93. Band Heft 3
ausgegeben am 6. 8. 1991

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1991

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 118,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 93, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

H. Lange: Projective Embeddings of Abelian Varieties
G. Wüstholz: Diophantische Geometrie: Effektivität und einige Probleme

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Memminger Str. 6, 8900 Augsburg
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
93 (1991) 107–126
AMS Subject Classification: 22 E 25, 22 E 30, 43 A 30, 43 A 35, 46 F 10

Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Gruppen. Ein distributionentheoretischer Zugang

R. Felix, Eichstätt

1 Einleitung

Die Darstellungstheorie von Lie-Gruppen unterscheidet sich wesentlich von der Darstellungstheorie abstrakter Gruppen. Die Darstellungstheorie endlicher Gruppen etwa, die sich natürlich nur mit endlichdimensionalen Darstellungen beschäftigt, ist eine rein algebraische Theorie; in der Darstellungstheorie von Lie-Gruppen dagegen, wo es hauptsächlich um unendlichdimensionale Darstellungen geht, stehen analytische und funktionalanalytische Methoden im Vordergrund.

In der Darstellungstheorie lokal-kompakter Gruppen gilt das Hauptinteresse den *unitären* Darstellungen, und zwar aus verschiedenen Gründen. Zum einen treten unitäre Darstellungen ganz natürlich in der Physik auf, etwa bei der Beschreibung der Kovarianz quantenmechanischer Systeme unter gewissen Symmetriegruppen. Zum anderen haben unitäre Darstellungen schöne Eigenschaften; z. B. sind unitäre Darstellungen vollständig reduzibel, so daß man sich beim Studium unitärer Darstellungen im wesentlichen auf das Studium irreduzibler Darstellungen beschränken kann. Und schließlich spielen die unitären Darstellungen eine wichtige Rolle bei dem Bestreben, die klassische kommutative Fourier-Analyse auf nichtkommutative Gruppen zu übertragen.

Das Kernproblem der kommutativen Fourier-Analyse lautet so: Gegeben sei eine Funktion f auf einer lokal-kompakten Abelschen Gruppe G; man bilde die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ als Funktion auf der Charaktergruppe $\hat{G}$ und gewinne f aus $\hat{f}$ zurück. Die Lösung dieses Problems wird gegeben durch das klassische *Plancherel-Theorem,* welches besagt, daß ein geeignet normiertes Haar-Maß auf $\hat{G}$ eine Umkehrformel liefert.

Die Behandlung einer derartigen Fragestellung für nichtkommutative Gruppen G führt in eine schwierige und äußerst komplexe Problematik. Ein möglicher und recht erfolgreicher Ansatz besteht darin, als duales Objekt $\hat{G}$ die Menge der Äquivalenzklassen unitärer irreduzibler Darstellungen zu wählen. (Im kommutativen Fall reduziert sich dann $\hat{G}$ gerade auf die Charaktergruppe.) Somit stellt sich die Aufgabe, die Menge $\hat{G}$ der Äquivalenzklassen unitärer irreduzibler Darstellungen zu parametrisieren und auf $\hat{G}$ ein *Plancherel-Maß* zu bestimmen, welches dann eine Umkehrformel liefert. Für eine große Klasse lokalkompakter Gruppen weiß man um Existenz und Eindeutigkeit des Plancherel-Maßes.

Von einer allgemeinen Bestimmung des Plancherel-Maßes ist man allerdings noch weit entfernt. In einigen Fällen jedoch ist diese Aufgabe weitgehend gelöst. Für kompakte Gruppen gibt das Peter-Weyl-Theorem die Antwort. Des weiteren gibt es befriedigende Antworten für halbeinfache und für nilpotente Lie-Gruppen. Die Lösung dieser Aufgabe für halbeinfache Lie-Gruppen ist – wie überhaupt die systematische Entwicklung der Darstellungstheorie halbeinfacher Lie-Gruppen – im wesentlichen das Werk Harish-Chandra's. (Siehe [33]; zur Lösung dieser Aufgabe in Spezialfällen siehe auch [28] und [32].) Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Gruppen wurde begonnen und weit vorangetrieben durch Dixmier ([12]–[17]). Im Jahre 1957 charakterisierte Dixmier „fast alle" irreduziblen Darstellungen einer nilpotenten Lie-Gruppe G und beschrieb das Plancherel-Maß ([13]). Später gab Pukanszky in [49] eine weiterführende Erläuterung und Berechnungsmöglichkeit des Plancherel-Maßes.

Eine universelle Parametrisierung von $\hat{G}$ gelang Dixmier jedoch noch nicht ganz. Diese wurde dann im Jahre 1962 durch Kirillov gefunden. In seiner berühmten Arbeit über „Unitäre Darstellungen nilpotenter Lie-Gruppen" ([37]) rief Kirillov die sogenannte „Methode der Bahnen" ins Leben; und zwar beschrieb er $\hat{G}$ durch ein sehr schönes geometrisches Objekt, nämlich durch den Bahnenraum der natürlichen Wirkung von G im Dualraum der Lie-Algebra von G. Diese spektakuläre Entdeckung Kirillov's hatte eine sehr breite Wirkung. In einer Fülle von Arbeiten haben sich viele Autoren mit Kirillov's Idee befaßt. (Siehe etwa Kongreßbericht [23].) Man hat die Methode der Bahnen nach und nach auf größere Klassen von Lie-Gruppen ausgedehnt. (Für Exponentialgruppen siehe [4]; für auflösbare Lie-Gruppen siehe [1] und [51]. Einen Überblick bietet [45].) Auch für andere Klassen von Lie-Gruppen wurde die Methode der Bahnen nutzbar gemacht. (Siehe z. B. [22], [36], [39], [52], [53]; ein Überblick findet sich in [56].) Für keine Klasse von Lie-Gruppen jedoch hat man derart ideale Verhältnisse wie für nilpotente Lie-Gruppen.

Im ersten Teil des vorliegenden Aufsatzes werde ich – dem Wege Kirillov's folgend – für nilpotente Lie-Gruppen die Parametrisierung von $\hat{G}$ und einige ihrer Eigenschaften vorstellen. Im zweiten Teil werde ich darstellen, wie man auch auf einem anderen, nämlich einem distributionentheoretischen Wege zu den wesentlichen Aussagen der Kirillov-Theorie gelangen kann.

2 Requisiten aus der Darstellungstheorie

Im folgenden sei G stets eine nilpotente einfach zusammenhängende Lie-Gruppe.[1]) G ist stets unimodular. Eine Untergruppe H von G werde immer als zusammenhängende Lie-Untergruppe vorausgesetzt. Dann ist H selbst eine

---

[1]) Die Voraussetzung des *einfachen* Zusammenhangs bedeutet keine Einschränkung. Für eine zusammenhängende Lie-Gruppe G ist nämlich der unitäre Dual $\hat{G}$ eine Teilmenge des unitären Duals der einfach zusammenhängenden Überlagerung von G.

nilpotente einfach zusammenhängende Lie-Gruppe, welche in G abgeschlossen ist.

Mit $\mathfrak{g}$ werde die Lie-Algebra von G bezeichnet. Die Exponentialabbildung

$$\mathrm{Exp}: \mathfrak{g} \to G$$

ist ein Diffeomorphismus, der das Lebesgue-Maß dX auf $\mathfrak{g}$ in das Haar-Maß da auf G überführt. Unter Berücksichtigung der Campbell-Hausdorff-Formel kann man demnach eine nilpotente einfach zusammenhängende Lie-Gruppe G als einen $\mathbb{R}^n$ ansehen, auf dem die Gruppenmultiplikation durch eine Polynomialabbildung gegeben ist.

Das einfachste Beispiel einer nichtkommutativen nilpotenten einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe ist die dreidimensionale *Heisenberg-Gruppe*, realisierbar als Gruppe aller reellen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: [x, y, z].$$

Die Gruppenmultiplikation ist gegeben durch die Polynomialgleichung

$$[x, y, z] \cdot [x', y', z'] = [x + x', y + y', z + z' + xy'].$$

Die Lie-Algebra der Heisenberg-Gruppe läßt sich realisieren als Menge aller reellen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \langle x, y, z \rangle.$$

Die Elemente $X := \langle 1,0,0 \rangle$, $Y := \langle 0,1,0 \rangle$ und $Z := \langle 0,0,1 \rangle$ bilden eine Basis der Lie-Algebra und genügen den Kommutationsrelationen

$$[X, Y] = Z, \qquad [X, Z] = [Y, Z] = 0.$$

Sei nun $\mathscr{H} \neq 0$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ und $\mathfrak{U}(\mathscr{H})$ die Gruppe aller unitären Operatoren in $\mathscr{H}$, versehen mit der starken Topologie. (Das ist die durch die Halbnormen $T \mapsto \|T\xi\|$, $\xi \in \mathscr{H}$, definierte Topologie.) Eine *(stetige) unitäre Darstellung* von G in $\mathscr{H}$ ist ein stetiger Homomorphismus

$$\pi : G \to \mathfrak{U}(\mathscr{H}).$$

Einer Darstellung π von G kann man eine Darstellung (ebenfalls π genannt) der involutiven Faltungsalgebra $L^1(G)$ assoziieren durch die Vorschrift

$$\pi(f) := \int f(a)\pi(a)da, \qquad f \in L^1(G).$$

Dabei sind für $f, g \in L^1(G)$ die Faltung $f * g$ und die Involution f^* definiert durch

$$f * g(a) := \int f(b)g(b^{-1}a)db \quad \text{und} \quad f^*(a) := \overline{f(a^{-1})}.$$

Die unitären Darstellungen von G und die nichtausgearteten Darstellungen von $L^1(G)$ entsprechen sich in eineindeutiger Weise.

Aus einer unitären Darstellung π von G läßt sich durch Differentiation eine Darstellung $d\pi$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gewinnen. Die Darstellungsoperatoren $d\pi(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, sind schiefsymmetrische Operatoren im Raum $\mathscr{H}^\infty$ aller Vektoren $\xi \in \mathscr{H}$, für die

$$a \mapsto \pi(a)\xi$$

eine C^∞-Abbildung auf G ist. $\mathscr{H}^\infty$ ist ein dichter Unterraum von $\mathscr{H}$. Die Darstellung $d\pi$ von $\mathfrak{g}$ in $\mathscr{H}^\infty$ läßt sich erweitern zu einer Darstellung $\overset{\infty}{\pi}$ der universellen Einhüllenden $U(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$.

Ist $(\pi_i)_{i \in I}$ eine Familie von Darstellungen in den Hilbert-Räumen $\mathscr{H}_i$, so definiert man in natürlicher Weise die direkte Summe $\oplus_{i \in I} \pi_i$ als Darstellung in $\oplus_{i \in I} \mathscr{H}_i$. Ist $\pi_i = \pi$ für alle $i \in I$, so heißt $\oplus_{i \in I} \pi_i$ ein *Vielfaches* von π; für $\oplus_{i \in I} \pi_i$ schreibt man dann auch $m\pi$ mit $m := \operatorname{card}(I)$.

Der Begriff „direkte Summe" läßt sich erweitern zum Begriff *„stetige direkte Summe"* (oder *„direktes Integral"*); und zwar geht man von einem Maßraum (I, μ) aus, konstruiert einen Hilbert-Raum $\int_I^\oplus \mathscr{H}_i d\mu(i)$ und bildet das „direkte Integral" $\int_I^\oplus \pi_i d\mu(i)$als Darstellung in $\int_I^\oplus \mathscr{H}_i d\mu(i)$. (Eine Einführung in die Theorie der direkten Integrale findet sich z. B. in [18] und [19].)

π ist *irreduzibel*, wenn π nicht als direkte Summe zweier Darstellungen geschrieben werden kann; π ist *faktoriell*, wenn π äquivalent ist zu einem Vielfachen einer irreduziblen Darstellung. Dabei heißen zwei Darstellungen π_1 und π_2 in $\mathscr{H}_1$ bzw. $\mathscr{H}_2$ *äquivalent* (man schreibt: $\pi_1 \cong \pi_2$), wenn ein Isomorphismus $U: \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ existiert, welcher $\pi_1(a)$ in $\pi_2(a)$ transformiert für alle $a \in G$; π_1 und π_2 sind *quasiäquivalent* (man schreibt: $\pi_1 \approx \pi_2$), wenn π_1 und π_2 „bis auf Vielfachheiten" äquivalent sind.

Ein wichtiges Problem der Darstellungstheorie besteht darin, eine gegebene Darstellung π in irreduzible Darstellungen zu zerlegen, also π als direkte Summe – oder allgemeiner – als direktes Integral irreduzibler Darstellungen zu schreiben. Man führt auf der Menge $\hat{G}$ der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen eine σ-Algebra ein. Nun hat man ein „Zerlegungsmaß" μ auf $\hat{G}$ und Vielfachheiten m_τ, $\tau \in \hat{G}$, zu bestimmen, so daß $\pi \cong \int_{\hat{G}}^\oplus m_\tau \tau d\mu(\tau)$ gilt.

Es werden jetzt einige Methoden vorgestellt, wie man zu unitären Darstellungen gelangen kann:

a) Darstellung definiert durch eine Gruppenwirkung

Die Gruppe G operiere stetig und maßerhaltend auf einem lokalkompakten Maßraum X; d. h. es gebe einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\sigma: a \mapsto \sigma_a$ von G in die Gruppe der maßerhaltenden Homöomorphismen von X nach X. Dann kann man auf natürliche Weise eine unitäre Darstellung U^σ von G in $L^2(X)$ definieren durch

$$U^\sigma(a)f(x) := f(\sigma_{a^{-1}}(x)), \qquad a \in G, x \in X.$$

Ist speziell $X = G$ und $\sigma_a(x) = ax$, so heißt U^σ die *(links-)reguläre Darstellung.*

b) Die induzierte Darstellung

Sei H eine Untergruppe von G und ϱ eine unitäre Darstellung von H in einem separablen Hilbert-Raum $\mathscr{K}$. Mit $d\dot{a}$ werde das G-invariante Maß auf dem Nebenklassenraum G/H bezeichnet. Man betrachtet nun den Raum $\mathscr{H}$ aller meßbaren Funktionen $f\colon G \to \mathscr{K}$ mit

$$f(ab) = \varrho(b)^{-1}f(a), \quad a \in G, b \in H, \quad \text{und} \quad \int_{G/H} \|f(a)\|^2 d\dot{a} < \infty.$$

Identifiziert man wie üblich Funktionen, die fast überall übereinstimmen, so ist $\mathscr{H}$ ein Hilbert-Raum, und man kann eine Darstellung π von G in $\mathscr{H}$ definieren durch

$$\pi(a)f(x) := f(a^{-1}x).$$

Diese Darstellung heißt *induzierte Darstellung;* man schreibt $\pi =: \operatorname{ind}_H^G \varrho$. Im Spezialfall $H = \{e\}$ und $\mathscr{K} = \mathbb{C}$ ist π gerade die reguläre Darstellung.

c) Die Gelfand-Segal-Konstruktion

Eine Distribution T auf G heißt *positiv definit*, wenn $T(\varphi^* * \varphi) \geqslant 0$ gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(G)$. Zu einer positiv definiten Distribution T kann man nun folgendermaßen eine unitäre Darstellung $U^{(T)}$ konstruieren: Auf $C_c^\infty(G)$ wird durch

$$(\varphi, \psi) \mapsto T(\psi^* * \varphi)$$

eine positiv definite Hermitesche Form definiert. Ist $\mathscr{R}$ das Radikal dieser Form, so ist der Quotientenraum $C_c^\infty(G)/\mathscr{R}$ ein Prä-Hilbert-Raum, dessen Vervollständigung mit $\mathscr{H}^{(T)}$ bezeichnet werde. Für $a \in G$ liefert der Operator $U^{(T)}(a)$, definiert durch

$$U^{(T)}(a)\varphi(x) := \varphi(a^{-1}x), \qquad \varphi \in C_c^\infty(G),$$

durch Übergang zum Quotienten einen Operator in $C_c^\infty(G)/\mathscr{R}$, der sich zu einem unitären Operator in $\mathscr{H}^{(T)}$ fortsetzen läßt. Die Fortsetzung werde ebenfalls mit $U^{(T)}(a)$ bezeichnet. Dann wird durch $U^{(T)}\colon a \mapsto U^{(T)}(a)$ eine Darstellung von G in $\mathscr{H}^{(T)}$ definiert.

Ist insbesondere $T = \delta$ das Dirac-Maß auf G, dann ist $\mathscr{H}^{(T)} = L^2(G)$ und $U^{(T)}$ die reguläre Darstellung.

Von Blattner ([6]) wurde eine interessante Beziehung zwischen der Induktion von Darstellungen und den durch die Gelfand-Segal-Konstruktion gewonnenen Darstellungen gefunden. (Blattner hat sein Resultat zwar für lokalkompakte Gruppen und positiv definite Maße formuliert; im Falle einer Lie-Gruppe läßt sich dieses Resultat jedoch ebenso gut für positiv definite Distributionen beweisen.) In einer auf unsere Bedürfnisse zugeschnittenen Form lautet das Resultat von Blattner folgendermaßen:

Sei H eine Untergruppe von G, T eine positiv definite Distribution auf H, $U^{(T)}$ die aus T mittels der Gelfand-Segal-Konstruktion gewonnene Darstellung von H und S die triviale Fortsetzung von T nach G. (Die triviale Fortsetzung S ist definiert durch $\langle S, \varphi \rangle := \langle T, \varphi|_H \rangle$, $\varphi \in C_c^\infty(G)$.) Dann ist S positiv definit auf G, und die aus S mittels der Gelfand-Segal-Konstruktion gewonnene Darstellung $U^{(S)}$ ist äquivalent zur induzierten Darstellung $\mathrm{ind}_H^G\, U^{(T)}$.

3 Die Kirillov-Korrespondenz

Der Ansatzpunkt für die Kirillov-Theorie ist die Beobachtung, daß jede irreduzible Darstellung π einer nilpotenten einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe G *monomial* ist; d. h. π ist induziert durch eine eindimensionale Darstellung einer Untergruppe. Dixmier bewies dieses Resultat in [12] unter Verwendung von Mackey's Theorie über induzierte Darstellungen ([41], [42]). (In Kirillov's Buch ([38], S. 197) findet sich ein Beweis dieses Resultates unter Verwendung der Ergebnisse von [43].)

Kirillov gab in seiner Arbeit [37] einen Beweis mit etwas anderen Mitteln; er machte die Beobachtung, daß G stets die dreidimensionale Heisenberg-Gruppe als Untergruppe enthält (außer im trivialen kommutativen Fall), und verwendete dann das Stone-von Neumann-Theorem. Mittels dieses Theorems lassen sich nämlich die irreduziblen Darstellungen der Heisenberg-Gruppe bestimmen und als monomial erkennen. Dies soll nun kurz beschrieben werden:

Es ist klar, daß die selbstadjungierten Operatoren $Pf(t) := \frac{\hbar}{i} f'(t)$ und $Qf(t) := tf(t)$ in $L^2(\mathbb{R})$ die Heisenberg-Relation

$$PQ - QP = \frac{\hbar}{i}\mathbb{1}$$

erfüllen. (Dabei ist $h = 2\pi\hbar$ die Planck-Konstante.) Das Stone-von Neumann-Theorem besagt jetzt, daß die Operatoren P und Q im wesentlichen die einzigen selbstadjungierten Operatoren sind, die der Heisenberg-Relation genügen. Genauer: Bilden zwei selbstadjungierte Operatoren P' und Q' in einem Hilbert-Raum $\mathscr{H}$ ein irreduzibles System und genügen sie der Heisenberg-Relation, so sind sie unitär äquivalent zu P und Q ([46]).

Ist π eine irreduzible Darstellung der Heisenberg-Gruppe, dann ist $d\pi(Z)$ mit allen Darstellungsoperatoren vertauschbar. Wegen der Irreduzibilität von π muß also

$$d\pi(Z) = i\lambda\mathbb{1}$$

gelten. Die Kommutationsrelation $[X, Y] = Z$ liefert

$$d\pi(X)d\pi(Y) - d\pi(Y)d\pi(X) = i\lambda\mathbb{1}.$$

Im Falle $\lambda = 0$ ist π offensichtlich eindimensional. Für $\lambda \neq 0$ ergibt sich mittels des Stone-von Neumann-Theorems, daß bis auf unitäre Äquivalenz

$$\frac{\hbar}{i}\, d\pi(X) = P \quad \text{und} \quad \frac{1}{i\lambda}\, d\pi(Y) = Q$$

gilt. Demnach kann π als Darstellung in $L^2(\mathbb{R})$ realisiert werden, gegeben durch

$$\pi([x, y, z])f(t) = e^{i\lambda(yt+z)}f(t + x).$$

Man kann jetzt leicht verifizieren, daß diese Darstellung äquivalent ist zu der durch den Charakter

$$\chi([0, y, z]) := e^{i\lambda z}$$

der Untergruppe $\{[0, y, z] | y, z \in \mathbb{R}\}$ induzierten Darstellung.

Die Monomialität der irreduziblen Darstellungen einer beliebigen nilpotenten Lie-Gruppe G erhielt Kirillov nun unter Verwendung des Prinzips der vollständigen Induktion nach der Dimension von G.

Somit ist also jedes Element $\pi \in \hat{G}$ von der Form

$$\pi = \operatorname{ind}_H^G \chi,$$

wobei H eine Untergruppe von G und χ ein Charakter von H ist. Das Differential $d\chi$ von χ ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus der Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ von H nach $\mathbb{R}$; d. h. es gilt

$$d\chi([X, Y]) = 0$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{h}$. Man kann $d\chi$ natürlich zu einer Linearform f der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G fortsetzen; es gilt dann die Beziehung

$$f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0.$$

Man sagt in diesem Fall, die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ ist der Linearform $f \in \mathfrak{g}^*$ *untergeordnet*. Anders ausgedrückt: $\mathfrak{h}$ ist ein total isotroper Unterraum für die schiefsymmetrische Bilinearform $B_f(X, Y) := f([X, Y])$ auf $\mathfrak{g}$. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h}$, die zugleich ein *maximaler* total isotroper Unterraum für B_f ist, heißt *Polarisation* im Punkte $f \in \mathfrak{g}^*$.

Ist umgekehrt eine Linearform $f \in \mathfrak{g}^*$ gegeben und ist $\mathfrak{h}$ eine dieser Linearform untergeordnete Unteralgebra, dann ist die Einschränkung $f|_{\mathfrak{h}}$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus von $\mathfrak{h}$ nach $\mathbb{R}$, den man zu einem Charakter χ_f der zu $\mathfrak{h}$ gehörigen Untergruppe H von G integrieren kann. Man bildet die unitäre Darstellung

$$\pi_{f,\mathfrak{h}} := \operatorname{ind}_H^G \chi_f.$$

Nun machte Kirillov die folgenden entscheidenden Beobachtungen:

a) $\pi_{f,\mathfrak{h}}$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\mathfrak{h}$ unter allen untergeordneten Unteralgebren maximale Dimension hat. ($\mathfrak{h}$ ist dann eine Polarisation im Punkte f. Vgl. hierzu auch [1] oder [5], Chap. IV.)

b) Hat $\mathfrak{h}$ maximale Dimension, so hängt $\pi_{f,\mathfrak{h}}$ (bis auf Äquivalenz) nicht von der speziellen Wahl von $\mathfrak{h}$ ab. Man kann also schreiben $\pi_{f,\mathfrak{h}} =: \pi_f$.

Man erhält damit eine surjektive Abbildung (*Kirillov-Abbildung*)

$$k\colon \mathfrak{g}^* \to \hat{G}, f \mapsto \pi_f.$$

c) Die Fasern von k sind genau die Bahnen unter der natürlichen Wirkung der Gruppe G in $\mathfrak{g}^*$. (Die Gruppe G wirkt auf $\mathfrak{g}$ vermöge der adjungierten Darstellung Ad und folglich auf $\mathfrak{g}^*$ vermöge der zu Ad kontragredienten Darstellung Ad^*.) Diese Bahnen heißen auch *koadjungierte Bahnen*. Somit ergibt sich eine Bijektion

$$\tilde{k}\colon \mathfrak{g}^*/G \to \hat{G},\ \mathcal{O} \mapsto \pi_{\mathcal{O}} := \pi_f \quad \text{mit} \quad \mathcal{O} = \mathcal{O}_f = \text{Bahn von } f.$$

Man erhält also eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den irreduziblen Darstellungen und den koadjungierten Bahnen in $\mathfrak{g}^*$ (*Kirillov-Korrespondenz*) und damit eine Beschreibung von $\hat{G}$ durch ein geometrisches Gebilde.

Im Fall der dreidimensionalen Heisenberg-Gruppe lassen sich die koadjungierten Bahnen sehr übersichtlich darstellen:

Sei (x^*, y^*, z^*) die Koordinatendarstellung der Punkte in $\mathfrak{g}^*$. Es gibt zwei Typen von Bahnen: Zum einen die Punkte der x^*, y^*-Ebene, die unter der Kirillov-Korrespondenz den eindimensionalen Darstellungen von G entsprechen; zum anderen die zur x^*, y^*-Ebene parallelen Ebenen, welche von der x^*, y^*-Ebene selbst verschieden sind (Fig. 1).

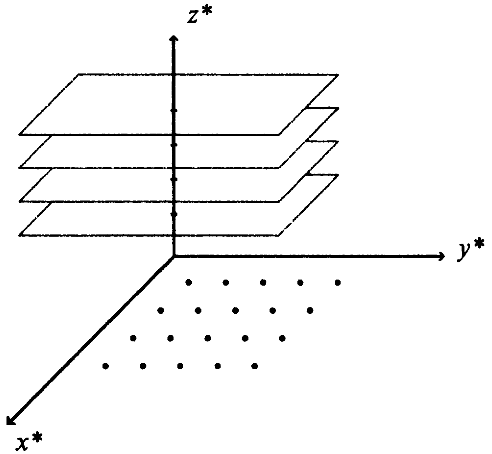


Fig. 1

Im allgemeinen sind die koadjungierten Bahnen nicht affin, wie das Beispiel der vierdimensionalen Gruppe zeigt, deren Lie-Algebra mit der Basis e_1, e_2, e_3, e_4 definiert ist durch die nichttrivialen Lie-Produkte $[e_4, e_3] = e_2$, $[e_4, e_2] = e_1$. Hier gibt es drei Typen von Bahnen, einpunktige Bahnen, zweidimensionale affine Bahnen und zweidimensionale parabolische Bahnen. Sei (x^*, y^*, z^*, w^*) die Koordinatendarstellung der Punkte in $\mathfrak{g}^*$. Unterdrückt man die x^*-Komponente, so kann man sich die Bahnen folgendermaßen veranschaulichen:

Erstens sind die Punkte der y^*-Achse (einelementige) Bahnen, zweitens sind die Parallelen zu y^*-Achse in der y^*, z^*-Ebene (affine) Bahnen. Die Bahnen vom dritten Typ bestehen aus Parabeln, welche in den zur y^*, z^*-Ebene parallelen Ebenen liegen; diese Parabeln haben eine umso „engere Öffnung", je näher die betreffende Ebene bei der y^*, z^*-Ebene liegt (Fig. 2).

Eine koadjungierte Bahn $\mathcal{O} = \mathcal{O}_f$ ist diffeomorph zum homogenen Raum G/G_f, wobei G_f die Fixgruppe von f unter der Wirkung von G in $\mathfrak{g}^*$ ist. Aus der Nilpotenz von G folgt, daß G_f nichttrivial und zusammenhängend ist. Also ist $\mathcal{O}$

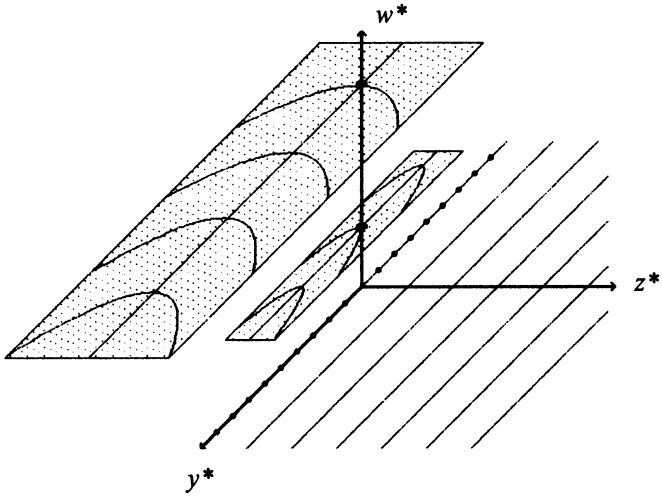


Fig. 2

diffeomorph zu $\mathbb{R}^k$ für ein $k<n$. ($k = \dim \mathcal{O}$ ist stets gerade, weil die zu G_f gehörige Lie-Unteralgebra $\mathfrak{g}_f$ das Radikal der schiefsymmetrischen Bilinearform B_f ist.)

Man kann $\mathcal{O}$ durch eine Polynomialabbildung parametrisieren ([48], Part. II, Chap. I, § 3). Außerdem existiert auf $\mathcal{O}$ ein (bis auf einen positiven Skalar eindeutiges) G-invariantes Maß, da G und G_f unimodular sind. Eine explizite Berechnung und kanonische Normierung eines solchen Maßes wurde von Pukanszky mit Hilfe der soeben erwähnten polynomialen Parametrisierung von $\mathcal{O}$ gegeben ([48], Part. II, Chap. I, § 4). Dieses Maß heißt *Projektionsmaß* und wird mit $\lambda_{\mathcal{O}}$ bezeichnet. Man kann ein G-invariantes Maß auch gewinnen, indem man $\mathcal{O}$ mittels B_f zu einer symplektischen Mannigfaltigkeit macht; das auf diese Weise gewonnene Maß heißt *Kostant-Maß*. (Siehe dazu etwa [5], Chap. II oder [49].) Aus der polynomialen Parametrisierung von $\mathcal{O}$ folgt ferner, daß $\mathcal{O}$ stets abgeschlossen ist in $\mathfrak{g}^*$. Folglich kann $\lambda_{\mathcal{O}}$ auch als Maß auf $\mathfrak{g}^*$ aufgefaßt werden; als Maß auf $\mathfrak{g}^*$ ist $\lambda_{\mathcal{O}}$ temperiert.

Die Kirillov-Korrespondenz erlaubt interessante geometrische Interpretationen darstellungstheoretischer Operationen:

Sei H eine Untergruppe von G und $\mathfrak{h}$ die zugehörige Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Man betrachtet die kanonische Projektion

$$p\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*,$$

die jeder Linearform auf $\mathfrak{g}$ die Einschränkung derselben auf $\mathfrak{h}$ zuordnet. Ist nun $\pi \in \hat{G}$ eine irreduzible Darstellung und $\mathcal{O}_\pi$ die zugehörige koadjungierte Bahn in $\mathfrak{g}^*$, so wird die Einschränkung $\pi|_H$ beschrieben durch die Projektion $p(\mathcal{O}_\pi)$ der Bahn $\mathcal{O}_\pi$ auf $\mathfrak{h}^*$; d.h. $\pi|_H$ zerfällt in ein direktes Integral über der Menge derjenigen irreduziblen Darstellungen von H, deren zugehörige H-Bahnen in $p(\mathcal{O}_\pi) \subset \mathfrak{h}^*$ liegen (Fig. 3).

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich die Induktion $\mathrm{ind}_H^G \varrho$ einer Darstellung $\varrho \in \hat{H}$ durch das Urbild $p^{-1}(\mathcal{O}_\varrho)$ der zu ϱ gehörigen H-Bahn $\mathcal{O}_\varrho$ beschreiben.

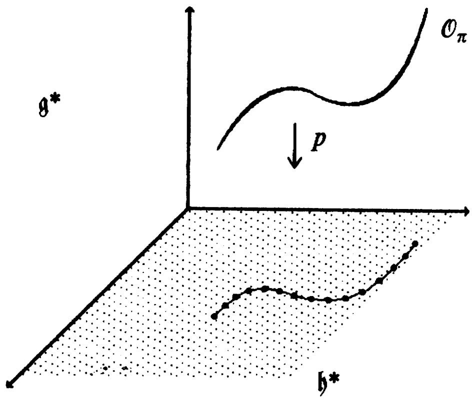


Fig. 3

Zur Präzisierung dieses Resultates hat man für $\pi|_H$ bzw. für $\mathrm{ind}_H^G \varrho$ ein Zerlegungsmaß anzugeben und die zugehörigen Vielfachheiten zu bestimmen. Mit diesem Problem haben sich in den vergangenen Jahren viele Autoren beschäftigt. (Siehe z.B. [3], [7], [8], [9], [10], [25], [27], [31], [40].)

Ein weiterer interessanter Punkt der Kirillov-Theorie ist die Beschreibung des infinitesimalen Charakters einer irreduziblen Darstellung $\pi = \pi_f$:

Ist $Z(\mathfrak{g})$ das Zentrum der universellen Einhüllenden $U(\mathfrak{g})$ und ist $\overset{\infty}{\pi}$ die zu π gehörige Darstellung von $U(\mathfrak{g})$, so ist für $u \in Z(\mathfrak{g})$ der Operator $\overset{\infty}{\pi}(u)$ mit allen Operatoren der Darstellung π vertauschbar. Wegen der Irreduzibilität von π ist demnach $\overset{\infty}{\pi}(u)$ ein skalares Vielfaches des Einsoperators, also

$$\overset{\infty}{\pi}(u) = \chi(u)\mathbb{1}.$$

Die Abbildung

$$\chi\colon Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$$

heißt der *infinitesimale Charakter* von π.

Sei $S(\mathfrak{g})$ die symmetrische Algebra von $\mathfrak{g}$. Bekanntlich läßt sich $S(\mathfrak{g})$ realisieren als Algebra der Polynome auf $\mathfrak{g}^*$. Die Symmetrisierungsabbildung

$$\omega\colon S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$$

führt dann den Raum $I(\mathfrak{g}) \subset S(\mathfrak{g})$ der G-invarianten Polynome in $Z(\mathfrak{g})$ über. (Siehe etwa [34].) Die Abbildung

$$\omega\colon I(\mathfrak{g}) \to Z(\mathfrak{g})$$

ist sogar ein Algebrenisomorphismus. (Siehe [11]; für allgemeine Lie-Gruppen vgl. [20], [21].) Im Kontext der Kirillov-Theorie läßt sich nun der infinitesimale Charakter χ von $\pi = \pi_f$, als Charakter von $I(\mathfrak{g})$ verstanden, beschreiben durch

$$\chi\colon I(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C},\ P \mapsto P(if),$$

also als Auswertung des Polynoms $P \in I(\mathfrak{g}) \cong Z(\mathfrak{g})$. (Hier ist $i = \sqrt{-1}$.)

Eines der wichtigsten Ergebnisse der Kirillov-Theorie ist die *Charakterformel*, eine Formel, welche die Berechnung des Charakters einer irreduziblen Darstellung π von G in Termen der zugehörigen Kirillov-Bahn $\mathcal{O}_\pi$ ermöglicht:

Zunächst muß man erklären, was unter dem Charakter einer unendlichdimensionalen Darstellung zu verstehen ist. Ist nämlich π eine Darstellung in einem unendlichdimensionalen Hilbert-Raum $\mathscr{H}$ mit der Basis (e_i), so macht der Ausdruck

$$\mathrm{Sp}\;\pi(a) := \sum \langle \pi(a)e_i, e_i \rangle$$

für $a \in G$ keinen Sinn, weil die Reihe im allgemeinen nicht konvergiert. Der Charakter von π kann also nicht einfach – wie im Falle kompakter Gruppen – als gewöhnliche Funktion auf G verstanden werden. Man kann aber trotzdem für $\pi \in \hat{G}$ einen Charakter definieren. Für $\varphi \in C_c^\infty(G)$ ist nämlich $\pi(\varphi)$ ein Spuroperator; d.h. die Reihe $\sum \langle \pi(\varphi)e_i, e_i \rangle$ konvergiert absolut. Überdies definiert die Abbildung

$$\tilde{\pi}\colon \varphi \mapsto \sum \langle \pi(\varphi)e_i, e_i \rangle =: \mathrm{Sp}\;\pi(\varphi)$$

eine temperierte Distribution of G. Dieses wichtige Resultat wurde im Jahre 1959 von Dixmier bewiesen ([16]). Unabhängig von Dixmier gab auch Kirillov einen Beweis mit anderen Methoden. Die Distribution $\tilde{\pi}$ nennt man nun den *Charakter* von π.

Da die Exponentialabbildung Exp: $\mathfrak{g} \to G$ ein Diffeomorphismus ist, kann man den Charakter $\tilde{\pi}$ auch als Distribution auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ansehen. Nun besagt Kirillov's Charakterformel, daß der Charakter von $\pi = \pi_{\mathcal{O}}$, aufgefaßt als Distribution auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, gerade die Fourier-Transformierte eines (geeignet normierten) G-invarianten Maßes $m_{\mathcal{O}}$ auf $\mathcal{O}$ ist. Also

$$\tilde{\pi}(\varphi) = \mathrm{Sp}\;\pi(\varphi) = \int_{\mathcal{O}} \hat{\varphi}(f)\,dm_{\mathcal{O}}(f),$$

oder kürzer:

$$\tilde{\pi} = \hat{m}_{\mathcal{O}}.$$

(Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Fourier-Transformation $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ bzw. $m_{\mathcal{O}} \mapsto \hat{m}_{\mathcal{O}}$ hier im gewöhnlichen Euklidischen Sinne zu verstehen ist. Die Fourier-Transformation führt Schwartz-Funktionen auf $\mathfrak{g}$ in Schwartz-Funktionen auf $\mathfrak{g}^*$ über und – via Dualität – temperierte Distributionen auf $\mathfrak{g}^*$ in temperierte Distributionen auf $\mathfrak{g}$.)

Das Maß $m_{\mathcal{O}}$ heißt *kanonisches Maß*; der Proportionalitätsfaktor zwischen $m_{\mathcal{O}}$ und dem Kostant-Maß hängt nur von der Dimension von $\mathcal{O}$ ab ([49]).

Die *Plancherel-Formel* lautet

$$\varphi(e) = \int_{\hat{G}} \tilde{\pi}(\varphi)\,d\mu(\pi) \qquad (\varphi \in C_c^\infty(G)).$$

Sie kann verstanden werden als Desintegration des Dirac-Maßes δ auf G über der Menge der Charaktere. Das Desintegrationsmaß μ auf $\hat{G}$ heißt *Plancherel-Maß*. Mittels der Charakterformel verleiht nun die Kirillov-Theorie der Plancherel-Formel eine neue Deutung; führt man nämlich in der Plancherel-Formel die

Fourier-Transformation durch, so erhält man einfach die Desintegration des Lebesgue-Maßes λ auf $\mathfrak{g}^*$ über der Menge der kanonischen Maße auf den Bahnen:

$$\lambda = \int_{\hat{G}} m_{\mathcal{O}_\pi} d\mu(\pi).$$

Das Desintegrationsmaß μ (und damit das Plancherel-Maß) berechnet sich aus dem Proportionalitätsfaktor zwischen $m_{\mathcal{O}}$ und $\lambda_{\mathcal{O}}$. (Siehe [48], Part. II, Chap. I, § 8 und Chap. III, § 6, oder [49].)

4 Ein distributionentheoretischer Zugang

Es soll nun ein anderer Weg zu den Resultaten der Kirillov-Theorie vorgestellt werden. Dieser Weg bringt die Distributionentheorie im Euklidischen Raum wesentlich ins Spiel sowie die Beziehung zwischen den Begriffen „Irreduzibilität" und „Extremalität". Den Ausgangspunkt bildet ein von Godement vermutetes und von Schiffmann bewiesenes Resultat ([55]), das nun erläutert werden soll:

Da die Exponentialabbildung ein Diffeomorphismus der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf die Gruppe G ist, läßt sich der Raum $C_c^\infty(G)$ mit dem Raum $C_c^\infty(\mathfrak{g})$ identifizieren. Folglich können auch deren Dualräume $\mathscr{D}'(G)$ und $\mathscr{D}'(\mathfrak{g})$ miteinander identifiziert werden, so daß Distributionen auf der Gruppe auch als Distributionen auf der Lie-Algebra angesehen werden können und umgekehrt.

Natürlich kann die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auch als Abelsche Gruppe aufgefaßt werden mit der Addition als Gruppenverknüpfung. Demgemäß gibt es für eine Distribution $T \in \mathscr{D}'(G) \cong \mathscr{D}'(\mathfrak{g})$ zwei verschiedene Arten positiver Definitheit, nämlich zum einen die positive Definitheit auf G hinsichtlich der Gruppenmultiplikation und zum anderen die positive Definitheit auf $\mathfrak{g}$ hinsichtlich der Addition. Da dem inneren Automorphismus mit dem Element $a \in G$ gerade der Automorphismus $Ad(\mathrm{a})$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ entspricht, entsprechen die zentralen – d. h. die unter den inneren Automorphismen invarianten – Distributionen auf G den unter der adjungierten Darstellung invarianten Distributionen auf $\mathfrak{g}$.

Der Satz von Schiffmann besagt nun, daß für solche Distributionen die beiden genannten Arten positiver Definitheit übereinstimmen.

Dieses Ergebnis verknüpft also eine nicht-Abelsche Situation mit einer Abelschen!

Es sei noch erwähnt, daß dieses Resultat von Benoist im Jahre 1984 auf nilpotente symmetrische Räume verallgemeinert wurde ([2]).

Unter Verwendung von Schiffmann's Resultat gelang Linda Preiss Rothschild im Jahre 1974 ein sehr kurzer und eleganter Beweis von Kirillov's Charakterformel ([54]). Die Beweisidee kann in wenigen Zeilen dargestellt werden:

Sei $\pi \in \hat{G}$ gegeben; nach Dixmiers Resultat ist der Charakter $\tilde{\pi}$ von π eine temperierte Distribution auf G, die wegen der Eigenschaften der Spur natürlich zentral und positiv definit ist. Nach Schiffmann's Resultat ist $\tilde{\pi}$ dann aber auch als Distribution auf $\mathfrak{g}$ positiv definit. Nach dem Satz von Bochner-Schwartz ist demnach $\tilde{\pi}$ die Fourier-Transformierte eines positiven temperierten G-invarianten Radon-Maßes m_π auf $\mathfrak{g}^*$, also $\tilde{\pi} = \hat{m}_\pi$. Da π irreduzibel ist, ist $\tilde{\pi}$ extremal im Kegel der positiv definiten zentralen Distributionen; folglich ist auch m_π extremal im Kegel der positiven temperierten G-invarianten Radon-Maße auf $\mathfrak{g}^*$; d. h. m_π wird von einer einzigen G-Bahn getragen.

Kirillov's Charakterformel kann also mit dem Satz von Schiffmann bewiesen werden. Man kann aber auch umgekehrt den Satz von Schiffmann sehr schnell aus Kirillov's Charakterformel folgern ([26]).

Wir werden nun sehen, daß Rothschild's Beweis für die Charakterformel ganz unabhängig von Kirillov's Konstruktion eine Herleitung der Korrespondenz zwischen irreduziblen Darstellungen und koadjungierten Bahnen gestattet. Und zwar ordnen wir einfach der irreduziblen Darstellung π den Träger $\mathcal{O}$ des Maßes m_π zu:

$$r\colon \hat{G} \to \mathfrak{g}^*/G, \pi \mapsto \mathcal{O}.$$

Wir haben jetzt zu zeigen, daß die Abbildung r bijektiv ist:

Die Injektivität von r ergibt sich sofort aus der bekannten Tatsache, daß verschiedene Darstellungen auch verschiedene Charaktere haben. Zum Beweis der Surjektivität von r wählen wir auf einer vorgegebenen Bahn $\mathcal{O}$ ein invariantes Maß m und bilden dessen Fourier-Transformierte $T := \hat{m}$. Nach dem Satz von Bochner-Schwartz ist T eine positiv definite Ad-invariante Distribution auf $\mathfrak{g}$, welche aber nach Schiffmann's Resultat auch als Distribution auf G positiv definit ist. Weil m extremal ist unter den G-invarianten Maßen auf $\mathfrak{g}^*$, ist T extremal unter den zentralen positiv definiten Distributionen auf G. Daraus können wir folgern, daß die durch die Gelfand-Segal-Konstruktion gewonnene Darstellung $U^{(T)}$ faktoriell ist. (Siehe [24]; vgl. auch [19], § 6.)[2]) Demnach ist $U^{(T)}$ ein Vielfaches einer irreduziblen Darstellung π. Aus der Eindeutigkeit der Spur auf einem Faktor schließen wir nun, daß T und $\tilde{\pi}$ proportional sind und daraus $\mathcal{O} = r(\pi)$. (Insbesondere folgt auch $U^{(\tilde{\pi})} \approx \pi$.)

Wir haben damit eine eineindeutige Korrespondenz r zwischen irreduziblen Darstellungen und koadjungierten Bahnen mit distributionentheoretischen Mitteln hergeleitet. Jetzt erhebt sich die Frage, ob denn eigentlich $r = \tilde{k}^{-1}$ gilt, ob also die Korrespondenz r wirklich die Kirillov-Korrespondenz liefert. Nun, aufgrund von Kirillov's Charakterformel ist das klar. Unsere Absicht war es aber, die Ergebnisse der Kirillov-Theorie auf einem anderen Wege zu gewinnen, so daß wir jetzt nicht einfach wieder Kirillov's Resultate selbst verwenden dürfen. Wir werden daher die Gleichung $r = \tilde{k}^{-1}$ beweisen, ohne uns auf die bekannte Beziehung zwischen Kirillov-Korrespondenz und Charakterformel zu berufen. Auch werden wir ohne Rückgriff auf Kirillov's Konstruktion zeigen, daß zu einer vorgegebenen Bahn $\mathcal{O}$ die Darstellung π mit $r(\pi) = \mathcal{O}$ durch einen Induktionsprozeß gewonnen werden kann.

---

[2]) Hier wird ein entscheidender Vorteil des Kegels der positiv definiten Distributionen gegenüber dem Kegel der positiv definiten Maße deutlich. Für ein unter den positiv definiten Maßen extremales Element braucht nämlich die zugehörige durch die Gelfand-Segal-Konstruktion gewonnene Darstellung keineswegs irreduzibel zu sein. (Ein Beispiel findet sich in [30].) Im Kegel der positiv definiten Distributionen dagegen erhalten wir das entsprechende Ergebnis aus dem folgenden Satz ([29], S. 157, [44], S. 196, [30], Th. 2), den uns das Kern-Theorem von L. Schwartz schenkt: Ist $(\varphi, \psi) \mapsto F(\varphi, \psi)$ eine Hermitesche Form auf $C_c^\infty(G)$, invariant unter Translationen mit Gruppenelementen, so existiert eine Distribution T auf G mit $F(\varphi, \psi) = T(\psi^* * \varphi)$.

Dazu bestimmen wir zunächst für einen Normalteiler N in G und eine Darstellung $\varrho \in \hat{N}$ die induzierte Darstellung $\mathrm{ind}_N^G\,\varrho$ in Termen unserer Korrespondenz r:

Sei $\mathfrak{n}$ die zu N gehörige Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und $r\colon \hat{N} \to \mathfrak{n}^*/N$ die oben konstruierte Korrespondenz zwischen irreduziblen Darstellungen und koadjungierten Bahnen, bezogen auf N. Da N ein Normalteiler ist, wirkt G kanonisch auf $\mathfrak{n}^*$ und – nach Übergang zum Quotienten – auch auf $\mathfrak{n}^*/N$; ferner wirkt G kanonisch auf $\hat{N}$. Man überlegt sich ohne Schwierigkeiten, daß r hinsichtlich dieser Wirkungen äquivariant ist. Sei nun $\mathcal{O} := r(\varrho)$ die N-Bahn von ϱ und $K \supset N$ die Fixgruppe von $\mathcal{O}$. Die Menge

$$\mathcal{O}' := \bigcup_{a \in G} a \cdot \mathcal{O}$$

ist eine G-Bahn in $\mathfrak{n}^*$, und

$$m' := \int_{G/K} m_{a \cdot \varrho}\, d\dot{a}$$

ist ein G-invariantes Maß auf $\mathcal{O}'$. Wir wählen einen zu $\mathfrak{n}$ komplementären Unterraum $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{g}$ und identifizieren $\mathfrak{n}^*$ mit $\mathfrak{m}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ vermöge der Bijektion $p|_{\mathfrak{m}^\perp}$. (Hier bezeichnet $p\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{n}^*$ wieder die kanonische Projektion.) Dann haben wir die Zerlegung

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{n}^* \oplus \mathfrak{n}^\perp$$

und dementsprechend

$$p^{-1}(\mathcal{O}') = \mathcal{O}' + \mathfrak{n}^\perp.$$

$p^{-1}(\mathcal{O}')$ ist eine G-invariante Teilmenge von $\mathfrak{g}^*$, und das Maß

$$m := m' \otimes 1$$

auf $p^{-1}(\mathcal{O}') = \mathcal{O}' + \mathfrak{n}^\perp$ ist G-invariant. Der Übergang zur Fourier-Transformierten liefert

$$\hat{m} = \hat{m}' \otimes \delta = \int_{G/K} \hat{m}_{a \cdot \varrho} \otimes \delta\, d\dot{a}.$$

Wir können m in G-invariante Maße auf den in $p^{-1}(\mathcal{O}')$ enthaltenen G-Bahnen desintegrieren:

$$m = \int_{p^{-1}(\mathcal{O}')/G} m_{r^{-1}(\mathcal{O})}\, d\mu(\mathcal{O}).$$

Weil die Darstellung $U^{(\hat{m}_{a \cdot \varrho})}$ quasiäquivalent zu $a \cdot \varrho$ ist, gilt

$$\mathrm{ind}_N^G\, U^{(\hat{m}_{a \cdot \varrho})} \approx \mathrm{ind}_N^G\, \varrho$$

für alle $a \in G$. Da $\hat{m}_{a \cdot \varrho} \otimes \delta$ die triviale Fortsetzung von $\hat{m}_{a \cdot \varrho}$ nach G ist, gilt aufgrund des in Abschnitt 2 angeführten Resultates von Blattner

$$\mathrm{ind}_N^G\, U^{(\hat{m}_{a \cdot \varrho})} \cong U^{(\hat{m}_{a \cdot \varrho} \otimes \delta)}.$$

Somit erhalten wir

$$\operatorname{ind}_N^G \varrho \approx \int_{G/K}^{\oplus} \operatorname{ind}_N^G U^{(\dot{m}_a \cdot \varrho)} d\dot{a} \approx \int_{G/K}^{\oplus} U^{(\dot{m}_a \cdot \varrho \otimes \delta)} d\dot{a} \approx U^{(\dot{m})}$$

$$\approx \int_{p^{-1}(o')/G}^{\oplus} r^{-1}(\mathcal{O}) d\mu(\mathcal{O}).$$

Mit diesem Ergebnis haben wir Kirillov's geometrische Interpretation der Induktion von Darstellungen wiedergefunden.

Nun können wir die Beziehung $r = \tilde{k}^{-1}$ leicht durch Induktion nach der Dimension von G beweisen:

Sei $\pi \in \hat{G}$ und $\mathcal{O}_0 := r(\pi)$. Wir wählen $f \in \mathcal{O}_0$, eine Polarisation $\mathfrak{h}$ im Punkte f und ein Ideal $\mathfrak{n} \supset \mathfrak{h}$ der Kodimension 1 in $\mathfrak{g}$. Da

$$k(f) = \pi_f = \operatorname{ind}_H^G \chi_f$$

irreduzibel ist, muß auch $\varrho := \operatorname{ind}_H^N \chi_f$ eine irreduzible Darstellung von N sein. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$r(\varrho) = o := N\text{-Bahn von } f|_N.$$

Nach den obigen Überlegungen gilt

$$\operatorname{ind}_N^G \varrho \approx \int_{p^{-1}(o')/G}^{\oplus} r^{-1}(\mathcal{O}) d\mu(\mathcal{O}).$$

Aus der „Pukanszky-Bedingung" $f + \mathfrak{h}^{\perp} \subset \mathcal{O}_0$ ([50]) folgt $f + \mathfrak{n}^{\perp} \subset \mathcal{O}_0$. Daraus ergibt sich zusammen mit der Gleichung $p(a \cdot x) = a \cdot p(x)$, $x \in \mathfrak{g}^*$, $a \in G$, die Beziehung $p^{-1}(o') = \mathcal{O}_0$ und damit

$$\pi_f = \operatorname{ind}_N^G \varrho \approx r^{-1}(\mathcal{O}_0).$$

Wir haben nun zwar ohne Verwendung von Kirillov's Beweis der Charakterformel gezeigt, daß die oben konstruierte Korrespondenz r zwischen irreduziblen Darstellungen und koadjungierten Bahnen in der Tat mit der Kirillov-Korrespondenz übereinstimmt. Um aber die Gleichung $r = \tilde{k}^{-1}$ zu erhalten, mußten wir uns selbstverständlich auf Kirillov's Konstruktion beziehen. Wir werden nun aber sehen, daß wir auch ohne Rückgriff auf Kirillov's Konstruktion die Korrespondenz r durch einen Induktionsprozeß beschreiben können. Mehr noch: Wir können zu $f \in \mathcal{O}_0 = r(\pi)$ eine *kanonische* untergeordnete Unteralgebra $\mathfrak{h}$ konstruieren derart, daß

$$\pi \approx \operatorname{ind}_H^G \chi_f$$

gilt. Diese Konstruktion verläuft parallel zu einer von Penney angegebenen Konstruktion einer kanonischen untergeordneten Unteralgebra ([47]), fußt aber auf den eben entwickelten analytischen Methoden, während die Methoden Penney's eher algebraischer Art sind.

Wir betrachten den größten linearen Unterraum F von $\mathfrak{g}^*$ mit

$$\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_0 + F.$$

Wir nennen F den „flachen Anteil“ von $\mathcal{O}_0$. Natürlich nehmen wir an, daß $\mathcal{O}_0$ nicht einpunktig ist; sonst ist nämlich π selbst schon ein Charakter von G, und wir können $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ wählen. Aus der Nilpotenz von G folgt, daß F nichttrivial ist; der Annullator $\mathfrak{n} := F^\perp$ von F in $\mathfrak{g}$ ist ein echtes Ideal. Wie oben besorgen wir uns einen Komplementärraum $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{g}$ und identifizieren $\mathfrak{n}^*$ mit $\mathfrak{m}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$. Wir haben dann die Zerlegung

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{n}^* \oplus F$$

und dementsprechend

$$\mathcal{O}_0 = \mathcal{o}' + F,$$

wobei $\mathcal{o}' := p(\mathcal{O}_0)$ die G-Bahn von $f' := p(f)$ in $\mathfrak{n}^*$ ist. Ist nun $\mathcal{o}$ die N-Bahn von f', so gilt mit $\varrho := r^{-1}(\mathcal{o}) \in \hat{N}$ wegen $p^{-1}(\mathcal{o}') = \mathcal{O}_0$ die Beziehung

$$\operatorname{ind}_N^G \varrho \approx \int_{p^{-1}(\mathcal{o}')/G}^{\oplus} r^{-1}(\mathcal{O})\, d\mu(\mathcal{O}) \approx \pi. \text{ (Siehe Fig. 4.)}$$

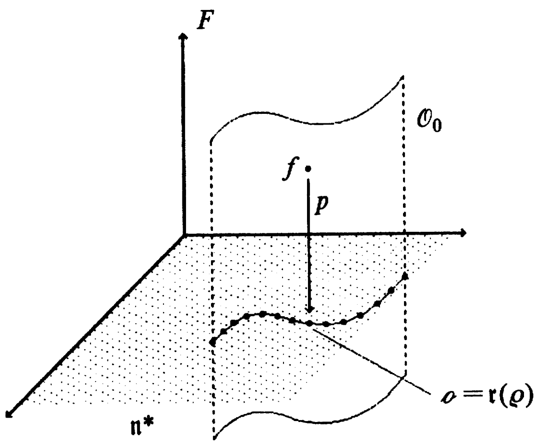


Fig. 4

Damit haben wir unser Problem auf eine Gruppe niedrigerer Dimension, nämlich auf N reduziert. Nun wenden wir denselben Prozeß auf $f' \in \mathcal{o} = r(\varrho)$ an. So fahren wir sukzessiv fort, bis die entsprechende Bahn einpunktig ist, und gelangen zum Ziel.

Die Unteralgebra $\mathfrak{h}$, die wir schließlich erhalten, ist also auf kanonische Weise gewonnen worden und hängt nicht von irgendwelchen Willkürlichkeiten ab wie die Polarisationen Kirillov's. Es gibt allerdings auch einen Nachteil: Die induzierte Darstellung

$$\operatorname{ind}_H^G \chi_f$$

ist im allgemeinen nicht mehr irreduzibel, sondern nur noch faktoriell.

Auch Kirillov's Beschreibung des infinitesimalen Charakters läßt sich mit distributionentheoretischen Mitteln herleiten:

Die universelle Einhüllende $U(\mathfrak{g})$ kann realisiert werden als Algebra der links-invarianten Differentialoperatoren D auf G. Das Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $U(\mathfrak{g})$ entspricht dabei den biinvarianten Differentialoperatoren. Dem Operator D kann ein Differentialoperator D_0 auf $\mathfrak{g}$ mit konstanten Koeffizienten assoziiert werden vermöge der Gleichung

$$D\varphi(e) = D_0\varphi(0), \qquad \varphi \in C_c^\infty(G) \cong C^\infty(\mathfrak{g}).$$

Nach Fixierung einer Basis in $\mathfrak{g}$ leitet man für $P := \omega^{-1}(D) \in S(\mathfrak{g})$ die Beziehung

$$D_0 = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

her ([34], Ch. II, Th. 4.3). Aus den Eigenschaften der Fourier-Transformation ergibt sich dann für $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ und das Polynom $Q(f) = P(if)$ auf $\mathfrak{g}^*$ die Gleichung

$$(D_0^t\varphi)^\wedge = Q \cdot \hat{\varphi}$$

(D_0^t ist der zu D_0 transponierte Operator) und daraus für eine temperierte Distribution m auf $\mathfrak{g}^*$ die Beziehung

$$D_0\hat{m} = (Q \cdot m)^\wedge.$$

Vermöge der Exponentialabbildung läßt sich D auch als Differentialoperator auf $\mathfrak{g}$ auffassen, und nach dem Satz von Kashiwara-Vergne ([35]) stimmen D und D_0 auf den Ad-invarianten Distributionen auf $\mathfrak{g}$ überein. (Auch dieses Resultat kann man – wie den Satz von Schiffmann – als Verknüpfung einer nicht-Abelschen mit einer Abelschen Situation ansehen.)

Sei nun $\pi \in \hat{G}$ gegeben und sei $\chi: Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ der zugehörige infinitesimale Charakter. Man zeigt leicht, daß $\tilde{\pi}$ Eigendistribution jedes biinvarianten Differentialoperators D auf G ist mit dem Eigenwert $\chi(D)$. Dazu verifiziert man zunächst die Formel

$$\pi(D^t\varphi) = \pi(\varphi)\overset{\infty}{\pi}(D) = \chi(D)\pi(\varphi), \qquad \varphi \in C_c^\infty(G),$$

(D^t ist der zu D transponierte Operator) und folgert dann

$$\langle D\tilde{\pi}, \varphi\rangle = \langle \tilde{\pi}, D^t\varphi\rangle = \mathrm{Sp}\, \pi(D^t\varphi) = \chi(D)\, \mathrm{Sp}\, \pi(\varphi) = \chi(D)\tilde{\pi}(\varphi).$$

Mit $\mathcal{O} := r(\pi)$ gilt jetzt die Gleichung

$$D\tilde{\pi} = D_0\tilde{\pi} = (Q \cdot m_\pi)^\wedge = Q(\mathcal{O})\hat{m}_\pi = Q(\mathcal{O})\tilde{\pi}$$

und folglich die gewünschte Beziehung

$$\chi(D) = Q(\mathcal{O}).$$

Literatur

[1] Auslander, L.; Kostant, B.: Polarization and unitary representations of solvable Lie groups. Invent. Math. **14** (1971) 255–354

[2] Benoist, Y.: Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents. J. Funct. Anal. **59** (1984) 211–253

[3] Benoist, Y.: Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels. Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Ser. **15** (1984) 1–37

[4] Bernat, P.: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **82** (1965) 37–99

[5] Bernat, P.; Conze, N.; Duflo, M.; Levy-Nahas, M.; Rais, M.; Renouard, P.; Vergne, M.: Représentations des groupes de Lie résolubles. Monographies de la Societe Mathematique de France, 4. Paris: Dunod 1972

[6] Blattner, R. J.: Positive definite measures. Proc. Am. Math. Soc. **14** (1963) 423–428

[7] Corwin, L.; Greenleaf, F. P.; Grélaud, G.: Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups. Trans. Am. Math. Soc. **304** (1987) 549–583

[8] Corwin, L.; Greenleaf, F. P.: Complex algebraic geometry and calculation of multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups. Trans. Am. Math. Soc. **305** (1988) 601–622

[9] Corwin, L.; Greenleaf, F. P.: Spectrum and multiplicities for restrictions of unitary representations in nilpotent Lie groups. Pac. J. Math. **135** (1988) 233–267

[10] Corwin, L.; Greenleaf, F. P.: A canonical approach to multiplicity formulas for induced and restricted representations of nilpotent Lie groups. Commun. Pure Appl. Math. **41** (1988) 1051–1088

[11] Dixmier, J.: Sur l'algebre enveloppante d'une algebre de Lie nilpotente. Arch. Math. **10** (1959) 321–326

[12] Dixmier, J.: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. I. Amer. J. Math. **81** (1959) 160–170

[13] Dixmier, J.: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. II. Bull. Soc. Math. Fr. **85** (1957) 325–388

[14] Dixmier, J.: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. III. Canad. J. Math. **10** (1958) 321–348

[15] Dixmier, J.: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. IV. Canad. J. Math. **11** (1959) 321–344

[16] Dixmier; J.: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. V. Bull. Soc. Math. Fr. **87** (1959) 65–79

[17] Dixmier, J.: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. VI. Canad. J. Math. **12** (1960) 324–352

[18] Dixmier, J.: Les algèbres d'operateurs dans l'espace hilbertien, 2^e edition. Paris: Gauthier-Villars 1969

[19] Dixmier, J.: Les C^*-algèbres et leurs représentations, 2^e edition. Paris: Gauthier-Villars 1969

[20] Duflo, M.: Construction of primitive ideals in an enveloping algebra. Lie Groups Represent., Proc. Summer Sch. Bolyai Janos math. Soc., Budapest 1971 (1975) 77–93

[21] Duflo, M.: Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. Ann. Sci. École Norm. Sup. **10** (1977) 265–288

[22] Duflo, M.: On the Plancherel formula for almost algebraic real Lie groups. Lie group representations III, Proc. Spec. Year, College Park/Md. 1982–83, Lect. Notes Math. **1077** (1984) 101–165

[23] Duflo, M.; Pedersen, N. V.; Vergne, M. (eds.): The orbit method in representation theory. Proceedings of a conference held in Copenhagen, August to September 1988. Progress in Mathematics, Vol. 82. Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser 1990

[24] Felix, R.: Integralzerlegungen positiv definiter Distributionen auf nilpotenten Liegruppen. Math. Z. **157** (1977) 83–96

[25] Felix, R.: Über Integralzerlegungen von Darstellungen nilpotenter Liegruppen. Manuscr. Math. **27** (1979) 279–290

[26] Felix, R.: Ein kurzer Beweis für den Satz von Schiffmann mit Hilfe von Kirillovs Charakterformel. Arch. Math. **33** (1979) 554–555

[27] Fujiwara, H.: Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents. Pac. J. Math. **127** (1987) 329–352

[28] Gelfand, I. M.; Neumark, M. A.: Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen. Berlin: Akademie-Verlag 1957 (Übersetzung aus dem Russischen)

[29] Gelfand, I. M.; Wilenkin, N. J.: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), IV. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964 (Übersetzung aus dem Russischen)

[30] Goodman, R.: Positive-definite distributions and intertwining operators. Pac. J. Math. **48** (1973) 83–91

[31] Grélaud, G. G.: Désintégration de représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel. C. R. Acad. Sc. Paris **277**, Série A (1973) 327–330

[32] Harish-Chandra: The Plancherel formula for complex semi-simple Lie groups. Trans. Am. Math. Soc. **76** (1954) 485–528

[33] Harish-Chandra: Harmonic analysis on real reductive groups III. The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula. Ann. Math., II. Ser. **104** (1976) 117–201

[34] Helgason, S.: Groups and geometric analysis. Pure and Applied Mathematics, Vol. 113. Orlando etc.: Academic Press, Inc. 1984

[35] Kashiwara, M.; Vergne, M.: The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions. Invent. Math. **47** (1978) 249–272

[36] Khalgui, M. S.: Caracteres des groupes de Lie. J. Funct. Anal. **47** (1982) 64–77

[37] Kirillov, A. A.: Unitäre Darstellungen nilpotenter Lie-Gruppen. Usp. Mat. Nauk. **17** (1962) 57–110 (Russisch)

[38] Kirillov, A. A.: Elements of the theory of representations. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1976

[39] Kostant, B.: Quantization and unitary representations. Lect. Notes Math. **170** (1970) 87–208

[40] Lipsman, R. L.: Orbital parameters for induced and restricted representations. Trans. Am. Math. Soc. **313** (1989) 433–473

[41] Mackey, G. W.: Imprimitivity for representations of locally compact groups. Proc. Natl. Acad. Sci, USA **35** (1949) 537–545

[42] Mackey, G. W.: Induced representations of locally compact groups, I. Ann. Math. **55** (1952) 101–139

[43] Mackey, G. W.: Unitary representations of group extensions. Acta Math. **99** (1958) 265–311

[44] Maurin, K.: General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups. Warszawa: Polish Scientific Publishers 1968

[45] Moore, C. C.: Representations of solvable and nilpotent groups and harmonic analysis on nil and solvmanifolds. Harmonic Analysis homog. Spaces, Proc. Sympos. pure Math. 26, Williamstown 1972 (1973) 3–44

[46] von Neumann, J.: Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren. Math. Ann. **104** (1931) 570–578

[47] Penney, R.: Canonical objects in Kirillov theory on nilpotent Lie groups. Proc. Am. Math. Soc. **66** (1977) 175–178

[48] Pukanszky, L.: Leçons sur les représentations des groupes. Paris: Dunod 1967

[49] Pukanszky, L.: On the characters and the Plancherel formula of nilpotent groups. J. Funct. Anal. **1** (1967) 225–280

[50] Pukanszky, L.: On the theory of exponential groups. Trans. Am. Math. Soc. **126** (1967) 487–507

[51] Pukanszky, L.: Representations of solvable Lie groups. Ann. Sci. École Norm. Sup. **4** (1971) 464–608

[52] Pukanszky, L.: Unitary representations of Lie groups with cocompact radical and applications. Trans. Am. Math. Soc. **236** (1978) 1–49

[53] Rossmann, W.: Kirillov's character formula for reductive Lie groups. Invent. Math. **48** (1978) 207–220

[54] Rothschild, L. P.: A distribution-theoretic proof of Kirillov's character formula for nilpotent Lie groups. Math. Z. **140** (1974) 63–65
[55] Schiffmann, G.: Distributions centrales de type positif sur un groupe de Lie nilpotent. Bull. Soc. Math. Fr. **96** (1968) 347–355
[56] Vergne, M.: Representations of Lie groups and the orbit method. Emmy Noether in Bryn Mawr, Proc. Symp. Bryn Mawr/USA 1982 (1983) 59–101

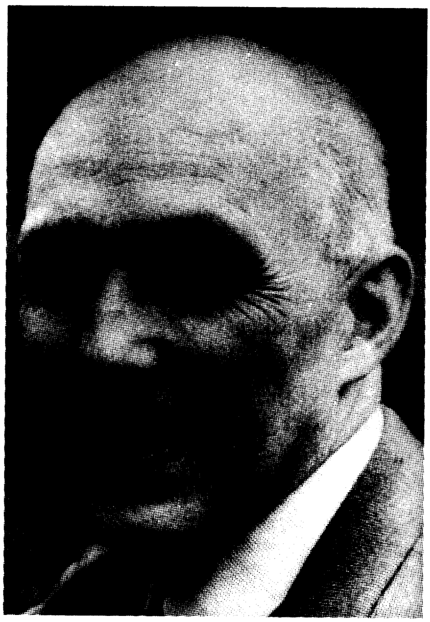
Rainer Felix
Mathematisch-Geographische Fakultät
Katholische Universität Eichstätt
Ostenstraße 26–28
D-8078 Eichstätt

(*Eingegangen 25.9.1990, revidiert 18.3.1991*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 93 (1991) 127–145
AMS subject classification: 01 A 70

Richard Rado 1906–1989

H. Lenz, Berlin, M. Aigner, Berlin, W. Deuber, Bielefeld



1 Lebensdaten

Richard Rado starb am 23. Dezember 1989, im Alter von 83 Jahren. In seinem Lebensweg spiegeln sich die große geistige und kulturelle Tradition wie auch das Schicksal der Wissenschaft in diesem Jahrhundert.

Richard Rado wurde am 28. April 1906 in Berlin geboren. Sein erster Wunsch war, Pianist zu werden. Nach der Schule machte er die Mathematik zu seinem Lebensziel. Er wurde schließlich beides: ein weltberühmter Mathematiker und ein wundervoller Musiker. Rado studierte in Göttingen und Berlin, vor allem bei Issai Schur. Bereits seine Dissertation „Studien zur Kombinatorik“ 1931 war ein mathematisches Juwel. Die Grundidee, eine Brücke zwischen endlicher und unendlicher Mathematik zu errichten, blieb ein Hauptthema für viele seiner späteren

Arbeiten, und wurde von zahlreichen anderen Mathematikern aufgenommen und weiterentwickelt. 1933 erhielt er seinen Doktorgrad – und stand auf der Straße. Als Jude war er von einer Universitätslaufbahn ausgeschlossen und verlor auch die DMV-Mitgliedschaft.

Seine deutsche Zeit war beendet – mit einem lebensrettenden Stipendium für jüdische Wissenschaftler in Deutschland findet er mit seiner Frau Luise geb. Zadek – die beiden hatten 1933 geheiratet – Zuflucht in Cambridge. Später konnte er seinerseits seinem Lehrer Schur bei dessen Emigration behilflich sein. Bei G. H. Hardy erwirbt er 1935 den englischen Doktorgrad. Nach etwa 10 Jahren als Lecturer in Sheffield geht er 1947 als Reader ans King's College in London, und wird schließlich als Professor und Department Head 1954 an die Universität von Reading berufen, wo er bis zu seiner Emeritierung 1971 bleibt. Auch nach Deutschland kehrte er wieder zurück, vor allem die Tagungen, die Atmosphäre und Musik in Oberwolfach liebte er – unvergeßlich, wenn er mit seiner Frau einen vierhändigen Militärmarsch von Schubert voll Temperament und musikalischem Feingefühl darbot.

Richard Rados Beiträge zur Mathematik wurden hoch geschätzt und mit vielen Ehrungen bedacht. Schon 1936 hielt er einen eingeladenen Vortrag beim Internationalen Kongreß in Oslo. Er war ein Wissenschaftler von seltener Universalität. Seine Meisterschaft zeigte sich in grundlegenden Arbeiten auf so verschiedenen Gebieten wie Kombinatorik, Mengenlehre, Analysis, Zahlentheorie, Algebra, Geometrie und Maßtheorie. Ein Teil seiner bedeutendsten Publikationen entstand in Zusammenarbeit mit dem ungarischen Mathematiker Paul Erdös. Die legendäre Zusammenarbeit dieser beiden großen Wissenschaftler begann 1934, als Rado noch in Cambridge war, und dauerte über ein halbes Jahrhundert.

Richard Rado war seit 1948 im Vorstand der Londoner Mathematischen Gesellschaft, deren Sekretär und Vizepräsident er später wurde. Er gründete das British Combinatorial Committee, dessen Vorsitzender er bis 1987 blieb. 1972 erhielt er den Senior Berwick Preis und 1978 wurde er zum Fellow of the Royal Society gewählt, die höchste wissenschaftliche Auszeichnung in Großbritannien. Der Fachbereich Mathematik der Freien Universität Berlin ehrte Professor Rado 1981 durch die Verleihung der Ehrendoktorwürde. Unter den vielen Auszeichnungen war diese Ehrung nicht die wichtigste, aber vielleicht die für ihn bewegendste. In einem Nachruf der Times von 2. Januar 1990 heißt es: „Perhaps the tribute which provided the most moving experience of his life was his visit to the Free University of Berlin in October 1981 to lecture and receive an honorary doctorate." Der Kreis nach Berlin hatte sich geschlossen.

Richard Rados wissenschaftliche Leistungen werden ihm einen dauernden Platz in der Mathematik sichern – und für alle, die ihn persönlich kennen durften, wird er unvergessen bleiben als einer der feinsinnigsten und gütigsten Menschen. Wir neigen uns vor ihm und seiner am 2. 6. 1990 verstorbenen Frau und trauern mit dem Sohn Peter.

Im folgenden sollen einige ausgewählte und besonders wichtige Leistungen Rados kurz erläutert werden.

2 Der Problemkreis um Rados Dissertation [1933B]

Ausgangspunkt waren für Rado die folgenden beiden Sätze:

(S 1) Satz von I. Schur (1916): Zerlegt man die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen irgendwie in endlich viele Klassen, so enthält mindestens eine dieser Klassen drei Zahlen x, y, z, welche die diophantische Gleichung $x+y=z$ erfüllen.

(S 2) Dasselbe gilt schon, wenn man $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{N}_1^s=\{1,\ldots,s\}$ mit hinreichend großem s ersetzt.

(W 1) Satz von van der Waerden (1927): Zerlegt man $\mathbb{N}$ in endlich viele Klassen, so enthält mindestens eine dieser Klassen eine arithmetische Progression $a, a+d, \ldots, a+ld$ von beliebig vorgegebener Länge $l+1$ $(d>0)$.

(W 2) Es gibt ein kleinstes $s=W(k, l)$, so daß (W 1) schon bei jeder Zerlegung von $\mathbb{N}_1^s$ in k Klassen gilt.

Eine arithmetische Progression $a+\mathbb{N}_0^l\cdot d$ kann, zusammen mit ihrer Differenz d als Lösung $(x_0,\ldots,x_{l+1})$ des linearen Gleichungssystems

(2.1) $x_0=x_2-x_1=\ldots=x_{l+1}-x_l$

aufgefaßt werden. Daher umfaßt die Lösung des folgenden Hauptproblems der Radoschen Dissertation die Sätze von Schur und van Waerden:

Welche homogen linearen Gleichungssysteme

(2.2) $A\vec{x}=0,$

ausführlich

(2.3) $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_{in}=0 \qquad (i=1,\ldots,m)$

mit $a_{ij}\in\mathbb{Z}$ (für alle $(i,j)\in\mathbb{N}_1^m\times\mathbb{N}_1^n$) haben die folgenden Eigenschaften?

(R 1) Bei jeder Färbung der natürlichen Zahlen mit höchstens k Farben (d. h. bei jeder Zerlegung von $\mathbb{N}$ in höchstens k Klassen) enthält mindestens eine Klasse eine Lösung $(x_1,\ldots,x_n)=\vec{x}$ des Gleichungssystems (2.2).

(R 2) Dasselbe für $\mathbb{N}_1^s$ statt $\mathbb{N}$ mit hinreichend großen $s\in\mathbb{N}$.

(R 3) Dasselbe für $\mathbb{Z}\setminus\{0\}=\pm\mathbb{N}$ statt $\mathbb{N}$.

(R 4) Dasselbe für $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ statt $\mathbb{N}$.

Wenn (R 1) für festes $k\in\mathbb{N}$ gilt, so heißt die Matrix A (und das Gleichungssystem (2.2)) *k-regulär* bzw. *partitionsregulär* (kurz *regulär*). Rado zeigte unter anderem:

Die Eigenschaften (R 1) bis (R 4) sind äquivalent. Die Gleichung $ax+by=0$ ist regulär, falls $a+b=0$ ist, und anderenfalls nicht einmal 2-regulär. Die Gleichung $ax+by=cz$ ist 2-regulär $(a, b, c\in\mathbb{N})$. Dafür, daß eine Matrix A regulär ist, fand Rado folgendes Kriterium:

Sonderfall $m=1$: Einige der Koeffizienten $a_{11},\ldots,a_{1n}$ haben die Summe Null.

Allgemeiner Fall: Die Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ der Matrix A erfüllen die folgende *Spaltenbedingung:* Es gibt eine Zerlegung der Indexmenge $\mathbb{N}_1^n$ in $r+1$ Klassen $J_0, \ldots, J_r$ mit folgenden Eigenschaften:

(2.4) $\sum_{j \in J_0} \vec{a}_j = \vec{0}$ (Nullvektor);

(2.5) Im Fall $r > 0$ sind (für $h = 1, \ldots, r$) die Summen $\sum_{j \in J_h} \vec{a}_j$ linear abhängig (über $\mathbb{Q}$) von den Spaltenvektoren $\vec{a}_j, j \in J_0 \cup \ldots \cup J_{h-1}$.

Hauptsatz von Rado: Die Spaltenbedingung ist äquivalent zu (R 1).

Man sieht, daß die Gleichung $x + y = z$ die Spaltenbedingung erfüllt. Dasselbe gilt für das Gleichungssystem (2.1). Der Radosche Hauptsatz enthält also den Satz von Schur (S 1) und den Satz von van der Waerden (W 1).

Daß die Spaltenbedingung notwendig ist, zeigte Rado mit Hilfe der folgenden $(p-1)$-Färbung von $\mathbb{N}$. Es sei p eine (hinreichend große) Primzahl. Farbklassen sind die Restklassen $\not\equiv 0$ modulo p. Die natürliche Zahl $n = p^e \cdot a$ mit $a \not\equiv 0 \bmod p$ gehöre der Farbklasse a modulo p an. Dann ist es ganz leicht zu zeigen, daß die Spaltenbedingung im Sonderfall $m = 1$ notwendig ist, und im allgemeinen Fall nicht viel schwerer, *wenn* man erst einmal wie Rado auf die richtige Idee gekommen ist. Daß die Spaltenbedingung hinreichend ist, läßt sich nur mit erheblich mehr Mühe beweisen. Der Satz von van der Waerden, also ein Spezialfall, ist ein unentbehrliches Hilfsmittel (das gilt auch, wenn man wie heute üblich, den Satz von Hales und Jewett benützt, denn auch dieser verallgemeinert den Satz von van der Waerden). Siehe dazu das sehr inhaltsreiche, tiefgehende und anspruchsvolle Buch Ramsey-Theory (1980) von Graham, Rothschild und Spencer [GRS 1980], sowie den Übersichtsartikel [D 1989] von W. Deuber, der über die zahlreichen Folgeresultate aus über 60 neueren Arbeiten berichtet, u. a. Rados eigenen Beitrag [1943b], der die partitionsregulären Matrizen mit komplexen Koeffizienten kennzeichnet.

3 Der Satz von Erdös-Ko-Rado

Die lange und überaus fruchtbare Zusammenarbeit mit Paul Erdös [E 1987] erzielte 1938 ihr erstes Resultat, gemeinsam mit dem chinesischen Mathematiker Chao Ko. Wie Erdös in [E 1987] berichtet, wurde dieses Resultat allerdings erst Jahrzehnte später veröffentlicht [1961 A]. Es handelt sich um Eigenschaften von Teilmengen der Potenzmenge 2^M einer endlichen Menge M. Die drei Verfasser behandelten die folgenden Fragen.

Problem 3.1. Wieviele verschiedene Mengen $X \in \binom{M}{k}$, d. h. Teilmengen X von M mit $|X| = k$, kann es geben, wenn je zwei von ihnen nichtleeren Durchschnitt bzw. wenn je zwei von ihnen mindestens r Elemente gemein haben?

Die Antwort geben folgende Sätze.

Satz 3.2. Es sei $\mathscr{S} \subseteq \binom{M}{k}$,

(3.1) $X \cap Y \neq \emptyset$ für alle $X, Y \in \mathscr{S}$

und $|M| = m \geqslant 2k$ (anderenfalls ist die Antwort trivial). Dann ist

(3.2) $|\mathscr{S}| \leqslant \binom{m-1}{k-1}$,

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn

(3.3) $\mathscr{S} = \left\{X \in \binom{M}{k} : a \in X\right\}$ mit festem $a \in M$.

Satz 3.3. Fordert man statt $|X| = k$ für alle $k \in \mathscr{S}$ nur

(3.4) $|X| \leqslant k$

und dafür die sogenannte *Sperner-Eigenschaft*

(3.5) $X \subseteq Y \Rightarrow X = Y$ für alle $X, Y \in \mathscr{S}$,

sowie nach wie vor (3.1), so gilt wieder (3.2).

Satz 3.4. Vorausgesetzt sei wieder $\mathscr{S} \subseteq \binom{M}{k}$ und nun

(3.6) $|X \cap Y| \geqslant r$ für alle $X, Y \in \mathscr{S}$.

Wenn dann $|M|$ nicht zu klein ist, d. h.

(3.7) $|M| \geqslant n_0(k, r)$,

so gilt

(3.8) $|\mathscr{S}| \leqslant \binom{m-r}{k-r}$.

Ausführliche Auskünfte über die weitere Entwicklung des damit angegriffenen Problemkreises geben die Übersichtsartikel Erdös [E 1978] und Déza/Frankl [DF 1983]. Z. B. wurde die kleinste untere Schranke $n_0(k, r)$ in (3.7) später von P. Frankl und R. M. Wilson genau bestimmt, nämlich zu

(3.9) $n_0(k, r) = (k - r + 1)(r + 1)$.

Für $|M| < n_0(k, r)$ bleiben offene Fragen. Erdös fragt in [E 1987] das folgende: Es sei $|M| = m = 4n$, $k = 2n$ und $r = 2$. Ist dann

$$\frac{1}{2}\left[\binom{4n}{2n} - \binom{2n}{n}^2\right]$$

die kleinste obere Schranke für $|\mathscr{S}|$? Für den Beweis oder die Widerlegung dieser Vermutung hat Erdös 1987 in [E 1987] 250 Pfund Sterling ausgesetzt.

4 Probleme um den Satz von Ramsey

Der Satz von Ramsey (1930), der 1934 von den damals jungen ungarischen Mathematikern Erdös und Szekeres wiederentdeckt wurde, lautet:

(Rs 1) Die Zahlen $r, k \in \mathbb{N}$ seien gegeben. Die Menge $\binom{\mathbb{N}}{k}$ der k-elementigen Untermengen von $\mathbb{N}$ sei in r Klassen zerlegt (= mit r Farben gefärbt). Dann gibt es eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so daß $\binom{M}{k}$ ganz in einer Klasse liegt.

Der Fall $k=1$ ist das Schubfachprinzip. Der Fall $k=2$ kann als Satz über die Kantenfärbung unendlicher Graphen veranschaulicht werden. Triviale Folgerungen aus (Rs 1) sind:

(Rs 2) Die natürlichen Zahlen k, r und $m \geqslant k$ seien gegeben. Wird $\binom{\mathbb{N}}{k}$ irgendwie in r Klassen zerlegt, so gibt es ein $M \in \binom{\mathbb{N}}{m}$, so daß $\binom{M}{k}$ ganz in einer Klasse liegt.

(Rs 3) Die natürlichen Zahlen k, r und $m_1, \ldots, m_r \geqslant k$ seien gegeben. Wird $\binom{\mathbb{N}}{k}$ irgendwie in r Klassen $F_1, \ldots, F_r$ zerlegt, so gibt es ein $i \in \mathbb{N}_1^r$ und ein zugehöriges $M_i \in \binom{\mathbb{N}}{m_i}$, so daß $\binom{M_i}{k}$ ganz in F_i liegt.

Nicht ganz so triviale Folgerungen aus (Rs 1) sind (vgl. § 8):

(Rs 4) Wie (Rs 2) mit geeignetem $\mathbb{N}_1^s$ statt $\mathbb{N}$.

(Rs 5) Wie (Rs 3) mit geeignetem $\mathbb{N}_1^s$ statt $\mathbb{N}$.

Die kleinste Zahl s, für welche (Rs 5) bzw. (Rs 4) gilt, heißt die *Ramsey-Zahl* $R_r^k(m_1, \ldots, m_r)$ bzw. $R_r^k(m)$. Nur ganz wenige Ramseyzahlen sind genau bekannt, so $R_2^2(3)=6$, $R_2^2(3,4)=9$. Die großen Arbeiten Erdös/Rado [1952 E, 1956 C] und Erdös/Hajnal/Rado [1965 B] befassen sich vor allem mit dem Ramsey-Problem für unendliche Ordinal- und Kardinalzahlen r, m_i $(0 \leqslant i < r)$ und stellen klar, daß das Problem für unendliche k keinen Sinn gibt (dann gilt kein Ramsey-Satz). Aber die drei genannten Autoren behandeln auch den klassischen Fall endlicher Parameter erneut. Unter anderem geben sie von den früheren verschiedene Beweise des Satzes von Ramsey (Rs 1) bzw. (Rs 2).

Dabei ist nicht so sehr der Beweis interessant, sondern die daraus ableitbare *obere Schranke* für die Ramsey-Zahlen, wie sie von Erdös und Rado [1952 E] angegeben wurde. Zur Abkürzung sei

(4.1) $\quad x * y := x^y, \qquad x_1 * x_2 * \ldots * x_l := x_1 * (x_2 * \ldots * x_n).$

Aus ihrem Beweis erhalten Erdös und Rado, mit der Abkürzung $R(k) := R_r^k(m)$, für $k > 1$

(4.2) $R(k) \leqslant r * [R(k-1)^{k-1}/(k-1)!] \leqslant r * R(k-1)^{k-1}$,

und daraus

(4.3) $R(k) \leqslant r * r^{k-1} * r^2 * [r(m-1)+1]$,

insbesondere

(4.4) $R(2) = R_r^2(m) \leqslant r^{r(m-1)+1}$,

(4.5) $R(3) = R_r^3(m) \leqslant r^{r^{2(rm-r+1)}}$.

Die oberen Schranken sehen ziemlich groß aus. Daß sie nicht ganz schlecht sind, haben Erdös, Hajnal und Rado in ihrer erwähnten großen Arbeit[1]) [1965 B] durch Angabe *unterer* Schranken gezeigt. Wesentliches Hilfsmittel ist ein *Stepping-up-lemma* (= Aufsteigelemma, siehe Ramsey Theory [RGS 1980], S. 91). Es sagt folgendes aus: Für $k > 2$ gilt

(4.6) $n < R_r^k(m) \Rightarrow 2^n < R_r^{k+1}(2m+k-4)$.

Insbesondere für $r = 2$ und festes $k < 2$ ergeben sich daraus folgende *untere* Schranken für Ramsey-Zahlen: Die *Turmfunktion* $t_i(x)$ sei erklärt durch $t_1(x) := x$, $t_{i+1}(x) := 2 * t_i(x)$. Dann gibt es zu jedem $k > 2$ eine positive Konstante $c_k \in \mathbb{R}$, so daß

(4.7) $R_2^k(m) > t_{k-1}(c_k m^2)$

ist. So folgt aus $R_2^3(4) > 12$ (Isbell 1969) und dem Aufsteigelemma

(4.8) $R_2^5(14) > 2 * 2 * 12 > 10^{1200}$, $\qquad R_2^6(29) > 2 * 2 * 2 * 12$.

Für $k = 2$ versagt das Aufsteigelemma, wenn man keine zusätzlichen Farben einführt. Siehe dazu Ramsey Theory [GRS 1980], S. 93, sowie zu diesen Abschätzungen insgesamt auch [1969 B] und [1984 B], S. 145–157. In diesem Zusammenhang stellte Erdös [E 1987] die Vermutung

(?) $R_2^2(m) > 2^{2cm}$ mit einer positiven Konstanten c

auf und bot 500 Pfund Sterling für ihren Beweis oder ihre Widerlegung. Die Zahlen $R_r^k(m)$ wachsen mit k (wenn m nicht zu klein bleibt) sehr rasch an; aber die 1980 zugänglichen oberen Schranken für die van-der-Waerden-Zahlen $W(r, l)$ sind unvergleichlich viel größer. Ob sie sich wesentlich verkleinern lassen, ist ein schwieriges Problem. Vgl. dazu Deuber [D 1989], S. 60–65, mit einem Bericht über eine bedeutende Arbeit von Shelah aus dem Jahr 1988.

Jedoch haben Erdös und Rado in ihrer erwähnten Arbeit [1952 E] eine *untere* Schranke für die van der Waerden-Zahl $W(r, l)$ [siehe (W 2)] angegeben, nämlich

(4.9) $W(r, l) > \sqrt{2l \cdot r^l}$ (zu Fortschritten s. Ramsay Theory [GRS 1980]).

---

[1]) deren Hauptbedeutung jedoch in der unendlichen Kombinatorik und Mengenlehre liegt, s. Erdös [E 1987].

Richard Rado ist auch eine zweckmäßige Bezeichnung für die Aussage (Rs 5) bzw. (Rs 4) zu verdanken, nämlich das *Pfeilsymbol.*

(4.10) $s \to (m_1, \ldots, m_r)_r^k$

bzw. im Fall $m_1 = \ldots = m_r$

(4.11) $s \to (m)_r^k$

bedeutet, daß $s \geqslant R_r^k(m_1, \ldots, m_r)$ bzw. $R_r^k(m)$ ist. Wenn es aus dem Zusammenhang klar ist, was gemeint ist, wird der letzte Index r in (4.10) auch weggelassen. Die Negation der Aussagen (4.10) bzw. (4.11) wird durch das Symbol $\nrightarrow$ bezeichnet. Das Pfeilsymbol erwies sich als äußerst nützlich bei der Übertragung der Ramsey-Sätze auf unendliche Zahlen. Der Satz (RS 1) lautet in der Pfeilsymbolik $|\mathbb{N}| \to (|\mathbb{N}|)_r^k$ für alle $r, k \in \mathbb{N}$. Der Partitionskalkül von Erdös, Hajnal und Rado befaßt sich mit der Gültigkeit bzw. Nichtgültigkeit der Pfeilrelation für unendliche Kardinal- bzw. Ordinalzahlen.

5 Der Partitionskalkül

Gemeinsam mit Erdös und Hajnal hat Rado in verschiedenen Arbeiten den Partitionskalkül für (unendliche) Kardinal- und Ordinalzahlen entwickelt. Herauszuheben ist hier vor allem die Arbeit [1965B], die in Fachkreisen auch als das „giant triple paper" bekannt ist. Einen nahezu vollständigen Überblick über den gegenwärtigen Stand des Wissens findet man in dem Buch [1984B].

Die Grundfrage, um die es hier geht, ist die Gültigkeit der Partitionsrelation

$$\alpha \to (\beta)_r^k$$

für gegebene Kardinalzahlen α, β, k und r zu untersuchen. Dabei steht „$\alpha \to (\beta)_r^k$" abkürzend für „zu jeder r-Färbung der k-elementigen Teilmengen von α gibt es eine einfarbige β-elementige Teilmenge". Der Satz von Ramsey läßt sich ja formulieren als „$\omega \to (\omega)_r^k$" für alle natürlichen Zahlen k und r.

Die erste Beobachtung [1952 E] ist, daß k notwendig eine endliche Kardinalzahl bleiben sollte, es gilt nämlich unter Verwendung des Auswahlaxioms

$$\varkappa \nrightarrow (\omega)_2^\omega$$

für jede Kardinalzahl $\varkappa$.

Erdös und Rado [1956C] geben eine präzise Antwort auf die Frage, wie man zu gegebenen β, k und r ein α finden kann mit $\alpha \to (\beta)_r^k$. Es gilt nämlich der fundamentale Satz:

Satz 5.1. $\exp_{k-1}(\varkappa)^+ \to (\varkappa^+)_\varkappa^k$ *für alle unendlichen Kardinalzahlen* $\varkappa$ *und natürlichen Zahlen k.*

Dabei bezeichnet $\varkappa^+$ den Nachfolger von $\varkappa$ und $\exp_k(\varkappa)$ die iterierten Potenzen

$$\exp_k(\varkappa) = 2^{\exp_{k-1}(\varkappa)}.$$

Man könnte argwöhnen, daß die durch $\exp_{k-1}(\varkappa)^+$ gegebenen Schranken weitaus zu groß sind. Ein Indiz dafür, daß dies nicht so ist, liefert das Resultat von Sierpinski:

$$2^{\varkappa} \not\rightarrow (\varkappa^+)^2_2.$$

In ihrem „giant triple paper" haben Erdös, Hajnal und Rado 1965 mit Hilfe des sogenannten „negative stepping up lemma" gezeigt, wie sich allgemeine untere Schranken beweisen lassen. Genauer:

Satz 5.2

(i) $\exp_{k-1}(\varkappa) \not\rightarrow (\varkappa^+)^k_2$

(ii) $\exp_{k-1}(\varkappa) \not\rightarrow (k+1)^k_{\varkappa}.$

Die exakte Bestimmung der Ramseyzahlen für unendliche Kardinalzahlen wird zu Recht als das grundlegende Problem des Partitionskalküls angesehen. Darüber hinaus gibt es eine Vielzahl weiterer tiefliegender Ergebnisse, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

6 Kanonische Ramsey-Theorie

In ihrer Arbeit „A combinatorial theorem" [1950B] haben Paul Erdös und Richard Rado den Grundstein zur sogenannten Kanonischen Ramsey-Theorie gelegt. Sie untersuchten eine Verallgemeinerung des Satzes von Ramsey dahingehend, daß Färbungen mit beliebig vielen Farbklassen zugelassen sind.

Man betrachtet also beliebige Äquivalenzrelationen und fragt nach hereditären Mustern. Es zeigt sich, daß ein typisches Muster der k-elementigen Menge $A = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}_<$ darin besteht, eine gewisse Teilmenge $A : J = \{a_i \mid i \in J\}$ auszuzeichnen, wobei $J \subseteq \{0, \ldots, k-1\}$ eine dieses Muster beschreibende Menge ist.

Erdös und Rado bezeichnen diese Muster als kanonische Muster. Es gibt also 2^k viele kanonische Muster k-elementiger Mengen. Das Erdös-Rado-Canonization Theorem besagt nun, daß es keine weiteren erblichen Muster gibt.

Satz 6.1. Zu jeder Färbung $\Delta : \binom{\mathbb{N}}{k} \to \mathbb{N}$ der k-elementigen Teilmengen von N mit abzählbar vielen Farben gibt es stets eine unendliche Teilmenge $X \subseteq N$ sowie eine Teilmenge $J \subseteq \{0, \ldots, k-1\}$ derart, daß für alle k-elementigen Teilmengen A und B von X gilt:

$$\Delta(A) = \Delta(B) \quad \text{genau wenn} \quad A : J = B : J.$$

Im Falle $k = 1$ reduziert sich diese Aussage auf das Schubfachprinzip; zu jeder Färbung $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt es eine unendliche Teilmenge, die entweder einfarbig oder injektiv gefärbt ist.

Für $k = 2$, man färbt zweielementige Teilmengen, gibt es genau vier kanonische Muster: einfarbig, injektiv, die Farbe hängt nur vom minimalen Element ab und, als letzter Fall, die Farbe hängt nur vom maximalen Element ab.

In seiner Arbeit „Direct decomposition of partitions" [1954A] untersucht Rado dann, wie sich hereditäre Muster von Produkten beschreiben lassen. Es zeigt sich, daß erbliche Muster von

$$\binom{N_0}{k_0} \times \binom{N_1}{k_1}$$

in der Tat als Produkte der kanonischen Muster von $\binom{N_0}{k_0}$ und $\binom{N_1}{k_0}$ beschrieben werden können. Dies ist durchaus nicht so banal, wie es auf den ersten Blick scheinen mag, da es Beispiele von allgemeineren Produktsituationen gibt, bei denen dies nicht der Fall ist. Eine ausführliche Diskussion von kanonischen Produktargumenten wurde später von Voigt gegeben.

7 Wohlquasiordnungen

Ausgehend von einer Frage von Erdös untersuchte Higman partielle Wohlordnungen, welche heute auch Wohlquasiordnungen genannt werden.

Definition 7.1. Eine teilweise Ordnung heißt *Wohlquasiordnung*, falls jede nichtleere Teilmenge mindestens ein, aber höchstens endlich viele minimale Elemente besitzt.

Es ist nicht schwierig zu sehen, – hier braucht man einige oft wiederentdeckte kombinatorische Argumente sowie den Satz von Ramsey – daß das Produkt von zwei Wohlquasiordnungen mit der Produktordnung wieder eine Wohlquasiordnung ist, ja daß sich endliche Folgen von Elementen aus einer Wohlquasiordnung auf natürliche Weise so partiell ordnen lassen (Higman-Ordnung), daß wieder eine Wohlquasiordnung entsteht.

Definition 7.2. Sei $P_{\leqslant}$ eine teilweise Ordnung. Die Higman-Ordnung $\leqslant^*$ für endliche Folgen über P ist definiert dadurch, daß $(x_0 \ldots x_{m-1}) \leqslant^* (y_0 \ldots y_{n-1})$ genau wenn eine strikt aufsteigende Abbildung $f\colon \{0, \ldots, m-1\} \to \{0, \ldots, n-1\}$ existiert mit $x_i \leqslant y_{f(i)}$ für alle i.

Rado [1954D] untersuchte ω-Folgen über Wohlquasiordnungen und gab ein Beispiel, welches zeigt, daß Higman-Ordnung für ω-Folgen nicht wohlquasigeordnet zu sein braucht. Das tiefe Verständnis von Rado für diese Fragestellungen zeigt sich darin, daß sein Beispiel auch universell ist.

Satz 7.3. Die Radoordnung auf $\binom{\mathbb{N}}{2}$ ist definiert durch $\{x, y\} \leqslant' \{u, v\}$ mit $x < y$, $u < v$, genau wenn $x = u$ und $y \leqslant v$ oder aber $y < u$.

Satz 7.4. Sei $P_{\leqslant}$ eine Wohlquasiordnung. Die Higman-Ordnung für ω-Folgen über $P_{\leqslant}$ ist eine Wohlquasiordnung genau wenn $P_{\leqslant}$ nicht die Radoordnung enthält.

Bei seinen Überlegungen gewann Rado den Eindruck, daß ein Transferresultat: aus „P wohlquasigeordnet“ folgt „Folgen über P wohlquasigeordnet“ noch richtig wäre, wenn man nur „restringierte“ Folgen z. B. mit endlichem Wertebereich betrachtet. Nach Vorarbeiten von Kruskal und Erdös bewies Nash-Williams 1965 diese Vermutung von Rado. Mit dieser Arbeit von 1968 stieß Nash-Williams das Tor auf zum weiten Feld der „besseren Quasiordnungen“ sowie zur „topologischen Ramseytheorie“.

Die von Rado initiierten Fragestellungen über Wohlquasiordnungen gehören heute zum Standardrepertoire der Ordnungstheorie.

8 Das Radosche Auswahlprinzip

In der Mathematik kommen immer wieder Schlüsse vom Endlichen aufs Unendliche vor. Beispiele sind uns schon begegnet, so die Äquivalenz der Sätze (S 1) und (S 2) bzw. (W 1) und (W 2), (R 1) und (R 2), (Rs 2) und (Rs 4). In seiner Arbeit „Axiomatic treatment of rank in infinite sets“, [1949C], hat Richard Rado sein Auswahlprinzip – den folgenden Satz 8.1 – formuliert, das sich als grundlegendes Hilfsmittel der unendlichen Kombinatorik erwiesen hat.

Satz 8.1. Gegeben sei eine unendliche Familie $(M_i)_{i\in I}$ aus *endlichen* Mengen M_i mit der Vereinigungsmenge $M=\bigcup_{i\in I} M_i$. Zu jeder *endlichen* Indexmenge $J\subseteq I$ sei eine *partielle Auswahlfunktion*

$$f_J: J\to M \quad \text{mit} \quad f_J(i)\in M_i \quad \text{für } i\in J$$

gegeben.

Dann gibt es eine *totale Auswahlfunktion*

$$(8.1)\quad f: I\to M \quad \text{mit} \quad f(i)\in M_i \quad \text{für } i\in I,$$

so daß zu jeder endlichen Indexmenge J eine endliche Indexmenge K mit $J\subseteq K\subseteq I$ existiert, so daß

$$(8.2)\quad f|J=f_K|J$$

gilt. (Die totale Auswahlfunktion stimmt also auf jeder endlichen Indexmenge mit mindestens einer partiellen Auswahlfunktion überein.)

Rado hat diesen Satz 1949 mit Hilfe des Wohlordnungssatzes bewiesen. Ein eleganter Beweis mit Hilfe des topologischen Satzes von Tychonoff stammt von Gottschalk 1951. Ein weiterer relativ einfacher Beweis wurde in [1971B] von Rado gegeben, unter Benützung des Zornschen Lemmas.

Einige Anwendungen des Radoschen Auswahlprinzips:

a) *Je zwei Basen eines Vektorraumes* (allgemeiner eines Matroids, s. z. B. Aigner, Combinatorial Theory, sowie den folgenden Abschnitt 9) *sind gleichmächtig.*

b) *Jede torsionsfreie abelsche Gruppe* (mit der Eigenschaft $x^n=1\Rightarrow x=1$) *läßt sich ordnen* (als geordnete Gruppe).

c) *Läßt sich jeder endliche Teilgraph E eines unendlichen Graphen G mit k Farben färben, so daß gleichfarbige Ecken nicht durch eine Kante verbunden sind, so läßt sich G* (mit derselben Nebenbedingung) *mit k Farben färben.*

Andersherum: Läßt sich G nicht mit k Farben färben, so gilt dasselbe schon für einen endlichen Teilgraphen E von G.

Beispiel c) läßt sich verallgemeinern auf *Hypergraphen.* Ein Hypergraph $\mathscr{H}$ besteht aus einer Menge H von *Punkten* und einer Menge $\mathscr{B} \subseteq 2^H$ von *Blöcken*, d. h. endlichen Teilmengen von H. Unter einer k-Färbung von $\mathscr{H}$ verstehen wir eine Abbildung $f: H \to F$ mit $|F| = k$, so daß kein Block $B \in \mathscr{B}$ einfarbig ist, d. h. $|\{f(x): x \in B\}| > 1$ für jeden Block B gilt. Die *chromatische Zahl* $\chi\mathscr{H}$ ist (wie in der gewöhnlichen Graphentheorie) die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, für welche eine k-Färbung von $\mathscr{H}$ existiert, und ∞, falls es kein solches k gibt.

Beispiele: 1) $H = \mathbb{N}$. $\mathscr{B}$ besteht aus den arithmetischen Progressionen der Länge $l+1$. Der Satz von van der Waerden sagt, daß $\chi\mathscr{B} = \infty$ ist.

2) $H = \mathbb{N}$, und $\mathscr{B}$ besteht aus den Lösungen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ des Gleichungssystems (2.2). Der Hauptsatz von Rado sagt, daß die Spaltenbedingung mit der Aussage $\chi\mathscr{H} = \infty$ äquivalent ist.

3) $H = \binom{\mathbb{N}}{r}$, und $\mathscr{B}$ besteht aus den Mengen $\binom{M}{r}$ mit $M \in \binom{\mathbb{N}}{m}$, wobei die Zahlen $r, m \in \mathbb{N}$ fest gegeben sind. Der Ramsey-Satz (Rs 2) sagt aus, daß $\chi\mathscr{H} = \infty$ ist.

Unter einem *Teilhypergraphen* $(T, \mathscr{B}_T)$ verstehen wir einen Hypergraphen mit der Punktmenge $T \subseteq H$ und der Blockmenge

$$\mathscr{B}_T := \{X \in \mathscr{B} : X \subseteq T\} = \mathscr{B} \cap 2^T.$$

Satz 8.2. $\mathscr{H}$ sei ein Hypergraph. Ist $\chi\mathscr{H} > k$, so gibt es einen endlichen Teilhypergraphen $\mathscr{H}'$ mit $\chi\mathscr{H}' > k$.

Beweis: $I = H$ sei die Menge der Punkte von $\mathscr{H}$, und $M = \mathbb{N}_1^k$ die Menge der Farben. Zu zeigen ist: Gestattet jeder endliche Teilhypergraph $\mathscr{H}'$ eine k-Färbung, so gestattet $\mathscr{H}$ eine k-Färbung. Wir setzen $M_j := M$ für alle $j \in I$. Für endliche $J \subseteq I$ gibt es nach Voraussetzung eine k-Färbung $f_J: J \to M$, die auf keinem Block $B \subseteq J$ einfarbig ist. $f: I \to M$ sei eine (totale) Radosche Auswahlfunktion, und B sei ein Block. Es gibt eine endliche Teilmenge $K \subseteq I$ mit $B \subseteq K$ und $f|B = f_K|B$. Daher ist f auf B nicht einfarbig, w.z.b.w.

Beispiele:

(S 1) $\Leftrightarrow$ (S 2), (W 1) $\Leftrightarrow$ (W 2), (R 2) $\Leftrightarrow$ (R 1), (Rs 2) $\Leftrightarrow$ (Rs 4).

Diese vier Beispiele folgen schon aus dem Auswahlprinzip für abzählbare Mengen und waren lange vor der Entdeckung des allgemeinen Auswahlprinzips bekannt.

9 Matroide und Transversaltheorie

Die klassischen Begriffe und Schlußweisen über lineare Abhängigkeit wurden einerseits von van der Waerden (in seinem Algebrabuch, mit Anwendung auf die algebraische Unabhängigkeit), andererseits von Whitney 1935 (mit einer Fülle von Beispielen, unter anderem aus der Graphentheorie) axiomatisiert. Daraus ist die Matroidtheorie entstanden (vgl. etwa Aigner, Combinatorial Theory, oder Welsh, Matroid Theory). Sie behandelt im wesentlichen mathematische Strukturen folgender Art (es gibt viele äquivalente Axiomensysteme dafür):

Gegeben ist eine Menge V. Eine Teilmenge $\mathscr{U} \subseteq 2^V$ aus endlichen Teilmengen von V ist ausgezeichnet; diese Teilmengen heißen *unabhängig.* Dabei sollen – wie in Vektorräumen – folgende Eigenschaften erfüllt sein:

(U 1) Die leere Menge ist unabhängig.

(U 2) Jede Untermenge einer unabhängigen Menge ist unabhängig.

(U 32) Aus $A, B \in \mathscr{U}$ und $|B| = |A| + 1$ folgt $A \cup \{x\} \in \mathscr{U}$ für mindestens ein $x \in B \backslash A$.

Die geläufigsten Beispiele sind die Vektorräume V bzw. geeignete Untermengen von solchen. Aus diesen Axiomen – oder äquivalenten Axiomensystemen (s. dazu auch Rados Übersichtsartikel: Abstract linear dependence [1966 A]) – lassen sich die natürlichen Verallgemeinerungen der Fundamentalsätze der linearen Algebra gewinnen. Insbesondere gelten die klassischen Sätze über Rang (Dimension) und Basis unverändert. Wie schon erwähnt, hat Rado sein Auswahlprinzip aufgestellt, um in diesem allgemeinen Rahmen zu beweisen, daß alle Basen eines Matroids gleichmächtig sind. (Eine Basis ist natürlich eine maximale unabhängige Teilmenge, und eine unendliche Menge heißt unabhängig, wenn alle ihre endlichen Teilmengen unabhängig sind.)

Der *Heiratssatz* von Philip Hall (1935), der heute in jedem Lehrbuch der Kombinatorik steht und auf dem die ganze Transversaltheorie (siehe dazu die Bücher von Mirsky, einem Schüler Rados, und Jungnickel) aufbaut, sagt folgendes:

Gegeben seien die *endlichen* Mengen $M_i, i \in I$, mit $|I| < \infty$. Gesucht ist eine Bedingung dafür, daß aus jedem M_i ein x_i ausgewählt werden kann, so daß alle $x_i, i \in I$, verschieden sind. Die x_i bilden dann ein sogenanntes *Vertretersystem* (system of distinct representatives). Notwendig für dessen Existenz ist offenbar die folgende Bedingung von Philip Hall:

(H) $\quad |\bigcup_{i \in J} M_i| \geqslant |J|$ für jede endliche Teilmenge J von I.

Satz 9.1. Die Hallsche Bedingung (H) ist hinreichend für die Existenz eines Vertretersystems.

Marshall Hall hat den Heiratssatz auf *unendliche Indexmengen I* verallgemeinert. Ein ganz kurzer Beweis dieser Verallgemeinerung folgt wieder aus dem Radoschen Auswahlprinzip. Weiter hat Rado eine Abschätzung (von M. Hall) der *Anzahl* der Vertretersysteme noch verbessert, siehe [1967 B]. Vor allem aber hat er den Heiratssatz auf Matroide übertragen. Er ging von folgender Fragestellung aus:

Gegeben seien Teilmengen $M_1, \ldots, M_n$ aus Elementen (= Punkten) eines Matroids. Haben sie ein *unabhängiges* Vertretersystem $(x_1, \ldots, x_n)$? Eine *notwendige* Bedingung dafür ist

$$\text{(RR)} \quad \operatorname{rang}\left(\bigcup_{i \in J} M_i\right) \geqslant |J| \text{ für jedes } J \subseteq \mathbb{N}_1^n,$$

das heißt, daß die Vereinigung der M_i, $i \in J$, stets mindestens $|J|$ unabhängige Elemente enthält. Der Rang ersetzt also die Anzahl.

Satz 9.2. Die Bedingung (RR) ist hinreichend für die Existenz eines unabhängigen Vertretersystems. Siehe R. Rado, A theorem on independence relations, [1942A]. Nach [1967C] gilt die entsprechende Verallgemeinerung auch für Matroide unendlichen Ranges und unendliche Indexmengen I.

Dieses Resultat ergab den Schlüssel zu vielen weiteren Sätzen mittels der Interpretation von speziellen Situationen durch geeignete Matroide (siehe dazu Mirsky, Tranversal Theory). Die Verallgemeinerung des Heiratssatzes auf beliebige Mengen M_i und beliebige Indexmengen I erwies sich als äußerst schwierig. Befriedigende notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Vertretersystemen wurden schließlich 1983 von Aharoni, Nash-Williams und Shelah gegeben, und es ist ein schöner Abschluß dieses Berichts, daß Nash-Williams als Rados Nachfolger dessen Lehrstuhl in Reading übernahm.

Schlußbemerkung

Dieser Bericht über Teile des mathematischen Werks von Richard Rado muß notwendigerweise recht unvollständig bleiben, weil Rado viel mehr zum mathematischen Forschritt beigetragen hat, als sich in Kürze darstellen läßt. So konnten die meisten seiner 116 mathematischen Publikationen hier nicht einmal erwähnt werden. Sie werden jedoch im nachfolgenden Schriftenverzeichnis vollständig aufgeführt.

Schriftenverzeichnis Richard Rado

Abkürzungen
Jahrb.: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik
MR: Mathematical Reviews
Zbl: Zentralblatt für Mathematik

[1931A] Über stetige Fortsetzung reeller Funktionen. Sitzber. Bayer. Akad. Wiss. (Math.-Naturw. Abt.), 1931, 81–84. Jahrb. LVII (1931), 300. Zbl. 3, 154

[1933A] Zur Boltzmannschen Theorie des zweiten Hauptsatzes. Erkenntnis 3, 101–102. Jahrb. LVIII (1932), 1321. Zbl. 5, 279

[1933B] Studien zur Kombinatorik. Math. Zeitschrift **36** (1933), 424–480. Jahrb. LIX (1933), 896. Zbl. 6, 146

[1933C] Verallgemeinerung eines Satzes von van der Waerden mit Anwendungen auf ein Problem der Zahlentheorie. Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. (Phys.-Math. Kl.), 1933, 589–596. Jahrb. LIX (1933), 898. Zbl. 7, 198

[1933D] Fragen der Kombinatorik in der Theorie der diophantischen Gleichungen. Jber. D. Math.-Ver. **42** (1933), *121–124*. Jahrb. LIX (1933), 107

[1933E] Bemerkungen zur Kombinatorik im Anschluß an Untersuchungen von Herrn D. König. Sitzber. Berlin. Math. Ges. **42** (1933), 60–75. Jahrb. LIX (1933), 105. Zbl. 7, 389

[1934A] A new proof of a theorem of v. Staudt. J. London Math. Soc. **9** (1934), 85–88. Jahrb. LX (1934), 115

[1934B] A note on the Bernoullian numbers. J. London Math. Soc. **9** (1934), 88–90. Jahrb. LX (1934), 115. Zbl. 9, 150

[1934C] A proof of Minkowski's theorem on homogeneous linear forms. J. London Math. Soc. **9** (1934), 164–165. Jahrb. LX (1934), 157. Zbl. 9, 245

[1935A] A remark on Minkowski's theorem about linear forms. J. London Math. Soc. **10** (1935), 115. Jahrb. LXI (1935), 182. Zbl. 11, 247

[1936A] A new proof of a theorem of Hardy and Littlewood. J. London Math. Soc. **11** (1936), 87–92. Jahrb. LVII (1936), 203. Zbl. 14, 11

[1936B] Theorems about the maximum modulus of polynomials. Proc. London Math. Soc. (*2*) **41** (1936), 221-242. Jahrb. LXII (1936), 71. Zbl. 14, 302

[1936C] Linear transformations of sequences. Phil. Trans. Roy. Soc. (A) **235** (1936), 367–414. Jahrb. LXII (1936), 212. Zbl. 14, 311

[1936D] Some recent results in combinatorial analysis. Comptes rendus du congrés International des Mathématiciens, Oslo 1936, **2**, 20–21. Jahrb. LXIII (1937), 40

[1937A] Note on a mean value theorem of Littlewood. J. London Math. Soc. **12** (1937), 222–229. Jahrb. LXIII (1937), 161. Zbl. 17, 204

[1938A] A theorem on general measure functions. Proc. London math. Soc. (*2*) **44** (1938), 61–91. Jahrb. LXIV (1938), 191. Zbl. 19, 55

[1939A] Some elementary Tauberian theorems (I). Quart. J. Math. (Oxford) **9** (1938) 274–282. Jahrb. LXIV (1938), 177. Zbl. 20, 17

[1939A] Some elementary Tauberian theorems (II). Quart. J. Math. (Oxford) **10** (1939) 28–37. Jahrb. LXV (1939), 241. Zbl. 20, 218

[1940A] The distributive law for products of infinite series. Quart. J. Math. (Oxford) **11** (1940), 229–242. Jahrb. LXVI (1940), 250. Zbl. 25, 37. MR 2, 277

[1941A] Some solved and unsolved problems in the theory of numbers. Math. Gazette **25** (1941), 72–78

[1942A] A theorem on independence relations. Quart. J. Math. (Oxford) **13** (1942), 83–89. MR 4, 269

[1943A] Theorems on linear combinatorial topology and general measure. Annals of Math. (2) **44** (1943), 228–270. MR 5, 151. Zbl. 61, 97

[1943B] Note on combinatorial analysis. Proc. London Math. Soc. (*2*) **48** (1943), 122–160. MR 5, 87. Zbl. 28, 338

[1945A] Two theorems on graphs. Annals of Math. (*2*) **46** (1945), 429–467. MR 7, 139

[1946A] The irreducible factors of certain polynomials. Quart. J. Math. (Oxford) **17** (1946), 111–115. MR 8, 10. Zbl. 60, 46

[1946B] A theorem on the geometry of numbers. J. London Math. Soc. **21** (1946), 34–47, Zbl. 8, 444. MR 60, 115

[1946C] A theorem on general measure. J. London Math. Soc. **21** (1946), 291-300. MR 9, 137. Zbl. 61, 96

[1947A] A theorem on Abelian groups. J. London Math. Soc. **22** (1947), 219–226. MR 9, 408. Zbl. 34, 163

[1947B] A sequence of polyhedra having intersections of specified dimensions. J. London Soc. **22** (1947), 287–289. MR 9, 605. Zbl. 30, 265

[1948A] An arithmetical property of the exponential function. J. London Math. Soc. **23** (1948), 267–271. MR 10, 354. Zbl. 39, 42

[1949A] Covering theorems for ordered sets. Proc. London Math. Soc. (*2*) **50** (1949), 509–535. Zbl. 32, 148. MR 10, 688

[1949B] Factorization of even graphs. Quart. J. Math. (Oxford) **20** (1949), 95–104. MR 10, 728. Zbl. 32, 316

[1949C] Axiomatic treatment of rank in infinite sets. Canad. J. Math. **1** (1949), 337–343. MR 11, 238. Zbl. 33, 253

[1949D] Some covering theorems (I). Proc. London Math. Soc. (*2*) **51** (1949), 232–264. MR 1, 51. Zbl. 40, 251

[1950A] G. H. Hardy's contribution to the study of inequalities. J. London Math. Soc. **25** (1950), MR 12, 135. Zbl. 36, 146

[1950B] A combinatorial theorem. J. London Math. Soc. **25** (1950), 249–255. (With P. Erdös.) Zbl. 38, 153. MR 12, 322

[1950C] Covering theorems for systems of similar sets of points. Proceedings of the International congress of Mathematicans, Harvard University, 1950, **1**, 498–499

[1951A] A proof of the basis theorem for finitely generated Abelian groups. J. London Math. Soc. **26** (1951), 74–75. MR 13, 104

[1951B] Some covering theorems (II). Proc. London Math. Soc. [*2*] **53** (1951), 243–267. MR 13, 61

[1952A] An inequality. J. London Math. Soc. **27** (1952), 1–6. MR 13, 539

[1952B] Sets having a divisor property. Amer. Math. Monthly **59** (1952), 255–257. (With P. Erdös)

[1952C] Theorems on the intersection of convex sets of points. J. London Math. Soc. **27** (1952), 320–328. MR 13, 970

[1952D] A theorem on sequences of convex sets. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **3** (1952), 183–186. MR 14, 309

[1952E] Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set. Proc. London Math. Soc. (*3*) **2** (1952), 417–439. (With P. Erdös). MR 16, 455. Zbl. 48, 282–283

[1953A] A problem on ordered sets. J. London Math. Soc. **28** (1953), 426–438. (With P. Erdös.) Zbl. 51, 40. MR 15, 410

[1954A] Direct decomposition of partitions. J. London Math. Soc. **29** (1954),71–83. MR 16, 455

[1954B] The minimal sum of a series of ordinal numbers. J. London Math. Soc. **29**. (1954), 218–232. MR 16, 19

[1954C] A partition calculus. Proceedings of the International Congress of Mathematicans, Amsterdam, (1954), **2**, 55–56. (With P. Erdös)

[1954D] Partial well-ordering of sets of vectors. Mathematika **1** (1954), 89–95. MR 16, 576

[1956A] Minimal points of convex sets in sequence spaces. Math. Zeitschrift **63** (1956), 486–495. Zbl. 70, 113. MR 17, 767

[1956B] Note on generalized inverses of matrices. Proc. Cambridge Phil. Soc. **52** (1956), 600–601. Zbl. 71, 247. MR 18, 371

[1956C] A partition calculus in set theory. Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), 427–489. (With P. Erdös.) Zbl. 71, 51. MR 18, 458

[1957A] Note on independence functions. Proc. London Math. Soc. (3) **7** (1957), 300–320. Zbl. 83, 23. MR 19, 522

[1957B] A note on matrix polynomials. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **8** (1957), 128–132. (With L. Mirsky.) Zbl. 77, 244. MR 20 #5784

[1958A] Common transversals of plane sets. J. London Math. Soc. **33** (1958), 85–95. (With R. Harrop.) Zbl. 83, 172. MR 20 #2664

[1959A] Partition relations cennected with the chromatic number of graphs. J. London Math. Soc. **34** (1959), 63–72. (With P. Erdös.) Zbl. 84, 197. MR 21 #652

[1959B] A theorem on partial well-ordering of sets of vectors. J. London Math. Soc. **34** (1959), 222–224. (With P. Erdös.) Zbl. 85, 38. MR 21 #2604

[1960A] Intersection theorems for systems of sets. J. London Math. Soc. **35** (1960), 85–90. (With P. Erdös.) Zbl. 103, 279. MR 22 #2554

[1960B] A theorem on infinite series. J. London Math. Soc. **35** (1960), 273–276. Zbl. 98, MR 26 #2852

[1960C] A construction of graphs without triangles having pre-assigned order and chromatic number. J. London Math. Soc. **35** (1960), 445–448. (With P. Erdös.) Zbl. 97, 164. MR 25 #3853

[1961A] Intersection theorems for systems of finite sets. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **12** (1961), 313–320. (With P. Erdös and Chao Ko.)

[1962A] A combinatorial theorem on vector spaces. J. London math. Soc. **37** (1962), 351–353. Zbl. 106, 12 und 169, 41. MR 26 #3708

[1963A] Monotone functions mapping the set of rational numbers on itself. J. Australian Math. Soc. **3** (1963), 282–287 (with B. H. Neumann.) Zbl. 136, 351. MR 27 #3752

[1964A] Universal graphs and universal functions. Acta Arith. **9** (1964), 331–340. MR 30 #2488. Zbl. 139, 173

[1965 A] The pigeon-hole principle for ordinal numbers. Proc. London Math. Soc. (3) **15** (1965), 750-768. (With E. C. Milner.) MR 32 #7419. Zbl. 145, 245

[1965 B] Partition relations for cardinal numbers. Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae **16** (1965), 93-196. (With P. Erdös and A. Hajnal.) MR 34 #2475. Zbl. 158, 266–267

[1966 A] Abstract linear dependence. Colloq. Math. **14** (1966), 257-264. MR 32 #2362. Zbl. 136, 262

[1967 A] A theorem on chains of finite sets. J. London Math. Soc. **42** (1967), 101-106. MR 35 #1491. Zbl. 145, 245

[1967 B] On the number of systems of distinct representatives of sets. J. London Math. Soc. **42** (1967), 107-109. MR 35 #1492. Zbl. 147, 267

[1967 C] Note on the transfinite case of Hall's theorem on representatives. J. London Math. Soc. **42** (1967), 321-324. MR 35 #2758. Zbl. 159, 18

[1967 D] Partition relations and trasitivity domains of binary relations. J. London Math. Soc. **42** (1967), 624–633. (With P. Erdös.) MR 36 #1335

[1967 E] Universal graphs. A seminar on Graph Theory. New York: Holt, Rinehart and Winston 1967, pp. 83-85. MR **35** #5357. Zbl. 159, 541

[1968 A] An extension of Sylvester's law of inertia. Linear Algebra Appl. **1** (1968), 29-31. MR 37 #234. Zbl. 164, 33

[1968 B] Some covering theorems (III). J. London Math. Soc. **43** (1968), 127-130. MR 40 #1891. Zbl. 157, 527

[1968 C] A plane set of measure zero containing circumferences of every radius. J. London Math. Soc. **43** (1968), 717-719. (With A. S. Besicovitch.) MR 37 #5345. Zbl. 172, 329

[1968 D] Some problems in the partition calculus. Combinatorics (Proc. Sympos. Pure Math., Vol., XIX, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1968), pp. 183-185. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., (1971). MR **55** #5453. Zbl. 232:05006.

[1969 A] Intersection theorems for systems of sets (II). J. London Math. Soc. **44** (1969), 467-479. (With P. Erdös.) MR 39 #6757. Zbl. 172, 296

[1969 B] The partition calculus. Recent Progress in Combinatorics. Academic Press 1969, 151-159. MR 41 #76. Zbl. 235:04002

[1969 C] Some partition theorems. Colloq. Math. Soc. János Bolyai **4** (Combinatorial Theory and its Applications, Balatonfüred, Hungary) (1969), 929-936. MR 45 #6639

[1970 A] Theorems on the colouring of the edges of a graph. Proc. Second Chapel Hill Conf. on Combinatorial Mathematics and its Applications. Chapel Hill, N. C.: Univ. North Carolina 1970, pp. 385-390. (Author's introduction). MR 42 #1716.

[1971 A] Partition relations for n_α-sets. J. London Math. Soc. (2) **3** (1971), 193-204. MR 43 #60. (With P. Erdös and E. C. Milner)

[1971 B] A selection lemma. J. Combinatorial Theory Ser. A **10** (1971), 176-177, MR **42** #5803. Zbl. 227:04002

[1971 C] A theorem on chains of finite sets. (II). Acta Arith. **18** (1971), 257-261. MR 44 #6509. Zbl. 227:05006

[1971 D] Two mean value theorems. Math. Anal. Appl. **36** (1971), 308-312. MR **45** #5282. Zbl. 223:26005

[1971 E] Isomorphisms between hypergraphs. New directions in the theory of graphs. Proc. Third Ann Arbor Conf., Univ. Michigan, (1971). New York: Academic Press 1973, pp. 207-237. MR **51** #7961. Zbl. 267:05126

[1972 A] Note on isomorphic hypergraphs and some extensions of Whitney's theorem to families of sets. J. Combinatorial Theory Ser. B **13** (1972), 226-241. MR **47** #72. (With Berge, Claude.) Zbl. 275:05128

[1972 B] Reconstruction theorems for infinite hypergraphs. Hypergraph Seminar (Proc. First Working Sem., Ohio State Univ. Columbus, Ohio, 1972, dedicated to Arnold Ross) pp. 140-146. Lecture Notes in Math., Vol. 411. Berlin: 1974 Springer. MR **51** #5323. Zbl. 302:04114

[1973 A] Linear combinations of sets of consecutive integers. Amer. Math. Monthly **80** (1973), 985-989. (With David A. Klarner.) MR **48** #8378. Zbl. 278:10014

[1973 B] A (<5)-colour theorem for planar graphs. Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 302-306. MR **48** #1960. (With A. J. Hilton, S. H. Scott.) Zbl. 278:05103

[1973C] Anti-Ramsey theorems. Infinite and finite sets. (Colloq. Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdös on his 60th birthday). Vol. III, pp. 1159–1168. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10. Amsterdam: North-Holland 1975. MR **51** #10118. Zbl. 311:05002

[1973D] The partition calculus. (Italian summary). Colloquio Internationale sulle Teorie Combinatorie (Roma, 1973) Tomo I, pp. 109–118. Atti dei Convegni Lincei, No. 17, Accad. Naz. Lincei, Rome, 1976. MR **55** #7789. Zbl. 348:05007

[1974A] A theorem on k-solubility of linear equations. Amer. Math. Monthly **81** (1974), 617–620. MR **50** #4326

[1974B] Intersection theorems for systems of sets. III. Collection of articles dedicated to the memory of Hanna Neumann, IX. J. Austral. Math. Soc. **18** (1974), 22–40. (With P. Erdös, E. C. Milner,) MR **51** #169

[1974C] Arithmetic properties of certain recursively defined sets. Pacific J. Math. **53** (1974), 445–463. (With David A. Klarner.) MR **50** #9784

[1974D] Families of sets. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 2. pp. 491–496. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975. MR **54** #10022. Zbl. 344:04002

[1975A] The cardinal module and some theorems on families of sets. Ann. Mat. Pura Appl. (*4*) **102** (1975), 135–154. MR **51** #163. Zbl. 304:04002

[1975B] On transversal families. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975), 447–451. MR **50** #12735. Zbl. 323:05003

[1975C] The selection of disjoint subsets of given sets. Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference (Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975), pp. 509–514. Congressus Numerantium, No. XV, Utilitas Math., 1976. MR **53** #2690. Zbl. 332:04003

[1976A] Families of sets whose pairwise intersections have prescribed cardinals or order types. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **80** (1976), no. 2, 215–221. (With P. Erdös and E. C. Milner) MR **54** #2469 (E **55** # 7784). Zbl. 337:04004

[1976B] Multicolouring graphs and hypergraphs. Nanta math. **9** (1976), no. 2, 152–155. (With A. J. W. Hilton, S. H. Scott.) MR **58** #27601. Zbl. 395:05036

[1976C] Corrigenda: "Families of sets whose pairwise intersections have prescribed cardinals or order types" (Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **80** (1976), no. 2, 215–221). Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **81** (1977), no. 3, 523. (With Paul Erdös, E. C. Milner.) MR **55** #7784. Zbl. 349:04006

[1976D] Problems in combinatorial set theory. Higher combinatorics (Proc. NATO Advanced Study Inst. Berlin, (1976), pp. 69–78. NATO Adv. Study Inst. Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci. 31. Dordrecht: Reidel 1977. MR **80g:04006**. Zbl. 366:04010

[1977A] Weak versions of Ramsey's theorem. J. Combinatorial Theory Ser. **B 23** (1977), 24–32. MR **56** #8374. Zbl. 382:05042

[1977B] Monochromatic paths in graphs. Advances in graph theory (Cambridge Combinatorial Conf. Trinity College, Cambridge (1977), Ann. Discrete Math. **3** (1978), 191–194. MR **58** #5334. Zbl. 388:05031

[1978A] Sets of constancy of regressive functions on well ordered sets. J. London Math. Soc. (*2*) **17** (1978), no. I, 1–4. MR **57** #16089. Zbl. 381:04002

[1978B] Reconstruction theorems for families of sets. J. London Math. Soc. (*2*) **17** (1978), no. 1, 5–9. (With A. Wilkie) MR **57** #16088. Zbl. 392:05048

[1978C] Sequential partition relations. (French summary) Problèmes combinatoires et thèorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, (1976), pp. 339–341, Colloques Internat. Paris: CNRS 1978. MR **81k:05003**. Zbl. 412:05002

[1979A] A theorem on flow in directed graphs. J. London Math. Soc. (*2*) **19** (1979), no. 1, 187–191. (With Philippe Artzner.) MR **80d:90033**. Zbl. 403:05046

[1979B] Transversals and multitransversals. J. London Math. Soc. (*2*) **20** (1979), no. 3, 387–395. (With Paul Erdös, Fred Galvin.) MR **81c:04001**. Zbl. 492:04005

[1980A] Selective families of sets. Proc. Roy. Soc. Ser. A **372** (1980), no. 1750, 307–315. MR **82g:04005**. Zbl. 471:04007

[1981A] Theorems on intervals of ordered sets. Discrete Math. **35** (1981), 199–201. MR **82i:05037**. Zbl. 463:06001

[1982A] Atoms of families of sets. Combinatorica **2** (1982), no. 3, 311–314. MR **85d:05074**. Zbl. 509:05004

[1983A] Paul Erdös is seventy years old. Combinatorica **3** (1983), no. 3–4, 243–244. MR **85h:01028a**. Zbl. 534:01019

[1984A] Unisecants of families of sets. Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1983), 255–258. Academic Press, London-New York, 1984. MR **86g:05002**. Zbl. 547:05003

*[1984B] Combinatorial set theory: Partition relations for cardinals. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 106. Amsterdam, New York: North-Holland 1984, 347 pp. (With Paul Erdös, A. Hajnal, Attila Máté.) MR **87g:04002**. Zbl. 573:03019*

[1986A] Note on canonical partitions. Bull. London Math. Soc. **18** (1986), no. 2, 123–126. MR **87e:05013**. Zbl. 584:05006

Ergänzende Literatur über Richard Rado und seinen Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik

[D 1989] Deuber, W.: Developments based on Rado's dissertation „Studien zur Kombinatorik". In: London Math. Soc. Lecture Note Series 141: Surveys in Combinatorics, 1989, ed. J. Siemons, pp. 52–74

[DF 1983] Dëza, M.; Frankl, P.: Erdös-Ko-Rado theorem – 22 years later. SIAM J. Algbr. and Discrete Methods **4** (1983), 419–431

[E 1987] Erdös, P.: My joint work with Richard Rado. Proc. 11th British Combinatorial Conference (1986), 53–80

[GRS 1980] Graham, R. L.; Rothschild, B.; Spencer, J.: Ramsey theory. Wiley Interscience 1980

[L 1983] Lenz, H: Aus dem mathematischen Werk von Richard Rado. Jahrb. Überblicke Math. 1983, 177–189

[M 1971] Mirsky, L.: Studies in pure mathematics. Academic Press, London 1971

Außerdem Nachrufe in:
The Times 2. 1. 1990
The Guardian 11. 1. 1990
The Independent 11. 1.1990
University of Reading Bulletin No. 221, Feb. 1990
FU-Info 5/90 (Freie Universität Berlin)
British Combinatorial Bulletin 1989–90

Liste der unter Anleitung von Richard Rado angefertigten Dissertationen

Gabriel A. Dirac: On the colouring of graphs: combinatorial topology of linear complexes (Reading 1951–52)

Anthony J. W. Hilton: Representation theorems for integers and real numbers (Reading 1967)

John Alfred Henry Anderson: Rearrangement Theorems for Sums and Products of Ordinal Numbers (Reading 1971)

H. Lenz
M. Aigner
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik II
Arnimallee 3
1000 Berlin 33

W. Deubner
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Abteilung I
Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1

(*Eingegangen 12. 12. 1990, revidiert 28. 2. 1991*)

Buchbesprechungen

Bolzano, B., Wissenschaftslehre §§ 164–222, § § 223–268, herausgegeben von Jan Berg. Bernard Bolzano-Gesamtausgabe, Reihe I, Band 12, 2. Teil, Band 12, 3. Teil, Stuttgart-Bad Cannstatt: Friedrich Frommann 1988, 237 S./239 S., Ln., je Band DM 335,–

Jeder Mathematikstudent weiß, daß Bolzano (1781–1848) Sätze über stetige Funktionen bewiesen und ein Gegenbeispiel zu ihrer Differenzierbarkeit angegeben hat. Wichtig für die Entwicklung der Analysis ist daran: Er hat als einer der ersten gesehen, daß derartige Aussagen eines Beweises oder einer Widerlegung bedürfen, und daß man in der Analysis nicht nur, wie zuvor üblich, aus Formelausdrücken, sondern auch aus Begriffen schließen kann. Das führte ihn zur Untersuchung von Grundbegriffen wie dem der „reellen" Zahl. (Vgl. diesen Jahresbericht **79** (1977) 33; **80** (1978) 20.)

Konsequenterweise kommt man dann, und zwar nicht nur von der Mathematik aus, zur *Wissenschaftslehre* (1837), dem philosophischen Hauptwerk, mit der Begründung der Lehre von den „Sätzen an sich" und von den Schlüssen, deren für den Mathematiker wichtigste Teile in den beiden vorliegenden Bänden enthalten sind. Bolzano gilt manchen als Vorläufer von Mengenlehre und mathematischer Logik, doch ist es empfehlenswert, sein viel breiter angelegtes Werk ohne Festlegung auf uns vertraute Begriffe aufzunehmen.

Mit Freudenthal kann man in Bolzanos Mathematik „premature discoveries" sehen, die erst viel später beachtet wurden, und entsprechendes gilt auch für die Wissenschaftslehre. Die Neuausgabe sollte jedem an den Grundlagen der Mathematik Interessierten zugänglich sein. Bolzano schreibt für Mathematiker verständlicher als wir es sonst bei Philosophen befürchten. Es gibt zwei weitere Einstiegshilfen, eine in Bolzanos eigenem Text und die andere in den ausgezeichneten Einleitungen des Herausgebers.

Ich habe es hilfreich gefunden, zunächst Bolzanos eigene Auseinandersetzungen mit den Vorgängern zu studieren, hier die §§ 185–194 und 254–268. Man findet eine verständliche Darstellung der Lehre von den Schlüssen seit Aristoteles, in der Bolzano abwägend seine eigenen Abweichungen begründet. Zugleich wird seine eigentümliche Wissenschaftssprache umgangssprachlich erläutert. Bolzano strebt mit seiner Schlußlehre weit mehr an als eine formalisierbare mathematische Logik oder eine Reduktion auf eine Mengenlehre. Andererseits betont er (§ 185), daß er *Sätze an sich* betrachtet und anschließend sprachliche Sätze, die solche Verhältnisse ausdrücken. Umgangssprachliches Reden über Verträglichkeit, Ableitbarkeit, Wahrscheinlichkeit, Kausalität, Abfolge reduziert er auf Sätze der kanonischen Form: Die Vorstellung V hat die Beschaffenheit b, kurz V hat b. (Auch eine natürliche Zahl wird als Beschaffenheit aufgefaßt.) Entsprechend lautet eine kanonische Form für den Existenzquantor: Die Vorstellung von einem V hat Gegenständlichkeit (bzw. Mangel an Gegenständlichkeit).

In seiner Beweistheorie (§§ 195–222) kann Bolzano u. a. die Frage behandeln, ob B eine logische Folgerung aus A ist, nicht aber in präziser Weise, ob eine Formel B aus einer Formel A in einer Theorie T formal herleitbar ist. Doch behandelt er spezielle Fragen der Art, ob eine Formelkette (Abfolge) eine Herleitung von B aus A innerhalb von T ist. Dabei ist ein „Beweis" nicht auf rein logische Beziehungen beschränkt, sondern kann auch auf direkten Schlußfolgerungen oder inhaltlichen Implikationen beruhen. Eine explizite Definition des Begriffs Abfolge kann Bolzano nicht geben, doch stellt er dafür eine Reihe von Bedingungen auf. Berg hat versucht, diese in Postulaten zusammenzufassen, von denen das zehnte und letzte lautet: Es gibt mindestens zwei Grundwahrheiten. (Ein wahrer Satz an sich ist eine Grundwahrheit genau dann, wenn er nicht in Abfolgerelation stehen kann.)

An diesem Beispiel zeigt sich die Problematik, vor der der Herausgeber stand. Bolzano selbst ist nämlich zögernd und vermeidet apodiktische Festlegungen oftmals. Er vermutet (§ 214), „daß es allerdings Wahrheiten gebe und geben müsse, die keinen weiteren Grund ihrer Wahrheit haben: allein ich muß gestehen, daß ich bisher noch keinen Beweis dafür kenne ...“, findet etwas Vergleichbares in Leibniz' vérités primitives, aber sonst kaum. Trotz der Bedenken fährt er aber in § 215 hypothetisch im Sinne des Bergschen Postulats fort, daß es, wenn überhaupt eine, so mehrere Grundwahrheiten gebe, „weil ich nicht begreife, wie aus einer einzigen Wahrheit alle die übrigen, die es noch gibt, als Folgen und Folgen dieser Folgen hervorgehen sollten.“ Leibniz benutze ja auch den Plural. Überlegungen ontologischer Natur, die eine rein formale Logik nicht berühren würden, sind Bolzano wichtig.

Berg geht auch auf Beziehungen zur Logik des 20. Jahrhunderts ein, so auf Gentzen, das Lemma von König, auch auf Frege, und er setzt sich gelegentlich kritisch mit anderen Bolzano-Forschern (H. Scholz) auseinander. Die Editionsarbeit ist, wie in den anderen Bänden der Gesamtausgabe, vorzüglich. Zusätzlich zur Originalausgabe wurden von Bolzano selbst handschriftlich hinterlassene Korrekturen berücksichtigt. Die hervorragende Ausstattung entspricht dem Ladenpreis.

Darmstadt D. Laugwitz

Scholz, E., Symmetrie – Gruppe – Dualität, Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts (= Science Networks – Historical Studies – Band 1), Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser Verlag 1989, 406 S., Geb., DM 98,–

Der Autor vereinigt in seiner Habilitationsschrift zwei ausführliche Fallstudien aus dem Bereich der „Angewandten Mathematik“ mit einem wissenschaftstheoretischen Kapitel, das grundsätzlichen Erörterungen über die Beziehungen zwischen theoretischer Mathematik und ihren Anwendungsgebieten gewidmet ist.

Er stellt im 1. Kapitel den Übergang von der beschreibenden zur mathematischen Kristallographie detailliert dar – beginnend mit der noch dem 18. Jahrhundert angehörenden Lehre A. G. Werners, der von einfachen Kristallpolyedern als Grundgestalten ausging. Auf atomistischer Basis hatte auch J. B. L. Romé de l'Isle seine quantitativ viel stärker präzisierte Modifikationstheorie entworfen.

Im Anschluß an der Chemie Lavoisiers entnommene molekulare Vorstellungen stellte R. J. Haüy mathematisch präzisierte Erzeugungsregeln auf und gab 1822 achtzehn „elementare Kristallformen“ an. Unter dem Einfluß der dynamistischen, von Kraftvorstellungen beherrschten Naturphilosophie entwickelte C. S. Weiß sein alternatives Theoretisierungsprogramm der Kristallographie. Insbesondere läßt sich, wie Verf. zeigt, die Konzeption von Kristallachsen aus der Annahme von Hauptabstoßungsrichtungen der polar wirkenden Kräfte begreifen. Bei F. L. Frankenheim kam es dann zu einer Verbindung der beiden gegensätzlichen Standpunkte. Das – damals weitgehend übersehene – Resultat war eine vollständige Übersicht über die 32 Kristallklassen (1826) sowie in der Ausdruckweise eine Annäherung an die zeitgenössische Permutationslehre.

Die Vormachtstellung der Theorie Haüys ließ sich 1840 aufgrund der Fortschritte der Chemie nicht mehr halten. Die von G. Delafosse geforderte Anpassung im Sinn einer abstrakten Gitterkonzeption der Kristalle verlangte zuvor die Präzisierung der möglichen Symmetrietypen der Moleküle, die Analyse des Zusammenhangs zwischen Gitterkonfigurationen und Grundformen der Kristalle und die Klärung der Prinzipien des Zusammenwirkens von Gitterkonfigurationen und Molekülsymmetrien. Die beiden ersten Fragenkreise konnte A. Bravais weitgehend aufklären, die Beschäftigung mit dem dritten führte ihn zur Aufstellung einer Theorie, die in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts die eindeutig vorherrschende wurde und eine fast vollständige implizite Klassifikation der endlichen orthogonalen Gruppen ermöglichte. Bravais hatte 1850 das Ziel der Klassifikation der Raumgitter unter Symmetriegesichtspunkten erreicht (d. h. eine implizite Charakterisierung der 14 Isometriegruppen der Raumgittertypen).

Verf. wendet sich dann C. Jordans Klassifizierung der Bewegungsgruppen des euklidischen Raums (1869) zu, beschreibt dessen algebraischen Ausgangspunkt und sein Bestreben, verschiedene kristallographische Ansätze zu verbinden. Auch macht er deutlich, weshalb Jordans Leistungen zunächst eher in der Geometrie (bei F. Klein und S. Lie) auf fruchtbaren Boden fielen als in der Kristallographie. Das 1. Kapitel endet mit der Beschreibung der Durchsetzung des mathematischen Gruppenbegriffs und der Aufstellung der 230 Raumgruppentypen (L. Sohncke, E. S. Fedorov, A. Schoenflies), wie bereits in anderen, hier zitierten Publikationen näher untersucht.

Das 2. Kapitel über das Vordringen projektiver Methoden in der graphischen Statik beginnt mit einer Skizze über die Verwissenschaftlichung der Technik im 19. Jahrhundert. Dabei geht es dem Verfasser um die Verdeutlichung der Wechselwirkungen zwischen den beiden als komplementär angesehenen Entwicklungstendenzen: der starken Fixierung der mathematischen Forschung auf die reine Theorie und der Verselbständigung wichtiger Anwendungsgebiete.

Als erstes wird C. Culmanns Versuch einer Fundierung der (von ihm implizit vektoriell betriebenen) graphischen Statik durch Konzepte der projektiven Geometrie besprochen. – Etwa parallel dazu verlief die mit den Namen Rankine, Maxwell und Cremona verknüpfte Entwicklung. Maxwell erzielte durch Einbeziehen flächentopologischer Gesichtspunkte 1870 weitere Fortschritte. Cremona knüpfte 1872 an den Maxwellschen Ansatz an, leistete mit seiner Arbeit aber zugleich einen Beitrag zu Culmanns Programm, indem er die Rankine-Maxwell-Dualität von Stab- und Kräftediagramm in dessen Theoretisierungsprogramm einordnete.

Culmanns Scheitern wird vom Autor in den weiteren Zusammenhang der Methodendebatte der (deutschen) Ingenieurwissenschaften in den Jahren nach 1890 gestellt und als Paradebeispiel einer mißglückten (weil am „Formalbildungsideal" der reformierten deutschen Universitäten des 19. Jahrhunderts ausgerichteten) Theoretisierung gesehen. Zukunftsweisend war dagegen die Mathematisierung der Baustatik durch Vektorrechnung und n-dimensionale Algebra. A. Föppls „Graphische Statik" (1900), je nach Bedarf auf verschiedene mathematische Theorien zurückgreifend und die Bedürfnisse der Ingenieure berücksichtigend, markierte dann den Durchbruch.

Das 3. Kapitel bringt die interessante wissenschaftstheoretische Auswertung der beiden Fallstudien. Verf. hält bei der *angewandten Mathematik* ihren *heteronomen,* also fremdbestimmten *Charakter* für das Wesentliche gegenüber der *autonomen,* ihre eigenen Ziele setzenden *reinen Mathematik.* Die *reine Mathematik* des 19. Jahrhunderts *strebt nach selbstreferentieller Begründung;* dagegen ist die *angewandte Mathematik zumindest zum Teil* von Begründung und Bedeutung her *fremdreferentiell* – übernimmt aber dann teilweise von der reinen Mathematik das Ideal selbstreferentieller Begründung. Man sollte den Vorschlag aufgreifen, diese Kategorien auch bei weiteren mathematikhistorischen Untersuchungen anzuwenden, um zu überprüfen, inwieweit sich so der wechselseitige Einfluß zwischen reiner Theorie und Anwendungen in schärferer Weise erfassen läßt, als es mit Hilfe der traditionellen Dichotomie zwischen „reiner" und „angewandter" Mathematik möglich ist.

Hamburg C. J. Scriba

Dieudonné, J., A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960, Basel: Birkhäuser Verlag 1989, 695 S., DM 168,–

Dies ist zunächst einmal ein Buch von einem Mathematiker für Mathematiker. Als solches ist es von hohem Wert. Es informiert den Leser nicht nur über den zeitlichen und wechselseitig bedingten Ablauf topologierelevanter Entdeckungen und Konstruktionen von Poincaré bis ca. 1960, von den ersten unsicheren und auch fehlerhaften Schritten bis zur Klärung und endgültigen (?) Form. Es berichtet und kommentiert nicht nur, was die verschiedenen Forscher zu einem Thema oder einer Theorie beigetragen haben – das sind Dinge, die man von einem solchen Werk erwartet. Es gibt darüber hinaus auch mathematische Erläuterungen, gibt Beweise oder Beweisskizzen, die teils der Historie dienen teils dem mathematischen Verständnis eines Zusammenhangs. Bei diesen Erläuterungen verwendet der Autor durchaus auch neuere Betrachtungsweisen. Zwar berichtet und erklärt er, wie die frühen Topologen zu ihren Ergebnissen kamen (oft auf verschlungenen Wegen), dies aber nicht selten von einem moderneren Standpunkt aus. Das Buch ist daher so etwas wie ein historischer Enzyklopädieband der algebraischen Topologie, in welchem allerdings die s. g. niederdimensionale Topologie fast ganz fehlt (s. unten). Der Mathematiker kann daraus lernen, was Homologie ist oder ein CW-Komplex, oder auch kompliziertere Dinge wie Steenrodoperationen, ja überhaupt die wichtigsten in der Berichtsperiode entstandenen Begriffe, und er erfährt dabei gleichzeitig, wann und wie sie entstanden sind. Man kann einem guten, fortgeschrittenen Studenten das Buch zum Selbststudium empfehlen. Er wird dabei nicht nur die Grundbegriffe kennenlernen, sondern gleichzeitig auf ausführliche und weiterführende Literatur hingewiesen und vorbereitet werden. Wenn der Student dazu noch den Student's Guide von J. F. Adams (Cambridge 1972) hinzuzieht (sowie Steenrod's klassifizierenden Reviewsband, Am. Math. Soc. 1968), dann wird sein Studium der Topologie gut geführt – allerdings nur bis ca. 1960. Was danach kommt, bräuchte für die nächsten 25 Jahre einen weiteren umfangreichen Band. Außerdem fehlt die klassische und gleichzeitig aktuelle Topologie der kleinen ($\leqslant 4$) Dimensionen bedauerlicherweise fast ganz. In diesen Dimensionen treten besondere Probleme auf, bei denen die allgemeinen Methoden kaum greifen; umgekehrt sind die Methoden der kleinen Dimensionen meist auf Phänomene zugeschnitten, die in höheren Dimensionen nicht auftreten. Zumindest beim heutigen Stand wäre es angemessen, diesem Teil der Topologie ein selbständiges Buch zu widmen. Der Wissenschaftshistoriker wird an Dieudonné's Buch gewiß vieles auszusetzen haben und mit dem Vorgehen und den Methoden des Autors in vieler Hinsicht unzufrieden sein. Die Kritik, die der Besprecher C. J. Scriba in diesen Jahresberichten 83 (1981) 60–61 zu der unter der Direktion von Dieudonné publizierten „Abrégé d'histoire des math. 1700–1900“ übt, trifft in vieler Hinsicht auch für das vorliegende Buch zu. Dennoch scheint mir, daß das Buch auch dem Wissenschaftshistoriker sehr nützlich sein kann, insbesondere natürlich, wenn er sich selbst mit der Geschichte der Topologie befaßt: Es zeigt ihm Wege und innere Zusammenhänge der Topologie und es führt ihn nach mathematisch-inhaltlichen Gesichtspunkten durch die Literatur. Dabei bleiben vermutlich manche historisch interessante Quellen ungenannt, sie werden aber leichter auffindbar bzw. zugänglich. Das Buch richtet sich eben in erster Instanz an Mathematiker – und sogar vor allem an die Topologen und deren Verwandte.

Daß ein solches Werk auch mathematische Ungenauigkeiten enthält, ist bei der Fülle des Stoffes und der zwangsläufigen Skizzenhaftigkeit wohl unvermeidlich. Der Besprecher hat jedoch nur kleine Mängel bemerkt, meist fehlende Teile der Voraussetzungen, wie z. B. die folgenden (aber nicht nur diese): Seite 53, Zeile 11/12 (*transverse* intersection); S. 278, Z. 20 von unten ($\pi_1 A$ *trivial*; S. 281, Z. 3 v. u. (a *necessary* condition); S. 283, Formel (22) (*Endlichkeits*voraussetzung); S. 523 eine Kohomologieoperation ist eine *natürliche Transformation*.

Das Buch ist zweckmäßig und übersichtlich angelegt. Es besteht aus drei Hauptteilen, 18 Kapiteln und über 220 Abschnitten und Unterabschnitten. Jeder Hauptteil hat eine ausführliche, instruktive Einleitung. Es gibt eine gegliederte Aufstellung der verwendeten Bezeichnungen, einen Index der zitierten Namen, einen Sachindex und eine Bibliographie mit 526 Titeln. Wir zitieren zum Schluß die Kapitelüberschriften.

Part 1. Simplicial Techniques and Homology: The Work of Poincaré. – The Build-Up of "Classical" Homology. – The Beginnings of Differential Topology. – The Various Homology and Cohomology Theories.

Part 2. The First Applications of Simplicial Methods and of Homology: The Concept of Degree. – Dimension Theory and Separation Theorems. – Fixed Points. – Local Homological Properties. – Quotient Spaces and Their Homology. – Homology of Groups and Homogeneous Spaces. – Applications of Homology to Geometry and Analysis.

Part 3. Homotopy and Its Relation to Homology: Fundamental Group and Covering Spaces. – Elementary Notions and Early Results in Homotopy Theory. – Fibrations. – Homology of Fibrations. – Sophisticated Relations between Homotopy and Homology. – Cohomology Operations. – Generalized Homology and Cohomology.

Heidelberg A. Dold

Lüneburg, H., Tools and Fundamental Constructions of Combinatorial Mathematics, Mannheim: BI Wissenschaftsverlag 1989, 527 S., DM 78,–

Professor Lüneburg's new book on combinatorial mathematics is quite unusual in his choice of topics which, however, does not at all diminish its interest. The reader who is familiar with the author's previous books will, of course, not be surprised to learn that this is again a very personal view of the subject. As Lüneburg says himself: "It is my anthology of combinatorial mathematics which is displayed here, and there will be people denying that it is a book on combinatorics at all." Indeed, the book contains much more material from algebra (both universal and concrete) and from the foundations (number systems and set theory) than one would expect; there also is quite a bit of transfinite math in here. A glance at the table of contents will suffice to give some idea; the 24 Chapter headings are as follows:

I. Dedekind Triples: The Fundamental Gauge – II. Finite Sets: The Basic Objects of Combinatorics – III. Familiar Realizations of Dedekind Triples – IV. Adding without a Carry: Ein Glasperlenspiel – V. Rudiments of Universal Algebra – VI. Embedding Commutative Semigroups into Groups: Localization – VII. The Revolving Door Algorithm – VIII. Partitions of Finite Sets – IX. Gray Codes: The General Case – X. A Little Bit on Graphs – XI. Operator Groups – XII. The Symmetric Groups: Combinatorial Properties – XIII. The Symmetric Groups: Algebraic Properties – XIV. Lyndon Words – XV. Galois Fields: Counting Irreducible Polynomials – XVI. Ordered Sets – XVII. The Axiom of Choice: Equivalent Principles and Consequences – XVIII. The Marriage Theorem – XIX. Independence Structures – XX. Free Constructions – XXI. Symmetric Polynomials – XXII. Lie Algebras – XXIII. Ordered Groups – XXIV. The Fundamental Theorem of Algebra: A Final Highlight

As the title suggests, considerable emphasis is given to the algorithmic side of the subject; there are many detailed algorithms, e. g. for generating subsets, k-subsets, partitions, trees etc. As usual with the author, the book is very carefully written, giving all the details. The real "final highlight" is, of course, the bibliography which starts with a 20-page essay which both comments the references to follow and, much more important, places them and the matter dealt with in historical perspective. This short essay contains an astounding wealth of historical information which I found immensely interesting and important. This part by itself would already amply justify acquiring the book. I have one bit of information to be added in this context: The theorem on the dimension of the space generated by the $(n \times n)$-permutation matrices for which Lüneburg gives no source (cf. p. 490) seems to be due to H. K. Farahat and L. Mirsky ("Permutation endomorphisms and a refinement of a theorem of Birkhoff", Proc. Cambridge Phil. Soc. **56** (1960) 322–328). Another feature I like is the occasional didactical aside (all books by Professor Lüneburg serve a didiactical purpose, even if this is not generally acknowledged); in particular, I recommend reading the author's arguments in favour of basis-free teaching of linear algebra on p. 293.

The author's aim was to provide a beautiful book on combinatorics. I think he has succeeded: His book contains a lot of interesting combinatorics (both theoretical and algorithmic), and a lot of beautiful mathematics closely related to combinatorics (even if not generally considered combinatorics). Moreover, it is not just a collection of gems, plums or the like, but it gives an idea of the unity of the subject matter considered even if it seems, at first glance, rather unrelated. Presenting the reader with some fascinating and not quite expected connections is one of its main achievements; as an example, let me mention the recurring theme of Dedekind numbers (which show up in counting irreducible polynomials and in counting Lynson words which leads us on to Lie algebras and to free groups). This book should convince the sceptic that combinatorial thinking is not only a respectable but indeed an indispensable part of doing mathematics.

To sum up: This book is non-standard, but all the better for being so. I would not want to miss it, and I recommend the reader to buy his own personal copy. I think he will not be disappointed. I guess the best way to close this review is by reproducing the quote from H. E. Huntley's "The Divine Proportion" given by Lüneburg at the beginning of his Foreword: "I can't see much in your scenery here", said an American tourist to a guide in Wordsworth's country. "Don't you wish you could, sir?" was the apt retort.

Gießen D. Jungnickel

Hall, R. R., Tenenbaum, G., Divisors (Cambridge Tracts in Mathematics 90), Cambridge University Press 1988, 167 pp., \$ 39.50

Die vorliegende, technisch sehr anspruchsvolle[1]) Monographie behandelt ein spezielles, aber wichtiges und aktuelles Thema aus der analytischen Zahlentheorie, nämlich Fragen nach der Verteilung der Teiler einer (großen) Zahl n; insbesondere werden Fragen nach der Existenz von Teilern von n, die „nahe" beieinander liegen, gestellt und beantwortet. Ein zentrales Ergebnis des Buches (5. Kapitel) ist der (von H. G. Maier und G. Tenenbaum 1984 stammende) Beweis der auf P. Erdös zurückgehenden Vermutung:

Alle Zahlen $n \leqslant x$ bis auf höchstens $o(x)$ Ausnahmen besitzen zwei Teiler d, d', die $d < d' \leqslant 2d$ erfüllen.

Die meisten der in den sieben Kapiteln des Buches (einschließlich der „Exercises") bewiesenen Sätze gehen auf Arbeiten der beiden Verfasser, von H. G. Maier, A. Hildebrand und C. Hooley zurück.

---

[1]) "The book is addressed to graduates training in analytic number theory, and to more advanced persons to whom the content appears unfamiliar and potentially useful."

Als ein Ausgangspunkt der Theorie kann ein Ergebnis von Hardy und Ramanujan über die Teilerfunktion: *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *ist* $(\log n)^{\log 2 - \varepsilon} < \tau(n) < (\log n)^{\log 2 + \varepsilon}$ *p.p.* (*d. h. für alle* $n \leqslant x$ *mit höchstens* $o(x)$ Ausnahmen) oder über die Funktionen $n \to \omega(n)$ bzw. $\Omega(n)$ gelten: *Ist* $\psi(n) \nearrow \infty$, $\psi(n) \ll (\log\log n)^{1/6}$, *so gilt*

$$|\omega(n) - \log\log n| < \psi(n) \cdot \sqrt{\log\log n}$$

für alle $n \leqslant x$ *mit höchstens* $\mathcal{O}(x \cdot \exp(-1/2\, \psi^2(x)))$ *Ausnahmen.*

Im Vorwort wird beschrieben, welchen Einfluß diese Ergebnisse und die Ideen von Paul Erdös auf die weitere Entwicklung des Gebietes hatten. Die Vielzahl dieser Entwicklungen macht es unmöglich, diese alle in *einer* Monographie darzustellen. So beschränken sich die Verfasser – von denen bedeutende Beiträge zum Fragenkreis des Buches stammen – auf die Fragestellung der *propinquity of divisors:* gibt es Intervalle der logarithmischen Länge $\log^\alpha n$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, in denen „sehr viele" Teiler einer vorgegebenen Zahl n liegen?

Methodisch wird eine Vielzahl von Techniken der analytischen Zahlentheorie angewandt; ein zentraler Punkt ist die Gewinnung asymptotischer Formeln mit „guten" Restgliedern für erzeugende Funktionen der Gestalt

$$\textstyle\sum_{n \leqslant x, \ldots} f(n) \cdot y^{\Omega(n)},$$

aus deren Verhalten mit Hilfe der Fourier-Transformierten Rückschlüsse auf die Koeffizienten $f(n)$ gezogen werden können. Für die betrachteten Teilerfunktionen ist u. a. auch Information über die Exponentialsumme

$$\tau(n, \Theta) = \textstyle\sum_{d|n} d^{i\Theta}$$

nötig.

Im einzelnen werden die folgenden Fragestellungen behandelt: Im nullten Kapitel *„preliminaries"* werden wichtige, später häufig benötigte, vielseitig anwendbare Ergebnisse aus der analytischen Zahlentheorie (wie etwa Abschätzungen von Summen über multiplikative Funktionen, Siebabschätzungen [z. B. für die Anzahl der $n \leqslant x$ mit größtem Primfaktor $\leqslant z$], Ergebnisse über die lokale Verteilung der Werte der Funktionen Ω und ω) zusammengestellt.

Im ersten Kapitel werden (recht genaue) Ergebnisse über die Anzahl $\omega(n, t)$ der Primteiler $\leqslant t$ von n, die Größe des j-ten Primfaktors und des j-ten Teilers von n bewiesen, die für alle $n \leqslant x$ bis auf $o(x)$ Ausnahmewerte gelten.

Das zweite Kapitel *„Sieving by an Interval"* befaßt sich mit Abschätzungen der Anzahl $H(x, y, z)$ der ganzen Zahlen $n \leqslant x$, die mindestens einen Teiler d im Intervall $y < d \leqslant z$ besitzen. Als Anwendungen ergeben sich z. B. Existenz und Abschätzung der asymptotischen Dichte der natürlichen Zahlen n, die wenigstens einen Teiler d in

$$n^{(1-u)/t} < d \leqslant n^{1/t}$$

besitzen, sowie eine obere Abschätzung der (von y abhängigen) asymptotischen Dichte der Folge der n, die $\sum_{d|n,\, d \leqslant y} \mu(d) \neq 0$ erfüllen.

Das dritte Kapitel befaßt sich mit der später benötigen Funktion

$$\tau(n, \Theta) = \textstyle\sum_{d|n} d^{i\Theta};$$

z. B. werden für „fast alle" n gültige obere Abschätzungen sowie asymptotische Formeln für

$$\textstyle\sum_{n \leqslant x} |\tau(n, \Theta)|^\lambda \cdot y^{\omega(n)}$$

und – mit sehr genauen Restgliedern – für

$$\sum_{n \leqslant x} |\tau(n, \Theta)|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{n \leqslant x} |\tau(n, \Theta)|^2 \cdot y^{\Omega(n)}$$

bewiesen.

Im vierten Kapitel werden die vier Funktionen

$$T(n, \alpha) = \#\{d|n,\ d'|n,\ |\log(d/d')| \leqslant \log^\alpha n\},$$

$$U(n, \alpha) = \#\{d|n,\ d'|n,\ ggT(d, d') = 1,\ |\log(d/d')| \leqslant \log^\alpha n\},$$

$$\tau^+(n) = \#\{k;\ \exists\, d|n,\ 2^k < d \leqslant 2^{k+1}\}\ \text{(P. Erdös)}, \quad \text{und}$$

$$\Delta(n) = \max_z \#\{d|n,\ z < d \leqslant ez\}\ \text{(C. Hooley)}$$

studiert; z. B. werden asymptotische Formeln für die Summen

$$\sum_{n \leqslant x} T(n, \alpha) \cdot y^{\Omega(n)} \quad \text{und} \quad \sum_{n \leqslant x} U(n, \alpha) \cdot y^{\Omega(n)}$$

bewiesen, aus denen leicht obere Abschätzungen für $T(n, \alpha)$ und $U(n, \alpha)$ gefolgert werden können, die für „fast alle" n gültig sind.

Das fünfte Kapitel kreist um die schon eingangs genannte Vermutung von Erdös; es wird bewiesen, daß die Anzahl der $n \leqslant x$, die kein Teilerpaar d, d' mit $d < d' \leqslant 2d$ besitzen, ein $\mathcal{O}(x \cdot (\log\log x)^{-\beta} \cdot (\log\log\log x)^{4\beta})$ ist, wobei $\beta = 0.00415\ldots$ ist.

Die beiden letzten Kapitel schließlich befassen sich mit Verallgemeinerungen $\Delta_r(n)$ der schon oben eingeführten Hooleyschen Funktion $\Delta(n)$, die ebenfalls die „Nähe" der Teiler von n messen. Insbesondere werden untere und obere Abschätzungen für die Summe $S_r(x, y) = \sum_{n \leqslant x} \Delta_r(n) \cdot y^{\omega(n)}$ gegeben. Eine vermutete asymptotische Formel für diese Summe wird auf p. 138 formuliert. Der Beweis dieser Formel gelingt „fast", d. h. bis auf einen Faktor $(\log x)^{\mathcal{O}(1)}$.

Die Monographie enthält ein ausführliches Literaturverzeichnis, einen Anhang über Verteilungsfunktionen, weiter zu jedem einzelnen Kapitel „notes", in denen in knapper Form die Entstehung wichtiger Begriffe erläutert wird und Hinweise auf die Literatur gegeben werden. Besonders hervorzuheben sind die insgesamt 74 meist sehr anspruchsvollen „exercises" zu den einzelnen Kapiteln, die jedoch mit hinreichend vielen Lösungshinweisen versehen sind, so daß für graduierte Studenten der analytischen Zahlentheorie das Lösen der Übungsaufgaben ein außerordentlich lehrreiches Training darstellt.

Die knapp geschriebene, aber wegen der klaren Beschreibung der benötigten Ideen und der Angabe aller wesentlichen Einzelschritte für Graduierte trotz aller Kürze noch gut zu lesende Monographie behandelt ein aktuelles Teilgebiet der analytischen Zahlentheorie und bringt Ergebnisse, die bis vor kurzem noch unerreichbar schienen.

Frankfurt am Main W. Schwarz

Serre, J-P., Lectures on the Mordell-Weil Theorem, translated and edited by Martin Brown from notes by Michel Waldschmidt (Aspects of Mathematics, vol. E15), Braunschweig: Vieweg Verlag 1989, X + 218 Seiten, soft cover DM 52,–

Diese Vorlesungausarbeitung ist ein erstklassiges, weit ausgreifendes Buch zu einem klassischen Thema, in dessen Umkreis sich viele der aufregendsten Entwicklungen der neuesten Arithmetischen Algebraischen Geometrie abspielen.

Entstanden ist diese englische Version der Vorlesungausarbeitung aus der Mitschrift Michel Waldschmidts von Serres Vorlesungen am Collège de France 1980 und 1981.

Diese Mitschrift war als Preprint unter dem treffenden aber schwer übersetzbaren Titel *„Autour du Théorème de Mordell-Weil"* erhältlich, wurde aber für die vorliegende Neufassung noch einmal überarbeitet. Auf 200 „geTEXten" Seiten wird nun das imponierende Pensum bewältigt, das wir jetzt in groben Zügen durchgehen.

Das Buch beginnt mit einem knappen *Abriß* des Folgenden. – Leider unterläuft hier gleich auf der ersten Seite ein, freilich weit verbreiteter, historischer Fehler: Poincaré hat in seiner berühmten Arbeit von 1901 *keineswegs* gezeigt, daß die rationalen Punkte einer punktierten Kurve vom Geschlecht 1 eine Gruppe bilden: ihm fehlte das Inverse! Sylvester war übrigens schon 1880 in die durch den Tangenten-/Sekantenprozeß entstehende algebraische Struktur auf den rationalen Punkten einer Kubik tiefer eingedrungen als Poincaré 1901.

Mit Kapitel 2 beginnt der Stoff des Buches im Einzelnen: zunächst eine gründliche Einführung in die Theorie der *Höhen*. Die Begriffe werden so weit wie nötig axiomatisiert. Trotzdem behält die Darstellung weitgehend die Konzentriertheit einer guten Vorlesung. Seitenargumente z. B. werden an der Stelle eingeschoben, wo man sie braucht. Im Zentrum von Kapitel 2 steht die Endlichkeit der Punkte des $\mathbb{P}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ von beschränkter Höhe und beschränktem Grad über $\mathbb{Q}$ – der „Satz von Northcott", einschließlich der quantitativen Version nach Schanuel. Anschließend wird auf projektive Varietäten verallgemeinert. Das Kapitel schließt mit einem interessanten Beispiel zum Aufblasen, das übrigens in einer neuen Arbeit von Batyrev und Manin (*Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné(e) des variétés algébriques;* Preprint IHES/M/89/25, April 1989; Prop. 1.6) aufgenommen wird. – Das im Index leider fehlende Symbol $\times$ wird auf Seite 27 eingeführt.

Den *Normalisierten Höhen* ist eigens das dritte Kapitel gewidmet. Es beginnt mit Tate's Trick, gewisse nur bis auf $O(1)$ bestimmte Funktionen zu normalisieren. Ab § 3.2 wird dann die Néron-Tate Höhe auf abelschen Varietäten studiert. Als Anwendung bekommt man gleich schon eine erste Strukturaussage (insbes. Endlichkeit der Torsion) über die Gruppe der K-rationalen Punkte einer abelschen Varietät, K ein Zahlkörper.

Nachdem in den beiden vorhergehenden Kapiteln die Höhen so eingehend untersucht worden sind, bedarf es am Anfang von Kapitel 4 nur noch fünf übersichtlicher Seiten, um den Satz von Mordell-Weil – d. i. die endliche Erzeugtheit der Gruppe der rationalen Punkte einer abelschen Varietät über einem Zahlkörper – mit mehrfachen Beweisvarianten und Verweisen auf Verallgemeinerungen, und einschließlich einer Beweisskizze des fundamentalen Hermiteschen Endlichkeitssatzes über Zahlkörper zu erledigen. Der Autor läßt hier wie auch im übrigen Buch jeweils knapp und deutlich verschiedene Methoden, die zum selben Resultat führen, Revue passieren. Die beiden letzten Paragraphen dieses Kapitels sind wieder expliziten Resultaten gewidmet: § 4.5 gibt die asymptotische Anzahl der rationalen Punkte mit beschränkter Höhe einer abelschen Varietät nach Néron; § 4.6 schlägt den Bogen zurück zum elementaren Beweis des schwachen Mordell-Weil mit Faktorisierungsargumenten für elliptische Kurven.

Kapitel 5 ist mit *Mordells Vermutung* überschrieben. Zwischen Serres Vorlesung und dem Erscheinen des Buches liegt der (mittlerweile auch mehrfach in Buchform bearbeitete) Beweis dieser Vermutung durch Faltings. Statt des Beweises bietet das vorliegende Buch ältere partielle Ergebnisse, die aber ihr Interesse durch Faltings' allgemeinen Beweis nicht völlig verloren haben: Chabautys Methode (§ 5.1) liefert gute effektive Schranken für die Punkteanzahl spezieller Kurven. – Der Ansatz von Manin-Demjanenko (§ 5.2–5.4) läßt sich u. a. auf Modulkurven $X_0(p^m)$ und damit auf rationale Torsionspunkte elliptischer Kurven anwenden. Beispielhaft für die weite Perspektive des Buches ist es, daß anläßlich dieser Anwendung auch Belyis Satz über die Universalität allgemeiner Modulkurven (nicht notwendig zu Kongruenzuntergruppen) mit Beweis eingeschoben wird. (Am Rande sei vermerkt, daß der Übersetzer (S. 67, 71) eine nur im Französischen übliche Wendung ins Englische übernimmt, indem er der *upper half plane* noch den Namen *Poincaré* voranstellt). – Mumfords effektive Schranke (in Abhängigkeit nur von s) der Anzahl der rationalen Punkte der Kurve, deren Höhe zwischen r und $r(1 + s)$ liegt, wird in der effektiven Version von Faltings' Satz nach Paršin und Zarchin benutzt. Diese Anwendung wird allerdings in § 5.7 nicht erwähnt.

Kapitel 6 bietet eine kurze Einführung in Nérons lokale Höhen einschließlich expliziter Formeln für elliptische Kurven.

In Kapitel 7: *Siegels Methode,* geht es erstmals nicht um alle rationalen sondern um (S-)ganze Punkte auf affinen Kurven. Siegels Satz über die Endlichkeit der ganzen Punkte auf Kurven vom Geschlecht > 0 oder mit mindestens 3 unendlich fernen Punkten wird samt Verallgemeinerung auf S-ganze Punkte bewiesen, wobei die Aspekte der diophantischen Approximation besonders herausgearbeitet werden. Eine genaue Diskussion der rationalen Kurven mit unendlich vielen ganzen Punkten unterbleibt dabei (im Gegensatz etwa zu Siegels Originalarbeit), wird aber in der Übung am Ende von Kapitel 9 im Kontext von Hilberts Irreduzibilitätssatz teilweise nachgeholt.

Kapitel 8 behandelt effektive Endlichkeitssätze für (S-)ganze Punkte, die aus Bakers Abschätzung für Linearkombinationen von Logarithmen algebraischer Zahlen folgen (welche selber hier nicht bewiesen wird). Die erste, entscheidende Anwendung der Methode (§ 8.3) ist auf $\mathbb{P}_1 - \{0, 1, \infty\}$. In diesem Abschnitt vermißt man leider einen Hinweis auf das spektakuläre Ergebnis von Evertse über Lösungen der Gleichung $\lambda x + \mu y = 1$ in S-Einheiten (*Inventiones* **75** (1984) 561–584). Es wurde nach Serres Vorlesung erzielt und fand wohl deshalb nicht mehr den Weg in dieses Buch. – Weitere Anwendungen von Bakers Methode schließen insbesondere die Aussage ein (§ 8.5), daß es (bis auf Isomorphie) nur endlich viele elliptische Kurven über gegebenem Zahlkörper mit guter Reduktion außerhalb einer gegebenen endlichen Menge S von Stellen gibt.

Mit Kapitel 9 über *Hilberts Irreduzibilitätssatz* beginnt der letzte Teil des Buches (Kapitel 9–13). Er behandelt als Anwendungen des Satzes weiterhin die *Konstruktion von Galoiserweiterungen* mit vorgegebener Gruppe (Kapitel 10), die *Konstruktion elliptischer Kurven mit hohem Rang* der Mordell-Weil Gruppe (Kapitel 11) und schließt mit quantitativen Aussagen über dünne Mengen, die aus dem großen Sieb folgen (Kapitel 12/13) – eine Methode, die sonst in Texten zur arithmetischen algebraischen Geometrie selten zu finden ist.

Auf 12 klein bedruckten Seiten folgt dann noch ein Anhang über das *Klassenzahl-1-Problem und ganze Punkte auf Modulkurven.* Er gibt einen detaillierten Überblick über verschiedene Methoden, die imaginär-quadratischen Zahlkörper mit Klassenzahl 1 durch das Studium ganzer Punkte auf gewissen Modulkurven effektiv zu bestimmen – und häufig interessante Zusatzinformationen zu erhalten. Dieser Anhang ist für den zahlentheoretisch interessierten Leser eine willkommene Abrundung des Buches und zeigt sehr schön die vorher allgemein diskutierten Methoden „bei der Arbeit".

An *Vorkenntnissen* verlangt das Buch vom Leser eine gewisse Vertrautheit mit der Sprache der modernen Algebraischen Geometrie – was bei der sonstigen Literatur über diesen Gegenstand ja auch heute noch nicht überall selbstverständlich ist. Angesichts des häufig knappen und assoziationsreichen Stils ist Vorwissen nützlich; anders gesagt: das Buch wird auch den Kenner nicht langweilen. Für den Lernenden dürfte sozusagen jede Seite dieses Buches eine höchst anregende Lektüre sein.

Leider läßt die *Bibliographie* stellenweise zu wünschen übrig und dies ist bei einem Buch, das so viel Literatur verarbeitet wie dieses, um so bedauerlicher. Schon die Reihenfolge der Einträge ist nicht immer einsichtig; etwa „[Na]" – „[No]" – „[Ne]", u. a. Vor allem aber ist die Zuordnung zwischen Verweisen im Text und Einträgen der Bibliographie nicht fehlerfrei. So kann man auf Seite 137 noch leicht erraten, daß das zitierte „[Sh]" dem Eingang „[Sha]" der Literaturliste entsprechen muß. Ebenso ist „[Do1]" (S. 189), durch Tippfehler oder versehentliche Orientierung am Vornamen, natürlich ein Verweis auf die Arbeit „[Go1]" von Dorian Goldfeld. Der Eingeweihte erkennt auch, daß „[Gr]" (Seite 196) auf B. H. Gross' (in der Bibliographie fehlende) Springer Lect. Notes #776, und nicht auf den Eintrag „[Gr]" der Bibliographie verweist. Auch die Seite 128 mit „[Oe]" bezeichnete Arbeit von Oesterlé läßt sich wohl identifizieren. Aber was ist mit „[MZ]" auf Seite 40 gemeint? – Diese Mängel sind ärgerlich, zumal sich doch auf dem Computer solche Fehler mit wenig Mühe finden und korrigieren lassen.

Bonn N. Schappacher

Vinberg, E. B., Linear Representations of Groups, Basel: Birkhäuser Verlag 1989, 152 S., DM 46,–

Man kann die Bedeutung des Begriffes einer linearen Darstellung einer Gruppe kaum überschätzen. Lineare Darstellungen von Gruppen, deren systematisches Studium durch Frobenius um die Jahrhundertwende eingeleitet wurde, spielen eine wichtige Rolle in verschiedenen Gebieten der Mathematik (harmonische Analyse, Zahlentheorie, Theorie der endlichen Gruppen, Differentialgeometrie, Spektraltheorie linearer Operatoren, usw.) und werden erfolgreich benutzt bei zahlreichen Problemen der Physik und der Chemie.

Das vorliegende Buch von E. B. Vinberg ist eine Einführung in die Theorie der linearen Darstellungen von Gruppen. Dabei werden nur endliche oder – allgemeiner – kompakte Gruppen behandelt, und es werden ausschließlich endlich dimensionale Darstellungen über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ betrachtet. Gegen eine solche Auswahl aus der Fülle der möglichen Themen aus dem Bereich der Gruppendarstellungen ist natürlich nichts einzuwenden. Zu kritisieren ist vielmehr, daß das Buch selten in die Tiefe geht und fast keine allgemeinen Ergebnisse enthält. Der Autor selbst schreibt, daß er keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Zu Recht: Über das Hauptthema dieses Buches – die Darstellungstheorie endlicher Gruppen – erfährt man mehr in der „*Algebra*" von S. Lang! So werden z. B. induzierte Darstellungen nicht behandelt, und der modultheoretische Aspekt von Gruppendarstellungen wird ausgeklammert.

In dem Abschnitt über kompakte Gruppen wird zwar die Existenz eines Haarmaßes erwähnt aber nicht weiter verwendet. Der Satz von Peter-Weyl wird nur für lineare kompakte Gruppen bewiesen. Zu erwähnen ist der hübsche Beweis (ohne Haarmaß!) der vollständigen Reduzibilität endlich dimensionaler Darstellungen kompakter Gruppen. Positiv zu bewerten ist auch die Tatsache, daß das Buch neben vielen Übungsaufgaben zahlreiche konkrete Beispiele enthält (z. B. Bestimmung aller irreduziblen Darstellungen der orthogonalen Gruppe von $\mathbb{R}^3$, Zerlegung des Raumes der stetigen Funktionen auf der 2-Sphäre in drehinvariante irreduzible Teilräume). Da aber nur endlich dimensionale Darstellungen betrachtet werden, ist keineswegs gesichert, daß man in den Beispielen alle unitären irreduziblen Darstellungen bestimmt hat.

Das Buch enthält noch einen kurzen Abschnitt über die Darstellungstheorie von Lie-Gruppen, wo hauptsächlich die irreduziblen endlich dimensionalen Darstellungen der Lie-Algebra von $SL(2, \mathbb{C})$ bestimmt werden. Fazit: Das Buch gibt nur einen flüchtigen Einblick in die Darstellungstheorie von Gruppen. Zu diesem Thema gibt es aber bereits hervorragende Bücher.

München M. E. Bekka

Lawden, D. F., Elliptic Functions and Applications, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 335 S., DM 124,–

Die Theorie der elliptischen Funktionen (EF) ist bekanntlich eine alte, ehrwürdige Theorie, deren Anfänge auf Euler zurückgehen und die dann vor allem von Legendre, Abel, Jacobi und Weierstraß weiterentwickelt wurde. In heutigen Vorlesungsplänen treten EF als selbständiges Thema nur noch selten auf; abschreckend wirken wohl die feinen Bezeichnungen und die Unzahl von Formeln für die Zusammenhänge, die es zwischen EF gibt. Dies ändert nichts an der Tatsache, daß EF bei vielen Anwendungen der Analysis nach wie vor eine große Rolle spielen. Ziel des vorliegenden Buches ist, die Theorie der EF und ihre Anwendungen nicht in Vergessenheit geraten zu lassen.

Ausgangspunkt sind die Theta-Funktionen, mit deren Hilfe die Jacobi-Funktionen sn, cn, dn eingeführt werden, womit dann in Kapitel 3 die elliptischen Integrale dargestellt werden können. (In einem Anhang befindet sich ein BASIC-Programm zur Reduktion eines elliptischen Integrals auf Standardform.) Es folgen dann sehr interessante Anwendungen in Geometrie (im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) und Physik (z. B. nicht-harmonischer Oszillator, verschiedene Anziehungsgesetze, rotierende Kette, Plattenkondensator). Integrationsprobleme oder die Lösung gewisser Differentialgleichungen führen auf elliptische Integrale; die EF lassen eine geschlossene Darstellung der Lösung des vorgelegten Problems zu.

Kapitel 6 führt in die Weierstraßschen EF ein, die dann in Kapitel 7 gleich angewendet werden, z. B. auf Kreisel oder das räumliche Pendel. Kapitel 8 enthält die mehr funktionentheoretische Diskussion der EF (Teilbruchzerlegung, Fourier-Entwicklung) und Kapitel 9 das Verhalten der EF bei Substitutionen durch die Transformationen der Modulgruppe. Ein weiteres BASIC-Programm dient der Berechnung von $\theta_1(z, q)$, und es folgen dann noch 13 ziemlich ausführliche Tabellen für EF, mit denen der Anwender jedenfalls gewisse Ansprüche erfüllen kann.

Besonders positiv zu bewerten sind die oben nur teilweise genannten Probleme aus den Anwendungen, welche bis ins einzelne ausgeführt werden, sowie die über 200 Übungsaufgaben, die den Stoff wesentlich ergänzen und oft eine weitere Quelle für praktische Anwendungen der EF darstellen. Mit etwas Geschick könnte man dem Buch leicht einige Themen für ein Proseminar entnehmen und dadurch mithelfen, daß die EF nicht vergessen werden.

Das vorliegende Werk ergänzt sich gut zu dem im deutschen Sprachraum bekannten Buch von Tricomi-Krafft (Elliptische Funktionen, Akad. Verlagsgesellschaft 1948), welches dieselben Ziele verfolgt, aber weniger Anwendungen und keine Übungsaufgaben enthält. Für den Funktionentheoretiker bietet jenes Buch gewisse Vorzüge; auch sind dort die wichtigsten von den überaus zahlreichen formelmäßigen Zusammenhängen besser hervorgehoben. Insgesamt ist jedoch das Erscheinen des Buches von D. F. Lawden sehr zu begrüßen.

Gießen D. Gaier

Nicholls, P. J., The Ergodic Theory of Discrete Groups (London Mathematical Society Lecture Notes Series 143), Cambridge University Press 1989, soft cover, £ 19.50

Die diskreten Gruppen des Titels sind diejenigen, die auf einem hyperbolischen Raum $\mathbb{H}$ operieren. Ein hyperbolischer Raum ist eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit konstanter negativer Krümmung und wird als solche durch seine Dimension und Krümmung eindeutig bestimmt. Er ist ein symmetrischer Raum zu einer orthogonalen Gruppe vom reellen Rang 1 und hat eine Reihe von attraktiven geometrischen Realisierungen, wie die Kleinschen und Poincaréschen Ballmodelle, als ein Halbraum oder als eine Schale eines zweischaligen Hyperboloids. Die Entwicklung einer Theorie von diskreten Gruppen, die auf diesen Räumen operieren, wurde durch mehrere ziemlich unterschiedliche Beispiele motiviert. In der Funktionentheorie erscheinen solche Gruppen in der Uniformisierungstheorie und Modultheorie Riemannscher Flächen, in der zwei- und dreidimensionalen Topologie in der Klassifikationstheorie, in der kombinatorischen Gruppentheorie und in der zahlentheoretischen Untersuchung quadratischer Formen. Die Gruppen Γ, die zuerst untersucht wurden, genügten meistens der Bedingung, daß das Volumen von $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ endlich sei. In den letzten zwanzig Jahren hat das Interesse an Gruppen mit unendlichem Covolumen beträchtlich zugenommen, und die früher gängige Vorstellung, daß es vergeblich wäre, Fragen nach der feineren Struktur dieser Gruppen zu stellen, wurde widerlegt.

Eine wichtige Klasse von solchen Fragen betrifft das Verhalten der Gruppe im Großen und das asymptotische Wachstum gewisser Funktionen, die dieses Verhalten messen sollen. Für solche Fragen gibt es jetzt mehrere Ansätze. Manche dieser Ansätze, wie z. B. die Potentialtheorie oder die Theorie der Irrfahrten auf Gruppen, sind auf wesentlich größere Klassen von Gruppen anwendbar. Andere Ansätze sind eher spezifisch für die in Betracht kommenden Gruppen; in der Theorie der hyperbolischen Gruppen werden zwei große Klassen von Methoden verwendet, die Spektraltheorie des Laplaceoperators auf $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ und die Ergodentheorie des geodätischen Flusses. Sie sind nur bedingt voneinander unabhängig.

Das Zusammenspiel zwischen Ergodentheorie und der Theorie der diskreten Gruppen hat eine lange Geschichte. Es geht auf die Arbeiten von M. Morse und E. Artin in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts zurück. E. Artin hat 1924 bemerkt, daß die Theorie der Kettenbrüche, die ja eng mit der der Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ zusammenhängt, einen Beweis der Aussage, daß fast alle Bahnen des geodätischen Flusses auf dem Sphärenbündel von $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ dicht sind, liefert. Dieses war das erste Beispiel dieser Art, und in der rasanten Entwicklung der Ergodentheorie in den darauffolgenden Jahren war dieses Beispiel zentral. Die Krönung dieser Entwicklung war E. Hopfs großartiger Beweis der Ergodizität dieses Flusses unter der Voraussetzung, daß $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ endliches Volumen hat und die Dimension von $\mathbb{H}$ zwei ist. Die Verallgemeinerung zu höheren Dimensionen ist allerdings problemlos. Die schönen Ideen dieses Beweises blühten in den Arbeiten von Anosov, Sinai und Bowen in den sechziger Jahren auf.

Ist das Volumen von $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ unendlich, dann ist der geodätische Fluß dissipativ. Auf den ersten Blick sieht es aus, als ob eine vernünftige Theorie von vornherein ausgeschlossen wird. Es stellt sich aber heraus, daß die nicht-wandernde Menge sich sehr gut mit den Methoden der modernen Ergodentheorie untersuchen läßt. Wie Margulis als erster bemerkte, gibt es ein natürliches Gibbsmaß auf der nichtwandernden Menge. Es stellt sich heraus, daß dieses Gibbsmaß sich sehr gut untersuchen läßt, im Gegensatz zu Gibbsmaßen bei den meisten dynamischen Systemen. In diesem Fall gibt es eine sehr direkte Konstruktion über eine sogenannte „konforme Dichte“. Eine „konforme Dichte“ ist ein Maß, das auf der „Sphäre bei Unendlichem“ getragen wird und eine angenehme und natürliche Transformationseigenschaft unter Γ hat. Die konforme Dichte kann durch ein Grenzverfahren konstruiert werden und entpuppt sich in mehreren Fällen als Hausdorffsches Maß auf der Limesmenge. Dieses ist einer der wenigen Fälle, wo ein Hausdorffsches Maß „in der Natur“ auftaucht.

Das Buch von Peter Nicholls gibt eine solide Einführung in diesen Gedankenkreis. Die Betonung liegt nicht auf Vollständigkeit, sondern auf Gründlichkeit. Folgende Themenbereiche werden behandelt:

- die grundlegende Geometrie diskreter Gruppen,
- die Teile der Ergodentheorie, die für die Ziele des Buches benötigt werden,

– die Grundbegriffe, die mit der Limesmenge und dem kritischen Exponent verbunden sind,
– die Konstruktion der konformen Dichte und die Analyse derselben.

Die Anwendung dieser Ideen führte z. B. zu einer Identifikation der Hausdorffschen Dimension der Limesmenge mit dem kritischen Exponenten bei geometrisch endlichen Gruppen. Der Höhepunkt dieser Entwicklung ist die Verallgemeinerung des Hopfschen Ergodensatzes auf geometrisch endliche Gruppen. Sie sagt aus, daß das Gibbssche Maß ergodisch ist. Dieser schöne Satz hat viele wichtige Anwendungen. Die Entwicklung wird durch einige für Fuchssche Gruppen eigene Betrachtungen ergänzt. Es wurde gezeigt, daß die geodätischen und horozyklischen Flüsse mischend sind. Aus diesen Aussagen leitet der Autor einige sehr eindrucksvolle asymptotische Abschätzungen ab.

Dieses Buch ist eine gut geschriebene, sehr brauchbare Einführung in den besprochenen Ideenkreis und ist die erste Monographie über diese Theorie seit Hopfs Ergebnisbericht von 1939. Es wird von denjenigen sehr begrüßt werden, die etwas über diesen attraktiven Teil der Mathematik lernen wollen.

Göttingen S. J. Patterson

Auslander, J., Minimal Flows and their Extensions (North Holland Mathematics Studies 153), Amsterdam – New York – Oxford – Tokyo: North-Holland 1988, 266 S., Dfl 165,–

Es sei $X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto x \cdot g$, eine (simultan in beiden Variablen) stetige Wirkung einer Gruppe G auf einem kompakten Hausdorffraum X; ein solches System wird gewöhnlich „Flow“ genannt. (X, G) heißt *minimal* wenn die Bahn jedes Punktes in X dicht liegt, d. h. $\overline{x \cdot G} = X$ für alle $x \in X$.

Das Thema des vorliegenden Buchs ist die Beschreibung der Struktur minimaler Flows. Diese Beschreibung stützt sich auf die folgenden Elemente: 1) Die *einhüllende Halbgruppe* $E(X, G)$, definiert als der punktweise Abschluß der Translationen $x \to x \cdot g$ im Raum X^X aller Selbstabbildungen von X. Wichtige Eigenschaften des Flows (X, G) spiegeln sich in der algebraischen Struktur insbesondere der Idealstruktur) von $E(X, G)$ wider. Die Halbgruppe $E(X, G)$ kann als Kompaktifizierung von G gedeutet werden; umgekehrt erhält man jeden minimalen Flow (X, G) mit Transformationsgruppe G aus einer Halbgruppenkompaktifizierung von G. 2) Erweiterungen von Flows. Hier geht es um die Konstruktion eines minimalen Flows aus dem trivialen Einpunkt-Flow durch sukzessive Erweiterungen von spezieller, möglichst „einfacher“, Bauart. Für diesen Zweck ist es notwendig, grundlegende Begriffe, wie „distal“, „gleichgradig stetig“, „proximal“, auf Erweiterungen auszudehnen. 3) Relationen zwischen Systemen mit gleicher Transformationsgruppe G, aber unterschiedlichen Phasenräumen X. Vor allem wird hierzu der Begriff *disjunkt* betrachtet, ein Konzept, das die „Unabhängigkeit“ zweier Flows charakterisiert. 4) Darstellungen von Flows mit Transformationsgruppe $\mathbb{R}$ als Wirkungen in einem Funktionenraum.

Das Buch ist in einem sehr lesbaren, flüssigen Stil geschrieben. Es wendet sich wohl in erster Linie an Leser, die sich mit der Theorie der Flows vertraut machen wollen, bietet aber auch dem „Kundigen“ eine wohlorganisierte neue Darstellung. Leider verfügt der Band über keinen Index.

Wien W. A. F. Ruppert

Bluman, G. W., Kumei S., Symmetries and Differential Equations (Appl. Math. Sciences 81), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 412 pp., 21 figs., hardcover, DM 114,–

Dieses Buch ist eine gelungene, für den Anwender geschriebene Einführung in die Liesche Transformationsgruppentheorie und ihre Anwendungen auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Es werden sowohl klassische Resultate als auch moderne Entwicklungen dargestellt. Das Buch besteht aus sieben Kapiteln.

Im ersten, vom Rest des Buches unabhängigen Kapitel wird die Dimensionsanalyse mit einigen Anwendungen behandelt. Die Autoren erläutern, wie sich der dimensionsanalytische Ansatz in die Liegruppenmethode einfügt.

Im zweiten Kapitel werden zunächst einparametrige Liesche Transformationsgruppen definiert und mittels ihrer infinitesimalen Erzeugenden charakterisiert. Der für alle weiteren Anwendungen entscheidende Begriff der *k-ten Fortsetzung* einer Lieschen Gruppe $x^* = X(x, u, \varepsilon)$, $u^* = U(x, u, \varepsilon)$ von Punkttransformationen wird schrittweise eingeführt. Mehrparametrige Liesche Transformationsgruppen und Liesche Algebren werden kurz besprochen.

Symmetrien gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen in Bezug auf Punkttransformationen sind das Thema der nächsten zwei Kapitel. Eine (gewöhnliche oder partielle) Differentialgleichung k-ter Ordnung heißt *symmetrisch* oder *invariant* bezüglich einer Lieschen Gruppe (X, U) von Punkttransformationen, wenn die Lösungsfläche der Gleichung bezüglich der k-ten Fortsetzung $(X, U, U_1, \ldots, U_k)$ von (X, U) invariant ist. Die Invarianzbedingung führt zu linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen (den sog. *Bestimmungsgleichungen*) für die Koeffizienten der infinitesimalen Erzeugenden von (X, U). Durch das Lösen der Bestimmungsgleichungen lassen sich Symmetriegruppen von Differentialgleichungen häufig explizit angeben. Dies wird anhand mehrerer Beispiele, u. a. der Wärmeleitungsgleichung und der Wellengleichung in nichthomogenen Medien verdeutlicht. Umgekehrt lassen sich die Bestimmungsgleichungen auch verwenden, um die bezüglich einer Lieschen Transformationsgruppe invarianten Differentialgleichungen zu finden. Wie die Verfasser zeigen, erlaubt die Kenntnis von Symmetriegruppen häufig eine Vereinfachung der Differentialgleichung, wie z. B. eine Reduktion ihrer Ordnung. Oftmals lassen sich auch spezielle (invariante) Lösungen auffinden. Im vierten Kapitel wird außerdem auf Systeme partieller Differentialgleichungen und auf Symmetrien bei Randwertproblemen eingegangen.

Im Kapitel 5 wird der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen bei Lagrangeschen Systemen (Satz von Emmy Noether) dargestellt. Es zeigt sich, daß Punkttransformationen hierfür nicht mehr ausreichen. Dies führt zum Begriff der *verallgemeinerten Transformationen,* die von den Autoren als *Lie-Bäcklund-Transformationen* bezeichnet werden. Als spezielle verallgemeinerte Transformationen werden auch die für die Mechanik so wichtigen *Berührungstransformationen* definiert. Mithilfe des Noetherschen Satzes und der Bestimmungsgleichungen für Lie-Bäcklund-Symmetrien lassen sich Erhaltungssätze konstruktiv aufstellen, wie anhand der KdV-Gleichung eindrucksvoll demonstriert wird.

In den letzten beiden Kapiteln des Buches wird der Frage nachgegangen, wann es möglich ist, mithilfe einer Punkt- oder Lie-Bäcklund-Transformation Lösungen einer Ausgangsdifferentialgleichung (A) auf Lösungen einer („leichteren") Zieldifferentialgleichung (Z) abzubilden. Kriterien dafür lassen sich aus dem Vergleich der Symmetriegruppen von (A) mit denen von (Z) gewinnen. Auf diese Weise kann man z. B. systematisch die bekannte Hopf-Cole- als auch die Miura-Transformation herleiten.

Bei der Anwendung der erwähnten Kriterien bettet man oft eine der gegebenen Gleichungen, etwa durch Einführung eines Potentials, in eine neue Gleichung (P) ein. Die bisher betrachteten lokalen Symmetrien von (P) werden somit zu nichtlokalen sogenannten *Potentialsymmetrien* der ursprünglichen Differentialgleichung. Im Buch werden Potentialsymmetrien unter anderem bei der Behandlung der Burgers-Gleichung, der nichtlinearen Wärmeleitungsgleichung, der nichtlinearen Telegraphengleichung und der Thomas-Gleichungen angewandt.

Das Buch enthält eine Vielzahl von Übungen und ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Zum Verständnis des Buches genügen Grundkenntnisse der Analysis und der Differentialgleichungen. Die Beschränkung der theoretischen Vorkenntnisse auf ein Minimum sowie die zahlreichen Anwendungsbeispiele machen dieses Buch zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel für viele angewandte Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieure. Doch auch für den theoretisch orientierten Leser, der sich mit Symmetrien bei Differentialgleichungen befaßt, ist der vorliegende Band von Bluman und Kumei eine wesentliche Ergänzung zu dem mathematisch anspruchsvolleren Lehrbuch von P. J. Olver (*Applications of Lie Groups to Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1986) und dem Standardwerk von L. V. Ovsiannikov (*Group Analysis of Differential Equations,* Academic Press, New York, 1982).

Freiburg im Breisgau K. P. Rybakowski

Bruno, A. D., Local Methods in Nonlinear Differential Equations (Part I: The Local Method of Nonlinear Analysis of Differential Equations, Part II: The Sets of Analyticity of a Normalizing Transformation) (Springer Series in Soviet Mathematics), Berlin u.a.: Springer-Verlag 1989, 348 S., DM 188,–

Unter lokalen Methoden wird in diesem Buch das Studium von analytischen, nichtlinearen und autonomen Differentialgleichungssystemen in der Nähe eines singulären Punktes bzw. eines invarianten Torus endlicher Dimension mit Hilfe von Potenzreihen-Transformationen in eine Normalform verstanden. Andere Methoden topologischer Natur oder aus der differenzierbaren Dynamik bleiben ausgeschlossen. Innerhalb des durch das Hilfsmittel konvergenter oder divergenter Potenzreihen-Transformationen in eine Normalform abgegrenzten Rahmens wird jedoch alles bis heute Bekannte angesprochen und von einem möglichst universellen formalen Standpunkt aus untersucht.

Der Teil I des Buches enthält fünf Kapitel, von denen die ersten zwei dem Verhalten analytischer Differentialgleichungen

$$(*) \qquad \mathrm{d}x_k/\mathrm{d}t = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + \ldots, \qquad k = 1, \ldots, n$$

in der Nähe des Nullpunkts $x_1 = \ldots = x_n = 0$ im Falle $n = 2$ gewidmet und aus Vorlesungen des Autors für Studenten ab dem 5. Semester hervorgegangen sind. Hier wird an Quellen so ziemlich alles berücksichtigt, was seit den Arbeiten von Briot und Bouquet (1856) bis heute zu diesem Thema geleistet worden ist. Außerdem ist die Darstellung mit ausführlichen Beweisen, vielen Figuren, Beispielen und Übungen versehen, so daß sie als gute Einführung in den Problemkreis betrachtet werden kann.

Als wichtiges Hilfsmittel der Untersuchung dient neben den Potenzreihen-Transformationen die Methode des Newtonschen Polygons, die im vierten Kapitel ausführlich dargelegt wird.

Das dritte Kapitel behandelt Systeme (*) für beliebiges n und deren konvergente bzw. divergente Potenzreihen-Transformationen in eine Normalform, die statt $A = (a_{k1})$ die Jordansche Normalform von A und von Gliedern höherer Ordnung nur Resonanzglieder besitzt. Der Autor, der sowohl zur formalen Seite dieses Themas als auch zur Konvergenzfrage wesentliche Beiträge geliefert hat, zieht in diesem Kapitel ein Resümee aus eigenen Originalarbeiten.

Das fünfte Kapitel enthält schließlich eine Reihe vollständig durchgerechneter Aufgaben aus der Mechanik, die den Nutzen von Transformationen in eine Normalform demonstrieren.

Im zweiten Teil des Buches wird ein analytisches, parameterabhängiges System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet und das Problem formuliert, alle invarianten Mengen in der Nähe eines vorhandenen invarianten Torus zu finden. Dieses Problem wird hauptsächlich algebraisch behandelt, indem formale Potenzreihen für die Beschreibung der invarianten Mengen gesucht werden. Spezialfälle des Problems sind die Existenz periodischer Lösungen, Bifurkationen von Familien periodischer Lösungen ebenso wie die Existenz quasiperiodischer Lösungen. Ziel der Untersuchung ist es, all diese Spezialfälle, die in der Literatur mit den unterschiedlichsten Methoden abgehandelt werden, aus demselben Blickwinkel heraus zu betrachten.

In formaler Hinsicht ist dies dem Autor ziemlich erschöpfend gelungen. Die analytische Seite des Problems, nämlich die Frage der Konvergenz der auftretenden Potenzreihen, wird dagegen bedauerlicherweise nur kurz gestreift, indem die diesbezüglichen Kovergenzsätze ohne Beweis zitiert werden.

Alles in allem meine ich aber, daß dieses Buch für lange Zeit eine Standardreferenz sein wird, in der der einschlägig Interessierte erschöpfende Information und viele Anregungen finden kann.

Mainz H. Rüßmann

Kreiss, H. O., Lorenz, J., Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations (Pure and Applied Mathematics, Vol. 136), New York – London – Tokyo: Academic Press 1989, 402 + xi pp., hard cover, $ 54.50

Partielle Differentialgleichungen sind, seitdem sie in der Mathematik betrachtet wurden, immer in enger Verbindung mit physikalischen und technischen Fragestellungen untersucht worden. Daher wurde die Entwicklung in dieser mathematischen Disziplin vielleicht stärker als in anderen Disziplinen durch praktische Erfordernisse, wie z. B. dem numerischen Auffinden von Lösungen, beeinflußt. Sieht man von einigen wenigen allgemeinen Sätzen ab, etwa dem Satz von Cauchy-Kowalewskaja oder dem Satz von Holmgren, so hat sich erst in den späten vierziger und den fünfziger Jahren so etwas wie eine allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu entwickeln begonnen. Der Titel der Hörmanderschen-Thesis „On the theory of general partial differential operators" liest sich im nachhinein wie ein Programm, welches bald zur Theorie der Pseudodifferentialoperatoren und zur mikrolokalen Analysis führte. Andererseits hat die Entwicklung von leistungsfähigen Rechenanlagen dazu geführt, daß effektive numerische Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen (sowie von Rand- und Anfangswertproblemen) benötigt wurden. Scheinbar teilte sich also diese mathematische Disziplin in einen mehr theoretischen Teil sowie in einen mehr angewandten Teil. Aber von den frühen, mehr numerisch, besser konstruktiv, orientierten Arbeiten, etwa der Arbeit von R. Courant, K.- O. Friedrichs und H. Lewy über Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann. **100** (1928), ist bekannt, daß nur eine solide Kenntnis der Theorie in der Numerik weiter hilft.

Ein großes Verdienst des vorliegenden Buches ist es, daß es diese engen Beziehungen zwischen Theorie und numerischen Verfahren betont, wobei mit Theorie z. B. auch etwa die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren gemeint ist. Die Autoren, wobei vor allem der Erstgenannte u. a. bekannt ist für seine Beiträge zur Approximation von Anfangswertaufgaben für partielle Differentialgleichungen, behandeln die Theorie der Rand-Anfangswertaufgaben, lineare und nichtlineare, die bei vielen Fragen der Praxis auftreten. Stets haben sie dabei numerische Verfahren im Hinterkopf, z. B. werden Existenzsätze typischerweise durch Approximation mit Differenzenverfahren gezeigt. Als Anwendungsbeispiel begleitet uns durch das gesamte Buch das System von Navier-Stokes mit allen seinen Näherungen. Dieses System wird im ersten Kapitel sehr ausführlich von der physikalischen Seite her diskutiert. Es folgt sodann ein Kapitel über das Cauchy-Problem für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten und räumlich periodischen Daten und Lösungen. Zwei Dinge werden hier schon klar herausgearbeitet. Zum einen, daß es sinnvoll ist das Problem zu algebraisieren, d. h. statt den Operator betrachtet man sein Symbol, zum anderen wird das Konzept der Korrektgestelltheit eingeführt. Es wird aber nicht die klassische, auf J. Hadamard zurückgehende Definition benutzt, sondern es wird dem Leser nahegelegt, gleich an die Gültigkeit gewisser a-priori-Abschätzungen zu denken. Dieser Gedanke zieht sich durch das ganze Buch: Benutze das Symbol, um a-priori-Abschätzungen zu gewinnen, benutze diese dann, um das eigentliche Problem zu lösen. Es werden nun im zweiten Kapitel hyperbolische und parabolische Systeme diskutiert, die Rolle von Energieabschätzungen und der Symmetrisierung erläutert. Kapitel 3 dehnt die Betrachtungen auf räumlich eindimensionale Systeme mit variablen Koeffizienten aus. Es wird aufgezeigt, wie man durch Einfrieren der Koeffizienten hoffen kann, die Ideen aus dem zweiten Kapitel übertragen zu können. Dieser Gedanke wird an Hand von der Forderung nach der Gültigkeit gewisser a-priori-Abschätzungen systematisch entwickelt, die Begriffe parabolisches, hyperbolisches und parabolisch-hyperbolisches System werden herausgearbeitet und ihre Eigenschaften diskutiert, etwa die der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit und damit einhergehend die Bedeutung der Charakteristiken. Weiterhin werden Existenzsätze für das Cauchy-Problem mittels Differenzenapproximation hergeleitet. Schließlich werden die Resultate auf verschiedene Näherungen des Navier-Stokes-Systems, der linearisierten Korteweg-deVries- und einer Schrödinger-Gleichung angewendet. Dies beendet den ersten Durchgang der linearen Theorie.

Die Burgersche Gleichung wird nun als einfachste nichtlineare Modellgleichung im vierten Kapitel behandelt. Auch hier werden die allgemeinen Eigenschaften und Überlegungen in den Vordergrund gestellt, etwa die Approximation durch Gleichungen mit Viskositätsterm, Definition und Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung (Sprungbedingung von Rankine-Hugoniot) oder die Ausbreitung von Schocks. Die Tatsache, daß mittels einer Cole-Hopf-Transformation diese spezielle Gleichung auf eine lineare zurückgeführt werden kann, wird erwähnt, aber dies wird nicht ausgeführt. Das anschließende Kapitel behandelt allgemeine nichtlineare, eindimensionale Systeme. Der Unterschied zwischen (zeitlich) lokalen und globalen Existenzresultaten wird genauso erläutert wie die Rolle von Symmetrisierungen.

Kapitel 6 kehrt zur linearen Theorie zurück, Anfangswertprobleme für Systeme mit variablen, räumlich periodischen Koeffizienten in mehreren Raumdimensionen werden diskutiert. Wir werden auf nun schon vertrauten Wegen geführt, allerdings müssen die Autoren (wie auch noch einmal in Kapitel 8) ein wichtiges Resultat ohne Beweis angeben, nämlich die Existenz einer Symmetrisierung für stark hyperbolische Systeme. Hierfür ist die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren nötig, es wird auf gängige Quellen verwiesen – etwa das Buch von G. I. Eskin. Eine kurze Diskussion über nichtlineare Systeme beschließt das Kapitel.

Bisher wurde das Cauchysche Anfangswertproblem für Systeme behandelt, die konstante oder räumlich periodische Koeffizienten haben. Der Rest des Buches beschäftigt sich nun mit Rand-Anfangswertaufgaben. Zunächst werden im eindimensionalen Fall die wichtigsten Begriffe, insbesondere die Verträglichkeit der Rand- und Anfangsdaten und die Korrektgestelltheit eines Problems, diskutiert. Dabei werden u. a. die wichtigsten Typen von Randvorgaben besprochen. Auch hier wird wieder der Wunsch nach der Gültigkeit von gewissen a-priori-Abschätzungen erläutert, um dann Bedingungen an die Symbole herzuleiten. Es werden einige Existenzsätze (wie üblich durch Differenzenapproximation) gezeigt, insbesondere aber auch der Fall des Halbraums unter Zuhilfenahme der Laplace-Transformation behandelt, um die Grenzen der bisher benutzten Methoden aufzuzeigen. In Kapitel 8 werden nun mehrdimensionale Rand-Anfangswertprobleme besprochen, die abschließenden Kapitel 9 und 10 wenden die hergeleiteten Resultate auf gewisse Approximationen des Navier-Stokes-Systems an. Vier Anhänge (über Resultate aus der linearen Algebra, über Interpolation mit trigonometrischen Polynomen, über Sobolev-Ungleichungen und über Anwendungen des Satzes von Arzela und Ascoli) bilden den Abschluß des Buches.

Mir gefiel die Vernetzung von moderner Theorie, relevanten Gleichungen und Aspekten ihrer numerischen Behandlung sehr gut. Die Autoren lassen zusammenwachsen, was zusammengehört. Manchmal ist die Notation nicht glücklich gewählt, manchen Beweisgang würde ich etwas modifizieren, ... Dies sind aber alles vernachlässigbare Kritikpunkte. Im Vorwort stellen sich die Autoren die Aufgabe, ein Buch zu schreiben, welches die Lücke zwischen elementaren Büchern und sehr abstrakten Büchern zu füllen in der Lage ist. Diese Aufgabe haben sie sicher sehr erfolgreich gelöst.

Erlangen N. Jacob

Struwe, M., Plateau's Problem and the Calculus of Variations (Mathematical Notes 35), Princeton University Press 1989, 158 pp., $ 19.50

Das Buch von M. Struwe beschreibt ein aktuelles Kapitel aus der Variationsrechnung mit eigenen Ergebnissen. Erreicht ist damit, daß alle Prinzipien aus der klassischen Theorie von M. Morse, der Geodätische zwischen zwei Punkten wie kritische Punkte für ein Funktional studiert hat, auf den Fall der Minimalflächen in $\mathbb{R}^3$ mit fester Randkurve übertragen werden, um neue Existenzsätze für solche zu beweisen. Ein bekanntes Hindernis dahin war jenes, daß die Topologien auf $L^\infty(S^1)$ und $H^{1/2}(S^1)$ nicht genau gleich sind. Dieses Hindernis ist gut beseitigt, und der Text des Buches trennt auch formal die topologischen Schlüsse von ihren technischen Grundlagen.

Es geht so vor: Erst werden die klassischen Existenzsätze für die kleinste Fläche zu einem festen Rand gezeigt, mit der Unterhalbstetigkeit des Dirichlet-Integrals bei schwacher Konvergenz und mit dem Lemma von Courant-Lebesgue. Dann folgt ein Mountain-Pass-Lemma, das Bedingungen für die Existenz einer weiteren Minimalfläche in dieser Randkurve angibt. Das Hauptresultat sind aber die Morse-Ungleichungen zwischen allen instabilen Minimalflächen zu festem Rand, wo der (lokale) Trägheitsindex der zweiten Variation mit der (globalen) Struktur der Menge aller Vergleichsflächen verknüpft ist. Diese Morse-Ungleichungen sind formal genau dieselben wie für Geodätische. Methodisch wichtig ist die Betrachtung eines geeigneten Pseudogradienten und die Behandlung der konformen Invarianz des Variationsintegrals. Er verallgemeinert so klassische Resultate von Ljusternik-Schnirel'man und Palais-Smale.

Im zweiten Teil wird das für Randwertprobleme bei Minimalflächen genutzte Prinzip konzequent verallgemeinert auf Randwertprobleme für H-Flächen, wo die mittlere Krümmung H der Fläche konstant ist (aber nicht Null wie für Minimalflächen). Er folgt den bekannten Existenzsätzen von Heinz und von Wente und zeigt, daß unter vernünftigen Bedingungen das Randwertproblem für H-Flächen eine extremale Lösung besitzt. Für die Menge aller H-Flächen bei festem Rand werden auch hier die Morse-Ungleichungen bewiesen.

Als Überraschung ergibt sich, daß dann hier ein Mountain-Pass-Lemma (Struwe, Brezis, Coron) neben allen „kleinen“ Lösungen auch die Existenz einer „großen“ Lösung impliziert, womit eine berühmte Vermutung von F. Rellich gezeigt ist.

Bochum R. Böhme

Dozzi, M., Stochastic processes with a multidimensional parameter (Pitman Research Notes in Mathematics Series, 194), Harlow: Longman Scientific u. Technical 1989, 216 S., pb, £ 17.50

Obwohl er sich an seinen eigenen Forschungsergebnissen und -interessen orientiert, streift M. Dozzi in seinen „research notes“ einen großen Teil der Gebiete, in denen in den vergangenen 15 Jahren versucht wurde, die Theorie stochastischer Prozesse mit einem zeitlichen Parameter auf allgemeinere Parametermengen zu übertragen.

In Kapitel 1 werden wichtige Elemente der „Théorie générale“ verallgemeinert, gesehen vom Ansatzpunkt der Vektormaßtheorie. Die Grundidee dieses von Bichteler (Ann. Probab. **9** (1981) 49–89) entwickelten Einstiegs ist eine Charakterisierung der Semimartingale als vektorwertige Integratoren. Er wurde zuerst von Huerzeler (J. Multiv. Anal. **17** (1985) 279–303) im Falle eines 2-dimensionalen Parameterbereichs ausgebaut. Die Verbindung zur Martingaltheorie wird über Doleansmasse hergestellt. Mit Hilfe von Ungleichungen z. B. des Typs von Burkholder, Davis, Gundy werden dann einige Zerlegungen der Integratoren durch Prozesse erzielt, die sich in gewissen Richtungen des Parameterraums wie Martingale, in den übrigen wie Prozesse von beschränkter Variation verhalten. Bei Glattheit des Integrators kann das stochastische Integral auf Integranden verallgemeinert werden, die schwächere Meß- oder Integrierbarkeitseigenschaften haben, wie im Fall eines Parameters. Kein Analogon in der klassischen Theorie haben hingegen stochastische Linienintegrale entlang von Kurven im Parameterraum, die zuerst von Cairoli, Walsh (Acta Math. **134** (1975) 111–183) betrachtet wurden. In ihrem Sinne untersucht der Autor Begriffe wie „pfadunabhängige Integrierbarkeit“ und erhält eine Version des Satzes von Stokes.

Stochastische DGL für Mehrparameterprozesse werden in Kapitel 2 untersucht. Dabei wird der Standpunkt von Kapitel 1 eingenommen: die treibenden Prozesse sind Integratoren, die z. B. auch unstetig sein können. Dieser Ansatz wurde von Métivier, Pellaumail (Stochastic integration, Academic Press, New York 1980) für Prozesse mit einem Parameter entwickelt. Er beinhaltet daher von Natur aus als wesentliches Hilfsmittel Stoptechniken, die bei Übertragung leider der komplexeren Struktur des Parameterraums kaum gerecht werden. Es bleibt unklar, wie die davon herrührenden technischen Bedingungen, unter denen Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität starker Lösungen bewiesen werden, für Prozesse mit nicht unabhängigen Zuwächsen oder keiner Verwandtschaft zum Wienerprozeß verifiziert werden können. Außer bei Regularitätsaussagen für stochastische Flüsse werden diese Resultate in den übrigen Abschnitten des Kapitels kaum benötigt. Als Grundlage für Abschätzungen großer Abweichungen im Sinne von Freidlin, Wentzell, die im Übrigen auf einer durch Interation aus dem Einparameterfall gewonnenen Exponentialungleichung und Rechnungen wie in Doss, Priouret (Sém. de Prob. XVII, LNM **986** (1983)) aufbauen, wird z. B. nur ein Existenzsatz für den (treibenden) Wienerprozeß benutzt. Die Aussagen über die Asymptotik der unendlichdimensionalen Wärmeleitungsgleichung, die daraus gewonnen werden können, scheinen schon in Varadhan (Comm. Pure Appl. Math. **19** (1966) 261–286) enthalten zu sein. Die anschließend untersuchte zeitliche Markoveigenschaft von Lösungen stoch. DGL hängt von einer starken Unabhängigkeitsbedingung an den treibenden Prozeß ab. Schließlich werden die „minimal splitting fields“ von Raum-Zeit-

Markovfeldern bestimmt, die von Lösungen stochastischer PDGL herrühren, die von „Martingalmassen“ im Sinne von Walsh (LNM **1180** (1986) 266–439) angetrieben werden.

In Kapitel 3 werden einige weniger kohärente Einzelresultate über „spezielle Prozesse“ dargestellt. Der Wienerprozeß wird in Abschnitt 1 als „harness“, einer Art von Rückwärtsmartingal, charakterisiert, wobei der Levysche Satz über die Kennzeichnung der Brownschen Bewegung als Martingal die Hauptrolle spielt. In Abschnitt 2 werden etwa 10 verschiedene Markoveigenschaften untersucht und zum Teil verglichen, die alle mit der teilweisen Ordnung des Parameterraums verknüpft sind und daher für Gebiete mit rechteckigem Grundmuster formuliert sind. Im abschließenden Abschnitt werden Aufenthaltsintegrale des Wienerprozesses asymptotisch untersucht. Mit Hilfe von Lokalzeiten (räumliche Dimension $d=1$) und komplexen Abschätzungen für $d=2$ werden neue und interessante Ergebnisse erzielt, die z. B. das Gesetz von Kallianpur und Robbins verallgemeinern. M. Dozzi orientiert sich in seinen Untersuchungen für meinen Geschmack zu sehr an den Ergebnissen der Theorie stochastischer Prozesse mit einem Parameter. Dadurch läuft er Gefahr, analoges Vorgehen der Suche nach Zugängen, die der Andersartigkeit mehrdimensionaler Parameterbereiche besser gerecht werden, vorzuziehen. „Analoge“ Beweise geraten daher häufig allzu straff, schwer lesbar und teilweise lückenhaft (z. B. erste Ungleichung auf p. 119, pp. 135–139).

München P. Imkeller

Goodman, F., de la Harpe, P., Jones V., Coxeter graphs and towers of algebras, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 290 S., DM 68,–

Auf dem Gebiet der Operatoralgebren gibt es im Augenblick zwei besonders aktuelle Forschungsrichtungen: die nichtkommutative Topologie und Geometrie (K-Theorie, KK-Theorie, zyklische Kohomologie usw.) und die Theorie des Index für Unterfaktoren oder für Endomorphismen (mit Beziehungen zu Quantengruppen, Knoteninvarianten usw.). Beide Entwicklungen hängen auch mit Fragestellungen aus der mathematischen Physik zusammen.

In dem vorliegenden Buch werden Methoden und Ergebnisse zu der von V. Jones initiierten Untersuchung des „Index“ eines Unterfaktors N in einem von Neumann Faktor M zusammengestellt. Ein Faktor ist eine von Neumann Algebra mit trivialem Zentrum. Einen Faktor vom Typ II_1 kann man sich als eine (unendlichdimensionale) „Matrixalgebra“ $M_s(\mathbb{C})$ mit kontinuierlichem s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, vorstellen. Insbesondere besitzt ein solcher Faktor eine kanonische Spur. Wenn N ein Unterfaktor von M mit derselben Eins ist, kann man den „Index“ von N in M (unter Zuhilfenahme der Spuren auf N und M) etwa in Analogie zum Index einer Untergruppe in einer Gruppe G definieren. Der Index ist eine positive reelle Zahl. Grob gesprochen kann ein irreduzibler Unterfaktor als die „Fixpunktalgebra“ für die Wirkung einer kompakten (sogar endlichen) virtuellen oder „Para“-gruppe angesehen werden. Die erste wichtige Entdeckung von V. Jones war, daß der Index „quantisiert“ ist, d. h. nur bestimmte reelle Werte annehmen kann. Zwischen 1 und 4 z. B. kann er nur die Werte $4\cos^2(\pi/n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ annehmen. Welche Werte im allgemeinen auftreten, ist ein noch ungelöstes Problem. Die Klassifikation der Unterfaktoren für verschiedene Indizes führte zu überraschenden Zusammenhängen mit Invarianten für Knoten, Darstellungen von Heckealgebren, Darstellungen von Zopfgruppen, Quantengruppen und Gruppendualität.

Die Autoren stellen Ideen und Techniken dar, die den ursprünglichen Artikeln von V. Jones zugrundeliegen. In erster Linie werden also Resultate auf dem Gebiet der Operatoralgebren beschrieben. Auf den Zusammenhang mit Quantengruppen und Knoteninvarianten wird nur am Rande eingegangen. Das durchgehende Thema ist die Untersuchung von Inklusionen von Faktoren, die durch Inklusionen von endlichdimensionalen (halbeinfachen) komplexen Algebren approximiert werden können. Es wird gezeigt, daß solche Inklusionen durch gewisse spezielle „Bratteli-Diagramme" beschrieben werden können, die ihrerseits wieder aus bestimmten Coxetergraphen konstruiert werden können. Bei der Untersuchung der linearen Algebra endlichdimensionaler Inklusionen und ihrer Limiten treten als wichtige Hilfsmittel Heckealgebren, Temperly-Lieb-Algebren, Jonesprojektoren, Markovspuren und kommutative Quadrate auf. Die Darstellung ist sehr gut lesbar. Die meisten Begriffe werden erklärt, aber eine gewisse Vertrautheit mit den einfachsten Tatsachen aus der Theorie der Operatoralgebren ist wohl doch nötig, um das Buch mit Gewinn lesen zu können. Wie die Autoren selbst in der Einleitung schreiben, ist es noch zu früh, um ein Buch über die Klassifikation von Unterfaktoren mit irgendeinem Anspruch auf Vollständigkeit zu verfassen. So fehlen hier zum Beispiel die grundlegenden Ergebnisse von Ocneanu und Popa zur Klassifikation von Inklusionen von hyperfiniten Faktoren mit Index < 4. Die allgemeine Theorie ist im Augenblick noch in rasanter Entwicklung. Ein wichtiges offenes Problem ist zum Beispiel die Frage, welche positiven reellen Zahlen als Index eines irreduziblen Unterfaktors endlicher Tiefe auftreten können. Eine Vermutung besagt, daß es sich hierbei genau um die Normen (Perron-Frobenius-Eigenwerte) von Matrizen der Form $A*A$, wo A eine Matrix mit positiven ganzzahligen Matrixelementen ist, handelt. Zur Zeit befindet sich die Theorie allerdings noch in einem Stadium, wo jede neue Zahl, die als möglicher Index erwiesen wird, einen Fortschritt darstellt. Das vorliegende Buch ist sicher eine hervorragende Einführung in bestimmte Aspekte der Theorie für jeden, der sich in dieses Gebiet einarbeiten will. Sehr zu empfehlen ist es außerdem didaktisch als Ergänzung durch konkrete Beispiele zu einer Einführung in die Theorie der Operatoralgebren.

Heidelberg J. Cuntz

Warner, S., Topological Fields (North-Holland Mathematics Studies, Vol. 157), Amsterdam: North-Holland 1989, xiv + 564 Seiten, hard cover, Dfl. 210.00

In der topologischen Algebra untersucht man algebraische Strukturen mit Topologien, die geeignete Verträglichkeitsbedingungen erfüllen. Der Haupt-Gegenstand des vorliegenden Buches sind (nicht notwendig kommutative) Körper, welche mit Ringtopologien versehen sind.

Das erste Kapitel behandelt recht ausführlich die Theorie der topologischen Gruppen. Die Vervollständigung einer Hausdorff-Gruppe wird mit Hilfe der minimalen Cauchy-Filter konstruiert; die Gruppenstruktur erlaubt es, dabei den Begriff der Uniformität zu vermeiden. Ferner wurden die Sätze von Ellis und Zelazko aufgenommen, die besagen, daß bei lokal kompakten oder vollständig metrischen Topologien die Definition einer topologischen Gruppe abgeschwächt werden kann. Kapitel II beschäftigt sich mit topologischen Ringen, Moduln und Algebren, insbesondere mit deren Vervollständigungen. Die Beschränktheit, als Verallgemeinerung der Kompaktheit, spielt eine zentrale Rolle; eine Teilmenge eines topologischen Rings heißt beschränkt, wenn sie durch Multiplikation mit einer geeigneten Nullumgebung beliebig klein gemacht werden kann. Im Zusammenhang mit Normen und Spektralnormen werden (ultra-) normierbare Ringe charakterisiert als lokal beschränkte Ringe mit zusätzlichen Eigenschaften. Archimedische und nichtarchimedische Absolutwerte auf Ringen sind das Thema von Kapitel III. Nach

Ostrowski gibt es auf dem Körper der rationalen Zahlen bis auf Äquivalenz nur den gewöhnlichen und die p-adischen Absolutbeträge. Sätze von Shafarevich, Kaplansky, Kowalsky, Dürbaum und Fleischer charakterisieren diejenigen Ringtopologien auf Schiefkörpern, welche von Absolutwerten oder von Bewertungen herrühren; im kommutativen Fall sind dies genau die retro-beschränkten Topologien (leider fehlt der Hinweis darauf, daß diese Topologien auch als Topologien vom Typ V bezeichnet werden). Bei einem kurzen Ausflug in die nichtarchimedische Analysis werden der p-adische Logarithmus und die p-adische Exponentialfunktion eingeführt. Kapitel IV behandelt topologische Vektorräume, genauer: Hausdorff-Vektorräume über bewerteten Körpern. Nach einer sorgfältigen Diskussion endlich-dimensionaler Vektorräume werden in einem Abschnitt über „Prinzipien der Funktionalanalysis“ die Sätze von Banach-Steinhaus und von Hahn-Banach in allgemeinerem Rahmen formuliert und bewiesen; der letzte Satz gestattet auch eine nichtarchimedische Version, welche den Begriff „sphärisch kompakt“ involviert. Das Kapitel endet mit mehreren Höhepunkten: aufbauend auf dem Fortsetzungssatz für Absolutwerte wird der Satz von Gel'fand-Mazur und Ostrowskis Charakterisierung archimedischer Absolutwerte auf Schiefkörpern bewiesen; ferner werden alle lokal kompakten zusammenhängenden oder unzusammenhängenden Körper klassifiziert (Pontriagin, Jacobson). In einer Übungsaufgabe wird nach Dieudonné gezeigt, daß die komplexen Zahlen echte dichte zusammenhängende Teilkörper enthalten. In Kapitel V wird die Bewertungstheorie systematisch weiterentwickelt. Hier findet man die Approximationssätze, maximale Bewertungen und lineare Kompaktheit, und schließlich Henselsche Bewertungen und die „Henselisierung“ eines bewerteten Körpers. In den Übungsaufgaben werden u. a. neuere Beiträge zur Artin-Schreier-Theorie reell abgeschlossener Körper angedeutet. Beschreibungen lokal beschränkter Topologien auf speziellen Körpern sind das Thema von Kapitel VI. Zunächst werden alle lokal beschränkten Topologien auf den rationalen Zahlen mit Hilfe von Mengen von Primzahlen beschrieben. Damit läßt sich der Satz von Pontriagin verallgemeinern: die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen und die Quaternionen sind die einzigen vollständigen zusammenhängenden lokal beschränkten Körper mit beschränkter Kommutatorgruppe. Nach einer Darlegung der algebraischen Theorie der Dedekind-Ringe werden die linearen Topologien auf deren Quotientenkörpern beschrieben und näher untersucht (Heine-Warner 1973). Ferner werden nach Weber (1978) alle lokal beschränkten Ringtopologien auf algebraischen Zahlkörpern, auf algebraischen Funktionenkörpern (in einer Variablen, mit beschränktem Konstantenkörper) und auf Ordnungen von globalen Körpern beschrieben.

Das letzte Kapitel gibt einen sehr lesenswerten Abriß der historischen Entwicklung der topologischen Algebra. Das sorgfältig zusammengestellte Literaturverzeichnis besteht aus 38 eng beschriebenen Seiten; abgesehen von der Bewertungstheorie wurde hier Vollständigkeit angestrebt, und wohl auch weitgehend erreicht. Namensregister und Sachregister sind bei einem Buch dieses Umfangs sehr willkommen.

Viele ergänzende Resultate und Beispiele sind in den Übungsaufgaben enthalten, die nach jedem der 37 Abschnitte gestellt werden; diese Übungsaufgaben sind oft mit Zitaten und großzügigen Lösungshinweisen versehen.

Das vorliegende Buch systematisiert ein Gebiet, dessen Ergebnisse bisher nur in verstreuten Zeitschriftenartikeln vorlagen. Insgesamt ist es dem Autor sehr gut gelungen, sein breit angelegtes Konzept einer Einführung in die Theorie der topologischen Körper zu realisieren. Im Bestreben, die nötigen algebraischen und topologischen Vorkenntnisse gering zu halten, hat der Verfasser gleichzeitig eine Einführung in die topologische Algebra geschrieben. Im Vergleich zu dem Buch von W. Wieslaw mit dem gleichen Titel (Dekker 1988) hat Warners Monographie stärker enzyklopädischen Charakter und ist auf breiterer Basis aufgebaut; natürlich gibt es zwischen einzelnen Kapiteln in beiden Büchern größere Überschneidungen.

Bei der typographischen Ausstattung ist Kritik anzubringen: das Buch wurde im Schreibmaschinensatz ohne Randausgleich hergestellt, Definitionen und Sätze sind durch keinerlei typographische Hilfsmittel hervorgehoben. Schon bei mäßig komplizierten Formeln machen sich die zu geringen Abstände unangenehm bemerkbar. In Anbetracht des hohen Preises hätte man hier Besseres erwarten dürfen.

Trotzdem ist dieses Buch aufgrund seines Inhalts sehr willkommen. Als erste Einführung ist es vielleicht weniger geeignet, da die strenge Abfolge von Definitionen, Sätzen und Beweisen nur selten unterbrochen wird. Hat man dagegen schon eine erste Orientierung in der topologischen Algebra gewonnen, so wird man dieses Buch zur Vertiefung und zum Nachschlagen gerne in die Hand nehmen.

Tübingen Th. Grundhöfer

Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik

7: Volker Peckhaus

Hilbertprogramm und Kritische Philosophie

Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie.
1990, X, 291 Seiten mit 13 Abbildungen, kart. DM 78,–
ISBN 3-525-40314-3

Auf der Grundlage von archivalischen Untersuchungen wird die Umsetzung des von David Hilbert 1899 formulierten Programms zur axiomatischen Grundlegung der Mathematik in Göttingen behandelt. Im Mittelpunkt der Darstellung stehen die Impulse, die von der Diskussion um die Antinomien der Mengenlehre auf die Umgestaltung des Programms ausgingen, sowie Hilberts wissenschaftspolitische Maßnahmen zur Institutionalisierung der mathematischen Grundlagenforschung in Göttingen. Seine Bemühungen zur Schaffung von besoldeten Stellungen für Ernst Zermelo und Leonard Nelson, von denen er sich die Ausarbeitung seines axiomatischen Programms in mathematischer und philosophischer Hinsicht versprach, werden ausführlich dokumentiert.

8: Hans Niels Jahnke

Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform

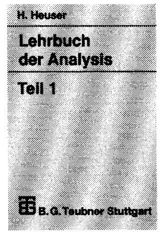
1990. X, 504 Seiten, kart. DM 130,–
ISBN 3-525-40315-1

Die Studie umfaßt drei Teile. Teil A analysiert die Stellung der Mathematik in der Wissenschaftskultur des ausgehenden 18. und beginnenden 19. Jahrhunderts sowie die Konsequenzen, die sich daraus für das Selbstverständnis der Mathematik ergeben haben. Teil B versucht am Beispiel einer elementaren Theorie, der Algebraischen Analysis, den begrifflichen Wandel an der Wende zum 19. Jahrhundert zu beschreiben. Teil C schließlich untersucht, wie sich die Veränderungen der Mathematik, die Bildungsvorstellungen und der Zustand der wissenschaftlichen Kultur in der Konzeption einer Mathematik für die Gymnasien niedergeschlagen haben und wie diese Konzeption schließlich im Laufe des 19. Jahrhunderts aus sehr heterogenen Gründen zunehmend an Bedeutung verloren hat.

Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen/Zürich

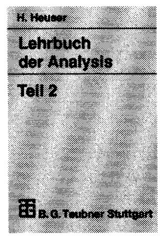
Heuser
Lehrbuch der Analysis Teil 1

Von Prof. Dr. H. Heuser, Universität Karlsruhe
8., überarbeitete Auflage. 1990. 643 Seiten mit 127 Bildern und 802 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen.
16,2 x 22,9 cm. Kart. DM 54,–
(Mathematische Leitfäden) ISBN 3-519-12231-6



Heuser
Lehrbuch der Analysis Teil 2

Von Prof. Dr. H. Heuser, Universität Karlsruhe
6., überarbeitete Auflage. 1991. 737 Seiten mit 102 Bildern und 631 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen.
16,2 x 22,9 cm. Kart. DM 58,–
(Mathematische Leitfäden) ISBN 3-519-02232-X

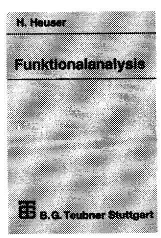


Heuser
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Einführung in Lehre und Gebrauch

Von Prof. Dr. H. Heuser, Universität Karlsruhe
1989. 628 Seiten mit 107 Bildern, 705 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen und zahlreichen Beispielen.
16,2 x 22,9 cm. Kart. DM 68,–
(Mathematische Leitfäden) ISBN 3-519-02227-3

Heuser
Funktionalanalysis
Theorie und Anwendung

Von Prof. Dr. H. Heuser, Universität Karlsruhe
2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 1986. 696 Seiten mit 30 Bildern, 742 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen und zahlreichen Beispielen.
16,2 x 22,9 cm. Kart. DM 84,–
(Mathematische Leitfäden) ISBN 3-519-12206-5



B. G. Teubner

Postfach 80 10 69, D-7000 Stuttgart 80