92. Band Heft 3
ausgegeben am 2. 8. 1990

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1990

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 118,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 92, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Memminger Str. 6, 8900 Augsburg
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen weren.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
92 (1990) 89–110
AMS subject classification: 30–03; 01A55, 01A72, 30–01, 30B10

Wie man beim Weierstraßschen Aufbau der Funktionentheorie das Cauchysche Integral vermeidet

P. Ullrich, Münster

1 Einleitung

Karl Weierstraß begründete seine Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher für „analytische" Funktionen, d. h. solche, die sich in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches (lokal) in eine Potenzreihe entwickeln lassen. Damit gelang ihm ein Aufbau der Analysis, der nur einen Grenzprozeß benötigt, den der lokal gleichmäßigen Konvergenz von Reihen.

Gegen diese Theorie wird immer wieder eingewandt, selbst wenn man nur die Klasse der analytischen Funktionen betrachte, könne sie weder die Existenz und Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung noch den Riemannschen Hebbarkeitssatz liefern; Weierstraß hätte, wenn er Ergebnisse dieser Art brauchte, Ideen aus dem Kreis der Cauchy-Riemann-Theorie verwenden müssen. So schreibt Carl Ludwig Siegel in seinem Artikel „Zu den Beweisen des Vorbereitungssatzes von Weierstraß" [Sie1968], S. 2:

> Bekanntlich hat Weierstraß bei seinen Publikationen nach Möglichkeit vermieden, von der Cauchyschen Integralformel und den daran anschließenden Methoden Gebrauch zu machen, und so ist es von Interesse, seinen Beweis [des Vorbereitungssatzes] zu betrachten.

und vermerkt am Ende der Beweisanalyse (a.a.O., S. 4):

> Es ist ... vom prinzipiellen Standpunkt aus einzuwenden, daß beim Beweis des Eindeutigkeitssatzes der Laurentschen Entwicklung die Cauchyschen Ideen nicht zu vermeiden sind.

Kritik dieser Art rührt natürlich insoweit an den Fundamenten der Weierstraßschen Theorie, als sie besagt, daß essentielle Sätze dieser Theorie nicht in ihrem Rahmen bewiesen wurden und, zum Teil, daß sie darin auch nicht zu beweisen sind.

Im folgenden soll dagegen – sine ira et studio – dargelegt werden, wie weit man im Rahmen der reinen Potenzreihen-Theorie kommen kann und wie weit auch Weierstraß und seine Schule vor über hundert Jahren gekommen sind. Ohne

Verwendung von Cauchyscher Integraltheorie – und von Differentialrechnung – wird insbesondere gezeigt, daß die a priori lokale Potenzreihen-Entwicklung einer analytischen Funktion auf jedem Kreis konvergiert, der im Definitionsbereich der Funktion enthalten ist. Weiter werden sowohl die Laurent-Entwicklung als auch der Riemannsche Hebbarkeitssatz hergeleitet.

Von den Eigenschaften des Körpers $\mathbb{C}$ (der etwa als zweidimensionale $\mathbb{R}$-Algebra mit der üblichen multiplikativen Struktur definiert sei) wird nur verwendet, daß er ein bewerteter lokal-kompakter Körper ist, in den $\mathbb{R}$ isometrisch eingebettet ist, und daß gilt:

> $*$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine komplexe Zahl, die den Betrag 1 hat, aber keine ν-te Einheitswurzel ist für alle $\nu \in \{1, \ldots, n\}$.

Die Eigenschaft $*$. ist unmittelbar klar, da es unendlich viele komplexe Zahlen vom Betrag 1 gibt, aber zu festem $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele ν-te Einheitswurzeln für $\nu \in \{1, \ldots, n\}$.

Weitere Eigenschaften von $\mathbb{C}$ werden nicht vorausgesetzt, insbesondere nicht die Existenz beliebiger Einheitswurzeln oder gar, daß $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Ganz im Gegenteil: Dies wird in Abschnitt 3 en passant mitbewiesen.

Die Betrachtungen über die Minimierung der Voraussetzungen an den Grundkörper erscheinen müßig, wenn man den Satz von Gelfand-Mazur kennt, nach dem $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die einzigen $\mathbb{R}$-Banachalgebren sind, die Körper sind, also die einzigen vollständigen bewerteten Körper, in die $\mathbb{R}$ isometrisch eingebettet ist. Man kann sich jedoch erst einmal unwissend stellen und diesen Satz dann, in einem allerdings ahistorischen Zugang, ebenfalls mittels Potenzreihen-Theorie à la Weierstraß beweisen: Läßt man als Wertebereich auch $\mathbb{C}$-Banachräume bzw. -algebren zu, so erhält man einen Kalkül für vektorwertige analytische Funktionen, der weder Integrale noch den Satz von Hahn-Banach benötigt und trotzdem leistungsfähig genug ist, um im letzten Abschnitt den Satz von Gelfand-Mazur wie üblich zu beweisen.

2 Potenzreihen

Sei $\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R};\, r > 0\}$ und $\mathbb{R}_{\geqslant 0} := \{r \in \mathbb{R};\, r \geqslant 0\}$. Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$ bezeichne

$$B_r(c) := \{z \in \mathbb{C};\, |z-c| < r\} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{B_r(c)} := \{z \in \mathbb{C};\, |z-c| \leqslant r\}$$

den *offenen* bzw. den *abgeschlossenen Kreis um c mit Radius r.* Für $r, s \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$ mit $r < s$ bezeichne weiter

$$A_{r,s}(c) := \{z \in \mathbb{C};\, r < |z-c| < s\}$$

den *offenen Kreisring um c mit innerem Radius r und äußerem Radius s.*

Sei $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $c \in \mathbb{C}$. Dann nennt man die Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$ eine *Laurentreihe* mit den *Koeffizienten* a_ν

und dem *Entwicklungspunkt* c. Ist $a_\nu = 0$ für alle $\nu < 0$, so nennt man
$\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ eine *Potenzreihe*.

Die Laurentreihe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ heißt in einem Punkt $z_0 \neq c$ *konvergent*, wenn sowohl die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z_0-c)^\nu$ als auch die Reihe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu(z_0-c)^\nu$ $= \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}\left(\frac{1}{z_0-c}\right)^\nu$ konvergiert.

Historische Bemerkung: Weierstraß bezeichnet auch Laurentreihen als „Potenzreihen" und, zur Unterscheidung, Potenzreihen im Sinne der obigen Definition als „gewöhnliche Potenzreihen" (siehe etwa [W1841b], S. 67, und [W1880], S. 225).

Zunächst werden einige elementare Ergebnisse über Potenz- und Laurentreihen angegeben, die über jedem bewerteten Grundkörper gelten.

Abelsches Lemma. *Sei* $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ *eine Potenzreihe, für die es* $r, M \in \mathbb{R}_{>0}$ *gibt mit* $|a_\nu|\, r^\nu \leqslant M$ *für alle* $\nu \in \mathbb{N}$. *Dann konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig auf jedem Kreis* $\overline{B_\varrho(c)}$ *mit* $0 < \varrho < r$; *für alle* $z \in \overline{B_\varrho(c)}$ *gilt* $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{1-\varrho/r}$.

Beweis: Für alle $z \in \overline{B_\varrho(c)}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|\,|z-c|^\nu \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} M r^{-\nu} \varrho^\nu \leqslant \frac{M}{1-\varrho/r}. \qquad \square$$

Aus diesem Lemma folgt sofort die Existenz des *Konvergenzradius* einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt c, d. h. eines $r \in \{\varrho \in \mathbb{R};\, \varrho \geqslant 0\} \cup \{+\infty\}$ derart, daß die Reihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-c| < r$ konvergiert und für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-c| > r$ divergiert.

Hat $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ einen positiven Konvergenzradius, so gilt $f(z) = a_0 + (z-c)g(z)$, wobei $g(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+1}(z-c)^\nu$ aufgrund des Abelschen Lemmas in einer Umgebung von c konvergiert und beschränkt ist. Mithin ist jede Potenzreihe stetig in ihrem Entwicklungspunkt.

Identitätssatz für Potenzreihen. *Seien* $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ *und* $g(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(z-c)^\nu$ *zwei Potenzreihen, sei* $(c_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{C} \setminus \{c\}$, *die gegen* c

konvergiert, so daß für alle $\mu \in \mathbb{N}$ beide Potenzreihen in c_μ konvergieren und $f(c_\mu) = g(c_\mu)$ erfüllen. Dann gilt $a_\nu = b_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.

Beweis: Aufgrund der Stetigkeit von f und g in c gilt die Behauptung für $\nu = 0$. Sei sie bereits für $\nu = 0, \ldots, \nu_0 - 1$ gezeigt. Dann gilt $\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} a_\nu (c_\mu - c)^\nu = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} b_\nu (c_\mu - c)^\nu$ und, da $c_\mu \neq c$ nach Voraussetzung, $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+\nu_0}(c_\mu - c)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu+\nu_0}(c_\mu - c)^\nu$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$. Die Stetigkeit in c liefert nun $a_{\nu_0} = b_{\nu_0}$. □

Beispiel: Setzt man $\binom{\frac{1}{2}}{\nu} := \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{\frac{1}{2} - \mu + 1}{\mu}$, so gilt $\left|\binom{\frac{1}{2}}{\nu}\right| \leqslant 1$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Aufgrund des Abelschen Lemmas konvergiert die Reihe $b(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} z^\nu$ also auf $B_1(0)$.

Für $z \in B_1(0)$ gilt die Funktionalgleichung $b(z)^2 = 1 + z$, was sich ohne Differentialrechnung beweisen läßt: Setzt man für $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig $\binom{\alpha}{\nu} := \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{\alpha - \mu + 1}{\mu}$, so gilt die Gleichung $\binom{2\alpha}{\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\alpha}{\nu - \mu}\binom{\alpha}{\mu}$ zunächst aufgrund des binomischen Lehrsatzes für alle $\alpha \in \mathbb{N}$, dann aber für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ aufgrund des Identitätssatzes für reelle Polynome, speziell für $\alpha = \frac{1}{2}$.

Nach diesen Präliminarien gelangen wir zum grundlegenden Satz der Arbeit:

Cauchysche Abschätzungen für Laurent-Koeffizienten. *Sei $f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$ eine Laurentreihe, die, für ein festes $r \in \mathbb{R}_{>0}$, auf der Menge $S := \{z \in \mathbb{C};\ |z - c| = r\}$ gleichmäßig konvergiert. Ist dann $M \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit $|f(z)| \leqslant M$ für alle $z \in S$, so folgt*

$$|a_\nu| r^\nu \leqslant M \quad \text{für alle} \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Sei ohne Einschränkung $c = 0$ und $r = 1$. Nach Voraussetzung wird die Laurentreihe $f(z)$ auf S gleichmäßig durch die Folge ihrer Partialsummen approximiert. Mithin kann man sich auf den Fall $f(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu z^\nu$ mit $n \in \mathbb{N}$ beschränken.

Um $|a_m| \leqslant M$ für $-n \leqslant m \leqslant n$ zu zeigen, wähle man gemäß Eigenschaft *. aus der Einleitung ein $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| = 1$ und $\xi^\nu \neq 1$ für alle $\nu \in \{1, \ldots, 2n\}$. Dann gilt auch $\xi^{\nu - m} \neq 1$ für alle $\nu \in \{-n, \ldots, n\}$, $\nu \neq m$, so daß sich für $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$ ergibt:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{-mj} f(\xi^j) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=-n}^{n} \sum_{j=0}^{N-1} a_\nu \xi^{(\nu-m)j}$$

$$= a_m + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\nu=-n \\ \nu \neq m}}^{n} a_\nu \frac{1 - \xi^{(\nu-m)N}}{1 - \xi^{\nu-m}}.$$

Da $|1 - \xi^{(\nu-m)N}| \leqslant 2$ für alle N gilt und die anderen Terme – mit Ausnahme von $\frac{1}{N}$ – nicht von N abhängen, konvergiert die rechte Seite dieser Gleichung für N gegen Unendlich gegen a_m. Mithin erhält man:

$$|a_m| = \lim_{N \to \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{-mj} f(\xi^j) \right| \leqslant \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |f(\xi^j)| \leqslant M. \qquad \square$$

Historische Bemerkung: Dieser Beweis der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen stammt von Weierstraß; die Mittelwertbildung über die $\xi^{-mj} f(\xi^j)$ stellt seinen Ersatz für das Cauchysche Integral dar.

Das früheste Zitat ist die bereits 1841 verfaßte, aber erst 1894 veröffentlichte Arbeit „Zur Theorie der Potenzreihen" [W1841b]. In dieser Arbeit werden die Abschätzungen für Laurentreihen hergeleitet, auf den Seiten 67–68 für eine, auf den Seiten 68–70 für mehrere Veränderliche.

Weierstraß hat den Beweis dann offenbar in allen seinen Vorlesungen zur „Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen" vorgeführt, wenn auch nicht immer für mehrere Veränderliche und zum Teil auch nur für Potenzreihen: Man vergleiche etwa die Mitschrift von Killing aus dem Sommersemester 1868 ([W1986], S. 66–68), die von Hettner aus dem Sommersemester 1874 ([W1988a], S. 278–294) und die von Hurwitz aus dem Sommersemester 1878 ([W1988b], S. 99–100, S. 123 und S. 155).

Was die 1880 veröffentlichte Arbeit „Zur Functionenlehre" [W1880] betrifft, so zitiert Weierstraß in der ursprünglichen Version des Artikels nur die Aussage der Koeffizientenabschätzungen (a.a.O., S. 206). Offenbar haben ihn Nachfragen dazu veranlaßt, bei der Herausgabe des zweiten Bandes seiner Werke im Jahre 1895 dem Artikel Anmerkungen beizugeben, in denen er die Koeffizientenabschätzungen für Laurentreihen in einer Veränderlichen beweist (a.a.O., S. 224–226) und bemerkt, daß sich der Beweis analog auf mehrere Veränderliche überträgt (a.a.O., S. 226).

Der Weierstraßsche Beweis der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen ist innerhalb der letzten hundert Jahre etwas in Vergessenheit geraten; man findet ihn aber in den Funktionentheorie-Lehrbüchern von Hurwitz/Courant ([HC], 4. Auflage, S. 40–41), Diederich/Remmert ([DR1972], S. 160–162, wo er, wohl aufgrund der eben erwähnten Literaturstelle, fälschlicherweise Hurwitz zugeschrieben wird) und Remmert ([Re1984], 8.3.5).

Bemerkung 1: Die im obigen Beweis verwendete Eigenschaft *. wurde in der Einleitung elementar so begründet, wie es Weierstraß selbst beim Beweis der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen in [W1988a] auf Seite 279 tat. Man kann leicht folgende Verschärfung zeigen:

*'. Es gibt ein $\xi \in \mathbb{C}$, das den Betrag 1 hat, aber keine Einheitswurzel ist.

Der vielleicht naheliegendste Beweis von *'. ist das Argument, daß die Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1 gleichmächtig zum Einheitsintervall, also überabzählbar ist, während es nur abzählbar unendlich viele Einheitswurzeln gibt. (Dieses Argument steht seit der Cantorschen Arbeit [Can1874] zur Verfügung, und Weierstraß benutzt Abzählbarkeitsargumente häufig als technisches Hilfsmittel, vgl. auch [U1989], S. 155–156.)

Konstruktiv läßt sich *'. dagegen beweisen, indem man nachweist, daß die Zahl $\xi := \frac{2-i}{2+i}$ die verlangten Eigenschaften hat: Aus $\xi^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ folgt nämlich

$$(2-i)^n = (2+i)^n = ((2-i)+2i)^n = (2i)^n + n(2-i)(2i)^{n-1} + \ldots,$$

also $(2i)^n = (2-i)(A+Bi)$ mit $A, B \in \mathbb{Z}$. Übergang zum Quadrat der Absolutbeträge ergibt $4^n = 5(A^2+B^2)$, also einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$. (Man vergleiche hierzu auch [HC], 4.Auflage, S. 41.) Ist man bereit, mehr Kenntnisse aus der Zahlentheorie zu investieren, so kann man auch argumentieren, daß $2+i$ und $2-i$ zwei nicht assoziierte Primelemente in dem faktoriellen Ring $\mathbb{Z}[i]$ sind.

Bemerkung 2: Obwohl in den obigen Beweis der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen essentiell eingeht, daß – zumindest eine Teilfolge von – $\left(\frac{1}{N}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, läßt er sich auf den Fall eines vollständigen nichtarchimedisch bewerteten Grundkörpers k übertragen. Dazu ist allerdings anstelle der Eigenschaft *. vorauszusetzen:

> **. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|N| = 1$ und eine N-te Einheitswurzel $\tilde{\xi}$ im Restklassenkörper $\tilde{k}$ von k, die keine ν-te Einheitswurzel ist für alle $\nu \in \{1, \ldots, n\}$.

(Diese Bedingung ist etwa erfüllt, wenn $\tilde{k}$ algebraisch abgeschlossen ist; man wähle für N dann eine Primzahl, die größer als n und als die Charakteristik von $\tilde{k}$ ist.)

Sei nun $f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$ eine auf $\{z \in k; |z-c| = r\}$ strikt konvergente und durch $M \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ beschränkte Laurentreihe über k, wobei $c \in k$ und $r \in |k^*|$ sei. Dann kann man ohne Einschränkung $c = 0$ und $r = 1$ annehmen. Es gilt stets, daß $\sup_{\nu\in\mathbb{Z}} |a_\nu|$ angenommen wird; nach Multiplikation mit einer passenden Potenz von z kann man $|a_0| = \sup_{\nu\in\mathbb{Z}} |a_\nu|$ voraussetzen. Wie im Archimedischen kann man sich weiter auf den Fall $f(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu z^\nu$ beschränken.

Man wähle ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\tilde{\xi} \in \tilde{k}$ wie in **. und ein ξ aus dem Bewertungsring $\mathring{k}$ von k, das unter der kanonischen Abbildung $\mathring{k} \to \tilde{k}$ auf $\tilde{\xi}$ abgebildet wird. Wegen $N \neq 0 \in \tilde{k}$ ist wieder

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi^j) = a_0 + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\nu=-n \\ \nu\neq 0}}^{n} a_\nu \frac{1-\xi^{N\nu}}{1-\xi^\nu}.$$

Für alle $\nu \in \{-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n\}$ gilt, daß $\tilde{\xi}^\nu \neq 1$, und, wegen $\tilde{\xi}^N = 1$, daß $\tilde{\xi}^{N\nu} = 1$, also $|1-\xi^\nu| = 1$ und $|1-\xi^{N\nu}| < 1$ und damit $\left| a_\nu \frac{1-\xi^{N\nu}}{1-\xi^\nu} \right| < |a_\nu| \leqslant |a_0|$ ist. Da $\left|\frac{1}{N}\right| = 1$, erhält man hieraus aufgrund der strikten Dreiecksungleichung, daß der Betrag der rechten Seite der obigen Gleichung gleich $|a_0|$ ist. Die linke Seite hingegen ist betragsmäßig kleinergleich M, so daß man für alle ν erhält: $|a_\nu| \leqslant \sup_\mu |a_\mu| = |a_0| \leqslant M$. □

Aus den Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen folgt nun sofort - wie auch schon bei Weierstraß (vgl. [W1988b], S. 155) - als Korollar die

Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung. *Seien* $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu = f(z)$ *und* $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu(z-c)^\nu = g(z)$ *Laurentreihen mit gemeinsamem Entwicklungspunkt c, die auf der Menge* $S := \{z \in \mathbb{C}; |z-c| = r\}$ *für ein festes* $r \in \mathbb{R}_{>0}$ *gleichmäßig konvergieren und* $f(z) = g(z)$ *für alle* $z \in S$ *erfüllen. Dann folgt* $a_\nu = b_\nu$ *für alle* $\nu \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Die Laurentreihe $h(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (a_\nu - b_\nu)(z-c)^\nu$ konvergiert gleichmäßig auf S, und es gilt $h(z) = 0$ für alle $z \in S$. Mittels des Satzes folgt dann $a_\nu - b_\nu = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$. □

Der Leser wird bemerkt haben, daß dieser Beweis der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung Ideen der Cauchy-Theorie gänzlich vermeidet und damit die in der Einleitung zitierten Bedenken Siegels ausräumt.

Weierstraßscher Doppelreihensatz. *Sei* $f_\mu(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}(z-c)^\nu$, $\mu \in \mathbb{N}$, *eine Folge von Potenzreihen mit gemeinsamem Entwicklungspunkt c, die alle auf dem Kreis* $B_r(c)$ *für ein festes* $r \in \mathbb{R}_{>0}$ *konvergieren. Weiterhin konvergiere* $\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu(z)$ *lokal gleichmäßig auf* $B_r(c)$ *gegen eine Grenzfunktion f. Dann läßt sich f durch eine auf* $B_r(c)$ *konvergente Potenzreihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ *darstellen, wobei für* $\nu \in \mathbb{N}$ *gilt* $a_\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$.

Beweis: Sei ohne Einschränkung $c = 0$. Es reicht zu zeigen, daß $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gegen ein $a_\nu \in \mathbb{C}$ konvergiert und für alle $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varrho < r$ die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ auf $\overline{B_\varrho(0)}$ konvergiert und mit f übereinstimmt.

Man wähle dazu ein $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varrho < \sigma < r$ und setze $|g|_\sigma := \sup\{|g(z)|; z \in \overline{B_\sigma(0)}\}$ für jede auf $\overline{B_\sigma(0)}$ definierte komplex-wertige Funktion g. Mittels der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen folgt aus der Voraussetzung, daß $a_\nu := \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} \in \mathbb{C}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ existiert und

$$\left| a_\nu - \sum_{\mu=0}^{m} a_{\mu\nu} \right| \leqslant \sigma^{-\nu} \left| f - \sum_{\mu=0}^{m} f_\mu \right|_\sigma$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt. Speziell ist also $|a_\nu| \leqslant \sigma^{-\nu} |f|_\sigma$, wobei $|f|_\sigma < \infty$ gilt, da f auf

$\overline{B_\sigma(0)}$ gleichmäßiger Limes der aufgrund des Abelschen Lemmas auf $\overline{B_\sigma(0)}$ beschränkten Funktionen f_μ ist. Dieses Lemma liefert dann auch die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ auf $\overline{B_\varrho(0)}$.

Für alle $z \in \overline{B_\varrho(0)}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt weiterhin

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu - \sum_{\mu=0}^{m} f_\mu(z)\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|a_\nu - \sum_{\mu=0}^{m} a_{\mu\nu}\right| \cdot |z|^\nu$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|f - \sum_{\mu=0}^{m} f_\mu\right|_\sigma \cdot \sigma^{-\nu}\varrho^\nu = \left|f - \sum_{\mu=0}^{m} f_\mu\right|_\sigma \cdot \frac{1}{1-\varrho/\sigma}.$$

Da nach Voraussetzung $\left|f - \sum_{\mu=0}^{m} f_\mu\right|_\sigma$ für m gegen Unendlich beliebig klein wird, folgt somit $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für alle $z \in \overline{B_\varrho(0)}$. □

Historische Bemerkung: Der obige Beweis des Weierstraßschen Doppelreihensatzes, der nur die Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen verwendet, stammt von Weierstraß selbst. Bereits 1841 beweist er so diesen Satz in seiner bereits erwähnten Arbeit [W1841b], S. 70–73, wenn auch unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die betrachtete Reihe von Potenzreihen absolut konvergiert (a.a.O., S. 70; Weierstraß spricht davon, daß die Reihe „unbedingt" konvergiert). In den Vorlesungsmitschriften [W1988a] und [W1988b] aus den Jahren 1874 und 1878 hat er diese Bedingung jedoch fallengelassen und verlangt nur noch die gleichmäßige Konvergenz ([W1988a], S. 502–507; [W1988b], S. 111–113), in der Arbeit „Zur Functionenlehre" [W1880] sogar nur die kompakt gleichmäßige: Er betrachtet Reihen von Laurentreihen mit Entwicklungspunkt c und setzt gleichmäßige Konvergenz auf Kreislinien um c voraus (a.a.O., S. 205–208, insb. S. 205).

Indem man auf $f_\mu(z) := a_\mu(z-c)^\mu = a_\mu((z-z_0)+(z_0-c))^\mu$ den Weierstraßschen Doppelreihensatz anwendet, ergibt sich unter Verwendung der binomischen Formel sofort folgendes Resultat (das natürlich auch mittels elementarer Reihenmanipulationen zu beweisen ist):

Korollar (Umentwicklung von Potenzreihen). *Sei* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu = f(z)$ *eine auf* $B_r(c)$ *konvergente Potenzreihe und* $z_0 \in B_r(c)$. *Dann gibt es eine Potenzreihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(z-z_0)^\nu$, *die für alle* $z \in B_{r-|z_0-c|}(z_0)$ *konvergiert und mit* $f(z)$ *übereinstimmt. Dabei gilt* $b_\nu = \sum_{\lambda=\nu}^{\infty} a_\lambda \binom{\lambda}{\nu}(z_0-c)^{\lambda-\nu}$.

Anmerkung: Es soll nicht verschwiegen werden, daß $b_\nu = \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(z_0)$ gilt. Diese Darstellung wird jedoch im folgenden nicht verwendet; wie bereits in der Einleitung erwähnt, benutzt der gewählte Zugang keine Differentialrechnung, insbesondere nicht einmal, daß jede Potenzreihe differenzierbar ist.

3 Analytische Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Dann heißt eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ *analytisch* (*auf* D), wenn es zu jedem $d \in D$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt d gibt, die auf einer Umgebung von d konvergiert und dort mit f übereinstimmt.

Historische Bemerkung: Genaugenommen hätte Weierstraß diese Art „Funktionen" als „eindeutige analytische" bezeichnet, da sein Funktionsbegriff nicht beinhaltet, daß jeder Stelle des Definitionsbereichs nur ein Funktionswert zugeordnet ist. In seinen Vorlesungen (vgl. die Mitschriften [W1986], S. 68–70 und 72–73, [W1988a], S. 361–367, und [W1988b], S. 93–95) definiert er analytische Funktionen mittels analytischer Fortsetzungen entlang Kreisketten, die von einer festen Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ausgehen, und gelangt so auch zu „mehrdeutigen" analytischen Funktionen.

Analytische Funktionen „erben" wichtige Eigenschaften von den Potenzreihen: So ist jede analytische Funktion stetig auf ihrem Definitionsbereich, da jede Potenzreihe in ihrem Entwicklungspunkt stetig ist. Der Weierstraßsche Doppelreihensatz und die Stetigkeit analytischer Funktionen implizieren zudem, daß, wenn $f: D \to \mathbb{C}$ und $g: D' \to \mathbb{C}$ analytisch sind und $f(D) \subset D'$ gilt, auch $g \circ f: D \to \mathbb{C}$ analytisch ist.

Aufgrund des Korollars zur Umentwicklung von Potenzreihen stellt jede Potenzreihe mit Entwicklungspunkt c und positivem Konvergenzradius r auf $B_r(c)$ eine analytische Funktion dar. Wichtig für das Weitere ist das

Beispiel: Die Funktion $f: \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$ ist analytisch auf $\mathbb{C}^*$; denn bei vorgegebenem $d \in \mathbb{C}^*$ gilt für alle $z \in B_{|d|}(d)$, daß

$$1/z = 1/d \cdot \frac{1}{1-(-1/d)(z-d)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{d^{\nu+1}}(z-d)^\nu.$$

Aus diesem Beispiel und dem weiter oben Gesagten folgt, daß der Kehrwert jeder nullstellenfreien analytischen Funktion wieder analytisch ist. Weiterhin ergibt sich nun unter Verwendung des Weierstraßschen Doppelreihensatzes, daß eine auf einem offenen Kreisring konvergente Laurentreihe dort analytisch ist.

Der Identitätssatz für Potenzreihen überträgt sich wie folgt auf analytische Funktionen:

Identitätssatz für analytische Funktionen. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, seien f und g analytisch auf D. Es gebe ein $c \in D$ und eine Folge $(c_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{c\}$ mit $\lim_{\mu \to \infty} c_\mu = c$ und $f(c_\mu) = g(c_\mu)$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$. Dann stimmen für alle $d \in D$ die Koeffizienten der Potenzreihen-Entwicklung von f und von g in d überein; speziell ist $f(d) = g(d)$* für alle $d \in D$.

Beweis: Sei I definiert als die Menge aller $d \in D$, für die die Koeffizienten der Potenzreihen-Entwicklung von f und von g in d übereinstimmen. Der Identitätssatz für Potenzreihen liefert, daß I offen und abgeschlossen in D ist und c enthält. Da D zusammenhängt, muß also $I = D$ sein. □

Unter essentieller Verwendung der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen wird nun gezeigt, daß die Potenzreihen-Entwicklung einer analytischen Funktion in einem Punkt, von der nach Definition nur feststeht, daß sie in einer – a priori beliebig kleinen – Umgebung des Punktes konvergiert und die Funktion darstellt, dies in Wirklichkeit schon auf jedem Kreis um den Punkt tut, der ganz im Definitionsbereich der Funktion liegt.

Satz (Globalität der Potenzreihen-Entwicklung). *Sei f analytisch auf der offenen Menge D und $B \subset D$ ein Kreis mit Mittelpunkt d. Dann konvergiert die Potenzreihen-Entwicklung von f in d auf ganz B und stellt dort die Funktion f dar.*

Beweis: Sei ohne Einschränkung $d=0$. Aufgrund des Identitätssatzes für analytische Funktionen reicht es, folgendes zu zeigen: Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, daß die Potenzreihen-Entwicklung $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ von f in 0 auf $B_r := B_r(0)$ konvergiert und $\overline{B_r} := \overline{B_r(0)}$ noch ganz in D enthalten ist. Dann gibt es ein $\varrho > 0$, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r + \varrho$ konvergiert.

Aufgrund des Korollars über die Umordnung von Potenzreihen ändert sich der Konvergenzradius der Potenzreihen-Entwicklung von f von einem Punkt von D zum anderen höchstens um den Abstand der beiden Punkte. Also ist die Funktion, die jedem Punkt in $\overline{B_r}$ diesen Konvergenzradius zuordnet, stetig; sie nimmt nach Voraussetzung nur positive Werte an. Wegen der Lokal-Kompaktheit von $\mathbb{C}$ ist $\overline{B_r}$ kompakt. Damit gibt es ein $\sigma > 0$, so daß für jedes $c \in \overline{B_r}$ die Potenzreihen-Entwicklung $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(c)} (z-c)^\nu$ von f in c einen Konvergenzradius echt größer als σ hat. Man kann dabei annehmen, daß $\overline{B_{r+\sigma}} := \overline{B_{r+\sigma}(0)}$ ebenfalls in D enthalten ist. Es wird im folgenden gezeigt, daß die obige Behauptung für alle $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varrho < \sigma$ gilt.

Die Funktion f ist stetig auf $\overline{B_{r+\sigma}}$, also beschränkt, etwa durch $M > 0$, da $\overline{B_{r+\sigma}}$ kompakt ist. Aufgrund der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen hat man dann simultan für alle $c \in B_r$, daß $|a_\nu^{(c)}| \leqslant M \cdot \sigma^{-\nu}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varrho < \sigma$ beliebig. Dann ist $\left|\frac{\varrho}{r} c\right| < \varrho < \sigma$ für jedes $c \in B_r$, so daß die Potenzreihen-Entwicklung von f in c im Punkte $\left(1+\frac{\varrho}{r}\right)c = c + \frac{\varrho}{r}c$ konvergiert, man also $f\left(\left(1+\frac{\varrho}{r}\right)c\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(c)} \left(\frac{\varrho}{r}c\right)^\nu$ hat.

Da die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ nach Voraussetzung in c konvergiert, stimmt die Potenzreihen-Entwicklung von f in c überein mit der Umentwicklung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ in den Punkt c. Aufgrund des Korollars zur Umentwicklung von Potenzreihen hat man demnach $a_\mu^{(c)} = \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} a_\lambda \binom{\lambda}{\mu} c^{\lambda-\mu}$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$.

Betrachtet man also für $\mu \in \mathbb{N}$ beliebig den Ausdruck $a_\mu^{(z)}\left(\frac{\varrho}{r}z\right)^\mu$ als Funktion von z, so ist dies eine auf B_r konvergente Potenzreihe in z. Für alle $z \in B_r$ gilt dabei

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left|a_\mu^{(z)}\left(\frac{\varrho}{r}z\right)^\mu\right| \leqslant \sum_{\mu=0}^{\infty}|a_\mu^{(z)}|\varrho^\mu \leqslant \sum_{\mu=0}^{\infty} M\sigma^{-\mu}\varrho^\mu = M\cdot\frac{1}{1-\varrho/\sigma} < \infty,$$

da $0<\varrho<\sigma$. Die Funktionenfolge $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(z)}\left(\frac{\varrho}{r}z\right)^\mu$ konvergiert somit gleichmäßig auf B_r; die durch sie definierte Grenzfunktion läßt sich also nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz durch eine auf B_r konvergente Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^\nu$ darstellen.

Für alle $z \in B_r$ gilt demnach

$$f\left(\left(1+\frac{\varrho}{r}\right)z\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(z)}\left(\frac{\varrho}{r}z\right)^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^\nu,$$

für alle $z \in B_{r+\varrho}(0)$ mithin $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu\left(1+\frac{\varrho}{r}\right)^{-\nu} z^\nu$.

Nach dem Identitätssatz muß diese Reihe mit $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ übereinstimmen, so daß die Konvergenz der letzteren Potenzreihe auf $B_{r+\varrho}(0)$ folgt. □

Historische Bemerkung: Weierstraß hat den obigen Satz regelmäßig in seinen Vorlesungen vorgetragen. Im Sommersemester 1874 führt er den Beweis in etwa wie oben (vgl. [W1988a], S. 300–304); allerdings argumentiert er dabei etwas „großzügig", wenn er die Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen auf die a_ν anwendet und dabei Werte von f an Stellen einsetzt, wo die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ noch nicht geklärt ist (Notationen wie im obigen Beweis).

Vier Jahre später gibt er jedoch einen völlig korrekten Beweis, der gegenüber dem obigen elementarer, dafür aber nicht so unmittelbar ist (vgl. [W1988b], S. 100–102): Er betrachtet anstelle der Funktionenreihe $f\left(z+\frac{\varrho}{r}z\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(z)}\left(\frac{\varrho}{r}z\right)^\mu$ für festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die endliche Teilsumme $\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu^{(z)}\left(\frac{\varrho}{r}z\right)^\mu$. Von dieser sieht man ohne Verwendung des Doppelreihensatzes, allerdings unter Benutzung der Umentwicklung von Potenzreihen, daß sie eine auf B_r konvergente Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} A'_\nu z^\nu$ ist. Die Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen liefern dabei $|A'_\nu| \leqslant r^{-\nu}\,\frac{M}{1-\varrho/\sigma}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$, und elementares Nachrechnen gibt $A_n' = a_n \left(1 + \frac{\varrho}{r}\right)^n$, also zusammen $|a_n| \leq \frac{M}{1 - \varrho/\sigma} \cdot \frac{1}{(r + \varrho)^n}$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, kann man wieder die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $B_{r+\varrho}(0)$ folgern.

Weierstraß legt in seinen Ausführungen übrigens primär Wert auf die Umkehrung der Aussage des Satzes, daß es also auf dem Rand des Konvergenzkreises einer Potenzreihe einen Punkt geben muß, in dem sich die durch die Potenzreihe definierte analytische Funktion nicht mehr in eine Potenzreihe entwickeln läßt.

Bemerkung: Im Gegensatz zu den Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen läßt sich das obige Resultat nicht auf den nichtarchimedischen Fall übertragen. Entscheidend bei dem Beweis ist nämlich, daß für jedes $z \in \mathbb{C}$ der Betrag von $z + \frac{\varrho}{r} z$ gleich $\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right)|z|$, also insbesondere echt größer als $|z|$ ist, auch wenn ϱ „sehr klein" ist. Im Nichtarchimedischen ist hingegen für $\left|\frac{\varrho}{r}\right| \leqslant 1$ stets $\left|z + \frac{\varrho}{r} z\right| \leqslant \max\left(|z|, \left|\frac{\varrho}{r} z\right|\right) = |z|$.

Es stehen nun genug Resultate zur Verfügung, um den in der Einleitung versprochenen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ganz wie gewohnt durchzuführen. Zunächst wird gezeigt der

Satz von Liouville. *Jede auf ganz $\mathbb{C}$ analytische und beschränkte Funktion ist konstant.*

Beweis: Sei f auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ die Potenzreihen-Entwicklung von f in 0. Dann konvergiert diese Reihe aufgrund des Satzes über die Globalität der Potenzreihen-Entwicklung auf ganz $\mathbb{C}$ und stellt dort f dar. Unter Verwendung der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen schließt man jetzt wie gewohnt weiter. □

Aus dem Satz von Liouville folgt dann wie üblich der

Fundamentalsatz der Algebra. *Jedes nichtkonstante Polynom über $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Historische Bemerkung: Weierstraß gibt in seinen Vorlesungen neben diesem (vgl. [W1988b], S. 108) noch einen anderen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (vgl. [W1986], S. 82–83, [W1988a], S. 335–339, bzw. [W1988b], S. 108–109):

Er betrachtet die logarithmische Ableitung $p'(z)/p(z)$ des Polynoms p vom Grade $n \geqslant 0$. Subtrahiert man von dieser für jede Nullstelle c von p der Vielfachheit ν_c den Term $\nu_c/(z-c)$, so bleibt eine auf $\mathbb{C}$ analytische Funktion f übrig, die, wie man nachrechnet, auf $\mathbb{C}$ beschränkt mit $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ ist. Mittels des Satzes von Liouville folgt daraus, daß f identisch verschwindet. Ein Koeffizientenvergleich – etwa unter Benutzung der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung, vgl. Abschnitt 2 – liefert dann $n = \sum_{c \in p^{-1}(0)} \nu_c$, also sogar, daß p genau n Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) besitzt.

4 Laurent-Entwicklung

Bereits 1841 zeigte Weierstraß in seiner Arbeit „Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt“ [W1841a] die Existenz der Laurent-Entwicklung von auf Kreisringen analytischen Funktionen - zwei Jahre, bevor Cauchy in der französischen Akademie über die Arbeit „Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable x“ von Laurent referierte (vgl. [Cau1843]) –. Aus den Abschätzungen, die Weierstraß dabei für die Koeffizienten der Laurentreihe erhielt ([W1841a], S. 59), folgerte er (a.a.O., S. 63), daß für eine in einer punktierten Umgebung der 0 analytische und beschränkte Funktion die Laurent-Entwicklung um 0 in Wirklichkeit eine Potenzreihen-Entwicklung ist, also den Riemannschen Hebbarkeitssatz für isolierte Singularitäten. (Riemanns Dissertation [Rie1851] mit seiner Version des Fortsetzungssatzes stammt bekanntlich erst aus dem Jahre 1851!)

Die hierfür grundlegende Existenz der Laurent-Entwicklung bewies Weierstraß bemerkenswerterweise mittels Integralen, wenn auch ohne explizite Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes und der Integralformel; er setzte für die in [W1841a] betrachteten Funktionen überdies nur komplexe Differenzierbarkeit voraus. (Nach Mittag-Leffler ([ML1923], S. 35–36) lernte Weierstraß erst 1842 die Arbeiten von Cauchy kennen; allerdings waren diese damals schon so bekannt, daß ein indirekter Einfluß nicht mit Sicherheit auszuschließen ist.)

In seinen späteren Jahren war bekanntlich Weierstraß' Einstellung gegenüber der Integrationstheorie äußerst distanziert, und so wurde die 1841 geschriebene Arbeit erst 1894 durch die Veröffentlichung im ersten Band seiner Werke [WW] bekannt (vgl. hierzu auch die Fußnote auf Seite 123 des Artikels [P1896]). Nach den vorliegenden Quellen hat Weierstraß dieses Resultat weder in seinen Vorlesungen diskutiert noch einen integralfreien Beweis gegeben.

Es blieb zwei anderen Mathematikern der Weierstraßschen Schule vorbehalten, Beweise der Existenz der Laurent-Entwicklung analytischer Funktionen ganz im Rahmen der Potenzreihen-Theorie zu geben: Magnus Gösta Mittag-Leffler und Ludwig Scheeffer (geb. 1.6.1859 in Königsberg, Studium in Heidelberg, Leipzig und Berlin, Promotion am 1.3.1880 in Berlin bei Weierstraß und Kummer mit dem Thema „Über Bewegungen starrer Punktsysteme in einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit“, Habilitation 1884 in München mit der Schrift „Über einige bestimmte Integrale betrachtet als Functionen eines complexen Parameters“, gest. 11.6.1885). Beide Beweise, die 1884 in den Arbeiten „Démonstration nouvelle du théorème de Laurent“ [ML1884] bzw. „Beweis des Laurent'schen Satzes“ [Sch1884] veröffentlicht wurden, beruhen auf der Idee, mittels einer rationalen Abbildung den Kreisring auf einen Kreis abzubilden und aus Potenzreihen-Entwicklungen auf diesem Kreis durch Rück-Abbildung Laurent-Entwicklungen auf dem Kreisring zu gewinnen.

Scheeffer, an dessen Beweis sich die folgende Darstellung im wesentlichen orientiert, verwendet dabei die Funktion

$$q:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\qquad z\mapsto\frac{1}{2}(z+z^{-1}),$$

deren wesentliche Abbildungseigenschaften man leicht nachrechnet:

Feststellung. *Sei* $s\in\mathbb{R}$ *mit* $s>1+\sqrt{2}$. *Man setze* $R:=\frac{1}{2}(s-s^{-1})$ *und* $\sigma:=R+\sqrt{R^2-1}$. *Dann gilt für die offenen Kreisringe* $A_{s^{-1},s}(0)$ *und* $A_{\sigma^{-1},\sigma}(0)$, *daß* $q^{-1}(B_R(0))\subset A_{s^{-1},s}(0)$ *und* $q(A_{\sigma^{-1},\sigma}(0))\subset B_R(0)$.

Um den eigentlichen Beweis der Existenz der Laurent-Entwicklung übersichtlicher zu gestalten, seien noch zwei Aussagen vorweggestellt.

Hilfssatz. *Sei* $s\in\mathbb{R}$ *mit* $s>1$ *und* $A:=A_{s^{-1},s}(0)$.

a) *Ist f auf A analytisch und gerade, so gibt es eine auf* $A_{s^{-2},s^2}(0)$ *analytische Funktion* f_1 *mit* $f(z)=f_1(z^2)$ *für alle* $z\in A$.

b) *Sei* $s>1+\sqrt{2}$ *und* $R:=\frac{1}{2}(s-s^{-1})$. *Ist f auf A analytisch, so gibt es eine auf* $B_R(0)$ *analytische Funktion g mit* $f(z)+f(z^{-1})=(g\circ q)(z)$ *für alle* $z\in q^{-1}(B_R(0))$.

Beweis: Zunächst gibt es überhaupt Funktionen f_1 bzw. g, die die Bedingung unter a) bzw. b) erfüllen, da f auf den Fasern von $z\mapsto z^2$ bzw. $f(z)+f(z^{-1})$ auf den Fasern von q konstant ist. Diese Funktionen sind dabei jeweils eindeutig bestimmt.

Unter Verwendung der in Abschnitt 2 als Beispiel diskutierten binomischen Reihe $b(z)$ läßt sich die Gleichung $z^2=w_0$ für alle $w_0\in A_{s^{-2},s^2}(0)$ analytisch invertieren, so daß zunächst Teil a) bewiesen ist.

Analog läßt sich auch die Gleichung $q(z)=w_0$ invertieren, allerdings nur an den Stellen, an denen q seinen Funktionswert einfach annimmt, d. h. für $w_0\in B_R(0)\setminus\{\pm 1\}$.

Für $w_0=+1$ betrachte man die Potenzreihen-Entwicklung $\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu(z-1)^\nu$ von f in $+1$. Dann gilt für alle z in einer hinreichend kleinen Umgebung U von $+1$, daß

$$f(z)+f(z^{-1})=\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu}(z^\mu+(z^{-1})^\mu)\binom{\nu}{\mu}(-1)^{\nu-\mu}.$$

Wie man per Induktion zeigt (oder aus dem Hauptsatz über elementarsymmetrische Funktionen folgert), ist für alle $\mu\in\mathbb{N}$ der Term $z^\mu+(z^{-1})^\mu$ ein Polynom über $\mathbb{Z}$ in $z+z^{-1}=2q(z)$ und $z\cdot z^{-1}=1$, also ein Polynom über $\mathbb{Q}$ in $q(z)$. Somit läßt sich $f(z)+f(z^{-1})$ auf U als Potenzreihe in $q(z)$ darstellen, und man erhält eine Potenzreihen-Entwicklung von g in $+1$, da für w hinreichend nahe an $+1$ beide q-Urbilder von w in U liegen.

Analog erhält man eine Potenzreihen-Entwicklung von g in -1, so daß g als analytisch auf ganz $B_R(0)$ nachgewiesen ist. □

Lemma. *Sei $A := A_{r,s}(c)$ ein offener Kreisring und f analytisch auf A. Es gebe einen offenen Kreisring $A' \subset A$ um c, so daß f in A' eine Laurent-Entwicklung um c hat:*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu \qquad \textit{für alle } z \in A'.$$

Dann konvergiert diese Laurentreihe bereits auf ganz A gegen f.

Beweis: Sei ohne Einschränkung $c = 0$. Aufgrund des Identitätssatzes für analytische Funktionen ist nur die Konvergenz der Laurentreihe auf A zu zeigen. Sei $A' = A_{\varrho,\sigma}(0)$. Es genügt, die Spezialfälle $\varrho = r$ und $\sigma = s$ zu betrachten; man darf sich sogar auf den Fall $\varrho = r$ beschränken (indem man statt der auf $A_{r,s}(0)$ analytischen Funktion $f(z)$ gegebenenfalls die auf $A_{s^{-1},r^{-1}}(0)$ analytische Funktion $f(z^{-1})$ betrachtet).

Die Reihe $\sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu z^\nu$ konvergiert nach Voraussetzung auf $A_{r,\sigma}(0)$, wegen des Abelschen Lemmas also auch auf $A_{r,\infty}(0)$; analog konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ auf ganz $B_\sigma(0)$. Daher ist die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} f(z) - \sum\limits_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu z^\nu & \text{für } z \in A, \\ \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu & \text{für } z \in B_\sigma(0), \end{cases}$$

analytisch auf $B_s(0)$. Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ die Potenzreihen-Entwicklung von g in 0 ist, konvergiert diese Reihe nach dem Satz über die Globalität der Potenzreihen-Entwicklung auf ganz $B_s(0)$; also ist $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu$ auf ganz A konvergent. □

Satz (Existenz der Laurent-Entwicklung). *Jede auf einem offenen Kreisring $A = A_{r,s}(c)$ analytische Funktion läßt sich in eine auf A konvergente Laurentreihe mit Entwicklungspunkt c entwickeln.*

Beweis: Sei ohne Einschränkung $c = 0$. Aufgrund des Lemmas darf man sich auf den Fall $0 < r$ und $s < +\infty$ beschränken. Indem man z durch die Variable $\frac{1}{\sqrt{rs}}z$ ersetzt, kann man weiter $r = s^{-1}$ voraussetzen, also $A = A_{s^{-1},s}(0)$.

Nach dem Hilfssatz a) gibt es zu jeder auf A analytischen geraden Funktion f eine auf $A_1 = A_{s^{-2},s^2}(0)$ analytische Funktion f_1 mit $f(z) = f_1(z^2)$ für alle $z \in A$. Hat man also die Existenz der Laurent-Entwicklung für alle auf A_1 analytischen Funktionen bewiesen, so folgt diese auch für alle auf A analytischen geraden Funktionen, damit aber auch für alle auf A analytischen Funktionen $f(z)$, da

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + z \cdot \frac{1}{2z}(f(z) - f(-z))$$

gilt, wobei $\frac{1}{2}(f(z)+f(-z))$ und $\frac{1}{2z}(f(z)-f(-z))$ auf A analytische gerade Funktionen sind. – Analog reicht es, nur ungerade Funktionen zu betrachten! – Da ohnehin $s>1$ gilt, kann man also zusätzlich $s>1+\sqrt{2}$ annehmen, indem man den obigen Schluß hinreichend oft iteriert.

Sei nun f eine beliebige auf A analytische Funktion. Wie eben bemerkt, kann man sich dabei auf den Fall beschränken, daß f ungerade ist.

Setzt man $R:=\frac{1}{2}(s-s^{-1})$, so gibt es nach dem Hilfssatz b) eine auf $B_R(0)$ analytische Funktion g mit $f(z)+f(z^{-1})=(g\circ q)(z)$ für alle $z\in q^{-1}(B_R(0))$. Aufgrund der Globalität der Potenzreihen-Entwicklung existiert für g eine auf ganz $B_R(0)$ konvergente Potenzreihen-Darstellung $g(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu w^\nu$.

Setzt man $\sigma:=R+\sqrt{R^2-1}$ und $A':=A_{\sigma^{-1},\sigma}(0)$, so gilt nach der Feststellung $q(A')\subset B_R(0)$. Mithin erhält man

$$f(z)+f(z^{-1})=g(q(z))=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu 2^{-\nu}(z+z^{-1})^\nu \quad \text{für alle } z\in A'.$$

Indem man die Binome $(z+z^{-1})^\nu$ ausmultipliziert und umordnet, erhält man hieraus eine auf A', und damit nach dem Lemma auf ganz A, konvergente Laurent-Entwicklung $f(z)+f(z^{-1})=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu z^\nu$. (Diese Umformung ist zulässig, da die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu}\left(c_\nu 2^{-\nu}\binom{\nu}{\mu}z^\mu z^{-(\nu-\mu)}\right)$ auf A' absolut konvergiert.)

Die für $q(z)=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$ durchgeführten Überlegungen lassen sich analog für die Abbildung $\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto -iq(iz)=\frac{1}{2}(z-z^{-1})$ durchführen und liefern eine auf A konvergente Laurent-Entwicklung $f(z)+f(-z^{-1})=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b'_\nu z^\nu$. Da mit $f(z)$ auch $f(z^{-1})$ ungerade ist, folgt dann

$$f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(b_\nu+b'_\nu)z^\nu \quad \text{für alle } z\in A. \qquad \square$$

Historische Bemerkung: Es bietet sich aus inhaltlichen Gründen an, zunächst den Beweis von Mittag-Leffler darzustellen und dann den von Scheeffer als eine Vereinfachung dieses Beweises zu beschreiben. Der Deutlichkeit halber sei jedoch vorweg bemerkt, daß die Quellenlage keinen Rückschluß auf eine historische Abhängigkeit beider Beweise zuläßt. Keine der Arbeiten [ML1884] und [Sch1884] verweist auf die andere; beide erschienen 1884 im Band 4 der Acta Mathematica; [ML1884] hat zwar niedrigere Seitenzahlen als [Sch1884] (Seiten 80 bis 88 bzw. 375 bis 380), wurde aber später gedruckt: [ML1884] nach einer Fußnote auf Seite 81 am 26. Mai 1884, [Sch1884] nach Fußnoten auf den Seiten 375 und 377 am 3. und 4. März 1884 (dies ist offenbar kein Druckfehler!). Weiterhin werden im Band XVI des „Jahrbuch[s] über die Fortschritte der Mathematik" beide Arbeiten parallel und gleichberechtigt von Hurwitz referiert ([H1884]). Mittag-Leffler erwähnt den Beweis von Scheeffer zwar in einer Fußnote auf Seite 35 von [ML1923], sagt aber nichts über irgendwelche Abhängigkeiten.

Zunächst also zum Beweis von Mittag-Leffler: In [W1876], S.103–109, beweist Weierstraß zum Zwecke der Darstellung analytischer Funktionen mit wesentlichen Singularitäten folgenden „Hülfssatz“:

Ist f auf $\mathbb{C}$ analytisch mit Ausnahme der endlich vielen wesentlichen Singularitäten $c_1, \ldots, c_n$ und ist φ eine rationale Funktion n-ten Grades mit genau den Polen $c_1, \ldots, c_n$, so gibt es auf ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktionen $F_0, \ldots, F_{n-1}$ mit

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(\varphi(z)) \cdot \frac{1}{(z-c_1)^\nu}.$$

(Weierstraß läßt auch Pole für f und damit für die F_ν zu, dies ist für das Folgende aber ohne Belang.)

Mittag-Leffler bemerkt nun in [ML1884], S.82, daß der von Weierstraß gegebene Beweis übernommen werden kann für folgende Verallgemeinerung: Ist D offen und zusammenhängend, f analytisch auf D, φ eine rationale Funktion n-ten Grades ohne Pole in D, die $\varphi^{-1}(\varphi(D)) = D$ erfüllt, und $c_1 \notin D$ beliebig, so gibt es auf $\varphi(D)$ analytische Funktionen $F_0, \ldots, F_{n-1}$ mit einer Darstellung von f wie oben. Dabei läßt er auch den Punkt $c_1 = \infty$ zu, für den die Darstellung die Gestalt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(\varphi(z)) \cdot z^\nu$$

annimmt.

Diese Verallgemeinerung des Weierstraßschen „Hülfssatz[es]“ benutzt Mittag-Leffler zum Beweis der Laurent-Entwicklung: Ist f auf dem Kreisring $A_{R',R''}(0)$ analytisch, so wählt er zu beliebigem R mit $R' < R < R''$ ein $\varrho > 0$ so, daß $R(1+\varrho) < R''$ und $R(1+\varrho)^{-1} > R'$ gilt. Den oben zitierten Satz wendet er auf den Kreisring $A' := A_{R(1+\varrho)^{-1}, R(1+\varrho)}(0)$ und die rationale Funktion

$$\varphi(z) := \frac{1}{2}\left[\left(\frac{z}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{z}\right)^n\right]$$

an, nachdem er ausgerechnet hat, daß das Bild von A' unter φ ganz im Kreis um 0 mit Radius $\frac{1}{2}[(1+\varrho)^n + (1+\varrho)^{-n}]$ enthalten ist und selbst den Kreis um 0 mit Radius $\frac{1}{2}[(1+\varrho)^n - (1+\varrho)^{-n}]$ enthält, wobei für hinreichend großes n der letztere Radius echt größer als 1 ist (a.a.O., S.83–85). Er erhält also eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{2n-1} F_\nu(\varphi(z)) \cdot z^\nu$$

mit in $\varphi(A')$ analytischen Funktionen F_ν. Die Potenzreihen-Entwicklungen der F_ν um 0 liefern dann die Laurent-Entwicklung von f auf jedem Kreisring $A_{R(1+\varepsilon)^{-1}, R(1+\varepsilon)}(0)$ mit $(1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon)^{-n} < (1+\varrho)^n - (1+\varrho)^{-n}$. Läßt man nun R zwischen R' und R'' variieren, so stimmen die Entwicklungen auf den schmalen Kreisringen überein, liefern also eine globale Entwicklung.

In Scheeffers Beweis werden anstelle der einen, relativ komplizierten Funktion $\varphi(z) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{z}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{z}\right)^n\right]$ die beiden einfacheren Funktionen $z \mapsto z^n$ und $z \mapsto \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ betrachtet, deren Komposition gerade $\varphi(z)$ ergibt, wenn man von der Normierung $z \mapsto \frac{z}{R}$ einmal absieht.

Für den Spezialfall $\varphi(z)=z^n$ und D ein Kreisring beweist Scheeffer ad hoc die Verallgemeinerung des „Hülfssatz[es]". (Dieser Schritt ist in der oben ausgeführten, gegenüber der Scheefferschen noch vereinfachten Darstellung etwas versteckt, da ausgenutzt wurde, daß man n als hinreichend hohe Zweier-Potenz wählen kann und so per Iteration nur den Fall $n=2$ zu betrachten braucht; für diesen ist die Aussage aber im Hilfssatz a) enthalten, wenn man noch berücksichtigt, daß sich jede auf einem Kreisring A analytische Funktion f schreiben läßt als $f(z)=f_1(z)+z\cdot f_2(z)$ mit geraden und auf A analytischen Funktionen f_1, f_2, vgl. den Anfang des Beweises des Satzes.)

Die Funktion $z \mapsto q(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ behandelt Scheeffer ebenfalls elementar; allerdings erhält er nicht genau die Darstellung wie im Weierstraßschen „Hülfssatz", sondern benutzt daneben auch die Funktion $z \mapsto \frac{1}{2}(z - z^{-1}) = -iq(iz)$, vgl. das Ende des Beweises des Satzes.

Dadurch, daß Scheeffer die Faktorisierungsaussagen, die dem „Hülfssatz" entsprechen, nur in Spezialfällen benötigt, verkürzt sich der Beweis der Laurent-Entwicklung von 14 Druckseiten bei Mittag-Leffler (6 für den „Hülfssatz" vonWeierstraß und 8 aus dem Artikel [ML1884]) auf nur 5 Druckseiten. Allerdings liegt dies auch daran, daß Scheeffer an einigen Stellen sehr knapp ist: So tut er das analytische Invertieren analytischer Funktionen an Stellen mit nichtverschwindender Ableitung mit „Dies ist ohne Weiteres klar" ([Sch1884], S.376) ab, während Weierstraß doch eine knappe Seite auf den Beweis verwendet ([W1876], S.105–106). Zum anderen liefert Scheeffers Beweis direkt nur die Existenz der Laurent-Entwicklung auf einem kleineren Kreisring, woraus er „durch Anwendung bekannter Sätze" ([Sch1884], S.377) auf die globale Konvergenz schließt. Allerdings folgt dies, wie der obige Beweis des Lemmas zeigt, ohne weiteres aus der globalen Konvergenz von Potenzreihen-Entwicklungen, die auch Mittag-Leffler als wohlbekannt betrachtet ([ML1884], S.86).

1896 bespricht Alfred Pringsheim (nach selbstverfaßtem Lebenslauf „einer der markantesten und (sit venia verbo) erfolgreichsten Vertreter der specifisch Weierstrassischen »elementaren« Functionen-Theorie", zitiert nach [dM1975], S.543; weiterhin Schwiegervater von Thomas Mann) in seinem Artikel [P1896] die Arbeiten [ML1884] und [Sch1884]: Zum Beweis von Mittag-Leffler bemerkt er, hier erscheine „die Consequenz der Methode auf Kosten der Einfachheit allzu theuer erkauft" ([P1896], S.124), ein Urteil, dem nicht unbedingt zu widersprechen ist.

Dem Beweis von Scheeffer bescheinigt Pringsheim dagegen zunächst, daß er „gegen den Mittag-Leffler'schen Beweis merklich vereinfacht" erscheine, wendet aber gegen ihn ein, daß „derselbe eine Reihe von Vorkenntnissen, namentlich aus der Lehre von den *mehrdeutigen* Functionen" erfordere. Weiter kritisiert er, daß der Beweis „auf der Voraussetzung verschiedener, keineswegs besonders einfach zu beweisender Hülfssätze" beruhe, wobei er in einer Fußnote als Beispiel hierfür das Lemma über die Globalität der Laurent-Entwicklung anführt. (alles a.a.O.)

Die Kritik an der Verwendung von „mehrdeutigen Functionen" bezieht sich offenbar auf das im Beweis des Hilfssatzes benutzte Wurzelziehen. Dieses läßt sich aber problemlos mittels der (eindeutigen!) binomischen Reihe $b(z)$ bewerkstelligen. Pringsheims Monitum ist umso unverständlicher, als Weierstraß selbst bei der Definition analytischer Funktionen die mehrdeutigen Funktionen nie ausschloß. Der zweite Kritikpunkt ist bereits angesprochen worden: Scheeffer übergeht hier zwar wirklich einen Beweis des Lemmas; dieser Beweis ist aber so einfach, daß Pringsheims Kritik auch in diesem Fall nicht ganz nachzuvollziehen ist.

In dem Artikel [P1896] gibt Pringsheim übrigens einen weiteren integralfreien Beweis der Existenz der Laurent-Entwicklung, welcher nicht wie die beiden eben diskutierten auf der Abbildung des Kreisrings in einen Kreis und zurück basiert, sondern er bedient „sich sog. Mittelwerte ..., was jedoch im Grunde dasselbe ist wie die Verwendung des Cauchyschen Integrals" (Mittag-Leffler in [ML1923], S.35).

In der aktuellen Lehrbuchliteratur wird der Scheeffersche Beweis wiedergegeben im Abschnitt 12.1.6 der zweiten Auflage von [R1984]. Der Bequemlichkeit halber wird dabei ein Faktorisierungslemma verwendet, in dessen Beweis der Riemannsche Hebbarkeitssatz eingeht, der zuvor unter impliziter, aber essentieller Verwendung von Integralen hergeleitet wurde.

Die oben gegebene Darstellung vermeidet dies, indem beim Beweis der Aussage b) des Hilfssatzes für die Stellen $w_0 = +1$ und $w_0 = -1$ explizit gerechnet wird. Man hat so die Integrale vollständig vermieden und kann, wie schon Weierstraß im Jahre 1841 ([W1841a], S.63), aus der Existenz der Laurent-Entwicklung als Korollar folgern:

Riemannscher Hebbarkeitssatz. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $c \in D$. Die Funktion $f: D^* := D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ sei analytisch und beschränkt auf D^*. Dann gibt es eine auf D analytische Funktion $F: D \to \mathbb{C}$ mit $F|_{D^*} = f$.*

Beweis: Sei ohne Einschränkung $D = B_s(c)$ mit $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann besitzt nach dem obigen Satz die Funktion f auf $D^* = A_{0,s}(c)$ eine dort konvergente Laurent-Entwicklung $f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$.

Ist M eine obere Schranke für $|f|$ auf D^*, so folgt aus den Cauchyschen Abschätzungen für Laurent-Koeffizienten für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < s$ beliebig, daß $|a_\nu| \leqslant M \cdot r^{-\nu}$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$.

Für $\nu < 0$ strebt mit r auch $r^{-\nu}$ gegen 0, so daß hieraus folgt $a_\nu = 0$ für alle $\nu < 0$. Also besitzt $F: D \to \mathbb{C}$ mit $F(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$ die verlangten Eigenschaften. □

Anmerkung: Man sieht leicht, daß sich die Voraussetzung, daß f auf D^* beschränkt ist, abschwächen läßt zu: $\lim_{z \to c} (z-c) f(z) = 0$.

Historische Bemerkung: Wie schon zu Anfang dieses Abschnitts erwähnt, hat Weierstraß bereits 1841 einen Beweis dieses Satzes, welcher allerdings später den Ansprüchen seiner Systematik nicht genügt. Diese ambivalente Situation spiegelt sich in den schriftlichen Belegen etwa dadurch, daß seine Definition der „regulären Stelle" (= hebbaren Singularität) einer analytischen Funktion schwankt: So schreibt er in seiner Arbeit „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen" ([W1876], S.77):

> Ich will von einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$ der complexen Veränderlichen x sagen, sie verhalte sich regulär in der Umgebung einer bestimmten Stelle $(x = a)$, wenn sie innerhalb eines gewissen Bezirks, dessen Mittelpunkt a ist, überall einen endlichen und mit x stetig sich ändernden Werth hat. Nach einem bekannten Satze [sic!] existirt dann eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a)$, welche innerhalb des genannten Bezirks die Function darstellt.

während er in der zwei Jahre später von Hurwitz mitgeschriebenen Vorlesung vorsichtiger formuliert ([W1988b], S.127):

„Von einer eindeutigen Funktion sagen wir, sie verhalte sich bei a regulär, wenn sie dort definiert ist und sich durch eine Potenzreihe von $(x-a)$ darstellen läßt ..."

(Die Anführungsstriche in der Mitschrift deuten wohl auf ein wörtliches Weierstraß-Zitat hin.)

Im Gegensatz zu der in der Historischen Bemerkung zu den Koeffizientenabschätzungen erwähnten Stelle ([W1880], S.206) bedeutet der Passus „Nach einem bekannten Satze ..." in dem obigen Zitat aus der Arbeit [W1876] also offenbar nicht, daß Weierstraß einen seinen Ansprüchen genügenden Beweis kennt. (Man vergleiche zu dieser Frage auch die Fußnoten in [P1896], S.122–123.)

Insbesondere scheint Weierstraß auch nicht auf die Idee gekommen zu sein, den Hebbarkeitssatz unter Vermeidung der Laurent-Entwicklung zu folgern aus dem Satz von Casorati-Weierstraß (= „In jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität kommt eine analytische Funktion jedem Wert beliebig nahe", ist also speziell unbeschränkt.). Allerdings steht Weierstraß dieser Satz auch nicht in voller Allgemeinheit zur Verfügung; so zeigt er ihn in der Arbeit [W1876] nur für Funktionen, die auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch sind mit Ausnahme von Polen und endlich vielen wesentlichen Singularitäten (a.a.O., S.122–124; vgl. auch [U1989], S.163–164).

5 Der Satz von Gelfand-Mazur

In der Einleitung wurde bereits darauf hingewiesen, daß über den Grundkörper $\mathbb{C}$ nur vorausgesetzt wird, daß er bewertet und lokal-kompakt ist, eine isometrische Kopie von $\mathbb{R}$ enthält und die Eigenschaft $*$. erfüllt. Genauer stellt man sogar fest, daß die Gesamtheit dieser Eigenschaften nur für den Argumentbereich der Potenzreihen bzw. analytischen Funktionen erfüllt sein muß, während der Wertebereich meistens nur ein $\mathbb{C}$-Banachraum $\mathscr{B}$ zu sein braucht. Ausnahmen machen nur die Multiplikation von Potenzreihen und analytischen Funktionen – hier reicht es aber, $\mathscr{B}$ als $\mathbb{C}$-Banachalgebra mit Eins vorauszusetzen – und der Fundamentalsatz der Algebra, da in dessen Beweis der Kehrwert einer analytischen Funktion gebildet und abgeschätzt wird.

Festzuhalten bleibt jedoch, daß die Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen, der Weierstraßsche Doppelreihensatz, die Globalität der Potenzreihen-Entwicklung, der Satz von Liouville, die Existenz der Laurent-Entwicklung und der Riemannsche Hebbarkeitssatz genauso für analytische Funktionen von $\mathbb{C}$ in einen $\mathbb{C}$-Banachraum $\mathscr{B}$ gelten.

Falls $\mathscr{B}$ eine $\mathbb{C}$-Banachalgebra ist, hat man als Ersatz für den Fundamentalsatz der Algebra:

Satz. *Sei $\mathscr{B}$ eine $\mathbb{C}$-Banachalgebra mit Eins $1_{\mathscr{B}}$ und $x \in \mathscr{B}$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, so daß $x - c \cdot 1_{\mathscr{B}}$ nicht invertierbar in $\mathscr{B}$* ist.

Beweis (durch Widerspruch): Sei $x - c \cdot 1_{\mathscr{B}}$ invertierbar für alle $c \in \mathbb{C}$. Der Kürze halber sei im folgenden jede komplexe Zahl ζ mit $\zeta \cdot 1_{\mathscr{B}}$ identifiziert.

Bei fixiertem $c \in \mathbb{C}$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-c| < \|(x-c)^{-1}\|^{-1}$, daß

$$(x-z)^{-1} = (x-c)^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (x-c)^{-\nu}(z-c)^{\nu}.$$

Somit ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathscr{B}$, $c \mapsto (x-c)^{-1}$ als analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ erkannt.

Für $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \geqslant 2\|x\|$ gilt $(x-c)^{-1} = (-1/c) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} c^{-\nu} x^{\nu}$, also

$$\|(x-c)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|c|} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} |c|^{-\nu} \|x\|^{\nu} = \frac{1}{|c| - \|x\|} \leqslant \frac{1}{\|x\|},$$

d. h., f ist auf $\mathbb{C} \setminus B_{2\|x\|}(0)$ beschränkt. Aufgrund der Lokal-Kompaktheit von $\mathbb{C}$ (!) ist andererseits $\overline{B_{2\|x\|}(0)}$ kompakt in $\mathbb{C}$, die stetige Abbildung f also auch auf $\overline{B_{2\|x\|}(0)}$ beschränkt.

Mithin ist f auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch und beschränkt, also konstant nach dem Satz von Liouville. Widerspruch! □

Für jede $\mathbb{R}$-Algebra $\mathscr{K}$ läßt sich das direkte Produkt $\mathscr{K} \times \mathscr{K}$ zu einer $\mathbb{C}$-Algebra $\mathscr{K}_{\mathbb{C}}$ machen, indem man die Rechenregeln für $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ überträgt. Ist $\mathscr{K}$ eine $\mathbb{R}$-Banachalgebra, so läßt sich $\mathscr{K}_{\mathbb{C}}$ so mit einer Norm versehen, daß sie zu einer $\mathbb{C}$-Banachalgebra wird und die Einbettung $\mathscr{K} \to \mathscr{K}_{\mathbb{C}}$, $a \mapsto (a, 0)$ isometrisch ist. (Diese Standardtechnik der Komplexifizierung einer reellen Banachalgebra findet der Leser etwa ausgeführt in [Rick1960], S.5–9; die notwendigen Beweise sind zwar umfänglich, aber elementar.)

Unter Verwendung dieser Bemerkung folgt aus dem obigen Satz der

Satz von Gelfand-Mazur. *Jede $\mathbb{R}$-Banachalgebra, die ein Körper ist (insbesondere also kommutative Multiplikation hat), ist isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.*

Beweis: Sei $\mathscr{K}$ eine $\mathbb{R}$-Banachalgebra, die ein Körper ist.

Besitzt $\mathscr{K}$ nur über $\mathbb{R}$ algebraische Elemente, ist also eine algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{R}$, so ist die Behauptung aus rein algebraischen Gründen klar, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen und $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ ist.

Damit ist nur noch zu zeigen, daß $\mathscr{K}$ kein über $\mathbb{R}$ transzendentes Element enthält. Sei $x \in \mathscr{K}$ als transzendent angenommen. Dann wird vermittels $X \mapsto x$ eine Injektion des rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{R}(X)$ in $\mathscr{K}$ definiert, die wiederum eine Injektion von $\mathbb{C}(X)$ in $\mathscr{K}_{\mathbb{C}}$ induziert.

Nach dem obigen Satz gibt es nun ein $c \in \mathbb{C}$, so daß $(x, 0) - c \cdot 1_{\mathscr{K}_{\mathbb{C}}}$ in $\mathscr{K}_{\mathbb{C}}$ nicht invertierbar ist. Dieses Element ist aber das Bild von $X - c$ unter der Injektion $\mathbb{C}(X) \to \mathscr{K}_{\mathbb{C}}$, so daß dann auch $X - c$ in $\mathbb{C}(X)$ nicht invertierbar wäre, was der gewünschte Widerspruch ist. □

Literatur

[Can1874] Cantor, G.: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal) **77** (1874), 258–262, auch in: Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Berlin: Julius Springer 1932, 115–118

[Cau1843] Cauchy, A.L.: *Rapport sur un Mémoire de M. Laurent, qui a pour titre: Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable x*, C. R. Acad. Sci. Paris **17**, S.938 (30. Oktober 1843), auch in: Cauchy, Œuvres complètes, Paris: Gauthier-Villars, 1. Ser., Band VIII, 115–117

[DR1972] Diederich, K., und Remmert, R.: *Funktionentheorie I*, Heidelberger Taschenbücher 103, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972

[H1884] Hurwitz, A.: Referat der Arbeiten [ML1884] und [Sch1884] im Jahrbuch über Fortschritte der Mathematik, Band XVI, Jahrgang 1884, 350–351

[HC] Hurwitz, A., und Courant, R.: *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Berlin, Göttingen, Heidelberg: mehrere Auflagen bei Springer

[dM1975] de Mendelsohn, P.: *Der Zauberer, Das Leben des deutschen Schriftstellers Thomas Mann*, Erster Teil 1875–1918, Frankfurt am Main: S. Fischer 1975

[ML1884] Mittag-Leffler, G.: *Démonstration nouvelle du théorème de Laurent*, Acta Math. **4** (1884), 80–88

[ML1923] Mittag-Leffler, G.: *Die ersten 40 Jahre des Lebens von Weierstraß*, Acta Math. **39**(1923), 1–57

[P1896] Pringsheim, A.: *Ueber Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen*, Math. Ann. **47** (1896), 121–154

[Re1984] Remmert, R.: *Funktionentheorie I*, Grundwissen Mathematik 5, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1984; 2. Auflage 1989

[Rick1960] Rickart, C.E.: *General Theory of Banach Algebras*, Princeton, New Jersey: Van Nostrand 1960

[Rie1851] Riemann, G.F.B.: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inauguraldissertation Göttingen 1851, auch in: Riemann, Gesammelte mathematische Werke, Leipzig: Teubner 1876, 3–45

[Sch1884] Scheeffer, L.: *Beweis des Laurent'schen Satzes*, Acta Math. **4** (1884), 375–380

[Sie1968] Siegel, C.L.: *Zu den Beweisen des Vorbereitungssatzes von Weierstraß*, Abhandlungen aus der Zahlentheorie und Analysis, Zur Erinnerung an Edmund Landau (1877–1938), Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1968, 299–306; hier in: Siegel, Gesammelte Abhandlungen, Band IV, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1979, 1–8

[U1989] Ullrich, P.: *Weierstraß' Vorlesung zur „Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen"*, Arch. Hist. Exact Sci. **40** (1989), 143–172

[W1841a] Weierstraß, K.: *Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt*, Münster 1841, in: [WW], Band 1, 51–66

[W1841b] Weierstraß, K.: *Zur Theorie der Potenzreihen*, Münster 1841, in: [WW], Band 1, 67–74

[W1876] Weierstraß, K.: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, Mathematische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1876, 11–60; hier in: [WW], Band 2, 77–124

[W1880] Weierstraß, K.: *Zur Functionenlehre*, Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 12. August 1880, hier in: [WW], Band 2, 201–233

[W1986] Weierstraß, K.: *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen*, nach einer Vorlesungsmitschrift von Wilhelm Killing aus dem Jahr 1868, Schriftenr. Math. Inst. Univ. Münster, 2. Ser., Heft **38** (1986)

[W1988a] Weierstraß, K.: *Einleitung in die Theorieen der analytischen Functionen*, Nach den Vorlesungen im S.S. 1874 ausgearbeitet von G. Hettner, fotomechanisch vervielfältigt von der Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen, 1988

[W1988b] Weierstraß, K.: *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*, Vorlesung Berlin 1878, in einer Mitschrift von Adolf Hurwitz, bearbeitet von Peter Ullrich, Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 4, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1988

[WW] Weierstraß, K.: *Mathematische Werke*, 7 Bände, Berlin: Mayer & Müller 1894–1927; Nachdruck Hildesheim: Georg Olms und New York: Johnson Reprint

Peter Ullrich
Westfälische Wilhelms-Universität
Mathematisches Institut
Einsteinstraße 62
D-4400 Münster

(*Eingegangen 10. November 1989*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.

92 (1990) 111–129
AMS subject classification: 01 A 70, 11-03, 11 J 81

Theodor Schneider zum Gedächtnis

L.-Ch. Kappe, Binghamton, N.Y., H. P. Schlickewei, Ulm
und W. Schwarz, Frankfurt[1])

Am 31. Oktober 1988 verstarb gegen Abend Theodor Schneider in seinem Freiburger Heim im 78. Lebensjahr an plötzlichem Herzversagen. Er war ein hochangesehener Vertreter des auf ausgefeilteste Techniken angewiesenen Gebietes der *Transzendenten Zahlen und Diophantischen Approximationen,* der sich schon

---

[1]) Frau Marie Schneider, Herrn Peter Bundschuh (Köln), Herrn Rolf Wallisser (Freiburg) und Herrn Michel Waldschmidt (Paris) danken wir für wertvolle Hinweise, Materialien und Ergänzungen zu dem vorliegenden Artikel. Dem 6. Kapitel der *„Einführung in die Zahlentheorie"* von P. Bundschuh konnten wichtige Bemerkungen entnommen werden. Herrn Waldschmidt sind wir zu Dank verpflichtet für umfassende Literaturnachweise zu den in Schneiders Monographie [19] aufgeworfenen Problemen.
Über den Inhalt dieses Artikels hat der letztgenannte Verfasser bei der ÖMG-Tagung in Wien am 20. 9. 1989 vorgetragen.

in jungen Jahren einen Ehrenplatz in der Gemeinschaft der Mathematiker sicherte: in seiner Dissertation aus dem Jahre 1934 löste Theodor Schneider eines der dreiundzwanzig, von David Hilbert in seinem Vortrag beim Internationalen Kongreß der Mathematiker in Paris 1900 gestellten Probleme, nämlich das *siebte*, und zeigte in [1]: *Ist α eine algebraische, von* 0 *und* 1 *verschiedene Zahl, und ist β eine irrationale algebraische Zahl, so ist α^β eine transzendente Zahl.*

Dieser Satz liefert über die seit langem als transzendent bekannten Beispiele $e = 2.71828\ldots$ und π (Hermite bzw. Lindemann) eine Fülle weiterer Transzendenzresultate. So ist $2^{\sqrt{2}}$ eine transzendente Zahl, ebenso $a^{\sqrt{p}}$ für ganzes $a > 1$ und primes p; ebenso sind alle Werte ${}^{10}\log a$ für jedes ganze $a > 1$ transzendent, sofern diese nicht rational sind. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck das Verhältnis von Basiswinkel zum Winkel an der Spitze algebraisch, aber nicht rational ist, so ist das Verhältnis zwischen Basis und Schenkel stets transzendent. Alle diese Aussagen folgen aus dem obengenannten Ergebnis über die Transzendenz von α^β, das seit langem als *Satz von Gelfond-Schneider* bezeichnet wird, denn etwas früher als Theodor Schneider mit einer in wesentlichen Teilen abweichenden Methode hat auch A. O. Gelfond (1906–1968) das siebte Hilbertsche Problem gelöst (in Dokl. Akad. Nauk SSSR **2** (1934) 1–6 veröffentlicht).[2]) Gelfonds Arbeit ging am 28. März 1934 bei Doklady Akad. Nauk ein, Schneiders Manuskript beim Crelle-Journal am 28. Mai 1934.

Hilbert selbst hielt die Lösung seines siebten Problems für schwieriger als eine Lösung der Riemannschen Vermutung oder des Fermatproblems; er erwartete, daß für die Behandlung dieses siebten Problems ganz neue Methoden entwickelt werden müßten. Schneiders und Gelfonds Lösungen brachten neue Einsicht in die Natur transzendenter Zahlen und öffneten die Möglichkeit einer systematischen Theorie transzendenter Zahlen, die dann Schneider selbst mit seiner Arbeit [8] begann und in seiner richtungweisenden Monographie [19] fortsetzte.

Theodor Schneider wurde am 7. Mai 1911 in Frankfurt geboren. Sein Vater Joseph Schneider betrieb ein Stoffgeschäft am Stadtrande von Frankfurt. Seine Mutter Josephine war eine geborene Breidenbach.

---

[2]) 1929 bzw. 1930 hatten A. O. Gelfond bzw. R. O. Kuzmin die Transzendenz von α^β für algebraisches $\alpha \neq 0, 1$ und *imaginär-quadratisches* bzw. *reell-quadratisches* β gezeigt. Das letztgenannte Ergebnis hatte auch C. L. Siegel in seiner Vorlesung über Zahlentheorie im Februar 1930 bewiesen. Das Kuzminsche Ergebnis bestätigte Eulers Vermutung über die Transzendenz von $a^{\sqrt{b}}$ ($a > 0$, $\neq 1$, rational, b aus $\mathbb{N}$, kein Quadrat). Hilberts 7. Problem stellt somit eine weitgehende Verallgemeinerung von Eulers Fragestellung dar.
Der Gelfondsche Ansatz benutzte die Entwicklung von $\exp(z)$ in eine Newtonsche Interpolationsreihe mit den Interpolationsstellen $(m + \beta n) \cdot \log \alpha$. Die Ausdehnung der Ergebnisse auf algebraische β vom Grade größer als zwei erforderte jedoch völlig neue Ideen.
K. Boehle, ebenfalls Doktorand bei C. L. Siegel, zeigte 1932, daß für algebraisches $\alpha \neq 0, 1$ und für s linear unabhängige Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_s$ eines festen algebraischen Zahlkörpers s-ten Grades ($s \geqslant 2$) wenigstens eine der Zahlen α^{β_σ}, $\sigma = 1, \ldots, s$, transzendent ist.

Nach Besuch des Helmholtz-Gymnasiums in Frankfurt begann Theodor Schneider 1929 mit dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie in Frankfurt. Diese Entscheidung war ihm nicht leichtgefallen, denn er schwankte zwischen einer Ausbildung zum Konzertpianisten und dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften.[3])

Theodor Schneider hörte u. a. Vorlesungen bei Max Dehn, Paul Epstein, Ernst Hellinger, Otto Szász und Carl Ludwig Siegel, dem er sich schon bald anschloß und lebenslänglich verbunden blieb. Die Aufnahme in dessen Seminar war von einer schwierigen Aufnahmeprüfung abhängig.

Siegel nannte eine Reihe von Themen, die für eine Dissertation in Frage kamen. Mit jugendlicher Unbefangenheit stürzte sich Theodor Schneider auf das wohl schwierigste der angebotenen Probleme und erbrachte nach wenigen Monaten die Lösung.[4]) Die schriftliche Promotionsleistung wurde mit der bestmöglichen Note „summa cum laude“ bewertet. Die mündliche Prüfung erfolgte am 12. November 1934 bei Siegel, Hellinger und Meißner in Reiner Mathematik, Angewandter Mathematik und Physik.[5])

Trotz seiner herausragenden Leistung bei der Promotion und trotz des Ansehens seines Lehrers Siegel hatte Theodor Schneider Schwierigkeiten in Frankfurt; denn seit Herbst 1933 kam es nicht nur auf mathematische Leistungen, sondern auch auf

---

[3]) Im Alter von fünf Jahren hatte er nach dem Vorbilde seiner Mutter das Klavierspiel begonnen und besuchte schließlich die Meisterklasse des Hochschen Konservatoriums.

[4]) Theodor Schneider erzählte, daß Siegel bei Vorlage des Manuskriptes die Lösung des Hilbert-Problems als lückenhaft bezeichnete, weil das Nicht-Verschwinden einer [Vandermondeschen] Determinante nicht ausgeführt worden war; Schneider glaubte aber, daß Siegel sofort gesehen habe, wie dies zu bewerkstelligen sei. Einen Tag später hatte Schneider die Lücke geschlossen.
Am Rande sei erwähnt, daß C. L. Siegel wegen der Kürze der Schneiderschen Lösung des Hilbertschen Problems [1] vorschlug, die Dissertation durch eine weitere Anwendung der Methode zu verlängern, um Schwierigkeiten mit der Fakultät zu vermeiden; diese „Ergänzung“ ist als [2] veröffentlicht und beinhaltet Transzendenzuntersuchungen elliptischer Funktionen.
Schneider selbst berichtete, daß Siegel zu ihm sagte, er sei der elfte, der nach einem Thema für eine Dissertation gefragt habe, aber der fünfte, der eine solche vollendet habe. Vor Theodor Schneider promovierten in Frankfurt bei C. L. Siegel Wilhelm Maier (1927), Fritz Götzky (1928), Karl Boehle (1933) und Berthold Stessmann (1934), später Walter Wagner (1937) und Helene Braun (1937).

[5]) Aus der Promotionsakte von Theodor Schneider (beim Promotionsbüro der Naturwissenschaftlichen Fachbereiche in Frankfurt) ist im Anhang das Siegelsche Gutachten abgedruckt. Dem Vorsitzenden des Promotionsausschusses, Herrn J. Weidmann, sind wir sehr zu Dank verpflichtet.
Die mündliche Prüfung befaßte sich gemäß dem Prüfungsprotokoll vom 12. November 1934 in Reiner Mathematik (4–5 Uhr) mit: Lineare Algebra, Hauptachsentransformation, Galoissche Theorie, Gleichung 5^{ten} Grades, Kreisteilung, symmetrische Functionen, lineare diophantische Gleichung, Zetafunction, Leistungen von Dirichlet, Begründung der Functionentheorie, Elliptische Functionen, Abelsche Integrale, Gammafunction, Besselsche Functionen.
In Angewandter Mathematik (5–5 $^1/_2$ Uhr) wurden geprüft: Zweitafelmethode, Affine Verwandtschaft zwischen Rissen, Zentralprojektion, Kollineationen, Kräftepläne, reziproke Verwandtschaft, Approximative Lösung algebraischer Gleichungen [Horner, Graeffe], Lösung durch sukzessive Approximation, Approximative Lösung von Differentialgleichungen.
In Physik (5 $^1/_2$–6 Uhr) ging es um: Reversionspendel, Physisches Pendel, Elektrisches Feld, Thomsonsches Elektrometer, Elektromagnetische Welle, Zeeman & Stark-Effekt, Ansatz einer ebenen Welle.
Die [im Verhältnis zu den Gehältern sehr hohe] Prüfungsgebühr von 200,– Mark durfte in zwei Raten bezahlt werden.

Mitgliedschaft in einer geeigneten „NS-Organisation" und NS-ideologisch zulässige Gesinnung an. Wollte Theodor Schneider weiterstudieren oder gar eine Stelle an der Universität erhalten, so war für ihn die Zugehörigkeit zu einer „NS-Organisation" zwingend. Die Alternative war die Aufgabe seines Studiums. Nach dem Eintritt in die SA, die Schneider aus der Reihe der in Frage kommenden Organisationen als das kleinste Übel ansah, erhielt er (ab Ostern 1935) die einzige (außerplanmäßige) Assistentenstelle des damaligen Frankfurter Mathematischen Seminars; er hatte diese bis 1939 inne.[6])

Theodor Schneider wurde aber *nicht* gestattet, zum Internationalen Mathematiker-Kongreß 1936 nach Oslo zu fahren, um über seine Dissertation zu berichten. Das „Dritte Reich" hatte mit Devisenschwierigkeiten zu kämpfen, und Theodor Schneider hatte sich zwar in der Mathematik, aber nicht in der nationalsozialistischen Ideologie hervorgetan und mußte damit zumindest als „unzuverlässig" gelten.

Die Annahme der fertig vorliegenden Habilitationsschrift wurde Theodor Schneider im Jahre 1938 vom zuständigen Dekan der naturwissenschaftlichen Fakultät in Frankfurt verweigert, ohne jegliche inhaltliche Begründung.[7])

In dieser für einen angehenden Hochschullehrer deprimierenden Situation blieb Theodor Schneider nichts anderes übrig, als seine Vaterstadt Frankfurt zu verlassen und 1939 eine planmäßige Assistentenstelle in Göttingen anzutreten. Dorthin war bereits 1938 Carl Ludwig Siegel, seit 1922 als Nachfolger von A. Schoenflies in Frankfurt, seit Jahren aber mit den Frankfurter Verhältnissen nicht mehr einverstanden, gewechselt.[8]) In Göttingen wurde Theodor Schneider im Jahre 1939 habilitiert; das Habilitationskolloquium fand am 9. November 1939 statt; wie dort, gab auch Schneider in der öffentlichen Lehrprobe mit dem

---

[6]) Kurz nach Antritt seiner Stelle ging Theodor Schneider zu dem geschäftsführenden Direktor, dem hochgeschätzten Ernst Hellinger, 1935 als Teilnehmer des Ersten Weltkrieges trotz seiner jüdischen Abstammung noch im Amt, um diesem zu bekennen, daß er Mitglied in der SA sei, aber nie im Institut das Abzeichen dieser Organisation getragen habe. Hellinger antwortete: „Das wissen wir; wenn Sie nicht Mitglied wären, hätten wir Sie nicht einstellen dürfen".
Ernst Hellinger (1883–1950) wurde am 15. 10. 35 vom Dienst beurlaubt und am 17. 12. 35 zwangsweise in den Ruhestand versetzt. Am 10. 11. 38 verhaftet, konnte er schließlich, nach 6-wöchiger Gefangenschaft im Konzentrationslager Dachau, in die USA emigrieren (Februar 1939).

[7]) Vermutlich war ein Grund hierfür, daß Schneider durch häufiges unentschuldigtes Fernbleiben von Veranstaltungen der SA niemals über den untersten Rang dieser NS-Organisation hinauskam. Zudem hatte er häufig sein Zimmer gewechselt, ohne seine neue Anschrift mitzuteilen, und es brauchte immer eine ganze Weile, bis die SA ihn wieder ausfindig machen konnte.

[8]) Siegel, von pazifistischer Grundhaltung und gegen den Nationalsozialismus eingestellt (woraus er kein Hehl machte; Th. Schneider glaubte, daß es Siegel damals darauf anlegte, von den braunen Machthabern aus dem Dienst gejagt zu werden – was diese dann doch nicht wagten), hatte Schneider über seine Absicht (die er dann im Frühjahr 1940 über Dänemark und Norwegen in abenteuerlicher Weise, u. a. mit Hilfe von Viggo Brun, verwirklichte), bei Kriegsausbruch aus Deutschland zu emigrieren, nie im Unklaren gelassen. Theodor Schneider wagte diesen Sprung ins Ungewisse, der für ihn, den jungen Mann, viel riskanter gewesen wäre als für den auf der Höhe seiner Schaffenskraft stehenden Siegel, nicht; für ihn als Wehrpflichtigen wäre eine illegale Flucht mit Desertation gleichbedeutend gewesen und bei Mißlingen vermutlich mit einem Todesurteil geahndet worden.

Thema „*Über konvexe Körper*“ am 14. 12. 1939 „*ein Zeugnis der völligen Beherrschung des schwierigen Fragenkreises und auch der selbständigen Art der Betrachtung. Der Vortrag war klar disponiert* ...“.[9]) Er erhielt 1940 eine Dozentenstelle. Im Antrag auf „Verleihung der Dozentur für das Fach der Reinen und Angewandten Mathematik von Herrn Dr. phil. nat. habil. Theodor Schneider“, den der Rektor der Georg August-Universität Göttingen mit Datum vom 5. Januar 1940 an den „Herrn Reichsminister für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung, Berlin W 8“ weiterleitete, heißt es: „*Der gute Eindruck, den Schneider bereits bei der wissenschaftlichen Aussprache hinterliess, wurde durch die Probevorlesung in wissenschaftlicher und pädagogischer Hinsicht noch verstärkt. ... Indem ich mich dem Antrag des Herrn Dekans* [der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät] *anschliesse, bitte ich um Verleihung einer Dozentur (ohne Diäten) an Herrn Dr. phil. nat. habil. Theodor Schneider.*[9])
Den Kriegsdienst (1940–1945) leistete Theodor Schneider, wie viele andere Mathematiker, im meteorologischen Dienst. Wie anderen Mathematikern hat ihm die Kriegszeit im mathematisch produktivsten Alter wichtige Jahre geraubt, ihn aus einer fruchtbaren Periode wissenschaftlicher Forschung gerissen. Fünf Jahre, die äußerst ertragreich hätten sein können, mußten ungenutzt bleiben.

Das Ende des Zweiten Weltkrieges erlebte Theodor Schneider im Lorenzenhof in Oberwolfach; der damalige Rektor der Freiburger Universität, Wilhelm Süß, hatte sich bemüht, möglichst viele Mathematiker nach Oberwolfach zu bringen, um sie unter dem Vorwand einer [angeblich] kriegswichtigen Tätigkeit dem Kriegsdienst an der Front zu entziehen und für die Nachkriegszeit zu erhalten.[10]) So hatte es auch Theodor Schneider den Bemühungen von Süß und Kaluza zu verdanken, daß er nach Auflösung seiner Dienststelle, bereits in einem Ausbildungslager für Fallschirmspringer im Berliner Raum, zuerst in Göttingen die Vorlesung der an Diphtherie erkrankten Hel Braun vertreten konnte und sodann nach Oberwolfach gehen konnte, wo er im März 1945 ankam. Die Zeitumstände und die Sorge um das tägliche Brot waren freilich wenig dafür geeignet, eine ruhige Atmosphäre für mathematische Forschung zu bieten.

Als die Universität Göttingen wieder ihre Pforten öffnete, machte sich Theodor Schneider auf einem aus Altteilen selbst zusammengebastelten Fahrrad dorthin auf den Weg. Von Herbst 1945 bis 1951 war Theodor Schneider planmäßiger Assistent und Dozent in Göttingen, unterbrochen 1947/48 durch eine Lehrstuhlvertretung in Münster. Den Titel „außerplanmäßiger Professor“ erhielt er 1948. Zum Oberassistenten wurde Schneider 1951 ernannt.

Im Jahre 1950 heiratete Theodor Schneider seine Frau Marie, geborene Urbach. Seine eher ruhige Art wurde von ihrem lebhaften Wesen gut ergänzt. Frau Schneiders Gabe, sich in die Welt der Mathematiker bestens einzufühlen, und ihre

---

[9]) Aus der Personalakte Schneider beim Universitätsarchiv der Georg-August-Universität Göttingen. Wir danken Herrn Dr. U. Hunger für seine Hilfe.

[10]) Auch Th. Kaluza hatte sich beim Amt Osenberg um eine Freistellung von Theodor Schneider bemüht und einen sogenannten „Marschbefehl“ nach Göttingen erreicht. – Der Gefahr, in Frankfurt zum Volkssturm eingezogen zu werden, entging Schneider nur knapp.

Hilfsbereitschaft wurden insbesondere von den jüngeren Mathematikern im Umkreis ihres Mannes sehr geschätzt.[11])

Der einzige Sohn Bernhard ergriff später die ärztliche Laufbahn. Die Familie bedeutete Theodor Schneider zeitlebens sehr viel.

Im Jahre 1950 wurde Theodor Schneider von Carl Ludwig Siegel eingeladen, nach Princeton zu kommen. Dieser Einladung konnte er nicht folgen, da ihm das beantragte amerikanische Visum nicht erteilt wurde, möglicherweise wegen seiner früheren Zugehörigkeit zur SA.

Theodor Schneider galt spätestens ab 1950 als erfolgreichster und begabtester Schüler C. L. Siegels. Mehrfach in jenen Jahren auf Berufungslisten geführt, folgte Theodor Schneider 1953 einem Ruf auf ein Ordinariat nach Erlangen, als Nachfolger von Otto Haupt. Als Dekan der Naturwissenschaftlichen Fakultät wirkte er in Erlangen 1955/56 und 1956/57, später in Freiburg 1961/62. Man schätzte ihn als guten Menschenkenner, und insbesondere bei Personalentscheidungen hatte sein Urteil Gewicht.

Einen Ruf nach Berlin lehnte Theodor Schneider ab, jedoch folgte er im Jahre 1959 dem Angebot, als Nachfolger des am 21. 5. 1958 verstorbenen Wilhelm Süß nach Freiburg zu kommen, zumal dieser Freiburger Lehrstuhl [zunächst] mit der Leitung des Mathematischen Forschungsinstitutes Oberwolfach verbunden war; eingedenk dessen, was Wilhelm Süß für Theodor Schneider getan hatte, war es für diesen Ehre und Verpflichtung, das Süßsche Erbe fortzuführen.

Theodor Schneider hatte die arbeitsaufwendige Leitung des Oberwolfacher Institutes bis 1963 inne, danach stand er Martin Barner (bis zu seiner Emeritierung 1976) als stellvertretender Direktor des Forschungsinstitutes zur Seite. Er war Mitbegründer der Gesellschaft für Mathematische Forschung, die seit langem das Institut trägt, und er konnte den finanziell zunächst völlig ungesicherten Bestand des Oberwolfacher Forschungsinstitutes durch alle Widrigkeiten hindurch erhalten (z. B. ist ihm unter Vermittlung des [damaligen] Präsidenten der Max-Planck-Gesellschaft, Adolf Butenandt, die Bewilligung einer Überbrückungshilfe von insgesamt 285000,– DM durch die Fritz-Thyssen-Stiftung für die Jahre 1961–1964 zu verdanken) und dessen Wirkungsmöglichkeiten wesentlich ausbauen.

Im Jahre 1963 übergab Theodor Schneider dem jetzigen Direktor des Institutes, Martin Barner, die Leitung, da er der Meinung war, daß die anstehenden Neubauten am Lorenzenhof, die mit steigendem Lebensstandard unvermeidlich wurden, seine Kräfte überfordern würden (der Antrag auf Bewilligung von Mitteln zur Errichtung eines Gästehauses, datiert vom 4. März 1963, ging an die Stiftung Volkswagenwerk). Noch lange über seine im Jahre 1976 erfolgte Emeritierung stellte Theodor Schneider als Mitglied des Wissenschaftlichen Beirates des Institutes diesem seine reiche Erfahrung zur Verfügung.

---

[11]) Z. B. betont Orhan Ş. Içen die großzügige Gastfreundschaft von Theodor und Marie Schneider. O. Ş. Içen war schon in Göttingen als Doktorand zu Theodor Schneider gestoßen und kam danach noch zweimal, 1962 und 1969/70 nach Freiburg i. Br.

Aus der Ansprache des Ministers für Wissenschaft und Kunst, Helmut Engler, beim Anniversarium 1984 in Oberwolfach, sei zitiert: „*Theodor Schneider ... hat in der Übergangszeit nach Wilhelm Süß das Forschungsinstitut übernommen und erfolgreich weitergeführt. Er hat dies getan ... in einer Zeit, als noch niemand so recht wußte, wie der Weg weitergehen wird und in welcher glücklichen Weise dann die Rechtsform dieser Gesellschaft für mathematische Forschung e. V. und ihre hochangesehenen Mitglieder den internationalen Rang dieses Instituts gewährleisten werden ....*"

Martin Barner sagte bei der gleichen Gelegenheit: „... *auf Ihnen* [Th. Schneider] *lag zunächst die ganze Last. ... Ich hatte es dann anschließend schon leichter, insbesondere, weil ich mit Ihnen, lieber Herr Schneider, alles besprechen konnte.*"

Viele Jahre hindurch organisierte Schneider im regelmäßigen Turnus Tagungen über Zahlentheorie, zunächst sogar noch mit Einschluß des Gebietes der Modulformen. Ab 1974, bedingt durch die anwachsende Anzahl aktiver Vertreter der Zahlentheorie, wurde das Gebiet auf „Diophantische Approximationen" eingeschränkt. Als Tagungsleiter konnte er viele junge Mathematiker aus dem In- und Ausland nachhaltig fördern.[12])

Mit vielen Zahlentheoretikern aus aller Welt pflegte Theodor Schneider wissenschaftliche Kontakte. Ein besonders prominenter Gast in Freiburg war Klaus Friedrich Roth, der beim ICM 1958 in Edinburgh die Fields-Medaille erhalten hatte.[13]) Da Theodor Schneider selbst im Umkreis des Thue-Siegel-Rothschen Satzes gearbeitet hatte (man sehe [5], [7] und [13]), lag ihm an diesem Gaste sehr viel.

Theodor Schneider war (korrespondierendes) Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Göttingen und der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien. Eine Reihe seiner Schüler haben Professuren in der Bundesrepublik und auch im Ausland inne. 1984 wurde Theodor Schneider im Rahmen eines Fest-Kolloquium *in Freiburg* das Goldene Doktordiplom des *Frankfurter* Mathematischen Fachbereichs überreicht.

Theodor Schneider war kein unnahbar wirkender akademischer Lehrer; er zog durch seine freundliche Art Studierende und Schüler an und war stets bereit, ihnen mit Rat und Tat zu helfen. Besonders geduldig war er gegenüber diesen im Erklären schwieriger Sachverhalte. Seine etwas unkonventionelle Tafeltechnik war bei zaghaften Erstsemestern weniger beliebt, zumal er auch selten eine Vorlesung zur

---

[12]) Die Leitung dieser Tagung über Diophantische Approximationen gab Theodor Schneider 1981 an P. Bundschuh und R. Tijdeman ab. Doch hat er auch danach mit wachem Interesse die Entwicklungen auf „seinem" Gebiete verfolgt.

[13]) K. F. Roth berichtet, daß Theodor Schneider Roths vorgesehene Vorlesungen alle auf den frühen Vormittag legte, damit dieser der Hitze des Tages entginge, aber schnell diese Vorträge auf den Nachmittag umlegte, als er erfuhr, daß K. F. Roth gerne nachts arbeitete.
– Auch der Namensvetter *Hans* Roth (USA) war eine Zeitlang in Freiburg, um bei Theodor Schneider zu arbeiten.

vorgesehenen Zeit wirklich beendete.[14]) Um so mehr waren seine Vorlesungen für Fortgeschrittene interessant und anregend; gerade weil sie nicht überperfektioniert waren, konnte der Studierende noch die hinter den Ergebnissen und Beweisen verborgenen Schwierigkeiten und Probleme erkennen und wurde zu eigener Beschäftigung mit dem behandelten Gebiet geradezu gedrängt. Oft gewann man den Eindruck, daß Theodor Schneiders Erzähltalent, das er bei vielfältigen Gelegenheiten an den Tag legte, half, verschachtelte, komplizierte Beweise besonders spannend zu machen und die Aufmerksamkeit seiner Hörer zu erhalten.

In Seminaren wurde das Gebiet der Diophantischen Approximationen und transzendenten Zahlen in weitestem Umfange behandelt; Bezüge zur klassischen Funktionentheorie wurden stets gepflegt, insbesondere solche, die globale Eigenschaften holomorpher Funktionen mit arithmetischen Eigenschaften von Funktionswerten in Zusammenhang brachten. Den neueren Entwicklungen, die das Gebiet der Diophantischen Approximationen und transzendenten Zahlen mit der algebraischen Geometrie in Verbindung brachten, und die sich im nachhinein als ergebnisträchtig und wichtig erwiesen, stand Theodor Schneider von seiner Ausbildung her eher distanziert gegenüber.

Seinen Schülern ließ er großen Freiraum in ihrer wissenschaftlichen Arbeit und legte sie nicht auf eine bestimmte Richtung fest. Sie haben Theodor Schneider als anregenden, warmherzigen, verständnisvollen Hochschullehrer kennengelernt, der bei einer gewissen Zurückhaltung stets ein offenes Ohr für ihre Anliegen und Wünsche hatte und der sie nach Kräften förderte. Ein stets angenehmes Arbeitsklima zwischen Ordinarius und Assistenten ließ die ab 1968 aufkommenden Forderungen nach Abschaffung der sogenannten Ordinarien-Universität – zumindest in seiner Umgebung – als unbegründet erscheinen.

Der Abschied vom aktiven Universitätsleben wurde Theodor Schneider nicht allzu schwer, denn die Jahre zwischen seinem sechzigsten und fünfundsechzigsten Geburtstag fielen in eine für die Universitäten recht unruhige Zeit, in der weniger der wissenschaftliche Sachverstand, mehr der politisierende Gremienvertreter gefragt war. Die von Studentenvertretern und auch andernorts damals vorgebrachten Forderungen (etwa die nach der „Drittelparität“) waren Schneiders Ansichten von Aufgabe und Ziel der Universität diametral entgegengesetzt. Eine dadurch einsetzende Resignation und eine angegriffene Gesundheit trugen dazu bei, daß er zum erstmöglichen Termin das Gesuch um seine Emeritierung einreichte. Diese erfolgte im Jahre 1976.

In seinen letzten Lebensjahren lebte Theodor Schneider zurückgezogen in seinem schönen Haus in Freiburg-Zähringen und genoß mit seiner Frau das Freisein von Verpflichtungen, seinen Garten, seinen Sportwagen und seine Ferienreisen. Der Tod seines Lehrers Carl Ludwig Siegel, der Schneider nachhältig geprägt hat, mit dem er viele gemeinsame Wanderungen im Schwarzwald und in den Schweizer Alpen unternommen hatte, am 4. April 1981 brachte für ihn einen schmerzlichen

[14]) Ein – allerdings nicht ganz typisches – Beispiel: Die letzte Vorlesungsstunde seiner Vorlesung über Transzendente Zahlen, die mit der Monographie [19] eng zusammenhing, begann am frühen Nachmittag und wurde erst am späten Abend beendet.

Einschnitt. Er regelte den Siegelschen Nachlaß, und letztlich ist es – unter ortskundiger und tatkräftiger Mithilfe von W. Maak – den Bemühungen Theodor Schneiders zu verdanken, daß Siegel auf dem ihm zukommenden Ehrenplatz auf dem Göttinger Alten Stadtfriedhof beigesetzt werden konnte. Er erwarb eine Reihe schöner, von Carl Ludwig Siegel gemalter Bilder aus dessen Nachlaß. Die vielfältigen Anekdoten, die Theodor Schneider über Siegel zu erzählen wußte, hielten dessen Persönlichkeit für viele andere lebendig.

Auf der Bayreuther DMV-Tagung 1982 würdigte Theodor Schneider das zahlentheoretische Werk C. L. Siegels. Der Vortrag ist im DMV-Jahresbericht abgedruckt ([27]). P. Bundschuh schrieb u. a. in seiner Besprechung dieser Arbeit in Mathematical Reviews. "*The author, himself a pupil and one of a few intimate friends of Siegel over half a century, starts by painting a concise, but highly impressive picture of Siegel's personality as a scientist and as a human being. Then he reminds the reader of some of Siegel's most important results in number theory. ...*"

Theodor Schneider, der von Siegel ein Gespür für hohen wissenschaftlichen Standard übernommen hatte, hat ebenfalls „*most important results in number theory*" erbracht.

D. Hilbert hatte in seinem Vortrag erwähnt, daß die Lösung seines siebten Problems zu völlig neuen Methoden und zu neuer Einsicht in die Natur spezieller transzendenter Zahlen führen müsse, und er behielt damit recht. Nicht nur die Erledigung eines Problems, sondern mehr noch die zur Lösung neu entwickelte Methode ist von Interesse. Die wirklichen Fortschritte werden nicht beim Ausbau oder der Vereinfachung einer existierenden Methode erzielt, sondern beim Ringen um die Lösung neuer, offener Probleme. Theodor Schneider hatte 1934 eine neue Methode gefunden, und so blieben seine Interessen, wenn man von einem kurzen Abstecher in die Geometrie der Zahlen ([9]–[11], [14]) absieht, beflügelt von dem erzielten Erfolg, zeitlebens dem Gebiete der Diophantischen Approximationen und Transzendenten Zahlen verhaftet.

Die Arbeiten zur Geometrie der Zahlen gaben Verschärfungen bekannter Sätze oder neue, vereinfachte Beweise für solche. Z. B. wird in [9] ein Hlawkascher Alternativsatz neu bewiesen und verschärft. Als Anwendung ergab sich in [10] ein bedingtes Ergebnis zum Minkowskischen Linearformensatz: *Seien Linearformen* $L_\nu(x)$, $\nu = 1, \dots, n$, *der Determinante* 1 *und ein Punkt* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *gegeben; wenn es positive Zahlen* $t_1, \dots, t_n$ *mit Produkt* 1 *gibt derart, daß die durch die Bedingungen*

$$\max_{\nu=1,\dots,n} |L_\nu(x)| \cdot t_\nu^{-1} \leqslant 1, \qquad \Sigma_1^n \, |L_\nu(x)| \cdot t_\nu^{-1} \leqslant {}^1\!/_2 \cdot n$$

definierte Menge keinen vom Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkt enthält, so gibt es einen Gitterpunkt g, für den

$$|\Pi_1^n \, L_\nu(g - x_0)| \leqslant 2^{-n}$$

ist.

Ohne Zweifel war die Dissertation [1], [2] Theodor Schneiders herausragendste Leistung, die kaum wiederholbar war. Gegeben sind algebraische α, β, wobei $\alpha \neq 0, 1$ und β irrational ist. Zu zeigen ist die Transzendenz von α^β. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch. Die *Annahme,* daß α^β algebraisch sei, ermöglicht es, in einem festen algebraischen Zahlkörper $\mathscr{K}$ zu arbeiten, der α, β und α^β enthält.

Eine neue, im Beweis verwendete Idee besteht darin, mit Hilfe des Dirichletschen Schubfachschlusses aus den Funktionen $z \mapsto z$ und $z \mapsto \alpha^z$ eine geeignete, nicht identisch verschwindende Hilfsfunktion F als Polynom in z und α^z aufzubauen, mit Koeffizienten in $\mathscr{K}$, die einschließlich sämtlicher Konjugierten „nicht zu groß" sind, so daß F hinreichend viele (einfache) Nullstellen (an den Stellen $u + \beta \cdot v$, $u, v = 0, 1, \ldots, N-1$) besitzt. Ein Zusammenhang zwischen Wachstumsordnung und Nullstellenanzahl ganzer Funktionen führt zu einer Stelle $u_0 + \beta \cdot v_0$, an der F nicht verschwindet. Die algebraische Zahl $F(u_0 + \beta \cdot v_0) \neq 0$ kann nach unten abgeschätzt werden, denn die Norm einer ganz-algebraischen Zahl ist mindestens gleich Eins. Eine obere Abschätzung, die sich des Cauchyschen Integralsatzes – integriert über einen Kreis vom Radius N^2 um den Nullpunkt – bedient, führt bei geeigneter Parameterwahl zu einem Widerspruch.

Gelfonds und Schneiders Lösung des siebten Hilbertschen Problems unterscheiden sich einerseits in der Auswahl der zu untersuchenden Funktionen (e^z, $e^{\beta z}$ bei Gelfond, z, α^z bei Schneider), andererseits auch in den herangezogenen Eigenschaften der verwendeten Funktionen (A. O. Gelfond benützte sowohl Differentialgleichung wie auch Additionstheorem der Exponentialfunktion, Th. Schneider nur das Additionstheorem).

Die für die Lösung des siebten Hilbertschen Problems entwickelten Methoden ließen sich auch auf elliptische Funktionen [2], die ebenfalls wie die Exponentialfunktion ein Aditionstheorem besitzen, und auf elliptische Integrale anwenden ([3]). In [2] wird folgendes gezeigt. *Sind* $1, \beta$ *und* $\tau = \omega_2/\omega_1$ *über* $\mathbb{Q}$ *linear unabhängig und sind* ω_1, ω_2 *die beiden primitiven Perioden der Weierstraßschen elliptischen Funktion* $\wp(u/g_2, g_3)$, *so ist mindestens eine der fünf Zahlen*

$$g_2, g_3, \tau, \beta, \wp(\beta \cdot \omega_1)$$

transzendent. Nach Teilergebnissen von Pólya, Siegel, Popken und Mahler bringt die Arbeit [3] grundlegende und abschließende Ergebnisse über elliptische Integrale. Folgerungen hieraus sind etwa die Transzendenz des Umfangs einer Ellipse mit algebraischen Achsenlängen und die Tatsache, daß der Wert $j(\tau)$ der Modulfunktion j für algebraisches τ nur dann algebraisch ist, wenn τ imaginärquadratisch ist.

Die Habilitationsschrift [6], die auf [3] aufbaut, zeigt u. a., daß die Perioden eines Abelschen Integrals erster oder zweiter Gattung, dessen Integrand als algebraische Funktion von x nur algebraische Zahlkoeffizienten besitzt, nicht alle algebraisch sind. Darin sind Aussagen über die Transzendenz von Werten der Betafunktion enthalten; z. B. ist der Quotient $\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ stets transzendent, wenn a und b rationale Zahlen in $0 < a, b < 1$ sind. Damit werden *„die bekannten Transzendenz-*

untersuchungen von Siegel und Gelfond in erfreulicher Weise" abgerundet.[15]) Bei den Beweisen werden tiefliegende analytische Eigenschaften von $2p$-fach periodischen meromorphen Funktionen in p Variablen herangezogen.

Die Arbeiten [5], [7] und [13] zeugen von Schneiders Bemühungen, einem Beweis des späteren Thue-Siegel-[Dyson]-Rothschen Satzes näher zu kommen. Der entscheidende Erfolg gelang jedoch erst 1955 Klaus F. Roth [Mathematika **2** (1955) 1–20]. Dieser zeigte, daß für gegebenes algebraisches α vom Grade $s > 2$ für jedes $\mu > 2$ die Ungleichung

$$|\alpha - a/q| < q^{-\mu}$$

höchstens endlich viele Lösungen in ganzrationalen Zahlen a, q besitzt.[16])

J. F. Dyson hatte 1947 jeden Exponenten $\mu > \sqrt{2s}$ als „zulässig" dafür nachgewiesen, daß die obengenannte Ungleichung höchstens endliche viele Lösungen besitzt. Theodor Schneider gab hierfür einen neuen, vereinfachten Beweis.[17])

In [7] konnte Theodor Schneider für einen Exponenten $\mu > 2$ den Fall unendlich vieler Lösungen a_ν/q_ν nicht ausschließen, jedoch konnte er in diesem Falle zeigen, daß die auftretenden Nenner q_ν sehr stark wachsen müßten (genauer zeigte er $\limsup_{\nu\to\infty} q_{\nu+1}/q_\nu = \infty$). In [13] wird dies Ergebnis nochmals verallgemeinert. Bei der Arbeit [7] ist besonders hervorzuheben, daß Schneider hier erstmalig ein Approximationspolynom in vielen Variablen benützte; Thue, Siegel und Dyson hatten Polynome in zwei Variablen verwendet, der Beweis des Rothschen Satzes benötigte ein Polynom in vielen Variablen.

Das bekannte Prinzip, daß hinreichend scharfe Ergebnisse über diophantische Approximationen Konsequenzen für die Lösbarkeit diophantischer Gleichungen haben, wurde in [21] angewandt, um Ergebnisse von K. Mahler aus dem Jahre 1933 und von A. O. Gelfond aus dem Jahre 1940 deutlich zu verbessern. Genauer wird durch Anwendung der Ridoutschen p-adischen Erweiterung des Thue-Siegel-Rothschen Satzes ein Ergebnis hergeleitet, das folgende speziellere Aussage enthält. *Sind eine endliche Menge $\mathcal{S}$ von Primzahlen und ganze Zahlen a_1, a_2, a_3 gegeben, so besitzt die diophantische Gleichung*

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = 0$$

---

15) Aus W. Maiers Zentralblattreferat

16) Die von Schneider später in [21] angewandte p-adische Verallgemeinerung des Rothschen Satzes geht auf D. Ridout zurück. Ergebnisse über die (schlechte) Approximierbarkeit algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen von beschränktem Grade gaben E. Wirsing (1971) und Wolfgang M. Schmidt (1971); Schmidt bewies auch Ergebnisse über simultane Approximationen.

17) In Math. Reviews 10, p. 592, schreibt Dyson. "*The complicated lemma, on which the reviewer's proof was based, turns out to be entirely unnecessary. Since the exponent $(2s)^{1/2}$ is presumably far from the best possible, it is of some interest to note that each of the two proofs makes use of some information which the other ignores. The question arises, whether a better result might be obtained by combining the two methods.*"

höchstens endlich viele ganze, teilerfremde Lösungen x_1, x_2, x_3, *die nur durch Primzahlen in* $\mathcal{S}$ *teilbar sind.* In [21] sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 durch ganze Variable y_1, y_2, y_3 ersetzt, und die Aussage bleibt richtig, wenn die y_i im Vergleich zu den x_i nicht zu groß sind.

Die hier behandelte Gleichung gehört in die Klasse der sogenannten S-Einheiten-Gleichungen. Ihre Bedeutung zeigte sich bereits beim Siegelschen Beweis für die Tatsache, daß (algebraische) Kurven über $\mathbb{Q}$ vom Geschlecht größer oder gleich 1 höchstens endlich viele ganze Punkte besitzen. In neuerer Zeit fanden S-Einheiten-Gleichungen in n Variablen weitere wichtige Anwendungen.

Die Arbeiten [12] und [18] haben eine teilweise didaktische Zielsetzung und geben einfache und elegante Beweise für die Irrationalität bzw. Transzendenz von π, wobei nicht „Mausefallenbeweise", sondern verallgemeinerungsfähige, auf allgemeineren Ideen beruhende Beweise angestrebt werden.

In [23] und [24] verwendet Theodor Schneider u. a. Ideen aus [16], um folgendes Ergebnis zu erhalten. *Sei* $f(z)$ *algebraisch über* $\mathbb{Q}(z)$ *vom Grade* q, *und sei* 0 *ein regulärer Punkt. Sind die Werte* $f(0)$ *und* $f(r/s)$, *wobei* $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$ *ist, rational, so kann* r/s *nicht zu nahe an Null liegen; genauer gilt: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $s_0(\varepsilon)$ *derart, daß für* $s \geqslant s_0(\varepsilon)$

$$(*) \qquad |r/s| > s^{((1/q)+\varepsilon)}$$

gilt. Das Beispiel $f(z) = \sqrt[q]{1-z}$ *und* $r/s = 1 - a^q(a+1)^q$ *zeigt, daß der Exponent in* (*) *scharf ist.*

Ein besonders schönes Ergebnis wurde in [8] bewiesen; Theodor Schneider gab einen sehr allgemeinen Satz, der gewisse arithmetische Eigenschaften von gegebenen algebraisch unabhängigen ganzen Funktionen und ihren Ableitungen an gegebenen Stellen in Beziehung zu ihren Wachstumseigenschaften setzt; ein großer Teil der bekannten Transzendenzsätze erweisen sich als Spezialfälle dieses Schneiderschen Satzes. Dieses Ergebnis wird auch ausführlich in Theodor Schneiders Monographie [19] behandelt (Satz 12, Satz 13, p. 47–57), und dort werden auch eine Reihe von Anwendungen dieses allgemeinen Transzendenzsatzes auf speziellere Einzelfragen, wie z. B. Transzendenzergebnisse für elliptische Funktionen, ausgeführt. Die genauen recht umfangreichen Voraussetzungen des Hauptsatzes aus [8] brauchen deshalb hier nicht aufgeführt zu werden.

Dieses Ergebnis zeigt (ebenso wie die schon erwähnte Monographie), daß Theodor Schneider, der von seiner Einstellung her mehr an schwierigen Einzelproblemen interessiert war, sich auch der Einbettung von Einzelergebnissen der Transzendenztheorie in einen allgemeinen Rahmen verpflichtet fühlte und hierbei sehr erfolgreich war.

Das Ergebnis aus [8] kann als Axiomatisierung der Gelfond'schen (!) Methode aus dem Jahre 1934 angesehen werden; Voraussetzungen über die Algebraizität genügend vieler Werte meromorpher Funktionen (und ihrer Ableitungen) erzwingen eine algebraische Relation zwischen diesen Funktionen, wenn die Wachstumsordnung der Funktionen nicht zu groß ist. Eine ähnliche Axiomatisierung der

Schneiderschen Methode aus [1] gab M. Waldschmidt (*Nombres Transcendants,* 1974, p. 77ff.).

Auch die Arbeiten [15] und [16] sind der Fragestellung gewidmet, gewisse algebraische Funktionen durch (algebraische) Funktionswerte bzw. durch (algebraische) [Taylor-]Entwicklungskoeffizienten zu charakterisieren.

Die Schneidersche (auch ins Französische übersetzte) bescheiden *„Einführung in die transzendenten Zahlen“* titulierte Monographie [19], [20], die bei aller Genauigkeit im Detail auch die hinter dem technischen Apparat verborgenen Ideen deutlich machte, ist inzwischen zum Klassiker geworden. Das Werk hatte drei Jahrzehnte lang großen Einfluß auf die weitere Entwicklung des Gebietes. Die Zielsetzung des Buches kann am besten mit Theodor Schneiders eigenen Worten aus dem 1955 verfaßten Vorwort beschrieben werden.

„Über transzendente Zahlen gibt es nur sehr wenige zusammenfassende Darstellungen. Ein Grund dafür dürfte darin zu suchen sein, daß in der Originalliteratur über transzendente Zahlen nur vereinzelt allgemeinere Methoden entwickelt worden sind und zumeist die Transzendenzergebnisse durch recht spezielle, eigens auf die jeweilige Aufgabe zugeschnittene Gedanken bewiesen wurden. Erst seit einiger Zeit wurden in zunehmendem Maße umfassendere Beweisprinzipien deutlich.

Gerade auf die Herausarbeitung von allgemeineren Beweismethoden habe ich in dieser Schrift besonderen Wert gelegt und dabei sogar in Kauf genommen, daß einige Resultate durchaus nicht mit dem kürzest möglichen, dafür aber einem verallgemeinerungsfähigen Beweis bestätigt werden. Aus solchen methodischen Gesichtspunkten heraus glaubte ich auch, mich auf die meines Erachtens wichtigsten Teile der Theorie der transzendenten Zahlen beschränken zu sollen ...“

Zum Inhalt dieses wegweisenden Buches werde aus dem Referat von K. Mahler aus Math. Reviews 19, p. 252, zitiert. *"This addition to the small library of modern books on transcendental numbers ... will be welcomed by mathematicians everywhere, the more so since it contains proofs of the author's fundamental work on the transcendency of elliptic and modular functions. (His even more far-reaching results on abelian functions are also mentioned, but not proved).*

In Chapter I, the author starts with Liouville numbers, proceeds to a slight generalization of Roth's recent theorem on the approximation of algebraic numbers ..." [nebenbei bemerkt, wird in Theodor Schneiders Buch *erstmalig* der Beweis des Satzes von Roth lehrbuchmäßig dargestellt] und weiter *"... Chapter 3 gives an account of the still unsatisfactory position in the classification of transcendental numbers and deals in particular with the methods due to K. Mahler and J. F. Koksma."* Hier kann erwähnt werden, daß das Problem der Existenz von T-Zahlen 1968 von W. M. Schmidt [Symp. Math. IV INDAM Rome, 1968, 3–26] positiv entschieden werden konnte, und daß die Lösung der Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen 1965 durch V. G. Sprindzuk erbracht wurde. Schließlich *"... The final chapter deals with Siegel's method of proving the transcendency of solutions of linear differential equations. As examples, the general theorem of Lindemann on the exponential function and Siegel's theorem on the transcendency of Bessel functions are derived."* Die Ergebnisse von Shidlovskii zu diesem Themenkreis waren zum Zeitpunkt des

Erscheinens dieses Buches noch nicht gefunden und konnten daher nicht dargestellt werden. *"The book contains many valuable references to the literature. It will serve as an excellent introduction to different aspects of the theory."*

Es sollte erwähnt werden, daß Th. Schneider als Ausblick in seiner Monographie eine Reihe offener Fragestellungen erwähnt; er bemerkt hierzu: *„Es ist unmöglich, bei einem noch nicht gelösten Problem vorherzusagen, ob seiner Lösung große Schwierigkeiten entgegenstehen werden oder nicht. Wenn hier im folgenden eine kleine Auswahl von offenen Fragen formuliert wird, deren Lösungen für die Theorie der transzendenten Zahlen fruchtbar sein dürften, und wenn es der Verfasser trotz der vorgenannten Unmöglichkeit wagt, diese Probleme für nicht ganz so ausweglos ... zu halten, so sei diese subjektive Meinung des Verfassers nur mit allen Vorbehalten wiedergegeben. Die bisher bekannten Untersuchungsmethoden scheinen einigermaßen ausgeschöpft zu sein, und ein an einem einzigen Problem zu entwickelnder neuer Gedanke könnte völlig neue Aspekte für die Weiterentwicklung der Theorie eröffnen."*

Die Liste dieser Probleme ([19], p. 138) zeigt, daß Schneider ein sehr gutes Gespür für wichtige und nicht ganz aussichtslose Probleme besaß - eine Reihe seiner Probleme sind inzwischen gelöst worden. So hat, wie schon oben erwähnt, V. G. Sprindzuk um 1965 die Mahlersche Vermutung über das Maß der (reellen) S-Zahlen vom Typus $\vartheta > 1$ bewiesen, die andernorts (p. 83) aufgeworfene Frage nach der Existenz von T-Zahlen wurde 1968 durch W. M. Schmidt positiv entschieden.

Das erste Problem über die Transzendenz von $\exp(\log\beta\cdot\log\gamma/\log\alpha)$ für algebraische α, β, γ ($\alpha\neq 0, 1$, $\log\beta/\log\alpha$ und $\log\gamma/\log\alpha$ irrational) ist zu der 4-exponentials-conjecture[18]) äquivalent, die zum ersten Mal in einer Arbeit von Alaoglu und Erdös auftauchte. 1986 bewies M. Waldschmidt das 5-exponentials-theorem, aber der Schritt zur 4-exponentials-Vermutung ist immer noch offen. Die Frage nach der Ausdehnung der Transzendenzsätze für elliptische Integrale erster und zweiter Gattung zu Ergebnissen über Abelsche Integrale führte zu völlig neuen Entwicklungen der Theorie. Michel Laurent 1980, 1982 gab erstmalig Transzendenzsätze für elliptische Integrale dritter Art. G. Wüstholz [Springer Lecture Notes 1068, 280–296] gab eine endgültige Lösung der im dritten und vierten Problem aufgeworfenen Fragestellungen; die von M. Laurent 1982 aufgestellte und in einigen Spezialfällen[19]) bewiesene Vermutung: *Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion $\wp(z)$ habe algebraische Invarianten g_2, g_3 und das Periodengitter Λ; sei $\eta=\zeta(z+w)-\zeta(z)$ (mit der Weierstraßschen ζ-Funktion) und $\lambda(u)=\lambda(u,\omega)$ $=\omega\cdot\zeta(u)-\eta\cdot u$.*

---

[18]) Das 6-exponentials-theorem (S. Lang, C. L. Siegel) besagt: Sind die komplexen Zahlen β_1, β_2 $\mathbb{Q}$-linear unabhängig, und sind die z_ν aus $\mathbb{C}$, $\nu=1,2,3$, ebenfalls $\mathbb{Q}$-linear unabhängig, so ist mindestens eine der 6 Zahlen $\exp(\beta_\mu\cdot z_\nu)$, $\mu=1,2$, $\nu=1,2,3$ transzendent.
Alaoglu und Erdös zeigten: Sind für rationale Zahlen q, r, s, für die $\log q$, $\log r$, $\log s$ $\mathbb{Q}$-linear unabhängig sind, die Zahlen q^x, r^x und s^x wieder rational, so ist x eine ganze Zahl. Sie vermuteten: Sind q, r aus $\mathbb{Q}$ mit linear unabhängigen Logarithmen, und sind q^x und r^x rational, so ist x ganz.

[19]) $n=1$, $n=2$ bei Auslassung von $2\pi i$, und $n=2$ im Falle komplexer Multiplikation.

Sind $u_1, \dots, u_n$ komplexe Zahlen, modulo Λ genommen $\mathbb{Q}$-linear unabhängig, ist $\omega \neq 0$ aus Λ, und sind $\wp(u_1), \dots, \wp(u_n)$ algebraisch, dann sind

$$1, \omega, \eta, 2\pi i \quad \textit{und} \quad \lambda(u_1), \dots, \lambda(u_n)$$

linear unabhängig über dem Körper aller algebraischen Zahlen wurde von G. Wüstholz (Crelle **354** (1984)) bewiesen.

Zum siebten, auch als *Gelfondsche Vermutung* bekannten Problem über die algebraische Unabhängigkeit von Zahlen der Gestalt $\alpha_i^{\beta_i}$ gibt es Ergebnisse von S. Lang, M. Waldschmidt, R. Tijdeman, D. Brownawell, G. V. Chudnovsky, Yu. V. Nesterenko, P. Philippon und G. Diaz (J. Number Theory **31** (1989) 1–23). Letztgenannter zeigt 1989, wobei Ergebnisse von Philippon aus dem Jahre 1986 verfeinert werden, daß für $\mathbb{Q}$-linear unabhängige komplexe Zahlen[20] $u_1, \dots, u_n$ und $\mathbb{Q}$-linear-unabhängige komplexe $v_1, \dots, v_m$ der Transzendenzgrad des Körpers $K = \mathbb{Q}(\exp(u_i v_j),\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ mindestens gleich $[mn/(m+n)]$ ist, wenn $mn > m+n$ ist. Ist $m \geqslant 2$, so ist der Transzendenzgrad von $K_1 = K(v_1, \dots, v_m)$ über $\mathbb{Q}$ mindestens gleich $[(mn+m)/(m+n)]$.

Die [derzeit wohl immer noch aussichtslose] Schanuel-Vermutung besagt, daß für $\mathbb{Q}$-linear unabhängige $x_1, \dots x_n$ der Transzendenzgrad des Körpers $\mathbb{Q}(x_1, \dots x_n, \exp(x_1), \dots, \exp(x_n))$ über $\mathbb{Q}$ mindestens gleich n ist.

Das fünfte Problem der Approximierbarkeit bekannter transzendenter Zahlen durch algebraische führt auf die Frage nach „Transzendenzmaßen". Dieser Frage hat N. I. Feld'man eine Vielzahl von Arbeiten gewidmet; eine der ersten systematischen Studien hierzu ist die Dissertation von Cijssouw. Man vergleiche auch die Ergebnisse von E. Reyssat (Bull. SMF **108** (1980); mit Methoden von Brownawell und Masser wird ein systematisches Studium von Transzendenzmaßen für die Exponentialfunktion und die Weierstraßsche $\wp$-Funktion betrieben) und von N. Hirata.

Selbst einzelne Werte der Γ-Funktion wurden als transzendent erkannt (Chudnovsky 1975; $\Gamma(1/3)$ und $\Gamma(1/4)$ sind transzendent). Jing Yu gab kürzlich Transzendenzresultate für die Carlitzsche Zetafunktion. Das achte Schneidersche Problem haben D. Brownawell 1971 und M. Waldschmidt 1971 unabhängig voneinander gelöst: *wenigstens eine der Zahlen e^e und e^{e^2} ist transzendent.*

Nach dieser skizzenhaften Andeutung einiger Entwicklungen, die von Schneiders acht Problemen ihren Ausgang nahmen, braucht die weitere Entwicklung der Theorie der transzendenten Zahlen hier nicht verfolgt zu werden; es sei auf die Monographien von A. Baker (*Transcendental Number Theory* 1975), N. I. Feldman (*Approximation of algebraic numbers* 1981 *[russ.], Hilbert's seventh problem* 1982 *[russ.]*), K. Mahler (*Lectures on Transcendental Numbers* 1976), Wolfgang M.

---

[20]) Eine „technical hypothesis" über die u_ν und v_μ von folgender Art ist zusätzlich erforderlich: Es gibt ein positives $X(n)$ derart, daß für alle ganzzahligen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ und für alle $X > X(n)$ die Ungleichung

$$|\Sigma_1^n \lambda_\nu \cdot u_\nu| \geqslant \exp(-X^{m(n+1)(2m+n)})$$

gilt, wenn nur $\max|\lambda_\nu| \leqslant X$ ist. [Eine entsprechende Voraussetzung wird für die v_μ gemacht.]

Schmidt (*Diophantine Approximation* 1980), A. B. Shidlowski (*Transcendental numbers* 1987 *[russ.]*), V. G. Sprindzuk (*Mahler's Problem in Metric Number Theory* 1969, *Metric theory of Diophantine approximation* 1979, *Classical Diophantine equations in two unknowns* 1982 *[russ.]*) und M. Waldschmidt (*Nombres Transcendants* 1974, *Nombres transcendants et groupes algébriques* 1979) hingewiesen.

Das Gebiet der Diophantischen Approximationen und Transzendenten Zahlen erlebt seit 1966 eine zweite Blüte, nachdem Alan Baker den Gelfond-Schneiderschen Satz zu einem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Logarithmen algebraischer Zahlen erweitert hatte. Diese Erweiterung gestattet mannigfache Anwendungen auf die Untersuchung gewisser diophantischer Gleichungen. Auch das Klassenzahl-Eins-Problem (es gibt genau neun imaginärquadratische Zahlkörper über $\mathbb{Q}$ mit Klassenzahl Eins) kann auf diese Weise gelöst werden. Die Bedeutung der Bakerschen Ergebnisse drückt sich in der Tatsache aus, daß A. Baker für seine Erweiterung des Satzes von Gelfond-Schneider in Nizza 1970 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet wurde.

Zusammenfassend hat, insbesondere auf dem Gebiet der Diophantischen Approximationen und der transzendenten Zahlen, Theodor Schneider mit scharfsinnigen Untersuchungen an Einzelproblemen wegweisend gewirkt und dieses Gebiet entscheidend gefördert. Später hat er auch die Systematisierung des Gebietes vorangetrieben, und insbesondere durch seine Monographie [19] die benützten Ideen klar dargelegt. Von ihm genannte offene Probleme konnten inzwischen teilweise gelöst werden. Das Gebiet hat sich seither reich entfaltet und hat sich zu einem wichtigen Teil der Zahlentheorie entwickelt. Diese Entwicklungen legen Zeugnis ab von Theodor Schneiders immer noch anhaltendem Einfluß auf die Entwicklung der Theorie der Diophantischen Approximationen und transzendenten Zahlen.

Schriftenverzeichnis von Theodor Schneider
(zusammengestellt nach Mathematical Reviews und Zentralblatt)

[1] Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I. Transzendenz von Potenzen. J. Reine Angew. Math. **172** (1934) 65–69

[2] Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. II. Transzendenzeigenschaften elliptischer Funktionen. J. Reine Angew. Math. **172** (1934) 70–74

[3] Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale. Math. Ann. **113** (1936) 1–13

[4] Zur Approximation algebraischer Zahlen (Verschärfung eines Satzes von C. L. Siegel). Jber. d. Dt. Math.-Verein. **46** (1936) *62*

[5] Über die Approximation algebraischer Zahlen. J. Reine Angew. Math. **175** (1936) 182–192

[6] Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale. J. Reine Angew. Math. **183** (1941) 110–128

[7] Über eine Dysonsche Verschärfung des Siegel-Thueschen Satzes. Arch. Math. **1** (1949) 288–295

[8] Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise. Math. Ann. **121** (1949) 131–140

[9] Über einen Hlawskaschen Satz aus der Geometrie der Zahlen. Arch. Math. **2** (1950) 81–86

[10] Eine Bemerkung zur Minkowskischen Vermutung über inhomogene Linearformen. Arch. Math. **2** (1950) 87–89

[11] Über einen Blichfeldtschen Satz aus der Geometrie der Zahlen, Arch. Math. **2** (1950) 349–353

[12] Zum Beweis der Transzendenz von e und π. Math.-Phys. Semesterberichte **1** (1950) 299–303

[13] Zur Annäherung der algebraischen Zahlen durch rationale. J. Reine Angew. Math. **188** (1950) 115–128

[14] Verallgemeinerung einer Minkowskischen Ungleichung über konvexe Körper mit Mittelpunkt. Math. Ann. **122** (1950) 35–36
[15] Zur Charakterisierung der algebraischen und der rationalen Funktionen durch ihre Funktionswerte, Acta Math. **86** (1951) 57–70
[16] Zur Charakterisierung algebraischer Funktionen mit Hilfe des Eisensteinschen Satzes. Math. Z. **60** (1954) 98–108
[17] Arithmetische Bedingungen für algebraische Funktionen. Abstract from the Proceedings of the International Mathematical Congress Amsterdam, Sept. 1954.
[18] Über die Irrationalität von π. S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. 1954, 99–101 (1955)
[19] Einführung in die transzendenten Zahlen. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1957, v + 150 pp
[20] Introduction aux nombres transcendants, Traduit de l'allemand par P. Eymard. Paris 1959, vii + 151 pp
[21] Anwendung eines abgeänderten Roth-Ridoutschen Satzes auf diophantische Gleichungen. Math. Ann. **169** (1967) 177–182
[22] Über p-adische Kettenbrüche. Symposia Mathematica, Vol. IV (INDAM, Rom 1968/69), 181–189 (1970)
[23] Über rationale Stellen, an denen eine algebraische Funktion rationale Werte annimmt. Zahlentheorie (Tagung Oberwolfach 1970), 137–145, Mannheim 1971
[24] Rationale Punkte über einer algebraischen Kurve, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des Nombres, 15e année, Exp. No. 20, 7 pp, Paris 1975
[25] Eine Bemerkung zu einem Satz von C. L. Siegel, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976) 775–782
[26] 5. Zahlentheorie, p. xxxii–xxxvii in „Gesammelte Schriften" von Gustav Herglotz, Göttingen 1979
[27] Das Werk C. L. Siegels in der Zahlentheorie. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **85** (1983) 147–157

Promovenden bei Theodor Schneider

Alfred Günther: Über transzendente p-adische Zahlen. Göttingen 1952

Orhan Ş. Içen: Eine Verallgemeinerung und Übertragung der Schneider'schen Algebraizitätskriterien ins p-adische mit Anwendung auf einen Transzendenzbeweis im p-adischen. Göttingen 1955

Wolfgang Schwarz: Zur Darstellung von Zahlen als Summen von Primzahlpotenzen. Erlangen 1959

Luise-Charlotte Menger (später Kappe): Eine direkte Methode bei Transzendenzuntersuchungen. Freiburg i. Br. 1962

Gerhard Augustin: Über zwei p-adische Approximationsmaße von Werten der Exponentialfunktion. Freiburg i. Br. 1965

Rolf Wallisser: Verallgemeinerte ganze ganzwertige Funktionen und verwandte Probleme. Freiburg i. Br. 1965

Peter Bundschuh: Über die Approximation transzendenter Zahlen, die Werte von Umkehrfunktionen gewisser meromorpher Funktionen sind. Freiburg i. Br. 1967

Hans Peter Schlickewei: Approximation algebraischer Zahlen durch rationale Zahlen. Freiburg i. Br. 1975

Gisbert Wüstholz: Simultane Approximationen. Freiburg i. Br. 1976

Luise-Charlotte Kappe
Department of Mathematical Sciences
State University of New York
Binghamton, N.Y. 13901 USA

Hans Peter Schlickewei
Abteilung Mathematik II, Universität Ulm
7900 Ulm a. d. Donau

Wolfgang Schwarz
Mathematisches Seminar, Universität Frankfurt
Robert-Mayer-Straße 10
6000 Frankfurt/Main 1

(*Eingegangen: 5. 12. 1989*)

Universität Frankfurt a. M.

Der Fakultät unterbreite ich das Promotionsgesuch des

Herrn Theodor Schneider

aus Frankfurt a. M.

und bitte den Herrn Kollegen

Siegel

über die beifolgende Arbeit

„Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen“

zuerst zu urteilen.

Der Dekan [illegible]

Hauptfach: Reine Mathematik

Nebenfächer: Angewandte Mathematik

Physik

Die vorliegende Arbeit bildet einen grossen Fortschritt in einem Gebiete der Mathematik, das bis vor wenigen Jahren fast unzugänglich erschien. Sie liefert nämlich einen Beitrag zur Lösung der Frage, ob eine durch einen vorgeschriebenen Grenzprocess definierte Zahl algebraisch ist (d.h. einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten genügt) oder transcendent (d.h. keiner algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten genügt). Nachdem Hermite die Transcendenz von e und Lindemann die Transcendenz von π bewiesen hatten, vergingen mehrere Jahrzehnte bis zur Entdeckung von Methoden, welche die Behandlung allgemeinerer Transzendenzprobleme ermöglichten.

Schneider wurde durch ein vom Referenten 1932 abgehaltenes Seminar zur selbständigen Beschäftigung mit diesen Problemen angeregt. Im ersten Teile seiner Arbeit beweist er die Transcendenz von a^b für jedes algebraische von 0 und 1 verschiedene a und jedes irrationale algebraische b. Für den speciellen Fall eines quadratisch-irrationalen b war dieser Satz bereits 1930 durch die Untersuchungen von Gelfond und Kusmin gefunden worden; die Behandlung des allgemeinen Falles erforderte aber andere Hilfsmittel, die zum Teil einer Abhandlung des Referenten entnommen werden konnten. Indem Schneider diese Hilfsmittel in geeigneter Weise mit dem Ansatz von Gelfond combiniert, gelingt ihm ein überraschend einfacher und durchsichtiger Beweis.

Im zweiten Teile seiner Arbeit benutzt Schneider seine Methode zur arithmetischen Untersuchung doppeltperiodischer Funktionen und überträgt mit Hilfe der Teilungstheorie der elliptischen Funktionen die für die Funktion a^x vorher bewiesenen Sätze. Er zeigt, dass eine doppeltperiodische Funktion mit algebraischen Invarianten und algebraischem Periodenverhältnis transcendent ist für jeden Wert der Variabeln, welcher ein algebraischer, aber kein rationaler Teil einer Periode der Funktion ist.

Schneider ist ein origineller und scharfsinniger Kopf mit ausgesprochener mathematischer Begabung. Seine Arbeit wird einen ehrenvollen Platz in der Literatur einnehmen.

Ausgezeichnet (I)

Siegel

Berlin-Pankow, 1934 X 18

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
92 (1990) 130–144
AMS subject classification: 05 A 17, 05 C 55, 10 A 45

Quantitative Versionen von kombinatorischen Partitionssätzen*)

P. Frankl**), R. L. Graham und V. Rödl, Murray Hill, NJ

0 Einleitung

Es gibt schon eine sehr große Anzahl von „Ramseyschen Sätzen". Die berühmtesten drei klassischen Sätze sind die folgenden. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

Satz von Schur (1916, [S]). *Man betrachte eine beliebige Partition von* $\mathbb{N}$ *in endlich viele Klassen. Dann gibt es immer drei Zahlen* x, y *und* z, *alle in der gleichen Klasse, für die* $x + y = z$ *gilt.*

Satz von van der Waerden (1927, [W]). *Für jede Partition von* $\mathbb{N}$ *in endlich viele Klassen gibt es eine Klasse, die beliebig lange arithmetische Progressionen enthält.*

Für eine Menge X sei $\binom{X}{k}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von X.

Satz von Ramsey (1930, [Ra]). *Für eine beliebige Partition von* $\binom{\mathbb{N}}{k}$ *in endlich viele Klassen gibt es eine unendliche Menge* X, *so daß alle Elemente von* $\binom{X}{k}$ *in der gleichen Klasse sind.*

Alle diese Sätze kann man auch in einer endlichen Form formulieren. Wir bezeichnen Objekte, die völlig in einer Partitionsklasse liegen, als *monochromatisch.* [N] bezeichne das Intervall $\{1, 2, \ldots N\}$.

Dann lautet die endliche Form des Satzes von Schur: Für jede natürliche Zahl r gibt es eine kleinste Zahl $S = S(r)$ mit der Eigenschaft, daß es für jede Partition von [S] in r Klassen eine monochromatische Menge $\{x, y, x + y\}$ gibt.

---

*) Hauptvortrag auf der DMV-Tagung in Berlin 1987.

**) Ständige Adresse: CNRS, 15 Quai Anatole France, 75007 Paris, Frankreich.

Für den Satz von van der Waerden (bzw. Ramsey) sei $W(l,r)$ (bzw. $R(m,k;r)$) die entsprechende Funktion, wobei r die Anzahl von Klassen ist, l die Länge der gewünschten arithmetischen Progression und m die Mächtigkeit der Menge, deren k-elementige Teilmengen monochromatisch sein sollen.

Man weiß sehr wenig über diese Funktionen; zum Beispiel war es 60 Jahre lang nicht bekannt, ob man eine primitiv rekursive obere Schranke für $W(k,2)$ angeben kann. Für einen Überblick über diese und verwandte Funktionen verweisen wir den interessierten Leser auf die Arbeit [GR]. In einer wunderschönen neuen Arbeit hat Shelah [Sh] eine primitiv rekursive obere Schranke für $W(k,2)$ erzielt.

Im Zentrum unseres Interesses steht eine andere quantitative Version dieser Sätze: Wir betrachten alle Parameter (r,l,m,k) als konstant und lassen N wachsen. Dabei möchten wir die Mindestanzahl monochromatischer Objekte abschätzen. Wir beweisen, daß diese Anzahl höchstens um einen konstanten Faktor kleiner als die Anzahl *aller* Objekte sein kann.

Schließlich betrachten wir einen anderen Begriff von Anzahl, der durch einen Satz von Bergelson [B] motiviert wurde. Bergelson bewies seinen Satz mit ergodentheoretischen Mitteln. Wir geben einen rein kombinatorischen Beweis für diesen und andere Sätze.

1 Der Satz von Rado

Im Jahre 1930 hat Richard Rado einen allgemeinen Satz veröffentlicht, der sowohl den Satz von Schur als auch den von van der Waerden enthält. Man kann hier erwähnen, daß diese schöne Arbeit die Basis seiner Dissertation wurde, die er unter der Leitung von Schur geschrieben hat.

Sei $A=(a_{ij})$ eine ganzzahlige $l\times k$-Matrix. Man betrachte das homogene lineare Gleichungssystem $\mathscr{L}$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l.$$

Sei $\vec{x}$ der Spaltenvektor $(x_1,\dots,x_k)^{\mathrm{T}}$. Dann kann man das System als

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

schreiben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß A vollen Rang hat, das heißt $r(A)=l$ gilt und deswegen der lineare Raum von Lösungen die Dimension $k-l$ hat.

Definition 1.1. *Man sagt, daß das System* $\mathscr{L}=\mathscr{L}(A)$ partitionsregulär *ist, falls für jede beliebige Partition von* $\mathbb{N}$ *in endlich viele Klassen das System eine monochromatische Lösung hat.*

Bezeichne $\vec{a}_j$ die j-te Spalte von A.

Definition 1.2. *Man sagt, daß die Matrix A die Spaltenbedingung erfüllt, falls es nach entsprechender Permutation der Spalten Indizes* $1\leqslant k_1<k_2<\ldots<k_t=k$

gibt, so daß mit der Bezeichnung

$$A_i := \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} \bar{a}_j$$

gilt:

(i) $A_1 = \bar{0}$,

(ii) *für* $2 \leqslant i \leqslant t$ *ist* A_i *eine lineare Kombination von* $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{k_{i-1}}$.

Jetzt können wir das klassische Resultat von Rado beschreiben.

Satz von Rado ([R], cf. auch [GRS]). *Das System* $\mathscr{L}(A)$ *ist partitionsregulär dann und nur dann, wenn* A *die Spaltenbedingung erfüllt.*

Im Fall des Satzes von Schur ist $A=(1,1,-1)$, was nach Permutation $(1,-1,1)$ ergibt und die Spaltenbedingung mit $t=2$, $k_1=2$, $k_2=3$ erfüllt.

Für den Satz von van der Waerden kann man für $\mathscr{L}(A)$ das System

$$\begin{aligned}
x_1 &- 2x_2 + x_3 = 0\\
x_2 &- 2x_3 + x_4 = 0\\
&\vdots\\
x_{l-2} &- 2x_{l-1} + x_l = 0
\end{aligned}$$

nehmen, welches die Spaltenbedingung mit $t=1$ erfüllt. Das zeigt, daß der Satz von Rado die Sätze von Schur und van der Waerden verallgemeinert.

Rado nennt eine Menge $H \subset \mathbb{N}$ *riesig*, wenn es für jedes partitionsreguläre System und jede endliche Partition von H eine monochromatische Lösung gibt. Rado hat vermutet und Deuber [D] hat bewiesen, daß riesige Mengen die *Partitionseigenschaft* haben, das heißt, daß es für eine beliebige endliche Partition $H = H_1 \cup \ldots \cup H_r$ ein j mit $1 \leqslant j \leqslant r$ gibt, so daß H_j wiederum riesig ist. Für den Beweis von Deuber spielt der folgende Begriff eine wichtige Rolle.

Für natürliche Zahlen m, p und c sei

$$D(m,p,c) := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m : \exists i,\, i < m,$$

$$\lambda_j = 0 \text{ für } j < i;\ \lambda_i = c;\ |\lambda_j| \leqslant p \text{ für } j > i\}.$$

Definition 1.3. *Eine Menge* $S \subset \mathbb{Z}$ *ist eine* (m,p,c)-Menge, *falls es* $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{Z}^m$ *gibt, so daß*

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i \colon (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in D(m,p,c) \right\}$$

gilt.

Wie Deuber gezeigt hat, sind (m,p,c)-Mengen und die Lösungen von partitionsregulären Gleichungssystemen sehr eng verbunden. Man betrachte eine Matrix A, die die Spaltenbedingung erfüllt. Dann hat man $k-l$ linear unabhängige Lösungen der folgenden Form:

$$\begin{array}{llllll}
 & & \overset{1}{\cup} \qquad \overset{k_1}{\cup} & \ldots \quad \overset{k_2}{\cup} & \overset{k_{t-1}}{\cup} & \overset{k_t}{\cup} \\
\bar{w}_1 & = & (1, 1, \ldots, 1, & 0, \ldots, 0, \ \ldots & 0, & 0, \ldots, 0) \\
\bar{w}_2 & = & (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2k_1}, & 1, \ldots, 1, \ 0, \ldots & 0, & 0, \ldots, 0) \\
\vdots & & & & & \\
\bar{w}_t & = & (\alpha_{t1}, \ldots, \alpha_{tk_1}, & \ldots, & \alpha_{tk_{t-1}}, & 1, \ldots, 1) \\
\bar{w}_{t+1} & = & (\alpha_{t+1,1} \ldots & & \ldots, & \alpha_{t+1,k}\ ) \\
\vdots & & & & & \\
\bar{w}_{k-l} & = & (\alpha_{k-l,1} \ldots & & \ldots, & \alpha_{k-l,k}\ ),
\end{array}$$

wo alle α_{ij} rationale Zahlen sind. Falls man alle diese Vektoren durch das kleinste gemeinsame Vielfache c aller Nenner multipliziert, erhält man ganzzahlige Vektoren der Form

$$\begin{array}{llll}
\bar{v}_1 & = & (c, c, \ldots, c, 0, 0, \ldots & \ldots, 0, \ldots, 0) \\
\bar{v}_2 & = & (\beta_{21}, \ldots, \beta_{2k_1}, c, c, \ldots & \ldots, 0, \ldots, 0) \\
\vdots & & & \\
\bar{v}_{t+1} & = & (\beta_{t+1,1}, \ldots & \ldots, \beta_{t+1,k}\ ) \\
\vdots & & & \\
\bar{v}_{k-l} & = & (\beta_{k-l,1}, \ldots & \ldots, \beta_{k-l,k}\ ).
\end{array}$$

Sei $p = \max |\beta_{ij}|$. Eine beliebige Lösung des Systems $A\bar{x} = \bar{0}$ kann man in der Form

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k-l} y_i \bar{v}_i$$

schreiben (hier können die y_i beliebig, das heißt nicht notwendig ganzzahlig sein). Das bedeutet aber, daß $x_1, \ldots, x_m$ alle zu der gleichen $(k-l, p, c)$-Menge gehören.

Andererseits enthält jede $(k-l,\ p, c)$-Menge eine Lösung des Systems $A\bar{x} = \bar{0}$.

Nun können wir unseren ersten Satz beweisen.

Satz 1.1. *Sei A eine ganzzahlige $l \times k$-Matrix, die die Spaltenbedingung erfüllt. Dann gibt es für jedes $r \geqslant 1$ eine positive reelle Konstante $c = c_r(A)$, so daß für jedes $N > n_0(A, r)$ und jede Partition von* [N] *in r Klassen das System $A\bar{x} = \bar{0}$ mindestens cN^{k-l} monochromatische Lösungen hat.*

Sei $v_{\mathscr{L}}(N)$ die Anzahl von Lösungen des Systems $\mathscr{L} = \mathscr{L}(A)$ in [N] und $v_{\mathscr{L}}(N, r)$ die Mindestanzahl von monochromatischen Lösungen, falls man [N] in r Klassen aufteilt. Dann hat Satz 1.1 das folgende Korollar.

Korollar. *Falls $\mathscr{L}$ partitionsregulär ist, dann gilt $v_{\mathscr{L}}(N, r) > c_r(\mathscr{L}) v_{\mathscr{L}}(N)$ für eine positive Konstante $c_r(\mathscr{L})$ und für jedes $N > n_0(\mathscr{L}, r)$.*

Für den Beweis benötigen wir die folgende Version von dem Satz von Deuber.

Satz 1.2 ([D]). *Für beliebige natürliche Zahlen m, p, c und r gibt es natürliche Zahlen M, P und C, so daß man für jede Partition aller formalen Linearkombinationen*

$$\mathscr{J} = \left\{ \sum_{i=1}^{M} \lambda_i Y_i \colon (\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \in D(M, P, C) \right\}$$

in r Klassen paarweise disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_m \subseteq [M]$ findet und formale Variablen

$$y_i = \sum_{j \in B_i} \xi_j Y_j, \qquad 1 \leqslant |\xi_j| \leqslant P, \; 1 \leqslant i \leqslant m \tag{1.1}$$

so daß alle Linearkombinationen

$$\sum_{i=1}^{M} \lambda_i y_i, \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in D(m, p, c)$$

in der gleichen Partitionsklasse sind.

Beweis von Satz 1.1: Wie vorher gezeigt wurde, erhält für entsprechende p und c jede $(k-l, p, c)$-Menge eine Lösung des Systems $A\bar{x} = \bar{0}$. Sei $m = k - l$ und seien M, P und C die Zahlen im Satz von Deuber. Sei N sehr groß im Vergleich zu M; man betrachte alle M-Tupel $(Y_1, \ldots, Y_m) \in \mathbb{Z}^M$ mit der Eigenschaft, daß die entsprechende (M, P, C)-Menge ausschließlich aus Zahlen in [N] besteht und

$$Y_i \equiv (2P+1)^i \bmod (2P+1)^M, \qquad 1 \leqslant i \leqslant M \tag{1.2}$$

gilt. Für eine positive Zahl $c_1 = c(M, P, C)$ gibt es mindestens $c_1 N^M$ solcher M-Tupel $(Y_1, \ldots, Y_M)$.

Man betrachte eine beliebige Partition von [N] in r Klassen. Diese Partition definiert eine Partition der Menge $\mathscr{J} = \mathscr{J}(Y_1, \ldots, Y_M)$ nach dem Satz von Deuber. Da unseren Annahmen entsprechend $\mathscr{J}$ als Zahlenmenge in [N] enthalten ist, erhalten wir – durch Anwendung des Satzes von Deuber – eine monochromatische Lösung innerhalb $\mathscr{J}$. Das heißt, mit Multiplizität gerechnet haben wir mindestens $c_1 N^M$ monochromatische Lösungen.

Um den Beweis zu beenden, werden wir zeigen, daß wir jede Lösung höchstens $c_2 N^{M-(k-l)}$-mal gezählt haben. Sei also $(x_1, \ldots, x_k)$ eine Lösung, die wir auf die obige Weise erhalten haben. Das bedeutet, daß für eine entsprechende Wahl von $(y_1, \ldots, y_{k-l})$

$$(x_1, \ldots, x_k) = (y_1, \ldots, y_{k-l}) B$$

gilt, wobei B eine festgelegte $(k-l) \times k$-Matrix ist. Deswegen bestimmt $(y_1, \ldots, y_{k-l})$ eindeutig $(x_1, \ldots, x_k)$. Das heißt, wir müssen beweisen, daß ein gegebenes $(k-l)$-Tupel $(y_1, \ldots, y_{k-l})$ höchstens $c_2 N^{M-(k-l)}$-mal erhalten wurde. Wegen der Bedingung (1.2) bestimmt jedes y_i eindeutig durch seinen Rest modulo $(2P+1)^M$ die Menge B_i und die Koeffizienten ξ_j aus (1.1). Das ergibt zusammen $k-l$ Gleichungen für die Y_j (und diese Gleichungen haben paarweise disjunkte Variablenmengen), was nur $c_2 N^{M-(k-l)}$ Möglichkeiten für die Wahl von $(Y_1, \ldots, Y_M)$ übrigläßt. ■

2 Der Satz von Szemerédi

Für eine Teilmenge $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m,\ldots\}\subset\mathbb{N}$ bezeichne $\bar{d}(A)$ die *obere Dichte* von A, das heißt

$$\bar{d}(A)=\limsup_{n\to\infty}\frac{|A\cap[1,n]|}{n}.$$

Ähnlich wird die *untere Dichte* $\underline{d}(A)$ definiert:

$$\underline{d}(A)=\liminf_{n\to\infty}\frac{|A\cap[1,n]|}{n}.$$

Falls $\bar{d}(A)$ gilt, dann heißt diese Größe die *Dichte von A* und wird mit $d(A)$ bezeichnet.

Man kann sich fragen, welche Gleichungssysteme $M\vec{x}=\vec{0}$ in jeder Menge A mit positiver oberer Dichte nichttriviale Lösungen haben (nichttrivial besagt, daß nicht $x_1=x_2=\ldots=x_k$ gilt). Man setze $\vec{1}=(1,\ldots,1)$. Falls $M\vec{1}\neq\vec{0}$ und $m>m_0(M)$ gilt, dann kann man leicht sehen, daß die Menge $\{1,m+1,2m+1,\ldots\}$ die Dichte $1/m$ hat und trotzdem keine Lösung des Systems $M\vec{x}=\vec{0}$ enthält. Andererseits gilt folgendes.

Satz 2.1. *Sei $M\vec{x}=\vec{0}$ ein ganzzahliges lineares Gleichungssystem, das die Bedingung $M\vec{1}=\vec{0}$ erfüllt. Dann enthält jede Teilmenge positiver oberer Dichte von $\mathbb{N}$ eine nichttriviale Lösung dieses Systems.*

Im Spezialfall, wo M das System $x_1-x_2=x_2-x_3=\ldots=x_{k=1}-x_k$ bezeichnet, ist der obige Satz gleichwertig mit dem berühmten Satz von Szemerédi [Sz]. Andererseits kann man den Satz leicht aus diesem Spezialfall herleiten.

Wir haben die folgende quantitative Version des Satzes 2.1 bewiesen. Sei $c(M,\gamma,n)$ die Mindestanzahl von Lösungen des Systems $M\vec{x}=\vec{0}$ in allen Mengen $A\subset[1,n]$ mit $|A|>\gamma n$.

Satz 2.2 ([FRG1]). *Sei M eine $k\times l$-Matrix mit $M\vec{1}=\vec{0}$. Dann gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} c(M,\gamma,n)/n^{k-l}>0.$$

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem Satz von Fürstenberg und Katznelson [FK], welcher eine weitgehende Verallgemeinerung des Satzes von Szemerédi (mit ergodentheoretischen Mitteln) ist.

3 Der Satz von Bergelson

Zuerst wollen wir einen einfachen Hilfssatz beweisen.

Lemma 1. *Sei $C=\{c_1,\ldots,c_n,\ldots\}$ eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen von oberer Dichte $\bar{d}$. Dann gilt folgendes.*

(i) Für jede endliche Zahlenmenge $A\subset\mathbb{N}$ mit $\bar{d}+1/|A|>1$ gibt es unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ mit $n+A=\{n+a:a\in A\}\subset C$.

(ii) Sei $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ und $k \geqslant 4\bar{d}/\varepsilon^2$. Dann gibt es Indizes $1 \leqslant i < j \leqslant k$, für die

$$\bar{d}((b_i + C) \cap (b_j + C)) \geqslant \bar{d}^2 - \varepsilon$$

gilt.

Beweis: (i) Sei $A = \{a_1, \ldots, a_t\}$ und $a = \max_i a_i$. Wegen der Bedingung $\bar{d} > 1 - 1/|A|$ gibt es für jede ganze Zahl m eine ganze Zahl $n(m)$, so daß

$$|C \cap [m, n(m)]| > (1 - 1/|A|)n(m) + a \tag{3.1}$$

gilt. Man betrachte

$$S_i = \{n \in [m, n(m)] : a_i + n \notin C\}.$$

Aus (3.1) folgt

$$|S_i| < (n(m) - m)/|A|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant t.$$

Das heißt

$$|S_1| + \ldots + |S_t| < n(m) - m.$$

Wir können deswegen ein $n \in ([m, n(m)] - \bigcup_{i=1}^{t} S_i)$ finden. Für dieses n gilt dann $n > m$ und $n + A \subset C$, was (i) beweist.

(ii) Aus der Definition der oberen Dichte folgt, daß es beliebig große Zahlen m gibt, so daß

$$|C \cap [1, m]| > \left(\bar{d} - \frac{\varepsilon}{2}\right)m + \max_i b_i.$$

Für solche m haben wir

$$|(b_i + C) \cap [1, m]| > \left(\bar{d} - \frac{\varepsilon}{2}\right)m. \tag{3.2}$$

Wir setzen $B_i = (b_i + C) \cap [1, m]$ und betrachten den Hypergraphen $\{B_1, \ldots, B_k\}$. Sei $g(i)$ der Grad des Punktes i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Dann gilt

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |B_i \cap B_j| = \sum_{1 \leqslant t \leqslant m} \binom{g(t)}{2} \geqslant m \binom{\Sigma\, g(i)/m}{2}. \tag{3.3}$$

Aus (3.2) und (3.3) erhält man für $k \geqslant 4\bar{d}/\varepsilon^2$

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |B_i \cap B_j| \geqslant m \binom{k\left(\bar{d} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{2} > m \binom{k}{2}(\bar{d}^2 - \varepsilon).$$

Das heißt, daß im Durchschnitt $|B_i \cap B_j|/m$ größer als $\bar{d}^2 - \varepsilon$ ist. Für m gibt es unendlich viele mögliche Werte, während (i, j) nur $\binom{k}{2}$ Werte annehmen kann. Deswegen muß es ein Paar (i, j) geben, so daß $|B_i \cap B_j| > m(\bar{d}^2 - \varepsilon)$ für unendlich viele Werte von m gilt. ∎

Sei $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_l$ eine Partition. Der Satz von Schur sagt, daß es ein i mit $1 \leqslant i \leqslant l$ und ein $n \in C_i$ gibt, so daß $C_i \cap (n + C_i) \neq \emptyset$ gilt. Mit ergodentheoretischen Mitteln hat Bergelson den folgenden schärferen Satz bewiesen.

Der Satz von Bergelson ([B]). *Sei $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_l$ eine Partition. Dann gibt es ein t mit $1 \leqslant t \leqslant l$, so daß $\bar{d}(C_t) > 0$ ist und für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge*

$$D_t = \{n \in C_t : \bar{d}(C_t \cap (C_t + n)) \geqslant \bar{d}(C_t)^2 - \varepsilon]$$

eine positive obere Dichte hat.

Jetzt geben wir einen elementaren Beweis dieses Satzes. Der Beweis ist indirekt, das heißt wir nehmen an, daß $\bar{d}(D_i) = 0$ gilt für $1 \leqslant i \leqslant l$. Wir bemerken, daß $D_i = C_i$ ist für jedes i mit $\bar{d}(C_i) = 0$. Man setze $C = \mathbb{N} - \bigcup_{i=1}^{l} D_i$. Dann gilt $\bar{d}(C) = 1$.

Sei nun $k = \lceil 4/\varepsilon^2 \rceil$ und $r = R(k, l)$ die Ramsey-Zahl. Das heißt, für jede Partition der Kanten des vollständigen Graphen mit r Ecken in l Klassen gibt es einen monochromatischen vollständigen Graphen aus k Ecken.

Aus Lemma 1(i) folgt leicht, daß es Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ gibt, so daß für jede nichtleere Teilmenge $I \subset \{1, 2, \ldots, r\}$

$$\sum_{i \in I} a_i \in C \tag{3.4}$$

gilt. Man definiere eine Partition der Kanten des vollständigen Graphen über $\{1, \ldots, r\}$ in l Klassen, in der die Kante (a, b) dann und nur dann in der Klasse i liegt, wenn

$$\sum_{a \leqslant s < b} a_s \in C_i$$

gilt. Aus der Definition von r folgt, daß es ein t mit $1 \leqslant t \leqslant l$ gibt, so daß die t-te Klasse einen vollständigen Graphen mit k Ecken enthält. Sei $\{s_1, \ldots, s_k\}$ die Eckenmenge dieses Graphen mit $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_k \leqslant r$. Man setze

$$b_i = \sum_{s_1 \leqslant j < s_i} a_j,$$

und wende Lemma 1(ii) mit $C = C_t$, $\bar{d} = \bar{d}(C_t)$ an. Dann enthält man Indizes $1 \leqslant i < j \leqslant k$ mit

$$\bar{d}((b_i + C) \cap (b_j + C)) > \bar{d}^2 - \varepsilon,$$

oder, was gleichwertig ist,

$$\bar{d}(C_t \cap (C_t + (b_j - b_i))) > \bar{d}^2 - \varepsilon.$$

Das heißt aber, daß das Element $b_j - b_i = \sum_{s_i \leqslant u < s_j} a_u \in C_t$ in D_t liegt. Dies ist ein Widerspruch zu (3.4). ■

4 Eine gemeinsame Verschärfung der Sätze von Schur und van der Waerden

Zuerst werden wir eine modifizierte Definition von (m,p,c)-Mengen geben. Für $m,p,c \in \mathbb{N}$ ist eine $(m,p,c)^+$-Menge die Menge aller Linearkombinationen des folgenden Typs:

$$\{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + c a_i : 0 \leqslant \lambda_i < p,\ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

wobei $a_1, \ldots, a_m$ beliebige natürliche Zahlen sind. Die obige $(m,p,c)^+$-Menge wird durch $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ bezeichnet. Wir werden einen Satz über $(2,p,1)^+$-Mengen beweisen. Die $(2,p,1)^+$-Menge $\langle x,y \rangle$ besteht aus den Zahlen $x, y, y+x, y+2x, \ldots, y+(p-1)x$, das heißt, sie ist die Vereinigung von einem Lösungssystem der Gleichung von Schur $(x+y=z)$ und einer arithmetischen Folge der Länge p.

Sei $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$ und seien $M, P, C \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß jede Partition einer $(M,P,C)^+$-Menge in r Klassen eine monochromatische $(2,p,1)^+$-Menge enthält (die Existenz von M, P, C folgt aus dem Satz von Deuber [D]).

Satz 4.1. *Sei* $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ *eine beliebige Partition,* $p > 2$, $\delta = 1/2(1+C)^M p^{\binom{M}{2}}$. *Man setze*

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \bar{d}\{y : \langle x, y\rangle \text{ ist monochromatisch}\} \leqslant \delta\}.$$

Dann gilt

(4.1) $\quad \bar{d}(B) < 1 - \delta.$

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß (4.1) falsch ist. Man setze $B_1 = \{b \in B : \langle b \rangle \subset B\} = \{b \in B : Cb \in B\}$. Dann gilt

(4.2) $\quad 1 - \bar{d}(B_1) \leqslant (1 + C)(1 - \bar{d}(B)) \leqslant (1 + C)\delta < 1.$

Sei $a_1 \in B_1$. Wir werden neue Mengen B_i und Elemente $a_i \in B_i$ rekursiv definieren. Nehmen wir an, daß $a_1, a_2, \ldots, a_i \in B_i$ schon definiert sind und $\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ keine monochromatische $(2,p,1)^+$-Menge enthält.

Man setze $A = \left\{ \sum_{j \leqslant i} \lambda_j a_j : 0 \leqslant \lambda_j < P \right\}$ und

$$B_{i+1} = \{b \in B_i : (A + Cb) \subset B_i\}.$$

Dann sieht man leicht ein, daß

(4.3) $\quad 1-\bar{d}(B_{i+1}) \leqslant (1+C|A|)(1-\bar{d}(B_i))$

gilt. (4.2) und (4.3) ergeben

(4.4) $\quad 1-\bar{d}(B_{i+1}) \leqslant \delta \prod_{0\leqslant j\leqslant i} (1+CP^j).$

Nun wählt man ein $a_{i+1}\in B_{i+1}$, so daß $\langle a_1,\dots,a_{i+1}\rangle$ immer noch keine monochromatische $(2,p,1)^+$-Menge enthält. Wenn es so ein a_{i+1} nicht mehr gibt, halten wir an. Nach dem Satz von Deuber wird das für $i+1\leqslant M$ passieren. Dann enthält die $(i+1,P,C)^+$-Menge $\langle a_1,\dots,a_i,b\rangle$ für jedes $b\in B_{i+1}$ eine monochromatische $(2,p,1)^+$-Menge, sagen wir $\langle x(b),y(b)\rangle$.

Sei $b>P(a_1+\dots+a_i)$. Dann ist $Cb+(P-1)(a_1+\dots+a_i)<(1+C)b$ die größte Zahl in der Menge $\langle a_1,\dots,a_i,b\rangle$. Da $p>2$ gilt, enthält $\langle x(b),y(b)\rangle\subset\langle a_1,\dots,a_i,b\rangle$ das Element $y(b)+2x(b)$, woraus $x(b)<Cb$ folgt, so daß $x(b)\in\langle a_1,\dots,a_i\rangle$ gilt. Da $\langle a_1,\dots,a_i\rangle$ keine monochromatische $(2,p,1)^+$-Menge enthält, ist $y(b)\notin\langle a_1,\dots,a_i\rangle$. Das heißt, daß $y(b)=Cb+\lambda_1a_1+\dots+\lambda_ia_i$ gilt. Sei $x(b)=\mu_1a_1+\dots+\mu_ia_i$. Man setze

$$\lambda(b)=(\lambda_1,\dots,\lambda_i),\ \mu(b)=(\mu_1,\dots,\mu_i).$$

Die Anzahl von Möglichkeiten für $\lambda(b)$ ist P^i, und für $\mu(b)$ ist sie $P^{i-1}+P^{i-2}+\dots+P+1$. Das ergibt insgesamt $P^i(P^i-1)/(P-1)<P^{2M-2}$ Möglichkeiten. Deswegen gibt es eine Wahl $\vec{\lambda},\vec{\mu}$, so daß die Menge $B^*=\{b\in B_{i+1}:\lambda(b)=\vec{\lambda},\mu(b)=\vec{\mu}\}$ die Eigenschaft

(4.5) $\quad \bar{d}(B^*)>\bar{d}(B_{i+1})/P^{2M-2}$

hat. Da $x(b)\in B$, erhält man

$$\bar{d}\{y(b):b\in B^*\}\leqslant\delta.$$

Aus $y(b)<(1+C)b$ folgt dann

$$\bar{d}(B^*)<(1+C)\delta.$$

Wenn man diese Ungleichung mit (4.5) und (4.4) vergleicht, erhält man $(i+1\leqslant M)$

$$1\leqslant\delta(1+C)P^{2M-2}+\prod_{0\leqslant j<M}(1+CP^j)<2\delta(1+C)^MP^{\binom{M}{2}},$$

das heißt $\delta>1/2(1+C)^MP^{\binom{M}{2}}$, in Widerspruch zu unseren Annahmen. ■

Bemerkungen. Unser Satz ist stärker als der Satz von Bergelson (sogar für den Fall der Lösungen der Gleichung von Schur) in dem Sinne, daß wir von der Menge

$$\bar{B}=\mathbb{N}-B=\{x\in\mathbb{N}:\bar{d}\{y:\langle x,y\rangle \text{ ist monochromatisch}\}>\delta\}$$

die Ungleichung $\underline{d}(\bar{B}) \geqslant \delta$ bewiesen haben. Das heißt, wir haben eine untere Schranke für die *untere* Dichte einer Menge gegeben.

Man kann Beispiele angeben, die zeigen, daß die Reihenfolge von $\underline{d}$ und $\bar{d}$ nicht verändert werden kann.

5 Eine Verschärfung des Folkman-Rado-Sandersschen Satzes

Eine endliche Menge $A \subset \mathbb{N}$ heißt unabhängig, wenn für alle $2^{|A|}$ Untermengen $A_0 \subset A$ die Teilsummen $\sum_{a \in A_0} a$ verschieden sind. Wir setzen

$$\Sigma A = \left\{ \sum_{a \in A_0} a: \qquad \emptyset \neq A_0 \subset A \right\}.$$

Das heißt, A ist unabhängig dann und nur dann, wenn $|\Sigma A| = 2^{|A|} - 1$.

Satz von Folkman-Rado-Sanders (cf. [G], [GRS]). *Für alle ganzen Zahlen $r, k \geqslant 2$ gibt es ein $n = n(r, k)$, so daß es für jede unabhängige Menge $B \subset \mathbb{N}$ der Mächtigkeit n und jede Partition von ΣB in r Klassen eine unabhängige Menge A der Mächtigkeit k gibt, so daß $\Sigma A \subset \Sigma B$ monochromatisch ist.*

Sei nun $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ eine beliebige Partition von $\mathbb{N}$. Sei δ eine sehr kleine, aber positive Konstante (wir werden den Wert von δ erst später fixieren).

Wir werden für jede unabhängige Menge A mit $|A| \leqslant k-1$ eine Menge $\Gamma(A) \subset \mathbb{N}$ definieren. Für $|A| = k-1$ setzen wir

$$\Gamma(A) = \{x \in \mathbb{N} : A \cup \{x\} \text{ ist unabhängig, } \Sigma A \cup \{x\} \text{ ist monochromatisch}\}.$$

Für $|A| = k-2$ setzen wir

$$\Gamma(A) = \{a_{k-1} \in \mathbb{N} : \bar{d}(\Gamma(A \cup \{a_{k-1}\})) > \delta\}.$$

Allgemein setzen wir für $A = \{a_1, \ldots, a_i\}$ mit $i < k-1$

$$\Gamma(A) = \{a_{i+1} \in \mathbb{N} : \bar{d}(\Gamma(A \cup \{a_{i+1}\})) > \delta\}.$$

Man bemerke, daß $\Gamma(A) = \emptyset$ gilt, falls entweder A nicht unabhängig oder ΣA nicht monochromatisch ist.

Satz 5.1. *Für $\delta < 2^{-n(r,k)k}$ gilt*

$$\underline{d}(\Gamma(\emptyset)) > \delta. \tag{5.1}$$

B e w e i s: Der Beweis ist indirekt. Wir nehmen an, daß (5.1) falsch ist. Seien $D_1 = \mathbb{N} - \Gamma(\emptyset)$ und $d_1 \in D_1$, so daß $\bar{d}(\Gamma(d_1)) < \delta$ gilt. Wir werden induktiv Mengen $D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_s \ldots$ und Elemente $d_2 \in D_2, \ldots, d_s \in D_s$ konstruieren, für die (i) und (ii) gelten. Für eine Teilsumme $d = d_{i_1} + \ldots + d_{i_q}$ setzen wir $p(d) = \max_{1 \leqslant v \leqslant q} i_v$.

(i) $d_i > 3d_{i-1}$ für $2 \leqslant i < s$, und es gibt keine unabhängige Menge A mit $|A| = k$ und $\Sigma A \subset \Sigma\{d_1, \ldots, d_s\}$, ΣA monochromatisch.

(ii) für jede Sequenz $b_1, b_2, \ldots, b_q \in \Sigma\{d_1, \ldots, d_s\}$ mit $p(b_1) < p(b_2) < \ldots < p(b_q)$ für $1 \leqslant q \leqslant k-1$ gilt

$$\bar{d}(\Gamma(b_1, \ldots, b_q)) < \delta.$$

Wegen Bedingung (i) kann s nicht größer als $n(r, k)$ aus dem vorigen Satz sein. Sei also s die größte Zahl, für die wir noch D_s und d_s konstruieren können, und setze $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$.

Wegen der Bedingung $d_i > 3d_{i-1}$ ist D unabhängig, und falls $B = \{b_1, \ldots, b_q\}$ mit $b_1 < b_2 < \ldots < b_q$ unabhängig mit $\Sigma B \subset \Sigma D$ ist, dann muß $p(b_1) < p(b_2) < \ldots < p(b_q)$ sein. Insbesondere gilt

$$\bar{d}(\Gamma(b_1, \ldots, b_q)) < \delta.$$

Man setze

$$D_{s+1} = \mathbb{N} - \bigcup_{0 \leqslant q < k} (\cup \{\Gamma(b_1, \ldots, b_q) : p(b_1) < \ldots < p(b_q), \; \Sigma\{b_1, \ldots, b_q\} \subset \Sigma D\}).$$

Dann hat man

$$\underline{d}(D_{s+1}) \geqslant 1 - (2^s)^{k-1}\delta > 1 - 2^{n(r,k)(k-1)}\delta > 1 - 2^{-s-1} \tag{5.2}$$

zum Beispiel für $\delta < 2^{-n(r,k)k}$. Aus (5.2) folgt, daß die Menge

$$B = \{b : b > 3d_s, (\Sigma D \cup \{b\} - \Sigma D) \subset D_{s+1}\}$$

eine untere Dichte von mindestens 1/2 hat. Wegen der Maximalität von s gibt es für jedes $x \in B$ eine unabhängige Menge $B(x) = \{b_1(x), b_2(x), \ldots, b_{k-1}(x), b_k(x)\}$ mit $\Sigma B(x) \subset \Sigma D \cup \{x\}$ und $\Sigma B(x)$ monochromatisch. Deswegen hat man $b_k(x) \in \Gamma(b_1(x), \ldots, b_{k-1}(x))$. Wegen (i) gilt

$$p(b_1(x)) < p(b_2(x)) < \ldots < p(b_{k-1}(x)) < p(b_k(x)) = s + 1$$

und deshalb ist

$$b_k(x) \in D_{s+1} \subset \mathbb{N} - \Gamma(b_1(x), \ldots, b_{k-1}(x)),$$

was den gewünschten Widerspruch liefert. ■

6 Quantitative Versionen des Satzes von Ramsey

Für eine endliche Menge X und eine natürliche Zahl k sei $\binom{X}{k}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von X. Der Satz von Ramsey sagt, daß es für jedes Tripel $k, l, r \in \mathbb{N}$, $l > k$, $r \geqslant 2$ eine natürliche Zahl $R(k, l, r)$ gibt, so daß es für $|X| \geqslant R(k, l, r)$ und für jede Partition von $\binom{X}{k}$ in r Klassen eine Menge $Y \in \binom{X}{l}$ gibt, so daß $\binom{Y}{k}$ monochromatisch ist.

Der folgende Satz ist eine direkte Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Katona, Nemetz und Simonovits [KNS]. Sei $f(m,k,l,r)$ die minimale Anzahl von Mengen $Y \in \binom{X}{l}$, so daß $\binom{Y}{k}$ monochromatisch ist, wobei das Minimum über alle Partitionen von $\binom{X}{k}$ in r Klassen ($|X| = m$) genommen wird. Das heißt, die Ramseysche Zahl $R(k,l,r)$ ist die kleinste Zahl R, für die $f(R,k,l,r) \geqslant 1$ gilt.

Satz 6.1. *Die Funktion* $f(m, k, l, r)\Big/\binom{m}{l}$ *ist monoton nicht-abnehmend als Funktion von m.*

Beweis: Sei $|X| = m+1$, und man betrachte eine beliebige Partition von $\binom{X}{l}$ in r Klassen. Aus der Definition von $f(m,k,l,r)$ folgt, daß jede Menge $X-\{x\}$, $x \in X$, mindestens $f(m,k,l,r)$ l-elementige Teilmengen Y enthält, für die $\binom{Y}{k}$ monochromatisch ist. Das gibt insgesamt mindestens $(m+1)f(m,k,l,r)$ Mengen, und jede Menge wurde $(m+1-l)$-mal gerechnet. Daher folgt

$$f(m+1, k, l, r) \geqslant \frac{m+1}{m+1-l} f(m, k, l, r).$$

Wenn man beide Seiten durch $\binom{m+1}{l}$ teilt, erhält man

$$f(m+1, k, l, r)\Big/\binom{m+1}{l} \geqslant f(m, k, l, r)\Big/\binom{m}{l}. \qquad \blacksquare$$

Korollar 6.1. *Der Grenzwert*

$$\lim_{m\to\infty} f(m, k, l, r)\Big/\binom{m}{l} =: \phi(k, l, r)$$

existiert und ist größer als $1\Big/\binom{R(k, l, r)}{l}$.

Den Grenzwert $\phi(k,l,r)$ zu bestimmen, ist ein äußerst schweres Problem, sogar für $k=r=2$. Goodman [Go] hat $\phi(2,3,2)=1/4$ bewiesen und Erdős [E] hat vermutet, daß sogar im allgemeinen

$$\phi(2, l, 2) = 2^{1-\binom{l}{2}}$$

gilt. Vor kurzem hat Thomason [T] bewiesen, daß für jedes $l \geqslant 4$

$$\phi(2, l, 2) < 2^{1-\binom{l}{2}}$$

gilt. Die besten unteren Schranken für $\phi(2,4,2)$ und $\phi(2,3,3)$ hat Giraud ([Gi1], [Gi2], [Gi3]) bewiesen. Auf dieselbe Weise, wie wir es im Abschnitt 5 getan haben, kann man eine andere quantitative Version des Satzes von Ramsey beweisen.

Sei δ eine kleine aber positive Zahl, $\delta=\delta(k,l,r)$. Man betrachte eine beliebige Partition von $\binom{\mathbb{N}}{k}$ in r Klassen. Für $1 \leqslant a_1 < \ldots < a_{l-1}$ definiere man

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_{l-1}) = \left\{a_l\colon \binom{\{a_1, \ldots, a_l\}}{k} \text{ ist monochromatisch}\right\}.$$

Nehmen wir an, daß $\Gamma(a_1,\ldots,a_s)$ für jede Folge $a_1<\ldots<a_s$ mit $l-1 \geqslant s \geqslant t$ definiert ist. Dann definiert man

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_{t-1}) = \{a_t\colon \bar{d}(\Gamma(a_1, \ldots, a_t)) > \delta\}.$$

Satz 6.2 ([FGR2]). $\underline{d}(\Gamma(\emptyset)) > \delta$.

Literaturverzeichnis

[B] Bergelson, V.: A density statement generalizing Schur's theorem. J. Combin. Th. (A) **43** (1986) 338–343

[D] Deuber, W.: Partitionen und lineare Gleichungssysteme. Math. Z. **133** (1973) 109–123

[FGR1] Frankl, P.; Graham, R. L.; Rödl, V.: Quantitative theorems for regular systems of equations, J. Comb. Th. (A) **47** (1988) 246–261

[FGR2] Frankl, P.; Graham, R. L; Rödl, V.: On the distribution of monochromatic configurations. Proc. Hung. Comb. Conf., Fertöd 1986, in Irregularities of Partitions, G. Halász and V. T. Sos (Eds.), Algorithms and Combinatories 8, Springer-Verlag 1989, 71–87

[FK] Fürstenberg, H.; Katznelson, Y.: An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. J. Analyse Math. **34** (1978) 275–291

[Gi1] Giraud, G.: Une minoration du nombre de quadrangles unicolores et son application á la majoration des nombres de Ramsey binaires-bicolores. C. R. Acad. Sci. Paris **276** (1973) 1173–1175

[Gi2] Giraud, G.: Sur les proportions respectives des triangles uni, bi ou tricolores dans un tricoloriage des arêtes du n-emble. Discrete Math. **16** (1976) 13–38

[Gi3] Giraud, G.: Sur le probléme de Goodman pour les quadrangles et la majoration des nombres de Ramsey. J. Combin. Theory Ser. B **27** (1979) 237–253

[Go] Goodman, A. W.: On sets of acquaintances and strangers at any party. Amer. Math. Monthly **66** (1959) 778–783

[G] Graham, R. L.: Rudiments of Ramsey Theory, Regional Conference Series in Mathematics, no. 45, AMS, 1981

[GRS] Graham, R. L.; Rothschild, B. L.; Spencer, J. H.: Ramsey Theory. John Wiley & Sons Inc. 1980

[GR] Graham, R. L.; Rödl, V.: Numbers in Ramsey theory. In: Surveys in Combinatorics 1987 (C. Whitehead, ed.) LMS Lecture Series 123, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987, 111–153

[KNS] Katona, G. O. H.; Nemetz, T.; Simonovits, M.: On a graph problem of Turán. Mat. Lapok **15** (1964) 228–238 (in Hungarian)

[R] Rado, R.: Studien zur Kombinatorik. Math. Z. **36** (1933) 242–280

[Ra] Ramsey, F. P.: On a problem in formal logic. Proc. London Math. Soc. (2) **30** (1930) 264–285

[S] Schur, I.: Über die Kongruenz $x^m+y^m \equiv z^m \pmod p$. Jber. Dt. Math.-Verein. **25** (1916) 114–116

[Sh] Shelah, S.: Primitive bounds for van der Waerden numbers. J. Amer. Math. Soc. **1** (1988) 683–697

[Sz] Szemerédi, E.: On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Acta Arith. **27** (1975) 199–245

[T] Thomason, A.: Random graphs, strongly regular graphs and pseudorandom graphs. In: Surveys in Combinatorics 1987 (C. Whitehead, ed.) LMS Lecture Notes Series 123. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1987, 173–196

[W] van der Waerden, B. L.: Beweis einer Baudetschen Vermutung. Nieuw Arch. Wisk. **15** (1927) 212–216

P. Frankl
R. L. Graham
V. Rödl
AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974, USA

(Eingegangen: 8. 3. 1990)

Buchbesprechungen

Lüneburg, H., On the Rational Normal Form of Endomorphisms, A Primer to Constructive Algebra, Mannheim – Wien – Zürich: B. I.-Wissenschaftsverlag 1987, 397 pp., Hardcover, DM 48,–

Das Buch liefert einen guten Beitrag zur Konstruktiven Algebra. Allerdings sind Titel und Inhaltsverzeichnis irreführend. Die rationale Normalform von Matrizen wird nur als Aufhänger genommen, um dann im Buch schwerpunktmäßig zahlreiche PASCAL-Programme zu Algorithmen und Funktionen der Algebra zu bringen. Da das Buch die theoretische Kenntnis aller programmierten Verfahren mehr oder weniger voraussetzt, eignet es sich kaum als Einführung in die Konstruktive Algebra. Die im Inhaltsverzeichnis aufscheinenden Routinen für Long Integers sind nur unter Verweis auf Unterprogramme in maschinenabhängiger Assembler-Programmierung enthalten und damit für den Leser nicht nachvollziehbar.

Der Hauptteil des Buches umfaßt 22 Abschnitte und ist in einer Art PASCAL-Kauderwelsch, vermischt mit deutschen Wortbrocken geschrieben. Zu Beginn werden Algorithmen der elementaren Zahlentheorie in Form von PASCAL-Programmen behandelt. Darauf folgen Abschnitte über das praktische Rechnen in Polynomringen, in Vektorräumen über endlichen Körpern und in endlich erzeugten Torsionsmoduln über Hauptidealringen. Danach wird mit Hilfe der Sylvesterschen Identität ein Verfahren für die Berechnung der rationalen Normalform von Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume über endlichen Körpern besprochen. Für die praktische Berechnung wird ein PASCAL-Programm angegeben.

Als nächstes werden PASCAL-Programme zur Berechnung von Normalbasen in endlichen Körpern aufgelistet. Dann wird ausgehend von einem irreduziblen Polynom n-ten Grades über einem Primkörper ein Verfahren zur Berechnung aller irreduziblen Polynome vom Grad n über diesem Körper hergeleitet.

Theorie und Programme zum Chinesischen Restsatz, zu den Ulm-Invarianten endlich erzeugter Torsionsmoduln über Hauptidealringen und zur Struktur von Faktorringen von Polynomen über endlichen Körpern bilden die nächsten Inhalte. Darauf folgen der Berlekamp-Algorithmus und ein auf Cantor und Zassenhaus zurückgehender probabilistischer Algorithmus zur Faktorisierung von Polynomen über endlichen Körpern. Weiters wird das Problem der Berechnung von Primitivwurzeln in endlichen Körpern behandelt.

Als Vorbereitung zur Berechnung der rationalen Normalform von Endomorphismen endlich dimensionaler Vektorräume über den rationalen Zahlen werden Eigenschaften von Polynomen über ZPE-Ringen und Sätze zur Berechnung von Schranken für die Koeffizienten der Elementarteiler endlichdimensionaler Vektorräume über den komplexen Zahlen besprochen. Das angegebene Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Polynoms einer Matrix über den ganzen Zahlen basiert auf der Newton-Interpolation.

Im nachfolgenden Abschnitt werden einige Long-Integer-Prozeduren angeführt, wobei aber von den dabei wesentlichen Unterprogrammen im Anhang des Buches nur die Programmköpfe aufscheinen.

Die restlichen Abschnitte des Hauptteiles dienen der Angabe eines Verfahrens zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzzahliger Polynome, bei dem die größenmäßige Kontrolle über die in der Rechnung vorkommenden Restpolynome nicht verloren geht. Mehrere Programme zur Berechnung der rationalen Normalform von Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume über den rationalen Zahlen beschließen den Hauptteil.

Im zweiten Teil des Buches werden Rechenbeispiele zu im Hauptteil angeführten Verfahren angegeben. Diese Beispiele demonstrieren das Funktionieren der entwickelten Programme und überraschen durch die oft sehr kurzen Rechenzeiten.

Im Anhang des Buches finden sich Verzeichnisse der enthaltenen Programme, eine Bibliographie und ein Index.

Zusammenfassend muß gesagt werden, daß der Druck des Buches mit einem gewöhnlichen Nadeldrucker eine Zumutung ist, da auch „fleißige Programmierer" 393 Seiten in dieser Schriftqualität nicht gerne lesen. Im Zeitalter ausgezeichneter und einfacher Textverarbeitungssysteme sollten sich auch angewandte Mathematiker diesen Methoden zur Erleichterung des Lebens nicht verschließen. Das Buch dürfte ziemlich druckfehlerfrei geschrieben sein, allerdings sind die Bezeichnungen inkonsistent und ständig deutsche Namen ins Englische eingeschleust. So findet man z. B. nebeneinander „GGT" und „gcd" für den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Zahlen, kommen „Euklid" und „euclidian" vor u. ä. Die Worttrennungen wurden entgegengesetzt allen Richtlinien mit „=" gekennzeichnet. Am gravierendsten emfinde ich jedoch die Angabe von Programmen zu Algorithmen, ohne die Algorithmen selbst anzugeben. Dabei erschweren Zwischenteile zum Programmtesten und eingefügte Bemerkungen oft noch zusätzlich das Verständnis der Programme. In guten Büchern findet man heute zum besseren Verständnis von Algorithmen auch Flußdiagramme. Englische Leser haben mir mitgeteilt, daß sie die in die Programme eingestreuten deutschen Bezeichnungen als sehr störend empfinden. Für nicht Deutsch Sprechende sind diese Ausdrücke oft nicht mehr als irgendwelche Variable. Viele Programme sind durch die Definition der Variablen als „integers" auf den Bereich von -2^{15} bis $+2^{15}$ eingeschränkt.

Trotz dieser Schwächen und der oft ungewöhnlich aussehenden PASCAL-Programme muß man aber feststellen, daß die angegebenen Prozeduren sehr zuverlässig und schnell arbeiten. Der Autor gibt recht interessante Kommentare über Rechenzeiten, Speicherplatzbedarf und Tücken beim praktischen Rechnen mit den Programmen an. Schon beim Programm „function GGT" auf den Seiten 16 und 17 des Buches kann man feststellen, daß plausiblere und kürzere „ad hoc-Programme" zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Zahlen etwa doppelt so lange wie die im Buch angegebene Prozedur dauern. Das Buch ist damit sicher eine Fundgrube für ausgezeichnete und offenbar auch sehr ausgetestete Programme der Konstruktiven Algebra. Die zugehörige Theorie wird man sich aber wahrscheinlich leichter und besser woanders aneignen.

Klagenfurt W. B. Müller

Andrianov, A. N., Quadratic Forms and Hecke Operators (Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Band 286), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1987, 3 figs., XII, 374 pp., Hard cover, DM 184,–

Andrianovs Buch ist ein "*self contained*" geschriebenes Lehrbuch über Siegelsche Modulformen. Nach einer solide geschriebenen Einführung in diese Theorie wird die Theorie der *Heckeoperatoren* entwickelt. Im Vordergrund des Interesses stehen *multiplikative Eigenschaften von Fourierkoeffizienten* von Modulformen, insbesondere von Thetareihen zu positiv definiten quadratischen Formen. Die Fourierkoeffizienten dieser Thetareihen sind Anzahlen ganzzahliger Darstellungen von positiv definiten quadratischen Formen beliebiger Variablenzahl durch eine gegebene positiv definite quadratische Form. Daß diese Darstellungsanzahlen multiplikative Eigenschaften haben, ist ein tiefes Phänomen, welches rein arithmetisch bis heute nicht erklärt werden kann. Die multiplikativen Eigenschaften der Fourierkoeffizienten sind schwer auszusprechen. Sie sind in Identitäten zwischen gewissen

Dirichlet-Reihen, welche man aus den Fourierkoeffzienten einer Eigenform der Heckealgebra, und gewissen Eulerprodukten, welche man aus den Eigenwerten bildet, verborgen. Will man diese Identitäten auf die erwähnten Darstellungsanzahlen anwenden, so muß man noch die Wirkung der Heckoperatoren auf Thetareihen bestimmen. Auch dies ist in dem Buch enthalten.

Der größte Teil dieser Theorie stammt von Andrianov selbst. Der Aufbau der Heckealgebra, insbesondere die Einführung der *„großen Heckealgebra"* zur parabolischen Gruppe

$$\left\{M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}; \quad C = 0\right\},$$

ist eine Theorie, welche man Andrianov verdankt. Viele Resultate des Buches sind in den Originalarbeiten von Andrianov – zum Teil in russischer Sprache – veröffentlicht. Es ist ein großes Verdienst Andrianovs, die gesamte Theorie in einem gediegenen Lehrbuch leichter zugänglich zu machen.

Von den Voraussetzungen her kann das Buch von einem Studenten mittleren Semesters gelesen werden. Seine Geduld wird freilich auf eine harte Probe gestellt werden. Viele Passagen der Theorie, vor allem die Strukturtheorie der Heckealgebra, sind zwar elementar aber äußerst kompliziert.

Die Zukunft mag zeigen, ob andere, etwa darstellungstheoretisch orientierte Zugänge mehr Klarheit bringen werden.

Es ist ein großes Verdienst Andrianovs, eine komplizierte Theorie geschlossen darzustellen. Die sorgfältige Darstellung genügt hohen Ansprüchen. Es ist zu hoffen, daß das Buch die ihm gebührende Aufmerksamkeit finden wird.

Heidelberg E. Freitag

Purkert, W., Ilgauds, H. J., Georg Cantor (Vita Mathematica), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1987, 262pp., Hardcover, DM 58,–

Dieses Buch beschreibt Leben und Werk des genialen Mathematikers G. Cantor. Lebendig ist die Schilderung der Stationen seines Lebens und seiner familiären Umgebung. Dieser biographische Teil ist vorzüglich recherchiert, mit vielen Photographien illustriert und mit zahlreichen neuen Dokumenten belegt. Auch die Persönlichkeit Cantors tritt lebendig vor die Augen des Lesers. Er lernt ihn mit all seiner Impulsivität kennen, mit seinen vorschnellen Reaktionen, seinem Witz, seinem Hang zu Geselligkeit, seinem verbissenen Arbeitseifer und schließlich seinen Depressionen in der Zeit seiner Krankheit.

Vorzüglich ist auch die Schilderung des wissenschaftlichen Werdegangs Cantors und seiner großen Leistungen. Hier ist die Darstellung bei aller Kürze doch stets ausführlich genug, um das Wesentliche klar auszusprechen. Dieses Buch ist meines Erachtens die wertvollste Cantor-Biographie, die je geschrieben wurde.

An einigen wenigen Stellen könnte man jedoch noch Verbesserungen vornehmen. Auf p. 177 wird zum Beweis der Undurchführbarkeit des Hilbertschen Programms der erste Gödelsche Unvollständigkeits-Satz genannt. Dieser besagt aber nur, daß jede rekursive Axiomatisierung der Mengenlehre notwendig unvollständig sein muß. Die Autoren hätten den zweiten Unvollständigkeits-Satz zitieren müssen! Die Ackermannsche Mengenlehre (Math. Annalen **131** (1956), pp. 336–345), die Cantors Konzeption des Mengenbegriffs viel genauer als die Zermelo-Fraenkelsche wiedergibt, wird überhaupt nicht erwähnt. Auf p. 36 wird die moderne Theorie der reellen Zahlen kurz umrissen und gesagt, dies sei Cantors

Theorie. Dies ist nur bedingt richtig, denn Cantor führt die reellen Zahlen auf sehr viel komplizierterem Wege durch den Aufbau einer Hierarchie ein.

Größeres Gewicht haben die beiden folgenden Einwände. (1) Die Rollen, die B. Bolzano und R. Dedekind bei der Entstehung der Mengenlehre gespielt haben, werden unterbewertet. Vor Bolzano war mit dem Wort „Menge" immer nur eine unbestimmt gelassene größere Anzahl einzelner Objekte gemeint worden und die Menge selbst wurde nicht als Objekt betrachtet. Erst mit Bolzano wurden Mengen zu Objekten des Denkens, also zu Objekten mit eigenem (Da-)Sein. Erst dieser ontologisch geprägte Mengenbegriff Bolzanos erlaubte eine mathematische Analyse des Universums aller Mengen. Diese Analyse wurde nicht mehr von Bolzano, sondern erst von Cantor unternommen. Übrigens ist Cantors berühmte Definition des Mengenbegriffs nur eine Paraphrase der Bolzanoschen Beschreibung (cf. Bolzanos „Wissenschaftslehre" und „Größenlehre"). (2) Cantors Philosophie wird von den Autoren immer fälschlicherweise als Platonismus bezeichnet. Richtiger wäre die Bezeichnung „theologischer Realismus", denn Mengen existieren für Cantor, wenn sie im Denken Gottes vorkommen. Dabei wird der Gottesbegriff der griechisch-römischen Antike (Aristoteles, Cicero et al.) zugrunde gelegt (wie er auch aus der christlichen Theologie bekannt ist), um über das „Denken Gottes" Aussagen machen zu können. Diese Philosophie Cantors wird in dem Buch sehr deutlich und gut dargestellt – mit dem einzigen Fehler, daß sie als Platonismus bezeichnet wird.

Tübingen U. Felgner

Lehto, O., Univalent Functions and Teichmüller Spaces (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 109), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1987, 16 figs., 270 pp., Hardcover, DM 124,–

Das zu besprechende Buch ist in fünf Kapitel unterteilt, die die folgenden Überschriften tragen: I. Quasiconformal Mappings, II. Univalent Functions, III. Universal Teichmüller Space, IV. Riemann Surfaces, V. Teichmüller Spaces.

Das erste Kapitel gibt einen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften der quasikonformen Abbildungen in der Ebene. Als Stichworte seien genannt: Die geometrische und die analytische Definition quasikonformer Abbildungen, das Randwertproblem und die Lösung von Ahlfors-Beurling, die komplexe Dilatation und der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Beltramische Differentialgleichung. Für die Beweise wird zum Teil auf das Standardwerk desselben Autors zusammen mit K. I. Virtanen: Quasiconformal Mappings in the Plane, Springer-Verlag (1973), verwiesen. Ein eindrucksvoller Abschnitt ist den Quasikreisscheiben, also den Bildgebieten der Kreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ unter quasikonformen Abbildungen der abgeschlossenen Ebene $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gewidmet; auf wenigen Seiten findet man hier eine Darstellung verschiedener wichtiger Charakterisierungen dieser allenthalben vorkommenden Gebiete.

Im Mittelpunkt des zweiten Kapitels über schlichte Funktionen steht die Untersuchung der Schwarzschen Ableitung $S_f = (f''/f')' - \frac{1}{2}(f''/f')^2$, jener holomorphen Differentialinvarianten der konformen Abbildung, die für das Berssche Modell eines Teichmüllerraums von so großer Bedeutung ist. Von zentralem Interesse sind schlichte Funktionen mit quasikonformer Fortsetzung und die gegenseitige Abhängigkeit zwischen der Schwarzschen Ableitung S_f und der komplexen Dilatation $\mu_F = F_{\bar{z}}/F_z$ einer quasikonformen Fortsetzung F von f. Dabei spielt einerseits der Satz über die holomorphe Abhängigkeit von der komplexen Dilatation eine wichtige Rolle – auf ihm beruht die Lehtosche Majorantenmethode zur Abschätzung quasikonform fortsetzbarer schlichter Funktionen –

andererseits sind Kriterien (vom Neharischen Typ) für die Schlichtheit und die quasikonforme Fortsetzbarkeit meromorpher Funktionen von großer Bedeutung.

Im dritten Kapitel kann nun bereits die Theorie des universellen Teichmüllerraums entwickelt werden, wobei freilich manche Begriffsbildungen ihre eigentliche Motivation erst durch das fünfte Kapitel über die Teichmüllerräume Riemannscher Flächen erhalten. Die Punkte des universellen Teichmüllerraums T sind zunächst definitionsgemäß Äquivalenzklassen normierter quasikonformer Automorphismen etwa der oberen Halbebene H, wobei zwei derartige Selbstabbildungen von H als äquivalent angesehen werden, wenn sie auf der reellen Achse übereinstimmen, und die erwähnte Normierung besteht darin, daß die Randwerte, die nach der Theorie des Randwertproblems eine quasisymmetrische reelle Funktion bilden, die Fixpunkte 0, 1 und ∞ haben. Wenn man die komplexen Dilatationen der quasikonformen Automorphismen von H zu entsprechenden Äquivalenzklassen zusammenfaßt, erhält man sogleich ein zweites Modell von T. Setzt man die komplexen Dilatationen jeder Äquivalenzklasse auf die ganze Ebene fort, indem man sie außerhalb von H gleich Null setzt, so liefert der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Beltramische Differentialgleichung eine eindeutig bestimmte normierte schlichte Funktion f, definiert in der komplementären Halbebene derart, daß f auf $\mathbb{C}$ quasikonform fortsetzbar ist, wobei die komplexen Dilatationen aller möglichen quasikonformen Fortsetzungen genau die betrachtete Äquivalenzklasse bilden. Wenn man nun schließlich noch die Schwarzsche Ableitung S_f nimmt, gelangt man zum fundamentalen Bersschen Modell $T(1)$ des universellen Teichmüllerraums T.

Genauer betrachtet man hierzu den Banachraum Q aller in der Halbebene holomorphen Funktionen φ mit der endlichen hyperbolischen Supremumsnorm $\|\varphi\| = \sup 4\,(\mathrm{Im}\,z)^2|\varphi(z)|$; die Berssche Einbettung von T in Q erhält man nun, indem man die Teilmenge $T(1) \subset Q$ der Schwarzschen Ableitungen aller quasikonform fortsetzbaren schlichten Funktionen nimmt. Bezeichnet U die Obermenge der Schwarzschen Ableitungen sämtlicher schlichter Funktionen, so ist U abgeschlossen in Q, und aufgrund wohlbekannter Resultate aus der Theorie der schlichten Funktionen gilt $\{\varphi \in Q : \|\varphi\| \leqslant 2\} \subset U \subset \{\varphi \in Q : \|\varphi\| \leqslant 6\}$. Nach Ahlfors und Gehring ist $T(1) \subset U$ offen in Q und besteht genau aus den inneren Punkten von U. Die abgeschlossene Hülle von $T(1)$ stimmt jedoch nicht, wie eine Zeitlang vermutet worden ist (Berssche Vermutung), mit U überein, vielmehr gibt es nach Thurston sogar isolierte Punkte in U. Führt man im ursprünglichen Modell T als Metrik den Teichmüllerabstand $\tau(\mathrm{p}, \mathrm{q}) = \frac{1}{2} \inf \{\log K_{g \circ f^{-1}} : f \in p, g \in q\}$ ein, wobei $K_F = (1 + \|F_{\bar{z}}/F_z\|_\infty)/(1 - \|F_{\bar{z}}/F_z\|_\infty)$ die Maximaldilatation einer quasikonformen Abbildung F bezeichnet, so wird T zu einem vollständigen und wegzusammenhängenden metrischen Raum, und das Hauptresultat der Bersschen Einbettung ist nun, daß T zu $T(1)$ homöomorph ist, d. h. der universelle Teichmüllerraum erscheint im topologisch äquivalenten Bersschen Modell als offene und zusammenhängende Teilmenge des Banachraums Q.

Das vierte Kapitel über Riemannsche Flächen enthält die für die Darstellung der Teichmüllerräume Riemannscher Flächen zusätzlich erforderlichen Grundlagen. Einige Stichworte mögen genügen: Standarddefinition der Riemannschen Fläche, Differentiale auf Riemannschen Flächen, Überlagerungsflächen, Uniformisierungssatz, Fuchssche und Kleinsche Gruppen, kompakte Riemannsche Flächen und Satz von Riemann-Roch. Das Kapitel schließt mit Abschnitten über quadratische Differentiale, die sowohl bei der Bersschen als auch bei der Teichmüllerschen Einbettung eine so wichtige Rolle spielen. Für die Beweise der Hauptresultate dieses Kapitels wird verständlicherweise weitgehend auf Standardmonographien verwiesen.

Das fünfte Kapitel über die Teichmüllerräume Riemannscher Flächen bildet den krönenden Abschluß des Buches. Hauptthema sind die Berssche und die Teichmüllersche

Einbettung in bestimmte Räume quadratischer Differentiale. Sei S zunächst eine beliebige Riemannsche Fläche. Betrachtet man zwei quasikonforme Abbildungen von S auf andere Riemannsche Flächen als äquivalent, wenn die Bildflächen konform äquivalent sind, so bilden die Äquivalenzklassen den Riemannschen Raum (Riemannsches Modulproblem), der sich im Falle der Halbebene $S=H$ offenbar auf einen Punkt reduziert. Nach Teichmüller betrachtet man die stärkere Äquivalenzrelation, daß zwei quasikonforme Abbildungen homotop modulo konformer Abbildung sind, d. h. zwei quasikonforme Abbildungen f_1, f_2 von S heißen äquivalent, wenn $f_2 \circ f_1^{-1}$ homotop ist zu einer konformen Abbildung der Bildflächen aufeinander. Die Äquivalenzklassen liefern in der Tat bereits den Teichmüllerraum T_S der Riemannschen Fläche S, falls die universelle Überlagerungsfläche konform äquivalent zur Kreisscheibe $\mathbb{D}$ und die Fuchssche Gruppe der Decktransformationen von erster Art ist, und ebenso falls bei der universellen Überlagerungsfläche $\mathbb{C}$ oder $\hat{\mathbb{C}}$ herauskommt. Ist im Falle $\mathbb{D}$ die Gruppe der Decktransformationen von zweiter Art, so fordert man nach Bers zusätzlich die „Homotopie modulo Rand". Wenn $S=H$ ist, so gilt dann $T_S=T$, d. h. man bekommt im Falle der Halbebene gerade den universellen Teichmüllerraum. Man erhält wieder sogleich ein weiteres Modell, wenn man die Punkte von T_S als Äquivalenzklassen der zugehörigen komplexen Dilatationen auffaßt, wobei die komplexe Dilatation einer quasikonformen Abbildung von S jetzt als Beltrami-Differential, d. h. als $(-1, 1)$-Differential auf S zu interpretieren ist. Führt man analog zu T auch in T_S den Teichmüllerabstand ein, so wird T_S ebenfalls zu einem wegzusammenhängenden metrischen Raum.

Aufgrund des Darstellungssatzes für die Lösungen der Beltramischen Differentialgleichung bestimmt jedes Beltrami-Differential auf S eine konforme Struktur auf der Fläche, und es zeigt sich, daß die Punkte von T_S auch als Äquivalenzklassen konformer Strukturen im Sinne der Deformationsäquivalenz aufgefaßt werden können, wobei im Falle einer kompakten Fläche jede konforme Struktur auf S deformationsäquivalent zu einer durch ein Beltrami-Differential induzierten Struktur ist. Auf diese Weise dient also die Untersuchung des Teichmüllerraums T_S dem Studium der verschiedenen konformen Strukturen auf S.

Ist die universelle Überlagerungsfläche von S konform äquivalent zu $\mathbb{D}$ und nimmt man statt dessen die Halbebene H, so entsprechen den Beltrami-Differentialen auf S komplexe Dilatationen in H, die als $(-1, 1)$-Differentiale invariant unter der Gruppe G der Decktransformationen sind. Die Berssche Einbettung besteht nun wieder in der Zuordnung gewisser Schwarzscher Ableitungen $S_f \in Q$, die sich jetzt als holomorphe quadratische Differentiale für die Gruppe G erweisen, und das zentrale Resultat lautet, daß T_S homöomorph zu $T(1) \cap Q(G)$ ist, wobei $Q(G) \subset Q$ der Teilraum aller bzgl. G quadratischen Differentiale ist. Man erhält also als topologisch äquivalentes Modell von T_S eine offene und zusammenhängende Teilmenge des Banachraums $Q(G)$, wobei das Berssche Modell $T(1)$ des universellen Teichmüllerraums offenbar dem Fall $G=\{1\}$ entspricht. Die Berssche Einbettung kann weiterhin dazu benutzt werden, den Teichmüllerraum T_S in natürlicher Weise zu einer Banachmannigfaltigkeit mit komplexer Struktur zu machen, derart daß die Einbettung selbst biholomorph wird und die Teichmüllerräume quasikonform äquivalenter Flächen nicht nur isometrisch isomorph, sondern sogar biholomorph äquivalent sind.

Im weiteren Verlauf des Kapitels gilt das Interesse dann hauptsächlich den Teichmüllerräumen kompakter Flächen. Nach ausführlicher Behandlung des Teichmüllerraums eines Torus, der sich als isometrisch zur hyperbolischen Halbebene erweist, stehen die kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht $p>1$ im Mittelpunkt. Die Teichmüllersche Einbettung beruht auf dem Teichmüllerschen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, wonach jede Homotopieklasse quasikonformer Abbildungen von S genau eine sogenannte Teichmüllerabbildung enthält, d. h. die komplexe Dilatation ist extremal und hat die Gestalt $k\bar{\varphi}/|\varphi|$ $(0 \leqslant k < 1)$, wobei φ ein holomorphes quadratisches Differential auf S ist, welches für $k > 0$ bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmt ist. Bei geeigneter Normierung liefert die Teichmüllersche Einbettung einen Homöomorphismus auf die offene Einheitskugel im Raum der holomorphen quadratischen Differentiale auf S, so daß T_S nach dem Satz von Riemann-Roch homöomorph zu $\mathbb{C}^{3p-3}$ ist.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß das vorliegende Buch eine glänzend geschriebene Einführung in die Theorie der Teichmüllerräume ist, wobei das Hauptinteresse dem reizvollen und fruchtbaren Wechselspiel zwischen der Theorie der Teichmüllerräume und der Theorie der schlichten Funktionen gilt. Die Darstellung läßt an Sorgfalt, Klarheit und Eleganz nichts zu wünschen übrig.

Berlin J. Becker

Barwise, J., Feferman, S. (Herausgeber), Model-Theoretic Logics (Perspectives in Mathematical Logic), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1985, 3 figs., xviii + 893 pp., Hardcover, DM 480,–

In Einführungsvorlesungen in die Logik wird vorwiegend die Prädikatenlogik erster Stufe behandelt. In ihren Aussagen werden Quantoren als über Elemente von Modellen laufend interpretiert, nicht aber über Objekte höheren Typs wie etwa Teilmengen oder Funktionen.

Der Vorteil der Prädikatenlogik erster Stufe besteht darin, daß ihre Definition einfach und natürlich erscheint, wichtige Theorien wie etwa die Mengenlehre in ihr adäquat formulierbar sind und schöne Sätze gelten. So z. B. der (konkrete) Vollständigkeitssatz: genau die Aussagen gelten in allen Modellen, die in einem „natürlichen" Kalkül formal ableitbar sind. Wichtige Folgerungen sind der abstrakte Vollständigkeitssatz: die Menge der gültigen Sätze ist rekursiv aufzählbar, d. h. es gibt einen Algorithmus, der genau die allgemeingültigen Sätze auflistet, sowie der Kompaktheitssatz: eine Menge von Aussagen hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge ein Modell hat. Ein zweites wichtiges Ergebnis ist der Satz von Löwenheim-Skolem: jede widerspruchsfreie Theorie in einer abzählbaren Sprache hat ein höchstens abzählbares Modell.

Diese Sätze haben aber auch einen negativen Aspekt: sie bewirken, daß sich in der Prädikatenlogik erster Stufe gewisse mathematische Begriffe wie z. B. Endlichkeit oder Abzählbarkeit nicht ausdrücken lassen. Weder die Struktur der natürlichen Zahlen noch die der reellen Zahlen läßt sich in dieser Logik bis auf Isomorphie charakterisieren.

Der vorliegende Band vereinigt zwanzig Übersichtsartikel über modelltheoretische Logiken. In diesem früher als abstrakte Modelltheorie bezeichneten Gebiet werden Sprachen untersucht, die über die Prädikatenlogik erster Stufe hinaus zusätzliche mathematische Begriffe bzw. Eigenschaften von Modellen und die ihnen innewohnende Logik formalisieren, z. B.: es gibt überabzählbar viele, es gibt eine Umgebung, die Menge X hat das Maß Null .... Befriedigender- und überraschenderweise gelten für manche dieser Logiken trotz ihrer gegenüber der Prädikatenlogik erster Stufe größeren Ausdruckskraft noch der abstrakte oder konkrete Vollständigkeits- oder der Löwenheim-Skolem-Satz.

Ein zweites Ziel dieser Richtung der Modelltheorie ist ein systematischer Vergleich von Logiken im Sinne von höherer oder geringerer Ausdrucksstärke. Das Paradebeispiel sind hier Sätze von Lindström, die auch einen wesentlichen Anstoß zur Entwicklung der abstrakten Modelltheorie gaben. Sie besagen, daß im Hinblick auf die Gültigkeit von Vollständigkeits- und Löwenheim-Skolem-Satz die Ausdrucksschwäche der Prädikatenlogik erster Stufe kein Zufall ist: jede hinreichend vernünftige Logik, für die der Kompaktheits- und der Löwenheim-Skolem-Satz gelten, ist äquivalent, im Sinne gleicher Ausdrucksstärke, zur Prädikatenlogik erster Stufe; jede vernünftige Logik, für die die grundlegenden syntaktischen Begriffe effektiv, d. h. entscheidbar, sind und für die der abstrakte Vollständigkeits- und der Löwenheim-Skolem-Satz gelten, ist auf effektive Weise in der Prädikatenlogik erster Stufe enthalten.

Die abstrakte Modelltheorie stellt einen aktuellen Teil der Logik dar, in dem etwa seit den sechziger Jahren gearbeitet wird. Da sie noch als stark in der Entwicklung begriffen erscheint, schien den Herausgebern eine Monographie der Stoffülle und der relativen Unabgeschlossenheit des Gebietes wegen nicht angemessen zu sein. Man entschloß sich stattdessen, eine Reihe von Artikeln zu publizieren mit dem Ziel einer Einführung in das Gebiet und eines Überblicks über den augenblicklichen Stand der Forschung. Diese Artikel sind in sechs Teile aufgegliedert. Teil A ist eine allgemeine und zur Orientierung sowie zum späteren Nachschlagen sehr empfehlenswerte Einleitung in die abstrakte Modelltheorie, in der die wichtigsten Begriffe und ihre Zusammenhänge dargestellt werden. Teil B und C behandeln Logiken mit zusätzlichen Quantoren, aber endlich langen Formeln sowie infinitäre Sprachen mit unendlich langen Formeln (insbesondere unendlichen Disjunktionen und Konjunktionen) und Anwendungen auf die Algebra.

Für viele dieser Logiken gelten konkrete Vollständigkeitssätze bzgl. sehr natürlicher Kalküle, sie sind die ältesten und wohl auch am besten untersuchten modelltheoretischen Logiken. In Teil D werden Logiken zweiter Stufe betrachtet, d. h. solche, in denen über Mengen bzw. Relationen und Funktionen quantifiziert werden darf; die wichtigsten Ergebnisse sind hier die Ergebnisse von Shelah, daß es i. w. nur vier verschiedene zweitstufige Quantoren gibt, und von Rabin, daß einige überraschend ausdrucksfähige monadische Theorien entscheidbar sind. Teil E führt in einige neuere Logiken mit Ausdrucksmöglichkeiten für Topologie, Wahrscheinlichkeit oder Maß und Kategorie ein; Teil F ist der abstrakten Modelltheorie im moderneren Sinne gewidmet, d. h. der Untersuchung von Eigenschaften abstrakter (nur durch das Erfülltsein gewisser Axiome definierter) Logiken. Schließlich gibt es eine bis 1984 reichende Bibliographie von 101 Seiten Umfang.

Vorausgesetzt werden beim Leser gute Vertrautheit mit Logik und solide Kenntnisse der Mengenlehre; zur Motivation sollte man schon etwas klassische Modelltheorie kennen. Für Logiker, die sich einen Überblick verschaffen oder in modelltheoretische Logiken einarbeiten wollen, ist der Band eine große Hilfe, da er ein Eindringen in die Materie vielfach ohne intensives Studium zahlreicher Originalartikel ermöglicht bzw. die zentralen Resultate klar herausstellt. Die Artikel sind informativ, viele von ihnen sehr anregend.

Wie bei einem Band mit zahlreichen Autoren nicht anders zu erwarten, sind die einzelnen Kapitel im Grad der Ausführlichkeit recht unterschiedlich, allerdings auch im Grad der Genauigkeit, inklusive Typographie bzw. Organisation; vielleicht fehlte am Schluß die Zeit zum Korrekturlesen. Siehe z. B. der Abhängigkeitsgraph auf S. 596, der offenbar von einem früheren Stadium des Artikels ausgeht. Die Benutzbarkeit des Bandes wird durch einige Äußerlichkeiten erschwert. Die Artikel haben keine separaten Literaturlisten, so daß der Leser stets auf die umfangreiche Gesamtbibliographie zurückgreifen muß – ziemlich hinderlich für denjenigen, der, wie wohl die meisten Benutzer, nicht den gesamten Band, sondern nur die Kopie eines einzelnen Artikels bei sich hat. Schlimmer ist, daß der Band keinen Index hat. Der Preis (siehe oben) dürfte selbst für viele Institutsbibliotheken die Anschaffung fraglich machen – für den arbeitenden Wissenschaftler scheint es nur zwei finanziell zumutbare Möglichkeiten zu geben, in den Besitz des Buches zu kommen: entweder Autor sein oder ein Besprechungsexemplar ergattern!

Berlin Sabine Koppelberg

Hel Braun

Eine Frau und die Mathematik 1933–1940

Der Beginn einer wissenschaftlichen Laufbahn

Herausgeber: M. Koecher, Tecklenburg

1990. VII, 81 S. 9 Abb., 1 Porträt
Geb. DM 29,– ISBN 3-540-52166-6

Hel Braun (1914–1986) beschreibt in diesem Buch ihre „Ausbildungszeit" als Mathematikerin von der Immatrikulation im Mai 1933 über die Studienzeit in Frankfurt (Main) und Marburg und die Assistentinnenzeit in Göttingen bis zur Habilitation im Dezember 1940. Sie berichtet über ihre Begegnungen mit Mathematikern wie Reidemeister, Herglotz und Hilbert und über ihre Beziehung zu ihrem Lehrer C. L. Siegel.
Der Text gewährt Einblicke in das „Innenleben" mathematischer Institute zur Zeit des Dritten Reiches. Wenn er auch im wesentlichen unpolitisch ist, verschweigt Hel Braun nicht ihre Differenzen mit den derzeitigen Machthabern. Auch zu ihrer Position als Frau in einer „Männerwissenschaft" nimmt sie Stellung.
Max Koecher der Herausgeber dieser Autobiographie, studierte in Göttingen bei Braun und Siegel.

S. Kovalevskaya

A Russian Childhood

Translated, Edited and Introduced by B. Stillman

1978. XIV, 250 pp. 8 figs. Hardcover DM 54,– ISBN 3-540-90348-8

Walter K. Bühler

Gauss

Eine biographische Studie

1987. VIII, 191 S. 10 Abb. Geb. DM 59,– ISBN 3-540-16883-4

C. Reid

Richard Courant 1888–1972

Der Mathematiker als Zeitgenosse

Übersetzt aus dem Englischen von J. Zehnder-Reitinger

1979. V, 373 S. 40 Abb. Brosch. DM 56,– ISBN 3-540-09177-7

Springer-Verlag
Berlin
Heidelberg
New York
London
Paris
Tokyo
Hong Kong
Barcelona

□ Heidelberger Platz 3, D-1000 Berlin 33 □ 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA □ 8 Alexandra Rd., London SW19 7JZ, England □ 26, rue des Carmes, F-75005 Paris □ 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan □ Citicorp Centre, Room 1603, 18 Whitfield Road, Causeway Bay, Hong Kong □ Avinguda Diagonal, 468-4° C, E-08006 Barcelona

tm.9649/E/1

$$2 \cdot 5 \cdot 199 - (\ln v)' \cdot \left(\int_{99}^{100} 100 \cdot 18.9 \, \mathrm{d}m\right) v = 100$$

Ein Jahrhundert Mathematik 1890 – 1990

Festschrift zum Jubiläum der DMV
Herausgegeben von Gerd Fischer, Winfried Scharlau
und Willi Törnig

Zum Anlaß des 100jährigen Jubiläums der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheint diese Festschrift, die zum einen die Freude über das Ereignis unterstreichen soll, zum anderen auch kritischer Rückblick auf die vergangenen hundert Jahre ist.

In insgesamt neunzehn Beiträgen beschreiben *M. Schappacher, M. Kneser, M. Aigner, F. L. Bauer, J. Bemelmans, S. Hildebrandt, W. von Wahl, V. Benz, P. Dombrowski, L. Collatz, D. Gaier, P. Gruber, U. Krengel, R. Leis, G. Michler, J. Neukirch, S. J. Patterson, A. Pfister, D. Puppe, H.-W. Henn, R. Schütte, H. Schwichtenberg, W. Schwarz, H. Witting* die Entwicklung ihres jeweiligen Fachgebietes.

Als die Vereinigung gegründet wurde, befanden sich viele Gebiete der Mathematik im Umbruch, und ganz neue mathematischen Disziplinen entstanden. So behandelt der Band eine Reihe unterschiedlicher Themen wie Mathematische Logik, Abstrakte Algebra, Algebraische Topologie und weite Teile der Angewandten Mathematik. Der Geschichte der Mathematik und der Mathematiker im Dritten Reich ist ein eigener Beitrag gewidmet.

Wir, die Mitarbeiter des Verlages Vieweg, freuen uns, daß wir bei der Entstehung dieses Buches mitwirken konnten und gratulieren der Deutschen Mathematiker-Vereinigung mit den besten Wünschen zu ihrem Jubiläum.

Erscheint im September 1990
Ca. 600 Seiten. Gebunden
mit Schutzumschlag ca. DM 180,–
ISBN 3-528-06326-2

Friedr. Vieweg & Sohn
Verlagsgesellschaft mbH
Postfach 58 29
D-6200 Wiesbaden

vieweg