93. Band Heft 2
ausgegeben am 23. 4. 1991

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1991

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 118,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Printed in Germany — ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 93, Heft 2

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

F. Felix: Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Gruppen. Ein distributionentheoretischer Zugang

H. Lenz, M. Aigner, W. Deuber: Richard Rado 1906–1989

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1991 B. G. Teubner Stuttgart
93 (1991) 49–105
AMS subject classification: 01 A 55, 11 H 99

Räumliche Anschauung und Minima positiv definiter quadratischer Formen

Zur Habilitation von Hermann Minkowski 1887 in Bonn

J. Schwermer, Eichstätt

1 Einleitung

Hermann Minkowski (1864–1909) gilt als Schöpfer der „Geometrie der Zahlen“; seinen eigenen Worten folgend handelt es sich dabei um „Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind“.[1]) Im

[1]) Der Titel seines durch F. Klein beim Internationalen Mathematischen Congress 1893 in Chicago übergebenen Vortrags lautet: Über Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind (vgl. [18]).

Bericht zu dem 1891 anläßlich der 64. Naturforscher- und Ärzteversammlung in Halle gehaltenen Vortrag „Über Geometrie der Zahlen“ schreibt Minkowski:[2])

„Wenn man für den Raum rechtwinklige Koordinaten einführt, so entsprechen den Systemen von drei *ganzen* Zahlen diskrete Punkte, welche derart über den Raum verstreut liegen, daß sie eine gewisse Nähe in bezug auf jede beliebige Raumstelle erreichen. Den Inbegriff aller dieser Punkte mit lauter Koordinaten, die ganze Zahlen sind, nennt der Vortragende das dreidimensionale *Zahlengitter*; unter dem Titel *„Geometrie der Zahlen“* begreift er geometrische Studien über das dreidimensionale Zahlengitter und über das entsprechende Gebilde in der Ebene, und in weiterem Sinne auch die Ausdehnung der Ergebnisse solcher Studien auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Ordnung. Natürlich besitzt jede Aussage über die Zahlengitter einen rein arithmetischen Kern. Das Wort „Geometrie“ erscheint aber durchaus am Platze im Hinblick auf Fragestellungen, zu welchen die geometrische Anschauung verhilft, und auf Untersuchungsmethoden, welche fortwährend durch geometrische Begriffe ihre Richtung angewiesen erhalten.“

Wesentlicher Ausgangspunkt dieser Theorie ist der heute so genannte Minkowskische Gitterpunktsatz. In seiner einfachsten Form beschreibt Minkowski dieses Ergebnis in dem genannten Vortrag:[3])

„Es handelt sich, wenn speziell vom Raume gesprochen wird, jedesmal um eine sehr allgemeine Kategorie von Körpern, welche so konstruiert werden, daß sie einen bestimmten Punkt des Zahlengitters – es sei dies etwa der Nullpunkt – in gewisser Weise umschließen, und es soll dann jedesmal bei diesen Körpern eine gewisse Eigenschaft in bezug auf das Zahlengitter allein durch die Größe des Inhalts der Körper zustande kommen.

Die erste Kategorie von Körpern besteht aus allen denjenigen Körpern, welche im Nullpunkte einen Mittelpunkt haben, und deren Begrenzung nach außen hin nirgends konkav ist; und die fragliche Eigenschaft für diese Kategorie lautet: Wenn der Inhalt eines Körpers dieser Kategorie $\geqslant 2^3$ ist, so schließt der Körper notwendig noch weitere Punkte des Zahlengitters außer dem Nullpunkte ein.“

Bei einem gegebenen Körper K mit gewissen Eigenschaften um den Nullpunkt des Raumes macht der Gitterpunktsatz also eine Aussage über die Existenz eines nicht-trivialen Gitterpunktes in K, die nur vom Volumen des gegebenen Körpers K abhängt. Dieses Ergebnis ist in seinem Kern erstmals in der 1891 erschienenen Arbeit „Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen“ [14] publiziert worden und fand später durch Minkowski mannigfache Verallgemeinerung. Eine Fülle von tiefliegenden zahlentheoretischen Anwendungen hat diesen Satz von Beginn an ausgezeichnet.[4]) Die ihm und der „Geometrie der Zahlen“ innewohnenden mathematischen Ideen, niedergelegt auch in dem 1896 veröffentlichten Buch gleichen Titels wirken bis heute in den verschiedensten Gebieten der Mathematik fort.

Das Entstehen der „Geometrie der Zahlen“ ist eng mit der Entwicklung der Theorie positiv definiter quadratischer Formen verknüpft. Dies meint insbesondere die Reduktionstheorie, in der versucht wird, innerhalb einer Klasse äquivalenter

[2]) vgl. [16], S. 264.

[3]) vgl. [16], S. 264.

[4]) Als erstes Beispiel seien die Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Zahlen (vgl. [14] § 7) genannt, insbesondere das Ergebnis, daß die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers ungleich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ stets größer als 1 ist.

positiv definiter quadratischer Formen solche zu finden, deren Koeffizienten möglichst einfache Form haben. Die von C. F. Gauß im Jahre 1831 angedeutete Auffassung binärer oder ternärer positiv definiter quadratischer Formen als parallelepipedisch angeordneter regelmäßiger Punktesysteme in der Ebene oder im Raum wird von G. Lejeune Dirichlet in seiner am 31. Juli 1848 der physikalisch-mathematischen Klasse der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften vorgetragenen Abhandlung „Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen" aufgenommen und zu einer neuen geometrischen Begründung der Reduktionstheorie ternärer Formen ausgebaut. Dem Prinzip der sukzessiven Minima folgend leitet Dirichlet in durchsichtiger Weise erneut die von L. Seeber 1831 gefundenen Bedingungen für eine reduzierte ternäre positiv definite Form ab. Dieser geometrische Zugang wurde von Minkowski als wesentliche Anregung für seine eigenen Untersuchungen quadratischer Formen empfunden.

Die Frage nach dem Minimum einer positiv definiten quadratischen Form war im binären Fall schon von J. L. Lagrange aufgeworfen worden. Der Zusammenhang mit Bedingungen, die an die Koeffizienten einer positiv definiten binären quadratischen Form zu stellen sind, um sie als „reduziert" zu erkennen, war jedoch erst von Gauß in seiner, in den „Disquisitiones Arithmeticae" vorgelegten Begründung der Theorie binärer positiv definiter quadratischer Formen vollständig erkannt worden. Das Auffinden der Reduktionsbedingungen im ternären Fall ist mit der Bestimmung der sukzessiven Minima eng verbunden. Dieses Prinzip erweist sich auch in den von Hermite 1850 vorgelegten Untersuchungen „Extraits de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur differents objets de la theorie des nombres" zu quadratischen Formen beliebiger Variablenzahl, deren Reduktionstheorie und deren Verwendung zur Lösung allgemeiner zahlentheoretischer Fragestellungen als tragend. Hermite beginnt diese Briefe an C. G. J. Jacobi, indem er den Fundamentalsatz der Reduktion aufstellt. Er besagt: Man kann den Variablen einer positiv definiten quadratischen Form f in n Variablen stets solche ganze Zahlen beilegen, daß der Wert der Form f eine allein von der Zahl n abhängende, durch die n-te Wurzel der Determinante von f ausgedrückte Grenze nicht überschreitet. Hermite gibt als Abschätzung für das Minimum $\mu(f)$ einer positiv definiten quadratischen Form f der nicht-verschwindenden Determinante $\Delta(f)$ an:

$$\mu(f) \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{\Delta(f)}\,.$$

Dieses Ergebnis hat vielfältige zahlentheoretische Anwendungen, etwa in Fragen der Approximation reeller Größen, der approximativen Auflösung von Gleichungen, komplexer Einheiten. Die Einführung kontinuierlicher Parameter in die, den arithmetischen Problemen zugeordneten quadratischen Formen ist dabei als eine wesentliche Leistung Hermites hervorzuheben.

Minkowski bezeichnet diese Briefe von Hermite an Jacobi als wesentliche Anregung für seine eigenen Studien,[5]) die am Anfang der „Geometrie der Zahlen"

---

[5]) vgl. die Anzeige zur „Geometrie der Zahlen" [20].

standen. Es ist die, durch die Arbeit von Dirichlet[6]) nahegelegte geometrische Deutung positiv definiter quadratischer Formen als parallelepipedisch angeordnete regelmäßige Punktesysteme, die es Minkowski erlaubt, den Fundamentalsatz von Hermite über das Minimum einer positiv definiten quadratischen Form „nicht allein als in gewissem Sinne evident hinzustellen, sondern auch die in diesem Satze und in Erweiterungen desselben benötigten Grenzen den bisher angezeigten gegenüber beträchtlich zu verengern."[7]) Der Aussage des Satzes von Hermite liegt in dieser Auffassung letztlich eine geometrische Eigenschaft des Ellipsoides zu Grunde. Minkowski erkannte dann, daß diese Eigenschaft des Ellipsoids sich allein darauf gründet, daß es eine nirgends konkave Fläche mit Mittelpunkt ist. „Ich wurde dadurch auf ein arithmetisches Princip von besonderer Fruchtbarkeit aufmerksam; es beruht die vielseitige Verwendung dieses Princips auf der Mannigfaltigkeit von Einzelgestalten, die eine nirgends concave Fläche mit Mittelpunkt darzubieten imstande ist".[8]) Es ist dies der Gitterpunktsatz.

Die vorliegende Untersuchung versucht das Eindringen räumlicher Anschauung und geometrischer Ideen in die Theorie positiv definiter quadratischer Formen in seiner Entwicklung nachzuzeichnen. Dies bedeutet zugleich die Herausbildung der Reduktionstheorie positiv definiter quadratischer Formen zu beschreiben und der Behandlung der Frage nach dem Minimum solcher Formen nachzugehen.

Wesentliche Gegenstände dieser Untersuchung sind zwei bisher unbekannte Manuskripte von Hermann Minkowski. Bei dem ersten Text handelt es sich um ein Manuskript mit dem Titel „Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis". Aus mehreren Gründen ist dies als Text zur Probevorlesung Minkowskis „Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis" im Rahmen seines Habilitationsverfahrens am 15. März 1887 an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn anzusehen. Das von der Probevorlesung und der anschließenden Aussprache angefertigte Protokoll liegt vor. Der zweite Text erscheint als ein erster, abgebrochener Entwurf zu dieser Probevorlesung, der dann jedoch wesentlich umgestellt, in seinen Inhalten anders gewichtet und ergänzt wurde. Diese Texte werden textgetreu wiedergegeben.[9])

---

[6]) Dirichlets „Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen" [30] und Hermites Briefe an Jacobi [44] erschienen beide im 40. Band des Crelle'schen Journals im Jahre 1850.

[7]) vgl. [6], GA VIII, S. 246.

[8]) [20] Anzeige zur „Geometrie der Zahlen".

[9]) Diese Manuskripte wurden vom Autor in den Arbeitsheften Minkowskis [3] gefunden. Diese Sammlung von vorläufigen und endgültigen Fassungen von Publikationen Minkowskis, von Vorlesungsmanuskripten und von mathematischen Rechnungen und Überlegungen wurden von Frau Auguste Minkowski nach dem Tode ihres Mannes aufbewahrt, später in die USA gebracht und befinden sich jetzt, nach verschiedenen anderen Stationen, in Privatbesitz. Kopien sind in der Niels Bohr Library, American Institute of Physics, New York, USA, hinterlegt. Die Manuskripte sind dort in 10 Kästen (= boxes) und dann jeweils in Mappen (= folders) eingeteilt. In der Angabe des Manuskriptes folgen wir der vorliegenden Bestandsliste. Diese Liste enthält kurze Titel zu jeder Mappe (etwa: Box I, folder 10, 1887, December 3, Computations (geometry of numbers), ist aber z. T. in der inhaltlichen Beschreibung unzureichend. Auf die Sammlung wurde meines Wissens bisher nur in [39], [67], Chap.

Die Probevorlesung mit anschließendem Colloquium ist ein vorgeschriebener Teil der Habilitation; er richtete sich an die Mitglieder der philosophischen Fakultät, insbesondere die der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion, der Bonner Universität. Als mathematischer Fachvortrag gedacht muß die Probevorlesung jedoch auch Professoren benachbarter Fächer durch Offenlegen grundsätzlicher Prinzipien und Fragestellungen interessieren. Neben einem Überblick über den gewählten mathematischen Problemkreis und gegenwärtige Lösungsansätze sollte jedoch auch ein eigener Beitrag in der Behandlung der diskutierten Fragestellungen deutlich sichtbar werden. Inhalt und Form der Vorlesung bedürfen deshalb einer sehr genauen Vorbereitung; Ergänzungen und Verbesserungen des Textes belegen, daß sich Minkowski dieser Mühe unterzogen hat.

Ausgehend von der Aufgabe, angenäherte Lösungen irgendwelcher Gleichungen durch rationale Zahlen zu finden und geleitet von der Auffassung Hermites, diese Fragen anzugehen, indem man gewisse quadratische Formen untersucht, erläutert Minkowski seine geometrischen Ideen zur Behandlung solcher Formen. Nachdem er eine positive quadratische Form als parallelepipedisch angeordnetes regelmäßiges Punktesystem im Raume i. e. als Gitter interpretiert hat, kommt er zu der Frage:

„Was uns im Gitter am meisten interessiert, sind die Punkte, welche am nächsten dem Nullpunkte liegen oder also, da im Gitter kein Punkt ausgezeichnet ist, überhaupt die kleinste Entfernung zweier Punkte im Gitter. Womit soll man dieselbe vergleichen, was ist die wesentliche Invariante des Gitters? Eine solche ist gewissermassen das ganze Gitter bis auf seine absolute Lage; ..."

Dies ist die Frage nach dem Minimum einer positiv definiten quadratischen Form, und Minkowski präzisiert dann die Invariante als die mittlere Dichtigkeit des Gitters, die er als den reziproken Wert des Inhalts eines Elementarparallelepipedums des Gitters erkennt. Indem Minkowski um jeden Gitterpunkt eine undurchdringliche Kugel K von einem Durchmesser gleich der Entfernung m zweier nächster Punkte im Gitter legt und dann den dadurch überdeckten Teil des Raumes mit dem durch die Elementarparallelepipeda überdeckten Raum in Beziehung setzt, erhält er die Aussage:

„Also muss der Inhalt einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Entfernung zweier nächster Punkte im Gitter ist, d. i. $\frac{\pi}{6}$ mal der dritten Potenz dieser Entfernung, kleiner sein als der Inhalt eines Elementarparallelepipedums, also bleibt diese Entfernung selbst stets kleiner als das Product aus einer Constanten und der dritten Wurzel aus dem Inhalt des Elementarparallelepipedums."

(Fortsetzung von Fußnote 9)

IV, [68] eher marginal Bezug genommen. Von mathematischer Seite fehlt eine Untersuchung. In [73] wird versucht, eine erste Beschreibung der Inhalte zu geben.

Ich danke der Niels Bohr Library, Center for History of Physics, at the American Institute of Physics, New York, USA, für die gewährte Unterstützung.

Er fügt sogleich hinzu:

„Dasselbe gilt natürlich für Gitter in jeder Anzahl von Dimensionen, und ist der Ausdruck einer wichtigen Eigenschaft der positiven quadratischen Formen, welche allgemein zuerst von Hermite, aber auf weit umständlicherem Wege bewiesen ist."

Die um jeden Gitterpunkt gelegte Kugel K mit Durchmesser m gleich der Entfernung zweier nächster Punkte im Gitter, das der gegebenen positiv definiten quadratischen Form zugeordnet ist, hat den Inhalt $\mathrm{vol}(K) = \omega_n \left(\frac{1}{2} m\right)^n$, wobei ω_n den Inhalt der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet. Damit ergibt sich für das Minimum $\mu(f)$ von f die Abschätzung

$$\mu(f) \leqslant 4\omega_n^{-2/n} \sqrt[n]{\Delta(f)}.$$

wobei $\Delta(f)$ die Determinante von f bezeichnet. Das gegebene Argument enthält zugleich den Kern des Gitterpunktsatzes. Die Frage nach dem Minimum einer positiv definiten quadratischen Form liegt damit an der Quelle des Entstehens der „Geometrie der Zahlen". Die Probevorlesung gibt ein frühes Zeugnis hierfür,[10]) belegt zugleich Minkowskis geometrische Ideen zu dieser Zeit und zeigt, daß er sich der arithmetischen Tragweite seiner Überlegungen schon bewußt war.

Aufbauend auf einer Darstellung der Entwicklung der Reduktionstheorie positiv definiter quadratischer Formen und insbesondere erster geometrischer Ansätze bei C. F. Gauß und G. L. Dirichlet wird in dieser Untersuchung der Inhalt der Probevorlesung H. Minkowskis diskutiert und in seinen entwicklungsgeschichtlichen Zusammenhang eingeordnet. Neben einer kurzen Skizze der wissenschaftlichen Arbeit Minkowskis bis zum Jahr 1887 wird auch das Habilitationsverfahren Minkowskis an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität dokumentiert.[11]) Die hierzu herangezogenen Archivalien, insbesondere das von der Probevorlesung und der anschließenden Aussprache angefertigte Protokoll, bestätigen die Zuordnung des in den Arbeitsheften [3] gefunde-

---

[10]) Als erster Hinweis auf dieses Ergebnis Minkowskis mußte bisher ein Brief vom 6. November 1889 an D. Hilbert gelten; Minkowski schreibt: „Vielleicht interessiert Sie oder Hurwitz der folgende Satz (den ich auf einer halben Seite beweisen kann): In einer positiven quadratischen Form von der Determinante D mit $n(\geqslant 2)$ Variabeln kann man stets den Variabeln solche ganzzahligen Werthe geben, daß die Form $\leqslant nD^{1/n}$ ausfällt. Hermite hat hier für den Coefficienten n nur $\frac{4}{3}^{\frac{1}{2}(n-1)}$, was offenbar im Allgemeinen eine sehr viel höher Grenze ist". (vgl. [22]) Die von Minkowski gegebene Abschätzung erhält man, wenn man statt der Kugel um jeden Gitterpunkt einen Würfel mit Kantenlänge $(1/\sqrt{n})m$ legt. Das Ergebnis ist jedoch schlechter als die im Text angegebene Abschätzung.

[11]) Herrn Dr. Paul Schmidt danke ich für die Unterstützung bei der Einsichtnahme der Personalakte Minkowski [1] im Archiv der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.

nen, hier publizierten Manuskriptes „Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis" zu diesem Anlaß. Diese Dokumente sind im Anhang wiedergegeben.[12])

2 Zur Entwicklung der Reduktionstheorie positiv definiter quadratischer Formen

2.1 J. L. Lagrange

Die Theorie der binären quadratischen Formen, also Gleichungen der allgemeinen Form $ax^2+bxy+cy^2$ mit ganzzahligen Koeffizienten und Variablen x, y erfuhr ihre systematische Begründung im Werk von J. L. Lagrange. Die Wurzeln dieser Theorie liegen jedoch in den Studien von P. de Fermat und L. Euler.

Das mathematische Werk P. de Fermats (1601–1665) ist uns größtenteils nur auf Grund seiner ausgedehnten Korrespondenz mit seinen Zeitgenossen wie B. Pascal, M. Mersenne, P. de Carcavi bekannt. Sicher mit veranlaßt durch sein Studium der 1621 von Bachet herausgegebenen ersten 6 Bücher der ursprünglich auf 13 Bücher angelegten „Arithmetica" des Diophantos setzte sich Fermat mit der Natur allgemeiner ganzzahliger Lösungen algebraischer Gleichungen wie etwa $x^2-dy^2=1$ auseinander. Dies kann als der Anfang der Theorie diophantischer Gleichungen bezeichnet werden, birgt jedoch gleichzeitig den Beginn der Theorie binärer quadratischer Formen in sich.[13]) Angeregt durch die vielen von Fermat behandelten Beispielfälle der Art x^2+ay^2 beschäftigte sich L. Euler (1707–1783) intensiv mit Gleichungen der Art $ax^2+by^2=m$, wobei a, b, m ganze Zahlen sind. Und es ist die Frage, ob die gegebene Zahl m durch eine vorgelegte quadratische Form ax^2+by^2 darstellbar ist (d. h. ob ganze Zahlen p, q mit $ap^2+bq^2=m$ existieren), die eine wichtige Quelle der weiteren zahlentheoretischen Entwicklung ausmacht. So ist die Herausbildung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes auf das engste mit der Behandlung der Form x^2-ay^2 verknüpft.[14])

Es ist jedoch das Verdienst J. L. Lagranges (1736–1813), die Behandlung von Einzelfällen durch Fermat und Euler in eine grundsätzliche Behandlung von Gleichungen der allgemeinen Form $ax^2+bxy+cy^2=m$ zu überführen und damit den Anfang einer Theorie der binären quadratischen Formen zu begründen. Erst etwa ab 1768 hat sich Lagrange, der damals als Nachfolger Eulers in Berlin wirkte, intensiv mit zahlentheoretischen Fragestellungen auseinandergesetzt; dabei war ihm das Werk Eulers mit seinen Fragestellungen vertraute Richtschnur. Aus dem

---

[12]) Ich danke W.-D. Geyer, F. Grunewald, M. Kneser, S. J. Patterson, J-P. Serre und P. Slodowy für die Lektüre dieses Manuskriptes und die daraus entstandenen Hinweise. Mein Dank gilt auch Frl. G. Harrer, die dieses Manuskript in seinen verschiedenen Stadien des Entstehens geschrieben hat.

[13]) A. Weil [86],II–IV diskutiert sorgfältig die zahlentheoretischen Ergebnisse von Fermat, Euler und Lagrange, die zur Herausbildung der Theorie geführt haben.

[14]) vgl. etwa A. Weil [86], II oder Schwermer [72], § 2. Als weiteres Beispiel sei das Fermat zugeschriebene Ergebnis angeführt, daß eine ungerade Primzahl p genau dann durch die Form x^2+y^2 darstellbar ist, wenn p bei Division durch 4 den Rest 1 läßt.

Kreis seiner der Zahlentheorie gewidmeten Arbeiten ist in unserem Zusammenhang das 1775 erschienene Werk Recherches d'Arithmétique [57] mit seinem Supplement von Interesse. Erste Ansätze zur Herausbildung einer Theorie der binären quadratischen Formen finden sich jedoch auch schon in den „Additions à l'analyse indeterminée" [56], die Lagrange Eulers Werk „Vollständige Anleitung zur Algebra" [38] beigegeben hat.

Wesentlich sind die Einführung des Begriffs der Äquivalenz zweier binärer quadratischer Formen (wie man heute in der Folge von Gauß sagt) und das gleichzeitige Erkennen, daß zwei äquivalente Formen f und g dieselben Zahlen darstellen. Gegeben seien zwei binäre quadratische Formen

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{1}$$

und g. Wir nennen die ganzen Zahlen a, b, c die Koeffizienten von f und x, y die Variablen. Dann heißen f und g äquivalent falls eine in die andere durch eine Substitution der Art

$$x = px' + qy', \qquad y = rx' + sy' \tag{2}$$

mit ganzen Zahlen p, q, r, s, die der Beziehung $ps - rq = \pm 1$ genügen, überführt werden kann. Man überprüft leicht, daß dies eine reflexive, symmetrische und transitive Beziehung ist und daß jede Lösung der Gleichung $g(x', y') = m$ in den ganzen Zahlen eine Lösung von $f(x, y) = m$ erbringt und umgekehrt. Der Begriff der Äquivalenz führt also zu einer Einteilung der binären quadratischen Formen in Klassen.

Einer binären quadratischen Form $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ ist die Diskrimininante

$$D = b^2 - 4ac \tag{3}$$

zugeordnet; zur Determinante Δ von f besteht die Beziehung $D = -4\Delta$. Man hat $D \equiv 0 \mod 4$ falls b gerade ist und $D \equiv 1 \mod 4$ falls b ungerade ist. Da die Beziehung

$$4af(x, y) = (2ax + by)^2 - Dy^2$$

gilt, haben für negatives D die von f angenommenen Werte $\neq 0$ stets gleiches Vorzeichen. Man nennt f entsprechend positiv oder negativ definit. Für positives D werden beide Vorzeichen angenommen, und f heißt in diesem Fall indefinit. In der folgenden Diskussion setzen wir voraus, daß D nicht Null und kein Quadrat ist. Binäre quadratische Formen, deren Diskriminante ein Quadrat ist, zerfallen in lineare Faktoren.

Lagrange wußte[15]), daß unter einer Substitution der obigen Form die Diskriminante unverändert bleibt, i.e. äquivalente Formen haben dieselbe Diskriminante. Doch als entscheidend erwies sich die Überlegung, daß eine gegebene binäre quadratische Form $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ durch Substitutionen der Art (2) in eine äquivalente Form $f'(x, y) = a'x^2 + b'xy + c'y^2$ überführt werden

---

[15]) vgl. [56], § VII, art. 70 (= [55], I, 1, S. 603).

kann, so daß die Koeffizienten c' und a' im Absolutbetrag stets größer oder gleich dem Absolutbetrag von b' sind, i. e. es gelten die Beziehungen[16])

$$|b'| \leqslant |a'| \quad \text{und} \quad |b'| \leqslant |c'|.$$

Unmittelbar folgt hieraus, daß es nur endlich viele Zahlentripel (a', b', c') gibt, die diesen Bedingungen genügen und gleichzeitig einen vorgegebenen Wert $b'^2 - 4a'c'$, die Diskriminante von f und f', haben. Denn es gilt, falls wir $|a'| \leqslant |c'|$ annehmen (was wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen), die Ungleichung

$$|D| = |b'^2 - 4a'c'| \geqslant 3|a'|^2$$

also unterliegen die Koeffizienten a', b' und c' den Beschränkungen

$$|a'| \leqslant \sqrt{\frac{|D|}{3}}, \qquad |b'| \leqslant |a'|, \qquad c' = \frac{b'^2 - D}{4a'}.$$

Lagrange hat das von ihm gefundene Vorgehen zur Umformung von f in f' und die Form f', die den genannten Bedingungen entspricht, nicht speziell benannt, obwohl der heute gewählte Name schon gelegentlich benutzt wird;[17]) man nennt f' reduziert im Sinne von Lagrange, und das Verfahren Reduktion.

Wir gehen noch etwas genauer auf die Art der Substitutionen, die die Reduktion im Falle positiv definiter quadratischer Formen erbringen, ein. Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ einer solchen Form $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ ist negativ; man hat $f(1, 0) = a > 0$ und auch $c > 0$. Die Substitution $x = y'$, $y = -x'$ vertauscht in einer gegebenen Form f die Koeffizienten a und c; deshalb kann man stets eine Form f mit $a > c$ in eine äquivalente Form f' überführen, für die $a' < c'$ gilt. Die Substitution $x = x' \pm y'$, $y = y'$ hingegen ändert b in $b \pm 2a$ ab, ändert a jedoch nicht; dies erlaubt durch endlichfache Anwendung $|b| > a$ durch $|b| \leqslant a$ zu ersetzen. Man erreicht so eine zu f äquivalente Form f', für die $|b'| \leqslant a' \leqslant c'$ gilt. Für diese im Sinne von Lagrange reduzierte Form haben wir gesehen, daß die Koeffizienten a', b', c' durch elementare Ausdrücke in D beschränkt sind.

Das von Lagrange gefundene Verfahren erbringt für jede Klasse äquivalenter positiv definiter oder indefiniter binärer quadratischer Formen zumindest eine in seinem Sinne reduzierte Form. Gleichzeitig gelingt es Lagrange in einem Verfahren, das hier nicht näher beschrieben werden soll, in jeder Klasse von Formen mit gegebener Diskriminante genau eine reduzierte Form auszuzeichnen, also im heutigen Sinne eine Repräsentantenmenge zu beschreiben. Im Falle der positiv definiten Formen war es Lagrange geläufig, daß innerhalb der Klasse einer reduzierten Form $f'(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ nur die (äquivalente) reduzierte Form $ax^2 - bxy + cy^2$ liegen kann. Der Fall indefiniter Formen ist jedoch ungleich schwieriger zu behandeln; Lagrange's Lösung[18]) stützt sich auf seine Bearbeitung der sogenannten Pellschen Gleichung $x^2 - dy^2$ und seine Kenntnis der Kettenbruchentwicklungen quadratischer Irrationalitäten. Mittels der von ihm weiterent-

---

[16]) vgl. [56], § VII, art. 70 (= [55], I, 1, S. 603).
[17]) vgl. [56], § VII, art. 71 (= [55], I, 1, S. 606).
[18]) vgl. [55], III, 723ff. Dieser Zugang ist auch in [86], IV, App. III, behandelt.

wickelten Theorie der Kettenbrüche hat A. M. Legendre (1752–1833) die Lagrangesche Lösung erneut aufgegriffen und vereinfacht.[19])

Die von ihm entwickelte Reduktionstheorie binärer quadratischer Formen benutzte Lagrange, um einige schon von Euler geäußerte Vermutungen zur Darstellbarkeit von Zahlen durch spezielle Formen zu beweisen und ebenso neue Ergebnisse herzuleiten.[20])

Neben diesem grundlegend neuen Zugang via Reduktion zu diesem Fragenkreis suchte Lagrange in den „Additions à l'analyse indeterminée" zu Eulers Werk zur Algebra auch nach einem Weg, für eine gegebene binäre quadratische Form $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ deren Minimum $\mu(f)$ zu bestimmen, i.e. das Minimum der Werte $f(x,y)$ (im Absolutbetrag genommen), die f für ganze Zahlen nicht beide Null annimmt. Zur Lösung[21]) betrachtet Lagrange die der quadratischen Form $f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$ zugeordnete Gleichung $aX^2+bX+c=0$. Unter Verwendung der Theorie der Kettenbrüche konstruiert er hieraus ein Paar x_0, y_0 ganzer Zahlen, so daß $f(x_0, y_0)=\mu(f)$ gilt, i.e. das Minimum von f für x_0, y_0 angenommen wird. Die Untersuchung wird durch zahlreiche Beispiele vervollständigt. Ob Lagrange den inneren Zusammenhang, der zwischen der Reduktionstheorie und dieser Fragestellung besteht, kannte oder nicht, ist aus Lagranges Schriften heraus nicht schlüssig zu beantworten; ein eindeutiger Hinweis ist nicht gegeben.[22]) A. M. Legendre hat wohl als erster im Falle positiv definiter Formen herausgestellt,[23]) daß zu einer gegebenen positiv definiten binären quadratischen Form f stets eine äquivalente, im Sinne von Lagrange reduzierte Form $f'(x,y)=a'x^2+b'xy+c'y^2$ gehört (i.e. für die Koeffizienten hat man $|b'|\leqslant a'\leqslant c'$), so daß zudem $\mu(f)=a'$ gilt.[24]) Der Koeffizient a' ist also durch eine Minimumsbedingung charakterisiert. Diese Beziehung zwischen Bedingungen, die an die Koeffizienten einer positiv definiten binären quadratischen Form zu stellen sind, um sie als „reduziert" zu erkennen, und dem Minimum $\mu(f)$, das von allen Formen innerhalb einer Klasse gleichermaßen angenommen wird, wird sich später in verallgemeinerter Form als leitendes Prinzip der Entwicklung der Reduktionstheorie positiv definiter quadratischer Formen erweisen.

2.2 C. F. Gauß „Disquisitiones Arithmeticae"

Eine der wesentlichen Entdeckungen von Gauß ist der Nachweis, daß die Menge P der Klassen binärer positiv definiter primitiver quadratischer Formen der Diskriminante D die natürliche Struktur einer endlichen abelschen Gruppe besitzt. Man nennt eine quadratische Form $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ primitiv, falls der

---

[19]) Dies findet sich in den 1798 veröffentlichten Untersuchungen „Essai sur la theorie des nombres" [59], premiére partie, XIII. Dieses Buch wurde überarbeitet und ergänzt erneut 1808 publiziert und erschien dann endgültig in wesentlich erweiterter Form 1830 unter dem Titel „Theorie des nombres" [60]. Für eine neuere Darstellung der Ergebnisse siehe [87] § 13.

[20]) vgl. [55] z. B. S. 741ff. oder S. 775.

[21]) vgl. [56], II, art. 31–41 (= [55], I, 1, S. 551–573).

[22]) vgl. [86] IV, App. II.

[23]) [59] oder [60], premiére partie, § VIII, Théoreme (56).

[24]) Diese einfach zu begründende Tatsache wird in 2.2. erläutert.

größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten a, b, c gerade 1 ist. Hier besteht ein enger Zusammenhang mit der Arithmetik imaginär quadratischer Zahlenkörper, indem man die Menge P als Menge von Klassen gebrochener invertierbarer Ideale in einem Ring $\mathcal{O}_D$, der aus ganzen Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers besteht, interpretiert.[25])

In den § 171–175 der Disquisitiones Arithmeticae [41] arbeitet Gauß in Vorbereitung der Komposition binärer positiv definiter quadratischer Formen die Theorie systematisch aus. Der von ihm eingeführte Begriff der Äquivalenz zweier positiv definiter quadratischer Formen f, f' ist jedoch enger als der von Lagrange: Man nennt f und f' eigentlich äquivalent, falls sie durch eine Substitution der Art 2.1. (2) auseinander hervorgehen mit der zusätzlichen Bedingung, daß die ganzen Zahlen p, q, r, s der Identität $ps-rq=1$ genügen.

Für eine positiv definite quadratische Form g der Diskriminante D sieht man, daß, wenn man den Argumenten von Lagrange folgt, die Form g eigentlich äquivalent zu einer Form $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ ist,[26]) deren Koeffizienten den Bedingungen

$$|b| \leqslant a \leqslant c \tag{1}$$

genügen. Als natürliche Frage schließt sich an, ob f eindeutig durch diese Bedingungen innerhalb der Klasse C von g bestimmt ist. Wegen der Identität $D=b^2-4ac$ ist $|b|$ eindeutig durch a und c festgelegt. Weiter gilt $f(1,0)=a$, $f(0,1)=c$, und man hat die Ungleichung

$$f(x,y) \geqslant ax^2-|b|\,|xy|+cy^2 \geqslant (2a-|b|)|xy|+(c-a)y^2. \tag{2}$$

Also ergeben sich die Abschätzungen

$$f(x,0) \geqslant a \quad \text{für} \quad x \neq 0, \qquad f(0,y) \geqslant c \quad \text{für} \quad y \neq 0 \tag{3}$$

und wegen (2)

$$\mathrm{f}(x,y) \geqslant (2a-|b|)+(c-a)=a-|b|+c \geqslant c \quad \text{für} \quad xy \neq 0. \tag{4}$$

Man erkennt hieraus die folgenden a und c charakterisierenden Minimumsbedingungen, die, da die durch verschiedene quadratische Formen innerhalb einer Äquivalenzklasse angenommenen Werte übereinstimmen, für alle Formen h in der Klasse C von f Gültigkeit haben:

$$\begin{aligned} a &= \min\nolimits_{x,\,y \in \mathbb{Z}(x,\,y) \neq (0,0)} h(x,y) \\ ac &= \min\,(h(x,y)h(x',y')), \qquad x, y, x', y' \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{5}$$

wobei (x,y), (x',y') nicht collinear sind. Diese Überlegung zeigt, daß die einzige Form in C, die außer f noch die Bedingungen (5) erfüllt, nur die Form $f'(x,y)=ax^2-bxy+cy^2$ sein kann. Man sieht nun leicht, daß f' genau dann zu f eigentlich äquivalent ist, wenn $a=|b|$, $a=c$ oder $b=0$ gilt. Deshalb heißt eine binäre positiv

---

[25]) Dieser Zusammenhang verdient hier Erwähnung, ist für die Frage der Minima positiv definiter quadratischer Formen jedoch ohne Belang. Eine klare Darstellung findet sich in [87].

[26]) Abweichend von Gauß, der stets den mittleren Koeffizienten als gerade voraussetzt, behalten wir diese Schreibweise für binäre quadratische Formen bei.

definite quadratische Form $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ reduziert im Sinne von Gauß, wenn die Bedingungen

$$|b|\leqslant a\leqslant c, \qquad b\geqslant 0 \quad \text{falls} \quad a=|b| \quad \text{oder} \quad a=c$$

erfüllt sind. Es ergibt sich als Hauptergebnis,[27]) daß jede Klasse eigentlich äquivalenter binärer positiv definiter quadratischer Formen der Diskriminante D eine eindeutig bestimmte, im Sinne von Gauß reduzierte Form enthält.

2.3 Seebers Reduktion ternärer Formen und eine Rezension von C. F. Gauß

Gauß hat die Theorie der binären positiv definiten quadratischen Formen in den „Disquisitiones Arithmeticae" vollständig begründet. Dies schließt auch die befriedigende Behandlung der hier nicht näher zu diskutierenden Frage ein, alle möglichen Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl durch eine gegebene Form vermöge ganzer Werte der unbestimmten Größen (Variablen) aufzufinden. Gauß hat sich dann der Untersuchung von sogenannten ternären quadratischen Formen

$$ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'xz+2c'xy$$

zugewandt. Die Determinante einer solchen Form ist der aus den Koeffizienten gebildete Ausdruck $\Delta=abc+2a'b'c'-bb'^2-aa'^2-cc'^2$. Für die weitere Herausbildung dieser Theorie war es erforderlich, die von Lagrange und Gauß für die binären Formen durchgeführten Überlegungen auf die ternären Formen auszudehnen, i. e. insbesondere Ungleichheitsbedingungen zwischen den Koeffizienten aufzufinden, so daß diese in jeder Klasse äquivalenter Formen nur von genau einer erfüllt werden. In den „Disquisitiones Arithmeticae" war dies nur so weit entwickelt worden, wie man zu jeder vorgegebenen Form eine äquivalente einfacherer Art finden kann, und daß es bei gegebener Determinante nur eine endliche Anzahl solcher „reduzierter" Formen geben kann. Ein endgültiges Kriterium, die (Nicht-)Äquivalenz dieser Formen feststellen zu können, stand jedoch noch aus. Diese Erweiterung wurde dann von L. A. Seeber in seinen „Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen" ([74]) endgültig durchgeführt. Diese Arbeit wurde von Gauß wenig später in einer Rezension [42] eingehend besprochen; trotz der Weitläufigkeit und Schwierigkeit der Ausführungen Seebers erkennt Gauß die Leistung, die zur Auflösung der genannten Aufgabe geführt hat, ausdrücklich an. Auf die von Seeber eingeführten Bedingungen, unter denen eine ternäre positiv definite Form f reduziert genannt wird, soll hier nicht im Einzelnen eingegangen werden; sie werden dann im Zusammenhang mit Dirichlets Arbeit [31] diskutiert. Seeber zeigt dann, daß man zu jeder gegebenen ternären positiv definiten quadratischen Form eine äquivalente reduzierte finden kann und daß zwei nicht übereinstimmende reduzierte Formen nicht äquivalent sein können. Hier heißen zwei Formen f und g äquivalent falls eine in die andere durch eine Substitution der Form

$$x=\alpha x'+\beta y'+\gamma z', \qquad y=\alpha' x'+\beta' y'+\gamma' z', \qquad z=\alpha'' x'+\beta'' y'+\gamma'' z'$$

---

[27]) vgl. [41], Art. 172.

überführt werden kann, wobei die ganzzahligen Koeffizienten der Determinantenbedingung

$$E = \alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' - \gamma\beta'\alpha'' - \gamma'\beta''\alpha - \gamma''\beta\alpha' = \pm 1$$

genügen müssen.

Die Rezension des Seeberschen Werkes durch Gauß ist noch aus anderen Gründen maßgebend: Zur Lösung des Problems, zu einer gegebenen Determinante alle möglichen reduzierten positiv definiten ternären Formen anzugeben, hat Seeber eine Ungleichung für die Koeffizienten a, b, c einer reduzierten Form bewiesen; sie besagt, daß das Produkt der drei ersten Koeffizienten a, b, c nicht größer als das Dreifache des Absolutbetrages der Determinante ist. Seeber bemerkt jedoch im Vorwort der Arbeit, daß in den von ihm untersuchten Fällen stets sogar die Ungleichung $abc \leqslant 2 \cdot \Delta$ gültig war. Für diese schärfere Ungleichung gibt Gauß nun einen sehr einfachen Beweis, in dem er geschickt die Reduktionsbedingungen ausnutzt. In verallgemeinerter Form findet diese Ungleichung später ihren Platz in der Reduktionstheorie beliebiger positiv definiter quadratischer Formen.

Eine noch gewichtigere Rolle in der Entwicklung spielen jedoch die Andeutungen, die Gauß am Ende der Rezension zur geometrischen Auffassung binärer oder ternärer positiv definiter quadratischer Formen als Punktesysteme in der Ebene oder im Raume macht. Gauß schreibt:[28])

„Die positive binäre Form $axx + 2bxy + cyy$ stellt allgemein das Quadrat der Entfernung zweier unbestimmten Puncte in einer Ebene vor, deren Coordinaten in Beziehung auf zwei unter einem Winkel, dessen Cosinus $= \frac{b}{\sqrt{ac}}$ ist, gegen einander geneigte Axen um $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{c}$ verschieden sind. Insofern x und y also nur ganze Zahlen bedeuten sollen, bezieht sich die Form auf ein System parallelogrammatisch geordneter Puncte, die in den Durchschnitten zweier Systeme von Parallellinien liegen. Die Linien jedes Systems sind in gleichen Entfernungen von einander, und zwar sind die des einen, wenn sie parallel mit den Linien des zweiten gemessen werden, $= \sqrt{a}$; die Entfernung des andern, parallel mit den Linien des ersten gemessen, $= \sqrt{c}$: die Neigung beider Systeme gegen einander die oben angegebene. Auf diese Weise erscheint die Ebene in lauter gleiche Parallelogramme getheilt, deren Endpuncte das Punctesystem ausmachen, ohne daß irgend einer der Puncte innerhalb eines Parallelogramms fallen kann. Der Determinant mit positiven Zeichen genommen, also $ac - bb$, bedeutet das Quadrat des Flächeninhalts eines Elementar-Parallelogramms. Ein und dasselbe System solcher Puncte kann auf unendlich viele verschiedene Arten parallelogrammatisch abgetheilt und also auf eben so viele verschiedene Formen zurückgeführt werden: alle diese verschiedenen Formen sind aber, was in der Kunstsprache äquivalent heißt, und der Inhalt eines Elementar-Parallelogramms bleibt allemal derselbe. Zwei Formen, die nicht äquivalent sind, von denen aber die eine die andere unter sich begreift, beziehen sich auf dasselbe System von Puncten, aber die erstere Form auf das ganze System, die zweite auf einen Theil. Zwei Formen, die, nach der Kunstsprache, uneigentlich äquivalent (improprie aequivalentes) heißen, beziehen sich auf zwei gleiche aber verkehrt liegende Systeme von Puncten, indem man sich die Ebene umgekehrt gelegt denkt usw."

[28]) [42], S. 318.

In heutiger Sprechweise formuliert sich dieser Zusammenhang wie folgt: Der binären positiv definiten quadratischen Form $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit nicht-verschwindender Determinante $\Delta(f)$ ist die symmetrische Matrix mit ganzzahligen Eingängen

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Es gilt $f(x, y) = (x, y)\, F(x, y)^t$. Man identifiziere die durch F gegebene symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen, durch die Einheitsmatrix gegebenen euklidischen Metrik auf dem $\mathbb{R}^2$, i. e. man schreibe

$$F = T^t\, T$$

mit einer reellen Matrix T. Für die Länge der Spaltenvektoren t_1, t_2 der Matrix T bzw. das kanonische Skalarprodukt zwischen ihnen ergeben sich die Identitäten

$$|t_1|^2 = a, \qquad |t_2|^2 = c, \qquad t_1 \cdot t_2 = b.$$

Der Cosinus des Winkels ω zwischen t_1 und t_2 ergibt sich als

$$\cos \omega = \frac{t_1 \cdot t_2}{|t_1| \cdot |t_2|} = \frac{b}{\sqrt{ac}}.$$

Der binären positiv definiten quadratischen Form f kann jetzt das von den Vektoren t_1, t_2 im $\mathbb{R}^2$ erzeugte Gitter

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{2} \alpha_i t_i \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

zugeordnet werden. Wegen der für einen Gitterpunkt $l = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2$ gültigen Identität

$$\begin{aligned} |l|^2 = l \cdot l &= \alpha_1^2 (t_1 \cdot t_1) + 2\alpha_1 \alpha_2 (t_1 \cdot t_2) + \alpha_2^2 (t_2 \cdot t_2) \\ &= \alpha_1^2 a + \alpha_1 \alpha_2 2b + \alpha_2^2 c = f(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

stellt f das Quadrat der Entfernung eines Punktes im Gitter vom Nullpunkt dar. Das Minimum $\mu(f)$ der positiv definiten quadratischen Form f ergibt sich in dieser geometrischen Interpretation als das Quadrat des minimalen Abstands zweier Gitterpunkte.

Geht man von einer zu f äquivalenten Form f' aus, so erhält man dasselbe Gitter L, jedoch mit einer anderen parallelepipedischen Abteilung, i. e. die Vektoren t_1, t_2 sind durch eine lineare Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante ± 1 in andere Basisvektoren t_1', t_2' des Gitters L übergeführt worden.

Das Volumen $\mathrm{vol}(L)$ des Gitters L ist definiert[29]) als der Absolutbetrag der Determinante von T, i. e. als Inhalt eines Elementarparallelepipedums von L. Man

---

[29]) Hier folgen wir einer üblichen Sprechweise, obwohl es sinnvoller wäre, von Kovolumen zu sprechen.

hat die Identität

$$\Delta(f) = \det(T)^2 = (\mathrm{vol}(L))^2.$$

Analog formuliert Gauß diesen Zusammenhang sodann für ternäre positiv definite Formen. Im Rahmen dieser geometrischen Interpretation sieht er ein reiches Feld weiterer Untersuchungen; als ein Beispiel erwähnt er die mögliche Behandlung aller Relationen unter den Kristallformen ([42], S. 319). Dabei muß die folgende Bemerkung beachtet werden:[30])

„wir dürfen jedoch die Bemerkung nicht übergehen, daß wenn gleich ursprünglich angenommen ist, daß a, b, c, a', b', c' ganze Zahlen vorstellen, doch der größte Theil der Lehre von den ternären Formen, und namentlich dasjenige, was für jene Benutzung erforderlich ist, auch unabhängig von jener Voraussetzung gültig bleibt."

Sie zeigt, daß Gauß die Gültigkeit der erhaltenen Ergebnisse zur Reduktion auch bei nicht ganzzahligen Koeffizienten geläufig war. Gauß beschließt die Rezension, indem er den von Seeber vermuteten und von ihm selbst bewiesenen Satz als eine Beziehung zwischen bestimmten Rauminhalten des der reduzierten Form zugeordneten Punktsystems im Raum ausspricht.

2.4 Eine geometrische Neubegründung durch G. L. Dirichlet

Die von Gauß in seiner 1831 publizierten Rezension der Seeberschen Arbeit gemachten Andeutungen über die geometrische Interpretation ternärer positiv definiter quadratischer Formen als Punktsysteme im Raum werden von G. Lejeune Dirichlet in seiner am 31. Juli 1848 der physikalisch-mathematischen Klasse der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften vorgetragenen Abhandlung „Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen" [31] aufgenommen und zu einer neuen *geometrischen* Begründung der Theorie der reduzierten ternären Formen ausgebaut. Im binären Fall sind die Reduktionsbedingungen an eine positiv definite Form $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ gleichbedeutend mit der Forderung, daß a das erste Minimum $m(f) = \min f(x,y)$, $(x,y) \neq (0,0)$, $x,y \in \mathbb{Z}$, von f und c das zweite Minimum ist, i. e. $ac = \min\,(f(x,y)\,f(x',y'))$, $x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$ wobei $(x, y), (x', y')$ nicht collinear sind. Diesem Prinzip der sukzessiven Minima folgend leitet Dirichlet in durchsichtiger Weise erneut die Seeberschen Bedingungen für eine reduzierte ternäre positiv definite Form ab.[31]) Minkowski hat später diesen geometrischen Ansatz als seine eigenen Gedanken leitend bezeichnet.[32]) Um auch die in Minkowskis Probevorlesung vorkommenden Begriffe zu erläutern, wollen wir Dirichlet etwas genauer folgen.

Gegeben sei die ternäre Form

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy,$$

---

[30]) [42], S. 319.

[31]) Der dieser Abhandlung von Dirichlet vorausgehende Auszug im Bericht der königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften [30] scheint die erste Abhandlung zu sein, in der das Prinzip der sukzessiven Minima ausdrücklich angesprochen ist.

[32]) vgl. die Verlagsanzeige [20] zu Minkowskis Buch „Geometrie der Zahlen".

die wir als positiv definit annehmen, i. e. f nimmt stets nicht negative Werte an und ist Null nur für (0, 0, 0). Für die Koeffizienten bedeutet dies, daß die Ausdrücke a, b, c, $ab-c'^2$, $ac-b'^2$, $bc-a'^2$ und die Determinante $abc+2a'b'c'-bb'^2-aa'^2-cc'^2$ positiv sind. Dies erlaubt durch die drei Gleichungen

$$\cos\lambda=\frac{a'}{\sqrt{bc}},\quad \cos\mu=\frac{b'}{\sqrt{ac}},\quad \cos\nu=\frac{c'}{\sqrt{ab}},\tag{1}$$

die drei spitze oder stumpfe Winkel völlig bestimmen, eine dreikantige Ecke zu bilden. Betrachten wir die drei Kanten als die positiven Achsen (1), (2), (3) eines Koordinatensystems, wobei die Winkel zwischen den Achsen (2) und (3), (1) und (3), (1) und (2) jeweils durch λ, μ, ν gegeben sein sollen, so hat ein beliebiger Punkt des Raumes die Koordinaten $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{b}$, $z\sqrt{c}$. Wir lassen hier für x, y, z noch beliebige reelle Werte zu. Die Form f drückt dann das Quadrat der Entfernung eines Punktes vom Koordinatenmittelpunkt aus.

Läßt man für x, y, z nur noch ganze Zahlen zu, so bezieht sich die Form f auf ein Punktesystem, welches durch die Durchschnitte dreier Reihen parallel äquidistanter Ebenen gebildet wird. Der ganze Raum wird so in gleiche Parallelepipeda geteilt, deren Eckpunkte dieses Punktesystem ausmachen. Das Quadrat des Rauminhalts eines Elementarparallelepipedums stimmt mit der Determinante der ternären Form überein. Äquivalente ternäre Formen f und f' (vgl. 2.3.) repräsentieren dasselbe Punktesystem, nur auf andere Achsen bezogen. Umgekehrt entsprechen zwei verschiedene parallelepipedische Anordnungen eines gegebenen Punktesystems äquivalenten ternären Formen. Denn nimmt man einen Punkt des Systems, so bestehen zwischen den einzelnen Koordinaten bezüglich der beiden Anordnungen lineare Beziehungen der Form

$$x=\alpha x'+\beta y'+\gamma z',\quad y=\alpha' x'+\beta' y'+\gamma' z',\quad z=\alpha'' x'+b'' y'+\gamma'' z'.\tag{2}$$

Die Ganzzahligkeit der x, y, z bzw. x', y', z' erbringt, daß auch die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'$, etc. ganz sind und daß die von ihnen gebildete Determinante E den Wert 1 oder -1 hat. Damit folgt die Äquivalenz der beiden ternären Formen, die den unterschiedlichen parallelepipedischen Anordnungen desselben Punktesystems zu Grunde liegen. Die geometrische Bedeutung des Satzes, daß äquivalente ternäre Formen die gleiche Determinante haben, ist dann die, daß das einer jeweiligen parallelepipedischen Anordnung eines gegebenen Punktesystems in obigem Sinne zu Grunde liegende Parallelepipedum stets denselben Inhalt hat.

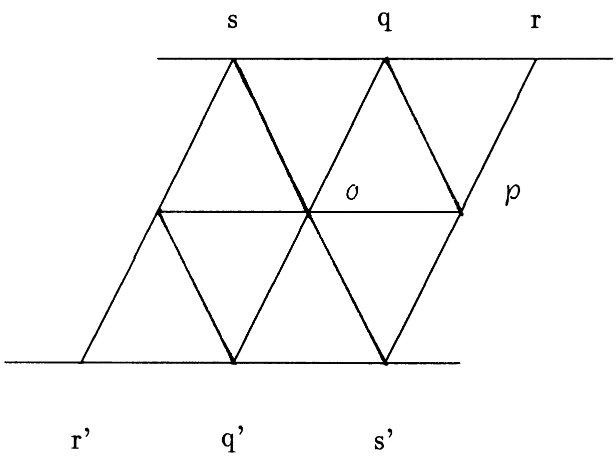
Analoge Beziehungen bestehen selbstverständlich zwischen einer positiv definiten binären Form $lx^2+2mxy+ny^2$ und einem Punktesystem, das nach einem Parallelogramm angeordnet ist.[33]) Ein solches System nennt Dirichlet ein System zweiter Ordnung, die vorhergehend besprochenen Systeme dritter Ordnung, und eine unendliche Reihe äquidistanter Punkte in gerader Linie heißt System erster Ordnung.

---

[33]) Wir benutzen hier bewußt die Notation von Gauß und Dirichlet, um das folgende Zitat von Dirichlet nicht unverständlich werden zu lassen.

Dirichlet behandelt nun zuerst in dem Fall eines Systems zweiter Ordnung die Reduktionsbedingungen, und es erscheint lohnend, seinen geometrischen Argumenten, mit denen er begründet, daß sich ein solches System stets nach einem Grundparallelogramm abteilen läßt, dessen Seiten nicht größer sind als seine Diagonalen, zu folgen:[34])

„I. Es sei *o* ein beliebiger Punct des Systems. Die übrigen Puncte desselben liegen immer paarweise in gleicher Entfernung und entgegengesetzter Richtung von *o*. Es sei nun *p* einer der Puncte des Paares, für welches die Entfernung von *o* kleiner als für jedes andere Paar ist. Findet dieselbe kürzeste Entfernung für mehr als ein Paar Statt, so wähle man *p* nach Belieben in einem derselben. Das gegebene System besteht aus einer unendlichen Anzahl unter einander congruenter und äquidistanter Systeme erster Ordnung, deren eines dasjenige ist, wozu *o* und *p* gehören. In einem der beiden diesem letzteren benachbarten nehme man den Punct *q,* welcher *o* am nächsten ist, oder, falls dieselbe kürzeste Enfernung für zwei Puncte Statt finden sollte, einen derselben nach Belieben. Das so erhaltene Parallelogramm *poqr* hat die verlangten Eigenschaften, da nach der Construction $op \leqslant oq$, $oq \leqslant or$, $oq \leqslant os = pq$. Ein Grundparallelogramm, welches diese Bedingungen erfüllt, soll fortan ein reducirtes heißen.“



Im weiteren kann man für ein solches reduziertes Parallelogramm *poqr* den Winkel *poq* als nicht stumpf voraussetzen. Setzt man $op =: \sqrt{l}$ und $oq =: \sqrt{n}$, so[35])

„läßt sich die Beziehung unseres Parallelogramms zum gesammten Punctensystem dahin aussprechen, daß das Minimum der Entfernung irgend eines Punctes des Systems von *o*, $= \sqrt{l}$, und daß, nach dem man einen Punct in dieser Entfernung gewählt, in allen noch übrigen Richtungen, d. h. außerhalb der von *o* nach dem ersteren gezogenen Geraden, das zweite Minimum $= \sqrt{n}$ ist. Das eben Gesagte gilt ganz allgemein, was wir jetzt hinzufügen, daß nämlich das erste Minimum nur für den Punct *p* (wenn wir von zwei Gegenpuncten immer nur einen erwähnen) das zweite nur für *q* Statt findet,“

---

[34]) [31], S. 216.
[35]) [31], S. 217.

mit einigen, leicht zu erfassenden Ausnahmen, bedingt durch Gleichheitszeichen in den Annahmen $op \leqslant oq$, $oq \leqslant pq$.

Die sukzessiven Minima $\sqrt{l}$ und $\sqrt{n}$ sind durch das gegebene Punktesystem selbst bestimmt und hängen nicht von einer nach einem Parallelogramm gewählten Anordnung ab. Sie stimmen der Größe nach mit den Seiten des reduzierten Grundparallelogramms überein.

Auf diesen geometrischen Betrachtungen zur Theorie der reduzierten positiv definiten binären Formen baut Dirichlet nun seine Untersuchung der ternären Formen auf. Mittels sukzessiver Minima beschreibt er einen Weg, wie ein Punktesystem dritter Ordnung nach einem Grundparallelepipedum anzuordnen ist, dessen Flächen reduzierte Parallelogramme sind, und dessen Kanten, von denen immer je vier einander gleich sind, nicht größer als seine Diagonalen sind. Die Kanten eines solchen reduzierten Parallelepipedums ergeben sich als die sukzessiven Minima des zu Grunde liegenden Punktesystems. Bis auf wenige Ausnahmefälle, die durch Gleichheitszeichen in der Größenbeziehung zwischen den Diagonalen der Flächen zu den Seiten bzw. den Diagonalen des Parallelepipedums und seinen Kanten herrühren, ist nur eine einzige Anordnung nach einem reduzierten Parallelepipedum möglich. Diese Grenzfälle können jedoch leicht durch das Einführen zusätzlicher Bedingungen beherrscht werden.

Die mittels des Prinzips der sukzessiven Minima gefundenen Bedingungen an ein reduziertes Parallelepipedum, nach dem ein, durch eine ternäre positiv definite Form gegebenes Punktesystem abgeteilt werden kann, übertragen sich nun offensichtlich in Reduktionsbedingungen an die Koeffizienten der Form. Durch Vertauschung oder Vorzeichenwechsel der Variablen kann man von einer positiv definiten ternären Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy$$

stets (ohne die Äquivalenzklasse zu verlassen) annehmen, daß ihre Koeffizienten den Bedingungen

a) $a \leqslant b \leqslant c$

b) $a' \geqslant 0$, $b' \geqslant 0$, $c' \geqslant 0$ außer im Falle, daß a', b' und c' gleichzeitig negativ sind

c) Falls $b = c$, dann $|c'| \leqslant |b'|$
Falls $b = a$, dann $|b'| \leqslant |a'|$
Falls $a = b = c$, dann $|c'| \leqslant |b'| \leqslant |a'$

genügen. Diese Form heißt dann reduziert, wenn sie einem reduzierten Parallelepipedum entspricht. Als Hauptbedingungen erhält man so

$$a \geqslant 2c'\sigma, \qquad a \geqslant 2b'\sigma, \qquad b \geqslant 2a'\sigma \tag{3}$$

mit $\sigma = 1$ außer im Falle, daß a', b', c' gleichzeitig negativ sind, in dem man $\sigma = -1$ setzt. Diese sind eine Folge der Forderung, daß die Diagonalen der Flächen nicht kleiner als die Seiten derselben sein dürfen. Die Forderung, daß die Kanten die Diagonale des Parallelepipedums nicht übertreffen dürfen, schreibt sich als

$$a + b + c + 2a'\varepsilon + 2b'\delta + 2c'\delta\varepsilon \geqslant c, \tag{4}$$

mit $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, kann jedoch durch die einfachere Gestalt

$$a + b + 2a' + 2b' + 2c' \geqslant 0 \tag{5}$$

ersetzt werden, da sie in den meisten Fällen schon vorab erfüllt ist. Es ist nicht schwierig, auch mittels geometrischer Argumente die Eindeutigkeit einer reduzierten Form innerhalb einer Äquivalenzklasse festzustellen. Sind die Bedingungen (3) und, falls a', b', c' gleichzeitig negativ sind, auch (5) echt erfüllt, i. e. es gilt stets $<$, so gibt es nur genau eine reduzierte Form in der Klasse, zu der die Form gehört. Treten jedoch Gleichheitszeichen auf, so kann es mehrere reduzierte Formen in einer Klasse geben, die jedoch leicht aus einer gegebenen aufgefunden werden können.[36])

Dirichlet beschließt seine Abhandlung mit einer kurzen Herleitung der schon durch Seeber und Gauß bekannten Tatsache, daß das Produkt der ersten drei Koeffizienten a, b, c einer reduzierten ternären Form nicht größer als das Zweifache (des Absolutbetrages) der Determinante ist.

Dieser Abhandlung von Dirichlet, in der er eine Idee von Gauß zur geometrischen Betrachtung binärer und ternärer positiv definiter Formen und deren Reduktion aufnimmt und zu einer neuen, systematischen Begründung der Seeberschen Ergebnisse ausbaut, kommt sicherlich eine große Bedeutung zu. Dem arithmetischen Ausdruck einer positiv definiten ternären Form ist hier ein nach einem Parallelepipedum abgeteiltes Punktesystem als geometrisches Gebilde zugeordnet. Äquivalente Formen entsprechen demselben Punktesystem in verschiedenen Anordnungen; der jeweiligen Abteilung zu Grunde liegende Parallelepipeda haben jedoch denselben Inhalt. Das Auffinden der Reduktionsbedingungen geschieht auf ganz geometrische Weise entsprechend dem Prinzip der sukzessiven Minima. Im Falle binärer Formen bedeutet dies, daß ein Punktesystem zweiter Ordnung stets nach einem Parallelogramm abgeteilt werden kann, dessen Seiten nicht größer als seine Diagonalen sind. Für ternäre Formen ergibt sich, daß ein System dritter Ordnung nach einem Parallelepipedum angeordnet werden kann, dessen Flächen reduzierte Parallelogramme sind, und dessen Kanten seine Diagonalen nicht übertreffen.

Im Zusammenhang mit ternären Formen sind auch die Untersuchungen von G. Eisenstein (1823–1852) zu nennen, der schon sehr früh quadratische Formen mit mehreren Variablen studierte. Eine Reihe von tiefliegenden Sätzen zur Reduktionstheorie, Geschlechtertheorie und zur Maßbestimmung findet sich in [34]. Ihm ist jedoch insbesondere die grundlegende Einführung des Maßbegriffes zuzurechnen. Man erkennt hier wie auch in [35], daß Eisenstein in vielen Fällen schon die Verallgemeinerung seiner Ergebnisse auf Formen mit beliebig vielen Variablen vor sich sah. Ausgesprochen geometrische Gedankengänge finden sich jedoch nicht.

---

[36]) Diese Ergebnisse zur Reduktion positiv definiter ternärer Formen erbringen z. B., daß jede Form der Determinante 1 äquivalent zur Form $x^2 + y^2 + z^2$ ist. Diese Tatsache benutzt Dirichlet, um in einer direkt nachfolgenden Arbeit [32] einen einfachen Beweis für die Zerlegbarkeit von ganzen Zahlen falls sie nicht von der Form $4k$ oder $8k + 7$ sind, als Summe von drei Quadraten zu geben.

2.5 Zu einigen Briefen von Ch. Hermite an C. G. J. Jacobi über verschiedene Gegenstände der Zahlentheorie

In demselben Band des Crelleschen Journals, in dem die Arbeit von Dirichlet zur geometrischen Begründung der Reduktion der positiv definiten ternären quadratischen Formen erschien, wurden gleichzeitig „Extraits de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres" veröffentlicht [43].[37]) Diese Briefe haben sich, wie auch Minkowski betont,[38]) unter Einbeziehung des durch Gauß und Dirichlet nahegelegten geometrischen Zugangs als sehr anregend für die weitere Entwicklung erwiesen.

Hermite behandelt beliebige quadratische Formen in n Variablen und benutzt diese als Instrument zur Lösung allgemeiner zahlentheoretischer Fragestellungen. Als methodische Anregung erwähnt[39]) er den von Jacobi eingeschlagenen Weg[40]) zu zeigen, daß eine eindeutige Funktion einer Variablen mit mehr als zwei imaginären Perioden nicht existiert, sieht ihn als Verallgemeinerung der Theorie der Kettenbrüche und zeigt damit, daß bei zwei gegebenen irrationalen Zahlen A, B stets eine lineare Relation $Aa + Bb + c = 0$ mit ganzen Zahlen a, b, c näherungsweise erfüllt werden kann. Hermite sucht nun, dieses Vorgehen zu verallgemeinern. Er schreibt:[41])

„Cherchant à appliquer le nouvel algorithme, aux irrationnelles, définies par des équations du 3^e degré à coefficients entiers, j'ai vu s'offrir quelques questions d'une grande étendue auxquelles je me suis principalement appliqué, et qui m'ont amené à considérer la méthode d'approximation que je me proposais d'étudier, sous un point de vue bien éloigné de son origine. C'est dans quelques propriétés très élémentaires des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables, que j'ai rencontré les principes d'analyse dont je Vous demande la permission de Vous entretenir."

Letztlich zielt dies auf die Frage nach der näherungsweisen ganzzahligen Auflösung von Gleichungen der Form $\alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \ldots + x_n = 0$ mit einer algebraischen Zahl α; Hermite sucht die aus ganzzahligen Gleichungen stammenden Irrationalitäten zu charakterisieren. Zur Untersuchung dieser und anderer arithmetischer Fragen erweist es sich für Hermite, bedingt durch den methodischen Ansatz via quadratischer Formen, als notwendig, die allgemeine Theorie indefiniter wie positiv definiter quadratischer Formen beliebiger Variablenzahl wesentlich fortzuentwickeln. Die Notwendigkeit, solche allgemeinen Formen zu betrachten, war schon Gauß,[42]) Dirichlet,[43]) Eisenstein[44]) bewußt, von denen auch einzelne Untersuchungen vorliegen.

---

[37]) Diese Arbeiten entstanden wahrscheinlich in den Jahren 1847/48; vgl. [65], S. 349.

[38]) Diese Arbeit wird in der Probevorlesung von Minkowski zitiert (siehe § 5); man vergleiche auch die 1893 veröffentlichte Buchanzeige zur „Geometrie der Zahlen" [20].

[39]) vgl. [44], S. 261.

[40]) [49] II, 23–50.

[41]) vgl. [44], S. 262.

[42]) vgl. [41], Art. 266.

[43]) vgl. [30, 31].

[44]) vgl. etwa [34]. Ohne Beweis fügt Eisenstein seinen Untersuchungen ternärer Formen schon die allgemeine Tatsache hinzu: „Alle unter einander äquivalenten Formen werden jedesmal in

Es sei $f = \sum a_{ik} x_i x_k$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ eine quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten a_{ik}; es gilt $a_{ik} = a_{ki}$; gelegentlich werden wir auch Koeffizienten aus anderen Zahlbereichen zulassen. Die Form f heißt positiv definit, falls f für jedes n-Tupel x ganzer Zahlen $(x \neq (0, \ldots, 0))$ positive Werte annimmt, negativ definit, falls f negative Werte annimmt, andernfalls indefinit. Die Determinante Δ von f sei nicht Null. Ist $g = \sum b_{ik} y_i y_k$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ eine zweite quadratische Form, die durch eine ganzzahlige Variablensubstitution mit Determinante 1 oder -1 aus f hervorgeht, so heißt g äquivalent zu f. Dieser Begriff der Äquivalenz von Formen in n Variablen definiert eine Äquivalenzrelation; äquivalente Formen haben dieselbe Determinante und stellen dieselben Zahlen dar.

Die Behandlung der positiv definiten Formen durch Hermite orientiert sich stark an den von Gauß in den „Disquisitiones Arithmeticae" vorgelegten Untersuchungen im binären und ternären Fall; der schon dort wesentliche Begriff der adjungierten Form oder „Begleitform" ist ein wichtiges methodisches Hilfsmittel. Das von Hermite hier vorgeschlagene Verfahren zur Reduktion positiv definiter quadratischer Formen orientiert sich am Prinzip der sukzessiven Minima. Gegenüber dem binären Fall, in dem die Koeffizienten a und c einer reduzierten Form $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ als das erste Minimum bzw. das zweite Minimum von f charakterisiert werden können,[45]) und auch gegenüber dem ternären Fall, in dem ähnlich verfahren werden kann,[46]) ist das Vorgehen hier leicht zu modifizieren. Der Grund liegt darin, daß, fährt man so fort, nicht in jeder Äquivalenzklasse eine in diesem Sinne reduzierte Form zu finden ist.[47]) Eine positiv definite quadratische Form $f = \sum a_{ik} x_i x_k$ heißt nach Hermite reduziert,[48]) falls der Koeffizient a_{11} von x_1^2 den kleinsten möglichen Wert des ersten Koeffizienten aller zu f äquivalenten Formen hat, der Koeffizient a_{22} von x_2^2 den kleinsten möglichen Wert des zweiten Koeffizienten aller zu f äquivalenter Formen mit dem gleichen Koeffizienten a_{11} hat, der Koeffizient a_{33} den kleinsten möglichen Wert bei gegebenem a_{11} und a_{22} hat usw. Diese Vorschriften erbringen, daß es im Falle ganzer Koeffizienten zu einer gegebenen Determinante innerhalb einer Klasse äquivalenter positiv definiter quadratischen Formen höchstens endlich viele reduzierte geben kann.

Eine geometrische Deutung der die Reduktion definierenden Bedingungen wird von Hermite nicht gegeben. Geht man von dem der quadratischen Form zugeordneten Gitter $L = \{\sum \alpha_i t_i \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$ aus, wobei wir entsprechend 2.3. das

---

(Fortsetzung Fußnote 44)
eine Classe zusammengefasst; alle Formen einer Classe haben dieselbe Determinante; aber dieser Satz gilt nicht umgekehrt, sondern zu jeder Determinante gehört eine gewisse Anzahl Classen ternärer Formen, welche, wie Gauß bewiesen hat, immer endlich ist. Dieses letztere Resultat gilt übrigens, um es beiläufig zu sagen, allgemein, und wenn man den Begriff des Formensystems, der Determinante und der Äquivalenz auf Formen mit n Variablen erweitert, so gehört für quadratische Formen mit n Variablen zu jeder Determinante eine endliche Anzahl Classen."

[45]) vgl. 2.2. (5).

[46]) vgl. 2.4.

[47]) Ein schon früher bekanntes Gegenbeispiel wird in [84] § 7 diskutiert; man vergleiche auch [50].

[48]) vgl. [44], S. 302.

der quadratischen Form f zugeordnete quadratische System $A=(a_{ij})$ als $A=T^tT$ mit einer reellen Matrix T schreiben und t_i den i-ten Spaltenvektor von T nennen, so läßt sich das schrittweise Vorgehen, um zu einer reduzierten Form zu kommen, so deuten: Ausgehend von einem Nullpunkt o des Gitters seien bereits m Gitterpunkte $p_1,\dots,p_m$ als Endpunkte von Basisvektoren zu einer parallelepipedischen Abteilung des Gitters gewählt. Um p_{m+1} zu bestimmen, betrachtet man alle die Punkte p, für die sich im Inneren des Parallelepipeds mit den Kanten $op_1,\dots,op_m, op$ kein Punkt aus dem System befindet, und wählt hieraus einen als p_{m+1} aus, der dem Nullpunkt am nächsten liegt.

Hermite beginnt jedoch diese Briefe an Jacobi mit einer sehr nützlichen Abschätzung für das Minimum einer positiv definiten quadratischen Form in n Variablen. Er schreibt,[49]) nachdem er die bekannte Abschätzung[50]) im binären Fall wiederholt hat:

„Soit actuellement $f(x_o, x_1, \dots x_n)$ une forme quelconque à $n+1$ variables, dont les coefficients soient entiers ou irrationnels, et dont le déterminant soit D en valeur absolue, je dis qu'on pourra toujours trouver $n+1$ nombres entiers, $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$, tels qu'on ait:

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda) < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}\,.\text{“}$$

Diese Abschätzung, die für beliebige Formen gültig ist, hat vielfältige zahlentheoretische Anwendungen. Als eine wesentliche Leistung Hermites ist dabei die Einführung kontinuierlicher Parameter in die, den arithmetischen Problemen zugeordneten positiv definiten quadratischen Formen hervorzuheben.[51]) Als ein auch häufig von Minkowski herangezogenes[52]) Beispiel für das Vorgehen Hermites mag das Folgende gelten:[53])

Sei a eine reelle Zahl, und man betrachte die binäre quadratische Form

$$(x-ay)^2+\frac{y^2}{\delta}$$

mit einem positiven Parameter δ. Die Determinante Δ dieser Form ist $\dfrac{1}{\delta}$. Da die genaue Grenze für die Minima positiv definiter binärer quadratischer Formen der Determinante Δ gerade $\sqrt{\dfrac{4}{3}\Delta}$ ist, kann man ganze Zahlen p und q finden, so daß

$$(p-aq)^2+\frac{q^2}{\delta} \leqslant \sqrt{\frac{4}{3\delta}}$$

---

49) [44], S. 263.

50) vgl. 2.1., 2.2.

51) Man vergleiche auch die Arbeit [45], in der Hermite noch einmal einige der neuen Gesichtspunkte und Ergebnisse von [44] im Überblick zusammenfaßt und weiterführt.

52) siehe A II, letzter Absatz.

53) vgl. [44], 3. Brief, S. 295 bzw. [45], IV.

gilt. Läßt man nun δ auf stetige Weise von Null nach Unendlich wachsen, so erhält man, wenn man bei gegebenem positiven δ stets solche ganzen Zahlen p, q nimmt, für die die zugehörige Form ihr Minimum annimmt, die Menge der Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung der reellen Größe a.[54])

Auf ähnliche Weise wird die simultane Approximation zweier gegebener Größen a und b durch zwei Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q}$ erfolgreich angegangen, indem die Minima der positiv definiten ternären Formen

$$(x-ay)^2+(z-by)^2+\frac{y^2}{\delta}$$

mit einem stetigen Parameter δ untersucht werden.[55]) Für das Minimum einer solchen Form hat man (wie auch schon Gauß zeigte[56]), daß es stets kleiner als $\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\delta}}$ ist.

Auf die Fülle der anderen arithmetischen Anwendungen, die aus der Abschätzung des Minimums einer positiv definiten quadratischen Form und der Reduktionstheorie fließen, kann hier nicht eingegangen werden.[57])

Wir wollen jedoch kurz einen Beweis der Hermiteschen Abschätzung skizzieren, der sich eng an seinen Induktionsbeweis anlehnt, jedoch den Begriff der adjungierten Form vermeidet.[58]) Sei $f=\sum a_{ik}x_ix_k$ eine positiv definite quadratische Form in n Variablen und mit beliebigen reellen Koeffizienten; die Determinante Δ von f ist nicht Null. Das System

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

wird von Minkowski das quadratische System der Form f genannt;[59]) im heutigen Sprachgebrauch (in dem wir auch den Beweis weitgehend geben werden) handelt es sich um eine reelle symmetrische positiv definite Matrix. Durch eine reelle orthogonale Transformation kann f in eine Summe $\sum d_iy_i^2$ von Quadraten mit positiven Koeffizienten d_i umgewandelt werden; die d_i sind gerade die Eigenwerte von A. Ist m der kleinste Eigenwert von A, so gilt für alle Vektoren z

$$m\sum z_i^2\leqslant f(z).$$

---

[54]) Man bedenke, daß die Konvergenten der Kettenbruchentwicklung von a die besten rationalen Approximationen von a in dem Sinne sind, daß $\frac{p_k}{q_k}$ näher zu a ist als jede andere rationale Zahl mit einem Nenner kleiner als q_k.

[55]) vgl. [44] 1. Brief S. 265 bzw. 3. Brief S. 295.

[56]) vgl. [41], Art. 272ff.

[57]) Man siehe z. B. die Würdigung des Hermiteschen Werkes durch M. Noether [65].

[58]) vgl. den von Korkine-Zolotareff gegebenen Beweis in [53], S. 370–373.

[59]) [6], p. 5.

Die Koeffizienten von ganzzahligen Vektoren z, die zudem für eine gegebene reelle Grenze $G f(z) \leqslant G$ erfüllen, sind beschränkt; also existiert das Minimum $\mu(f) := \min f(z)$, über alle ganzzahligen Vektoren z, $z \neq 0$, und ist positiv. Äquivalente Formen f und g haben dasselbe Minimum; es wird von einem primitiven Vektor $z_o = (z_1, \ldots, z_n)$ angenommen, i. e. seine Koeffizienten z_i sind teilerfremd.

Satz (Hermite): Sei $\mu(f)$ das Minimum der positiv definiten quadratischen Form $f = \sum a_{ik} x_i x_k$ in n Variablen und mit beliebigen reellen Koeffizienten a_{ik}; die Determinante $\Delta(f)$ ist nicht Null. Dann gilt die Abschätzung

$$\mu(f) \leqslant c_n \, \Delta(f)^{1/n}$$

mit der nur von n abhängenden Konstante

$$c_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} .$$

In einem ersten Schritt zeigt man, daß man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, daß der Koeffizient a_{11} mit $\mu(f)$ zusammenfällt. Sei a ein primitiver ganzzahliger Vektor mit $\mu(f) = f(a)$. Dieser Vektor a kann nun zu einer Matrix Z mit ganzen Eingängen und Determinante gleich ± 1 ergänzt werden, deren erste Spalte gerade a ist. Das Argument geht letztlich auf Gauß zurück. Hierzu betrachtet man alle Vektoren $b = Ba$, die durch Transformation mit einer ganzzahligen Matrix B der Determinante ± 1 aus a entstehen. Durch elementare Matrizenoperationen dieses Typs ist es möglich, eine Komponente b_i zu einer anderen $b_j\,(j \neq i)$ zu addieren, zwei Komponenten b_i und b_j zu vertauschen und eine Komponente b_i durch $-b_j$ zu ersetzen. Wählt man B nun so, daß $b_1 > 0$ minimal ist, so gilt deshalb, daß die $b_k\,(k \neq 1)$ Vielfache von b_1 sind. Andernfalls gelte $b_k = t b_1 + c$, $c < b_1$, und durch Addition des $(-t)$-fachen von b_1 zu b_k und Vertauschen von $b'_k = c$ mit b_1 könnte man $b''_1 = c$ erreichen. Addiert man nun Vielfache von b_1 zu $b_k\,(k \neq 1)$, so erreicht man $b'_k = 0$ für $k \neq 1$, also muß wegen der Primitivität von a die Komponente $b_1 = 1$ sein. Es folgt, daß eine ganzzahlige Matrix T mit Determinante ± 1 existiert, so daß

$$Ta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Die inverse Matrix $T^{-1} =: Z$ hat dann als erste Spalte gerade den Vektor a. Für die aus f durch Transformation mit Z hervorgehende quadratische Form $f' = \sum a'_{ik} y_i y_k$ gilt dann $a'_{11} = f(a) = \mu(f)$.

Der zweite Schritt wird mittels vollständiger Induktion geführt. Der Fall $n = 1$ ist klar. Für den Induktionsschluß kann man $f(x) \geqslant a_{11}$ für alle ganzzahligen Vektoren x, $x \neq 0$, annehmen. Man kann dann f in der Form

$$f(x) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n\right)^2 + \sum_{k,l>1} r_{kl} x_k x_l$$

schreiben, wobei $\sum_{k,l>1} r_{kl}x_kx_l$ eine positiv definite quadratische Form r in den $n-1$ Variablen $x_2, \dots x_n$ ist. Für die Determinante $\Delta(r)$ von r gilt $\Delta(r) = a_{11}^{-1}\Delta(f)$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein ganzzahliger Vektor $y = (y_2, \dots, y_n)$ mit $n-1$ Komponenten y_i (nicht alle $y_i = 0$), so daß $r(y)$ minimal ist und daß

$$r(y) \leqslant c_{n-1}\Delta(r)^{1/(n-1)}$$

gilt. Wähle die ganze Zahl y_1 nun so, daß

$$-1/2 \leqslant y_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} y_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} y_n \leqslant 1/2$$

gilt. Für $x_0 = (y_1, y_2, \dots y_n)$ hat man dann

$$\mu(f) \leqslant f(x_0) = a_{11}\left(y_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} y_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} y_n\right)^2 + r(y)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\mu(f) + c_{n-1}(\Delta(f) \cdot a_{11}^{-1})^{\frac{1}{n-1}}$$

Hieraus folgt unmittelbar $\mu(f)^{n-1} \leqslant \left(\frac{4}{3} c_{n-1}\right)^{n-1} \Delta(f)\mu(f)^{-1}$ und damit

$$\mu(f) \leqslant \left(\frac{4}{3} c_{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \Delta(f)^{\frac{1}{n}} .$$

Setze $c_n = \left(\frac{4}{3} c_{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, so erhält man induktiv von $c_1 = 1$ ausgehend den angegebenen Wert für c_n.

2.6 Minima positiv definiter quadratischer Formen

Die Frage nach dem Minimum $\mu(f)$ einer positiv definiten quadratischen Form f in n Variablen der Determinante Δ blieb auch nach der von Hermite gegebenen Abschätzung des Verhältnisses von $\mu(f)$ zu $\sqrt[n]{\Delta}$ durch eine von den Koeffizienten der Form unabhängige Größe von großem Interesse; dies lag sicherlich auch an den zahlreichen zahlentheoretischen Anwendungen, insbesondere im Bereich der diophantischen Approximation und der Theorie der komplexen Einheiten, die Hermite erschlossen hatte. Die Untersuchung richtete sich u. a. nun darauf, die präzise Grenze für die Minima positiv definiter quadratischer Formen zu finden. Gerade in Fällen kleiner Variablenzahl ergab sich damit parallel eine feinere Diskussion der die Reduktion quadratischer Formen definierenden Bedingungen. Hermite selbst schlägt für die von ihm gegebene Abschätzung

$$\mu(f) \leqslant c_n \Delta(f)^{\frac{1}{n}} \quad \text{mit } c_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \tag{1}$$

eine Verbesserung der Konstante c_n vor; er schreibt:[60])

„Ce qui précède, indique suffisamment une infinité d'autres conséquences analogues, qui toutes viennent dépendre de la recherche difficile, d'une limite précise du minimum d'une forme définie quelconque. Là-dessus je ne puis former qu'une conjecture. Mes premières recherches, dans le cas d'une forme à n variables de déterminant D, m'avaient donné la limite $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D}$, je suis porté à présumer, mais sans pouvoir le démontrer, que le coefficient numérique $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ doit être remplacé par $\frac{2}{\sqrt[n]{(n+1)}}$."[61])

Für $n=2$ ist die Konstante c_2 minimal; hierzu betrachte man z. B. die Form $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$. Der minimale Wert $c_2=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ war schon Gauß und vielleicht sogar Lagrange bekannt.

Im Falle ternärer Formen gilt die von Seeber vermutete und von Gauß bewiesene Ungleichung

$$a\,b\,c \leqslant 2\Delta \tag{2}$$

für die Koeffizienten einer reduzierten Form.[62]) Hieraus folgt unmittelbar, da a als Minimum $\mu(f)$ von f und b, c als die sukzessiven Minima charakterisiert sind, die Abschätzung $\mu(f) \leqslant 2^{1/3}\Delta(f)^{1/3}$ für das Minimum einer positiv definiten ternären Form wie von Hermite vorgeschlagen.

Für die genannte Ungleichung (2) gab Selling 1874 einen anderen Beweis. Für die Reduktionstheorie binärer und ternärer Formen schlug er ein neues Vorgehen vor [75], das sowohl im definiten wie im indefiniten Fall angewandt werden kann. Die von ihm im positiv definiten Fall eingeführten Reduktionsbedingungen weisen eine größere Symmetrie als die von Dirichlet diskutierten auf, führen jedoch nicht unbedingt zu einer eindeutig bestimmten reduzierten Form in jeder Klasse eigentlich äquivalenter Formen. Bemerkenswert ist jedoch, daß geometrische Betrachtungsweisen, wie sie von Gauß und Dirichlet angelegt wurden, Selling durchaus geläufig sind. Die Sellingschen Methoden wurden später von Charve [27] auf den quaternären Fall verallgemeinert.[63]) Für die Frage der Minima spielt dieser Ansatz jedoch keine wichtige Rolle.

---

[60]) [44], 296.

[61]) Zum Beispiel die Betrachtung des Leech-Gitters zeigt, daß diese Vermutung von Hermite falsch ist.

[62]) vgl. 2.3. Diese Ungleichung wurde auch von Hermite auf andere Weise bewiesen [46].

[63]) Die Arbeiten von Selling und Charve waren Minkowski schon frühzeitig bekannt; vgl. [8].

Im Jahre 1872 veröffentlichten A. Korkine und G. Zolotareff eine kurze Arbeit in den Mathematischen Annalen, in der sie die genaue Grenze des Minimums positiv definiter quadratischer Formen in vier Variablen durch Rückführung auf die Abschätzung im ternären Fall bestimmten.[64]) Man erhält das folgende Ergebnis:[65])

„On peut assigner aux variables de toute forme quadratique positive quaternaire de déterminant $-D$ des valeurs entières telles que la valeur de la forme ne surpasse point la quantité

$$\sqrt[4]{4D},$$

et il existe de telles formes dont les minima sont égaux à

$$\sqrt[4]{4D}.\text{“}$$

Auch in Fällen höherer Variablenzahl konnten Korkine und Zolotareff wesentlich verbesserte Abschätzungen angeben. Methodisch neu ist hierbei der von ihnen eingeführte Begriff der Extremform

„Nous nommons extrême une forme quadratique positive si son minimum est diminué, lorsqu'on attribue aux coefficients des accroissements infiniment petits, tels que la valeur du déterminant de la forme reste invariable. Il est clair que toutes les formes équivalentes à une forme extrême sont aussi des formes extrêmes.“

Bei gegebener Anzahl der Variablen gibt es nur endlich viele Klassen von Extremformen. Bis zur Variablenzahl fünf wurden diese Formen vollständig in [53, 54] bestimmt. Unter ihnen kommt notwendigerweise diejenige Klasse vor, für die das Verhältnis des Minimums zur n-ten Wurzel aus der Determinante ein Maximum ist. In dem Bemühen, die Extremformen zu bestimmen, benutzen Korkine und Zolotareff die Hermitesche Reduktionstheorie und fügen auch hier neue Gesichtspunkte hinzu; durch Abschwächung einiger Bedingungen erreichen sie eine bessere Handhabbarkeit in den von ihnen betrachteten Fällen.

Es ist hier nicht der Ort, auf diese Ergebnisse von Korkine und Zolotareff, obwohl sie für die weitere Entwicklung der Theorie quadratischer Formen sehr anregend gewirkt haben,[66]) näher einzugehen. Diese Arbeiten müssen auf Minkowski jedoch nachhaltigen Eindruck gemacht haben.[67])

---

[64]) Dieses Vorgehen wurde 1944 von Mordell [63] methodisch verallgemeinert.

[65]) vgl. [52], S. 583.

[66]) vgl. etwa die Studien [23] von Bergé und Martinet, in der der Beitrag von Korkine und Zolotareff im Zusammenhang mit den Arbeiten der nachfolgenden Jahre bis heute zur Bestimmung des Minimums $\mu(f)$ gewürdigt wird. Hilfreich sind hier auch die encyklopädischen Arbeiten [83] und [50].

[67]) Auf der ersten Seite versehen mit dem Datum des 28. 11. 1886 findet sich ein Arbeitsheft in [3], in dem Minkowski ausführlich die von Korkine und Zolotareff eingeführten extremen Formen studiert; er nimmt Bezug auf die Arbeit [54]. Man vergleiche auch [13], S. 245.

3 Minkowskis wissenschaftlicher Werdegang bis zur Habilitation 1887

Wir geben einen kurzen Abriß des wissenschaftlichen Werdegangs Minkowskis bis zu seiner Habilitation im Jahre 1887 in Bonn. Angaben zur Person und zu den Lebensumständen finden sich in [47], [69], [82]. Die hier gegebene kurze Charakterisierung der Arbeiten Minkowskis, hauptsächlich im Hinblick auf die Frage nach den Minima positiv definiter quadratischer Formen und auf die Reduktionstheorie, kann eine ausführliche Untersuchung zur Entwicklung der Ideen und Methoden, zu möglichen Anregungen nicht ersetzen.

Hermann Minkowki wurde am 22. Juni 1864 in Alexoten (Rußland) geboren; seine Familie ließ sich 1872 in Königsberg in Preußen nieder. Vom Oktober 1872 bis zum März 1880 besuchte er das Altstädtische Gymnasium. Schon während der Schulzeit fiel Minkowskis mathematische Begabung auf. Wie verschiedentlich belegt, beschäftigte er sich frühzeitig mit dem Studium von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, deren erste Auflage 1863 erschienen war, und Gauß' Werk „Disquisitiones Arithmeticae". In der Bibliothek seines Gymnasiums war das von A. L. Crelle herausgegebene „Journal für die reine und angewandte Mathematik" eingestellt. Einem Brief von H. Weber (1842–1913), der von 1875–1883 als Ordinarius an der Albertus-Universität zu Königsberg lehrte,[68]) an R. Dedekind ist zu entnehmen,[69]) daß Minkowski schon gegen Ende der Schulzeit kleinere mathematische Arbeiten zu Fragen aus dem Bereich der binären quadratischen Formen verfaßte. Sie beziehen sich auf definite und indefinite Formen.

Im April 1880 nahm Minkowski das Studium der Mathematik an der Albertus-Universität in Königsberg auf; zum Wintersemester 1882/83 ging er nach Berlin. Neben H. Weber, zu dem er schon während der Schulzeit Kontakt hatte, zählt er L. Kronecker (1823–1891) und Weierstraß (1815–1897) zu seinen herausragenden Lehrern.[70]) Zu seinen weiteren Lehrern sind Helmholtz, Hurwitz, Lindemann, Kirchhoff, Kummer, Runge, Voigt zu zählen.[71])

Noch in Königsberg hatte sich Minkowski mit dem von der Académie des Sciences in Paris als Aufgabe für den „Grand Prix des Sciences Mathématiques" des Jahres 1882 gestellten Problem der „Theorie de la décomposition des nombres entiers en une somme de cinq carrés" beschäftigt. Die Anregung zu dieser Frage ergab sich für die Akademie[72]) aus den von G. Eisenstein im Jahre 1847 ohne Beweis angekündigten Ergebnissen [33] über die Anzahl der Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl als Summe von fünf Quadraten. Am 29. Mai 1882 reichte Minkowski bei der Akademie eine 188-seitige Arbeit ein,[73]) in der sich die Resultate Eisensteins quasi als Beispielsfall allgemeiner Betrachtungen aus den dort

[68]) vgl. [85], S. 291.
[69]) vgl. [82], Abschnitt 2, S. 144.
[70]) vgl. den in [69], S. 10, überlieferten Lebenslauf.
[71]) vgl. den seiner Dissertation [10] beigegebenen Lebenslauf.
[72]) vgl. [2].
[73]) Das Original befindet sich in [2].

entwickelten Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten ergeben. Aufbauend auf der von Gauß in den „Disquisitiones Arithmeticae" vorgelegten Theorie der binären quadratischen Formen werden hier die allgemeinen Fragen nach der Einteilung quadratischer Formen in Ordnungen und Geschlechter erfolgreich angegangen. Für positiv definite Formen wird dann die für die Lösung der Preisaufgabe relevante Frage nach der Darstellung von Formen mit niedriger Variablenzahl durch Formen mit höherer Variablenzahl betrachtet. Dies mündet in die Bestimmung des Maßes gewisser Geschlechter ein.[74])

Neben der Arbeit von Minkowski lagen der Académie des Sciences noch zwei weitere Manuskripte, in denen die gestellte Preisaufgabe behandelt wurde, vor. Auf Vorschlag der Kommission, der Hermite, Bonnett, Bertrand, Bonquet und Jordan angehörten und die ohne Kenntnis der Verfasser die eingereichten Beiträge geprüft hatte, wurde der Preis am 2. April 1883 zu gleichen Teilen den Verfassern der mit n° 1 und mit n° 3 bezeichneten Manuskripte zuerkannt. Als Autor des ersten stellte sich Henry John Stephen Smith von der Universität Oxford, als Autor des zweiten Hermann Minkowski heraus.[75])

Die Untersuchungen zum Maß gewisser Geschlechter von positiv definiten quadratischen Formen werden von Minkowski später wieder aufgenommen und verallgemeinert. Er gelangt in den Jahren 1884/85 zu einfachen Ergebnissen für das Maß eines beliebigen Geschlechtes. Hierdurch werden einige schon 1868 von H. J. S. Smith [79] veröffentlichte Formeln bestätigt und in einen einfachen Gesamtzusammenhang gestellt. Diese Resultate sind zum Teil in der Arbeit „Über positive quadratische Formen" enthalten.

Diese Arbeit enthält im zweiten Teil einige Sätze zur Reduktion positiv definiter quadratischer Formen mit beliebigen reellen Koeffizienten. Dies schließt sich an die kleine, früher entstandene Arbeit zur Reduktion im quaternären Fall an. Ausgehend von einer leichten Modifikation des Hermiteschen Vorgehens werden die charakteristischen Bedingungen reduzierter Formen diskutiert. Es stellt sich heraus, daß in den Fällen $n=2$, 3, 4, 5 eine im Sinne von Hermite reduzierte Form durch eine endliche Anzahl einzelner linearer Ungleichungen charakterisiert werden kann. Für jeden Fall werden diese angegeben. Die Bemerkung: „Diese Sätze, welche für $n=2$ und $n=3$ interessante Eigenschaften ebener und räumlicher Gitter ausdrücken, scheinen um so bemerkenswerter, als sie nicht mehr für größere Werte der n gelten,"[76]) zeigt u. a., daß Minkowski den geometrischen Hintergrund seiner Ergebnisse sieht. Darüberhinaus besteht eine direkte Beziehung zwischen jenen reduzierten Formen, die durch eine Anzahl von Gleichheitszeichen in den charakterisierenden Ungleichungen definiert sind, (und

---

[74]) Für die in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich diskutierte Frage der Minima quadratischer Formen ist eine Darstellung der Theorie der Geschlechter (cf. [51] [26]) und dieser Ergebnisse ohne Belang. Eine Untersuchung im Lichte bisher unveröffentlichter Quellen ist jedoch wünschenswert.

[75]) Die Arbeiten sind als [80] und [7] veröffentlicht. Der das weitere, nicht als preiswürdig erachtete Manuskript begleitende Brief wurde erst im Herbst 1989 geöffnet; als Autor stellt sich Th. Pépin heraus.

[76]) [9], S. 8.

von Minkowski Grenzformen genannt werden) und den von Korkine und Zolotareff [53, 54] eingeführten Extremformen.

Am 30. Juli 1885 wurde Minkowski auf Grund der vorgelegten Dissertation „Untersuchungen über quadratische Formen. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält“ [10] und der öffentlichen Verteidigung der vorgelegten Thesen von der philosophischen Fakultät der Albertus-Universität zu Königsberg zum Doktor promoviert. Einer der Opponenten war David Hilbert.[77]) Im Anschluß an seine Arbeit „Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten“ führte Minkowski hier die Bestimmung der Anzahl der in einem Geschlecht enthaltenen Klassen quadratischer Formen von beliebig vielen Variablen durch. Das Hauptergebnis gibt einen expliziten Ausdruck in Invarianten des Geschlechtes. Der induktiv geführte Beweis im definiten Fall stützt sich wesentlich auf transzendente Methoden von Dirichlet, die dieser zur Behandlung des binären Falles vorgelegt hatte.[78]) Minkowski schreibt am Ende seiner Arbeit: „Von den verschiedenen Darstellungen, deren das Maß eines Genus fähig ist, erscheint als die natürlichste die hier gegebene mit Hilfe eines unendlichen Produktes, in welchem einer jeden Primzahl ein bestimmter Faktor entspricht. Ihre Bedeutung reicht über das spezielle Gebiet der quadratischen Formen hinaus: es zeigt diese Darstellung, daß zur Lösung arithmetischer Probleme über Formenanzahlen ein Studium jener wichtigen Gruppenbildungen erforderlich ist, auf welche Herr Camille Jordan in Nr. 302 des Traité des Substitutions aufmerksam gemacht hat.“[79])

Solche Ausdrücke als unendliche Produkte für das Maß eines Geschlechtes hatte Minkowski schon in der Note „Über positive quadratische Formen“ angedeutet und auch auf deren allgemeine Tragweite hingewiesen.[80])

Auf Grund seines Dienstes als Einjährig-Freiwilliger vom Oktober 1885 bis zum Oktober 1886 hatte Minkowski in dieser Zeit wenig Gelegenheit zu mathematischer Arbeit. Er empfindet diesen Mangel tief; er schreibt in einem Brief an den in Paris weilenden Hilbert vom 26. April 1886: „Wenn einer der großen Herren, Jordan oder Hermite, sich vielleicht einmal meiner erinnern sollte, so bitte empfehlen sie mich bestens, und machen Sie es klar, daß ich weniger von Natur als durch die Umstände ein Faulenzer bin“.[81]) Sicherlich behinderten diese deutlich die schriftliche Ausarbeitung mathematischer Untersuchungen, aber die zur Habilita-

---

[77]) vgl. [47], S. VIII.

[78]) vgl. Dirichlets Arbeit „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres“, [28] Werke, I, 411–496.

[79]) vgl. [10], S. 258 (= GA,I, S. 201).

[80]) Von Interesse ist hier ein Brief von Minkowski an Hilbert vom 14. Februar 1885, [22] in dem er schreibt: Meine Arbeit (endlich fertig!) ist wieder furchtbar angewachsen. Zur Promotion soll daher nur ein Theil dienen.
Ich habe mich entschlossen, einige Resultate schon jetzt zu veröffentlichen. Dieselben erscheinen im dritten Hefte des laufenden Crelle-Bandes. Es wurde mir nämlich plötzlich Angst und bange, ich könnte wieder um die Freude kommen. Poincaré, von dessen vielseitiger und rascher Arbeitskraft Sie ja gehört haben werden, hat vor nicht langer Zeit Untersuchungen begonnen, welche durch eben meine Sätze eines famosen Abschlusses sicher wären. Es könnte nun leicht sein, daß er jetzt nach Publication meiner Preis-Arbeit diesen Abschluß fände.

[81]) vgl. [22].

tion im Frühjahr 1887 vorgelegten Ergebnisse lassen eine fast ungebrochene Schaffenskraft vermuten. Dies meint nicht nur die in der Probe-Vorlesung dargelegten Gedanken, sondern umschließt auch die gegen Ende des Jahres 1886 entstandene Arbeit „Über den arithmetischen Begriff der Äquivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen" und die wenig später entstandene Ergänzung „Zur Theorie der positiven quadratischen Formen". Da Minkowski diese beiden Arbeiten am 26. Februar 1887 als noch nicht publizierte Aufsätze seinem Habilitationsgesuch an die philosophische Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn beilegt,[82]) erscheint es sinnvoll, die darin enthaltenen Ergebnisse im Rahmen der Habilitation zu besprechen.

4 Zur Habilitation Minkowskis in Bonn

4.1 Erste Verbindungen nach Bonn

Die Verleihung des „Grand Prix des Sciences Mathématiques" durch die Académie des Sciences in Paris im April 1883 an den 18jährigen Studenten Hermann Minkowski führte nicht nur zu einem großen Interesse der Öffentlichkeit an seiner Person und den mit der Genese der Preisvergabe zusammenhängenden Umständen, sondern ließ auch die mathematische Fachwelt über einen engen Kreis hinaus auf Minkowski und seine Arbeit aufmerksam werden. Ein Briefentwurf von R. Lipschitz[83]) an Charles Hermite mag hier als Beleg dienen; vielleicht gründen sich hierauf auch die ersten Verbindungen von H. Minkowski nach Bonn, die seinen Wechsel im Frühjahr 1887 an die Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität mit erklären könnten. Am Ende einer Vorschrift eines längeren Briefes mathematischen Inhalts schreibt Lipschitz am 9. Mai 1883 an Hermite:[84])

Il y a deux distinctions ....?.... par votre académie, auxquelles j'ai pris une part bien vive. Ce sont les prix remportés par mon collègue M. Clausius et par le jeune Minkowski, étudiant de mathématique de Königsberg, ma ville natale.
Quant au dernier je vous serais très reconnaissant si vous vouliez me faire connaître les impressions que vous a faites le travail couronné. Dans ce moment un professeur extraordinaire de mathématique laissé [?] vacant par le décès de M. Radicke à notre université il m'est venu l'idée, s'il serait par juste de le tenir ouvert tant que ce jeune hom̅e le pourrais obtenir.
...[?]... vous êtes le juge le plus compétent de la valeur de son travail j'attache un prix très haut à savoir votre opinion.
......recevez les salutations affectueuses
de votre
sincèrement dévoué
R. L.

[82]) vgl. Anhang I, Nr. 1, Nr. 2.

[83]) Person und Schaffen von R. Lipschitz (1832–1903) wurden von E. Peschl [66] gewürdigt. Lipschitz, dem eine führende Rolle beim Ausbau der Mathematik in Bonn zukommt (vgl. [71, 61], war freundschaftlich mit Hermite verbunden. Sie pflegten einen intensiven mathematischen Briefwechsel, aus dem einige gemeinsame Veröffentlichungen hervorgingen. Im November 1886 besuchte Hermite Lipschitz in Bonn.

[84]) Entwurf eines Briefes von R. Lipschitz an Ch. Hermite, 9. Mai 1883. In [4].

Der Bitte kommt Hermite umgehend im folgenden Brief an Lipschitz nach:[85])

Paris 12. Mai 1883

Le mémoire couronné de M. Minkowski étant écrit en allemand, a été lu et étudié par M. Camille Jordan, qui m'en a rendu compte. Ce n'est point à mon jugement une oeuvre aussi considérable que les mémoires de Rosenhain et de M. Kummer, mais je ne doute point que le jeune géomètre n'ait devant lui un grand avenir, et qu'il ne justifie pleinement votre confiance, si vous réalisez votre intention de vous l'attacher comme professeur extraordinaire. Son travail nous a paru plus complet et meilleur à certains égards que celui de M. Smith; il révèle une science algébrique profonde, et un talent d'invention qui promet de belles et importantes découvertes dans l'avenir. Je pense donc que vous servez la cause de la science en lui facilitant son entrée dans la carrière universitaire, qu'il est digne de votre appui, dès à présent et que plus tard il le sera encore davantage. J'ai bien de la peine à vous suivre dans la recherche extrêmement difficile où vous êtes engagé; jamais je n'ai eu à lutter contre des obstacles de cette nature et je ne pourrais certainement point faire les efforts que vous ont demandé les tentatives que vous me communiquez. Ce sont des questions beaucoup plus simples qui m'occupent en ce moment, et au point qu'il m'en coûte beaucoup de m'en détacher pour préparer mes leçons.

L'arithmétique est une Sirène; en l'écoutant je m'abandonne, je me laisse aller à la dérive et je cours sur les écueils. Vous connaissez et vous admirez comme moi le Mémoire de Dirichlet sur les valeurs moyennes, ...

Hierauf geht Lipschitz in einem Briefentwurf vom 17./18. Mai 1883 an Hermite sehr befriedigt ein und weist auf den akademischen Hintergrund Minkowskis hin.[86])

In ähnlicher Weise wendet sich Lipschitz an Heinrich Weber, der am 11. Mai 1883 u. a. antwortet:[87])

„... Alles zusammengefaßt geht meine bestimmte Meinung dahin, daß Minkowski ein ganz außerordentliches mathematisches Talent besitzt, von dem noch hervorragende Leistungen zu hoffen sind. Inwiefern es für Sie gerathen ist, mit der Besetzung Ihrer Stelle auf ihn zu warten, werden Sie nach diesen Mitteilungen beurteilen können. Was Minkowski für die Zukunft selbst für Pläne hat, weiß ich nicht. Da er jedenfalls noch einige Zeit wird studieren wollen und dann auch noch promovieren muß, so werden wohl noch einige Semester verstreichen, bis er zur Habilitation kommt. Da er jetzt hier studiert und mich öfters besucht, so könnte ich, wenn Sie es wünschen, mit ihm selbst darüber sprechen. Ich werde das aber natürlich nicht thun ohne eine ausdrückliche Weisung und Ermächtigung dazu von Ihrer Seite."

---

85) Brief von Ch. Hermite an R. Lipschitz, 12. Mai 1883. In [4].

86) Lipschitz schreibt:

Monsieur,

Vous êtes bien bon de me donner si tôt les renseignements sur les qualités du travail de M. Minkowski. Sans doute dans le jugement du talent on doit avoir égard aussi aux circonstances personnelles. Je les appris dans ce cas par M. Heinrich Weber, qui a été le professeur de M. Minkowski à Köngisberg et qui occupe depuis ces Pâques une professure *[sic!]* à l'académie technique de Charlottenburg près de Berlin. Mr. Minkowski a déjà commencé d'étudier scientifiquement l'arithmétique come il allait au collège, il a été cinq semestres à l'université de Königsberg et deux semestres à celle de Berlin, son âge étant dans ce moment de dix neuf à vingt années. Vu tout cela, je crois que votre confiance dans son avenir sera certainement d'autant plus confirmée.... (Entwurf eines Briefes von R. Lipschitz an Ch. Hermite, 17./18. Mai 1883. In [4].)

87) Brief von H. Weber an R. Lipschitz 11. Mai 1883. In [5]; abgedruckt in [82], Anhang.

Ob Lipschitz nun später über H. Weber oder direkt an Minkowski herangetreten ist, konnte bisher nicht geklärt werden.

Ein weiterer Grund für den Wechsel Minkowskis im Frühjahr 1887 an die Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn mag auch das ungünstige Verhältnis der Studenten zu angebotenen Vorlesungen in Mathematik an der Universität zu Königsberg gewesen sein. Hilbert, der gerade im Habilitationsverfahren stand, schrieb am 9. Juli 1886 an Felix Klein:[88])

... leider ist die Anzahl der Mathematik Studierenden augenblicklich hier gegenüber der Menge mathematischer Vorlesungen so gering, daß ich fürchte, mit dem Zustandebringen eines Collegs Schwierigkeiten zu haben. Doch werde ich mir wenigstens alle Mühe geben. Aus obigem Grunde hat Herr Prof. Lindemann Minkowski und einem Herrn Sanio von der Habilitation an hiesiger Universität abgeraten, obgleich es doch bei der Tüchtigkeit und Umgänglichkeit Minkowskis sehr wünschenswert wäre, wenn derselbe unserem mathematischen Colloquium (Kränzchen) erhalten bliebe ...

4.2 Das Habilitationsverfahren

Am 26. Februar 1887 bittet Minkowski die philosophische Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn, ihn zur Habilitation als Privatdozent für Mathematik zuzulassen.[89]) Neben Lebenslauf, Doktordiplom und Sonderdrucken seiner Dissertation und zweier, bisher erschienener Abhandlungen[90]) legt er zwei, bisher nicht veröffentlichte Aufsätze vor (cf. Abschnitt 4.3.). Gleichzeitig schlägt er als Gegenstand seiner Probevorlesung die folgenden Themata zur Auswahl vor:

1. Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis;
2. Über die Grundlagen der Invariantentheorie;
3. Über die eindeutigen anlytischen Funktionen.

Auf Bitte des Dekans Wilmanns äußert sich Lipschitz am 12. März 1887 zu den eingereichten Schriften Minkowskis, seinem Zulassungsgesuch und den vorgeschlagenen Themata.[91]) In sehr knapper Form weist er auf Minkowskis ungewöhnliche mathematische Begabung hin, betont die eigenständigen Gedanken in den handschriftlich vorgelegten Untersuchungen und erklärt sich sodann für die Zulassung zur Habilitation. Für die Probevorlesung empfiehlt Lipschitz das erste Thema. Nachdem die mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion der philosophischen Fakultät beschlossen hat, Minkowski zur Probevorlesung und zum Colloquium zuzulassen, wird die Fakultätssitzung auf Wunsch von Lipschitz bereits auf Dienstag, den 15. März 1887 anberaumt.

Im freien Vortrag spricht Minkowski in seiner Probevorlesung zum Thema „Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis." Das Manuskript dieser Vorlesung konnte in den Arbeitsheften Minkowskis [3] gefunden und

[88]) Brief von D. Hilbert an F. Klein vom 9. Juli 1886, [48], Nr. 5.

[89]) siehe Anhang I, Nr. 1 und Nr. 2.

[90]) Nach dem Bericht der philosophischen Fakultät an den Curator vom 16. Mai 1887 [1] handelt es sich um die der Academie des Sciences vorgelegte Abhandlung und die Arbeit [9].

[91]) siehe Anhang II, Nr. 3.

diesem Anlaß zugeordnet werden. Es wird im nächsten Abschnitt vollständig wiedergegeben und sodann gewürdigt werden. Das von der Probevorlesung und der anschließenden Aussprache angefertigte Protokoll[92]) bestätigt die vorgenommene Zuordnung des Manuskriptes. Die inhaltliche Wiedergabe des Vortrages und der Diskussion wurde von Lipschitz niedergeschrieben; hierauf wird im Zusammenhang mit dem Inhalt des Vortrages in Abschnitt 5 eingegangen. Neben ihm waren die Professoren Schönfeld, Clausius, Meyer, Rein und der Dekan Wilmanns anwesend. Im Anschluß an das Colloquium erklärt die Fakultät, daß der Kandidat den Forderungen genügt habe. Aus den von Minkowski für die Antrittsvorlesung vorgeschlagenen Themata[93])

1. Über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung
2. Über die Anwendungen der Kegelschnitte
3. Über die Struktur der Kristalle

wählt die Fakultät das erste aus. Am 25. April 1887 hält Minkowski seine öffentliche Antrittsvorlesung. Damit ist seine Habilitation vollzogen.

In den Arbeitsheften Minkowskis findet sich ein Manuskript mit dem Titel „Zur Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung".[94]) Es ist aus mehreren Gründen davon auszugehen, daß es sich hierbei um einen Textentwurf für die öffentliche Antrittsvorlesung handelt. Diese Vorlesung richtet sich an einen breiten mathematisch interessierten Hörerkreis. In ihr versucht Minkowski, Entwicklungslinien innerhalb der Wahrscheinlichkeitsrechnung bis hin zu den Fragestellungen der damals gegenwärtigen Forschung in verständlicher Form darzustellen. Grundsätzliche Ideen und Anwendungen werden herausgearbeitet; gelegentlich werden auch kuriose Beobachtungen mitgeteilt. Diese Vorlesung belegt, daß Minkowski schon in sehr jungen Jahren über ein tiefes Wissen auch über ein Gebiet der Mathematik verfügte, das seinem eigentlichen Arbeitsgebiet nicht unmittelbar zugehört. Da sich der mathematische Inhalt der Antrittsvorlesung wesentlich vom zahlentheoretischen Gegenstand der vorliegenden Untersuchung unterscheidet, ist es angebracht, es bei diesen Hinweisen vorerst zu belassen.[95])

4.3 Zur Habilitationsschrift

Seinem Habilitationsgesuch legt Minkowski die beiden noch nicht publizierten Aufsätze „Über den arithmetischen Begriff der Äquivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen" und „Zur Theorie der positiven quadratischen Formen" ([11, 12]) bei. Ausgehend von einer Untersuchung Kroneckers im binären Fall kommt Minkowski hier zu folgenden Ergebnissen: Eine positiv definite quadratische Form f von n Variablen mit reellen Koeffizienten und nicht verschwindender Determinante $\Delta(f)$ bleibt nur bei einer endlichen Anzahl ganzzahliger linearer Transformationen unverändert. Jede

[92]) siehe Anhang I, Nr. 5.
[93]) siehe Anhang I, Nr. 4.
[94]) [3], Box X, f. 13.
[95]) Veröffentlichung des Manuskriptes und eine Diskussion des Inhalts sind zu einem anderen Zeitpunkt vorgesehen.

einzelne dieser Transformationen muß deshalb selbst von endlicher Ordnung sein. Hat man nun, daß diese Transformation modulo einer ganzen Zahl $m \geqslant 3$ die identische Transformation ist, so ist sie selbst die identische Transformation. Dieses Resultat läßt weitreichende Folgerungen zu: Minkowski zeigt, daß die Ordnung einer endlichen Gruppe linearer ganzzahliger Transformationen stets die Zahl $2^n(2^n-1)(2^n-2)\dots(2^n-2^{n-1})$ teilt. Weiter gibt er eine Zahl N an, dargestellt als

$$N = \Pi q^{\left[\frac{n}{q-1}\right]+\left[\frac{n}{q(q-1)}\right]+\left[\frac{n}{q^2(q-1)}\right]+\dots}$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen q mit $q \leqslant n+1$ läuft und unter $[a]$ die größte in a enthaltene ganze Zahl zu verstehen ist, und zeigt, daß die Anzahl der linearen ganzzahligen Transformationen einer positiv definiten quadratischen Form f in n Variablen, die f in sich selbst überführen, stets ein Teiler von N ist. Bezeichnet B_n die n-te Bernoullische Zahl, und ist b_n der Nenner von B_n/n, so kann N auch als $N = 2^n b_1 b_2 \dots b_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ geschrieben werden. Dies stellt einen Zusammenhang mit Werten der Riemannschen Zeta-Funktion an negativen Argumenten her.

Diese auf wenigen Seiten bewiesenen Ergebnisse Minkowskis und das methodische Vorgehen sind von großer Tragweite. Bezeichnet man mit $SL_n(\mathbb{Z})$ die spezielle lineare Gruppe über den ganzen Zahlen, i. e. die Gruppe der linearen ganzzahligen Transformationen mit Determinante 1, so besagt Minkowskis Resultat, daß die Untergruppe

$$\Gamma(m) := \{A \in SL_n(\mathbb{Z}) \mid A \equiv Id \bmod m\}$$

derjenigen Transformationen, die modulo der gegebenen ganzen Zahl $m \geqslant 3$ die identische Transformation sind, keine Elemente endlicher Ordnung enthalten; man sagt, $\Gamma(m)$ ist torsionsfrei. In diesem Jahrhundert hat sich daraus der wichtige Satz abgeleitet, daß jede arithmetische Gruppe eine torsionsfreie Untergruppe von endlichem Index besitzt. Der Ansatz Minkowskis spielt auch eine Rolle in der Klassifikation kristallographischer Gruppen. Die Gruppe $SL_n(\mathbb{Z})$ hat nur endlich viele Konjugationsklassen endlicher Untergruppen, und die weiteren Sätze Minkowskis in [11, 12] sind als Aussagen über die Ordnungen endlicher Untergruppen in $SL_n(\mathbb{Z})$ zu verstehen. Der von Minkowski eingeschlagene Weg, die maximale Ordnung einer endlichen p-Gruppe in $SL_n(\mathbb{Z})$ nach oben hin abzuschätzen, ist auch im Falle beliebiger einfacher einfach zusammenhängender Chevalley-Gruppen G, deren ganze Punkte $G(\mathbb{Z})$ untersucht werden, gangbar.[96])

---

96) vgl. [76], 3.3.

5 Minkowskis Probevorlesung „Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis“

5.1 Vorbemerkung

Am 15. März 1887 hielt H. Minkowski seine Probevorlesung zum Thema „Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis“. Dieser Vortrag mit anschließendem Colloquium ist ein vorgeschriebener Teil des Habilitationsverfahrens; er richtet sich an die Mitglieder der philosophischen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, insbesondere an die Mitglieder der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion.[97]) Laut Protokoll der Fakultätssitzung[98]) waren neben dem Dekan Wilmanns die Herren Lipschitz, Schönfeld, Clausius, Meyer, Rein anwesend.[99])

In den Arbeitsheften Minkowskis konnte ein Manuskript mit dem Titel „Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis“ gefunden werden;[100]) es ist fortlaufend auf die rechten Seiten eines Heftes geschrieben, während die gegenüberliegende linke Seite (also die Rückseite der vorhergehenden Textseite) Korrekturen und Ergänzungen zur (rechten) Textseite enthält, die dort wegen der Fülle nicht mehr zu plazieren waren. Das Manuskript besteht auf diese Weise aus 18 Textseiten (= Blätter). Es ist durch viele Durchstreichungen, Ergänzungen und stilistische Verbesserungen gekennzeichnet. Gelegentlich werden Worte durch synonyme oder ähnliche ersetzt, wieder getilgt und durch das ursprüngliche Wort ersetzt, das aber letztlich dann wieder verändert wird. Hier kommt das Ringen des Verfassers um eine klare und verständliche sprachliche Durchdringung des Gegenstandes zum Vorschein. Gleichzeitig spiegelt sich die Bedeutung wider, die Minkowski dem Anlaß, zu dem das Manuskript verfaßt wurde, zumaß. Da sich zudem das Protokoll der Probevorlesung als eine Zusammenfassung des Inhalts des Manuskriptes „Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis“ erweist, ist dieses wohl als Text der Probevorlesung anzusehen.

Das Manuskript ist textgetreu wiedergegeben; Schreibweisen wurden beibehalten, auch wenn sie heute nicht geläufig sind. Unsichere Leseart eines Wortes ist durch nachgestelltes [?] gekennzeichnet. Erläuterungen zur Textwiedergabe sind *kursiv* geschrieben.

---

[97]) Die philosophisch-historische Sektion bildete den anderen Teil der Fakultät.

[98]) siehe Anhang I, Nr. 5.

[99]) Rudolf Lipschitz (1832–1903) habilitierte sich 1857 in Bonn, kam 1864 von Breslau als ordentlicher Professor für Mathematik nach Bonn zurück und hatte bis 1903 das mathematische Ordinariat inne (vgl. [66]). Johannes Justus Rein (1835–1918) übernahm 1883 den Lehrstuhl für Geographie (vgl. [24]; 199–204); Mitglied der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion der Philosophischen Fakultät. Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822–1888) kam 1869 als Nachfolger von Plücker an das Physikalische Institut (vgl. [64]); bekannt durch seine theoretischen Arbeiten zur Thermodynamik; „Correspondant“ der Académie des Sciences in Paris Section II, Mecanique.

[100]) [3], Box X f. 15.

5.2 Der Text

Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis (von H. Minkowski in Bonn)

Die Anwendungen der Arithmetik, von welchen ich sprechen will, betreffen die Aufgabe, irgendwie gegebene Grössen durch rationale Zahlen zu messen. Es ist das eine Aufgabe von fundamentaler Bedeutung in der Analysis, wie ja überhaupt der Grössenbegriff auf die Thatsache gegründet ist, dass jede Grösse bis auf beliebig kleinen Fehler als Verhältniss zweier ganzer Zahlen angesehen werden kann. Auf ähnlichen Principien wie dieser Fundamentalsatz beruht die angenäherte Auflösung irgendwelcher Gleichungen durch rationale Zahlen. Zu [?] Problemen solcher Art wird man z. B. geführt, wenn man für eine Function einer Variablen, welche mehr als zwei unabhängige Perioden besitzt, sehr kleine Perioden angeben oder wenn man mehrere Grössen angenähert als Zahlenverhältnisse mit demselben Nenner ausdrücken soll. Alle Beziehungen zwischen gegebenen Grössen und ganzen Zahlen können hergeleitet werden, indem man gewisse homogene Formen untersucht. *[unlesbar]* Reihe der ganzen Zahlen zu durchlaufen haben. Es ist das eine Auffassung der bezüglichen Fragen, welche besonders von Hermite vielfach verwendet worden ist.

Soll z. B. eine Grösse a angenähert als ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen x und y dargestellt werden, so muss die Differenz $\frac{x}{y} - a$, also $x - ay$ durch y klein werden. Eine beträchtliche Annäherung ist in der Regel nur zu erreichen, wenn man grosse Nenner y zulässt. Dann würde aber von den Grössen $x - ay$ und y die letztere bei Weitem überwiegen und sollte man zwei gleichberechtigte Formen zu Grunde legen, so müsste man daher der Form y ein kleineres Gewicht beimessen, d. h. statt y ty einführen wo t ein kleine Grösse ist. Und in der That, wenn man t von einem hinreichend grossen Werthe an allmählich nach Null hin abnehmen lässt, und für jedes t die Gleichungen $x - ay = 0$ und $ty = 0$ in dem sogleich festzusetzenden Sinne angenähert auflöst, so erhält man in x und y der Reihe nach die sämmtlichen Zähler und Nenner der Näherungswerthe des Kettenbruchs, in welchen die Grösse a sich verwandeln lässt.

Bei einer systematischen Behandlung von Formen des bezeichneten Charakters wird man natürlich mit den einfachsten Gebilden, den linearen Formen beginnnen. Ich setze gleich einen Fall voraus, wie er soeben im Beispiele vorlag. Es seien ebensoviel unabhängige lineare Formen gegeben, als Variable vorhanden sind, etwa drei Formen, die ich mit ξ, η, ζ bezeichne, wie gesagt dreier Variablen x, y, z, welche nur ganzzahlige Werthe annehmen sollen. Die erste sich darbietende Aufgabe wird sein, die Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ in ganzen Zahlen x, y, z aufzulösen. Es kann sich natürlich nur darum handeln, welches die besten angenäherten Auflösungen sind; denn das System $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, welches allein diese Gleichungen strenge erfüllt, kann für das Studium der in die Formen eingehenden Constanten nichts nützen. Aus zweien der Gleichungen könnte man die Verhältnisse der Variablen sehr angenähert als rationale Zahlen bestimmen. Diese könnten dann aber mit der dritten Gleichung in auffallendem Widerspruche stehen. Man hat hier also eine ähnliche Aufgabe, wie wenn man aus einer gewissen Zahl von Beobachtungen, welche nicht völlig miteinander übereinstimmen, da sie mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet sind, eine kleinere Zahl von Grössen berechnen soll, und man kann sich auch in ähnlicher Weise helfen. Man wählt nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem solchen Falle dasjenige System von Grössen als das beste aus, für welches die Summe der Fehlerquadrate am kleinsten ausfällt. In unserem Falle würden für irgendein System x, y, z die Fehler der einzelnen Formen ξ, η, ζ an Null, die Werthe dieser Formen sein, und die Summe der Fehlerquadrate, welche wir durch ganzzahlige x, y, z möglichst klein zu machen suchen werden, würde $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ sein. Es ist das, in den x, y, z ausgedrückt, eine wesentlich positive quadratische Form mit nichtverschwindender Determinante.

Aber es mag vielleicht bedenklich erscheinen, Betrachtungen hineinzuziehen, welche der Sache fern zu liegen scheinen. Dann lässt sich die zu erfüllende Aufgabe rein analytisch auffassen. Man kann verlangen, eine analytische Function herzustellen, welche ein Maass der Annäherung eines Systems ξ, η, ζ an das System $0, 0, 0$ giebt, nur für letzteres System Null wird, für endliche ξ, η, ζ stets endlich bleibt, nur von den absoluten Werthen dieser Grössen und zwar von allen in gleicher Weise abhängt, und schliesslich dieselbe Dimension hat wie jede dieser Grössen. Als einfachste Function mit diesen Eigenschaften empfiehlt sich die Quadratwurzel aus $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$.

Am natürlichsten vielleicht wird man auf diese Quadratsumme geführt, wenn man sich einer geometrischen Interpretation bedient. Es liegt nahe, die Grössen ξ, η, ζ welche als völlig gleichberechtigt auftreten, als orthogonale Coordinaten in unserem Raume zu deuten. Dann entspricht jedem Systeme ξ, η, ζ ein Punkt, dem Systeme $0, 0, 0$ der Nullpunkt. Welche Punkte man als die dem Nullpunkte nächsten anzusehen haben wird, kann nicht fraglich sein: diejenigen, welche in kürzester Entfernung von diesem Punkte liegen. Diese Entfernung wird aber wieder durch die Wurzel aus $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ gemessen.

Ich bleibe bei dieser Anschauung, um die Punkte zu untersuchen, welche ganzzahligen Werthen von x, y, z entsprechen. Durch die drei linearen Formen sind zu den Axen der ξ, η, ζ drei irgendwie gelegene, in der Regel schiefwinklige Axen x, y, z bestimmt. Auf der Achse der x – und ähnlich verhält es sich mit den anderen Axen – bilden die Punkte, welche zu ganzzahligen Werthen von x gehören, eine unendliche Reihe mit lauter gleichen Zwischenräumen, welche vom Nullpunkte aus sich nach beiden Seiten hin erstreckt. Alle übrigen Punkte mit ganzzahligem x liegen in den verschiedenen, durch diese Punktreihe parallel zur yz-Ebene gelegten Ebenen. Die Punkte, für welche x wie y wie z ganze Zahlen sind, ergeben sich auf diese Weise als die sämmtlichen Durchschnittspunkte dreier verschiedener Züge von parallelen äquidistanten Ebenen. Ein derartiges System von Punkten bezeichnet man als ein räumliches Gitter.

Nehmen wir die Punkte, deren Coordinaten die Werthe 0 oder 1 haben, so sind das acht Punkte, welche die Ecken eines Parallelepipedums bilden. Dieses kann insofern als Element des Gitters angesehen werden, als das Gitter entsteht, wenn an alle Seitenflächen dieses Parallelepipedums gleiche Parallelepipeda und an deren noch freie Seitenflächen wieder gleiche u.s.f. angesetzt werden. Ist das Gitter nur durch seine Punkte gegeben, so unterliegt die Wahl des Elementarparallelepipedums noch grosser Willkühr. Denn führt man an Stelle der Coordinaten x, y, z durch irgend eine lineare Transformation mit ganzzahligen Coeffizienten und von der Determinante ± 1 ein neues Coordinatensystem x', y', z' ein, so liefern die Punkte mit den Coordinaten 0 oder 1 in diesem Systeme wieder ein Parallelepipedum, welches geeignet erscheint das Gitter zu erzeugen.

Was uns im Gitter am meisten interessiert, sind die Punkte, welche am nächsten dem Nullpunkte liegen oder also, da im Gitter kein Punkt ausgezeichnet ist, überhaupt die kleinste Entfernung zweier Punkte im Gitter. Womit soll man dieselbe vergleichen, was ist die wesentliche Invariante des Gitters? Eine solche ist gewissermassen das ganze Gitter bis auf seine absolute Lage; aber man stelle sich den Raum zuerst mit einem und dann mit einem anderen Gitter erfüllt vor und betrachte irgendeinen geschlossenen Theil des Raumes, etwa einen grossen Würfel. Was die Gitter am auffälligsten unterscheiden würde, wäre eine Verschiedenheit in der Anzahl der Punkte, die man vorfindet, oder in deren mittlerer Dichtigkeit, welche definirt ist als der Quotient dieser Anzahl durch den Inhalt des Würfels. Diese mittlere Dichtigkeit nähert sich, je grösser man die Dimensionen des Würfels voraussetzt, um so mehr dem reciproken Werthe des Inhalts eines Elementarparallelepipedums, woraus zugleich folgt, dass bei jeder Eintheilung in Elementarparallelepipeda diese gleiche Volumina erhalten.

Die mittlere Dichtigkeit eines Gitters kann, wie solches bei den zahlentheoretischen Anwendungen geschieht, auch mit Hülfe der reciproken Entfernungen eines festen Gitterpunktes von allen übrigen ausgedrückt werden. Die Summe der dritten Potenzen dieser reciproken Entfernungen würde noch unendlich gross sein. Nimmt man aber nur sehr wenig höhere Potenzen, so führt der Werth der entsprechenden Summe unmittelbar auf die Dichtigkeit des Gitters.

[*Linke Seite teilweise durchgestrichener Test ohne genaue Zuordnung; der 2. Absatz wurde zuerst geschrieben:* Es sollen nun Gitter von constanter mittlerer Dichtigkeit vorausgesetzt werden. Aus einem jeden Gitter kann man, indem man nöthigenfalls alle Dimensionen in gleicher Weise verändert, ein ähnliches Gitter auf die Dichtigkeit herleiten – und ich will untersuchen, ob die Entfernung zweier nächsten Punkte im Gitter noch [??] Werthe erhalten kann, und wenn nicht, zwischen welchen Grenzen sie sich bewegt.

Um hirüber ins Klare zu kommen, denken wir uns irgendein Gitter gegeben, und es sollen]

Wenn die Elemente des Gitters, d. h. die Kanten und Winkel eines seiner Elementarparallelepipeda sehr kleinen Änderungen unterworfen werden, so dass die Dichtigkeit des Gitters, also der Inhalt des Parallelepipedums derselbe bleibt, wie ändert sich die kleinste Entfernung zweier Punkte im Gitter; kann sie wachsen, kann sie abnehmen? Dass das Letztere stets möglich ist, sieht man leicht ein. Man kann nämlich zur Kante eines Elementarparallelepipedums eine jede Linie wählen, welche zwei Punkte des Gitters verbindet, zwischen denen auf geradem Wege kein weiterer Punkt enthalten ist. Jedenfalls kann man also ein Elementarparallelepipedum bestimmen, in welchem eine Kante die Entfernung zweier nächster Punkte ist. Verkürzt man nun diese Kante und verlängert die übrigen so, dass der Inhalt des Parallelepipedons derselbe bleibt, so bleibt die Dichtigkeit des Gitters dieselbe, die Entfernung zweier nächster Punkte ist aber verkleinert. Diese Entfernung hat also, da das beschriebene Verfahren sich fortsetzen lässt, zur unteren Grenze Null, es sei denn, dass sie durch andere Bedingungen am Abnehmen gehindert wäre. Denkt man sich z. B. um jeden Gitterpunkt als Centrum eine undurchdringliche Kugel von einem Durchmesser gleich der Entfernung zweier nächster Punkte, so wird diese Entfernung überhaupt nicht kleiner werden können.

Diese Kugeln, welche je einen Gitterpunkt einschliessen würden, würden sich in den Richtungen der Verbindungslinien zweier nächster Punkte berühren, sie thäten sich aber niemals schneiden, und würden zwischen sich noch einen von Gitterpunkten freien Raum lassen. Auf einen Theil des Raumes, welcher an Inhalt einer solchen Kugel gleich wäre, würde also im Durchschnitt nicht ein voller Gitterpunkt zu rechnen sein. Nun kommt aber auf einen Raumtheil gleich dem Inhalt eines Elementarparallelepipedons genau ein Punkt. Also muss der Inhalt einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Entfernung zweier nächsten Punkte im Gitter ist, d. i. $\frac{\pi}{6}$ mal der dritten Potenz dieser Entfernung, kleiner sein als der Inhalt eines Elementarparallelepipedums, also bleibt diese Entfernung selbst stets kleiner als das Product aus einer Constanten und der dritten Wurzel aus dem Inhalt des Elementarparallelepipedums. Wenn bei irgend einem continuierlichen Processe, dem das Gitter unterworfen wird, die Grösse des Grundparallelepipedums unaufhörlich abnimmt, die Dichtigkeit des Gitters notwendig [?] zunimmt, so muss auch die Entfernung zweier nächsten Punkte schliesslich unter jede Grenze sinken. Dasselbe gilt natürlich für Gitter in jeder Anzahl von Dimensionen, und ist der Ausdruck einer wichtigen Eigenschaft der positiven quadratischen Formen, welche allgemein zuerst von Hermite, aber auf weit umständlicherem Wege bewiesen ist. [*Der folgende Text ist gestrichen:* Aber was das wichtigste ist, die Grenze, zu welcher man hier gelangt, ist eine weit natürlichere und viel kleinere, als diejenige, zu welcher die Methoden von Hermite führen, wenn sie auch selbstverständlich nicht die genaue ist (sein kann), da sie die transcendente Zahl π enthält.]

An dem Beispiele, von welchem ich ursprünglich ausgegangen bin, und welches die angenäherte Darstellung einer gegebenen Grösse a als rationale Zahl betraff, will ich die Bedeutung dieses Resultats klarlegen. Die zwei Formen $x-ay$ und ty, welche dort auftraten, geben zu einem ebenen Gitter Veranlassung, dessen Grundparallelogramm den Inhalt t hat. In diesem Gitter ist das Quadrat der Entfernung zweier nächsten Punkte ausgedrückt durch den kleinsten Werth welchen die Summe $(x-ay)^2+(ty)^2$ für ganze Zahlen x und y annehmen kann. Mit abnehmendem Grundparallelogramm d.i. mit abnehmendem t muss auch das Quadrat dieser Entfernung unter jede Grenze sinken, also auch der Werth der Summe $(x-ay)^2+(ty)^2$ und um so mehr der Werth von $(x-ay)^2$, also auch der Werth von $x-ay$ und um so mehr derjenige von $\frac{x}{y}-a$ d.h. jede Grösse a lässt sich mit beliebiger Annäherung als Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellen. Zugleich ist leicht einzusehen, dass das sich ergebende Verhältnis $\frac{x}{y}$ diejenige Eigenschaft besitzt, welche die Näherungswerthe des Kettenbruchs characterisiert, in welchen a sich verwandeln lässt, nämlich die Eigenschaft, dass die Differenz zwischen a und $\frac{x}{y}$ kleiner ist [?] als die Differenz zwischen a und irgend einem rationalen Bruch, dessen Nenner kleiner als y ist.

Da die Entfernung zweier nächsten Punkte in einem Gitter eine von der Dichtigkeit abhängende Grösse nicht überschreiten kann, so muss es Gitter geben, für welche diese Entfernung ein Maximum ist. Dieses Maximum hat dann, wie aus einem zuerst von Gauß bewiesenen Satze folgt, wenn man die Dichtigkeit gleich 1 annimmt, den Werth $\sqrt[6]{2}$, und die Gitter, in welchen die Entfernung zweier nächsten Punkten eine möglichste grosse ist, kann man sich entstanden denken, indem an alle Seitenflächen eines regulären Tetraeders gleiche Tetraeder und an deren noch freie Seitenflächen wieder gleiche und so fort angesetzt werden.

Ich wollte noch von der Bedeutung [?] sprechen, welche die [der] Raumgitter und speziell das zuletzt betrachtete Gitter bei der Bearbeitung [?] der Structur in den Krystallen finden und auf [–] einige Mängel kommen, welche den bisher in dieser Hinsicht gegebenen Entwicklungen anhaften. Ich fürchte aber, dabei mein Thema wie die mir zustehende Zeit zu überschreiten.

5.3 Erläuterungen

An den Beginn des Manuskriptes seiner Probevorlesung stellt Minkowski die grundsätzliche Aufgabe, irgendwelche Gleichungen angenähert durch rationale Zahlen aufzulösen. Anhand von Beispielen betont er den grundsätzlichen Charakter dieser Fragestellung. Als mögliche Anwendung einer Lösung zieht Minkowski das einfache Beispiel heran, an dem schon Hermite seine neuartige Methode, arithmetische Probleme durch Behandlung einer zugeordneten quadratischen Form zu beherrschen, verdeutlicht hat.[101])

---

[101]) Dieses von Hermite in [44] 3. Brief S. 295 gegebene Beispiel (vgl. 2.5) wird von Minkowski auch im Vorentwurf (siehe A II, letzter Absatz) behandelt.

Dann wendet sich Minkowski der Frage zu, bei gegebenen drei linearen Formen ξ, η, ζ mit eben so vielen Variablen x, y, z eine angenäherte Lösung in den ganzen Zahlen der Gleichungen $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ zu finden. Das Lösungssystem $x=y=z=0$ ist dem Studium des zugrunde liegenden arithmetischen Problems nicht dienlich, also gilt es festzulegen, in welchem Sinne eine angenäherte Lösung besser als eine andere ist. Wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen wie auch ein rein analytischer Standpunkt führen gleichermaßen dazu, die Quadratsumme $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ als Maß der Abweichung von Null zu benutzen. Die geometrische Interpretation, die die Grössen ξ, η, ζ als orthogonale Koordinaten im Raume auffaßt, wird jedoch als natürlichster Zugang gesehen. Dieser führt auch auf die Wurzel der Quadratsumme, die gerade die Entfernung eines Punktes vom Nullpunkt mißt. Damit nimmt Minkowski die von Gauß angedeutete und von Dirichlet ausgeführte geometrische Anschauung (vgl. 2.3., 2.4.) einer positiv definiten quadratischen Form als parallelepipedisch angeordnetes regelmäßiges Punktesystem im Raum, i. e. als Gitter, auf.

Die Frage nach der angenäherten besten Lösung des Systems $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ formuliert sich dann über die quadratische Form $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ geometrisch als das Problem, die kleinste Entfernung zweier Punkte im zugeordneten Gitter zu bestimmen. Um diese mit der mittleren Dichtigkeit des Gitters in Beziehung setzen zu können, diskutiert Minkowski dann die Frage, welche Wirkungen kleine Änderungen der Kanten oder Winkel eines der Elementarparallelepipeda bei gleichbleibender mittlerer Dichtigkeit haben. Der entscheidende Schritt ist die Überlegung, um jeden Gitterpunkt eine undurchdringliche Kugel K von einem Durchmesser gleich der Entfernung m zweier nächster Punkte im Gitter zu legen und dann den dadurch überdeckten Teil des Raumes mit dem durch die Elementarparallelepipeda überdeckten Raum zu vergleichen. Der Inhalt der Kugel K muß kleiner sein als der Inhalt eines Elementarparallelepipedums. Das Volumen ω_3 der 3-dimensionalen Einheitskugel ist als $(4/3)\pi$ gegeben, also hat man

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(K) &= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}m\right)^3\\ &= \frac{\pi}{6}m^3 \leqslant \operatorname{vol}(L) = \sqrt{\Delta(f)}.\end{aligned}$$

Wie Minkowski gleich versichert, gilt dasselbe auch für Gitter in jeder Anzahl von Dimensionen, i. e. man hat für eine positiv definite quadratische Form f von n Variablen die Abschätzung $\operatorname{vol}(K)=\omega_n\left(\frac{1}{2}m\right)^n \leqslant \operatorname{vol}(L)=\sqrt{\Delta(f)}$, wobei ω_n den Inhalt der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet. Hieraus folgt

$$m \leqslant 2\omega_n^{-1/n}\Delta(f)^{1/2n},$$

und damit erhält man für das Minimum $\mu(f)$ von f, da $\mu(f)=m^2$ gilt, die Abschätzung

$$\mu(f) \leqslant 4\omega_n^{-2/n}\sqrt[n]{\Delta(f)}.$$

In einem gestrichenen Textstück bemerkt Minkowski, daß diese Abschätzung weit natürlicher und besser als die von Hermite gegebene sei (siehe 2.5.) Für $n > 8$ ist dies richtig. Das Volumen ω_n der Einheitskugel bestimmt sich als

$$\omega_n = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Für die Gamma-Funktion gelten $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ bzw. die Stirling'sche Formel für $\Gamma(x)$ erbringt für $n \to \infty$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{2/n} \sim \frac{n}{2e} \qquad (n \to \infty)$$

i. e. die von Minkowski gefundene Konstante λ_n zur Abschätzung des Verhältnisses von $\mu(f)$ zur n-ten Wurzel aus der Determinante $\Delta(f)$ verhält sich so wie

$$\lambda_n \sim \frac{2n}{\pi \cdot e} \; (n \to \infty),$$

während Hermite die Konstante $c_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ gefunden hatte.

Dieses Ergebnis zum Minimum einer positiv definiten quadratischen Form und der Vergleich mit der Hermiteschen Abschätzung finden sich später im Abschnitt 6 der Arbeit „Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen" wieder. Die Abschnitte 1–5 legen die mathematischen Grundlagen zur geometrischen Interpretation der positiv definiten quadratischen Formen, wie sie auch der Probevorlesung zu Grunde liegt.

Das Verhältnis des Minimums $\mu(f)$ einer positiv definiten quadratischen Form f in n Variablen der Determinante $\Delta(f)$ zur n-ten Wurzel von $\Delta(f)$ ist also durch eine von den Koeffizienten von f unabhängige Größe abgeschätzt. In der geometrischen Interpretation führt dies zu der natürlichen Frage, ob es Gitter gibt, für die die Entfernung m zweier nächster Punkte im Gitter ein Maximum ist. Im Fall ternärer Formen f gilt für das Minimum $\mu(f)$ die Abschätzung (vgl. 2.6. (3)): $\mu(f) \leqslant 2^{1/3}\,\Delta(f)^{1/3}$. Für Gitter mittlerer Dichtigkeit 1 ergibt das die Abschätzung $m \leqslant \sqrt[6]{2}$. Als Beispiel eines Gitters, für das m möglichst groß wird, gibt Minkowski dasjenige an, das aus einem regulären Tetraeder durch Anlegen gleicher Tetraeder an alle Seitenflächen und so fort entsteht.[102])

In der Folge von Gauß[103]) deutet Minkowski am Ende seiner Probevorlesung die Rolle an, die Raumgitter und speziell das zuletzt betrachtete Gitter bei der

---

[102]) Dieses ist äquivalent zu A_3, vgl. [70], S. 164.

[103]) vgl. die abschließende Bemerkung von Gauß in seiner Rezension [42] der Arbeit von Seeber.

Bearbeitung der Struktur in Kristallen finden. Das Protokoll der Probevorlesung[104]) zeigt, daß diese Frage insbesondere im anschließenden Colloquium behandelt wurde. Dort schreibt der Protokollant Lipschitz:

„Prof. Clausius veranlaßte den Cand. die in seinem Vortrage angedeutete Anwendung der von ihm untersuchten Raumgitter auf die Beschreibung der Crystallstructuren wenigstens in den Grundzügen mitzutheilen, was in befriedigender Weise durch eine Auseinandersetzung geschah, welche von ältern Untersuchungen von Bravais und eine Erweiterung derselben von Sohncke anknüpfte, und darauf hinwies, daß die Resultate des Letzteren sich in anderer Weise ableiten und begründen ließen."

Es ist nicht klar, welche neuen Resultate Minkowski hier erhält, doch scheint er an die Arbeit von L. Sohncke „Die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung", die 1874 erschien,[105]) anzuknüpfen.

5.4 Ein Vorentwurf

Im Zusammenhang mit Minkowskis Probevorlesung 1887 ist ein weiteres, 14 Textseiten umfassendes Manuskript von Interesse, das sich in einem Arbeitsheft in [3] befindet[106]) und hier im Anhang II wiedergegeben ist. Dieses Heft enthält ursprünglich das Programm der Capelle des Regiments, in dem Minkowski seinen Dienst als Einjährig-Freiwilliger abgeleistet hatte, wurde jedoch dann für Rechnungen zu quadratischen Formen und deren Reduktion benutzt. Alle Eintragungen sind undatiert, gelegentlich finden sich kleine Zeichnungen, z. B. zu optischen Täuschungen. Der wiedergegebene Text ist ohne Titel, enthält (insbesondere im Vergleich zur Probevorlesung) nur wenig stilistische Verbesserungen und bricht plötzlich ab.

Vergleicht man diesen Vortragstext mit dem Manuskript zur Probevorlesung „Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis" so fällt auf: Beide Texte behandeln die angenäherte Auflösung algebraischer Formen durch ganze Zahlen, damit zusammenhängende Fragen zu positiv definiten quadratischen Formen, insbesondere zu Minima, und arithmetische Anwendungen. Inhaltlich geht der zweite Text von dem gegenüber der Probevorlesung allgemeineren Ansatz aus, n lineare Formen in ebensovielen Variablen zu betrachten, ist aber in seinem ersten Teil in der Gedankenführung völlig parallel zum ersten Text, wenn auch weitaus ausführlicher in der Diskussion einiger Aspekte der Theorie positiv definiter quadratischer Formen. Unmittelbar analog in beiden Texten verläuft die Einführung der Quadratsumme $\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$ als Maß der Abweichung von Null von den drei unterschiedlichen Standpunkten Wahrscheinlichkeitstheorie, Analysis und Geometrie aus.

Erst mit der Frage nach der nun notwendigen Bestimmung des Minimums einer positiv definiten quadratischen Form gehen die beiden Texte auseinander: Im zweiten Text begründet Minkowski die Existenz eines Minimums, erwähnt den

---

[104]) siehe Anhang I, Nr. 5.

[105]) Diese Arbeit von Sohncke [81] ist auch in Minkowskis Heft „Literatur zur Zahlentheorie" erwähnt. Es ist jedoch wahrscheinlich später als 1887 entstanden und findet sich jetzt in [3], Box III, f. 7.

[106]) Entsprechend der vorliegenden Bestandsliste handelt es sich um Box VII, f1.

Satz, daß dieses für alle Formen von derselben Determinante D niemals eine nur von D abhängende Grenze übersteigen kann, und erläutert dann die Form dieser Grenze als $c\sqrt[n]{D}$. Zu erläutern, welchen eigenen Weg Minkowski zur Untersuchung dieser Fragen eingeschlagen hat, kommt er aus Zeitgründen nicht, stattdessen weist er auf die Bedeutung dieser Studien anhand des Beispiels der Form $f(x, y) = (x - ay)^2 + (ty)^2$ hin. Im Manuskript der Probevorlesung hingegen bleibt Minkowski bei der geometrischen Interpretation einer positiv definiten quadratischen Form als parallelepipedisch angeordnetes regelmäßiges Punktesystem im Raum und begründet in anschaulicher Weise im Fall $n = 3$, in welchem Verhältnis die Entfernung zweier nächster Punkte im Gitter zur 3-ten Wurzel aus dem Inhalt des Elementarparallelepipedums steht. Der Hinweis, daß dieses Vorgehen auch im allgemeineren Fall n linearer Formen gültig ist, und der Vergleich der dadurch gewonnenen Abschätzung mit der Hermitschen vervollständigen diesen Zugang. Minkowski arbeitet hier klar seinen eigenen Beitrag, den er aufgrund räumlicher Anschauung erschlossen hat, heraus. Das schon erwähnte Beispiel dient auch hier dazu, die arithmetischen Anwendungen anzudeuten; in der Probevorlesung wird es jedoch auch schon am Anfang ausführlich herangezogen.

Die größere Allgemeinheit im Ansatz (i. e. die Betrachtung von Formen in n Variablen), die Fragen nach der Existenz eines Minimums und nach der Beschaffenheit einer etwaigen oberen Grenze bei fester Determinante lassen durch ihre ausführliche Behandlung Minkowski im zweiten Text aus Zeitnot gar nicht dazu kommen, seine eigenen geometrisch motivierten Überlegungen vorzutragen. Gerade diese Aspekte (und eine größere Anschaulichkeit durch Beschränkung auf den Fall $n = 3$) stehen jedoch ganz bewußt im Mittelpunkt des Manuskriptes zur Probevorlesung, das so Minkowskis eigenen Beitrag herausstellt.

Auf Grund dieses Vergleichs in Inhalt und Gedankenführung der beiden Texte scheint es nicht zu gewagt zu sein, festzustellen, daß das zweite Manuskript ein abgebrochener Vorentwurf zu Minkowskis Probevorlesung ist, der jedoch wegen der Unausgewogenheit der Darstellung von ihm verworfen wurde. Die allgemeinen Überlegungen zur Theorie der positiv definiten quadratischen Formen und deren fundamentaler Bedeutung wurden zugunsten der unmittelbaren räumlichen Anschauung und der Darlegung des eigenen geometrischen Beitrags wesentlich zurückgedrängt.

5.5 Schlußbemerkungen

Das Eindringen räumlicher Anschauung in die Theorie positiv definiter quadratischer Formen ist mit Arbeiten von C. F. Gauß und G. L. Dirichlet aus den Jahren 1831 und 1848 verknüpft. Gleichzeitig zeigte Hermite 1850, in welch fruchtbarer Weise positiv definite quadratische Formen in n Variablen zur Behandlung tiefliegender zahlentheoretischer Fragen herangezogen werden können und entwickelte dabei die Reduktionstheorie dieser Formen entscheidend weiter. Neben der Endlichkeit der Klassenzahl spielte die Frage nach einer Abschätzung des Verhältnisses des Minimums einer positiv definiten quadratischen Form f zur n-ten Wurzel aus ihrer Determinante durch eine nur von n

abhängende Konstante eine wichtige Rolle. Die Güte der Abschätzung, i. e. wie präzise eine echte obere Grenze für das genannte Verhältnis in jedem Fall angegeben werden konnte, wirkte weiter in die zahlentheoretischen Ergebnisse hinein. Minkowski hat, indem er geometrische Ideen in der Behandlung quadratischer Formen und Hermites Zugang zu bestimmten arithmetischen Fragen miteinander verband, die „Geometrie der Zahlen“ geschaffen. Ein erstes öffentliches Zeugnis für das Entstehen der Theorie und erste grundlegende Ergebnisse legt Minkowski in seiner Probevorlesung, die er im Alter von 22 Jahren im Rahmen seiner Habilitation hielt, ab. Die Frage nach dem Minimum einer positiv definiten quadratischen Form liegt an der Quelle, und es ist die räumliche Anschauung, die zu einem tiefliegenden zahlentheoretischen Resultat führt. Minkowski ist sich der Tragweite seiner Gedanken durchaus schon bewußt, sie wirken auch heute noch lebendig fort.

Gerade da die Probevorlesung ein mathematischer Fachvortrag sein muß, der sich aber auch an Professoren benachbarter Fächer wendet, legt Minkowski grundsätzliche Fragestellungen offen. Er betont, auf dem Hintergrund der mathematischen Entwicklung, leitende Prizipien in der Theorie quadratischer Formen und deren vielfältige Anwendungsmöglichkeiten in Arithmetik und Analysis. Die Erläuterung des mathematischen Problems und die Ideen, die den eingeschlagenen Lösungsweg bestimmen, stehen im Vordergrund, während die explizite mathematische Herleitung eines Satzes in allgemeiner Form zurücktritt. Einfache Beispiele, die unmittelbar verständlich sind, werden herangezogen, um die Tragweite der zu Grunde liegenden Fragestellungen und der neuen geometrischen Ideen zu verdeutlichen.

Minkowski hat mit seinem Text zur Probevorlesung die Grundlage eines inhaltlich überzeugenden Vortrages im Rahmen der zu erbringenden Habilitationsleistungen gelegt. Der Vorentwurf, die Fragen nach der inhaltlichen Gewichtung einzelner Teile und das Abwägen selbst stilistischer Feinheiten im Manuskript belegen das Ringen Minkowskis um eine möglichst vollkommene Darstellung. Hier wird gleichzeitig ein unmittelbarer Einblick in die Arbeits- und Denkweisen eines noch jungen Mathematikers gewährt. Minkowski beginnt gerade jene Theorie zu begründen, der er später selbst den Namen „Geometrie der Zahlen“ gibt, und es gelingt ihm in seiner Probevorlesung erste, aus der räumlichen Anschauung fließende Ergebnisse in der Theorie der positiv definiten quadratischen Formen vorzustellen und in den Rahmen arithmetischer Fragen in der Folge Hermites einzuordnen. Die Argumente, die für die Abschätzung des Verhältnisses des Minimums einer positiv definiten quadratischen Form zur n-ten Wurzel aus ihrer Determinante gegeben werden, bilden zugleich die Grundlage für den so anwendungsreichen Gitterpunktsatz, den Minkowski später in verfeinerter Form publizierte.

Literatur

1. *Archivalien*

[1] Personalakte Hermann Minkowski. Archiv der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (unpaginiert)
[2] Dossier: „Grand Prix des Sciences Mathématiques 1882" (séance du 5 Juin 1882). Archives de l'Académie des Sciences, Paris
[3] Arbeitshefte H. Minkowski: Unpaginiert, eingeteilt in 10 Kästen. Privatbesitz (Kopie in Niels Bohr Library, American Institute of Physics, New York, USA)
[4] Briefe Ch. Hermite an R. Lipschitz (einschließlich Entwürfe zu Briefen R. L. an Ch. H.). Ohne Signatur. Bibliothek d. Math. Instituts d. Universität Bonn
[5] Briefe H. Weber an R. Lipschitz (einschließlich Entwürfe zu Briefen R. L. an H. W.). Ohne Signatur. Bibliothek d. Math. Instituts d. Universität Bonn

2. *Schriften Minkowski*

[6] Minkowski, H.: Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski. Hrsg. v. D. Hilbert u. Mitwirkung v. A. Speiser u. H. Weyl, 2 Bde. Leipzig - Berlin 1911
[7] Minkowski, H.: Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten. (= GA, I, 3–144) (Französisch: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut national de France, t. 29 (1884))
[8] Minkowski, H.: Sur la réduction des formes quadratiques positives quaternaires. C. R. Acad. Sci. Paris **96** (1883) 1205–1210 (= GA, I, 145–148)
[9] Minkowski, H.: Über positive quadratische Formen. J. f. d. reine angew. Math. **99** (1886) 1-9 (= GA, I, 149–156)
[10] Minkowski, H.: Untersuchungen über quadratische Formen. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält. Acta Math. **3** (1885) 201–258 (= GA, I, 157–202)
[11] Minkowski, H.: Über den arithmetischen Begriff der Äquivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen, J. f. d. reine angew. Math. **100** (1887) 449–458 (= GA, I, 203–211)
[12] Minkowski, H.: Zur Theorie der positiven quadratischen Formen. J. f. d. reine angew. Math. **101** (1887) 196–202 (= GA, I, 212–218)
[13] Minkowski, H.: Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können. J. f. d. reine angew. Math. **106** (1890) 5–26 (= GA, I, 219–242)
[14] Minkowski, H.: Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen. J. f. d. reine angew. Math. **107** (1891) 278–297 (= GA, I, 243–260)
[15] Minkowski, H.: Théorèmes arithmétiques (Extrait d'une lettre de M. H. Minkowski à M. Hermite). C. R. Acad. Sc. Paris **112** (1891) 209–212 (= GA, I, 261–263)
[16] Minkowski, H.: Über Geometrie der Zahlen (Bericht über einen Vortrag zu Halle). Jber. d. Dt. Math.-Verein. **1** (1892) 64–65 (= GA, I, 264–265)
[17] Minkowski, H.: Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Bull. Sciences mathématiques, 2^{e} série, **XVII** (1893) 24–29 (= GA, I, 266–270)
[18] Minkowski, H.: Über Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind. In: Mathematical papers read at the Int. Math. Congress Chicago 1893. New York 1896, 201–207 (= GA, I, 271–277)
[19] Minkowski, H.: Geometrie der Zahlen. Leipzig 1896
[20] Minkowski, H.: Anzeige zur Geometrie der Zahlen. In: Mitteilungen von B. G. Teubner, 1893, 7
[21] Minkowski, H.: Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig 1907
[22] Minkowski, H.: Briefe an David Hilbert (hrsg. v. L. Rüdenberg, H. Zassenhaus) Berlin – Heidelberg – New York 1973

3. *Literatur*

[23] Bergé, A.-M.; Martinet, J.: Sur la constante d'Hermite, In: Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, Année 1985–1986 - exposé n° 8, 8-1-14

[24] Bonner Gelehrte. Beiträge zur Geschichte der Wissenschaften in Bonn. Mathematik u. Naturwissenschaften. (150 Jahre Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn 1818–1968) Bonn 1970

[25] Borel, A.: Introduction aux groupes arithmétiques. Paris 1969

[26] Cassels, J. W. S.: Rational quadratic forms. London - New York 1978

[27] Charve, L.: De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives. Ann. Sci. Ec. Norm. Supérieure, 2^e Série, **11** (1892) 119–134

[28] Dirichlet, G. L.: G. Lejeune Dirichlet's Werke, hrsg. v. L. Kronecker, fortges. v. L. Fuchs, Band I: Berlin 1889, Band II: Berlin 1893

[29] Dirichlet, G. L.: Vorlesungen über Zahlentheorie (hrsg. v. R. Dedekind) 1. Aufl. Braunschweig 1863, 4. Auflage Braunschweig 1893

[30] Dirichlet, G. L.: Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. Bericht über d. Verhandl. d. Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften, Jahrg. 1848, 285–288 (= Werke, II, 21–26)

[31] Dirichlet, G. L.: Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. J. f. d. reine angew. Math. **40** (1850) 209–227 (= Werke, II, 27–48)

[32] Dirichlet, G. L.: Über die Zerlegbarkeit der Zahlen in drei Quadrate. J. f. d. reine angew. Math. **40** (1850) 228–232

[33] Eisenstein, G.: Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés. J. f. d. reine angew. Math. **35** (1847) 368

[34] Eisenstein, G.: Neue Theoreme der höheren Arithmetik, J. f. d. reine angew. Math. **35** (1847) 117–136

[35] Eisenstein, G.: Tabelle der reducierten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Berechnung. Berlin 1851 (ohne Vordruck in J. f. d. reine angew. Math. **41** (1851) 141–190, 227–242)

[36] Eisenstein, G.: Mathematische Werke. New York 1975

[37] Euler, L.: Opera omnia, sub auspiciis soc. scient. nat. helveticae, Series prima: opera mathematica. Leipzig - Berlin 1911

[38] Euler, L.: Vollständige Anleitung zur Algebra. Hrsg. v. H. Weber. Leipzig - Berlin 1911 (= Opera, vol. 1, 1–209)

[39] Galison, P. L.: Minkowskis space time: From visual thinking to the absolute world. Hist. Studies in the Phys. Sci. **10** (1979) 85–121

[40] Gauß, C. F.: Werke. Göttingen 1863

[41] Gauß, C. F.: Disquisitiones Arithmeticae. Leipzig 1801 (dtsche Ausgabe v. H. Maser, Berlin 1889, Reprint New York 1965)

[42] Gauß, C. F.: Recension der „Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber. J. f. d. reine angew. Math. **20** (1840) 312–320 (= Werke, II, 188–196)

[43] Hermite, Ch.: Oeuvres de Charles Hermite, publiées par E. Picard. 4 Bde. Paris 1905–1917

[44] Hermite, Ch.: Extraits de lettres d. M. Ch. Hermite a M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres. J. f. d. reine angew. Math. **40** (1850) 261–315 (= Oeuvres, I, 100–163)

[45] Hermite, Ch.: Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. J. f. d. reine angew. Math. **41** (1851) 191–216 (= Oeuvres, I, 164–192)

[46] Hermite, Ch.: Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite a M. Borchardt sur la réduction des formes quadratiques ternaires. J. f. d. reine angew. Math. **79** (1874) 17–20 (= Oeuvres, III, 190–193)

[47] Hilbert, D.: Hermann Minkowski. Gedächtnisrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der k. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen am 1. Mai 1909 (= Minkowski, GA, I, S. V-XXXI)

[48] Hilbert, D.: Der Briefwechsel David Hilbert - Felix Klein (1886-1918). Hrsg. mit Anm. v. G. Frei. Arbeiten aus d. Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Bd. 19. Göttingen 1985

[49] Jacobi, C. G. J.: Gesammelte Werke. Hrsg. v. K. Weierstraß, 7 Bände. Berlin 1881–1891

[50] Keller, O.-H.: Geometrie der Zahlen. In: Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Band I: Algebra und Zahlentheorie 2. Teil C. Reine Zahlentheorie (hrsg. v. M. Deuring et al.) Heft 11, Teil III, Leipzig 1954
[51] Kneser, M.: Quadratische Formen. Vorlesungsausarbeitung Göttingen 1973/74
[52] Korkine, A.; Zolotareff, G.: Sur les formes quadratiques positives quaternaires. Math. Ann. **5** (1872) 581–583
[53] Korkine, A.; Zolotareff, G.: Sur les formes quadratiques. Math. Ann. **6** (1873) 366–389
[54] Korkine, A.; Zolotareff, G.: Sur les formes quadratiques positives, Math. Ann. **11** (1874) 242–292
[55] Lagrange, J. L.: Oeuvres de Lagrange, publiées par J.-A. Serret et G. Darboux. Paris 1867–1892 (Nachdruck Hildesheim - New York 1973)
[56] Lagrange, J. L.: Additions à l'analyse indéterminée. In: Euler, L.: Opera omnia, vol. 1
[57] Lagrange, J. L.: Recherches d'arithmétique. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, première partie 1773, seconde partie 1775 (= Oeuvres, t. III, 693–795)
[58] Legendre, A. M.: Recherches d'analyse indéterminée. In: Histoire de l'académie royale des Sciences, 1785, avec les mémoires de mathématique et de physique pour la même anné. Paris 1788, 465–559
[59] Legendre, A. M.: Essai sur la théorie des nombres. Paris 1798
[60] Legendre, A. M.: Théorie des nombres. 3$^{\text{éme}}$ éd. Paris 1830
[61] Lipschitz, R.: Briefwechsel mit Cantor, Helmholtz, Kronecker, Weierstraß und anderen (bearb. v. W. Scharlau). Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Bd. 2. Braunschweig – Wiesbaden 1986
[62] London, F.; Toeplitz, O.: Das mathematische Seminar an der Universität Bonn. In: Geschichte der Rheinischen Friedrich-Wilhelm-Universität zu Bonn am Rhein. Zweiter Band: Institute und Seminare 1818–1933. Bonn 1933, 324–334
[63] Mordell, L.: Observation on the minimum of a positive definite quadratic form in eight variables. J. London Math. Soc. **19** (1944) 3–6
[64] Nernst, W.: Rudolf Clausius 1822–1888. In: Bonner Gelehrte. Beiträge zur Geschichte der Wissenschaften in Bonn. Mathematik und Naturwissenschaften. (150 Jahre Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn 1818–1968) 101–109, Bonn 1970
[65] Noether, M.: Charles Hermite. Math. Ann. **55** (1902) 337–385
[66] Peschl, E.: Rudolf Lipschitz 1832–1903. In: Bonner Gelehrte. Beiträge zur Geschichte der Wissenschaften in Bonn. Mathematik und Naturwissenschaften. (150 Jahre Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn 1818–1968), 17–24. Bonn 1970
[67] Pyenson, L.: Hermann Minkowski and Einstein's special theory of relativity. Archive History of Exact Sciences **17** (1977) 71–95
[68] Pyenson, L.: Einstein's education: Mathematics and the laws of nature. Isis **71** (1980) 399–425
[69] Rüdenberg, L.: Erinnerungen an H. Minkowski. In: Hermann Minkowski, Briefe an David Hilbert (hrsg. v. L. Rüdenberg, H. Zassenhaus), 9–16. Berlin – Heidelberg – New York 1973
[70] Scharlau, W.; Opolka, H.: Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung. Berlin – Heidelberg – New York 1980
[71] Schubring, G.: Die Entwicklung des mathematischen Seminars der Universität Bonn 1864–1929. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **87** (1985) 139–163
[72] Schwermer, J.: Über Reziprozitätsgesetze in der Zahlentheorie. In: Arithmetik und Geometrie. Vier Vorlesungen. Mathematische Miniaturen, Bd. 3, 29–69. Basel – Boston – Stuttgart 1986
[73] Schwermer, J.: Über einige Arbeitshefte Minkowskis. In Vorbereitung
[74] Seeber, L.: Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen. Freiburg 1831
[75] Seeling, E.: Über die binären und ternären quadratischen Formen. J. f. d. reine angew. Math. **77** (1874) 143–229
[76] Serre, J.-P.: Arithmetic groups. In: Homological group theory. Proc. Symp. Durham 1977 (ed. C. T. C. Wall). London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 36. Cambridge 1979, 105–136
[77] Siegel, C. L.: Gesammelte Abhandlungen. Hrsg. v. K. Chandrasekharan, H. Maaß, Bde. 1–3, 1966, Bd. 4, 1979. Berlin – Heidelberg – New York

[78] Siegel, C. L.: Geometry of numbers. Vorlesungen New York 1945/46 (hrsg. v. K. Chandrasekharan et al.) Berlin - Heidelberg 1989
[79] Smith, H. J. S.: The Collected Mathematical Papers (ed. J. W. L. Glaisher), 2 vols. Oxford 1894
[80] Smith, H. J. S.: Mémoire sur la représentation des nombres par des sommes de cinq carrés. 1882. In: [79], vol. II, 623–680
[81] Sohncke, L.: Die regelmässigen ebenen Punktesysteme von unbegrenzter Ausdehnung, J. f. d. reine angew. Math. **77** (1874) 47–101
[82] Strobl, W.: Aus den wissenschaftlichen Anfängen Hermann Minkowskis. Hist. Math. **12** (1985) 142–156
[83] Vahlen, K. Th.: Arithmetische Theorie der Formen. In: Encyklopädie der math. Wissenschaften. Band 1 in zwei Teilen: Arithmetik und Algebra (red. v. Meyer W. F.). Leipzig 1900–1904, IC 2, 582–635
[84] Van der Waerden, B.: Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. Acta Math. **96** (1956) 265–309
[85] Volk, O.: Die Albertus-Universität in Königsberg und die exakten Naturwissenschaften im 18. und 19. Jahrhundert. In: Staat und Gesellschaft. Festgabe für G. Küchenhoff. F. Mayer (Hrsg.) 281–292. Göttingen 1967
[86] Weil, A.: Number theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre. Boston - Basel - Stuttgart 1983
[87] Zagier, D. B.: Zetafunktionen und quadratische Körper. Berlin - Heidelberg - New York 1981

Anhang I: Das Habilitationsverfahren H. Minkowskis an derRheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn

Nr. 1: Brief Minkowski an die philosophische Fakultät, 26. Februar 1887 (in [1])

Bonn, den 26$^{\text{ten}}$ Februar 1887

Eine hohe philosophische Facultät der Königlichen Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn bitte ich ganz ergebenst, mich zu der Habilitation als Privatdozent für Mathematik gütigst zulassen zu wollen.

Ich verfehle nicht, in Anlage

1. die Genehmigung des Herrn Curators zu vorliegender Meldung,
2. ein curriculum vitae,
3. einen Abdruck meines Doktordiploms,
4. Abzüge meiner Inauguraldissertation und zweier Abhandlungen, sowie zwei noch nicht publicirte Aufsätze

ergebenst zu überreichen.

Dr. phil. H. Minkowski
Franciskanerstr. 4

Vita

Natus sum Hermannus Minkowski in Russiae oppido Alexoten die XXI. mensis junii anni 1864 patre Levino, matre Rahela e gente Taubmannia. Fidei addictus sum mosaicae. Anno 1872 in civitatem Borussorum susceptus, gymnasium Paraeopolitanum Regimonti adii. Vere anni 1880 maturitatis testimonium adeptus, per quinque semestria Regimonti, per tria Berolini studiis mathematicis incubi. Die XXX mensis julii anni 1885 summos in philosophia honores nactus sum.

Praeter dissertationem inauguralem in publicum edidi commentationes „de formarum quadraticarum positivarum quaternarium reductione“ (Comptes rendus de l'Académie des Sciences à Paris, 1883, I, p. 1205) „de formarum quadraticarum theoria" (Mémoires présentés à l'Académie des Sciences, t. XXIX, N°), „de formis quadraticis positivis" (Journal für Mahematik, Bd. 99, S. 1)

H. Minkowski
Dr. phil.

Bonn, den 26ten Februar 1887

Eine hohe philosophische Facultät der Königlichen Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität bitte ich ganz ergebenst, als Gegenstand meiner Probevorlesung eines der nachstehenden Themata wählen zu dürfen:

1. Ueber einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis;
2. Ueber die Grundlagen der Invariantentheorie;
3. Ueber die eindeutigen analytischen Functionen.

H. Minkowski
Dr. phil.

Nr. 2: Aktennotiz Wilmanns, Dekan, 26. Februar 1887 (in [1])

Herr Dr. phil. H. *Minkowski* meldet sich in vorgeschriebener Weise zur *Habilitation* als Privatdozent für *Mathematik*.

Derselbe legt außer der Dissertation und zwei gedruckten Abhandlungen als Habilitations-Schrift zwei noch nicht publicierte Aufsätze vor:

1. Zur Theorie der positiven quadratischen Formen
2. Über den arithmetischen Begriff der Äquivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen.

Ich ersuche die math. nat. Sektion, zunächst Herrn Geh. R. *Lipschitz* um die Beurteilung dieser Schriften, und die Fakultät um Entscheidung über die Zulassung.

Da der Habilitant noch in diesem Semester die *Probe-Vorlesung* zu halten wünscht, so lege ich gleichzeitig die von ihm vorgeschlagenen Themata zur Auswahl vor.

Bonn 26/2 87 Wilmanns

Nr. 3: Beurteilung der Schriften Minkowskis durch R. Lipschitz, 12. März 1887 (in [1])

Die von Herrn Dr. Minkowski eingereichten Arbeiten beweisen eine ungewöhnliche mathematische Begabung (Die Abhandlung: Mémoire sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers hat durch den von der Pariser Akademie ertheilten Preis ihre Anerkennung gefunden, die beiden im Drucke mitgetheilten Abhandlungen schließen sich an seine erste an. Auch die beiden handschriftlich vorgelegten Untersuchungen sind durch eigenständliche Gedanken werthvoll; diejenige, welche sich auf den arithmetischen Begriff der Aequivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen bezieht, würde durch eine schärfere Hervorhebung unwesentlicher Momente noch gewinnen.) Ich erkläre mich gerne für die Zulassung des Herrn Dr. Minkowski zu der Habilitation, und erlaube mir, von den für die Probenvorlesung vorgeschlagenen Gegenständen den ersten zu empfehlen.

R. Lipschitz Bonn, den 12ten März 1887

Nr. 4: Brief Minkowski an die philosophische Fakultät, 15. März 1887 (in [1])

Bonn, den 15^{ten} März 1887

Eine hohe philosophische Facultät der Königlich Preußischen rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität bitte ich ganz ergebenst, zum Gegenstande meiner Antrittsvorlesung eines der nachstehenden Themata wählen zu dürfen:

1. *Ueber die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung*
2. Ueber die Anwendungen der Kegelschnitte;
3. Ueber die Structur der Krystalle.

H. Minkowski
Dr. phil.

Nr. 5: Protokoll der Sitzung der philosophischen Fakultät, 15. März 1887 (in [1])

Sitzung der philosophischen Fakultät
Probenvorlesung und Colloquium
des Herrn Dr. philos. Hermann Minkowski

Bonn, den 15^{ten} März 1887

Herr Dr. Minkowski sprach „Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis." Der freie Vortrag währte 25 Minuten.

Der Vortragende begann mit der Bemerkung, daß die Rechnung mit beliebigen Größen auf der Thatsache beruhe, daß jede beliebige, vollständig definierte Größe mit beliebig genauer Annäherung durch einen Bruch dargestellt werden kann, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, oder, was dasselbe ist, daß die Aufgabe im̄er möglich ist, eine homogene lineare Function von zwei Variablen, die für ganzzahlige Werthe der Variabeln nicht verschwinden kann, für ein System von ganzzahligen Werthen der Variablen beliebig klein zu machen. Hierauf wurde das Verfahren entwickelt, welches von Hermite in einem an Jacobi gerichteten im 40ten Bande des Crelle'schen Journals veröffentlichten Briefe angegeben ist, um die bezeichnete Aufgabe und auch eine Verallgemeinerung derselben zu lösen, bei der verlangt wird, daß ein System von homogenen linearen Functionen von mehreren Variabeln, das für ganzzahlige Werthe der Variabeln nicht verschwinden kann, für ein System von ganzzahligen Werthen der Variabeln ein System von beliebig kleinen Werthen erhalten soll. Hermite's Methode stützt sich auf die Betrachtung einer mit Hülfe der gegebenen linearen Functionen gebildeten wesentlich positiven quadratischen Form, in welche ein veränderliches Element eingeführt wird, durch dessen successive Bestimmung der Determinante der Form stets kleinere Werthe annim̄t. In letzter Stelle handelt es sich um den Satz, daß eine wesentlich positive quadratische Form, deren Determinante beliebig verkleinert wird, für ganzzahlige Werthe der Variablen ebenfalls einen beliebig kleinen Werth erhalten kann. Von diesem Satze gab Herr Minkowski einen neuen Beweis, indem er für den Fall von zwei oder drei Variablen die Eigenschaften des Systems von Gitterpunkten benutzte, das nach der von Gauß herührenden Vorstellung den Formen von zwei oder drei Variabeln zugeordnet ist. Wenn bei drei Variablen um jeden Punkt des Gittersystems eine Kugel beschrieben wird, deren Radius halb so groß ist als die Entfernung zwischen dem betreffenden Punkte und dem nächsten Punkte des Systems, so wird der räumliche Inhalt der Kugel kleiner sein als der räumliche Inhalt des Grundparallelepipedum des Gittersystems. Die analytische Formulierung dieses Factums führe sogleich zu dem nachzuweisenden Resultat.

Nachdem Herr Dr. Minkowski die im Vorstehenden angedeutete Untersuchung in klarer Darstellung auseinandergesetzt hatte, bemerkte er, daß er eine Anwendung auf die

Struktur der Krystalle gemacht habe, diese Mittheilung aber wegen der Kürze der Zeit glaube unterdrücken zu müssen.

Hierauf eröffnete Professor Lipschitz das Colloquium, in dem er Herrn Minkowski veranlaßte, sich über das Prinzip Dirichlet's auszusprechen, welches zu der angenäherten Auflösung durch ganzzahlige Werthe bei einem System von homogenen linearen Gleichungen dient, das in aller Strenge durch solche Werthe nicht befriedigt werden kann.

An den Umstand anknüpfend, daß bei der in dem Vortrage erörterten Methode die Transformation der quadratischen Formen durch ganzzahlige Substitutionen eine Hauptrolle spielt, wurde auch die Frage nach der Transformation einer Sum̄e von drei Quadraten in sich selbst durch Substitutionen berührt, deren Coefficienten rationale Brüche sind.

Prof. Clausius veranlaßte den Cand. die in seinem Vortrage angedeutete Anwendung der von ihm untersuchten Raumgitter auf die Beschreibung der Crystallstructuren wenigstens in den Grundzügen mitzutheilen, was in befriedigender Weise durch eine Auseinandersetzung geschah, welche von ältern Untersuchungen von Bravais und eine Erweiterung derselben von Sohnke anknüpfte, und darauf hinwies, daß die Resultate des Letzteren sich in anderer Weise ableiten und begründen ließen.

Nachdem das Colloquium um 6,50 geschlossen war, erklärte die Fakultät daß der Kand. den Forderungen genügt habe.

Für die Antrittsvorlesung wurde das erste der von dem Kand. vorgeschlagenen Themata gewählt.

Wilmañs

Anhang II: Manuskript eines Vortragsentwurfs von H. Minkowski ([3], Box VII, f. 1)

Ich will über einige elementare Sätze aus einem Gebiete sprechen, das bis zur Stunde noch keine systematische Bearbeitung gefunden hat, obwohl es eines der ältesten der Mathematik ist. Ich meine dasjenige Gebiet der Mathematik, dessen Aufgabe es ist, die Beziehungen zu studieren, die zwischen beliebigen gegebenen Grössen und der Reihe der ganzen Zahlen bestehen. Eigentlich drücken alle Sätze, welche in der Mathematik ausgesprochen werden, Beziehungen zwischen gegebenen Grössen und ganzen Zahlen aus, da ja die gesammte Mathematik auf der Betrachtung der ganzen Zahlen basirt. Es ist daher nöthig anzugeben, von Beziehungen welcher Art ich im Folgenden sprechen will. Es sollen Fragen in Betracht kommen etwa von der Art, ob gegebene Grössen als Verhältnisse von ganzen Zahlen dargestellt werden können, mit welcher Genauigkeit dieses möglich ist, ob zwischen gegebenen Größen ganzzahlige Gleichungen bestehen können und mit welcher Genauigkeit man zwischen gegebenen Grössen Relationen von ganz bestimmter Art annehmen kann. Sie sehen also, es wird sich um die Erfüllung von Gleichungen handeln, in denen die gesuchten Grössen ganze Zahlen sein sollen; der Untersuchung werden also algebraische Formen zu Grunde gelegt werden, in denen die Coefficienten die beliebig gegebenen Grössen enthalten, während die Variablen stets ganze Zahlen sein sollen. Dieser Gesichtspunkt, unter welchem wir hier die Formen betrachten, und der sonst nur selten angewandt wird, ist besonders scharf in's Auge zu fassen, und ich will deshalb, um seine Bedeutung möglichst deutlich hervorzuheben, noch einige Worte hinzufügen. Ich werde allein von reellen Grössen sprechen und es sollen da einander gegenübergestellt werden die discrete Reihe aller ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ und das Continuum aller möglichen reellen Grössen von $-\infty$ bis $+\infty$. Nun hängt das wichtige Instrument der Mathematik, welches Gauß mit dem Namen Form bezeichnet hat, von zwei Reihen von Argumenten ab, die wesentlich voneinander unterschieden werden können: von den Coefficienten und den Variablen. Für jede dieser Reihen von Argumenten können wir nun entweder allein die discrete Reihe der ganzen Zahlen oder das Continuum aller möglichen reellen Grössen zulassen. Im ganzen haben wir hier vier Möglichkeiten, die zu vier wesentlich verschiedenen Arten von Formen Veranlassung geben. Lassen wir zunächst für die Coefficienten sowohl als für die Variablen nur die Reihe der ganzen Zahlen zu, so haben wir die Formen der Zahlentheorie, und es ist klar, dass, solange wir nur im Gebiete der ganzen Zahlen bleiben, Formen anderer Art absolut keine reelle Bedeutung besitzen können, vielmehr höchstens als Symbole gelten können. Lassen wir dagegen für die Coefficienten sowohl als für die Variablen alle möglichen reellen Werthe zu, so gelangen wir zu denjenigen Formen, die ihren vollständigen Ausdruck in den algebraischen Gebilden der Geometrie finden, und umgekehrt ist es bekannt, dass die geometrischen Untersuchungen immer zur Betrachtung solcher Formen mit beliebigen Coefficienten Veranlassung geben, und dass es beispielsweise im Allgemeinen sehr schwer halten würde, eine Curve, die durch eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten definirt ist, von einer Curve zu unterscheiden, welche durch eine Gleichung mit irgend welchen reellen Coefficienten definirt ist. Lassen wir drittens für die Coefficienten nur ganze Zahlen zu, dagegen für die Variablen alle reellen Werthe, so kommen wir zu den Formen der arithmetischen Algebra auf, und wir gelangen zu den Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten und zu den sogenanten algebraischen ganzen Zahlen. Endlich können wir noch viertens für die Coefficienten alle möglichen reellen Werthe zulassen und die Variablen auf die Reihe der ganzen Zahlen beschränken. Dadurch kommen wir zu unserem Gegenstande, und zu einem Gebiete, das eine Verbindung zwischen der Algebra und Arithmetik bildet, nämlich wenn man so sagen will, zu der Formentheorie der algebraischen Arithmetik.

Ich werde mich hier ausschliesslich mit den einfachsten Formen, mit den linearen Formen beschäftigen. Historisch bemerke ich, dass die ersten bedeutenderen Untersuchungen über unseren Gegenstand von Euler und von Lagrange herrühren. In diesem Jahrhundert hat Dirichlet die Lagrange-schen Methoden weiter ausgeführt, und es ist ihm mittels seiner Betrachtungen namentlich gelungen, eine Theorie der algebraischen Einheiten aufzustellen. Neuerdings hat Kronecker die Dirichletschen Ideen ausführlicher auseinandergesetzt. Ferner ist ein wesentlicher Fortschritt, von welchem ich sogleich sprechen werde, Hermite zu verdanken. Mit Hülfe seiner neuen Methoden ist es ihm gelungen, die Dirichletschen Sätze wieder abzuleiten. Ferner gewinnt er aus seinen Betrachtungen wichtige Sätze der Functionentheorie, wie z. B. dass Functionen von n Variablen mit mehr als $2n$ Perioden unmöglich sind. Endlich hat er diese schönen Betrachtungen in der Weise auf Functionen übertragen, dass er statt einer beliebigen Grösse eine beliebige Function, und statt einer ganzen Zahl eine ganze rationale Function setzt, und es ist bekannt, wie es ihm hierdurch namentlich geglückt ist, das zu finden, was er bereits seit den vierziger Jahren unaufhörlich suchte, und was ihn namentlich veranlasste, bei jeder sich darbietenden Gelegenheit von Neuem auf diese Untersuchungen zurückzukommen, ich meine den Beweis für die Transcendenz gewisser besonderer Constanten.

Ich werde mich also jetzt zu der Betrachtung linearer Formen wenden. Es seien eine Reihe homogener linearer Ausdrücke gegeben, in denen die Coefficienten beliebige gegebene Grössen bedeuten und die Variablen ganze Zahlen sein sollen. Ich bezeichne diese Ausdrücke durch $\xi_i = \sum \alpha_{ik} x_k$. Ich beschränke mich von vornherein auf den Fall, wo die Anzahl der linearen Ausdrücke mit der Anzahl der Variablen identisch und gleich n ist, und wo die Determinante aus den Coefficienten α_{ik} von Null verschieden ist. Die übrigen Fälle können leicht auf diesen besonderen Fall reduziert werden. Ist z. B. eine einzige Function ξ von zwei Variablen gegeben $\xi = x - ay$, wo a eine gegebene Grösse bedeutet, so füge ich zu dieser Function noch eine Function $\eta = \frac{y}{\Delta}$ hinzu, wo Δ eine unbestimmte Grösse bezeichnen möge, und ich gelange zu allen bemerkenswerthen Eigenschaften der Function ξ, indem ich die beiden Functionen ξ und η für alle möglichen Werthe des Δ betrachte.

Die erste Aufgabe, die sich nun bietet, wäre die n Gleichungen

$$\xi_i = \sum \alpha_{ik} x_k = 0$$

in ganzen Zahlen x_k aufzulösen. Nun ist aber bekannt, dass dieses System von Gleichungen, da seine Determinante von Null verschieden ist, nur in der Weise lösbar ist, dass alle Grössen x_k gleich Null gesetzt werden. Wenn wir daher für die x_k alle möglichen Systeme von n ganzen Zahlen setzen, die nicht alle verschwinden, so werden wir nie zu dem Werthesystem $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0, \ldots, \xi_n = 0$ gelangen werden. Es fragt sich aber, welches von zwei in dieser Weise entstehenden Werthesystemen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ man als näher zum Werthesystem $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0, \ldots, \xi_n = 0$ gelegen betrachten kann als das andere. Die Antwort auf diese Frage kann nun in verschiedener Weise gegeben werden. Man kann dabei entweder, wie es im wesentlichen Kronecker thut, bei dem Systeme der n linearen Functionen ξ_i stehen bleiben, oder man kann, wie Hermite es macht, aus den n Functionen ξ_i eine neue Function bilden, welche für die einzelnen Werthesysteme ξ_i, das Maass ihrer Änderung in das Werthesystem $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\ldots$, $\xi_n = 0$ giebt. Beide Darstellungsweisen haben ihre Vortheile und Nachtheile. Bei der Dirichlet-Kronecker'schen Weise hat man das Gute, immer nur mit linearen Functionen hantieren zu können, bei der Hermite'schen dagegen den anderen Vortheil, statt eines Systems von Functionen nur eine betrachten zu müssen. Ich werde mich in den Hauptsachen an Hermite anlehnen, da die Resultate, zu welchen seine Methoden führen, mir weit allgemeiner zu sein scheinen. Man gelangt zu der Hermite'schen Anschauung wohl am einfachsten auf den folgenden Wegen. Zuerst einer, den sie vielleicht nicht ganz werden gelten lassen wollen.

Denken wir uns ein bestimmtes Werthesystem von Zahlen x_k ausgewählt, so werden die entstehenden Werthe der $\xi_i = \sum \alpha_{ik} x_k$ zugleich die Abweichungen der einzelnen Grössen ξ_i von den Grössen $\xi_i = 0$ darstellen, oder, wenn man so will, die Fehler die zu den einzelnen Grössen ξ_i in Bezug auf die Grösse 0 gehören. Nun lehrt die Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass von verschiedenen in Betracht kommenden Werthsystemen x_i diejenigen die grösste Berechtigung als angenäherte Lösungen der Gleichungen $\xi_i = 0$ besitzen werden, für welche die Summe der Fehlerquadrate am kleinsten wird, d.i. also für welche die Summe $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = \sum_i (\sum \alpha_{ik} x_k)^2$ den kleinsten Werth annimmt. Auf diese Summe $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots$ ξ_n^2 werden wir also durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung als auf das Maass der Abweichung des Systems $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ von dem Systeme $0, 0, \ldots, 0$ aufmerksam gemacht und wir werden dazu geführt, diejenigen ganzzahligen Systeme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu untersuchen, für welche diese Summe den kleinsten Werth annimmt.

Zu diesem selben Ausdruck $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots \xi_n^2$ werden wir durch geometrische Betrachtungen geleitet. Denken wir uns eine gewöhnliche Mannigfaltigkeit von n Dimensionen, also für den Fall $n = 3$ den Raum und stellen, da wir ja die n Ausdrücke ξ_i als vollkommen gleichberechtigt ansehen, diese Grössen ξ_i mit Hülfe von n orthogonalen Coordinatenaxen dargestellt, so dass jedem Punkte $\xi_i, \xi_2, \ldots \xi_n$ in dieser n fachen Mannigfaltigkeit ein bestimmtes Werthesystem $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ entspricht. Alsdann liegt es nahe, von zwei Systemen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ dasjenige als näher dem Systeme $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0, \ldots, \xi_n = 0$ anzusehen, für welches der Punkt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ näher zu dem Punkte $0, 0, \ldots, 0$ liegt, d.i. zu dem Anfangspunkte der Coordinaten. Nun ist aber die Entfernung des Punktes $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ von dem Punkte $0, 0, 0 \ldots, 0$ bekanntlich gleich der Quadratwurzel aus der Grösse $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots \xi_n^2$. Somit sind wir wieder zu dieser Summe von Quadraten gelangt.

Endlich bemerke ich noch, dass wir auch auf analytischem Wege leicht zu der Grösse $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}$ geführt werden, indem wir uns die Aufgabe stellen, als Maass der Annäherung eines Systems $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ an das System Null eine möglichst einfache Function der Grössen ξ_i einzuführen, welche die Eigenschaften besitzt, für $n=1$ mit dem absoluten Werthe der Grösse ξ_1 identisch zu sein, ferner nur von den absoluten Werthen der Grössen ξ_i abzuhängen und in Bezug auf alle Grössen ξ_i symmetrisch zu sein.

Die Function $\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$ nimmt, wenn die Ausdrücke der einzelnen Grössen ξ_i eingeführt werden, sofort den Ausdruck $f=\sum a_{ik}x_i x_k$ an, sie ist also das, was man eine quadratische Form der n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nennt. Ferner nimmt sie, da sie eine Summe von Quadraten ist, im Allgemeinen nur positive Werthe an, und wenn sie den Werth Null erhalten soll, so müssen sämmtliche Grössen ξ_i verschwinden, also sämmtliche Gleichungen $\xi_i=0$ bestehen. Da die Determinante dieser Gleichungen aber von Null verschieden ist, so können diesselben, wie schon bereits bemerkt, nur dann bestehen, wenn alle $x_k=0$ sind. Die Form f kann also nur für das eine Werthesystem $x_1=0$, $x_2=0$, …, $x_n=0$ zu Null werden, für welches sie auch in der That verschwindet. Wir nennen deshalb f eine wesentlich positive quadratische Form.

Das Vorausgegangene habe ich hauptsächlich deshalb so ausführlich behandelt, um, soweit ich es vermag, meine Ueberzeugung auch zu der Ihrigen zu machen, nämlich, dass wir es in der Theorie der positiven Formen mit Fragen von durchaus fundamentaler Bedeutung zu thun haben.

Wir waren zu der Aufgabe gelangt, diejenigen ganzzahligen Werthesysteme x_1, x_2, …, x_n aufzusuchen, für welche die Form $\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$ möglichst klein wird. Meistens, ich habe es wenigstens niemals anders gefunden, begnügt man sich hier zu zeigen, da diese Form nur Null oder unendlich klein werden kann, wenn alle x_i Null oder unendlich klein sind, so muss sie für die ganzzahligen, also auch endlichen Systeme der x_i nothwendig endliche Werthe, also auch ein endliches Minimum haben. Ich will dieses indessen genauer darlegen. Nehmen wir an, die Form $\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$ überschreite für ein gewisses Werthesystem der x_i nicht eine bestimmte positive Grösse G, man habe also

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2 \leqslant G$$

alsdann wird man offenbar auch, da jedes ξ_i^2 gewiss nicht grösser als die Summe aller ξ_i^2 ist, die Ungleichung haben

$$\xi_i^2 \leqslant G, \text{ oder } |\xi_i| \leqslant \sqrt{G},$$

wenn $|\xi_i|$ den absoluten Werth von ξ_i bezeichnet hat. Nehmen wir nun an, die Auflösung der Gleichungen $\xi_i=\sum \alpha_{ik}x_k$ liefere die Gleichungen

$$x_i=\sum A_{ik}\xi_k$$

alsdann wird man sicher für die absoluten Werthe der Grössen x_i, A_{ik}, ξ_k die Ungleichung haben

$$|x_i| \leqslant \sum |A_{ik}|\,|\xi_k|$$

also mit Benutzung unserer letzten Ungleichungen

$$|x_i| \leqslant \sqrt{G}\cdot\sum |A_{ik}|$$

Wir erhalten somit für die Zahlen $|x_i|$ gewisse endliche Gränzen, von denen wir auch leicht einsehen, dass sie nicht verschwinden. Denn wäre $\sum |A_{ik}|=0$, so müssten alle A_{ik} verschwinden, und daraus folgerte man dann leicht, dass auch die Determinante der Gleichungen $x_i=\sum_i A_{ik}\xi_k$ Null sein müsste, was mit unserer Voraussetzung streiten würde.

Aus den letzten Ungleichungen schliessen wir somit: Es giebt jedenfalls immer nur eine endliche Anzahl g von ganzen Zahlen x_i, für welche die Form f einen Werth annimmt, der eine Gränze G nicht überschreitet. Offenbar folgt hieraus auch, dass die Form den bestimmten Werth G selbst auch nur für eine endliche Anzahl von Systemen $x_1, x_2, \ldots x_n$ annehmen kann, und dass es nur eine endliche Anzahl von Grössen $G', G'', \ldots$, unter einer Gränze G geben kann, welche überhaupt durch die Form f mittels ganzzahliger Systeme x_i dargestellt werden kann.

Nehmen wir nun für die Grösse G irgendeine Grösse, die durch die Form f wirklich mittelst irgend eines ganzzahligen Systemes x_i dargestellt werden [kann], so können wir nach dem eben gezeigten untersuchen, ob es unter der Gränze G noch irgendwelche Grössen giebt, die durch die Form $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$ mittelst ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dargestellt werden kann. Wenn es solche Grössen dann nicht giebt, so ist G selbst die kleinste durch diese Form darstellbare Zahl und wenn solche Grössen vorhanden sind, so nehmen wir die kleinste derselben und diese wird dann zugleich auch die kleinste Grösse sein, welche durch die Form f darstellbar ist. Wir nennen diese bestimmte Grösse das Minimum der Form f. Wir haben also ein Verfahren gefunden, um stets das Minimum einer positiven Form zu finden.

Wir haben jetzt gezeigt, dass jede bestimmte positive Form von einer Determinante D ein bestimmtes endliches Minimum besitzt, welches natürlich eine Function der Coefficienten der Form sein wird. Es besteht nun der Hauptsatz, dass dieses Minimum nicht etwa mit den Coefficienten zugleich über jede Gränze wachsen kann, sondern dass es für alle Formen von derselben Determinante D niemals eine gewisse Gränze übersteigen kann.

Wir wollen zunächste zusehen, von welcher Art eine solche Gränze sein muss falls sie überhaupt existiert. Als alleinige Function der Determinante bezeichnen wir sie mit $\varphi(D)$. Dividieren wir nun alle Coefficienten der Form $f = \sum a_{ik} x_i x_k$ durch $\sqrt[n]{D}$, so erhalten wir die Form $\frac{f}{\sqrt[n]{D}} = \sum \frac{a_{ik}}{\sqrt[n]{D}} x_i x_k$ welche offenbar von der Determinante $\frac{D}{(\sqrt[n]{D}\,)^n}$, also von der Determinante 1 sein wird. Es ist klar, dass die Form $\frac{f}{\sqrt[n]{D}}$ für dieselben Werthesysteme x_i ihr Minimum erreichen wird, wie die Form f. Für alle Formen $\frac{f'}{\sqrt[n]{D}}$ welche mit den Formen von der Determinante 1 identisch sind, muss nun offenbar $\varphi(1)$ die Gränze für das Minimum sein, andererseits ist für diese Formen auch $\frac{\varphi(D)}{\sqrt[n]{D}}$ eine Gränze für das Minimum, mithin muss $\frac{\varphi(D)}{\sqrt[n]{D}} = c$, also $\varphi(D) = c\sqrt[n]{D}$ sein.

Nehmen wir nun an, es wäre eine Constante c so bestimmt, dass die Minima aller Formen von der Determinante D die Gränze $c\sqrt[n]{D}$ nicht überschreiten, und denken wir uns, man könnte in anschaulicher Weise für alle Formen f von der Determinante D die Minima darstellen. Da diese Minima alle positiv sind und eine bestimmte Gränze nicht überschreiten, so wird man leicht vermuthen, dass es unter diesen Minima solche geben wird, die grösser als alle anderen sind. Diese können dann entweder mit $c\sqrt[n]{D}$ identisch sein oder kleiner. In ersterem Falle nur wäre $c\sqrt[n]{D}$ eine genaue Gränze für die Minima der Formen von der Determinante D, in letzterem dagegen könnte diese Gränze noch enger gezogen werden. Während es nun Hermite [?] gelungen ist, überhaupt eine Gränze $c\sqrt[n]{D}$ für die Minima zu finden, bietet es die grössten Schwierigkeiten, die präzise Gränze für die Minima der quadratischen Formen zu finden, welche nach allem, was aus den speziellen bis jetzt untersuchten Fällen zu ersehen ist, eine für die Mathematik sehr wichtige Constante darstellt. Ich wollte ihnen eigentlich die Methode schildern, welche ich zu diesem Zwecke eingeschlagen habe. Da es hierzu schon indessen zu spät geworden ist, so will ich ihnen nur an einigen kleinen Anwendungen die hohe Bedeutung dieser Fragen darthun.

Es sei a eine beliebig gegebene reelle Grösse und Δ ein unbestimmter positiver Parameter und ich betrachte die beiden linearen Formen

$$\xi = x - ay$$

$$\eta = \frac{y}{\Delta}$$

welchen die quadratische Form

$$f = (x - ay)^2 + \frac{y^2}{\Delta^2}$$

zugehört, deren Determinante gleich $\frac{1}{\Delta^2}$ sein wird. Nun ist $\sqrt{\frac{4}{3} D}$ die präzise Gränze für die Minima der binären quadratischen Formen von der Determinante D, wir werden also in unserem Falle die ganzen Zahlen x und y so bestimmen können, dass

$$(x - ay)^2 + \frac{y^2}{\Delta^2} \leqslant \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{4}{3}}$$

ist. Daraus folgt

$$(x - ay)^2 \leqslant \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{y^2}{\Delta^2} \leqslant \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{4}{3}}, \text{ oder } y^2 \leqslant \sqrt{\frac{4}{3}}\, \Delta.$$

Da ferner das Product $(x - ay)^2 \cdot \frac{y^2}{\Delta^2}$ immer kleiner ist als $\frac{1}{4} \left\{(x - ay)^2 + \frac{y^2}{\Delta^2}\right\}$, so hat man noch

$$(x - ay)^2 \cdot \frac{y^2}{\Delta^2} \leqslant \frac{1}{3\Delta^2}, \text{ also } x - ay \leqslant \frac{1}{y\sqrt{3}} \text{ und } \frac{x}{y} - a \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{y^2}.$$

Es ergiebt sich also der Satz: Man kann a durch Brüche $\frac{x}{y}$ immer so darstellen, daß die Differenz $\leqslant \frac{1}{y^2\sqrt{3}}$ wird.

Ferner [*Hier bricht das Manuskript ab*]

Joachim Schwermer
Mathematisch-Geographische Fakultät
Katholische Universität Eichstätt
Ostenstraße 26–28
8078 Eichstätt

(*Eingegangen: 16. 10. 1990;
revidiert: 19. 11. 1990*)

Buchbesprechungen

Nemhauser, G. L., Wolsey, L. A., Integer and Combinatorial Optimization (Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization), New York u. a.: John Wiley and Sons 1988, 782 pp, hard cover, £ 71.90

Eine Fülle von Aufgaben, die unsere moderne Industriegesellschaft der Angewandten Mathematik stellt, ist von diskreter Natur. Kapitaleinsatz, Produktionsplanung, Einsatz von Produktionsmitteln, Maschinenbelegung, Lagerhaltung und Transportplanung können als diskrete Optimierungsprobleme formuliert werden. Das gleiche gilt für die Auslegung moderner Kommunikationsnetze (z. B. ISDN und Breitbandnetze) oder Design und Verifikation moderner elektronischer Bausteine (VLSI, Computerhardware). Weitere Anwendungsgebiete finden sich z. B. in der Festkörperphysik (Spingläser) oder der Cryptographie (Design schwer zu brechender Codes).

Während kontinuierliche Optimierung und Kontrolle an unseren Universitäten in Forschung, Lehre und Literatur wohl fundiert und etabliert sind, befindet sich die diskrete Optimierung und Kontrolle noch im Entwicklungsstadium, wird aber vermutlich in der Zukunft einen größeren Teil der Angewandten Mathematik ausmachen. Dieses Buch schließt daher eine wichtige Lücke. Erstmals werden die beeindruckenden Entwicklungen der letzten dreißig Jahre auf dem Gebiet der diskreten Optimierung in dieser Form in einem Lehrbuch befriedigend dargestellt. Einerseits wird klar, wie sehr die oben genannten (und andere) Anwendungen die Mathematiker herausfordern, andererseits lernt man, wie diese Fragestellungen zu mathematischen Modellen hoher Komplexität führen, deren Studium nicht nur eine Fülle algorithmischer Ansätze zum effektiven Finden approximativer oder optimaler Lösungen, sondern auch schöne und tiefliegende Theoreme kombinatorischer Art hervorgebracht hat.

Das Buch gliedert sich in drei Teile. Nach einem motivierenden Kapitel über Modellierung bringt Teil I die notwendigen mathematischen Grundlagen in einer knappen Einführung in die Gebiete Lineare Programmierung, Graphen und Netzwerke, Polyedertheorie und Komplexitätstheorie. Es folgt eine Einführung in die in diesem Jahrzehnt gefundenen polynomialen Algorithmen zur Linearen Programmierung: Khachiyans Ellipsoidmethode, Karmarkars Projektionsmethode und Tardos' stark polynomiale Methode.

Teil I schließt mit einem Kapitel über ganzzahlige Gitter. Besonders hier werden die Verbindungen zur klassischen Zahlentheorie deutlich: Lösung diophantischer Gleichungs- und Ungleichungssysteme, diophantische Approximation, effiziente Bestimmung der Hermite-Normalform, Basisreduktion.

Teil II („General Integer Programming") behandelt hauptsächlich Theorie und Methoden zur Lösung allgemeiner gemischt ganzzahliger Optimierungsprobleme unter linearen Restriktionen. Er beginnt mit der Theorie gültiger und im algorithmischen Sinne starker Ungleichungen für die Lösungsmenge solcher Probleme, zunächst in voller Allgemeinheit und dann für strukturierte Probleme, wobei das Knapsackproblem (dessen Studium auch eine besondere Bedeutung für die algorithmische Lösung des allgemeinen Falls hat), das symmetrische Rundreiseproblem und gewisse schwere Netzwerkflußprobleme beispielhaft hervorgehoben sind. Hier finden sich die wichtigen Ergebnisse zur Facettialstruktur solcher strukturierter Probleme. Nach dem Studium nichttrivialer unterer und oberer Schranken („Quality and Relaxation") werden Schnittebenen-, Enumerations- und Dekompositionsverfahren sowie deren Kombination mit heuristischen Ansätzen für den allgemeinen und den strukturierten Fall (anhand der oben aufgeführten Beispiele) im

Detail dargestellt. Dies ist der stärkste Teil des Buches, erstmals wird lehrbuchartig dargestellt, was bisher nur in Spezialartikeln zu finden war.

Der abschließende Teil III („Combinatorial Optimization") beschäftigt sich mit solchen kombinatorischen Optimierungsproblemen, für die elegante strukturelle und algorithmische Resultate vorliegen. Während für die in Teil II behandelten $\mathcal{NP}$-schweren kombinatorischen Optimierungsprobleme keine vollständigen linearen Beschreibungen der durch die konvexe Hülle der zulässigen Lösungen definierten Polyeder bekannt sind, können solche in anderen Fällen angegeben werden. Zunächst werden strukturelle Bedingungen studiert, unter denen gewisse Gleichungs- und Ungleichungssysteme nur ganzzahlige Basislösungen besitzen. Dies umfaßt das Studium unimodularer und balancierter Matrizen, perfekter Graphen und Fulkersons Blockingtheorie. Das zweite Kapitel ist Edmonds's fundamentalen strukturellen und algorithmischen Resultaten zum Matchingproblem gewidmet. Schließlich dringt man in gewisser Weise zur Grenze dessen, was nach dem derzeitigen Wissensstand in polynomialer Zeit lösbar ist, vor, wie Optimierung über den Durchschnitt von Matroiden oder Minimierung submodularer Funktionen. Die Tatsache, daß letzteres nur mit Hilfe geometrischer algorithmischer Verfahren gezeigt werden kann, ist derzeit eine der Herausforderungen an die Kombinatoriker.

Für meinen Geschmack ist die Aufteilung in Teil II und Teil III etwas künstlich. Die in Teil II behandelten „strukturierten" ganzzahligen Optimierungsprobleme sind ebenso wie das Matchingproblem kombinatorische Optimierungsprobleme. Mir hätte ein Teil II mit allgemeinen ganzzahligen und gemischt ganzzahligen Optimierungsproblemen und ein Teil III mit kombinatorischen Optimierungsproblemen, „schwer" und „leicht", besser gefallen. Eventuell hätte ich auch die Darstellung der Minimierung submodularer Funktionen zugunsten einer ausführlichen Darstellung anderer anwendungsreicher $\mathcal{NP}$-schwerer Probleme wie z. B. maximale Schnitte und quadratische 0-1-Optimierung, gekürzt. Trotzdem halte ich dieses Buch für wirklich gelungen. Es ist sicherlich sowohl als Fachbuch für den Spezialisten als auch als Lehrbuch für verschiedene in der Einführung vorgeschlagene Vorlesungen sehr gut geeignet.

Augsburg M. Jünger

Terras, A., Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications I, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1985, 341 S., soft cover, DM 148,–

Terras, A., Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications II, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1988, 385 S., soft cover, DM 128,–

"This is a unique text – an introduction to harmonic analysis on the simplest symmetric spaces – Euclidean space, the sphere, the Poincaré upper half-plane. The level of presentation is informal, with much emphasis on motivation, concrete examples, history, and above all, applications in mathematics, physics, and engineering."

Soweit der Klappentext von Band I des vorliegenden Buches, das man nur sehr bedingt eine Einführung nennen kann. Als Voraussetzungen werden im Vorwort Infinitesimalrechnung und etwas Maßtheorie genannt. Nicht erwähnt wird, daß man darüber hinaus über eine gute Bibliothek und ungeheuren Fleiß verfügen muß, will man dieses Buch als Neuling durcharbeiten. So besteht zum Beispiel Abschnitt 1.1, der sich mit Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ befaßt, aus drei Definitionen, drei Beispielen, elf Übungen und einem Satz. Übung 10 lautet: Beweise Satz 1. Dieser Stil der Präsentation zieht sich durch das ganze Buch. Neue Begriffe werden sehr informell eingeführt, oft nur in Worten. Dennoch eignet sich das Buch kaum als Bettlektüre. Die besprochenen Resultate sind – und das liegt in der Natur des

Gebiets – dafür viel zu technisch. Es empfiehlt sich, schon wegen der Unzahl an Druckfehlern, immer einen Stift zur Hand zu haben. Der erzählerische Stil kommt auch darin zum Ausdruck, daß Nebenbemerkungen und Querverbindungen meist integraler Bestandteil des Textes sind und so den Gedankenfluß immer wieder unterbrechen. Dies und die wenig strukturierte Formelflut (3.1 bis 3.150 in Kapitel 3) machen es schwierig, in dem Buch Information zu speziellen Fragen zu *finden.* Dieses Buch ist also weder Lehrbuch noch Nachschlagewerk (und wohl auch nicht von ungefähr in keiner der einschlägigen Reihen des Verlags erschienen). Man könnte es eher als einen ausführlich kommentierten Führer durch die Literatur bezeichnen. Angesichts der Bedeutung der symmetrischen Räume für diverse Teildisziplinen der Mathematik ist es als solcher sicher eine Bereicherung für jede Institutsbibliothek.

Die behandelten Themen im einzelnen: Die ersten drei Abschnitte von Kapitel 1 sind eine Zusammenstellung von wichtigen Standard-Ergebnissen aus der Fourier Analysis auf $\mathbb{R}^n$ und dem n-dimensionalen Torus. Es wird auch kurz erklärt, wie man diese Theorie anwendet, um zentrale Grenzwertsätze zu erhalten. Weiter findet man eine Anwendung von Inversionsformeln auf die Spektroskopie. In Abschnitt 1.4 führt die Autorin verschiedene Zetafunktionen ein und beschreibt die Rolle dieser Funktionen in der algebraischen Zahlentheorie. Schließlich wird erläutert, wie man Zetafunktionen benützen kann, um die elektrostatische Energie von Salzkristallen zu berechnen.

Kapitel 2 ist eine kurze Zusammenfassung der Harmonischen Analyse auf der Sphäre mit Anwendungen auf die Quantenmechanik (Wasserstoffatom) und die Computertomographie (Radontransformation). Es wird auch auf den Zusammenhang mit der Darstellungstheorie kompakter Gruppen hingewiesen.

Kapitel 3, das sich mit der oberen Halbebene H in $\mathbb{C}$ befaßt, ist das eigentliche Herzstück von Band I. In Abschnitt 3.1 werden verschiedene Realisierungen von H und ihre Geometrie, sowie Anwendungen in der Elektrotechnik (Smith-Karten) besprochen. Abschnitt 3.2 behandelt Eigenfunktionen des Laplace-Operators bis hin zu einer Plancherelformel für H. Als Anwendung findet man Grenzwertsätze für SO(2)-invariante Zufallsvariablen auf H. Die restlichen Abschnitte dienen zur Vorbereitung der Selbergschen Spurformel (Satz 4 in Abschnitt 3.7). Dazu werden diskrete Untergruppen von $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ und ihre Fundamentalbereiche besprochen, automorphe und modulare Formen, sowie Dirichlet-Reihen und Hecke-Operatoren. Zwischendurch tauchen als Anwendungen die Berechnung von Klassenzahlen imaginärer quadratischer Zahlkörper und die Darstellung von Zahlen durch quadratische Formen auf.

Kapitel 4 (der erste Teil von Band II) behandelt den symmetrischen Raum P_n der symmetrischen, positiv definiten $n \times n$-Matrizen. In Abschnitt 4.1 wird die Geometrie dieses Raumes untersucht und auf die Berechnung von Korrelationen normal verteilter Zufallsgrößen angewendet. Spezielle und sphärische Funktionen sind der Gegenstand von Abschnitt 4.2. Auch diese werden auf Fragestellungen aus der Statistik angewendet. In Abschnitt 4.3 wird eine Fourier-Inversionsformel bewiesen und in Abschnitt 4.4 werden Fundamentalbereiche bezüglich $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ angegeben. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels ist eine Einführung in die harmonische Analyse auf $P_n/\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$. Besprochen werden automorphe Formen, Hecke-Operatoren, L-Funktionen und, besonders detailliert, Eisenstein-Reihen.

Das Buch schließt mit einem ausführlichen Ausblick (Kapitel 5) auf die allgemeine Theorie der Riemannschen (lokal) symmetrischen Räume, betrachtet als Nebenklassenräume G/K (bzw. Doppelnebenklassenräume $\Gamma \backslash G/K$) von halbeinfachen Lie-Gruppen.

Erlangen J. Hilgert

Angeles, J., Rational Kinematics (Springer Tracts in Natural Philosophy. Ed.: C. Truesdell. Vol. 34), New York - Berlin - Heidelberg - London - Paris - Tokyo: Springer-Verlag 1988, XII, 121 pp., hard cover, DM 78,-

Die Bezeichnung „Rational" im Titel ist nicht mathematisch zu verstehen, sondern soll ausdrücken, daß die räumlichen Bewegungen starrer Körper, von denen das Buch handelt, vernünftigerweise mit Hilfe von kinematischen Invarianten dargestellt werden, also mittels Bildungen, die vom Beobachter unabhängig sind. Dieser „rationale" Standpunkt wird im ganzen Buch konsequent vertreten und ermöglicht eine recht einheitliche Behandlung sowohl der theoretischen Grundlagen als auch der in großer Vielfalt präsentierten technischen Anwendungen. Der entwickelte Kalkül benützt hauptsächlich Vektor- und Tensoranalysis und Multilineare Algebra in absichtlich koordinatenfreier Darstellung.

Im ersten der fünf vorhandenen Kapitel (S. 1-11) wird die Thematik des Buches mit Hinweisen auf die historische Entwicklung geschildert. Besonderer Wert wird dabei auf die kinematischen Beziehungen gelegt, die zwischen dem Rotationstensor, seinen Invarianten und zeitlichen Ableitungen einerseits und der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung andererseits bestehen. Dieses Konzept wurde 1982 vom Autor entwickelt und seitdem von ihm und von Koautoren in zahlreichen Publikationen im Ingenieurbereich weitergeführt.

Mit dem zum Teil für beliebige Dimension n entwickelten Kalkül werden die wichtigsten Grundeigenschaften der Bewegungen in Kapitel zwei (S. 12-34) und analog für Momentanbewegungen in Kapitel drei (S. 35-64) neu hergeleitet, ohne ihre Beziehung durch Grenzübergang auszuwerten. Hauptsächlich werden Eigenschaften besprochen, die jeweils mit den Dreh- bzw. Schraubachsen zusammenhängen, so auch der Satz vom Gemeinlot der Relativmomentanachsen dreier bewegter Systeme, jedoch nicht die Axoide und ihre Bedeutung für die Übertragung von Drehungen um windschiefe Achsen.

Das Kapitel vier (S. 65-77) widmet sich Fragen der Beschleunigung bei Momentanbewegungen, wobei der Tensor der Winkelgeschwindigkeit und dessen Ableitung die zentrale Rolle spielen und auch die Coriolisbeschleunigung diskutiert wird. Es wird gezeigt, daß durch Vorgabe der Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren von drei nicht kollinearen Punkten das Beschleunigungsfeld festliegt, falls eine dafür notwendige und explizit angegebene Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist.

Der Schwerpunkt des Buches liegt zweifellos im letzten Kapitel, das sehr ausführlich (S. 78-122) in eine Vielzahl verschiedenartiger technischer Probleme einführt, die mit Hilfe des entwickelten Kalküls gelöst werden. Vor allem sind die Freiheitsgrade kinematischer Zwanglaufketten von Interesse. Beispiele und Gründe für das gelegentliche Versagen der Chebyshev-Grübler-Kutzbach-Formel werden diskutiert. Die vom Autor entwickelte Methode funktioniert auch in diesen Ausnahmefällen; der Freiheitsgrad ergibt sich dabei aus dem Rang einer gewissen „Jacobimatrix" J, die aus kennzeichnenden Vektoren der einzelnen Kettenglieder gebildet wird.

Die Anwendung dieses eleganten Prinzips wird an zahlreichen konkreten Beispielen der Ingenieurpraxis erörtert. Auch der bekannte Bennettsche Zwanglaufmechanismus fällt darunter, für den die Chebyshev-Grübler-Kutzbach-Formel den unbrauchbaren Freiheitsgrad -2 statt 1 liefert. Auch für mehrfach geschlossene kinematische Ketten läßt sich der Freiheitsgrad mit einer modifizierten Jacobimatrix bestimmen. Weiter wird die Untersuchung kinematischer Zwangsbedingungen angesprochen. Das vor allem durch die Fülle von Anwendungen beeindruckende Buch schließt mit zwei Abschnitten über Analyse und Synthese kinematischer Ketten, wobei im letzten Fall verschiedene Typen von Bedingungen diskutiert werden.

Der Leser bemerkt die große technische Erfahrung, aus der das Buch entstanden ist; darin liegt wohl auch seine eigentliche Bedeutung. Sehr angenehm ist, daß zu Beginn jedes

Abschnitts das nachfolgend behandelte Thema klar umrissen wird. Leider wird auf Figuren ganz verzichtet, die das Wesentliche oft mit einem Blick zeigen könnten.

Gewisse Schwächen finden sich zumindest für mathematisch interessierte Leser im theoretischen Teil. Aus der Abstandstreue (1.3.2) folgt nicht notwendig eine eigentlich orthogonale Abbildungsmatrix S. 14–15, denn das Vektorprodukt (2.2.12) ist nicht spiegelungsinvariant und führt deshalb nicht auf (2.2.13). Die Herleitung einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren S. 21–22 gilt nur für einfache Eigenwerte. Orthogonale Tensoren S. 23 bedeuten nur dann Spiegelung an einer Hyperebene, wenn der Eigenwert 1 die Vielfachheit $n-1$ hat. Für $n>3$ ist eine Drehung S. 22 nur dann Produkt der Spiegelungen an zwei Hyperebenen, wenn ein $(n-2)$-dimensionaler Fixpunktraum vorhanden ist wie bei $n=2$ und $n=3$. Die daraus gefolgerte Parameterzahl $2(n-1)$ für orthogonale (n, n)-Matrizen S. 23 ist daher hinfällig. Der für $n=3$ vom Autor selbst bemerkte, aber nicht geklärte Trugschluß würde bei geometrischem Denken sofort gelöst, denn die beiden Spiegelungsebenen müssen den halben Drehwinkel einschließen, was den vierten Parameter bindet. Auch sonst besteht der Eindruck, daß der Formalismus stark dominiert, wo einfache geometrische Überlegungen oft rascher und einsichtiger zum Ziel führen würden.

Stuttgart H. Schaal

Tung Chang (Tong Zhang), Ling Hsiao (Ling Xiao), The Riemann Problem and Interaction of Waves in Gasdynamics (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 41), New York: Longman Scientific and Technical 1988, 280 pp., £ 37.50

Numerische Lösungen der Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik benutzten oft Elemente der Lösung für das Riemann-Problem. In vielen Fällen werden mehrdimensionale Probleme in entsprechende eindimensionale Formulierungen zerlegt, die dann mit approximierten Riemann-Lösern gelöst werden. Obwohl diese Lösungen bislang recht erfolgreich waren, kann die zerlegte Näherung auf ernstzunehmende Genauigkeitsprobleme stoßen, wenn das Netz nicht passend angelegt werden kann. Will man diese und andere Schwierigkeiten vermeiden, die mit der Zerlegung mehrdimensionaler Probleme zusammenhängen, muß für zukünftige Arbeiten auch an die Einbeziehung mehrdimensionaler Riemann-Löser in numerische Lösungen der Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik gedacht werden.

Aus dieser Sicht kommt das Buch „The Riemann Problem and Interaction of Waves in Gasdynamics“ gerade zum richtigen Zeitpunkt: Das Buch deckt die Grundlagen des Problems ab und gibt eine gute detaillierte Einführung. In vier Kapitel gegliedert werden auf 240 Seiten in klarer und verständlicher Weise die Einzelheiten der Riemann-Problematik beschrieben: Das erste Kapitel beschreibt das Phänomen der Diskontinuität im Zusammenhang mit Lösungen der Erhaltungsgleichungen. Das zweite Kapitel beschreibt die eindimensionale isotherme Strömung. Neben einfachen Wechselwirkungsproblemen wird auch Glimms Lösung beschrieben. Im dritten Kapitel wird die eindimensionale adiabate Strömung beschrieben. Von besonderem Interesse sind die am Schluß des Kapitels diskutierten Zulässigkeitskriterien für die Entropie. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit zweidimensionalen Strömungen. Zuerst werden einige grundsätzliche Konzepte besprochen, dann wird ein Riemann-Löser für eine skalare Erhaltungsgleichung diskutiert. Schließlich wird das Aufeinandertreffen zweier Stöße und die Beugung eines ebenen Stoßes an einer Ecke beschrieben.

Das Buch ist klar und verständlich geschrieben. Es gibt eine anschauliche Einführung in die Problematik und ist nach meiner Auffassung in Form und Anlage in gleicher Weise für Physiker, Mathematiker und Ingenieure geeignet. Es bringt viele Einzelheiten und ist ausreichend in den Literaturangaben. Mit seiner gelungenen Darstellung sollte das Buch rasch in Forschung und Studium Aufnahme finden.

Aachen E. Krause

Székely, G. J., Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics, Dordrecht – Boston – Lancaster – Tokyo: Reidel Publishing Co. 1986, 250 S., £ 41.50

Dies Buch ist mit

Mosteller, F., Fifty challenging problems in probability, Reading/Mass.: Addison-Wesley 1965
Davis, M., The art of decision making, New Nork: Springer 1986

in eine Linie zu stellen und unter diesen dreien das gewichtigste. Der Autor bekennt sich als Schüler von Alfred Rényi (1921–1970) und kann damit aus einer mathematischen Tradition schöpfen, die seit jeher dem Beispiel, der Einzel-Aufgabe, dem Aperçu, und damit und eben auch dem zugespitzten Paradoxon besondere Zuwendung gewidmet hat.

Das Buch behandelt in 4 Kapiteln 46 Paradoxa aus dem Umkreis der Stochastik und schließt mit einem Kurzkapitel 5 „Paradoxology". Von den 46 Nummern sind einige in viele Unter-Nummern gegliedert – vielleicht um doch für 3 der Kapitel auf je 13 Nummern zu kommen, andererseits natürlich, um das System der Darbietung nicht zu sehr auszuwalzen: jedes Paradoxon wird in Unterabschnitten

a The history of the paradox   b The paradox
c The explanation of the paradox   d Remarks

entfaltet. Am Ende der meisten Nummern findet man noch

e References

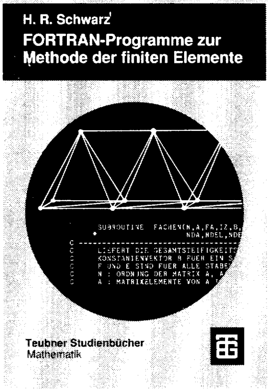
Nr. 1 ist das 3-Würfel-Paradoxon, das man meist mit Galilei in Verbindung bringt. Jeder Stochastik-Kundige weiß, wie man es aufzulösen hat: man färbt die 3 Würfel verschieden. Das Paradox kam also dadurch zustande, daß man nicht genug hingeguckt hatte: eine naheliegende Erwartung wurde enttäuscht. – Fast alle Paradoxa aus diesem Buch sind von dieser Art, und alle historisch berühmten werden behandelt, mit historischen Informationen, die weit über das Übliche hinausgehen. Es werden aber auch neuere Ergebnisse der Stochastik als Paradoxa mit aufgeführt, die einfach nur als merkwürdige Theoreme zu bezeichnen wären, so z. B. „Kesten's Paradoxon (1970)": Im Falle nichtexistierender Erwartung tritt bei unabhängigen identisch verteilten reellen Zufallsvariablen jede abgeschlossene $\pm\infty$ enthaltende Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ als Limesmenge der arithmetischen Mittel auf (S. 218). Natürlich empfiehlt es sich stets, die zitierte Originalliteratur zu konsultieren.

So gerät das Buch zu einer Fundgruppe nicht nur altbekannter Paradoxa der Stochastik, sondern auch neuerer Theoreme, die aufgrund ihrer witzigen Aussage wert sind, von jedem Stochastik-Beflissenen gekannt zu werden. Diesem weiten Leserkreis möchte ich dies Buch warm ans Herz legen.

Erlangen K. Jacobs

Neuerscheinung

Schwarz
FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente



Die vorliegende Programmsammlung ergänzt das vom gleichen Autor verfaßte Lehrbuch »Methode der finiten Elemente« mit dem Ziel, mit den wiedergegebenen Unterprogrammen und einer Auswahl von Hauptprogrammen insbesondere den Studierenden aber auch bereits in der Praxis tätigen Interessenten ein brauchbares und anregendes Werkzeug anzubieten, konkrete Aufgabenstellungen mit dem Computer zu lösen. Auf diese Weise sollen einerseits Programmiertechniken dargestellt werden, andererseits sollen Einblicke in die Arbeitsweise der Lösungsverfahren ermöglicht werden und schließlich soll mit dem Angebot an Programmen die Programmierung ähnlicher Aufgaben angeregt und erleichert werden.

Im Vergleich zu den vorhergehenden Auflagen wurden Datenstrukturen und verschiedene Unterprogramme zur Lösung von linearen Gleichungen und Eigenwertaufgaben im Hinblick auf eine allfällige Vektorisierung geändert, um auf diese Weise den neueren Entwicklungen auf diesem Gebiet Rechnung zu tragen. Die publizierten Programme sind für den Einsatz auf einem Personal Computer konzipiert.

Aus dem Inhalt:

Zielsetzung und Organisation der Programme – Berechnung der Elementmatrizen: Stabelement, Balkenelement, Elemente für elliptische Probleme, isoparametrische Elemente, Scheibenelemente, Plattenelemente – Kompilationsprozeß, statische Probleme und Schwingungsaufgaben, verschiedene Speicherungsarten – Direkte und iterative Lösung der linearen Gleichungssysteme, Vorkonditionierungsmethoden – Behandlung der Eigenwertaufgaben unter Einschluß des Lanczos-Algorithmus – 14 Hauptprogramme mit Testbeispielen.

Von Prof. Dr.
Hans-Rudolf Schwarz
Universität Zürich

3., neubearbeitete und erweiterte Auflage.
1991. 224 Seiten mit 15 Bildern
13,7 x 20,5 cm.
Kart. DM 27,80.
ISBN 3-519-22064-4

IBM-PC, MS-DOS
5¼" ISBN 3-519-09333-2
DM 98,–
3½" ISBN 3-519-09334-0
DM 98,–

(Teubner Studienbücher)

Preisänderung vorbehalten

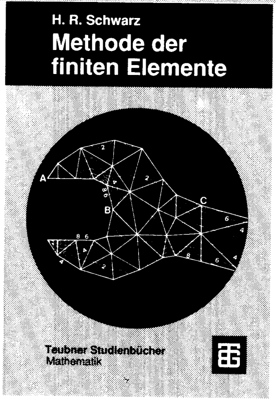
B. G. Teubner Stuttgart

Neuerscheinung

Schwarz

Methode der finiten Elemente

Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis



In dem einführenden Lehrbuch werden die Grundprinzipien der Methode der finiten Elemente für ein- und zweidimensionale Probleme ausführlich dargestellt mit dem Ziel, einen möglichst repräsentativen Querschnitt von praktischen Anwendungen zu erfassen. Betrachtet werden einerseits elliptische Randwertaufgaben, instationäre Wärmeleitungsprobleme und Schwingungsaufgaben und andererseits aus dem Gebiet der Elastomechanik Stäbe, Balken, Scheiben und Platten. Auf die effiziente Berechnung der Elementbeiträge folgt eine Beschreibung des Kompilationsprozesses, verbunden mit der optimalen Numerierung der Variablen. Zur Lösung der linearen Gleichungssysteme und der Eigenwertaufgaben werden praktische Methoden beschrieben. Dabei werden Gesichtspunkte einer möglichen Vektorisierung der Verfahren berücksichtigt und die zweckmäßigen Datenstrukturen zur Speicherung der Matrizen behandelt. Eine größere Zahl von praxisbezogenen Beispielen mit numerischen und grafischen Ergebnissen illustriert die Arbeitsweise der verschiedenen Verfahren.

Aus dem Inhalt:

Mathematische Grundlagen, Extremalprinzipien, Methode von Galerkin – Elemente und Berechnung der Elementmatrizen, Formfunktionen, krummlinige Elemente – Kompilation der Gesamtmatrizen, optimale Numerierung der Variablen, Kondensationsprozess – Direkte und iterative Lösung der großen, schwachbesetzten Gleichungssysteme, Methode der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung – Behandlung der Eigenwertaufgaben, Vektoriteration, Bisektionsmethode, Verfahren von Lanczos, Rayleigh-Quotient-Minimierung – Repräsentative praxisbezogene Beispiele.

Von Prof. Dr.
Hans-Rudolf Schwarz
Universität Zürich

3., neubearbeitete Auflage. 1991. 435 Seiten mit 170 Bildern, 59 Tabellen und zahlreichen Beispielen.
Kart. DM 46,–
ISBN 3-519-22349-X

(Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Bd. 47 – Teubner Studienbücher)

Preisänderung vorbehalten

B. G. Teubner Stuttgart