92. Band Heft 1
ausgegeben am 29. 1. 1990

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1990

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 118,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of $ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 $ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1990 – Verlagsnummer 2905/1
Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 92, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Denker: Eberhard Hopf 04–17–1902 to 07–24–1983
P. Ullrich: Wie man beim Weierstraßschen Aufbau der Funktionentheorie das Cauchysche Integral vermeidet
J. R. Whiteman, A. E. Beagles, M. K. Warby: Theoretical and Practical Aspects of Finite Elements in the Context of Some Problems of Solid Mechanics
D. Zagier: Elliptische Kurven: Fortschritte und Anwendungen

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Memminger Str. 6, 8900 Augsburg
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen weren.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1990 B. G. Teubner Stuttgart
92 (1990) 1–20
AMS subject classification: 03 D 15, 11 M 26, 68 Q 25

Numerik analytischer Funktionen und Komplexität

A. Schönhage, Bonn

1 Einleitung

Überall, wo in der Mathematik algorithmische Probleme interessieren, stellen sich in ganz natürlicher Weise jeweils auch Fragen der *Berechnungskomplexität,* in erster Linie Fragen nach dem Zeitaufwand, der für die Lösung von Berechnungsaufgaben notwendig (untere Schranken) oder hinreichend ist. Obere Rechenzeitschranken ergeben sich meist durch Konstruktion passender Algorithmen, was unmittelbar den Bezug zur Numerik herstellt. Erwünscht ist dabei natürlich, besonders gute Schranken durch entsprechend schnelle, im Idealfall optimale Algorithmen zu gewinnen, die den unteren Schranken nahekommen oder diese gar realisieren. Derartige Optimalitätsaussagen sind bisher vor allem in der *algebraischen* Komplexitätstheorie gelungen, wo sich hie und da die „richtigen" unteren Schranken durch das Studium geeigneter Invarianten bestimmen lassen. Als Quelle in dieser Richtung kann ich Herrn Strassens Übersichtsartikel [23] im Gedenkband zu Oberwolfach 1984 nennen.

Allerdings kann von solchen unteren Schranken für das algebraische Rechnen nicht ohne weiteres auf entsprechende untere Schranken für die sogenannte *Bitkomplexität* geschlossen werden, die andererseits aber gerade für Berechnungsaufgaben mit Limesbildung besonders geeignet erscheint. Formalisieren läßt sich dieser intuitive Begriff – in Abhängigkeit vom zugrundeliegenden theoretischen Maschinenmodell – auf verschiedene Weisen, etwa in Bezug auf Mehrband-Turingmaschinen oder Random-Access-Maschinen mit logarithmischer Kostenfunktion. Da in diesem Bereich bisher aber ein notorischer Mangel an interessanten unteren Schranken besteht, wird man sich beim heutigen Stand unseres Wissens mit guten oberen Schranken zufriedengeben müssen. In meinem Vortrag [19] zum ICM Berkeley 1986 habe ich am Generalthema des Auflösens von Gleichungen ausgeführt, was in dieser Hinsicht für einige Grundaufgaben der Numerik bisher erreicht wurde. Dazu gehören insbesondere die günstigen Schranken, die sich mit meinem *Trennkreisverfahren* zur approximativen Faktorisierung komplexer Polynome für die Nullstellenberechnung ergeben.

Hier soll nun eine breitere Auswahl algorithmischer Fragen der Funktionentheorie unter dem Aspekt ihrer Berechnungskomplexität diskutiert werden. Der *erste Teil* mit den Abschnitten 2 bis 5 betrifft Themen allgemeiner Art. Beginnend mit den

Grundoperationen für komplexe Zahlen, Polynome und rationale Funktionen geht es über einige Anmerkungen zum algorithmischen Umgang mit Potenzreihen bis hin zur angenäherten Berechnung von Produktdarstellungen und Partialbruchzerlegungen. Soweit diese Dinge schon in [19] behandelt wurden, werde ich mich hier kurzfassen. Im übrigen kann hinsichtlich einer Reihe von Grundresultaten der Komplexitätstheorie allgemein auf einschlägige Bücher verwiesen werden, z. B. Borodin und Munro [3] oder auch Knuth [10].

Im *zweiten Teil* mit den Abschnitten 6 bis 8 wird es darum gehen, wie schnell sich $f(z)$ zu vorgegebenem z berechnen läßt. Für die algebraischen Funktionen kann diese Frage in gewissem Sinne abschließend beantwortet werden. Auch zur Berechnung der elementaren Funktionen ln, exp, sin, cos, arctan, ... gibt es bemerkenswert schnelle Algorithmen; die schnellsten unter diesen beruhen sämtlich auf der Gaußschen Iteration zum *arithmetisch-geometrischen Mittel* (AGM). Hierzu gibt es inzwischen den Übersichtsartikel [4] und die stofflich wie auch an Literaturhinweisen reichhaltige Monographie [5] der Brüder Borwein. Deshalb werde ich mich bei diesem Thema darauf beschränken, einen möglichst raschen und zugleich ganz elementaren Zugang zu skizzieren.

Der letzte Abschnitt schließlich enthält einige hier erstmals publizierte Überlegungen zu der speziellen (und thematisch leicht variierten) Frage, wie sich $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ – bei Forderung mäßiger Genauigkeit wie etwa $1/t^{O(1)}$ – für große t schneller berechnen läßt.

Anspruchsvollere Fragen, etwa analytische Fortsetzung oder die Berechnungskomplexität von Aufgaben der konformen Abbildung betreffend, scheinen heute noch außerhalb der Reichweite der entwickelten Methoden zu liegen. Um ein Gefühl für die Natur der schon bei ganz bescheidenen Problemen auftretenden Schwierigkeiten zu vermitteln, stelle ich hier als Beispiel die folgende, auf den ersten Blick vielleicht einfach erscheinende Aufgabe.

(1.1) Man berechne zu einer durch ihre Taylorreihe im Nullpunkt gegebenen holomorphen Funktion f, deren Koeffizienten der Einfachheit halber ganz handfest z. B. durch $|a_n| \leqslant 2^{-n}$ beschränkt sein sollen, das Maximum $M = \max_{|z|=1} |f(z)|$ auf 2^{-N} genau.

Die Eingabeparameter sind also N und die Koeffizienten a_n (in hinreichender Zahl und Genauigkeit). Als zugehöriges Komplexitätsproblem hat man dann die Frage nach guten oberen und unteren Schranken für die in Abhängigkeit von N erforderliche Rechenzeit. Weil speziell bei Funktionen f mit positiven Koeffizienten jedenfalls $M=f(1)$ auf 2^{-N} genau berechnet wird, hat die Bitkomplexität offensichtlich das triviale Mindestwachstum $\Omega(N^2)$, wie aber könnte man größere untere Schranken beweisen? – Wie steht es auf der anderen Seite mit oberen Schranken, geht es z. B. in polynomischer Zeit $N^{O(1)}$? – In Abschnitt 5 werde ich andeuten, wie man mit $N^{3+o(1)}$ auskommt.

2 Das Rechnen mit komplexen Zahlen

Schon die Frage nach der Komplexität der arithmetischen Grundoperationen für komplexe Zahlen ist keineswegs trivial. Zunächst soll kurz das *algebraische* Modell diskutiert werden, bei dem komplexe Zahlen als Paare reeller Zahlen angesehen werden, die ihrerseits aber als Atome gelten, und bei dem nur die nichtskalaren Operationen (d. h. die reellen Multiplikationen und Divisionen) zu zählen sind. Die bei der Multiplikation komplexer Zahlen auftretenden quadratischen Formen lassen sich, wie man aus der Darstellung

$$(2.1) \quad f = ac - bd, \qquad g = ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$$

abliest, mit 3 Multiplikationen berechnen – und diese 3 ist optimal! – vgl. [23, § 12]. Ebenso ist bei der Division komplexer Zahlen schon länger bekannt, daß gegenüber der naiven Form mit 8 Operationen (6 Mults, 2 Divs) eine Reduktion auf 6 Operationen (3 Mults, 3 Divs) möglich ist, indem man z. B. zuerst $q = d/c$ berechnet und dann mit $1 - iq$ erweitert, also

$$(2.2) \quad \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+bq}{c+dq} + i\,\frac{b-aq}{c+dq}$$

benutzt. Numerisch stabil ist das für $|c| \geqslant |d|$, sonst kann man in analoger Weise mit $c/d - i$ erweitern. – Als untere Schranke war in [2] zunächst die Zahl von mindestens 5 Operationen bewiesen worden, aber erst vor kurzem ist es endlich gelungen [11], die vermutete Optimalität dieser 6 zu zeigen.

Allerdings sollte nicht übersehen werden, daß dieses algebraische Modell doch von recht idealisierenden Annahmen ausgeht, die der eigentlichen Natur reeller Zahlen nicht gerecht werden. Für das Studium numerischer Algorithmen ist es methodisch wenig tragfähig, alle Genauigkeitsfragen und die jeweils erforderlichen Stellenzahlen ganz außer Acht zu lassen. Ferner ist unklar, warum Multiplikationen und Divisionen mit gleichem Gewicht gezählt werden sollten. Insbesondere beim Rechnen mit langen Zahlen deuten die bisher vorliegenden Erfahrungen darauf hin, daß die Division um einen Faktor zwischen 2 und 2.5 aufwendiger als die Multiplikation ist, während andererseits der Übergang von den reellen zu den entsprechenden komplexen Operationen – im Gegensatz zu den bei (2.1) und (2.2) genannten Zahlen 3 und 6 – zumindest asymptotisch gesehen nur auf den Faktor 2 hinauskommt.

Den weiteren Betrachtungen liegt die Vorstellung zugrunde, daß man reelle Zahlen durch Binärzahlen in dynamisch gesteuerter Genauigkeit approximiert und entsprechend komplexe Zahlen angenähert durch Paare von Binärzahlen repräsentiert werden. Dabei ist von grundsätzlicher Wichtigkeit, daß reelle oder komplexe Eingabegrößen $\alpha, \beta, \ldots$ zwar potentiell in beliebiger Genauigkeit (durch sogenannte Orakel) gegeben sein sollen, daß aber deren Gleichheit $\alpha = \beta$ rekursiv unentscheidbar ist. Der algorithmische Aufwand soll als Bitkomplexität, d. h. als Rechenzeit von Mehrband-Turingmaschinen oder besonders einfacher Random-Access-Maschinen (successor RAMs) mit logarithmischer Kostenfunktion gemessen werden (Definitionen dazu findet man in [15]). So sind z. B. Addition und

Subtraktion N-stelliger Binärzahlen in linearer Zeit $\mathcal{O} \cdot N$ möglich (das Symbol $\mathcal{O}$ steht für $O(1)$), für RAMs gilt das allerdings nur maschinenintern und nur bei geschickter Kodierung.

Multiplikation und Division haben eine Komplexität von gleicher Größenordnung, die aber bisher nicht genau bekannt ist (vgl. [19] oder [10, § 4.3.3]). Hier mag genügen, folgende Schranken (mit einem anonymen c) zu nennen.

(2.3) Obere Schranken $\mu(N)$ für die Multiplikation N-stelliger Zahlen:

(a) $\mu(N) = c\,N \log(N+1) \log\log(N+2)$ für Mehrband-Turingmaschinen

(b) $\mu(N) = c\,N \log(N+1)$ für RAMs (logarithmische Kosten).

Teil (b) ist Theorem 7.1 aus [15]; vermutlich ist diese Schranke optimal.

3 Polynome und rationale Funktionen

Komplexe Polynome $F(z) = a_0 + \ldots + a_m z^m$ werden hier koeffizientenweise als Elemente eines $\mathbb{C}^{m+1}$ aufgefaßt, der mit der l^1-Norm $|F| = \Sigma_j |a_j|$ versehen als Π_m bezeichnet sei. Die Multiplikation solcher Polynome ist eine Abbildung $\Pi_m \times \Pi_m \to \Pi_{2m}$, die sich als Faltung mittels drei schneller Fourier-Transformationen in $\mathcal{O} \cdot m \cdot \log m$ Schritten berechnen läßt. Bei Rechnung in N-stelliger Genauigkeit wäre dies dann noch mit $\mathcal{O} \cdot \mu(N)$ zu multiplizieren, wobei vereinfachend angenommen wird, daß N mindestens von der Größenordnung $\log m$ ist. Nun läßt sich aber die so resultierende Schranke $\mathcal{O} \cdot (m \log m)\mu(N)$ noch unterbieten, selbst wenn die FFT im algebraischen Modell (bei Zählung aller Operationen) größenordnungsmäßig optimal sein sollte! – Die Grundidee ist denkbar einfach, doch zugleich von eminenter praktischer Bedeutung: Man ersetzt die Variable z durch die Zahl 2^K, wobei $K \geqslant 2N + \log(m+1) + 2$ gelten soll, und reduziert so die Multiplikation von zwei Polynomen auf die Multiplikation zweier langer Zahlen mit je $\mathcal{O} \cdot mN$ Stellen. So folgt

(3.1) Für $N \geqslant \log(m+1) \geqslant 1$ ist die Multiplikation komplexer Polynome vom Grade $\leqslant m$ in relativer Genauigkeit 2^{-N} in Zeit $\mathcal{O} \cdot \mu(mN)$ möglich.

Da umgekehrt jedes Verfahren der Polynommultiplikation ebenso zum Multiplizieren langer Zahlen benutzt werden kann, ist diese Schranke im wesentlichen optimal. Weitere Einzelheiten dieser Methode findet man in [16], wo auch die *Division mit Rest* für komplexe Polynome behandelt wird (s. dazu auch [14]). Dabei bedarf es zur Wahrung der numerischen Stabilität jedoch quantitativer Zusatzannahmen, die beim Divisor F eine Mindestgröße des Hauptkoeffizienten sichern, was im Kern der Sache bedeutet, den *Wurzelradius* $\varrho(F)$ nach oben zu beschränken. Ferner lehren einfache Beispiele wie

(3.2) $2^{-m}(z^2-1)^m / 2^{-m}(z-1)^m = (z+1)^m$,

daß der Quotient normierter Polynome groß sein kann oder auch, daß kleine Polynome große Teiler haben können. Dies nehme ich zum Anlaß, hier eine auch im weiteren zu beherzigende Faustregel zu propagieren: *Beim numerischen Umgang mit Polynomen vom Grade m sollte man mindestens m-stellig rechnen.* Im Sinne dieser Vorbemerkungen nun das Resultat aus [16], leicht variiert.

(3.3) Numerische Division von $G \in \Pi_m$ durch $F \in \Pi_n$, verstanden als die Aufgabe, zu gegebenen F, G, N mit $|G| \leqslant 1 \leqslant |F| \leqslant 2$ und $N \geqslant m \geqslant n \geqslant 1$ und bei zusätzlich gegebener Schranke $r \geqslant \varrho(F)$ Polynome $Q \in \Pi_{m-n}$ und $R \in \Pi_{n-1}$ zu berechnen, für die $|G-QF-R| < 2^{-N}$ gilt, ist in Zeit $\mathcal{O} \cdot \mu(mN + m^2 \log(1+r))$ möglich.

Häufig wird man schon aus der sonstigen Problemstellung Schranken wie $r=2$ kennen, so daß dann auch für die Division in N-stelliger Genauigkeit eine einfache Rechenzeitschranke der Form $\mathcal{O} \cdot \mu(mN)$ gilt.

Mittels dieser Resultate über die Multiplikation und Division von Polynomen lassen sich nun auch bei einigen eng verwandten Berechnungsaufgaben die dafür schon bekannten guten algebraischen Algorithmen (vgl. [3], [23, § 6]) relativ leicht ins Numerische übertragen – dazu einige Beispiele.

Gegeben seien die Nullstellen $u_1, \ldots, u_n$ eines Polynoms (z. B. sämtlich durch $|u_j| \leqslant 2$ beschränkt), dessen Koeffizienten auf 2^{-N} genau bestimmt werden sollen, wobei gemäß obiger Faustregel $N \geqslant n$ sei. Hierzu multipliziert man koeffizientenweise die Linearfaktoren $(1 \cdot z - u_j)$, was mittels Halbierungsstrategie nur etwa $\log n$ Durchgänge erfordert. So erhält man nach (3.1) als obere Schranke für die Bitkomplexität dieser Aufgabe den Ausdruck

$$(3.4) \qquad \mathcal{O} \cdot \left(\tfrac{1}{2} n \cdot \mu(N) + \tfrac{1}{4} n \cdot \mu(2N) + \ldots + \mu(nN)\right) \leqslant \mathcal{O} \cdot (n \log n) \cdot \mu(N).$$

Dies zeigt gute Übereinstimmung mit der unteren Schranke im algebraischen Modell, die Herr Strassen mit seiner Gradschrankenmethode [21] bewiesen hat, daß nämlich die Berechnung der n-stelligen symmetrischen Grundfunktionen mindestens $\log(n!) \approx n \log n$ nichtskalare Operationen erfordert. Man wird geneigt sein, diese Analogie als Anzeichen für die Optimalität der Schranke (3.4) zu sehen (natürlich relativ zur „wirklichen" Größe von $\mu(N)$), aber das erzeugt derzeit leider nur eine weitere Vermutung.

Als nächstes Problem von ganz ähnlicher Komplexität sei die *multiple Auswertung* erwähnt. Gegeben seien die Zähler- und Nennerkoeffizienten einer rationalen Funktion $f(z) = A(z)/B(z)$ vom Grade n sowie m Stellen $u_1, \ldots, u_m$ (z. B. wieder durch 2 beschränkt). Zu berechnen sind die Werte $f(u_j)$ jeweils auf 2^{-N} genau. Unter passenden Voraussetzungen wie $N \geqslant n$, $m \leqslant \mathcal{O} \cdot n$, $|A|, |B| \leqslant 1$, und $|B(u_j)| \geqslant 2^{-cN}$ für alle j erhält man auch hier, nunmehr durch Kombination von (3.1) und (3.3), wiederum die Rechenzeitschranke $\mathcal{O} \cdot (n \log n) \cdot \mu(N)$. – Analoges findet man übrigens auch für die polynomische *Interpolation,* sofern stabilisierende Voraussetzungen über die Verteilung der Interpolationsknoten zutreffen.

Diese Beispiele sollten aber nicht zu dem Fehlschluß verleiten, es ließe sich so – hinreichenden Fleiß bei der Erledigung der handwerklichen Einzelheiten vorausgesetzt – jeder im algebraischen Modell bekannte Algorithmus in die Numerik übersetzen. Grundsätzlich neue Schwierigkeiten treten z. B. auf, wenn man versucht, in dieser Weise die Kettenbruchalgorithmen aus [22] bzw. [23, § 8] zu adaptieren. Darauf werde ich in Abschnitt 5 näher eingehen.

4 Algorithmischer Umgang mit Potenzreihen

Analytische Funktionen können auf sehr verschiedene Weise gegeben sein, etwa durch Integraldarstellungen, als Lösungen von Differentialgleichungen, als Dirichletreihen und dergleichen. Von ganz prinzipieller Bedeutung ist dabei natürlich die lokale Darstellung durch Potenzreihen. Je nach geforderter Genauigkeit wird davon aber jeweils nur ein passender Abschnitt interessieren, so daß man letztlich doch wieder mit Polynomen operiert. Für die Maximum-Aufgabe (1.1) genügt es z. B., das Maximum des Abschnittspolynoms $f_k(z) = a_0 + \ldots + a_k z^k$ für $|z| = 1$ auf 2^{-k} genau zu bestimmen, sofern etwa $k = N+1$ gewählt wird. Typisch daran ist die Beschränkung $k \leqslant \Theta \cdot N$ des Polynomgrades durch die verlangte Stellenzahl, was unsere Faustregel zur Mindestgenauigkeit beim Rechnen mit Polynomen (hier in dualer Form) aufs Neue motiviert.

Umgekehrt kann es für das Operieren mit Polynomen aber auch hilfreich sein, bei Zwischenrechnungen mit formalen Potenzreihen zu operieren. Als typische Anwendung nenne ich die schnelle Division von Polynomen, die algebraisch mittels schneller Invertierung von Einheiten im Potenzreihenring gelingt. In [20] wird gezeigt, wie das z. B. mit einem Newton-Verfahren und schneller Polynommultiplikation geht. – Bei der numerischen Behandlung in [16] erwies es sich jedoch als günstiger, die gesuchten Koeffizienten $q_0, \ldots, q_m$ in

$$\frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n+m} z^{n+m}}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n} = q_0 + q_1 z + \ldots + q_m z^m + \ldots$$

(bei nicht zu kleinem b_0) direkt zu bestimmen, indem man Zähler und Nenner an passend gewählten kleinen Argumenten simultan auswertet und nach Division dieser Wertpaare rückinterpoliert, was auf drei schnelle Fouriertransformationen hinausläuft.

Eine besonders schöne Anwendung dieser lokalen Methode gibt Ritzmann in [14]. Dort geht es um die *Komposition* von Potenzreihen, also um die Aufgabe, zu vorgegebenen Reihen $A(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ und $B(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ das Kompositum

(4.1) $\quad F(z) = A(B(z)) = f_1 z + f_2 z^2 + \ldots + f_n z^n \bmod z^{n+1},$

d. h. die Koeffizienten $f_1, \ldots, f_n$ als Funktionen der a_j und b_j zu berechnen. Mit klassischen Methoden, wie man sie z. B. bei Henrici [9, § 1.6–9] findet, kostet das $\Theta \cdot n^3$ arithmetische Operationen, mit schneller Polynommultiplikation im Hornerschema „nur" noch $\Theta \cdot n^2 \log n$. Die beste bisher bekannte obere Schranke für die algebraische Komplexität dieser Aufgabe stammt von Brent und Kung [7], die mit $\Theta \cdot n^{3/2} (\log n)^{1/2}$ Operationen auskommen. Bei numerischer Rechnung auf Genauigkeit 2^{-N} wäre das nun noch mit $\Theta \cdot \mu(N)$ zu multiplizieren. Demgegenüber erzielt Herr Ritzmann in [14] für die Bitkomplexität der Komposition von Potenzreihen aber die deutlich bessere Schranke $\Theta \cdot (n \log n) \cdot \mu(N)$, die uns übrigens oben schon für die simultane Auswertung begegnete. Dabei sind wieder quantitative Bedingungen wie $|A|$, $|B| \leqslant 1$ und $N \geqslant n$ vorausgesetzt.

Ganz am Rande sei erwähnt, daß analoge Schranken bzw. Verfahren auch für die koeffizientenweise Berechnung der *Umkehrfunktion* gelten, wenn man also in (4.1) zu vorgegebener Reihe $B(z)$ die Koeffizienten von $A(z)$ so zu bestimmen hat, daß $F(z) \equiv z \bmod z^{n+1}$ gilt. Natürlich sollte dabei $|b_1|$ eine gewisse Mindestgröße haben.

Von speziellem Interesse sind Logarithmus und Exponentialfunktion – hier als Operatoren im Potenzreihenkalkül gemeint –, für die es besonders schnelle Algorithmen gibt. Formale Differentiation von

$$(4.2) \quad F(z) = \ln(1 + B(z)) = B(z) - \tfrac{1}{2} B(z)^2 + \ldots$$

liefert $F'(z) = B'(z)/(1 + B(z))$, also lassen sich die Koeffizienten von $F(z)$ durch gliedweise Differentiation von $B(z)$, Potenzreihendivision und gliedweise Integration berechnen. Numerisch geht das auf Grad n und Fehler 2^{-N} genau nach (3.3) in Zeit $\mathcal{O} \cdot \mu(nN)$, sofern etwa $|B| \leqslant 1$ und $N \geqslant n$ gilt. Die Umkehrung

$$(4.3) \quad B(z) = \exp(F(z)) - 1 = F(z) + F(z)^2/2! + F(z)^3/3! + \ldots$$

findet man als Lösung der Gleichung $F - \ln(1+B) = 0$ mit einem formalen Newton-Verfahren, das z. B. mit $B_1(z) = f_1 \cdot z \bmod z^2$ genau beginnt und iterativ

$$(4.4) \quad B_{k+1} = B_k + (F - \ln(1 + B_k)) \cdot (1 + B_k)$$

auf 2^{k+1} Glieder genau bestimmt.

Als Anwendung des Operators (4.3) sei schließlich noch die Umrechnung der *Potenzsummen* $s_m = \Sigma_\nu u_\nu^m$ der Nullstellen eines Polynoms in dessen Koeffizienten erwähnt, also die Umrechnung in die symmetrischen Grundfunktionen σ_j der u_ν. Logarithmische Differentiation von $(1 - u_1 z)(1 - u_2 z) \ldots (1 - u_n z)$ und Reihenentwicklung liefert nämlich

$$(4.5) \quad 1 - \sigma_1 z + \sigma_2 z^2 - \ldots \pm \sigma_n z^n = \exp\left(- \sum_{m=1}^{\infty} (s_m/m) \cdot z^m\right),$$

so daß die Iteration (4.4) benutzt werden kann. – Numerische Einzelheiten dieser Methode werden in [17, § 13] diskutiert.

5 Produktdarstellungen und Partialbruchzerlegung

Die näherungsweise Berechnung von Nullstellen kann je nach der Natur der betrachteten Funktion ganz individuelle Methoden erfordern. Als prominentes Beispiel nenne ich die extensiven Berechnungen zur Überprüfung der Riemannschen Vermutung und zur Lokalisierung vieler Millionen von Nullstellen der Zetafunktion auf der kritischen Geraden (vgl. [12] und die dort zitierte Literatur). Hier mag es genügen, ein für holomorphe Funktionen allgemein anwendbares Verfahren zur lokalen Reduktion auf Polynomnullstellen zu skizzieren, das von Delves und Lyness [8] vorgeschlagen wurde.

Nach der Grundidee dieser Autoren wird jeweils nur nach den Nullstellen $u_1, \ldots, u_n$ von f innerhalb einer einfach geschlossenen Kontur K gesucht, wobei vorausgesetzt sei, daß f dort holomorph ist und auf K keine Nullstelle hat. Dann hat man für die Potenzsummen der u_ν die Integraldarstellung

$$(5.1) \qquad s_m = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z)}{f(z)} z^m \, dz,$$

mit $s_0 = n$ also insbesondere auch die Nullstellenanzahl. Aus diesen Daten ist das Polynom mit genau den Nullstellen $u_1, \ldots, u_n$ mittels der Umrechnung nach (4.5) leicht bestimmbar.

Es bleibt als wesentliche Aufgabe, die Integrale in (5.1) für $1 \leqslant m \leqslant n$ hinreichend genau zu berechnen. Numerisch stabil wird das nur gehen, wenn die Nullstellen von f einen Mindestabstand zu K haben. Ferner wird der Rechenaufwand auch von der Form der Kontur K abhängen. Besonders günstig sind in dieser Hinsicht *Kreise,* weil dann die numerische Integration in (5.1) mittels schneller Fourier-transformation möglich ist. Für das delikate Problem, einen Kreis K so zu wählen, daß er keiner Nullstelle von f zu nahe kommt, wird in [8] keine Lösung angeboten. Mein Vorschlag ist, dafür das Graeffesche Verfahren zu benutzen; die theoretischen Grundlagen dazu findet man z. B. in der umfangreichen Arbeit [13] von A. Ostrowski.

Eben diese Methode ist auch eines der Grundelemente des von mir entwickelten Trennkreisverfahrens zur näherungsweisen Faktorisierung von Polynomen. Dazu existiert bisher die vorläufige Darstellung [17] und der Überblick in [19, § 3]. Hier möchte ich lediglich das Hauptresultat wiedergeben.

(5.2) Approximative Faktorisierung von $P \in \Pi_n$, verstanden als die Aufgabe, zu gegebenen P, N mit $|P| \leqslant 1$ und $N > 0$ Linearfaktoren $L_j(z) = u_j z + v_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ zu berechnen, mit denen $|P - L_1 L_2 \ldots L_n| < 2^{-N}$ gilt, ist in Zeit $\mathcal{O} \cdot n \cdot \mu(n^2 \log n) + \mathcal{O} \cdot n \cdot \mu(nN)$ möglich.

Wie der Vergleich mit (3.4) zeigt, ist dies etwa um einen Faktor n größer als die dort gegebene Schranke für die Bitkomplexität, mit bekannten Linearfaktoren die Probe zu rechnen. Beim jetzigen Stand ist schwer abschätzbar, wie weit (5.2) noch verbessert werden kann, welche Komplexität also die Aufgabe der approximativen Faktorisierung tatsächlich hat.

Bei Voraussetzung einer Mindestgröße von P wie z. B. $|P| \geqslant \frac{1}{2}$ kann man aus den Linearfaktoren $u_j z + v_j$ Näherungswerte $w_j = -v_j/u_j$ für die Nullstellen z_j von P berechnen (oder $-u_j/v_j$ als Näherung für $1/z_j$, falls $|u_j| < |v_j|$ gilt). Diese Näherungen sind meist weit weniger genau als die Faktorisierung; viel schlimmer als bei der Störung von $z^n - 2^{-N}$ zu z^n kann es andererseits aber nicht kommen. Nach [18, Thm. 2.7] gilt nämlich, sofern mindestens $N \geqslant 7n$ ist, bei passender Numerierung stets

$$(5.3) \qquad |z_j - w_j| < 9 \cdot 2^{-N/n} \quad \text{bzw.} \quad |1/z_j - 1/w_j| < 9 \cdot 2^{-N/n}.$$

Bei Verteilung der w_j in vielen separaten kleinen Haufen gelten natürlich entsprechend günstigere Schranken, was bei der praktischen Anwendung für

Abschätzungen *a posteriori* genutzt werden kann. Man sollte allerdings vorab jeweils sorgfältig prüfen, ob die Berechnung der Nullstellen selbst überhaupt erforderlich ist. Häufig wird nämlich allein die angenäherte Produktdarstellung schon völlig ausreichend sein. Ein Beispiel dieser Art ist mit der folgenden Methode für Aufgabe (1.1) gegeben.

Nach den Bemerkungen am Anfang von Abschnitt 4 genügt es, Aufgabe (1.1) für Polynome f vom Grade $k \leqslant \Theta \cdot N$ zu behandeln. Sofern nicht $|f| < 2^{-N}$ gilt (dann ist $\tilde{M} = 0$ eine hinreichend gute Näherung für das Maximum M), kann nach entsprechender Umskalierung z. B. $1 \leqslant \max |a_n| \leqslant 2$ vorausgesetzt werden, was $M \geqslant 1$ impliziert. Ferner reduziert die für $|z| = 1$ gültige Identität $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \bar{f}(1/z)$ mittels der Hilfsfunktionen

$$(5.4) \qquad h(t) = g(e^{it}), \qquad g(z) = f(z) \cdot \bar{f}(1/z)$$

auf die reelle Aufgabe, $M^2 = \max_t h(t)$ zu bestimmen. Dieses Maximum wird in einer Nullstelle τ von $h'(t) = i \cdot e^{it} \cdot g'(e^{it})$ angenommen, das gesuchte Maximum von $|f(z)|$ also in $z_0 = e^{i\tau}$. Dieses z_0 vom Betrage 1 ist Nullstelle des mit $iz \cdot g'(z) = P(z)/z^k$ definierten Polynoms P vom Grade $\leqslant 2k$, dessen Koeffizienten sich (im wesentlichen) mittels einer Faltung aus den Koeffizienten von f finden lassen. Falls $P = 0$, dann genügt es, als Maximum z. B. $|f(1)|$ zu berechnen. Sonst bietet sich an, zuerst die Nullstellen von P auf dem Einheitskreis zu berechnen und dann das Maximum von $|f(z)|$ auf dieser endlichen Menge zu bestimmen. Numerisch sind mit solchem Vorgehen allerdings zusätzliche Probleme quantitativer Art verbunden: Wie genau sind die Nullstellen zu berechnen, oder wie sind Nullstellen zu berücksichtigen, deren Betrag etwas (aber nicht zu sehr) von 1 abweicht? – Ganz robust hingegen ist die folgende Variante der genannten Grundidee.

(5.5) *Algorithmus zu* Aufgabe (1.1) *für* $f \in \Pi_k$:

(a) Berechne gemäß (5.4) aus den Koeffizienten von f die Koeffizienten von $P(z) = i \cdot z^{k+1} g'(z)$.

(b) Berechne zu P eine approximative Faktorisierung F mit $|F - P| < \varepsilon = 2^{-(N+2k+3)}$, wobei die Linearfaktoren in $F(z) = c \cdot L_1(z) \dots L_{2k}(z)$ in der Form $z - v_j$ oder $1 - u_j z$ mit $|v_j|$, $|u_j| \leqslant 1$ normiert seien.

(c) Setze (falls $c \neq 0$) für die von Null verschiedenen v_j oder u_j aus (b) normierend $z_j = v_j/|v_j|$ bzw. $z_j = u_j/|u_j|$, sonst $z_j = 1$.

(d) Berechne $\tilde{M} = \max_j |f(z_j)|$.

Bis auf leicht beherrschbare Fehler in den Einzelrechnungen, die bei dieser pauschalen Beschreibung des Algorithmus nicht zum Ausdruck kommen, kann $\tilde{M}$ aus (d) jedenfalls nicht größer als das gesuchte Maximum M sein. Daß andererseits $M - \tilde{M} \leqslant M^2 - \tilde{M}^2 \leqslant g(z_0) - g(z_j)$ bei passendem j nicht zu groß werden kann, folgt durch Betrachtung einer Stelle z_j, die auf dem Einheitskreis der wahren Maximum-stelle z_0 am nächsten liegt. Ersetzt man nämlich in $F(z)$ die Linearfaktoren $1-u_j z$ durch die für $|z|=1$ betragsgleichen Faktoren $z-\bar{u}_j$, dann gilt mit dem so entstehenden Polynom G auf dem Bogen von z_0 nach z_j die Abschätzung $|h'(t)|=|P(e^{it})|<\varepsilon+|G(e^{it})|$, und $P(z_0)=0$ impliziert $|G(z_0)|=|F(z_0)|<\varepsilon$. Aufgrund der Wahl von z_j kann man dann schließen, daß überall auf diesem Bogen $|G(e^{it})|<\varepsilon\cdot 2^{2k-1}$ gilt, was der Grund für die Wahl von ε in (5.5b) ist. – Mittels feinerer Studien findet man übrigens auf mindestens einem der an z_0 angrenzenden Bögen die bessere Schranke $|G(e^{it})|<\varepsilon\cdot(e/2)^k$, so daß im Ausdruck für ε statt $2k$ z. B. auch schon $\frac{1}{2}k$ reichen würde. – Insgesamt zeigt diese Analyse, daß z_j bzw. die Nullstellennäherung v_j oder $1/u_j$ zwar relativ weit von z_0 entfernt sein kann, daß dann aber g dort (wegen sich häufender Nullstellen von g') ein sehr flaches Maximum haben wird.

Nach der in Abschnitt 3 erwähnten Schranke für die multiple Auswertung eines Polynoms geht Teil (d) recht schnell. Der größte Aufwand im Algorithmus (5.5) entsteht in (b); dafür gibt (5.2) mit $k\leqslant\Theta\cdot N$ die Schranke $\Theta\cdot N\cdot\mu(N^2\log N)$. Also ist die Bitkomplexität von Aufgabe (1.1) höchstens $N^{3+o(1)}$.

Bei der zweiten in der Überschrift zu diesem Abschnitt genannten Aufgabe der *Partialbruchzerlegung* will ich mich sogleich auf den Fall rationaler Funktionen $P(z)/Q(z)$ beschränken, die jeweils durch die Zähler- und Nennerkoeffizienten gegeben seien. Grundsätzlich ist zu beachten, daß es wegen der auftretenden Unstetigkeiten nicht in voller Allgemeinheit möglich ist, jeweils *die* Partialbruchzerlegung zu berechnen, wie man am Beispiel $1/(z^2+\alpha)$ wegen der Unentscheidbarkeit von $\alpha=0$ sieht. Ebenso ist es nicht immer möglich, zu gegebenen P und Q die gekürzte Darstellung von P/Q zu bestimmen. Die damit angesprochene Aufgabe, den größten gemeinsamen Teiler komplexer Polynome zu finden, ist gerade wegen dieser Problematik nicht einfach durch Adaption der algebraischen Algorithmen lösbar. Als Alternative bietet sich an, sogenannte „Quasi-GGT" zu betrachten, die in gewissem Sinne einen approximativen Ersatz darstellen. In [18] wird dazu folgende Aufgabe behandelt.

(5.6) Gegeben seien $F\in\Pi_n$, $G\in\Pi_{n-1}$ mit $|F|, |G|\in[\frac{1}{2}, 1]$, $\varrho(F)\leqslant\frac{1}{4}$, und eine Fehlerschranke $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2}]$; zu berechnen sind (mit passendem $k\leqslant n-1$) Polynome $H\in\Pi_k$, $U, V\in\Pi_{n-1}$, so daß (a) und (b) gelten:

(a) $\exists\ F_1\in\Pi_{n-k}, G_1\in\Pi_{n-1-k}$: $|HF_1-F|<\varepsilon$ und $|HG_1-G|<\varepsilon$;

(b) $|UF+VG-H|<\varepsilon\cdot|H|$.

Die mehr technische Beschränkung des Wurzelradius von F durch $\frac{1}{4}$ kann stets mittels einer vorbereitenden linearen Transformation erreicht werden. Der Grad von G könnte allgemeiner auch ein $m\geqslant n$ sein; dann aber reduziert eine erste Division durch F auf die hier gewählte Situation (oder es liegt „Quasi-Teilbarkeit" vor, vgl. [18, § 2]). Bedingung (a) besagt, daß solch ein Quasi-GGT H approximativer Teiler von F und von G ist, also in der multiplikativen Ordnung nicht zu groß ist, während (b) fordert, daß H andererseits dem von F und G erzeugten Ideal hinreichend nahe ist – alles in der Toleranz ε. Der in [18] beschriebene Algorithmus liefert als Hauptresultat die folgende Komplexitätsschranke.

(5.7) Aufgabe (5.6) ist in Rechenzeit $\mathcal{O}\cdot(n\log n)\cdot\mu(N)$ lösbar, mit einem $N\leqslant\mathcal{O}\cdot(n\log(1/\varepsilon)+n^2\log n)$, so daß außerdem $|U|, |V|<2^N|H|$ gilt.

Es ist bemerkenswert, daß diese Schranke bis auf einen Faktor der Ordnung $\log 2n$ mit der Schranke in (5.2) für die approximative Faktorisierung übereinstimmt, obwohl die betreffenden Algorithmen sehr verschieden voneinander sind.

Neben der Möglichkeit, einen Quasi-GGT fürs approximative Kürzen zu bestimmen, läßt sich die Quasi-GGT-Berechnung für die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen P/Q auch noch in anderer Weise nutzen, die hier am *stabilen* Fall erläutert werden soll, daß für $Q=FG$ mit deutlich teilerfremden F, G die *teilweise* Zerlegung $P/Q=f/F+g/G$ gesucht wird (vgl. auch [9, p. 553]). Genauer sollen die Nullstellen v_j von F und w_j von G einen Mindestabstand $|v_i-w_j|\geqslant\delta>0$ haben, und ohne wesentliche Einschränkung darf angenommen werden, daß die Voraussetzungen in (5.6) erfüllt sind. Dann genügt es, eine Zerlegung $1/(FG)=V/F+U/G$ in hinreichender Genauigkeit zu berechnen, die dann einfach mit dem Zähler P multipliziert werden kann. Es kommt also darauf hinaus, durch Wahl von geeignet kleinem ε die Bedingung (5.6b) mit $H=1$ oder (von Normierung abgesehen) mit $k=0$ zu realisieren. Dazu ist z. B. $\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}(\delta/18)^n$ mit $\delta\leqslant 1/8$ hinreichend; wäre nämlich $k\geqslant 1$, dann hätte H eine Nullstelle u; diese hätte nach (5.3) - hier mit 2ε statt 2^{-N} - wegen $|HF_1-F|<2\varepsilon|F|$ einen Abstand $<9\cdot(2\varepsilon)^{1/n}$ zu einer Nullstelle v_i von F, ebenso zu einer Nullstelle w_j von G, entgegen $|v_i-w_j|\geqslant\delta\geqslant 18\cdot(2\varepsilon)^{1/n}$. Für die teilweise Partialbruchzerlegung in dieser Mindestgenauigkeit ergibt sich so die Schranke (5.7) mit einem $N\leqslant\mathcal{O}\cdot n^2(\log(18/\delta)+\log n)$.

Für weitere Steigerung der Genauigkeit ist die Anwendung eines *Iterationsverfahrens* zu empfehlen, das in $UF+VG=1$ das eindeutig bestimmte $V\in\Pi_{n-1}$ als Inverses zu G mod F approximiert, indem eine jeweils erreichte Näherung V_j mit Defekt $V_jG\equiv 1-D_j \bmod F$ zu $V_{j+1}\equiv(1+D_j)V_j \bmod F$ verbessert wird (vgl. [18, p. 129]). Falls die Aufspaltung des Nennerpolynoms Q in die teilerfremden Faktoren F, G nach dem Trennkreisverfahren erfolgt, dann kann man diese Iteration mit der schrittweisen Verbesserung der approximativen Faktorisierung koppeln, wie es in [17, § 11] näher beschrieben ist.

6 Die Komplexität der algebraischen Funktionen

Die Frage, wie schnell sich $f(z)$ auf 2^{-N} genau berechnen läßt, wie also der Rechenaufwand mit $N\to\infty$ wächst, kann schon für einzelne Funktionswerte sehr interessant sein, wie die Beispiele $\sqrt{3}$, $\ln 5$, $\zeta(2)$ zeigen. Die Komplexität einer *Funktion* f hingegen wird man eher daran messen, wie schnell sich $f(z)$ für beliebige z aus einer ganzen Umgebung berechnen läßt, also nach Schranken fragen, die für gewisse Bereiche *uniform* gelten. In diesem Sinne hat man für die Klasse der *algebraischen* Funktionen eine überraschend einfache Beschreibung ihrer Komplexität: *Sie lassen sich so schnell berechnen, wie man lange Zahlen multiplizieren kann.* Genauer ist diese Redeweise als Fazit aus den folgenden Aussagen über obere und untere Schranken zu verstehen.

(6.1) Seien $A_0(v), \ldots, A_n(v)$ ganzzahlige Polynome in komplexen Variablen $v_1, \ldots, v_k$, und sei $K \subseteq \mathbb{C}^k$ ein Kompaktum mit $\Sigma_j\, |A_j(v)| \geqslant \delta > 0$ für $v \in K$. Dann lassen sich die Zweige der durch die Gleichung $F(z, v_1, \ldots, v_k) = \Sigma_j A_j(v) z^j = 0$ erklärten algebraischen Funktionen für $v \in K$ auf relative Genauigkeit 2^{-N} in Zeit $O \cdot \mu(N)$ berechnen, wobei $\mu(N)$ eine Rechenzeitschranke für die Multiplikation N-stelliger Binärzahlen bezeichnet (für die $\mu(N)/N$ monoton in N ist).

(6.2) Sei f eine in $U \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, nicht linear, und für beliebige $z \in U$ jeweils in Zeit $\leqslant \tau(N)$ auf 2^{-N} genau berechenbar; außerdem sei $\tau(N)/N$ monoton in N.

Dann geht die Multiplikation N-stelliger Binärzahlen in Zeit $O \cdot \tau(N)$.

Falls man (6.1) auf Gleichungen F und Kompakta K beschränkt, die einen regulären Auflösungszweig f definieren, dann folgt diese Aussage durch simple lokale Anwendung eines Newton-Verfahrens (vgl. [5, p. 215]). Die hier gewählte stärkere Form ergibt sich aus (5.2) kombiniert mit (5.3), wobei große z wieder durch ihre Reziprokwerte repräsentiert sein sollen.

Die komplementäre Aussage (6.2), daß die Komplexität der Zahlenmultiplikation andererseits eine untere Schranke für die Berechnungskomplexität beliebiger holomorpher Funktionen darstellt (von $\alpha z + \beta$ abgesehen), beruht auf einer Idee von H. Alt [1]. Nach den Voraussetzungen existiert eine (endlichstellige) Binärzahl $a \in U$ mit $f''(a) = c \neq 0$. Alsdann zeigt

$$f(a+z) + f(a-z) - 2f(a) = c \cdot z^2 + O \cdot |z|^4$$

mit $z = 2^{-2s}x$ für beliebige s-stellige ganze Zahlen x, wie mittels dreier hinreichend genauer Auswertungen von f eine gute Approximation für $c \cdot z^2$ gefunden werden kann. Damit kann man dann $c \cdot uv = \frac{1}{4}(c(u+v)^2 - c(u-v)^2)$ und $c^2 \cdot ux^2$ berechnen, die Newton-Iteration $t' = 2t - c^2t^2$ approximiert $1/c^2$, und so erhält man schließlich auch $uv = c \cdot (c \cdot uv)(1/c^2)$ für ganze Zahlen u, v als exaktes Resultat nach Rundung.

Es ist derzeit eine offene Frage, ob diese minimale Komplexität die algebraischen Funktionen charakterisiert oder ob es auch noch andere analytische Funktionen gibt, die sich so schnell berechnen lassen. Insbesondere wäre interessant zu wissen, ob *ganze transzendente* Funktionen f existieren, die eine Berechnung von $f(z)$ auf 2^{-N} genau in $O \cdot \mu(N)$ zulassen.

7 AGM-Iteration und die Berechnung elementarer Funktionen

Für die elementaren Funktionen ist die beste bisher bekannte Komplexitätsschranke um einen Faktor der Ordnung $\log N$ größer.

(7.1) Die Berechnung der Funktionen exp, sin, cos, tan und ihrer Umkehrfunktionen auf 2^{-N} genau ist in kompakten Teilen ihrer Definitionsbereiche jeweils mit Aufwand $O \cdot \mu(N) \cdot \log N$ möglich.

R. Brent [6] hat dies mittels elliptischer Funktionen und Anwendung der Landenschen Transformation bewiesen. Andere Zugänge mit besonderer Betonung der schnellen Berechnung von π findet man in [4, 5]. Besonders einfach sind die Methoden, die sich direkt auf einige Grundeigenschaften des AGM stützen. Solch ein elementarer Weg zum Beweis von (7.1) soll hier angedeutet werden.

Für positive a_0, b_0 ist das arithmetisch-geometrische Mittel $M = M(a_0, b_0)$ als gemeinsamer Limes der mit

$$(7.2) \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n), \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

rekursiv definierten Folgen erklärt. Diese Funktion wird auf komplexe Argumente in der rechten Halbebene fortgesetzt, indem man in (7.2) stets die Wurzel mit positivem Realteil wählt. Grundlegend ist die von Gauß entdeckte Invarianz des elliptischen Integrals

$$(7.3) \qquad I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2} \cdot \sqrt{b^2 + x^2}}$$

unter dieser Iteration, also $I(a, b) = I(\frac{1}{2}(a + b), ab)$, was man z. B. mittels der Substitution $\frac{1}{2}(x - ab/x) = x'$ im zweiten Integral in (7.3) beweist. Grenzübergang mit $n \to \infty$ liefert so die Identität

$$I(a_0, b_0) = I(a_1, b_1) = \ldots = I(M, M) = \tfrac{1}{2}\pi/M(a_0, b_0).$$

Nun betrachte ich für komplexe $v = re^{it}$, $0 < r \leqslant \frac{1}{2}$, $|t| \leqslant \pi/4$ die Hilfsfunktion $h(v) = I(1, v) = \frac{1}{2}\pi/M(1, v)$. Mit einigem handwerklichen Aufwand beweist man aus der Darstellung (7.3), daß

$$(7.4) \qquad h'(v) = -1/v + R(v) \quad \text{mit} \quad |R(v)| \leqslant \tfrac{1}{2}|v| \cdot \ln(2/|v|)$$

gilt, indem man zur Abschätzung des Restglieds

$$R(v) = v \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1 + \sqrt{1 + v^2 x^2}) \cdot \sqrt{1 + v^2 x^2}} \cdot \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

das Integrationsintervall $(0, \infty)$ in $(0, y]$ und $[y, \infty)$ aufteilt, wobei $y = 2/|v|$ gewählt wird.

Der Kerngedanke für das Weitere ist, in (7.4) stückweise über kleine v zu integrieren, um so ln zu approximieren. Die Ausführung dieser Idee ergibt für kleine $\delta < 0$ und beliebige z im Bereich $B = \{re^{it}\colon 1 \leqslant r \leqslant 2, |t| \leqslant \pi/4\}$ mit jeweils passendem θ, $|\theta| \leqslant 1$, die Näherungsformel

$$(7.5) \qquad \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{M}(1, \delta)} - \frac{1}{M(1, \delta z)} \right) = \ln z + \theta \cdot \tfrac{1}{2}\delta^2 |z - 1| \cdot \ln(2/\delta).$$

Sofern π schon hinreichend genau bekannt ist, erlaubt dies mit $\delta = 2^{-N}$ die Berechnung von $\ln z$ auf etwa $2N - \log N$ Stellen genau. Man kann (7.5) aber auch zur Berechnung von π benutzen, indem man $z = 1 + \delta$ einsetzt und $\ln(1+\delta) = \delta - \frac{1}{2}\delta^2 + \ldots$ benutzt, wieder mit $\delta = 2^{-N}$. Das liefert dann auf etwa $2N - \log N$ Stellen genau

$$(7.6) \qquad \pi \approx (2\delta - \delta^2) \Big/ \left(\frac{1}{M(1,\delta)} - \frac{1}{M(1,\delta+\delta^2)} \right).$$

Die in (7.5) und (7.6) auftretenden AGM-Werte lassen sich mit $O \cdot \log N$ Schritten der AGM-Iteration (7.2) auf $2N$ bzw. $3N$ Stellen genau berechnen, wobei jeder dieser Schritte in etwa solcher Genauigkeit auszuführen ist. Das geht jeweils mit Aufwand $O \cdot \mu(N)$; statt der Wurzel aus $y = a_n b_n$ berechnet man z. B. erst $1/\sqrt{y}$ mittels einer divisionsfreien Newton-Iteration und multipliziert dann mit y. So folgt mit insgesamt drei AGM-Auswertungen die Aussage (7.1) für die Berechnung von $\ln z$ in jenem Bereich B.

Für andere Bereiche benutzt man die Funktionalgleichung des Logarithmus zur Abspaltung geeigneter Potenzen von i und von 2. Dabei kommt zu statten, daß man $\frac{1}{2}\pi = (\ln i)/i$ für (7.5) ohnehin schon mitberechnet hat, ebenso übrigens auch $\ln 2$, denn weiteres Studium der Hilfsfunktion h zeigt, daß

$$h(\delta) = \frac{1}{2}\pi / M(1,\delta) = \ln(4/\delta) + O \cdot \delta^2 \ln(1/\delta)$$

und somit $\frac{1}{2}\pi / M(1, 2^{-N}) \approx (N+2)\ln 2$ in hinreichender Genauigkeit gilt.

Für die anderen Umkehrfunktionen folgt (7.1) nun für kleine z mittels

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), \qquad \arcsin z = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

und sonst wieder durch passende Anwendung von Funktionalgleichungen. Entsprechend läßt sich die Berechnung von sin, cos, tan auf Auswertungen der Exponentialfunktion reduzieren. Es bleibt also zu diskutieren, wie man e^w für komplexe w, etwa für $|w| \leqslant \frac{1}{2}$, schnell berechnen kann.

Die naheliegende Idee, $\exp(w/2^m)$ bei geschickter Wahl von m mit einem Abschnitt der Taylorreihe zu approximieren und dann m-fach zu quadrieren, ist zwar bei mäßiger Stellenzahl durchaus von praktischem Interesse, für den Beweis der asymptotischen Aussage (7.1) aber nicht ausreichend. Auch hier ist der Schlüssel die schnelle Berechnung des Logarithmus. Beginnend mit dem Anfangswert $z_0 = 1 + w$ wird e^w als Nullstelle von $g(z) = w - \ln z$ mittels der Newton-Iteration $z_{n+1} = z_n + z_n(w - \ln z_n)$ approximiert. Dabei wird ausgenutzt, daß wegen der Selbstkorrektur des Verfahrens der n-te Schritt nur in einer zu 2^n proportionalen Stellenzahl ausgeführt zu werden braucht. So ergibt sich die gewünschte Rechenzeitschranke schließlich durch Summation endlich vieler Glieder einer geometrischen Reihe.

Es wäre sicherlich wünschenswert, statt dieses „Umwegs" über den Logarithmus eine mehr direkte Berechnungsmethode für die Exponentialfunktion zu finden, die ebenso schnell ist; das aber ist bis heute nicht gelungen. Darüberhinaus ist natürlich zu fragen, ob die in (7.1) genannte Schranke in ihrer asymptotischen Größenordnung bestmöglich ist. Damit eng verwandt ist die Frage nach der Komplexität der Aufgabe, zu gegebenem x mit $1<x<2$ und $N=2^n$ die Potenz x^N auf 2^{-N} genau zu berechnen. Hinsichtlich der algebraischen Komplexität ist dafür die Methode, n-fach zu quadrieren, in der Tat optimal, und die entsprechende Schranke $\mathcal{O}\cdot n\cdot\mu(N)$ stimmt auch gerade mit dem überein, was (7.1) für die Berechnung von $\exp(N\ln x)$ auf 2^{-N} genau liefert. Gleichwohl ist nicht völlig ausgeschlossen, daß die Bitkomplexität dieser Aufgabe vielleicht doch noch deutlich kleiner ist.

8 Die Berechnung von $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ für große t

In diesem letzten Abschnitt möchte ich ein algorithmisches Problem diskutieren, das sich bei Rechnungen zur Überprüfung der Riemannschen Vermutung stellt: *Wie schnell läßt sich $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ auf t^{-c} genau berechnen*? – Dabei ist an konstantes c mäßiger Größe wie $c=1$ oder $c=2$ gedacht, während aber t sehr groß sein kann. Ganz handgreiflich kann diese Frage auch so gewendet werden: Angenommen, die erste vom Realteil $\frac{1}{2}$ abweichende Nullstelle der Zetafunktion hätte einen Imaginärteil $t\approx 10^{123}$, wären wir dann jemals in der Lage, dies rechnerisch direkt zu verifizieren? – Hinsichtlich der einschlägigen Literatur und einiger wohlbekannter Tatsachen, die im folgenden benutzt werden, sei auf die Arbeit [12] verwiesen, in der die verwandte Frage der *multiplen* Auswertung der Zetafunktion behandelt wird.

Nach der Riemann-Siegel-Formel läßt sich die Zetafunktion im kritischen Streifen in der für rechnerische Zwecke besonders günstigen Form

$$(8.1)\qquad \zeta(s)=\sum_{n\leqslant M} n^{-s}+\chi(s)\sum_{n\leqslant M'} n^{s-1}+R(s)$$

darstellen, wobei für $s=\frac{1}{2}+it$ mit $M=M'=\sqrt{t/2\pi}$ das Restglied $R(s)$ gut kontrolliert ist und auf die hier verlangte Genauigkeit relativ schnell, nämlich in $t^{o(1)}$, berechnet werden kann. Gleiches gilt für den Drehfaktor

$$\chi(\tfrac{1}{2}+it)=\frac{\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}it)}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it)}\cdot\pi^{it}$$

vom Betrage 1, so daß als Kernproblem die Auswertung von Summen der Form

$$(8.2)\qquad A(t,M)=\sum_{n\leqslant M} n^{-1/2}\cdot\exp(it\ln n)\quad\text{mit}\quad M\leqslant\mathcal{O}\cdot t^{1/2}$$

zu diskutieren bleibt. Bei der Berechnung der Nullstellen pflegt man (8.1) ins Reelle zu drehen, für das Weitere aber ist die komplexe Form (8.2) günstiger. Da jeder der Summanden nur auf $\mathcal{O}\cdot\log t$ Stellen benötigt wird, ist die Berechnung durch einfache Summation jedenfalls mit einem Aufwand $\mathcal{O}\cdot t^{1/2}(\log t)^2 \leqslant t^{1/2+o(1)}$ möglich. Den zahlreichen Vermutungen über das Verhalten der Zetafunktion auf der kritischen Geraden kann man nun die weitere Frage hinzufügen, ob sich $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ auch schon mit Aufwand $t^{o(1)}$ berechnen läßt. Ein kleiner Schritt in diese Richtung ist das folgende Resultat.[1])

(8.3) Für jeweils festes c lassen sich Summen der Form (8.2) und damit auch $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ in Zeit $t^{3/8+o(1)}$ berechnen.

Zum Beweis beschreibe ich einen Algorithmus, der im wesentlichen auf einer Zerlegung in *trigonometrische Summen* passender Längen beruht, die sich sparsamer berechnen lassen. Zu Beginn aber soll kurz auch die naheliegende Idee besprochen werden, die Primfaktorzerlegung der n in (8.2) auszunutzen. Vorziehen der in n steckenden Potenzen von $p=2$ z. B. ergibt die Darstellung

$$(8.4)\qquad A(t,M)=\sum_{m\geqslant 0}\left(1+2^{it-\frac{1}{2}}+4^{it-\frac{1}{2}}+\ldots+2^{m\left(it-\frac{1}{2}\right)}\right)B(t,M/2^{m+1})$$

mit den jeweils nur über *ungerade* natürliche Zahlen u erstreckten Summen

$$(8.5)\qquad B(t,N)=\sum_{N<u\leqslant 2N} u^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp(it\ln u).$$

Dies reduziert den bei naivem Vorgehen entstehenden Rechenaufwand etwa auf die Hälfte. Analoges Sieben mit weiteren kleinen Primzahlen führt aber bald zu sehr vielen Teilsummen bei nur bescheidenen Gewinnen in der Rechenzeit, so daß allein auf diesem Wege eine Schranke wie (8.3) nicht erreichbar zu sein scheint. Der erste Schritt mit $p=2$ hingegen ist für das Folgende ganz nützlich. Da (8.4) nur $\mathcal{O}\cdot\log t$ Summanden enthält, genügt es, die Behauptung (8.3) für die Summen in (8.5) zu beweisen, wobei z. B. $3\cdot t^{3/8}\leqslant N\leqslant \mathcal{O}\cdot t^{1/2}$ vorausgesetzt werden darf, denn bei kleineren Werten von N ist ja schon die triviale Methode hinreichend schnell. Für jene größeren N zerlege ich nun $B(t,N)$ in Teilsummen, deren Länge durch die halbe Zahl $K=[N/(2t^{3/8})]-\frac{1}{2}$ in folgender Weise bestimmt wird ($2K$ ist die größte ungerade Zahl $\leqslant N/t^{3/8}$): Die ungeraden $u\in(N,2N]$ werden in Abschnitte zu je $2K$ Elementen eingeteilt (mit weniger als $2K$ restlichen am oberen Ende), die sich vom jeweiligen mittleren Element v ausgehend durch $u=v+2k$ mit $|k|<K$ (k ganz) parametrisieren lassen. Bezeichnet nun V die Menge solcher mittleren v, dann gilt

$$(8.6)\qquad B(t,N)=\sum_{v\in V} v^{-1/2}\cdot\exp(it\ln v)\cdot S(t,v,K)+\text{restliche Terme}$$

mit den „kurzen“ Summen

$$(8.7)\qquad S(t,v,K)=\sum_{-K<k<K}(1+2k/v)^{-1/2}\exp(it\ln(1+2k/v)).$$

---

[1]) Vom Autor während eines Forschungsaufenthalts bei den AT&T Bell Labs im Sommer 1986 gefunden.

Die Zahl der Summanden in (8.6) ist durch $N/4K < t^{3/8}$ beschränkt, die Zahl der restlichen Terme durch $2K \leqslant O \cdot t^{1/8}$; deshalb wird es genügen, diese kurzen Summen insgesamt mit einem Aufwand $\leqslant t^{3/8+o(1)}$ zu berechnen. Dazu dienen die Taylorentwicklungen

$$\text{(8.8)} \quad \ln(1+2k/v) = \frac{2}{v} \cdot k - \frac{4}{2v^2} \cdot k^2 + \frac{8}{3v^3} \cdot k^3 - \ldots,$$

$$\text{(8.9)} \quad (1+2k/v)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{v} \cdot k + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{v^2} \cdot k^2 - \ldots,$$

die wegen $2|k|/v < 2K/N \leqslant t^{-3/8}$ nach obiger Konstruktion ziemlich rasch konvergieren. Um den Gesamtfehler in (8.6) oder auch in (8.4) kleiner als t^{-c} zu halten, ist es ausreichend, in (8.7) statt der exakten Größen eine beschränkte Zahl von Gliedern aus (8.8) und (8.9) einzusetzen, etwa jeweils bis zur Ordnung k^d, wobei dieses d genauer linear in c beschränkt werden kann. Dies führt auf die Funktionen

$$\text{(8.10)} \quad F_j(z) = \sum_{-K<k<K} k^j \exp(z_1 k + z_2 k^2 + \ldots + z_d k^d), \quad 0 \leqslant j \leqslant d,$$

in den Variablen $z = (z_1, \ldots, z_d)$ und die damit gebildeten Näherungen

$$\text{(8.11)} \quad S(t, v, K) \approx F_0(z) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{v} \cdot F_1(z) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{v^2} \cdot F_2(z) - \ldots \pm \frac{(2d-1)!!}{(2d)!!} \cdot \frac{2^d}{v^d} \cdot F_d(z),$$

worin die z_ν modulo $2\pi i$ auf Beträge $\leqslant \pi$ reduziert sein sollen, und zwar

$$\text{(8.12)} \quad \begin{aligned} z_1 &\equiv 2it/v \bmod 2\pi i, & z_2 &\equiv -4it/2v^2 \bmod 2\pi i, \\ z_3 &= 8it/3v^3, & z_4 &= -16it/4v^4, \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Wegen $v > N \geqslant 3t^{3/8}$ werden die z_ν für $\nu \geqslant 3$ stets in übersichtlicher Weise klein sein, nämlich $|z_\nu| < (2/N)^\nu t < t^{-1/8}$, während z_1 und z_2 mit v jeweils über die ganze Periode modulo $2\pi i$ hinweg variieren.

Diese Funktionen $F_0, \ldots, F_d$ an den mit (8.12) spezifierten Stellen für etwa $N/4K$ verschiedene Werte von v hinreichend schnell und hinreichend genau zu berechnen gelingt nun mittels folgender Technik. Vorbereitend werden zunächst die F_j und endlich viele ihrer partiellen Ableitungen an einem hinreichend dichten Netz von *Gitterpunkten* berechnet. Alsdann können mittels dieser gespeicherten Werte die in (8.11) benötigten Werte der F_j durch entsprechende Abschnitte von Taylorentwicklungen angenähert werden. Hinsichtlich der Einzelheiten dieses Vorgehens mag es hier genügen, die wichtigsten Punkte kurz zu kommentieren.

Nach den Bemerkungen zu (8.12) reicht es, die rein imaginären Bereiche für z_1 und z_2 mit Gitterpunkten abzudecken, deren Dichte weiter unten plausibel wird. Das Gitter bestehe aus den $g \in \mathbb{C}^d$ von der Form

$$\text{(8.13)} \quad g = (\sigma \cdot 2\pi i/4K, \tau \cdot 2\pi i/4K^2, 0, 0, \ldots), \quad -2K \leqslant \sigma \leqslant 2K, \quad -2K^2 < \tau < 2K^2.$$

Von $2\pi i$-periodischen Wiederholungen abgesehen sind das also $16K^3$ Gitterpunkte. Zu jedem Paar (z_1, z_2) aus (8.12) existiert solch g mit

$$(8.14) \quad |z_1 - g_1| \leqslant \delta_1 = \pi/4K, \qquad |z_2 - g_2| \leqslant \delta_2 = \pi/4K^2.$$

Von den partiellen Ableitungen $F_j^{(h)}(g) = (\partial_1^{h_1}\partial_2^{h_2}\ldots\partial_d^{h_d}F_j)(g)$ sollen nur die berechnet werden, deren Multiindizes $h=(h_1,\ldots,h_d)$ einer Menge H angehören, die weiter unten passend gewählt wird. Aus (8.10) folgt die einfache Relation $F_j^{(h)}(g) = F_{j+h'}(g)$, worin h' das Funktional mit dem Wert $h' = h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \ldots + d\cdot h_d$ bezeichnet. Deshalb genügt es, die $F_j(g)$ für alle g und alle $j \leqslant J = d + \max\{h' : h \in H\}$ zu tabellieren. Die mit den Näherungen

$$(8.15) \quad F_j(z) \approx \sum_{h\in H} F_j^{(h)}(g)\cdot(z_1-g_1)^{h_1}(z_2-g_2)^{h_2}z_3^{h_3}\ldots z_d^{h_d}/(h_1!\,h_2!\ldots h_d!)$$

in (8.11) zusätzlich verursachten Fehler lassen sich bei der Wahl von g gemäß (8.14) durch

$$E_1 = \sum_{j\leqslant d}\sum_{h\notin H}\left(\frac{2}{N}\right)^j |F_j^{(h)}(g)|\cdot\delta_1^{h_1}\delta_2^{h_2}\prod_{\nu\geqslant 3}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^\nu t\right)^{h_\nu}\Big/(h_1!\,h_2!\ldots h_d!)$$

abschätzen. Mittels $|F_j^{(h)}(g)| = |F_{j+h'}(g)| \leqslant 2\cdot K^{j+1+h'}$ folgt

$$E_1 \leqslant E_2 = \sum_{j\leqslant d}\sum_{h\notin H} 2K\cdot\left(\frac{2K}{N}\right)^j\cdot(\delta_1 K)^{h_1}(\delta_2K^2)^{h_2}\cdot$$

$$\prod_{\nu\geqslant 3}\left(\left(\frac{2K}{N}\right)^\nu t\right)^{h_\nu}\Big/(h_1!\,h_2!\ldots h_d!).$$

Wegen $2K/N \leqslant t^{-3/8}$ gilt $\Sigma_j(2K/N)^j < 2$, nach (8.14) hat der $\delta_1\delta_2$-Faktor die einfache Form $(\pi/4)^{h_1+h_2}$, und die Faktoren mit $\nu \geqslant 3$ sind (ganz grob) jeweils durch $(t^{-1/8})^{h_\nu}$ beschränkt. Indem wir nun die Menge H in der Form

$$(8.16) \quad H = \{h\colon h_1 + h_2 < p \text{ und } h_3 + \ldots + h_d < q\}$$

wählen und die Fakultäten im Nenner nach binomischen bzw. polynomischen Formeln abschätzend zusammenfassen, folgt so die weitere Abschätzung

$$E_2 \leqslant E_3 = 4K\left(\sum_{m\geqslant p}(\pi/2)^m/m!\,\exp(d\cdot t^{-1/8}) + e^{\pi/2}\sum_{m\geqslant q}(d\cdot t^{-1/8})^m/m!\right).$$

Solche Fehler werden bei Verwendung von (8.11) in (8.6) etwa $(N/4K)$-fach gemacht und jeweils mit $v^{-1/2} < N^{-1/2}$ gewichtet. Deshalb genügt es im Hinblick auf die verlangte Genauigkeit von t^{-c}, die Schranken p und q in (8.16) so zu wählen, daß mit einem $c' > c + \frac{1}{4}$ die Ungleichungen

$$\sum_{m\geqslant p}(\pi/2)^m/m! < t^{-c'}, \qquad \sum_{m\geqslant q}(d\cdot t^{-1/8})^m/m! < t^{-c'}$$

erfüllt sind, und das geht mit einem beschränkten Wert von q und einem $p \leqslant \mathcal{O}\cdot\log t$. Damit enthält die Menge H nur $\mathcal{O}\cdot(\log t)^2$ Elemente, so daß jede der Auswertungen in (8.15) in der Tat mit Aufwand $t^{o(1)}$ möglich ist.

Es bleibt schließlich noch die Frage, wie aufwendig die Tabellierung der $F_j(g)$ für $j \leqslant J \leqslant \mathcal{O}\cdot\log t$ an den $16K^3$ Gitterpunkten (8.13) ist. Auf die hier benötigte

Genauigkeit geht die Berechnung der einzelnen Exponentialfunktionswerte jedenfalls in $t^{o(1)}$, und bei naiver Vorgehensweise wären höchstens $\mathcal{O}\cdot K^4 \log t$ Summanden zu verarbeiten. Günstiger ist es jedoch, für jeweils feste Werte von j und τ, $|\tau| < 2K^2$, den Vektor $x = (x_k\colon |k| < K)$ mit den Komponenten $x_k = k^j \exp(\tau k^2 \cdot 2\pi i/4K^2)$ zu erzeugen und dann die F_j-Werte $\Sigma_k x_k \cdot \exp(\sigma k \cdot 2\pi i/4K)$ für $|\sigma| \leqslant 2K$ simultan mittels schneller Fouriertransformation zu berechnen. So kostet die Tabellierung insgesamt nur $K^{3+o(1)} t^{o(1)}$, und das ist wegen $2K \leqslant N/t^{3/8}$ und $N \leqslant \mathcal{O}\cdot t^{1/2}$ in der Tat durch $t^{3/8+o(1)}$ beschränkt. Damit ist (8.3) bewiesen.

Rückblickend erkennt man, daß der Exponent 3/8 aus der Balancierung von N/K und K^3 für $N = \mathcal{O}\cdot t^{1/2}$ hervorgeht. Viele der Überlegungen bleiben richtig, wenn $K \approx N/t^{\beta}$ mit einem $\beta > 1/3$ gewählt wird. So ist gut vorstellbar, daß (8.3) durch geschickte Modifikationen des Algorithmus auf $t^{1/3+o(1)}$ verbessert werden kann. Noch bessere Schranken aber scheinen wesentlich neue Ideen zu erfordern.

Literatur

[1] Alt, H.: Multiplication is the easiest nontrivial arithmetic function. Theor. Comput. Sci. **36** (1985) 333–339

[2] Alt, H.; van Leeuwen, J.: The complexity of basic complex operations. Computing **27** (1981) 205–215

[3] Borodin, A.; Munro, I.: Computational Complexity of Algebraic and Numeric Problems. American Elsevier, New York 1975

[4] Borwein, J. M.; Borwein, P. B.: The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions. SIAM Rev. **26** (1984) 351–365

[5] Borwein, J. M.; Borwein, P. B.: Pi and the AGM. Wiley & Sons, 1987

[6] Brent, R. P.: Fast multiple-precision evaluation of elementary functions. J. ACM **23** (1976) 242–251

[7] Brent, R. P.; Kung, H. T.: Fast algorithms for manipulating formal power series. J. ACM **25** (1978) 581–595

[8] Delves, L. M.; Lyness, J. N.: A numerical method for locating zeros of an analytic function. Math. Comp. **21** (1967) 543–560

[9] Henrici, P.: Applied and Computational Complex Analysis, vol. 1. New York 1974

[10] Knuth, D. E.: The Art of Computer Programming, vol. 2, Seminumerical Algorithms, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1981

[11] Lickteig, T.: The computational complexity of division in quadratic extension fields. SIAM J. Comput. *16* (1987) 278–311

[12] Odlyzko, A. M.; Schönhage, A.: Fast algorithms for multiple evaluations of the Riemann zeta function. Trans. AMS (to appear)

[13] Ostrowski, A.: Recherches sur la méthode de Graeffe et le zéros de polynomes et les séries de Laurent. Acta Math. **72** (1940) 99–257

[14] Ritzmann, P.: A fast numerical algorithm for the composition of power series with complex coefficients. Theor. Comput. Sci. **44** (1986) 1–16

[15] Schönhage. A.: Storage modification machines. SIAM J. Comput. **9** (1980) 490–508

[16] Schönhage, A.: Asymptotically fast algorithms for the numerical multiplication and division of polynomials with complex coefficients. In: „Computer Algebra“ EUROCAM '82 (Marseille 1982), ed. J. Calmet. Lect. Notes Comp. Sci. 144, 3–15

[17] Schönhage, A.: The fundamental theorem of algebra in terms of computational complexity. Techn. Rep. Univ. Tübingen (1982) 74 pages

[18] Schönhage, A.: Quasi-GCD computations. J. of Complexity **1** (1985) 118–137

[19] Schönhage, A.: Equation solving in terms of computational complexity. Proc. Int. Congress of Mathem., Berkeley 1986, vol. 1, 131–153

[20] Sieveking, M.: An algorithm for division of power series. Computing **10** (1972) 153–156
[21] Strassen, V.: Die Berechnungskomplexität von elementarsymmetrischen Funktionen und von Interpolationskoeffizienten. Numer. Math. **20** (1973) 238–251
[22] Strassen, V.: The computational complexity of continued fractions. SIAM J. Comput. **12** (1983) 1–27
[23] Strassen, V.: Algebraische Berechnungskomplexität. In: „Perspectives in Mathematics, Anniversary of Oberwolfach 1984" (eds. W. Jäger, J. Moser, R. Remmert), Basel 1984, pp. 509–550

Prof. Dr. A. Schönhage
Universität Bonn
Institut für Informatik II
Römerstr. 164
D-5300 Bonn 1

(*Eingegangen: 29. 9. 1988*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1990 B. G. Teubner Stuttgart
92 (1990) 21–46
AMS subject classification: 52A43, 52A45, 11H06, 11H31, 05B40, 90C10

Kugellagerungen und Konvexgeometrie*)

J. M. Wills

1 Einleitung

In der klassischen Geometrie der Zahlen werden zahlentheoretische Probleme mit geometrischen Methoden untersucht. Dabei ist die Geometrie auf die Anforderungen der Zahlentheorie zugeschnitten; insbesondere sind in Minkowskis Gitterpunktsätzen die konvexen Körper nicht beliebig, sondern zentralsymmetrisch.

Ebenso sind die klassischen Kugelpackungen seit Lagrange und Gauss wegen der Beziehungen zu quadratischen Formen, Kristallographie, Gruppen und neuerdings Kodierungstheorie nicht beliebig, sondern gitterförmig und infinit.

Beide Gebiete sind wegen der Wechselwirkung zwischen diskreter und konvexer Geometrie auch unabhängig von diesen Anwendungen interessant, und man kann sie zusammen mit geeigneten Varianten als „geometrische Geometrie der Zahlen" auffassen.

Besonders fruchtbare Varianten sind einerseits Gitterpunktsätze für beliebige konvexe Körper mit Anwendungen in der ganzzahligen Optimierung sowie die gut ausgebaute Theorie der Gitterpolytope und andererseits finite Kugellagerungen mit überraschenden Phänomenen (Wurst, Wurstkatastrophe) und Anwendungen auf numerische Integration und Kristallographie.

Die Arbeit besteht aus sieben Abschnitten. Nach Einleitung und Definitionen werden im 3. Abschnitt die wichtigsten Probleme im ebenen Fall behandelt. Dieser Abschnitt, der den engen Zusammenhang zwischen finiten und infiniten Lagerungen sowie den Gitterpunktproblemen zeigt, gibt zugleich einen Querschnitt durch die gesamte Thematik. Im Gegensatz zu den ersten drei Abschnitten sind Abschnitt 4 bis 7 unabhängig voneinander lesbar.

Im 4. Abschnitt werden finite Kugellagerungen, die zentralen Wurstphänomene und eventuelle Zusammenhänge zum Kristallwachstum behandelt.

Im 5. Abschnitt wird die Theorie der Gitterpolytope entwickelt. Hier dominieren kombinatorische und algebraische Beweismethoden, während die Methoden der übrigen Abschnitte eher analytisch und konvexgeometrisch sind.

---

*) Hauptvortrag, gehalten auf der DMV-Jahrestagung 1988 in Regensburg.

Im 6. Abschnitt werden Gitterpunktanzahlen durch Minkowskis Quermaßintegrale abgeschätzt und im 7. Abschnitt durch lineare Funktionale wie Durchmesser und Dicke. Dabei dominiert bei ersterem der Zusammenhang zwischen stetigen und diskreten Funktionalen und beim letzten Abschnitt die Anwendbarkeit auf ganzzahliges Optimieren.

Die Arbeit enthält viele Literaturhinweise, ohne jedoch Vollständigkeit anzustreben. Für weitere Literatur verweisen wir auf die Standardwerke von Gruber und Lekkerkerker [G, L] über Geometrie der Zahlen, von Conway und Sloane [C, S] über Kugel-Lagerungen, von Erdös, Gruber und Hammer [E, G, H] über Gitterpunkte und von Hadwiger [H2] und Leichtweiss [Lei] über Konvexgeometrie. Weitere Literatur über finite Kugellagerungen findet man im Übersichtsartikel [G, W2] und über ganzzahlige Optimierung in [G, L, S] und [K, L]. In den genannten Büchern finden sich auch die anschließenden Definitionen und Begriffe.

2 Begriffe, Definitionen

Im folgenden sei immer E^d der d-dimensionale euklidische Raum. Mit $\mathscr{K}^d$ werde die Menge der kompakten konvexen Mengen (konvexe Körper) des E^d bezeichnet. Zu einem $K \in \mathscr{K}^d$ bezeichne $V(K)$ sein Volumen, $D(K)$ den Durchmesser, bdK den Rand und $\operatorname{int} K$ das Innere von K. Weiter sei B^d die Einheitskugel, $S^{d-1} = bdB^d$ und $V(B^d) = \varkappa_d$.

Außer dem Volumen spielen in der Konvexgeometrie noch andere Funktionale wie die Oberfläche F und allgemein die Minkowskischen Quermaßintegrale W_i, $i = 0, 1, \dots, d$ eine Rolle [H2], [Lei]. Wir benutzen stattdessen die von McMullen [M2] eingeführten inneren Volumina V_i, die dimensionsinvariant sind und sich von den W_i nur um einen Normierungsfaktor unterscheiden:

Für $K \in \mathscr{K}^d$ ist $V_i(K) = \binom{d}{i} \varkappa_i^{-1} W_{d-i}(K),\ i = 0, 1, \dots, d.$

Die V_i (und die W_i) sind z. B. über die Steinerformel [H2] erklärt, die für $K \in \mathscr{K}^d$ eine Polynomentwicklung in $r \geqslant 0$ darstellt:

$$V(K + rB^d) = \sum_{i=0}^{d} r^{d-i} \varkappa_{d-i} V_i(K).$$

Insbesondere ist $V_d = V$, $V_{d-1} = \frac{1}{2} F$ und $V_0 = 1$.

Im letzten Abschnitt werden lineare Funktionale benötigt, wie z. B. Durchmesser D und die Dicke w:

$$w(K) = \min_{u \in S^{d-1}} (\max\{u^T x \mid x \in K\} - \min\{u^T x \mid x \in K\}).$$

Ein Gitter Λ des E^d ist die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen von d linear unabhängigen Vektoren $a_i \in E^d$; dabei heißt $(a_1, \dots, a_d)$ eine Basis von Λ. Je zwei Basen von Λ sind durch eine ganzzahlige unimodulare Transformation miteinander verknüpft [G, L]. Die Determinante von Λ, $\det \Lambda$, ist durch

$|\det(a_1, \ldots, a_d)|$ erklärt. Zu $K \in \mathcal{K}^d$ heißen

$$G_\Lambda(K) = \text{card}\,(K \cap \Lambda) \quad \text{und} \quad \dot{G}_\Lambda(K) = \text{card}\,(bdK \cap \Lambda)$$

die Gitterpunktanzahl von K bzw. von bdK.

Ist $K \in \mathcal{K}^d$ die konvexe Hülle endlich vieler Punkte aus Λ, so heißt $K = P$ ein Gitterpolytop (für $d = 2$ Gitterpolygon). Die Menge der Gitterpolytope zum Gitter Λ werde mit $\mathcal{P}_\Lambda^d$ bezeichnet. Ist $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ das Standardgitter, so schreiben wir kurz G, $\dot{G}$ und $\mathcal{P}$. Weiter heißt $K \in \mathcal{K}^d$ zentralsymmetrisch zum Ursprung, wenn $K = -K$ ist.

Eine Menge $\{K_i \in \mathcal{K}^d | i \in I\}$ heißt Packung, wenn $\text{int}\,K_i \cap \text{int}\,K_j = \emptyset$ für $i \neq j$ ist, und Überdeckung, wenn $\cup K_i$ den E^d überdeckt. Sind die K_i hinreichend regelmäßig im E^d verteilt, so existiert

$$\lim_{r \to \infty} \; (V(rB^d))^{-1} \sum_{i \in I} V(K_i \cap rB^d)$$

und heißt die Dichte der Packung bzw. der Überdeckung. Unter Vermeidung einer weiteren Limesbetrachung (s. [G, L], [C, S]), aber für unsere Zwecke völlig ausreichend, gilt damit:

Das Supremum der Dichten aller Packungen von Translaten von K heißt die maximale Packungsdichte (durch Translate $K + a_i$) und wird mit $\delta^d(K)$ bezeichnet.

Entsprechend heißt das Infimum aller Dichten von Überdeckungen von Translaten von K die minimale Überdeckungsdichte (durch Translate $K + a_i$) und wird mit $\vartheta^d(K)$ bezeichnet.

Sind die a_i Punkte eines Gitters $\Lambda \subset E^d$, so spricht man von Gitterpackungen bzw. Gitterüberdeckungen.

Das Supremum der Dichten aller Gitterpackungen bzw. das Infimum der Dichten aller Gitterüberdeckungen von K werden mit $\delta_L^d(K)$ bzw. $\vartheta_L^d(K)$ bezeichnet. Alle diese Dichten existieren, und offenbar ist

$$\delta_L^d(K) \leqslant \delta^d(K) \leqslant 1 \leqslant \vartheta^d(K) \leqslant \vartheta_L^d(K).$$

Der weitaus bedeutendste Fall ist $K = B^d$. In diesem Fall schreiben wir anstelle von $\delta^d(B^d)$ kurz δ^d etc. Außerdem schreiben wir mitunter infinite Packungen etc., um den Gegensatz zu den finiten Packungen und Überdeckungen zu betonen.

Im Zentrum der nächsten zwei Abschnitte stehen die finiten Lagerungen, die um 1950 zunächst zum besseren Verständnis der infiniten Lagerungen eingeführt wurden.

Die zwei Hauptprobleme finiter Lagerungen im E^d sind:

Bestimme zu gegebenem $K \in \mathcal{K}^d$ und gegebenem $k \in \mathbb{N}$

(A) das Minimum der Volumina aller konvexen Körper, in die k Translate von K gepackt werden können,

(B) das Maximum der Volumina aller konvexen Körper, die von k Translaten von K überdeckt werden.

Fig. 2.1 und 2.2 illustrieren die Probleme für $K = B^2$ und $k = 11$.

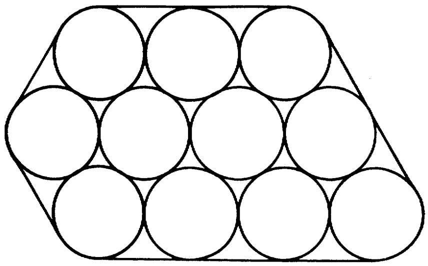


Fig. 2.1

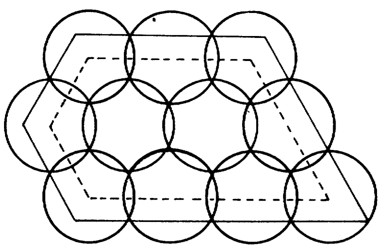


Fig. 2.2

Wie bei infiniten Lagerungen führen wir folgende finiten Packungs- und Überdeckungsdichten ein:

$$\delta_k^d(K) = \max\left\{\frac{kV(K)}{V(C)}\,\middle|\, C \in \mathscr{K}^d \wedge \exists\ c_1, \ldots, c_k : \right.$$
$$\left. \operatorname*{int}_{i \neq j}\ ((c_i + K) \cap (c_j + K)) = \emptyset \wedge \bigcup_{i=1}^{d}\ (c_i + K) \subset C\right\}$$

$$\vartheta_k^d(K) = \min\left\{\frac{kV(K)}{V(C)}\,\middle|\, C \in \mathscr{K}^d \wedge \exists\ c_1, \ldots, c_k : C \subset \bigcup_{i=1}^{k}\ (c_i + K)\right\}.$$

Offenbar ist

$$\delta_k^d(K) \leqslant 1 \leqslant \vartheta_k^d(K).$$

Im nächsten Abschnitt folgen Vergleiche mit den klassischen Dichten in der Ebene.

3 Finite Lagerungen und Gitterpunktprobleme in der Ebene

Viele der in dieser Arbeit besprochenen Probleme sind für $d=2$ völlig gelöst, aber für $d \geqslant 3$ nur teilweise oder gar nicht. Außerdem unterscheiden sich die Beweismethoden für $d=2$ und $d \geqslant 3$ oft grundlegend. Daher gibt dieser Abschnitt einen Überblick über die Probleme der anschließenden Abschnitte im Fall $d=2$, wobei insbesondere Ergebnisse aufgenommen sind, zu denen noch kein höherdimensionales Analogon bekannt ist bzw. so nicht existiert.

Die finiten Lagerungen beginnen mit einem Satz von L. Fejes Tóth [FL1], der für den Einheitskreis B^2 die finiten und infiniten Dichten vergleicht.

Theorem 3.1 (L. Fejes Tóth 1949). *Für $k \geqslant 2$ ist*

$$\delta_k^2 \leqslant \delta^2 < 1 < \vartheta^2 \leqslant \vartheta_k^2.$$

Ob dieser Satz (mit $k \geqslant k_0 > 2$) auch für $d=3$ und 4 gilt, ist ein offenes Problem (s. [W6d]). Für $d \geqslant 5$ gilt er nicht, und die damit zusammenhängenden Probleme werden im 4. Abschnitt besprochen.

Die folgenden zwei Sätze ([R1], [Ba, R]) für zentralsymmetrische konvexe Körper schließen an Fejes Tóths Ergebnis an. Sie werden üblicherweise mit anderen Begriffen (kritische Determinanten etc.) formuliert, während wir Dichten wählen, um den engen Zusammenhang zwischen finiten und infiniten Lagerungen zu betonen.

Theorem 3.2 (Rogers 1951). *Für $K \in \mathscr{K}^2$, $K=-K$ und $k \geqslant 2$ ist*

$$(\delta^2(K))^{-1} \leqslant \left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\delta_k^2(K)\right)^{-1} - \frac{1}{k-1}.$$

Theorem 3.3 (Bambah, Rogers 1952). *Für $K \in \mathscr{K}^2$, $K=-K$ und $k \geqslant 2$ ist*

$$(\vartheta^2(K))^{-1} \geqslant \left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\vartheta_k^2(K)\right)^{-1} - \frac{1}{k-1}.$$

Etliche Varianten zu diesen Sätzen, alle für $d=2$, sind von Bambah, Rogers, Woods, Zassenhaus [Ba, R], [Ba, R, Z] und kürzlich G. Fejes Tóth [FG2] bewiesen worden; z. B. [Ba, Wo]:

Theorem 3.4 (Bambah, Woods 1971). *Sei $K \in \mathscr{K}^2$, $K=-K$ und $K_i = K + c_i$, $i=1,\ldots,k$. Wird dann $C_k = \operatorname{conv}(c_1,\ldots,c_k)$ von den K_i überdeckt, so gilt*

$$\vartheta^2(K)V(C_k) \leqslant \left(k - \frac{1}{2}\dot{k} - 1\right)V(K),$$

wobei $\dot{k}$ die Anzahl der $c_i \in \operatorname{bd} C_k$ ist.

Dieser Überdeckungssatz steht in engem Zusammenhang zu einem der ältesten Gitterpunktsätze [P]:

Theorem 3.5 (Pick 1900). *Für $P \in \mathscr{P}^2$ gilt*

$$G(P) - \frac{1}{2}\dot{G}(P) - 1 = V(P).$$

Aus dieser Pickschen Identität folgt direkt

Korollar 3.1 (Nosarzewska 1948). *Für $K \in \mathscr{K}^2$ gilt*

$$G(K) \leqslant V(K) + \frac{1}{2}U(K) + 1,$$

wobei $U(K)$ der Umfang von K ist.

Korollar 3.1 ist zuerst von Nosarzewska [No] ohne Kenntnis von Picks Arbeit bewiesen worden. Beide Ergebnisse sind auf ebene Gitterzellkomplexe verallgemeinert worden [G, Wt, Z], [H, W]. Dabei heißt P ein ebener Gitterzellkomplex, wenn es eine Simplizialzerlegung von P gibt, deren Eckenmenge genau $P \cap \Lambda$ ist. Die Euler-Charakteristik $\chi(P)$ ist dabei wie üblich die Anzahl der Ecken der Simplizialzerlegung von P minus deren Kantenzahl plus deren Dreiecksanzahl. Zu P ist $\chi(P)$ unabhängig von der Zerlegung eindeutig erklärt; insbesondere ist für konvexes P: $\chi(P) = 1$ und $\chi(bdP) = 0$. Ein typischer Satz, der einen Zusammenhang zwischen ebenen Gitterzellkomplexen und deren Translaten gibt, ist [H, W3].

Theorem 3.6 (Hadwiger, Wills 1974). *Ist P ebener Gitterzellkomplex in Λ und ist $t \notin \Lambda$, so ist*

$$\chi(P) \leqslant G_\Lambda(P) - G_\Lambda(P+t),$$

und zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ gibt es ein P mit $\chi(P) = n$ und

$$G_\Lambda(P) - G_\Lambda(P+t) = \chi(P).$$

Im Gegensatz zur Pickschen Identität kennt man zu Theorem 3.6 bis heute kein höherdimensionales Analogon. Die Theorie der Gitterpolytope wird in Abschnitt 5 beschrieben.

Mit Korollar 3.1 eng verwandt ist die von Zassenhaus vermutete und von Oler bewiesene [Ol] Ungleichung

Theorem 3.7 (Oler 1961). *Sei $\Lambda \subset E^2$ so, daß $\left\{\frac{1}{2}B^2 + g \mid g \in \Lambda\right\}$ eine Packung ist. Dann gilt für $K \in \mathscr{K}^2$*

$$G_\Lambda(K) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} V(K) + \frac{1}{2} U(K) + 1.$$

Olers Satz gilt auch für die Minkowski-Ebene [Ol] und ist in verschiedener Weise [G, Wt, Z], [Fo, G] verallgemeinert worden. In höheren Dimensionen gibt es jedoch ebenso wie zu Korollar 3.1 nur Teilergebnisse.

Dagegen sind in beiden Fällen die analogen unteren Schranken von G und G_Λ für beliebiges d bekannt. Dieser Problemkreis wird in Abschnitt 6 beschrieben. Für die euklidische Ebene ist Olers Gitterpunktsatz äquivalent zu dem folgenden Satz von Groemer [Gro] über finite Kreispackungen, wie zuerst Wegner [Weg] bemerkt hat. Groemers Satz ist zugleich eine Verschärfung von L. Fejes Tóths Theorem 3.1 und ein Gegenstück zu Theorem 3.4 von Bambah und Woods.

Theorem 3.8 (Groemer 1960).

$$\delta_k^2\left(1 + \frac{1}{k}(c_1 \dot{k} + c_2)\right) \leqslant \delta^2$$

mit $c_1 = 1/\sqrt{3} - 1/2 = 0{,}077 \ldots$ *und* $c_2 = 1 - \frac{\pi}{6}\sqrt{3} = 0{,}093 \ldots$ *Dabei ist $\dot{k}$ die Anzahl der Kreismittelpunkte auf bdC_k.*

G. Wegner zeigte, daß in Theorem 3.8 für unendlich viele k Gleichheit eintritt [Weg]. Zu dem folgenden Ergebnis gibt es kein Gegenstück für Packungen; es zeigt somit, daß grundsätzliche Unterschiede zwischen Packungen und Überdeckungen schon im E^2 auftreten können [F, G, W1]:

Theorem 3.9 (G. Fejes Tóth, Gritzmann, Wills 1984). *Sei U_k das Maximum der Umfänge aller $K \in \mathscr{K}^2$, deren Rand durch k Einheitskreise überdeckt werden kann. Dann ist*

$$U_k = 4\left(\sqrt{k^2-1} + \arcsin \frac{1}{k}\right).$$

Die optimale Anordnung ist eindeutig: Die Kreismittelpunkte liegen gleichverteilt im Abstand $2(1-k^{-2})^{1/2}$ auf einer Strecke.

Diese quasi lineare Anordnung unterscheidet sich grundlegend von allen bisherigen extremalen Figuren und deutet zugleich auf die typischen höherdimensionalen Phänomene hin, die im Abschnitt 4 behandelt werden.

Der letzte Abschnitt der Arbeit unterscheidet sich von den vorangehenden dadurch, daß nicht mehr lineare Ungleichungen mit nichtlinearen Funktionalen wie das Volumen und die Quermaßintegrale, sondern nichtlineare Ungleichungen mit linearen Funktionalen wie Durchmesser und Dicke zum Abschätzen von G betrachtet werden. Ein typisches Ergebnis dafür ist [Sc2].

Theorem 3.10 (Scott 1979). *Ist $K \in \mathscr{K}^2$ und $G(K)=0$, so ist*

$$(D(K))^{-1} + (w(K))^{-1} \geqslant 1,$$

und die Schranke ist scharf.

Sätze dieses Typs haben Kannan, Lovasz, Lenstra u. a. in ganzzahliger Optimierung bewiesen, und einige dieser Sätze werden im letzten Abschnitt behandelt.

4 Finite Kugellagerungen

Dichteste Kugelpackungen haben seit Lagrange und Gauß wegen ihrer Beziehungen zur Zahlentheorie, Kristallographie und neuerdings Kodierungstheorie die Mathematiker interessiert. Daß trotz bedeutender Erfolge (s. [C, S], [G, L]) die dichtesten gitterförmigen Kugelpackungen nur bis $d=8$ bekannt sind und die dichtesten beliebigen Kugelpackungen sogar nur für $d=2$, zeigt die Schwierigkeit der Materie. Ähnliches gilt für Kugelüberdeckungen (s. [C, S], [G, L]). Es war daher naheliegend, in der Ebene die eng verwandte Thematik der finiten Kreis-Lagerungen zu untersuchen, deren wichtigste Resultate im vorigen Abschnitt angegeben wurden.

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß im E^3 und E^4 teilweise und im E^d, $d \geqslant 5$ völlig andere Phänomene als bei klassischen infiniten Lagerungen auftreten. Wir beschränken uns fast ausschließlich auf Kugellagerungen und gehen nur am Ende auf finite Lagerungen beliebiger $K \in \mathscr{K}^d$ ein. Die z. Z. besten Schranken für die Dichten der klassischen infiniten Kugelpackungen und Überdeckungen stammen (s. [C, S], [G, L]) von Kabatjanski und Levenstein

$$\delta^d \leqslant 2^{-(0{,}5990+o(1))d}$$

und von Coxeter, Few und Rogers [C, F, R]

$$\vartheta^d \geqslant e^{-(3/2)}(d + o(1)).$$

Zum Verständnis der Dichten finiter Kugellagerungen erklären wir den von L. Fejes Tóth [FL4] eingeführten Begriff der Wurst:

Seien $B_i^d = B^d + c_i$, $i = 1, \ldots, k$ und $C_k = \operatorname{conv}(c_1, \ldots, c_k)$.

Ist im Fall der Packungen C_k eine Strecke der Länge $2(k-1)$, so heißt $S_k^d = C_k + B^d$ eine Wurst (Fig. 4.1 mit $k=5$).

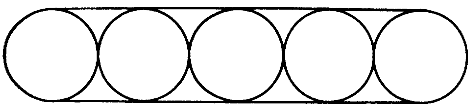


Fig. 4.1

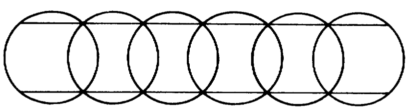


Fig. 4.2

Ist im Fall der Überdeckungen C_k eine Strecke der Länge $2(k-1)d^{-1/2}$, auf der je zwei benachbarte c_i den Abstand $2d^{-1/2}$ haben, so überdeckt $\cup B_i^d$ eine Wurst $\hat{S}_k^d$ mit Radius $(1-d^{-1})^{1/2}$ und Länge (Durchmesser) $2(k-1)d^{-1/2}+2$ (Fig. 4.2 mit $k=6$). (Man nennt auch andere Kugelanordnungen mit $\dim C_k = 1$ eine Wurst, wie z. B. in Th. 3.9)

Elementare Rechnung liefert für die Dichten von S_k^d und $\hat{S}_k^d$:

$$\delta^d(S_k^d) > \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(d+1)^{-1/2}$$

und $$\vartheta^d(\hat{S}_k^d) < \sqrt{\frac{\pi e}{2}} = 2{,}066\ldots$$

Vergleicht man diese Schranken mit den genannten Schranken für δ^d und ϑ^d und speziellen Schranken für kleine d, insbesondere $d=5$ und 6, so erhält man für $d \geqslant 5$ und $k \geqslant 1$

$$\delta^d < \delta^d(S_k^d) \leqslant \delta_k^d < 1 < \vartheta_k^d \leqslant \vartheta^d(\hat{S}_k^d) < \vartheta^d.$$

Das führt auf die Wurstvermutung für finite Kugelpackungen [FL4].

(4.1) $\delta^d(S_k^d) = \delta_k^d$ für $k \in \mathbb{N}$ und $d \geqslant 5$

und die Wurstvermutung für finite Kugelüberdeckungen [W6].

(4.2) $\vartheta^d(\hat{S}_k^d) = \vartheta_k^d$ für $k \in \mathbb{N}$ und $d \geqslant 5$.

Beide Vermutungen sind bis heute für kein $d \geqslant 5$ vollständig bewiesen. Jedoch sind beide für recht allgemeine Klassen konvexer Körper bestätigt worden. Die

Beweismethoden sind in beiden Fällen sehr unterschiedlich, da man bei (4.1) die Theorie der gemischten Volumina anwenden kann. Die bisherigen Teilergebnisse aus [B, G, W], [B, G1], [B, G2], [G3], [G, W2], [F, G, W2] sind zusammengefaßt in

Theorem 4.1. *In folgenden Fällen gilt* (4.1):

a) $\dim C_k \leqslant \frac{7}{12}(d-1)$,

b) $\dim C_k \leqslant d-1$ *und* $d \leqslant 10$,

c) C_k *ist Gitterzonotop,*

d) C_k *ist reguläres Simplex,*

e) $\sqrt{2}\ r(C_k) > R(C_k)$ *und d hinreichend groß* (r, R: *In-*, *Umkugelradius*).

f) *Weiter ist* $\delta^d(S_d^d)(2+\sqrt{3}) \geqslant \delta_k^d$ *und*

$$\delta^d(S_k^d)(2+\sqrt{2}+2/\sqrt{d-1}) \geqslant \delta_k^d.$$

Teil f) besagt, daß (4.1) höchstens um die genannten Faktoren falsch sein kann. Im Zusammenhang mit der Wurstvermutung für Packungen wurde in [F, G, W2] die finite Packungsdichte für das reguläre Simplex asymptotisch bestimmt: Für das reguläre d-Simplex $C_{d+1} = T_s^d$ der Kantenlänge s gilt:

a) $\quad \delta^d(T_s^d) = 0(2^{-\sqrt{d}\log d}), \quad$ falls $\quad s \leqslant 2\sqrt{\pi}$

b) $\quad \delta^d(T_s^d) = 0(2^{-d/2}), \quad$ falls $\quad s \leqslant \frac{1}{13}\sqrt{d}.$

Daraus folgt insbesondere, daß schon für Dimensionen $d < 10^3$ die infinite Packungsdichte des regulären Simplex dichter als die dichteste infinite Packung ist. Für finite Überdeckungen gilt [G, W1], [F, G, W1]:

Theorem 4.2.

a) $\vartheta^d(\hat{S}_k^d) \leqslant \vartheta^d(K)$ *für alle* $K \in \mathcal{K}^d$ *mit*

$$V(K) \geqslant \left(1 + \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^2 + 0\left(\frac{1}{d}\right)\right) F(K)$$

b) $\quad 1 + 2^{-(1{,}21d+6{,}04)} < \vartheta_k^d < \sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$

Das folgende Ergebnis [F, G, W2] zeigt, daß auch bei Überdeckungen die Simplexanordnungen wesentlich besser sind als die klassischen Überdeckungsdichten:

Für das reguläre d-Simplex $C_k = T_s^d$ mit Kantenlänge $s = \sqrt{\frac{2}{d-1}}$ gilt

$$\vartheta^d(T_s^d) < 4\sqrt{5\pi e}\,\frac{d+1}{(\log d)^{1/4}}.$$

Die Ursache für diese auf den ersten Blick überraschenden Dichteschranken ist letztlich, daß die elementaren konvexen Körper Kugel, Würfel, Oktaeder und

Simplex beim Übergang zu hohen Dimensionen sich extrem unterschiedlich verhalten (s. dazu [H8], [Hö], [Wei]).

Wir kommen jetzt zu den kritischen Dimensionen 3 und 4. Während die Wurstvermutungen die besten finiten Kugellagerungen für $k \geqslant 5$ sehr übersichtlich charakterisieren, ist die Situation für $d=3$ und $d=4$ wesentlich komplizierter.

Das wichtigste Teilergebnis für Packungen ist der (in Th. 4.1b) enthaltene) „Eisblumensatz", der für $d=3$ und 4 die bestmögliche Wursteigenschaft zeigt [B, G, W1]:

Für $d=3$ und 4 und $\dim C_k \leqslant d-1$ gilt (4.1). Für $d=3$ läßt sich das anschaulich formulieren: Unter allen Kugelanordnungen in einer Ebene (Tischplatte, Fensterscheibe) hat die lineare Anordnung minimales Volumen der konvexen Hülle.

Fast noch überraschender ist ein weiteres Phänomen, zu dem bis jetzt nur numerische experimentelle Berechnungen vorliegen; die „Wurstkatastrophe": Es gibt ein „großes" $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\dim C_k = 1$ für $k < k_0$ und $\dim C_{k_0} > 1$.

Computergestützte Berechnungen passender Teilkonfigurationen der dichtesten gitterförmigen Packung zeigen bei finiten Packungen:

Für $d=3$ ist $k_0 \sim 56$, für $d=4$ ist $k_0 \sim 75.000$

und bei Überdeckungen:

Für $d=2$ ist $k_0 \sim 10$, für $d=3$ ist $k_0 \sim 490$, für $d=4$ ist $k_0 \sim 5 \cdot 10^5$.

Da die Wurstkatastrophe auch bei Beschränkung auf spezielle Kugelpackungen im E^3 (Atomgitter) auftritt, und dann wesentlich größere Werte für k_0 auftreten (z. B. $k_0 \sim 24.000$ beim Atomgitter von Zinn) und da Wurstkatastrophen nicht nur bei Kugeln, sondern auch bei kugelähnlichen K (Atom- oder Molekülcluster) auftreten, könnte die Wurstkatastrophe ebenso wie der Eisblumensatz ein Modell für quasi 1-dimensionales Kristallwachstum (Whiskers, Dendriten, Eisblumen) abgeben (s. dazu [W9] und [G, W4]).

Die Frage nach den besten Teilkonfigurationen der dichtesten Kugelpackungen führt auf Analoga zu den in Abschnitt 3 erwähnten Ergebnissen von Groemer, Oler und Wegner [G, W1]. Der enge Zusammenhang zwischen finiten und infiniten Kugelpackungen wird auch in einer neuen Arbeit von Dauenhauer und Zassenhaus deutlich [D, Z]. Dort wird mit analytischen Methoden gezeigt, daß bei tetraedrischen Teilfigurationen der dichtesten gitterförmigen Kugelpackung kleine Störungen zu geringeren Dichten führen. Das Ergebnis ist somit ein lokaler Beitrag zum globalen Problem der dichtesten (infiniten) Kugelpackung im E^3.

Wie subtil Packungs- (und Überdeckungs-)probleme sein können, zeigen auch ihre Zusammenhänge mit Berührungsanzahlen (s. z. B. [C, S]), von denen wir ein Beispiel herausgreifen [Gru]. Nach Minkowski kann bei einer Gitterpackung von Translaten eines konvexen Körpers im E^d dieser Körper höchstens 3^d-1 seiner Nachbartranslate berühren. Andererseits berührt nach einem Satz von Swinnerton-Dyer bei dichtester Gitterpackung ein konvexer Körper mindestens $d(d+1)$ seiner Nachbarn. Ein überraschendes Ergebnis von Gruber [Gru] besagt nun, daß für die „weitaus meisten" (im Baireschen Sinn, s. [Gru]) konvexen Körper bei deren dichtesten Gitterpackungen gilt, daß sie höchstens $2d^2$ ihrer Nachbarn berühren. Da die Berührungsanzahlen z. B. bei dichtesten Kugelpackungen erheblich größer sind, folgt, daß sich bei beliebig geringer Änderung des konvexen Körpers die Berührungsanzahl sprunghaft ändern kann.

Abschließend erwähnen wir, daß Wurstphänomene auch bei finiten Lagerungen beliebiger $K \in \mathscr{K}^d$ vorkommen können. Allgemeine Dichteabschätzungen gibt [G2]:

Theorem 4.3 (Gritzmann 1985). *Für $K \in \mathscr{K}^d$ gilt:*

a) $$\frac{1}{d} < \frac{k}{d(k-1)+1} \leqslant \delta_k^d(K)$$

b) $$\vartheta_k^d(K) < e.$$

Mit ähnlichen Methoden wie den in Th. 4.3 benutzten konnte Gritzmann [G4] eine Ungleichung von Rogers [Ro3] für infinite Überdeckungen verbessern. Wurstphänomene treten nicht nur in den bisher besprochenen Fällen auf, sondern auch bei mehrfachen Lagerungen [F, G, W3]; oder auch, wenn statt des Volumens die Oberfläche oder andere Quermaßintegrale bei Überdeckungsproblemen maximiert werden wie z. B. in Th. 3.9 (s. [G, W2]). Sogar zwei von Blichfeldt 1921 entdeckte Gitterpunktsätze (Th. 5.1 und 6.2) enthalten Wurstaussagen, da die extremalen konvexen Körper dort quasi linear sind. Wir gehen auf diese ältesten „Wurstsätze“ in den nächsten Abschnitten ein.

5 Gitterpolytope

Die konvexe Hülle endlich vieler Gitterpunkte eines Gitters $\Lambda \subset E^d$ heißt ein Gitterpolytop. Zu einem Gitter Λ bezeichne $\mathscr{P}_\Lambda^d$ die Menge der zugehörigen Gitterpolytope. Ist $\Lambda = \mathbb{Z}^d$, so sei $\mathscr{P}_\Lambda^d = \mathscr{P}^d$. Für Gitterpolytope aus $\mathscr{P}^d$ liegt eine vollentwickelte Theorie vor, die wir im folgenden skizzieren:

Die ältesten Ergebnisse über Gitterpolytope sind Picks Identität um 1900 (Th. 3.5) und ([Bl], [G, L])

Theorem 5.1 (Blichfeldt 1921). *Für $P \in \mathscr{P}^d$ mit* $\dim P = d$ *ist*

$$G(P) \leqslant d!\,V(P) + d,$$

und die Ungleichung ist für jedes $G \in \mathbb{N}$ scharf.

Die optimalen P sind geeignete Pyramiden und Zylinder über $(d-1)$-Gittersimplices, also quasi eindimensional. Den ersten weiteren Fortschritt erzielten Reeve 1953 (für $d=3$ [Re1]) und MacDonald 1957 ((für beliebiges d [Md]), indem sie außer der Gitterpunktanzahl eines Polytops auch die von passenden Vielfachen von P untersuchten und so die folgende Verallgemeinerung der Pickschen Identität fanden:

Theorem 5.2 (MacDonald, Reeve 1953/57). *Für $P \in \mathscr{P}^d$ ist*

$$\frac{1}{2}(d-1)d!V(P) = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} (-1)^j (G((d-1-j)P) - \frac{1}{2} \dot{G}((d-1-j)P))$$

Der nächste entscheidende Schritt war die Entdeckung der Polynomialität von G durch Ehrhart [E1]:

Theorem 5.3 (Ehrhart 1967). *Für $P \in \mathscr{P}^d$ gibt es Funktionale $G_i : \mathscr{P}^d \to \mathbb{R}$ mit*

$$G(nP) = \sum_{i=0}^{d} n^i G_i(P), \quad n \in \mathbb{N}$$

und das Reziprozitätsgesetz [E2]:

Theorem 5.4 (Ehrhart 1967). *Für $P \in \mathscr{P}^d$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$G(\operatorname{relint}(nP)) = (-1)^{\dim P} \sum_{i=0}^{d} (-n)^i G_i(P).$$

Nur die „äußeren" G_i stimmen mit den entsprechenden V_i überein; also $G_d(P) = V_d(P) = V(P)$ und $G_0(P) = V_0(P) = 1$.

Weiter ist G_{d-1} mit der Oberfläche $V_{d-1} = F$ verwandt; denn es ist

$$G_{d-1}(P) = \frac{1}{2} \sum_F (\det(\operatorname{aff} F \cap \mathbb{Z}^d))^{-1} V_{d-1}(F),$$

wobei die Summe über alle Facetten von P läuft.

Die übrigen G_i unterscheiden sich jedoch i. allg. stark von den entsprechenden V_i und lassen keine anschauliche geometrische Interpretation zu. Wir kommen darauf später zurück.

Die konsequente Durchführung der Polynomialentwicklung führten Bernstein 1976 [Ber] und McMullen 1977 [M2] auf den folgenden Satz, dem in der Theorie der konvexen Körper Minkowskis Polynomialentwicklung in gemischte Volumina entspricht:

Theorem 5.5 (Bernstein, McMullen 1976/77). *Für $P_i \in \mathscr{P}^d$ und $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, k$ gilt*

$$G(n_1 P_1 + \ldots + n_k P_k) = \sum n_1^{r_1} \ldots n_k^{r_k} G(P_1, r_1; \ldots; P_k, r_k).$$

Dabei wird über die $r_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ summiert mit $r_1 + \ldots + r_k \leqslant d$.

Ehrhart leitete seine Ergebnisse aus einer formalen Reihenentwicklung für $G(P)$ und $G(nP)$ ab. Stanley [St1], [St2] hat diese Reihenentwicklung auf polyedrische Zellkomplexe verallgemeinert und erste Ungleichungen für die in der Entwicklung auftretenden Koeffizienten aufgestellt.

Betke und McMullen [B, M] haben Stanleys Ideen weiterentwickelt und folgende linearen Ungleichungen erhalten:

Theorem 5.6 (Betke, McMullen 1985). *Für $P \in \mathscr{P}^d$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

a) $$G(nP) \leqslant \binom{n+d-1}{d} d!\,V(P) + \binom{n+d-1}{d-1}$$

b) $$G(nP \geqslant \binom{n+d}{d} + \binom{n+\frac{1}{2}(d-1)}{d} (d!\,V(P)-1), \quad d \text{ ungerade}$$

$$G(nP) \geqslant \binom{n+d}{d} + \frac{1}{2}\left\{\binom{n+\frac{1}{2}d}{d} + \binom{n+\frac{1}{2}d-1}{d}\right\}(d!\,V(P)-1), \quad d \text{ gerade}$$

und die Ungleichungen sind scharf.

Für $n=1$ ergibt a) Blichfeldts Theorem 5.1.

Theorem 5.7 (Betke, McMullen 1985). *Für $P \in \mathscr{P}^d$ ist*

$$G_i(P) \leqslant c_i G_d(P) + d_i, \quad i=0,1,\ldots,d,$$

mit von P unabhängigen Konstanten c_i und d_i.

Die Ungleichungen in Th. 5.7 entsprechen ungefähr den klassischen Ungleichungen zwischen Minkowskis Quermaßintegralen wie der isoperimetrischen Ungleichung; sie sind im Gegensatz zu diesen jedoch linear und daher nicht vom gleichen Homogenitätsgrad auf beiden Seiten. Auch sonst unterscheiden sich die nur auf $\mathscr{P}^d$ erklärten diskreten G_i erheblich von den auf $\mathscr{K}^d$ erklärten und im Sinne der Hausdorff-Metrik stetigen Quermaßintegralen; insbesondere sind sie nicht positiv definit und nicht monoton [B, M], [M2], [W4]. Dagegen haben sie die wichtige Additivität mit den V_i gemeinsam, d. h. es gilt (s. z. B. [B, M], [Be, W], [M, S]):

$$G_i(P_1 \cup P_2) + G_i(P_1 \cap P_2) = G_i(P_1) + G_i(P_2)$$

für alle $P_1, P_2 \in \mathscr{P}^d$, für die $P_1 \cup P_2$ und $P \cap P_2 \in \mathscr{P}^d$ sind.
Der Bewegungsinvarianz der V_i, also

$$V_i(K) = V_i(\tilde{K}) \quad \text{für} \quad \tilde{K} \text{ kongruent } K, \quad i=0,1,\ldots,d,$$

entspricht die Invarianz der G_i gegenüber ganzzahligen unimodularen Transformationen, also

$$G_i(UP) = G_i(P), \quad i=0,1,\ldots,d,$$

mit $U: E^d \to E^d$, $U(x) = Ax + b$, wobei A eine Matrix und b ein Vektor mit Elementen aus $\mathbb{Z}$ sind und $\det A = \pm 1$ ist.
Mit diesen Definitionen läßt sich eine wichtige gemeinsame Eigenschaft der G_i und den V_i in den folgenden zwei bedeutenden Funktionalsätzen formulieren [H1], [B, K].

Theorem 5.8 (Hadwiger 1955). *Die additiven, stetigen und bewegungsinvarianten Funktionale* $\varphi : \mathscr{K}^d \to \mathbb{R}$ *bilden einen* $(d+1)$*-dimensionalen Vektorraum mit der Basis* $V_0, V_1, \ldots, V_d$.

Theorem 5.9 (Betke, M. Kneser 1985). *Die additiven und unimodular invarianten Funktionale* $\varphi : \mathscr{P}^d \to \mathbb{R}$ *bilden einen* $(d+1)$*-dimensionalen Vektorraum mit der Basis* $G_0, G_1, \ldots, G_d$.

Für den weiteren Ausbau der Theorie der Gitterpolytope verweisen wir auf die Artikel von Betke, McMullen [B, M], Betke, Kneser [B, K], McMullen [M2] und das Buch von Gruber, Lekkerkerker [G, L].

Wir beenden diesen Abschnitt mit Analogien zu Minkowskis Gitterpunktsatz (Th. 6.1). Die Suche nach solchen Analoga, bei denen die Zentralsymmetrie durch andere Bedingungen ersetzt wird, hat immer wieder Interesse gefunden. Für beliebige $K \in \mathscr{K}^d$ erhält man ein Analogon nur durch Hinzunahme der Oberfläche F (Th. 6.3). Dagegen gibt es für beliebige Gitterpolytope ein direktes Analogon [Hen], [P, W, Z]:

Theorem 5.10

a) (Hensley 1981). *Für jedes* $P \in \mathscr{P}^d$ *mit* $G(\operatorname{int} P) = 1$ *gilt*

$$V(P) \leqslant \frac{c}{d!} \, 2^{2^{d-\alpha}}$$

b) (Perles, Wills, Zaks 1981). *Zu jedem d gibt es ein* $P \in \mathscr{P}^d$ *mit* $G(\operatorname{int} P) = 1$ *und*

$$V(P) \leqslant \frac{2}{d!} \, 2^{2^{d-\alpha}}.$$

Dabei sind $2 \leqslant c < \infty$ *und* $\alpha = 0{,}5856 \ldots$ *von d unabhängigen Konstanten.*

Die extremalen P in Th. 5.10 sind Gittersimplices; also sehr asymmetrische Polytope. Die genannten Artikel enthalten weitere Ergebnisse in dieser Richtung. Während in Minkowskis Gitterpunktsatz das Volumen durch kein anderes V_i ersetzt werden kann, haben die G_i die entsprechende Eigenschaft; denn aus Th. 5.7 folgt mit Minkowskis Gitterpunktsatz sofort das

Korollar 5.1. *Für zentralsymmetrisches* $P \in \mathscr{P}^d$ *mit* $G(\operatorname{int} P) = 1$ *ist*

$$G_i(P) \leqslant c_{id}, \quad i = 0, 1, \ldots, d,$$

wobei die c_{id} *nur von i und d, aber nicht von P abhängen.*

Vermutlich gilt $c_{id} = \binom{d}{i} 2^i$, aber das ist nur für $G_d = V$ (Minkowskis Satz), für den Trivialfall $G_0 = 1$ und für G_{d-1} bewiesen [W5].

6 Kugellagerungen, Gitterpunktanzahl und Quermaßintegrale

In diesem Abschnitt wird der schon mehrmals erwähnte enge Zusammenhang zwischen Kugellagerungen, Gitterpunktanzahl und den klassischen Funktionalen der Konvexgeometrie untersucht. Das folgende einfache aber zentrale Lemma unterstreicht diesen Zusammenhang.

Lemma 6.1. *Sei* $\Lambda \subset E^d$ *ein Gitter mit* $\dim(\operatorname{aff} \Lambda) = d$ *und sei* $C \in \mathscr{K}^d$.

a) *Ist* $\{C + g \mid g \in \Lambda\}$ *eine Packung im* E^d, *so gilt für jedes* $K \in \mathscr{K}^d$

$$G_\Lambda(K)\, V(C) \leqslant \delta^d_{G(K)}(C)\, V(K + C).$$

b) *Ist* $\{C + g \mid g \in \Lambda\}$ *eine Überdeckung des* E^d, *so gilt für jedes* $K \in \mathscr{K}^d$

$$\vartheta^d_{G(K)}(C)\, V(K \ominus C) \leqslant G_\Lambda(K)\, V(C).$$

Dabei ist $K \ominus C = \mathscr{C}(\mathscr{C}K + C)$ *die Differenz von* K *und* C ($\mathscr{C}$: *Komplement*).

Der Beweis folgt direkt aus den Definitionen. Obwohl das Lemma implizit oder in Spezialfällen schon in früheren Arbeiten enthalten ist, ist es allgemein erst im Zusammenhang mit finiten Lagerungen formuliert worden ([G1] und [G, W2] p. 159). Aus Lemma 6.1 folgt sofort

Korollar 6.1. a) *Seien* Λ *und* C *wie in* Lemma 6.1 a) *und sei* $V(C) \leqslant 1$. *Dann gilt für jedes* $K \in \mathscr{K}^d$

$$G_\Lambda(K) \leqslant V(K + C).$$

b) *Seien* Λ *und* C *wie in* Lemma 6.1 a) *und sei* $V(C) \leqslant 1$. *Dann gilt für jedes* $K \in \mathscr{K}^d$

$$V(K \ominus C) \leqslant G_\Lambda(K).$$

Lemma 6.1 und Korrolar 6.1 zeigen, daß einerseits finite und infinite Packungen, obere Schranken für G_Λ und $V(K + C)$, also gemischte Volumina, zusammengehören; und andererseits finite und infinite Überdeckungen, untere Schranken für G_Λ und $V(K \ominus C)$. Will man diese allgemeinen aber schwachen Ungleichungen verschärfen, so sieht man bald, daß trotz der fast gleichen Formulierung beide Probleme recht unterschiedliche Beweismethoden benötigen:

Bei den oberen Schranken kann $V(K + C)$ in gemischte Volumina entwickelt werden, und wegen deren Monotonie genügt es, Gitterpolytope zu betrachten.

Beide Ansätze entfallen bei den unteren Schranken, da es insbesondere für $V(K \ominus C)$ kein Analogon zur Theorie der gemischten Volumina gibt und man auf Hilfskonstruktionen angewiesen ist. Dennoch ist dieses Problem zum großen Teil gelöst, während für obere Schranken trotz etlicher Bemühungen nur Teilergebnisse vorliegen. Sowohl bei oberen als auch bei unteren Schranken interessieren einerseits Ungleichungen für spezielle Gitter wie die von Nosarzewska und andererseits Ungleichungen für bestimmte Klassen von Gittern wie die von Oler. Wegen der historischen Bedeutung beginnen wir mit speziellen Gittern, und zwar mit unteren Gitterpunktabschätzungen und beschränken uns auf $\mathbb{Z}^d$. Der älteste und zugleich bedeutendste Gitterpunktsatz überhaupt ist ([G, L] p. 40, [E, G, H] p. 16) Minkowskis Fundamentalsatz der Geometrie der Zahlen:

Theorem 6.1 (Minkowski 1896). *Ist* $K \in \mathscr{K}^d$, $K = -K$ *und* $G(\operatorname{int} K) = 1$, *so ist*

$$V(K) \leqslant 2^d.$$

Eine wichtige Verallgemeinerung ist

Theorem 6.2 (Blichfeldt 1921, v. d. Corput 1935). *Für* $K \in \mathscr{K}^d$ *mit* $K = -K$ *ist*

$$2[V(K)2^{-d}] + 1 \leqslant G(K),$$

und die Ungleichung ist bestmöglich.

(Dabei ist $[x] \in \mathbb{Z}$ mit $[x] \leqslant x < [x] + 1$.) Der Satz wird meist van der Corput zugeschrieben; er ist aber zuerst von Blichfeldt entdeckt worden (s. [Bl] und [E, G, H] p. 18). Die optimalen K in dieser Ungleichung sind Zylinder über einem $(d-1)$-Würfel der Kantenlänge $2-\varepsilon$, also für große G quasilinear oder wurstförmig.

Die enge Analogie zu den finiten Lagerungen wird erkennbar, wenn man den Satz als Lösung des folgenden Problems deutet:

Bestimme zu gegebenem $k = 2n + 1$ das Maximum der Volumina aller $K \in \mathscr{K}^d$ mit $K = -K$ und $G(K) = k$.

Entsprechendes gilt, wie schon am Ende des 4. Abschnitts erwähnt, für Blichfeldts Theorem 5.1.

Unter den vielen Verallgemeinerungen des Minkowskischen Fundamentalsatzes ist Minkowskis Satz über die sukzessiven Minima der wichtigste. Er führt aber direkt in die klassische Geometrie der Zahlen und damit vom Thema dieses Abschnitts weg, so daß wir ihn hier ebenso wie ähnliche Sätze der klassischen Geometrie der Zahlen übergehen.

Verzichtet man auf die starke Einschränkung der Zentralsymmetrie, so erkennt man schnell, daß zur Abschätzung von G das Volumen alleine nicht reicht. Beschränkt man sich auf die Minkowskischen Quermaßintegrale, so wird das Problem im wesentlichen gelöst durch [B, H, W]:

Theorem 6.3 (Bokowski, Hadwiger, Wills 1972). *Für* $K \in \mathscr{K}^d$ *gilt*

$$V(K) - \frac{1}{2} F(K) \leqslant G(K).$$

Man kann zeigen, daß die Koeffizienten bei V und F bestmöglich sind und daß der Satz nicht durch Hinzunahme weiterer Quermaßintegrale verbessert werden kann.

Für $d = 2$ wurde der Satz zuerst durch Nosarzewska [No] bewiesen und dann etliche Male wiederentdeckt. Die ersten höherdimensionalen Teilergebnisse wurden erst 1968/69 ([W1], [W2]) gefunden; weitere Zwischenergebnisse stammen von W. M. Schmidt [Sm] sowie [Bo, W1] und vor allem von Hadwiger [H5, H6].

Aus Theorem 6.3 folgt sofort ein Ergebnis für mehrfache Überdeckungen [B, H, W]:

Korollar 6.2. *Ist* $K \in \mathscr{K}^d$ *und* $\left[V(K) - \frac{1}{2}F(K)\right] = m - 1 > 0$, *so ist* $\{K + g \mid g \in \mathbb{Z}^d\}$ *eine m-fache Überdeckung des* E^d.

Die naheliegende Übertragung auf beliebige Gitter Λ ist nie untersucht worden; vermutlich gilt

$$(\det \Lambda)^{-1} V(K) - \frac{1}{2}(\det \Lambda')^{-1} F(K) \leqslant G_\Lambda(K),$$

wobei Λ' ein dichtestes Subgitter (mit $\dim(\operatorname{aff} \Lambda') = d - 1$) von Λ ist. Die ersten oberen Schranken für G sind die schon erwähnten Sätze von Blichfeldt (Th. 3.1) und Nosarzewska (Kor. 3.1) sowie Davenport [Da]:

Theorem 6.4 (Davenport 1951). *Sei* $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ *und seien* K_j^i *die äußeren Quermaße (d. h. die orthogonalen Projektionen) von K bezüglich der i-dimensionalen Koordinaten-Unterräume* $E_j^i \subset E^d$, $j = 1, \ldots, \binom{d}{i}$. *Dann ist*

$$G(K) \leqslant \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=1}^{\binom{d}{i}} V_i(K_j^i)$$

und Gleichheit gilt für achsenorientierte Gitterquader.

Betke und Gritzmann zeigten, daß Th. 6.4 direkt aus Kor. 6.1 folgt (s. [G, W2]), während Davenport in seinem Beweis andere Methoden benutzt.
Eine weitere obere Schranke für G erhält man aus folgendem Überdeckungssatz von Santalo ([S] p. 274 und [E, G, H] p. 144), der für $d = 2$ auf Hadwiger [H3] zurückgeht: Zu jedem $K \in \mathscr{K}^d$ gibt es ein kongruentes K', das von höchstens

$$\left[\sum_{i=0}^{d} c_{id} V_i(K)\right], \quad c_{id} = \varkappa_i \varkappa_{d-i} \varkappa_d^{-1},$$

Translaten des Einheitswürfels $C^d = \{x \in E^d \mid 0 \leqslant x_i < 1,\ i = 1, \ldots, d\}$ überdeckt wird. Daraus folgt direkt

Korollar 6.3 (Santalo 1944). *Zu jedem* $K \in \mathscr{K}^d$ *gibt es ein kongruentes* K' *mit*

$$G(K' + t) \leqslant \sum_{i=0}^{d} c_{id} V_i(K) \quad \textit{für alle} \quad t \in \mathbb{Z}^d.$$

Die Ungleichungen von Davenport und Santalo haben den gemeinsamen Nachteil, daß G bzw. die V_i nicht nur von K abhängen. Es gibt einige Vermutungen und Teilergebnisse zu allgemeinen nichttrivialen Ungleichungen dieses Typs (s. dazu [G, L], [E, G, H], [Bo], [Bo, W2], [Hö]), von denen wir eine angeben, die durch das Ergebnis von Santalo motiviert ist:

Problem 1. Gilt für jedes $K \in \mathscr{K}^d$

$$G(K) \leqslant \sum_{i=0}^{d} \varkappa_i \varkappa_{d-i} \varkappa_d^{-1} V_i(K)?$$

Es ist bemerkenswert, daß die Ungleichung für $d \geqslant 3{,}63 \cdot 10^{159}$ falsch wird, wenn die Faktoren der V_i durch die kleineren Faktoren $\varkappa_{d-i} \varkappa_d^{-1+i/d}$ ersetzt werden [Hö]. Für Gitterpolytope $P \in \mathscr{P}^d$ interessiert das folgende

Problem 2. Gilt für jedes $P \in \mathscr{P}^d$ mit nur von d abhängigem λ_d

$$G(\lambda P) \leqslant \sum_{i=0}^{d} V_i(P) \lambda^i, \quad \lambda \geqslant \lambda_d?$$

Für $d=2$ [No] und $d=3$ [Ov] gilt diese Ungleichung sogar für beliebige $K \in \mathscr{K}^d$.

Weiter gilt sie für Gitterzonotope [B, G2] und für Rotationskörper bis $d \leqslant 20$ [H, W2]. Für beliebige $K \in \mathscr{K}^d$ und $d \geqslant 441$ gilt sie nicht, wie Hadwiger [H8] in seiner 250. und letzten Arbeit mit Methoden der stochastischen Geometrie bewies. Für die entsprechenden Ungleichungen bei Gitterklassen benötigen wir

Definition 6.1.

a) *$LP(rB^d)$ sei die Menge aller Gitter $\Lambda \subset E^d$ mit* $\dim \operatorname{aff} \Lambda = d$ *und:* *$\{g + rB^d | g \in \Lambda\}$ ist Packung im E^d.*

b) *$LC(rB^d)$ sei die Menge aller Gitter $\Lambda \subset E^d$ mit:* *$\{g + rB^d | g \in \Lambda\}$ ist Überdeckung des E^d.*

(Die Abkürzungen bezeichnen „lattice packing“ and „lattice covering“.) Die Definitionen und die anschließenden Ergebnisse lassen sich auch in den klassischen Begriffen „zulässiges Gitter“, „kritisches Gitter“, „kritische Determinante“ etc. formulieren, die wir hier vermeiden.

Da die Blichfeldt-van der Corputsche Verallgemeinerung von Minkowskis Fundamentalsatz für beliebige Gitter Λ gilt (s. [G, L], p. 51, 127), gilt für $K \in \mathscr{K}^d$ mit $K = -K$:

$$2[V(K) 2^{-d} (\det \Lambda)^{-1}] + 1 \leqslant G_\Lambda(K).$$

Für $\Lambda \in LC(B^d)$ gilt $\vartheta_L^d \leqslant \varkappa_d (\det \Lambda)^{-1}$, also folgt

Korollar 6.4 (Blichfeldt, van der Corput). *Ist $\Lambda \in LC(rB^d)$, so gilt für jedes $K \in \mathscr{K}^d$ mit $K = -K$*

$$2[\vartheta_L^d \varkappa_d^{-1} 2^{-d} V(K)] + 1 \leqslant G_\Lambda(K).$$

Ähnlich wie Theorem 6.3 gilt für beliebige $K \in \mathscr{K}^d$ [W8]:

Theorem 6.5. *Ist $\Lambda \in LC(rB^d)$, so gilt für jedes $K \in \mathscr{K}^d$*

$$\vartheta_L^d r^{-d} \varkappa_d^{-1} \{V(K) - rF(K)\} \leqslant G_\Lambda(K),$$

und die Konstanten sind bestmöglich.

Der Beweis ist einfacher als bei Theorem 6.3.

Ein entsprechender Satz für die oberen Schranken liegt nur für $d=2$ (Th. 3.7 von Oler) vor; dafür aber das

Problem 3. *Gilt für jedes $\Lambda \in LP(rB^d)$ und jedes $K \in \mathscr{K}^d$ mit $K=-K$*

$$G_\Lambda(K) \leqslant \sum_{i=0}^{d} \delta_L^i \varkappa_i^{-1} r^{-i} V_i(K)?$$

Für $d=2$ ist dies die Ungleichung von Oler, für $d \geqslant 3$ gilt die Ungleichung nicht für beliebiges $K \in \mathscr{K}^d$, wohl aber für Gitterzonotope [G, W3].

Für beliebige $K \in \mathscr{K}^d$ gelten die schwächeren Ungleichungen [G1], [G3], [F, G, W3]: Ist $\Lambda \in LP(rB^d)$, so gilt für jedes $K \in \mathscr{K}^d$

$$G_\Lambda(K) \leqslant \sum_{i=0}^{d} \lambda_i r^{-i} V_i(K)$$

mit $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ und

a) $$\lambda_i = \left(2 + \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{d-1}}\right) 2^{i-1} \varkappa_{d-i} \varkappa_{d-1}^{-1}$$

oder

b) $$\lambda_i = (2+\sqrt{3}) 2^{i-1} \varkappa_{d-i} \varkappa_{d-1}^{-1}.$$

Die Schranken folgen aus Teilbeweisen zu L. Fejes Tóths Wurstvermutung. Während sie dort gute Abschätzungen liefern, sind sie für das vorliegende Problem eher grob. Für $d \leqslant 42$ ist b) schärfer, für $d \geqslant 43$ ist es a). Die vermutlich besten Schranken erhält man über die Rogersschen Konstanten σ_i, die wie folgt erklärt sind [R3]:

Man packt $d+1$ Kugeln mit Radius r so, daß ihre Mittelpunkte ein reguläres Simplex $2rT^d$ mit Kantenlänge $2r$ bilden. Der Quotient aus den Volumenanteilen der $d+1$ Kugeln im Simplex dividiert durch das Volumen des Simplex ist σ_d. Damit erhielt Rogers seine klassische Abschätzung $\delta_L^d \leqslant \sigma_d$. Mit den σ_i gilt [G, W3]:

Lemma 6.2. Ist $\Lambda \in LP(rB^d)$ und $K \in \mathscr{K}^d$ ein Gitterzonotop (mit Ecken aus Λ), so ist

$$G_\Lambda(K) \leqslant \sum_{i=0}^{d} \sigma_i r^{-i} \varkappa_i^{-1} V_i(K).$$

Dabei gilt Gleichheit für $K = 2rT^d$, wenn Λ die Ecken von $2rT^d$ enthält. In [G, W3] wird vermutet, daß diese Ungleichung für beliebiges $K \in \mathscr{K}^d$ gilt. Dort wird eine ähnliche, aber schwächere Ungleichung für beliebiges $K \in \mathscr{K}^d$ bewiesen, bei der die σ_i durch analoge, vom speziellen Gitter abhängige Konstanten ersetzt werden. Wegen der Einzelheiten wird auf die Originalarbeit verwiesen.

7 Gitterpunktanzahl und ganzzahliges Optimieren

Klassische Geometrie der Zahlen und ganzzahliges Optimieren haben als ein gemeinsames Hauptproblem die Bestimmung ganzzahliger Lösungen zu einem gegebenen System linearer Ungleichungen (s. [G, L, S], [K1], [K2] und [K, L]). Dazu benötigt man Kriterien für gitterpunktfreie konvexe Körper bzw. für zentralsymmetrische konvexe Körper, die nur den Ursprung enthalten.

Während in der Geometrie der Zahlen das Volumen das geeignete Funktional zum Abschätzen der Gitterpunktanzahl ist, sind es in der ganzzahligen Optimierung eher lineare Funktionale wie die anschließend erklärte Gitterdicke.

Wegen der Gemeinsamkeiten nehmen wir noch die für die Konvexgeometrie wichtigen linearen Funktionale Dicke und Durchmesser hinzu und betrachten in diesem Abschnitt allgemein Abschätzungen von G durch nichtlineare Ungleichungen mit linearen Funktionalen. Die Sätze dieses Abschnitts für die Gitterdicke sind aus [K, L], die für die Dicke aus [M, W2].

Am Schluß gehen wir noch kurz auf algorithmische Aspekte bei der Berechnung dieser Funktionale ein. Für die Gitterdicke benötigen wir

Definition 7.1. *Zu einem Gitter $\Lambda \subset E^d$ (mit* $\operatorname{aff} \Lambda = E^d$*) ist*

$$\Lambda^* = \{x \in E^d | x^T y \in \mathbb{Z} \ \forall \ y \in \Lambda\}$$

das zu Λ duale oder polare Gitter.

Man zeigt leicht, daß $(\Lambda^*)^* = \Lambda$ und $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$ ist. Insbesondere ist $(\mathbb{Z}^d)^* = \mathbb{Z}^d$. Damit hat man

Definition 7.2. *Die Gitterdicke zu einem Gitter Λ und einem $K \in \mathscr{K}^d$ ist*

$$w^\Lambda(K) = \min_{u \in \Lambda^*} (\max \{u^T x \in K\} - \min \{u^T x | x \in K\}).$$

Zum Vergleich erinnern wir an die klassische Dicke $w(K)$ eines $K \in \mathscr{K}^d$:

$$w(K) = \min_{u \in S^{d-1}} (\max \{u^T x | x \in K\} - \min \{u^T x | x \in K\}).$$

Einfache Überlegungen zeigen, daß w und w^Λ auf der Menge der gitterpunktfreien konvexen Körper beschränkt sind. Für die folgenden zwei Sätze aus [M, W2] und [K, L], die dies präzisieren, benötigen wir

Definition 7.3. *Zu einem Gitter $\Lambda \subset E^d$ sei*

$$w_d^\Lambda = \max \{w^\Lambda(K) | K \in \mathscr{K}^d \textit{ und } G_\Lambda(K) = 0\}$$

und $$w_d = \max \{w(K) | K \in \mathscr{K}^d \textit{ und } G(K) = 0\}.$$

Theorem 7.1.

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{d-1} - 1{,}018\ldots) < w_d < d + 1.$$

Theorem 7.2.

$$w_d^\Lambda = 0(d^2).$$

Beide Sätze sind noch weit von dem endgültigen Ergebnis entfernt. Insbesondere vermuten Kannan und Lovasz $w_d^A = 0(d)$, und McMullen und Wills vermuten $w_d = 0(d^{1/2})$.

Die folgenden Ergebnisse zeigen, daß gitterpunktfreie konvexe Körper in mindestens einer Richtung „flach" sind.

Dazu sei $X_i(K)$ die Länge einer maximalen Strecke aus K parallel zur x_i-Achse, also das „innere Quermaß" von K in Richtung der x_i-Achse, und $D_i(K)$ die Länge der Orthogonalprojektion von K auf die x_i-Achse, also das „äußere Quermaß" von K in Richtung der x_i-Achse. Dann gilt die folgende Ungleichung, die in etwas schwächerer Form von Scott [Sc3] bewiesen wurde.

Theorem 7.3. *Für* $K \in \mathscr{K}^d$ mit $G(K) = 0$ *ist*

$$\sum_{j \neq i} (X_j(K))^{-1} + (D_i(K))^{-1} \geqslant 1, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Für $Q = \left\{ x \in E^d \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d} \left| x_i - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{d}{2} \right\}$ ist $G(Q) = 0, \quad X_i(Q) = D_i(Q) = d$

für $i = 1, \ldots, d$, also ist die Ungleichung scharf. Das folgende Beispiel zeigt, daß kein zweites X_i durch ein D_i ersetzt werden kann: Sei $p > d$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{d}$, $P_0 = (\varepsilon, 0, \ldots, 0)$, $P_1 = (1-\varepsilon, 0, \ldots, 0)$, $P_2 = (p+\varepsilon, p, 0, \ldots, 0)$, $P_3 = (\varepsilon, 0, p, 0, \ldots, 0)$, $P_4 = (\varepsilon, 0, 0, p, 0, \ldots, 0), \ldots, P_d = (\varepsilon, 0, \ldots, 0, p)$ und $K = \operatorname{conv}(P_0, P_1, \ldots, P_d)$. Dann ist $0 < x_1 - x_2 < 1$, also $G(K) = 0$ und $D_1 = D_2 = X_3 = \ldots = X_d = p$, also die Summe der Reziproken < 1.

In [M, W2] findet sich ein eng verwandtes Resultat:

Theorem 7.4. *Für* $K \in \mathscr{K}^d$ *mit* $G(K) = 0$ *gilt*

$$\sqrt{2}\ \frac{w_{d-1}}{w(K)} + \frac{1}{D_i(K)} \geqslant 1, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Für den Durchmesser D gilt $D(K) \leqslant \sqrt{d}\ \max D_i(K)$, also folgt direkt

$$\sqrt{2}\ \frac{w_{d-1}}{w(K)} + \sqrt{d}\ \frac{1}{D(K)} \geqslant 1.$$

Vermutlich [M, W2] gilt sogar $\frac{w_{d-1}}{w(D)} + \frac{1}{D(K)} \geqslant 1$, was für $d = 2$ mit $w_1 = 1$ das Ergebnis von Scott (Th. 1.10) darstellt. Den entsprechenden Sachverhalt für die Gitterdicke beschreibt der folgende Alternativsatz von Kannan und Lovasz, der besagt, daß ein gitterpunktfreier konvexer Körper entweder in einer Richtung sehr flach oder in mindestens zwei Richtungen ziemlich flach $(0(d^3 \log_2^2 d))$ ist:

Theorem 7.5. *Ist* $K \in \mathscr{K}^d$ *und* $G_\Lambda(K) = 0$, *so ist entweder* $w^\Lambda(K) \leqslant 2$ *oder es gibt ein* $i \in [2, d]$ *und i linear unabhängige Vektoren* u_i *aus dem dualen Gitter* Λ^*, *so daß für jedes* $j \in [1, i]$ *gilt*:

$$\max \{u_j^T x \mid x \in K\} - \min \{u_j^T x \mid x \in K\} \leqslant 2c_0(i+1)^3 \log_2^2 (i+1).$$

Es folgen nichtlineare Ungleichungen zwischen Gitterdicke und Gitterpunktanzahl [K, L]:

Theorem 7.6. *Für $K \in \mathscr{K}^d$ gilt*

$$w^A(K) \leqslant c_0 d^2 \{G(K) + 1\}^{1/d}.$$

Kannan und Lovasz zeigen, daß der Faktor d^2 höchstens auf d gedrückt werden kann und beweisen das für zentralsymmetrische K:

Theorem 7.7. *Für $K \in \mathscr{K}^d$ mit $K = -K$ gilt*

$$w^A(K) \leqslant c_1 d \{G(K)\}^{1/d} + c_2 d^2.$$

Dabei sind c_0, c_1, c_2 von d unabhängig. Für die Dicke w gelten die einfachen Ungleichungen:

1. Für $K \in \mathscr{K}^d$ gilt mit von d unabhängigem c_3

$$w(K) \leqslant c_3 d \{G(K)\}^{1/d} + d + 1,$$

wobei der Faktor d möglicherweise auf $\sqrt{d}$ gedrückt werden kann

2. Für zentralsymmetrische $K \in \mathscr{K}^d$ gilt mit von d unabhängigem c_4

$$w(K) \leqslant c_4 \sqrt{d}\, \{G(K)\}^{1/d}.$$

In der Geometrie der Zahlen benötigt man häufig ([G, L], [E, G, H], [Ch], [N, W]) Abschätzungen vom Typ

$$|G(K) - V(K)| \leqslant c(D(K))^{d-\alpha}.$$

Während die Existenz solcher Ungleichungen sofort aus Steiners Satz für Parallelkörper folgt, ist die Bestimmung optimaler Konstanten c, α bei bestimmten $K \in \mathscr{K}^d$ sehr schwierig.

Wir schließen mit ein paar kurzen Bemerkungen zu algorithmischen Aspekten der zuletzt behandelten Gebiete; für Einzelheiten verweisen wir auf [K1], [K2], [Lo] und [G, L, S]. Einige dieser Probleme sind vor allem in angewandten Bereichen der Diskreten Mathematik von Bedeutung. Hier interessieren weniger die Existenzaussagen als vielmehr algorithmische Lösungen.

Eine wichtige Methode, um konvexe Körper algorithmisch zu erfassen, sind „Orakelansätze". Ein Orakel, das ein $K \in \mathscr{K}^d$ definiert, kann z. B. für ein $x \in E^d$ entscheiden, ob $x \in K$ gilt. Ist die Antwort „nein", so kann man noch die Angabe einer Hyperebene, die x von K trennt, verlangen. Die Anzahl der Aufrufe des Orakels geht dann in die Komplexität eines Algorithmus ein. Diese Orakelansätze haben bei vielen praxisrelevanten Problemen erheblich geholfen [G, L, S].

Bei so einem Ansatz kann man etwa fragen, ob ein nichttrivialer Gitterpunkt, der nach Minkowskis Fundamentalsatz in jedem $K \in \mathscr{K}^d$ mit $K = -K$ und $V(K) \geqslant 2^d$ enthalten ist, auch algorithmisch effektiv gefunden werden kann. Das beste bekannte Resultat ([G, L, S], p. 149) in dieser Hinsicht ist ein Algorithmus, der unter stärkeren Voraussetzungen an das Volumen des Körpers in polynomialer Zeit einen solchen Gitterpunkt findet. Will man Abschätzungen der Gitterpunktanzahl durch andere Funktionale – etwa durch Dicke und Durchmesser wie in den Theoremen 7.4 und 7.6 praktisch anwenden, so ist es nötig, diese linearen Funktionale von konvexen Körpern oder wenigstens von Polytopen effizient zu berechnen. In manchen Fällen ist das möglich, aber in anderen Fällen führt das auf NP-vollständige Entscheidungsprobleme (s. z. B. [G, K] und die dort angegebene Literatur).

Bereits diese kurzen Bemerkungen zu algorithmischen Aspekten der Geometrie der Zahlen zeigen die enge Verbindung zwischen den neuen angewandten Problemstellungen der mathematischen Programmierung, der Computational Geometry und der Theoretischen Informatik sowie andererseits den klassischen Gebieten der Geometrie der Zahlen, Kugellagerungen und Konvexgeometrie.

Abschließend möchte ich U. Betke (Siegen), P. Gritzmann (Trier) und P. M. Gruber (Wien) für wertvolle Hinweise und Ergänzungen danken.

Literaturverzeichnis

[Ba] Bambah, R. P.: Geometry of numbers, packing and covering and discrete geometry. Math. Student **39** (1971) 117–129

[Ba, R] Bambah, R. P.; Rogers, C. A.: Covering the plane with convex sets. J. London Math. Soc. **27** (1952) 304–314

[Ba, R, Z] Bambah, R. P.; Rogers, C. A.; Zassenhaus, H.: On coverings with convex domains. Acta Arith. **9** (1964) 191–207

[Ba, Wo] Bambah, R. P.; Woods, A. C.: On plane coverings with convex domains. Mathematika **18** (1971) 91–97

[Ber] Bernstein, D. M.: The number of integral points in integral polyhedra. Funct. Anal. Appl. **10**(3) (1976) 223–224

[Bet] Betke, U.: Zu einem Abstandsintegral von Hadwiger. Arch. Math. **29** (1977) 208–209

[B, G1] Betke, U.; Gritzmann, P.: Über L. Fejes Tóths Wurstvermutung in kleinen Dimensionen. Acta Math. Hungar. **43** (1984) 299–307

[B, G2] –; –: An application of valuation theory to two problems of discrete geometry. Discrete Math. **58** (1986) 81–85

[B, G, W] Betke, U.; Gritzmann, P.; Wills, J. M.: Slices of L. Fejes Tóth's sausage conjecture. Mathematika **29** (1982) 194–201

[B, K] Betke, U.; Kneser, M.: Zerlegung und Bewertungen von Gitterpolytopen. J. reine u. angew. Math. **358** (1985) 202–208

[B, M] Betke, U.; McMullen, P.: Lattice points in lattice polytopes. Monatsh. Math. **99** (1985) 253–265

[Be, W] Betke, U.; Wills, J. M.: Stetige und diskrete Funktionale konvexer Körper. Contributions to geometry (Proc. Geom. Sympos., Siegen, 1978) Ed. by J. Tölke and J. M. Wills. Birkhäuser, Basel 1979, 226–237

[Bl] Blichfeldt, H. F.: Note on geometry of numbers. Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1921) 152–153

[Bo] Bokowski, J.: Gitterpunktanzahl und Parallelkörpervolumen von Eikörpern. Monatsh. Math. **79** (1975) 93–101

[B, H, W] Bokowski, J.; Hadwiger, H.; Wills, J. M.: Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Körper im n-dimensionalen euklidischen Raum. Math. Z. **127** (1972) 363–364

[B, O] Bokowski, J.; Odlyzko, A. M.: Lattice points and the volume area ratio of convex bodies. Geometriae Dedicata **2** (1973) 249–254

[Bo, W1] Bokowski, J.; Wills, J. M.: Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Mengen im $\mathbb{R}^3$. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **25** (1974) 7–13

[Bo, W2] –; –: Upper bounds for the number of lattice points of convex bodies. Am. Math. Monthly **81** (1974) 620–622

[Ch] Chalk, J. H. H.: The Vinogradoff-Mordell-Titäväinen inequalities. Indag. Math. **42** (1980) 367–374

[C, S] Conway, J. H.; Sloane, N. J. A.: Sphere packings, lattices and groups. Springer, New York 1988

[C, F, R] Coxeter, H. S. M.; Few, L.; Rogers, C. A.: Covering space with equal spheres. Mathematika **6** (1959) 147–157

[D, Z] Dauenhauer, M. H.; Zassenhaus, H.: Local optimality of the critical lattice sphere-packing of regular tetrahedra. Discrete Math. **64** (1987) 129–146

[Da] Davenport, H.: On a principle of Lipschitz. J. London Math. Soc. **26** (1951) 179–183

[E1] Ehrhart, E.: Sur un problème de géometrie diophantienne linéaire. J. reine angew. Math. **226** (1967) 1–29, **227** (1967) 25–49

[E2] –: Démonstration de la loi de réciprocité. C. R. Acad. Sci. Paris **265** (1967) 5–9, 91–94, **266** (1968) 696–697

[E3] –: Polynômes arithmétiques et méthode des polyédres en combinatoire. Birkhäuser Verlag, Basel 1977

[E, G, H] Erdös, P.; Gruber, P. M.; Hammer, J.: Lattice points. Longman Sci. + Techn., 1989

[FG1] Fejes Tóth, G.: New results in the theory of packing and covering. Convexity and its applications, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills. Birkhäuser, Basel - Boston - Stuttgart 1983, 318–359

[FG2] –: Finite coverings by translates of centrally symmetric convex domains. Discrete Comp. Geom. **2** (1987) 353–364

[F, G, W1] Fejes Tóth, G.; Gritzmann, P.; Wills, J. M.: Sausage-skin problems for finite coverings. Mathematika **31** (1984) 118–137)

[F, G, W2] –; –; –: Finite sphere packing and sphere covering. Discrete Comp. Geom. **4** (1989) 19–40

[F, G, W3] –; –; –: On finite multiple packings. Archiv d. Math. **54** (1990), in press

[FL1] Fejes Tóth, L.: Über die dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung. Comment. Math. Helv. **23** (1949) 342–349

[FL2] –: Some packing and covering theorems. Acta Sci. Math. Szeged. **12** Pars A (1950) 62–67

[FL3] –: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. 2. Aufl. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin - New York 1972

[FL4] –: Research problem 13. Period. Math. Hungar. **6** (1975) 197–199

[FL, W] Fejes Tóth, L.; Wills, J. M.: Enclosing a convex body by homothetic copies. Geometriae Dedicata **15** (1984) 279–287

[Fl] Florian, A.: Mehrfache Packungen konvexer Körper. S-ber. Österr. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. II **186** (1978) 373–384

[Fo, G] Folkman, J. H., Graham, R. L.: A packing inequality for compact convex subsets of the plane. Canad. Math. Bull. **12** (1969) 745–752

[G, Wt, Z] Graham, R. L.; Witsenhausen, H. S.; Zassenhaus, H. J.: On tightest packings in the Minkowski plane. Pacific J. Math. **41** (1972) 699–715

[G1] Gritzmann, P.: Finite Packungen und Überdeckungen. Habilitationsschrift Siegen 1984

[G2] –: Ein Approximationssatz für konvexe Körper. Geometriae Dedicata **19** (1985) 277–286

[G3] –: Finite packing of equal balls. J. London Math. Soc. **33** (1986) 543–553

[G4] –: Lattice covering of space with symmetric convex bodies. Mathematika **32** (1985) 311–315

[G, K] Gritzmann, P.; Klee, V.: On the complexity of computing the inner and outer radii of polytopes in finite dimensional l^p-spaces. To appear

[G, W1] Gritzmann, P.; Wills, J. M.: On two finite covering problems of Bambah, Rogers, Woods and Zassenhaus. Monatsh. Math. **99** (1985) 279–296

[G, W2] –; –: Finite packing and covering. Stud. Sci. Math. Hungar. **21** (1986) 149–162

[G, W3] –; –: An upper estimate for the lattice point enumerator. Mathematika **33** (1986) 197–203

[G, W4] –; –: On chemical whiskers. In preparation

[Gro] Groemer, H.: Über die Einlagerung von Kreisen in einen konvexen Bereich. Math. Z. **73** (1960) 285–294

[G, L, S] Grötschel, M.; Lovasz, L.; Schrijver, A.: Geometric algorithms and combinatorial optimization. Springer 1988

[Gru] Gruber, P. M.: Typical convex bodies have surprisingly few neighbours in densest lattice packings. Stud. Sci. Math. Hungar. **21** (1986) 163–173

[G, L] Gruber, P. M.; Lekkerkerker, C. G.: Geometry of numbers. North-Holland, Amsterdam 1987

[H1] Hadwiger, H.: Beweis eines Funktionalsatzes für konvexe Körper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **17** (1951) 69–76

[H2] –: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957

[H3] –: Überdeckungen ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate. Comm. Math. Helvetici **13** (1940/41) 195–200

[H4] –: Über Gitter und Polyeder. Monatsh. Math. **57** (1954) 246–254

[H5] –: Volumen und Oberfläche eines Eikörpers, der keine Gitterpunkte überdeckt. Math. Z. **116** (1970) 191–196

[H6] –: Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie. Monatsh. Math. **76** (1972) 410–418

[H7] –: Das Wills'sche Funktional. Monatsh. Math. **79** (1975) 213–221

[H8] –: Gitterpunktanzahl im Simplex und Wills'sche Vermutung. Math. Ann. **239** (1979) 271–288

[H, W1] Hadwiger, H.; Wills, J. M.: Über Eikörper und Gitterpunkte im gewöhnlichen Raum. Geometriae Dedicata **2** (1973) 255–260

[H, W2] –; –: Gitterpunktanzahl konvexer Rotationskörper. Math. Ann. **208** (1974) 221–232

[H, W3] –; –: Neuere Studien über Gitterpolygone. J. reine angew. Math. **280** (1975) 61–69

[Ham] Hammer, J.: Volume-surface area relations for n-dimensional lattices. Math. Z. **123** (1971) 219–222

[Hen] Hensley, D.: Lattice vertex polytopes with interior lattice points. Pacific J. Math. **105** (1983) 183–191

[Hö] Höhne, R.: Gitterpunktanzahl und Parallelkörpervolumen von Eikörpern. Math. Ann. **251** (1980) 269–276

[K1] Kannan, R.: Minkowski's convex body theorem and integer programming. Math. of Operat. Research **12** (1987) 415–440

[K2] –: Algorithmic geometry of numbers. Ann. Rev. Comput. Sci. **2** (1987) 231–267

[K, L] Kannan, R.; Lovasz, L.: Covering minima and lattice point free convex bodies. Annals of Math. **128** (1988) 577–602

[K, P, W] Kleinschmidt, P.; Pachner, U.; Wills, J. M.: On L. Fejes Tóth's sausage conjecture. Israel J. Math. **47** (1984) 216–226

[Lei] Leichtweiss, K.: Konvexe Körper. Deutsch. Verl. Wiss., Berlin 1979

[Len] Lenstra, H. W.: Integer programming with a fixed number of variables. Math. of Operat. Research **8** (1983) 538–548

[Lo] Lovasz, L.: An algorithmic theory of numbers, graphs and convexity. AMS-SIAM Reg. Conf. Ser. **50**, Philadelphia 1986

[Md] MacDonald, I. G.: The volume of a lattice polyhedron. Proc. Cambridge Phil. Soc. **59** (1963) 719–726

[M1] McMullen, P.: Non-linear angle-sum relations for polyhedral cones and polytopes. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **78** (1975) 247–261

[M2] –: Valuations and Euler-type relations on certain classes of convex polytopes. Proc. London Math. Soc. (3), **35** (1977) 113–135

[M3] –: Determinants of lattices induced by rational subspaces. Bull. London Math. Soc. **16** (1984) 275–277

[M4] –: Volumes of projections of unit cubes. Bull. London Math. Soc. **16** (1984) 278–280

[M, S] McMullen, P.; Schneider, R.: Valuations on convex bodies. In: Convexity and its applications, ed. P. Gruber and J. M. Wills. Birkhäuser, Basel 1973

[M, W1] McMullen, P.; Wills, J. M.: Zur Gitterpunktanzahl auf dem Rand konvexer Körper. Monatsh. Math. **77** (1973) 411–415

[M, W2] –; –: Minimal width and diameter of lattice-point-free convex bodies. Mathematika **28** (1981) 255–264

[N, W] Niederreiter, H.; Wills, J. M.: Diskrepanz und Distanz von Maßen bezüglich konvexer und Jordanscher Mengen. MZ **144** (1975) 125–134

[No] Nosarzewska, M.: Evaluation de la difference entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle. Coll. Math. **1** (1948) 305–311

[Od] Odlyzko, A. M.: On lattice points inside convex bodies. Am. Math. Monthly **80** (1973) 915–918

[Ol] Oler, N.: An inequality in the geometry of numbers. Acta Math. **105** (1961) 19–48

[P, W, Z] Perles, M.; Wills, J. M.; Zaks, J.: On lattice polytopes having interior lattice points. Elem. Math. **37** (1982) 44–46

[Ov] Overhagen, T.: Zur Gitterpunktanzahl konvexer Körper im 3-dimensionalen euklidischen Raum. Math. Ann. **216** (1975) 217–224

[P] Pick, G.: Geometrisches zur Zahlenlehre. Naturwiss. Z. Lotos, Prag 1899 311–319

[Re1] Reeve, J. E.: On the volume of lattice polyhedra. Proc. London Math. Soc. III, **7** (1957) 378–395

[Re2] –: A further note on the volume of lattice polyhedra. J. London Math. Soc. **34** (1959) 57–62

[R1] Rogers, C. A.: The closest packing of convex two-dimensional domains. Acta Math. **86** (1951) 309–321

[R2] –: Lattice coverings of space. Mathematika **6** (1959) 33–39

[R3] –: Packing and covering. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 54. Cambridge University Press, New York 1964

[S] Santalo, L. A.: Integral geometry and geometric probability. Addison-Wesley Publ. Comp., London 1976

[Sm] Schmidt, W. M.: Volume, surface area and the number of integer points covered by a convex set. Arch. Math. **23** (1972) 537–543

[Sc1] Scott, P. R.: A lattice problem in the plane. Mathematika **20** (1973) 247–252

[Sc2] –: Two inequalities for convex sets with lattice point constraints in the plane. Bull. London Math. Soc. **11** (1979) 273–278

[Sc3] –: Lattices and convex sets in space. Quart. J. Math. Oxford (2) **36** (1985) 359–362

[Sl] Sloane, N. J. A.: The packing of spheres. Scientific American **250** (1984) 116–125)

[St1] Stanley, R. P.: Magic labelings of graphs, symmetric magic squares, systems of parameters and Cohen-Macaulay rings. Duke Math. J. **43** (1976) 511–531

[St2] –: Decompositions of rational convex polytopes. Ann. Discrete Math. **6** (1980) 333–342

[Weg] Wegner, G.: Über endliche Kreispackungen in der Ebene. Studia Sci. Math. Hungar. **21** (1986) 1–28

[Wei] Weißbach, B.: Zu einer Aufgabe von J. M. Wills. Acta Math. Hungar. **48** (1986) 131–137

[W1] Wills, J. M.: Ein Satz über konvexe Mengen und Gitterpunkte. Monatsh. Math. **72** (1968) 451–463

[W2] Wills, J. M.: Ein Satz über konvexe Körper und Gitterpunkte. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **35** (1970) 8–13

[W3] –: Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen. Elem. Math. **28** (1973) 57–63

[W4] –: Gitterzahlen und innere Volumina. Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 508–524

[W5] –: On an analog to Minkowski's lattice point theorem. In: The geometric vein, The Coxeter-Festschrift 285–288, ed. C. Davies, B. Grünbaum, F. A. Sherk. New York 1982

[W6] –: 4 Research problems. In: Period. Math. Hungar. a) Res. problem 30. **13** (1982) 75–76; b) Res. problem 33. **14** (1983) 189–191; c) Res. problem 35. **14** (1983) 312–314; d) Res. problem 41. **18** (1987) 251–252

[W7] –: On the density of finite packings. Acta Math. Hungar. **46** (1985) 205–210

[W8] –: A counterpart to Oler's lattice point theorem. Mathematika **36** (1989) 216–220

[W9] –: Locally dense finite lattice packings of spheres. In press

[Z] Zassenhausen, H.: Modern developments in the geometry of numbers. Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961) 427–439

Jörg M. Wills
Math. Inst. Univ. Siegen
Hölderlinstr. 3
D-5900 Siegen

(Eingegangen: 17. 11. 1988)

Buchbesprechungen

Landau, E., Collected Works, Vol. IV, Vol. IX, Editors: P.T. Bateman (Urbana), L. Mirsky (Sheffield), W. Schwarz (Frankfurt), H. Wefelscheid (Duisburg), Essen: Thales-Verlag 1988, hardcover, Vol. IV: 463 p., Vol. IX: 447 p., je DM 224,–

Der Band IV enthält 20 Arbeiten, die in dem Zeitraum 1908–1911 erschienen sind. Die Arbeiten beschäftigen sich mit dem Primzahlsatz, den Primzahlformeln, mit Dirichlet-Reihen und der Zeta-Funktion.

Hervorheben möchte ich die Arbeit [69] (gem. mit H. Bohr), die eine schöne Anwendung des Picardschen Satzes ist. Besonders hinweisen möchte ich aber auf die Arbeit [72]. Sie ist sehr umfangreich, umfaßt sie doch 80 Seiten und behandelt Grenzwertsätze z. B. von Hardy, M. Riesz und Axer. Es ist sehr bemerkenswert, daß Landau über Bemerkungen berichtet, die ihm H. Weyl mitgeteilt hat. Dies zeigt das Interesse, das H. Weyl immer an der Analytischen Zahlentheorie genommen hat. Wertvoll ist aber auch seine Bemerkung, daß die Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale für die Analytische Zahlentheorie von Wichtigkeit ist. Die folgende Entwicklung der Zahlentheorie hat gezeigt, wie vorausschauend H. Weyl war.

Dann möchte ich noch die Arbeit [73] (gem. mit Caratheodory), die sich mit der Konvergenz von Funktionenfolgen beschäftigt – wohl angeregt durch den Satz von Vitali – erwähnen. Diesem Band ist ein Bild beigegeben, das ungefähr 1913 aufgenommen wurde, es zeigt Landau bei einer Bergbesteigung.

Der Band IX umfaßt 50 Arbeiten von 1927–1940. Sie sind im sogenannten 2. Landau-Stil verfaßt. Die letzten drei Arbeiten wurden erst nach dem Tod von Landau veröffentlicht. Eine Reihe von Arbeiten beschäftigt sich mit dem Picardschen Satz und vor allem in seiner Formulierung von Bloch mit der Bestimmung der sog. Blochschen Konstante. Die Arbeiten [211] und [212] beschäftigen sich mit der Kusminschen Ungleichung für trigonometrische Summen und ihre Anwendungen, die Arbeiten [214] und auch [215] beschäftigen sich mit der van der Corputschen Ungleichung. Diese Arbeiten wurden gemeinsam mit anderen Autoren verfaßt. Vor allem ist hier der Name Jarnik hervorzuheben. In diesem Zeitraum erschien eine Reihe von kurz gefaßten Arbeiten, vor allem in der Mathematischen Zeitschrift, die meistens den Titel tragen „Über einen Satz von ....“, wobei die leere Stelle meist den Namen eines Mathematikers enthielt. Sie sind sehr kurz gefaßt, fast in Telegrammstil, hier findet sich auch oft das Wort ‚Weltkonstante‘. Der Stil dieser Arbeiten hat ihm nicht nur Anerkennung, sondern auch, es ist vielleicht nicht übertrieben, Feindschaften eingebracht.

Es haben einige Fortschritte in der Zahlentheorie auf Landau großen Eindruck gemacht, und er hat sich mit ihnen intensiv auseinandergesetzt: Die bahnbrechenden Methoden von Vinogradow, zunächst beim Waringschen Theorem, dann die Schnirelmannschen Dichtigkeitssätze, die einen bedeutenden Fortschritt in der Goldbachschen Vermutung bewirkten und dann die neuen Methoden von N. Wiener zur Behandlung des Primzahlsatzes. Bei der Auseinandersetzung mit der Wienerschen Methode war Heilbronn sein Mitarbeiter.

1935 gibt andererseits Landau, nun bereits in Berlin [245], eine kurze Darstellung des fundamentalen Satzes seines ehemaligen Assistenten Heilbronn.

Auch dieser Band ist sehr lesenswert in vielerlei Hinsicht, zunächst in mathematischer Hinsicht, aber auch in mathematisch historischer Hinsicht und zeigt wohl auch, unter welcher inneren Anspannung Landau in seinen letzten Lebensjahren gestanden ist.

Der Band X wird Ende des Jahres 1989 erscheinen.

Wien

E. Hlawka

van der Waerden, B. L., Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1983, 98 figs., XII, 223 pp., Hard cover, DM 96,–

Gericke, H., Mathematik in Antike und Orient, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1984, 140 figs., XII, 292 pp., Hard cover, DM 112,–

Auf den ersten Blick mag es erstaunlich erscheinen, daß ein Verlag in kurzer Folge zwei Bücher zum selben Thema auf den Markt bringt. Abgesehen davon, daß ein Rezensent sich den Kopf nicht über die wirtschaftliche Vernunft eines Verlags zerbrechen sollte, könnten die beiden Autoren allenfalls auf dem deutschsprachigen Markt konkurrieren. Der Ruf des Schöpfers der „Modernen Algebra" und der Erfolg des Autors der „Erwachenden Wissenschaft" könnte doch manchen deutschen Leser dazu veranlassen, die größere Mühe, einen englischen Text lesen zu müssen, auf sich zu nehmen. Was würde er dafür bekommen? Zunächst fällt die gemessen an dem zwangsläufig selektiven Charakter beider Darstellungen erstaunlich große Schnittmenge konkreter mathematischer Inhalte auf. Form und Anordnung dieser Materialien sind in den beiden Bänden aber gänzlich verschieden. Während Gericke chronologische Längsschnitte durch die babylonische, ägyptische, griechische, chinesische, indische und islamische Mathematik legt, benutzt van der Waerden eine laterale Betrachtungsweise. Ein mathematisches Ergebnis, die Lösung eines mathematischen Problems wird nicht mehr in seinem unmittelbaren Entstehungszusammenhang sondern im interkulturellen Vergleich angeboten. Dahinter steckt eine von van der Waerden als Hypothese bezeichnete, allerdings kaum alternativ diskutierte Botschaft von einem der babylonischen, griechischen, indischen und chinesischen Mathematik gemeinsamen Ursprung. Diesen Ursprung sieht van der Waerden in einer von den Trägern der Glockenbecherkultur in der ersten Hälfte des dritten vorchristlichen Jahrtausends geschaffenen Mathematik. Für die Existenz einer solchen in der Entstehungsphase einer schriftlichen Kultur angesiedelten Urmathematik gibt es natürlich keine Beweise in Form schriftlicher Quellen. Als Indizien für die zuerst von A. Seidenberg behauptete Existenz dieser spätneolithischen Mathematik werden die babylonischen Texten, Euklid und altindischen Śulbasūtras gemeinsame Konstruktion eines einem gegebenem Rechteck flächengleichen Quadrats, Gemeinsamkeiten zwischen babylonischen Aufgabensammlungen und den altchinesisches mathematisches Wissen repräsentierenden „Neun Büchern arithmetischer Kunst" sowie die von A. und A. S. Thom rekonstruierte Verwendung Pythagoreischer Zahlentripel in den Grundrissen von Megalithbauten aufgeführt. Der letzte Punkt wird in beiden Büchern behandelt. Die Thoms hatten bei ihren Vermessungen von Megalithbauten auf den britischen Inseln die Verwendung eines megalithischen Einheitsmaßes zu erkennen geglaubt und die meisten der nicht kreisförmigen Grundrisse als durch rechtwinklige Dreiecke bestimmt gedeutet, deren Seiten ganzzahlige Vielfache dieses hypothetischen Einheitsmaßes sind. Van der Waerden stellt die angesichts der vorhandenen Evidenz für diese Interpretation, deren idealisierte Grundrisse z. T. beträchtlich von den Gegebenheiten abweichen, unzulässige Frage nach deren „vollständiger Sicherheit", um diese mit einem überzeugten „Ja" zu beantworten.

Gericke diskutiert die Plausibilität der Konstruktionen nach der Thomschen Interpretation, unterstellt für das mit sechs parallelen Ringen recht aufwendig gebaute Woodhenge die Verwendung einer anderen Maßeinheit und erhält so ein einfacheres Zahlentripel für das Grunddreieck. Gerickes Grundhaltung ist die eines nach Gesichertem Ausschau haltenden Skeptikers. Das zwingt ihn dazu, im Fall der Thomschen Interpretation zu bekennen: „Wie es wirklich gemacht wurde, bleibt unbekannt." Der Grund dafür ist, daß es einfachere und damit vom Methodischen her überzeugendere Konstruktionen gleicher Anpassungsgüte für die vorliegenden Grundrisse gibt. Auch an anderen Stellen zeigt sich, daß Gericke zwischen durch Quellen gesichertem Material und dessen Interpretationsmöglichkeiten i. A. streng scheidet. Van der Waerden hingegen behandelt sein Material weniger wie ein Historiker sondern wie ein Mathematiker, der einen interessanten, intuitiv vermuteten Satz streng beweisen will. Die behauptete Existenz einer megalithischen Mathematik rituellen Ursprungs, die u. a. eine Theorie pythagoreischer Zahlentripel enthalten haben soll, will van der Waerden durch geeignete Voraussetzungen erzwingen. Zu diesen gehört die nicht mehr nur denkmögliche sondern für ihn absolut gesicherte Verwendung von pythagoreischen Zahlentripeln entsprechenden rechtwinkligen Dreiecken bei der Konstruktion der Megalithbauten. Dazu gehört auch das Prinzip, daß unabhängige Entdeckungen wichtiger mathematischer Aussagen äußerst selten sind. Das Prinzip, das der aus einem riesigen historischen Material gewonnenen Feststellung des Mathematikhistorikers K. O. May widerspricht, wonach Mehrfachentdeckungen in der Mathematik die Regel sind, vermittelt natürlich die für die Hypothese van der Waerdens benötigte Abhängigkeit, wenn in zwei Kulturen äquivalente Problemstellungen und dazugehörige Lösungen auftauchen. Dem Augenmerk auf solche Äquivalenz entspricht auch van der Waerdens verglichen mit Gericke originalfernere Darstellung. Gericke kommt dabei seine große Erfahrung im Umgang mit mathematischer Quellenliteratur zugute, die er vor allem im Rahmen seiner Mitarbeit an der Neuausgabe von Tropfkes „Geschichte der Elementarmathematik" gesammelt hat. Ein wenig mag dieser Hintergrund auch die Auswahl des Stoffes beeinflußt haben. So wird in dieser sorgfältigen Ausarbeitung einer einsemestrigen zweistündigen Vorlesung für das Kernstück, die griechische Mathematik, mehr die Grundlegung und der Wandel der Mathematik zu einer beweisenden Wissenschaft betont als die heuristischen Methoden, mit denen griechische Mathematiker, allen voran Archimedes, zu außerhalb der Reichweite ihrer Vorgänger liegenden neuen Ergebnisse kamen. An Gerickes Vorliebe für die Grundlagen liegt es wohl auch, daß Aristoteles so bemerkenswert gut abschneidet, obwohl die wichtigsten Leistungen des kontruktivsten Mathematikers der Antike, Archimedes, z. T. nur im Widerspruch zu aristotelischen Positionen erklärbar sind. Mit Gerickes Grundlagenschwerpunkt hängt wohl auch zusammen, daß seine Zusammenfassung der Leistungen arabischer Mathematiker (S. 214) für meinen Geschmack übertrieben bemüht klingt, was eine in ihrer Gesamtheit gewürdigte arabische Mathematik bestimmt nicht nötig hätte. Mit der wohltuenden Solidität der quellennahen Darstellung kollidieren gelegentliche Kühnheiten Gerickes, wie die Kennzeichnung einer in einem Keilschrifttext enthaltenen verknüpfungstreuen Zuordnung einer arithmetischen zu einer geometrischen Folge mit „Logarithmen" (S. 21) oder die allzu große chronologische Sicherheit suggerierende Datierung griechischer Mathematiker, insbesondere von Euklid, in den übrigens sehr nützlichen biographisch-bibliographischen Notizen. Diese biographisch-bibliographischen Notizen, die rund 25 % des Gesamtumfanges von Gerickes Buch beanspruchen, geben eine Übersicht über die auf 16 wichtige Verzeichnisse verteilte Literatur, Kurzbiographien, die von wenigen Zeilen bis zu einigen Seiten wie bei dem durch eine Inhaltsangabe der Elemente aufgewerteten Euklid reichen, zeitliche Übersichten und Kartenskizzen sowie eine Tafel der in den verschiedenen Kulturen verwendeten Zahlzeichen. Der durch mehrere Zusammenfassungen didaktisch gut aufbereitete Text wird durch ein abschließendes Stichwortverzeichnis sachlich erschlossen. Dem so reichlich ausgestatteten Band fehlt nur ein Namenverzeichnis, das zum Beispiel das Aufsuchen der Sekundärliteratur wesentlich erleichtert hätte. Bis auf einen Sach- und Namenindex fehlt ein vergleichbarer Apparat bei van der Waerden.

Letztlich hat der Leser die Wahl zwischen der englischen Fassung der Algebra und Geometrie im Altertum, die an einer interessanten aber von den Fachhistorikern überwiegend kritisch aufgenommenen Hypothese orientiert ist, und einer dem Ideal einer (mathematischen) Allgemeinbildung historisch verpflichteten deutschen Darstellung der Mathematik in den alten Hochkulturen und als deren Bestandteil.

München I. Schneider

Nikulin, V. V., Shafarevich, I. R., Geometries and Groups (Universitext, Springer Series in Soviet Mathematics) Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1987, 256 pp., softcover, DM 58,–

Titel und Verlagsangaben scheinen einen Überblick über die Vielfalt geometrischer Fragen in der Mathematik versprechen zu wollen; dafür ist der gewählte Themenkreis, diskrete Bewegungsgruppen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, wohl doch zu begrenzt. Ich sehe das Hauptanliegen des Buches eher darin, einem Laien, sagen wir, einem Abiturienten, anhand eines exemplartischen Falles eine Einführung in mathematisches Denken zu geben. Die Wahl des Gegenstandes ermöglicht es den Autoren, der hauptsächlichen Gefahr zu entgehen, die solche Unternehmungen bedroht: daß nämlich der Zwang zur Beschränkung auf elementar nachvollziehbare Überlegungen zum Abgleiten in die Banalität und Inhaltsleere führt. Ein Leser, der zu den nötigen Anstrengungen bereit ist, wird hier belohnt durch ein eindruckvolles Wechselspiel zwischen dem konkreten Studium faszinierender individueller Objekte, die ihm wie „zum Anfassen" präsentiert werden, und begrifflichen Konstruktionen und Überlegungen, die zu abschließenden Klassifikationssätzen führen und so die Beschäftigung mit dem konkreten Gegenstand rechtfertigen. So werden Anschauung und analytisches Denken gleichermaßen herausgefordert und befriedigt.

Gegenstand des Buches sind 2-dimensionale lokal euklidische Geometrien, d.h. konvexe metrische Räume, die gleichmäßig lokal zur euklidischen Ebene $E=E^2$ isometrisch sind; letzteres soll bedeuten, daß alle Kugeln eines bestimmten Radius r zu euklidischen Kugeln isometrisch sind. Die gewöhnliche Metrik genügt so als Träger der geometrischen Struktur, differentialgeometrische Begriffsbildungen werden nicht benötigt, und auch Geraden treten nur am Rande auf.

Motiviert durch 4 Beispiele (Ebene, Zylinder, Möbiusband und Torus) werden die Quotientengeometrien E/Γ nach gleichmäßig diskontinuierlichen Bewegungsgruppen eingeführt und als lokal euklidische Geometrien erkannt. Die Gruppen Γ werden bis auf Konjugiertheit in der affinen Gruppe klassifiziert. Außer den 4 motivierenden Beispielen erhält man genau einen weiteren Typ von Geometrien auf der Kleinschen Flasche. Anschließend wird die Konstruktion umgekehrt, indem man die einer Geometrie G entsprechende Gruppe Γ als Deckbewegungsgruppe einer lokal isometrischen Überlagerung $E\rightarrow G$ konstruiert. Damit hat man den Klassifikationssatz auch für die lokal euklidischen Geometrien.

Die feinere Klassifikation bis auf Isometrie bzw. Ähnlichkeit wird am Ende des Buches nachgetragen; dem entspricht die Klassifikation der Gruppen bis auf Konjugiertheit in der Bewegungs- bzw. Ähnlichkeitsgruppe. Für den interessantesten Fall, die Geometrien auf dem Torus und die zugehörigen 2-dimensionalen Gitter, wird die Bestimmung der Ähnlichkeitsklassen vollständig durchgeführt. Dazu wird die hyperbolische Geometrie H in der oberen Halbebene konstruiert, und die Äquivalenzklassen von Gittern werden bijektiv dargestellt durch die Punkte eines Fundamentalbereich $F\subset H$ der Gruppe $\Delta=PSL_2(\mathbb{Z})\cdot\mathbb{Z}_2$ von gebrochen semilinearen Transformationen der komplexen projektiven Geraden. Somit bilden die Äquivalenzklassen von Geometrien auf dem Torus selbst eine Geometrie, eben H/Γ.

In einem dazwischenliegenden Kapitel werden verschiedene Variationen des Themas vorgeführt, mit ausgiebigem Studium der konkreten Phänomene. Allerdings wird hier für die Beweise der Klassifikationssätze auf die Literatur verwiesen. Behandelt werden 3-dimensionale lokal euklidische Geometrien, die zugehörigen gleichmäßig diskontinuierlichen Bewegungsgruppen von E^3, kristallographische Gruppen in E^2 und die zugehörigen Quotientengeometrien, schließlich dasselbe noch allgemeiner für diskrete Gruppen in E^2 ohne die Zusatzforderung nach einem beschränkten Fundamentalbereich, die die kristallographischen Gruppen auszeichnet. Anmerkung: Der Beweis für die Orientierbarkeit von E^3 kann so nicht gelingen, weil die Auswertungsabbildung $SO_3\rightarrow E^3:\phi\rightarrow\phi(x_0)$ keinen stetigen

Schnitt besitzt. Konkret gesprochen: Um welche Achse soll man e_t nach e_0 drehen, falls zufällig $e_t = -e_0$ ist? (Seite 142)

Das Buch ist eine Fundgrube schöner Mathematik und jedem interessierten Laien, freilich auch Mathematikstudenten, als Lektüre wärmstens zu empfehlen.

Braunschweig R. Löwen

Vaisman, I., Sympletic Geometry and Secondary Characteristic Classes (Progress in Math., Vol. 72) Basel – Boston: Birkhäuser 1987, 219 S., hardcover, DM 79,–

Das Buch ist eine gründliche und gut motivierte Einführung in ein interessantes aktuelles Forschungsgebiet, in dem sich Differentialgeometrie, Topologie und partielle Differentialgleichungen treffen. Vom Leser wird erwartet, daß er mit der grundlegenden Terminologie über differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Bündel und Differentialformen vertraut ist. Alle benötigten Hilfsmittel werden aber übersichtlich zusammengestellt und, soweit sie unmittelbar benötigt werden, im einzelnen entwickelt.

Im ersten Kapitel wird, ausgehend von grundlegenden Fragen der mathematischen Physik (Differentialgleichungen vom Hamilton-Jacobi-Typ) motiviert, warum man sich für symplektische Mannigfaltigkeiten und Lagrange-Untermannigfaltigkeiten interessiert.

Im zweiten Kapitel wird die lineare Algebra der reellen und komplexen Vektorräume mit symplektischer Struktur zusammengestellt. Im dritten Kapitel werden, darauf aufbauend, die Grundlagen aus der Theorie der symplektischen Vektorraumbündel und Mannigfaltigkeiten und der Lagrange-Unterbündel und -Untermannigfaltigkeiten entwickelt. Ferner, auf der analytischen Seite, werden verschiedene lokale Normalformen (klassische von Darboux, Lie, Cartan, Carathéodory und neuere Weiterentwicklungen) der relevanten Strukturen (Differentialformen, Blätterungen etc.) hergeleitet.

Das vierte Kapitel ist die eigentliche Zielsetzung des Buches: Die Transversalitätshindernisse von Lagrange-Unterbündeln. Diese Hindernisse werden als sekundäre charakteristische Klassen dargestellt. Dazu werden die differentialgeometrische Theorie der primären Klassen wiederholt und die „sekundären" Verfeinerungen nach Chern-Simons, Bott, Lehmann dargestellt. Besonderes Gewicht wird auf die Maslov-Klasse gelegt, weil diese auch als Hindernis für globale asymptotische Lösung für gewisse partielle Differentialgleichungen auftritt. Dieser letzte Aspekt wird im Buch zur Motivierung benutzt, aber im einzelnen nicht verfolgt. Der Leser wird aber durch ein reichhaltiges Literaturverzeichnis auf Quellen und andere Aspekte der Theorie verwiesen.

Göttingen T. tom Dieck

Kertész, A., Lectures on Artinian Rings, edited by R. Wiegandt, Budapest: Akadémiai Kiado 1987, 428 pp., DM 88,–

The author gave a series of lectures on artinian rings in 1962/63 which grew into the German edition "Vorlesungen über artinsche Ringe" that appeared in 1968. He was working on a revised and enlarged English edition of this book when he died in 1974. The present book was then completed under the editorship of R. Wiegandt and six additional chapters written by G. Betsch, A. Widiger and R. Wiegandt were added. The first four chapters deal with such general topics as sets, rings, modules and radicals – artinian rings are defined only on page 137. The next five chapters contain the classical theory of artinian rings, in particular the structure of semisimple artinian rings and of modules over such rings.

However, they also contain results that reflect the research interest of the author; for example, a section on systems of equations over semisimple rings and on Litoff's theorem that characterizes simple rings with a minimal one-sided ideal. The book introduces projective and injective modules, but does not use homological methods and neither the Morita theorems nor categories are mentioned. The final six chapters cover topics which are related to artinian rings: Strictly artinian rings and linearly compact rings (A. Widiger); the Goldie theorems and Small's theorem on orders in artinian rings, Connell's theorem that characterizes artinian group rings and basic facts about quasi-Frobenius rings (G. Betsch). R. Wiegandt contributes a chapter on rings for which the minimum condition holds for principal right ideals.

It was the author's original aim to update the book "Rings with minimum condition" by Artin, Nesbitt and Thrall (1944). He does this by restricting himself to the ring-theoretical aspect of the theory, but results on tensor products and the Brauer group wich belong to the theory of finite dimensional algebras are excluded. Similarly, no attempt is made to update results on indecomposable modules or representation theory in general.

The book is well organized, (almost) self contained and very readable; it moves along at a leisurely pace and many examples and details are carefully explored. There are numerous exercises at the end of each chapter with hints for the more difficult ones. A bibliography, a list of symbols and an index for authors and subjects round out this useful book.

Edmonton, Kanada H. H. Brungs

Suzuki, M., Group Theory II (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Band 248), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1986, 1 fig., x, 621 pp., Hardcover, DM 268,–

Der zweite Band des Suzukischen Gruppentheorie-Lehrbuches gliedert sich wie der erste in drei Kapitel (4. Commutators, 5. Finite Groups I,6. Finite Groups II) mit insgesamt ca. 25 Abschnitten. Das letzte Kapitel nimmt mehr als die Hälfte des Buches in Anspruch und ist vor allem verschiedenen Aspekten der Theorie der endlichen einfachen Gruppen gewidmet.

Unter „Commutators" verbergen sich sowohl allgemeinere, bereits im ersten Band angesprochene Themen (nilpotente und auflösbare Gruppen, Kommutatorgruppen), wie auch speziellere, in erster Linie endliche p-Gruppen betreffende, die nun insgesamt einer ausführlichen und systematischen Betrachtung unterworfen werden.

Generalthema des nächsten Kapitels ist die Verlagerungstheorie im weitesten Sinne, also der Zusammenhang zwischen den p-Faktorgruppen einer Gruppe und denen geeignet gewählter Untergruppen.

Den tiefsinnigsten Beitrag hierzu, die Glaubermansche K^{∞}-Theorie, findet der Leser unter „Supplements", womit an den einzigen Kritikpunkt meiner Besprechung des ersten Bandes (DMV Jahresbericht Bd. 87), das nicht sehr informative Inhaltsverzeichnis, erinnert sei. Ein weiteres Beispiel ist der klassische Satz von Brauer und Suzuki über endliche Gruppen mit einer Quaternionengruppe als 2-Sylowuntergruppe (solche Gruppen sind nicht einfach). Er wird als „Example 3" in dem nicht im Inhaltsverzeichnis aufgeführten Unterabschnitt „Exceptional characters" abgehandelt. Dabei ist das vorliegende das einzige Lehrbuch, welches einen vollständigen Beweis für diesen grundlegenden Satz enthält! Nun, es ist offenbar mehr als Buch zum Lesen denn als Nachschlagewerk konzipiert.

Auch die übrigen allgemeinen Bemerkungen zum ersten Band bleiben gültig, und meine Einschätzung des auf die Theorie der endlichen einfachen Gruppen ausgerichteten, aber eine umfassende Einführung in die allgemeine Gruppentheorie einschließenden Gesamtkonzepts bestätigt sich. Diesem Konzept wird Suzuki angesichts der seit 1963 explosionsartig angewachsenen Stoffülle dadurch gerecht, daß er sich auf Themen grundsätzlicher und zeitloser Bedeutung konzentriert und anstelle einer detaillierten Beschreibung langer Beweise vollständige, ausführliche und lehrreiche Beweise interessanter Spezialfälle bietet.

Mit einem Abschnitt über „Graphs und Simple Groups" erhält auch der zweite Band eine gewisse geometrisch-kombinatorische Komponente. Hier wird u. a. die Fischersche Theorie der 3-Transpositionen und die graphentheoretische Konstruktion einiger sporadischer einfacher Gruppen behandelt.

Ich fühle mich hinsichtlich Stil und Inhalt von Suzukis „Gruppentheorie" sehr angesprochen. Es ist ein sorgfältig strukturiertes, mit großer Liebe zur Sache (und zum Leser) geschriebenes Werk.

Kiel H. Bender

Maskit, B., Kleinian Groups (Grundlehren der mathematischen Wissenschaft, 287) Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag 1988, 67 Abbildungen, XIII, 326 Seiten, DM 128,–

Eine Kleinsche Gruppe ist eine diskrete Gruppe von linear-gebrochenen Abbildungen der Riemannschen Sphäre in sich, die auf einer offenen Teilmenge diskontinuierlich operiert. Solche Gruppen wurden zuerst von F. Schottky im Jahr 1875 in einer Studie über Lösungen gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung und den Modulraum Riemannscher Flächen eingeführt. Der Beitrag von Klein selber war eher bescheiden; er fand bestimmte Spezialfälle eines Kriteriums, wonach die von zwei Kleinschen Gruppen erzeugte Gruppe auch Kleinsch ist. Das Kriterium heißt „Kleinscher Verschmelzungsatz".

Bis etwa 1960 blieb die Theorie der Kleinschen Gruppen, besonders in Vergleich zu der der Fuchsschen Gruppen, relativ unerforscht. Fuchssche Gruppen sind Kleinsche Gruppen, die einen Kreis invariant lassen. In einer Weiterentwicklung der Uniformisierungstheorie von Riemannschen Flächen, wurde Lipman Bers zum Begriff der simultanen Uniformisierung mehrerer Riemannschen Flächen durch Kleinschen Gruppen geführt. Diese Entdeckung und die des Endlichkeitssatzes wenige Jahre später von Lars Ahlfors haben der Theorie der Kleinschen Gruppen, der Teichmüllerschen Räume und der assoziierten Geometrie starke Impulse gegeben. Neue Phänomene wurden entdeckt, wie der anfangs schwer verdauliche Begriff der „entarteten" Kleinschen Gruppen.

Kleinsche Gruppen operieren auf dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum und man darf erwarten, daß die dreidimensionale Topologie eine wichtige Rolle in der Theorie der Kleinschen Gruppen spielen sollte. Eine solche Rolle wäre analog zu der der Flächentopologie bei der Theorie der Fuchsschen Gruppen. Die Nützlichkeit der dreidimensionalen Topologie in diesem Zusammenhang wurde vor mehr als zwanzig Jahren vom Autor dieses Buches gezeigt. In den späten siebziger Jahren hatte William Thurston die große Einsicht, daß die Klasse der Mannigfaltigkeiten, die als Quotienten des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes durch eine Kleinsche Gruppe entstehen, nicht eine kleine und unbedeutende Teilmenge aller dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ist, sondern daß sie die „interessantesten" Beispiele enthält. Ebenfalls in dieser Zeit wurde der Zusammenhang mit der Theorie der dynamischen Systeme, und besonders die der Anosovschen Flüsse entdeckt. Die Analogie dieser Theorie mit der der Iteration rationaler Abbildungen hat zur Bereicherung beider geführt.

Diese vielseitigen Entwicklungen bedeuten, daß die Theorie der Kleinschen Gruppen zu einem Gebilde gewachsen ist, das nicht mehr in einer Monographie festzuhalten ist. Jedes Buch über diese Theorie bedeutet eine Auswahl des Autors. In diesem Buch liegt die Betonung auf der Konstruktion und Klassifizierung Kleinscher Gruppen durch verallgemeinerte „Kleinsche Verschmelzungsätze". Die zwölf Kapitel des Buches lassen sich drei Teilen zuordnen.

Der erste Teil besteht aus den Kapiteln I–IV und stellt eine gründliche Einführung in die allgemeine Theorie der Kleinschen Gruppen dar. Die grundlegenden Begriffe und Sätze werden ohne Umschweif vorgestellt und bewiesen. Die präzise Ausführung ist eine der großen Stärken dieses Buchs; der Leser kann sich darauf verlassen, daß die Beweise klar und vollständig sind. Dem unerfahrenen Leser wird die Motivation etwas knapp erscheinen, für den erfahrenen Leser dagegen wird dieser Teil sehr nützlich sein.

Der zweite Teil des Buchs besteht aus einem einzigen Kapitel, das den Kleinschen Verschmelzungssätzen gewidmet ist. Dieses Kapitel bildet gewissermaßen den Kern des ganzen Buches, und in ihm werden zwei Sätze formuliert und bewiesen. Diese Sätze sind sichtbar Nachkömmlinge des ursprünglichen Kleinschen Verschmelzungssatzes und tragen diesen Namen (Klein Combination Theorems) als generische Bezeichnung. Die beiden Sätze sind das Ergebnis mehrjähriger Arbeit des Autors und werden hier zum ersten Mal in einer Monographie dargestellt. Der erste der beiden Sätze beschreibt die Konstruktion von Kleinschen Gruppen als amalgamierte Produkte sehr detailliert; der zweite Satz beschreibt ihre Konstruktion als HNN-Erweiterungen. Es ist eine bedeutsame Bereicherung der Literatur, daß diese schönen, tiefen und fundamentalen Sätze jetzt in einer Monographie behandelt werden, und daß sie dadurch der mathematischen Öffentlichkeit leicht zugänglich geworden sind.

Der dritte Teil des Buches besteht aus drei langen Kapiteln und ist der Anwendung dieser Ideen bei besonderen Klassen Kleinscher Gruppen gewidmet. Zunächst konstruiert der Verfasser mehrere Beispiele von Gruppen, die dazu dienen, die allgemeine Theorie und ihre Grenzen zu erhellen. Insbesondere untersucht er auch zwei Klassen Kleinscher Gruppen, B-Gruppen (nach Bers) und Funktionengruppen. Die Klasse der B-Gruppen enthält die wichtigen quasifuchsschen Gruppen. Funktionengruppen sind in der Theorie der automorphen Funktionen entstanden. Der Verfasser betrachtet neben den Beispielen auch Klassifikations- und Isomorphiesätze und einige speziellere Teilklassen. Hier ist ein Füllhorn von Informationen für den aktiv in diesem Gebiet arbeitenden Mathematiker. Das Buch schließt mit Anwendungen auf Fuchssche und Schottkysche Gruppen, die als Abschluß der Untersuchungen von Schottky angesehen werden können.

Dieses Buch ist hauptsächlich für den Forscher geschrieben. Die angebotene Motivation ist spärlich. Bescheidene, in beiden Bedeutungen des Wortes, historische Hinweise werden zum Schluß der Kapitel gegeben. Die Hauptergebnisse werden sehr deutlich hervorgehoben, und man weiß, wenn man das Wort „Theorem" sieht, daß es sich um ein wichtiges Resultat handelt. Es werden viele Aufgaben für den Leser gestellt, die zum Üben und als Träger weiterer Informationen dienen. Dieses Buch wird für den motivierten Studenten und den aktiven Forscher von großem Wert sein, und sollte zum Bestandteil einer jeden mathematischen Bibliothek werden.

Göttingen S. J. Patterson

Oda, T., Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Vol. 15), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1988, 42 figs., 212 pp., Hardcover, DM 148,–

Bekanntlich erhält man den komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ aus dem affinen Raum $\mathbb{C}^n$, indem man für jede Schar paralleler Geraden einen unendlich fernen Punkt anfügt. Torusvarietäten sind in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion: Statt Geraden in $\mathbb{C}^n$ betrachtet man sogenannte Einparameteruntergruppen des algebraischen Torus $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \ldots \times \mathbb{C}^*$, d. h. Kurven der Form $t \to (a_1 t^{\alpha_1}, \ldots, a_n t^{\alpha_n})$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{C}^*$. Eine Torusvarietät wird dadurch bestimmt, daß man angibt, für welche Scharen von Einparameteruntergruppen man unendlich ferne Punkte an $\mathbb{C}^* \times \ldots \times \mathbb{C}^*$ anfügt. Diese Information läßt sich elegant in Termen von konvexen Polytopen in $\mathbb{R}^n$ kodieren. Wie dies genau geschieht, wird auf den ersten 23 Seiten des vorliegenden Buches sorgfältig und ausführlich erklärt.

Auf den übrigen 174 Seiten des Buches werden praktisch alle Aspekte, unter denen Torusvarietäten gegenwärtig in der Mathematik auftreten, behandelt. Zum Einen werden Torusvarietäten im Kontext allgemeiner Konstruktionen und Theorien der algebraischen Geometrie gesehen – beispielsweise wird Moris Theorie für den Fall von Torusvarietäten besprochen, und es wird die birationale Klassifikation von algebraischen Flächen und dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten in der Kategorie der Torusvarietäten gegeben. Zum Anderen werden viele Anwendungen des Konzepts von Torusvarietäten und toroidaler Einbettungen diskutiert. So werden z. B. Hirzebruchs Verfahren zur Auflösung von Singularitäten Hilbertscher Modulflächen oder Demazures Methode, Torusvarietäten zur Untersuchung von Untergruppen der Cremonagruppe zu verwenden, vorgestellt. Auch Stanleys Beweis der McMullen-Vermutung, der eine Beziehung zwischen der Anzahl k-dimensionaler Seiten eines konvexen simplizialen Polytops in $\mathbb{R}^d$ und dem Lefschetz-Satz über Hyperebenenschnitte einer zugeordneten Torusvarietät herstellt, wird wiedergegeben. Für andere Anwendungen, insbesondere toroidale Kompaktifizierungen von Modulräumen, wird auf die Literatur verwiesen.

Durch Odas Buch sind viele der Resultate über Toruseinbettungen einfacher zugänglich geworden, als sie es mit den bisherigen Standardreferenzen [1], [2] waren. Außer als Lektüre für Experten und „Anwender“ von Torusvarietäten kann man es sich auch gut als Grundlage für das zweite Semester einer Vorlesung über Algebraische Geometrie vorstellen, denn es enthält viele relativ einfach zugängliche Resultate, die abstrakte Fragestellungen der algebraischen Geometrie an interessanten und konkreten Beispielen illustrieren.

[1] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat: Toroidal Embeddings I, Lecture Notes in Mathematics 339, Springer-Verlag 1973

[2] T. Oda: Lectures on Torus Embeddings and Applications. Tate Inst. of Fund. Research 58, Springer-Verlag 1978

Zürich H. Knörrer

van der Geer, G., Hilbert Modular Surfaces (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band 16) Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1988, 39 Fig., IX, 291 S., Hardcover, DM 148,–

Hilbertsche Modulflächen sind zweidimensionale Entsprechungen der Modulkurven. Die komplexen Punkte einer Modulkurve bekommt man als Quotienten der oberen Halbebene $\mathscr{H}$ nach einer Kongruenzuntergruppe Γ von $SL_2(\mathbb{Z})$. Solche Kurven sind Modulräume für elliptische Kurven mit gewissen Zusatzstrukturen.

Für höherdimensionale Modulräume ergeben sich zwei Familien:

a. Die Siegelschen Modulvarietäten. Sie klassifizieren alle abelschen Varietäten einer gegebenen Dimension. Hier wird die obere Halbebene durch die Siegelsche obere Halbebene ersetzt.

b. Die Hilbertschen Modulvarietäten. Sie klassifizieren alle abelschen Varietäten einer gegebenen Dimension d, die zusätzlich eine Multiplikation mit einer Ordnung eines total-reellen Zahlkörpers F vom Grad d erlauben. Die komplexen Punkte einer Hilbertschen Modulvarietät bekommt man als Quotient des d-fachen Produktes $\mathscr{H}\times\ldots\times\mathscr{H}$ nach einer Kongruenzuntergruppe Γ von $SL_2(\mathscr{O}_F)$. Hier bezeichnet $\mathscr{O}_F\subset F$ den Ring der ganzen Zahlen.

Beschränken wir uns jetzt auf den Fall der Hilbertschen Modulfächen, also $d=2$. Der Quotient $\Gamma\backslash\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ ist nicht kompakt, kann aber kompaktifiziert werden, indem man endlich viele „Spitzen" hinzufügt. Die resultierende Fläche ist – im Gegensatz zum Fall der Modulkurven – singulär.

Obwohl diese Quotienten schon um die Jahrhundertwende von Hilbert und Blumenthal studiert wurden, stagnierte die Entwicklung für eine lange Zeit, bis es 1970 Hirzebruch gelang, die Singularitäten der Kompaktifizierung aufzulösen. Damit begann das Studium der Hilbertschen Modulflächen als projektive algebraische Flächen.

Im ersten Kapitel des vorliegenden Buches wird ein genaues Bild von den Quotienten $\Gamma\backslash\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ entworfen. Dazu muß man die Operation der Gruppe Γ studieren, die sich ergebenden Spitzen und die Fixpunkte der elliptischen Elemente. Hier wird außer der vollen Kongruenzuntergruppe $\Gamma=SL_2(\mathscr{O}_F)$ auch die Hurwitz-Maaß-Erweiterung eingeführt, die später interessante Beispiele liefert.

Im zweiten Kapitel wird die Auflösung der Singularitäten beschrieben, die durch die Kompaktifizierung entstanden sind. Löst man die Singularität in einer Spitze auf, so bekommt man eine zyklische Konfiguration von Kurven, die man durch Kettenbrüche berechnen kann. Hier dient das vorliegende Buch als Einführung in die Theorie der toroidalen Kompaktifizierung anhand eines instruktiven Beispiels.

Jetzt ist der Weg frei, um in den folgenden beiden Kapiteln lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulflächen zu bestimmen. Zuerst wird der Beitrag einer Spitze zum arithmetischen Geschlecht der Fläche berechnet. Diese geometrische Invariante wird dann mit einem speziellen Wert der L-Funktion zu dieser Spitze identifiziert. Da Hilbertsche Modulflächen regulär sind (d. h. die erste Betti-Zahl verschwindet), bestimmen die beiden ersten Chernklassen schon alle globalen Invarianten der Fläche. Das Hirzebruchsche Proportionalitätsprinzip besagt in unserem Fall, daß sich die gesuchten Chernklassen aus dem Volumen der Fläche ergeben, wenn man noch die Beiträge der Spitzen und der elliptischen Fixpunkte berücksichtigt.

Besonders gefallen hat mir, daß für den Beweis des Satzes, daß Hilbertsche Modulflächen über einem Zahlkörper definiert sind, das Rigiditätsargument von Faltings benutzt wird. Für feinere arithmetische Untersuchungen muß man allerdings auf die schwierige Theorie der kanonischen Modelle von Shimura zurückgreifen. Dieser Satz macht die Hilbertschen Modulflächen zu einem zahlentheoretischen Objekt, auf das wir später noch eingehen.

In den nächsten beiden Kapiteln werden Modulkurven auf unserer Fläche X studiert. Bettet man $\mathscr{H}\to\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ diagonal ein und dividiert man auf der linken Seite durch eine Kongruenzuntergruppe von $SL_2(\mathbb{Z})$, so bekommt man durch die Operation der Heckealgebra Kurven auf X. Die modulare Interpretation dieser Kurven ist durch solche abelschen Flächen gegeben, die Produkte zweier elliptischer Kurven sind. Hirzebruch und Zagier machten die erstaunliche Beobachtung, daß die Schnittzahlen dieser Kurven Fourierkoeffizienten einer Modulform in einer Variablen sind. Dieses Ergebnis muß man in Termen der Operation der Heckealgebra auf der zweiten Kohomologie verstehen, wie im 6. Kapitel ausführlich beschrieben. Hier wird auch Odas Arbeit über die Periodenrelation auf $H^2(X)$ besprochen, die den Beitrag der Hirzebruch-Zagier-Zyklen zur Picard-Zahl bestimmt.

In den nächsten beiden Kapiteln werden die Hilbertschen Modulflächen in das Klassifikationsschema der algebraischen Flächen von Enriques und Kodaira eingeordnet.

Dabei werden zahlreiche Beispiele ausführlich besprochen (für Diskriminanten $D = 5, 8, 12, 13, 17, 21, 24, 28, 40, 44$ und 113), die einen Eindruck von der Vielfalt dieser Flächen vermitteln.

In den Kapiteln 9 und 10 wird auf die modulare Interpretation unserer Flächen eingegangen. Da sie abelsche Flächen mit reeller Multiplikation klassifizieren, kann man die Einbettung in den Siegelschen Modulraum aller abelschen Flächen betrachten.

Zugleich wird im 10. Kapitel eine Kompaktifizierung für Hilbertsche Modulvarietäten über $\mathbb{Z}$ beschrieben – damit bekommen wir geometrische Objekte von zahlentheoretischem Interesse.

Im letzten Kapitel wird ein Abriß der arithmetischen Anwendungen Hilbertscher Modulflächen gegeben. Diese Flächen sind spezielle Shimuravarietäten, die die Theorie der automorphen Formen mit der der Galoisdarstellungen verbinden. Einerseits operiert nämlich die Heckealgebra auf der Kohomologie und bestimmt dadurch automorphe Darstellungen, andererseits operiert auch die Galoisgruppe auf der etalen Kohomologie verträglich mit der Heckealgebra. Dies ermöglicht einen Vergleich der arithmetisch interessanten L-Funktion zu einer solchen Galoisdarstellung mit der analytisch zugänglichen L-Funktion einer automorphen Form.

Zum Abschluß dieses Kapitels wird eine Vermutung von Tate besprochen, die die unter der Galoisgruppe invarianten Kohomogieklassen mit den Klassen gleichsetzt, die Zykelklassen algebraischer Kurven auf der Fläche sind. Damit ist seine weitere Verbindung zwischen Geometrie und Zahlentheorie hergestellt.

Die Theorie der Hilbertschen Modulfächen ist inzwischen abgerundet und ausgereift – das vorliegende Buch dokumentiert dies in eindrucksvoller Weise. Vorausgesetzt für das Studium des Buches werden die Grundbegriffe der algebraischen Geometrie und speziell der algebraischen Flächen, wie sie z. B. in dem einführenden Buch von Griffiths und Harris dargestellt sind. Da das vorliegende Buch viele Beispiele enthält und da die Beweise meist sehr ausführlich dargestellt sind, sollte das Buch für Studenten, die eine einführende Vorlesung in algebraischer Geometrie gehört haben, verständlich sein. Das Vorwort gibt einen historischen Überblick; jedem Kapitel ist eine Einführung vorangestellt; außerdem schließt das Buch mit einem sehr ausführlichen Literaturverzeichnis sowie einem Index der wichtigsten Begriffe.

Im Vergleich zu einem Überblick über die Theorie der algebraischen Flächen liest sich dieses Buch viel spannender, da eine Familie von Flächen vorgestellt wird, deren Eigenschaften und Reichtum an Struktur nach und nach entwickelt werden. Aber auch für den an Shimuravarietäten interessierten Leser illustriert das Buch die wichtigsten Fragestellungen der arithmetischen algebraischen Geometrie.

Köln Ch. Klingenberg

Barthel, G., Hirzebruch, F., Höfer, Th., Geradenkonfigurationen und Algebraische Flächen (Aspekte der Mathematik, Bd. D4), Braunschweig: Vieweg 1987, xii, 308 S., kart., DM 64,–

Die Untersuchung algebraischer Flächen ist eines der klassischen Forschungsthemen der algebraischen Geometrie. Ein wesentliches Ziel in diesem Bereich war und ist es, eine Klassifikation der algebraischen Flächen – ähnlich der der algebraischen Kurven – zu erhalten.

Man sucht also zunächst nach einer groben Einteilung der Flächen gemäß einiger numerischer Invarianten und dann nach einer Beschreibung der Familien in jeder dieser Klassen. Üblicherweise benutzt man als erste numerische Invariante die sogenannte

Kodaira-Dimension $\varkappa$, eine Invariante, die die Werte $-\infty$, 0, 1 und 2 annehmen kann. Flächen mit Kodaira-Dimension $\varkappa \neq 2$ heißen speziell, solche mit $\varkappa = 2$ vom allgemeinen Typ. Während die Klassifikation spezieller Flächen im wesentlichen bekannt ist, ist die Beschreibung der Flächen vom allgemeinen Typ noch ziemlich unvollständig. Bei dieser Beschreibung kann man sich zunächst auf minimale Flächen beschränken; das sind Flächen, die keine glatten rationalen Kurven mit Selbstschnittzahl - 1 enthalten. Die Chernschen Zahlen, also die Selbstschnittzahl c_1^2 eines kanonischen Divisors und die topologische Eulercharakteristik c_2, sind wichtige Invarianten solcher Flächen. Sie sind nicht völlig beliebig, sondern genügen den klassischen Ungleichungen $c_1^2 > 0$, $c_2 > 0$, $c_2 \leqslant 5c_1^2 + 36$. Obere Schranken für den Chern-Quotienten c_1^2/c_2 wurden von Van de Ven und Bogomolov gefunden. Aufbauend auf diesen Arbeiten bewies Miyaoka 1976, daß stets gilt

$$c_1^2 \leqslant 3c_2.$$

Aus einer Verschärfung dieses Ergebnisses und den Existenzsätzen für Kähler-Einstein-Metriken von Aubin und Yau ergibt sich eine Charakterisierung des Grenzfalles $c_1^2 = 3c_2$: Die Flächen vom allgemeinen Typ mit $c_1^2 = 3c_2$ sind genau diejenigen Flächen, deren universelle Überlagerung der 2-dimensionale Ball ist. Explizite Beispiele solcher Ballquotientenflächen wurden 1979 von Mumford und 1981 von Inoue und Livné gefunden. Angeregt durch Arbeiten von Deligne und Mostow konstruierte Hirzebruch 1982 ein weiteres Beispiel; seine Fläche tritt auf als 125-blättrige Kummer-Überlagerung der projektiven Ebene mit Verzweigung längs eines „vollständigen Vierecks", das ist die Konfiguration der sechs Verbindungsgeraden von vier Punkten ein allgemeiner Lage.

Dieses Beispiel führte zu dem allgemeinen Ansatz, interessante Flächen als verzweigte Überlagerungen (mit hoher Blätterzahl) einfacher Flächen mit einfachem Verzweigungsort zu konstruieren. Dieser Ansatz wird in dem vorliegenden Buch ausgearbeitet. Ausgangspunkt sind dabei hauptsächlich Konfigurationen von Geraden in der projektiven Ebene und dazu passende Galois-Überlagerungen, die entlang dieser Konfigurationen verzweigt sind. Die Chern-Zahlen der minimalen Desingularisierung einer solchen Überlagerung können mit Hilfe der kombinatorischen Daten der Geradenkonfiguration, der lokalen Verzweigungsordnungen und der Blätterzahl berechnet werden. Die grobe Klassifikation der so entstehenden Flächen ist meistens nicht schwierig; bis auf Ausnahmen sind die Flächen vom allgemeinen Typ. Wenn nun die Konfiguration der Verzweigungskurven hinreichend singulär ist, fallen die dazu passenden Überlagerungsflächen in den Bereich mit Chern-Quotient $2 < c_1^2/c_2 \leqslant 3$. Ist man an Konfigurationen interessiert, die zu Ballquotientenflächen führen können, so erhält man aus allgemeinen Eigenschaften glatter Kurven in Ballquotienten notwendige Bedingungen an die Konfiguration der Verzweigungskurven und deren Verzweigungsordnungen. Diese notwendigen Bedingungen erlauben es dann, nach geeigneten Konfigurationen zu suchen. Dabei trifft man auf viele bekannte Konfigurationen: reelle und simpliziale Konfigurationen, (duale) Wendepunktkonfigurationen glatter Kubiken, die Ceva-Serien und durch Spiegelungsgruppen definierte Konfigurationen. Natürlich ergeben sich daraus viele schöne Zusammenhänge mit klassischen Bereichen der Geometrie.

Dies alles, und noch viel mehr ist in den fünf Kapiteln des Buches ausgeführt, zum Beispiel: Anwendungen der Miyaoka-Ungleichung auf eine Frage von Serre, Sommeses Resultat über Chern-Quotienten, Zusamamenhänge mit hypergeometrischen Differentialgleichungen sowie Ergebnisse über nicht kompakte oder singuläre Ballquotienten. Es fehlen allerdings Hinweise auf die interessante Frage nach der Topologie des Komplementes von Geradenkonfigurationen.

Die Grundlage für das vorliegende Buch waren Vorträge, die F. Hirzebruch 1981/82 und 1984 in Bonn gehalten hat, sowie die daraus entstandene Dissertation von T. Höfer, in der der oben skizzierte Ansatz in verschiedenen Richtungen ausgebaut worden ist.

Hirzebruchs Vorlesungen wurden von G. Barthel aufgezeichnet und ausgearbeitet. Ergänzt wird dieser Hauptteil des Buches durch drei nützliche Anhänge, in denen die benötigten algebraischen, differentialgeometrischen und topologischen Resultate zusammengestellt werden. Insgesamt ist den Autoren eine abgerundete Darstellung eines aktuellen Gebietes mathematischer Forschung gelungen; ein schönes Buch mit einer Fülle von Beispielen, das zu lesen Spaß gemacht hat.

Bonn Ch. Okonek

Arnold, V. I. (Ed.), Dynamical Systems III – Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 3), with contributions by Arnold, V. I., Kozlov, V. V., Neishtadt, A. I. (translated from the Russian by A. Iakob), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1988, 81 figs., 291 pages, DM 128,–

Das Gebiet der dynamischen Systeme hat sich in jüngster Zeit bemerkenswert rasant weiterentwickelt. Bei der Fülle an laufend erscheinenden Publikationen zur mathematischen Theorie und ihren Anwendungen ist es sehr schwierig, einen Überblick über den Gesamtstand zu vermitteln. Daher ist es lobenswert, daß der Springer-Verlag mit den Bänden über „Dynamical Systems I–VII" in der „Encyclopaedia of Mathematical Sciences" diesen Versuch unternimmt. Ein besonderer Reiz ist dabei, daß die Herausgeber und Autoren ausschließlich aus der Sowjetunion stammen, wo seit langem eine rege und sehr erfolgreiche Aktivität auf dem Gebiet der dynamischen Systeme herrscht. Dies gilt insbesondere für die mathematischen Grundlagen. Jedoch war es im Westen bislang nicht einfach, sich ein wirkliches Bild von den Forschungsergebnissen in der Sowjetunion zu verschaffen.

Der zu besprechende Band III ist der erste aus der 7bändigen Reihe über dynamische Systeme, der erschienen ist. Er führt auf die Wurzeln der Theorie zurück. Denn gerade das Studium von Problemen aus der klassischen Mechanik und insbesondere aus der Himmelsmechanik, wie z. B. die Frage nach der Stabilität unseres Sonnensystems, waren oft der Ausgangspunkt für die Entwicklung neuer mathematischer Methoden und allgemeiner Theorien für dynamische Systeme. Dies gilt bis zum heutigen Tage. Umgekehrt ermöglichen die neueren Entwicklungen in der Theorie dynamischer Systeme natürlich auch ein besseres Verständnis der Mechanik. Die klassische Mechanik ist nach wie vor ein sehr lebendiges Gebiet.

Wie im Vorwort gesagt wird, beabsichtigen die Autoren, den Leser mit der gesamten klassischen Mechanik vertraut zu machen, sowohl mit früheren als auch mit den modernsten Aspekten. Dies ist ihnen tatsächlich meisterhaft gelungen. Der Leser bekommt einen Einblick in die fundamentalen Prinzipien, Probleme und Methoden der klassischen Mechanik. Das Hauptgewicht liegt auf der Darstellung mathematischer Techniken und weniger auf Beweisen oder physikalischen Hintergründen und Anwendungen. Jedoch wird die Theorie laufend anhand von einigen instruktiven Modellen aus der Mechanik, wie z. B. den Euler-Poisson-Gleichungen für starre Körper oder dem n-Körperproblem (mit besonderem Blick auf unser Sonnensystem und dessen Stabilität – auch der klassische Stabilitätssatz von Lagrange-Laplace wird behandelt) verdeutlicht. Im übrigen findet der Leser neben Quellenangaben auch Hinweise auf vertiefende und weiterführende Literatur. Die Darstellung ist einheitlich und modern, auch was den älteren Stoff betrifft.

Im einzelnen enthält das Buch Kapitel über die grundlegenden Prinzipien und mathematischen Modelle der klassischen Mechanik, über einige klassische Probleme aus der Himmelsmechanik (Kollisionen, Regularisierung, spezielle Lösungen beim n-Körperproblem), über Symmetrien bei mechanischen Systemen und deren Nutzbarmachung zur

Reduktion der Ordnung mathematischer Modelle, über integrable Systeme und Integrationsmethoden, über Störungstheorie für integrable Systeme (Mittelungsmethode, KAM-Theorie, Arnold-Diffusion, adiabatische Invarianten), über nichtintegrable Systeme (allgemeine Kriterien) und über Oszillationen in der Nähe von Gleichgewichtspunkten und periodischen Orbits (Normalformen und deren Klassifikation).

Hinsichtlich dieses Buches darf man auch auf die übrigen Bände der oben erwähnten Reihe über dynamische Systeme äußerst gespannt sein.

Hamburg J. Scheurle

Kelley, J. L., Srinivasan, T. P., Measure and Integral, Volume 1 (Graduate Texts in Mathematics, Bd. 116), New York – Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag 1988, 150 S., hardcover, DM 79,–

In der Maß- und Integrationstheorie stehen im wesentlichen zwei grundlegende Konstruktionsverfahren für abstrakte Maße und Integrale zur Verfügung:

1. die Ausdehnung eines Elementarinhalts zu einem Maß mit Hilfe des Caratheodoryschen Erweiterungsprozesses und die anschließende Konstruktion des zugehörigen Integrals mittels der Lebesgueschen Integrationstheorie,

2. die Fortsetzung eines (geeigneten) positiven Funktionals auf einem Vektorverband zu einem Integral mittels der Theorie von Daniell-Stone und die anschließende Definition des zugehörigen Maßes.

Beide Verfahren sind insofern äquivalent als die Maße und Integrale, die durch eines der Verfahren erzeugt werden können, auch durch das andere geliefert werden. Das vorliegende Buch beschreibt einen in manchem Detail neuen Zugang zum Daniell-Stoneschen Verfahren (während die Caratheodory-Erweiterung in einem Anhang zu Kapitel 1 nur kurz gestreift wird).

Ausgehend von einem Prämaß auf einem Mengenverband $\mathscr{A}$ wird das zugehörige Prä-Integral auf dem Stoneschen Vektorverband der $\mathscr{A}$- Stufenfunktionen erklärt. Für ein Prä-Integral I auf einem Stoneschen Vektorverband L von Funktionen über der Menge X nennen die Autoren dann eine Funktion $g: X \to \mathbb{R}$ I-integrierbar, wenn es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{R}}$ in L gibt mit $\sum_{n=1}^{\infty} I(|f_n|) < \infty$ und $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$. Setzt man $I_1(g) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$ und $\|g\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} I(|f_n|)$, so läßt sich leicht nachprüfen, daß der Vektorraum L_1 aller I-integrierbaren Funktionen mit der Halbnorm $\| \ \|_1$ eine Vervollständigung von L mit der Halbnorm $\|f\|_1 = I(|f|)$ ist. Es folgt unmittelbar, daß I_1 ein Integral auf L_1 ist, d. h., daß I_1 die Beppo-Levi-Eigenschaft erfüllt. Hieraus werden das Lemma von Fatou sowie die Sätze von der monotonen und majorisierten Konvergenz abgeleitet.

In klassischer Weise wird dann das Maß auf dem δ-Ring aller Mengen definiert, deren charakteristische Funktionen in L_1 liegen. Es wird gezeigt, daß man so eine Maßfortsetzung eines Prämaßes erhält, wenn man mit dem Prä-Integral startet, das zum Prämaß gehört.

Wie üblich wird der Vektorraum aller integrierbaren Funktionen bzgl. eines reellwertigen Maßes auf einem δ-Ring $\mathscr{A}$ als die kleinste Integralerweiterung des zugehörigen Prä-Integrals auf den Vektorraum der Stufenfunktionen charakterisiert. Interessant ist dann die Kennzeichnung der integrierbaren Funktionen als unendliche Linearkombinationen $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 1_{A_n}$ mit $\sum_n |a_n| \mu(A_n) < \infty$ $(a_n \in \mathbb{R}, A_n \in \mathscr{A})$.

Analog werden die bzgl. einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ $\mathbb{R}$-wertigen meßbaren Funktionen als unendliche Linearkombinationen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 1_{A_n} (a_n \in \mathbb{R}, A_n \in \mathscr{A})$ charakterisiert. (Die Autoren nennen solche Funktionen „σ-simple".) Wenn man von den Besonderheiten der Methodik absieht, behandelt das Buch im wesentlichen die klassischen Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie.

Die einzelnen Kapitel haben folgenden Inhalt:

Kapitel 0: Mengen- und ordnungstheoretische Grundlagen

Kapitel 1: Prämaße, insbesondere verallgemeinerte Längenfunktionen auf $\mathbb{R}$, reguläre Inhalte auf lokal-kompakten Räumen, invariante Inhalte

Kapitel 2: Fortsetzung modularer und exakter Mengenfunktionen, Daniell-Stonesches Prä-Integral, Volumen in $\mathbb{R}^n$, Prä-Integrale auf den Räumen $\mathscr{C}_c(X), \mathscr{C}_0(X)$

Kapitel 3: Daniell-Erweiterung von Präintegralen, Monotone Konvergenz, Lemma von Fatou, Dominierte Konvergenz, Übereinstimmung des aus dem Riemann-Integral auf $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ und dem aus der Längenfunktion gewonnenen Integral

Kapitel 4: Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen, innere und äußere Regularität von Maßen (auf lokal-kompakten Räumen), Standardisierung und Vervollständigung von Maßen, Lebesguesches Maß im $\mathbb{R}^n$, (unter Gruppenoperationen) invariante Maße, insbesondere Haarsches Maß

Kapitel 5: Meßbarkeit und σ-Simplizität, erzeugte Ringe und Mengenalgebren, $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-meßbare Funktionen, $\mathbb{R}$-wertige meßbare Funktionen, Maße, die durch ein Präintegral induziert werden, Standard Borel-Räume

Kapitel 6: Minimale Integralerweiterung eines Präintegrals, das von einem Maß herkommt, Satz von Egoroff, Satz von Lusin, Räume $L_p(\pi)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, Satz von Riesz für lokalkompakte Räume

Kapitel 7: Produktmaße und Produktintegrale, Sätze von Tonelli und Fubini, Borelsche Produktmaße

Kapitel 8: Maße und Abbildungen, Bildmaße, Stieltjes-Integration, Transformationssatz für das Lebesguesche Maß im $\mathbb{R}^n$, Konvolution

Kapitel 9: Signierte Maße und unbestimmte Integrale, Hahn-Zerlegung, Jordan-Zerlegung, Lebesgue-Zerlegung, Satz von Radon-Nikodym (alles auch im nicht notwendig σ-endlichen Fall allgemeiner zerlegbarer Maße), Eindeutigkeit des Haarschen Maßes

Kapitel 10: Banachräume, Satz von Hahn-Banach, Dualräume von $L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, komplexe Maße und Integrale, Bochner Integral.

Diese Liste verdeutlicht nach meiner Auffassung, daß die Autoren ihr Ziel erreicht haben, die in der Funktionalanalysis notwendigen maßtheoretischen Grundlagen bereitzustellen. Die Darstellung des Stoffes überzeugt durch ihren prägnanten Stil und durch die jeden überflüssigen Ballast vermeidenden Beweisführungen. So wurde es möglich, die zahlreichen Resultate auf 150 Seiten verständlich zu beschreiben. Trotzdem hat das vorliegende Buch auf dem deutschsprachigen Markt durch K. Floret, Maß- und Integrationstheorie, Teubner 1981 und W. Hackenbroch, Integrationstheorie, Teubner 1987 ebenbürtige Konkurrenten.

Passau S. Graf

Rosinger, E. E., Generalized Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations (North Holland Mathematics Studies, 146) Amsterdam: North-Holland 1987, XVIII, 410 pp., Dfl. 175,–

Sei C^∞ der Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner, auf einer offenen Menge Ω des $\mathbb{R}^n$'s. Nimmt man das kartesische Produkt

$(C^\infty)^\Phi$ mit genügend mächtiger Indexmenge Φ, so kann man die Schwartzschen Distributionen D' in $(C^\infty)^\Phi$ einbetten (z. B. sogenannte „Folgen"theorien). Auf $(C^\infty)^\Phi$ ist eine natürliche Multiplikation erklärt, nur stimmt diese weder mit der C^∞-Multiplikation auf D' noch mit der üblichen Multiplikation auf C^0 überein. (Die Schwierigkeiten, Distributionen zu multiplizieren, sind wohl bekannt.) Colombeau und der Verf. schlagen deshalb den Übergang zu einer Quotientenalgebra $Q = A/I$ vor, wobei A eine Algebra und I ein Ideal in $(C^\infty)^\Phi$ sind. Dabei wird die Konstruktion so durchgeführt, daß weiterhin bis auf Äquivalenz gilt $D' \subset Q$, und die Differentiation, die lineare Struktur sowie auch die C^∞-Multiplikation auf Distributionen erhalten bleibt. Was preisgegeben wird, ist die Gleichheit, es werden jetzt nicht mehr exakte Gleichungen $Gu = 0$ gelöst, sondern Äquivalenzen $Gu \sim 0$, d. h. $Gu = e$, wobei e ein Element aus dem Ideal I ist, das sehr groß sein kann. Colombeau und der Verf. haben die Lösbarkeit von nichtlinearen Polynomialäquivalenzen $P(Du) \sim 0$ in Q bewiesen (im Buch sind diese Ergebnisse ohne Beweis zitiert) und Sätze angegeben, wann diese Lösungen u Distributionen sind. Auch wird die (in Distributionen unlösbare) Lewy'-Gleichung $L(Du) = f$ behandelt (Beweise wieder in Originalarbeiten). Allerdings wird hier außer der Gleichheit auch noch die Differentiation D preisgegeben und durch einen Convolutionsoperator C_D ersetzt, und man fragt sich natürlich, was die Lösung des Problems $L(C_D u) \sim f$ mit der Lewy'-Gleichung $L(Du) = f$ zu tun hat. Verf. bleibt die Antwort schuldig. Im Buch werden viele nichtlineare Beispiele studiert, so auch Gleichungen vom Cauchy-Kovalevskaja Typ. Dabei werden immer schwer beweisbare klassische Eigenschaften herangezogen (zitiert), um aus diesen die verallgemeinerte Lösbarkeit zu folgern (siehe S. 254, S. 261 u. 265, S. 361, S. 362 usw.). Nun der Weg einer neuen erfolgreichen Theorie sollte doch umgekehrt sein: man nimmt ein „klassisches" Problem, das bisher nur sehr schwierig lösbar war, wendet die neue Theorie an, bekommt auf einfache Weise eine verallgemeinerte Lösung und durch Zusatzbetrachtungen auch die klassische. Beispiel: Das Dirichletproblem für den Laplaceoperator ist in Sobolevräumen beinahe trivial lösbar, Zusatzbetrachtungen = Sobolevsches Lemma sichern dann auch die klassische Lösbarkeit.

Eine kurze Inhaltsangabe: Teil 1 bringt auf 50 Seiten sogenannte Motivationen. So wird zum Beispiel erklärt, warum Physiker nicht mit der schwachen Lösung u des Gleichungssystems $u = 0$, $u^2 = 1$ leben können. Teil 2 ist der Colombeauschen Theorie gewidmet, die Ankündigung: „... succeeds in proving quite impressive existence, uniqueness, regularity, etc., results concerning generalized solutions of large classes of linear and nonlinear partial differential equations," ist etwas ungenau, man findet keine Beweise, es wird auf teilweise unpublizierte Arbeiten verwiesen. In Teil 3 sind die Rosingerschen Theorien dargelegt, d. h. es werden verschiedene Quotienten A/I konstruiert, als Spezialfall erhält man das Modell von Colombeau.

Kiel J. Wloka

Yoshida, M., Fuchsian Differential Equations (Aspects of Mathematics), Braunschweig: Vieweg 1987, XIV, 215 pp., Soft, DM 48,–

Die hypergeometrischen Funktionen einer komplexen Variablen übten im 19. Jahrhundert zusammen mit der Theorie der elliptischen Funktionen einen großen Einfluß auf die Entwicklung der Funktionentheorie aus. So namhafte Mathematiker wie Gauß, Riemann, Schwarz, Fuchs, Poincaré und Klein beschäftigten sich eingehend mit diesen Funktionen. Dabei arbeiteten sie den engen Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen, der nichteuklidischen Geometrie, den algebraischen Kurven und der Zahlentheorie heraus. Noch vor der Jahrhundertwende bemühten sich insbesondere Picard und Appel um eine Übertragung der Theorie auf hypergeometrische Funktionen mehrerer Variabler und Systeme partieller Differentialgleichungen. Wesentliche Fortschritte darüber hinaus konnten lange Zeit nicht erzielt werden. Solche setzen neuere Erkenntnisse auf den Gebieten der algebraischen Geometrie und der komplexen Differentialgeometrie voraus, die inzwischen vorliegen. Ausgehend von den nun vorhandenen Grundlagen unternimmt der Autor einen neuen und erfolgreichen Vorstoß in die höhere Dimension und entwickelt insbesondere die Gauß-Schwarz-Theorie für zwei komplexe Variable.

Um das Verständnis in der höheren Dimension zu erleichtern, werden im Teil I auf knapp 60 Seiten die Schwerpunkte der klassischen Theorie vom aktuellen mathematischen Standpunkt aus dargelegt. Es werden keine speziellen Vorkenntnisse über gewöhnliche Differentialgleichungen vorausgesetzt, um die wesentlichen Zusammenhänge zu verstehen. Der Leser wird so auf vorteilhafte Weise an hypergeometrische Reihen, hypergeometrische und Fuchssche Differentialgleichungen, Monodromiedarstellungen von Differentialgleichungen, reguläre Singularitäten, die Probleme von Riemann, Hilbert und ihre Lösungen sowie an die Schwarzschen Derivativen herangeführt. Klassische Beispiele, die vom geometrischen Standpunkt zuerst von Schwarz (1873) gründlich behandelt wurden, veranschaulichen den Text. Bei der Lösung der Aufgabe, zu vorgegebener Darstellung der Fundamentalgruppe einer offenen Riemannschen Fläche eine Fuchssche Differentialgleichung anzugeben, deren (multivalente) Lösungsbasis genau diese Monodromie hat (Riemann-Hilbertsches Problem), wird eine algebraisch-geometrische Konstruktion von Deligne herangezogen.

Teil II der Monographie ist der höherdimensionalen Theorie gewidmet. Im einleitenden Kapitel 6 werden die klassischen hypergeometrischen Reihen von Appell (2 Variable) und Lauricella (*N* Variable) zusammen mit verschiedenen Integraldarstellungen (Euler, Erdelyi-Takano, Barnes) sowie die zugehörigen hypergeometrischen Differentialgleichungen vorgestellt. Kapitel 7 faßt grundlegende Begriffe und Ergebnisse der allgemeinen algebraischen Theorie der Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten (holonome Systeme, Integrabilität, reguläre Singularitäten), die im weiteren benötigt werden, zusammen. Als ein wesentliches Hilfsmittel erweist sich die Schwarzsche Derivative für mehrere Variable, die vom Autor im Kapitel 8 definiert und untersucht wird. Mit ihrer Hilfe gelingt die Lösung des mehrdimensionale Analogons des Riemann-Hilbertschen Problems (Kapitel 9) für projektive Mannigfaltigkeiten der Dimension n, die sich mit Hilfe der n-dimensionalen Einheitskugel (im allgemeinen verzweigt) uniformisieren lassen. Der Leser wird hier etwas Mühe haben, die Details zum Beweis zusammenzusuchen.

In den verbleibenden Kapiteln 10, 11 und 12 werden mit den bereitgestellten Methoden ausgiebige klassische und neue Beispiele in der Dimension 2 behandelt. Geradenkonfigurationen in der projektiven Ebene treten als Verzweigungsort von Kugeluniformisierungen auf, die als Vorgaben der Monodromie interpretiert werden. Durch diese geometrische Betrachtungsweise, deren Begründung man in der jüngst erschienenen Monographie „Geradenkonfigurationen und algebraische Flächen" (Aspekte der Mathematik D 4 (1987)) von Barthel, Hirzebruch, Höfer findet, wird die Monographie besonders lebendig und attraktiv. Im Kapitel 11 werden Monodromiegruppen behandelt, die durch Spiegelungen erzeugt werden. Die Bilder der Spiegelscheiben bei der Quotientenabbildung bilden eine Verzweigungskonfiguration.

Die Monographie bietet eine in sich geschlossene für Studenten zugängliche Darlegung der Grundzüge der algebraischen Theorie der Fuchsschen Differentialgleichungen. Durch zahlreiche Literaturhinweise gewinnt man einen guten Einblick in den aktuellen Stand der Theorie und insbesondere einen lebendigen Eindruck von der Schaffenskraft der japanischen Forscher auf diesem Gebiet. Das Buch erleichtert den verständlichen Zugang zu den entsprechenden Spezialarbeiten. Es enthält wertvolle Anregungen auch für Mathematiker, die auf angrenzenden Disziplinen (Topologie, Differentialgeometrie, algebraische Geometrie, komplexe Analysis, Gruppentheorie, Zahlentheorie) tätig sind.

Berlin R. Holzapfel

Hackenbroch, W., Integraitonstheorie, Stuttgart: Teubner 1987, 144 S., kart., DM 22,80

Die vorliegende Einführung in die Integrationstheorie wendet sich an Studenten der Mathematik und Physik im ersten Studienabschnitt. Sie setzt mit wenigen Ausnahmen nur elementares Grundwissen über Analysis (etwa im Umfang der ersten beiden Semester) voraus und entwickelt mit Blick auf die Anwendungen die Integrationstheorie soweit, daß sowohl für höhere Vorlesungen der Analysis als auch für die Befürfnisse der Stochastik die wichtigsten Hilfsmittel bereitgestellt werden.

Der Text beginnt mit einer Diskussion der Riemann-Stieltjes-Integrale über Intervallen (§ 1), um dann zu Kurvenintegralen und Stammfunktionen im $\mathbb{R}^n$ überzuleiten (§ 3). Dieser erste Abschnitt endet mit einem Beweis des Cauchyschen Integralsatzes für stückweise stetig differenzierbare Wege in sternförmigen Gebieten.

Im zweiten und umfangreichsten Abschnitt (§ 4–§ 11) wird dann im Hinblick auf das oben genannte Ziel der klassische Aufbau einer mengentheoretisch orientierten Maß- und Integrationstheorie vorgenommen. Die Brücke zum ersten Abschnitt bilden dabei Verteilungsfunktionen. Die Behandlung von Bildmaßen und Maßen mit Dichten schließt im Rahmen der L^p-Theorie einen Beweis des Satzes von Radon-Nikodym ein, benutzt dabei allerdings den Rieszschen Satz über die Darstellung stetiger Linearformen auf Hilberträumen. Dieser zweite Abschnitt wird mit der Betrachtung von Produktmaßen abgeschlossen.

Der dritte Teil (§ 12–§ 16) beschäftigt sich mit den Anwendungen der Theorie. Zunächst wird der Transformationssatz für das mehrdimensionale Lebesguemaß (induktiv) bewiesen und seine Bedeutungen an klassischen Beispielen erläutert. Im Rahmen der Behandlung von Faltungsproblemen werden sodann Reichhaltigkeitssätze für den Raum der Testfunktionen (z. B. die Existenz unendlich oft differenzierbarer Urysohnfunktionen im $\mathbb{R}^n$) bewiesen; in einem Anhang wird ein kurzer Ausblick auf die Distributionentheorie gegeben.

Im Abschnitt über die Fouriertransformation werden die Umkehrformel für schnell fallende $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen und der Satz von Plancherel hergeleitet. Die Fouriertransformation endlicher Borel-Maße eröffnet einen Ausblick auf Anwendungen in der Stochastik.

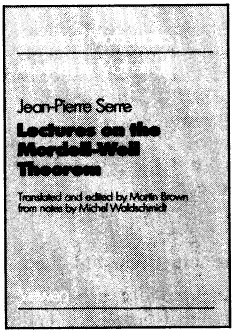
Abschließend wird noch kurz auf den Gaußschen Divergenzsatz eingegangen. Hier liegt der Schwerpunkt auf den Anwendungsbeispielen, wohingegen auf den Beweis zugunsten einer Plausibilitätsbetrachtung verzichtet wird.

Die bewußt knappen Beweise erlauben eine Darstellung des umfangreichen Stoffs auf weniger als 150 Seiten und damit eine übersichtliche anwendungsorientierte Einführung in die Integrationstheorie.

Erlangen B. Anger

VIEWEG

Aktuelle Neuerscheinungen



Jean-Pierre Serre

Lectures on the Mordell-Weil Theorem

1989. X, 220 pp. (Aspects of Mathematics, Vol. E 15; ed. by Klas Diederich.) Softcover.
DM 52,— ISBN 3-528-08968-7

Contents: Heights – Normalised heights – The Modell-Weil theorem – Mordell's conjecture – Local calculation of normalised hights – Siegel's method – Baker's method – Hilbert's irreducibility theorem – Construction of Galois extensions – Construction of elliptic curves of large rank – The large sieve – Applications of the large sieve to thin sets.

The book is based on a course given by J.-P. Serre at the Collège de France in 1980 and 1981. Basic techniques in Diophantine geometry are covered, such as heights, the Mordell-Weil theorem, Siegel's and Baker's theorem, Hilbert's irreducibility theorem, and the large sieve. Included are applications to, for example, Mordell's conjecture, the construction of Galois extensions, and the classical class number 1 problem. Comprehensive bibliographical references.

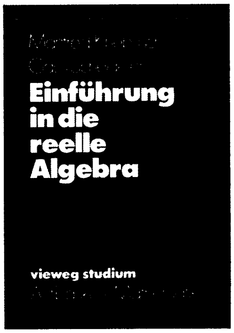
Manfred Knebusch und Claus Scheiderer

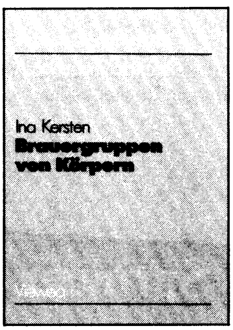
Einführung in die reelle Algebra

1989. X, 184 S. (vieweg studium, Bd. 63, Aufbaukurs Mathematik; hrsg. von Gerd Fischer.)
Pb. DM 36,— ISBN 3-528-07263-6

Dieses Buch will dem Leser eine Einführung in wichtige Techniken und Methoden der heutigen reellen Algebra und Geometrie vermitteln. An Voraussetzungen werden dabei nur Grundkenntnisse der Algebra erwartet, so daß das Buch für Studenten mittlerer Semester geeignet ist.

Das erste Kapitel enthält zunächst grundlegende Fakten über angeordnete Körper und ihre reellen Abschlüsse und behandelt dann verschiedene Methoden zur Bestimmung der Anzahl reeller Nullstellen von Polynomen. Das zweite Kapitel befaßt sich mit reellen Stellen und gipfelt in Artins Lösung des 17. Hilbertschen Problems. Kapitel III schließlich ist dem noch jungen Begriff des reellen Spektrums und seinen Anwendungen gewidmet.





Ina Kersten

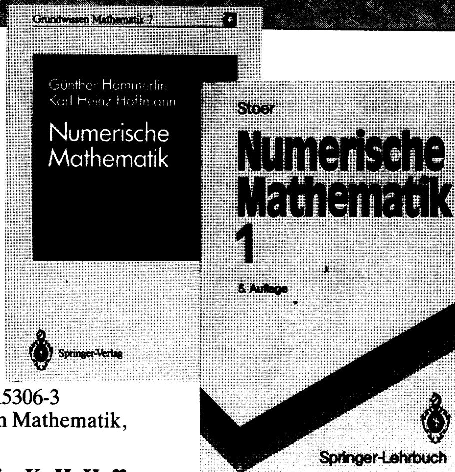
Brauergruppen von Körpern

1990. VIII, 178 S. (Aspekte der Mathematik, Bd. D 6; hrsg. von Klas Diederich.) Kart.
DM 64,— ISBN 3-5228-06380-7

Das Buch gibt eine Einführung in die Theorie der Brauergruppen von Körpern und wendet sich an Leser, die mit dem Inhalt einer Algebravorlesung vertraut sind. Die ersten drei relativ kurzen Kapitel stellen grundlegende Begriffe und Ergebnisse wie etwa K-Algebra, Tensorprodukt, Struktursätze von Wedderburn, Satz von Skolem-Noether, gewisse Kohomologiegruppen zur Beschreibung von Br (K), zur Verfügung.

Im folgenden werden die Milnorschen K-Gruppen und Nrmabbildungen für die Brauerguppe Br (K) und für K_2 eingeführt. Im letzten Kapitel schließlich wird das Theorem von Merkurjew-Suslin nd ein sogenannter „Hilbertscher Satz 90 für K_2" formuliert. Schließlich wird der Beweis des Merkurjew-Suslin-Theorems auf den Beweis von „Hilbert 90 für K_2" reduziert.

Numerische Mathematik



1989.
XII, 448 S.
72 Abb.
Brosch.
DM 38,–
ISBN 3-540-15306-3
(Grundwissen Mathematik, Band 7).

G. Hämmerlin, K.-H. Hoffmann

Numerische Mathematik

Inhaltsübersicht: Rechnen. – Lineare Gleichungssysteme. – Eigenwerte. – Approximation. – Interpolation. – Splines. – Integration. – Iteration. – Lineare Optimierung. – Literatur. – Bezeichnungen. – Namen- und Sachverzeichnis.

Der Begriff der Approximation zieht sich als roter Faden durch den gesamten Text. Die Betonung liegt dabei weniger auf der Bereitstellung möglichst vieler Algorithmen als vielmehr auf der Vermittlung mathematischer Überlegungen, die zur Konstruktion von Verfahren führen. Jedoch werden auch der algorithmische Aspekt und entsprechende Effizienzbetrachtungen gebührend berücksichtigt.
An vielen Stellen wie etwa bei den Untersuchungen zur Komplexität von Algorithmen, bei der Behandlung schlechtkonditionierter Probleme, in dem Abschnitt über Splines oder auch bei der numerischen Kubatur geht der dargebotene Stoff über den Inhalt einer einschlägigen Vorlesung zur numerischen Mathematik hinaus.

J. Stoer

Numerische Mathematik 1

Eine Einführung – unter Berücksichtigung von Vorlesungen von F. L. Bauer 5., verb. Aufl. 1989. XIII, 314 S. 8 Abb. Brosch. DM 32,– ISBN 3-540-51481-3 (Springer-Lehrbuch)
(Die ersten vier Auflagen erschienen als Bd. 105 in der Reihe „Heidelberger Tachenbücher")

Das Standardwerk zur numerischen Mathematik!

Dieses zweibändige Standardlehrbuch bietet einen umfassenden und aktuellen Überblick über die Numerische Mathematik. Dabei wird viel Wert auf solche Vorgehensweisen und Methoden gelegt, die sich durch große Wirksamkeit auszeichnen. Ihr praktischer Nutzen, aber auch die Grenzen ihrer Anwendung werden vergleichend diskutiert. Zahlreiche Beispiele runden dieses unentbehrliche Buch ab.
Die Neuauflage des ersten Bandes wurde um die Darstellung der B-Splines und der Algorithmen zu ihrer Berechnung, sowie durch ein Kapitel über die Lösung von großen Systemen mit dünn besetzten Matrizen erweitert.

J. Stoer, R. Bulirsch

Numerische Mathematik 2

Eine Einführung – unter Berücksichtigung von Vorlesungen von F. L. Bauer
3. verb. Aufl. 1990.
XI, 308 S. 22. Abb. 3 Tab.
Brosch. DM 36,– ISBN 3-540-51482-1
(Springer-Lehrbuch)
(Die ersten beiden Auflagen erschienen als Bd. 114 in der Reihe „Heidelberger Taschenbücher").

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo Hong Kong

Heidelberger Platz 3, D-1000 Berlin 33 · 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA · 8 Alexandra Rd., London SW19 7JZ, England · 26, rue des Carmes, F-75005 Paris · 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan · Citicorp Centre, Room 1603, 18 Whitfield Road, Causeway Bay, Hong Kong

H&S 9367/5/1

Springer

Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik

5: Gert König (Hg.)

Konzepte des mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert

Zehn Beiträge. 273 Seiten mit zahlreichen Abbildungen, kart. ca. DM 82,–
ISBN 3-525-40312-7

Das Unendliche und das Problem seiner begrifflichen Fixierung hat Mathematiker, Physiker und Philosophen ebenso fasziniert wie beunruhigt. Der berühmte Grundlagenforscher David Hilbert schrieb 1926: »Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.« Bei einem Bochumer interdisziplinären Kolloquium wurde versucht, frühe Lösungsansätze von Mathematikern (Cavalieri, Euler, Lagrange, Laplace) und ihren Einfluß auf physikalische Anwendung (Fresnel, Ampère, Poisson, Navier) und philosophische Begründungsversuche (Hegel, Fries, Herbart, Bolzano) zu analysieren. Thematisiert wurden auch Gleichheit und Gegenständlichkeit in der Begründung der Mathematik im 19. Jahrhundert am Beispiel der Auffassungen von H. Grassmann, Bolzano und Frege.

6: Susann Hensel / Karl-Norbert Ihmig / Michael Otte

Mathematik und Technik im 19. Jahrhundert in Deutschland

Soziale Auseinandersetzung und philosophische Problematik. 1989. X, 305 Seiten, kart. DM 85,–
ISBN 3-525-40313-5

Die in dieser Arbeit geschilderten Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Technikentwicklung im 19. Jahrhundert stellen eine in vielem illustrative historische Vorstufe heutiger Problemlagen dar.

Inhaltsübersicht: Susann Hensel, Die Auseinandersetzungen um die mathematische Ausbildung der Ingenieure an den Technischen Hochschulen in Deutschland Ende des 19. Jahrhunderts / Karl-Norbert Ihmig, Das Verhältnis von Mathematik und Kinematik bei Franz Reuleaux / Michael Otte, Die Auseinandersetzungen zwischen Mathematik und Technik als Problem der historischen Rolle und des Typus von Wissenschaft.

Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen/Zürich

de Gruyter Studies in Mathematics, Volume 12
Editors: Heinz Bauer, Jerry L. Kazdan, and Eduard Zehnder

Andrei Borisovich Shidlovskii

Transcendental Numbers

With a foreword by W. Dale Brownawell
Translated from the Russian by Neal Koblitz

1989. XX, 466 pages. 17 x 24 cm. Cloth DM 168,- ISBN 3 11 011568 9

In 1929 Siegel obtained a general method for establishing the algebraic independence of the values of a certain class of power series, the so-called E-functions, satisfying systems of linear differential equations. Siegel's work was concerned with first and second order differential equations only, and it was an outstanding question for many years to create the tools for extending the arguments to higher order equations. The problem was solved by Shidlovskii in 1954 which marks the beginning of the development of this branch of transcendental number theory into a logically complete and esthetically satisfying theory. This book provides the first unified and systematic account of these topics and covers the development in the last thirty years which, to a large extent, is due to the author himself and his school.

Contents:
Introduction · Approximation of real and algebraic numbers · Arithmetic properties of the values of the exponential function at algebraic points · Transcendence and algebraic independence of the values of E-functions which are not connected by algebraic equations over the field of rational functions · Transcendence and algebraic independence of the values of E-functions which are connected by algebraic equations over the field of rational functions · Transcendence and algebraic independence of the values of E-functions which satisfy first order linear differential equations · Algebraic independence of the values of E-functions which satisfy second order linear differential equations · Solutions of certain linear differential equations of arbitrary order · Arithmetic methods applied to solutions of linear differential equations of arbitrary order · Siegel's Theorem · Solutions of linear differential equations of prime order p · The algebraic independence measure of values of IE-functions · The algebraic independence measure of values of KE-functions · Effective bounds for measures · Concluding remarks · Supplementary remarks on recent work for the English edition · Bibliography.

From a review of the Russian edition:
"The present book on transcendental numbers presents in a clear and beautiful way the method developed by Siegel, and later considerably improved by the author himself, for the consideration of the arithmetic properties of E-functions... Using this book one can study this topic of transcendental number theory well, and the book is also very useful for mathematicians working in this field, too ..."

Zentralblatt für Mathematik

W DE G **de Gruyter · Berlin · New York**