93. Band Heft 4
ausgegeben am 18. 10. 1991

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1991

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 118,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Printed in Germany — ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

93. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1991

Printed in Germany - ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 93, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

R. Racke: Zur Existenz globaler Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen
N. Schappacher, E. Scholz: Oswald Teichmüller – Leben und Werk
J. W. Schmidt: Dual Algorithms for Solving Convex Partially Separable Optimization Problems

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Memminger Str. 6, 8900 Augsburg
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 93 (1991) 147–160

Diophantische Geometrie: Effektivität und einige Probleme[1])

G. Wüstholz, Zürich

1 Die Thuesche Gleichung

1.1 Wir betrachten eine binäre Form

$$F(x, y) = a_0 x^d + a_1 x^{d-1} y + \ldots + a_d y^d$$

mit ganzrationalen Koeffizienten. Ihr Grad sei $d \geqslant 3$. Ein eng mit diophantischen Ungleichungen verknüpftes Problem ist die sogenannte Thuesche Gleichung

$$(1.1.1)\quad F(x, y) = h$$

für ganzrationale Zahlen $h \neq 0$. Eine ganzrationale Lösung (x, y) dieser Gleichung liefert nämlich eine gewisse diophantische Ungleichung, wie wir noch sehen werden, vom Typ

$$(1.1.2)\quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < c_1 q^{-\varkappa},$$

in der α eine feste algebraische Zahl vom Grad d, c_1 eine gewisse positive Konstante, $\varkappa$ ein positiver Exponent sowie p/q eine rationale Zahl ist.

Thue [Th] bewies, daß die Ungleichung (1.1.2) für $\varkappa > \frac{d}{2} + 1$ nur endlich viele Lösungen besitzt und konnte damit auf die Endlichkeit der Anzahl der Lösungen von (1.1.1) in ganzrationalen Zahlen schließen. Es war dann A. Baker [Ba], der mittels seiner Theorie der Linearformen in Logarithmen diese Lösungen sogar effektiv beschreiben konnte.

1.2 Ein sehr interessantes Problem in diesem Zusammenhang ist die Frage nach der Anzahl der Lösungen N_F von (1.1.1) in ganzen Zahlen x, y. Erste Abschätzungen hierfür wurden von Mahler [M] gegeben. Diese hingen von F und h ab. Aus Siegels Arbeiten zu diesem Problemkreis geht implizit die Frage nach der Unabhängigkeit von N_F von den Koeffizienten hervor. Diese Frage wurde 1983 von

---
[1]) Vortrag auf der Jahrestagung der DMV in Berlin 1987.

Evertse [E] gelöst. Er erhielt die Schranke

$$N_F \leqslant 7^{15\left(\binom{d}{3}+1\right)^2} + 6 \cdot 7^{2\binom{d}{3}(t+1)},$$

wobei t die Anzahl der Primfaktoren von h ist. Seine Schranke ist demnach nur von d und t abhängig.

In einer wunderschönen Arbeit haben nun Bombieri und Schmidt diese Schranke verbessert.

1.3 Theorem (Bombieri-Schmidt [B-S]). *Die irreduzible binäre Form $F(x, y)$ habe den Grad $d \geqslant 3$ und ganzrationale Koeffizienten. Dann ist die Anzahl der Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $(x, y) = 1$ der diophantischen Gleichung*

(1.3.1) $|F(x, y)| = h$

höchstens gleich

$$c_1 d^{1+t},$$

wobei c_1 eine absolute effektiv berechenbare positive Konstante ist. Ferner gibt es eine effektiv berechenbare Konstante $c_2 > 0$, so daß für $d > c_2$ die Anzahl der Lösungen von (1.3.1) *höchstens gleich*

$$215 \cdot d^{1+t}$$

ist.

Daß diese Schranke nahe der bestmöglichen (wenigstens im Fall $h = 1$) ist, folgt aus dem folgenden Beispiel. Wir setzen $h = 1$ und

$$F(x, y) = x^d + c(x-y)(2x-y)\dots(dx-y)$$

für ganzrationales $c \neq 0$. Die Gleichung (1.3.1) hat dann die Lösungen

$$(x, y) = (1, i) \qquad (1 \leqslant i \leqslant d)$$

und somit d Lösungen. Infolgedessen erhält man für die Anzahl der Lösungen von (1.1.1) die untere Schranke d.

Wir werden im folgenden skizzieren, wie man dieses Theorem beweist. Dabei werden wir uns auf den Fall $h = 1$ beschränken. Grob gesprochen ist die Beweisidee die folgende. Zunächst definiert man die Höhe eines Punktes $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ als

(1.3.2) $H(x, y) = \max(|x|, |y|)$.

Weiter kann man unter der Annahme, daß (1.3.1) eine Lösung besitzt, die Form F vermöge eines Elementes aus $SL_2(\mathbb{Z})$ so transformieren, daß $a_0 = 1$ wird, was wir nun annehmen werden. Wir definieren sodann die Mahler-Höhe $M(F)$ von F als

(1.3.3) $M(F) = \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|)$,

wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ die Wurzeln von

$$F(\xi, 1) = 0$$

sind.

Die Lösungsmenge von (1.3.1) wird dann in zwei Teilmengen unterteilt. Die erste Menge enthält die Lösungen mit kleiner Höhe, die zweite Menge diejenigen mit großer Höhe. Die Anzahl der Elemente der ersten Menge schätzt man auf elementare Weise ab. Sie liefert den Hauptbeitrag zur Gesamtzahl der Lösungen.

Die zweite Menge enthält all die Lösungen, die eine große Höhe besitzen. Sie liefern sehr gute diophantische Approximationen für gewisse Nullstellen von $F(\xi, 1)=0$.

Einerseits kann man dann zeigen, daß die Höhen solcher Lösungen weit auseinanderliegen (strong gap principle); andererseits garantiert ein Resultat aus der Theorie der diophantischen Approximationen (Bombieri-Mueller principle), daß diese Höhen höchstens ein bestimmtes Wachstum haben. Daraus schließt man dann auf eine Schranke für die Anzahl der großen Lösungen.

1.4 Der Zusammenhang zwischen Lösungen von (1.3.1) und diophantischen Approximationen ergibt sich wie folgt. Sei $F(x, y)$ wie oben und $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $y \neq 0$. Dann erhält man auf elementare Weise die Ungleichung

$$(1.4.1) \quad \min_i \min\left(1, \left|\alpha_i - \frac{x}{y}\right|\right) \leqslant \frac{(2d^{1/2}M(F))^d |F(x, y)|}{H(x, y)^d}.$$

Den Faktor $(2d^{1/2}M(F))^d$ bezeichnen wir mit C. Ist dann (x, y) eine Lösung von (1.3.1) mit $h=1$, so existiert demnach ein i mit

$$\min\left(1, \left|\alpha_i - \frac{x}{y}\right|\right) \leqslant CH(x, y)^{-d}.$$

Ist insbesondere

$$H(x, y) > C^{1/d},$$

so erhält man die gewünschte diophantische Approximation

$$(1.4.2) \quad \left|\alpha_i - \frac{x}{y}\right| < C \cdot H(x, y)^{-d}.$$

1.5 Wir haben soeben gesehen, wie Lösungen von (1.3.1) sehr gute diophantische Approximationen zu den Wurzeln der Gleichung $F(\xi, 1)=0$ liefern. Allerdings ist auch leicht zu sehen, daß gute diophantische Approximationen einer algebraischen Zahl α sehr weit auseinander liegen. Damit ist folgendes gemeint: Seien etwa $x/y \neq x'/y'$ zwei Lösungen der diophantischen Ungleichung (1.4.2) und etwa $H(x, y) \leqslant H(x', y')$. Dann gilt, wenn wir o.B.d.A. annehmen, daß $y, y' > 0$ gilt, die folgende Beziehung

$$\frac{1}{yy'} \leqslant \left|\frac{x}{y} - \frac{x'}{y'}\right| \leqslant \left|\frac{x}{y} - \alpha_i\right| + \left|\frac{x'}{y'} - \alpha_i\right| \leqslant 2 \cdot C \cdot H(x, y)^{-d}.$$

Es folgt

$$H(x', y') \geqslant \frac{H(x, y)^d}{2Cy} \geqslant \frac{1}{2C} H(x, y)^{d-1}.$$

Ordnet man daher die Lösungen von (1.4.2) nach wachsender Höhe, so erhält man schließlich durch Induktion für alle $k \geqslant 0$

$$(1.5.1)\quad H(x_{k+n}, y_{k+n}) \geqslant \left\{ \left(\frac{1}{2C} \right)^{\frac{1}{d-2}} H(x_n, y_n) \right\}^{(d-1)^k}.$$

Hieraus ersieht man sofort, daß die Höhe der Lösungen von (1.4.2) doppelt-exponentiell mit n wachsen. Dies ist das sogenannte „strong gap principle". Es kam auf völlig elementare Weise zustande.

1.6 Auf der anderen Seite stellt es sich heraus, daß Lösungen der diophantischen Ungleichung (1.4.2) doch nicht so weit auseinanderliegen können. Dies ist im wesentlichen genau der Inhalt der sogenannten Thue-Siegel-Dyson-Rothschen Methode. Es ist der Dysonsche Beitrag, der hier besonders nützlich ist für die ins Auge gefaßte Anwendung. Dieser Dysonsche Ansatz wurde von Bombieri und Mueller weiterentwickelt und daraus das Thue-Siegel-Prinzip, wie sie es nennen, gewonnen. Dieses soll hier kurz beschrieben werden. Dazu wähle man positive Zahlen t, τ mit

$$(1.6.1)\quad \sqrt{2-\mathrm{d}t^2} < \tau < t < \sqrt{2/d}$$

und setzt

$$(1.6.2)\quad \lambda = \frac{2}{t-\tau},$$

$$(1.6.3)\quad A = \frac{t^2}{2-\mathrm{d}t^2} \left(\log M(F) + \frac{d}{2} \right).$$

Wir setzen weiter $\lambda < d$ voraus. Dann nennen wir eine rationale Zahl x/y eine sehr gute Approximation von α, falls

$$(1.6.4)\quad \left| \alpha - \frac{x}{y} \right| < (4\mathrm{e}^A H(x,y))^{-\lambda}$$

gilt. Dann lautet das Thue-Siegel-Prinzip folgendermaßen.

Thue-Siegel-Prinzip. *Ist α eine algebraische Zahl vom Grad d, sind x/y, x'/y' zwei sehr gute Approximationen von α, so gilt mit*

$$\delta = \frac{\mathrm{d}t^2 + \tau^2 - 2}{d-1}$$

die Ungleichung

$$(1.6.5)\quad (4\mathrm{e}^A H(x',y'))^{\delta} \leqslant 4\mathrm{e}^A H(x,y).$$

1.7 Es ist nun ein leichtes, das „strong gap principle" mit dem Thue-Siegel-Prinzip zu kombinieren und eine Abschätzung für die Anzahl der Lösungen zu gewinnen. Für das Thue-Siegel-Prinzip benötigen wir sehr gute Approximation algebraischer Zahlen; solche werden von Lösungen (x, y) von (1.4.2) geliefert, falls z. B.

$$H(x,y) \geqslant Y_0 := (2C)^{\frac{1}{d-\lambda}} (4e^A)^{\frac{\lambda}{d-\lambda}}$$

gilt. Sei aber (x_n, y_n) die kleinste Lösung mit dieser Eigenschaft. Dann erhält man aus (1.6.5) mit $(x', y') = (x_{n+k}, y_{n+k})$ und $(x, y) = (x_n, y_n)$ die Beziehung

(1.7.1) $(4e^A H((x_{n+k}, y_{n+k}))^\delta \leqslant 4e^A H(x_n, y_n).$

Aus den Ungleichungen (1.5.1) und (1.7.1) kann nun zunächst $H(x_{n+k}, y_{n+k})$ eliminiert werden. Die daraus resultierende Ungleichung gibt eine Abschätzung von k in Abhängigkeit von $H(x_n, y_n)$, C, A, d, λ, δ a priori. Doch es stellt sich heraus, daß auch die Abhängigkeit von $H(x_n, y_n)$, C, A beseitigt werden kann und man das folgende Ergebnis erhält.

Proposition. *Die Anzahl der Lösungen* (x, y) *von* (1.3.2) *mit* $H(x, y) \geqslant Y_0$ *ist höchstens gleich*

$$\left(2 + \left[\frac{\log(\delta^{-1}(\lambda-2)^{-1})}{\log(d-1)}\right]\right) d.$$

Nach geeigneter Parameterwahl ist dies für $d \geqslant 1$ *höchstens gleich* $3d$.

Damit ist die Anzahl der großen Lösungen nach oben sehr gut abgeschätzt. Die kleinen Lösungen, d. h. die Lösungen mit

$$H(x, y) < Y_0$$

werden sodann auf elementare Weise gesondert behandelt und abgeschätzt. Dies wollen wir hier jedoch nicht weiter verfolgen und verweisen statt dessen auf die Arbeit [B-S].

1.8 Wir wollen nun noch ein Problem besprechen, das sich in diesem Zusammenhang ergibt. Dazu wollen wir vom projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ der Dimension n ausgehen und darin eine positiv definite hermitesche Metrik vorgeben, also z. B. die bekannte Fubini-Study-Metrik. Diese induziert auf $\mathbb{P}^n$ eine Distanzfunktion

$$d: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

Sei nun $V \subset \mathbb{P}^n$ eine Untervarietät der Dimension $m < n$, so können wir für beliebiges $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ den Abstand von P zu V definieren als

$$d(P, V) := \inf_{Q \in V(\mathbb{C})} d(P, Q).$$

Wir betrachten nun den Fall, daß V und P über $\mathbb{Q}$ definiert sind. Dann ist die Höhe von P wie folgt erklärt. Seien $x_0(P), \dots, x_n(P)$ projektive Koordinaten von P mit $x_i(P) \in \mathbb{Z}$ und teilerfremd. Dann setzen wir

$$H(P) := \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_i(P)|.$$

Wir betrachten sodann die Hyperebenen

$$L_i : x_0(P) x_i - x_i(P) x_0 = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Dann gilt, falls $P \notin V(\mathbb{C})$ ist,

$$V \cap L_1 \cap \ldots \cap L_n = \emptyset.$$

Aus dem Hilbertschen Nullstellensatz in effektiver Form ergibt sich dann leicht die Ungleichung

(1.8.1) $d(P, V) \geqslant c \cdot H(P)^{-m \deg V}$.[1]

Dies ist eine Ungleichung vom Liouville-Typ.

Problem. Gibt es ein $\varkappa < \deg V$, so daß die Ungleichung

(1.8.2) $d(P, V) < H(P)^{-\varkappa}$

nur endlich viele Lösungen besitzt?

Die Beantwortung dieser Frage ließe weitreichende Verallgemeinerungen des Resultats von Bombieri und Schmidt zu.

2 Linearformen in Logarithmen

2.1 In der diophantischen Geometrie spielen Linearformen in Logarithmen eine ungemein bedeutende Rolle. Dies wollen wir exemplarisch wiederum an der Gleichung (1.1.1) mit $h = 1$ demonstrieren. Dazu sei K ein algebraischer Zahlkörper, in dem $F(\xi, 1)$ vollständig zerfällt. Dann werden wir zeigen, wie eine Lösung von (1.1.1) zu einer Lösung einer linearen Gleichung

(2.1.1) $\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$ und $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathcal{O}_K^*$ führt. Hierbei sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ fest und nur von F abhängig.

Aus der Gleichung (2.1.1) erhält man sofort eine Gleichung der Gestalt

(2.1.2) $\alpha x + \beta y = 1, \qquad x, y \in \mathcal{O}_K^*.$

Denn ist $\eta_1, \ldots, \eta_r$ ein System von Fundamentaleinheiten, so kann man

$$x = \varepsilon \eta_1^{x_1} \ldots \eta_r^{x_r}, \qquad y = \varepsilon' \eta_1^{y_1} \ldots \eta_r^{y}$$

schreiben mit Einheitswurzeln ε, ε' und ganzen Zahlen $x_1, \ldots, x_r$, $y_1, \ldots, y_r$. Abschätzungen von x und y erhält man dadurch, daß die x_i und y_i beschränkt werden. Man kann immer annehmen, daß

$$X = \max_i |x_i| \leqslant Y = \max_i |y_i|,$$

X hinreichend groß ist sowie

$$\log |y| \gg Y$$

[1]) Eine ökonomischere Wahl der Linearformen L_i mittels Geometrie der Zahlen erlaubt, den Exponenten $m \deg V$ durch $\deg V$ zu ersetzen.

gilt. Letzteres erreicht man dadurch, daß man eventuell zu einer konjungierten Gleichung übergeht und mit Hilfe des Regulators abschätzt. Man erhält dann

$$\log\left|\frac{\alpha x}{\beta y}+1\right| = -\log|\beta y| \gg -Y.$$

Beachtet man, daß es für komplexes z mit

$$|e^z+1| \leqslant \frac{1}{4}$$

eine ganze Zahl k gibt mit

$$|z-k\pi i| \leqslant 4|e^z+1|$$

und wird $z=\log \alpha x/\beta y$ gesetzt, so erhält man mit $\Lambda=\log(\alpha x/\beta y)-k\log(-1)$ die Ungleichung

$$\log|\Lambda| \ll -Y.$$

Wir schreiben sodann Λ als Linearform in den Logarithmen von $\eta_1,\dots,\eta_r$ und -1. Untere Schranken à la Baker für diese ergeben eine obere Schranke für Y und damit für $x_1,\dots,x_r, y_1,\dots,y_r$, d. h. für die Lösungen von (2.1.2).

2.2 Sei also x, y eine Lösung von (1.1.1) (mit $h=1$ wohlgemerkt und wie früher $a_0=1$). Dann gilt in $\mathcal{O}_K$

$$x-\alpha_i y|1 \qquad (1\leqslant i\leqslant d).$$

Für $i=1,\dots,d$ folgt

$$\xi_i = x-\alpha_i y \in \mathcal{O}_K^*.$$

Wir wählen nun drei verschiedene Indizes i, j, k. Aus den Gleichungen

$$x-\alpha_i y=\xi_i,$$
$$x-\alpha_j y=\xi_j,$$
$$x-\alpha_k y=\xi_k$$

können x und y eliminiert werden und man erhält die auf Siegel zurückgehende Identität

(2.2.1) $(\alpha_i-\alpha_j)\xi_k+(\alpha_j-\alpha_k)\xi_i+(\alpha_k-\alpha_i)\xi_j=0.$

Dies ist offensichtlich eine Identität der Gestalt (2.1.1).

2.3 Wir haben somit Lösungen von (1.1.1) via Einheitengleichung eine Linearform in Logarithmen der Gestalt

(2.3.1) $b_1\log\alpha_1+\dots+b_n\log\alpha_n$

zugeordnet, die wir mit Λ bezeichnen wollen. Hierbei sind $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\bar{\mathbb{Q}}^*$ und $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{Z}$, nicht alle gleich Null.

Eine genaue Analyse des beschriebenen Zuordnungsverfahrens ergibt, daß untere Schranken für den Absolutbetrag von Λ obere Schranken für die Höhe der

Lösungen (x, y) von (1.1.1) liefern. Eines der bedeutendsten Ergebnisse der letzten Dekaden auf dem Gebiet der diophantischen Approximationen war der Satz von Baker über Linearformen in Logarithmen.

2.4 Um diesen Satz anzugeben, sei K ein Körper, der $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ enthält und

$$h(\alpha_i) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_v \max(0, \log |\alpha_i|_v),$$

wobei v alle Bewertungen von K durchläuft. Weiter sei

$$\Omega = \prod_i \max(1, h(\alpha_i)).$$

Wir ordnen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so, daß $h(\alpha_n) > h(\alpha_i)$ gilt für $i = 1, \ldots, n-1$. Dann definieren wir Ω' durch die Gleichung

$$\Omega = \Omega' \max(1, h(\alpha_n)).$$

Wir setzen weiter

$$h(\Lambda) := \max(1, \max_i \log |\beta_i|).$$

Dann gilt das folgende Theorem von Baker.

Theorem ([Ba]. *Gilt* $\Lambda \neq 0$, *so ist*

(2.4.1) $\log |\Lambda| > -c \cdot h(\Lambda) \Omega \log \Omega'$

mit einer effektiv berechenbaren Konstanten $c > 0$, *die nur von* n, $[K:\mathbb{Q}]$ *abhängt.*

Man sieht, daß das Vorhandensein des Faktors $\log \Omega'$ das Ergebnis leicht unsymmetrisch macht. Sein Auftreten ist einem der beiden Beweisschritte zu verdanken, der sogenannten Kummertheorie. Eines der ausstehenden Probleme auf diesem Gebiet war die Beseitigung dieses Faktors. Ein völlig neuer Zugang zu diesem Problem ermöglichte es kürzlich, dieses Problem zu lösen.

Theorem ([Wü]). *Es gilt, falls* $\Lambda \neq 0$ *ist, die untere Schranke*

(2.4.2) $\log |\Lambda| > -c \cdot h(\Lambda) \Omega.$

2.5 Dieses Resultat ist interessant wegen zwei Gesichtspunkten. Erstens ist es das für die heutigen Methoden bestmögliche Resultat. Das heißt: Eine grundsätzliche Verbesserung bedarf grundsätzlich neuer Methoden. Zweitens erlauben es die für seinen Beweis entwickelten Methoden, ein vollständiges p-adisches Analogon zu beweisen. Zwar war ein solches von Van der Poorten angegeben worden, aber ein Fehler im Beweis läßt den Beweisgang völlig zusammenbrechen. Es gelang zwar K. Yu ([Yu]) in seiner Dissertation kürzlich, einen Teil der Fehler zu beseitigen; dennoch war es ihm nur möglich, ein Resultat unter einschneidenden zusätzlichen Voraussetzungen herzuleiten.

2.6 Wir haben gesehen, daß sich die Lösungen der Thueschen Gleichung auf Lösungen der Einheitengleichung reduzieren ließen. Betrachten wir daher allgemeiner die Gleichung

(2.6.1) $\alpha_1\xi_1+\ldots+\alpha_n\xi_n=0$

mit $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in K$ festgewählt und $\xi_1,\ldots,\xi_n\in\mathcal{O}_K^*$, so ist dann ein sehr interessantes Problem die effektive Bestimmung ihrer Lösungen. Die Beantwortung dieser Frage könnte dann zu effektiven Schranken von Normformgleichungen führen. Eine nicht-effektive Antwort wurde von Evertse vor einiger Zeit gegeben.

3 Kleine Höhen auf elliptischen Kurven

3.1 Wir betrachten zunächst eine algebraische Zahl $\alpha\in\bar{\mathbb{Q}}$ und setzen $K=\mathbb{Q}(\alpha)$. Dann definieren wir die Höhe $H(\alpha)$ von α als

(3.1.1) $H(\alpha)=\prod_v \max(1,|\alpha|_v)^{1/D}$

wobei $D=[K:\mathbb{Q}]$ und v alle Stellen von K durchläuft. Es ist oft von Vorteil, statt $H(\alpha)$ die logarithmische Höhe

$$h(\alpha):=\log H(\alpha)$$

zu nehmen. Man stellt dann sofort fest, daß die folgende Proposition gilt:

Proposition. *Es gilt $h(\alpha)=0$ genau dann, wenn α eine Einheitswurzel ist.*

Das folgende Problem von Lehmer ist immer noch ungelöst.

Lehmers Problem. *Gibt es eine Konstante $c>0$ mit der folgenden Eigenschaft? Ist α eine algebraische Zahl vom Grad D mit*

(3.1.2) $h(\alpha)<\dfrac{1}{cD}$,

so ist α eine Einheitswurzel.

Das bislang beste Ergebnis zu diesem Problem ist das folgende Theorem von Dobrowolski [D].

Theorem ([D]). *Ist α keine Einheitswurzel, so ist*

$$h(\alpha)>\frac{1}{cD\left(\dfrac{\log D}{\log\log D}\right)^3}.$$

3.2 Wir wollen nun ein entsprechendes elliptisches Analogon zu diesem Problem formulieren. Dazu sei

(3.2.1) $E:y^2=4x^3-g_2x-g_3$

eine elliptische Kurve definiert über einem Zahlkörper K, d. h. $g_2,g_3\in K$. Dann können wir auf E eine naive Höhe definieren, indem wir für $P\in E(\bar{K})$ setzen

(3.2.2) $h(P)=h(x(P))$.

Mittels dieser Höhe kann man eine kanonische Höhe, die sogenannte Néron-Tate-Höhe, definieren, indem man setzt

$$(3.2.3)\quad \hat{h}(P) := \lim_{m\to\infty} \frac{h(2^m P)}{4^m}.$$

Hierbei wird benützt, daß $E(\bar{K})$ eine Gruppe ist. Dieser Grenzwert $\hat{h}(P)$ existiert immer, wie man leicht zeigen kann. Ebenso wie vorhin überlegt man sich die folgende Proposition.

Proposition. *Es gibt eine positive Zahl N mit $N\cdot P=0$ genau dann, wenn $\hat{h}(P)=0$ gilt.*

3.2 Für Punkte P in $E(\bar{K})$ setzen wir $d(P)=[K(P):K]$, wobei $K(P)$ den Körper bezeichnet, über dem P definiert ist. Dann können wir das folgende elliptische Analogon des Lehmerschen Problems definieren.

Problem. *Gibt es eine Konstante $c=c(E,K)>0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $P\in E(\bar{K})$ und gilt*

$$\hat{h}(P)<\frac{1}{cd(P)},$$

so ist P ein Torsionspunkt?

Auch hier ist die Antwort auf diese Frage unbekannt. Was man bisher weiß ist das folgende Resultat von D. W. Masser. Hierzu sei $L\supseteq K$ eine Körpererweiterung vom Grad D.

Theorem ([Ma]). *Es gibt eine effektiv berechenbare Konstante $c=c(E,K)$ mit*

$$\#\left\{P\in E(L);\ \hat{h}(P)<\frac{1}{cD}\right\}\leqslant cD\log D.$$

Hierzu erhält man ohne Mühe durch ein Abzählargument unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Höhe quadratisch wächst, das folgende Korollar.

Korollar. (i) *Gilt $\hat{h}(P)<\dfrac{1}{cd(P)^3(\log d(P))^2}$, dann ist P Torsionspunkt.*

(ii) $\#E(L)_{\mathrm{tor}}\leqslant cD\log D$.

Bemerkung. Bis auf den Faktor $\log D$ ist (ii) bestmöglich.

3.3 Man erhält die folgende schöne Anwendung dieses Ergebnisses. Wir bezeichnen hierfür mit $E[n](\bar{K})$ die n-Torsion von E. Dann kann man den Körper

$$L=K(E[n](\bar{K}))$$

bilden, indem man zu K die Koordinaten der n-Torsionspunkte adjungiert. Wir setzen

$$D_n:=[L:K].$$

Dann hat Serre gezeigt, daß der Grad von L über K etwa das ist, was man erwartet; nämlich für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, wenn E ohne komplexe Multiplikation ist,

(3.3.1) $D_n \gg n^{4-\varepsilon}$,

wobei die auftretende Konstante von ε abhängt. Dieses schöne Resultat hat den einzigen Makel, daß es ineffektiv ist. Aus dem Ergebnis von Masser folgt jedoch, daß stets

(3.3.2) $D_n \geqslant c' \dfrac{n^2}{\log n}$,

wobei c' eine *effektiv berechenbare* Konstante ist.

4 Die Tate-Vermutung für abelsche Varietäten

4.1 Sei K ein Körper und $\pi := \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ die absolute Galoisgruppe. Wir betrachten nun abelsche Varietäten A, die über K definiert sind und deren Dimension gleich n sei. Dabei versteht man unter einer abelschen Varietät A eine kommutative algebraische Gruppe, die vollständig ist. Ist $K = \mathbb{C}$, der Körper der komplexen Zahlen, so ist eine abelsche Varietät nichts anderes als ein komplexer Torus

$$A = \mathbb{C}^n/\Lambda,$$

$\Lambda \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gitter mit $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{C}^n$, versehen mit einer geschlossenen positiven (1, 1)-Form ω, deren Kohomologieklasse $[\omega]$ rational ist. Dies garantiert dann, daß A eine projektive Mannigfaltigkeit ist nach dem Kodaira-Einbettungssatz.

4.2 Die $\bar{K}$-rationalen Punkte auf A bilden eine abstrakte Gruppe $A(\bar{K})$, auf der die Galoisgruppe π operiert. Insbesondere operiert π auf der Untergruppe

$$A_{l^m} := \{P \in A(\bar{K});\ l^m P = 0\},$$

wobei l eine Primzahl bezeichnet und $m = 0, 1, 2, \ldots$ durchläuft, die l^m-Torsion von A. Der Tate-Modul $T_l(A)$ von A ist nun erklärt als

(4.2.1) $T_l(A) = \varprojlim A_{l^m}$.

Abstrakt ist

$$T_l(A) \cong \mathbb{Z}_l^{2n},$$

da $A_{l^m} \cong (\mathbb{Z}/_{l^m\mathbb{Z}})^{2n}$ gilt. Hierbei bezeichnen $\mathbb{Z}_l$ die l-adischen ganzen Zahlen, die man auch definieren kann als

$$\mathbb{Z}_l = \varprojlim \mathbb{Z}/_{l^m\mathbb{Z}}.$$

Da π auf jedem A_{l^m} operiert und diese Operation mit der Limesbildung verträglich ist, operiert π auch auf $T_l(A)$, und so wird $T_l(A)$ ein π-Modul, ja sogar ein $\mathbb{Z}_l[\pi]$-Modul.

4.3 Die Bildung des Tate-Moduls ist funktoriell. Ist nämlich

$$\phi: A \to B$$

ein Morphismus zwischen zwei abelschen Varietäten und ist dieser ebenso wie A und B über K definiert, so induziert ϕ einen π-linearen (oder auch Galois)-Homomorphismus

(4.3.1) $T_l(\phi): T_l(A) \to T_l(B)$.

Man erhält damit einen Homomorphismus

(4.3.2) $\mathrm{Hom}\,(A, B) \otimes \mathbb{Z}_l \xrightarrow{T_l} \mathrm{Hom}_\pi\,(T_l(A), T_l(B))$.

Tate stellte nun die folgende Vermutung auf.

Tate-Vermutung. *T_l ist ein Isomorphismus, wenn K endlich erzeugt über dem Primkörper ist.*

Die folgende Hypothese ist in diesem Zusammenhang von größter Wichtigkeit.

Hypothese. *A sei eine abelsche Varietät, l eine Primzahl prim zur Charakteristik von K und $d \geqslant 1$ eine ganze Zahl. Dann gibt es nur endlich viele abelsche Varietäten B über K mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Es gibt eine Polarisierung ψ von B vom Grad d^2 definiert über K,*

(ii) *es gibt eine K-Isogenie $\phi: B \to A$, deren Grad eine Potenz von l ist.*

4.4 In einem fundamentalen Beitrag hat Tate [Ta] gezeigt, daß die Tate-Vermutung eine Konsequenz der Hypothese ist. Diese wiederum ist bewiesen in den folgenden Fällen:

(I) K ist ein endlicher Körper (Tate, [Ta])

(II) K ist von endlichem Typ über $\mathbb{Q}$ (Faltings, siehe [F-W])

Die Bedeutung der Tate-Vermutung hat sich im Beweis der Mordell-Vermutung herausgestellt. Denn (etwas salopp gesprochen) die Mordell-Vermutung folgt aus der Tate-Vermutung und daher letztendlich aus der Hypothese.

4.5 Wir beschränken uns auf elliptische Kurven. In diesem Fall gelang es D. W. Masser und dem Autor, die Hypothese auf rein transzendentem Weg zu beweisen. Der Beweis funktioniert allgemeiner für Produkte von elliptischen Kurven und dann folgt in bekannter Weise die Tate-Vermutung für elliptische Kurven. Unser Zugang ist völlig effektiv im Gegensatz zu Faltings' Beweis. Wir betrachten eine elliptische Kurve E, die über einem Zahlkörper K definiert ist. Dann wird E gegeben durch die Gleichung

$$E: y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

wobei $g_2, g_3 \in K$ sind und $\Delta := g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$ ist. Wir definieren in naiver Weise die Höhe $h(E)$ von E durch

$$h(E) = \max\,(1, h(g_2), h(g_3))$$

wobei $h(g_2)$ bzw. $h(g_3)$ die zuvor schon definierte Höhe einer algebraischen Zahl ist.

Es gilt dann das folgende Theorem.

Theorem ([Ma-Wü]). *Es gibt eine effektiv berechenbare Konstante* $c > 0$ *mit der folgenden Eigenschaft: Ist* E' *eine weitere elliptische Kurve über* K *und*

$$\phi : E \to E'$$

eine Isogenie über K, *so gibt es eine Isogenie*

$$\phi_0 : E \to E'$$

mit $\deg \phi_0 \leqslant c h(E)^4$.

Die Konstante c *hängt nur vom Grad von* K *über* $\mathbb{Q}$ *ab.*

Es ist offensichtlich, daß aus diesem Theorem die Hypothese folgt für Produkte von elliptischen Kurven.

4.6 Es ist zu erwarten, daß die aus der Transzendenztheorie stammenden Methoden, mit denen das Theorem bewiesen wird, sich auch auf den Fall beliebiger abelscher Varietäten verallgemeinern lassen und die Hypothese sich dann im Allgemeinfall mittels Transzendenztheorie beweisen läßt[2]). Es besteht dann die starke Hoffnung, daß die im allgemeinen sehr guten effektiven Schranken sich dazu verwenden lassen, effektiv die Anzahl der rationalen Punkte auf Kurven vom Geschlecht größer als eins abzuschätzen. Zwar ist im Prinzip bekannt, daß dies möglich ist, jedoch habe ich bisher noch keine einzige explizite Schranke gesehen. So möchte ich daher folgendes Problem stellen, dessen Lösung sicherlich einen großen Schritt nach vorne darstellen würde.

Problem. Man gebe eine möglichst gute effektive Schranke für die Anzahl der rationalen Punkte auf einer Kurve vom Geschlecht größer als eins an.

Schon die Behandlung des Spezialfalls einer Fermatkurve ist von größtem Interesse, und es wäre sehr schön, eine nur – sagen wir – vom Grad der Kurve und vom Körper K abhängige Schranke für die Anzahl der K-rationalen Punkte zu kennen.

Literatur

[Ba] Baker, A: Contributions to the theory of diophantine equations. I, On the representation of integers by binary forms. II: The diophantine equation $y^2 = x^3 + k$. Phil. Trans. R. Soc. London. A **263** (1968) 173–208

[B-S] Bombieri, E.; Schmidt, W. M.: On Thue's equation. Invent. math. **88** (1987) 69–81

[D] Dobrowolski, E.: On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial. Acta Arith. **34** (1979) 391–401

[E] Evertse, J.-H.: Upper bounds for the number of solutions of diophantine equations. Math. Centrum Amsterdam 1987, pp. 1–127

[2]) Diese Verallgemeinerung wurde inzwischen von D. W. Masser und dem Autor bewiesen.

[F-W] Faltings, G.; Wüstholz, G.: Rational Points. Aspekte der Mathematik. Vieweg 1984

[M] Mahler, K.: Zur Approximation algebraischer Zahlen II: Über die Anzahl der Darstellungen großer Zahlen durch binäre Formen. Math. Ann. **108** (1933) 37–55

[Ma] Masser, D. W.: Counting points of small height on elliptic curves. Bull. Soc. Math. France **117** (1989) 247–265

[Ma-Wü] Masser, D. W.; Wüstholz, G.: Estimating isogenies on elliptic curves. Invent. Math. **100** (1990) 1–24

[Ta] Tate, J.: Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. Invent. Math. **2** (1966) 134–144

[Th] Thue, A.: Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. J. reine u. angew. Math. **135** (1909) 284–305

[Wü] Wüstholz, G.: A new approach to Baker's Theorem on linear forms in logarithms III. New Advances in Transcendence Theory. Cambridge University Press 1988, 399–410

[Yu] Yu, K.: Linear forms in p-adic Logarithms. Dissertation, Bonn 1987

G. Wüstholz
ETH Zürich
Mathematikdepartement
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich

(*Eingegangen 12. 12. 1988, revidiert 5. 4. 1991*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
93 (1991) 161–174
AMS subject classification: 14 K 05, 14 K 10

Projective Embeddings of Abelian Varieties*)

H. Lange, Erlangen

1 Introduction

a) Why were Abelian varieties introduced?

A *hyperelliptic integral* is by definition an integral of the form

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{f(z)}}$$

where γ is a path in the complex plane $\mathbb{C}$ with coordinate z and $f(z) = (z - a_1) \dots (z - a_d)$ with pairwise different constants a_i. If $d = \deg f$ is 1 or 2, an explicit integration via elementary functions is well-known from calculus. If $d = 3$ or 4, integration is possible via elliptic functions. If however $d \geqslant 5$, no explicit integration is known in general.

The reason for this is the following: The differential $\omega = \mathrm{d}z/\sqrt{f(z)}$ is not single valued considered as a function on $\mathbb{C}$. Let C_f denote the compact Riemann surface associated to $\sqrt{f}$. By definition C_f is the double covering of the Riemann sphere $\mathbb{P}_1$, ramified at the points $a_1, \dots, a_d$, and ∞ if d is odd. Now ω may be considered as a holomorphic differential on C_f. It is essentially the topological structure of C_f, which is responsible for not being able to integrate ω. The more complicated it is, the more difficult it is to integrate ω.

At the beginning of the 19th century the Norwegian mathematician Niels Henrik Abel (1802–1829) and the German mathematician Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) found a geometric way to attack this problem, which I would like to describe now:

The idea is, not to try to integrate ω alone, but simultaneously the whole set of holomorphic integrals

$$\omega_i = z^i \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{f(z)}} \quad \text{for} \quad i = 1, \dots, g = \left[\frac{d-1}{2}\right]$$

---

*) This is a slightly expanded version of a lecture given at the annual meeting of the Sociedad de Matemática de Chile on October 5, 1990 at the Universidad Católica de Valparaiso.

on C_f. For this fix a point $p_0 \in C_f$ and consider the map defined on a small neighbourhood U of p_0:

$$U \to \mathbb{C}^g, \qquad p \mapsto \left(\int_{p_0}^{p} \omega_1, \ldots, \int_{p_0}^{p} \omega_g \right).$$

Unfortunately this map makes no sense on the whole of C_f: The integrals depend on the path from p_0 to p. However, if we consider it modulo the values of integrals along all possible closed paths, we obtain a well-defined map:

Let $H_1(C_f)$ denote the group of closed paths starting from p_0 modulo homology. It can be shown that via the map $H_1(C_f) \to \mathbb{C}^g$, $\gamma \mapsto (\int_\gamma \omega_1, \ldots, \int_\gamma \omega_g)$ the group $H_1(C_f)$ is a lattice in $\mathbb{C}^g$, i.e. a discrete subgroup of maximal rank. Moreover the quotient

$$J(C_f) := \mathbb{C}^g / H_1(C_f),$$

the *Jacobian variety of* C_f, is a complex torus admitting an embedding into some projective space. A complex torus with this property is called an *abelian variety*. The *Abel map* α is defined as

$$\alpha\colon C_f \to J(C_f), \qquad p \mapsto \left(\int_{p_0}^{p} \omega_1, \ldots, \int_{p_0}^{p} \omega_g \right) \bmod H_1(C_f).$$

In fact, α is an embedding of C_f into $J(C_f)$.

In these terms the integration of $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ is essentially equivalent to the following two steps:

(i) Determine $J(C_f)$.
(ii) Describe the map $\alpha\colon C_f \to J(C_f)$.

Unfortunately only in very few cases this can be done explicitely (cf. e.g. [Sch]). However, one can try to study the geometry of the pair $(J(C_f), \alpha)$ and this may be considered as a sort of substitute for the first step to integration. This method is not restricted to hyperelliptic integrals, but works for all holomorphic integrals.

In this report I would like to give a survey on some old and recent results on the geometry not only of Jacobians, but slightly more generally, of all polarized abelian varieties (for the definitions see § 2 below). Before doing this, I would like to give some examples of problems and subjects where these more general abelian varieties turn up.

b) Where are abelian varieties used?

Number theory: This is certainly the subject, in which abelian varieties are most extensively applied. Only three examples shall be given:

(i) Class field theory: As a projective variety an abelian variety X is defined by a set of homogeneous polynomial equations. It is said to be defined over a field K if all coefficients of these polynomials are in K. If this is the case, certain points of X, the n-division points, generate abelian field extensions of K. Weil and Shimura (see [S-T]) used them heavily to construct class fields.

(ii) Riemann hypothesis for function fields: Weil introduced the notion of abelian varieties over a finite field k and used them to prove the Riemann hypothesis for function fields over k (see [We1]).

(iii) Mordell's conjecture: Faltings showed that any smooth curve C of genus $g \geqslant 2$ defined over a number field admits only finitely many points with coefficients in K by showing that the Jacobian $J(C)$, which contains C, admits only finitely many such points (see [F]).

Integrals of algebraic functions: Recently there has been some progress concerning the explicite integration of algebraic functions (see [T]). The idea is to consider a fixed class $\mathscr{C}$ of functions slightly larger than the class of elementary functions and then to prove a criterion for an algebraic function to be the derivative of a function of $\mathscr{C}$. Using this, the problem of explicit integration in many cases can be reduced to a linear system of equations, which often can be solved with the help of computers. Here also reduction modulo p and the Riemann hypothesis for function fields over finite fields play a role.

Functions in complex variables: Theta functions are an important class of non-elementary functions in one or several complex variables. They may be considered as sections of line bundles on abelian varieties and one can study the geometry of these varieties to derive properties of these functions and conversely. Quotients of theta functions of same type are multiperiodic functions on $\mathbb{C}^n$, the most well-known example being the Weierstrass $\wp$-function.

Dynamical systems: It has been shown in recent years that several flows given by completely integrable Hamiltonian systems are linearizable on the real points of the Jacobian variety of an algebraic curve associated to the problem. Only the following examples shall be mentioned: Euler's equation of a free rigid body moving about a point, the Euler-Poisson equation for a symmetric heavy rigid body, geodesics on quadrics, Nahm's equation for the construction of monopoles and the Toda lattices. Since the literature on this subject is extensive, let me mention only the survey articles [Kn] and [vM].

Certain abelian varieties play a similar role for some partial differential equations, e.g. the Korteweg-deVries-equation, the KP-equation and the Sine-Gordon-equation. In fact, they may be considered as infinite dimensional analogies of integrable Hamiltonian systems.

Physics: In the last paragraph it became already clear that a number of problems in physics can be studied via abelian varieties. In some other branches of physics theta functions play an important role. Let me mention only that they are solutions of the heat equation in thermodynamics. A more recent branch of physics applying abelian varieties is the theory of strings (see e.g. [DR]).

Last not least abelian varieties are objects of **algebraic geometry**. Very often one can associate to an algebraic variety V an abelian variety X in a natural way, e.g. the Picard variety $\mathrm{Pic}(V)$, the Albanese variety $\mathrm{Alb}(V)$, or certain intermediate Jacobians, and investigate properties of V by studying the abelian variety X. Apart from this the geometric properties of abelian varieties are interesting on their own behalf. Some aspects in this direction, in particular concerning non-principal polarizations, have been neglected a little in the past. Recently however there has been some progress concerning projective embeddings and it is my aim to give a short survey on some of these results.

c) What are the main problems?

Since this note is directed mainly to non-specialists, let me briefly recall what are the main problems concerning projective embeddings of an algebraic variety. Let X be a projective variety over some field which we assume for simplicity to be the field of complex numbers. By definition this is a complex algebraic variety admitting a closed embedding $X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ into some projective space. The problems which I would like discuss are:

(1): Determine all ambeddings $X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$: Let L be a line bundle on X and $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ a basis of its space of holomorphic sections $H^0(X, L)$. This determines a rational map

$$\varphi_L \colon X \to \mathbb{P}_n, \qquad x \mapsto (\varphi_0(x) : \ldots : \varphi_n(x)).$$

By definition L is *very ample* if and only if φ_L is an embedding. Every projective embedding factorizes into some embedding $\varphi_L \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ and a linear projection $\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_m$. So the first problem for the investigation of the possible embeddings $X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ is the question: Which line bundles on X are very ample?

Suppose we are given a fixed very ample line bundle L on X. Then the next question is:

(2): Is the embedding $\varphi_L \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ projectively normal? This would mean: One can determine the number of linearly independent hypersurfaces of every degree d in $\mathbb{P}_n$ containing X. To be more precise: Consider the ideal

$$I = \{f \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n] : f|X \equiv 0\}$$

of X in $\mathbb{P}_n$. I is a graded ideal

$$I = \bigoplus_{d \geqslant 2} I_d$$

where I_d is the vector space of forms of degree d vanishing on X. Its associated projective space is the space of all hypersurfaces of degree d in $\mathbb{P}_n$ containing X. One of the first problems in the study of X in $\mathbb{P}_n$ is to determine the dimension of the vector space I_d. If the embedding is projectively normal, this can be done via the Riemann-Roch theorem. The technical definition, saying that X is projectively normal in $\mathbb{P}_n$ if the homogeneous coordinate ring $R = \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]/I$ of X in $\mathbb{P}_n$ is normal, is not so important.

To know the embedding $\varphi_L \colon X \to \mathbb{P}_n$ explicitely means in a sense to know the ideal I in terms of generators and relations. To be more precise, the aim is to determine a resolution of the graded ideal I. It is convenient to split this problem into 3 parts:

(3): Determine the smallest k such that $\oplus_{d=2}^{k} I_d$ generates the ideal I. If for example I is generated by I_2, then X is an intersection of quadrics, if I is generated by I_2 and I_3, then X is an intersection of quadrics and cubics, etc.

(4): Find an explicite set of generators of I. Knowing the number k of problem (3), it suffices to determine a set of generators of the finite dimensional vector space $\oplus_{d=2}^{k} I_d$.

(5): Syzygies: The graded ring $R=\mathbb{C}[X_0,\dots,X_n]/I$ is in a natural way a finitely generated module over $S=\mathbb{C}[X_0,\dots,X_n]$ and thus has a minimal graded free resolution:

$$\text{(F.)} \qquad 0 \to F_r \xrightarrow{\varphi_r} F_{r-1} \to \dots \xrightarrow{\varphi_1} F_1 \xrightarrow{\varphi_0} S \to R \to 0$$

where $r=\operatorname{codim}(X,\mathbb{P}_n)$. Here each F_i is a direct sum of twists of S

$$F_i = \bigoplus_j S[-a_{ij}].$$

In particular the maps φ_i are given by matrices of homogeneous forms. Minimality means that none of the entries in these matrices are non-zero constants. The so-called Betti numbers a_{ij} are uniquely determined by L. The submodule $\operatorname{Im}(\varphi_i)$ of F_{i-1} is called the *i-th syzygy-module* of X in $\mathbb{P}_n$. The resolution (F.) determines a minimal graded resolution of the ideal I and conversely. So the first syzygies are the relations between a minimal set of generators of I, the second syzygies the relations between a minimal set of generators for the first syzygies and so on. The aim in these terms is to determine explicite sets of generators for the modules of syzygies.

2 Embeddings of abelian varieties

In this section some results shall be compiled concerning the problems (1)–(5) for abelian varieties in arbitrary dimensions. For simplicity let us restrict ourselves to the case of abelian varieties over the field of complex numbers. First we need some notation.

An *abelian variety of dimension* g is by definition a compact complex torus $X=\mathbb{C}^g/\Lambda$ admitting an embedding into some projective space. Let L be a line bundle on X. Its first Chern class $c_1(L)$ may be considered as a hermitian form $H:\mathbb{C}^g\times\mathbb{C}^g\to\mathbb{C}$ whose imaginary part $\operatorname{Im} H$ takes integer values on the lattice Λ. The line bundle L is ample if and only if H is positive definite. A *polarization of* X is by definition the first Chern class H of an ample line bundle L on X. The pair (X,H) or by abuse of notation (X,L) is called a *polarized abelian variety*.

According to a theorem of Frobenius there is a basis of the lattice Λ with respect to which $\operatorname{Im} H$ is given by the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad D=\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_g)$$

with positive integers d_i such that d_i divides d_{i+1} for $i=1,\dots,g-1$. The g-tupel $(d_1,\dots,d_g)$ is uniquely determined by L and called the *type* of the line bundle L or the associated polarization H. A polarization of type $(1,\dots,1)$ is called a *principal polarization*.

In these terms the *theorem of Riemann-Roch* says: If L is an ample line bundle of type $(d_1, \ldots, d_g)$ on X, then

$$\dim H^0(X, L) = d_1 \ldots d_g.$$

Let $\pi: \mathbb{C}^g \to X$ denote the canonical projection map. Every holomorphic line bundle on the vector space $\mathbb{C}^g$ is trivial. One can choose an isomorphism $\pi^* L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^g}$ with respect to which the elements of $H^0(X,L)$ may be considered as theta functions on $\mathbb{C}^g$. If $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_n$ is a basis of such theta functions, then the map φ_L is given by

$$\varphi_L: X \to \mathbb{P}_n, \qquad \bar{x} \mapsto (\vartheta_0(x) : \ldots : \vartheta_n(x))$$

where x denotes any representative of $\bar{x}$ in $\mathbb{C}^g$.

For the whole section let L denote an ample line bundle of type $(d_1, \ldots, d_g)$ on an abelian variety X of dimension $g \geqslant 1$.

(1): Very ampleness: The following result is due to Lefschetz (see [L]).

Theorem. *If $d_1 \geqslant 3$, then L is very ample.*

Note that L is a d_1-th power of an ample line bundle M on X. So an equivalent formulation of the theorem is: *If M is an ample line bundle on X, then M^d is very ample for any $d \geqslant 3$.* The corresponding statement for $d_1 = 2$ is due to Ohbuchi (see [O1]). For a short proof see also [LN].

Theorem. *Suppose $d_1 = 2$. Then L is very ample if and only if (X,M) is not isomorphic to a product $(X_1, M_1) \times (X_2, M_2)$, where (X_2, M_2) is a principally polarized abelian variety of positive dimension.*

Note that if $\varphi_{L_1}: X_1 \to \mathbb{P}_{n_1}$ and $\varphi_{L_2}: X_2 \to \mathbb{P}_{n_2}$ and $L = p_1^* L_1 \times p_2^* L_2$ on $X = X_1 \times X_2$, by Künneth's formula $\varphi_L: X \to \mathbb{P}_n$ is composed by φ_{L_1} and φ_{L_2} via the Segre embedding $\mathbb{P}_{n_1} \times \mathbb{P}_{n_2} \to \mathbb{P}_n$ with $n = n_1 n_2 + n_1 + n_2$. To complete the picture in the case $d_1 = 2$, let (X, M) be a principally polarized abelian variety. Let D denote the unique divisor in the linear system $|M|$. Suppose

$$D = D_1 + \ldots + D_r$$

with irreducible components D_i. The divisors D_i are necessarily different from each other. For any $i = 1, \ldots, r$ there is a unique quotient abelian variety $p_i: X \to X_i$ on which there exists a line bundle M_i defining a principal polarization, such that $\mathcal{O}_X(D_i) = p_i^* M_i$. With these notations the map

$$(p_1, \ldots, p_r): X \to X_1 \times \ldots \times X_r$$

is an isomorphism of polarized abelian varieties (X, M) and $(X_1 \times \ldots \times X_r, p_1^* M \otimes \ldots \otimes p_r^* M)$ (see [LN]). For $i = 1, \ldots, r$ let

$$K_i = X_i / \pm \mathrm{id}$$

denote the Kummer-variety of X_i. The canonical maps $\pi_i: X_i \to K_i$ are étale double covers outside the $2^{2 \dim X_i}$ two-division points of X_i, whose images are double points in K_i. Let

$$K = K_1 \times \ldots \times K_r$$

and $\pi = (\pi_1 \times \ldots \times \pi_r) \circ (p_1, \ldots, p_r)$. Without loss of generality we may assume that M is a symmetric line bundle on X, i.e. satisfies $(-1)^* M \simeq M$ or equivalently that $L = M^2$ is a pullback of a line bundle on K (see [M1]). Then $\varphi_L: X \to \mathbb{P}_n$ factorizes as

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_L} & \mathbb{P}_n \\ & {}_{\pi}\searrow \quad \nearrow_{\psi_L} & \\ & K & \end{array} .$$

The following theorem is classical (for a reference see [LN]).

Theorem. *ψ_L is an embedding.*

In particular it follows that φ_L is of degree 2^r onto its image.

(2): Projective normality: The following theorem is due to Koizumi (see [Ko]):

Theorem. *If $d_1 \geqslant 3$, the embedding $\varphi_L: X \to \mathbb{P}_n$ is projectively normal.*

For $d_1 = 2$ the embedding φ_L is not necessarily projectively normal. Ohbuchi proved the following criterion (see [O2]). For the sake of simplicity it will be formulated only for the unique line bundle L_0 within its algebraic equivalence class $\mathrm{Pic}^{L_0}(X)$, which is a square of a symmetric line bundle. This is no loss of generality, since any $L \in \mathrm{Pic}^{L_0}(X)$ is a translate of L_0.

Theorem. *Suppose M is a symmetric line bundle of type $(1, d_2, \ldots, d_g)$ on X and $L_0 = M^2$. The embedding $\varphi_{L_0}: X \to \mathbb{P}_n$ is projectively normal if and only if no point of the group $K(L_0) = \{x \in X \mid t_x^* L_0 \simeq L_0\}$ is a base point of M.*

Recall that $K(L_0)$ is a finite subgroup of X, since L_0 is ample. In fact it is the kernel of the isogeny $\phi_{L_0}: X \to \hat{X}$, $x \mapsto t_x^* L_0 \otimes L_0^{-1}$ onto the dual abelian variety $\hat{X} = \mathrm{Pic}^0(X)$.

(3): The ideal of an abelian variety: Let $\varphi_L: X \to \mathbb{P}_n$ be the embedding associated to a very ample line bundle L of type $(d_1, \ldots, d_g)$ on X and let

$$I = \bigoplus_{d \geqslant 2} I_d$$

denote the graded ideal of X in $\mathbb{P}_n$. Mumford showed in [M2] that if $d_1 \geqslant 4$ then as a (not necessarily graded) ideal I is generated by quadratic forms. The question whether this is true even in the graded sense was solved by Kempf (see [K]). He proved the following

Theorem. (a) *For $d_1 \geqslant 4$ the graded ideal I is generated by its forms of degree* 2.

(b) *For $d_1 = 3$ the graded ideal I is generated by its forms of degree* 2 *and* 3.

The proof uses a relative version of Mumford's theory of the multiplying-sections-map (see [M2]). The same proof works also to show: *If $d_1 = 2$ and L is projectively normal, the graded ideal I is generated by its forms of degree* 2, 3 *and* 4 (see [LB]).

The analogous question for the Kummer variety is a classical problem (see [W]): Let K be the Kummer variety of X and $\psi_L: K \to \mathbb{P}_n$ the embedding of the diagram (*). Is the graded ideal I of K in $\mathbb{P}_n$ generated by its forms of degree $\leqslant 4$? This is true in the case of surfaces (see below).

(4): Explicit generators of I: Since the map $\varphi_L\colon X \to \mathbb{P}_n$ can be given in terms of theta functions, the elements of I may be considered as relations among theta functions, called *theta relations.* Riemann (see [R]) found a set of quadratic theta relations, which generate I in the case $d_1 \geqslant 4$ and even. We will state them in a form which originates in Mumford's theory of finite theta functions (see [M1]) and which can be generalized to the cubic case:

Recall the finite group $K(L)=\{x\in X \mid t_x^* L \simeq L\}$. The hermitian form $H=c_1(L)$ induces a nondegenerate alternating form on $K(L)$. Fix a decomposition

$$K(L)=K(L_1)\oplus K(L_2)$$

into maximal isotropic subgroups. The order of $K(L_1)$ equals the dimension of $H^0(X,L)$. Via the theory of finite theta functions one can introduce in a canonical way a basis $\{\vartheta_x^L : x\in K(L_1)\}$ for $H^0(K,L)$ (see [BL]). The decomposition of $K(L)$ induces decompositions $K(L^n)=K(L^n)_1\oplus K(L^n)_2$ and one gets bases $\{\vartheta_x^{L^n} : x\in K(L^n)_1\}$ for all $n\geqslant 1$. For any $y\in K(L)_1$ let X_y denote the coordinate function of $\mathbb{P}_n=P(H^0(X,L))$ corresponding to the basis element ϑ_y^L. Then we have

Riemann's theta relations: *Let L be a symmetric ample line bundle of type $(d_1,\dots,d_g)$ on X with an even number $d_1\geqslant 4$. Let Z_2 denote the subgroup of 2-division points in $K(L)_1$ and $\hat{Z}_2$ its character group. For $x\in K(L^2)_1$ and $\varrho\in\hat{Z}_2$ write*

$$\theta_{x,\varrho}(0) := \sum_{a\in Z_2} \varrho(a)\vartheta_{x+a}^{L^2}(0).$$

Then the equations

$$\theta_{x_1,\varrho}(0)\sum_{a\in Z_2}\varrho(a)X_{y+x_2+a}X_{y-x_2+a}=\theta_{x_2,\varrho}(0)\sum_{a\in Z_2}\varrho(a)X_{y+x_1+a}X_{y-x_1+a}$$

generate the vector space I_2 of quadratic equations for X in $\mathbb{P}_n$. Here $y,x_1,x_2\in K(L^2)_1$ with $y\equiv x_1\equiv x_2$ (mod $K(L)_1$) and $\varrho\in\hat{Z}_2$.

For $d_1=3$ quadratic and cubic forms generate the ideal I according to Kempf's theorem. As the example of a plane cubic shows, this result is sharp. Since multiplying an element of I_2 with any linear form gives an element of I_3, here the interesting space is I_3. The analogue of Riemann's equations are the

Cubic Theta Relations: *Let L be a symmetric ample line bundle of type $(d_1,\dots,d_g)$ on X with d_1 divisible by 3. Let Z_6 denote the subgroup of 6-division points in $K(L^2)_1$ and $\hat{Z}_6$ its character group. For $(y_1,y_2)\in K(L^6)_1\times K(L^2)_1$ and $\varrho\in\hat{Z}_6$ write*

$$\theta_{(y_1,y_2),\varrho}(0) := \sum_{a\in Z_6}\varrho(a)\vartheta_{y_1-a}^{L^6}(0)\vartheta_{y_2-3a}^{L^2}(0).$$

Then the equations

$$\begin{aligned}&\theta_{(y_1,y_2),\varrho}(0)\sum_{a\in Z_6}\varrho(a)X_{y_1'+y_2'+y_3+2a}X_{y_1'-y_2'+y_3+2a}X_{-2y_1'+y_3+2a}\\ &=\theta_{(y_1',y_2'),\varrho}(0)\sum_{a\in Z_6}\varrho(a)X_{y_1+y_2+y_3+2a}X_{y_1-y_2+y_3+2a}X_{-2y_1+y_3+2a}\end{aligned}$$

generate the vector space I_3 of cubic equations for X in $\mathbb{P}_n$. Here $y_1, y_1'\in K(L^6)_1$, y_2, $y_2'\in K(L^2)_1$, $y_3\in K(L^3)_1$ with $y_1\pm y_2+y_3$, $y_1'\pm y_2'+y_3$, $-2y_1+y_3$, $-2y_1'+y_3\in K(L)_1$ and $\varrho\in\hat{Z}_6$.

For the proof see [BL]. Moreover it is shown in [BL] that in case L is of degree 3 on an elliptic curve the cubic theta relations reduce to Hesse's equation for a plane cubic curve

$$X^3+Y^3+Z^3=3\lambda XYZ.$$

(5): Syzygies: As always let L denote an ample line bundle of type $(d_1,\ldots,d_g)$. The results of (2) and (3) hint that as the number d_1 grows, the equations of X in $\mathbb{P}_n$ display an increasingly regular behaviour. In analogy to a theorem of Green on algebraic curves Lazarsfeld stated the following conjecture (see [Lz]). To formulate it we say that the k-th syzygy-module is *generated by linear forms*, if it is spanned by relations of the form

$$\sum L_iP_i=0$$

where the L_i are linear forms and the P_i are $(i-1)$-th syzygies respectively generators of I.

Conjecture. *Suppose $d_1\geqslant 4+k$ for some integer $k\geqslant 1$. Then the k-th syzygy-module is generated by linear forms.*

Together with Kempf's theorem above this would mean that the Betti numbers a_{ij} of X in $\mathbb{P}_n$ (see introduction part (c)) satisfy:

$$a_{ij}=-i-2\quad\text{for all}\quad i\leqslant k\quad\text{and all}\quad j.$$

In particular the maps φ_i are given by matrices of linear forms for $i=1,\ldots,k$.

Partly the conjecture was proved in [K]. Kempf showed:

Theorem. *Suppose $d_1\geqslant 4+2k$ for some integer $k\geqslant 1$. Then the k-th syzygy-module is generated by linear forms.*

The proof works by induction starting with the above mentioned theorem on the generators of I.

3 Embeddings of abelian surfaces

Whereas the answers to problems (1)–(5) are fairly complete in the case of line bundles of type $(d_1,\ldots,d_g)$ for $d_1\geqslant 2$, the situation is different for $d_1=1$. In this case almost nothing is known for abelian varieties of dimension $g\geqslant 3$. There are however some more results in the case of elliptic curves and abelian surfaces. We will only deal with abelian surfaces here. For the projective geometry of elliptic curves see [H].

Let $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$ be an abelian surface and L an ample line bundle of type (d_1, d_2) on X. In the whole section we assume that (X, L) does not split, i.e. is not isomorphic to a product of elliptic curves as polarized abelian variety.

Before we come to the case $d_1 = 1$ let us say a little bit more about the type $(2,2)$. We saw already in the last section that in this case $\varphi_L: X \to K \subseteq \mathbb{P}^3$ is a double cover of a surface K of degree 4 in $\mathbb{P}_3$, smooth apart from exactly 16 double points, a *Kummer surface.* A lot is known about the geometry of these surfaces, for a reference see [Hu]. Let us mention only two results:

(i) The coordinates of $\mathbb{P}_3$ can be chosen in such a way that K is given by an equation

$$\begin{aligned}\lambda_1^2(X_0^2X_1^2 + X_2^2X_3^2) &+ \lambda_2^2(X_0^2X_2^2 + X_1^2X_3^2) + \lambda_3^2(X_0^2X_3^2 + X_1^2X_2^2)\\ &+ 2\lambda_1\lambda_2(X_0X_1 + X_2X_3)(X_1X_3 - X_0X_2)\\ &+ 2\lambda_1\lambda_3(X_0X_1 - X_2X_3)(X_0X_3 - X_1X_2)\\ &+ 2\lambda_2\lambda_3(X_0X_2 + X_1X_3)(X_0X_3 + X_1X_2)\\ &+ \lambda_0^2X_0X_1X_2X_3 = 0\end{aligned}$$

for some $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3) \in \mathbb{P}_3$. Note that the moduli space of Kummer surfaces is of dimension 3. Since the family of quartics above is parametrized by $\mathbb{P}_3$, this implies that conversely for a general $(\lambda_0 : \ldots : \lambda_3)$ the above equation defines a Kummer surface. It is not difficult to work out when this is the case and to study the possible degenerations.

(ii) There are exactly 16 planes in $\mathbb{P}_3$ cutting K doubly in a conic. They are called the *singular planes* of K. Together with the 16 singular points of K they form a $(16,6)$-configuration. This means that each singular plane contains exactly 6 singular points and through each singular points there pass exactly 6 singular planes.

We are left with line bundles L of type $(1, d)$ with $d \geqslant 2$. The rational map to study is

$$\varphi_L: X \to \mathbb{P}_{d-1}.$$

For $d = 2$ Barth showed in [B]:

Theorem. *Let L be of type* $(1,2)$. *The map* $\varphi_L: X \to \mathbb{P}_1$ *has exactly* 4 *base points. Let* $p: \tilde{X} \to X$ *denote the blow-up of these* 4 *points. The composition* $\varphi_L \circ p: \tilde{X} \to \mathbb{P}_1$ *is a family of curves of genus* 3 *with smooth and irreducible general fibre. Its singular fibres are either irreducible of geometric genus* 2 *with one double point or of type* $E + F$ *with E, F elliptic and* $E \cdot F = 2$.

Moreover it is easy to see that if L is symmetric, then the base points of L are 4-division points.

For $d \geqslant 3$ it can be derived from the action of the Heisenberg group that L is basepoint free that is $\varphi_L: X \to \mathbb{P}_{d-1}$ is a morphism.

For $d=3$ not much is known: It is not difficult to see that if L is of type $(1,3)$ then $\varphi_L: X \to \mathbb{P}_2$ is a $6:1$ covering ramified over a curve $R \subset \mathbb{P}_2$ of degree 18 (see [LB]). However the problem remains to determine the curves R which turn up in this situation.

In order to describe the situation for $d \geqslant 4$ we need some notation. There exists a cyclic isogeny $p: X \to Y$ such that Y admits a principal polarization M on Y with $p^*M \simeq L$. Let C denote the unique curve in the linear system $|M|$. According to a theorem of Weil (see [We2], Satz 2) C is either smooth of genus 2 and Y is the Jacobian of C or $C = E_1 + E_2$ with elliptic curves E_i with $E_1 \cdot E_2 = 1$ and $Y \simeq E_1 \times E_2$. Consider the pull back diagram

$$\begin{array}{ccc} D & \hookrightarrow & X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ C & \hookrightarrow & Y. \end{array}$$

As an étale cover of degree d of C, the curve D is either smooth of genus $d+1$ or consists of 2 elliptic curves intersecting simply in d points. We say that the curves C and D admit *elliptic involutions compatible with the covering p* if there is a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{2:1} & F \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ C & \xrightarrow{2:1} & E \end{array}$$

with elliptic curves E and F.

The case $d=4$ was treated in [BLS]. The main result is

Theorem. *Let L be a symmetric line bundle of type* $(1,4)$ *on X.*

(a) $\varphi_L: X \to \bar{X} \subseteq \mathbb{P}_3$ *is birational onto its image* $\bar{X}$ *if and only if the curves C and D do not admit elliptic involutions compatible with the covering p.*

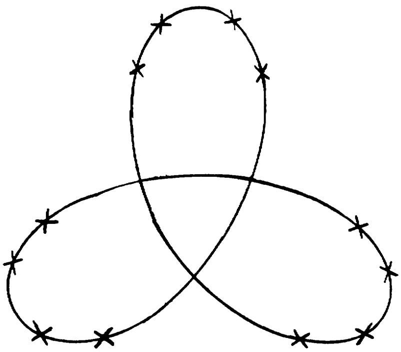
(b) *In the birational case* $\bar{X}$ *is an octic in* $\mathbb{P}_3$ *singular exactly along* 4 *double curves intersecting each other in* 4 *fourfold points. On each of the double curves there are exactly 12 pinch points.*

(c) *In the exceptional case* $\varphi_L: X \to \bar{X} \subseteq \mathbb{P}_3$ *is a double covering of a singular quartic* $\bar{X}$ *which is birational to an elliptic scroll.*

In the birational case the coordinates of $\mathbb{P}_3$ can be chosen in such a way that the octic equation for $\bar{X}$ is

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2(Y_0^4Y_1^4 + Y_2^4Y_3^4) + \lambda_2^2(Y_0^4Y_2^4 + Y_1^4Y_3^4) + \lambda_3^2(Y_0^4Y_3^4 + Y_1^4Y_2^4) \\ &\quad + 2\lambda_1\lambda_2(Y_0^2Y_1^2 + Y_2^2Y_3^2)(Y_1^2Y_3^2 - Y_0^2Y_2^2) \\ &\quad + 2\lambda_1\lambda_3(Y_0^2Y_1^2 - Y_2^2Y_3^2)(Y_0^2Y_3^2 - Y_1^2Y_2^2) \\ &\quad + 2\lambda_2\lambda_3(Y_0^2Y_2^2 + Y_1^2Y_3^2)(Y_0^2Y_3^2 + Y_1^2Y_2^2) \\ &\quad + \lambda_0^2Y_0^2Y_1^2Y_2^2Y_3^2 = 0 \end{aligned}$$

where $(\lambda_0:\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3) \in \mathbb{P}_3 - \{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0\}$. The 4 singular curves are just the intersections of $\bar{X}$ with the coordinate planes and look as follows



They are singular in the coordinate points. The markings represent the pinch points.

The striking similarity with the equation of the Kummer surface given at the beginning of the section derives from the fact that there is a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ covering of the Jacobian $J(\tilde{C})$ of a smooth curve $\tilde{C}$ of genus 2 inducing an $8:1$ covering of $\bar{X}$ onto the Kummer surface of $J(\tilde{C})$ which in coordinates is given by $X_i = Y_i^2$ for $i=0,..,3$. The same is true in the exceptional case. This fact is used heavily in the proof of the theorem.

Finally suppose $d \geqslant 5$. In case Y is the Jacobian of a smooth curve C Ramanan (see [Ra]) and in case Y is a product of elliptic curves Hulek and the author (see [HL]) proved

Theorem. *Let L be of type* $(1,d)$ *with* $d\geqslant 5$.

(a) *The map* $\varphi_L: X \to \mathbb{P}_{d-1}$ *is an embedding if and only if the curves C and D do not admit elliptic involutions compatible with the covering p.*

(b) *In the exceptional case* $\varphi_L: X \to \bar{X} \subseteq \mathbb{P}_{d-1}$ *is a double covering of an elliptic scroll* $\bar{X}$ *of degree d in* $\mathbb{P}_{d-1}$.

Reider gave in [Re] slightly less precise, but with a more elegant proof applying a vector bundle construction and Bogomolov's instability theorem, the following

Theorem. *Let L be of type* $(1,d)$ *with* $d\geqslant 5$. *Then* $\varphi_L: X \to \mathbb{P}_{d-1}$ *is an embedding if and only if there is an elliptic curve E on X with* $(E\cdot L)=2$.

By the famous theorem of Lefschetz on hyperplane sections (see [GH], p. 156) an abelian surface cannot be embedded into $\mathbb{P}_3$. However, as we saw, there are abelian surfaces (of type $(1,5)$) in $\mathbb{P}_4$. According to the Serre-construction (see [OSS], § 5) any such surface induces a vector bundle of rank 2 on $\mathbb{P}_4$, called Horrocks-Mumford bundle. Since for the construction of this bundle an embedding of a particular abelian surface into $\mathbb{P}_4$ already suffices, an example shall be given here. It was already studied by Comesatti in 1916 (see [C] or [La1]) and is probably the easiest construction of an abelian surface in $\mathbb{P}_4$.

Comesatti starts with the Jacobian (J, L_1) of a curve C of genus 2 admitting a second principal polarization L_2 with intersection number $(L_1\cdot L_2)=3$. According to Riemann-Roch $L = L_1 \otimes L_2$ defines a polarization of type $(1,5)$ on J and we claim that L is a very ample line bundle on J.

For the proof we have to show that any 2 points (possibly infinitely near) in J can be separated by the sections of L. For this note that for any 2 points p and q on J there is a translate $t_x C$ of C on J containing p and q. Hence it suffices to show that the restriction of the linear system $|L|$ to any translate $t_x C$ is very ample.

But the restriction map $H^0(J,L) \to H^0(t_x C, L|t_x C)$ is surjective, since its cokernel is $H^1(J, L(-t_x C)) \simeq H^1(J, L_2) = 0$ by Kodaira's vanishing theorem. So the restriction $|L|\ |t_x C$ is the complete linear system of the line bundle $L|t_x C$ of degree $\deg(L|t_x C) = (L \cdot t_x C) = (L_1 \cdot L_1) + (L_2 \cdot L_1) = 5$ on $t_x C$. Since any line bundle of degree 5 on a curve of genus 2 is very ample, this gives the assertion.

The results on abelian surfaces mentioned so far concerned mainly problem (1) of the introduction. As for problem (2), the following theorem is due to Lazarsfeld (see [D]).

Theorem. *Let L be a very ample line bundle of type $(1,d)$ on an abelian surface X. The embedding $\varphi_L : X \to \mathbb{P}_{d-1}$ is projectively normal in case d odd $\geqslant 7$ or d even $\geqslant 14$.*

Not very much is known about (3)–(5) for abelian surfaces of type $(1,d)$. Only in one case, namely for abelian surfaces X in $\mathbb{P}_4$, i.e. $d = 5$, explicite equations are known. In [Ma1] Manolache computed the shape of a minimal free resolution of the ideal of X in $\mathbb{P}_4$ and in [Ma2] he gave an explicite set of generators. The ideal I is generated by 30 quintics and 150 sextics in $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_5]$.

References

[B] Barth, W.: Abelian surfaces with (1,2) polarization. Adv. Studies in Pure Math. 10, Alg. Geom. Sendai, 1985, 41–84

[BL] Birkenhake, Ch.; Lange, H.: Cubic theta relations. J. reine angew. Math. **407** (1990) 167–177

[BLS] Birkenhake, Ch.; Lange, H.; van Straten, D.: Abelian surfaces of type (1,4). Math. Ann. **285** (1989) 625–646

[C] Comessatti, A.: Sulle superficie di Jacobi semplicemente singolari. Mem. Soc. ital. delle Scienze (dei XL) (3) **21** (1919) 45–71

[D] Debarre, O.: Deux résultats de R. Lazarsfeld. Publ. Math. Europroj. No 14, 1990

[DR] Dobrowski, L.; Reina, C.: Some geometrical methods in string theory. In: Lectures on Riemann surfaces. World Scientific 1989

[F] Faltings, G.: Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. Invent. math. **73** (1983) 349–366

[GH] Griffiths, Ph.; Harris, J.: Principles of Algebraic Geometry. New York: Wiley 1978

[H] Hulek, K.: Projective geometry of elliptic curves. Astérisque **137** (1986)

[HL] Hulek, K.; Lange, H.: Examples of abelian surfaces in $\mathbb{P}_4$. J. reine angew. Math. **263** (1985) 200–216

[Hu] Hudson, R. W. H. T.: Kummer's quartic surface. Cambridge Univ. Press 1905

[K] Kempf, G.: Projective coordinate rings of abelian varieties in Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory (ed. by J. I. Igusa) The John Hopkins Press 1989, 225–236

[Kn] Knörrer, H.: Integrable Hamiltonsche Systeme und Algebraische Geometrie. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **88** (1986) 82–103

[Ko] Koizumi, S.: Theta relations and projective normality of abelian varieties. Am. J. Math. **98** (1976) 865–889

[L] Lefschetz, S.: On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to Abelian varieties. Trans. Am. Math. Soc. **22** (1921) 327–482

[La1] Lange, H.: Jacobian Surfaces in $\mathbb{P}_4$. J. reine angew. Math. **372** (1989) 71–86

[La2] Lange, H.: Abelian varieties with several principal polarizations. Duke Math. J. **55** (1987) 617–628

[LB] Lange, H.; Birkenhake, Ch.: Complex Abelian Varieties, forthcoming book on abelian varieties

[LN] Lange, H.; Narasimhan, M. S.: Squares of ample line bundles on abelian varieties. Expo. Math. **7** (1989) 275–287

[Lz] Lazarsfeld, R.: A Sampling of Vector Bundle Techniques in the Study of Linear Series. In: Lectures on Riemann Surfaces, Proceeding of a conference in Trieste, World Scientific 1989, 500–559

[M1] Mumford, D.: On the equations defining abelian varieties I. Invent. Math. **1** (1966) 287–354

[M2] Mumford, D.: Varieties defined by quadratic equations. In: Questions on Algebraic Varieties. CIME 1970, 29–100

[Ma1] Manolache, N.: Syzygies of abelian surfaces in $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$. J. reine angew. Math. **384** (1988) 180–191

[Ma2] Manolache, N.: The equations of the abelian surfaces in $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$. J. reine angew. Math. **394** (1989) 196–202

[O1] Ohbuchi, A.: Some remarks on ample line bundles on abelian varieties. Manuscr. Math. **57** (1987) 225–238

[O2] Ohbuchi, A.: A note on the normal generation of ample line bundles on abelian varieties. Proc. Japan Acad. **64** (1988) 119–120

[OSS] Okonek, Ch.; Schneider, M.; Spindler, H.: Vector Bundles on Complex Projective Spaces. Progr. in Math. 3, Birkhäuser 1980

[R] Riemann, B.: Ueber das Verschwinden von Theta-Funktionen. Ges. Abh. Leipzig 1876, 198–210

[Ra] Ramanan, S.: Ample divisors on abelian surfaces. Proc. Lond. Math. Soc. **51** (1985) 231–245

[Re] Reider, I.: Vector bundles of rank two and linear systems on algebraic surfaces. Ann. Math. **127** (1988) 306–316

[Sch] Schindler, B.: Jacobische Varietäten hyperelliptischer Kurven und einiger spezieller Kurven vom Geschlecht 3. Dissertation, Erlangen 1991

[S-T] Shimura, G.; Taniyama, Y.: Complex multiplication of abelian varieties and its application to number theory. Publ. of Math. Soc. of Japan, No. 6. Tokyo 1961

[T] Trager, B.: Thesis

[vM] van Moerbeke, P.: Algebraic Complete Integrability of Hamiltonian Systems and Kac-Moody Lie Algebras. Proc. ICM Warszawa 1983, 881–898

[W] Wirtinger, W.: Untersuchungen über Thetafunktionen. Leipzig 1896

[We1] Weil, A.: Courbes algébriques et varietés abéliennes. Paris: Hermann 1948

[We2] Weil, A.: Zum Beweis des Torellischen Satzes. Gött. Nachr. Nr. 2 (1957) 33–35

Herbert Lange
Mathematisches Institut
Bismarckstr. 1½
D-8520 Erlangen

(*Eingegangen 15. 4. 1991*)

Buchbesprechungen

Chern, S. S., Selected Papers, Vol. II, III, IV, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 465 S. DM 94,–, bzw. 520 S. DM 108,– bzw. 385 S., DM 94,–.

Nachdem schon vor einigen Jahren ein Band mit ausgewählten Arbeiten von S. S. Chern erschienen ist, wird mit den vorliegenden drei Bänden diese Auswahl zum Abschluß gebracht: Sie umfaßt mehr als 110 Veröffentlichungen, von insgesamt 147 Titeln, die bis 1989 erschienen sind. Wertvoll ist auch der Neudruck der epochemachenden „Topics in Differential Geometry" aus dem Jahre 1951, die zuerst als Lecture Notes am Institute for Advanced Study in Princeton erschienen, sowie der Abdruck von „Minimal submanifolds in a Riemannian manifold", zuerst veröffentlicht in Lawrence, Kansas. S. S. Chern gehört zu den bedeutensten Mathematikern unseres ausgehenden Jahrhunderts, ich würde ihn neben C. L. Siegel stellen. Stets hat er sich auch für die Förderung der Forschung eingesetzt. So war er in seinem Leben drei Mal Initiator und erster Direktor von neu gegründeten Instituten: 1946–48 begründete er das Mathematik-Institut der Academia Sinica in Nanking, von 1981–84 war er Direktor des Mathematical Sciences Research Institute in Berkeley und nach seiner Emeritierung begründete er 1984 an seiner alma mater in Tianjin das Nankai Mathematics Institute.

Jedem der drei Bände sind zwei Fotografien vorangestellt aus dem Leben des Autors: Als Dreijähriger steht er neben seiner Großmutter in einem vornehmen chinesischen Haushalt; über ein Hochzeitsbild geht es dann weiter bis hin zu Fotos aus dem MSRI in Berkeley und vor der Residenz des Direktors des NMI in Tianjin. Auf diese Weise wird dem Benutzer dieser gesammelten Werke auch ein kleiner Blick in das Privatleben dieser allseitig geehrten und geachteten Persönlichkeit gestattet – ich finde das einen sympathischen Zug.

Bonn W. Klingenberg

Hlawka, E., Selecta (Eds.: P. Gruber, W. M. Schmidt), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1990, 549 Seiten, DM 164,–

E. Hlawka ist einer jener Mathematiker, die sich noch einen Überblick über das Gesamtgebiet bewahren konnten. Die Hilfsmittel für seine Arbeiten stammen dementsprechend aus vielen Teilgebieten der Mathematik. Davon zeugen seine über 140 wissenschaftlichen Arbeiten, von denen 34 hier abgedruckt sind.

Es war die Idee von Chandrasekharan, einige der wichtigsten Arbeiten von Hlawka in einem Band zusammenzufassen. Er hat die Auswahl der Arbeiten für dieses Buch selbst vorgenommen.

In besonderem Ausmaß lesenswert sind die Kommentare zu den einzelnen Arbeiten, die aus der Feder des Autors selbst stammen. Sie gewähren einen tieferen Einblick in das geschichtliche Umfeld, in dem sie entstanden sind und stellen einen viel zu seltenen Glücksfall dar: wann erfahren wir schon, warum eine gewisse Arbeit zu einem gewissen Zeitpunkt geschrieben wurde?

Die in diesem Band aufgenommenen Arbeiten stammen im wesentlichen aus zwei Teilgebieten der Mathematik: aus der Geometrie der Zahlen und der Theorie der Gleichverteilung. Daneben gibt es Arbeiten über Diophantische Approximation, Ungleichungen, kinetische Gastheorie und historische Überblicke.

Im folgenden sollen manche ganz willkürlich ausgewählte Arbeiten kurz referiert werden.

In der Arbeit „Über die Approximation von zwei komplexen inhomogenen Linearformen“ geht es darum, einen Satz von Minkowski über das Produkt $|\alpha x+\beta y-\xi_0|\cdot|\gamma x+\delta y-\eta_0|$ ($\leqslant 1/4$) mit reellen Koeffizienten und ganzen x, y auf den komplexen Fall mit $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ (und $\leqslant 1/2$) zu übertragen. Die gewonnene Ungleichung ist bestmöglich. Die Arbeit „Über komplexe homogene Linearformen“ gibt einen neuen Beweis für einen Satz von Minkowski, den dieser auf anderem, höchst komplizierten Weg gefunden hat.

„Zur Geometrie der Zahlen“ ist vielleicht die am meist zitierte Arbeit Hlawkas und zwar seine Habilitationsschrift. Sie enthält einen Beweis der sogenannten Minkowskischen Vermutung, heute: Satz von Minkowski-Hlawka. Sie hat großes Aufsehen in der Fachwelt hervorgerufen; an sie wurde vielfach angeschlossen. Man siehe etwa die Arbeit von C. L. Siegel „A mean value theorem in geometry of numbers“ in den Annals of Mathematics 46. Hlawka selbst hat an seine und Siegels Arbeit angeschlossen; das gilt zum Beispiel für die Arbeit „Über Gitterpunkte in Parallelepipeden“. Verschärfungen des Satzes von Minkowski-Hlawka stammen von Rogers und W. M. Schmidt.

Weitere Vermutungen Minkowskis hat Hlawka in „Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper“ bewiesen, inspiriert durch Ideen von Rankin. Auch diese Arbeiten wurden von vielen weiteren Autoren aufgegriffen und fortgesetzt.

Die Siegelsche Methode führte ihn auf Integrale, die nicht leicht zu berechnen waren. In der Ebene führen sie auf Fraunhofersche Integrale aus der theoretischen Optik. In „Über eine Klasse von mehrfachen Integralen“ gelingt Hlawka die asymptotische Entwicklung dieser Integrale.

Eine seiner wichtigsten Arbeiten ist vielleicht, nach dem persönlichen Geschmack des Referenten, „Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen“. Vielfach zitiert, wird hier das Konzept der Gleichverteilung nach Eckmann auf kompakte Gruppen übertragen und die klassischen Sätze des Torus werden, soweit möglich, auf kompakte Gruppen ausgedehnt. In „Folgen auf kompakten Räumen“ wird auch noch auf die Gruppenstruktur verzichtet. Die beiden Arbeiten sind übrigens ein schönes Beispiel dafür, wie sich die Mathematik vom besonderen ins allgemeine entwickelt hat (und nicht umgekehrt). Immerhin: die letzte Arbeit ist erst möglich geworden nach dem Erscheinen von Bourbakis „Integration“.

„Zum Hauptsatz der Theorie der Gleichverteilung“ verallgemeinert das entsprechende Ergebnis des Torus auf kompakte Gruppen auch dann, wenn diese nicht abelsch sind. Es müssen dann irreduzible unitäre Darstellungen von G herangezogen werden.

Die beiden Arbeiten „Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung“ und „Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale“ sind erste Anwendungen der Theorie der Gleichverteilung, hier auf die numerische Mathematik. Es geht darum, hochdimensionale Integrale durch diskrete Summen möglichst gut zu approximieren. Dazu führt Hlawka in der zweiten Arbeit die sogenannten guten Gitterpunkte ein und beweist ihre Existenz. Sie hat wieder eine Reihe von Publikationen hervorgebracht und großes Interesse hervorgerufen, da diese guten Gitterpunkte zunächst nicht leicht zu finden waren.

Der Übersichtsartikel „Zur Geometrie der Zahlen“ im Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen zeigt recht schön den begeisternden Stil Hlawkas, der scheinbar mühelos auch schwierige Sachverhalte dem Leser verständlich macht: die ganze Arbeit enthält keine einzige Formel.

Die Arbeiten „Uniform distribution modulo 1 and numerical analysis“ und „Interpolation analytischer Funktionen auf dem Einheitskreis“ stellen Anwendungen der

Theorie der Gleichverteilung auf lineare Integralgleichungen sowie auf die Interpolation analytischer Funktionen durch Polynome dar.

„Discrepancy and Riemann Integration" wiederum ist jedem Mathematiker, der mit Gleichverteilung zu tun hat, geläufig geworden. Es ist nämlich so, daß das Maß einer offenen Menge nur dann durch Caesaromittel der charakteristischen Funktion dieser offenen Menge an den Punkten einer jeden gleichverteilten Folge approximiert wird, wenn diese offene Menge Jordanmeßbar ist. Umgekehrt gibt es zu jeder offenen Menge sehr wohl eine gleichverteilte Folge, die diese Bedingung erfüllt (nach dem Ergodensatz).

Hecke hat in einer Arbeit gezeigt, daß für irrationales α die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \{n\alpha\} z^n$ den Rand des Einheitskreises als natürliche Holomorphiegrenze hat. In der Arbeit „Über eine Methode von E. Hecke in der Theorie der Gleichverteilung" wird diese Aussage quantitativ ganz wesentlich verschärft.

Weithin bekannt geworden ist auch die Arbeit „Über die Gleichverteilung gewisser Folgen, welche mit den Nullstellen der Zetafunktion zusammenhängen". Sie zeigt u. a., daß die Ordinaten der Nullstellen der Zetafunktion modulo jeder positiven Zahl gleichverteilt sind. Sie ist C. L. Siegel zum 80. Geburtstag gewidmet.

Zum 90. Geburtsjahr der Geometrie der Zahlen, die Hlawka ja entscheidend vorangetrieben hat, erschien im „Jahrbuch Überblicke Mathematik 1980" ein Artikel Hlawkas über die Geschichte dieses Gebiets.

Es ist leider bisher nicht gelungen, den Begriff der Diskrepanz von Folgen, wie er sich im Torus so fruchtbar herausgestellt hat, auf allgemeine kompakte Räume (oder auch nur Gruppen) zu übertragen. In der wichtigen Arbeit „Gleichverteilung auf Produkten von Sphären" geschieht dies nun für kompakte Mannigfaltigkeiten (ohne Rand); Hlawka beweist für endliche Produkte solcher Mannigfaltigkeiten das Gegenstück der sogenannten Koksma-Hlawka-Ungleichung. Den Produkten von Sphären wird dabei besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Es darf wohl angenommen werden, daß diese Arbeit die Geburtsstunde der Theorie der Gleichverteilung auf kompakten Mannigfaltigkeiten ist.

Der Band schließt mit einem Nachruf an Carl Ludwig Siegel.

Die neueren Arbeiten Hlawkas sind nicht im üblichen Definition-Satz-Beweis-Stil geschrieben. Sein Werk ist vielmehr so angelegt, daß es eine Fundgrube für Generationen sein kann. Der übliche Stil hätte das völlig zunichte gemacht. Darin liegt auch der besondere Wert des vorliegenden Bandes. Es sollte in der Bibliothek eines Forschers über Geometrie der Zahlen oder über Gleichverteilung nicht fehlen.

Wien J. Schoißengeier

Götze, H., Castel del Monte, München: Prestel Verlag 1984, 116 S., DM 98,–

Das hier zu besprechende Buch fällt aus dem Rahmen des üblichen, weil es sich nicht um ein mathematisches Buch im engeren Sinne handelt. Dennoch steht es in so enger Beziehung zur Mathematik, daß es die Aufmerksamkeit auch der Mathematiker verdient: vom Inhalt her, wie die folgenden Zeilen belegen sollen, und durch die Person des Autors, der als bedeutender Verleger der Mathematik und ihrem Fortgang über Jahrzehnte fest verbunden ist.

Im Süden Italiens, im Herzen der Murge genannten Hügellandschaft, liegt Castel del Monte, die „Krone Apuliens", eine der schönsten und eindruckvollsten Burgen des Mittelalters. Weithin sichtbar krönt der achteckige Zentralbau einen sanft ansteigenden Hügel, und der Besucher vermag sich weder der Faszination des Gesamteindrucks noch der

Frage nach seiner Bedeutung zu entziehen. Errichtet etwa in den Jahren 1240 bis 1250, im letzten Regierungsjahrzehnt des Staufer-Kaisers Friedrich II., diente es wohl als Jagdschloß, leicht erreichbar von der nahegelegenen Lieblingsresidenz des Kaisers, Lucera. Wenn auch nicht viele Details der Baugeschichte bekannt sind, so drängt sich doch der Eindruck auf, daß die staufische Architektur in Süditalien in Castel del Monte ihren Höhepunkt erreicht. Es gilt also zu verstehen, welche Elemente in die Formensprache dieser Architektur eingeflossen sind und welche Entwicklungslinien schließlich zu Castel del Monte führen. Diese Frage ist höchst reizvoll, weil sich im Reich Friedrichs II. normannische, deutsche, arabische und antike Einflüsse überlagern, die in der faszinierenden Gestalt des Kaisers selbst zu einer ganz eigenen Synthese geführt werden.

Das vorliegende Buch bewältigt diese Aufgabe mit Souveränität und Eleganz. Obwohl der Text vergleichsweise kurz ist, entsteht eine überzeugende Skizze, die sich stets auf profunde Quellenkenntnisse stützt. Dadurch wird der an weiteren Details Interessierte auf die Literaturangaben verwiesen, dadurch ist aber auch der Zugang ohne besondere Vorkenntnisse möglich.

Nach einem kurzen Abriß der Regierungszeit Friedrich II. und ihrer Vorgeschichte läßt Götze die wichtigsten Vorläuferbauten für Castel del Monte Revue passieren, wobei jedes Gebäude auch optisch gut dokumentiert ist. Dabei wird bereits deutlich, daß eine kleine Zahl von Grundformen nach Grundsätzen verbunden wird, die immer klarer und vollkommener angewendet werden. Durchaus im Geiste einer mathematischen Analyse werden diese Gestaltungsprinzipien im dritten Kapitel vorgestellt. Es sind dies:

1. klare Regelmäßigkeit der Grundrisse, denen das Quadrat oder der Kreis zugrundeliegen;
2. vielfältige Symmetriebeziehungen der zentral orientierten Bauten;
3. in stereometrische Körper gegliederte Baumassen mit kristallhafter Struktur;
4. plastische Konsistenz der Baumassen; Vernachlässigung der flächenhaft linearen Ornamentik – im Gegensatz zur islamischen Architektur – und ihr Ersatz durch plastische, von innen her strukturierte dekorative Elemente.

Den Hauptteil des Buches präsentiert der vierte Abschnitt, in dem die Symmetriebeziehungen im Grundriß von Castel del Monte organisch und zwingend dargelegt werden. Bemerkenswert ist die Dominanz des Achtecks, die ja auf den ersten Blick ersichtlich ist. Während es auch in einigen der Vorläuferbauten auftritt – wie z. B. im achteckigen Wohnturm von Enna – herrscht es nirgendwo sonst derart ausschließlich. Heinz Götze zeigt, daß der gesamte Grundriß aus einem einzigen Maß konstruiert werden kann, der Seitenlänge eines Grundquadrates. Dieses wird vervierfacht und dem so entstandenen großen Quadrat wird ein Achtstern einbeschrieben; dadurch ist der Innenhof festgelegt, und die Spitzen des Achtsterns sind die Mittelpunkte der Ecktürme. Dann fehlt nur noch ein Maß: der Radius des Kreises, dem die achteckigen Türme einbeschrieben sind; er ergibt sich nun aus dem Quadrat, das den Innenhof definiert. Die hier beschriebene geometrische Konstruktion ist gewiß nicht schwierig. Es überrascht und beeindruckt aber, mit welcher Konsequenz die mathematische Konstruktion architektonisch umgesetzt wird. Die eigentliche Idee, die Rückführung auf den Achtstern, ist im fertigen Grundriß nicht mehr zu erkennen. Er ähnelt vielmehr einem Schneekristall (vgl. die Abb. 102), wenngleich diese in der Natur nur mit hexagonaler Symmetrie vorkommt. Aus der Mathematik wird also eine neue Form entnommen, die denen der Natur gleichberechtigt an die Seite tritt. Es scheint daher nicht zu weit gegriffen, hinter dem Entwurf von Castel del Monte zwar den mächtigen Gestaltungswillen des Kaisers zu sehen, aber auch den Einfluß bedeutender Mathematiker, wie vielleicht des Leonardo von Pisa, der mit dem Hof in regem Kontakt stand. Über die Symbolik des Achtecks und des Achtsterns sowie ihre Ausformung in der Architektur enthält dieser Abschnitt noch weiteres erhellendes Material, auf das wir hier nicht eingehen müssen.

Wie gesagt: das Buch von Heinz Götze ist ein schönes Buch, doch es ist kein Buch über Mathematik. Es zeigt aber – neben manchem anderen – an einem herausragenden Beispiel, wie bedeutende Beiträge die Mathematik zur kulturellen Entwicklung insgesamt geleistet hat. Diese Tatsache, scheint mir, verdient mehr Aufmerksamkeit, als ihr bisher zuteil wird, auch wenn es um Standortbestimmungen oder Zielplanungen der heutigen Mathematik geht.

Augsburg J. Brüning

Devlin, K., Sternstunden der modernen Mathematik. Berühmte Probleme und neue Lösungen. Aus dem Englischen von Doris Gerstner. Basel u. a.: Birkhäuser Verlag 1990, 327 S., 64 Abb., DM 78,00

Im Jahre 1949 erschienen Heinrich Tietzes Vorlesungen „Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit“ in 1. Auflage, schon 1941 hatten Richard Courant und Herbert Robbins ihren Klassiker „What is Mathematics?“ erstmals publiziert. Mancherlei weitere mehr oder minder populäre, d. h. auch (wenigstens bis zu einem gewissen Maß) für den Nichtmathematiker lesbare Einführungen in die Mathematik sind seitdem hinzugekommen. Devlins „Sternstunden“ (1988 unter dem Titel „Mathematics: The New Golden Age“ von Penguin Books Ltd. in englischer Sprache veröffentlicht) stellen einen neuen Höhepunkt dar – dank der meisterhaften Darstellung und mehr noch dank ihrer Auswahl. Denn sie führen den Leser wirklich in „das neue goldene Zeitalter der Mathematik“ ein, in Probleme und Lösungen aus jüngster Zeit – genauer: aus den Jahren zwischen 1960 und 1985. Von der Anlage her stehen sie Tietzes Vorlesungen viel näher als dem weniger straff organisierten Werk von Courant und Robbins. Devlin geht nicht so ausführlich in mathematische Details wie diese beiden Autoren (Tietze hatte Details in die ausgedehnten Anmerkungen verbannt), bemüht sich aber erfolgreich, in den elf Kapiteln zentrale Fragestellungen in allgemeinen Worten zu beschreiben und die Methoden oder Strategien zu ihrer Lösung zumindest anzudeuten. Der Inhalt des Bandes wird durch die Kapitelüberschriften deutlich gekennzeichnet: 1. Primzahlen, Faktorzerlegung und Geheimcodes; 2. Die Mengenlehre, das Unendliche und unentscheidbare Probleme; 3. Zahlensysteme und das Klassenzahl-Problem; 4. Schönheit aus dem Chaos; 5. Einfache Gruppen; 6. Das zehnte Hilbertsche Problem; 7. Das Vierfarbenproblem; 8. Die Fermatsche Vermutung; 9. Schwierige Fragen im Zusammenhang mit den komplexen Zahlen; 10. Knoten und andere topologische Begriffe; 11. Die Leistungsfähigkeit von Algorithmen.

Wie führt der Autor den „interessierten Laien“, an den er sich wenden will, in diese Bereiche der modernen Mathematik ein? Im 1. Kapitel zunächst ziemlich traditionell, indem er die Mersenneschen und Fermatschen Primzahlen, vollkommene Zahlen und Primzahltests vorstellt und dann die „public key cryptography“ beschreibt – alles nur im Prinzip und ohne Beweise. Gleiches gilt für das 2. Kapitel, worin über Cantors Leistungen hinaus die Gödelschen Unvollständigkeitssätze und Paul Cohens Nachweis der Nichtentscheidbarkeit der Cantorschen Kontinuumshypothese diskutiert werden. Spannender wird es vom 3. Kapitel an. Nach einer längeren Erörterung der rationalen, negativen, reellen und komplexen Zahlen wird in Kapitel 3 das Klassenzahlproblem für Zahlensysteme $a+b\sqrt{-d}$ vorgestellt und über den 1975 von Dorian Goldfeld entdeckten Zusammenhang mit einer elliptischen Kurve berichtet, die dann schließlich 1983 von Zagier und Gross konstruiert werden konnte. Kapitel 4 ist der inzwischen vielfach popularisierten Theorie der Fraktale, den Julia-Mengen und der Mandelbrot-Menge gewidmet. Kapitel 5 beschreibt auf

30 Seiten, nach einer Einführung in den Gruppenbegriff, den Weg zur endgültigen Klassifikation (1980) der endlichen einfachen Gruppen, wobei nicht versäumt wird, die Anzahl der Elemente des sog. „Monsters“ anzugeben.

In ähnlichen Eilschritten durchmißt der Verfasser in Kapitel 6 die Zeitspanne zwischen 1900 und 1977. Hilbert hatte im 10. Problem nach der Existenz eines Algorithmus gefragt, der für eine gegebene diophantische Gleichung entscheidet, ob sie eine Lösung besitzt. Der Autor stellt bei der Erläuterung dieses Problems die Turing-Maschine vor, erwähnt den Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen und endet mit der expliziten Angabe des 1977 von Jones, Sato, Wada und Wiens konstruierten primzahlerzeugenden Polynoms in 26 Variablen vom Grade 25. Um das seit seiner Lösung im Jahre 1976 vieldiskutierte Vierfarbenproblem geht es in Kapitel 7: Eulersche Formel, Fünffarbensatz, die Methode Kempes, Heawoods Formel, die Methode der Ladungsverschiebung von Heesch, der Computerbeweis von Haken und Appel. Die Ausführungen über die Fermatsche Vermutung im 8. Kapitel folgen dem historischen Gang über die Fälle $n=4$, $=3$, $=5$, $=7$ zu Kummers Idealtheorie, der Mordellschen Vermutung und schließlich Faltings Beweis von 1983. Das 9. Kapitel dreht sich um den Primzahlsatz, die Riemannsche Vermutung und die beiden in den letzten Jahren widerlegten bzw. bewiesenen Vermutungen von Mertens und Bieberbach. Als Einführung in die Topologie werden in Kapitel 10 das Möbius-Band, verschiedene Flächen und Knoten (einschließlich der Konstruktion der Knotengruppe für die Kleeblattschlinge und der Polynomdarstellung), die Poincaré-Vermutung, Freedmans Entdeckung einer vierdimensionalen nicht differenzierbaren Mannigfaltigkeit (1981) und Donaldsons Nachweis (1982) der Existenz einer exotischen Differenzierbarkeitsstruktur auf $\mathbb{R}^4$ vorgestellt. Schließlich behandelt der Autor im letzten Kapitel die Frage nach der Effizienz eines Algorithmus (Polynomialzeit, Exponentialzeit), erläutert das Problem des Handlungsreisenden, diskutiert das Entscheidungsproblem und die lineare Programmierung, den Simplex-Algorithmus von Dantzig (1947), das 1976 in der UdSSR entwickelte Ellipsoid-Verfahren und den 1984 entdeckten, besonders leistungsfähigen Karmarkar-Algorithmus.

Im Anhang werden zu jedem Kapitel einige wenige (allerdings kommentierte) Literaturhinweise gegeben (meist auf englische Literatur). Der historisch interessierte Leser hätte sich freilich an vielen Stellen genaue Quellenangaben gewünscht – sei es auch nur der benutzten Sekundärliteratur, die für die Schilderung der Entwicklungen vor dem 20. Jahrhundert herangezogen wurde. Die Übersetzung liest sich insgesamt sehr flüssig. Nur ganz gelegentlich hat man den Verdacht, es könnte ein spezieller Fachbegriff nicht ganz zutreffend übersetzt worden sein (das englische Original stand mir leider nicht zum Vergleich zur Verfügung). Bei den an einigen Stellen von mir bemerkten Druckfehlern handelt es sich (auf S. 138 und 156) um jeweils zwei falsche Vorzeichen. Ärgerlich auch der die Symmetrie zerstörende Druckfehler in den Polynomen für den rechten und linken Kleeblattknoten auf S. 281! – Für den Nichtmathematiker über Mathematik zu schreiben, bleibt immer ein Wagnis, dessen Erfolg wohl auch nur der mathematische Laie beurteilen kann. Aber wer – etwa als beginnender Student der Mathematik oder als Mathematiklehrer – wissen möchte, worum es bei der aktuellen mathematischen Forschung geht, dem seien Devlins „Sternstunden“ als Bettlektüre empfohlen. Es könnte sein, daß er sie nicht vor dem Morgengrauen aud der Hand legt.

Hamburg C. J. Scriba

Friedman, A., Mathematics in Industrial Problems, vol. I und vol. II (The IMA Volumes in Mathematics and its Applications), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1988 und 1989, 174 S., 64 figs. und 185 S., 84 figs., DM 44,– und DM 48,–

In den letzten Jahren sieht man an vielen Stellen das Bestreben, die Mathematik an den Universitäten und in der Industrie wieder näher zusammenzuführen. Dies zeigt sich etwa an der Gründung von Organisationen wie ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry), von einschlägigen Arbeitskreisen in DMV, GAMM und European Mathematical Society, an der Gründung von Zeitschriften wie „Mathematical Engineering in Industry“ und „Surveys on Mathematics for Industry“, an der Einrichtung von Studiengängen wie dem der Technomathematik in der BRD, und an Organisationen wie der Oxford Study Group und dem IMA (Institute for Mathematics and its Applications) an der University of Minnesota, dessen Leiter der Verfasser der beiden zu besprechenden Bände ist.

Der angestrebte Brückenschlag zwischen Universitäts- und Industriemathematik hat zwei Aspekte: Einerseits soll die Industrie für die Lösung ihrer Probleme mit modernen mathematischen Methoden und Modellen versorgt werden, andererseits können Fragestellungen aus der Industrie zu anspruchsvoller mathematischer Forschung anregen, die dann auch losgelöst vom eigentlichen Industrieproblem betrieben werden kann. Während bei [2] und den unter den Auspizien von ECMI herausgegebenen Bänden ([3]–[8]) der erste Aspekt im Vordergrund steht, bei der Oxford Study Group (siehe den Artikel von S. D. Howison in [4]) beide Aspekte vielleicht gleich wiegen, steht nach Meinung des Rezensenten bei den beiden vorliegenden Bänden der zweite Aspekt im Vordergrund. Zunächst aber zu deren Entstehungsgeschichte:

Während bei der Oxford Study Group (und ihrem australischen Analogon, vgl. etwa [1]) der Ausgangspunkt eine einwöchige intensive Diskussion industrieller Probleme zwischen Teilnehmern aus der Industrie und aus Universitäten ist, basieren die einzelnen Kapitel der hier vorliegenden Bücher jeweils auf einem Seminarvortrag eines Industrievertreters am IMA. Die Kapitel sind aber keineswegs bloß Ausarbeitungen dieser Vorträge, sondern das Ergebnis einer intensiven Nachbereitung: Die Probleme wurden am IMA und auch mit anderen Wissenschaftern diskutiert, Lösungswege wurden vorgeschlagen, Teillösungen erarbeitet, offene Probleme formuliert, und die relevante Literatur wurde zusammengestellt. Endgültige Lösungen werden nicht angeboten. Gerade wegen dieses vorläufigen Charakters sind die einzelnen Kapitel ein idealer Anknüpfungspunkt für mathematische Forschungsarbeit. In Band II werden übrigens für einige der in Band I nur ein Jahr vorher formulierten Probleme bereits Lösungen vorgestellt!

Es würde zu weit führen, auch nur einige der 40 behandelten Probleme genauer darzustellen. Die Themen kommen aus einem weiten, meist physikalisch orientierten Anwendungsgebiet (etwa: Faseroptik, Rheologie, Sonar, Modellierung von Halbleiterbauelementen, Phasenübergänge, Strömungsmechanik, Elektrophotographie, Filmentwicklung) und aus bekannten amerikanischen Firmen. Die verwendeten mathematischen Methoden kommen überwiegend aus der Analysis und haben meist mit partiellen Differentialgleichungen zu tun. Einzelne Artikel beschäftigen sich aber auch mit anderen Anwendungsfeldern (etwa: Bildrekonstruktion, Spinglasmodelle bei neuronalen Netzen, sicherer Informationsfluß in Computernetzwerken, Netzwerkoptimierung, Synergieeffekte beim Parallelrechnen) und benutzen Methoden etwa der diskreten Mathematik.

Beide Bände sind jedem Mathematiker sehr zu empfehlen, der sich davon überzeugen will, daß in der Industrie aktuelle Fragestellungen eine Vielfalt anspruchvollster mathematischer Forschungsprobleme aufwerfen können. Für an der industriellen Seite interessierte Ingenieure dürften die beiden Bände allerdings schwerer lesbar sein.

[1] Barton, N. G.; Gray, J. D., (eds.): Proceedings of the 1985 Mathematics-in-Industry Study Group. CSIRO Australia 1986
[2] Elliott, C. M.; McKee, S., (eds.): Industrial Numerical Analysis. Oxford: Clarendon Press 1986
[3] Engl, H. W.; Wacker, H.; Zulehner, W., (eds.): Case Studies in Industrial Mathematics, Stuttgart: Teubner 1988
[4] Hazewinkel, M.; Mattheij, R. M. M.; van Groesen, E. W. C. (eds.): Proceedings of the First European Symposium on Mathematics in Industry (ECMI I). Stuttgart: Teubner 1988
[5] Heiliö, M.; Sarvas, J., (eds.): Proceedings of the Fifth European Symposium on Mathematics in Industry (ECMI V). Stuttgart: Teubner 1991
[6] Manley, J.; McKee, S.; Owens, D., (eds.:): Proceedings of the Third European Symposium on Mathematics in Industry (ECMI III). Stuttgart: Teubner 1990
[7] Neunzert, H., (ed.): Proceedings of the Second European Symposium on Mathematics in Industry (ECMI II). Stuttgart: Teubner 1988
[8] Wacker, H.; Zulehner, W., (eds.): Proceedings of the Fourth European Symposium on Mathematics in Industry (ECMI IV). Stuttgart: Teubner 1990

Linz H. W. Engl

Recski, A., Matroid Theory and its Applications (Algorithms and Combinatorics, vol. 6), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 531 pp., DM 138,–

Recski's book is distinguished by the following three features:

1) The text is about equally divided between theory and applications. The odd-numbered chapters present theoretical results, immediately followed by applications in the even-numbered chapters. These applications are studied seriously and in detail. The author covers two aspects of engineering, i. e. electric network theory (the application most emphasized) and statics.

2) The book contains hundreds of exercises (more or less straightforward) and problems (often very difficult). Solutions are included for all these exercises and problems, covering about 190 pages.

3) The text emphasizes algorithmic aspects.

However, in spite of the book's title, less than 100 pages are devoted to the theoretical discussion of matroids (and this even includes the statement of the exercises and problems). The first 150 pages deal with graph theory and its applications, and matroids only appear on p. 151. Nevertheless, Recski presents quite a lot of advanced material (e. g. sums of matroids, matroid intersection, representability). In my view this has the unfortunate result of making it very difficult to get acquainted with matroid theory by using this book. I guess that one can only really profit from this text if one already has some familiarity with matroid theory and algorithms from combinatorial optimization. For this purpose, the books by D. J. A. Welsh ("Matroid Theory", Academic Press, London (1976)) and E. L. Lawler ("Combinatorial optimization: Networks and matroids", Holt, Rinehart & Winston, New York (1976)) will remain the standard choices. A reader who is familiar with these books can profit from Recski's text in two ways: On the one hand, he gets a concise presentation of some more advanced material on matroids, including some recent algorithmic results which were not yet available in 1976; on the other hand, he also finds a detailed and non-trivial study of applications of graphs and matroids in engineering. But I would not recommend this text for somebody who wants to start studying matroid theory.

Gießen D. Jungnickel

Shidlovsky, A. B., Transcendental Numbers, (English translation by N. Koblitz), Berlin – New York: deGruyter 1989, 466 S, DM 168,–

This book can be considered a book of the "Glasnost", although still presenting a very Russian-eye view of transcendental number theory. The text is actually devoted to the development of the so-called E-function theory introduced by C. L. Siegel. Since Siegel, the results in this field have been obtained mainly by Shidlovsky himself and his students (as shown by the bibliography). The publication for the first time of a detailed and authoritative introduction to the subject is more than welcome and number theorists unable to read Russian owe special thanks to N. Koblitz.

E-function theory arose from Siegel's formalization of the proof of the celebrated Lindemann-Weierstrass theorem. This theorem says that for $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \bar{\mathbb{Q}}$, linearly independent over $\mathbb{Q}$, the numbers $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_m}$ are algebraically independent.

From a practical point of view we may define an E-function as an analytic function of the form $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n \cdot \frac{z^n}{n!}$, where the c_n's all belong to an algebraic number field K and are subject to the following conditions:

– there exist $\lambda \geqslant 1$ and $c \geqslant 1$ such that the maximum of the absolute values of the conjugates of c_n is bounded above by λc^n for all $n \geqslant 0$.

– there exist a sequence of positive rational integers $(q_n)_{n \geqslant 0}$, $\mu \geqslant 1$ and $q \geqslant 1$, such that $q_n c_k$ is an algebraic integer in K for $k = 0, \ldots, n$, and $q_n \leqslant \mu q^n$ for all $n \geqslant 0$.

E-function theory deals with the arithmetic properties of values at algebraic points of families $(f_1, \ldots, f_m)$ of E-functions forming a solution of a system of linear differential equations of the form: $f'_k = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} \cdot f_i$ $(k = 1, \ldots, m)$ with $Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z)$. Let T denote the least common denominator in $\mathbb{C}[z]$ of the $Q_{k,i}$'s.

If the E-functions $f_1, \ldots, f_m$ above are algebraically independent over $\mathbb{C}(z)$ and $\xi \in \bar{\mathbb{Q}}$ satisfies $\xi \cdot T(\xi) \neq 0$, then $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ are algebraically independent over $\bar{\mathbb{Q}}$. More generally, if l $(1 \leqslant l \leqslant m)$ of the E-functions $f_1, \ldots, f_m$ are algebraically independent over $\mathbb{C}(z)$ then at least l of the numbers $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ are algebraically independent over $\bar{\mathbb{Q}}$. It is also possible to make precise which subsets of l numbers are actually algebraically independent. Namely, if $f_1, \ldots, f_l$ are algebraically independent over $\mathbb{C}(z)$ then $f_1(\xi), \ldots, f_l(\xi)$ are algebraically independent over $\bar{\mathbb{Q}}$ for all $\xi \in \bar{\mathbb{Q}}$ outside a finite subset of $\bar{\mathbb{Q}}$. The subset given by the method contains the zeros of $z \cdot T(z)$, but it is a problem to determine in general how much bigger it can be. However, when the degree of K over $\bar{\mathbb{Q}}$ is $\leqslant 2$ one has a rather neat description of such an exceptional set, perhaps not minimal. These results and their proofs constitute chapters 3 and 4 and are the core of Shidlovsky's book.

The next point is to exhibit non-trivial E-functions beside the pattern function e^z. Classical examples such as hypergeometric functions were conjectured by Siegel to generate the whole algebra of E-functions satisfying linear differential equations over $\mathbb{C}(z)$, but this is far from being proved. The main question arising with hypergeometric functions is to determine the algebraic relations they satisfy. For this purpose the differential Galois group G of the field $\mathfrak{K}$ generated by $f_1, \ldots, f_m$ over $\mathbb{C}(z)$ is very helpful as indicated by D. Brownawell in the foreword to the English edition. The field $\mathfrak{K}$ is stable under differentiation and G is the group of all $\mathbb{C}(z)$-automorphisms of $\mathfrak{K}$ commuting with differentiation. It is an algebraic subgroup of $GL(m)$ whose dimension is equal to the degree of $\mathfrak{K}$ over $\mathbb{C}(z)$. For example, the *a priori* frightful Siegel normality condition is expressed very naturally on G as shown by F. Beukers, D. Brownawell and G. Heckman (Ann. of Math. **127** (1988) 279–308).

In chapter 5 through 10, Shidlovsky, using his own approach and irreducibility condition, scans the different known families of E-functions according to the orders of the differential equations they satisfy. This shows the wide range of transcendence and algebraic independence results obtained with E-function theory. In particular, the result in the case of first order is rather complete. Chapter 9 is worth a special mention since it presents Y. V. Nesterenko's approach to Siegel's theorem on Bessel functions, avoiding the classical Siegel normality condition. Chapter 10 describes V. A. Oleinikov's method and its developments by V. K. Shalikov for higher order differential equations.

Chapters 11 to 13 deal with the quantitative aspect of the theory, namely the measure of algebraic independence. The lower bounds obtained are sharp with respect to the height, but it must be emphasized that the constants involved depend on the degree in a non-explicit fashion. In fact, even in the classical Lindeman-Weierstrass situation the explicit dependence on the degree is poor. The discussion in chapter 13 is concerned with the important effectivity of the bounds, in connection with the Shidlovsky irreducibility condition and a zeros estimate of Nesterenko for functions of the form $P(z,f_1(z),\dots,f_m(z))$ where P is a polynomial. The algebraic method (not included in the book) developed by Nesterenko to establish this estimate led, with works of G. V. Choodnovsky, to a revival of elimination theory in other branches of transcendental number theory which has proved very powerful. For example, it is now possible to recover (qualitative and quantitative) Lindemann-Weierstrass theorem using the Gel'fond-Schneider method.

Open problems on E-functions abound, and Shidlovsky's book provides a solid base for future research. New progress should involve deeper studies of differential Galois groups of fields generated by E-functions satisfying a system of linear differential equations.

In conclusion, let's mention the parallel and interesting theory of G-functions also introduced by Siegel and surveyed in the final chapter of Shidlovsky's book. These are functions of the form $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n \cdot z^n$ with c_n subject to the same kinds of conditions as for E-functions. Those G-functions are only analytic in bounded discs and hence much more difficult to tackle, but on the other hand the theory of G-functions holds tempting links with diophantine equations. See also Y. André's book on G-functions (Vieweg Aspekt der Math., vol. E13, 1988).

Paris P. Philippon

Edwards, H. M., Divisor Theory, Basel u.a.: Birkhäuser Verlag 1990, 184 S., DM 68,-

Für die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie im 19. Jahrhundert spielte die Frage der Primfaktorzerlegung in Zahlkörpern eine zentrale Rolle. Ein Weg (Dedekind) führte dabei zur Theorie der (ganzen und gebrochenen) Ideale, ein anderer (Kronecker) zur Einführung von Divisoren. Im vorliegenden Buch wird an Kronecker's Ansatz angeknüpft und eine neue Divisorentheorie entwickelt, welche natürlich nicht nur für algebraische Zahlkörper, sondern auch für algebraische Funktionenkörper einer Variablen verwendet werden kann.

Das Buch ist in drei Hauptteile gegliedert: eine allgemeine Theorie der Divisoren, Anwendungen in der algebraischen Zahlentheorie und Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Kurven.

In Teil 1 führt der Autor seinen Divisorenbegriff ein. Dabei wird folgende Situation betrachtet: gegeben ist ein *natürlicher* Ring r und ein algebraischer Erweiterungskörper K des Quotientenkörpers von r (*natürlich* im Sinne des Buches sind etwa die Ringe $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}[x]$). Jedes Polynom f über K (in beliebig vielen Unbestimmten) *repräsentiert* einen *Divisor* $[f]$ (dies ist die von Edwards angegebene Definition. Er schreibt dazu: "I believe that instead of asking what a divisor *is* one should ask what it *does.* It *divides* things"). Ist g ein weiteres Polynom, so wird eine Teilbarkeitsrelation $[f]|g$ definiert durch folgende Bedingung: es gibt Polynome π und q, wobei π ein primitives Polynom über r und die Koeffizienten von q ganz über r sind, mit $g\pi = fq$ (ein Polynom heißt *primitiv,* wenn der ggT seiner Koeffizienten gleich 1 ist; die Existenz eines ggT ist eine der definierenden Eigenschaften *natürlicher* Ringe). Eine Definition von *Produkt* und *Teilbarkeit* von Divisoren sowie die Diskussion grundlegender Eigenschaften dieser Begriffe schließt sich an. Wesentlicher Wert wird auf die Tatsache gelegt, daß nicht eine Zerlegung von Divisoren in Primdivisoren, sondern die Existenz des ggT zweier Divisoren von entscheidender Bedeutung ist. Zu beachten ist auch, daß Edwards' Konzept eines Divisors weitgehend unabhängig vom zugrundegelegten Körper K ist. Bei der weiteren Ausgestaltung der Theorie werden unter anderem Divisorklassengruppen, Chinesischer Restsatz, Zerlegung von Primdivisoren in endlichen Körpererweiterungen, Diskriminanten und Verzweigung untersucht. Die Aussagen und Beweise sind dabei meist der bekannten Theorie nachgebildet.

Im zweiten Teil geht es um die Einordnung der algebraischen Zahlkörper in die Theorie. Sehr ausführlich wird auf die konstruktive Bestimmung der Primdivisorzerlegung einer rationalen Primzahl p in K eingegangen (Kummer's Theorem). Weitere Stichworte zu Teil 2 sind: Dedekind's Diskriminantensatz über die verzweigten Primdivisoren, Kreisteilungskörper, quadratisches Reziprozitätsgesetz.

Teil 3 ist den algebraischen Funktionenkörpern einer Variablen gewidmet (allerdings nur für ganz spezielle Konstantenkörper, z. B. Zahlkörper oder endliche Körper). Hier ist es erforderlich, den Divisorbegriff etwas abzuwandeln: *Lokale* Divisoren werden zu *globalen* Divisoren zusammengeklebt (das entspricht dem Übergang von affinen zu projektiven Kurven). *Stellen* werden eingeführt, und ihr Zusammenhang mit Divisoren wird ausführlich besprochen. Schließlich wird der Vielfachenmodul eines Divisors betrachtet und gezeigt, daß er endliche Dimension über dem Konstantenkörper besitzt. In diesem Zusammenhang wird auch das Geschlecht des Funktionenkörpers definiert. Ein paar einfache Beispiele (elliptische und hyperelliptische Funktionenkörper) beschließen Teil 3. In einem ausführlichen Anhang wird die Theorie der Differentiale in Funktionenkörpern behandelt und der Riemann-Roch'sche Satz bewiesen.

Das vorliegende Buch stellt einen Versuch dar, die Theorie der Divisoren in Zahl- und Funktionenkörpern neu zu begründen. Bei diesem Ansatz tritt die Zerlegung in Primdivisoren gegenüber dem üblichen Vorgehen zunächst in den Hintergrund; es kommt im wesentlichen auf Teilbarkeiten und größte gemeinsame Teiler an. Ich habe allerdings nicht den Eindruck, daß Edwards' Divisorenbegriff die Theorie der Zahl- und Funktionenkörper durchsichtiger macht (was natürlich daran liegen mag, daß ich an die „alten" Begriffe gewöhnt bin). Auch in den Beweisen scheint es keine Vereinfachungen gegenüber den bekannten Versionen zu geben: oft handelt es sich um reine Umformulierungen.

Essen H. Stichtenoth

Lang, S., Cyclotomic Fields I–II (Graduate Texts in Mathematics), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 440 S., DM 98,–

Die Bücher *Cyclotomic Fields Teil I und Teil II* zählen inzwischen zu den Standardwerken auf diesem Gebiet der algebraischen Zahlentheorie, und es ist somit erfreulich, daß der Springer-Verlag beide Teile in einem Band herausbringt. Dabei ist im wesentlichen bis auf einige Korrekturen und einem Appendix von K. Rubin die ursprüngliche Form beibehalten worden.

Die Theorie der zyklotomischen Körper begann mit den Untersuchungen von Kummer und wurde fortgeführt von Dedekind, Weber, Hilbert, Takagi, Artin und anderen. Anfang der fünfziger Jahre bekam sie eine neue Wendung durch Iwasawa's und Leopoldt's Arbeiten. Der erstere bemerkte die Analogie der zyklotomischen Körper als Erweiterungen algebraischer Zahlkörper mit den Konstantenerweiterungen von algebraischen Funktionenkörpern, der zweite führte zusammen mit Kubota das p-adische Analogon zu komplexen L-Funktionen zyklotomischer Erweiterungen der rationalen Zahlen ein. Iwasawa sah nun einen fundamentalen Zusammenhang zwischen seiner Theorie der Türme von zyklotomischen Körpern und diesen p-adischen L-Funktionen. Dies fand Ausdruck in der sogenannten Hauptvermutung der Iwasawa Theorie, die Anfang der achtziger Jahre von Mazur und Wiles und kürzlich in sehr einfacher Weise von Rubin, basierend auf Arbeiten von Thaine und Kolyvagin für abelsche Grundkörper bewiesen worden sind. Ein leicht zugänglicher Beweis ist in einem Anhang zu obigem Buch von Rubin dargestellt.

Zum Verständnis dieses Beweises der Hauptvermutung reichen die ersten sieben Kapitel. Inhalt des Buches ist folgendes: *Kapitel 1:* Gauss-Summen, Jacobi-Summen, der Satz von Hasse-Davenport. *Kapitel 2:* Bernoulli-Polynome, Kubert's und Lang's Sätze über Stickelberger Ideale und Distributionen. *Kapitel 3:* Die komplexe analytische Klassenzahl-Formel. *Kapitel 4:* Konstruktion der Kubota-Leopoldt'schen p-adischen Zetafunktion, Leopoldt's p-adische Klassenzahlformel, der p-adische Regulator. *Kapitel 5:* Iwasawa-Theorie, Struktur von $\mathbb{Z}_p[X]$-Moduln. *Kapitel 6:* Untersuchung der maximalen abelschen p-Erweiterung, die außerhalb p unverzweigt ist. Konsequenzen aus der Vandiver-Vermutung. *Kapitel 7:* Iwasawa-Theorie der lokalen Einheiten, der Coates-Wiles Homomorphismus. *Kapitel 8:* Lubin-Tate Theorie formaler Gruppen. *Kapitel 9:* Explizites Reziprozitätsgesetz nach Wiles. *Kapitel 10 und 11:* Beweis des Satzes von Ferrero und Washington über das Verschwinden der Iwasawa-μ-Invariante bezüglich der zyklotomischen $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung abelscher Grundkörper. Beweis des Satzes von Washington über die Beschränkheit des l-Teils der Klassenzahl in derselben Situation. *Kapitel 12:* Fortsetzung der Theorie der Maße aus Kapitel 4. *Kapitel 13:* Beziehung zwischen h^+ und h^-. *Kapitel 14–16* (unabhängig vom übrigen Teil des Buches): Satz von Gross und Koblitz über die Beziehung der p-adischen Γ-Funktion und den Gauss-Summen. *Kapitel 17:* Der Satz von Ferrero und Greenberg, daß die p-adischen L-Funktionen höchstens einfache Nullstellen bei $s=0$ besitzen.

Für Studenten mit Kenntnissen in der algebraischen Zahlentheorie und der Klassenkörpertheorie ist dies Buch gut geeignet, um sich in die schöne Theorie zyklotomischer Körper einzuarbeiten und Originalarbeiten zu lesen. Auch als Vorlesungsstoff können Dozenten Teile dieses Buches benutzen, und der Anhang von Rubin ist eine vorzügliche Vorlage, um in einem Seminar den Beweis der Hauptvermutung kennenzulernen.

Allerdings sollte nicht unerwähnt bleiben, daß jeder Leser von Langs Buch auch gut beraten ist, das mindestens ebenso exzellente Buch von L. Washington (*Introduction to Cyclotomic Fields, Springer-Verlag*) mit heranzuziehen.

Heidelberg K. Wingberg

Brüske, R., Ischebeck, F., Vogel, F., Kommutative Algebra, Mannheim u. a.: BI-Wiss. Verlag 1989, 288 pp., Softcover, DM 38,–

Das vorliegende Buch behandelt die kommutative Algebra ausführlich und recht vollständig, und ist für Studenten mit relativ geringen Vorkenntnissen gut zu lesen. Es unterscheidet sich in der Konzeption durchaus von früheren Büchern mit gleichem oder ähnlichem Titel:

a) Der Stoff wird nicht einer starren Systematik wie bei Bourbaki unterworfen; vielmehr werden die nötigen abstrakten Grundlagen (Moduln, Kategorien u. a.) geschickt so im Stoff verteilt, daß das Leserinteresse stets wachgehalten wird.

b) Man lernt im vorliegenden Buch nicht so viel über algebraische Geometrie wie im Buch von E. Kunz (Einf. in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie); die für die algebraische Geometrie notwendigen Resultate sind jedoch gut abgedeckt (vgl. den Katalog am Ende von Hartshorne's „Algebraic Geometry"). Die für die algebraische Zahlentheorie wichtigen Dinge aus der kommutativen Algebra findet man gleichfalls. Die Autoren bringen außerdem viele schöne, für sich interessante Resultate der kommutativen Algebra, bis hin zu den Cohenschen Struktursätzen. (Die Theorie der japanischen und exzellenten Ringe ist nicht mehr aufgenommen, aber jeder aufmerksame Leser des vorliegenden Buches wird diese Theorie leicht aus Matsumura's Buch „Commutative Algebra" oder EGA lernen können.)

c) Das Buch dürfte für einen Studenten leichter lesbar sein als das schon erwähnte Standardwerk von Matsumura und das umfangreiche Buch von Zariski und Samuel. Es bietet deutlich mehr Material als die Einführung von Atiyah und Macdonald.

Ich sage in Kürze einige Einzelheiten über den Inhalt.

§ 1–§ 3 behandeln Ringe, Moduln und Lokalisierungen (die Autoren nennen das „Bruchringe"; auch über den Terminus „endliche A-Moduln" für „endlich erzeugte A-Moduln" könnte man streiten). Es kommen später noch drei Kapitel mit ähnlich allgemeinem Inhalt: § 10 und § 11 (Kategorien, Hom, Tensorprodukt, projektive, injektive, flache Moduln; Verhalten von Hom und $\otimes$ bei Lokalisierung) sowie § 13 (Ext, Tor, homologische Dimension). Wie schon gesagt: diese Verteilung ist Absicht und auch sehr sinnvoll. Alle diese Grundlagen werden sehr klar und in genau angemessener Ausführlichkeit dargeboten. Eben deshalb ist beinahe schade, daß die *Konstruktion* von Ext und Tor in den *Aufgabenteil* von § 13 gesteckt wurde. Dies ist aber, wie die Autoren selbst feststellen, die einzige „Lücke" im äußerst durchdachten und kohärenten Aufbau ihres Buchs.

Nun zu den spezifischeren Kapiteln:

§ 4 enthält die Theorie der assoziierten Primideale und der Primärzerlegung. Insbesondere das erstere wird später im Buch viel gebraucht. § 5 und § 6 bringen die Dimensionstheorie noetherscher semilokaler Ringe, u. a. die Gleichheit der drei auf verschiedenen Wegen erklärten Dimensionszahlen dim, s und d. Hier werden auch der Krullsche Hauptidealsatz und Aussagen über die Dimension von Polynomringen geboten.

§ 7 und § 8 behandeln insbesondere, aber nicht nur, für die Zahlentheorie und die algebraische (sowie auch die komplex-analytische) Geometrie relevantes Material: Ganzheit, Endlichkeit des ganzen Abschlusses B von A in L (für den Fall A noetherscher Integritätsring, $L/\mathrm{Quot}(A)$ endliche separable Körpererweiterung), diskrete Bewertungsringe und Dedekindringe.

Es sei gleich hier erwähnt, daß die Endlichkeit des ganzen Abschlusses auch für die beiden anderen Standardfälle bewiesen wird: für A vom endlichen Typ über einem Körper in § 7, und für A noethersch lokal komplett in § 18. Beide Beweise reduzieren sich auf eine sehr hübsche Variante des vom separablen Fall her bekannten Tricks mit der Spur: man ist fertig, sobald man *eine* A-lineare nichttriviale Abbildung $f: B \to A$ gefunden hat.

Im § 9 werden u. a. das Noethersche Normalisierungslemma und der Hilbertsche Nullstellensatz bewiesen. Im Aufgabenteil findet sich ein knapper, gut zu lesender Ausblick auf die algebraische Geometrie. Überhaupt finde ich die am Ende jedes Kapitels praktizierte Kombination von Übungsaufgaben mit Kommentaren, Ergänzungen und dergleichen sehr gelungen.

Ebenfalls für die „anwendenden Disziplinen" von Interesse ist § 12 (invertierbare Moduln, S-Ideale und S-Klassengruppen); darüber hinaus werden Krullringe behandelt. Die nun folgenden Kapitel sind von der Ausrichtung her „reine" kommutative Algebra, aber sämtlich für die algebraische Geometrie wichtig. Im einzelnen bringt § 14 reguläre Ringe (Charakterisierung über die homologische Dimension; Faktorialität lokaler regulärer Ringe). § 15 ist den Differentialmoduln (dem „calculus" des algebraischen Geometers) gewidmet, und § 16 verbindet die beiden vorigen Kapitel (differentielle Regularitätskriterien; Offenheit des regulären Orts). § 17 entwickelt die Theorie der Cohen-Macaulay-Ringe. Im letzten Kapitel (§ 18) wird schließlich die Komplettierung abgehandelt. Hier endet die Darstellung mit den Cohenschen Struktursätzen und dem schon erwähnten Resultat über die Endlichkeit des ganzen Abschlusses im kompletten Fall.

Insgesamt ist der Stil eine sehr geglückte Verbindung von Präzision und Strukturiertheit eines Lehrbuchs mit der Frische einer Vorlesung. Es seien folgende Bagatellen erwähnt: In der Formulierung von Satz 17.3 ist eine Klammer überzählig; es scheint, daß im sonst eleganten Beweis des Henselschen Lemmas das Lemma 18.38 unnötig sein könnte; drei Verweise sind zu korrigieren (auf p. 280 in Punkt 4 lies 18.70 für 18.69 und 18.71 für 18.70, und auf p. 233, Zeile 10 v. u. lies 18.58 für 18.57); und als letzter Punkt: sollte man in Aufgabe 2a) auf p. 273 nicht A als noethersch voraussetzen? Sonst ist mir (außer einem amüsanten Schreibfehler auf p. 232, 8. Zeile v. u.) nichts aufgefallen. Die im Vorwort geäußerte Hoffnung der Autoren („der Leser möge Gefallen an der kommutativen Algebra, insbesondere an diesem Büchlein finden") wird sich nach meinem Eindruck sicher erfüllen.

München C. Greither

Kostrikin, A. I., Manin, Yu. I., Linear Algebra and Geometry, New York: Gordon and Breach 1989, 309 pp., $ 179.00

Dies Buch kombiniert eine Einführung in die Lineare Algebra für Anfangssemester mit weiten Ausflügen in die Mathematik und mathematische Physik. Man findet den vollständigen systematischen Aufbau der Linearen Algebra mit allen Standard-Resultaten (Jordansche Normalform, Cayley-Hamilton,Hauptachsentransformation). Hinzu kommt ein Kapitel über Affine und Projektive Geometrie (mit den Sätzen von Desargues und Pappus), sowie über Multilineare Algebra.

Zwischen den Standardstoff sind weiterführende Paragraphen eingestreut, in denen Zusammenhänge mit viel komplizierteren Gegenständen aufgezeigt werden. Das Spektrum reicht von der „Sprache der Kategorien" über den Satz von Witt bis zur Rolle der selbstadjungierten Operatoren in der Quantenmechanik. Das Ziel ist es, die Bedeutung der Linearen Algebra für viele aktuelle Gebiete der Mathematik und ihrer Anwendungen herauszuarbeiten. Dies ist sicher auf einzigartige Weise gelungen, und so ist dieses Buch jedem Dozenten oder Studenten zu empfehlen, der an einem Überblick interessiert ist.

Der Preis allerdings ist für ein Buch dieser Art leider unangemessen hoch.

Erlangen W. Barth

Karpilovsky, G., Unit Groups of Group Rings (Pitman Monographs 47), New York: Longman Scientific & Technical 1990, 408 S., £ 45,–

Zu den strukturell reichsten, damit freilich auch schwierigsten Gebilden der Algebra gehören Gruppenringe, insbesondere der ganzzahlige Gruppenring $\mathbb{Z}G$, dessen Arithmetik, und das heißt die Theorie von Moduln und Einheiten, schon für bescheidene Gruppen G fast untraktabel ist. Nahm die Einheitentheorie noch in den Lehrbüchern von D. S. Passman (The algebraic structure of group rings, 1977) und S. K. Sehgal (Topics in group rings, 1978) nur einzelne Kapitel ein, so überschreitet das seither Hinzugekommene einen solchen Rahmen ganz entschieden. Dieser Situation begegnet das vorliegende Buch, neben dem man auch des Verfassers „Unit groups of classical rings" (1988) nennen sollte. (Daß zwischen beiden Überlappungen stattfinden, lag in der Natur der Sache.)

Nach Feststellung einiger ohne Beweis verwendeter algebraisch-zahlentheoretischer Sätze enthält der zweite Paragraph Grundtatsachen über Gruppenringe, Augmentationsideale und Idempotente von Gruppenringen. Der dritte beginnt mit elementaren Resultaten über Einheiten. Es folgt ein Abschnitt über Einheiten endlicher Ordnung, unter anderem enthaltend den Satz von Cohn-Livingstone (1965): Unter geeigneten Voraussetzungen an R und G ist der Exponent einer endlichen Untergruppe von $V(RG)$ (Einheiten mit Augmentation 1) ein Teiler des Exponenten von G. Ein Abschnitt „Trivial units" enthält Higman's altes Resultat (1940) über Gruppenringe $\mathbb{Z}G$ mit nur trivialen Einheiten, der nächste neuere Sätze von Krempa über $V(RG)$, G eine Gruppe mit eindeutigen Produkten. Dann folgen erste Resultate zum Isomorphieproblem, unter anderem Whitcomb's positives Ergebnis für metabelsche Gruppen (1968). Im sechsten Abschnitt wird der fundamentale Satz, daß $U(\mathbb{Z}G)$, G endlich, endlich präsentierbar ist, leider nur zitiert – ein Beweis dieses Satzes *ab ovo* erfordert noch immer den Rückgang auf schwer zugängliche Quellen und wäre in einem Buch dieses Titels ein *desideratum* gewesen. Resultate von Hartley und Pickel (1980), Sehgal (1978) und Passman (1977) über Auflösbarkeit und Nilpotenz von $U(\mathbb{Z}G)$ bzw. $U(FG)$, F ein Körper, bilden die beiden nächsten Abschnitte, eine Beschreibung von $U(\mathbb{Z}S_3)$ schließt den Paragraphen ab. Der vierte und weitaus längste des Buches befaßt sich ausschließlich mit kommutativen Gruppenringen. Die zahlreichen älteren (Berman, Perlis-Walker) und neueren (Krempa, May, Mollov, Ullery und Verfasser) Resultate können hier nicht im Einzelnen referiert werden – Themen sind unter anderem endliche Erzeugung, Abspaltung von G als direkter Faktor, Ulm-Kaplansky-Invarianten und das Isomorphieproblem. Enthalten ist auch ein Satz von Bass (1966), der in zyklischen Gruppenringen $\mathbb{Z}C$ Erzeugende einer Untergruppe von endlichem Index in $U(\mathbb{Z}C)$ angibt. (Die neueren Arbeiten von Ritter und Sehgal, in denen Analoges für gewisse Klassen nichtabelscher Gruppen geleistet ist, fanden leider keinen Eingang in das Buch). Im fünften Paragraphen wird, in enger Anlehnung an die Vorlage, A. Weiss' „Rigidity of p-adic torsion" wiedergegeben – die Zassenhausvermutung für p-Gruppenringe über $\mathbb{Z}_p$ in der schärfsten Form; es folgt die positive Lösung des Isomorphieproblems für nilpotente Gruppen (Roggenkamp-Scott). Der letzte ist metabelschen Gruppenringen $\mathbb{Z}G$ gewidmet, die Hauptresultate stammen hier von Cliff, Sehgal und Weiss (1981) sowie Marciniak, Ritter, Sehgal und Weiss (1987).

Die Darstellung des Stoffs ist im Großen und Ganzen flüssig lesbar, wenn auch nicht frei von Unebenheiten. Der Leser, der auf S. 1 wirklich erst lernen muß, was „nilpotent" und „idempotent" bedeutet, hat wenig Aussichten, über die ersten Paragraphen hinauszukommen. Auf S. 297 wird ihm die 1-Cohomologie erklärt, doch die kanonischen Morphismen, mit denen er gleich darauf arbeiten soll, bleiben ihm vorenthalten. (Das ist etwa so, als wenn man einen Verkehrsnovizen in einen Rennwagen setzt.) Anderes wiederum, wie die Beschreibung von $U(\mathbb{Z}S_3)$ (S. 108) oder die Faserproduktdarstellung von $\mathbb{Z}C_pn$ (S. 340) erscheint unnötig umständlich. Dies sind kleine Mängel, doch kann ein ernsterer Einwand nicht erspart bleiben. Von einem Buch, das keine neuen Resultate bringt, sollte man erwarten dürfen, daß in ihm das schon Bekannte zu neuer Darstellung gelangt, in neuen Zusammenhängen gesehen wird, und daß verstreute Resultate als Teile eines Ganzen begriffen werden. Davon kann in dem vorliegenden Buch kaum die Rede sein. Fast durchweg fehlt – bei schwierigen Resultaten – das Motivierende, der leitende Gedanke des Beweises; der Autor reiht Lemma an Lemma ohne einen Versuch, den Gedankengang durchsichtig zu machen. Die kurzen einleitenden Texte zu den einzelnen Paragraphen bieten hierfür keinen Ersatz. Welchen Sinn es haben soll, etwa die Weiss'sche Arbeit mit ganz unwesentlichen Erläuterungen und Umstellungen abzuschreiben, ist nicht einzusehen.

Das Buch wird dem Leser nützlich sein, der einen Überblick über Methoden und Resultate sucht. Vielleicht hätte der Autor aber besser daran getan, seine große Kenntnis der Literatur (das Verzeichnis enthält mehr als 300 Titel) in einem Übersichtsartikel auszubreiten.

Hamburg E. Kleinert

Brown, K. S., Buildings, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 225 S., DM 78,–

Gebäude sind von J. Tits entwickelt worden, um das Studium der Gruppen vom LIE-Typ geometrisch zu begründen. Das vorliegende Buch ist schon deshalb nützlich, weil es mit dem Buch neben der Tits'schen Monographie aus dem Jahre 1974 und eines Buches von Ronan aus dem Jahre 1989 nun einen weiteren unmittelbaren Zugang zu der Theorie der Gebäude gibt.

Es wäre jedoch falsch, in dem vorliegenden Werk ein Lehrbuch der Gebäude sehen zu wollen. In diesem Buch werden nur einige spezielle Themen behandelt: Sphärische und Euklidische (bzw. affine) Gebäude, Anwendungen in der Kohomologie arithmetischer Gruppen. Leider werden die grundlegenden Klassifikations-Theoreme von Tits über sphärische und affine Gebäude überhaupt nicht erwähnt. Andere wichtige Themen werden häufig ohne Beweis dargestellt, so fehlt etwa der Beweis des Solomon-Tits-Theorems über den Homotopie-Typ sphärischer Gebäude.

Zum Inhalt: Das Interesse des Autors liegt in den Anwendungen in der Gruppen-Kohomologie arithmetischer Gruppen und dieses Thema wird im siebten Kapitel im Rahmen eines Überblickes (ohne Beweise) sehr eindrucksvoll abgehandelt.

Die Definition eines Gebäudes wird in den ersten drei Kapiteln vorbereitet und diese sind teilweise in Anlehnung an die Tits'sche Monographie erfreulich ausführlich geschrieben. Die Abschnitte beschäftigen sich mit der Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen (ohne Beweis), mit simplizialen Komplexen, Coxeter-Gruppen und Coxeter-Komplexen.

Das Kapitel vier behandelt dann die Definition und einfachsten Eigenschaften von Gebäuden: Dünne und dicke Gebäude, sphärische Gebäude und deren Homotopie-Typ, Systeme von Apartments. Jedoch werden einige klassische Beispiele erst im fünften Kapitel ohne jede geometrische Eleganz mit Hilfe von Gruppen beschrieben, welche ein BN-Paar besitzen: Die Lineare Gruppe, die Symplektische Gruppe, eine Orthogonale Gruppe und schließlich die Spezielle Lineare Gruppe über einem Körper mit diskreter Bewertung.

Das zentrale Thema im sechsten und für interessierte Leser wohl wichtigsten Kapitel des Buches ist neben der Darstellung eines affinen Gebäudes und seinem sphärischen Teil im Unendlichen das Bruhat-Tit'sche Fixpunkt-Theorem und die Anwendung auf das Studium beschränkter Untergruppen von Gruppen mit einem sogenannten Euklidischen BN-Paar.

Braunschweig U. Ott

Gamkrelidze, R. V. (Ed.), Analysis I (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 13), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 238 pp., Hardcover, DM 128,–

Niemand wird erwarten können, das so anspruchsvolle Thema „Analysis“ mit seinen vielfältigen modernen Trends in einem Bändchen vom vorliegenden Umfang annähernd vollständig abgehandelt zu finden. Haben doch andere Autoren und Autorenkollektive schon in Metern zu messende Regalfronten gefüllt, um auch nur Teilaspekte der Analysis gründlich zu behandeln. Worum geht es also?

Zunächst handelt es sich bei dem vorliegenden Band um die von D. Newton (University of Sussex) besorgte Übersetzung aus dem Russischen eines Buches mit gleichem Titel. Das Original wurde 1986 in Moskau bei VINITI verlegt, und zwar als Band 13 der Reihe „Itogi nauki i tekhniki, Sovremennye problemy matematiki, Fundamental'nye napravleniya“. Autoren sind die Moskauer Wissenschaftler M. A. Evgrafov (Teil I) vom Institut für Ozeanologie sowie M. V. Fedoryuk (Teile II und III) vom Institut für Physik und Technologie.

Der Inhalt von Teil I (Reihen und Integraldarstellungen, 81 Seiten) besteht aus einem historischen Abriß desjenigen Zweiges der Analysis, der sich im 18. und 19. Jahrhundert um das Objekt „Reihensummation und Reihenkonvergenz“ entwickelt hatte. An bekannten Beispielen wird vorgeführt, wie die Progression der Mathematik durch den Zeitgeist vorangetrieben wurde. Am Anfang steht fast immer L. Euler. Er ist unerschöpflicher Ideenlieferant mit einer bemerkenswerten Intuition für Zusammenhänge in der Mathematik. Ein nicht unerheblicher Teil von Eulers Mathematik widerfuhr seine Rechtfertigung erst durch die bahnbrechenden Arbeiten von Weierstraß zur analytischen Funktionentheorie, aber auch durch Ideen von Cauchy, Laplace und Riemann. In der Mitte des 19. Jahrhunderts war dieser Zweig zu einer vollständigen Theorie herangereift. Daran hat sich bis heute kaum etwas geändert.

Parallelen finden sich bei Fourier mit seinen Arbeiten über die Wärmeleitung. Fouriers Handhabung der trigonometrischen Reihen wurde bekanntlich von Zeitgenossen sehr beargwöhnt. Die Legitimation erhielt er erst, als sich die Funktionalanalysis am Beginn unseres Jahrhunderts zu entwickeln begann und man die Konvergenz in Funktionenräumen verstanden hatte.

Besonders delikat erwies sich Eulers Umgang mit divergenten Reihen, zum Beispiel der Euler-Maclaurin-Reihe. Der ihr zukommende Stellenwert u. a. bei asymptotischen Entwicklungen spezieller Funktionen und uneigentlicher Integrale wurde erst später mit dem Entstehen der asymptotischen Analysis erkannt. Der historische Exkurs endet hier mit einer kurzen Beleuchtung der Monodromie-Gruppe der hypergeometrischen Differentialgleichung und der Theorie der singulären Punkte von Potenzreihen. Insgesamt werden keine neuen Resultate gebracht, ebensowenig Beweise. Interessant allein bleibt der Rückblick auf die Historie einer spezifischen Entwicklung der Analysis.

Der Schwerpunkt des Buches ist in Teil II zu sehen (Asymptotische Methoden der Analysis, 110 Seiten). Dieser Teil versteht sich als Einführung in die klassischen und modernen Techniken der asymptotischen Analysis. Grundlage bildet das Lokalisierungsprinzip von Laplace. Im einfachsten Falle liefert es eine Aussage über das asymptotische Verhalten des Laplace-Integrals

$$F(\lambda) := \int_a^b f(x) \exp\{\lambda S(x)\}\,\mathrm{d}x$$

im Grenzwert $\lambda \to +\infty$: Hat die reelle C^∞-Funktion $S(x)$ im Intervall $a \leqslant x \leqslant b$ endlich viele Maxima $x_1, \ldots, x_m$, so gilt für hinreichend kleine Umgebungen $U(x_j)$ von x_j und für solche

Integranden $f(x)$, für die das Laplace-Integral erklärt ist, die Darstellung

$$F(\lambda) \sim \sum_{j=1}^{m} \int_{U(x_j)} f(x) \exp\{\lambda S(x)\}\, dx, \qquad \lambda \to +\infty.$$

Sie ist als Analogon zum Residuensatz der Funktionentheorie zu verstehen. Das Lokalisierungsprinzip führt auf die Methode der stationären Phase, welche in der numerischen Integration stark oszillierender Integranden erfolgreich eingesetzt wird. Parallel dazu werden Sattelpunkt-Methoden (Methoden des steilsten Abstiegs) diskutiert, mit deren Hilfe sehr effizient asymptotische Entwicklungen von Funktionen der mathematischen Physik gewonnen werden können, sofern für sie eine Integraldarstellung vorliegt.

Eine andere Methode zur Herleitung solcher Entwicklungen setzt bei der Differentialgleichung an, die der entsprechenden Funktion zugrundeliegt. Hier steht im Vordergrund die klassische WKB-Methode für gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung (sie wurde 1926–28 von Wentzel, Kramers und Brillouin zur Behandlung von Problemen der Quantenmechanik entwickelt). Es wird gezeigt, wie diese erfolgreiche Methode auf lineare DGl-Systeme übertragen werden kann und dort zu Aussagen über die asymptotische Form von Fundamentalsystemen führt. Breiten Raum nimmt dabei die Diskussion von Rückkehrpunkten ein, das sind Punkte, in denen das charakteristische Polynom des DGl-Systems eine mehrfache Wurzel hat.

Teil III des Buches (Integraltransformationen, 40 Seiten) beschränkt sich im wesentlichen auf die Definition der gängigsten Integraltransformationen und ihrer Inversen (Fourier-, Laplace-, Mellin-, Bessel-, Hankel-, Kontorovich-Lebedev-, Meijer- und Mehler-Fock-Transformation sowie Integraltransformationen vom Faltungstyp wie Hilbert-, Weierstraß-, Euler- und Sommerfeld-Transformation). Die sehr dürftigen Informationen geben dem Anwender keine große Hilfestellung; der Griff zur Spezialliteratur bleibt unvermeidlich. Ein nicht zu umfangreicher, doch einigermaßen repräsentativer Querschnitt der relevanten Lehrbuchliteratur ist diesem Teil – wie auch den Teilen I und II des Buches – angefügt.

Wofür also bezahlt der Leser einen nicht unbeträchtlichen Preis? Für ein Buch, welches neben einer erheblichen Anzahl von Druckfehlern zur einen Hälfte Altbekanntes liefert – wenn auch unter historischem Blickwinkel –, zur anderen Hälfte dem Einsteiger in die asymptotische Analysis die ersten Schritte in die richtige Richtung aufzeigt, vorausgesetzt, er läßt sich mit skizzenhaft angedeuteten Beweisen zufriedenstellen.

Erlangen H. Grabmüller

Miyake, T., Modular Forms (übersetzt aus dem Japanischen von Y. Maeda), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 310 S., DM 128,–

Die Theorie der Modulformen entwickelte sich im 19. Jahrhundert aus der Theorie der elliptischen Funktionen. Modulformen sind interessante zahlentheoretische Objekte, weil die Fourier-Koeffizienten von Modulformen interessante zahlentheoretische Funktionen sind: Zum Beispiel treten Teilersummen bei Eisenstein-Reihen, Darstellungsanzahlen von quadratischen Formen bei Theta-Reihen oder die Ramanujansche τ-Funktion bei der Diskriminante Δ auf. Auch heute noch spielen Modulformen oder allgemeiner automorphe Formen eine zentrale Rolle in der Zahlentheorie. Das vorliegende Buch beschreibt nun die klassische Theorie und führt den Leser bis zu den neueren Ergebnissen von Shimura.

Das Buch ist in 7 Kapitel unterteilt und beginnt mit der Beschreibung der hyperbolischen Geometrie in der oberen Halbebene in $\mathbb{C}$ sowie der Konstruktion von

Fundamentalbereichen zu Fuchsschen Gruppen. Dazu wird beim Leser eine gewisse Vertrautheit mit kompakten Riemannschen Flächen vorausgesetzt.

In Kapitel 2 wird die allgemeine Theorie automorpher Funktionen zu Fuchsschen Gruppen beschrieben. Die Beziehung zwischen automorphen Formen und den Differentialen auf der zugehörigen Riemannschen Fläche wird eingehend studiert. Auf der Basis des (nicht bewiesenen) Satzes von Riemann-Roch wird die Dimensionsformel hergeleitet. Schließlich wird die abstrakte Hecke-Algebra à la Shimura eingeführt und deren Operation auf den automorphen Formen untersucht.

Kapitel 3 ist recht elementar. Es enthält Grundtatsachen über Dirichletsche Charaktere sowie die analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung Heckescher L-Funktionen.

Kapitel 4 darf wohl als Kernstück des Buches angesehen werden. Hier werden zunächst die Dimensionsformel und die Hecke-Theorie auf Modulformen zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ von $\Gamma = \mathbf{SL}(2; \mathbb{Z})$ spezialisiert. Die auf Hecke und Weil zurückgehende Korrespondenz zwischen Modulformen, die Eigenformen aller Hecke-Operatoren sind, und Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung wird eingehend studiert. Schließlich werden Modulformen mit Hilfe von Theta-Reihen konstruiert.

In Kapitel 5 wird eine weitere Klasse von Fuchsschen Gruppen untersucht, die in einem Lehrbuch selten behandelt wird, nämlich die Einheitengruppen von Ordnungen in indefiniten Quaternionen-Algebren über $\mathbb{Q}$. Der Autor verwendet die adelische Sprache und beschreibt die zugehörige Hecke-Algebra ausführlich.

Kapitel 6 enthält die allgemeine Spurformel für Hecke-Operatoren zu automorphen Formen bezüglich Fuchsscher Gruppen der 1. Art. Dann wird die Spurformel auf Hecke-Operatoren spezialisiert, die von den Einheitengruppen von Quaternionen-Algebren kommen. Zum Beweis wird die Selbergsche Methode verwendet.

Im abschließenden Kapitel 7 beschäftigt sich der Autor mit einer allgemeinen Klasse von Eisenstein-Reihen, die von 2 Charakteren, einer ganzen Zahl k und einer komplexen Zahl s als Parameter abhängen. Für diese Eisenstein-Reihen wird die Fourier-Entwicklung bestimmt und die analytische Fortsetzung (als Funktion von s) hergeleitet.

Insgesamt ist das Buch eine gelungene Darstellung der klassischen Theorie der Modulformen in moderner Sprache, das den Leser schnell an die neueren Ergebnisse auf diesem Gebiet heranführt. Von diesem Gesichtspunkt aus kann es nur wärmstens empfohlen werden. Zur Verwendung als Lehrtext ist es allerdings bedauerlich, daß keine Aufgaben enthalten sind. Leider gibt der Autor in seinem Buch auch nur sehr wenige historische Bezüge; so kann man z. B. den Namen Petersson im Literaturverzeichnis nicht finden.

Münster A. Krieg

Gindikin, S. G., Khenkin, G. M. (Eds.), Several Complex Variables IV (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 10), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 45 figs., 265 pp., DM 128,–

Der hier besprochene Band der russischen Enzyklopädie behandelt Themen aus der komplexen Analysis, d. h. aus der Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten und Räume. Es handelt sich um vier Artikel:

- Methods in the theory of sheaves and Stein spaces (A. L. Onishik)
- Holomorphic vector bundles and the Oka-Grauert principle (J. Leiterer)
- Deformations of complex spaces (V. P. Palamodov)
- Homogeneous complex manifolds (D. N. Akhiezer)

Die Artikel unterscheiden sich sehr hinsichtlich der Breite des Themas und der Darstellung. So behandelt der zweite Artikel ein doch recht spezielles Gebiet, bringt dafür exakte Beweise. Die anderen drei Autoren hingegen skizzieren bestenfalls Beweise oder schildern vielleicht eine grobe Idee. Zustandegekommen ist ein recht inhomogener Band, in dem über vier sehr verschiedene Gebiete der komplexen Analysis berichtet wird. Natürlich gibt es viele Zusammenhänge, eine innere Systematik gibt es in dem Band jedoch nicht, gibt es wohl nicht in der gesamten enzyklopädischen Reihe.

Man hat daher die Artikel getrennt zu betrachten.

Der erste Artikel erklärt den Begriff des komplexen Raums, definiert Garben und führt die Kohomologie mit Werten in einer Garbe ein. Dieser Begriffsapparat ist notwendig, um dann (auf 15 Seiten) die Theorie Steinscher Räume abzuhandeln. Man kann sagen, daß Onishiks Artikel eine 50seitige Zusammenfassung der „Steinschen Räume" von H. Grauert und R. Remmert (Springer Grundlehren) darstellt.

Leiterers Artikel behandelt das sog. Oka-Grauert-Prinzip, das besagt, daß gewisse Probleme auf komplexen Räumen, welche eine stetige Lösung besitzen, dann auch holomorph lösbar sind. Zwar handelt es sich hier um ein recht spezielles Thema, jedoch ist der Artikel sehr nützlich, weil er viele Beweise gibt und eine Darstellung in einer Monographie bisher fehlt.

Der längste und m. E. auch gewichtigste Artikel ist die Deformationstheorie V. P. Palamodovs. Es wird sowohl die allgemeine Theorie behandelt (z. B. Tangentenkomplex, Obstruktionen) als auch viele Beispiele gegeben. Da viele spezielle Deformationsprobleme besprochen werden, wird dieser Artikel für eigentlich alle an der komplexen Analysis (in dem zu Anfang definierten Sinne) Interessierte von hohem Wert sein.

Der letzte Artikel D. N. Akhiezers schließlich gibt eine schöne Einführung in die Theorie homogener (und fast-homogener) Mannigfaltigkeiten. Insbesondere werden hermitesch-symmetrische Räume, Fahnenmannigfaltigkeiten und homogene kompakte Kählermannigfaltigkeiten ausführlich besprochen.

Insgesamt liegt ein sehr nützlicher Band vor, der über verschiedene Gebiete der komplexen Analysis berichtet bis hin zu allerneuesten Entwicklungen. Dies ist um so wichtiger, als es immer schwieriger wird, in der Fülle der Forschungsergebnisse in der komplexen Analysis einen guten Überblick zu haben auch über etwas weiter entfernte Bereiche. Insbesondere stellt der Band auch ein wertvolles Hilfsmittel dar, um sich in eines der dargestellten Themen einzuarbeiten.

Bayreuth Th. Peternell

Kracht, M., Kreyszig, E., Methods of Complex Analysis in Partial Differential Equations with Applications (Canadian Math. Soc., Series of Monographs and Advanced Texts), John Wiley & Sons, Inc. 1988, 394 S., £ 47,50

In erster Linie gibt dieses Buch eine ausgezeichnete Zusammenfassung einer großen Anzahl von Darstellungsmöglichkeiten der Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen mit Hilfe der Methode komplexer Funktionen. Eine derartige Fülle an Gesichtspunkten und Zusammenhängen war in keiner bisherigen Monographie zu finden. Damit schließt das Buch sicher eine große Lücke.

Die Lösungsdarstellungen durch Integraloperatoren, die ausgehend von S. Bergman, M. Eichler, I. N. Vekua und weiterentwickelt von E. Kreyzig, E. Lanckau, W. Tutschke, R. P. Gilbert, D. L. Colton u. a., oder die der Differentialoperatoren von E. Peschl, K. W. Bauer, S. Ruscheweyh und ihren Schülern werden klar dargeboten. Dasselbe gilt für die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Operatoren.

Das Buch bringt drei wesentliche Teilgebiete aus dem Problemkreis. Im ersten Teil (Kap. 1 bis 7) werden verschiedene Integral- und Differentialoperatoren eingeführt und die Möglichkeit gezeigt, wie diese auf holomorphe und/oder antiholomorphe Funktionen wirkend, komplexe Darstellungen der Lösungsmannigfaltigkeiten von Klassen linearer partieller Differentialgleichungen erzeugen. Dabei werden auch jeweils die Existenz und Eindeutigkeit der „Operatorkerne" und das Umkehrproblem untersucht. In Hinblick auf mögliche Anwendungen werden möglichst einfache Darstellungen der Kerne diskutiert. Die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Operatoren findet man u. a. ausführlich für Bergman- und Vekuaoperatoren und Polynomkerne und Differentialoperatoren dargeboten.

Der zweite Teil (Kap. 8 bis 11) zeigt, wie man mit Hilfe der Operatoren die klassische Funktionentheorie auf die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen übertragen kann. Es werden u. a. Koeffizientenprobleme, die Lage und Art von Singularitäten, Wertverteilungstheorie und verallgemeinerte Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen behandelt. Auch die Möglichkeit der Approximation von Lösungen wird beschrieben.

Im dritten Teil (Kap. 12 und 13) werden die Methoden auf Strömung kompressibler Flüssigkeiten und die Tricomi-Differentialgleichung (schallnahe Strömungen) angewendet.

Die Darstellung ist modern, führt an die Gegenwart heran und enthält eine Reihe bisher unveröffentlichter Ergebnisse. Die Vorteile einer sehr präzisen Notation kommen für den Leser erst nach einer gewissen Gewöhnungsphase zum tragen. Das Buch wird sicherlich zahlreiche Anregungen und Ausgangspunkte für weitere Untersuchungen bieten. Es sei hier nur auf die Carrolls-Transformationstheorie, die Verallgemeinerung des großen Picardschen Satzes oder die Bestimmung möglichst „expliziter" Darstellungen von Riemannfunktionen hingewiesen. Das gilt z. B. auch für Riemannfunktionen, gewonnen aus parameterabhängigen Bergmankernen, eine Methode, die vermutlich noch zu weiteren interessanten Ergebnissen führen wird.

Trotz der Fülle und der Mannigfaltigkeit des den beiden Autoren vorliegenden Materials ist es ihnen gelungen, die wesentlichen Gesichtspunkte klar zusammenzufassen. Nach diesem Werk wird voraussichtlich der Wunsch nach einem weiteren Buch auftreten, das die in dieser Monographie (aus Gründen des Umfanges) entweder nur kurz oder gar nicht vorkommenden Fragenkreise behandelt. Dazu gehören u. a. Operatoren, die unter Verwendung von holomorphen Funktionen mehrerer komplexer Variablen zur Lösungsdarstellung von partiellen Differentialgleichungen höherer Ableitungen und/oder mehr als zwei Variablen herangezogen werden können. Es liegen auch bereits mehrere Einzelarbeiten aus dem Bereich der Anwendungen in naturwissenschaftlich-technischer Richtung vor, die nicht mehr aufgenommen werden konnten.

Das Schriftbild ist klar und übersichtlich. Die Literatur (über 600 Zitate) findet man sowohl zusammengefaßt als auch am Ende jedes Kapitels, was das Suchen sehr erleichtert.

Zusammenfassend kann man den beiden Autoren dankbar sein, daß sie sich dieser großen Mühe unterzogen haben und sowohl für den Fachmann wie auch für Leser, die sich nur einen Überblick verschaffen wollen, dieses Werk vorgelegt haben. Sicherlich ist dieses Buch auch als Grundlage für Seminare hervorragend geeignet.

Graz H. Florian

Guo Chun Wen, Begehr, H. G. W., Boundary Value problems for Elliptic Equations and Systems, London: Longman Academic 1990, 424 S., £ 45,00

Der Titel des Buches läßt nicht erkennen, daß die genannten Problemstellungen (und zwar in der Ebene) mit wirkungsvollen komplexen Methoden gelöst werden. Spätestens mit der Entwicklung der Theorie verallgemeinerter analytischer Funktionen durch I. N. Vekua und L. Bers (bei letzterem pseudo-analytische Funktionen genannt) haben die klassischen Wechselbeziehungen zwischen partiellen Differentialgleichungen und komplexer Analysis eine qualitativ höhere Stufe erreicht. Vom Resultat her bestehen diese darin, durch komplexe Schreibweise Differentialgleichungssysteme von hoher Allgemeinheit (z. B. beliebige gleichmäßig elliptische und lineare Systeme in der Ebene) unter schwachen Voraussetzungen über die Koeffizienten (z. B. aus einem L_p-Raum) einheitlich behandeln zu können. Von der Methode her beruhen diese Querverbindungen darauf, daß die inhomogene Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\partial w/\partial \bar{z} = \varrho(z)$ durch ein Integral (den sogenannten T-Operator) explizit gelöst werden kann. Ähnlich, wie man Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen durch unbestimmte Integration auf Integralgleichungen zurückführen kann, kann man durch diesen T-Operator Randwertprobleme auf (singuläre) Gebiets-Integralgleichungen zurückführen.

Nachdem die ursprüngliche Theorie verallgemeinerter analytischer Funktionen nur lineare Differentialgleichungssysteme erfaßte, sind in der Folgezeit diese Methoden mit Erfolg auch auf nicht lineare Differentialgleichungen angewandt worden. Beide Autoren haben selbst aktiv in diese Entwicklung eingegriffen. So enthält das zur Diskussion stehende Buch auch sehr viele eigene Resultate der Autoren, zum Teil auch bisher unveröffentlichte.

Kernstück des Buches sind – dem Titel entsprechend – Randwertprobleme, wie die Dirichletsche, die der schiefen Richtungsableitung und die Riemann-Hilbertsche (bei der eine Linearkombination von beispielsweise zwei gesuchten reellwertigen Funktionen auf dem Rande vorgeschrieben wird). Behandelt werden aber auch Sprungprobleme, bei denen gesuchte Lösungen (speziell auch gesuchte holomorphe Funktionen) längs vorgegebener Kurven ein bestimmtes Sprungverhalten aufweisen. Alle Problemtypen werden übersichtlich, meistens durch Buchstaben (wie „Problem H“ für das Hasemansche Randwertproblem) charakterisiert und lassen sich durch ein zuverlässiges Sachverzeichnis leicht auffinden.

Gewonnen werden die gesuchten Lösungen hauptsächlich durch (komplexe) Integraldarstellungen, darauf beruhende a-priori-Abschätzungen und die Anwendung allgemeiner funktionalanalytischer Methoden wie Kontinuitätsmethode, Schauderscher Fixpunktsatz und Prinzip von Leray-Schauder.

Das Buch ist wie folgt gegliedert.

Kapitel I („Boundary value problems for simple complex equations“) behandelt u. a. Randwertprobleme für holomorphe Funktionen, aber auch für die Poissonsche Differentialgleichung ($\Delta u = \varrho(z)$).

Kapitel II („Boundary value problems for elliptic complex equations of first order“) enthält systematische Theorien sowohl für lineare und quasilineare als auch für nichtlineare Systeme erster Ordnung.

In Kapitel III („Boundary value problems for elliptic equations of second order“) werden nicht nur Existenzaussagen auf komplexem Wege gewonnen, auch Maximum- und Minimum-Prinzipien werden im Rahmen der komplexen Betrachtungsweise bewiesen.

Randwertproblemen mit stückweise stetigen Randdaten, insbesondere auch „gemischten“ Randwertproblemen (bei denen stückweise die gesuchte Funktion selbst bzw. ihre Normalableitung vorgeschrieben werden) ist das Kapitel IV ("Boundary value problems with piecewise continuous coefficients for elliptic equations and systems") gewidmet.

Die Kapitel V ("Boundary value problems for elliptic systems of two second order equations“) und Kapitel VI ("Boundary value problems for elliptic systems of several equations") sind schließlich Systemen für 2 bzw. für $2n$ gesuchte reellwertige Funktionen gewidmet. Die Unterteilung der Fälle $n=1$ und $n \geqslant 2$ ist deswegen zweckmäßig, weil die komplexe Zusammenfassung im Fall $n=1$ zu einer skalaren, im Fall $n \geqslant 2$ aber zu einer Vektor-Differentialgleichung führt.

Der Wert des Buches wird noch erhöht durch mehrere Besonderheiten:

1. Die den verschiedenen Randwertproblemen gewidmeten Abschnitte sind relativ unabhängig voneinander und können daher auch einzeln gelesen werden.

2. Das Buch ist durchweg gut lesbar, da außer den obengenannten funktionalanalytischen Prinzipien und außer Grundkenntnissen über die üblichen Funktionsräume nichts als bekannt vorausgesetzt wird, alle erforderlichen Überlegungen sind in den Text eingearbeitet.

3. Obwohl lückenlos, sind die Beweise doch kurz und lassen das Wesentliche deutlich hervortreten.

4. Viele Resultate (wie die über Systeme zweiter Ordnung für mehrere gesuchte Funktionen) werden in der vorliegenden Kombination der Methoden und in der vorliegenden hohen Allgemeinheit erstmals in Buchform veröffentlicht.

Das Buch kann nicht nur lernenden, lehrenden und forschenden Mathematikern empfohlen werden, sondern auch Vertretern von anderen Fachrichtungen (wie Physik und Ingenieurwissensschaften), die partielle Differentialgleichungen anwenden.

Halle W. Tutschke

Gromov, M., Partial Differential Relations (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, Vol. 9), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1986, 370 pp., Hard cover, DM 148,–

The term *partial differential relations* (PDR) stands for a wide class of problems including partial differential equations and inequalities. It was discovered during the last few decades (starting with the work of H. Whitney and culminating in the work of the author of this book) that solutions of typical differential relations satisfy the so-called h-principle (Gromov's term), which means, roughly, that solutions exist if some natural necessary conditions hold. Moreover, solutions are usually dense in the appropriate functional space. This kind of behavior contrasts with the classical theory of PDE where equations are assumed to describe the laws of nature. But despite (or maybe due to) their importance these PDE are rare among all PDR. Nevertheless, PDR satisfying the h-principle arise in many interesting, mainly geometrical, problems.

Gromov's book is an encylopedia of PDR satisfying the h-principle and of methods of their solutions. It is important to note that the author of the book invented or greatly developed most of these methods.

The book consists of three parts:

- A survey of basic problems and results
- Methods to prove h-principle
- Isometric C^∞-immersions

The first part starts by introducing geometric language for PDR. A differential relation of r-th order is interpreted as a subset $\mathscr{D}$ of the space X^r of r-jets of sections of a fiber bundle $X \to V$. Holonomic sections of the jet bundle $X^r \to V$ are r-jets of sections $V \to X$. Therefore, the solution of a PDR $\mathscr{D}$ is a holonomic section $\varphi: V \to X^r$ with $\varphi(V) \subset \mathscr{C}$. The simplest form of an h-principle for $\mathscr{D}$ tells us that if there exists any section $\psi: V \to X$ with $\psi(V) \subset \mathscr{D}$ then there exists a solution of $\mathscr{D}$. The "h-principle" first appeared in several complex variables as "Oka's principle": any continuous section of a holomorphic vector bundle is homotopic to a holomorphic one. This is an h-principle for Cauchy-Riemann equation. Of course, in such a general form the principle is false but when V is a Stein manifold then it turns out to be true for a large class of holomorphic fiber bundles over V (Grauert's theorem). Another classical example of when the h-principle holds is the Smale-Hirsch immersion theory and its numerous generalizations (many of them due to M. Gromov). The large class of PDR satisfying the h-principle is provided by the singularities theory and by differential relations over an open manifold.

The second part of the book is devoted to the four most important methods which have been invented so far for proving the h-principle:

removal of singularities, continuous sheaves, Nash-type implicit function theorem and convex integration.

Convex integration (the main idea of which was extracted by M. Gromov from Nash's C^1-isometric theorem) seems to be the most powerful method which can prove h-principle for almost all problems when it can (or cannot) be proved otherwise. Convex integration works perfectly for singularities-type problems, for finding an approximate solution of a PDE, and for the solution of a PDE when the minimal class of regularity is required. C^∞-solutions is another pair of shoes and in Part 3 the author shows what can be done in this direction. The author applies an implicit function theorem which he proved in Part 2 to the problem of C^∞-isometric immersions of Riemannian and Pseudo-Riemannian manifolds. The last chapter of the book is devoted to symplectic geometry (topology). The author is one of the founders of symplectic topology and in this chapter he proves many of his basic theorems, some of which remained unpublished.

I think that the books is unprecedented in the quantity and quality of results which are proved there. One can use it for references and results as well as for methods in this wide and interesting field of mathematics. This field is not covered by any other monographs and some part are not covered anywhere. The book is not easy reading but the patient reader who will study it page by page, trying to solve numerous problems (some of them are very difficult!), will be rewarded by a knowledge and skill which is quite hard to get otherwise.

Stanford Ya. Eliashberg

Lagerstrom, P. A., Matched Asymptotic Expansions (Applied Mathematical Sciences, Vol. 76), Berlin u. a.: Springer Verlag 1988, 251 S., DM 78,–

In den Anwendungen trifft man oft auf Gleichungen, die (kleine) Parameter enthalten. Das Verhalten der Lösungen solcher Gleichungen in Abhängigkeit von diesen Parametern möchte man studieren. Dafür gibt es verschiedene Zugänge, z. B. die Methode der Poincaréschen Reihen und daraus abgeleitete Verfahren in der Streutheorie wie den Grenzübergang zur geometrischen Optik. Auch bei der Approximation der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen wie $u_t + uu_x = 0$ im $\mathbb{R}^n$ treten solche Probleme auf. Man fügt einen Dämpfungsterm (Viskosität) εu_{xx} in die Gleichung ein und untersucht den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

Von besonderem Interesse sind dabei Lösungen, die sich in verschiedenen Koordinatenbereichen asymptotisch verschiedenen verhalten. Man muß dann das Verhalten in den einzelnen Bereichen (die von den Parametern abhängen können) studieren, insbesondere diese Bereiche selbst angeben und überprüfen, ob sie sich überlappen. Wenn das der Fall ist, kann man in solchen Grenzschichten die einzelnen asymptotischen Entwicklungen aneinander anpassen. Ein Modell für ein solches Vorgehen stammt schon von Friedrichs, der damit 1942 ein Problem von Prandtl aus der Flüssigkeitsdynamik behandelt hat.

Der Autor der vorliegenden Monographie hat selbst intensiv auf diesem Gebiet gearbeitet. So stellt er viele Ergebnisse dar, die er – teilweise angeregt von S. Kaplun – erzielt hat. Dabei will er nicht eine geschlossene Theorie entwickeln, sondern die Methode an Hand typischer Probleme vorstellen.

Das Buch besteht aus drei Kapiteln. Das erste enthält allgemeine Konzepte der singulären Störungstheorie. Im zweiten werden gewöhnliche Differentialgleichungen untersucht. Unter anderem das Friedrichssche Modell, das klassische Problem der Wölbung einer Flüssigkeitsoberfläche innerhalb und außerhalb von Kapillaren und Relaxationsschwingungen. Im dritten Kapitel schließlich werden partielle Differentialgleichungen behandelt, und zwar sowohl lineare als auch nichtlineare mit elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Störungen.

Das Buch ist klar geschrieben. Es enthält eine Fülle von Material, und man kann viel aus ihm lernen.

Bonn R. Leis

Varadarajan, V. S., An Introduction to Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups (Cambridge studies in advanced mathematics 16), Cambridge University Press 1989, 316 S., £ 40.00

In den letzten Jahren sind mehrere Bücher über halbeinfache Lie-Gruppen und ihre Darstellungen erschienen, allen voran N. Wallachs *Real Reductive Groups I* und A. Knapps *Representation Theory of Semisimple Groups.* Das vorliegende Buch ist keine systematische Darstellung der Theorie mit vollständigen Beweisen wie das Buch von Wallach. Es ist auch nicht so umfangreich wie das Buch von Knapp, sondern eine wirkliche Einführung. Genauer gesagt, es ist eine Einführung in Harish-Chandras Arbeiten, die grundlegend für die harmonische Analyse auf halbeinfachen Gruppen sind. Eine wesentliche Schwierigkeit bei einem solchen Unterfangen sind die technischen Komplikationen, die sich in diesem Gebiet selbst bei der Realisierung verhältnismäßig einfacher Ideen ergeben. Um allgemeine Ergebnisse auch nur formulieren zu können, muß man praktisch die ganze Strukturtheorie der halbeinfachen Lie-Gruppen und -Algebren voraussetzen. Darüberhinaus benötigt man analytische Werkzeuge (z. B. Distributionen auf Mannigfaltigkeiten oder elliptische Regularität), die nicht immer im Vorlesungsangebot besprochen werden. Auch Varadarajan kann diese Schwierigkeiten nicht aus der Welt schaffen, aber indem er die Konzepte allgemein formuliert, Rechnungen dagegen im wesentlichen nur für $U(n)$ bzw. $Sl(2,\mathbb{R})$ und $Sl(2,\mathbb{C})$ durchführt, hält er zumindest die Strukturtheorie auf einem elementaren Niveau. Natürlich gibt es schon ein Buch, S. Langs $Sl(2,\mathbb{R})$, in dem die unitären Darstellungen von $Sl(2,\mathbb{R})$ behandelt werden, aber hier spielt diese Gruppe mehr die Rolle des instruktiven Beispiels. Der Autor legt großen Wert auf Erklärungen und Motivationen. Immer wieder werden Beweisideen vor den eigentlichen Beweisen skizziert. (Oft weist der Autor auch auf die historischen Hintergründe hin und gibt an, wo man die (allgemeinen) Beweise finden kann). Allerdings sind die Beweise manchmal selbst etwas skizzenhaft. Man merkt hier deutlich, daß das Buch aus einer Vorlesung entstanden ist. Es ist nicht wirklich linear geschrieben, immer wieder gibt es Vorgriffe. Dieser informelle Stil macht das Buch für das Selbststudium etwas schwierig (an dieser Stelle möchte ich anmerken, daß das Buch sehr viele Druckfehler enthält). Dennoch wird jeder, der dieses Buch aufmerksam gelesen hat, die Bücher von Wallach und Knapp, oder auch die Originalarbeiten von Harish-Chandra, leichter verdauen können, gerade weil es die Ideen und Motivation aus der Technik herauspräpariert.

Dem eigentlichen Text geht eine Einleitung voran, in der die Rolle der harmonischen Analyse auf halbeinfachen Lie-Gruppen in anderen Zweigen der Mathematik erläutert wird. Es folgt eine Darstellung der Weylschen Arbeit über kompakte Gruppen, exemplarisch dargestellt am Beispiel der $U(n)$. Der Satz von Peter-Weyl wird ohne Beweis zitiert. Ebenfalls ohne Beweise werden invariante und quasiinvariante Maße auf Gruppen und homogenen Räumen, sowie induzierte Darstellungen eingeführt. In Kapitel 4 werden die Darstellungen der Hauptreihe (principal series) für die Gruppen $Sl(n, \mathbb{R})$ und $Sl(n, \mathbb{C})$ erklärt und die zugehörigen Charaktere bestimmt. Außerdem spricht Varadarajan hier Harisch-Chandras Philosophie der Zuordnung von Familien von Darstellungen zu Konjugationsklassen von Cartan-Gruppen sowie die Rolle der diskreten Reihe an. Relativ wenige Beweise findet man in Kapitel 5 über die Darstellungstheorie von Lie-Algebren. Hier werden analytische Vektoren und der Harish-Chandra-$(\mathfrak{g}, K)$-Modul einer unitären irreduziblen Darstellung definiert und zentrale Sätze, die den Übergang vom Infinitesimalen zum Globalen ermöglichen, angesprochen. Als Anwendung zeigt der Autor, wie man den Distributionscharakter konstruieren kann, wenn man die endliche Multiplizität der K-Typen hat. Abschließend klassifiziert er die irreduziblen $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln für $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{R})$ und bestimmt die zugehörigen Charaktere. Kapitel 6 ist der Plancherel-Formel gewidmet, d. h. der Zerlegung der δ-Distribution in ein Integral über Distributionscharaktere von irreduziblen Darstellungen. Zu diesem Zweck werden Bahnen-Integrale (orbital integrals) und radiale Komponenten von invarianten Differentialoperatoren studiert. In diesem Kapitel wird die Rolle der verschiedenen Konjugationsklassen von Cartan-Gruppen klar: Sind alle Cartan-Gruppen konjugiert, so liefert die Fouriertransformation der Bahnenintegrale auf der Cartan-Gruppe H die Charaktere der Hauptreihe. Man zeigt dann, daß die δ-Distribution auf G durch Anwendung eines Differentialoperators auf Bahnenintegrale aus der δ-Distribution auf H gewonnen werden kann und reduziert so das Problem auf Fourieranalyse auf der abelschen Gruppe H. Am Beispiel von $Sl(2, \mathbb{R})$ zeigt Varadarajan, auf welche Schwierigkeiten dieser Ansatz im Falle mehrerer Konjugationsklassen von Cartan-Gruppen stößt, und wie man sie angehen kann. Außerdem bestimmt er für diese Gruppe die diskrete Reihe, d. h. die irreduziblen Summanden von $L^2(G)$. In Kapitel 7 wird Harish-Chandras Regularitätssatz für invariante Eigendistributionen für $G = Sl(2, \mathbb{R})$ bewiesen. Das letzte Kapitel ist eine Einführung in die harmonische Analyse auf dem Schwartz-Raum der schnell abfallenden Funktionen auf $Sl(2, \mathbb{R})$. Es wird gezeigt, wie man die Eigenschaften von Matrizenkoeffizienten der irreduziblen Darstellungen, insbesondere die von ihnen erfüllten Differentialgleichungen und ihr asymptotisches Verhalten, dazu benützen kann, eine Plancherel-Formel auch für Schwartz-Funktionen herzuleiten, d. h. die δ-Distribution als Integral von temperierten Distributionen zu schreiben. Schließlich führt der Autor die Harish-Chandra-Transformation ein und studiert ihre Eigenschaften in großer Ausführlichkeit.

Erlangen J. Hilgert

Rodman, L., An Introduction to Operator Polynomials (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 38), Basel u. a.: Birkhäuser 1989, 394 S., DM 148,–

Ein Operatorpolynom ist ein Ausdruck der Gestalt $L(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \lambda^j A_j$, wobei A_0, $A_1, \dots, A_m$ beschränkte lineare Operatoren eines Banach- oder Hilbertraumes $\mathscr{X}$ und λ eine komplexe Zahl bezeichnen. Sie treten auf z. B. bei der Betrachtung linearer Differential- oder Differenzengleichungen (mit konstanten Koeffizienten) im Banachraum $\mathscr{X}$; es interessieren in diesem Zusammenhang Aussagen über die Lage und Struktur des Spektrums von $L(\lambda)$ (das ist die Menge derjenigen Punkte λ, für die $L_m(\lambda)$ nicht bijektiv ist), die Lage der Eigenwerte (das sind solche λ, für die $L(\lambda)$ nicht injektiv ist), die (m-fache) Vollständigkeit des Systems der Eigen- und assoziierten Elemente, Entwicklungssätze etc. Besonders wichtig ist der Fall $m=2$: Eine Vielzahl von Schwingungsproblemen führt in allgemeiner Formulierung auf Gleichungen der Gestalt $(\lambda^2 A_2+\lambda A_1+A_0)x_0=0$ oder $=f$. Im Falle $A_2=0$ geht z. B. die erste dieser Gleichungen für $A_1=I$ in die Eigenwertgleichung $(\lambda+A_0)x_0=0$ über. Die Untersuchung von Operatorpolynomen besitzt natürlich auch auf den ersten Blick rein algebraische Aspekte: Es entsteht z. B. die Frage nach der Faktorisierbarkeit des Operatorpolynoms $L(\lambda)$ in der Form $L(\lambda)=L_1(\lambda)L_2(\lambda)$ mit nichttrivialen Operatorpolynomen $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$, nach der Existenz eines gemeinsamen Linksvielfachen $L(\lambda)$ gegebener Operatorpolynome $L_1(\lambda),\ldots,L_r(\lambda)$, d. h. eines Polynoms $L(\lambda)$, das sich schreiben läßt als $L(\lambda)=M_1(\lambda)L_1(\lambda)=\ldots=M_r(\lambda)L_r(\lambda)$ mit gewissen Operatorpolynomen $M_1(\lambda),\ldots,M_r(\lambda)$, usw. Auch diese Aufgaben hängen eng mit den oben genannten praxisrelevanten Fragestellungen zusammen.

Eine wichtige Methode zur Untersuchung von Operatorpolynomen ist ihre Linearisierung, die wohl zuerst von M. V. Keldys und P. H. Müller angewandt wurde. Ist das Operatorpolynom $L(\lambda)$ z. B. monisch (d. h. gilt $A_m=I$), so wird neben $L(\lambda)$ der lineare Operator

$$C_L=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \ldots & -A_{m-1} \end{pmatrix}$$

im Raume $\mathscr{X}^m$ betrachtet (für $\mathscr{X}=\mathbb{C}$ hat die Matrix C_L gerade das charakteristische Polynom $L(\lambda)$). Es zeigt sich (durch einfache Rechnung), daß $L(\lambda)$ und C_L dasselbe Spektrum, entsprechende Eigenvektoren usw. haben. Diese Zusammenhänge und verschiedene andere für o. g. Aspekte und Fragestellungen wichtige Aufgaben wurden seit den 70er Jahren systematisch untersucht von I. C. Gohberg und seinen Mitarbeitern, zu denen der Autor der vorliegenden Monographie gehört. Sie bildet in gewissem Sinne eine Fortsetzung der Monographie „Matrix Polynomials" von I. C. Gohberg, P. Lancaster und L. Rodman, die 1982 erschien und in der entsprechende Fragen für den Spezialfall $\mathscr{X}=\mathbb{C}^n$ betrachtet werden.

In Kapitel 1 („Linearizations") wird die folgende allgemeine Definition einer Linearisierung $A\in L(\mathscr{Y})$ des Operatorpolynoms $L(\lambda)$ über einer offenen Teilmenge Ω der komplexen Ebene eingeführt: Es gilt $\sigma(A)\subset\Omega$ und es gibt Banachräume $\mathscr{Z}_1$, $\mathscr{Z}_2$ und Operatorfunktionen $E(\lambda)$, $F(\lambda)$, die holomorph und invertierbar auf Ω sind, so daß für $\lambda\in\Omega$ gilt:

$$L(\lambda)\oplus I_{\mathscr{Z}_1}=E(\lambda)((\lambda I-A)\oplus I_{\mathscr{Z}_2})F(\lambda)$$

(die Räume, zwischen denen $E(\lambda)$ und $F(\lambda)$ wirken, sind aus dieser Gleichung ersichtlich). In Kapitel 2 („Representations and Divisors of Monic Operator Polynomials") werden Rechts- und Linksspektralpaare sowie Spektraltriplets eingeführt; diese hängen eng mit Linearisierungen zusammen. Für ein monisches Operatorpolynom $L(\lambda)$ besteht mit seinem zugehörigen Spektraltriplet (X, T, Y) z. B. die Darstellung $L(\lambda)^{-1}=X(\lambda I-T)^{-1}Y$, wobei T in einem Raum $\mathscr{Y}$ und X, Y wieder zwischen den Räumen $\mathscr{X}$ und $\mathscr{Y}$ wirken. Grundlegend sind Zusammenhänge zwischen der Faktorisierbarkeit eines monischen Operatorpolynoms $L(\lambda)$ und gewissen invarianten Teilräumen des linearisierenden Operators T. Im Falle eines selbstadjungierten (d. h. $L(\lambda)=L(\bar{\lambda})^*$ oder $A_j=A_j^*$, $j=0, 1, \ldots, m-1$) monischen

Operatorpolynoms im Hilbertraum kann der linearisierende Operator T selbstadjungiert in einem Kreinraum gewählt werden. Dann führen (im Kapitel 5: „Selfadjoint Operator Polynomials“) Aussagen über die Existenz maximaler semidefiniter invarianter Teilräume von T zu Faktorisierungen des Operatorpolynoms $L(\lambda)$. Interessante Zusammenhänge zur Systemtheorie enthält das Kapitel 7 („Polynomials with given Spectral Pairs and exactly Controllable Systems“). U.a. wird das Problem betrachtet, zu gegebenen Operatoren A und B einen (feedback) Operator F so zu finden, daß das Spektrum von $A + BF$ in einer vorgegebenen Menge der komplexen Ebene liegt. Die übrigen Kapitel seien durch ihre Überschriften charakterisiert: 3. Vandermonde Operators and Common Multiples; 4. Stable Factorizations of Monic Operator Polynomials; 6. Common Divisors and Common Multiples; 9. Resultant and Bezoutian Operators; 10. Wiener-Hopf Factorization.

An vielen Stellen werden die Ergebnisse zu den Operatorpolynomen illustriert an Differential- und Differenzengleichungen. Die meisten Kapitel enthalten eine Reihe von Aufgaben und offenen Problemen, die zur weitergehenden Beschäftigung mit Operatorpolynomen anregen sollen. Die Darstellung ist sehr ausführlich und klar; an Vorkenntnissen werden i. a. nur einfache Grundtatsachen etwa einer einführenden Vorlesung „Funktionalanalysis“ oder „Lineare Operatoren“ vorausgesetzt; einige wenige benötigte tieferliegende Ergebnisse werden vollständig formuliert. Insgesamt gesehen ein sicher sehr nützliches Buch, das auch von Studenten höherer Semester in die Hand genommen werden kann und sie ohne allzugroßen Aufwand an aktuelle mathematische Probleme heranführt.

Dortmund H. Langer

Gol'dshtein V. M., Reshetnyak Yu. G., Quasiconformal Mappings and Sobolev Spaces, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1990, 388 S., Dfl 260,00.

In der vorliegenden Monographie untersuchen die Autoren eine Reihe von technischen Fragen und Begriffen bei Sobolevräumen. Quasikonforme Abbildungen haben dabei eine reine Hilfsfunktion und treten auch erst sehr spät im Buch auf (etwa im letzten Siebentel).

Im ersten Kapitel werden einige Standardhilfsmittel aus der Maß- und Integrationstheorie und der Theorie der verallgemeinerten Funktionen bereitgestellt. Das zweite Kapitel „Functions with Generalized Derivatives“, fast die Hälfte des gesamten Buches ausmachend, behandelt Sobolevsche Integraldarstellungen und verwandte Integraldarstellungen von Reshetnyak, Einbettungssätze sowie Differenzierbarkeitsaussagen sehr allgemeiner Art. Gegenstand der Kapitel 3 und 4 sind verschiedene Kapazitätsbegriffe und ihre Anwendungen u. a. für Konvergenzaussagen und Hebbarkeitskriterien. Im fünften Kapitel „Change of Variables“ werden diejenigen Abbildungen bestimmt, die die Klassen der Sobolevräume in sich überführen. Es wird nämlich gezeigt, daß dies gerade die quasikonformen Abbildungen sind (wobei für gewisse Fälle von Sobolevräumen die Lipschitzstetigkeit von Abbildung und Umkehrabbildung als Zusatzbedingung hinzutritt). Dazu werden sehr allgemeine Sätze über Variablentransformationen bei Integralen hergeleitet bzw. dargestellt. Im sechsten und letzten Kapitel werden notwendige, hinreichende sowie notwendige und hinreichende (Gebiets-)Erweiterungssätze für Sobolev-, Besov- und Nikolskyräume bewiesen. Dabei spielen u. a. ebene quasikonforme Abbildungen eine wesentliche Rolle. Am Schluß des Buches geben die Autoren auf 6 Seiten noch Kommentare zu den Kapiteln 2 bis 6, wodurch allerdings ein diesbezüglicher Mangel im eigentlichen Text nur zum Teil behoben wird.

Was die quasikonformen Abbildungen anbelangt, die ja programmatisch im Titel genannt werden, so ist ihre auf S. 299 gegebene (einzige) Definition für den Uneingeweihten nicht deutbar, weil die dabei verwendeten Symbole nirgends im Buch erklärt werden. Möglicherweise besteht an dieser Stelle des Buches eine Textlücke; mindestens eine weitere befindet sich beim Übergang von S. 171 zu S. 172. Übrigens treten quasikonforme Abbildungen bereits in einer Bedingung auf S. 286 auf, ohne Hinweis oder Zitat. Natürlich ist nichts in dieser Welt vollkommen, aber neben harmlosen Verwechslungen von „infinite“ und „finite“ (S. 185), „bound“ und „boundary“ (S. 183) oder der fast regelmäßigen Verwechslung des bestimmten und unbestimmten Artikels enthält der Text sehr viele – zu viele – „Druckfehler“, die das Lesen erheblich erschweren und die weder dem Druck noch der Übersetzung angelastet werden können, sondern die offensichtlich von Nachlässigkeiten im Manuskript herrühren. Nichtsdestoweniger sollte das Buch von allen, die mit Sobolevräumen arbeiten, zur Kenntnis genommen werden.

Halle/Saale H. Renelt

Ziemer, W. P., Weakly differentiable functions, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 370 S., DM 108,–

Das Buch beschäftigt sich mit den klassischen Sobolevräumen

$$W_p^k(\Omega)=\{f\in L_p(\Omega): D^\alpha f\in L_p(\Omega),\ \alpha\leqslant k\}$$

und dem Raum

$$BV(\Omega)=\{f\in L_1(\Omega): D^\alpha f \text{ Maß},\ |D^\alpha f|(\Omega)<\infty,\ \alpha=1\}$$

der Funktionen beschränkter Variation. Hierbei ist Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $1\leqslant p<\infty$, $k\in\mathbb{N}_0$, Ableitungen im Sinne der Theorie der Distributionen. Das Buch hat 5 Kapitel. 1. Preliminaries (Zusammenstellung benötigter Hilfsmittel, einschließlich covering theorems, Hausdorff-Maße, L_p-Räume, Lorentz-Räume, Distributionen). 2. Sobolev spaces and their basic properties (Zusammenstellung von Grundaussagen, einschließlich Sobolev's inequality, Bessel potentials and capacity, limiting cases $kp=n$). Das Herzstück des Buches sind die restlichen 3 Kapitel. 3. Pointwise behavior of Sobolev functions. Es geht um punktweise, lokale und globale Glattheitseigenschaften von Sobolev-Funktionen: Lebesgue-Punkte, Taylorentwicklungen, punktweise Differentiation, Approximation, wobei die Ausnahmepunkte in der Sprache der Kapazität von Mengen beschrieben werden. 4. Poincaré inequalities – a unified approach. Ein allgemeiner Zugang zu Poincaré-Ungleichungen in Sobolev-Räumen. 5. Functions of bounded variation. Hier werden ähnliche Fragen behandelt wie im Kap. 3 für Sobolev-Funktionen.

Das Buch wendet sich an Studenten höherer Semester und an Mathematiker, die an Funktionenräumen, partiellen Differentialgleichungen und Approximationstheorie interessiert sind. Es ist eine gute Ergänzung zur umfangreichen Literatur über Sobolev-Räume. Vorausgesetzt werden Analysiskenntnisse im Umfang üblicher Kursus-Vorlesungen.

Jena H. Triebel

Fenchel, W., Elementary geometry in hyperbolic space, Berlin u. a.: deGruyter 1989, 225 S, DM 128,–

Ch. Siebeneicher brachte das offenbar nahezu abgeschlossene nachgelassene Manuskript des 1988 plötzlich verstorbenen Autors in endgültige Form für den Druck. Das Buch behandelt die elementare Geometrie des 3-dimensionalen hyperbolischen Raumes, und zwar fast ausschließlich das konforme Modell im oberen Halbraum $U = \mathbb{C} + e^{\mathbb{R}}j$ eingebettet in den Quarternionen-Körper $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{C} \right\}$. Axiomatische Betrachtungen werden bewußt vermieden. Jede hyperbolische Gerade ist durch ihre Enden im Rand $\partial U = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eindeutig bestimmt, und die Gruppe $\mathscr{H}$ der eigentlichen hyperbolischen Bewegungen wirkt auf ∂U als $PSL_2\mathbb{C}$. So läßt sich das meiste durch komplexe 2×2-Matrizen ausdrücken. Dies wird systematisch durchgeführt, dabei wird die Transitivität von $\mathscr{H}$ auf den Fahnen möglichst weitgehend ausgenutzt. Die hyperbolische Metrik ist (bis auf einen Faktor) die einzige $\mathscr{H}$-invariante Riemannsche Metrik. Sonst spielen differenential-geometrische Dinge außer bei Flächen- oder Volumenbetrachtungen kaum eine Rolle. Nach vier vorbereitenden Kapiteln, die mit einer Klassifikation der verschiedenen Typen von Isometrien enden, werden im 5. Kapitel die orientierten Geraden durch Matrizen der Spur 0 dargestellt, deren Bild in $PSL_2\mathbb{C}$ eine Halbdrehung um die betreffende Gerade als Achse ist. Es folgt mit 61 von insgesamt 225 Seiten das längste Kapitel über 6-Seite mit lauter rechten Winkeln, deren Untersuchung auf Schilling (1891/94) sowie Morley and Morley (Inversive Geometry 1933) zurückgeht. Im 7. Kapitel werden Punkte und Ebenen, ihre Abstände und Winkel sowie Tetraeder behandelt. Punkte bzw. Ebenen werden durch Matrizen $p \in SL_2\mathbb{C}$ mit $p\bar{p} = \mp \mathbb{1}$ dargestellt, die zugehörige Spiegelung wird dann durch pj induziert, Inzidenz von Punkt q und Ebene p wird durch spur $(q\bar{p}) = 0$ gegeben. Anschließend werden auf 27 Seiten Flächen diskutiert, die in einer euklidischen Sphäre liegen, also Sphären, Horosphären und Abstandsflächen. Diese waren in der älteren Literatur nicht entsprechend systematisch untersucht worden. Das Buch endet mit einem Kapitel über Flächen- und Volumenberechnungen. Viele der Formeln gehen schon auf Lobačevskij zurück.

Die meisten moderneren Darstellungen untersuchen die hyperbolische Geometrie vom axiomatischen oder projektiv-metrischen Standpunkt, und zwar überwiegend die Ebene und nicht den Raum. Die koordinatenmäßige Behandlung des räumlichen konformen Modells findet sich eher in Texten aus der Zeit vor dem Ersten Weltkrieg. Der Verfasser hat diese alten Ergebnisse in einheitlichem Rahmen zusammengefaßt, systematisiert, ergänzt, und in möglichst allgemeiner Form unter Einbeziehung von Ausartungsfällen bewiesen; dabei werden nur sehr bescheidene Vorkenntnisse benötigt. Am Ende jedes Kapitels gibt er kurze Hinweise auf die ältere Literatur. Das Buch ist aber eher zum Nachschlagen gedacht denn als Lehrbuch, es enthält einen großen Reichtum an Formeln. Es könnte eine mehr axiomatisch geprägte Vorlesung in reizvoller Weise komplementieren.

Tübingen H. Salzmann

Farin, G., Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, A Practical Guide, second Edition, Boston u. a.: Academic Press, 1990, 444 S., $ 39,95.

The main topics of this book are the concepts of Bézier, B-spline and Coons methods for curve and surface fitting as needed for CAD/CAM systems, geometric modelling and graphics programming. The first chapter is written by P. Bézier and contains a historic account of how computer aided design has developed.

Two further chapters are written by W. Boehm. They provide the mathematical tools of Differential Geometry used in the discussion of geometric continuity.

Compared to the first edition this book has been considerably extended and revised. Some twenty C programs are added and also nearly 20 new sections. In particular rational surfaces and geometric C^1 joints of polynomial surfaces are covered now by the 2nd edition.

The book starts with an introduction to the Bézier representation of polynomials. As typical of this book, the author developes this and other concepts algorithmically by simple geometric constructions. Students with a dislike for mathematical abstraction will appreciate this. But also the experienced reader will find this approach intriguing.

Last not least, the book helps to develop a geometric understanding. Many excellent figures accompany the text and more than that, form a natural part of it. This geometric and constructive point of view give the book a unique quality.

After the essential properties of Bézier curves are developed, polynomial interpolation is considered including the Lagrange and Newton form, and cubic and quintic Hermite interpolation. Spline curves are then introduced as composite quadratic and cubic Bézier curves with C^1 respectively C^2 continuity, while general splines are derived via knot insertion. As an application piecewise cubic interpolation and cubic spline interpolation is discussed.

A survey on geometric continuity follows encompassing ν-, γ-, and β-splines. The curve part of the book ends with chapters on conic sections and rational Bézier and B-spline curves.

The remainder of the text is devoted to surface topics: bilinear interpolation, tensor product Bézier patches, two short sections on curve distortion via volume deformations and trimmed surfaces, Bézier triangles, rational Bézier triangles, quadrics, geometric C^1 joints, Coons patches, Gregory's square, Gordon surfaces, triangular Coons patches, interrogation and smoothing.

Of course, no text can cover everything. Here, the reader will not find a treatment of solid modelling, offsets, intersection problems, rendering or special topics like n-sided patches, multivariate splines, interpolation with splines of higher degree, or corner cutting algorithms. Many references to these topics are given in the text. (The fairly good bibliography lists 355 titles). The book contains also a short dictionary of important terms and almost every chapter comprises a section of problems.

Altogether, this book gives a solid introduction to CAGD methods, points out their advantages and disadvantages, can function as a reference book for programmers in CAGD, and is a perfect textbook.

Karlsruhe H. Prautzsch

Morita, K., Nagata, J. (Eds.), Topics in General Topology (North Holland Mathematical Library, 41), Amsterdam – New York – Oxford – Tokyo: North Holland 1989, 760 S., Hardcover, Dfl. 375,–

Ziel der Herausgeber des vorliegenden Werkes ist es, spezielle Aspekte der Allgemeinen Topologie in einer Form darzustellen, die das Buch gleichzeitig als Nachschlagewerk für Spezialisten wie auch als Einarbeitungsmaterial für begabte Studenten geeignet macht. Die Lösung dieser zwiespältigen Aufgabe ist durch ausführliche Darstellung von Definitionen, Beispielen und Beweisen einerseits, reichhaltige Literaturhinweise andererseits, insbesondere aber durch sorgfältige Stoffauswahl erfreulich gut gelungen. Leitender Gesichtspunkt bei der Stoffauswahl war nach Angaben der Herausgeber, solche neuere Entwicklungen der Allgemeinen Topologie darzustellen, die als Grundlage für zukünftige Entwicklungen anzusehen sind. Offensichtlich spielten dabei die Interessen der Bearbeiter – sämtlich japanische Topologen mit internationalem Ruf – eine besondere Rolle. Letzteres macht das vorliegende Werk für westliche Topologen besonders wertvoll: sie erhalten einen vortrefflichen Überblick über (einen Großteil der) bedeutsamen von japanischen Mathematikern geleisteten (und westlichen Wissenschaftlern nicht immer leicht zugänglichen) Beiträge zur Allgemeinen Topologie.

In der weiter unten folgenden Liste der Kapitelüberschriften sind insbesondere die folgenden 4 großen, voneinander weitgehend unabhängigen Themenkreise hervorzuheben:

(A) Erweiterung von Räumen, Fortsetzbarkeit von Abbildungen und verallgemeinerte uniforme Strukturen (Kap. 1, 2).
(B) Normalität von Produkträumen und Verallgemeinerungen der Parakompaktheit (Kap. 3, 4, 5).
(C) Kategorielle Aspekte der Allgemeinen Topologie (Kap. 6, 11, 12, 14).
(D) Metrisierbarkeit und Verallgemeinerungen der Metrisierbarkeit (Kap. 7, 8, 9, 10).

Eine etwas detailliertere Vorstellung von dem reichhaltigen Material dieses Werkes vermitteln die folgenden Kapitelüberschriften (nebst Bearbeitern):

Kapitel 1: Extensions of mappings I (Morita) – Kapitel 2: Extensions of mappings II (Hoshina) – Kapitel 3: Normality of product spaces I (Atsuji) – Kapitel 4: Normality of product spaces II (Hoshina) – Kapitel 5: Generalized paracompact spaces (Yasui) – Kapitel 6: The Tychonoff functor and related topics (Ishii) – Kapitel 7: Metrization I (Nagata) – Kapitel 8: Metrization II (Tanaka) – Kapitel 9: Generalized metric spaces I (Nagata) – Kapitel 10: Generalized metric spaces II (Tamano) – Kapitel 11: Function spaces (Okuyama und Terada) – Kapitel 12: N-compactness and its applications (Eda, Kiyosawa und Ohta) – Kapitel 13: Topological games and applications (Yajima) – Kapitel 14: Categorical topology (Nakagawa) – Kapitel 15: Topological dynamics (Aoki).

Das vorliegende Werk ist nicht nur für Allgemeine Topologen als Nachschlagewerk sondern auch zur Durchführung von Seminaren und zur Bereitstellung von Dissertationsthemen besonders geeignet.

Bremen H. Herrlich

Preuß, G., Theory of Topological Structures – An Approach to Categorical Topology. Dordrecht u. a.: D. Reidel Publishing Company Kluwer Academic Publishers 1987, 304 S., DFL 148

Gleichmäßige Stetigkeit läßt sich außer bei uniformen Räumen auch durch die von V. A. Efremovič und J. M. Smirnov untersuchten *Nachbarschafts-* (= Proximitäts-) *Strukturen* beschreiben. (In einem metrischen Raum heißen zwei Mengen *benachbart,* wenn ihr Abstand Null ist). 1973 hat H. Herrlich die Kategorie der *Nearness-Räume* und ihrer Abbildungen eingeführt, welche topologische R_0-Räume, uniforme und Nachbarschaftsräume samt den zugehörigen Morphismen enthält. Ein begrifflich einfacher Zugang läßt sich über Überdeckungssysteme gewinnen. Das Studium dieses Konzepts durch H. Herrlich, G. Preuß, ihre Schüler und weitere Autoren geschah in stark kategorientheoretisch geprägter Form und war Baustein einer Tagung über „Categorical Topology", die in Berlin 1978 stattfand. Als Vorbereitung zu dieser Tagung hatte der Autor für Studierende mit Vorkenntnissen in allgemeiner Topologie eine Vorlesung gehalten, die später mehrfach wiederholt wurde. Daraus ist das vorliegende Buch entstanden.

Es behandelt *topologische Kategorien,* d. h. Kategorien aus Mengen und gewissen Abbildungen, deren wichtigste axiomatische Eigenschaft ist, daß (analog zur Initialtopologie) eindeutig bestimmte Initialstrukturen existieren. Dazu gehören außer den schon genannten Beispielen so verschiedenartige Begriffe wie Maßräume, bornologische Räume und simpliziale Komplexe.

Aber nicht nur eine kategorientheoretische Einordnung allgemeiner Topologie ist das Ziel, sondern die Gewinnung von Situationen, in denen z. B. die „Mängel" beseitigt werden, daß bei topologischen Räumen i. allg. das Produkt zweier Quotientenabbildungen keine Quotientenabbildung ist und Funktionenräume keine natürliche Topologie besitzen.

Die Kapitel: 0. Preliminaries (Mengen und Kategorien); 1. Topological categories; 2. Reflective and coreflective subcategories; 3. Relations between special topological categories (hier werden insbesondere Nearness-Räume studiert und der Begriff des *Grills* eingeführt, der für Filter mit dem des Ultrafilters übereinstimmt und für das folgende Kapitel zum Stichwort „Funktionenräume" wichtig ist); 4. Cartesian closed topological categories; 5. Topological functors; 6. Completions (in diesem Kapitel werden z. B. die Einpunktkompaktifizierung und die Stone-Čech-Kompaktifizierung sowie eine Verallgemeinerung von A. Weils Vervollständigung uniformer Räume auf Nearness-Räume behandelt); 7. Cohomology and dimension of nearness spaces (die Čech-Cohomologie mit endlichen uniformen Überdeckungen charakterisiert die Dimension von Nearness-Räumen (Verallgemeinerung eines Resultats von C. H. Dowker (1952))).

Ein Anhang über repräsentierbare Funktoren, Übungen zu den einzelnen Kapiteln, sowie eine alle wesentlichen Arbeiten zum Thema enthaltene Bibliographie runden das Buch ab.

Für die Rezensenten entstand nach der Lektüre die Frage, ob sich die „kategorische" Topologie ebenso zu einem „Imperativ" für geometrische und algebraische Topologen entwickeln wird, wie es Grundkenntnisse in der „klassischen" allgemeinen Topologie für alle Mathematiker sind. Wir bezweifeln dies, denn der Wunsch nach übergeordneten Strukturen scheint (auch) in diesem Fall eher die Vielfalt der Erscheinungen zu vergrößern. Zudem sind uns die Beiträge allgemeiner Topologie für hochkarätige geometrische Einzelprobleme, wie sie z. B. die Bing-Schule für den Doppeleinhängungssatz und die Lösung der 4-dimensionalen (topologischen) Poincarévermutung erbracht hat, letztlich wichtiger, wenn es gilt, knappe Zeit zu verplanen. Aber aus dieser persönlichen Entscheidung soll nun wiederum kein allgemeines Gesetz gemacht werden, und als Überblick über eine Arbeitsrichtung, in der sich die Hauptbeteiligten langfristig engagiert haben, ist das Buch sehr wohl zu empfehlen.

Frankfurt/Main C. Hog-Angeloni, W. Metzler

Arnold, V. I., Gusein-Zade, S. M., Varchenko, A. N., Singularities of Differentiable Maps. Volume I: The Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts. Volume II: Monodromy and Asymptotics of Integrals. Basel u. a.: Birkhäuser Verlag 1985, 382 S., DM 178,- (Vol. I), 1988, 504 S., DM 258,- (Vol. II)

Im Jahre 1955 bewies der amerikanische Topologe Hassler Whitney folgenden Satz:

Seien X und Y glatte Flächen, X kompakt. Dann gilt:

(1) Jede C^∞-Abbildung $f: X \to Y$ läßt sich beliebig gut durch eine stabile Abbildung g approximieren, wobei stabil bedeutet, daß jede genügend kleine Störung von g durch Vor- und Nachschalten von Diffeomorphismen kompensiert werden kann.

(2) Ist $g: X \to Y$ stabil und $p \in X$, so hat g in geeigneten Karten um p und $g(p)$ eine der drei Normalformen

$(x,y) \to (x,y)$ (regulärer Punkt)
$(x,y) \to (x,y^2)$ (Faltenpunkt)
$(x,y) \to (x,y^3 - xy)$ (Kuspenpunkt).

Die Entdeckung dieses Satzes wird an einer Stelle des vorliegenden Werkes als die Geburt der Singularitätentheorie bezeichnet. Nun, was wir heute unter Singularitätentheorie verstehen, ist damit noch zu einseitig beleuchtet. Singularitätentheorie als selbständiges Gebiet der Mathematik ist in den sechziger Jahren aus drei Wurzeln entstanden:

1. der Whitneys Resultat systematisierenden Stabilitätstheorie differenzierbarer Abbildungen von Thom und Mather,
2. der durch Milnor angeregten Untersuchung der singulären Punkte komplex-algebraischer Hyperflächen unter topologischen Gesichtspunkten, und
3. der Singularitätentheorie im Sinne von lokaler analytischer/algebraischer Geometrie.

Die Geschichte der letztgenannten Wurzel beginnt natürlich lange vor Whitneys Entdeckung. Jedenfalls gibt erst das Zusammenspiel von Methoden aus diesen drei Gebieten der Singularitätentheorie ihre Kraft und ihre Existenzberechtigung als eigenständige mathematische Disziplin. Alle drei spielen auch ihre Rolle in dem vorliegenden Buch. V. I. Arnold ist selbst einer der Begründer der Singularitätentheorie, und seine beiden Ko-Autoren gehören ebenfalls zu der weitläufigen Arnold'schen Schule, die die Theorie entscheidend mitgeprägt hat. So ist es nicht verwunderlich, daß die Stoffauswahl die mathematischen Interessen dieser Schule (bis etwa zum Jahr 1984, dem Erscheinungsjahr der russischen Originalausgabe) widerspiegelt. Hier ein kurzer Abriß des Inhalts:

Im ersten Band werden zunächst (Teil I) grundlegende Methoden der (reell-differenzierbaren) Singularitätentheorie eher exemplarisch vorgestellt und erläutert. Der systematischer aufgebaute Teil II zielt auf die Klassifikation von reellen Funktions- (im Gegensatz zu Abbildungs-)Keimen. Es werden sowohl die nötigen Methoden entwickelt als auch die resultierenden „Arnold'schen" Listen vorgestellt.

Besondere Verdienste hat die russische Schule sich bei der Beschreibung der Kaustiken optischer Systeme im Rahmen der Singularitätentheorie erworben. Im Teil III des ersten Bandes wird der Zusammenhang zwischen Kaustiken und Wellenfronten, Lagrange- und Legendre-Singularitäten, und differenzierbaren Funktionskeimen dargestellt.

Der zweite Band läßt sich nur noch mit etwas Mühe unter „Singularities of Differentiable Mappings" einordnen; man hält sich da besser an den Untertitel „Monodromy and Asymptotics of Integrals". Teil I stellt die Picard-Lefschetz-Theorie für isolierte Hyperflächensingularitäten dar. Teil II greift dann das Thema aus dem dritten Teil des ersten Bandes wieder auf und beginnt mit der Diskussion der sogenannten oszillierenden Integrale

$$I(t) = \int a(x,t)\, e^{i\varphi(x,t)}\, dx;$$

dies entspricht dem Übergang von der geometrischen Strahlenoptik zur Wellenoptik. Die Teile II und III des zweiten Bandes bilden auch inhaltlich den Höhepunkt des Werkes: oszillierende Integrale ordnen sich hier in einen allgemeinen Rahmen ein; in Gestalt von Integralen holomorpher Differentialformen führen sie zu einer gemischten Hodge-Struktur auf der Milnor-Kohomologie und zum Begriff des Spektrums einer isolierten Hyperflächensingularität.

Die Autoren zielen mit ihrer Darstellung konsequent darauf ab, vor allem die zentralen Ideen herauszuarbeiten. Sowohl in den Formulierungen als auch in den Beweisen beschränken sie sich daher oft auf den wichtigsten Spezialfall und verweisen für das Allgemeine auf die Literatur. „The general case may be reduced to the special case, something that we do not stop to do here." Diese Art der Darstellung ist für ein Lehrbuch etwas ungewöhnlich, insgesamt den Autoren aber gut gelungen. Dazu tragen die offenbar bewußt sehr einfach gehaltenen, aber erhellenden Beispiele wesentlich bei.

Vom Leser des ersten Bandes wird laut Vorwort erwartet, daß er differenzieren kann und etwas lineare Algebra und Geometrie kennt. Sicherheitshalber werden ihm in einer Fußnote zum Vorwort noch einige Ratschläge mit auf den Weg gegeben, was er sich unter einer Mannigfaltigkeit, einem Ideal ... vorstellen soll. So ausgerüstet, dürfte er kaum über die ersten Seiten des Textes hinauskommen, auch wenn zu Anfang dieses Bandes versucht wurde, die erforderlichen mathematischen Vorkenntnisse geringer zu halten, indem technische Sachverhalte eher umschrieben werden (damit aber auch vage bleiben). Gar zu optimisch erscheint dann auch die Hoffnung der Autoren oder des Verlages, das Buch sei Nichtmathematikern hinreichend zugänglich, um in den Genuß der Anwendungen zu kommen.

Von dieser vielleicht ungewollten Irreführung betreffs der Zielgruppe abgesehen, handelt es sich um ein gelungenes und nützliches Lehrbuch. Man hat hier vieles beisammen, was man sonst nur verstreut über Originalarbeiten findet (manches auch gar nicht); hier ist es motiviert und in den Zusammenhang gesetzt. Die Bücher eignen sich für den Kenner zum Nachlesen, vorzüglich auch als Basis für Seminare. Zur selbständigen Lektüre stellt es ziemlich hohe Anforderungen, aber ein begabter und fleißiger Student, der auch den Literaturverweisen nachgeht, wird für seine Mühe mit tiefen Einblicken in die behandelten Teile der Singularitätentheorie belohnt. Die Übersetzung ist nicht ganz frei von Mängeln, aber immerhin von solchen, die das Verständnis erschweren. Daß Monographien nicht billig sind, ist allgemein bekannt; dennoch wird der Preis dieser beiden Bände leider ein ernsthaftes Hindernis für eine weite Verbreitung sein.

Kaiserslautern K. Wirthmüller

Ekeland, I., Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Folge 3, 19), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1990, 265 pp., DM 148,–

Mawhin, J., Willem M., Critical point theory and Hamiltonian Systems (Applied Mathematical Science, 74), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 277 pp., DM 108,–

Viele Differentialgleichungen, insbesondere der Physik, sind *Euler-Lagrange-Gleichungen* für geeignete Variationsprinzipien. Grob gesprochen können die Lösungen als kritische Punkte eines Funktionals auf einer (im allgemeinen unendlich dimensionalen) Mannigfaltigkeit gefunden werden. Häufig tritt der Fall ein, daß z. B. alle kritischen Punkte nur Sattelpunkte dieses Funktionals sind und Minima apriori nicht existieren. Das bekannteste Prinzip in dieser Richtung ist das Prinzip der kleinsten Wirkung der Hamiltonschen Mechanik. Vom Standpunkt der Morsetheorie scheinen solche Variationsprinzipien für eine Existenztheorie von Lösungen der *Euler-Lagrange-Gleichungen* nicht geeignet zu sein!

Denn wie findet man kritische Punkte? Man untersucht die Topologie der Niveauflächen des Funktionals. Ändert sich der Homotopietyp, so kann er sich nur an solchen Flächen ändern, die kritische Punkte enthalten. Der Homotopietyp ändert sich durch Anheften einer Zelle, deren Dimensionen gerade der Morseindex ist. Für das Prinzip der kleinsten Wirkung ist dieser immer unendlich. Da die unendlich dimensionale Sphäre im Hilbertraum zusammenziehbar ist, folgt, daß sich der Homotopietyp nie ändert! Erstaunlicherweise bedeutet diese Festellung nicht das Ende der Theorie, sondern ihren Anfang.

Das Buch von Mawhin und Willem stellt eine Einführung in die „Funktionsanalytischen Variationsmethoden“ dar, wobei in der Anwendung das Schwergewicht in der Hamiltonschen Mechanik liegt. Hier werden Methoden entwickelt, um stark indefinite

Variationsprobleme behandeln zu können. Es wird gezeigt, wie Symmetrien von Variationsproblemen automatisch in vielen Fällen die Existenz von großen Zahlen von kritischen Punkten implizieren. Das Buch stellt eine sehr gute Einführung in die Variationsmethoden (*Luisternik-Schnirelman-Theorie, Morsetheorie*) dar. Es ist ansprechend geschrieben und sollte sich für das Selbststudium eignen. Es eignet sich für Leser mit Kenntnissen in der Funktionsanalysis.

Ekelands Buch spezialisiert sich von vornherein auf konvexe Hamiltonsche Systeme. Im Vordergrund stehen hier weniger die Variationsmethoden, sondern das konkrete Studium Hamiltonscher Systeme mit Variationsmethoden.

Das Buch beginnt mit einer Untersuchung linearer zeitabhängiger Hamiltonscher Systeme. Nach einem Exkurs in die Theorie der dualen Variationsmethoden werden Existenzsätze für periodische Lösungen Hamiltonscher Systeme mit vorgeschriebener Periode bewiesen. Insbesondere interessant (und schwierig) sind die Existenzsätze für periodische Lösungen mit vorgeschriebener minimaler Periode. Die Krönung stellen die *Existenz-* und *Multiplizitätssätze* für periodische Lösungen mit vorgeschriebener Energie dar.

Ekeland stellt wesentlich höhere Anforderungen an seine Leser und führt sie zum Stand der Forschung im Jahre 1987. Seitdem hat sich das Gebiet erheblich weiterentwickelt, wobei aber die Resultate für konvexe Hamiltonsche Systeme bis jetzt nicht verbessert werden konnten. Die neuen Entwicklungen zielen mehr in die Richtung *Globale symplektische Geometrie, Fixpunkttheorie, Floerhomologie, Symplektische Homologie* etc.

Wer sich in dieses hochaktuelle Forschungsgebiet einarbeiten will, sollte mit dem Buch von Mawhin und Willem beginnen, sich mit einigen Fragestellungen aus Ekelands Buch wie zum Beispiel *Fixed Energy Problems, Indextheorie* beschäftigen und dann die Originalliteratur studieren.

Bochum H. Hofer