut dieser Frage heute nicht mehr zweifelsfrei rekonstruieren, weiß jedoch noch, daß sie uns Anlaß gab, sowohl über den betreffenden Gegenstand als auch über die Natur der mathematischen Erkenntnis ausführlich zu diskutieren und zu reflektieren.

Deuring ging der Ruf als „der große Schweiger" voraus. In unserem damaligen Hamburger Seminar hat er jedoch keineswegs geschwiegen; genau an den Stellen, wo es notwendig wurde, hat er mit seinen Kommentaren nicht zurückgehalten und uns Studenten damit Anleitung und sichere Führung zu den Grenzen der mathematischen Forschung gegeben.

In sachlicher Hinsicht ging es in dem Seminar um Bewertungstheorie, u. a. um die *Hilbertsche Theorie* bewerteter Körper, die von Deuring in einer seiner frühen Arbeiten [1] auf bewertungstheoretischer Grundlage behandelt worden war. Auch lernte ich damals seine *Dissertation* [2] kennen, über eine Klassenkörpertheorie der abelschen Erweiterungen der Funktionenkörper im Kummerschen Fall. Aus Zeitgründen kann ich hier jetzt nicht näher auf diese Arbeiten eingehen. Ich möchte lediglich erwähnen, daß die von Deuring begonnene abstrakte Hilbertsche Verzweigungstheorie später von *O. F. G. Schilling* fortgeführt wurde; heute gehört sie zum Standardrepertoire bei der Untersuchung der bewerteten Körper, insbesondere der formal p-adischen Körper, die bei uns z. Z. in Heidelberg untersucht werden. Die Deuringsche Klassenkörpertheorie von Funktionenkörpern wurde später in den fünfziger Jahren von *Lang* und *Tate* auf kohomologischer Grundlage wieder-entdeckt und ergänzt, jedenfalls im unverzweigten Fall. Später wurden von *Manohar Madan*, einem Schüler von Deuring, auch verzweigte Erweiterungen in den kohomologischen Rahmen aufgenommen, ganz im Sinne der ursprünglichen Deuringschen Dissertation. Das war jedoch bereits Anfang der sechziger Jahre, als Madan mit einem Humboldt-Stipendium zu unserer Tübinger Arbeitsgruppe gekommen war.

Mein Hamburger Studium im Seminar bei Deuring währte nur ein Semester. Danach ging ich nach Berlin, wo ich die Möglichkeit erhalten hatte, bei *Helmut Hasse* zu lernen.

§ 4 Korrespondenzen, Reduktion

Und es war dort, bei Hasse, wo ich zum dritten Mal mit Deurings Werk konfrontiert wurde, diesmal in besonders intensiver Weise und mit sichtbaren Folgen, denn die Deuringsche Arbeit führte mich unmittelbar und direkt auf das Thema meiner eigenen Dissertation. Es handelte sich um Deurings Arbeit zur *Korrespondenzentheorie* [18], [19], die im *Crelleschen Journal* erschienen war: der erste Teil im Jahre 1937 und der zweite Teil 1941. Hasse hatte mich auf diese Arbeit hingewiesen und mich gefragt, ob man nicht mit den Deuringschen Methoden zu einem Beweis der sogenannten *Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper* vordringen könne.

Unter einem Kongruenzfunktionenkörper versteht man einen Funktionenkörper einer Variablen, dessen Konstantenkörper endlich ist. In der Zahlentheorie werden solche Kongruenzfunktionenkörper durch Kongruenzen nach einem Primzahlmodul statt durch Gleichungen definiert; dadurch erklärt sich der Name. Zu jedem solchen Kongruenzfunktionenkörper gehört eine *Kongruenzzetafunktion*, die in ganz ähnlicher Weise gebildet ist, wie die *Dedekindsche Zetafunktion* zu einem Zahlkörper. Untersuchungen über diophantische Kongruenzen hatten *Artin* und später *Davenport* zu der Vermutung geführt, daß die Nullstellen dieser Kongruenzzetafunktionen sämtlich den Realteil 1/2 besitzen – in gewisser Analogie zu der klassischen Riemannschen Vermutung, die noch heute unbewiesen ist. Für elliptische Kongruenzfunktionenkörper, also vom Geschlecht 1, war es Hasse im Jahre 1932 gelungen, diese Vermutung zu beweisen; die zugehörigen Arbeiten erschienen bis 1936 im Crelleschen Journal. Danach begann eine intensive Suche nach den geeigneten Konzepten, die zu einem Beweis für Kongruenzfunktionenkörper beliebigen Geschlechts führen könnten. An diesen Aktivitäten beteiligte sich auch Deuring.

In dem Kreis um Hasse und van der Waerden war es bereits Mitte der dreißiger Jahre klar geworden, daß der Schlüssel zum Beweis der Riemannschen Vermutung in der Theorie der *abelschen Funktionen* zu finden sein müsse, genauer: in der Möglichkeit, die analytische Theorie der abelschen Funktionen vollständig zu algebraisieren und damit auch für Primzahlcharakteristik zu erschließen. Nun gab es bereits eine teilweise Algebraisierung, nämlich innerhalb der italienischen Schule der algebraischen Geometrie, zu deren hervorragenden Vertretern damals *Enriques* und *Severi* gehörten. Aber gewisse grundlegende Prinzipien der italienischen algebraischen Geometrie beruhten immer noch auf analytischen Argumenten, die für Primzahlcharakteristik unzugänglich sind. Die gesamte algebraische Geometrie mußte auf neue, algebraische Grundlagen gestellt werden. Eine ganze Reihe von Arbeiten von Emmy Noether, van der Waerden und ihrem Umkreis (z. B. *W. L. Chow*) dienten genau diesem Programm. Deuring, der in diesem Kreis mathematisch groß geworden war, kannte die Problemstellung und die Zielrichtung dieser Arbeiten. Er selber war im Jahre 1930 ein Semester lang mit einem Stipendium in Rom gewesen, wo er direkt bei Enriques und bei Severi Vorlesungen gehört hatte. Von daher trafen also in der Person von Deuring alle Voraussetzungen zusammen für eine erfolgreiche Beteiligung an der Schaffung der Grundlagen für den Beweis der Riemannschen Vermutung. Diese Aufgabe wurde nun in den beiden erwähnten Arbeiten von Deuring zur Korrespondenzentheorie geleistet.

Der Korrespondenzbegriff im Sinne von Deuring ist eine Verallgemeinerung des Begriffs des Automorphismus. Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus des Körpers auf sich selbst, unter Festlassung der Konstanten. Eine Korrespondenz des Funktionenkörpers ist eine isomorphe Abbildung in eine endlich-algebraische Erweiterung von sich selbst. Während ein Funktionenkörper höheren Geschlechts nach *Hurwitz* und *H. L. Schmid* nur endlich viele Automorphismen besitzt, so gibt es stets unendlich viele Korrespondenzen. Diese können bei geeigneter Definition zu einem Ring gefügt werden, der die Automorphismengruppe als Einheitengruppe enthält. Dieser Korrespondenzenring wirkt als Operatormodul z. B. auf der Divisorklassengruppe des Funktionenkörpers, d. h. auf seiner abelschen Mannigfaltigkeit (oder jacobischen Mannigfaltigkeit, wie man heute sagt). Die zugehörige Darstellung des Korrespondenzenringes heißt der *Multiplikatorenring* des Funktionenkörpers. (Heute sagt man auch „Endomorphismenring", unter Bezugnahme auf die zugehörige jacobische Mannigfaltigkeit.) In Spezialfällen war dieser Multiplikatorenring bereits früher in der komplexen Analysis aufgetreten, z. B. bei den Körpern der Modulfunktionen unter dem (heutigen) Namen der Hecke-Algebra, deren Wirkung *Hecke* zunächst mit Hilfe von Integralen definiert hatte. Es ist das Verdienst von Deuring, die aus der komplexen Analysis und der Geometrie herkommende Korrespondenzentheorie auf eine rein algebraische Grundlage gestellt und damit für Primzahlcharakteristik zugänglich gemacht zu haben. Für den heutigen Studenten sieht das wie eine Selbstverständlichkeit aus: denn es gibt heute ja die algebraisch fundierte Theorie der Schnittmultiplizitäten für Kurven auf Flächen, und es ist bekannt, daß sich damit die Deuringsche Korrespondenzentheorie leicht begründen läßt. Aber zu Deurings Zeiten gab es diese Schnittheorie eben noch nicht, oder genauer: es gab sie nur in Charakteristik 0 und basierte dort auf analytisch-geometrischen Überlegungen. Die Bemühungen von *van der Waerden* und *Zariski*, die Theorie der Schnittmultiplizitäten zu algebraisieren, waren noch nicht so weit fortgeschritten, daß Deuring sie benutzen konnte. *André Weil* hatte seine „Foundations of Algebraic Geometry" noch nicht geschrieben. Heute betrachten wir die Deuringschen Arbeiten zur Korrespondenzentheorie als die erste brauchbare Algebraisierung der Theorie der Schnittmultiplizität auf Flächen, entwickelt mit einer bestimmten Zielsetzung, nämlich der Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper. Aus dieser Sicht handelt es sich um eine wichtige Arbeit von *historischer Bedeutung*.

Die Riemannsche Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper läßt sich direkt und fast unmittelbar aus den einschlägigen Struktureigenschaften der Multiplikatorenalgebra herleiten. Das ist heute allgemein bekannt, und das war sicherlich auch bereits in den dreißiger Jahren zumindest den Fachleuten geläufig. Auch Deuring muß das wohl gewußt haben, denn seine Arbeit zielte genau in diese Richtung. Er ist jedoch nicht vollständig zu den in Rede stehenden Strukturaussagen und damit zur Riemannschen Vermutung vorgedrungen; bekanntlich ist ihm darin *André Weil* schließlich zuvorgekommen. Auch Weil hatte dazu eine Korrespondenzentheorie entwickelt, genau wie Deuring nach dem Muster der Severischen algebraischen Geometrie, basierend auf der von Weil selbst gelieferten algebraischen Begründung der allgemeinen Schnittmultiplizitäten bei beliebiger Charakteristik. Es gab also eine Parallelarbeit, eine gewisse Konkurrenz zwischen Deuring und André Weil.

Was Deuring veranlaßt hat, unmittelbar vor dem angestrebten Ziel sozusagen kurzzutreten, das ist uns nicht bekannt; seine eigenen Äußerungen geben darüber keine Auskunft. Möglicherweise sind es die damaligen unguten Arbeitsbedingungen, die eine konzentrierte, ungestörte Weiterarbeit an diesem Projekt verhindert haben. Der zweite Teil seiner „Korrespondenzentheorie" erschien im Jahre 1941, also mitten im Kriege, und damals war er an der Sternwarte in Babelsberg tätig und mußte Tabellen für Wetterflieger berechnen. Wir können uns vorstellen, daß die damit verbundenen Umstände sich nicht gerade günstig auf seine Arbeitsbedingungen ausgewirkt haben. Aber auch schon vor dem Kriege, in den Jahren nach der politischen Machtübernahme durch den Nationalsozialismus, erfuhr Deuring erhebliche Behinderungen seiner mathematischen Tätigkeit. 1933 war er von van der Waerden in *Leipzig* zur *Habilitation* vorgeschlagen worden, wo er als Assistent tätig war. Deuring wurde aber dort nicht zur Habilitation zugelassen. Später, im Jahre 1935, hatte er nach Ermunterung durch Hasse einen Habilitationsantrag in *Göttingen* gestellt. Dort wurde ihm zwar schließlich die Würde eines Dr. habil. von der Fakultät verliehen, aber das Ministerium lehnte die Erteilung einer Dozentur ab, trotz der Befürwortung durch Hasse. *Tornier*, der damals in Göttingen zum Nachfolger Landaus ernannt worden war, hatte erklärt, daß er sich mit allen Mitteln gegen die Verleihung einer Dozentur an Deuring wende. Es ist zu vermuten, daß der Widerstand Torniers gegen Deuring politisch motiviert war: wir können uns vorstellen, daß Deuring nicht das damals gefragte gesellschaftliche Bewußtsein zeigte*).

Demnach scheinen die Arbeitsbedingungen für Deuring in den Jahren ab 1933 tatsächlich nicht besonders günstig gewesen zu sein; möglicherweise hat er also deshalb nicht den letzten Schritt auf dem Weg von seiner Korrespondenzentheorie zur Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper gefunden.

In diesem Zusammenhang ist es vielleicht von Interesse zu wissen, daß sich Deuring in den Jahren seit 1936 mit dem Plan eines weiteren Buches trug, nämlich einer *Theorie der Algebraischen Funktionenkörper*, die in den Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften des Springer-Verlages erscheinen sollte. 1936 hat er einen entsprechenden Vertrag mit dem Springer-Verlag unterzeichnet; er war als

---

*) Die obigen Informationen aus den Fakultätsakten in Leipzig und Göttingen verdanke ich frdl. Mitteilungen von W. Purkert (Leipzig) und M. Kneser (Göttingen).

Autor von *F. K. Schmidt* und *van der Waerden* empfohlen worden*). Warum dieses Buch nicht fertiggestellt wurde, ist nicht bekannt. Es ist denkbar, daß die Arbeiten über Korrespondenzentheorie sozusagen im Vorgriff auf ein Kapitel des konzipierten Buches publiziert wurden, das dann natürlich auch einen Beweis der Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper zu enthalten hätte. Zwanzig Jahre später hielt Deuring am *Tata Institut in Bombay* eine Einführungsvorlesung über Algebraische Funktionenkörper. Eine Niederschrift dieser Vorlesung durch *C. P. Ramanujan* können wir in Band 314 der Springer Lecture Notes nachlesen. Es kann angenommen werden, daß es sich dabei ebenfalls um ein Fragment des ursprünglich konzipierten Buches über Funktionenkörper handelt.

Und noch eine Publikation von Deuring könnte evtl. als eine Vorveröffentlichung zu dem geplanten Buch über Funktionenkörper gelten: seine Arbeit zur Reduktionstheorie [23], erschienen 1942 in der Mathematischen Zeitschrift. Ein algebraischer Funktionenkörper sei gegeben durch eine absolut irreduzible Gleichung $f(x, y) = 0$. Nehmen wir an, die Koeffizienten von f seien ganze Zahlen. Deuring stellt und behandelt die Frage: Was wird aus der Gleichung und dem zugehörigen Funktionenkörper, wenn man die Koeffizienten von f modulo einer Primzahl p reduziert? Deuring erkennt, daß dieses zahlentheoretische Problem ein geometrisches Analogon besitzt: Man nehme an, die Koeffizienten von f seien rationale Funktionen eines Parameters. Was wird aus der Gleichung, wenn der Parameter einer Grenzlage zustrebt? Für dieses geometrische Problem verweist Deuring auf die einschlägigen Arbeiten von *Severi*, die er wohl während seines Studienaufenthaltes in Rom kennengelernt hatte. Er stellt fest, daß die Severische Methode nicht auf Primzahlreduktionen übertragbar ist, daß man also mit den Grundlagen von vorne beginnen müsse.

Wiederum, wie bei der Korrespondenzentheorie, handelt es sich hier um eine neue Begründung einer Theorie, die aus der Geometrie längst bekannt war, die aber nunmehr für algebraische und zahlentheoretische Situationen benötigt wird. Im Gegensatz zu der Korrespondenzentheorie geht es jedoch hier um den Fall gemischter Charakteristik: der reduzierte Funktionenkörper hat im allgemeinen Charakteristik $p > 0$.

Zum ersten Mal in der Geschichte der Zahlentheorie finden wir hier die Reduktionstheorie systematisch dargestellt. Deuring entdeckte das Phänomen der heute sogenannten „*guten Reduktion*", die bei gegebenem Funktionenkörper für fast alle Primzahlen vorliegt; es bedeutet, daß der reduzierte Funktionenkörper dasselbe Geschlecht besitzt. Deuring selbst spricht von „regulärer" Reduktion. Wenn auch die endlich vielen Primzahlen mit singulärer Reduktion bei Deuring noch nicht recht diskutiert werden konnten – das geschah später durch *Lamprecht, Nering* und schließlich *Néron* – so finden wir doch schon bei Deuring alle wesentlichen Eigenschaften des Néronschen minimalen Modells im regulären Falle. Später, in den fünfziger Jahren, wurde die Deuringsche Reduktionstheorie durch *Shimura* für beliebige algebraische Mannigfaltigkeiten entwickelt, und heute gehört sie in der Sprache der Schemata zum Allgemeinwissen jedes Zahlentheoretikers, der sich mit diesen Fragen beschäftigt. Wiederum, wie bei den Korrespondenzen, gebührt

*) Siehe Fußnote Seite 113.

Deuring das historische Verdienst, den Anstoß zu einer weit führenden Entwicklung gegeben zu haben. Ich teile nicht die Ansicht von *André Weil*, daß Deuring lediglich bekannte Tatsachen der Severischen algebraischen Geometrie in die Sprache der Funktionenkörper übersetzt hat. (Diese Ansicht vertritt Weil 1940 in seinem bekannten Brief an Simone Weil.) Die Deuringschen Arbeiten sind mehr als nur eine Übersetzung: Im Zeitalter eines Umbruchs der Zahlentheorie zu neuen Fragestellungen unter neuen Gesichtspunkten sind die Deuringschen Beiträge richtungsweisend.

Wenn ich vorhin gesagt habe, daß bei Deuring die Reduktionstheorie zum ersten Mal systematisch untersucht wird, so stimmt das nicht ganz. Es handelt sich ja um eine naheliegende und natürliche Fragestellung, und daher sind in der Geschichte der Zahlentheorie eine Reihe von Vorläufern auszumachen. Insbesondere muß hier Hasse erwähnt werden, der im elliptischen Falle seinen ersten Beweis der Riemannschen Vermutung mit Hilfe einer ad hoc entwickelten Reduktionstheorie für elliptische Körper gegeben hat; dieser erste Beweis ist 1933 publiziert in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. Die Reduktionstheorie gestattete es Hasse, die auf Analysis gegründeten Resultate der sog. *komplexen Multiplikation* auf Kongruenzfunktionenkörper zu übertragen, allerdings nur unter gewissen Voraussetzungen. Vielleicht war Deuring durch die Hassesche Arbeit angeregt worden, seine allgemeine Reduktionstheorie zu entwickeln. Jedenfalls hat Deuring seine Reduktionstheorie später dazu verwendet, die erwähnten Hasseschen Entdeckungen in dem viel allgemeineren Rahmen der komplexen Multiplikation wiederzufinden. Unabhängig davon, ob nun die Methoden der genannten Hasseschen Arbeit als Vorläufer der Deuringschen Reduktionstheorie anzusehen sind oder nicht: die Einstufung der letzteren als *historische Leistung* wird dadurch nicht beeinträchtigt.

§ 5 Elliptische Funktionen und Kurven

Ich komme jetzt auf Deurings berühmte Arbeiten über elliptische Funktionen und elliptische Kurven zu sprechen. Da die Zeit schon recht fortgeschritten ist, muß ich mich dabei kurz fassen. Von der mathematischen Bedeutung her ist das zwar ungerechtfertigt, denn diese Arbeiten stellen den Höhepunkt des mathematischen Schaffens von Deuring dar; wegen dieser Arbeiten wird Deuring zu den großen Meistern der Zahlentheorie gezählt, und gerade diese Arbeiten waren Deurings *Lieblingskinder* (wie es in dem Kneserschen Nachruf heißt). Eigentlich hätte ich also mehr Zeit für Deurings Beiträge zur elliptischen Funktionentheorie veranschlagen und mich dann bei seinen anderen Arbeiten kürzer fassen sollen. Ich habe jedoch sehr bewußt die zeitliche Gewichtung anders gelegt, um nämlich dadurch Gelegenheit zu finden, auch über denjenigen Teil des Deuringschen Werks zu sprechen, der weniger bekannt ist. In der Geschichte der Mathematik finden wir nicht nur die spektakulären Höhepunkte, sondern auch die weniger bekannte, mühsame Kleinarbeit an den Fundamenten, die das Erreichen dieser Höhepunkte erst ermöglicht. Jeder Mathematiker kennt Deuring als den großen Altmeister der elliptischen Funktionen, dessen Entdeckungen bahnbrechend und wegweisend sind. Weniger bekannt sind aber seine früheren Arbeiten. Es war mein Bestreben, hier in Evidenz zu setzen, daß auch die früheren Arbeiten ihre selbständige Bedeutung in der Entwicklung von Algebra und Zahlentheorie besitzen. Darüber hinaus können wir Deurings spätere Arbeiten über elliptische Funktionen in ihrer Methodik und Denkweise nur dann richtig begreifen, wenn wir seine früheren Arbeiten, auf denen sie aufbauen, und deren Entstehungsgeschichte mit in Betracht ziehen.

Die Arbeiten Deurings über elliptische Funktionen beginnen 1941 und 1942, in unmittelbarem Anschluß an seine Arbeit zur Korrespondenzentheorie. Wie wir oben gesehen haben, hat Deuring in der allgemeinen Korrespondenzentheorie nicht den Weg weiter gefunden, der zur Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper führt. Im speziellen Fall der elliptischen Funktionenkörper hat er jedoch sehr wohl gesehen, wie es weiter geht, und er ist diesen Weg auch gegangen, der ihn auf einer weiten Wanderung schließlich zu großen Höhen führte.

Das beginnt mit der Arbeit über Korrespondenzen [19], wo er am Schluß des zweiten Teils den elliptischen Fall ausdrücklich hervorhebt und bemerkt, daß seine Theorie in viel einfacherer Weise die früheren Resultate von Hasse herzuleiten gestattet. Der Weg setzt sich fort in der 1941 in den Hamburger Abhandlungen erschienen Arbeit [22], in welcher er die *Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper* vollständig bestimmt. Bei Charakteristik 0 stellt sich heraus, daß es im wesentlichen nur die bekannten Multiplikatorenringe gibt, nämlich entweder $\mathbf{Z}$ oder die Ordnungen in imaginär quadratischen Körpern, letzteres bei den sogenannten singulären Werten der j-Invariante. In Primzahlcharakteristik p gibt es darüber hinaus noch weitere Fälle, (die sog. supersingulären), nämlich Ordnungen in nichtkommutativen Quaternionenschiefkörpern. Das war zwar schon seit Hasse bekannt: Nunmehr klassifiziert jedoch Deuring alle solche Ordnungen, die als Multiplikatorenringe im elliptischen Falle auftreten. Und zwar sind das genau alle Maximalordnungen in derjenigen Quaternionenalgebra $Q_{\infty,p}$, die nur bei der Primzahl p und im Unendlichen verzweigt ist. Aus der allgemeinen Algebrentheorie folgt, daß es nur eine einzige Quaternionenalgebra mit diesem Verzweigungsverhalten gibt. In einer weiteren Arbeit (1944) bestimmt Deuring die Anzahl t_p der Typen von Maximalordnungen in $Q_{\infty,p}$. Zusammen mit der Klassenzahl h_p von $Q_{\infty,p}$ (die schon früher von *Eichler* bestimmt worden war), ergibt sich damit ein vollständiger Überblick über die *supersingulären Invarianten* in Charakteristik p und deren zugehörige Funktionenkörper. Es ist klar, daß Deuring bei diesen Untersuchungen seine algebrentheoretische Vergangenheit sehr zustatten kam; nur wer sich mit Algebren und insbesondere Quaternionenalgebren im Stile des Deuringschen Buches gut auskannte, konnte mit solcher Leichtigkeit zu diesen umfassenden und vollständigen Ergebnissen gelangen. Auch die von Deuring soeben entwickelte Reduktionstheorie wird hier sofort und in entscheidender Weise benutzt.

Die genannten Arbeiten und auch die unmittelbar folgenden Arbeiten sind in ganz anderem Stil geschrieben als die früheren. Sie sind lebendiger, informeller und mit Fehlern im Detail behaftet. Man hat den Eindruck, daß Deuring jetzt das Thema gefunden hat, das seinem Herzen nahe liegt. Die neuen Erkenntnisse sprudeln nur so aus ihm heraus, er hat offenbar kaum Zeit, sie aufzuschreiben, und etwa eine kritische Durchsicht oder Korrektur kommt ihm im Augenblick nicht in den Sinn. Jede Arbeit dieser Epoche enthält eine Reihe von Korrekturen zu vorangegangenen Arbeiten, aber gleichzeitig wieder ein paar neue Ungenauigkeiten, die dann wiederum später korrigiert werden. Diese Reihe von Arbeiten führt zunächst zu Deurings *Algebraischer Begründung der komplexen Multiplikation* (1949 und 1952), einem ersten Höhepunkt [32], [37].

Vielleicht darf ich an dieser Stelle wiederum eine persönliche Erinnerung einfügen. Im Jahre 1949 gab Hasse in Berlin eine Vorlesung über komplexe Multiplikation. Jeder, der sich einmal damit befaßt hat, wird den Reiz dieser eigenartigen Theorie verspüren, in welcher tiefliegende Ergebnisse der Analysis, Algebra und Arithmetik verwoben werden. Vereinfacht gesagt, handelt es sich um die Erzeugung von Klassenkörpern über imaginär quadratischen Zahlkörpern durch singuläre Werte analytischer Funktionen. Auch die Hörer der damaligen Berliner Vorlesung waren fasziniert von dem Gegenstand. Hasse las ziemlich genau so, wie er es in seinen beiden früheren Crelle-Arbeiten dargestellt hatte. Gegenüber älteren, rein rechnerischen Darstellungen hatte Hasse moderne, strukturelle Gesichtspunkte in den Vordergrund gerückt. Aber es war ihm damals nicht gelungen, eine rein algebraische Begründung der Hauptsätze der komplexen Multiplikation zu liefern. Es blieben immer noch einige restliche Passagen, z. B. die sog. q-Entwicklungsprinzipien, die auf analytischer Grundlage beruhten und rein algebraisch nicht verständlich waren. Hasse formulierte es als ein Ziel, diese analytischen Restbestände zu eliminieren und somit die Theorie der komplexen Multiplikation auf eine rein algebraische Grundlage zu stellen. Für die Hörer der Vorlesung war es daher eine gewisse Sensation, als wir danach von Hasse erfuhren, daß eine solche algebraische Begründung in der Tat schon geleistet worden sei, nämlich durch Deuring. Hasse erklärte uns damals zwar nicht, wie die Deuringsche algebraische komplexe Multiplikation aussieht. Das hätte auch den Rahmen jener Vorlesung gesprengt. Im darauffolgenden Jahr hatte ich Gelegenheit, einen Vortrag von Deuring in Hamburg zu hören. Auch dabei konnte ich nicht alles verstehen, da mir die Voraussetzungen dazu fehlten. Aber angeregt durch den Deuringschen Vortrag, begann ich damit, die einschlägigen Arbeiten zu studieren, um schließlich zu dem Verständnis seiner Theorie zu gelangen.

Übrigens ist die Deuringsche Theorie der komplexen Multiplikation im Jahre 1957 in einem Seminar in Princeton behandelt und in der Sprache der eindimensionalen abelschen Mannigfaltigkeiten dargestellt worden. Das ist nachzulesen in Band 21 der Springer Lecture Notes; als Seminarveranstalter zeichnen *Borel, Chowla, Herz, Iwasawa* und *Serre*.

Vielleicht ist an dieser Stelle ein klärendes Wort angebracht zur Frage der „Algebraischen Begründung“ von mathematischen Sachverhalten, die zuvor unter Benutzung auch von nicht-algebraischen Hilfsmitteln entdeckt worden waren. In der Geschichte unserer Wissenschaft beobachten wir oftmals Situationen, in denen eine solche „Algebraische Begründung“ die führenden Köpfe bewegte und zu außerordentlichen Leistungen führte. Zum Beispiel: die Schnittmultiplizitäten der algebraischen Geometrie; die Riemannschen Flächen und ihre Funktionenkörper; die diophantischen Gleichungen; die Klassenkörpertheorie und, eben die komplexe Multiplikation. Manchmal wird die Meinung vertreten, die Suche nach einer „algebraischen Begründung“ sei eine nutzlose Beschäftigung. Denn eine mathematische Tatsache werde nicht richtiger, wenn man einen neuen algebraischen Beweis liefert. André Weil kritisiert in seinen Erinnerungen, daß sich Hasse und sein Schülerkreis (wozu er auch Deuring zählte) um solche algebraischen Beweise kümmere; dies zeuge von einer gewissen Einseitigkeit oder gar von Beschränktheit (Siegel habe erzählt, daß Hasse die Arbeit von Weil im Journal de Liouville nicht verstehen könne).

Ich meine, daß eine solche Argumentation der Sache nicht gerecht wird. Die Suche nach einer „Algebraischen Begründung" erfolgt in der Regel nicht aus solchen Motiven; weder aus einem abstrakten Bedürfnis nach Reinheit der Methode, noch zur Verbesserung der Verständlichkeit dessen, was man vorher nicht verstehen konnte. Vielmehr geht es um eine Vertiefung und Erweiterung unserer Erkenntnis des mathematischen Universums.

Deuring hat das selbstverständlich auch so verstanden. Er hat nicht deshalb die algebraische Begründung der komplexen Multiplikation gesucht und entdeckt, weil er einseitig auf die Algebra fixiert war oder gar weil er die Analysis nicht verstanden hat. Nein, die Suche nach einer algebraischen Begründung ist bei ihm die Suche nach neuen strukturellen Einsichten und nach einer Erweiterung des Horizonts. Dieses Ziel hat er in eindrucksvoller Weise erreicht.

Deuring hat seine Ansicht über den Wert einer rein algebraischen Theorie der komplexen Multiplikation am Schluß seines Enzyklopädieartikels über die Klassenkörper der komplexen Multiplikation (1958) niedergelegt. Eigentlich sei es, so schreibt er, der Untersuchung eines Zahlkörpers ganz unangemessen, ihn durch eine (oder einige) erzeugende Zahlen festzulegen. Das Ausschalten endlich vieler Primideale habe darin seinen Grund. Weitgehend frei von diesem Mangel sei die rein algebraische Theorie, die aus der Theorie der algebraischen Funktionenkörper entspringt. Deuring verweist dann auf einen weiteren in Aussicht genommenen Enzyklopädieartikel, in dem, wie er sagt, über die rein algebraische Theorie berichtet werden soll. Dieser Enzyklopädiebericht ist jedoch niemals erschienen.

Deurings Arbeiten zur komplexen Multiplikation führten ihn, wie bereits gesagt, zu einem Höhepunkt seines Schaffens. Zu einem weiteren Höhepunkt führt die Serie von Arbeiten über die *Zetafunktion einer elliptischen Kurve* [38]–[44]. Wohlgemerkt: hier handelt es sich nicht um Kongruenzzetafunktionen, sondern um die globale Zetafunktion; die zugrundeliegende elliptische Kurve ist über einem Zahlkörper definiert, und die zugehörige globale Zetafunktion ist das Produkt der zugehörigen Kongruenzzetafunktionen der Reduktionen nach den verschiedenen Primzahlen p. (Die Primzahlen mit nicht-regulärer Reduktion bereiten Schwierigkeiten und müssen gesondert behandelt werden.) Zetafunktionen dieser Art werden heute nach *Hasse und Weil* benannt. Deuring leistete wahrhaft Pionierarbeit bei der Aufklärung der Natur solcher Hasse-Weilschen Zetafunktionen, die bis dahin weitgehend unbekannt waren. Deuring behandelte dabei den Fall elliptischer Kurven mit komplexer Multiplikation. Es wäre äußerst reizvoll, ein ganzes Semester lang über diese Arbeiten von Deuring ein Kolleg aus heutiger Sicht zu halten. Das muß und kann ich jedoch den hiesigen Göttinger Kollegen überlassen; für heute möchte ich meinen Vortrag beenden.

§ 6 Schlußwort

In diesem Vortrag konnte ich nicht alle relevanten Arbeiten von Deuring besprechen. Ich habe bereits eingangs gesagt, daß eine erschöpfende Würdigung der Deuringschen Arbeiten hier nicht erwartet werden konnte. Immerhin möchte ich am Schluß noch auf seine Arbeiten über die *Klassenzahl imaginär quadratischer Zahlkörper* wenigstens hinweisen. Die erste davon [7] erschien 1933 und gab den Anstoß zu *Heilbronns* Beweis der *Gaußschen Vermutung*: daß die Klassenzahl mit der Diskriminante unendlich wird. (Einen effektiven Beweis dafür haben kürzlich *Gross* und *Zagier* gegeben*).) 35 Jahre später, im Jahre 1968, kam Deuring noch einmal auf diesen Fragenkreis zurück [47]. Er zeigte, daß der früher angefochtene Beweis von *Heegner* nach geringfügigen Änderungen richtig wird; es geht um die Bestimmung aller imaginär quadratischer Körper der Klassenzahl 1 und den Nachweis, daß es außer den seit Gauß bekannten Körpern mit Diskriminantenbetrag $|d| \leqslant 163$ keine weiteren gibt. Auch diese Arbeiten zur Klassenzahl zeigen die Merkmale, die wir bei den Deuringschen Arbeiten überall finden: Sie sind jeweils aktuell und stehen im Zentrum des Interesses der mathematischen Forschung; gleichzeitig geben sie den Anstoß zu weiterer, bedeutungsvoller Entwicklung in der Zukunft.

Max Deuring (1907–1984):

Zeittafel (1)

1926	Immatrikulation Göttingen (18 J.)
1928/29	Rom: Vorlesungen bei Severi, Enriques
1929/30	Ausarbeitung der Vorlesung von Emmy Noether
1930	Promotion (22 J.)
Aug. 1931	Vertragsabschluß: „Algebren" (Termin: 31. 5. 1932)
1931	Assistent in Leipzig (bei v. d. Waerden)
1931	Verzweigungstheorie bewerteter Körper (Mathematische Annalen)
1932	Arithmetische Theorie algebraischer Funktionenkörper (Mathematische Annalen)
1933	Imaginär quadratische Zahlkörper der Klassenzahl 1 (Mathematische Zeitschrift)
1923/33	Yale University (bei O. Ore)
Okt. 1933	Vorschlag zur Habilitation in Leipzig (durch v. d. Waerden)
Okt. 1934	Manuskript „Algebren" abgeliefert (erschienen 1935)
1935	Habilitation Göttingen (Hasse)
1938	Umhabilitation von Leipzig nach Jena
1937/41	Korrespondenzentheorie I–II (Crelles Journal)
1942	Reduktion algebraischer Funktionenkörper (Mathematische Zeitschrift)
1947	Marburg
1948	Hamburg
1950	Göttingen

*) Frau Olga Taussky-Todd hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß in diesem Zusammenhang auch die vorbereitenden Ergebnisse von *Dorian Goldfeld* zu nennen wären.

Zeittafel (2): Algebren

1923	Dickson: Algebras and their arithmetics
1925	Hasse: Klassenkörper, Vortrag DMV Danzig
1927	Artin: Allgemeines Reziprozitätsgesetz
1927	Dickson: deutsche Übersetzung (Speiser)
1927/28	Brandt: Gruppoid/Idealtheorie
1929/30	Emmy Noether: Vorlesung über hyperkomplexe Systeme (Deuring)
1931	Hasse: Zyklische Algebren
1932	Brauer–Hasse–Noether: Hauptsatz der Algebrentheorie
1932	Chevalley: Normrestsymbol + Algebren
1933	Hasse: Struktur der Brauer-Gruppe
1934	Tsen: Algebren über Funktionenkörpern
1934	Witt: Algebren über reellen Funktionenkörpern
1935	Deuring: Ergebnisbericht „Algebren"

Nachwort

Das vorstehende Manuskript war ursprünglich *nicht* für eine Publikation bestimmt, sondern lediglich zur Dokumentation des gesprochenen Wortes, vornehmlich für die Hörer meines Vortrages in Göttingen. Dadurch erklären sich manche Passagen, die in dieser Form eigentlich nicht in eine Publikation gehören, sondern auf eine Rede zugeschnitten sind. Erst im nachhinein bin ich durch Freunde und Kollegen dazu bewogen worden, das Vortragsmanuskript zur Publikation zu geben und damit einer größeren Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Allerdings habe ich mich nicht dazu entschließen können, das Manuskript noch einmal für eine Publikation zu überarbeiten.

Eine der Unzulänglichkeiten dieses Manuskripts liegt darin, daß die verschiedenen Teile des Deuringschen mathematischen Werkes nicht alle mit derselben Ausführlichkeit besprochen werden; das erwies sich als unmöglich in der zur Verfügung stehenden Vortragszeit. Um mit der Zeit auszukommen, mußte der vorzutragende Stoff beschränkt werden; es war notwendig, eine Auswahl zu treffen und Schwerpunkte zu setzen. So kam es, daß ich in dem Vortrag ausführlicher auf die frühen Arbeiten Deurings eingegangen bin, während die späteren Arbeiten, insbesondere über die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlecht Eins, nur kurz erwähnt wurden. Die Begründung für diese Auswahl habe ich in dem Vortrag selbst gegeben und sie braucht daher hier nicht wiederholt zu werden. Vgl. den Beginn des Abschnitts 5.

Die dem Manuskript beigegebene Zeittafel bezieht sich dementsprechend nur auf die frühere Zeit, bis zum Jahre 1950.

Eine weitere Unzulänglichkeit bildet die unvollständige Dokumentation der historischen Quellen zu diesem Manuskript. Zur Vorbereitung des Vortrages hatte ich nur relativ wenig Zeit zur Verfügung und konnte somit keine umfangreicheren historischen Recherchen durchführen. Von daher erklärt sich der Ansatz, meine eigenen Erfahrungen und Begegnungen mit dem Deuringschen Werk als thematischen Eingang zu benutzen, weil mir nämlich eine historisch besser gesicherte

Grundlage nicht zur Verfügung stand. Das ist bei den Hörern des Vortrages wohl auch meist richtig verstanden worden.

Das Fehlen zuverlässiger Informationen ist auch der Grund dafür, daß ich in dem Vortrag nicht auf die Frage eingegangen bin, wie hoch denn der Anteil von Emmy Noether an dem Deuringschen Buch über Algebren einzuschätzen ist. Deuring war ja ein Schüler von Emmy Noether gewesen, und zwar einer ihrer hervorragenden Schüler, den sie schon während seiner Studienzeit für den am meisten versprechenden Nachwuchsmathematiker Göttingens gehalten hatte. (So berichtet Auguste Dick in ihrer Noether-Biographie.) Nicht nur hat Deuring sein Buch auf Anregung und Empfehlung Emmy Noethers geschrieben, sondern sie hat auch in den Jahren der Niederschrift des Buchmanuskripts lebhaften Anteil daran genommen. Sogar noch von Bryn Mawr aus hat sie brieflich mit Deuring über das Buchmanuskript diskutiert, sozusagen bis zum letzten Augenblick, bis zur Abgabe des Manuskripts beim Verlag. (Dies erfuhr ich durch eine freundliche Mitteilung von Frau Olga Taussky-Todd.) Demnach fällt es auf, daß Deuring im Vorwort seines Buches überhaupt nicht auf die Rolle von Emmy Noether beim Zustandekommen des Buches eingegangen ist, obwohl natürlich in sachlicher Hinsicht explizit und implizit der Noethersche Einfluß deutlich sichtbar ist.

Frau Olga Taussky-Todd, der ich diese Frage vorlegte, antwortete darauf in einem Brief vom 2. September 1986 wie folgt.

> *As to the question whether Deuring owed Noether an acknowledgement in his well known book Algebren. My opinion is „No". They were colleagues in spite of the age difference. Deuring was allowed to call her „Du", and their conversation was simply „talking shop" (in German: fachsimpeln).*

Ich habe diese Äußerung hier zitiert, da sie uns Aufschluß gibt nicht nur über Deurings Verhältnis zu seiner großen Lehrmeisterin, sondern auch über seine mathematische Statur schon in jungen Jahren.

Prof. Dr. Peter Roquette
Math. Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
6900 Heidelberg 1

(*Eingegangen: 4. 9. 1987*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein
91 (1989) 126–147
AMS subject classification: 14 F, 14 K

Elliptische Kurven, abelsche Flächen und das Ikosaeder

K. Hulek, Bayreuth

0 Einleitung

Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich um die erweiterte Fassung meines Vortrags anläßlich der Jahrestagung 1987 der DMV in Berlin. Ziel dieses Aufsatzes ist es, einige der vielen Beziehungen aufzuzeigen, die zwischen den oben genannten mathematischen Objekten bestehen. Dabei stellt das Horrocks-Mumford-Bündel das verbindende Element dar.
Wir beginnen zunächst mit einer Diskussion des Ikosaeders und seiner Symmetriegruppe. Abschnitt 2 beschäftigt sich mit elliptischen Kurven. Ausgehend von der Klassifikation elliptischer Kurven wird man in natürlicher Weise zu Level-Strukturen und Shiodaschen Modulflächen (universellen elliptischen Kurven) geführt. Eine natürliche Verallgemeinerung elliptischer Kurven sind abelsche Varietäten. Diese und ihre Moduli werden in Abschnitt 3 diskutiert. In Abschnitt 4 werden projektive Einbettungen abelscher Varietäten behandelt. Eine besondere Rolle spielt dabei die Existenz abelscher Flächen im $\mathbf{P}_4$, die erstmals von dem italienischen Mathematiker A. Comessatti im Jahre 1916 gezeigt wurde. Dessen Konstruktion ergibt in direkter Weise einen Zusammenhang mit Hilbertschen Modulflächen. Im Mittelpunkt von Abschnitt 5 steht das sogenannte Horrocks-Mumford-Bündel. Dieses stellt in vielfältiger Weise Verbindungen zwischen dem Ikosaeder, den elliptischen Kurven und abelschen Flächen her.
Soweit hier eigene Ergebnisse besprochen werden, möchte ich darauf hinweisen, daß sie größtenteils aus gemeinsamen Arbeiten mit anderen Autoren: W. Barth, H. Lange, R. Moore und A. Van de Ven stammen.

1 Das Ikosaeder

Bereits seit der Antike ist bekannt, daß es im 3-dimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$ genau fünf reguläre (platonische) Körper gibt: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Das Ikosaeder (Fig. 1) besitzt 12 Ecken, 30 Kanten und 20 Flächen. Wir denken uns das Ikosaeder so in den Raum $\mathbf{R}^3$ gelegt, daß sein Mittelpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt, und daß die Ecken des Ikosaeders auf der Einheitssphäre S^2 liegen. Die Symmetriegruppe des Ikosaeders, die sogenannte *Ikosaedergruppe*, besteht nun aus allen Drehungen, die das Ikosaeder I in sich selbst

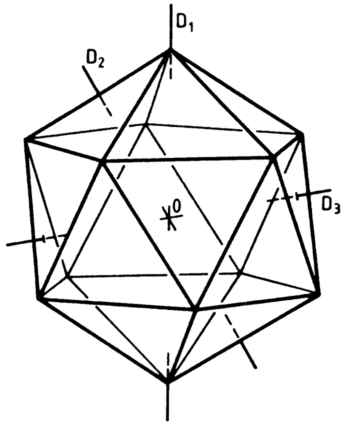


Fig. 1 Ikosaeder

überführen, d. h.

$$G = \{g \in SO(3, \mathbf{R}), g(I) = I\}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, gibt es genau drei Typen von Drehungen, die dies leisten:

(i) Die Drehachse ist die Verbindungsgerade zweier gegenüberliegender Ecken, der Drehwinkel ist $k \cdot \frac{2\pi}{5}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(ii) Die Drehachse ist die Verbindungsgerade zweier gegenüberliegender Kantenmittelpunkte, der Drehwinkel ist $k \cdot \pi$, $k \in \{0, 1\}$.

(iii) Die Drehachse ist die Verbindungsgerade zweier gegenüberliegender Flächenmittelpunkte, der Drehwinkel ist $k \cdot \frac{2\pi}{3}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

Berücksichtigt man, daß man hierbei die Identität mehrfach aufgezählt hat, ergibt sich für die Ordnung von G:

$$|G| = 1 + 6 \cdot 4 + 15 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 60.$$

Man überzeugt sich davon, daß G einfach ist, d. h. keine nichttrivialen Normalteiler besitzt. Damit ist G isomorph zur alternierenden Gruppe A_5. Also

$$G \cong A_5 \cong PSL(2, \mathbf{Z}_5).$$

Mit Hilfe der sterographischen Projektion (Fig. 2) kann man bekanntlich die 2-Sphäre mit der komplex-projektiven Geraden identifizieren:

$$S^2 \cong \mathbf{C} \cup \{\infty\} = \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}(\mathbf{C}^2).$$

Bereits F. Klein [K] bemerkte, daß dadurch bei geeigneter Wahl des Ikosaeders in der 2-Sphäre die Eckpunkte von I mit den Punkten

$$0, \infty, \epsilon^k(\epsilon^2 + \epsilon^3), \epsilon^k(\epsilon + \epsilon^4) \qquad (\epsilon = e^{2\pi i/5}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\})$$

identifiziert werden.

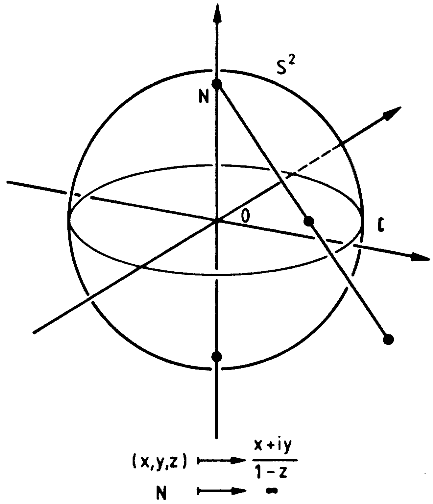


Fig. 2 Stereographische Projektion

Mittels der stereographischen Projektion definiert jede Drehung des $\mathbf{R}^3$ eine konforme Abbildung des $\mathbf{P}_1$ in sich. Man erhält eine Inklusion

$$SO(3, \mathbf{R}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbf{P}_1) = PGL(2, \mathbf{C}).$$

Die projektive lineare Gruppe PGL(2, **C**) wird andererseits von der speziellen linearen Gruppe SL(2, **C**) zweifach überlagert. Das Urbild der SO(3, **R**) unter dieser Überlagerung ist die spezielle unitäre Gruppe SU(2, **C**). Dies ergibt ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\{\pm \mathbf{1}\} & & \{\pm \mathbf{1}\} & & \{\pm \mathbf{1}\} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
G' & \subset & SU(2, \mathbf{C}) & \subset & SL(2, \mathbf{C}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle 2:1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 2:1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 2:1} \\
G & \subset & SO(3, \mathbf{R}) & \subset & PGL(2, \mathbf{C})
\end{array}$$

wobei G' das Urbild von G in SU(2, **C**) ist. G' heißt die *binäre Ikosaedergruppe*. Es gilt

$$G' \cong SL(2, \mathbf{Z}_5).$$

Die Gruppe G' wird erzeugt von den Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} -\epsilon^3 & 0 \\ 0 & -\epsilon^2 \end{pmatrix} \qquad c = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' \\ \lambda' & -\lambda \end{pmatrix}$$

mit $\quad \lambda = \epsilon - \epsilon^4, \qquad \lambda' = \epsilon^2 - \epsilon^3.$

Es gilt $a^5 = c^2 = (ac)^3 = -\mathbf{1}$.

2 Elliptische Kurven

Es sei

$$H = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$$

die obere Halbebene. Jeder Punkt $\tau \in H$ definiert ein Gitter (Fig. 3)

$$\Omega(\tau) := \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau \subset \mathbf{C}.$$

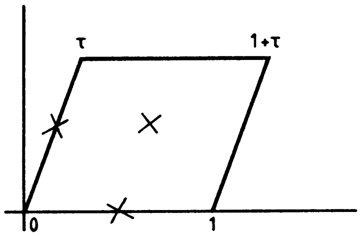


Fig. 3 Gitter mit Zweiteilungspunkten

Der Quotient

$$E_\tau = \mathbf{C}/\Omega(\tau)$$

ist topologisch betrachtet ein Torus (d. h. isomorph zu $S^1 \times S^1$). Zugleich trägt E_τ in natürlicher Weise eine von $\mathbf{C}$ induzierte Struktur als *kompakte Riemannsche Fläche* vom *Geschlecht* 1. Eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 heißt auch *elliptische Kurve*.
Man erhält jede elliptische Kurve durch den oben beschriebenen Prozeß. Um zu beschreiben, wann zwei Punkte τ und τ' zu isomorphen, d. h. biholomorph äquivalenten, elliptischen Kurven führen, benötigt man die Modulgruppe

$$\Gamma = PSL(2, \mathbf{Z}) = SL(2, \mathbf{Z})/\{\pm \mathbf{1}\}.$$

Die Gruppe Γ operiert auf H durch

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\,; \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}).$$

Es ist zu beachten, daß $-\mathbf{1}$ trivial auf H operiert. Man hat den bekannten

Satz 2.1. *Die elliptischen Kurven* E_τ *und* $E_{\tau'}$ *sind genau dann isomorph, wenn* τ *und* τ' *bezüglich* Γ *äquivalent sind.*

Beweis: [HUS, p. 203].

In anderen Worten, die Isomorphieklassen elliptischer Kurven stehen in bijektiver Beziehung zu den Punkten des Orbitraums H/Γ. Der Quotient H/Γ ist selbst wieder eine (offene) Riemannsche Fläche, die mittels der j-Funktion isomorph ist zu $\mathbf{C}$. Die Zuordnung $\tau \mapsto E_\tau$ liefert also eine Bijektion

$$\mathbf{C} \cong H/\Gamma \xrightarrow{\sim} \{\text{ell. Kurven}\}/\text{Iso}.$$

Man hat damit einen (groben) Modulraum für das Isomorphieproblem für elliptische Kurven konstruiert. Idealerweise hätte man gerne einen sogenannten feinen Modulraum, d. h. eine komplex 2-dimensionale Fläche S zusammen mit einer Projektion $\pi : S \to H/\Gamma$, so daß für jeden Punkt $\bar{\tau} \in H/\Gamma$ die Faser $S_{\bar{\tau}} = \pi^{-1}(\bar{\tau})$ eine elliptische Kurve isomorph zu E_τ ist. Eine solche „universelle" elliptische Kurve existiert jedoch aus prinzipiellen Gründen nicht. Dies liegt daran, daß die durch $\tau = i$ und $\tau = e^{2\pi i/3}$ definierten elliptischen Kurven im Vergleich zu allen anderen elliptischen Kurven zusätzliche Automorphismen besitzen.

Dennoch ist es möglich, nach Hinzunahme einer Zusatzstruktur zu universellen elliptischen Kurven zu gelangen. Um dies näher zu erläutern, betrachten wir für eine gegebene elliptische Kurve E die Gruppe

$$E^{(n)} = \{\alpha \in E, n\alpha = 0\}$$

der n-*Teilungspunkte* oder n-*Torsionspunkte* (für n = 2 siehe Fig. 3). Man hat einen (nicht-kanonischen) Isomorphismus

$$E^{(n)} \cong \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n.$$

Die Gruppe $E^{(n)}$ trägt jedoch eine intrinsische, nicht-ausgeartete, alternierende $\mathbf{Z}_n$-Bilinearform. Dazu schreibe man E als Quotienten $E = \mathbf{C}/\Omega$. Auf Ω hat man die Bilinearform

$$\langle\ ,\ \rangle : \Omega \times \Omega \to \mathbf{Z}$$
$$\langle k + \ell\tau, m + n\tau\rangle = \det\begin{pmatrix} k & m \\ \ell & n \end{pmatrix}.$$

Die n-Teilungspunkte $\alpha, \beta \in E^{(n)}$ besitzen Repräsentanten $\alpha', \beta' \in \frac{1}{n}\Omega$. Man definiert dann

$$(\ ,\ ) : E^{(n)} \times E^{(n)} \to \mathbf{Z}_n$$
$$(\alpha, \beta) := \langle n\alpha', n\beta'\rangle \bmod n.$$

Diese Definition ist unabhängig von den getroffenen Wahlen.

Bemerkung 2.2. Man hat einen kanonischen Isomorphismus $\Omega \cong H_1(E, \mathbf{Z})$. Dadurch wird die Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ mit dem Schnittprodukt

$$H_1(E, \mathbf{Z}) \times H_1(E, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$$

identifiziert.

Definition 2.3. Eine *Level*-n-*Struktur* auf E ist eine Basis α, β von $E^{(n)}$ mit $(\alpha, \beta) = 1$.

Um die Isomorphieklassen von elliptischen Kurven mit Level-n-Struktur zu beschreiben, betrachten wir die *Hauptkongruenzuntergruppe* der *Stufe* n:

$$\Gamma(n) = \{\gamma \in SL(2, \mathbf{Z}), \gamma \equiv \mathbf{1} \bmod n\}.$$

Als Untergruppe von $SL(2, \mathbf{Z})$ operiert auch $\Gamma(n)$ auf H. Der Quotient $X_0(n) = H/\Gamma(n)$ ist wiederum eine offene Riemannsche Fläche. Für jedes $\tau \in H$ definiert das Paar $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{n}, \frac{\tau}{n}\right)$ eine Level-n-Struktur auf E_τ. Diese Zuordnung induziert eine

Bijektion

$$X_0(n) = H/\Gamma(n) \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{ell. Kurven mit}\\ \text{Level-n-Struktur}\end{matrix}\right\}/\text{Iso}.$$

Im folgenden sei $n \geqslant 3$. Es ist dann leicht zu sehen, daß $X_0(n)$ ein feiner Modulraum ist, d. h. es existiert eine universelle elliptische Kurve mit Level-n-Struktur. Es gilt jedoch mehr. Durch Hinzunahme der sogenannten Spitzen kann man $X_0(n)$ zu einer kompakten Riemannschen Fläche (algebraischen Kurve)

$$X(n) = X_0(n) + \text{Spitzen}$$

vervollständigen (siehe etwa [SM, chapter 1]). $X(n)$ hat das Geschlecht

$$g(n) = 1 + \frac{n-6}{12} t(n)$$

wobei

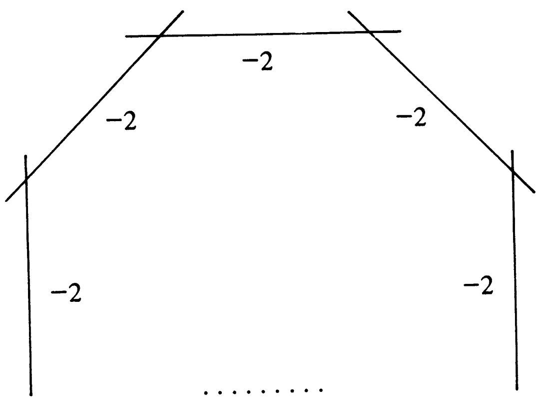
$$t(n) = \frac{1}{2} n^2 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

die Anzahl der Spitzen ist. Hierbei wird das Produkt über alle Primzahlen $p \geqslant 2$ genommen.

Shioda hat nun für jedes $n \geqslant 3$ eine projektiv-algebraische Fläche $S(n)$ konstruiert, so daß es eine Projektion $\pi : S(n) \to X(n)$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(i) Für $x \in X_0(n)$ ist die Faser $E_x = \pi^{-1}(x)$ eine glatte elliptische Kurve.

(ii) Für $x \in X(n) \backslash X_0(n)$ ist die Faser $E_x = \pi^{-1}(x)$ ein n-gon bestehend aus n rationalen Kurven



Diese besitzen die Selbstschnittzahl -2.

(iii) Die Fläche $S(n)$ besitzt n^2 Schnitte, die eine Gruppe

$$\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n = \{\alpha L_{10} + \beta L_{01}, \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_n\}$$

bilden.

(iv) Für jedes $x \in X_0(n)$ definieren die Punkte

$$\alpha_x = E_x \cap L_{10}, \beta_x = E_x \cap L_{01}$$

eine Level-n-Struktur auf E_x. Das Tripel (E_x, α_x, β_x) ist die durch $x \in X_0(n) = H/\Gamma(n)$ bestimmte Kurve mit Level-n-Struktur.

Insbesondere definiert S(n) also über dem offenen Teil $X_0(n)$ eine universelle elliptische Kurve mit Level-n-Struktur.

Definition 2.4. S(n) heißt die *Shiodasche Modulfläche* zur *Stufe* n.

Die Flächen S(n) wurden in [SH] konstruiert. Für weitere Untersuchungen über diese Flächen siehe auch [BU], [N], [BH] und [BAR].

Bemerkung 2.5. Durch „Vergessen" der Level-n-Struktur bekommt man eine Abbildung

$$X(n) \to X(1) = \mathbf{P}_1.$$

Diese Abbildung wird induziert durch die Operation der Gruppe

$$SL(2, \mathbf{Z})/\pm\Gamma(n) = PSL(2, \mathbf{Z}_n).$$

Zum Abschluß dieses Abschnittes möchte ich noch einige Bemerkungen über projektive Einbettungen elliptischer Kurven machen. Dazu sei E eine elliptische Kurve mit Ursprung 0. Für $n \geqslant 3$ ist das Geradenbündel $L = \mathcal{O}_E(n0)$ sehr ampel. D. h. ist $s_1, \ldots, s_n \in H^0(E, L)$ eine Basis des Schnittvektorraums von L, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon E &\to \mathbf{P}_{n-1} \\ x &\mapsto (s_1(x) : \ldots : s_n(x)) \end{aligned}$$

eine Einbettung. Das Bild von E unter φ ist eine sogenannte *elliptische Normalkurve vom Grad* n. Für n = 3 erhält man auf diese Weise die übliche Darstellung von E als ebene Kubik. Jede elliptische Normalkurve besitzt eine Reihe von Symmetrien, die eng mit der Gruppe $E^{(n)}$ der n-Teilungspunkte zusammenhängen. Ist $x \in E$ ein beliebiger Punkt, so bezeichnen wir mit $T_x : E \to E$ die Translation mit x. Das Geradenbündel L ist invariant unter der Gruppe $E^{(n)}$, d. h. es gilt

$$T_x^* L = L$$

für alle $x \in E^{(n)}$.

Auf dem Vektorraum $V = \mathbf{C}^n$ definieren wir die folgenden Transformationen

$$\sigma : e_i \mapsto e_{i-1}$$

$$\tau : e_i \mapsto \rho^i e_i \qquad (\rho = e^{2\pi i/n})$$

wobei $\{e_i\}_{i \in \mathbf{Z}_n}$ die Standardbasis von V ist. Die von σ und τ erzeugte Gruppe

$$H_n = \langle \sigma, \tau \rangle \subset GL(n, \mathbf{C})$$

heißt die *Heisenberggruppe* der *Stufe* n. Die Gruppe H_n hat Ordnung n^3 und ist eine zentrale Erweiterung

$$\begin{aligned} 1 \to \mu_n \to H_n &\to \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n \to 1 \\ \epsilon \mapsto \epsilon \cdot \mathbf{1} &= [\sigma, \tau] \\ \sigma &\mapsto (1, 0), \tau \mapsto (0, 1) \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n = H_n/\text{Zentrum} = \text{Im}(H_n \to PGL(n, \mathbf{C}))$.

Die durch die Inklusion definierte Darstellung von H_n heißt die *Schrödingerdarstellung* von H_n.
Die Operation der Gruppe $E^{(n)}$ auf E liftet nun zu einer Operation der Heisenberggruppe H_n auf L. Dies definiert eine Darstellung von H_n auf $H^0(E, L)$, die dual zur Schrödingerdarstellung ist. Dies bedeutet das folgende: Bei geeigneter Wahl der Basis $s_1, \ldots, s_n$ definiert die Abbildung φ eine Einbettung von E als H_n-invariante elliptische Normalkurve in $\mathbf{P}_{n-1}(V)$. Die Heisenberggruppe operiert auf E als Gruppe $E^{(n)}$ der n-Teilungspunkte.
Es gilt:

Satz 2.6. *Es gibt eine Bijektion zwischen* H_n*-invarianten elliptischen Normalkurven in* $\mathbf{P}_{n-1}(V)$ *und Isomorphieklassen elliptischer Kurven mit Level-n Struktur.*

Beweis: [BHM 1, prop. 5].

3 Abelsche Varietäten

Es sei $\omega_1, \ldots, \omega_{2g}$ eine $\mathbf{R}$-Basis von $\mathbf{C}^g$ und

$$\Omega = \mathbf{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbf{Z}\omega_{2g}$$

das zugehörige Gitter. Dann ist, genau wie im Fall der elliptischen Kurven (g = 1), der Quotient

$$X = \mathbf{C}^g/\Omega$$

ein Torus, der auf natürliche Weise die Struktur einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit trägt. Ganz im Gegensatz zum eindimensionalen Fall ist es jedoch keineswegs stets der Fall, daß X auch projektiv-algebraisch ist, d. h. eine Einbettung in einen projektiven Raum $\mathbf{P}_n$ besitzt.

Definition 3.1. Ein komplexer Torus X, der zugleich projektiv algebraisch ist, heißt eine *abelsche Varietät.*

Um ein Kriterium anzugeben, wann ein komplexer Torus X eine abelsche Varietät ist, betrachten wir nicht-ausgeartete alternierende Bilinearformen

$$A : \Omega \times \Omega \to \mathbf{Z}.$$

Definition 3.2. Eine Form A heißt *Riemannsche Form*, falls für die $\mathbf{R}$-lineare Fortsetzung von A gilt:

(i) $A(ix, iy) = A(x, y) \quad (x, y, \in \mathbf{C}^g)$

(ii) $A(ix, x) > 0 \quad (x \neq 0)$.

Es gilt

Satz 3.3. X *ist genau dann eine abelsche Varietät, wenn es auf* X *eine Riemannsche Form gibt.*

Beweis: [M, p. 35].

Durch geeignete Wahl einer Basis von Ω kann man jede Riemannsche Form auf eine Normalform der Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \delta_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \delta_g \\ \hline -\delta_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -\delta_g & & & \end{array}\right)$$

bringen, wobei die δ_i natürliche Zahlen sind und $\delta_i | \delta_{i+1}$ für $1 \leqslant i < g$. Man sagt dann auch, A definiert eine *Polarisierung* vom Typ $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_g)$. Sind alle $\delta_i = 1$, so spricht man von einer *Prinzipalpolarisierung*.
Eine Polarisierung A definiert ein, bis auf Translation eindeutig bestimmtes, Geradenbündel L auf X. Dazu schreibe man X als Quotienten $X = \mathbf{C}^g/\Omega$ für ein geeignetes Gitter Ω. Die Identifikation

$$\Omega = H_1(X, \mathbf{Z})$$

erlaubt es, A als ein Element in

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^2 H_1(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) = H^2(X, \mathbf{Z})$$

aufzufassen. Die Bedingung (i) aus Definition 3.2 besagt ferner, daß

$$A \in H^2(X, \mathbf{Z}) \cap H^{1,1}(X, \mathbf{C}) = NS(X).$$

Hier ist NS(X) die Neron-Severi-Gruppe von X, d. h. die Gruppe aller Geradenbündel auf X modulo algebraischer Äquivalenz (Translation). Jedes zu $-A$ gehörige Geradenbündel L ist ampel. Wir werden auch oft L als Polarisierung bezeichnen.
Ähnlich wie bei elliptischen Kurven kann man auch bei abelschen Varietäten das Modulproblem stellen. Dazu sei $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_g)$ fest vorgegeben wie oben. Wir betrachten die *Siegelsche obere Halbebene der Stufe* g, die wie folgt definiert ist:

$$S_g = \{\tau \in M(g \times g, \mathbf{C}), \tau = {}^t\tau, \operatorname{Im} \tau > 0\}.$$

Für g = 1 ist dies gerade die gewöhnliche obere Halbebene. Ferner sei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_g \\ -\mathbf{1}_g & 0 \end{pmatrix}$$

die symplektische Standardform und

$$Sp(2g, \mathbf{Q}) = \{M \in GL(2g, \mathbf{Q}), MJ{}^tM = J\}$$

die symplektische Gruppe mit rationalen Koeffizienten. Sp(2g, $\mathbf{Q}$) operiere von rechts auf $\mathbf{Q}^{2g}$. Ferner operiert die Gruppe Sp(2g, $\mathbf{Q}$) auf S_g durch

$$\tau \mapsto (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}; \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2g, \mathbf{Q})$$

wobei A, ..., D jeweils (g x g)-Matrizen sind. Dies ist eine natürliche Verallgemeinerung der Operation der Gruppe $SL(2, \mathbf{Z})$ auf H. Schließlich sei

$$L(\delta) = \mathbf{Z}^g \times \delta_1 \mathbf{Z} \times \ldots \times \delta_g \mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}^{2g}$$

und $\Gamma_0(\delta) = \{M \in Sp(2g, \mathbf{Q}), M(L_\delta) = L_\delta\}$.

Satz 3.4. *Es gibt eine Bijektion*

$$A_0(\delta) := S_g/\Gamma_0(\delta) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} (X, L); X \textit{ ist abelsche Varietät,} \\ L \textit{ ist Polarisierung vom Typ } \delta \end{array} \right\} /\mathrm{Iso}.$$

Beweis: [I], [HM, p. 78].

Also ist $A_0(\delta)$ der Modulraum der abelschen Varietäten mit Polarisierung vom Typ δ. Ähnlich wie im Fall von elliptischen Kurven gibt es auch hier den Begriff der *Level-Struktur*. Dazu definieren wir

$$L^\vee(\delta) = \frac{1}{\delta_1} \mathbf{Z} \times \ldots \times \frac{1}{\delta_g} \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^g \subset \mathbf{Q}^{2g}.$$

Man beachte, daß

$$L^\vee(\delta) = \{x \in \mathbf{Q}^{2g}; J(x, y) \in \mathbf{Z} \text{ für alle } y \in L(\delta)\}.$$

Die Form J definiert auf $L^\vee(\delta)/L(\delta)$ eine symplektische Form, die in multiplikativer Schreibweise wie folgt lautet:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi i J(x,y)}$$

Es sei nun X eine abelsche Varietät mit gegebener Polarisierung und dazugehörigem Geradenbündel L. Dann definiert L eine Abbildung:

$$\lambda : X \to \hat{X} = \mathrm{Pic}^0 X$$
$$x \mapsto L_x = T_x^* L \otimes L^{-1}.$$

Hier bezeichnet T_x wiederum die Translation um x. Der Kern

$$\ker \lambda = \{x \in X, T_x^* L = L\}$$

besteht aus Torsionspunkten von X. Ähnlich wie im Fall der n-Torsionspunkte einer elliptischen Kurve besitzt auch $\ker \lambda$ eine intrinsische symplektische Form. Wir betrachten schließlich

$$\Gamma(\delta) = \{M \in \Gamma_0(\delta), (M - \mathbf{1}) L^\vee(\delta) \subset L(\delta)\}.$$

Dies sind gerade jene Matrizen, die das Gitter $L(\delta)$ festlassen und auf $L^\vee(\delta)/L(\delta)$ die Identität induzieren.

Satz 3.5. *Es gibt eine Bijektion*

$$A(\delta) := S_g/\Gamma(\delta) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} (X, L, \alpha); (X, L) \textit{ ist abelsche Var.} \\ \textit{mit Polarisierung } L \textit{ vom Typ } \delta, \\ \alpha : \ker \lambda \to L^\vee(\delta)/L(\delta) \textit{ ist} \\ \textit{sympl. Isomorphismus} \end{array} \right\} /\mathrm{Iso}.$$

Beweis: [HM, p. 78].

In anderen Worten, $A(\delta)$ ist der Modulraum der abelschen Varietäten mit Polarisierung vom Typ $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_g)$ und Level-Struktur.

Bemerkung 3.6. Im Fall g = 1 ist δ_1 gerade gleich dem Grad n des zu dieser Polarisierung gehörenden Geradenbündels. α ist dann eine Level-n-Struktur im Sinne von Abschnitt 2.

Bemerkung 3.7. „Vergessen" der Level-Struktur gibt eine Abbildung

$$A(\delta) \to A_0(\delta).$$

Diese wird durch die Operation der Gruppe $\Gamma_0(\delta)/\Gamma(\delta)$ gegeben.

4 Projektive Einbettung abelscher Varietäten

Wir betrachten wiederum eine abelsche Varietät X der Dimension g. Auf X sei eine Polarisierung A vom Typ $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_g)$ gegeben. Wie bereits erklärt, definiert A ein bis auf Translation eindeutig bestimmtes Geradenbündel L. Allgemeine Theorie liefert nun

Satz 4.1. *Für* $n \geqslant 3$ *ist das Geradenbündel* $L^{\otimes n}$ *sehr ampel. D. h. ist* $s_0, \ldots, s_N \in H^0(x, L^{\otimes n})$ *eine Basis des Schnittvektorraums von* $L^{\otimes n}$, *so ist die Abbildung*

$$\varphi_{L^{\otimes n}} : X \to \mathbf{P}_N$$
$$x \mapsto (s_0(x) : \ldots : s_N(x))$$

eine Einbettung.

Beweis: [I, p. 129].

Nach dem Satz von Riemann-Roch für abelsche Varietäten gilt

$$h^0(L^{\otimes n}) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(X, L^{\otimes n}) = n^g \delta_1, \ldots, \delta_g.$$

Die obige Konstruktion liefert also Einbettungen in projektive Räume, deren Dimension im Vergleich zur Dimension von X im allgemeinen sehr hoch ist. In vielen Fällen ist man aber daran interessiert, X in projektive Räume möglichst kleiner Dimension einzubetten. Man kann dann hoffen, daß X durch relativ wenige Polynomgleichungen beschrieben werden kann. Standardargumente der algebraischen Geometrie ergeben leicht, daß man jede g-dimensionale Varietät in den $\mathbf{P}_{2g+1}$ einbetten kann. Für abelsche Varietäten X kann man andererseits in einfacher Weise zeigen, vgl. [FU, p. 60], daß es nie eine Einbettung in den $\mathbf{P}_{2g-1}$ geben kann. Man hat also noch den Grenzfall, nämlich daß der umgebende Raum die doppelte Dimension der einzubettenden abelschen Varietät X besitzt, zu betrachten.

Satz 4.2 (Van de Ven). *Besitzt eine g-dimensionale abelsche Varietät* X *eine Einbettung in* $\mathbf{P}_{2g}$, *so liegt eine der beiden folgenden Fälle vor:*

(i) g = 1. *Dann ist* X *eine ebene Kubik in* $\mathbf{P}_2$.

(ii) g = 2. *Dann ist* X *eine abelsche Fläche vom Grad* 10 *in* $\mathbf{P}_4$.

Beweis: [VV].

Bemerkung 4.3. (i) Jede elliptische Kurve E läßt sich als ebene Kubik in den $\mathbf{P}_2$ einbetten. Das folgt aus Satz 4.1 für $L = \mathcal{O}_E(0)$ und $n = 3$. Man kann dies aber auch direkt sehen. Ist $E = \mathbf{C}/\Omega$ für ein passendes Gitter Ω, so betrachte man die Weierstraßsche $\wp$-Funktion.

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \left(\frac{1}{(x-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Die Abbildung

$$\varphi : E \to \mathbf{P}_2$$
$$x \mapsto (\wp(x) : \wp'(x) : 1)$$

ist eine Einbettung. Die Funktion $\wp$ erfüllt die Differentialgleichung

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

wobei g_2, g_3 komplexe Konstante sind, die vom Gitter Ω abhängen. E wird also durch φ isomorph auf die ebene Kubik

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

abgebildet.

(ii) Es ist jedoch nicht richtig, daß sich jede abelsche Fläche X in den $\mathbf{P}_4$ einbetten läßt. Eine notwendige Bedingung dafür ist, daß X eine Polarisierung vom Typ (1,5) besitzt. Ferner definiert auch nicht jede (1,5)-Polarisierung auf einer abelschen Fläche eine Einbettung in den $\mathbf{P}_4$.

Der obige Satz zeigt, daß, zusammen mit den ebenen Kubiken, die abelschen Flächen im $\mathbf{P}_4$ eine besondere Rolle einnehmen. A priori ist es jedoch keineswegs klar, daß solche Flächen wirklich existieren. Um ihre *Existenz* zu zeigen, gibt es heute mehrere Zugänge:

(1) 1972 konstruierten Horrocks und Mumford [HM] das inzwischen nach ihnen benannte Horrocks-Mumford-Bündel. Dies ist ein unzerlegbares Vektorbündel F vom Rang 2 auf $\mathbf{P}_4$. Ist $0 \neq s \in H^0(\mathbf{P}_4, F)$ ein allgemeiner Schnitt, so zeigten sie, daß das Nullstellengebilde $X_s = \{s = 0\}$ eine abelsche Fläche vom Grad 10 ist. Hierauf werde ich in Abschnitt 5 nochmals zu sprechen kommen.

(2) Ist man hauptsächlich an abelschen Flächen interessiert, so möchte man sich den Umweg über die Bündeltheorie ersparen. Insbesondere möchte man die folgende Frage beantworten: Gegeben sei eine abelsche Fläche X zusammen mit einem Geradenbündel L, das von einer Polarisierung vom Typ (1,5) kommt. Wann ist L sehr ampel, definiert also eine Einbettung von X in $\mathbf{P}_4$? Dieses Problem wurde 1984 von S. Ramanan gelöst. Sein Ergebnis kann man wie folgt beschreiben. Sind X und L wie oben, so gibt es einen zyklischen Quotienten

$$\pi : X \to X/\mathbf{Z}_5 = Y$$

wobei Y eine abelsche Fläche mit einer Prinzipalpolarisierung M und $L = \pi^*M$ ist. Für Y gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Y ist Jacobische einer glatten Kurve C vom Geschlecht 2 und $M = \mathcal{O}_Y(C)$.

(b) $Y = E_1 \times E_2$ zerfällt in ein Produkt von elliptischen Kurven und $M = \mathcal{O}_Y(C)$ mit $C = E_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times E_2$.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall (a). Dann ist $D = \pi^{-1}(C)$ eine glatte Kurve vom Geschlecht 6 und $L = \mathcal{O}_X(D)$.

Satz 4.4 (Ramanan). *Das Geradenbündel* L *ist sehr ampel, außer wenn* D *eine elliptische Involution besitzt, die mit der Galoisoperation verträglich ist, d. h. es gibt ein kartesisches Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{2:1} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow 5:1 \\ C & \xrightarrow{2:1} & E' \end{array}$$

wobei E *und* E' *elliptische Kurven sind.*

Beweis: [R, theorem 4.3].

Da die allgemeine Kurve vom Geschlecht 2 keine elliptische Involution besitzt, liefert dies zugleich einen Existenzbeweis für abelsche Flächen im $\mathbf{P}_4$. Eine analoge Aussage gilt auch für den Fall (b), d. h. für den Fall, daß Y zerfällt. Dies wurde in [HL1] gezeigt.

(3) Die früheste Konstruktion abelscher Flächen im $\mathbf{P}_4$ stammt jedoch von dem italienischen Mathematiker A. Comessatti. Seine Arbeit [C] ist über viele Jahre hinweg unbeachtet geblieben. Erst H. Lange hat diese Ideen wieder aufgegriffen. In [L] erweiterte er die Ergebnisse von Comessatti und bewies sie in moderner Sprache. Um das Resultat von Comessatti und Lange zu beschreiben, betrachten wir den Zahlkörper $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ und darin den Ring der ganzen Zahlen

$$\mathfrak{O} = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\omega, \qquad \omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Ferner sei $' : \mathfrak{O} \to \mathfrak{O}$ die Konjugation, die durch $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$ gegeben wird. Für ein Paar $(z_1, z_2) \in H^2$ definieren wir

$$\Omega = \Omega_{(z_1, z_2)} = \mathfrak{O}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathfrak{O}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

wobei die Multiplikation mit einem Element $\alpha \in \mathfrak{O}$ durch

$$\alpha\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\omega_1 \\ \alpha'\omega_2 \end{pmatrix}$$

erklärt ist. Man überzeugt sich leicht, daß Ω ein Gitter in $\mathbf{C}^2$ ist. Wir setzen

$$X = X_{(z_1, z_2)} = \mathbf{C}^2 / \Omega_{(z_1, z_2)}.$$

X ist eine abelsche Varietät, die in natürlicher Weise eine (1,5)-Polarisierung besitzt. Dazu betrachten wir:

$$A : \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$$
$$A((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \operatorname{Im}\left(\frac{x_1 \bar{y}_1}{\operatorname{Im} z_1} + \frac{x_2 \bar{y}_2}{\operatorname{Im} z_2}\right).$$

Man rechnet sofort nach, daß A auf dem Gitter Ω ganzzahlig ist und eine Polarisierung vom Typ (1,5) definiert. Es sei L ein zugehöriges Geradenbündel.

Satz 4.5 (Comessati-Lange). *Für allgemeines* (z_1, z_2) *ist* L *sehr ampel, definiert also eine Einbettung* $X_{(z_1,z_2)} \subset \mathbf{P}_4$.

Beweis: [L, theorem 3.4].

Bemerkung 4.6. (i) Für spezielle (z_1, z_2), etwa $z_1 = z_2$ ist die Aussage falsch. Dann zerfällt $X_{(z_1,z_2)}$ auf natürliche Weise in ein Produkt E x E. Das Geradenbündel L definiert zwar noch eine Abbildung $X \to \mathbf{P}_4$, diese ist jedoch nicht mehr injektiv, sondern ergibt eine verzweigte 2:1-Überlagerung auf eine elliptische Regelfläche vom Grad 5 in $\mathbf{P}_4$.
(ii) In seiner Arbeit [L] stellt Lange die Polarisierung L in der Form $L = L_0 \otimes \omega^* L_0$ dar, wobei L_0 eine Prinzipalpolarisierung auf X und ω der durch Multiplikation mit $\omega \in \mathfrak{O}$ gegebene Automorphismus ist. Damit läßt sich der Beweis auf einfache Weise geometrisch führen. Der ursprüngliche Beweis von Comessatti beruht auf komplizierten Rechnungen mit Thetafunktionen.

Die von Comessatti und Lange betrachteten abelschen Flächen besitzen alle eine sehr spezielle Eigenschaft. Da Multiplikation mit $\mathfrak{O}$ das Gitter Ω in sich überführt, gibt es eine Inklusion

$$j : \mathfrak{O} \to \mathrm{End}(X).$$

Man sagt, die abelsche Fläche X besitzt *reelle Multiplikation in* $\mathfrak{O}$. Flächen mit reeller Multiplikation in einer Ordnung in einem Zahlkörper $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ besitzen als Modulräume die sogenannten *Hilbertschen Modulflächen*. Ich möchte in diesem Aufsatz nicht auf die allgemeine Theorie der Hilbertschen Modulfläche eingehen, sondern nur den hier auftretenden Spezialfall erwähnen. Ansonsten sei der interessierte Leser auf die Vorlesungen von Hirzebruch und Van der Geer [HVG] sowie auf das gerade erschienene Buch von Van der Geer [VG] verwiesen.
Wir betrachten die Gruppe

$$\mathrm{SL}(2, \mathfrak{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{O}, \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}.$$

Dann operiert die Hilbertsche Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathfrak{O})/\{\pm \mathbf{1}\}$ auf H^2 durch

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}, \frac{\alpha' z_2 + \beta'}{\gamma' z_2 + \delta'} \right).$$

Der Quotient

$$Y(5) = H^2/\Gamma$$

ist die *Hilbertsche Modulfläche* zu $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$. Diese kann als Modulraum der abelschen Flächen mit reeller Multiplikation in $\mathfrak{O}$ interpretiert werden.
Wir betrachten ferner die Involution

$$\sigma : H^2 \to H^2; \quad (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1).$$

Die Fläche

$$Y_\sigma(5) = H^2/\Gamma \cup \Gamma\sigma$$

ist dann die *symmetrischen Hilbertsche Modulfläche* zu $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$. Durch σ werden abelsche Flächen identifiziert, deren reelle Multiplikation sich lediglich durch Konjugation unterscheidet. Schließlich kann man, ähnlich wie bei dem früher betrachteten Fall der elliptischen Kurven, Kongruenzuntergruppen von $SL(2, \mathfrak{O})$ betrachten. Wir beschränken uns hier auf den Fall

$$\Gamma(\sqrt{5}) = \{\gamma \in SL(2, \mathfrak{O}); \gamma \equiv \mathbf{1} \bmod (\sqrt{5})\}.$$

Dann heißt

$$Y(5, \sqrt{5}) = H^2/\Gamma(\sqrt{5})$$

die zu $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ und dem Ideal $(\sqrt{5})$ gehörige Hilbertsche Modulfläche. Es gibt eine natürliche Abbildung

$$Y(5, \sqrt{5}) \to Y(5)$$

die durch die Operation der Gruppe

$$SL(2, \mathfrak{O})/\pm\, \Gamma(\sqrt{5}) = PSL(2, \mathbf{Z}_5) = A_5$$

gegeben wird. Schließlich wird die symmetrische Hilbertsche Modulfläche zu $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ und Ideal $(\sqrt{5})$ erklärt durch

$$Y_\sigma(5, \sqrt{5}) = H^2/\Gamma(\sqrt{5}) \cup \Gamma(\sqrt{5})\sigma.$$

Auch diese Fläche besitzt eine A_5-Operation. Hirzebruch zeigte in [HI, p. 307], daß

$$Y_\sigma(5, \sqrt{5}) = \mathbf{P}_2 - \{P_1, \ldots, P_6\}$$

wobei die Gruppe A_5 auf $\mathbf{P}_2$ linear operiert und $P_1, \ldots, P_6$ der minimale Orbit dieser Operation ist. Wir werden hierauf im nächsten Abschnitt zurückkommen. Dort werden wir auch sehen, daß der Übergang von Γ zu $\Gamma(\sqrt{5})$ die Einführung einer Level-Struktur bedeutet.

5 Das Horrocks-Mumford-Bündel

Im Jahre 1972 konstruierten Horrocks und Mumford ein unzerlegbares Vektorbündel F vom Rang 2 auf dem 4-dimensionalen komplex-projektiven Raum $\mathbf{P}_4$. Dieses Bündel ist heute als das Horrocks-Mumford-Bündel (abgekürzt HM-Bündel) bekannt. Es ist nach wie vor im wesentlichen das einzige bekannte unzerlegbare Rang 2 Bündel auf $\mathbf{P}_4$. Alle anderen bekannten Beispiele entstehen aus F durch einfache Operationen wie Dualisieren, Twisten mit Geradenbündeln und Liften mittels endlicher verzweigter Überlagerungen. Darüber hinaus besitzt F eine Fülle interessanter geometrischer Eigenschaften und ist mit verschiedenen anderen mathematischen Objekten aufs engste verbunden.
Die ursprüngliche Konstruktion von Horrocks und Mumford ist kohomologischer Natur. Dazu betrachten wir den Vektorraum $V = \mathbf{C}^5$ und den zugehörigen projektiven Raum $\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}(V)$.
Horrocks und Mumford konstruieren einen Komplex

$$\Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_4}(2) \xrightarrow{p} \Lambda^2 T_{\mathbf{P}_4} \oplus \Lambda^2 T_{\mathbf{P}_4} \xrightarrow{q} \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_4}(3).$$

Dabei ist $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_4}(-1)$ das Hopfbündel, dessen duales Bündel $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_4}(1)$ das Hyperebenenbündel ist, und

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}_4}(k) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_4}(1)^{\otimes k} & \text{falls } k > 0 \\ \mathcal{O}_{\mathbf{P}_4} & \text{falls } k = 0 \\ \mathcal{O}_{\mathbf{P}_4}(-1)^{\otimes -k} & \text{falls } k < 0. \end{cases}$$

$T_{\mathbf{P}_4}$ bezeichnet das Tangentialbündel von $\mathbf{P}_4$. Die Abbildung p ist eine injektive Abbildung von Vektorbündeln und q ist surjektiv. Ferner gilt $q \circ p = 0$. Das Bündel F ist dann die Kohomologie dieses Komplexes, d. h.

$$F = \ker q/\operatorname{im} p.$$

Aus dieser Konstruktion kann man auch die topologischen Invarianten von F, d. h. die Chernklassen, leicht ausrechnen.
Es gilt

$$c_1(F) = 5, \qquad c_2(F) = 10.$$

Da das Polynom $1 + 5h + 10h^2$ über $\mathbf{Z}$ irreduzibel ist, folgt sofort, daß F unzerlegbar ist.
Eine der herausragenden Eigenschaften des HM-Bündels ist seine Symmetriegruppe. Dazu betrachten wir die Heisenberggruppe $H_5 \subset SL(5, \mathbf{C})$, wie sie in Abschnitt 2 eingeführt wurde. Es sei N_5 der Normalisator von H_5 in $SL(5, \mathbf{C})$.
Dann gilt:

$$N_5/H_5 \cong SL(2, \mathbf{Z}_5)$$

und N_5 ist ein semi-direktes Produkt

$$N_5 = H_5 \rtimes SL(2, \mathbf{Z}_5).$$

Die Ordnung von N_5 ist 15.000, und N_5 operiert auf F als dessen Symmetriegruppe [HM], [D1]. Wie wir bereits gesehen haben, hängt H_5 eng mit den Symmetrien elliptischer Kurven (und abelscher Flächen) zusammen. $SL(2, \mathbf{Z}_5)$ ist die binäre Ikosaedergruppe.

a) Das HM-Bündel und abelsche Flächen

Für den Schnittraum des Vektorbündels F gilt

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(\mathbf{P}_4, F) = 4.$$

Da das Bündel $F(-1) = F \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_4}(-1)$ keine Schnitte besitzt, ist für jeden Schnitt $0 \neq s \in H^0(X, F)$ das Nullstellengebilde

$$X_s = \{s = 0\}$$

eine Fläche vom Grad $c_2(F) = 10$. Für einen allgemeinen Schnitt s kann man zeigen, daß X_s glatt ist. Aus der Flächenklassifikation folgt dann leicht, daß X_s eine abelsche Fläche ist. Genauer gilt:

Satz 5.1 (Horrocks-Mumford). *Die Zuordnung* $s \mapsto X_s$ *definiert einen Isomorphismus*

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \neq s \in H^0(\mathbf{P}_4, F) \\ X_s \text{ glatt} \end{array}\right\} / \mathbf{C}^* \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{l} (X, L, \alpha);\ X \textit{ abelsche Fläche} \\ L \textit{ ist sehr ample } (1,5)\text{-Pol.} \\ \alpha \textit{ ist Level-Struktur} \end{array}\right\} / \mathrm{Iso} =: A^*(1,5)$$

Beweis: [HM, theorem 6.1].

Bemerkung 5.2. (i) Der obige Satz besagt, daß gewisse abelsche Flächen als Schnittflächen des HM-Bündels auftreten. Es gilt jedoch noch mehr: Ist $X \subset \mathbf{P}_4$ eine abelsche Fläche, so gibt es (nach einer ev. Koordinatentransformation) stets einen Schnitt $s \in H^0(\mathbf{P}_4, F)$ mit $X = X_s$, vgl. [HM, theorem 5.2].

(ii) Weiß man umgekehrt, daß es abelsche Flächen $X \subset \mathbf{P}_4$ gibt, so kann man die Serre-Konstruktion (vgl. etwa [OSS, § 5]) verwenden, um daraus ein Vektorbündel zu konstruieren. Dies ist, bis auf möglichen Koordinatenwechsel, dann notwendigerweise das HM-Bündel F.

(iii) Satz 5.1 besagt, daß ein offener Teil U des dreidimensionalen projektiven Raums $\mathbf{P}\Gamma := \mathbf{P}(H^0(\mathbf{P}_4, F))$ als Modulraum abelscher Varietäten interpretiert werden kann. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch die Rolle der Symmetriegruppe N_5. Die Gruppe H_5 sowie die Involution $-\mathbf{1}$ in $SL(2, \mathbf{Z}_5)$ operieren trivial auf $H^0(\mathbf{P}_4, F)$. Also induziert N_5 eine (lineare) Operation der Ikosaedergruppe A_5 auf $\mathbf{P}\Gamma$ und damit auf U. Andererseits hat man eine offene Inklusion

$$A^*(1,5) \subset A(1,5) = \left\{\begin{array}{l} (X, L, \alpha),\ X \text{ abelsche Fläche} \\ L \text{ ist } (1,5)\text{-Polarisierung} \\ \alpha \text{ ist Level-Struktur} \end{array}\right\} / \mathrm{Iso}$$

Durch Vergessen der Level-Struktur erhält man eine Abbildung

$$A(1,5) \to A_0(1,5)$$

die durch die Operation der Gruppe $\Gamma_0(1,5)/\Gamma(1,5) = A_5$ induziert wird. Horrocks und Mumford haben nun gezeigt, daß diese Operation auf $A^*(1,5)$ mit der durch die Gruppe N_5 induzierten Operation übereinstimmt.

Wie wir in Abschnitt 4 gesehen haben, spielen die von Comessatti und Lange gefundenen abelschen Flächen im $\mathbf{P}_4$ eine besondere Rolle. Es stellt sich also die Frage, für welche Schnitte $s \in \mathbf{P}\Gamma$ die zugehörige abelsche Fläche X_s reelle Multiplikation in $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ besitzt und durch die Konstruktion von Comessatti-Lange eingebettet wird. In diesem Fall möchte ich X_s eine *Comessatti-Fläche* nennen. Eine solche Fläche trägt nach Satz 5.1 in natürlicher Weise eine Level-Struktur. Bei der Beantwortung obiger Frage hilft die Operation der Gruppe A_5 auf $\mathbf{P}\Gamma$ weiter. Man überlegt sich leicht, daß es genau eine A_5-invariante kubische Fläche X in $\mathbf{P}\Gamma$ gibt. X ist die sogenannte *Clebsche Diagonalkubik*. Als abstrakte Fläche ist X gegeben durch

$$X = \left\{ \sum_{i=0}^{4} x_i = \sum_{i=0}^{4} x_i^3 = 0 \right\} \subset \mathbf{P}_4.$$

Eine andere Beschreibung kann wie folgt gegeben werden: Man betrachte die (im wesentlichen eindeutige) lineare Operation von A_5 auf $\mathbf{P}_2$. Diese besitzt genau einen minimalen Orbit $P_1, \ldots, P_6$ (vgl. Abschnitt 4). Es ist

$$X = \tilde{\mathbf{P}}_2(P_1, \ldots, P_6)$$

d. h. X ist die Aufblasung von $\mathbf{P}_2$ in den Punkten $P_1, \ldots, P_6$. Aufblasung bedeutet, daß die Punkte $P_1, \ldots, P_6$ herausgenommen, und jeweils durch projektive Gerade $\mathbf{P}_1$ ersetzt werden.

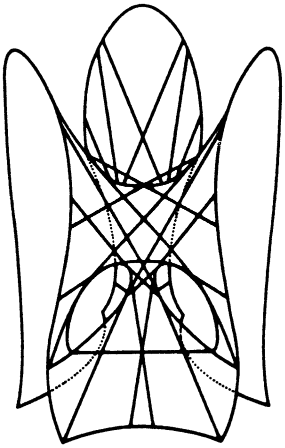


Fig. 4 Clebsche Diagonalfläche (nach P. Slodowy [SL], MPI Bonn)

Unter allen kubischen Flächen besitzt die Clebsche Diagonalkubik sehr spezielle Eigenschaften. So sind etwa die 27 Geraden auf X alle reell. Für eine Diskussion der Clebschen Diagonalkubik siehe u. a. [FI], [SL]. Schließlich bezeichne $\overline{Y_\sigma(5,\sqrt{5})}$ diejenige Kompaktifizierung der symmetrischen Hilbertschen Modulfläche zu $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ und Ideal $(\sqrt{5})$, die durch Aufblasen von $\mathbf{P}_2$ in $P_1, \ldots, P_6$ entsteht (vgl. Abschnitt 4). Dann sind X und $\overline{Y_\sigma(5,\sqrt{5})}$ als abstrakte Flächen isomorph. Man hat den zwar naheliegenden, aber dennoch nicht offensichtlichen

Satz 5.3 (Hulek-Lange). *Die Comessatti-Flächen werden durch einen offenen Teil der Clebschen Diagonalkubik* $X \subset \mathbf{P}\Gamma$ *parametrisiert. Insbesondere liefert die Zuordnung* $s \mapsto X_s$ *einen Isomorphismus* $X \cong \overline{Y_\sigma(5,\sqrt{5})}$.

Beweis: [HL2, theorem 5.1].

Die Punkte eines A_5-Orbits entsprechen dabei gerade jenen Comessatti-Flächen, die sich nur durch die Level-Struktur unterscheiden.

b) das HM-Bündel und elliptische Kurven

Hier sollen zwei Punkte angesprochen werden.

(1) *Degenerationen von Horrocks-Mumford Flächen.* Wir haben oben gesehen, daß für einen allgemeinen Schnitt $s \in \mathbf{P}\Gamma$ das Nullstellengebilde X_s eine abelsche Fläche ist, insbesondere also keine Singularitäten besitzt. Es gibt jedoch eine Familie von Schnitten s, für die X_s *singulär* ist. Man kann solche Flächen als Degenerationen abelscher Flächen auffassen. Es stellt sich dann die Frage nach der Klassifikation dieser *singulären* HM-*Flächen*.

Dazu sei zunächst daran erinnert, daß die elliptischen Kurven mit Level-5-Struktur in Bijektion mit den H_5-invariant eingebetteten elliptischen Quintiken im $\mathbf{P}_4$ stehen (Satz 2.6). Es sei $E \subset \mathbf{P}_4$ eine solche elliptische Kurve. Ferner sei $P_0 \in E$ ein Punkt, der kein 2-Teilungspunkt ist, d. h. $2 P_0 \neq 0$. Verbinden wir jeden Punkt $P \in E$ mit seinem Translat $P + P_0 \in E$, so erhalten wir eine Familie von Geraden $L(P, P + P_0)$, die sich zu einer Regelfläche

$$X = \bigcup_{P \in E} L(P, P + P_0)$$

zusammenschließen. X ist eine Fläche vom Grad 10, die singulär entlang E ist. Wir nennen X eine *Translationsregelfläche*. Daß solche Flächen als Schnittflächen des HM-Bündels auftreten, wurde in [HU2] gezeigt. Die Flächen X können nun ihrerseits weiter degenerieren:

(i) Geht P_0 gegen den Nullpunkt $0 \in E$, so geht X in die *Tangentialfläche* von E über. Diese besitzt eine Familie von Spitzen entlang E.

(ii) Nimmt man für P_0 einen 2-Teilungspunkt ungleich 0, so fallen jeweils die Geraden $L(P - P_0, P)$ und $L(P, P + P_0)$ zusammen. In diesem Fall ist X eine glatte *elliptische Regelfläche* vom Grad 5. Aus Gradgründen kann X nicht das (idealtheoretische) Nullstellengebilde eines Schnitts $s \in \mathbf{P}\Gamma$ sein. Es kann jedoch vorkommen, daß es einen Schnitt s gibt, er auf X *doppelt* verschwindet. In diesem Fall trägt X auf natürliche Weise eine *Doppelstruktur*. Daß dies tatsächlich vorkommt, wurde in [HV] gezeigt.
Es gibt nun noch den Fall, daß die elliptische Kurve E selbst degeneriert. Im Grenzfall zerfällt E in ein H_5-invariantes 5-gon, bestehend aus fünf Geraden. Diese Situation tritt genau 12 mal auf. Dies entspricht den singulären Fasern der Shiodaschen Modulfläche S(5). Damit erhalten wir die folgenden weiteren Degenerationen:

(iii) Eine Vereinigung von 5 *glatten Quadriken*. Die Quadriken können nun ihrerseits wieder zu (Doppel)ebenen entarten, und wir erhalten

(iv) Eine Vereinigung von 5 *Ebenen* (mit einer Doppelstruktur). Diese Degenerationen wurden bereits in [HM] erwähnt.

Satz 5.4 (Barth-Hulek-Moore). *Jede Schnittfläche X_s des Horrocks-Mumford-Bündels* F *ist von einem der folgenden Typen*:

(i) *eine abelsche Fläche*
(ii) *eine Translationsregelfläche*
(iii) *die Tangentialfläche einer elliptischen Quintik*
(iv) *eine elliptische Regelfläche vom Grad* 5 *(mit Doppelstruktur)*
(v) *eine Vereinigung von* 5 *glatten Quadriken*
(vi) *eine Vereinigung von* 5 *Ebenen (mit Doppelstruktur).*

Diese Fälle treten alle auf.

Beweis: [BHM2, theorem (0.1)].

(2) *Sprungphänomene*. Das Horrocks-Mumford-Bündel ist *stabil* im Sinne der Modultheorie algebraischer Vektorbündel. Dies ist hier äquivalent dazu, daß

$$H^0(\mathbf{P}_4, \mathrm{End}\ F) \cong \mathbf{C}$$

d. h. daß die Homothetien die einzigen Endomorphismen von F sind. Bei stabilen Bündeln hat es sich sehr bewährt, sogenannte *Sprungphänomene* zu untersuchen. Ich möchte hier nicht auf den Fall der *Sprunggeraden* eingehen. Der interessierte Leser sei in diesem Zusammenhang auf [BHM1] verwiesen. Sehr nützlich hat sich im Falle des HM-Bündels auch die Untersuchung der *Sprungebenen* erwiesen.

Definition 5.5. Eine Ebene $E \subset \mathbf{P}_4$ heißt *Sprungebene* von F, falls $F|E$ nicht stabil ist.

Nun kann man für F, ebenso wie für jedes andere stabile Bündel auf einem projektiven Raum $\mathbf{P}_n$, mit $n \geqslant 3$, die Familie der Sprungebenen betrachten. Diese ist definiert durch

$$S(F) := \{E, E \text{ ist Sprungebene von } F\}.$$

Die Grassmann-Mannigfaltigkeit Gr(2, 4) parametrisiert alle Ebenen im $\mathbf{P}_4$. Es ist leicht zu sehen, daß S(F) eine Untervarietät von Gr(2, 4) ist.

Satz 5.6 (Barth-Hulek-Moore). *Die Varietät der Sprungebenen von* F *ist isomorph zur Shiodaschen Modulfläche der Stufe* 5, *d. h.*

$$S(F) \cong S(5).$$

Beweis: [BHM1, p. 40], [HU2, theorem 4].

In engem Zusammenhang mit diesem Ergebnis steht auch der folgende Eindeutigkeitssatz von Decker und Schreyer.

Satz 5.7 (Decker-Schreyer). *Ist* F′ *ein stabiles Rang-2-Vektorbündel auf* $\mathbf{P}_4$ *mit* $c_i(F') = c_i(F)$ *für* $i = 1, 2$, *so gibt es eine Koordinatentransformation* $\varphi \in PGL(5, \mathbf{C})$ *mit* $F' = \varphi^* F$.

Beweis: [DS].

Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, zu zeigen, daß für jedes solcher Bündel gilt $S(F') \cong S(5)$. Dies impliziert dann die Behauptung.

Korollar 5.8 (Decker-Schreyer). *Der Modulraum* $M_{\mathbf{P}_4}(5, 10)$ *der stabilen Rang-2-Vektorbündel auf* $\mathbf{P}_4$ *mit Chernschen Klassen* $c_1 = 5$, $c_2 = 10$ *ist ein homogener Raum. Es gilt*

$$M_{\mathbf{P}_4}(5, 10) = PGL(5, \mathbf{C})/(\mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_5) \rtimes SL(2, \mathbf{Z}_5).$$

Schließlich sei noch erwähnt

Korollar 5.9 (Decker). *Es gibt kein stabiles Vektorbündel vom Rang* 2 *auf* $\mathbf{P}_5$ *mit den Chernschen Klassen* $c_1 = 5$, $c_2 = 10$. *Insbesondere kann das Horrocks-Mumford-Bündel nicht auf den* $\mathbf{P}_5$ *fortgesetzt werden.*

Beweis: [D2, theorem 2], [HU2, theorem 7].

Es gibt genau drei verschiedene topologische $\mathbf{C}^2$-Bündel auf $\mathbf{P}_5$ mit den Chernklassen $c_1 = 5$, $c_2 = 10$. Das obige Ergebnis besagt also, daß keines dieser topologischen Bündel die Struktur eines stabilen algebraischen Vektorbündels trägt. Es wird vermutet, daß diese topologischen Bündel überhaupt keine algebraische Struktur tragen.

Literatur

[BH] B a r t h , W.; H u l e k , K.: Projektive models of Shioda modular surfaces. Manuscr. Math. **50** (1985) 73–131

[BHM1] B a r t h , W.; H u l e k , K.; M o o r e , R.: Shioda's modular surface S(5) and the Horrocks-Mumford bundle. In: Vector bundles on algebraic varieties, Bombay Colloquium 1984, 35–106. Bombay: Oxford University Press 1987

[BHM2] B a r t h , W.; H u l e k , K.; M o o r e , R.: Degenerations of Horrocks-Mumford surfaces. Math. Ann. **277** (1987) 735–755

[BAR] B a r t s c h , R.: Dissertation, Hamburg 1985

[BU] B u r n s , D.: On the geometry of elliptic modular surfaces and representations of finite groups. In: Springer Lecture Notes in Math., Vol. **1008** (1983) 1–29

[C] C o m e s s a t t i , A.: Sulle superficie di Jacobi semplicemente singolari, Tipografia della Roma Accad. dei Lincei, Roma 1919

[D1] D e c k e r , W.: Das Horrocks-Mumford-Bündel und das Modulschema für stabile 2-Vektorbündel auf $\mathbf{P}_4$ mit $c_1 = -1$, $c_2 = 4$. Math. Z. **188** (1984) 101–110

[D2] D e c k e r , W.: Stable rank 2 vector bundles with Chern classes $c_1 = -1$, $c_2 = 4$. Math. Ann. **275** (1986) 481–500

[DS] D e c k e r , W.; S c h r e y e r , F. O.: On the uniqueness of the Horrocks-Mumford bundle. Math. Ann. **273** (1986) 415–443

[FI] F i s c h e r , G.: Mathematische Modelle. Braunschweig: Vieweg Verlag 1986

[FU] F u l t o n , W.: Intersection Theory. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag 1984

[HI] H i r z e b r u c h , F.: The ring of Hilbert modular forms for real quadratic fields of small discriminant. Springer Lecture Notes in Math. Vol. **627** (1977) 287–323

[HVG] H i r z e b r u c h , F.; V a n d e r G e e r , G.: Lectures on Hilbert modular surfaces. Les Presses de l'Universite de Montreal 1981

[HM] H o r r o c k s , G.; M u m f o r d , D.: A rank 2 vector bundle on $\mathbf{P}^4$ with 15000 symmetries. Topology **12** (1973) 63–81

[HU1] H u l e k , K.: Projective geometry of elliptic curves. Astérisque **137** (1986)

[HU2] H u l e k , K.: Geometry of Horrocks-Mumford bundle. Proceedings of Symp. in Pure Math. **46** (1987), 69–85

[HL1] H u l e k , K.; L a n g e , H.: Examples of abelian surfaces in $\mathbf{P}_4$. J. Reine Angew. Math. **363** (1985) 200–216

[HL2] H u l e k , K.; L a n g e , H.: The Hilbert modular surface for the ideal $(\sqrt{5})$ and the Horrocks-Mumford bundle. Math. Z. **198** (1988), 95–116

[HV] H u l e k , K.; V a n d e V e n , A.: The Horrocks-Mumford bundle and the Ferrand construction. Man. Math. **50** (1986) 313–335

[HUS] H u s e m ö l l e r , D.: Elliptic Curves. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1987

[I] I g u s a , J.-I.: Theta functions. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1972

[K] K l e i n , F.: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Leipzig: Teubner Verlag 1884

[L] L a n g e , H.: Jacobian surfaces in $\mathbf{P}_4$. J. Reine Angew. Math. **372** (1986) 71–86

[M] M u m f o r d , D.: Abelian Varieties.London: Oxford University Press 1974

[N] N a r u k i , I.: Über die Kleinsche Ikosaeder-Kurve sechsten Grades. Math. Ann. **231** (1978) 205–216

[OSS] O k o n e k , C.; S c h n e i d e r , M.; S p i n d l e r , H.: Vector bundles on complex projective spaces. Progress in Math. Vol. 3. Boston: Birkhäuser 1980

[R] R a m a n a n , S.: Ample divisors on abelian surfaces. Proc. London Math. Soc. **57** (1985) 231–245

[SM] S h i m u r a , G.: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Tokyo: Iwanami Shoten und Princeton University Press 1971

[SH] S h i o d a , T.: On elliptic modular surfaces. J. Math. Soc. Japan **24** (1972) 20–59

[SL] S l o d o w y , P.: Das Ikosaeder und die Gleichungen fünften Grades. In: Arithmetik und Geometrie, 71–113. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1986

[VG] V a n d e r G e e r , G.: Hilbert modular surfaces. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag 1987

[VV] Van de Ven, A.: On the embedding of abelian varieties in projective spaces. Ann. di Matematica **103** (1975) 127–129

[VE] Vélu, J.: Courbes elliptiques munies d'un sous groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mu_n$. Bull. Soc. Math. Fr. Memo. **57** (1978)

K. Hulek
Mathematisches Institut
Universität Bayreuth
Postfach 101251
D-8580 Bayreuth

(*Eingegangen 30. 12. 1987*)

Buchbesprechungen

Kimura, M., Die Neutralitätstheorie der molekularen Evolution, Biologie und Evolution interdisziplinär, Berlin – Hamburg: Parey 1987, 303 S., 58 Abb., 17 Tabellen, geb., DM 49,80

Die auf Darwins Ideen fußende moderne Evolutionstheorie untersucht den grundlegenden Vorgang, daß ein mutiertes Gen sich als Allel gegen das alte Gen durchsetzt, 1) quantitativ – eine Mutationsrate setzt sich durch einen komplizierten Mechanismus in eine Evolutionsrate um – und 2) heute überwiegend auf der molekularen Ebene: der Phänotyp ist nun mehr der „Testpilot“ für das, was im Gen-Pool vor sich geht. Schon Ende der zwanziger Jahre errechneten J. B. S. Haldane und R. A. Fischer z. B., daß eine Mutation, die 1% Selektionsvorteil bringt, sich nur mit 2% Wahrscheinlichkeit durchsetzt, also mit 98% Wahrscheinlichkeit untergeht. Solche und andere, durch Beobachtung erhärtete Ergebnisse legen die Vermutung nahe, der Inhalt des Gen-Pools bestehe zu einem beträchtlichen Teil aus Zufalls-Ergebnissen: „Evolutions-Rauschen“ (die Übersetzer sagen „Geräusch“) und nur teilweise aus Genen, die sich aufgrund ihres Selektionsvorteils etablieren konnten. Diese ist eine Grund-Idee der im Titel dieses Buches genannten „Neutralitätstheorie“. Befunde, die die Selektions-Neutralität gewisser Mutationen zeigen, gehören zu ihren Stützen. Sie ist bis heute umstritten, der Verfasser gehört zu ihren wesentlichsten Verfechtern, und das vorliegende Buch verfolgt den Zweck, diese Theorie systematisch darzulegen und zu erhärten. Für den Mathematiker ist es lesenswert, weil es Gelegenheit bietet, die ganze, ohnehin immer neue interessante Aspekte entwickelnde mathematische Maschinerie der modernen Evolutionstheorie 1) in beträchtlichem Umfang und 2) in voller strapaziöser Aktion auf dem Testfeld der genannten Theorie kennenzulernen. Der Verfasser hat zu dieser Maschinerie eigene Beiträge geliefert, z. B. eine Diffusionsgleichung für Allel-Frequenzen. Einschlägige Vorbildung (inkl. spieltheoretische Evolutionsbiologie) ist erforderlich, die Darlegung dann aber hinlänglich – wie mir scheint – klar, die Fülle der sich dem Mathematiker hierbei angebotenen evolutionsbiologischen Einsichten macht die Lektüre lohnend. Für Liebhaber.

Erlangen K. Jacobs

Ulam, S., Science, Computers and People: From the Tree of Mathematics, with an Introduction by Martin Gardner, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1986, 263 pp., Hardcover, DM 88,–

Stanislaw Ulam starb im Alter von 75 Jahren im Mai 1984. Der vorliegende, seinem Gedenken gewidmete Band enthält 23 Aufsätze aus seiner Feder, Aufsätze mehr philosophischer als technischer Art.

Stanislaw Ulam war eine der bemerkenswerten Persönlichkeiten der zeitgenössischen Mathematik in den Vereinigten Staaten, seiner zweiten Heimat. In mehr als einer Hinsicht stach er heraus.

Zu nennen wäre seine intellektuelle Bescheidenheit: G.-C. Rota bemerkte in seiner Traueransprache, daß Ulam es nicht schätzte, ein Intellektueller genannt zu werden. War auch sein Intellekt stets wach, zupackend und unersättlich wißbegierig, so hielt er ihn doch unter Kontrolle, wissend, daß vor den letzten Dingen alle intellektuellen Bemühungen wirkungslos sind.

Ulam hob sich auch hervor durch seine Ausdrucksfähigkeit. Nicht nur strebte er danach, das wesentliche so kurz als möglich zu sagen, es trieb ihn geradezu sich auszudrücken, sich verständlich zu machen, aus sich herauszugehen. Sein Buch „Adventures of a Mathematician“, 1976 erschienen, legte davon Zeugnis ab; es war weit mehr als die üblichen Memoiren.

Gerühmt wird auch seine Fähigkeit, Feinheiten unterscheiden zu können, ohne dabei, wie es häufig geschieht, im Kleinkram stecken zu bleiben.

Von einigen reinen Mathematikern, denen man solche Eigenschaften ebenfalls nachrühmt, hob sich Stan Ulam weiterhin dadurch ab, daß er weder der Reinen noch der Angewandten Mathematik zugerechnet werden könnte. Es ist dies stets ein Zeichen hoher Qualität, und in dieser Hinsicht steht Ulam in der Nachfolge von Gauß und Poincaré, gleichrangig mit seinen Zeitgenossen John von Neumann und Garrett Birkhoff, um nur zwei zu nennen.

In der Tat brachte das Schicksal Ulam für lange Jahre in die Nähe der Physik und hierbei in die Kriegswaffentechnik. Der politische Hintergrund erklärt alles – als Stanislaw Ulam im August 1939 von seinem alljährlichen Sommerurlaub in Polen nach Amerika zurückkehrte, nahm er seinen jüngeren Bruder Adam mit sich. Seinen Vater, von dem er sich am Pier von Gdingen verabschiedete, sah er nicht wieder. Ulam wollte 1941, als er amerikanischer Staatsbürger geworden war, Luftwaffenpilot werden; er wurde aber mit 32 Jahren als zu alt bezeichnet und, der mathematischen Vorbildung wegen, als Navigator in Betracht gezogen – dazu fehlte es ihm aber an der für notwendig gehaltenen Sehschärfe. So heuerte ihn von Neumann im Herbst 1943 für Los Alamos an. Und 1949, nachdem die erste sowjetische Atombombe erfolgreich getestet war, beginnt Ulam an Gamow und Tellers Seite mit der Entwicklung der theoretischen Grundlagen der Wasserstoffbombe. Dazu schreibt er: „I did not feel it was immoral to try to calculate physical phenomena".

Ulams Aufsätze in diesem Buch handeln vom Wesen der Mathematik, dessen Verständnis für ihn von physikalischen, biologischen und anderen konkreten Phänomenen her mitgeprägt ist. Um die Physik kreisen die ersten vier, weitere um die Bedeutung von Computern für die Mathematik; dann schwingt das Thema hinüber zum Selbstwachstum von Mustern und führt in die Biomathematik. Eine abschließende Reihe von Beiträgen dient dem Andenken an Stan Ulams große Vorbilder: Von Neumann, Gamow, Smoluchowski, Kuratowski, Banach und schließlich Einstein.

Doch, wie hält Ulam es mit der Moral, mag sich der Leser, vor allem der jüngere, fragen. Er wird, eine Antwort suchend, das Buch sehr genau und auch „intelligent", das heißt, zwischen den Zeilen, lesen müssen.

München

F. L. Bauer

Ostrowski, A., Collected Mathematical Papers, Vol. 1–6, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1983/84, 3978 pp., Preis für 6 Bände DM 738,–

Alexander Ostrowski ist wohl einer der letzten großen universell interessierten und universell produktiven Mathematiker dieses Jahrhunderts. Von ihm stammen grundlegende Resultate, nicht nur in der reinen Mathematik, in Algebra, Zahlentheorie, Funktionentheorie, reeller Analysis, linearer Algebra u. a., sondern auch in der angewandten Mathematik von der Numerik bis zur computer science. Es ist sehr verdienstvoll, daß der Birkhäuser-Verlag seine gesammelten (teilweise schwer zugänglichen) mathematischen Veröffentlichungen in sechs Bänden von insgesamt etwa 3900 Seiten herausgegeben hat, zumal seine Arbeiten auch für die gegenwärtige Forschung noch sehr bedeutsam sind. Hier finden sich die Arbeiten, die nicht bereits in Buchform oder als Monographien vorliegen. Zu diesen Büchern zählen seine Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bände 1–3, die Aufgabensammlungen zur Infinitesimalrechnung, Bände 1–3, seine Schriften über konforme Abbildung (zusammen mit C. Gattegno), Solution of Equations in Euclidean and Banach spaces, und Studien über den Schottkyschen Satz. Alle seine Arbeiten sind sehr klar geschrieben und enthalten jeweils eine ausführliche Einleitung, so daß sie auch für Nicht-Spezialisten verständlich sind.

Hier seien die 16 Kapitelüberschriften, jeweils mit Angabe der Seitenzahlen, genannt und nur einige wenige besonders bedeutungsvolle Arbeiten herausgegriffen und ihr Inhalt stichwortartig angedeutet:

Vol. I, Kap. 1. Determinanten (124 S.), Arbeiten über Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale (auch für die Numerik von Bedeutung). Kap. 2. Lineare Algebra (405 S.) Matrizen, Regularität, Schranken für charakteristische Zahlen, positive Matrizen u. a. Kap. 3. Algebraische Gleichungen (375 S.) Nullstellen von Polynomen: besonders bemerkenswert ist seine große Arbeit (158 S.) über das Graeffesche Verfahren, wohl eine der ausführlichsten Arbeiten über dieses numerische Verfahren.

Vol. II, Kap. 4 Multivariate Algebra (251 S.) Seine an der Universität Hamburg eingereichte Habilitationsarbeit über ein algebraisches Übertragungsprinzip. (Basis aller Lösungssysteme eines gegebenen Gleichungssystems). Kap. 5. Formale Algebra (383 S.). Das Kapitel beginnt mit einer russisch geschriebenen Arbeit (37 S.) zur Algebra der endlichen Körper, welche der 1983 in Kiew geborene Ostrowski als 20jähriger Marburger Student in den Sitzungsberichten der Phys.-Math. Gesellschaft in Kiew veröffentlichte. Im gleichen Jahr 1913 erscheint auch eine auf Anregung von Hensel entstandene Arbeit (30 S.) zur allgemeinen Körpertheorie. Die folgenden Arbeiten zur Bewertungstheorie kulminieren in seiner großen (136 S.) Arbeit zur arithmetischen Theorie der Körper, bei deren Abdruck leider die Anfangsseiten des I. und II. Teiles (p. 350 und p. 402) vertauscht wurden. Weitere Arbeiten zur Algebra der Polynome und der Blockmatrizen und zur kommutativen Algebra bezeugen bis 1977 seine Verbundenheit mit der abstrakten Algebra.

Vol. III. Kap. 6 Zahlentheorie (220 S.) Arbeiten, (zusammen mit G. Polya und Landau) über „ganzwertige" Polynome, Schubfächerprinzip, Probleme mit mehreren Variablen. In der gemeinsam mit Landau verfaßten Arbeit wird die diophantische Gleichung $ay^2 + by + c = dx^n$ behandelt. Die Zahlentheorie hat ihn zeit seines Lebens stark interessiert (Arbeiten von 1919–1982). Kap. 7. Geometrie (45 S.) Evoluten, Parallelkurven u. a. Kap. 8 Topologie (145 S.) mit vielen Zeichnungen, Linenelemente, Verallgemeinerungen des für die Zahlentheorie wichtigen Eulerschen Produktes $\prod_{\nu=0}^{\infty} (1 + x^{2^\nu}) = (1 - x)^{-1}$ (62 S.), Kap. 9. Konvergenz (104 S.) Konvergenzkriterien, Numerische Berechnung langsam konvergierender Reihen.

Vol. IV. Kap. 10. Reelle Funktionen (384 S.) Anwendungen konvexer und konkaver Funktionen, Integraltransformationen, Quadraturformeln, Integralungleichungen, u. a. Kap. 11. Differentialgleichungen (86 S.) Hier findet sich seine Dissertation (58 S., 1919) über Dirichletsche Reihen; Nachweis für allgemeine Klassen Dirichletscher und analoger Reihen, keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung zu genügen; Potenzreihen, die keiner analytischen Differentialgleichung genügen. Kap. 12. Differentialtransformationen (127 S.) Berührungs- und kanonische Transformationen, auch im $\mathbf{R}^3$.

Vol. V. Kap. 13. Komplexe Funktionentheorie (518 S.) Quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen (86 S.) Verallgemeinerungen des Begriffs der analytischen Funktionen und der Untersuchungen von Hadamard, Carleman und Nevanlinna. Anwendungen auf Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Normale Familien, Fortsetzbarkeit, Dirichletsche Reihen und algebraische Funktionen von ihnen.

Vol. VI. Kap. 14. Konforme Abbildungen (262 S.) Rand-Verhalten (104 S., 1935). Zur Randverzerrung (101 S.) mit dem „Hauptsatz über Winkeltreue und Winkelproportionalität am Rande", Faltensatz mit Haupt- und Nebenfalten, Verfahren von Theodorsen und numerisches Beispiel (Abbildung der Ellipse). Kap. 15. Numerik (344 S.) Konvergenzbeschleunigung, Fehlerabschätzung beim Newtonschen Verfahren, „Fast Dreiecks-Matrizen", Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, Konvergenz von Iterationsverfahren. Eine sehr interessante Arbeit über Trends and Problems in Numerical Approximation. Kap. 16 Miscellany (79 S.) Festvorträge, philosophische Betrachtungen über Existenz, Axiomatik, Ideenbildung u. a. Nachrufe für Hardy, Süss, Gautschi und Bemerkungen über Courant. Ferner auch in verschiedenen anderen Kapiteln „Mathematische Miszellen".

Ein Werk, das viele klassische Probleme aufgreift, weiterführt, dabei an zahlreichen Stellen vorhandene Beweise vereinfacht und verallgemeinert und Perspektiven für neue Forschung aufweist, und welches in keiner mathematischen Bibliothek fehlen sollte.

Hamburg L. Collatz

Landau, E., Collected Works, Vol. 5–8 (Editors: P. T. Bateman, L. Mirsky, H. L. Montgomery, W. Schaal, I. T. Schoenberg, W. Schwarz, H. Wefelscheid), Essen: Thales Verlag 1987, Vol. 5: 496 pp., Vol. 6: 512 pp., Vol. 7: 510 pp., Vol. 8: 432 pp., je DM 224,–

Diese jetzt erschienenen Bände enthalten die Arbeiten, die E. Landau im Zeitraum von 1911 bis 1926 publiziert hatte. Der Umfang dieser veröffentlichten Arbeiten (insgesamt fast 1900 Seiten) in diesem Zeitraum zeigen die ungeheure Arbeitskraft von Landau. Dazu kommt noch, daß der Inhalt dieser Arbeiten schwierige und tiefliegende Gedankengänge behandelt. Die Gebiete, die in diesen Arbeiten behandelt werden, gehören der analytischen Zahlentheorie und der Funktionentheorie an. Wir wollen nur einige Gebiete herausgreifen. Vor allem sind hervorzuheben die Arbeiten zum Primzahlsatz und zum Primidealsatz. Dieser letztere Satz war Landau stets ein besonderes Anliegen und er hat immer bedauert, daß seine Bemühungen um diesen Satz zu wenig gewürdigt wurden. Im engen Zusammenhang zum Primzahlsatz stehen seine Arbeiten, die er mit Harald Bohr über die Riemannsche Zeta-Funktion geschrieben hat.

Besonders hervorzuheben sind seine Arbeiten zur Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlenkörper. Ferner sei hervorgehoben die lange Reihe von Arbeiten zur Theorie der Gitterpunkte. Besonders intensiv hat er sich mit dem berühmten Kreisproblem und mit dem Gitterpunktproblem in mehrdimensionalen Ellipsoiden beschäftigt.

Die Arbeiten zur Funktionentheorie enthalten wahrhaft Perlen der Erfindungskraft von Landau, wenn sie auch zum größten Teil in seinem wunderbaren Büchlein über Funktionentheorie enthalten sind. So ist es doch von Interesse, sie in der ursprünglichen Gestalt zu sehen. Drei Ergebnisse haben seine mathematische Welt auf das tiefste berührt:

1) Die Entdeckung von Hardy, daß auf der kritischen Geraden der Zeta-Funktion unendlich viele Nullstellen liegen (C. L. Siegel hat mir oft erzählt, daß sich Landau den Originalbeweis von Hardy oft im Seminar vortragen ließ).
2) Die Arbeiten von Hardy und Littlewood zur „Kreismethode" und
3) die Entdeckung von Hecke über die Fortsetzbarkeit der Dedekindschen Zeta-Funktion.

Dieses letzte Ereignis hat ihn wohl am tiefsten aufgewühlt. Man lese die Einleitungen der zugehörigen Arbeiten, die Landau verfaßte. Sehr nützlich sind die Kommentare, die von P. Bundschuh, J. Dieudonné, W. Narkiewicz und H. Zassenhaus verfaßt wurden. Interessant ist der Artikel von L. C. Young.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die jetzt vorliegenden weiteren 4 Bände außerordentlich wertvoll sind, und die Lektüre jedem Mathematiker auf das wärmste zu empfehlen ist. Die Herausgeber haben hier wertvolle Arbeit geleistet.

Jedem Band ist ein Bild von Landau aus Jugendjahren beziehungsweise aus jüngeren Jahren beigefügt.

Wien E. Hlawaka

Dieudonné, J., Geschichte der Mathematik 1700–1900, Ein Abriß, Braunschweig: Vieweg 1985, XX, 942 S., geb., DM 228,–

Das französische zweibändige Original (Abrégé d'histoire des mathématiques), von 11 Autoren unter Leitung von J. Dieudonné 1978 herausgegeben, wurde im Jber. DMV **83** (1981), 60–61 von C. J. Scriba kritisch besprochen. Die in der DDR unter Leitung von Ludwig Boll erfolgte Übersetzung hat das Werk mit zahlreichen, teilweise sehr wertvollen Anmerkungen, behutsamen (die Behauptung „Das Problem der Bestimmung aller endlichen einfachen Gruppen ist noch offen" auf S. 121 blieb ohne Kommentar) Ergänzungen und zusätzlichen Literaturverweisen versehen, ohne seinen Charakter zu ändern. Die Übersetzung hat kaum Druck- oder andere Fehler, Mißgriffe wie „Normalteiler" statt „Invariante" auf S. 62 bleiben Ausnahmen. Für den Mathematiker ist dieses Werk als eine sorgfältige, mit vielen Details liebevoll ausgeschmückte ausführliche Fassung der „Éléments d'histoire des mathématiques" von N. Bourbaki eine wertvolle Fundgrube für die Entwicklungslinien der modernen Mathematik mit für die französische Schule charakteristischer Auswahl der Gebiete, die ihresgleichen sucht.

Eine Übersicht über das monumentale Werk läßt sich am einfachsten durch Aufzählen der einzelnen Kapitel und ihrer Verfasser geben: 0. Einführung (J. Dieudonné), 1. Die Analysis im 18. Jahrhundert (J. Dieudonné), 2. Algebra und Geometrie bis zum Jahre 1840 (J. Guérindon, J. Dieudonné), 3. Die Algebra seit 1840 (J. Guérindon, J. Dieudonné), 4. Die analytischen Funktionen (J.-L. Verley), 5. Zahlentheorie (W. J. & F. Ellison), 6. Grundlagen der Analysis (P. Dugac), 7. Elliptische Funktionen und Abelsche Integrale (C. Houzel), 8. Funktionalanalysis (J. Dieudonné), 9. Differentialgeometrie (P. Libermann), 10. Topologie (G. Hirsch), 11. Integrations- und Maßtheorie (J. Dieudonné), 12. Wahrscheinlichkeitsrechnung (M. Loève), 13. Axiomatik und Logik (M. Guillaume). Hinzu kommen ein Biographischer Anhang (Kurzbiographien von über 340 Mathematikern als Erstinformation, bevor man zum Dictionary of Scientific Biography greift), Namensregister und Sachregister.

Die Übersicht zeigt deutlich die vorhandenen Lücken, vor allem die fehlenden Bezüge zu den Anwendungen (insbesondere in der Physik), die durch die Personalunion der Forscher des 18. und 19. Jh. und die wechselseitigen Impulse und Querverbindungen nur mit Gewalt von der Geschichte der reinen Mathematik zu trennen sind. Aber auch innerhalb der Mathematik selbst vermißt man zahlreiche Gebiete, z. B. die im 18. Jh. entwickelte Variationsrechnung oder die im 19. Jh. bereits kräftig vorankommende Algebraische Geometrie, für die Dieudonné selbst 1974 einen vorzüglichen geschichtlichen Abriß in der Collection Sup gegeben hat. Als Auswahlkriterium gibt Dieudonné an, nur die elementarsten Begriffe in ihrer historischen Entwicklung betrachten zu wollen. Betrachten wir, was das Buch enthält!

Im Kern stellt das Buch die Geschichte wesentlicher heutiger Ideen der strukturellen Mathematik dar, wobei die Breite und Ausführlichkeit der Darstellung von Kapitel zu Kapitel sehr stark schwankt. Die Lebensumstände der Personen, ihr Gesamtwerk, ihre heutige weniger aktuellen Ergebnisse und Begriffsbildungen bleiben im Hintergrund; was zählt, ist der Beitrag zu den heutigen Ideen, ihre Entwicklung aus konkreten, der Anschauung naheliegenden Vorstellungen hin zu immer abstrakteren Formulierungen. Dabei verstehen es die Autoren mit viel Geschick, dem Leser, den sie sich als einen Studenten höheren Semesters vorstellen, auch die jeweilige mathematische Gedankenwelt explizit nahezubringen, so daß der mathematische Gehalt immer wieder zum Wesentlichen wird. So entsteht in jedem Kapitel eine allgemein verständliche Einführung in das jeweilige Gebiet, die längs den Erfolgen und Mißerfolgen des 18. und 19. Jh. oft bis weit in das 20. Jh. vorstößt. Der Historiker wehrt sich dagegen, diesen verkürzten Ansatz als Mathematikgeschichte zu bezeichnen. Für den Mathematiker aber ergeben sich durch diesen Ansatz (nämlich die geschichtliche Entwicklung als ein Ordnungsprinzip der Darstellung einer Disziplin zu wählen) hervorragende Überblicksartikel, die zu lesen ein ertragreicher, das Verständnis der Materie fördernder Genuß ist – auch für den „ahistorischen" Mathematiker.

Dem gemessen an seiner Reichhaltigkeit noch preiswerten Buch ist größere Verbreitung zu wünschen, als es der Preis befürchten läßt.

Erlangen W.-D. Geyer

Spellucci, P., Törnig, W., Eigenwertberechnung in den Ingenieurwissenschaften, Stuttgart: Teubner 1985, 196 S., Kart., DM 36,–

Das erste Kapitel enthält einen Steilkurs über die Lösung linearer Gleichungen. Behandelt werden Vektoren, Matrizen, Normen, Konditionen und der Rang von Matrizen. Die Bedingungen für die Lösbarkeit linearer Gleichungen werden auch im Falle einer singulären Matrix und im Falle überbestimmter Systeme genau diskutiert. Es folgen Darstellungen des Gauß-Algorithmus (mit verschiedenen Pivot-Such-Strategien) und des Cholesky-Verfahrens. Danach werden die wichtigsten Iterationsverfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen vorgestellt, nämlich Gauß-Seidel-Verfahren, SOR und CG. Beweise enthält dieses Kapitel nur andeutungsweise. Einige einfache Beispiele aus Elektrotechnik und Mechanik demonstrieren die praktische Verwendung der Verfahren.

Die Methoden die Eigenwertberechnung werden im zweiten Kapitel behandelt. Die Darstellung in diesem zweiten Teil ist viel ausführlicher. Das gilt für Definitionen, Sätze, Bemerkungen, Beispiele. Nach einigen einführenden Beispielen und den grundlegenden Definitionen folgt eine sorgfältige Sensitivitätsanalyse der Eigenwertaufgabe. Dann werden eine große Zahl praktisch wichtiger numerischer Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten behandelt, nämlich u. a. Vektoriteration nach von Mises, inverse Iteration nach Wielandt, Verfahren von Hyman, QR- und QL-Verfahren, simultane Vektoriterationen und das Lanczos-Verfahren.

Ein besonderes Anliegen der Verfasser ist es, den Lesern klar zu machen, daß man aus Gründen der Sensitivität und des Rechenaufwandes eine Menge von Spezialverfahren braucht, etwa für hermitische Matrizen (nach Duden nicht hermitesch!), tridiagonale Matrizen, schwach besetzte Matrizen, wie sie bei der Diskretisierung von Randwertaufgaben vorkommen, usw. Ausführlich diskutiert werden neben der Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda x$ auch die allgemeinere Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda Bx$ und ihre Rückführung auf den einfachen Fall. So bekommt der Ingenieur mit diesem Buch einen ausgezeichneten Einblick in die modernen Methoden der Eigenwertberechnung.

Bei den numerischen Beispielen aus der Praxis wird immer wieder auf den Einfluß der Rundungfehler hingewiesen. Ich muß aber kritisch anmerken, daß ich mir doch eine genauere Rundungsfehleranalyse gewünscht hätte, weil sie zusätzliche Kriterien zur Bewertung der Verfahren liefert. Kann man eine solche Analyse Studenten der Ingenieurwissenschaften wirklich nicht zumuten? Zu der Lösung der linearen Gleichungssysteme im ersten Kapitel gibt es einen Hinweis auf Standard-Software. Ich habe leider keinen entsprechenden Verweis hinsichtlich der Eigenwertberechnung im zweiten Kapitel gefunden. Gewünscht hätte ich mir auch eine Erwähnung der Methoden der Intervall-Mathematik.

Köln Th. Meis

Heinrich, B., Finite Difference Methods on Irregular Networks, A Generalized Approach to Second Order Elliptic Problems, Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1987, 206 pp., DM 82,–

Bei der numerischen Behandlung linearer elliptischer Randwertaufgaben bietet die Methode der finiten Elemente (FEM) gegenüber herkömmlich konstruierten finiten Differenzenverfahren (FDM) eine Reihe von Vorteilen, wie z. B. flexible Approximation des gegebenen Gebiets durch irreguläre Netze, Übertragung der Symmetrie der Operatoren des kontinuierlichen Problems – falls vorhanden – auf das diskrete Näherungsproblem, Konvergenz der FEM-Lösung gegen *schwache* Lösungen des korrespondierenden Randwertproblems, Verwendbarkeit von Hilbertraum-Methoden bei der Begründung der FEM usw.

Andererseits finden auch die FDM in der Praxis nach wie vor breite Anwendung – auch für die hier betrachtete Problemklasse –, und die Gründe mögen in deren einfacher Handhabung, der anschaulichen Nachbildung von Ableitungen durch Differenzenquotienten, der Universalität der FDM hinsichtlich des jeweils gegebenen Aufgabentyps usw. liegen, wenngleich hier zumeist reguläre Netze Verwendung finden, Symmetrie oft zerstört wird und die Verfahren eher durch den Versuch der approximativen Erfassung glatter Lösungen motiviert sind.

In den letzten beiden Jahrzehnten sind insbesondere in Anwendungsgebieten unter Zugrundelegung lokal irregulärer oder sogar im Gesamtgebiet irregulärer Netze Differenzenverfahren entwickelt worden, die diese Nachteile zum Teil vermeiden. Die Mathematik hat sich dieser unter Namen wie „box integration methods“, „balance methods“ usw. bekanntgewordener Verfahren – ähnlich wie seinerzeit bei den FEM – erst relativ spät angenommen (Ende der 70er Jahre), wobei der Autor selbst wichtige Beiträge geliefert hat.

Die vorliegende Monographie stellt den gelungenen Versuch einer systematischen Behandlung dieser Verfahren dar, wobei deren Konstruktion, der Nachweis der Symmetrie, Definitheit und Monotonie der Differenzenoperatoren, a-priori-Fehlerabschätzungen mit diskreten Normen in Hilberträumen und Konvergenzaussagen für Lösungen in Sobolevräumen W_2^λ $(\lambda \geqslant 2)$ im Vordergrund stehen. Das Literaturverzeichnis gibt einen guten Überblick über die Arbeiten zu dem behandelten Gegenstand.

Der Autor hat einen Weg der Darstellung gefunden, der ohne Verlust an mathematischer Strenge und Systematik durchaus auch den praktisch tätigen Naturwissenschaftler und Ingenieur ansprechen wird. Als Nachteil mag man empfinden, daß keine numerischen Beispiele und damit auch keine numerischen Vergleiche verschiedener Verfahren Aufnahme in das im übrigen sehr empfehlenswerte Buch gefunden haben.

Hamburg R. Ansorge

Bultheel, A., Laurent Series and their Padé Approximations (Operator Theory: Advances and Applications), Basel – Boston: Birkhäuser-Verlag, (1987), 270 S., DM 106,–

Eine rationale Funktion p/q bezeichnet man als Padé-Approximation vom Grade (m, n) zu f, wenn p und q Polynome vom Grad $\leqslant m$ bzw. n sind und

$$f(z) - p(z)/q(z) = O(z^{m+n+1}) \qquad \text{für } z \to 0$$

gilt. Auf den ersten Blick meint man nur eine formale Verallgemeinerung der Taylor-Polynome zu haben. Es ergibt sich aber eine reichhaltige strukturierte Theorie. Kennzeichnend sind Paare von Rekursionsformeln, wie man sie von Kettenbrüchen her kennt, denen Folgen von Möbius-Transformationen zugeordnet sind. Eine Symmetrie sieht man z. B. sofort: Wenn p/q eine Padé-Approximation zu f ist, dann ist q/p offenbar eine analoge zu $1/f$. Damit hat man eine Korrespondenz von Nullstellen und Polen bzw. allgemeiner zu Singularitäten, und je nachdem was einfacher erscheint, untersucht man Nullstellen oder Singularitäten.

Sei $f(z) = \sum_{k \geqslant 0} c_k z^k$. Die Linearisierung der definierenden Gleichung

$$f(z)q(z) - p(z) = O(z^{m+n+1})$$

führt auf Gleichungssysteme mit den Toeplitz-Matrizen

$$\begin{pmatrix} c_m & c_{m-1} & \cdots & \\ c_{m+1} & c_m & c_{m-1} & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Der Zusammenhang zwischen f und den Determinanten der Toeplitz-Matrizen und deren Rekursionsformeln nehmen einen breiten Raum in der Theorie ein.

Die Nenner der Padé-Approximierenden kann man als orthogonale Polynome ansehen. Darauf baut sich ein großer Formalismus auf. Weil die Gewichtsfunktionen im allgemeinen Zeichenwechsel aufweisen können, bekam man früher eigentlich nur für (verallgemeinerte) Stieltjes-Funktionen inhaltliche Resultate. Aber in den letzten Jahren wurden mit ganz anderen Denkanstößen auch im indefiniten Fall neue Resultate erreicht, wobei die Wechselwirkung zwischen der Padé-Theorie und den orthogonalen Polynomen sehr fruchtbar war.

In dem vorliegenden Buch wird nun für Laurent-Reihen $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ die gleichzeitige Padé-Approximation bei $z = 0$ und bei $z = \infty$ betrachtet. Die gegebene Funktion wird gemäß $f(z) = Z(z) + \hat{Z}(z)$ in einem bei $z = 0$ und einem bei $z = \infty$ analytischen Anteil zerlegt. Die entsprechenden Padé-Approximationen R und $\hat{R}$ werden als Quotienten von sogenannten Laurent-Polynomen $\sum_{k=-n}^{+n} a_k z^k$ dargestellt. Gegenüber der klassischen Padé-Approximation bekommt man dadurch eine weitere Symmetrie beim Übergang von z zu $1/z$, die zu einer Theorie mit schönen Resultaten führt.

Das Buch wendet sich vorwiegend an Leser, die mit der Theorie der klassischen Padé-Approximation vertraut sind. Für die Motivation sowie bei den Beweisen wird sehr häufig auf die bestehende Literatur verwiesen. Dies spürt der Leser schon im ersten Kapitel; es ist zunächst nicht klar, ob die Einführung als Zusammenfassung der als bekannt vorausgesetzten Resultate oder als Vorschau auf die später genauer dargestellte Theorie zu werten ist.

Was beim Einsatz des Computers für die Textverarbeitung alles passieren kann, wird ungewollt auf lustige Weise demonstriert. Wegen eines Übertragungsfehlers muß der Leser die Kapitelnummern erst einmal umrechnen, wenn er das Inhaltsverzeichnis benutzen will.

Der Spezialist wird sich über verschiedene Details freuen. Etwas Besonderes hat sich der Autor auch mit dem Lesezeichen einfallen lassen. Es enthält wichtige Formeln und Definitionen samt deren Numerierung, so daß sich ein Nachschlag oft erübrigt.

Bochum D. Braess

Aubin, J.-P., Cellina, A., Differential Inclusions, Set-Valued Maps and Viability Theory (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Band 264), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1984, 29 figs., xiii, 342 pp., Hardcover, DM 138,–

Differentialinklusionen $x' \in F(t, x)$ stellen mengenwertige Verallgemeinerungen gewöhnlicher Differentialgleichungen dar, bei denen als Lösung i. d. R. eine absolutstetige Funktion x gesucht ist, deren Ableitung $x'(t)$, für fast alle t aus einem Existenzintervall, in der Menge $F(t, x(t))$ enthalten ist. Erste Ergebnisse zur Existenz veröffentlichten 1934 Marchaud und Zaremba. Diese Untersuchungen wurden erst um 1960 durch Filippov und Wazewski im Zusammenhang mit der mathematischen Analyse von dynamischen Systemen mit unstetigen Charakteristiken (z. B. mechanische Systeme mit trockener Reibung, elektrische Netzwerke mit Schaltern – Relais, Dioden u. ä.) sowie Steuerungs- und Regelungssystemen wieder aufgenommen und führten in der Folgezeit zu einem intensiven Ausbau der Theorie (vor allem USA, Sowjetunion, Polen, Frankreich, Italien) und ihrer Anwendungsmöglichkeiten im technisch-industriellen, naturwissenschaftlichen und ökonomischen Bereich.

Das vorliegende Buch von Aubin und Cellina gibt eine Einführung in die zentralen Fragestellungen und Hauptergebnisse der Theorie der Differentialinklusionen. Die allgemeinen Resultate werden zur Untersuchung anwendungsrelevanter Probleme, vorwiegend mit ökonomischem Hintergrund eingesetzt.

Kapitel 0 stellt spezielle funktionalanalytische Grundlagen bereit, z. B. Kompaktheitsargumente, die in Existenzbeweisen für Differentialinklusionen vorrangig verwendet werden. Kapitel 1 liefert Beispiele mengenwertiger Abbildungen (Multifunktionen) – z. B. mengenwertige Filippov-Erweiterung der unstetigen rechten Seite einer gewöhnlichen Differentialgleichung –, durch die wichtige Klassen von Differentialinklusionen definiert sind. Es werden benötigte Stetigkeitsbegriffe für Multifunktionen bereitgestellt sowie Aussagen über die Existenz von (punktwertigen) Auswahlfunktionen $f(x) \in F(x)$ mit vorgegebenen Eigenschaften (Michael, Kuratowski/Ryll-Nardzewski; stetige Auswahlfunktionen von minimaler Norm usw.). Diese Ergebnisse und ein zentraler Konvergenzsatz (Th. 1.4.1) werden in Kapitel 2, das der Existenztheorie gewidmet ist, zum Existenznachweis und zur Konstruktion von Lösungen mit bestimmten Eigenschaften (z. B. langsame Lösungen) benutzt. Hier findet man insbesondere für Differentialinklusionen mit konvexwertiger, oberhalbstetiger rechter Seite F den Existenzsatz von Plis und Castaining (Th. 2.1.3) sowie zentrale Aussagen der qualitativen Theorie, die entsprechende Aussagen für gewöhnliche Differentialgleichungen verallgemeinern, z. B. die oberhalbstetige Abhängigkeit der Lösungsmenge von den Anfangswerten und deren Kompaktheit im Raum der stetigen Funktionen. Es wird die Existenz von Lösungen bei nichtkonvexwertiger, jedoch stetiger rechter Seite (Th. 2.3.1) bewiesen und die Beziehung der Lösungsmenge zur Lösungsmenge der Differentialinklusion hergestellt, die man durch Übergang zur konvexen Hülle $\operatorname{conv} F(t, x)$ in der rechten Seite erhält (Relaxationstheorem 2.4.2 für lipschitzstetige F).

Differentialinklusionen $x'(t) \in -A(x(t))$ mit einer maximal monotonen Multifunktion $A: X \to 2^X$ auf einem Hilbertraum X sind Gegenstand des 3. Kapitels. Ihre Besonderheit besteht darin, daß über die Existenz hinaus auch die Einzigkeit der Lösung gezeigt werden kann (Th. 3.2.1). Die allgemeinen Ergebnisse werden auf Gradienteninklusionen $x' \in -\partial V(x)$ mit unterhalbstetigem, konvexem Funktional V und speziell auf Optimierungsprobleme mit Restriktionen sowie Vektoroptimierungsprobleme angewandt.

Kapitel 4 und 5 behandeln ein neues Gebiet der Theorie, das wesentlich durch Aubin und sein Umfeld bestimmt ist, nämlich Differentialinklusionen unter Nebenbedingungen („Viability"-Theorie). Gesucht sind hier sogenannte „lebensfähige" (-viable) Lösungen von $x' \in F(x)$, die ausgehend von einem Anfangswert x_0 aus einer abgeschlossenen Menge $K \subset R^n$ diese im weiteren nicht mehr verlassen. Im 4. Kapitel werden notwendige und hinreichende Bedingungen (Tangentialbedingungen) für die Existenz „lebensfähiger" Lösungen bei konvex- und nichtkonvexwertigen Differentialinklusionen angegeben. Allgemeiner wird die Existenz von monotonen Lösungen nachgewiesen, wobei die Monotonie im Sinne einer auf der Menge K gegebenen Halbordnung zu verstehen ist. Interpretiert man diese Halbordnung aus ökonomischer Sicht als Präferenzrelation, dann charakterisiert eine monotone Lösung ein dynamisches Verhalten, das mit fortschreitender Zeit eine Zustandsverbesserung im Sinne dieser Relation anstrebt. Damit wird eine sinnvolle, ökonomische Auswahlstrategie vorgeschlagen, die i. a. verschieden ist von der geläufigen Optimalstrategie. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Menge K konvex ist, werden diese Ergebnisse in Kapitel 5 wesentlich verschärft. So impliziert z. B. die für die Existenz einer „lebensfähigen" Lösung hinreichende Tangentialbedingung die Existenz einer stationären Lösung $\bar{x} \in K$, $O \in F(\bar{x})$. Weitere Anwendungen auf die Regelung ökonomischer Systeme (Steuerungssysteme mit Rückkopplung, spieltheoretische Modelle) werden angegeben. Ein dynamisches Modell des Verbraucherverhaltens, das im Sinne von Walras durch ein dezentrales Preissystem reguliert wird sowie die Existenz von „lebensfähigen" und stationären Lösungen bei logistischen Gleichungen bzw. Inklusionen (Verhust-Pearl, Lotka) bilden weitere Beispiele für die Nützlichkeit des Viability-Konzepts. – Kapitel 6 liefert Verallgemeinerungen von Ergebnissen der klassischen Ljapunov-Theorie auf Differentialinklusionen.

Insgesamt erscheint die Monographie von Aubin und Cellina gut geeignet für einen funktionalanalytisch vorgebildeten Leser zum Einstieg in diese neue, sowohl mathematisch als auch bzgl. der sehr breiten Anwendungsmöglichkeiten attraktive Forschungsrichtung. Für den an ökonomischen Anwendungen interessierten Leser liefert die Monographie darüberhinaus vielfältige, mathematisch sauber begründete Anregungen. Wünschenswert, im Sinne einer Einführung wären weitere Hinweise auf technisch-naturwissenschaftliche Anwendungen gewesen, z. B. bei nichtlinearen dynamischen Systemen, Systemen mit variabler Struktur, technischen Steuerungs- und Regelungsvorgängen. Derartige Hinweise erhält man z. B. in dem Buch von A. F. Filippov: Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite, Moskau 1985 (russ.).

Berlin H.-D. Niepage

Mañé, R., Ergodic Theory and Differentiable Dynamics, transl. from the Portuguese by S. Levy (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Vol. 8), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1987, 32 figs., 317 pp., Hardcover, DM 148,–

Man kann sicherlich nicht erwarten, daß ein Buch von 300 Seiten zwei so unterschiedliche Gebiete wie Ergodentheorie und differenzierbare Dynamik auch nur annähernd vollständig behandeln kann. Das ist vom Autor auch nicht beabsichtigt. Vielmehr ist es sein Ziel zu erläutern, welche Bedeutung Ergodentheorie für differenzierbare dynamische Systeme seit den ersten bahnbrechenden Arbeiten von Hedlund und Hopf vor 50 Jahren gewonnen hat. Und so wird der Schwerpunkt auf die Darstellung von Ergodentheorie gelegt, soweit sie Anwendungen in differenzierbarer Dynamik besitzt.

Das erste Kapitel behandelt recht ausführlich eine ganze Reihe klassischer dynamischer Systeme, wie z. B. volumen-erhaltende Flüsse und Diffeomorphismen (Hamiltonsche Systeme, Billiard), continued fractions, topologische Gruppen, Schiebungen. Ferner wird hier auch die Kryloff-Bogliouboff-Theorie über die Existenz invarianter Maße angerissen und ein kurzer Einblick in die Ornsteinsche Isomorphietheorie gegeben.

Im zweiten Kapitel wird die klassische Ergodentheorie entwickelt, wie man sie in jedem Standardbuch über Ergodentheorie in ausführlicher Form wiederfindet.

Expandierende Abbildungen und Anosov-Diffeomorphismen behandelt das dritte Kapitel. Zu beachten ist hierbei, daß die Bezeichnung „expandierend" stark von der üblichen Bedeutung abweicht, und zwar so, daß die Existenz absolut stetiger invarianter Maße stets gesichert ist. Dies ist eine nützliche Formulierung der Standardmethode zum Existenzbeweis dieser Maße. Die Analysis lokaler stabiler Mannigfaltigkeiten für Anosov-Diffeomorphismen nimmt den Hauptteil dieses Kapitels in Anspruch. Insbesonders wird Sinais Satz über die Lebesgue-fast-überall-Konvergenz der Ergodenmittel bewiesen.

Das letzte Kapitel schließlich bringt zunächst eine Einführung in die Entropietheorie, maßtheoretisch und topologisch. Im weiteren werden einige Sätze bewiesen, die sich kaum in anderen Büchern wiederfinden: Hier sind der Existenzsatz über Maße maximaler Entropie für Axiom-A-Homöomorphismen (modulo der Existenz von Markoff-Zerlegungen) von Bowen, der Satz von Oseledec, Pesins Formel und die Brin-Katok-Formel über lokale Entropie zu nennen. Erfreulicherweise sind die Beweise hierzu vollständig angegeben.

Eine ganze Reihe von tieferliegenden Resultaten sind in dem vorliegenden Buch ohne Beweis erwähnt, wie etwa der Satz von Kolmogoroff, Arnold und Moser, um ein Beispiel zu nennen. Der Leser erhält damit genügend Hinweise für ein weiteres Studium. Obwohl das vorliegende Buch sehr reichhaltig ist, sind mir doch einige wichtige Gebiete aufgefallen, die nicht besprochen werden, z. B. Anosov-Flüsse, insbesondere geodätische Flüsse, Abramovs Formel, Druckfunktion, die Theorie der Gibbsmaße, Zeta-Funktion, Hausdorffmaße. Der Leser sollte davor gewarnt sein, daß das Buch einige gravierende Druckfehler, nicht korrekt geführte Beweise bzw. Formulierungen enthält. Die Beweisführung könnte außerdem in manchen Punkten gestrafft werden, vor allem wegen der ausführlichen Darstellung der maßtheoretischen Aspekte, die mit einem Überblick in Maßtheorie in Kapitel 0 beginnt. Es sollte ferner nicht unerwähnt bleiben, daß Referenzen zu den einzelnen Sätzen zum Teil nicht gegeben werden.

Das vorliegende Buch ist durchaus empfehlenswert, um einen Eindruck von dem Zusammenspiel von Ergodentheorie und differenzierbarer Dynamik zu gewinnen. Es eignet sich auch vorzüglich als Vorlage zu einer Vorlesung, da es schließlich aus einer solchen entstanden ist. Für „Spezialisten" sind sicherlich einige Teile des Buches wertvoll.

Göttingen M. Denker

Dieudonné, J., Grundzüge der modernen Analysis, Band 9 (Eléments d'Analyse, Tome IX, dt.), aus dem Französischen übersetzt von Horst Antelmann, Braunschweig: Vieweg 1987, 380 S., geb., DM 98,–

Nimmt man ein neues Buch in die Hand, vielleicht vom Titel angelockt, der etwas Vertrautes andeutet, oder auch etwas ganz Unbekanntes: Was das wohl ist? – so erwartet man, oder hofft doch leise auf etwas Überraschendes, Anregung, einen neuen Blick oder neuen Schwung, auch in dieses Gebiet hineinzufinden. Und man löst die am Schnitt noch etwas aneinander haftenden Seiten, blättert hier und da, schaut nach Figuren, nach Bemerkungen, und wie oft, wenn es auch bei flüchtigstem Hineinsehen bleibt, hat man doch gleich eine kleine versteckte Rosine entdeckt, einen Fingerzeig, vielleicht eine persönliche Anmerkung, oder auch mal wieder einen typischen Fehler. Ja, solcher Freuden muß man hier freilich entraten. Wem wird nicht etwas beklommen, wenn er auf dem Umschlag sieht: Band 9! Da wird auch mit einem vielstelligen Nummernsystem zurückverwiesen, als hätten wir die acht vorhergehenden immer gegenwärtig. Und wenn der Titel weiter sagt, es gehe um Grundzüge der Analysis, um Logik und Grundlagen – nun, wie man's nimmt. Jedenfalls handelt dieser Band von Homologie und Kohomologie.

Ein großes Gebiet wird hier durchgenommen: Beginnend mit der deRham-Kohomologie und ihrer Dualität, geht es über die Homologie der Ströme speziell zur singulären Homologie und Kohomologie. Die Kohomologie der Graßmann-Mannigfaltigkeiten wird berechnet, charakteristische Klassen eingeführt, es kommt der Weil-Homomorphismus, Hodge-Theorie und etwas über die Kohomologie Liescher Gruppen. Vieles also wird irgendwie gebracht, und andres auch wieder nicht, was näher gelegen hätte: den Brouwerschen Fixpunktsatz zum Beispiel, beliebt in seinen Abwandlungen bei Analytikern, hätte man hier doch erwartet.

Wenn man all dies schon kennt und bestens übersieht, so hat das Buch seinen großen Wert: Man kann einzelnes nachlesen, einen Beweis, ein Lemma, vielleicht auch, wie irgendeine Formel genau heißen muß. Versetzen wir uns aber in die Lage eines Studenten, der eben erst erfahren will, was Algebraische Topologie ist, worum es da geht, und wo es hinaussoll! Ja, der wird wohl aus der anfänglichen Beklommenheit bald in Verzweiflung fallen, und wenn er die Algebraische Topologie nach dieser Darstellung beurteilt, so muß sie ihm als ein überaus trockenes und technisches Gebiet erscheinen. Es ist schon etwas wunderlich, wenn man ein dickes Buch über Algebraische Topologie liest, in dem das Wort Funktor – und eben auch die Sache – nie vorkommt. Man erfährt nicht, daß es eine Homotopiekategorie gibt, oder gar die stabile Homotopiekategorie. Es gibt keine natürliche Transformation, keine universelle Eigenschaft, keine Kettenhomotopie, keinen Abbildungskegel, die Einhängung nur in einer Aufgabe. Das 30 Jahre alte Buch von Godement über Garbentheorie, obwohl auch von einem Analytiker, und auch im französischen Stil geschrieben, ist von aufregender Modernität, verglichen mit diesem Band, aus dem nur Mühsal und Arbeit spricht. Man ist überrascht, wie undurchdringlich die Erklärung des Tensorprodukts mit einem freien Faktor werden kann (S. 343 f.). Jeder aufklärende Hinweis, jedes ordnende Wort wird geflissentlich vermieden: Zum Beispiel erfahren wir nicht, daß die Kohomologie einer Lieschen Gruppe eine Hopfalgebra ist; die innere Symmetrie, die Dualität z. B. von Multiplikation und Komultiplikation, wird nicht erwähnt und kann auch nicht sichtbar werden, weil eben die kategorielle Sprache verpönt ist. Natürlich gibt es auch keine Figur. Und Motivation, Ziel und Zweck? – „Im weiteren benötigen wir einige Hilfssätze ...", mehr wird da nicht geboten: Der Verfasser benötigt – aber der Leser?

Regensburg

Th. Bröcker

Rybakowski, K., The Homotopy Index and Partial Differential Equations (Universitätstext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1987, 208 pp., Soft cover, DM 69,–

In seinem originellen Büchlein „Isolated invariant sets and the Morse index" (CMBS number 38, 1978) hat der 1984 verstorbene Mathematiker Charles Conley neue Begriffe, Ideen und Methoden topologischer Art eingeführt, welche für die qualitative Beschreibung nichtlinearer Differentialgleichungen von grundlegender Bedeutung sind. Von der Idee ausgehend, daß nur unter Störungen stabile Phänomene sichtbar sind, hat er u. a. den Begriff einer isolierten, unter einem topologischen Fluß invarianten Menge eingeführt, Beispiele sind etwa hyperbolische Teilsysteme. Einer solchen Menge S hat er einen Index h(S) zugeordnet, welcher in natürlicher Weise durch das Verhalten des Flusses in einer Umgebung von S bestimmt ist. Dieser Index ist nicht eine Zahl, sondern der Homotopietyp eines kompakten topologischen Raumes mit einem ausgezeichneten Punkt. Ist z. B. S ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt, so ist h(S) der Homotopietyp der gepunkteten Sphäre der Dimension m, wo m die Dimension der Eigenräume des in S linearisierten Vektorfeldes zu positivem Realteil ist. Die wichtigste Eigenschaft des Index ist die Tatsache, daß für ihn ein Fortsetzungssatz gilt, ähnlich etwa dem Fortsetzungssatz für den Leray-Schauder-Abbildungsgrad. Bilden überdies die invarianten Teilsysteme $\{M_j\}$ eine Morsezerlegung von S, so sind die globalen algebraischen Invarianten von h(S) mit den lokal Invarianten von $h(M_j)$ durch eine Morsegleichung verknüpft. Die Conley-Index-Theorie kann also insbesondere auch als Verallgemeinerung der Morse-Theorie angesehen werden, nämlich auf Flüsse, die nicht notwendigerweise Gradientenflüsse sind, mit Morsezerlegungen, deren Teilsysteme nicht notwendigerweise Gleichgewichtspunkte sind. Dank seiner Fortsetzungseigenschaft ist die Theorie ein sehr hilfreiches Instrument für Differentialgleichungen, mit Anwendungen z. B. auf Bifurkationsprobleme, globale Existenz periodischer Lösungen, Existenz von „travelling waves". Für eine neue Darstellung der Theorie sei auf D. Salmons Arbeit „Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets", TAMS 291 (1985) 1–41 verwiesen.

Conley hat seine Index-Theorie im Rahmen von topologischen Flüssen auf lokalkompakten Räumen dargestellt. Sie ist deshalb nicht direkt anwendbar auf Flüsse in unendlichdimensionalen Räumen, wie sie z. B. von partiellen Differentialgleichungen erzeugt werden. Gerade hier liegt nun der wesentliche Beitrag des vorliegenden Buches. Aufbauend auf eigenen Originalarbeiten stellt K. Rybakowski seine Erweiterung der Conley-Indextheorie auf Halbflüsse (nicht nur Flüsse) in allgemeinen metrischen Räumen dar. Die für die eine Indextheorie notwendigen Kompaktheitsannahmen sind im vorliegenden Buch durch die Anwendungen auf parabolische partielle Differentialgleichungen motiviert.

Im ersten Kapitel wird die technisch komplizierte Definition des Homotopie-Index entwickelt, seine Invarianz- und Fortsetzungseigenschaften bewiesen. Hier werden auch die Rechenregeln für den Index zusammengestellt. Das zweite Kapitel behandelt Anwendungen insbesondere auf partielle Differentialgleichungen. So wird z. B. der Index für die Menge der beschränkten Lösungen von asymptotisch linearen parabolischen Differentialgleichungen ausgerechnet, und im Falle der Gradientenstruktur zu Existenzsätzen nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme benützt. Die Existenz von heteroklinischen Bahnen wird bewiesen. Auch wird eine sehr nützliche allgemeine Indexformel im Zusammenhang mit Zentrumsmannigfaltigkeiten bewiesen. An Beispielen wird illustriert, daß der Conley-Index naturgemäß mehr Informationen enthält als die üblicherweise benutzten Euler-Charakteristik-Indices. Das dritte Kapitel behandelt die innere Struktur invarianter Mengen. Hier wird eine allgemeine Morsegleichung bewiesen, und mit der von Morse ursprünglich konzipierten Morse-Theorie verglichen. Auch der Zusammenhang der Kompaktheitsannahme mit der Palais-Smale-Bedingung für Gradientensysteme wird untersucht.

Das interessante, originelle und nützliche Buch von K. Rybakowski ist sehr sorgfältig geschrieben. Die aus der algebraischen Topologie und aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen benötigten Hilfsmittel werden präzise zitiert. Das Buch illustriert sehr schön den Nutzen der Kombination von topologischen und analytischen Argumenten in der Behandlung qualitativer Phänomene nichtlinearer Differentialgleichungen. Der Leser wartet mit Freude auf den angetönten zweiten Band, wo vielleicht auch die „connection-matrix-theory" von Conley im allgemeineren Rahmen dargestellt werden wird.

Zürich E. Zehnder

Camacho, C., Neto, A. L., Geometric Theory of Foliations, from the Portug. by Goodman, S. E., Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1985, 205 pp., 76 fig., Pappband, DM 98,–

Wäre das Buch vor 1969 geschrieben worden, wäre das Adjektiv „Geometric" im Titel wahrscheinlich entfallen. Erst seit der Entdeckung des klassifizierenden Raumes für Haefligerstrukturen und der Übersetzung der Konkordanzklassifikation von Blätterungen in homotopietheoretische Fragen durch Thurston (dessen Beweise allerdings höchst geometrisch sind und ohne ein großes geometrisches Anschauungsvermögen gar nicht verstanden werden können) spricht man von einer „nicht geometrischen", der sogenannten quantitativen Theorie der Blätterungen. Außer Fragen, die mit homotopietheoretischen Methoden bearbeitet werden, zählt man auch die Theorie der sekundären charakteristischen Klassen (zumindest den mehr abstrakten Teil davon) dazu.

Kurz und gut das Buch ist eine Einführung in die Theorie der Blätterungen und eine ausgezeichnete. Das Vorgehen der beiden Autoren ist exemplarisch. Anhand von vollständigen Beweisen einiger der schönsten und wichtigsten Ergebnisse der Theorie wird der Leser mit den Konzepten vertraut gemacht und lernt das Handwerkszeug kennen, mit dem diese Ergebnisse erzielt wurden. In Anmerkungen zu den einzelnen Kapiteln wird auf weiterführende Entwicklungen hingewiesen, ergänzende Ergebnisse zum Teil ausführlich dargestellt, meist aber skizziert. Auf diese Weise erhält man einen fast vollständigen Überblick über die Theorie bis zum Jahr 1965 zusammen mit einer Reihe von Ausblicken auf neuere Ergebnisse.

Das erste Kapitel enthält eine Zusammenstellung der Begriffe und Ergebnisse aus der Differentialtopologie, die im Text benötigt werden. Hier wird im wesentlichen auf Beweise verzichtet. Es folgen im zweiten Kapitel die grundlegenden Definitionen, die durch viele Beispiele erläutert werden, darunter die Reeb-Blätterung auf S^3 und Blätterungen, deren Blätter die Orbits von Gruppenoperationen sind. Die Beziehung zwischen Blätterungen und vollständig integrierbaren Ebenenfeldern wird erläutert, der Beweis einer C^1-Version des Satzes von Frobenius, der diese Beziehung herstellt, wird im Anhang des Buches dargestellt. Das dritte Kapitel ist kurz. Ausgehend von dem Satz, daß der Schnitt eines Blattes mit irgendwelchen Transversalen lokal immer gleich aussieht, erhält man die drei Alternativen für ein Blatt: es ist entweder eingebettet, lokal dicht oder transversal eine perfekte Menge ohne Inneres. Entsprechend erhält man die drei Typen von Minimalmengen. Der Anhang zu diesem Kapitel enthält einige Ausführungen über

Blätterungen der Ebene und eine ausführliche Beschreibung von Denjoys Beispiel einer exzeptionellen Minimalmenge einer Kodimension-1-Blätterung des 2-dimensionalen Torus.

Mit dem vierten Kapitel wird der erste Höhepunkt der Theorie erreicht. Nach der geometrischen Beschreibung der Holonomie eines Blattes wird zunächst Haefligers Ergebnis bewiesen, daß die Blätterung in einer Umgebung eines kompakten Blattes durch die Holonomie festgelegt wird. Es folgen Beweise des lokalen und globalen Stabilitätssatzes von G. Reeb. Im Anhang werden Blätterungen, die durch geschlossene 1-Formen definiert werden, und Singularitäten vollständig integrierbarer 1-Formen angesprochen. Singuläre Blätterungen sind besonders im komplexen Bereich von großem Interesse. Mit dem fünften Kapitel wird die Einführung der grundlegenden Begriffe abgeschlossen. Es behandelt Blätterungen die transversal zu den Fasern eines Faserbündels sind. Diese werden durch einen Homomorphismus π_1(Basis) $\rightarrow$ Diffeomorphismen(Faser) bis auf Äquivalenz definiert und ergeben eine der reichsten Quellen zur Konstruktion von Blätterungen. Als Beispiel wird die Konstruktion von Sacksteder einer C^∞-Blätterung der Kodimension 1 mit exzeptioneller Minimalmenge angegeben. Der Anhang gibt neben einer Anwendung auf die Riccati-Gleichung eine ganz wichtige Verallgemeinerung des Satzes von Denjoy durch Sacksteder. Dies ist einer der Ausgangspunkte zum globalen Studium der Kodimension-1-Blätterungen. Hier wird allerdings nur kurz der Satz angegeben. Weiter wird ziemlich ausführlich ein Beispiel einer Blätterung des $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1$ von Hector beschrieben, dessen Blätter alle dicht sind und transversal zu den $\mathbf{R}^1$-Faktoren.

Die letzten drei Kapitel betreffen jeweils ein zentrales Ergebnis der Theorie. Im sechsten wird Haefligers Beweis der Nichtexistenz analytischer Blätterungen der Kodimension 1 auf Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe gegeben. Das siebte behandelt wohl eines der schönsten Ergebnisse der Theorie: Novikovs Beweis, daß jede Kodimension-1-Blätterung einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe eine Reeb-Komponente enthält. Gerade beim Lesen dieser Kapitel genießt man mit viel Freude die wunderschönen, sehr instruktiven Zeichnungen, die ganz wesentlich beim Verständnis der Beweise helfen. Schließlich wird im achten Kapitel der Rangsatz für die 3-Sphäre von E. Lima bewiesen. (Mit Hilfe des Satzes von Novikov geht das sehr schnell.) Verallgemeinerungen des Rangsatzes für lokal freie Operationen einfach zusammenhängender Lie-Gruppen werden behandelt, der Poincaré-Bendixson Satz für $\mathbf{R}^2$-Operationen bewiesen, und es wird ein Beispiel einer lokal freien Operation der Gruppe der affinen Abbildungen von $\mathbf{R}$ auf einer 3-Mannigfaltigkeit beschrieben, die zeigt, daß ein Poincaré-Bendixson-Satz für diese Operation nicht gilt.

Es wird also auf recht wenig Seiten sehr viel geboten. Und doch ist die Darstellung auf keinen Fall zu knapp, meines Erachtens für Studenten nach dem Vordiplom durchaus verständlich, und der Text ist mit vielen Beispielen und erfreulich vielen Bildern aufgelockert. Den Autoren gelingt die Bewältigung des Stoffs auf kleinem Raum, indem sie auf größere Allgemeinheit der Ergebnisse zugunsten der Darstellung der wichtigen Ideen und Methoden verzichten.

Wer eine schnelle und doch gründliche Einführung in die Theorie der Blätterungen sucht, der sollte dieses Buch unbedingt lesen.

Berlin E. Vogt

Brauner, H., Lehrbuch der konstruktiven Geometrie, Wien – New York: Springer-Verlag 1986, 409 Abb., 384 S., gebunden, DM 80,–

Das Werk stellt einen Meilenstein dar für das im Titel genannte Gebiet, welches nach E. Kruppa als eine Methode und Denkweise der Geometrie verstanden wird, die ein geometrisches Objekt des Anschauungsraums nicht nur darstellt, sondern durch Konstruktion und Rechnung dessen Metrik und Struktur erschließt. Das Buch setzt die große österreichische Tradition der Geometrie fort und geht zugleich weit darüber hinaus: Zum einen werden den konstruktiven

Verfahren analytische Methoden zur Seite gestellt, was sowohl zum besseren Verständnis beiträgt als auch eine Brücke zur automatischen Bilderzeugung schlägt (wenn auch letztere selbst nicht zu den Zielen gehört).

Zum zweiten ist das Repertoire geometrischer Objekte nicht auf Polyeder und wenige quadratische Flächen samt ihren Schnitt- und Umrißkurven beschränkt, sondern ist auf weitaus allgemeinere Flächenklassen wie Dreh-, Schieb-, Schraub- und Regelflächen ausgedehnt; dies bringt es mit sich, daß differentialgeometrische Methoden zu ihrer konstruktiven und analytischen Behandlung herangezogen werden.

Der nach Meinung des Referenten wohl wichtigste Unterschied zu den Vorgängern liegt jedoch darin, daß die Gesetzmäßigkeiten und Verfahren der konstruktiven Geometrie aus den m a t h e m a t i s c h e n Eigenschaften der zugrundeliegenden linearen Abbildungen – bei der Zentralprojektion nach projektiver Erweiterung – heraus entwickelt werden, wobei der heute übliche Standard an Strenge und Klarheit der Begriffsbildungen eingehalten wird. Dies ist sicherlich keine leichte Aufgabe, da viele der üblichen Bezeichnungen von der Anschauung geprägt und vieldeutig sind, hingegen exaktere Ausdrucksweisen (wie z. B. „die Länge der halben Nebenachsenstrecke" statt „die kleine Halbachse" bei einer Ellipse) oft schwerfällig wirken. Daß dennoch das Werk nicht kopflastig ausfiel oder vom anschaulichen Bezug und den gängigen Bezeichnungsweisen entfremdet wurde, sondern der Stoff streng, klar und prägnant dargeboten wird, ist auch aus didaktischer Sicht eine Meisterleistung. Die Lehrer, an die sich das Buch ebenso wendet wie an Dozenten und Studenten der Geometrie, mögen sich hieran orientieren.

Die reiche Erfahrung des Verfassers spiegelt sich aber auch in der Auswahl der Anwendungsbeispiele wider. Sie sind außerordentlich instruktiv, praxisnah und die Figuren von hervorragender Qualität. Der ebenfalls angesprochene Leserkreis von Ingenieuren, die im Bereich der Konstruktion tätig sind, findet hierin vielfältiges und brauchbares Material sowie klare Auskunft, auch wenn das Buch nur als Nachschlagewerk benutzt wird.

Hinzufügen ist ein Wort über die Aufgaben: Alles andere als überflüssiges Beiwerk bieten sie tieferliegende Einsichten und viele reizvolle geometrische Zusammenhänge; sie sind oft auch für den Kenner ein Genuß. Wer sie alle mit Erfolg durchgearbeitet hat, darf sich getrost zu jenen zählen.

Stuttgart W. Degen

Scheja, G., Storch, U., Lehrbuch der Algebra (3 Bände) (Mathematische Leitfäden), Stuttgart: Teubner 1980–1988, Teil 1, 408 Seiten, kart., DM 48,–, Teil 2, 816 Seiten, kart., DM 68,–, Teil 3, 239 Seiten, kart., DM 28,–

Vielfach hört man die Meinung, daß es bereits zu viele Lehrbücher über Algebra gebe und daß deshalb für ein weiteres Buch kein wirklicher Bedarf bestehe. Obwohl ich erstere Ansicht weitgehend teile, scheint mir die genannte Folgerung nicht berechtigt zu sein. Dies möchte ich zunächst begründen, bevor es an die Besprechung der Inhalte geht.

Der Stand der Entwicklung der modernen Algebra bis in die 60er und 70er Jahre wird am umfassendsten durch die entsprechenden Bücher von Bourbaki dargestellt. Letztere sind aber zum direkten Gebrauch an deutschen Hochschulen vor allem in der Phase des Grundstudiums wenig geeignet, da der Stoff unter rein systematischen und damit weniger unter didaktischen Gesichtspunkten dargestellt wird. Hinzu kommt, daß das Übungsmaterial von Bourbaki überwiegend theoretisch ausgerichtet ist.

In den letzten zwei Jahrzehnten sind zahlreiche gute deutschsprachige Lehrbücher über Algebra erschienen, welche durch die Philosophie von Bourbaki inspiriert oder beeinflußt sind. Diese Bücher behandeln in der Regel nur Teilgebiete wie lineare oder multilineare Algebra, Gruppentheorie oder Körpertheorie, deren Behandlung entweder überwiegend in das Grundstudium oder überwiegend in das Hauptstudium fällt. Wohl keines dieser Bücher ist, wie das zu besprechende dreibändige Lehrbuch, zum durchgängigen Gebrauch für die gesamte Studienzeit gedacht.

Aus diesem Grund schließt das Buch von Scheja-Storch eine Lücke auf dem deutschsprachigen Markt. Es ist so aufgebaut, daß es gleich vom ersten Semester an als Grundlage für Vorlesungen über Lineare Algebra und die zugehörigen Übungen dienen kann. Genausogut ist es aber möglich, eine mittlere Vorlesung über Galoistheorie, Gruppentheorie, Zahlentheorie oder Kommutative Algebra mit dem in diesem Buch angebotenen Material zu bestreiten. Nun zum Inhalt:

In dem vorbereitenden ersten Kapitel findet sich auf ca. 40 Seiten alles, was ein Mathematiker über Mengenlehre wissen sollte: Nach Einführung des Mengen- und Abbildungsbegriffes wird die vollständige Induktion ausführlich besprochen. Es folgen die Äquivalenz- und Ordnungsrelationen. Man findet hier neben dem Zornschen Lemma und dem Prinzip der noetherschen Induktion auch die früher so beliebte transfinite Induktion. Den Abschluß bilden die Kardinalzahlen einschließlich des Bernsteinschen Äquivalenzsatzes und des Cantorschen Potenzmengensatzes.

Im zweiten Kapitel über Gruppen und Ringe werden zunächst allgemeine Verknüpfungen betrachtet. Es folgen Halbgruppen und Monoide sowie der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie einschließlich zahlreicher Anwendungen. Daran schließen Gruppen und Untergruppen an. Ausführlich werden dann die zyklischen Gruppen diskutiert. Als etwas hinderlich erweist es sich hier und im folgenden, daß der Homomorphiebegriff erst sehr viel später, nämlich in den Kapiteln IV und V eingeführt wird. Alles in allem scheint mir dieser didaktische Kunstgriff aber eine gute Wahl zu sein, da bei der puristischen Alternative zahlreiche Wiederholungen unvermeidlich wären. Nach den Untergruppen werden dann die Ringe eingeführt. Das Rechnen in diesen wird in lobenswerter Ausführlichkeit eingeübt. Schließlich werden nullteilerfreie Ringe und Divisionsbereiche definiert und die Struktur der Primringe untersucht.

Mit dem Kapitel III über Moduln und Algebren ist man dann bei einem Kernstück der Linearen Algebra angekommen. Nach Einführung von Moduln, Untermoduln und Idealen werden die linearen Gleichungssysteme mit der gebotenen Ausführlichkeit behandelt. Nahezu alles wird durch konkrete Beispiele untermauert. Sodann steht die Theorie der endlichdimensionalen Vektorräume im Mittelpunkt: Basen, Dimension, Austauschsatz und Dimensionsformel. Es wäre hierbei vielleicht gut gewesen, hätte man die geometrische Anschauung des Lesers durch einige Skizzen unterstützt. Es folgen Paragraphen über den Rang freier Moduln und über assoziative Algebren.

In Kapitel IV wird zunächst allgemein der Homomorphiebegriff eingeführt. Das beachtliche Beispielmaterial, welches mittlerweile zur Verfügung steht, verhindert, daß diese Dinge im Abstrakten steckenbleiben. Dadurch ist der Leser auch gut für die Behandlung der Restklassenbildung bei Gruppen und Ringen, die daran anschließt, vorbereitet. Im letzten Paragraphen werden Operationen von Monoiden und Gruppen behandelt.

In Kapitel V wird dann das Entsprechende für Moduln durchgeführt. Insbesondere werden hier die grundlegenden Sätze über lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen wie Rangsatz usw. behandelt. Auch das Lemma von Nakayama findet sich hier. Es folgen ein Paragraph über Ringe und Moduln mit Kettenbedingungen, in dem u. a. der Hilbertsche Basissatz bewiesen wird, sowie ein Abschnitt über direkte Summen. Daran schließt natürlich die Behandlung der Matrizen mit umfangreichem Beispiel- und Übungsmaterial an. Den Abschluß bilden Paragraphen über das Dualisieren und exakte Sequenzen sowie über affine Räume.

Im letzten Kapitel VI des ersten Bandes findet sich die Determinantentheorie, sorgfältig vorbereitet durch einen Abschnitt über die kanonische Zyklenzerlegung und das Signum von Permutationen. Die Determinante eines Endomorphismus eines endlichen freien Moduls wird mit alternierenden Multilinearformen eingeführt; der wohl zweifellos schönere Zugang über äußere Potenzen verbietet sich hier, da letztere noch nicht zur Verfügung stehen. Wie stets legen die Autoren großen Wert auf die matrizentheoretische Interpretation und rechnerische Beherrschung. Die üblichen Determinantensätze einschließlich der fundamentalen Eigenschaft der adjungierten Matrix werden vollständig abgeleitet. Es folgt die Cramersche Regel für Moduln mit dem Lemma von Dedekind als Korollar. Weiter werden die injektiven Endomorphismen durch ihre Determinante charakterisiert und eine allgemeine Version der Formel $|\mathrm{Kokern}\,(f)| = |A/A \cdot \mathrm{Det}(f)|$ bewiesen sowie Determinanten von Blockmatrizen betrachtet. Das Kapitel schließt mit einem Abschnitt über die Norm bei Algebren.

Das 220 Seiten lange Kapitel VII über Kommutative Algebra beginnt mit einem kurzen Abschnitt über die Nenneraufnahme. In umfassender Weise werden dann die Polynomringe abgehandelt. Hier findet man nahezu „alles", von den Resultanten, dem Fundamentalsatz der Algebra und den Kreisteilungspolynomen über den Hauptsatz für elementarsymmetrische Polynome und die Diskriminanten bis zu den Formeln von Cardano und Ferrari; letztere als Übungsaufgaben. Es folgen Paragraphen über endliche Algebren über Körpern und über den algebraischen Abschluß, in denen u. a. der Satz von Frobenius über endliche $\mathbf{R}$-Algebren und der Hilbertsche Nullstellensatz bewiesen werden. Daran schließt sich ein Abschnitt über Derivationen an, in dem die Autoren auch ausführlich auf die Nullstellen reeller Polynome eingehen. Sodann wenden sie sich der Primfaktorzerlegung zu. Nahezu alles, was elementar, d. h. ohne Divisorenklassengruppen, formuliert werden kann, findet sich in den entsprechenden Paragraphen: Von der Partialbruchzerlegung in Hauptidealbereichen über die quadratischen Zahlbereiche bis zu den Sätzen von Gauß und Klein-Nagata. In § 61 werden dann Moduln über Hauptidealbereichen untersucht; für den Struktursatz werden gleich zwei Beweise angeboten. Endlich betrachten die Autoren in den letzten beiden Abschnitten graduierte Ringe und Moduln sowie formale Potenzreihenringe.

In Kapitel VIII wird die Theorie der linearen Operatoren dargestellt, beginnend mit Paragraphen über charakteristische Polynome und Minimalpolynome. Dann wird die Primärzerlegung linearer Operatoren behandelt und auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten angewendet. In den darauffolgenden Abschnitten geht es um trigonalisierbare und diagonalisierbare Operatoren sowie die Jordansche Normalform. Bei der kanonischen Zerlegung beschränken sich die Autoren auf trigonalisierbare Operatoren. Der allgemeinere Fall von separablen Operatoren wird erst in Kapitel XI im Rahmen der Jordan-Chevalley-Zerlegung in Algebren behandelt. Schließlich gehen die Autoren noch auf Besonderheiten ein, die sich bei endlichen freien Algebren ergeben.

Das 212 Seiten lange Kapitel IX ist der Dualität gewidmet. In den ersten Abschnitten, die von Sesquilinearformen handeln, wird außer den üblichen Sätzen auch der Satz von Witt und der Dualitätssatz für endliche abelsche Gruppen bewiesen. Es folgen Räume mit Skalarprodukten und Orientierungen. Einen gewissen Höhepunkt bildet der Paragraph über Isometrien, der in der Klassifikation der Konjugationsklassen der endlichen Bewegungsgruppen von zwei- und dreidimensionalen euklidischen affinen Räumen gipfelt. Daran schließen sich ein Abschnitt über normierte Vektorräume sowie ein Paragraph über Volumenmessung an, in dem sich auch Beweise für den Satz von Hermite-Minkowski und den Dirichletschen Einheitensatz finden. Den Abschluß bilden Abschnitte über adjungierte und normale Operatoren. Der Spektralsatz wird nicht nur für den endlichdimensionalen Fall, sondern allgemeiner für kompakte normale Operatoren auf Hilberträumen bewiesen.

Das Kapitel X über Multilineare Algebra lehnt sich etwas enger als die übrigen Kapitel an die Darstellung von Bourbaki an, ohne indes zu einer Sammlung kanonischer Homomorphismen zu werden. Der „antikommutative" Standpunkt, der sich unter anderem aufgrund der raschen Entwicklung der „Supermathematik" mehr und mehr durchsetzt, wird noch nicht völlig antizipiert. Ich würde mir wünschen, daß dieser neue Aspekt hier und an anderen Stellen bei möglichen Neuauflagen stärkere Berücksichtigung findet.

Den Abschluß von Band 2 bildet das Kapitel XI über algebraische Erweiterungen, in dem neben vielen anderen Dingen auch die klassische Galoistheorie dargestellt wird, einschließlich Hilberts Theorem 90.

Der dritte Band enthält Ergänzungen zu den einzelnen Kapiteln von Band 1. Dies reicht von den Untermonoiden von $\mathbf{Z}$, den Sätzen von Sylow und Nielsen-Schreier über die projektiven und injektiven Moduln bis zur projektiven Geometrie und den speziellen linearen Gruppen, mit zugehörigem Übungsmaterial. Es wäre inhaltlich sinnvoller, diese wichtigen Dinge in den ersten Band zu integrieren.

Ein Glanzstück des Buches stellen die ca. 2100 Übungsaufgaben dar, die sich jeweils an die einzelnen Paragraphen anschließen. Das Angebot reicht von einfachen Aufgaben, mit denen die kalkülmäßige Beherrschung des Stoffes eingeübt werden kann, über einfachere Aufgaben mehr theoretischer Art bis zu anspruchsvollen Aufgaben, die auch dem Kenner noch Neues bieten bzw. ihn herausfordern. Die Zusammenstellung dieses riesigen Übungsmaterials hat die Autoren sicherlich immense Mühe gekostet. Ich meine, daß hierin das Buch von Bourbaki in fast jeder Hinsicht übertroffen wird. Andererseits scheint mir, daß die Übungen besonders im zweiten Band gelegentlich zu viel Raum einnehmen. Man hätte vielleicht besser daran getan, einige wichtige Dinge in den regulären Text zu übernehmen. Als Beispiele seien hier die Bestimmung der Einheiten und Nullteiler in Polynomringen sowie die Fitting-Ideale genannt.

In dem Bemühen, Grundlagen für möglichst viele Veranstaltungen anzubieten und auch hier noch verschiedene Zugänge offen zu halten, konnten die Autoren den systematischen Aspekt nicht immer in den Vordergrund stellen. Dies kann für den Lernenden bekanntlich durchaus von Vorteil sein, bewirkt aber zusammen mit der Fülle des angebotenen Materials gelegentlich eine gewisse Unübersichtlichkeit. Eventuell ließe sich hier bei zukünftigen Auflagen noch einiges verbessern.

Die optische Gestaltung der drei Bände ist etwas inhomogen: Während der erste Band auf klassische Weise gesetzt ist, wurde der zweite Band zunächst mit dem System TEX gesetzt und anschließend vervielfältigt. Der Reproduktionsvorgang hatte offenbar eine gewisse Verminderung der Qualität des Schriftbildes zur Folge. Schließlich ist der dritte Band mit einer Schreibmaschinenvorlage hergestellt worden. Es wäre wünschenswert, wenn der Verlag bei zukünftigen Auflagen hier eine Verbesserung vornehmen könnte.

Die Anzahl der Druckfehler ist erfreulich klein. Die Benutzung wird durch ein umfangreiches Sach- und Symbolverzeichnis erleichtert. Weil auch der Preis erstaunlich günstig ist, steht einer weiten Verbreitung dieses Werkes hoffentlich nichts mehr im Wege.

Regensburg J. Bingener

Hecke, E., Analysis und Zahlentheorie, Vorlesung Hamburg 1920, bearbeitet von P. Roquette (Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 3), Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg 1987, xxviii, 234 S., gebunden, DM 48,– (für DMW-Mitglieder DM 37,80)

Im Jahre 1920 begann E. Hecke seine Lehrtätigkeit an der Universität Hamburg mit einer Vorlesung „Anwendung der Analysis auf die Zahlentheorie“. Aufzeichnungen dieser Vorlesung kamen durch B. Schoeneberg in die Hand von P. Roquette, welcher sie in die hier vorliegende Form brachte. Wegen der zunehmenden Bedeutung, welche analytische Methoden im allgemeinen und den Heckeschen Arbeiten im besonderen in der aktuellen algebraisch-zahlentheoretischen Forschung zukommt, ist die Aufnahme dieser Heckeschen Vorlesung in die Reihe „Dokumente zur Geschichte der Mathematik“ sehr zu begrüßen.

Nach einer einleitenden Zusammenstellung der Grundbegriffe über algebraische Zahlkörper folgen drei Hauptkapitel: I. Die Rolle der Exponentialfunktion in der Arithmetik; II. Die elliptischen Modulfunktionen in der Arithmetik; III. Die klassische Theorie der Dedekindschen Zetafunktion und die Bestimmung der Klassenzahl.

Kapitel I enthält die Theorie der Kreisteilungskörper und ihrer Teilkörper (Zerlegungsgesetze, Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms, Einheiten). Der Beweis des Satzes von Kronecker-Weber (jeder absolut-abelsche Zahlkörper ist Teilkörper eines Kreiskörpers) wird skizziert, es folgt eine ausführliche Diskussion primzyklischer Zahlkörper, ihrer Kummererzeugung, der Lagrangeschen Wurzelzahlen und der Annulation von Idealklassen. Ein Ausblick auf die Reziprozitätsgesetze für höhere Potenzreste beschließt das Kapitel.

Kapitel II beginnt mit der Theorie der Relativkörper und führt bis zu den Hauptsätzen der komplexen Multiplikation für Ringklassenkörper (Irreduzibilität der Klassengleichung, Zerlegungsgesetze für zur Diskriminante teilerfremde Primideale). Die dafür nötigen funktionentheoretischen Grundlagen werden in knapper Form referiert. Der Zusammenhang zwischen quadratischen Formen, Ringidealen und quadratischen Irrationalitäten wird genau dargestellt.

Kapitel III beginnt mit der Theorie der Dedekindschen Zetafunktion und der Herleitung der analytischen Klassenzahlformel. Nach einem Exkurs über Gruppencharaktere und Dirichletsche L-Funktionen wird die Klassenzahlformel in drei wichtigen Fällen weiter diskutiert: für quadratische Zahlkörper, für Einheitswurzelkörper von Primzahlordnung und für Ringklassenkörper, letzteres unter Verwendung der Kroneckerschen Grenzformel. Ein Ausblick auf ein Analogon zur komplexen Multiplikation für reellquadratische Zahlkörper beschließt die Vorlesung.

Der Herausgeber hat bewußt auf eine lehrbuchmäßige Glättung des Manuskripts verzichtet, so daß der unmittelbare Charakter einer Vorlesung erhalten geblieben ist: manche einfache Hilfsmittel werden unterwegs ad hoc entwickelt; in vielen Fällen wird ein Spezialfall im Detail untersucht und durchgerechnet, während die allgemeine Linie nur skizziert wird.

Abgesehen vom historischen Wert dieser Vorlesungen als Dokument Heckeschen Vorlesungsstils ist es wegen ihrer Lebendigkeit ein Genuß, sie zu lesen.

Graz F. Halter-Koch

Casson-Noguès, Ph., Taylor, M. J., Elliptic Functions and Rings of Integers, Basel – Boston – Stutthart: Birkhäuser-Verlag 1986, appr. 208 pp., Hardcover, DM 70,–

Gegenstand des vorliegenden Buches ist die Beschreibung der Ganzheitsringe in abelschen Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörper durch Modulfunktionen und elliptische Funktionen.

Als Vorbild dienen die in der Kreiskörpertheorie bekannten Erzeugungen

$$O_f = \mathbf{Z}[\zeta] \qquad O_f^+ = \mathbf{Z}[\zeta + \zeta^{-1}], \qquad \zeta = \exp(2\pi i/f)$$

der Hauptordnungen im f-ten Kreiskörper, $f \in \mathbf{N}$, und seinem maximal reellen Teilkörper. Insbesondere orientieren sich die Verfasser an den Ergebnissen von Leopoldt und Speiser über die Galoismodulstruktur von O_f, sowie an der in Kap. I dieses Buches bewiesenen Tatsache, daß für $f = mr$, m/r

$$O_f = M \cdot \frac{\zeta^m - 1}{\zeta - 1}$$

gilt, wobei M die Maximalordnung in $\mathbf{Q}(\zeta^m)[\Gamma]$, $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}(\zeta^m))$, bedeutet.

Das Aufdecken eines Analogons dieser expliziten Aussagen für die Ganzheitsringe abelscher Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörper sowie eine geschlossene Darstellung der hierzu benötigten Mittel ist das Hauptanliegen dieses Buches.

Während das Problem der expliziten Potenzganzheitsbasen verhältnismäßig einfach und für eine recht große Körperklasse bewältigt wird, benötigt die Untersuchung der Galoismodulstruktur erheblich mehr Aufwand und führt auch nur für eine verhältnismäßig spezielle Körperklasse zu einem Ergebnis.

Zentral für alle expliziten Konstruktionen ist die von Fueter mittels der Weierstraßschen $\wp$-Funktionen eines komplexen Gitters Ω und einem $\psi \in 1/4\,\Omega - 1/2\,\Omega$ definierte elliptische Funktion

$$T_\Omega(z) = \frac{\wp(\psi/\Omega) - \wp(2\psi/\Omega)}{\wp(z/\Omega) - \wp(2\psi/\Omega)},$$

deren singuläre Werte das Analogon der Einheitswurzeln darstellen. Sei dazu f ein ganzes Ideal in einem imaginär-quadratischen Zahlkörper K und K(f) der Strahlklassenkörper modulo f über K. Während Fueter T_Ω lediglich benutzt um die Teiler der Relativdifferente von K(4f)/K(4) zu untersuchen, wird im vorliegenden Buch genauer gezeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen singuläre Werte von T_Ω Potenzganzheitsbasen von K(4f)/K(4) erzeugen.

Bei der Untersuchung der Galoismodulstruktur tritt die normierte logarithmische Ableitung von T_Ω

$$D_\Omega(z) = \frac{1}{\sqrt{\wp(\psi/\Omega) - \wp(2\psi/\Omega)}} \; \frac{\frac{d}{dz} T_\Omega(z)}{T_\Omega(z)}$$

sowie eine hiermit zuerst von Abel und Hermite definierte „Resolventenfunktion" auf. Der dabei beteiligte Charakter wird über die zu einer Gitterbasis von Ω gehörigen Perioden der ζ-Funktionen von Ω definiert. Unter Benutzung von formalen Gruppen und lokaler Klassenkörpertheorie werden mit diesen Hilfsmitteln unter bestimmten Voraussetzungen Aussagen über die Galoismodulstruktur von $K(4\mathfrak{p}^{m+r})/K(4\mathfrak{p}^r)$, $r > m \geqslant 1$, $\mathfrak{p}$ ein Primideal in K hergeleitet. Quotienten singulärer Werte von D_Ω treten dabei als Galoiserzeugende einer ausgezeichneten Teilordnung O_Ω in $K(4\mathfrak{p}^{m+r})$ auf, wobei der Index von O_Ω in der Hauptordnung eine Potenz von 2 ist. Wie die Autoren bemerken, ist dies ein Analogon zu dem eingangs erwähnten Resultat über $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\zeta^m)$.

Zu den Kapiteln im Einzelnen:

In Kapitel I werden die bekannten Tatsachen über die additive Struktur der Ganzheitsringe in Kreiskörpern als Orientierung für die folgenden Untersuchungen zusammengestellt.

Kapitel II gibt einen Abriß der lokalen und globalen Klassenkörpertheorie.

Kapitel III enthält die klassischen Tatsachen über elliptische Funktionen, die die Grundlage für die in den Kapiteln IV, V und VI entwickelten Identitäten und Teilbarkeitseigenschaften für die singulären Werte von T_Ω und D_Ω bilden.

In den Kapiteln VII–IX werden in knapper Form alle Dinge über Modulfunktionen und komplexe Multiplikation hergeleitet, die für die klassische Konstruktion der Strahlklassenkörper eines imaginär quadratischen Körpers durch singuläre Werte von j und der Weberschen τ-Funktion benötigt werden. Die hierin enthaltenen Tatsachen und Methoden werden sodann dazu benutzt, die singulären Werte von T_Ω und D_Ω zu faktorisieren, sie als Elemente von Klassenkörpern zu erkennen und ihre Konjugierten zu berechnen.

In Kapitel X wird mit Hilfe der Theorie von Lubin-Tate über formale Gruppen die Galoismodulstruktur der Ganzheitsringe bei gewissen lokalen Erweiterungen beschrieben, die zusammen mit der oben genannten Resolventenfunktion zu den Resultaten im 2-ten Teil von Kapitel XI über die globale Galoisstruktur von $K(4\mathfrak{p}^{m+r})/K(4\mathfrak{p}^r)$ führen. Die Erzeugung von Potenzganzheitsbasen, mittels T_Ω, die im ersten Teil von Kapitel XI hergeleitet wird, stützt sich lediglich auf die Kapitel III–IX.

Im Appendix am Ende des Buches wird gestützt auf bekannte Identitäten der formelmäßige Zusammenhang zwischen den singulären Werten von T und den elliptischen Einheiten hergestellt.

Das Buch kann als eine gelungene Einführung in eine sicher noch nicht abgeschlossene Theorie angesehen werden. Alle benötigten Grundlagen werden in übersichtlicher Form zusammengestellt und in den Kapiteln III–IX auch von Grund auf entwickelt. Eine besondere Erwähnung verdient dabei die gemessen an den Quellen sehr durchsichtige Einführung der Resolventenfunktionen in Kapitel VI. Das Buch bietet somit eine solide Basis für weitere Untersuchungen auf diesem Gebiet.

Augsburg R. Schertz

Silverman, J. H., The Arithmetic of Elliptic Curves (Graduate Texts in Mathematics Vol. 106), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1986, XII + 400 pp., hardcover, DM 148,–

Die Arithmetik elliptischer Kurven spielt innerhalb der Arithmetischen Geometrie zweifellos eine bedeutende Rolle: Elliptische Kurven sind gegeben durch explizite Gleichungen, man kann daher durch elementare Methoden schon interessante Erkenntnisse gewinnen, sie sind die einfachsten Beispiele von Abelschen Varietäten, sind (etwa über **Z**) die zugänglichsten „arithmetischen Flächen", die über globalen Körpern rationalen Punkte haben eine einfache, aber nichttriviale Gruppenstruktur (Satz von Mordell-Weil), über die äußerst anregende und tiefliegende Vermutungen Voraussagen machen, die Theorie der elliptischen Funktionen und, etwas tiefer liegend, der Modulformen gibt enge Verbindungen zur Funktionentheorie, und schließlich hängen elliptische Kurven auf oft überraschende Weise mit anderen Problemen, z. B. diophantischen Problemen, Transzendenzuntersuchungen, Darstellungen der Galoisgruppe von **Q** usw. zusammen.

Bei dieser Reichhaltigkeit ist es nicht verwunderlich, daß über elliptische Kurven eine Vielzahl von Veröffentlichungen mit z. T. spektakulären Ergebnissen erscheinen; umso schwerer wog bisher der Mangel an einem für fortgeschrittene Studenten und interessierte „Nichtspezialisten" unter den Mathematikern zugänglichen Text, der dem Stoff in seiner ganzen Breite gerecht wird und der über Übersichtsartikel hinausgeht. Diese Lücke in der Literatur hat Silverman zum großen Teil aufs Beste geschlossen.

Silverman behandelt zunächst elliptische Kurven mit Mitteln der Algebraischen Geometrie, von der meistenteils nur Aussagen über Kurven benötigt werden, und kommt so schnell zu den über allgemeinen Grundkörpern gültigen Ergebnissen (bis hin zu Eigenschaften der Tate-Moduln und der zugehörigen l-adischen Darstellungen) (Kap. I, II, III). Die formale Geometrie und die Theorie der elliptischen Kurven über endlichen Körpern zusammen mit der Reduktionstheorie ergeben die Theorie über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern, und die Behandlung von **C** als Grundkörper schließt die lokale Theorie ab (Kap. IV–VII).

Das Herzstück des Buches von Silverman ist die Theorie der elliptischen Kurven über globalen Körpern K (Kap. VIII–X). Der Satz von Mordell-Weil („Die Gruppe E(K) der K-rationalen Punkte von E ist ein endlich erzeugter **Z**-Modul") wird bewiesen, die Rolle der Höhenfunktionen wird dabei herausgearbeitet, es werden Eigenschaften von ganzen Punkten samt interessanter Vermutungen, z. B. von Lang und Hall, die mit diesen Höhen zusammenhängen, diskutiert, und schließlich werden auch Methoden zur Abschätzung des Rangs von E(K) durch Descent-Theorie und die Komplikationen durch die Tate-Shafarevič-Gruppe vorgestellt.

Silverman arbeitet die benötigten Begriffe sorgfältig heraus, die Sätze sind klar formuliert, ihre Bedeutung wird durch Schilderung ihrer Konsequenzen klar, und Beweise werden durchgeführt, soweit das im Rahmen des Buches möglich ist, ansonsten werden geeignete Zitate angegeben. Instruktive Beispiele und zahlreiche Übungsaufgaben am Ende jeden Kapitels verhindern, daß der Leser den Boden unter den Füßen verliert, ein guter Index erleichtert die Orientierung. Die lebendigen und gut motivierenden Einführungen am Beginn neuer Abschnitte machen das Lesen zum Vergnügen, und deshalb ist zu hoffen, daß durch Silvermans Buch dem faszinierenden Gebiet der elliptischen Kurven neue Interessenten gewonnen werden; der Zugang jedenfalls ist freigemacht.

Zum Schluß bleibt nur noch ein Wunsch: Im 11. Kapitel gibt Silverman eine Liste der Dinge an, die er nicht in seinem Buch behandeln konnte. Vielleicht könnte ein zweites Buch diesen Mangel beheben?

Saarbrücken

G. Frey

Husemöller, D., Elliptic Curves, with an Appendix by Ruth Lawrence (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 111), New York etc.: Springer-Verlag 1987, 44 fig., XV, 350 pp., hardcover, DM 110,–

Kurz nach Silverman's grundlegender Einführung in die Arithmetik elliptischer Kurven erscheint in derselben Reihe eine weitere Einführung in dasselbe Gebiet von dem „Amateur" Dale Husemöller (Haverford). Ihr erster Ursprung sind Tate's Haverford Philips Lectures von 1961 (revidiert 1970), die leider nie regulär veröffentlich wurden, obwohl sie zu den schönsten elementaren Einführungen in dieses Gebiet zählen. Die Einführung und die ersten 6 Kapitel dieses Buches (bis zum Satz von Mordell) legen jetzt der Öffentlichkeit eine bearbeitete Version vor, die noch viel von Tate spüren läßt.

Der 2. Teil des Buches (Kap. 7 und 8) baut, motiviert durch den Beweis des Satzes von Mordell, den Apparat der Galois-Kohomologie für elliptische Kurven auf. Der 3. Teil des Buches (Kap. 9–11) behandelt die Grundzüge der analytischen Theorie elliptischer Kurven über den komplexen und den p-adischen Zahlen (letzteres wiederum nach Tate), einschließlich einer kurzen Einführung in die komplexe Theorie der Modulkurven. Der 4. Teil (Kap. 12–14) befaßt sich mit dem modernen algebraischen Fundament der elliptischen Kurven (Endomorphismen, Isogenien, singuläre und supersinguläre Kurven) bis hin zum Néron-Modell und zum Néron-Ogg-Šafarevič-Kriterium für gute Reduktion. Hier wird für manchen Beweis auf die Literatur, insbesondere auf Silvermans Buch verwiesen. In noch stärkerem Maße gilt das für die letzten 3 Kapitel, die die neueren Ergebnisse der arithmetischen Theorie vorstellen, die sich um die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer ranken.

Im Vergleich zu Silverman geht Husemöller von einem elementareren Niveau aus, versucht manchen Schritt „zu Fuß", ohne gleich den vollen Begriffsapparat aufzubauen. So entsteht eine gut lesbare, anregende Einführung in das Gebiet. Wer tiefer eindringen will, wird aber von Silverman länger auf seinem Weg begleitet.

Erlangen

W.-D. Geyer

Borel, A., Algebraic D-Modules, Orlando: Academic Press 1986, 368 pp., Casebound, \$ 29.95

Endlich liegt mit diesem Buch die erwartete Ausarbeitung des 1984 in der Schweiz abgehaltenen Seminars über $\mathcal{D}$-Moduln vor.

Die Theorie der $\mathcal{D}$-Moduln, d. h. die Theorie linearer partieller Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten, wurde zuerst in der analytischen Kategorie entwickelt. Die Riemann-Hilbert-Korrespondenz (M. Kashiwara und Z. Mebkhout) beschreibt die Lösungen solcher „Differentialgleichungssysteme" mit moderatem Wachstum. Für die weitreichenden Anwendungen, insbesondere in der Darstellungstheorie (Kazhdan-Lusztig-Vermutung . . .) spielt die

„algebraische" Version der Theorie die größere Rolle. Die vorliegende Seminarausarbeitung stellt diese algebraische Theorie der $\mathcal{D}$-Moduln dar, die man sich zuvor in verschiedenen Originalarbeiten zusammensuchen mußte. Wegen der dort benutzten unterschiedlichen Voraussetzungen waren diese schwer zu vergleichen.

Den Kern des Buchs bildet A. Borels Beitrag (150 Seiten), dessen Ziel es ist, die fundamentalen Grundlagen der algebraischen Theorie der $\mathcal{D}$-Moduln darzustellen und die algebraische Version der Riemann-Hilbert-Korrespondenz vollständig zu beweisen. Diese wurden von A. Beilinson und J. Bernstein entwickelt und von J. Bernstein in groben Zügen in einem unveröffentlichten (und schwer erhältlichen) Manuskript niedergelegt, welches als „Raster" für A. Borels Artikel diente. Der Autor schließt J. Bernsteins Äquivalenz von der derivierten Kategorie der beschränkten Komplexe quasi-kohärenter $\mathcal{D}$-Moduln mit der derivierten Kategorie der beschränkten Komplexe mit quasi-kohärenter Homologie ein, ebenso wie P. Delignes entsprechende Äquivalenz für kohärente $\mathcal{D}$-Moduln. Dies macht die Definition des direkten Bildes eines $\mathcal{D}$-Moduls natürlicher. Erfreulicherweise trennt A. Borel sehr sorgfältig zwischen Eigenschaften, die allgemein für holonome oder aber nur für reguläre holonome $\mathcal{D}$-Moduln gelten. Der Aufbau ist fließend, die Hilfsformalismen werden unterwegs und bei Bedarf bewiesen und gut vom Rest getrennt. Der Stil ist knapp und präzis, trotzdem nicht allzu trocken.

Die lokalen algebraischen Haupteigenschaften der Garbe $\mathcal{D}$ (noethersch und kohärent) und eines $\mathcal{D}$-Moduls (homologische Dimension) werden in den Beiträgen von B. Kaup über kohärente $\mathcal{D}$-Moduln und von F. Ehlers über die Weyl-Algebra hergeleitet.

Ein Einstieg in die $\mathcal{D}$-Modultheorie gelingt kaum ohne ein gutes Verständnis von P. Delignes Lecture Notes „Equations différentielles à points singuliers réguliers". A. Haefliger erklärt den Regularitätsbegriff (d. h. den Begriff des moderaten Wachstums) auf einer Kurve. Dies ist von besonderer Wichtigkeit, da J. Bernsteins allgemeine Definition der Regularität (siehe A. Borels Artikel) auf Kurven zurückgeführt wird. Er übersetzt den Fuchschen Satz in die Sprache der meromorphen Zusammenhänge, und bereitet dabei B. Malgranges Beitrag vor. Dieser beschreibt kurz und klar den Begriff der meromorphen Fortsetzung eines Vektorbündels und den der Regularität für Zusammenhänge; er modifiziert dabei Delignes Sprache, so daß sie der der $\mathcal{D}$-Moduln angepaßt wird; er versucht, soweit es geht, ohne Bedingungen an die gute Kompaktifizierung auszukommen, um möglichst spät auf Hironakas Auflösungssatz zurückzugreifen. Er gibt Delignes Beweis der Riemann-Hilbert-Korrespondenz für Zusammenhänge. Aus Delignes Lecture Notes wird nur das dargestellt, was im Zusammenhang mit A. Borels Artikel steht. Es ist schade, daß so B. Malgrange einige Punkte nicht diskutiert hat, wie z. B. die Auswahl der verschiedenen Fortsetzungen eines Zusammenhangs.

Den Anfang des Buchs bilden 100 Seiten von P. P. Grivel über derivierte Kategorien und Funktoren. Der Leser sollte diesen Teil vielleicht zunächst unberücksichtigt lassen und bei Bedarf dort (oder in der inzwischen relativ umfangreichen Literatur über derivierte Kategorien) nachschlagen. An dieser Stelle möchte ich daran erinnern, daß eine Einführung in das Arbeiten mit derivierten Kategorien und Komplexen von Garben auch durch die vorherige Seminarausarbeitung von A. Borel u. a. über Schnittkohomologie (Birkhäuser) gegeben wird. Unabhängig davon stehen der genannte Band und die dort behandelten „perversen Garben" in engem Zusammenhang mit dem vorliegenden Buch: Ein regulärer holonomer $\mathcal{D}$-Modul entspricht durch die Riemann-Hilbert-Korrespondenz gerade einer perversen Garbe.

Ähnlich wie die vorherige Seminarausarbeitung wird das Buch über $\mathcal{D}$-Moduln sicher zu einer wichtigen Quelle für Mathematiker, die sich über dieses Gebiet informieren wollen, oder für fortgeschrittene Studenten, die beginnen wollen, in dieser Richtung zu arbeiten.

Auch wenn – wie bei fast allen Seminarausarbeitungen – ein Register und ein zusammengefaßtes Literaturverzeichnis fehlen, wird dieser Band eine hervorragende Grundlage für Seminare oder weiterführende Vorlesungen sein.

Bonn H. Esnault

Jantzen, J., Representations of Algebraic Groups, Orlando: Academic Press 1987, 420 pp., £ 37.50

Der Autor betrachtet Schemata und algebraische Gruppen (über einem kommutativen Ring k) als Funktoren von der Kategorie der k-Algebren in die Kategorie der Mengen bzw. Gruppen. Dieser Standpunkt hat Vorteile (zum Beispiel für Anwendungen in der Arithmetik), aber auch den Nachteil, daß die geometrische Intuition verloren geht. Vom Leser wird daher verlangt, daß er bereits gute Kenntnisse über algebraische Varietäten und reduktive Gruppen über algebraisch abgeschlossenem Grundkörper hat. Diese kann man sich in den Büchern „Linear Algebraic Groups" von Borel, Humphreys oder Springer aneignen.

Das Buch ist in zwei Teile gegliedert: Teil II behandelt die Darstellungstheorie reduktiver Gruppen(schemata), wobei das Hauptinteresse des Autors der positiven Charakteristik gilt. Die Grundlagen dazu werden im Teil I geschaffen, wo eine allgemeine Einführung in die Darstellungstheorie affiner algebraischer Gruppen(schemata) gegeben wird.

Im Teil I folgt der Autor zum Teil dem Buch [Demazure-Gabriel: Groupes algébriques. Masson/North-Holland, Paris/Amsterdam 1970], nimmt aber viele neuere Ergebnisse mit auf. Zunächst werden algebraische Schemata und Gruppenschemata definiert und grundlegende Eigenschaften davon besprochen. Dann werden recht ausführlich induzierte Darstellungen, Kohomologie, Quotientenschemata und Faktorgruppen beschrieben. Nach einem Kapitel über die Distributionenalgebra (oder Hyperalgebra) einer algebraischen Gruppe folgen Abschnitte über die Darstellungen endlicher algebraischer Gruppen (das sind über einem Körper definierte Gruppenschemata, deren Funktionenalgebra als Vektorraum endlichdimensional ist) und (spezieller) von Frobeniuskernen. Damit werden Verbindungen zur Darstellungstheorie von endlichdimensionalen Algebren und von p-Liealgebren hergestellt. Ein Kapitel über Reduktion modulo p schließt den ersten Teil ab.

Im Teil II wird meist angenommen, daß der Grundring k ein Körper ist. Während die Darstellungstheorie reduktiver algebraischer Gruppen in Charakteristik 0 parallel zu der kompakter Liegruppen verläuft, ist sie in positiver Charakteristik wesentlich komplizierter. In dieser Situation gibt es Darstellungen, die nicht vollständig reduzibel sind, und für einfache Darstellungen ist keine allgemeine Charakterformel bekannt. Von der Charakteristik des Grundkörpers unabhängig ist die Tatsache, daß die einfachen Darstellungen einer reduktiven Gruppe G durch die dominanten Gewichte eines maximalen Torus T klassifiziert werden. Es seien λ ein Charakter von T, B eine T enthaltende Boreluntergruppe von G und $H^i(\lambda)$ die i-te Kohomologiegruppe des durch λ definierten Geradenbündels auf G/B. Für dominantes λ sei $L(\lambda)$ eine einfache Darstellung von G mit Höchstgewicht λ. Dann ist $L(\lambda)$ zum einzigen einfachen G-stabilen Unterraum von $H^0(\lambda)$ isomorph.

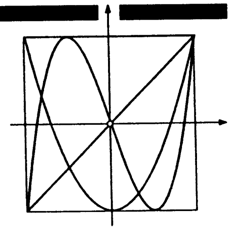
Die ersten zwei Abschnitte von Teil II behandeln grundlegende Eigenschaften von reduktiven Gruppen und ihren einfachen Darstellungen. In den Kapiteln über den Verschwindungssatz von Kempf, das Theorem von Borel-Bott-Weil und die Charakterformel von Weyl werden die G-Darstellungen $H^i(\lambda)$ untersucht. Mit Ausnahme der letzten zwei (über Schubert-Schemata und ihre Geradenbündel) sind die übrigen Abschnitte der Darstellungstheorie in positiver Charakteristik gewidmet. Es werden viele Informationen über die Darstellungen $L(\lambda)$ und $H^0(\lambda)$ gewonnen.

Das Buch wird durch eine ausführliche Literaturliste abgeschlossen.

Über die Darstellungstheorie der Gruppenschemata kann kein leicht lesbares Buch geschrieben werden. Das vorliegende Buch ermöglicht es aber dem Leser, sich an den letzten Stand der Forschungen auf diesem Gebiet heranzuarbeiten. Es wird sicherlich eine Standardreferenz werden.

Innsbruck F. Pauer

G. Hämmerlin, K.-H. Hoffmann



Numerische Mathematik

1989. 52 Abbildungen. XII, 448 Seiten. (Grundwissen Mathematik, Band 7). Broschiert DM 38,–. ISBN 3-540-15306-3

Inhaltsübersicht: Rechnen. – Lineare Gleichungssysteme. – Eigenwerte. – Approximation. – Interpolation. – Splines. – Integration. – Iteration. – Lineare Optimierung. – Bezeichnungen. – Literatur. – Namen- und Sachverzeichnis.

Der bekannte Ausspruch von Jerome Spanier *„solving equations is not solving problems"* ist der Leitgedanke dieses Buches: die Betonung liegt auf dem *konstruktiven* Aspekt der Numerik. Anders als viele Bücher zum gleichen Thema wird daher die numerische Mathematik konsequent als ein Teilgebiet der Mathematik aufgefaßt, bei dem in aller Strenge argumentiert wird, der konstruktive Aspekt aber im Vordergrund steht. Als zentraler Leitgedanke zieht sich der Begriff der Approximation durch das gesamte Buch. Darauf aufbauend werden Verfahren zum Lösen der Grundprobleme der numerischen Mathematik hergeleitet, mathematisch klar begründet und bis zur algorithmischen Durchführbarkeit besprochen. Einige Themenbereiche sind im Vergleich zur Darstellung in anderen Büchern stark erweitert und neu aufgearbeitet. So werden bei der Approximation, der Interpolation und der Quadratur auch Funktionen mehrerer Variabler behandelt.

Einen gebührenden Raum nimmt die Theorie und Praxis der Splines ein. Neueste Entwicklungen in der numerischen Mathematik sind berücksichtigt, z. B. Komplexität von Algorithmen, parallele Verarbeitung und lineares Optimieren. Dem Reihencharakter entsprechend sind historische Bemerkungen eingeflochten und zahlreiche Übungsaufgaben harmonisch in den Text eingebunden. Auf Querverbindungen und motivierende Erklärungen wird besonderer Wert gelegt. In den Besprechungen der ersten 4 Bände dieser Reihe wurden diese Aspekte besonders positiv hervorgehoben.

Dieses Buch wird für jeden Studenten, der sich mit numerischer Mathematik beschäftigt, bald ein unverzichtbares Arbeitsmittel sein und ist auch zum Selbststudium geeignet.

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong

Heidelberger Platz 3, D-1000 Berlin 33 · 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA · 28, 8 Alexandra Rd., Wimbledon London SW 19 7JZ, England · 26, rue des Carmes, F-75005 Paris · 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan · Citicorp Centre, Room 1603, 18 Whitfield Road, Causeway Bay, Hong Kong

Springer

H&S 9037/5/1

Neuerscheinungen

Behnen/Neuhaus

Rank Tests with Estimated Scores and Their Application

By Prof. Dr. **Konrad Behnen** and Prof. Dr. **Georg Neuhaus**
Universität Hamburg

1989. 416 pages. 16,2 x 22,9 cm.
Paper DM 54,–. ISBN 3-519-02728-3

(Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik)

The general aim of this book is to present a new class of nonlinear rank tests for a variety of important testing problems. The need for such new procedures stems from the fact that the classical linear rank tests are sensitive only for small classes of alternatives, while our nonlinear rank tests are designed to be sensitive for broad classes of alternatives.

Our theoretical results and many Monte Carlo simulations have convinced us that the proposed procedures are of real practical importance. Therefore in Chapter 2 we present a simple algorithmic description of the new rank tests – without stressing any mathematical theory – and a step by step evaluation of numerical examples, whereas in Part II of the book we give a rigorous asymptotic theory of all proposals of Chapter 2.

Pruscha

Angewandte Methoden der Mathematischen Statistik

Lineare, loglineare, logistische Modelle

Von Dr. **Helmut Pruscha,**
Universität München

1989. 391 Seiten. 16,2 x 23,5 cm.
Kart. DM 49,–. ISBN 3-519-02726-7

(Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik)

Das Skriptum behandelt eine Reihe für die Praxis wichtiger Modelle der Statistik, und zwar sowohl lineare Modelle (wie z.B. die der Varianz- und linearen Regressionsanalyse) als auch nichtlineare (wie z.B. das logistische Regressionsmodell und loglineare Modelle zur Kontingenztafelanalyse). Die Methoden ihrer statistischen Behandlung werden in deduktiver Weise aus den grundlegenden Ergebnissen der mathematischen Stochastik abgeleitet und bis zu anwendbaren Verfahren hin entwickelt. Hinweise zur Anwendung und Fallbeispiele illustrieren die praktische Bedeutung der Verfahren. Damit wird eine Brücke geschlagen von Darstellungen der Theorie der mathematischen Statistik hin zu den anwendungsbezogenen Büchern und statistischen Softwarepaketen.

Angesprochen werden sowohl Studenten und Dozenten der Stochastik und Statistik, die den Weg zu den Anwendungen über die mathematische Deduktion gehen wollen, als auch Anwender der Statistik, welche die hinter den Verfahren liegende Theorie kennenlernen möchten.

B. G. Teubner Stuttgart

Neuerscheinung

Neunzert (Ed.)

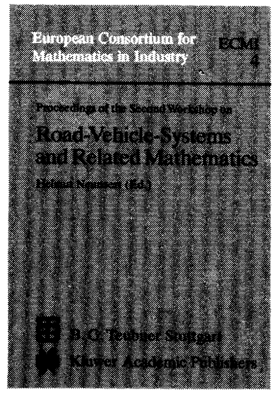
Proceedings of the Second Workshop on

Road-Vehicle-Systems and Related Mathematics

June 20-25, 1987, Torino

European Consortium for Mathematics in Industry

ECMI Vol. 4



Road-Vehicle-Systems pose a lot of practically relevant and mathematically challenging problems:
What is the appropriate mathematical description of a road?
How complex should a mathematical vehicle model be?
What are the best methods to solve the algebraic differential equations and the stochastic differential equations numerically?
How can one estimate the reliability of vehicle components?

These proceedings cannot give complete answers to all these questions, but they treat important aspects, sometimes even formulate the problems for the first time and give some general ideas on which tracks a future solution may proceed.

Edited by Prof. Dr.
Helmut Neunzert,
Universität Kaiserslautern

1989. VI, 243 pages.
16,2 x 23,5 cm.
Bound DM 82,–
ISBN 3-519-02173-0

Coproduction Kluwer-Teubner

ECMI Vol. 1
Proceedings of the First European Symposium on Mathematics in Industry
ESMI I 1985, Amsterdam
1988. XIV, 238 pages. Bound DM 72,–.
ISBN 3-519-02170-6

ECMI Vol. 2
Case Studies in Industrial Mathematics
1988. X, 218 pages.
Bound DM 72,–.
ISBN 3-519-02171-4

ECMI Vol. 3
Proceedings of the Second European Symposium on Mathematics in Industry
ESMI II 1987, Oberwolfach
1988. VIII, 359 pages.
Bound DM 82,–.
ISBN 3-519-02172-2

B. G. Teubner Stuttgart