

94. Band Heft 2
ausgegeben am 22. 4. 1992

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil



B. G. Teubner Stuttgart 1992

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 128,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1992 – Verlagsnummer 2907/2

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim

Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Inhalt Band 94, Heft 2

1. Abteilung

R. Racke, Zur Existenz globaler Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen	63
B. Külshammer, Offene Probleme in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen	98

2. Abteilung

Turán, P., Collected papers (<i>P. Bundschuh</i>)	3
Burckhardt, J. J., Die Symmetrie der Kristalle (<i>E. Brieskorn</i>)	4
Anderson, I., Combinatorial designs: Construction methods (<i>D. Jungnickel</i>)	6
Protter, Ph., Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach (<i>W. Kliemann</i>)	7
Emery, M., Stochastic Calculus in Manifolds (<i>M. Röckner</i>)	11
Pinkus, A., On L^1 -Approximation (<i>H. Strauß</i>)	12
Hernández-Lerna, O., Adaptive Markov Control Processes (<i>G. Gómez</i>)	14
Horst, R., Hoang Tuy, Global Optimization – Deterministic Approaches (<i>I. Diener</i>)	16
Grimmett, G., Percolation (<i>A. Greven</i>)	17
Nguyen, H. T., Rogers, G. S., Fundamentals of Mathematical Statistics, Vol. 1, 2 (<i>D. W. Müller</i>)	18
Reiss, R. D., Approximate Distributions of Order Statistics (<i>E. Häusler</i>)	19
Pruscha, H., Angewandte Methoden der Mathematischen Statistik (<i>F. Pukelsheim</i>) .	21
Zavialov, O. I., Renormalized Quantum Field Theory (<i>D. Maison</i>)	22

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

W. Barthel, H.-J. Vollrath, Otto Volk 1892–1989

H. M. Edwards, Kronecker's Arithmetical Theory of Algebraic Quantities

K. Leichtweiß, Karl Strubecker zum Gedenken

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1¹/₂, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen

Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Memminger Str. 6, 8900 Augsburg

Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1¹/₂, 8520 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Zur Existenz globaler Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen*)

R. Racke, Bonn

Inhalt

1	Einleitung	63
2	Eine klassische Methode bei Evolutionsgleichungen	66
	2.1 Das allgemeine Schema	67
	2.2 Beispiele	69
	2.2.1 Wellengleichungen	69
	2.2.2 Zur Optimalität der Resultate in Einzelfällen	72
	2.2.3 Wärmeleitungsgleichungen	73
	2.3 Thermoelastizitätsgleichungen	74
3	Andere Methoden	78
4	Entwicklung von Singularitäten	81
5	Außenraumaufgaben	84
	5.1 Abklingraten bei linearen Problemen	85
	5.1.1 Laplace-Transformation	85
	5.1.2 Verallgemeinerte Eigenfunktionen	87
	5.2 Globale Existenzsätze bei nichtlinearen Problemen	90
6	Abschließende Bemerkungen	92
	Literatur	93

1 Einleitung

In diesem Aufsatz wollen wir hauptsächlich nichtlineare Wellengleichungen vom Typ

$$(1.1) \quad u_{tt} - \Delta u + \gamma u_t = f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla^2 u)$$

für eine Funktion $u = u(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \Omega$, Ω ein Gebiet im \mathbb{R}^n , $\gamma \in \{0, 1\}$, behandeln, jedoch auch andere Evolutionsgleichungen wie etwa Wärmeleitungsprobleme werden zur Sprache kommen. Zur Gleichung (1.1) kommen Anfangsbedingungen

$$(1.2) \quad u(t = 0) = u_0, \quad u_t(t = 0) = u_1$$

*) Ausarbeitung eines Vortrages anlässlich der DMV-Tagung 1991 in Bielefeld.

und

(1.3) *Randbedingungen*

hinzu, letztere für den Fall, daß $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, d. h. ein Gebiet mit Rand ist. (In den meisten Fällen wird es sich dabei um ein Außengebiet handeln.)

Wir interessieren uns für die Existenz globaler Lösungen zu (1.1)–(1.3), d. h. für Lösungen, die für alle Werte des Zeitparameters t definiert sind. Lösungen werden dabei glatte Lösungen sein, die etwa in der Klasse C^2 bezüglich t mit Werten in Sobolevräumen entsprechend hoher Differenzierbarkeitsordnung liegen.

Ein typisches Beispiel für nichtlineare Wellengleichungen vom Typ (1.1) ist die folgende Gleichung für eine schwingende Saite ($n = 1$), eine schwingende Membran ($n = 2$) bzw. eine schwingende Luftsäule ($n = 3$):

$$(1.4) \quad u_{tt} = \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

Diese Gleichung geht durch Addition von $-\Delta u$ auf beiden Seiten elementar in die Form (1.1) über.

Wir verabreden, daß wir in diesem Aufsatz von ungedämpften Wellengleichungen ($\gamma = 0$ in (1.1)) sprechen, sofern es nicht ausdrücklich anders gesagt wird.

Bei Gleichungen vom Typ (1.1), allgemeiner bei nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichungen oder -systemen, ist wohlbekannt, daß man nicht notwendigerweise eine (in t) globale Lösung erwarten darf, d. h. auch bei noch so glatten und kleinen Daten u_0, u_1 können sich Singularitäten entwickeln. Somit wird ein allgemeiner Existenzsatz, den wir zunächst für die Gleichungen (1.1) anstreben, nur unter speziellen Voraussetzungen an die Nichtlinearität f zu erwarten sein. Es wird sich dabei ein globaler Existenzsatz ergeben, der bei hinreichend kleinen Daten anwendbar sein wird und ein gewisses Verschwinden der Nichtlinearität $f = f(t, x, w)$ im Nullpunkt $w = 0$ voraussetzt. Der notwendige Grad des Verschwindens ist dabei dimensionsabhängig und geringer in höheren als in niedrigeren Raumdimensionen, was eng mit dem asymptotischen Verhalten von Lösungen des zugehörigen linearisierten Systems ($f \equiv 0$) für $t \rightarrow \infty$ verknüpft ist und in die Beweismethode wesentlich eingeht. Damit wird sich auch eine Beschreibung des asymptotischen Verhaltens der Lösung des nichtlinearen Problems ergeben.

Es werden hier also im wesentlichen Probleme zu kleinen Daten behandelt, für Probleme zu großen Daten existiert auch schon eine reichhaltige Literatur – mit ebenso umfangreichen interessanten, offenen Fragen –, für die wir dem Leser wenigstens ein paar Zitate geben möchten, die dann in dieses Gebiet weiterführen.

Wir wir schon bemerkten, ist es ein typisch hyperbolisches Phänomen, daß sich auch bei noch so kleinen Daten, d. h. in noch so kleiner Umgebung einer Gleichgewichtslage, und bei beliebig glatten Daten unter Umständen Singularitäten in endlicher Zeit entwickeln können. Dabei werden gewisse C^k -Normen der Lösungen unendlich, es existiert höchstens – und im allgemeinen, da die typischen Modelle Vorgänge in der Natur beschreiben, wohl auch mindestens – eine schwache Lösung, die z. B. noch stetig sein kann, aber vielleicht schon nicht mehr

differenzierbar ist. Wir werden auf die Entwicklung von Singularitäten kurz eingehen, jedoch nicht eine Theorie schwacher Lösungen oder Stoßwellenanalyse betreiben.

Es stellt sich nun heraus, daß die Methode, die wir zunächst für Cauchysche Anfangswertaufgaben formulieren, für allgemeinere Anfangswertprobleme bei Evolutionsgleichungen anwendbar ist, d. h. für Gleichungen vom Typ

$$(1.5) \quad V_t + AV = F, \quad V = V(t, x), \quad F = F(t, x, V, \dots, \nabla^\beta V), \quad V(t=0) = V^0.$$

Hierbei ist A ein linearer Differentialoperator und $F = F(t, x, W)$ verschwindet in $W = 0$ von einer gewissen Ordnung $\alpha + 1$, $\alpha \in \mathbb{N}$. $|\beta|$ kann dabei gleich der Ordnung von A sein, d. h. es werden insbesondere voll nichtlineare Probleme studiert.

Beispiele:

1. Gleichung (1.4) geht durch die Transformation $V := (u_t, \nabla u)$ in die Form (1.5) über mit $\alpha = 2$.

2. Die folgende nichtlineare Wärmeleitungsgleichung fällt unter die behandelbaren Probleme:

$$(1.6) \quad u_t - \Delta u = f(t, x, u, \nabla u, \nabla^2 u), \quad u(t=0) = u_0.$$

Aber auch Elastizitätsgleichungen, gekoppelt hyperbolisch-parabolische Systeme wie die Thermoelastizitätsgleichungen (s. Abschnitt 2.3), Maxwellgleichungen und Schrödingergleichungen sind mit dieser Methode studiert worden.

Wie im nächsten Kapitel aufgeführt werden wird, gibt es für die Cauchy'sche Anfangswertaufgabe, d. h. $x \in \Omega = \mathbb{R}^n$, eine ganze Reihe von Arbeiten, welche verschiedene hinreichende und zum kleineren Teil auch notwendige Bedingungen an die Daten und an die Nichtlinearität für die Existenz globaler Lösungen angeben. Für den Fall, daß ein echtes Außengebiet $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ vorliegt, d. h. $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ist ein beschränktes Gebiet, liegen weitaus weniger Resultate vor. Daß das Vorhandensein eines Randes die Überlegungen immer komplizierter macht, ist natürlich einsichtig. Hier kann man direkt noch spezieller sagen, daß es in Außengebieten schon schwierig ist, das asymptotische Verhalten von Lösungen des linearisierten Systems ($f \equiv 0$ in (1.1) bzw. $F \equiv 0$ in (1.5)) für $t \rightarrow \infty$ - in Form von Abklingraten der Lösung in negativen Potenzen von t - zu erhalten, im Gegensatz zum Ganzraumfall $\Omega = \mathbb{R}^n$, bei dem z. B. explizite Darstellungsformeln und insbesondere die Fourier-Transformation zur Verfügung stehen.

Es werden dann Außenraumprobleme zu gedämpften Wellengleichungen behandelt, bei denen auch inhomogene Operatoren anstelle der oben vorgestellten Operatoren mit konstanten Koeffizienten wie Δ auftreten werden. Beispielsweise diskutieren wir das folgende Anfangsrandwertproblem:

$$u_{tt} - \partial_i a_{ik}(x) \partial_k u + u_t = f(u_t, \nabla u, \nabla^2 u)$$

mit zugehörigen Anfangs- und Randwerten. Dabei wird $-\partial_i a_{ik}(x) \partial_k$ zu einem positiven, selbstadjungierten Operator, hier zu Dirichletschen Randbedingungen, werden, der außerhalb einer festen Kugel mit $-\Delta$ übereinstimmt.

Auch hier wird der Ansatz allgemeiner Natur sein und es erlauben, beispielsweise parabolische Gleichungen höherer Ordnung zu studieren.

Es sei hier betont, daß bei der Fülle der Fragestellungen auf dem Gebiet nichtlinearer Wellengleichungen, hyperbolischer Systeme oder gar Evolutionsgleichungen im allgemeinen notwendigerweise nur ein ganz spezieller Teil behandelt werden kann, dessen Auswahl sich natürlicherweise an den Arbeitsgebieten des Autors orientiert. Bei den zitierten Arbeiten wurde zumindest versucht, auch zu den hier nur weniger besprochenen Teilen Literatur anzugeben, die den interessierten Leser dann weiterführen kann.

Der Aufsatz gliedert sich nun wie folgt: In Kapitel 2 besprechen wir ein klassisches Schema, welches bei nichtlinearen Evolutionsgleichungen im Ganzraumfall zum Ziel führt, als Beispiel tauchen insbesondere Wellengleichungen, Wärmeleitungsgleichungen und die Thermoelastizitätsgleichungen auf. Anschließend erwähnen wir in Kapitel 3 kurz andere Methoden. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Entwicklung von Singularitäten bei hyperbolischen Gleichungen. In Kapitel 5 gehen wir dann auf Anfangsrandwertprobleme in Außengebieten ein. Im letzten Kapitel werden dann verwandte und einige zur Zeit aktuelle Probleme angesprochen.

Ausführlichere Darstellungen speziell zu Kapitel 2 geben wir in [79].

Zur Notation:

$W^{m,p}(\Omega)$, $W_0^{m,p}(\Omega)$: übliche Sobolevräume mit Norm $\|\cdot\|_{m,p}$ (s. [1]); $W^{0,p}(\Omega) \equiv L^p(\Omega)$ mit Norm $\|\cdot\|_p$, $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$.

$C_0^\infty(\Omega)$: C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger in Ω , Ω ein Gebiet im \mathbb{R}^n .

$\|\cdot\|_{m,p(G)}$, $\|\cdot\|_{p(G)}$: Norm in $W^{m,p}(G)$ bzw. $L^p(G)$, G ein Gebiet.

$K(x,r)$: Kugel mit Mittelpunkt x und Radius r ;

Ω_r : $\Omega \cap K(0,r)$.

$\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\nabla^\alpha = (\partial_1^{\alpha_1}, \dots, \partial_n^{\alpha_n})'$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, analog für D^α , wobei $D = (\partial_t, \nabla)'$. (Ein ' deutet die Transposition an, in Kapitel 4 auch eindimensionale Ableitungen.)

$\text{div} \equiv \nabla'$: Divergenz, $\text{rot} \equiv \nabla \times$: Rotation (im \mathbb{R}^3), $\Delta \equiv$ Laplaceoperator.

$\bar{\nabla}^j u = (\nabla^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq j}$, $j \in \mathbb{N}_0$.

$$\|\nabla^L u\| \dots = \left(\sum_{|\alpha|=L} \|\nabla^\alpha u\|^2 \dots \right)^{1/2}, \text{ analog für } \|D^L u\| \dots,$$

$$\|\bar{\nabla}^L u\| \dots = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq L} \|\nabla^\alpha u\|^2 \dots \right)^{1/2}, \text{ analog für } \|\bar{D}^L u\| \dots, L \in \mathbb{N}_0.$$

2 Eine klassische Methode bei Evolutionsgleichungen

Wir besprechen hier eine Methode zum Nachweis der Existenz globaler Lösungen, welche für eine ganze Reihe von Evolutionsgleichungen zum Ziel führt. Als spezielle Beispiele behandeln wir dann Wellengleichungen und Wärmeleitungsgleichungen, auch gekoppelt in Form der Thermoelastizitätsgleichungen.

2.1 Das allgemeine Schema

Die hier betrachtete Methode ist eine geschickte Durchführung eines klassischen Programms, welches in der Fortsetzung als lokal in der Zeit existierend erkannter Lösungen für alle Werte des Zeitparameters t aufgrund von a priori Abschätzungen besteht. Die Schwierigkeit, insbesondere bei voll nichtlinearen Problemen, liegt hierbei im Nachweis der a priori Abschätzungen, und dort setzt die Entwicklung der letzten Jahre ein, indem sie sich zum einen die Kenntnis des asymptotischen Verhaltens von Lösungen der zugehörigen linearisierten Probleme zu Nutze macht und zum anderen geeignete Sobolevraumabschätzungen für zusammengesetzte Funktionen beweist.

Schematisch sieht das wie folgt aus. Zu behandeln sei das System (1.5), d. h.

$$(2.1) \quad V_t + AV = F, \quad F = F(t, x, V, \dots, \nabla^\beta V), \quad V(t=0) = V^0.$$

($V = V(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, V^0 gegeben.) Hierbei ist A ein linearer Differentialoperator, $|\beta|$ kann dabei gleich der Ordnung von A sein, und wir nehmen an, daß sich die Nichtlinearität $F = F(t, x, W)$ in $W = 0$ wie folgt verhält:

$$(2.2) \quad F(t, x, W) = \mathcal{O}(|W|^{\alpha+1}) \quad \text{für} \quad |W| \rightarrow 0,$$

für ein $\alpha \in \mathbb{N}$, gleichmäßig in t und x , in Beispiel (1.4) etwa: $\alpha = 2$.

Je größer α ist, desto kleiner ist der Einfluß der Nichtlinearität F für *kleine* $|W|$, d. h. das lineare Verhalten dominiert und läßt auf eine globale Lösung für kleine Daten hoffen. Man beachte jedoch, daß diese scheinbar so naheliegende heuristische Argumentation sich zwar im Fall von Außengebieten, insbesondere also für die gerade studierten Cauchyschen Anfangswertaufgaben, als richtig erweist, jedoch nicht in beschränkten Gebieten zutrifft. (Dort haben das unterschiedliche Abklingverhalten, der Rand und die Randbedingungen größeren Einfluß und die Situation ist komplexer.)

Zum Nachweis der Existenz einer globalen Lösung werden nacheinander folgende Punkte untersucht:

A: Abklingverhalten von Lösungen des linearisierten Systems ($F \equiv 0$):

$$(2.3) \quad \|V(t)\|_q \leq c(1+t)^{-d} \|V^0\|_{N,p},$$

wobei $2 \leq q \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$; $c, d > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ sind Funktionen von q und der Raumdimension n .

Beispiele:

• In (1.4) (Wellengleichung):

$$d = \frac{n-1}{2} \left(1 - \frac{2}{q}\right), \quad N > n \left(1 - \frac{2}{q}\right) \quad \text{für} \quad 2 < q < \infty.$$

• In (1.6) (Wärmeleitungsgleichung):

$$d = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{2}{q}\right), \quad N > n \left(1 - \frac{2}{q}\right) \quad \text{für} \quad 2 < q < \infty.$$

B: Lokale Existenz und Eindeutigkeit:

$V \in C^0([0, T], W^{s,2}(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T], W^{\tilde{s},2}(\mathbb{R}^n))$, $s, \tilde{s} \in \mathbb{N}$, $T > 0$ geeignet.

C: Spezielle Energieabschätzungen für die lokale Lösung:

$$(2.4) \quad \|V(t)\|_{s,2} \leq C \|V^0\|_{s,2} \cdot \exp \left\{ C \int_0^t \|V(r)\|_{s,\infty}^2 dr \right\},$$

$t \in [0, T]$; C hängt nur von s ab, nicht von T ; b ist von s unabhängig; (dies erlaubt später den Schritt E).

D: Spezielle a priori Abschätzung:

Unter Ausnutzung von A zeigt man für hinreichend kleine Daten V^0 :

$$(2.5) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} (1+t)^{d_1} \|V(t)\|_{s_1, q_1} \leq M_0 < \infty,$$

wobei M_0 unabhängig von T ist, s_1 hinreichend groß und $q_1 = q_1(\alpha)$ geeignet gewählt sind; $d_1 = d(q_1, n)$ gemäß A.

E: C und D führen nun zu der angestrebten klassischen a priori Abschätzung:

$$\|V(t)\|_{s,2} \leq C \|V^0\|_{s,2}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

für hinreichend großes $s \in \mathbb{N}$ (und kleines V^0), C unabhängig von T .

Damit erhält man nun einen globalen Existenzsatz für Daten V^0 , die genügend klein sind in gewissen Sobolevnormen. Wie dies konkret aussieht, wird in den nachstehenden Beispielen gezeigt.

Das obige Schema findet man in knapper Form bei Klainerman & Ponce [47] (ausgeführt in [77]), Vorläufer waren etwa Matsumura [57], Matsumura & Nishida [58] und Strauss [100]. Ähnliche Resultate findet man bei Shatah [84]. In [47] werden Wellengleichungen vom Typ (1.4), durch Vergleich mit der Arbeit von Klainerman [43] auch Wärmeleitungsgleichungen vom Typ (1.6), Klein-Gordon-Gleichungen, Elastizitätsgleichungen und Schrödingergleichungen behandelt. Aber etwa auch Maxwellgleichungen lassen sich so studieren, siehe Klaus [48].

Die Resultate beschreiben gewissermaßen Stabilitätsresultate für kleine Störungen linearer Probleme; natürlich interessieren auch Fragestellungen für große Daten; hierzu gibt es, speziell für semilineare Probleme, eine umfangreiche Literatur, für Wellengleichungen sehe man etwa bei Pecher [68], von Wahl [106], Struwe [102] oder in der Übersicht von Strauss [101] nach.

Wenn auch die gerade vorgestellte Methode vielfach zum Erfolg führt, so sei doch schon bemerkt, daß noch viele offene Fragen bleiben. So hat in den meisten der bisher behandelten Fälle im Hinblick auf Punkt A der Differentialoperator A konstante Koeffizienten; hier drängen sich natürlich Fragen nach inhomogenen und anisotropen Situationen auf. Ferner erwähnen wir die Entwicklung von Singularitäten, die in Kapitel 4 kurz angesprochen werden wird.

2.2 Beispiele

2.2.1 Wellengleichungen. Wir formulieren zunächst den globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für ungedämpfte ($\gamma = 0$) Wellengleichungen vom Typ (1.1) und skizzieren dann, wie die Punkte A bis E in diesem Fall aussehen und den Beweis liefern. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß die Nichtlinearität f nicht explizit von t und x abhängt und erinnern an die Definition von α in Formel (2.2), in der das Verschwinden von F (bzw. f aus Gleichung (1.1)) im Nullpunkt charakterisiert wird. Ferner sei f glatt und hänge *nicht* von u ab, d. h.

$$(2.6) \quad f = f(u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla^2 u) = f(Du, \nabla Du).$$

Satz 2.1 ([47]). *Es sei $\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) < \frac{n-1}{2}$. Dann existieren eine natürliche Zahl $s_0 > n/2 + 1$ und eine $\delta > 0$, so daß gilt:*

Ist $V^0 \equiv (u_1, \nabla u_0) \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \cap W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, mit $s > s_0$, $p = \frac{2\alpha+2}{2\alpha+1}$, sowie $\|V^0\|_{s,2} + \|V^0\|_{s,p} < \delta$, so existiert eine eindeutige Lösung u der Cauchyschen Anfangswertaufgabe (1.1), (1.2), (2.6) mit:

$$V \equiv (u_t, \nabla u) \in C^0([0, \infty), W^{s,2}(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, \infty), W^{s-1,2}(\mathbb{R}^n)).$$

Ferner gilt dann:

$$\|V(t)\|_{2\alpha+2} = \mathcal{O}(t^{-\frac{n-1}{2} \frac{\alpha}{\alpha+1}}), \quad \|V(t)\|_2 = \mathcal{O}(1), \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Da auch noch Ableitungen von V bis zu einer gewissen Ordnung wie V in der $L^{2\alpha+2}$ -Norm abklingen, folgt aus dem Sobolevschen Einbettungssatz dieselbe Abklingrate für die L^∞ -Norm von V , welche jedoch nicht mehr optimal ist.

In dem klassischen Beispiel (1.4) mit $\alpha = 2$ geht die Bedingung $\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) < \frac{n-1}{2}$ über in die folgende Bedingung an die Raumdimension: $n > 2.5$. Das Abklingverhalten für $n = 3$ ist: $\|(u_t(t), \nabla u(t))\|_6 = \mathcal{O}(t^{-2/3})$. Wir bemerken, daß keine Aussage für die Fälle $n = 1, 2$ (schwingende Saite, Membran) gemacht wird und damit sind wir schon bei der Frage der Optimalität der Resultate, auf die wir im nächsten Abschnitt zu sprechen kommen werden.

Zum Beweis von Satz 2.1 nach dem vorgestellten Schema:

1. Das Abklingverhalten von Lösungen des linearisierten Systems, d. h. von Lösungen der linearen Wellengleichung im \mathbb{R}^n , ergibt sich wie folgt. Die wohlbekannte Energieerhaltung liefert für $V = (u_t, \nabla u)$ die Erhaltung der L^2 -Norm, d. h. in Gleichung (2.3) für $q = p = 2$ die Rate $d = 0$ bzw. für den Operator $T_t: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, $(T_t V^0)(x) = V(t, x)$, die Norm $M_1 = 1$. Aus den explizit gegebenen Darstellungsformeln im \mathbb{R}^n (etwa der Kirchhoffschen Formel im \mathbb{R}^3 , s. [9, 107]) folgt eine L^∞ -Abschätzung, nämlich für $q = \infty$, $p = 1$ zuerst für $V^0 = (u_1, 0)$:

$$(2.7) \quad \|V(t)\|_\infty \leq c(1+t)^{-(n-1)/2} \|V^0\|_{n,1},$$

d. h. $T_t: W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Norm $M_0 \leq c(1+t)^{-(n-1)/2}$; somit ergibt sich durch Interpolation für $2 \leq q \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$:

$$(2.8) \quad \|V(t)\|_q \leq C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)} \|V^0\|_{N,p},$$

($V^0 = (u_1, 0)$, $N > n\left(1 - \frac{2}{q}\right)$, $C = C(q)$.) Dies ist die gewünschte Abschätzung im Punkt A.

2. Einen lokalen Existenzsatz findet man etwa bei Klainerman [42], Kato [39] oder Hughes, Kato & Marsden [20] (ersterer zurückgehend auf Schauder [83]) oder bei Majda [56], ausführlich dargestellt in [77, 79]. Für $s > n/2 + 1$, $V^0 \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ erhält man eine lokale Lösung $V = (u_t, \nabla u)$ mit

$$V \in C^0([0, T], W^{s,2}(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T], W^{s-1,2}(\mathbb{R}^n)),$$

für ein $T = T(\|V^0\|_{s,2}) > 0$ und es kann $\|V(t)\|_\infty < 1$ für $t \in [0, T]$ erreicht werden, falls $\|V^0\|_{s,2}$ hinreichend klein ist.

3. Die spezielle Energieabschätzung in Punkt C nimmt die Gestalt

$$(2.9) \quad \|V(t)\|_{s,2} \leq C\|V^0\|_{s,2} \cdot \exp\left\{C \int_0^t \|\bar{D}V(r)\|_\infty^\alpha dr\right\}$$

an und ergibt sich durch Differentiation von (1.1), Multiplikation mit entsprechenden Ableitungen von u_t in $L^2(\mathbb{R}^n)$, trickreiches partielles Integrieren, Ausnutzung von Sobolevraumabschätzungen für Produkte von Funktionen (s. [47, 77]) und der Gronwall'schen Ungleichung.

4. Die spezielle a priori Abschätzung lautet nun

$$(2.10) \quad M_{s_1}(T) \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} (1+t)^{\frac{n-1}{2}(1-2/q)} \|V(t)\|_{s_1,q} \leq M_0 < \infty,$$

wobei V^0 hinreichend klein sein muß (s.u.), $q = 2\alpha + 2$ wie in Satz 2.1 gewählt ist und $s_1 = s_1(n, q) = s_1(n, \alpha)$ hinreichend groß ist.

Die spezielle Wahl von q ergibt sich notwendig aus der benötigten Abschätzung

$$(2.11) \quad \|f(V, \nabla V)\|_{s+N,p} \leq c\|V\|_{s_1,q}^\alpha \|V\|_{s_0,2},$$

welche für $\alpha/q + 1/2 = 1/p$ gilt (was zusammen mit $1/p + 1/q = 1$ zu $q = 2\alpha + 2$, $p = (2\alpha + 2)/(2\alpha + 1)$, wie in Satz 2.1 angegeben, führt.)

Schreibt man (1.1) als Differentialgleichung in $V = (u_t, \nabla u)$, so ergibt sich

$$V_t + AV = F(V, \nabla V) \equiv (f(V, \nabla V), 0).$$

— A erzeugt eine Halbgruppe, und wir erhalten die Darstellung

$$(2.12) \quad V(t) = e^{-tA}V^0 + \int_0^t e^{-(t-r)A}F(V, \nabla V)(r)dr.$$

Benutzt man diese und die Formel (2.11) so erhält man für $z := M_{s_1}(T)$:

$$z \leq c\delta(1 + z^\alpha e^{cz^\alpha}),$$

sofern das entstehende Integral

$$\int_0^\infty (1+r)^\alpha \frac{1-n}{2} \left(1 - \frac{2}{q}\right) dr$$

kleiner als unendlich ist, was für

$$\alpha \frac{n-1}{2} \left(1 - \frac{2}{q}\right) = \alpha \frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{n-1}{2} > 1$$

erfüllt ist. Letztere Ungleichung ist aber äquivalent zu der im Satz geforderten Bedingung

$$\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) < \frac{n-1}{2}.$$

Somit folgt für hinreichend kleines δ , d. h. hinreichend kleines V^0 :

$$M_{s_1}(T) \leq M_0.$$

(M_0 ist die erste positive Nullstelle von $\phi(z) = z\delta(1 + z^\alpha e^{cz^\alpha}) - z$.)

5. Die klassische a priori Abschätzung ergibt sich nun leicht aus Schritt 3 und 4:

$$\begin{aligned} \|V(t)\|_{s,2} &\leq C \|V^0\|_{s,2} \cdot \exp \left\{ C \int_0^t \|\bar{D}V(r)\|_\infty dr \right\} \\ &\leq C \|V^0\|_{s,2} e^{CM_{s_1}(T)} \\ &\leq K \|V^0\|_{s,2}, \end{aligned}$$

mit $K = K(s) = Ce^{CM_0}$ unabhängig von $0 \leq t \leq T$.

(Wie üblich benutzen wir die gleichen Symbole für Konstanten wie C , die sich in Ungleichungsketten ändern können.)

Somit kann man den lokalen Existenzsatz wieder anwenden und gelangt zu einer globalen Lösung. An den Abschätzungen in Schritt 4 und 5 liest man das behauptete asymptotische Verhalten der Lösung für $t \rightarrow \infty$ ab. Damit ist Satz 2.1 bewiesen.

Bemerkungen:

1. Satz 2.1 stellt eine Art Stabilitätsresultat dar, welches nahelegt, daß sich die Lösung asymptotisch linear verhält, d. h. es existiert eine Vektorfunktion V_+ , welche Lösung der (auf ein System erster Ordnung transformierten) Wellengleichung ist, so daß sich $V(t)$ asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ wie $V_+(t)$ verhält, genauer: Sei

$$V_+(t) := V(t) + \int_t^\infty e^{-(t-s)A} F(s) ds,$$

$F(s) = F(V(s), \nabla V(s))$ wie vorher. Es gilt dann:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t) - V_+(t)\|_\infty = 0.$$

Für allgemeinere Untersuchungen solchen Streuverhaltens, speziell bei semilinearen Problemen, verweisen wir auf Strauss [101].

2. Im vorhergehenden Teil war es von Bedeutung, daß die Nichtlinearität f keine Funktion von u selbst, sondern nur von Ableitungen von u war. Das hängt damit zusammen, daß man zwar über die Darstellungsformeln entsprechende L^∞ -Abschätzungen für Lösungen u des linearen Problems leicht angeben kann, sich jedoch die L^2 -Norm von u nicht so einfach abschätzen läßt. Hier sind weitere Überlegungen nötig. Li & Chen [51] setzen hierzu statt eines Fortsetzungsarguments für lokale Lösungen ein (in t) globales Iterationsverfahren an. Die nötigen a priori Abschätzungen speziell für die L^2 -Norm werden mit Hilfe geeigneter Invarianzeigenschaften des Operators $\partial_t^2 - \Delta$ und darauf aufbauender Ungleichungen vom Sobolevschen Typ (Klainerman [44] folgend, vgl. auch den nächsten Abschnitt und Kapitel 3) bewiesen. Heraus kommt ein globales Existenzresultat für kleine Daten zu $f = f(u, Du, D\nabla u)$, $f(W) = \mathcal{O}(|W|^{\alpha+1})$ für $|W| \rightarrow 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{N}$, unter der folgenden Bedingung:

$$(2.13) \quad \frac{n-1}{2} \left(1 - \frac{2}{\alpha n} \right) > \frac{1}{\alpha},$$

tabellarisch in Tabelle 1 dargestellt.

Zum Vergleich die Situation, die sich aus Satz 2.1 ergibt, in Tabelle 2.

Wir bemerken, daß sich das Resultat im Fall, daß f nicht von u abhängt, verbessern läßt zu $n \geq 4$ für $\alpha = 1$, indem man die gerade erwähnten Invarianzen benutzt, siehe den folgenden Abschnitt.

Tabelle 1 f von u abhängig

$\alpha =$	1	2, 3	4, 5, ...
$n \geq$	5	3	2

Tabelle 2 f von u unabhängig

$\alpha =$	1	2	3, 4, ...
$n \geq$	6	3	2

Für den semilinearen Fall, daß f nur von u abhängt, gibt es für sich schon eine Reihe von Untersuchungen, wir verweisen auf Pecher [69, 70], Strauss [101] und die dort zitierte Literatur.

2.2.2 Zur Optimalität der Resultate in Einzelfällen. Die große Allgemeinheit der Methode läßt erwarten, daß sie nicht in jedem Einzelfall scharfe Ergebnisse liefern wird. Zunächst einmal bemerken wir, daß keine Aussagen über

die optimale Regularität gemacht wurden, es handelt sich immer um Aussagen für hinreichend glatte Koeffizienten und Daten. Was uns jedoch hier mehr interessiert, ist die Beziehung zwischen der Raumdimension n und der Ordnung des Verschwindens der Nichtlinearität, charakterisiert durch die natürliche Zahl α . Die im vorigen Satz angegebene Beziehung zwischen n und α ist im allgemeinen nur hinreichend, nicht notwendig. So reicht einerseits für kubische Nichtlinearitäten ($\alpha = 2$) $n > 2.5$, d. h. $n \geq 3$, aus, und für quadratische Nichtlinearitäten ($\alpha = 1$) können im \mathbb{R}^3 Singularitäten auftreten, s. John [33]. Dies gilt in gleicher Weise für die Elastizitätsgleichungen (im anfänglich isotropen Fall) (vgl. Abschnitt 2.3), nach Arbeiten von Klainerman [43] (Existenz im kubischen Fall im \mathbb{R}^3) und John [34] (für den Nachweis der Entstehung von Singularitäten im quadratischen Fall). Andererseits ist die Bedingung aus Satz 2.1, die sich bei der Wellengleichung für die Raumdimension im quadratischen Fall $\alpha = 1$ ergibt, nämlich $n \geq 6$, nur hinreichend. Klainerman hat gezeigt, daß $n = 4, 5$ möglich ist, s. [44]. Hierzu werden spezielle Invarianzeigenschaften des Operators $\partial_t^2 - \Delta$ ausgenutzt (Lorentzinvarianzen insbesondere, siehe auch Kapitel 3). Dies ist nicht unmittelbar auf die nachfolgenden Systeme übertragbar, hier werden Einzelfallüberlegungen nötig.

Auch etwa bei nichtlinearen Wärmeleitungsgleichungen (1.6) liefert die sich ergebende Beziehung zwischen n und α aus dem Satz 2.1 entsprechenden Resultat (vgl. den folgenden Abschnitt) nur ein hinreichendes Kriterium. Insbesondere wenn die Nichtlinearität f nicht von u abhängt, nutzt die Methode die spezielle Gestalt der Differentialgleichung, d. h. den dissipativen Term $-\Delta u$, nicht genügend aus.

Dies unterstreicht, daß die Methode zwar in vielen Fällen gute Ergebnisse liefert, jedoch im Einzelfall weiter Betrachtungen nötig sein können, um optimale Resultate zu erhalten, was wiederum die Untersuchung jeder einzelnen Gleichung gesondert rechtfertigt.

Hierhin gehören denn auch die für spezielle Gleichungen entwickelten Methoden, die wir kurz in Kapitel 3 ansprechen werden.

2.2.3 Wärmeleitungsgleichungen. Es wird der folgende Typ von Anfangswertaufgaben betrachtet:

$$(2.14) \quad u_t - \Delta u = f(u, \nabla u, \nabla^2 u), \quad u(t = 0) = u_0,$$

wobei f glatt ist und

$$(2.15) \quad |f(W)| = \mathcal{O}(|W|^{\alpha+1}) \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{N}, |W| \rightarrow 0,$$

erfüllt.

Im Verhältnis zu den vorher betrachteten Wellengleichungen ändert sich abgesehen von kleineren beweistechnischen Modifikationen nur in Teil A das Abklingverhalten von Lösungen des linearen Systems: die L^∞ -Norm von Lösungen des linearen Problems fällt nun mit der Rate $n/2$ (statt $(n-1)/2$ wie bei der Wellengleichung) ab.

Es ergibt sich das Satz 2.1 entsprechende Resultat, nur ist „ $(n-1)/2$ “ durch „ $n/2$ “ zu ersetzen. Wir verzichten auf die explizite Notierung; statt dessen geben wir

die Tabelle 3, in der auch darüber hinausgehende Resultate verzeichnet sind (nach Zheng [113]).

Tabelle 3 Nichtlineare Wärmeleitungsgleichungen

n	1	2	3	4	5	6
α						
1	—	—	*	*	+	...
2	—	+	+	...		
3	+	+	...			
4	⋮					

Das Anfangswertproblem (2.14) besitzt nach der vorgestellten Methode globale Lösungen für kleine Daten in den Kombinationen (α, n) , in denen ein + steht; ein * gibt an, daß mit subtileren Argumenten noch die Existenz einer globalen Lösung nachgewiesen werden kann, und ein — bedeutet, daß man mit der Entwicklung von Singularitäten zu rechnen hat.

Wenn f nicht von u abhängt, sondern nur von Ableitungen von u , d. h. $f = f(\nabla u, \nabla^2 u)$, so existieren globale Lösungen für kleine Daten für alle Werte von $n, \alpha \in \mathbb{N}$.

Über nichtlineare parabolische Systeme könnte man natürlich noch viel mehr sagen, jedoch soll dieser Aufsatz sich in erster Linie mit Wellengleichungen beschäftigen. Wir erwähnen deshalb nur noch speziell für den semilinearen Fall $f = f(u)$ den Übersichtsartikel von Levine [50].

2.3 Thermoelastizitätsgleichungen

Wir greifen diese Gleichungen als spezielles Beispiel heraus, weil sie als hyperbolisch-parabolisches System mit verschiedenen Abklingraten für verschiedene Lösungsanteile und mit verschiedenen Arten von Nichtlinearitäten zunächst einmal aus dem vorher besprochenen Schema herausfallen, es sich jedoch als möglich erweist, die Methode geeignet zu modifizieren, was ihre Bedeutung unterstreicht.

Die Thermoelastizitätsgleichungen beschreiben sowohl das elastische als auch das thermische Verhalten elastischer, wärmeleitender Medien, insbesondere die Wechselwirkung zwischen Spannungen und Temperaturunterschieden. Sie bilden eine Kopplung der Elastizitätsgleichungen und der Wärmeleitungsgleichung und sind demgemäß ein hyperbolisch-parabolisches System, welches in der Tat spezielle hyperbolische als auch parabolische Effekte aufweist.

Wir untersuchen hier das nichtlineare Cauchysche Anfangswertproblem im \mathbb{R}^3 für ein homogenes und anfänglich isotropes Medium (erwähnen aber auch die eindimensionalen Resultate). Die Differentialgleichungen sind Gleichungen für den Verschiebungsvektor $U = U(t, x)$ und die Temperaturdifferenz $\theta = \theta(t, x)$ ($\equiv T_e - T_0, T_e$: absolute Temperatur, T_0 : konstante Temperatur, o.B.d.A. $T_0 = 1$). Es stellt sich die Frage, ob das Verhalten dominiert wird durch den hyperbolischen Teil – i.w. Elastizitätsgleichungen für U plus Kopplungsterme – oder durch den

parabolischen Teil – i. w. eine Wärmeleitungsgleichung für θ plus Kopplungsterme. Für die reinen Elastizitätsgleichungen ist bekannt, daß globale Lösungen für kleine Anfangswerte existieren, sofern die Nichtlinearität bis zur Ordnung 2 degeneriert, s. Klainerman [43], ferner, daß im echt nichtlinearen Fall („genuinely nonlinear“) Singularitäten entstehen können, s. John [34]. Auf der anderen Seite wissen wir aus dem vorigen Abschnitt, daß quadratische Nichtlinearitäten in drei Raumdimensionen immer noch globale Lösungen der nichtlinearen Wärmeleitungsgleichung zulassen (während im \mathbb{R}^2 mit Singularitätenentwicklung gerechnet werden muß). Daher erhebt sich die Kernfrage, ob bei den Thermoelastizitätsgleichungen der Einfluß, der durch interne Dämpfung durch die Wärmeleitung gegeben ist, stark genug ist, um das Entstehen von Singularitäten zumindest bei kleinen Anfangswerten zu verhindern.

Bevor wir Antworten darauf geben, erinnern wir an die behandelten eindimensionalen Modelle, für die letzteres gilt. Dies wurde von Kawashima & Okada, s. [41, 40], für das Anfangswertproblem gezeigt; sie bewiesen einen globalen Existenzsatz für kleine Daten allein mit der L^2 -Energimethode. Einen ähnlichen Satz bewiesen Zheng & Shen [115] mit der hier vorgestellten Methode. Ebenfalls mit einer L^2 -Energimethode bewiesen auch Hrusa & Tarabek [19] einen Existenzsatz. Darüberhinaus gibt es die am Anfang stehende Arbeit von Slemrod [97] für ein beschränktes Gebiet mit speziellen Randbedingungen, die Untersuchungen von Jiang [25] für die Halbachse, die Behandlung des Dirichletproblems für ein beschränktes Gebiet von Racke & Shibata [80] (kürzlich verbessert in [81]) und für die Halbachse von Jiang [27] sowie des Neumannproblems für ein beschränktes Gebiet von Shibata [90] und von Jiang [28], dort auch für die Halbachse. In [12] betrachtet Feireisl periodische Lösungen. Für große Daten entstehen schon in einer Raumdimension möglicherweise Singularitäten, wie Dafermos & Hsiao [10] (für spezielle Nichtlinearitäten) sowie Hrusa & Messaoudi [18] nachwiesen.

Für kleine Anfangswerte wird das eindimensionale Modell von der Wärmeleitungsgleichung dominiert, es tritt nur eine Art elastischer Wellen auf. In dem dreidimensionalen Modell ist dies nicht mehr der Fall, wir werden es mit verschiedenen Arten von Nichtlinearitäten sowie mit durch die verschiedenen Gleichungstypen bedingten unterschiedlichen asymptotischen Verhalten der Komponenten von U sowie θ zu tun haben. Darin liegt die Besonderheit des Systems, welche geeignete Darstellungen der Gleichungen und spezielle a priori Abschätzungen erfordert, die die gekoppelte Struktur des Systems sowie die verschiedenen Nichtlinearitäten berücksichtigen.

Die Gleichungen lauten

$$(2.16) \quad \partial_t^2 U_i = C_{imjk}(\nabla U, \theta) \partial_m \partial_k U_j + \tilde{C}_{im}(\nabla U, \theta) \partial_m \theta, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(2.17) \quad (\theta + T_0) a(\nabla U, \theta) \partial_t \theta = \operatorname{div} q(\nabla U, \theta, \nabla \theta) \\ + \operatorname{tr} \{ \tilde{C}_{km}(\nabla U, \theta)'_{km} \cdot (\partial_t \partial_s U_r)_{rs} \} (\theta + T_0),$$

$$(2.18) \quad U(t=0) = U^0, \quad U_t(t=0) = U^1, \quad \theta(t=0) = \theta^0.$$

Hierbei sind

$$C_{imjk}(\nabla U, \theta) = \frac{\partial^2 \psi(\nabla U, \theta)}{\partial(\partial_k U_j) \partial(\partial_m U_i)},$$

$$\tilde{C}_{im}(\nabla U, \theta) = \frac{\partial^2 \psi(\nabla U, \theta)}{\partial \theta \partial(\partial_m U_i)}, \quad a \geq a_0, \quad a_0 \text{ konstant,}$$

und $q =$ Wärmefluß gegebene glatte Funktionen (tr: Spuroperator.). ψ heißt Helmholtz-Potential und die Existenz ist gesichert.

Wir nehmen an, daß das Medium anfänglich isotrop ist, d. h. es gilt

$$(2.19) \quad C_{imjk}(0, 0) = \lambda \delta_{im} \delta_{jk} + \mu (\delta_{ij} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{ik}),$$

λ, μ : Lamé-Konstanten, δ : Kronecker-Delta. Ferner gelte

$$\tilde{C}_{im}(0, 0) = -\gamma \delta_{im}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\frac{\partial q^i(0, 0, 0)}{\partial(\partial_m \theta)} = \kappa \delta_{im}, \quad \kappa > 0 \text{ (Wärmeleitfähigkeitskoeffizient).}$$

Dann können wir die Thermoelastizitätsgleichungen umschreiben zu:

$$(2.20) \quad U_{tt} - ((2\mu + \lambda) \nabla \nabla' - \mu \nabla \times \nabla \times) U + \gamma \nabla \theta$$

$$= q_1(\nabla U, \nabla^2 U, \theta, \nabla \theta) + K_1(\nabla U, \nabla^2 U, \theta, \nabla \theta),$$

$$(2.21) \quad \theta_t - \kappa \Delta \theta + \gamma \nabla' U_t = \theta \Delta \theta + q_2(\nabla U, \nabla^2 U, \nabla U_t, \theta, \nabla \theta, \nabla^2 \theta)$$

$$+ K_2(\nabla U, \nabla^2 U, \nabla U_t, \theta, \nabla \theta, \nabla^2 \theta),$$

$$(2.22) \quad U(t=0) = U^0, \quad U_t(t=0) = U^1, \quad \theta(t=0) = \theta^0,$$

wobei q_j quadratisch und K_j kubisch in der Nähe des Nullpunktes ist, $j=1, 2$. Man beachte den speziellen quadratischen Term $\theta \Delta \theta$, der von dem Term $(\theta + T_0)$ in (2.17) herrührt. (O.B.d.A. ist die Konstante vor diesem Term als gleich 1 angenommen.) (U^0, U^1, θ^0 sind die gegebenen Anfangswerte.)

Die Gleichungen (2.20)–(2.22) können nun mit einer geeigneten Modifizierung der allgemeinen Methode behandelt werden. Notation: $W^{m,p} \equiv W^{m,p}(\mathbb{R}^3)$. Wir haben bewiesen:

Satz 2.2 ([72]). *Falls $q_j = 0, j=1, 2$, so gibt es eine natürliche Zahl $s > 3$ und ein $\delta > 0$, so daß für $(\nabla U^0, U^1, \theta^0) \in W^{s,2} \cap W^{s,1}$, mit Norm kleiner als δ , es eine eindeutige Lösung (U, θ) von (2.16)–(2.18) gibt mit*

$$(\nabla U, U_t) \in C^1([0, \infty), W^{s-1,2}) \cap C^0([0, \infty), W^{s,2}),$$

$$\theta \in C^1([0, \infty), W^{s-2,2}) \cap C^0([0, \infty), W^{s,2}).$$

Ferner gilt

$$\|(\nabla U, U_t, \theta)(t)\|_\infty = \mathcal{O}(t^{-5/9}), \quad \|(\nabla U, U_t, \theta)(t)\|_{s,2} = \mathcal{O}(1) \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Bemerkungen: Die Annahmen über q_j sind Annahmen über das zugrundeliegende Medium. Die Annahmen über die Anfangswerte können verschärft

werden zu: „Es gibt natürliche Zahlen s_0, s_2, s_4, s_6 , so daß für $(\nabla U^0, U^1, \theta^0) \in \mathcal{W}^{s_0, 2} \cap \mathcal{W}^{s_2, 9/7} \cap \mathcal{W}^{s_4, 13/11} \cap \mathcal{W}^{s_6, 26/15} \cap \mathcal{W}^{s_6, 18/11}$, mit Norm kleiner als δ , eine globale Lösung existiert“.

Zum Beweis:

1. Abschätzungen für das linearisierte System: Man zerlegt U mit $U = U^s + U^{p0}$ gemäß der orthogonalen Zerlegung

$$(2.23) \quad L^2 = D_0 + \overline{\nabla W^{1,2}} \quad (D_0: \text{Felder mit Divergenz Null}).$$

Dies führt zu einer Wellengleichung für U^s (nicht gekoppelt mit $\theta^!$), so daß hierfür das asymptotische Verhalten bekannt ist. U^{p0} und θ sind nun in einer Weise gekoppelt, die es erlaubt, das asymptotische Verhalten mit Hilfe der Fourier-Transformation einfach zu beschreiben. Man erhält ein Abklingverhalten, welches dem von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung entspricht – auch im Hinblick auf bessere Abklingraten für die Ableitungen.

2. Lokale Existenz: Dies ergibt sich aus den Resultaten in [31, 40]. Dabei transformieren wir auf ein System erster Ordnung, i.w. $V = (\nabla U, U_t, \theta)$. (Direkte Untersuchungen für das System zweiter Ordnung wurden inzwischen von Mukoyama [65] vorgenommen.)

3. Die folgende spezielle Energieabschätzung wird für eine lokale Lösung bewiesen:

$$\|V(t)\|_{s,2} \leq C \|V(0)\|_{s,2} \cdot \exp \left\{ C \int_0^t (\|(\nabla V^1, V^3, V_t^3, \nabla V)\|_\infty^2 + \|(\nabla V^3, \nabla^2 V^3)\|_\infty)(r) dr \right\},$$

$t \in [0, T]$, wobei C nur von s , nicht von T abhängt.

Bemerkung: Man beachte die verschiedenen Exponenten.

4. Die nachstehende spezielle a priori Abschätzung wird gezeigt:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \{ (1+t)^{5/9} \|(\nabla V^1, V^2)(t)\|_{s_1, 9/2} + (1+t)^{27/26} (\|V^3(t)\|_{s_3, 13/2} + \|\nabla^2 V^3(t)\|_{s_5, 26/11} + \|\nabla^2 V^3(t)\|_{s_5, 18/7}) \} < \infty,$$

sofern $V(0)$ hinreichend klein ist.

Damit können wir wie vorher in Schritt E die klassische a priori Abschätzung beweisen und eine lokale Lösung fortsetzen. \square

Durch Ausnutzung des stärkeren Abklingverhaltens von θ und seinen Ableitungen wie auch der speziellen Gestalt der Nichtlinearitäten konnten wir in einer Arbeit mit G. Ponce das Resultat verbessern zu:

Satz 2.3 ([71]). (O.B.d.A. sei $K_j = 0$.) Enthält $q_j, j = 1, 2$, keine quadratischen Terme, die nur aus (den Ableitungen von) Komponenten von U bestehen, so existiert eine globale Lösung für kleine Daten.

Die Annahme, daß es keine „rein hyperbolischen“ quadratischen Terme in U gibt, kann man im allgemeinen nicht fallenlassen, man hat mit der Entwicklung von

Singularitäten zu rechnen, was wir in [73] am Beispiel ebener Wellen nachwiesen. (Die Idee dort war, die Zerlegung (2.23) auf ein nichtlineares Modell zu übertragen und für U^s ein rein hyperbolisches nichtlineares System zu erhalten.)

Wir bemerken, daß auch hier wie für die vorigen betrachteten Systeme gilt, daß nun zwar das grundsätzliche Verhalten verstanden ist, daß aber auch für das Anfangswertproblem noch viele interessante offene Fragen bleiben, etwa hier die nach anisotropen und inhomogenen Medien.

Für dreidimensionale Modelle sind bisher lokale Existenzresultate für Anfangsrandwertaufgaben, auch im inhomogenen und anisotropen Fall, für beschränkte und für unbeschränkte Gebiete bewiesen worden, s. Chrzęszczyk [8] und Jiang & Racke [29] für die Dirichletsche Randwertaufgabe sowie Shibata [89] für die Neumannsche Randwertaufgabe.

3 Andere Methoden

Wie wir gesehen haben, liefert die besprochene klassische Methode – im folgenden Energiemethode genannt – mit ihrer großen Klasse von Anwendungen nicht immer optimale Ergebnisse. Für einzelne Gleichungen erwiesen sich spezielle Ansätze als schlagkräftiger. Bevor wir dazu Stellung nehmen, möchten wir als erstes eine – mittlerweile auch als klassisch zu bezeichnende – Methode erwähnen, die, was zum Beispiel allgemeine Resultate für Wellengleichungen betrifft, historisch vor der Energiemethode rangiert.

1. *Das Nash-Moser-Hörmander-Schema.* Erste globale Existenzsätze für nichtlineare Wellengleichungen, später auch für andere Evolutionsgleichungen, wurden von Klainerman 1980 bzw. 1982 in den Arbeiten [42, 43] bewiesen. Dabei wurde mit einem Iterationsverfahren für Lösungen der linearisierten Gleichungen in $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ gearbeitet statt lokale Lösungen des nichtlinearen Problems fortzusetzen. Grob gesprochen bedeutet dies für

$$u_{tt} - \Delta u = f(Du, \nabla Du), \quad u(t=0) = u_0, \quad u_t(t=0) = u_1,$$

daß zunächst aus einem gegebenen u^n die Funktion \tilde{u}^{n+1} aus der natürlichen Iteration

$$(3.1) \quad \tilde{u}_{tt}^{n+1} - \Delta \tilde{u}^{n+1} = f(Du^n, \nabla Du^n), \quad \tilde{u}^{n+1}(t=0) = u_0, \quad \tilde{u}_t^{n+1}(t=0) = u_1$$

studiert wird. Dabei sind die Abklingeigenschaften von Lösungen des linearen Problems auch wieder von Bedeutung. Auftretende Regularitätsverluste, die speziell durch das Auftreten höchster Ableitungen in der Nichtlinearität entstehen, werden mit einer Art des „Nash-Moser-Hörmander-Schemas“ behandelt; dabei wird ein Glättungsoperator $S = S_n$ eingeführt und als nächste Iterierte wird nun

$$u^{n+1} := S_n \tilde{u}^{n+1}$$

betrachtet. u^{n+1} genügt der Differentialgleichung in (3.1) nicht mehr exakt, der durch S_n verursachte Fehler hat jedoch nur quadratischen Charakter (vgl. die Newton-Iteration), die durch S_n erreichte Glättung kompensiert die erwähnten Regularitätsverluste bei der einfachen Iteration (3.1).

Diese Methode ist technisch aufwendig, sie wurde auch schon für Außenraumprobleme angewandt (von Shibata & Tsutsumi in [91]), sie liefert jedoch weniger scharfe Regularitäts- und Abklingresultate (vgl. [42, 43, 47, 93]).

Bemerkungen: Zur Namensgebung dieser Methode bemerken wir, daß der kritische Regularitätsverlust, der bei einer naiven Iteration auftritt, Gegenstücke hat bei den sogenannten „Problemen kleiner Nenner“ in der Himmelsmechanik sowie bei isometrischen Einbettungen in der Differentialgeometrie. Es gibt hier hauptsächlich zwei Wege, diese Schwierigkeiten zu überwinden. Der erste wurde von Nash in seiner Arbeit [66] über isometrische Einbettungen entwickelt und von Hörmander weiterentwickelt, etwa für Probleme aus der Geodäsie, s. [16]. Der zweite basiert auf einer Modifikation der Newton-Iteration, siehe etwa die Arbeit [64] von Moser.

Es sei hinzugefügt, daß die wesentlichen Probleme, für die sie nach unserem Wissen bisher benutzt wurde, im großen ganzen mit anderen, einfacheren Methoden behandelt werden konnten, so die Anfangswertaufgaben wie besprochen in [47] (statt [42, 43]), Hörmanders geodätisches Problem von Witsch in [111] mit der Legendre-Transformation, Außenraumprobleme mit der Energiemethode von Shibata & Tsutsumi in [93], und selbst das zu Beginn stehende klassische Nash-Resultat wurde von Günther in [15] anders bewiesen. Aber sicher gibt es noch andere Anwendungsgebiete für diese originelle Methode.

2. *Die Methode invarianter Normen.* Diese von Klainerman entwickelte Methode benutzt die Invarianz von $\partial_\tau^2 - \Delta$ unter der Poincarégruppe (Translationen, homogene Lorentztransformationen) und Ungleichungen vom Sobolevtyp in Normen, die aus den Erzeugern dieser Gruppe gebildet werden – in Analogie zu den üblichen $W^{s,2}$ -Normen, die aus den Operatoren ∂_j , $j=1, \dots, n$, gebildet werden, s. [44, 45].

Dies erlaubt zum einen wie schon erwähnt für quadratische Nichtlinearitäten ($\alpha = 1$) bei der Wellengleichung die Raumdimensionen $n \geq 4$ zuzulassen. Die Invarianzeigenschaften erlauben es, an Stelle der früher benutzten L^∞ - L^1 -Abschätzung für Lösungen der linearen Wellengleichung, bei der die L^∞ -Norm der Lösung mit der Rate $(n-1)/2$ gegen gewisse L^1 -Normen der Anfangswerte (und einiger Ableitungen) abgeschätzt wurde, siehe Formel (2.7), nun eine entsprechende L^∞ - L^2 -Abschätzung zu beweisen, was dann an die Stelle der Beziehung

$$\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) < \frac{n-1}{2} \text{ die schärfere Beziehung } \frac{1}{\alpha} < \frac{n-1}{2} \text{ setzt.}$$

Zum anderen erweist sich im Fall $\alpha = 1$, $n = 3$ eine sogenannte „Nullbedingung“ an die Nichtlinearität als hinreichend für die Existenz globaler kleiner Lösungen.

Die *Nullbedingung* lautet für $f(W) = q(W) + \mathcal{O}(|W|^3)$, $W = (u, Du, D^2u)$, $q(W) = \mathcal{O}(|W|^2)$ für $|W| \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial^2 q(W)}{\partial(\partial_i u) \partial(\partial_j u)} \xi_i \xi_j = 0,$$

$$\frac{\partial^2 q(W)}{\partial(\partial_i u) \partial(\partial_j \partial_k u)} \xi_i \xi_j \xi_k = 0$$

$$\frac{\partial^2 q(W)}{\partial(\partial_i \partial_j u) \partial(\partial_k \partial_l u)} \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l = 0,$$

für alle $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^4$ mit $\xi_0^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ und beliebige W , wobei jeweils über alle auftretenden Indizes von 0 bis 3 zu summieren ist.

Ein typisches Beispiel, bei dem die Nullbedingung erfüllt ist, ist die Nichtlinearität $f = |\nabla u|^2 - u_i^2$.

Zur Formulierung der Nullbedingung verweisen wir auch auf John [36] und Strauss [101]. Diese Bedingung wurde auch von Christodoulou in [7] als hinreichende Bedingung im Fall quadratischer Nichtlinearitäten (wie in Satz 2.1) im \mathbb{R}^3 erkannt.

3. Die Methode konformer Abbildungen. Die Wellengleichung ist auch konform invariant. Christodoulou benutzt eine spezielle konforme Abbildung, die $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ auf eine beschränkte Menge in $\mathbb{R} \times S^n$ ($S^n \equiv$ Einheitskugel im \mathbb{R}^{n+1}) abbildet, in diesem Sinne also „konform kompaktifiziert“ (vgl. die Notizen bei Strauss [101]). Somit wird das globale Existenzproblem auf ein lokales zurückgeführt, welches bis zur möglichen Grenze gelöst werden muß. – Diese Methode wurde vorher auch schon auf Yang-Mills-Gleichungen angewandt, s. [7].

4. Die Methode der Normalformen. Um den Fall einer quadratischen Nichtlinearität f im \mathbb{R}^3 für die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_t^2 - \Delta + m)u = f(u, Du, \nabla Du), \quad m > 0,$$

zu behandeln, führt Shatah eine Variablentransformation durch, die im wesentlichen die quadratische Nichtlinearität in eine kubische überführt, welche nach leichten Modifikationen mit der Energiemethode behandelt werden kann, s. [85]. Die Namensgebung ist dabei verknüpft mit der Poincaréschen Theorie der Normalformen, welche bei gewöhnlichen Differentialgleichungen eine Rolle spielt. Schematisch kann man den Ansatz so verstehen, daß zur Lösung der Gleichung

$$v_t + Av = f(v),$$

wobei f von einer gewissen Ordnung in $v = 0$ verschwindet, eine Variablentransformation

$$w = v + h(v)$$

durchgeführt wird, wobei h so zu bestimmen ist, daß w schließlich einer Gleichung der Art

$$w_t + Aw = g(w)$$

genügt, wobei jetzt g von höherer Ordnung als f (in $w = 0$) verschwindet. Dies läuft natürlich auf eine Differentialgleichung für h hinaus, welche von Shatah für die Klein-Gordon-Gleichung behandelt werden kann.

Wir bemerken, daß die letzten drei Methoden ausführlicher in dem Buch von Strauss [101] besprochen werden.

Natürlich gibt es noch andere Methoden und Hilfsmittel für spezielle Systeme mit besonderen Problemen, man vergleiche etwa die Literatur zu den Navier-Stokes-Gleichungen in dem DMV-Übersichtsartikel [4].

4 Entwicklung von Singularitäten

Es ist ein typisch hyperbolisches Phänomen, daß Lösungen hyperbolischer Gleichungen oder Systeme, – und wir erinnern daran, daß wir immer von ungedämpften hyperbolischen Problemen sprechen, sofern wir es nicht ausdrücklich anders betonen –, Singularitäten entwickeln können, daß es zu einem sogenannten „blow-up“ kommt, d. h. im allgemeinen, daß in endlicher Zeit Ableitungen der (lokal existierenden) Lösungen singularär werden, also im Betrag unendlich anwachsen. Nur hinreichend kleine Daten können eventuell globale Lösungen garantieren und auch das nur unter Bedingungen an die Nichtlinearität und die Raumdimension, wie in den vorigen Kapiteln beschrieben wurde.

Beginnen möchten wir diese Übersicht mit der Erinnerung an den einfachen Fall von Gleichungen erster Ordnung in einer Raumdimension, bei dem klar wird, daß Glattheit und Kleinheit der Daten i. a. nicht die Existenz globaler, glatter Lösungen sichern können.

Betrachten wir die Gleichungen

$$(4.1) \quad u_t + a(u)u_x = 0, \quad u(t=0) = u_0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

so folgt die implizite Lösungsdarstellung

$$(4.2) \quad u(t, x) = u_0(x - ta(u(t, x))),$$

und man sieht, daß u_t und u_x in endlicher Zeit unendlich werden, falls etwa a' positiv und u'_0 negative Werte annimmt, unabhängig von der Glattheit und der Kleinheit der Anfangswerte u_0 . Mit

$$u_0(x) = \varepsilon\phi(x), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \varepsilon > 0,$$

gilt für die Länge des maximalen Existenzintervalles $T = T(\varepsilon)$

$$(4.3) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon T(\varepsilon) > 0,$$

falls $a'(0) \neq 0$ (d. h. im sogenannten „echt nichtlinearen Fall“), während im Fall, daß $a'(0) = 0$ gilt, aber a nicht konstant ist in einer Umgebung von $u = 0$, die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 T(\varepsilon) > 0,$$

gilt, siehe John [37].

John [30] und auch Liu [54] zeigten ein entsprechendes Resultat für Systeme erster Ordnung in einer Raumdimension, was auch hilfreich ist für das

Studium ebener Wellen in höheren Raumdimensionen, angewandt etwa auf elastische Wellen in [30, 73].

Für Systeme von m Erhaltungsgesetzen auch in höheren Raumdimensionen der Form

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(t=0) = u_0,$$

wobei $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ und mit $B_i(u) \equiv$ Matrix mit Koeffizienten $\frac{\partial f_{ij}}{\partial u_k}(u)$ gelte entweder 1. oder 2., wobei

1. $n = 1$, $B_1(u)$ hat nur reelle Eigenwerte mit Eigenvektoren, die den ganzen Raum aufspannen;

2. $B_i(u) = A_0^{-1}(u)A_i(u)$ mit symmetrischen Matrizen $A_i(u)$, $i = 1, \dots, n$, $A_0(u)$ positiv definit;

zeigt Sideris [96] (unter gewissen weiteren Annahmen, die der echten Nichtlinearitätsbedingung $a'(0) \neq 0$ für das System (4.1) entsprechen), daß für *große* Daten keine globalen glatten Lösungen existieren.

Nun zu den Gleichungen, die hier im Vordergrund stehen. Wir betrachten wieder

$$u_{tt} - \Delta u = f(Du, \nabla Du).$$

John hat radialsymmetrische Lösungen studiert und in [35] für die Gleichung

$$(4.4) \quad u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$$

im \mathbb{R}^3 nachgewiesen, daß, mit $c(0) = 1$ und sofern $c'(0) \neq 0$ (o.B.d.A. > 0) ist, immer Singularitäten in den Ableitungen von u entstehen werden.

$$u(t=0) = \varepsilon\phi, \quad u_t(t=0) = \varepsilon\psi$$

impliziert

$$(4.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log T(\varepsilon) \leq \frac{1}{c'(0)K},$$

($K \geq 0$ ergibt sich aus den Daten.) Es gilt sogar die Gleichheit in (4.5).

Auch für den folgenden quadratischen Fall

$$(4.6) \quad u_{tt} - \Delta u = 2u_t u_{tt}$$

wies John [33] die Entstehung von Singularitäten nach, genauer: Es gibt keine globale C^2 -Lösung (zu glatten Daten mit kompaktem Träger), falls

$$\int_{\mathbb{R}^3} [u_t(0, x) - u_t^2(0, x)] dx > 0$$

ist.

Auf den speziellen Fall der Nichtlinearitäten vom Typ $f = f(u)$ wollen wir nicht näher eingehen, sondern auf Glassey [13], Strauss [101] und John [37] verweisen. Wir bemerken nur, daß im \mathbb{R}^3 die quadratische Nichtlinearität $f(u) = u^2$

zur Entwicklung von Singularitäten führt; allgemeiner kann man versuchen für $f(u) = u^p$ den kritischen Exponenten p in Abhängigkeit von der Raumdimension n zu charakterisieren, siehe auch John [32], Pecher [69].

Nachdem wir nun gesehen haben, daß sich im allgemeinen Singularitäten entwickeln können, daß z. B. quadratische Nichtlinearitäten im \mathbb{R}^n für $n \geq 4$ globale Lösungen für kleine Anfangswerte zulassen, im \mathbb{R}^3 jedoch Singularitäten verursachen können, stellt sich in den Fällen, in denen nicht notwendigerweise eine globale Lösung existiert, die Frage nach der Lebensdauer einer glatten Lösung in Abhängigkeit von den Anfangswerten. Für den eindimensionalen Fall haben wir schon in (4.3) das Resultat angegeben, ebenso für die spezielle Gleichung (4.4) in (4.5).

Für die Gleichungen

$$u_{tt} - \Delta u = f(Du, \nabla Du),$$

$$u(t=0) = \varepsilon\phi, \quad u_t(t=0) = \varepsilon\psi, \quad (\varepsilon > 0),$$

$$|f(W)| = \mathcal{O}(|W|^{\alpha+1}), \quad \text{für } |W| \rightarrow 0 \quad \text{und ein } \alpha \in \mathbb{N},$$

fassen wir die Resultate über Abschätzungen der Länge des maximalen Existenzintervalls einer glatten Lösung $T = T(\varepsilon)$ in der folgenden Tabelle 4 zusammen, siehe Li & Yu [52], Hörmander [17], John [37]. (Den Fall $f = f(u)$ betrachten wir nicht, siehe [52, 37] und die dort zitierte Literatur.) Der Nachweis der behaupteten Beziehungen in der Tabelle benutzt u. a. auch die verallgemeinerten Sobolevabschätzungen, die die Invarianz von $\partial_t^2 - \Delta$ unter gewissen Transformationen nahelegten, vgl. Abschnitt 2.2.1–2 und Kapitel 3 sowie John & Klainerman [38]. Die Resultate im Fall nicht globaler Existenz bezeichnet man (zumindest im exponentiellen Fall, s. u.) als Resultate über *fast globale Existenz*.

In der Tabelle 4 bezeichnet A eine Konstante, die nur von ϕ, ψ und f abhängt, und die Aussagen sind für hinreichend kleine ε zu lesen.

Tabelle 4 (Fast) globale Existenzresultate

α	n	Untere Schranken für $T(\varepsilon)$
1	1	$A\varepsilon^{-1}$
1	2	$A\varepsilon^{-2}$
1	3	$\exp(A\varepsilon^{-1})$
2	2	$\exp(A\varepsilon^{-2})$
1	≥ 4	Globale Lösungen
2	≥ 3	
3	≥ 2	

Wir beschließen dieses Kapitel mit dem ebenso naheliegenden wie wichtigen Hinweis auf den Umstand, daß die vorstehenden Resultate es wünschenswert machen, schwache Lösungen, die global existieren können, zu studieren. Man beachte, daß wir immer davon gesprochen haben, daß bei der Entwicklung von

Singularitäten gewisse Ableitungen singularär werden, daß aber z. B. eine globale stetige Lösung existieren könnte. Hier sind Untersuchungen erforderlich, insbesondere auch die Betrachtung der Ausbreitung von Unstetigkeiten – Stoßwellen, vgl. auch die Bücher von Smoller [98] und Majda [56].

Eine ausführliche Übersicht über nichtlineare Wellengleichungen im Ganzraumfall findet sich bei John [37], Strauss [101] und Hörmander [17].

5 Außenraumaufgaben

Für Außenraumprobleme, also Anfangsrandwertprobleme, bei denen x in einem Außengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ variiert, d. h., Ω ist ein Gebiet, welches ein nichtleeres, beschränktes Komplement besitzt (für $n \geq 2$, für $n = 1: \Omega = (0, \infty)$), gibt es weit weniger Resultate als für die bisher besprochenen Anfangswertprobleme.

Orientiert man sich methodisch an Kapitel 2, so bereitet schon der erste Schritt – der Nachweis von Abklingraten für Lösungen des linearisierten Problems – Schwierigkeiten. Hilfsmittel wie die Fourier-Transformation oder explizite Darstellungsformeln stehen im Außenraum nicht zur Verfügung. Hier setzen nun unsere Überlegungen in Abschnitt 5.1 an. Wir werden dann in Abschnitt 5.2 sehen, daß man die Asymptotik des linearen Problems wieder zum Beweis von globalen Existenzsätzen für nichtlineare Probleme benutzen kann.

In diesem Kapitel werden wir meist von gedämpften Problemen sprechen, also von (1.1) mit $\gamma = 1$ oder von parabolischen Gleichungen höherer Ordnung. Der Rand des Gebietes Ω wird immer als hinreichend glatt vorausgesetzt. Als typische Beispiele behandeln wir dann:

Eine nichtlineare parabolische Gleichung vierter Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} u_t + \Delta^2 u &= f(u, \nabla u, \nabla^2 u, \nabla^3 u, \nabla^4 u) & \text{in } [0, \infty) \times \Omega, \\ u = \Delta u &= 0 & \text{in } [0, \infty) \times \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \text{(NPG)}$$

Eine inhomogene gedämpfte Wellengleichung:

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} - \partial a_{ik}(x) \partial_k u + u_t &= h(u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla^2 u) & \text{in } [0, \infty) \times \Omega, \\ u &= 0 & \text{in } [0, \infty) \times \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \text{(NGWG)}$$

(Für weitere Annahmen siehe Abschnitt 5.1.2).

Zu nichtlinearen Systemen in mehr als einer Raumdimension gibt es Resultate für spezielle Gleichungen, z. B. für die Gleichungen wärmeleitender, kompressibler, viskoser Fluide im \mathbb{R}^3 von Matsumura & Nishida [59] oder für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen von Iwashita [23], der zunächst auch L^p - L^q -Abschätzungen für das lineare Problem beweist. Für allgemeine voll nichtlineare Gleichungen wie (NGWG) gibt es Resultate von Shibata [88] (dort mit der Nash-Moser-Hörmander-Methode) für konstante Koeffizienten a_{ik} , siehe auch die Referenzen dort.

In den folgenden Abschnitten geben wir noch weitere Literatur an.

5.1 Abklingraten bei linearen Problemen

5.1.1 Laplace-Transformation. Der Ansatz von Vainberg besteht darin, bezüglich der Zeit t die Laplace-Transformation anzuwenden, die Resolvente der entstehenden stationären Gleichungen genau zu untersuchen und die gewonnenen Kenntnisse in der Rücktransformation auszunutzen. Für die Gleichungen

$$(5.1) \quad u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times \Omega$$

$$(5.2) \quad u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times \partial\Omega$$

$$(5.3) \quad u(t=0) = 0, \quad u_t(t=0) = u_1 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

Ω ein Außengebiet im \mathbb{R}^n , heißt dies folgendes.

Sei

$$(5.4) \quad \hat{u}(k, \cdot) := \int_0^{\infty} e^{-ikt} u(t, \cdot) dt.$$

Dann ist

$$(5.5) \quad (\Delta + k^2)\hat{u}(k, \cdot) = u_1(\cdot),$$

also

$$(5.6) \quad \hat{u}(k, x) = (R(k^2)u_1)(x),$$

wobei $R(k^2)$ die Resolvente $(\Delta + k^2)^{-1}$ ist, welche zunächst nur für Werte k^2 , die nicht im Spektrum $\sigma = [0, \infty)$ liegen, erklärt ist. Wir erhalten dann eine Darstellung von u aus der Laplace-Rücktransformation:

$$(5.7) \quad u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - ic}^{\infty - ic} e^{ikt} \hat{u}(k, x) dk, \quad c > 0 \text{ beliebig,}$$

also

$$(5.8) \quad u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - ic}^{\infty - ic} e^{ikt} (R(k^2)u_1)(x) dk,$$

und das gewünschte asymptotische Verhalten (zeitliches Abklingen mit einer gewissen Rate) von u ergibt sich hieraus, falls man $R(k^2)$ genügend genau kennt. Ein Element des Vorgehens ist danach, den Integrationsweg in (5.8) geeignet zu verschieben.

Vainberg [104, 105] zeigte, daß es eine holomorphe Erweiterung von $R(k^2)$ auf $k^2 \in [0, \infty)$ gibt und $R(k^2)$ als Lösungsoperator von $L_0^2(\Omega)$ (\equiv Menge der Funktionen aus $L^2(\Omega)$ mit kompaktem Träger im \mathbb{R}^n) nach $H_{loc}^2(\Omega)$ (\equiv Menge der Funktionen u , die lokal in $W^{2,2}(\Omega)$ liegen und für die $e^{-|\cdot|} \nabla^\beta u(\cdot)$ aus $L^2(\Omega)$ ist für $|\beta| \leq 2$) folgendermaßen abschätzbar ist:

1. $|k| \rightarrow \infty$:

$$\|R(k^2)\| \sim |k|^{-1}, \quad (\text{Operatornorm in } L_{loc}^2)$$

sofern das Gebiet Ω „non-trapping“ ist (zur Definition s. u.).

2. $|k| \rightarrow 0$: $R(k^2)$ kann in eine Laurentreihe entwickelt werden.

Es gibt sich ein Abfall für die lokale L^2 -Norm von Du . (Lokaler Energieabfall mit einer Rate, die dimensionsabhängig ist; in ungeraden Dimensionen ($n \geq 3$) exponentiell, in geraden Dimensionen polynomial, s. Shibata & Tsutsumi [93].)

Diese Kenntnis, zusammen mit einer Abschneidetechnik und der Kenntnis der L^p - L^q -Abschätzungen für das Cauchyproblem (s. Kapitel 2) erlauben es, Abklingraten für den Außenraum zu beweisen, s. [93].

Wir bemerken, daß die minimale Abklingrate durch den Teil 2. „ $|k| \rightarrow 0$ “ bestimmt wird, in dem die Bedingung „ Ω non-trapping“ nicht nötig ist.

Zur Definition von non-trapping: Ein Außengebiet Ω heißt *non-trapping*, falls es für alle $a > 0$ ein $T > 0$ gibt, welches nur von a und Ω abhängt, so daß für beliebige $u_1 \in L^2_a(\Omega)$ ($\equiv \{f \in L^2(\Omega) \mid \text{Träger von } f \text{ liegt in } \bar{\Omega}_a \equiv \Omega \cap K(0, a)\}$) gilt: Die Lösung von (5.1)–(5.3) gehört zu $C^\infty([T, \infty) \times \bar{\Omega}_a)$.

Die Konvexität von $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ impliziert, daß Ω non-trapping ist, s. Melrose [60], Yamamoto [112]. Zur weiteren geometrischen Interpretation von non-trapping („Alle Strahlen, die auf $\partial\Omega$ treffen und sich gemäß den Gesetzen der geometrischen Optik fortpflanzen, entfernen sich von $\partial\Omega$ in endlicher Zeit; kein Strahl wird eingefangen („trapped“), auch nicht asymptotisch“) vgl. auch Morawetz, Ralston & Strauss [63].

Der Vorteil der obigen Methode liegt in der großen Allgemeinheit der Anwendbarkeit, so z. B. auf ungedämpfte wie auch auf gedämpfte Probleme, siehe etwa Shibata & Tsutsumi [93] für die ungedämpfte Wellengleichung, bei der f nicht von u abhängt und Chen [6] für den Fall, daß f von u abhängt, oder Jiang [26] für gedämpfte Plattengleichungen, auch auf Probleme mit variablen Koeffizienten oder auf parabolische Probleme, ähnlich bei Eidus [11]. Auch für Schrödingergleichungen wurde dieser Zugang benutzt, s. Tsutsumi [103] sowie für nichtselbstadjungierte Probleme, s. [80]. Wir bemerken, daß bei gedämpften Problemen die Voraussetzung „ Ω non-trapping“ nicht benötigt wird.

Der Nachteil liegt in der Komplexität der benötigten Argumente und dem damit verbundenen großen Aufwand zum Studium von $R(k^2)$. Zumeist ergibt sich auch nur ein lokaler Energieabfall, nicht direkt L^p - L^q -Abschätzungen für den Außenraum.

Es sei darauf hingewiesen, daß wir hier typische Außenraumprobleme studieren; daneben sind auch andere unbeschränkte Gebiete von Interesse, etwa Gebiete mit unbeschränktem Rand wie Halbebenen, Wellenleiter oder unbeschränkte Zylinder, letztere beide also Gebiete vom Typ

$$\Omega = \mathbb{R}^{n-m} \times \Omega', \quad \Omega' \subset \mathbb{R}^m \text{ beschränkt,} \quad 1 \leq m < n.$$

(Zum Fall $m = n$, d. h. für beschränkte Gebiete vgl. die Schlußbemerkungen in Kapitel 6.)

Hier tauchen schon in der linearen Theorie neue Phänomene auf, etwa die Ungültigkeit des *Prinzips der Grenzamplitude* in speziellen Fällen, s. Werner [108], welches Aussagen über das asymptotische Verhalten von Lösungen linearer Wellengleichungen bei zeitharmonischer Erregung für $t \rightarrow \infty$ trifft und in Außengebieten ($n \geq 2$) immer gültig ist.

Typisch sind auch die hier betrachteten Randbedingungen, nämlich Dirichletsche. Bei linearen und nichtlinearen Wellengleichungen stellt sich in vielen Fällen heraus, daß man entsprechende Resultate auch für Neumannsche Randbedingungen erhält, vgl. etwa Leis [49] für lineare Probleme und Shibata & Tsutsumi [91, 92] für nichtlineare Probleme. Dies ist nicht selbstverständlich; man beachte etwa, daß bei den Elastizitätsgleichungen im homogenen, isotropen Fall für ein Außengebiet im \mathbb{R}^3 bei Dirichletschen Randbedingungen die lokale Energie (lokale L^2 -Normen von Ableitungen des Verschiebungsvektors) exponentiell abfällt (analog zur Situation bei Wellengleichungen), bei Neumannschen Randbedingungen jedoch nicht mehr mit einer Rate (im Gegensatz zur Situation bei Wellengleichungen). Bei der gemischten Robinson Randbedingung (Vorgabe einer Kombination des Verschiebungsvektors und von Normalableitungen des Verschiebungsvektors) wächst die lokale Energie sogar an, s. Ikehata & Nakamura [22]. Diese Probleme erfordern also neue Ansätze.

Wir stellen nun eine einfache Methode vor, die verallgemeinerte Eigenfunktionsentwicklungen benutzt und für gedämpfte Probleme bei sternförmigen, beschränkten Hindernissen $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ die gewünschten Ergebnisse liefert.

5.1.2 Verallgemeinerte Eigenfunktionen. Um das asymptotische Verhalten in Außengebieten zu beschreiben, erinnern wir an die elementare Tatsache, daß man die Abklingraten für Lösungen der linearen Wärmeleitungsgleichung

$$(5.9) \quad u_t - \Delta u = 0,$$

zum Anfangswert u_0 in \mathbb{R}^n leicht erhalten kann, indem man die Fourier-Transformation benutzt, somit wegen der Spektraleigenschaft der Fourier-Transformation aus (5.9) eine gewöhnliche Differentialgleichung macht und dann ausnutzt, daß der Kern der Fourier-Transformation, nämlich $(2\pi)^{-n/2} e^{ix\xi}$, gleichmäßig beschränkt ist bezüglich x und ξ . Ist etwa $\hat{u}(t, \xi)$ die Fourier-Transformierte bezüglich x mit Parameter $\xi \in \mathbb{R}^n$, so folgt

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi),$$

somit also

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) d\xi,$$

woraus sich das L^1 - L^∞ -Verhalten mit der Abklingrate $t^{-n/2}$ sofort ergibt (vgl. Abschnitt 2.2.3). Dies führt uns zu folgendem Ansatz.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet (wir werden i. a. $n \geq 3$ annehmen) mit glattem Rand $\partial\Omega$.

$$\text{Sei } A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega),$$

$$D(A) := \{v \in W_0^{1,2}(\Omega) \mid \partial_i a_{ik}(\cdot) \partial_k v \in L^2(\Omega)\},$$

$Av(\cdot) = -\partial_i a_{ik}(\cdot) \partial_k v(\cdot)$, wobei $a_{ik} = a_{ki}$ eine reellwertige, glatte Funktion von $x \in \bar{\Omega}$ ist, $a_{ik}(x) = \delta_{ik}$ (Kronecker-Symbol) für $|x| > r_0 > 0$ für ein festes $r_0 > 0$ mit $\partial\Omega \subset K(0, r_0)$. (Wir verwenden die Einsteinsche Summationskonvention, $i, k = 1, \dots, n$.) Für $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ nehmen wir an: $a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq a_0 |\xi|^2$, $a_0 > 0$ fest.

Es ist bekannt, daß es eine verallgemeinerte Eigenfunktionsentwicklung (auch verallgemeinerte Fourier-Transformation genannt) $\mathcal{F}_+ : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt; \mathcal{F}_+ ist unitär und besitzt die Eigenschaft

$$(5.10) \quad \mathcal{F}_+(\varphi(A)w)(\xi) = \varphi(|\xi|^2)(\mathcal{F}_+w)(\xi)$$

für Funktionen $\varphi(A)$ von A , die durch den Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren A (s. Wilcox [109], Leis [49]) definiert sind. Darüberhinaus gilt:

$$(\mathcal{F}_+w)(\xi) = \int_{\Omega} \overline{\psi(x, \xi)} w(x) dx \equiv \hat{w}(\xi),$$

und die Inverse ist gegeben durch

$$(\mathcal{F}_+^* \hat{w})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x, \xi) \hat{w}(\xi) d\xi.$$

Der Integralkern ψ ist eindeutig durch die folgenden Bedingungen (5.11)–(5.15) bestimmt. Sei $j \in C^\infty(\mathbb{R})$, $j \geq 0$, $j(r) = 0$ für $r \leq r_1$, $j(r) = (2\pi)^{-n/2}$ für $r \geq r_1 + 1$, $r_1 > r_0$ fest.

$$(5.11) \quad \psi(x, \xi) = j(|x|)e^{ix\xi} + \psi'(x, \xi),$$

$$(5.12) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n: \quad (1 - j(|\cdot|))\psi'(\cdot, \xi) \in D(A),$$

$$(5.13) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n: \quad j(|\cdot|)\psi'(\cdot, \xi) \in W^{2,2}(\Omega_r) \text{ für alle } r > 0,$$

$$(5.14) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n: \quad (A - |\xi|^2)\psi'(\cdot, \xi) = (\Delta + |\xi|^2)(j(|\cdot|)e^{i\cdot\xi}),$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $\psi'(\cdot, \xi)$ genügt der Ausstrahlungsbedingung:

$$(5.15) \quad \frac{\partial \psi'(x, \xi)}{\partial |x|} - i|\xi| \psi'(x, \xi) = \mathcal{O}(|x|^{-(n+1)/2}),$$

$$\psi'(x, \xi) = \mathcal{O}(|x|^{-(n-1)/2}), \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

Bemerkungen:

1. Es gibt auch eine verallgemeinerte Fourier-Transformation \mathcal{F}_- , die einer „Einstrahlungsbedingung“ entspricht (man ersetze $-i$ in (5.15) durch $+i$).

2. Da ψ' eine Lösung einer Helmholtzgleichung in einem Außenraum ist, bei dem $|\xi|^2$ im Spektrum von A liegt, ist A in (5.14) als formales Differentialsymbol zu lesen; es ist

$$A\psi(\cdot, \xi) = |\xi|^2 \psi(\cdot, \xi),$$

d. h. $\psi(\cdot, \xi)$ ist eine verallgemeinerte Eigenfunktion.

3. Um die (eindeutige) Existenz von ψ (im wesentlichen von ψ') nachzuweisen, kann man das *Prinzip der Grenzabsorption* benutzen, s. [49, 109], welches allgemeiner für eine größere Klasse von Operatoren wie etwa Elastizitätsoperatoren oder Maxwell-Operatoren gültig ist.

4. Eine solche verallgemeinerte Eigenfunktionsentwicklung wurde zuerst von Ikebe [21] für den Schrödinger-Operator im \mathbb{R}^3 geliefert. Später wurde dies dann erweitert auf höhere Raumdimensionen und auf Störungen des Laplace-

Operators, auch für Außengebiete, siehe etwa die Arbeiten von Alsholm & Schmidt [3], Majda [55], Shenk [86], Shenk & Thoe [87] oder auch Mochizuki [61].

Mit Hinblick auf (5.10) und die Bemerkungen zur Wärmeleitungsgleichung zu Beginn dieses Abschnittes sind wir nun an punktwisen Abschätzungen für ψ bzw. ψ' interessiert.

Satz 5.1 ([62, 82]). *Sei $A = -\Delta$, d. h. $a_{ik}(x) = \delta_{ik}$ für alle $x \in \bar{\Omega}$, sei $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ sternförmig, $n \geq 3$. Dann gilt*

$$(5.16) \quad \exists m \in \mathbb{N} \exists c > 0 \forall x \in \bar{\Omega} \forall \xi \in \mathbb{R}^n : |\psi(x, \xi)| \leq c \cdot (1 + |\xi|)^m.$$

Dies folgt im wesentlichen aus den Ergebnissen in der Arbeit von Morawetz & Ludwig [62], siehe [82] für die notwendigen Überlegungen am Rand von Ω .

Zum Beweis: Es reicht zu zeigen: Für eine Lösung w von $\Delta w + \lambda^2 w = g$, $w = 0$ auf $\partial\Omega$, $\lambda > 0$, g mit kompaktem Träger, gilt:

$$\forall n \geq 3 \exists \tau, c > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall x \in \Omega, \lambda > 0 : |w(x, \lambda)| \leq c(1 + \lambda)^m (\|\cdot\|^\tau g\|_\infty + \|\cdot\| g\|_2).$$

Dies ergibt sich wie folgt. Zunächst gibt die Darstellungformel

$$w(x, \lambda) = \int_{\Omega} f_n(|x - y|)g(y)dy - \int_{\partial\Omega} f_n(|x - y|) \frac{\partial w}{\partial \vec{n}}(y)dy,$$

wobei f_n die Fundamentallösung zu $\Delta + \lambda^2$ im \mathbb{R}^n ist und \vec{n} die Normale an $\partial\Omega$ bezeichnet, welche in Ω hinein gerichtet ist.

Der erste Term läßt sich leicht durch Kenntnis der Asymptotik der Fundamentallösung (Hankelfunktionen, s. Leis [49]) abschätzen, der Randterm wird behandelbar durch die Gültigkeit der Abschätzung

$$\beta \left\| \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|\cdot\|_2,$$

welche mit einer positiven Konstante c in sternförmigen Gebieten (genauer: $x \cdot \vec{n} \geq \beta > 0$ für $x \in \partial\Omega$) richtig ist. Dies wird in [62] mit Hilfe geschickter Differential(un)gleichungen bewiesen. □

Bemerkung: Für $n=1$ kann man die Fourier-Sinus-Transformation verwenden, $n=2$ bereitet noch Schwierigkeiten wegen der Singularität der Fundamentallösung f_2 .

Unter Ausnutzung von (5.10) geht der Faktor $(1 + |\xi|)^m$, der in (5.16) auftritt, schließlich nur in eine Differentiation der Anfangswerte über.

Für A mit variablen Koeffizienten erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 5.2 ([5, 75]). *Sei $A = -\partial_i a_{ik}(\cdot) \partial_k$ wie oben definiert gegeben, sei $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ sternförmig, ferner gelte*

$$(5.17) \quad \min_{x \in \bar{\Omega}} (2 \min_{|\xi|=1} a_{ik}(x) \xi_i \xi_k - \max_{i,k=1,2,3} |\nabla a_{ik}(x) \cdot x|) > 0.$$

Dann gilt:

$$(5.18) \quad \forall r > 0 \exists c > 0 \forall x \in \bar{\Omega}_r, \forall \xi \in \mathbb{R}^3 : |\psi(x, \xi)| \leq c \cdot (1 + |\xi|)^2.$$

Der Beweis benutzt die Abschätzungen für $|\xi| \rightarrow \infty$ („Hochfrequenzasymptotik“) aus der Arbeit von Bloom [5], in der das Vorgehen von Morawetz & Ludwig [62] – insbesondere die Differential(un)gleichungen – auf diesen Fall übertragen wird sowie das Prinzip der Grenzabsorption (vgl. Leis [49]) für die „Niederfrequenzasymptotik“ $|\xi| \rightarrow \infty$, s. [75].

Bemerkungen: Der lokale Charakter der Abschätzung für ψ bezüglich x im letzten Satz erlaubt es dennoch, globale Abschätzungen für Lösungen des zeitabhängigen Problems (NGWG) zu beweisen. Es ist hinreichend, zuerst eine Abklingrate für die lokale Energie zu beweisen, welche groß genug ist (um es über Abschneidetechniken mit dem Cauchyproblem kombinieren zu können, hier: $A = -\Delta$ im \mathbb{R}^3 , gemäß dem Vorgehen in Shibata & Tsutsumi [93]).

Das in Abschnitt 5.1.2 erwähnte Vorgehen von Vainberg [104, 105] oder auch Eidus [11] sollte bei den hier studierten gedämpften Problemen die Beseitigung der Voraussetzung der Sternförmigkeit erlauben.

Wir erhalten nun mit Hilfe der beiden letzten Sätze leicht Abklingraten für die linearisierten Probleme zu (NPG) und (NGWG), z. B. erhalten wir für Lösungen von

$$u_t + \Delta^2 u = 0, \quad u = \Delta u = 0 \text{ am Rand}, \quad u(t = 0) = u_0$$

eine L^∞ -Abklingrate der Ordnung $t^{-n/4}$. Dies folgt sofort aus der Darstellung

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x, \xi) e^{-t|\xi|^4} \hat{u}_0(\xi) d\xi$$

und Satz 5.1. Wir werden im nächsten Abschnitt direkt die zugehörigen nichtlinearen Probleme betrachten.

Zum Abschluß dieses Abschnittes über verallgemeinerte Eigenfunktionsentwicklungen bemerken wir noch, daß dies (zuerst) auf Systeme angewandt wurde, nämlich auf ein spezielles Anfangsrandwertproblem aus der Thermoelastizitätstheorie in [74] und daß solche verallgemeinerten Fourier-Transformationen auch für andere Systeme als die hier betrachteten vorliegen. Dort gälte es dann, a priori Abschätzungen für die entsprechenden Integralkerne zu beweisen. Auch ist die Anwendung auf ungedämpfte Probleme von Interesse.

5.2 Globale Existenzsätze bei nichtlinearen Problemen

Mit der im vorigen Abschnitt gewonnenen Möglichkeit, Abschätzungen für Lösungen der linearen Probleme zu gewinnen, sind wir nun in der Lage, uns den entsprechenden nichtlinearen Aufgaben zuzuwenden. Zunächst zu der schon erwähnten parabolischen Gleichung vierter Ordnung (NPG):

$$\left. \begin{aligned} u_t + \Delta^2 u &= f(u, \nabla u, \nabla^2 u, \nabla^3 u, \nabla^4 u) \quad \text{in } [0, \infty) \times \Omega, \\ u = \Delta u &= 0 \quad \text{in } [0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(t = 0) &= u_0 \quad \text{in } \Omega, \\ f \text{ glatt, } f(w) &= \mathcal{O}(|w|^2) \quad \text{in der Umgebung von } w = 0, \\ \mathbb{R}^n \setminus \Omega &\text{ ist sternförmig.} \end{aligned} \right\} \quad \text{(NPG)}$$

In einer Arbeit mit Zheng [82] haben wir zunächst, wie im vorigen Abschnitt diskutiert, das asymptotische Verhalten von Lösungen des linearisierten Problems analysiert; hierbei reichen Kenntnisse über das L^1 - L^2 (sic!)-Abklingverhalten für das parabolische Problem aus. Dann folgten die Schritte „lokale Existenz“ und „a priori Abschätzungen“ mit all den normalen Schwierigkeiten, wie sie bei dem Vorliegen von Rändern auftreten, aber auch überwunden werden können. Dies führte zu folgendem Satz.

Satz 5.3 ([82]). *Sei $n > 4$, $m \geq [n/2] + 1$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für $u_0 \in W^{4m+2,2}(\Omega) \cap W^{4m,1}(\Omega)$ mit Norm kleiner als δ , welches den üblichen Kompatibilitätsbedingungen genügt, es eine eindeutige Lösung u von (NPG) gibt mit*

$$u \in \bigcap_{k=0}^m C^{m-k}([0, \infty), W^{4k,2}(\Omega)).$$

Ferner gilt:

$$\|u(t)\|_\infty + \|u(t)\|_2 = \mathcal{O}(t^{-n/8}) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Dieser Satz entspricht den Resultaten in Kapitel 2, d. h. globale Existenz für kleine Daten unter Kleinheitsbedingungen an die Nichtlinearität im Nullpunkt, und das asymptotische Verhalten für $t \rightarrow \infty$ wird beschrieben.

Als weitere Anwendung, speziell von Satz 5.2, behandeln wir nun noch die inhomogene gedämpfte Wellengleichung (NGWG).

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} - \partial_i a_{ik} \partial_k u + u_t &= h(u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla^2 u) \quad \text{in } [0, \infty) \times \Omega, \\ u = 0 &\quad \text{in } [0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(t = 0) &= u_0, \quad u_t(t = 0) = u_1 \quad \text{in } \Omega, \\ h \text{ glatt, } h(w) &= \mathcal{O}(|w|^3) \quad \text{in einer Umgebung von } w = 0, \\ \mathbb{R}^3 \setminus \Omega &\text{ ist sternförmig,} \\ a_{ik} &\text{ wie im vorigen Abschnitt angegeben, es gelte (5.17).} \end{aligned} \right\} \quad \text{(NGWG)}$$

Dann konnten wir den nachstehenden Satz zeigen.

Satz 5.4 ([76]). *Es gibt eine natürliche Zahl $L_0 \geq 9$ und ein $\delta > 0$, so daß gilt: Ist $(u_0, u_1) \in W^{L,2}(\Omega) \cap W^{L,6/5}(\Omega)$, mit $L > L_0$, L gerade, mit Norm kleiner als δ , welches den üblichen Kompatibilitätsbedingungen (der Ordnung $L + 10$) genügt, so existiert eine eindeutige Lösung u von (NGWG) mit*

$$u \in \left\{ \bigcap_{j=0}^{L-1} C^j([0, \infty), W^{L-j,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)) \right\} \cap C^1([0, \infty), L^2(\Omega)).$$

Ferner gilt:

$$\|(u(t))\|_{\infty} + \|u(t)\|_6 = \mathcal{O}(t^{-1}) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

(Die Voraussetzung, daß L gerade ist, ist unwesentlich und diente nur der Vereinfachung der Darstellung.)

Der Beweis von Satz 5.4 benutzt Satz 5.2 zur Herleitung von L^p - L^q -Abschätzungen für das lineare Problem und Energieabschätzungen, wie sie für das Cauchyproblem und Anfangsrandwertprobleme schon früher studiert wurden, s. Shibata [88] für den Fall $A = -\Delta$, dort mit der Nash-Moser-Hörmander-Methode, dabei ohne die Einschränkung, daß $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ sternförmig ist. (Einen lokalen Existenzsatz findet man z. B. bei Shibata & Tsutsumi in [94].)

Auch die Methode von Vainberg greift wohl für dieses Problem mit variablen Koeffizienten, s. Iwashita & Shibata [24] für Systeme zweiter Ordnung.

6 Abschließende Bemerkungen

Es wurden neben Wellengleichungen eine Reihe von Differentialgleichungen verschiedener Naturen angesprochen und dabei gemeinsame Strukturen und Ansatzpunkte zur Gewinnung globaler Existenzsätze gefunden, sowohl für Anfangswertprobleme als auch für Anfangsrandwertprobleme in Außengebieten. Es liegt nahe, die Konzepte auf weitere Gleichungen anzuwenden, etwa auf nichtlineare Plattgleichungen vom Typ

$$u_{tt} + \Delta^2 u = f(u, Du, \dots)$$

mit zugehörigen Anfangswerten, was gerade in ersten Ansätzen untersucht wurde, s. [110].

Ebenso ist der Übergang von anfänglich isotropen elastischen Medien – wie bei den Thermoelastizitätsgleichungen studiert – zu kubischen ein nächster Schritt, der hier zu allgemeinen anisotropen Medien führen soll; schon in diesem Fall jedoch ergeben sich interessante Schwierigkeiten bei der Analyse des Abklingverhaltens von Lösungen des linearen Problems, s. [99] für die Elastizitätsgleichungen. Für spezielle anisotrope Medien in der Kristalloptik (Maxwellgleichungen) gibt es Resultate von Liess [53].

Auch kann man an allgemeinere inhomogene Probleme (von x und t abhängige Koeffizienten des Differentialoperators im Hauptteil) denken als etwa die in Kapitel 5 betrachteten.

Immer steht neben der Frage nach Existenzkriterien die nach der Charakterisierung von Singularitätsentwicklungen, man beachte etwa, daß für die unbeschränkte Membran (Gleichung (1.4) im \mathbb{R}^2) kein Ergebnis vorliegt.

Wir erwähnten schon, daß es natürlich ist, schwache Lösungen zu studieren, woran sich eine Regularitätstheorie anschliesse; dabei sind Gebiete mit Ecken sicher eine harte Nuß für diese nichtlinearen Probleme; die bisher erwähnten Außenraumprobleme gingen von glatten Rändern aus.

Ohne Frage gebührt numerischen Untersuchungen, etwa bei der Stoßwellenanalyse – der Ausbreitung von Unstetigkeiten bei hyperbolischen Systemen –

großer Raum aufgrund der konkreten Anwendungen etwa bei den Eulergleichungen der Gasdynamik, aber auch, weil sich Hinweise für die weitere theoretisch-analytische Untersuchung ergeben können.

In diesem Aufsatz haben wir stets von unbeschränkten Gebieten gesprochen, welche gegenüber beschränkten Gebieten einige Schwierigkeiten aufweisen (besonders deutlich etwa bei gedämpften Problemen, vgl. etwa die Wärmeleitung: exponentieller Abfall in beschränkten Gebieten, polynomialer Abfall in Außengebieten), jedoch scheint bei ungedämpften hyperbolischen Problemen der umgekehrte Effekt einzutreten. So fehlt zunächst ein Satz 2.1 auch nur annähernd entsprechender Existenzsatz. Das ist zunächst methodisch begründet, denn Lösungen des linearen Problems zu (ungedämpften) Wellengleichungen in beschränkten Gebieten, etwa zu Dirichletschen oder Neumannschen Randbedingungen, fallen nicht mit einer Rate ab, sondern oszillieren bekanntermaßen. Insbesondere hat der Rand einen Einfluß, der den hyperbolischen Charakter zutage treten läßt, man hat i. a. mit Singularitäten zu rechnen; für eindimensionale Modelle der schwingenden Saite siehe Klainerman & Majda [46], höherdimensionale „Gegenbeispiele“ zu Satz 2.1 findet man bei Zheng & Chen [114], aufbauend auf Glassey [13] (s. a. Payne & Sattinger [67]) und haben wir auch in [78] angegeben; sie unterstreichen, daß man a priori immer mit Singularitätenentwicklung zu rechnen hat, unabhängig von der Kleinheit und der Glattheit der Daten, insbesondere nützt auch das Verschwinden der Nichtlinearität von noch so hoher Ordnung im Nullpunkt i. a. nichts. Erst bei dissipativen Randbedingungen kann man globale Lösungen für kleine Daten erwarten, siehe Greenberg & Li [14] oder Alber & Cooper [2] für den \mathbb{R}^1 sowie Shibata & Zheng [95] für den \mathbb{R}^n , $n \geq 3$.

Hier gibt es also auch noch viel zu tun.

Literatur

- [1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. New York et al.: Academic Press 1975
- [2] Alber, H.-D.; Cooper, J.: Quasilinear hyperbolic 2×2 systems with a free, damping boundary condition. *Crelles J.* **406** (1990) 10–43
- [3] Alsholm, P.; Schmidt, G.: Spectral and scattering theory for Schrödinger operators. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **40** (1971) 281–311
- [4] Bemelmans, J.; Hildebrandt, S.; von Wahl, W.: Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung. In: Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV; Hrsg.: G. Fischer et al. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn 1990, 149–230
- [5] Bloom, C. O.: Estimates for solutions of reduced hyperbolic equations of the second order with a large parameter. *J. Math. Anal. Appl.* **44** (1973) 310–332
- [6] Chen, Y.: Initial boundary-value problems of nonlinear wave equations in an exterior domain. *J. London Math. Soc.* **40** (1989) 519–534
- [7] Christodoulou, S.: Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data. *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986) 267–282
- [8] Chrzęszczyk, A.: Some existence results in dynamical thermoelasticity. Part I. Nonlinear case. *Arch. Mech.* **39** (1987) 605–617
- [9] Courant, R.; Hilbert, D.: *Methods of mathematical physics II*. New York et al.: J. Wiley & Sons 1989
- [10] Dafermos, C. M.; Hsiao, L.: Development of singularities in solutions of the equations of nonlinear thermoelasticity. *Quart. Appl. Math.* **44** (1986) 463–474

- [11] Eidus, D.: Asymptotic expansions of solutions of linear parabolic equations as $t \rightarrow \infty$. *J. Math. Anal. Appl.* **130** (1988) 155–170
- [12] Feireisl, E.: Forced vibrations in one-dimensional nonlinear thermoelasticity as a local coercive-like problem. *Comment. Math. Univ. Carolinae* **31** (1990) 243–255
- [13] Glassey, R. T.: Blow-up theorems for nonlinear wave equations. *Math. Z.* **132** (1973) 183–203
- [14] Greenberg, J. M.; Li, T.-T.: The effect of boundary damping for the quasilinear wave equation. *J. Differential Equations* **52** (1984) 66–75
- [15] Günther, M.: Zum Einbettungssatz von J. Nash. *Math. Nachr.* **144** (1989) 165–187
- [16] Hörmander, L.: The boundary problems of physical geodesy. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **62** (1976) 1–52
- [17] –: Non-linear hyperbolic differential equations. Lectures 1986–1987. University of Lund (1988)
- [18] Hrusa, W. J.; Messaoudi, S. A.: On formation of singularities in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **111** (1990) 135–151
- [19] Hrusa, W. J.; Tarabek, M. A.: On smooth solutions of the Cauchy problem in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. *Quart. Appl. Math.* **47** (1989) 631–644
- [20] Hughes, T. J. R.; Kato, T.; Marsden, J. E.: Well-posed quasi-linear second-order hyperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **63** (1976/77) 273–294
- [21] Ikebe, T.: Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **5** (1960) 1–34
- [22] Ikehata, M.; Nakamura, G.: Decaying and nondecaying properties of the local energy of an elastic wave outside an obstacle. *Japan J. Appl. Math.* **6** (1989) 83–95
- [23] Iwashita, H.: L_q - L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces. *Math. Ann.* **285** (1989) 265–288
- [24] Iwashita, H.; Shibata, Y.: On the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problems. *Glasnik Mat.* **23** (1988) 291–313
- [25] Jiang, S.: Global existence of smooth solutions in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **115A** (1990) 257–274
- [26] –: Local energy decay for the damped plate equation in exterior domains. Erscheint in: *Quart. Appl. Math.*
- [27] –: Global solutions of the Dirichlet problem in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. SFB 256 Preprint Nr. 138, Universität Bonn (1990)
- [28] –: Global solutions of the Neumann problem in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. Erscheint in: *Nonlinear Analysis, T.M.A.*
- [29] Jiang, S.; Racke, R.: One some quasilinear hyperbolic-parabolic initial boundary value problems. *Math. Meth. Appl. Sci.* **12** (1990) 315–339
- [30] John, F.: Formation of singularities in one-dimensional wave propagation. *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974) 377–405
- [31] –: Finite amplitude waves in a homogeneous isotropic elastic solid. *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977) 421–446
- [32] –: Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions. *Manuscripta math.* **28** (1979) 235–268
- [33] –: Blow-up for quasilinear wave equations in three space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981) 29–51
- [34] –: Formation of singularities in elastic waves. *Lec. Notes Phys.* **195** (1984), 194–210
- [35] –: Blow-up of radial solutions of $u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$ in three space dimensions. *Mat. Apl. Comp.* **4** (1985) 3–18
- [36] –: Existence for large times of strict solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions for small initial data. *Comm. Pure Appl. Math.* **40** (1987) 79–109
- [37] –: Nonlinear wave equations, formation of singularities. University Lecture Series 2. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. 1990
- [38] John, F.; Klainerman, S.: Almost global existence to nonlinear wave equations in three space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984) 443–455
- [39] Kato, T.: The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **58** (1975) 181–205

- [40] Kawashima, S.: Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics. Thesis, Kyoto University 1983
- [41] Kawashima, S.; Okada, M.: Smooth global solutions for the one-dimensional equations in magnetohydrodynamics. Proc. Jap. Acad., Ser. A, **53** (1982) 384–387
- [42] Klainerman, S.; Global existence for nonlinear wave equations. Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980) 43–101
- [43] –: Long-time behavior of solutions to nonlinear evolution equations. Arch. Rat. Mech. Anal. **78** (1982) 73–98
- [44] –: Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation. Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985) 321–332
- [45] –: The null condition and global existence to nonlinear wave equations. Lec. Appl. Math. **23** (1986) 293–326
- [46] Klainerman, S.; Majda, A.: Formation of singularities for wave equations including the nonlinear vibrating string. Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980) 241–263
- [47] Klainerman, S.; Ponce, G.: Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations. Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983) 133–141
- [48] Klaus, F.: Globale klassische Lösungen für das Cauchy-Problem divergenzfreier, quasilinearer Maxwell-Gleichungen mit kubischer Nichtlinearität für kleine Daten. Diplomarbeit, Bonn 1989
- [49] Leis, R.: Initial boundary value problems in mathematical physics. Stuttgart: B. G. Teubner Verlag; Chichester et al.: John Wiley & Sons 1986
- [50] Levine, H. A.: The role of critical exponents in blowup theorems. SIAM Review **32** (1990) 262–288
- [51] Li, T.-T.; Chen, Y.: Initial value problems for nonlinear wave equations. Comm. PDE **13** (1988) 383–422
- [52] Li, T.-T.; Yu, X.: Durée de vie des solutions régulières pour les équations des ondes non linéaires. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **309** (1989) 469–472
- [53] Liess, O.: Global existence for the nonlinear equations of crystal optics. Journées “Équations aux dérivés partielles” (Saint-Jean-de-Monts (1989)), Exp. No. V, 11 pp., Palaiseau: École Polytech. 1989
- [54] Liu, T.-P.: Development of singularities in the nonlinear waves for quasi-linear hyperbolic partial differential equations. J. Differential Equations **33** (1979) 92–111
- [55] Majda, A.: Outgoing solutions for perturbations of $-A$ with applications to spectral and scattering theory. J. Differential Equations **16** (1974) 515–547
- [56] –: Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables. Appl. Math. Sci. 53. New York et al.: Springer-Verlag 1984
- [57] Matsumura, A.: Initial value problems for some quasilinear partial differential equations in mathematical physics. Thesis, Kyoto University 1980
- [58] Matsumura, A.; Nishida, T.: The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids. Proc. Jap. Acad., Ser. A, **55** (1979) 337–341
- [59] –: Initial boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat conductive fluids. Comm. Math. Physics **89** (1983) 445–464
- [60] Melrose, E. B.: Singularities and energy decay in acoustical scattering. Duke Math. J. **46** (1979) 43–59
- [61] Mochizuki, K.: Spectral and scattering theory for symmetric hyperbolic systems in an exterior domain. Publ. RIMS, Kyoto University **5** (1969) 219–258
- [62] Morawetz, C. S.; Ludwig, D.: An inequality for the reduced wave operator and the justification of geometrical optics. Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968) 187–203
- [63] Morawetz, C. S.; Ralston, J.; Strauss, W.: Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles. Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977) 447–508
- [64] Moser, J.: A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **20** (1966) 265–315 und 499–535
- [65] Mukoyama, R.: On the Cauchy problem for quasilinear hyperbolic-parabolic coupled systems in higher dimensional spaces. Tsukuba J. Math. **13** (1989) 363–386
- [66] Nash, J.: The embedding problem for Riemannian manifolds. Ann. Math. **63** (1956) 20–63
- [67] Payne, L. E.; Sattinger, D. H.: Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. Israel J. Math. **22** (1975) 273–303

- [68] Pecher, H.: L^p -Abschätzungen und klassische Lösungen für nichtlineare Wellengleichungen. I. Math. Z. **150** (1976) 159–183
- [69] –: Scattering for semilinear wave equations with small data in three space dimensions. Math. Z. **198** (1988) 277–289
- [70] –: Global smooth solutions to a class of semilinear wave equations with strong nonlinearities. Manuscripta math. **69** (1990) 71–92
- [71] Ponce, G.; Racke, R.: Global existence of small solutions to the initial value problem for nonlinear thermoelasticity. J. Differential. Equations **87** (1990) 70–83
- [72] Racke, R.: On the Cauchy problem in nonlinear 3-d-thermoelasticity. Math. Z. **203** (1990) 649–682
- [73] –: Blow-up in nonlinear three-dimensional thermoelasticity. Math. Math. Appl. Sci. **12** (1990) 267–273
- [74] –: L^p - L^q -estimates for solutions to the equations of linear thermoelasticity in exterior domains. Asymptotic Analysis **3** (1990) 105–132
- [75] –: Decay rates for solutions of damped systems and generalized Fourier transforms. Crelles J. **412** (1990) 1–19
- [76] –: Non-homogeneous, non-linear damped wave equations in unbounded domains. Math. Meth. Appl. Sci. **13** (1990) 481–491
- [77] –: Anfangswertprobleme bei nichtlinearen Evolutionsgleichungen. SFB 256 Vorlesungsreihe Nr. 13, Universität Bonn 1990
- [78] –: Remarks on the formation of singularities for nonlinear wave equations in bounded domains. SFB 256 Preprint Nr. 153, Universität Bonn 1991
- [79] –: Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems. Erscheint in der Reihe „Aspects of Mathematics“. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn
- [80] Racke, R.; Shibata, Y.: Global smooth solutions and asymptotic stability in one-dimensional thermoelasticity. Erscheint in: Arch. Rat. Mech. Anal.
- [81] Racke, R.; Shibata, Y.; Zheng, S.: Global solvability and exponential stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. SFB 256 Preprint Nr. 182, Universität Bonn 1991
- [82] Racke, R.; Zheng, S.: Global existence of solutions to a fully nonlinear fourth-order parabolic equation in exterior domains. Erscheint in: Nonlinear Analysis, T.M.A.
- [83] Schauder, J.: Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen. Fund. Math. **24** (1935) 213–246
- [84] Shatah, J.: Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations. J. Differential Equations **46** (1982) 409–425
- [85] –: Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations. Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985) 685–696
- [86] Shenk, N. A.: Eigenfunction expansions and scattering theory for the wave equation in an exterior region. Arch. Rat. Mech. Anal. **21** (1966) 120–150
- [87] Shenk, N. A.; Thoe, D.: Eigenfunction expansions and scattering theory for perturbations of $-\Delta$. J. Math. Anal. Appl. **36** (1971) 313–351
- [88] Shibata, Y.: On the global existence of classical solutions of second order fully nonlinear hyperbolic equations with first order dissipation in the exterior domain. Tsukuba J. Math. **7** (1983) 1–68
- [89] –: On a local existence theorem for some quasilinear hyperbolic-parabolic coupled systems with Neumann type boundary condition. Manuskript 1989
- [90] –: Neumann problem for one-dimensional nonlinear thermoelasticity. SFB 256 Preprint Nr. 145, Universität Bonn 1990
- [91] Shibata, Y.; Tsutsumi, Y.: Global existence theorem of nonlinear wave equations in the exterior domain. In: Recent Topics in Nonlinear PDE; Hrsg.: M. Mimura, T. Nishida. North Holland Math. Studies 98; Lec. Notes in Num. Appl. Anal. **6** (1983) 155–195
- [92] –: On a global existence theorem of Neumann problem for some quasi-linear hyperbolic equations. In: Recent Topics in Nonlinear PDE II; Hrsg.: K. Masuda, M. Mimura. North Holland Math. Studies 128; Lec Notes in Num. Appl. Anal. **8** (1985) 175–228
- [93] –: On a global existence theorem of small amplitude solutions for nonlinear wave equations in an exterior domain. Math. Z. **191** (1986) 165–199

- [94] -: Local existence of solution for the initial boundary value problem of fully nonlinear wave equation. *Nonlinear Analysis*, T.M.A. **11** (1987) 335–365
- [95] Shibata, Y.; Zheng, S.: On some nonlinear hyperbolic systems with damping boundary conditions. Erscheint in: *Nonlinear Analysis*, T.M.A.
- [96] Sideris, T. C.: Formation of singularities in solutions to nonlinear hyperbolic equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **86** (1984) 369–381
- [97] Slemrod, M.: Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional non-linear thermoelasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **76** (1981) 97–133
- [98] Smoller, J.: *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Grundlehren d. math. Wissenschaften 258. New York et al.: Springer-Verlag 1983
- [99] Stoth, M.: Globale klassische Lösungen der quasilinearen Elastizitätsgleichungen für kubisch elastische Medien im \mathbb{R}^2 . SFB 256 Preprint Nr. 157, Universität Bonn 1991
- [100] Strauss, W.: Nonlinear scattering theory at low energy. *J. Funct. Anal.* **41** (1981) 110–133
- [101] -: *Nonlinear wave equations*. CBMS Series Nr. 73. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. (1989)
- [102] Struwe, M.: Globally regular solutions to the u^5 Klein-Gordon equation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **15** (1988) 495–513
- [103] Tsutsumi, Y.: Local energy decay of solutions to the free Schrödinger equation in exterior domains. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math.* **31** (1984) 97–108
- [104] Vainberg, B. R.: On the short wave asymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as $t \rightarrow \infty$ of solutions of non-stationary problems. *Russian Math. Surveys* **30** (1975) 1–58
- [105] -: *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*. New York et al.: Gordon and Breach Science Publishers 1989
- [106] Wahl, W. von: Klassische Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen im Großen. *Math. Z.* **112** (1969) 241–279
- [107] -: L^p -decay rates for homogeneous wave-equations. *Math. Z.* **120** (1971) 93–106
- [108] Werner, P.: Resonanzphänomene in akustischen und elektromagnetischen Wellenleitern. *Z. angew. Math. Mech.* **67** (1987) T43–T54
- [109] Wilcox, C. H.: Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains. *Lec. Notes Math.* **442** (1975)
- [110] Willems, F.: Globale Existenz von Lösungen zum Anfangswertproblem der nichtlinearen Plattengleichung. SFB 256 Preprint Nr. 176, Universität Bonn 1991
- [111] Witsch, K.-J.: On a free boundary value problem of physical geodesy, II (existence). *Math. Meth. Appl. Sci.* **8** (1986) 1–22
- [112] Yamamoto, K.: Characterization of a convex obstacle by singularities of the scattering kernel. *J. Differential Equations* **64** (1986) 283–293
- [113] Zheng, S.: Remarks on global existence for nonlinear parabolic equations. *Nonlinear Analysis*, T.M.A. **10** (1986) 107–114
- [114] Zheng, S.; Chen, Y.: On blowing up of the solutions to initial boundary value problems of nonlinear evolution equations (in Chinesisch). *J. Fudan University (Natural Science)* **265** (1987) 19–27
- [115] Zheng, S.; Shen, W.: Global solutions to the Cauchy problem of quasilinear hyperbolic parabolic coupled systems. *Sci. Sinica, Ser. A*, **30** (1987) 1133–1149

Reinhard Racke
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstraße 10
5300 Bonn

(Eingegangen 24.9.91)

Offene Probleme in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen

B. Külshammer, Augsburg

0 Vorbemerkungen

Der vorliegende Aufsatz ist entstanden aus dem Manuskript eines Vortrags, den der Autor am 9. Mai 1991 im Rahmen des Bayerischen Mathematischen Kolloquiums in Weihenstephan bei Freising gehalten hat. Intention des Vortrags war, einem Publikum aus Nichtexperten an Hand von Beispielen aktuelle Fragestellungen aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen vorzustellen und einige der Methoden aufzuzeigen, mit denen zur Zeit an ihrer Lösung gearbeitet wird. In dieser Ausarbeitung habe ich versucht, diese Zielsetzung möglichst beizubehalten. Aus diesem Grunde war ich gezwungen, auf Einzelheiten weitgehend zu verzichten, wichtige Fakten und Begriffe nur in vereinfachter Form zu präsentieren und alternative Zugänge zum Teil ganz wegzulassen. Den Fachmann muß ich daher um Nachsicht bei der Lektüre bitten.

Die beiden Vermutungen, die ich hier vorstellen möchte, bestechen durch ihre Einfachheit. Die Tatsache, daß sie nach wie vor unbewiesen sind, zeigt, daß es noch fundamentale Zusammenhänge zu entdecken gibt. Meine Erwartung ist, daß eine positive Lösung die Darstellungstheorie auch in anderen Fragestellungen voranbringen wird. Insbesondere hoffe ich, daß eine Lösung auch Einsicht in *Strukturen* bringen wird, nicht nur in *numerische Invarianten*.

Es ist natürlich ungewiß, ob die hier vorgestellten Ansätze zum Erfolg führen werden. Sicher ist jedoch, daß die dabei entwickelten Methoden für die Zukunft eine wichtige Rolle spielen werden.

1 Einleitung

Darstellungstheorie im weitesten Sinne beschäftigt sich mit Operationen von Gruppen auf mathematischen Objekten. Häufig kann man diese Operationen linearisieren und erhält so *lineare* Darstellungen, d. h. Homomorphismen einer Gruppe G in die allgemeine lineare Gruppe $GL(V)$ aller invertierbaren linearen Abbildungen eines Vektorraums V in sich. Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß G endlich und V endlich-dimensional ist. Es ist nützlich, außer der Gruppe $GL(V)$ auch den Ring $\text{End}(V)$ aller linearen Abbildungen von V in sich zu

betrachten. Ebenso kann man die Gruppe G in einen Ring einbetten, die *Gruppenalgebra* FG von G über dem zugrunde liegenden Körper F . Diese besteht aus allen formalen Linearkombinationen der Elemente in G ,

$$FG = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g : \alpha_g \in F \text{ für } g \in G \right\},$$

und die Multiplikation in FG setzt die Multiplikation in G in natürlicher Weise fort. Jede Darstellung von G läßt sich dann zu einer Darstellung von FG , d. h. zu einem Homomorphismus von Algebren $FG \rightarrow \text{End}(V)$, fortsetzen:

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \text{GL}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ FG & \rightarrow & \text{End}(V). \end{array}$$

Die Struktur von FG ist häufig übersichtlicher als die von G selbst. So folgt etwa aus den grundlegenden Sätzen von Wedderburn und Maschke, daß $\mathbb{C}G$ eine direkte Summe von (eindeutig bestimmten) vollen Matrixalgebren über \mathbb{C} ist:

$$(1) \quad \mathbb{C}G = \text{Mat}(d_1, \mathbb{C}) \oplus \text{Mat}(d_2, \mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \text{Mat}(d_k, \mathbb{C}).$$

Ein Vergleich der Dimensionen liefert also

$$(2) \quad |G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_k^2.$$

dabei ist $k = k(G)$ die Anzahl der Konjugationsklassen von G , und die auftretenden *Grade* d_1, \dots, d_k sind Teiler der Gruppenordnung $|G|$.

Ist z. B. $G = S_4$ die symmetrische Gruppe des Grades 4, d. h. die Gruppe aller Permutationen der Zahlen 1, 2, 3, 4, so ist $|G| = 24$ und $k(G) = 5$; Repräsentanten der Konjugationsklassen von G sind nämlich die Elemente

$$(1), \quad (1, 2), \quad (1, 2, 3), \quad (1, 2, 3, 4), \quad (1, 2)(3, 4).$$

Die entsprechende Zerlegung von $\mathbb{C}G$ hat die Form

$$(3) \quad \mathbb{C}S_4 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \oplus \text{Mat}(3, \mathbb{C}) \oplus \text{Mat}(3, \mathbb{C}).$$

2 Zwei Vermutungen

Im folgenden halten wir eine Primzahl p und eine p -Sylowgruppe P von G fest. Mit $k_0(G)$ bezeichnen wir die Anzahl derjenigen Summanden $\text{Mat}(d_i, \mathbb{C})$ von $\mathbb{C}G$ in (1), deren Grad d_i nicht durch p teilbar ist:

$$k_0(G) = |\{i : 1 \leq i \leq k, p \nmid d_i\}|.$$

Die erste der zu betrachtenden Vermutungen besagt dann:

Alperin-McKay-Vermutung: $k_0(G) = k_0(N_G(P)).$

Dabei bezeichnet $N_G(P)$ den Normalisator von P in G . Falls die Vermutung stimmt – woran meines Wissens niemand zweifelt, so ist also die Invariante $k_0(G)$ durch die (i. a. kleinere) Untergruppe $N_G(P)$ bestimmt.

Betrachten wir etwa das Beispiel von oben, $G = S_4$ mit der Primzahl $p = 2$. Wie man aus (3) erkennt, ist $k_0(G) = 4$. Außerdem ist P eine Diedergruppe der Ordnung 8 mit $P = N_G(P)$, also

$$\mathbb{C}N_G(P) = \mathbb{C}P = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \text{Mat}(2, \mathbb{C}).$$

Daher ist auch $k_0(N_G(P)) = 4$ in Übereinstimmung mit der Vermutung.

Der aktuelle Stand unserer Kenntnis im Zusammenhang mit der Alperin-McKay-Vermutung wird in [7] beschrieben.

Um unsere zweite Vermutung vorstellen zu können, bezeichnen wir mit $l(G)$ die Anzahl der Konjugationsklassen von G , die aus Elementen mit zu p teilerfremder Ordnung bestehen. Ferner bezeichnen wir mit $\beta_0(G)$ die Anzahl der Summanden $\text{Mat}(d_i, \mathbb{C})$ von $\mathbb{C}G$ in (1) mit der Eigenschaft, daß p kein Teiler von $|G|/d_i$ ist. Die Alperin-Vermutung bringt diese beiden Invarianten folgendermaßen in Zusammenhang:

$$\text{Alperin-Vermutung: } l(G) = \sum_Q \frac{\beta_0(N_G(Q)/Q)}{|G : N_G(Q)|};$$

dabei erstreckt sich die Summe über alle p -Untergruppen Q von G .

Ist wieder $G = S_4$ und $p = 2$, so ist $l(G) = 2$; die entsprechenden Konjugationsklassen werden durch (1) und (1, 2, 3) repräsentiert. In der folgenden Tabelle sind Repräsentanten Q für die Konjugationsklassen von p -Untergruppen, die entsprechenden Gruppen $N_G(Q)/Q$ und die Zahlen $\beta_0(N_G(Q)/Q)$ aufgelistet. Es ist bekannt, daß $\beta_0(H) = 0$ ist, falls die endliche Gruppe H einen nichttrivialen p -Normalteiler besitzt. Dies erklärt die Nullen in der letzten Spalte.

Q	$N_G(Q)/Q$	$\beta_0(N_G(Q)/Q)$
1	S_4	0
$\langle(1, 2)\rangle$	S_2	0
$\langle(1, 2)(3, 4)\rangle$	$S_2 \times S_2$	0
$\langle(1, 2, 3, 4)\rangle$	S_2	0
$\langle(1, 2), (3, 4)\rangle$	S_2	0
$\langle(1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4)\rangle$	S_3	1
P	1	1

Die Invariante $\beta_0(S_3)$ in dieser Tabelle erhält man wegen $|S_3| = 6$ und

$$\mathbb{C}S_3 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \text{Mat}(2, \mathbb{C}).$$

Summation der Einträge in der letzten Spalte liefert die Zahl $1 + 1 = 2$ in Übereinstimmung mit der Alperin-Vermutung.

Die Alperin-Vermutung wurde erstmals in [1] öffentlich vorgestellt. Einblick in den derzeitigen Entwicklungsstand gibt [7]; jedoch ist gerade bei dieser Vermutung die Entwicklung besonders stürmisch.

3 Ein erster Ansatz

Wir gehen aus von der Menge \mathcal{Q} aller nichttrivialen p -Untergruppen von G . Diese Menge \mathcal{Q} ist durch die Inklusion „ \subseteq “ (partiell) geordnet. Wie jeder geordneten Menge kann man \mathcal{Q} einen simplizialen Komplex \mathcal{A} zuordnen; für jede Dimension d sind die d -Simplizes von \mathcal{A} genau die Ketten

$$(4) \quad \sigma: Q_0 < Q_1 < \dots < Q_d$$

der Länge d , gebildet aus nichttrivialen p -Untergruppen Q_0, Q_1, \dots, Q_d von G . Die Konjugation von G auf \mathcal{Q} induziert eine (simpliziale) Operation von G auf \mathcal{A} . Für $\sigma \in \mathcal{A}$ bezeichnen wir mit G_σ den Stabilisator von σ in G , d. h.

$$G_\sigma = N_G(Q_0) \cap N_G(Q_1) \cap \dots \cap N_G(Q_d)$$

für ein σ wie in (4). Überlegungen von R. Knörr und G. R. Robinson zeigen nun, daß sich die Alperin-Vermutung auch folgendermaßen formulieren läßt:

$$|G|(\ell(G) - \beta_0(G)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} (-1)^{\dim \sigma} |G_\sigma|(\ell(G_\sigma) - \beta_0(G_\sigma));$$

siehe auch [11]. In dieser Form erinnert die Vermutung an die Euler-Charakteristik

$$\chi = \sum_d (-1)^d \dim C_d = \sum_d (-1)^d \dim (\text{Ker}(\partial_d) / \text{Im}(\partial_{d+1}))$$

eines (endlichen) Kettenkomplexes von Vektorräumen

$$\mathcal{C}: \dots \rightarrow C_{d+1} \xrightarrow{\partial_{d+1}} C_d \xrightarrow{\partial_d} C_{d-1} \rightarrow \dots$$

Es gibt eine Reihe offensichtlicher Kandidaten für die Vektorräume C_d . Was jedoch Schwierigkeiten macht, sind die Verbindungshomomorphismen ∂_d .

4 Blöcke

Um den zweiten Ansatz für die Vermutungen zu erläutern, ist es nützlich, eine Verallgemeinerung einzuführen, die gleichzeitig die Vermutungen auch in einem anderen Licht erscheinen läßt.

Wir bezeichnen mit F einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p . Nach bekannten Resultaten von R. Brauer ist dann $\ell(G)$ auch die Anzahl der einfachen FG -Moduln, und $\beta_0(G)$ ist die Anzahl der einfachen FG -Moduln, die gleichzeitig projektiv (im Sinne der Ringtheorie) sind. Es ist von Vorteil, die Gruppenalgebra in unzerlegbare Algebren zu zerlegen:

$$(5) \quad FG = B_1 \oplus \dots \oplus B_r.$$

Die auftretenden Summanden B_1, \dots, B_r sind dann eindeutig bestimmt und heißen die *Blöcke* von FG . Im Gegensatz zu der in (1) beschriebenen analogen Situation über \mathbb{C} sind diese Blöcke i. a. keine vollen Matrixalgebren über F , sondern von komplizierterer, meist nicht genau bekannter Natur. Die Zerlegung (5) von FG in

Blöcke induziert dann für jeden FG -Modul M eine Zerlegung

$$M = B_1 M \oplus \cdots \oplus B_r M$$

in FG -Untermoduln $B_1 M, \dots, B_r M$. Ist M einfach, so ist also $B_i M \neq 0$ für genau ein $i \in \{1, \dots, r\}$, und M ist auch ein einfacher B_i -Modul. Man sagt dann, daß M zum Block B_i von FG gehört. Auf diese Weise gehört jeder einfache FG -Modul zu genau einem Block B von FG . Wir bezeichnen mit $l(B)$ die Anzahl der einfachen FG -Moduln, die zum Block B von FG gehören, und mit $\beta_0(B)$ die Anzahl der einfachen projektiven FG -Moduln, die zu B gehören. Man hat dann

$$l(G) = l(B_1) + \cdots + l(B_r) \quad \text{und} \quad \beta_0(G) = \beta_0(B_1) + \cdots + \beta_0(B_r).$$

Dies legt eine Verallgemeinerung der Alperin-Vermutung auf Blöcke nahe. Dazu ist es notwendig, Blöcke von FG mit Blöcken von Untergruppen und Faktorgruppen in Verbindung zu bringen. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei ist der *Brauer-Homomorphismus* σ_Q , definiert für jede p -Untergruppe Q von G . Er bildet das Zentrum ZFG von FG in das Zentrum $ZFN_G(Q)$ von $FN_G(Q)$ ab und ist definiert durch

$$\sigma_Q \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) := \sum_{g \in C_G(Q)} \alpha_g g;$$

dabei bezeichnet $C_G(Q)$ den Zentralisator von Q in G . Eine weitere wichtige Abbildung ist der natürliche Epimorphismus $\nu_Q: FN_G(Q) \rightarrow F[N_G(Q)/Q]$. Mit diesen Hilfsmitteln erhält man die folgende Verfeinerung der Alperin-Vermutung:

$$(6) \quad \text{Alperin-Vermutung für Blöcke:} \quad l(B) = \sum_{Q, b} \frac{\beta_0(b)}{|G : N_G(Q)|};$$

dabei durchläuft Q alle p -Untergruppen von G , und für jede p -Untergruppe Q von G durchläuft b alle Blöcke von $F[N_G(Q)/Q]$ mit $\nu_Q(\sigma_Q(1_B))b \neq 0$. Die ursprüngliche Version der Alperin-Vermutung erhält man aus der Blockversion, indem man über alle Blöcke summiert.

Die p -Untergruppen maximaler Ordnung, für die der entsprechende Summand in (6) von 0 verschieden ist, spielen eine besonders wichtige Rolle. Man nennt sie die *Defektgruppen* von B ; je zwei von ihnen sind in G konjugiert. Ist D eine Defektgruppe des Blocks B von FG , so gibt es nach R. Brauers Erstem Hauptsatz über Blöcke genau einen Block B' von $FN_G(D)$ mit $\sigma_D(1_B) = 1_{B'}$. Man nennt B' den *Brauer-Korrespondenten* von B in $FN_G(D)$.

Für Blöcke mit *abelschen* Defektgruppen nimmt die Alperin-Vermutung eine besonders einfache Form an:

Alperin-Vermutung für Blöcke mit abelschen Defektgruppen:

$$l(B) = l(B');$$

dabei bezeichnet B' den Brauer-Korrespondenten von B .

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Invariante $k_0(G)$ auf Blöcke verallgemeinern. Auf Details gehen wir hier nicht ein; wir formulieren jedoch eine Variante der Alperin-McKay-Vermutung für Blöcke mit abelschen Defektgruppen:

Alperin-McKay-Vermutung für Blöcke mit abelschen Defektgruppen:

$$\dim ZB = \dim ZB';$$

dabei bezeichnet B' wieder den Brauer-Korrespondenten von B . Beide Vermutungen sind für auflösbare Gruppen bewiesen (T. Okuyama [8] bzw. T. Okuyama-M. Wajima [9]). Man hat in diesem Fall jedoch ein wesentlich stärkeres Resultat, das aus einem Satz von E. C. Dade [3] folgt; siehe auch [5]:

Satz. *Seien G auflösbar und B ein Block von FG mit abelscher Defektgruppe D und Brauer-Korrespondent B' in $FN_G(D)$. Dann existieren natürliche Zahlen n und n' , so daß $\text{Mat}(n, B)$ und $\text{Mat}(n', B')$ isomorph sind.*

Insbesondere haben B und B' in diesem Fall äquivalente Modulkategorien. Dies liefert den Ausgangspunkt für unseren zweiten Ansatz.

5 Ein zweiter Ansatz

Es ist bekannt, daß sich die Voraussetzung der Auflösbarkeit von G nicht ersatzlos aus dem obigen Satz streichen läßt. Nach einer Idee von M. Broué könnte aber die folgende Aussage richtig sein:

Broué-Vermutung: *Sei G beliebig und B ein Block von FG mit abelscher Defektgruppe D und Brauer-Korrespondent B' in $FN_G(D)$. Dann haben B und B' äquivalente derivierte Kategorien.*

Die hier benutzte Variante der *derivierten Kategorie* $\text{Der}(B)$ hat als Objekte nach rechts beschränkte, fast überall exakte Kettenkomplexe projektiver FG -Moduln „in“ B :

$$\cdots \rightarrow P_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots$$

Als Morphismen kann man die Morphismen von Kettenkomplexen modulo Homotopie nehmen. Die Modulkategorie $\text{Mod}(B)$ läßt sich bekanntlich in die derivierte Kategorie $\text{Der}(B)$ einbetten, indem man jedem Modul seine (bis auf Homotopie eindeutige) projektive Auflösung zuordnet.

Es ist bekannt, daß die Gültigkeit der Broué-Vermutung die Gültigkeit der Vermutungen von Alperin und Alperin-McKay (für Blöcke mit abelschen Defektgruppen) nach sich zieht. Die Broué-Vermutung ist bewiesen für den Fall, daß D nicht nur abelsch, sondern sogar zyklisch ist (J. Rickard [10] und M. Linckelmann [6]). Es ist jedoch zur Zeit nicht zu sehen, wie sich dieser Beweis verallgemeinern ließe.

Literatur

- [1] Alperin, J.: Weights for finite groups. Proc. Symp. Pure Math. **47** (1987) 369–379
- [2] Broué, M.: Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées. Astérisque **181–182** (1990) 61–92
- [3] Dade, E. C.: A correspondence of characters. Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980) 401–403
- [4] Knörr, R.; Robinson, G. R.: Some remarks on a conjecture of Alperin. J. London Math. Soc. (2) **39** (1989) 48–60
- [5] Külshammer, B.; Puig, L.: Extensions of nilpotent blocks. Invent. math. **102** (1990) 17–71
- [6] Linckelmann, M.: Derived equivalence for cyclic blocks over a p -adic ring. Preprint
- [7] Michler, G. O.: Contributions to modular representation theory of finite groups. In: Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras. Basel: Birkhäuser-Verlag 1991, pp. 99–140
- [8] Okuyama, T.: Vertices of irreducible modules of p -solvable groups. Preprint
- [9] Okuyama, T.; Wajima, M.: Character correspondence and p -blocks of p -solvable groups. Osaka J. Math. **17** (1980) 801–806
- [10] Rickard, J.: Derived categories and stable equivalence. J. Pure Appl. Algebra **61** (1989) 303–317
- [11] Thévenaz, J.; Webb, P. J.: A Mackey functor version of a conjecture of Alperin. Astérisque **181–182** (1990) 263–272

Burkhard Külshammer
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
Universitätsstr. 8
W-8900 Augsburg
Germany

(Eingegangen: 14. 11. 1991)

Buchbesprechungen

Turán, P., Collected Papers (Edited by Paul Erdős), Budapest: Akadémiai Kiadó 1990, 2665 S., DM 340,-

Das Gesamtwerk von Paul Turán (1910–1976) umfaßt 246 Publikationen, von denen 227 zu den vorliegenden Gesammelten Abhandlungen, in drei Bände aufgeteilt, vereinigt sind. Dabei sind 26 Arbeiten in deutscher, zwei in französischer und alle weiteren in englischer Sprache abgedruckt; ursprünglich ungarische oder russische Artikel wurden ins Englische übertragen.

Die drei Bände belegen eindrucksvoll, daß Turán herausragende Beiträge zu zahlreichen, so weit auseinander liegenden Gebieten der klassischen Mathematik geleistet hat wie Elementare und Analytische Zahlentheorie, Diophantische Approximationen, Kombinatorik, Graphentheorie, Statistische Gruppentheorie, Fourierreihen, Differentialgleichungen und Numerische Analysis.

Die wohl originellsten und auch seinem eigenen Urteil nach wichtigsten Resultate Turáns finden sich in seinen Publikationen über Potenzsummen-Abschätzungen und deren Anwendungen. Worum es dabei geht, soll im folgenden kurz skizziert werden.

Für von Null verschiedene komplexe Zahlen b_1, \dots, b_n bzw. z_1, \dots, z_n werden die „verallgemeinerten“ Potenzsummen $f(v) := \sum_{j=1}^n b_j z_j^v$ bei natürlichem v betrachtet und mit gewissen Normen $M_k(f, v)$ verglichen. Was man immer wieder benötigt, ist die Existenz geeigneter v , für die der Quotient

$$(*) \quad |f(v)|/M_k(f, v)$$

unabhängig von den z_1, \dots, z_n genügend gut *nach unten* abgeschätzt werden kann. In dieser Richtung hatte im Falle der Norm $M_0(f, v) := \sum_{j=1}^n |b_j| |z_j|^v$ bereits H. Bohr 1910 mit Hilfe

der klassischen Sätze von Dirichlet bzw. Kronecker über simultane homogene bzw. inhomogene Approximationen sehr gute untere Abschätzungen erzielt und diese auf Wertverteilungsfragen bei der Riemannsches Zetafunktion angewandt.

Auch bei Turán rührten die ersten Impulse zur Beschäftigung mit diesem Problemkreis (um 1940) von gewissen, in der Analytischen Zahlentheorie aufgetauchten Fragen her. Während sich bei Verwendung der „Bohr-Norm“ $M_0(f, v)$ die v -Werte, für die sich der Quotient (*) bei $k=0$ relativ gut nach unten abschätzen läßt, prinzipiell nur sehr schwach bzw. überhaupt nicht lokalisieren lassen, erkannte Turán, daß andere Normen, etwa die

$$\text{„Minimum-Norm“ } M_1(f, v) := \min_{1 \leq j \leq n} |z_j|^v \quad \text{oder die}$$

$$\text{„Maximum-Norm“ } M_2(f, v) := \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|^v,$$

sehr genaue Lokalisationen der v -Werte gestatten. Diese Tatsache erwies sich für zahlreiche Anwendungen der Potenzsummen-Abschätzungen in der Analysis als von fundamentaler Bedeutung.

Turán verstand seine Potenzsummen-Methode im Nachgang zu Bohrs Untersuchungen als Teil der Theorie der Diophantischen Approximationen. Von seinem kontinuierlichen Ausbau dieser Methode legen etwa 70 in den vorliegenden Werken abgedruckte

Originalarbeiten Zeugnis ab, die im Zeitraum zwischen 1940 und 1976, seinem Todesjahr, entstanden sind. Sieht man sich diese Arbeiten in ihrer zeitlichen Abfolge an, so erkennt man sehr schön, wie Turán durch konkrete Anwendungen zu immer neuen Varianten von Potenzsummen-Abschätzungen stimuliert wurde.

Eine erste zusammenfassende und systematische Darstellung seiner Potenzsummen-Methode legte Turán übrigens bereits 1953 in Buchform vor: „Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen“ (in deutscher und in ungarischer Sprache; nicht in den Werken enthalten). Während diese Monographie schon ein Jahr später in überarbeiteter, chinesischer Version erschien, plante Turán ab 1959 eine völlige Revision, die er in Anbetracht der inzwischen erzielten Verbesserungen und der sich rasch ausweitenden Anwendungen als notwendig erachtete. Diese Entwicklung verlief so stürmisch, daß die neue, nun englische Version erst 1984 unter dem Titel „On a New Method of Analysis and its Applications“ erscheinen konnte. Grundlage hierfür war ein posthumes Manuskript von Turán, das von seinen Schülern G. Halász und J. Pintz aktualisiert und erheblich ergänzt worden war.

P. Erdős, für den Turán einer seiner ältesten und besten Freunde und einer seiner ersten Koautoren war, hat die Edition der vorliegenden Gesammelten Werke besorgt und diesen sehr informative „Personal Reminiscences of the Work of Paul Turán“ vorangestellt. Zum Schluß sei noch erwähnt, daß wertvolle Kommentierungen einzelner Publikationen oder ganzer Gruppen von Arbeiten durch verschiedene Autoren in die drei Bände eingestreut sind, so daß sich der Leser auch ein gutes Bild von den weiteren Entwicklungen machen kann, die von Turáns Lebenswerk ausgingen.

Köln

P. Bundschuh

Burckhardt, J. J., Die Symmetrie der Kristalle, Von René-Just Haüy zur kristallographischen Schule in Zürich. Mit einem Beitrag von Erhard Scholz. Basel u. a.: Birkhäuser-Verlag 1988, 196 S., DM 68,-

Der Verfasser sieht sein Buch als einen Beitrag zum Thema „Symmetrie“. Er will das „Auftreten und die Bedeutung dieses Begriffes in der Kristallographie“ darstellen: „Im ersten Teil des Buches gebe ich einen kurzen Überblick über seine Rolle im 19. Jahrhundert, im zweiten Teil möchte ich insbesondere den Beitrag hervorheben, den die Forschung an den Zürcher Hochschulen hinzufügte“.

Die so gestellte Aufgabe versucht den Verfasser zu lösen, indem er in 22 Paragraphen, deren Länge zwischen zwei und 17 Seiten variiert, die ihm wichtig erscheinenden Beiträge von bedeutenden Kristallographen und von einigen wenigen Mathematikern zur Entwicklung einer Theorie der Symmetrie und – in geringerem Maße – der Struktur der Kristalle darzustellen versucht. Die von J. J. Burckhardt verfaßten Paragraphen enthalten meist eine Angabe des behandelten Themas, ein oder zwei Zitate aus einem Werk des jeweiligen Kristallographen, welche die Grundidee seines Beitrages andeuten, ein Portrait von ihm, einige seiner Originalfiguren und Tabellen der klassifizierten Objekte und in einigen Fällen Zitate zur Wirkungsgeschichte oder Rezeption eines Beitrages.

In dieser Weise werden im ersten Teil u. a. folgende Themen behandelt: § 2 Das Symmetriegesetz der Kristallographie bei R.-J. Haüy, § 3 Kristallsysteme und Kristallklassen – Weiß, Frankenheim, Hessel, § 4 Gitter und Netze – Frankenheim und Bravais, § 5 Die symmetrischen Polyeder und die 32 Kristallklassen – Bravais und Hessel, § 8 Sohncke und die regelmäßigen Punktsysteme.

Der zweite Teil „Die kristallographische Schule in Zürich“ behandelt Beiträge von P. Niggli, W. Nowacki, F. Laves, H. Heesch, L. Weber, A. Speiser, G. Polya, und auch vom

Verfasser selbst, der seinen eigenen Beitrag, die Herausarbeitung des Begriffs der arithmetischen Kristallklasse, in sehr bescheidener Weise darstellt, indem er mehrfach darauf hinweist, daß sich die 73 arithmetischen Kristallklassen leicht aus den Tabellen in Niggli's „Geometrische Kristallographie des Diskontinuums“ von 1919 herauslesen lassen. Schließlich enthält der 2. Teil auch Berichte über zwei Beiträge, die man eigentlich nicht zur kristallographischen Schule in Zürich rechnen kann, nämlich von R. L. E. Schwarzenberger 1976 und von Johannes Kepler in „Harmonices mundi“ 1619.

Diese Andeutungen zum Inhalt zeigen, daß auf den knapp 200 Seiten des Buches ein weites Feld von Themen berührt wird. Leider führt dies dazu, daß es fast immer nur bei Andeutungen bleibt. Wer die Ergebnisse der mathematischen Kristallographie nicht schon kennt, und wer genau liest, dürfte große Schwierigkeiten haben, irgendetwas wirklich zu verstehen. Ein Beispiel soll dies illustrieren. Bekanntlich gibt es 32 geometrische Kristallklassen, d. h. modern gesprochen, Konjugationsklassen endlicher Untergruppen von $O(3, \mathbb{R})$, welche ein Gitter invariant lassen, und 14 Bravaistypen von Gittern. Die 32 geometrischen Kristallklassen wurden – lange Zeit unbeachtet von den Mathematikern – schon 1830 von dem Kristallographen J. F. Ch. Hessel hergeleitet. Sie wurden aber noch vorher, schon 1826, von M. L. Frankenheim in einem Aufsatz in der von Oken herausgegebenen Zeitschrift Isis bestimmt. Es ist ein Verdienst von J. J. Burckhardt, 1984 diesen Aufsatz von Frankenheim wiederentdeckt zu haben. Die 14 Bravaistypen von Gittern wurden 1850 von Bravais bestimmt, aber schon vorher, mit einem doppelt aufgezählten Typ, 1835 von Frankenheim. Man kann nun die Einteilung der 230 Raumgruppentypen in 32 geometrische Kristallklassen bzw. in 14 Bravaisscharen auf drei verschiedene Weisen so vergrößern, daß diese Einteilungen berücksichtigt werden. Die feinste gemeinsame Vergrößerung führt zu 6 Kristallfamilien. Hierbei sind beide Einteilungen, die in 32 Kristallklassen und die in 14 Bravaisscharen, gleichberechtigt. Bevorzugt man die 32 geometrischen Kristallklassen, so werden diese zu 7 Kristallsystemen vergrößert. Bevorzugt man die 14 Bravaisscharen, so werden diese zu 7 Bravaissystemen vergrößert. Wer dies nicht schon weiß, dürfte die größten Schwierigkeiten haben, zu begreifen, warum in § 3 von den 7 Kristallsystemen von Weiß die Rede ist, aber in § 4 von den 6 „Kristallsystemen“, in die Frankenheim seine Gittertypen einordnet.

Man muß sagen, daß fast nirgendwo in Burckhardts Buch die behandelten Objekte definiert, die verwendeten kristallographischen Notationen erklärt oder die Figuren so weit erläutert werden, daß dem nicht Initiierten zweifelsfrei klar wird, was gemeint ist. Man lese etwa die Andeutungen zur Reduktionstheorie quadratischer Formen p. 119 oder die Formulierung des Zonengesetzes p. 27. Eine solche Klärung erfolgt auch dort nicht, wo sie für den mathematisch vorgebildeten Leser mit wenigen Worten möglich wäre und wo der Verfasser selbst an der Herausarbeitung der Begriffe beteiligt war, z. B. kein Begriff der Farb-Ornamentgruppen. Überhaupt wird der Mathematiker bedauern, daß die Beziehungen zwischen Mathematik und Kristallographie in sachlicher wie historischer Sicht nur selten angedeutet werden. So wird z. B. über die Bestimmung der euklidischen Raumformen durch den Kristallographen Nowacki 1935 berichtet, nicht aber über die fast gleichzeitige Arbeit von Hantzsch und Wendt 1934 und den Kontext des Clifford-Kleinschen Raumproblems.

Allgemein gesprochen, fehlt ein übergreifendes Konzept, durch das die Entwicklung der Symmetriellehre in der Kristallographie in ihrer durch die Bedürfnisse der Kristallographie bedingten Eigengesetzlichkeit und in ihrer Wechselwirkung mit der Mathematik in größere Zusammenhänge einzuordnen wäre. Daß eine solche Darstellung der Entwicklung des Symmetriebegriffs möglich ist, hat E. Scholz in seinem 1989 erschienen Buch „Symmetrie, Gruppe, Dualität“ gezeigt. Die §§ 8, 9, 10 im hier rezensierten Buch stammen von Herrn Scholz und sind gekürzte Versionen der entsprechenden Abschnitte aus § 5 seines Buches. Sie behandeln in klarer und systematischer Weise den Weg von

Fedorov und Schoenflies zur Herleitung der 230 Raumgruppentypen und sind für einen mathematisch vorgebildeten Leser gut nachzuvollziehen.

Das Dilemma des Buches von Herrn Burckhardt scheint mir darin zu liegen, daß er zu viele Leser auf einmal ansprechen will. Der weder mathematisch noch kristallographisch Vorgebildete wird nicht in der Lage sein, die nur angedeuteten Gegenstände wirklich zuverlässig aufzunehmen. Den interessierten Laien wäre da eher das schöne Buch „Die Entdeckung der Kristalle“ von Fabian zu empfehlen oder „Farbige Parkette“ von W. Borho u. a., den Studierenden ein Lehrbuch, darunter auch Burckhardts „Die Bewegungsgruppen der Kristallographie“. Die Mathematiker werden die Darstellung wegen des Verzichts auf mathematische Präzisierung als unbefriedigend empfinden und zu der mit einem umfangreichen Literaturverzeichnis zitierten Originalliteratur greifen, wenn sie für das schöne Gebiet der Kristallographie, für Lagerungen und Packungen und Pflasterungen genügendes Interesse haben. Dies zu wecken, könnte das Buch vielleicht beitragen, vor allem auch durch die vielen schönen und historisch interessanten Figuren, die darin in sehr guter Qualität reproduziert sind, aber auch durch den Hinweis auf wenig bekannte, jedoch historisch wichtige Arbeiten oder auf nicht genug beachtete, aber doch interessante Arbeiten aus dem Umkreis der Züricher Schule, wie z. B. die leider m. W. unveröffentlichte Arbeit von Ingeborg Hund über Flechtornamente. Am meisten wird das Buch wohl dem historisch interessierten Kristallographen bringen. Er wird darin neben vielem, was er kennt und liebt, auch noch Unbekanntes und Anregendes finden, das sein Bild von der Geschichte seiner Wissenschaft hier und da ergänzt.

Bonn

E. Brieskorn

Anderson, I., Combinatorial designs: Construction methods, Chichester: Ellis Horwood Ltd. 1989, 290 S., \$84.00

The author's aim in writing the book under review was "to provide a readable account of the construction of a number of different combinatorial structures" suitable "to introduce the subject to the final year undergraduate or the postgraduate student who wishes to discover how combinatorial designs are actually constructed" (hence the title). These aims restrict the book's scope in two respects: First of all, it contains only a few theoretical results on the structural properties of designs; e.g., their is very little concerning what is usually called "analysis of designs" (almost nothing beyond Fisher's inequality and the Bruck-Ryser-Chowla theorem) and practically no results on the connections to group theory (Multipliers for difference sets are considered, but without even mentioning that they yield automorphisms; indeed, the term "automorphism" does not appear in the index!) and no characterization theorems (for "classical" examples like the designs obtained from finite affine and projective geometries) at all. Secondly, it does cover the constructive results which are most standard by now and can be found in most previous books on Design Theory (including proofs for the existence of (cyclic) Steiner triple systems; Kirkman triple systems; three mutually orthogonal Latin squares of orders $\neq 2, 6, 10$; selforthogonal Latin squares of orders $\neq 2, 3, 6$). More advanced results (e.g. on block designs with $k=4$ or 5 , Steiner quadruple systems, asymptotic existence of designs, etc.) are quoted but not proved. It is only fair to say that the author's preface clearly states these limitations. E.g., the author says that "the originality of the book lies in its final chapters, dealing with tournament designs". Here one encounters (on about 50 pages) topics not generally available in book form, like Howell designs, balanced tournament designs and whist tournament designs.

Within his self-imposed limits, the author has by and large met his aims and produced an adequate (and to a large extent actually quite nice) introductory text. The book

is generally well-written (with interesting historical remarks) and contains a wealth of good exercises ranging from the simple to quite demanding project outlines sketching constructions not covered in the main body of the text. On the other hand, the text also contains some undeniable flaws; I will mention some examples concerning one of my favorite topics, i.e. the theory of difference sets. I was particularly annoyed by the fact that the author reproduces Hall's very technical 3 page proof for the first multiplier theorem (and that only for cyclic groups!) even though a much more conceptual (and simultaneously short and elegant) proof due to Lander (whose book on symmetric designs is quoted but not in this context) and later simplified even further by Pott has been available for several years now; this turns a potential highlight into a student scare. In Exercise 2.35 (dealing with difference sets for $k \leq 10$) Lander's extensive table of abelian difference sets (up to $k=50$) should have been mentioned; likewise, it is almost unforgivable to spend quite some effort on cyclic difference sets without mentioning Baumert's excellent (and still standard) lecture notes text on this topic. Apparently, the author only wants to consider cyclic difference sets in Exercise 2.35 (though this restriction is not stated); this is a pity (cf. the case (25, 9, 3)). In Exercise 3.21, it would have been no more difficult to sketch at least a general abelian version (in fact, some nonabelian version can be obtained, and by other methods due to Hughes even stronger results are possible) instead of sticking to the cyclic case only. It is a mystery to me why the author attributes the proof he gives for Singer's theorem (4.3.1) to Hall (1986). More complaints could be made regarding other topics. To mention only one further point: The three mutually orthogonal Latin squares in Example 7.6.1 (which are due to Todorov, not Torodov) should have been given by a difference type approach (as in the original paper) instead of exhibiting them explicitly; this would have made the verification much simpler (and also indicated how the author could find them – certainly 14 is much too large an order to search for the required squares just by brute force; in fact, already 10 is at present too large for an exhaustive computer search for 3 MOLS of this order!).

To sum up, I think Anderson's book provides a sound basis for an advanced undergraduate or postgraduate course on construction methods for combinatorial designs. Personally, I would prefer giving a course enriched by quite a bit of material on the structural properties of designs (in particular, automorphism groups and characterization theorems); for this one can of course draw on other text books. With the qualifications made, I can recommend the book to the interested student, lecturer or aspiring future researcher in Design Theory; but it clearly is of only limited attraction to the expert.

Giessen

D. Jungnickel

Protter, Ph., Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1990, 302 S, DM 98,-

Stochastische Integration ist eine der zentralen Techniken zur Untersuchung zufälliger Prozesse mit stetiger Zeit: Martingaltheorie, Markov-Prozesse, stochastische Differentialgleichungen mit ihren vielfältigen Anwendungen in Mathematik, Physik, Ingenieurwissenschaften, Biologie, Ökonomie etc. benutzen stochastische Integrations-theorie und tragen zu ihrer Entwicklung bei. Formuliert wurde diese Theorie zuerst für die Brownsche Bewegung als Integrator, d. h. für den Wiener-Prozeß, welcher einer zentrale Rolle in der Entwicklung moderner Wahrscheinlichkeitstheorie spielt, als Gaußscher Prozeß, als Martingal und als starker Markov-Prozeß.

Ein „naiver Ansatz“ zu stochastischer Integration, selbst für einfache Prozesse, ist nicht möglich, wie die folgende Überlegung zeigt: Es sei $x(t)$ eine rechtsstetige Funktion auf $[0, 1]$ und P_n eine Folge diadisch rationaler Partitionen von $[0, 1]$, deren Intervallänge gegen

null geht. Wenn die Summen

$$S_n = \lim_{t_k \in P_n} f(t_k)[x(t_{k+1}) - x(t_k)]$$

für alle stetigen Funktionen f konvergieren, dann ist x von beschränkter Variation nach einer Beobachtung von P. A. Meyer [19], welche den Satz von Banach-Steinhaus benutzt. Für (stetige) stochastische Prozesse $x(t, \omega)$ könnte man nun lediglich die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit für die Summen fordern, doch die Antwort bleibt dieselbe: Es ist erforderlich, daß $x(\cdot, \omega)$ fast sicher Trajektorien von beschränkter Variation besitzt. Dies ist aber falsch für den Wiener-Prozeß und allgemeiner für alle nichttrivialen Martingale.

In den frühen 20er Jahren entwickelte N. Wiener [25, 26] eine Integrationstheorie für die Brownsche Bewegung mit zeitabhängigen, aber nicht-zufälligen Integranden, eine Theorie, die somit nicht als Basis für stochastische Differentialgleichungen dienen konnte. In 1944 gab K. Itô eine rein probabilistische Definition mit zufälligen Prozessen als Integranden [11], was das Studium mehrdimensionaler Diffusionen erlaubte, unabhängig vom Rückgriff auf partielle Differentialgleichungen via Kolmogorovs Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen für die Übergangswahrscheinlichkeiten, die z. B. Fellers analytische Methoden dominiert hatten. In J. L. Doob's fundamentalem Buch von 1953 [5] wird der Zusammenhang des Itô'schen Integrals mit Martingalen betont, und das Zusammenspiel von Martingal- und Markov-Theorie trieb die Entwicklung der Theorie für etwa 20 Jahre an: P. A. Meyer [16] bewies in 1962 den fundamentalen Zerlegungssatz für Submartingale, was, nach seinen eigenen Worten, die Tür eine allgemeine stochastische Integrationstheorie öffnete, wie sie schon Doob angedeutet hatte. Eine technische Schwierigkeit ergibt sich nun aus der Tatsache, daß für den Wiener-Prozeß die vorhersehbare (predictable) und die optionale (optional) σ -Algebra identisch sind (der Wiener-Prozeß ist ein starker Markov-Prozeß ohne Sprünge). Meyer bemerkte in 1967 [17], daß für allgemeine Submartingale die Beschränkung auf vorhersehbare Integranden natürlich ist. In [4] zeigten C. Doléans-Dade und Meyer 1970, daß die Beschränkung auf quasilinksstetige Filtrationen des Integranden nicht erforderlich ist (diese Einschränkung war natürlich für die begleitenden σ -Algebren starker Markov-Prozesse). Damit stand eine allgemeine Integrationstheorie für Submartingale (= Summe eines lokalen Martingals M und eines vorhersehbaren, wachsenden Prozesses A) zur Verfügung. Man benutzt ein stochastisches Integral für M und ein Lebesgue-Stieltjes-Integral für A . Diese allgemeine Theorie, zusammen mit Verallgemeinerungen auf Semimartingale und mit vielen neuen Eigenschaften des stochastischen Integrals, ist in Meyers „Kurs“ [18] aus dem Jahre 1976 enthalten, einer Zusammenfassung der „französischen théorie général“. Es blieb noch die Frage offen, ob stochastische Integrationstheorie über die Benutzung von Semimartingalen als Integratoren hinaus verallgemeinert werden konnte. Daß dies unter relativ schwachen Anforderungen nicht möglich ist, zeigten 1980 Dellacherie [3] und 1981 K. Bichteler [1] unabhängig voneinander: Ein rechtsstetiger Prozeß als Integrator, dessen Integral linear ist und für welches ein schwacher Satz über beschränkte Konvergenz gilt (gleichmäßige Konvergenz der Integranden impliziert Konvergenz in Wahrscheinlichkeit der Integrale), ist notwendig ein Semimartingal.

Es ist nicht verwunderlich, daß nach dieser Abrundung der Theorie stochastischer Integration es in den letzten Jahren eine Explosion von Büchern über dieses und angrenzende Gebiete gab. Beschränkt man sich auf stetige Prozesse, so kann man ohne einige der Feinheiten der *théorie général* auskommen (und sogar die Doob-Meyer-Zerlegung umgehen). Beispiele für dieses Vorgehen sind z. B. I. Karatzas und S. E. Shreve [13], D. Revuz und M. Yor [20], K. L. Chung und R. J. Williams [2] (deren 1990-Ausgabe nun Abschnitte über die Girsanov-Transformation und eine Einführung in stochastische Differentialgleichungen enthält). Die Untersuchung von Markov-Prozessen steht im

Vordergrund bei S. N. Ethier und T. G. Kurtz [9], M. Sharpe [22] und R. K. Gettoor [10]. Die allgemeine Theorie mit all ihren technischen Schwierigkeiten wird entwickelt z. B. im L. C. G. Rogers und D. Williams [21], R. J. Elliott [7], J. Jacod und A. Shiryaev [12], und Métivier [15]. Fast komplementär dazu sind die Bücher von M. Eméry [8] über geometrische Aspekte von Diffusionen auf Mannigfaltigkeiten und von H. Kunita [14] über stochastische Flüsse und deren Verhalten.

Das hier vorliegende Buch von Philip Protter mit dem Untertitel „A new approach“ ist meines Wissens nach das erste (und bisher einzige), welches die allgemeine stochastische Integrationstheorie aufbauend auf dem Satz von Dellacherie und Bichteler entwickelt. Semimartingale werden eingeführt als stochastische Prozesse x , für die das Integral $\int h dx$ linear und stetig ist, bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz von $h_n \rightarrow h$ und der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit von $\int h_n dx \rightarrow \int h dx$.

Dies erlaubt die Definition des Integrals als eine Riemannsche Summe für adaptierte Integranden mit càdlàg-(rechtsstetig mit linksseitigen Grenzwerten) Trajektorien und Protter kommt hierfür ohne die tiefliegenden Sätze der „théorie général“, wie Martingalzerlegungen aus. Verschiedene Anwendungen, wie die Itô-Formel und stochastische Differentialgleichungen, sind auf dieser Ebene möglich. Für die Theorie in voller Allgemeinheit sind natürlich gewisse Elemente der „théorie général“ erforderlich, wie z. B. die Doob-Meyer-Zerlegungen, der Hauptsatz über lokale Martingale (jedes lokale Martingal ist die Summe eines lokalen Martingals mit beschränkten Sprüngen und eines Prozesses mit beschränkter Variation) und Girsanovs Satz. Protter entwickelt diese Ergebnisse in sehr intuitiver, nicht-technischer Weise unter Benutzung von Meyers Konzept der „natürlichen Prozesse“, was zu einer sehr leicht lesbaren Einführung in diese Theorie führt. Glücklicherweise wird dann der Satz von Dellacherie und Bichteler (sehr elegant) bewiesen, so daß die Äquivalenz dieses Ansatzes mit dem klassischen Zugang über vorhersehbare Prozesse deutlich wird.

Das stochastische Integral in voller Allgemeinheit, zusammen mit Anwendungen auf Martingalrepräsentationstheorie und lokale Zeiten, wird dann als eine Lebesgue-ähnliche Verallgemeinerung des zuvor über Riemannsche Summen definierten Integrals eingeführt. Dieses geschieht in Kapitel IV, welches im Zentrum von Protters Ansatz steht, und benutzt wird die Zerlegung aus dem Satz von Dellacherie und Bichteler. Dieses Kapitel enthält auch eine sehr verständliche Diskussion von Azémas Martingal, einem der Standardgegenbeispiele in der Theorie lokaler Zeiten: Dieses Martingal hat lokale Zeit null für jeden Level, außer an 0, wo die lokale Zeit mit der des Wiener-Prozesses übereinstimmt, und besitzt daher keine reguläre Version.

Das letzte Kapitel schließlich enthält eine Einführung in stochastische Differentialgleichungen, wobei sich Protter darauf konzentriert zu zeigen, welche Voraussetzungen für bestimmte Eigenschaften der Lösungen erforderlich sind. Neben der üblichen Itô-Version wird auch die Stratonovič-Interpretation der Gleichungen diskutiert via quadratischer Variation und zufälliger Itô-Formel. Diese Interpretation führt zu einem Kalkül mit Formeln wie in der (nicht stochastischen) Analysis und ermöglicht die Approximation der Lösungstrajektorien durch Lösungen deterministischer, gewöhnlicher Differentialgleichungen (Doss [6], Sussmann [24], Stroock und Varadhan [23], wobei Protter sich auf den Dosschen Ansatz beschränkt). Die Markov-Eigenschaft der Lösungen wird gezeigt für Integratoren, welche Lévy-Prozesse sind (unabhängige, stationäre Zuwächse). Schließlich wird die Flußeigenschaft der Lösungen unter Benutzung stochastischer Exponentiale untersucht, wobei klar wird, daß Stetigkeit und Differenzierbarkeit von der Glattheit der Integranden abhängt, während die Bijektivität von der Natur der Sprünge des Integratoren bestimmt wird.

Protters Buch gibt auf etwa 300 Seiten eine vollständige Einführung in die allgemeine stochastische Integrationstheorie für vorhersehbare Prozesse, zu der der Autor

wesentliche Beiträge geleistet hat. Es ist zur Zeit sicherlich die lesbarste Darstellung dieser Theorie, und man merkt auf jeder Seite die pädagogischen Bemühungen des Autors, dieses sehr technische Gebiet dem Leser zugänglich zu machen: Viele Kommentare und Querverweise sind über den ganzen Text verteilt, Beweise sind in leicht verdauliche Hapfen von i. allg. nicht mehr als einer Seite unterteilt, intuitive Zugänge wurden gegenüber kürzeren, aber mehr technischen Darstellungen bevorzugt (insbesondere im Kapitel III über die Grundlagen der *théorie général*), manche sonst sehr schwierigen Beweise erscheinen hier in ganz natürlicher Form (z. B. Strickers Satz, Kunita-Watanabe-Zerlegung, lokales Verhalten stochastischer Integrale, Boleau-Yor-Formel, Azémas Martingal). Diese relativ leichte Zugänglichkeit beruht sowohl auf dem pädagogischen Talent des Autors als auch auf dem Ansatz, stochastische Integrationstheorie auf dem Satz von Dellacherie und Bichteler aufzubauen. Ich würde nicht zögern, dieses Buch in einem Kurs für Diplomanden oder Doktoranden der Mathematik einzusetzen, obwohl eine Auslassung gerade unter den Ansprüchen des Autors unverständlich ist: Es werden keine Aufgaben oder Probleme angeboten, die eine Beschäftigung mit dem Material erleichtern, Vertiefungen andeuten (nicht alle Sätze werden hier in voller Allgemeinheit dargestellt, wie z. B. unbeschränkte vorhersehbare Prozesse, der Zusammenhang des Stratonovič-Integrals mit deterministischen Differentialgleichungen usw.), oder zusätzliche Querverbindungen zur klassischen Darstellung schaffen. Es bleibt dem Leser oder in einer Vorlesung dem Vortragenden überlassen, diese sicherlich sehr wünschenswerten Vertiefungen zu erarbeiten. (Angesprochen auf diese Kritik erwähnte Protter mir gegenüber, daß eine Aufgabensammlung in Vorbereitung ist.)

Das Buch ist geschrieben für Mathematiker mit gutem Hintergrundwissen in Wahrscheinlichkeitstheorie und zumindest einiger Vertrautheit mit Martingaltheorie, da verschiedene Ergebnisse aus diesem Gebiet lediglich zitiert werden. (Ethier und Kurtz [9] z. B. enthält all das erforderliche Material, aber deren trockener Stil ist nicht jedermanns Sache. Auch Williams' Buch [27] ist ausreichend und sehr leserlich, wenn man eine lebhaftere Darstellung bevorzugt.)

Protters „new approach“ zeigt darüber hinaus, wie ein anwendungsorientierter Zugang zu stochastischer Integrationstheorie und zu allgemeinen stochastischen Differentialgleichungen für Nichtmathematiker möglich sein dürfte. Sein Buch enthält keine „außermathematischen“ Anwendungen (er beschränkt sich auf Bemerkungen wie z. B. „This has interesting implications in Finance Theory (the theory of continuous trading)“), aber sie liegen an verschiedenen Stellen im Text nahe. Schließlich sei noch der Wunsch geäußert, daß ähnlich pädagogisch motivierte Darstellungen für andere, aktive Gebiete der modernen Theorie stochastischer Prozesse, wie z. B. den Malliavin-Kalkül oder die Theorie vorgegreifender Prozesse folgen mögen.

- [1] Bichteler, K.: Stochastic integration and L^p -theory of semimartingales. *Ann of Probability* 9 (1981) 49–89
- [2] Chung, K. L.; Williams, R. J.: *Introduction to Stochastic Integration*. Birkhäuser, 2nd ed. 1990
- [3] Dellacherie, C.: Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique, *Stochastic Processes and their Applications* 10 (1980) 115–144
- [4] Doléans-Dade, C.; Meyer, P. A.: *Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales*. Séminaire Prob. IV, *Lecture Notes in Mathematics* 124. Springer, 1970, 77–107
- [5] Doob, J. L.: *Stochastic Processes*. Wiley, 1953
- [6] Doss, H.: Liens entre équations différentielles stochastique et ordinaires. *Ann. Inst. H. Poincaré* 13 (1977) 99–125
- [7] Elliott, R. J.: *Stochastic Calculus and Applications*. Springer, 1982
- [8] Eméry, M.: *Stochastic Calculus on Manifolds*. Springer, 1990
- [9] Ethier, S. N.; Kurtz, T. G.: *Markov Processes: Characterization and Convergence*. Wiley, 1986
- [10] Gettoor, R. K.: *Excessive Measures*. Birkhäuser, 1990

- [11] Itô, K.: Stochastic integral. Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944) 519–524
- [12] Jacod, J.; Shiriyayev, A.: Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer, 1987
- [13] Karatzas, I.; Shreve, S. E.: Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer, 1988
- [14] Kunita, H.: Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations, Cambridge u. a.; CUP, 1990
- [15] Métivier, M.: Semimartingales: A Course on Stochastic Processes. Walter de Gruyter, 1982
- [16] Meyer, P.A.: A decomposition theorem for supermartingales. Illinois J. Math. **6** (1962) 193–205
- [17] Meyer, P. A.: Intégrales stochastiques I–IV. Séminaire Prob. I, Lecture Notes in Mathematics 39. Springer, 1967, 72–162
- [18] Meyer, P. A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire Prob. X, Lecture Notes in Mathematics 511. Springer, 1976, 246–400
- [19] Meyer, P. A.: Géométrie différentielle stochastique. Colloque en L'Honneur de Laurent Schwartz. Astérisque **131** (1985) 107–114
- [20] Revuz, D.; Yor, M.: Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer, 1990
- [21] Rogers, L. C. G., Williams D.: Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. 2: Itô Calculus. Wiley, 1987
- [22] Sharpe, M.: General Theory of Markov Processes. Academic Press, 1988
- [23] Stroock, D. W.; Varadhan, S. R. S.: On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. III, 333–359
- [24] Sussmann, J. J.: On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations. Ann. of Probability **6** (1978) 19–41
- [25] Wiener, N.: Differential space. J. of Mathematics and Physics **2** (1923) 131–174
- [26] Wiener, N.: The Dirichlet problem. J. of Mathematics and Physics **3** (1924) 127–146
- [27] Williams, D.: Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. 1: Foundations. Wiley, 1979

Nach dem Abfassen dieser Besprechung ist das Buch „Stochastic Integrals“ von H. von Weizsäcker und G. Winkler (Vieweg, 1990) erschienen. Ich hatte noch keine Zeit, dieses Buch ausführlich zu lesen, doch scheint es zum Teil von ähnlichen Prinzipien wie Protters Werk getragen zu sein.

Ames, Iowa

W. Kliemann

Emery, M., Stochastic Calculus in Manifolds (Universitext), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 168 S, softcover, DM 48,-

Das Buch gibt eine Einführung in die Theorie der stochastischen Prozesse auf Mannigfaltigkeiten. Es ist entstanden aus Vorlesungen des Autors, der seit Jahren in diesem Gebiet forscht und zahlreiche Beiträge zu dessen Entwicklung geleistet hat.

Im ersten Kapitel sind die wichtigsten Grundlagen aus der Theorie der reellwertigen Semimartingale und der stochastischen Integration zusammengefaßt. Für den Nicht-Wahrscheinlichkeitstheoretiker bietet ergänzend der Anhang, geschrieben von P. A. Meyer, eine hervorragende, konzentrierte Einführung in den stochastischen Kalkül. Im zweiten Kapitel wird einiges elementares Vokabular aus der Differentialgeometrie wiederholt. Doch empfiehlt es sich für den unbedarften Leser (wie der Autor selbst betont), ein Standardwerk aus diesem Gebiet als Begleitliteratur heranzuziehen.

In den darauffolgenden Kapiteln III–V werden Semimartingale auf beliebigen (C^∞ -) Mannigfaltigkeiten, dann Martingale auf Mannigfaltigkeiten mit affinem Zusammenhang und schließlich die Brownsche Bewegung auf riemannschen Mannigfaltigkeiten behandelt. Zunächst wird ausführlich die „Lokalisierung“ von Semimartingalen und der Begriff der b -quadratischen Variation eines Semimartingals für eine beliebige 2-form b besprochen. Dann wird sehr schön die Analogie zwischen Martingalen und Geodäten dargestellt, z. B. bei der Charakterisierung von affinen Zusammenhängen oder der von affinen bzw. konvexen Funktionen. Weitere Schwerpunkte sind die Charakterisierung, Konvergenz und „Nicht-Konfluenz“ von Martingalen auf Mannigfaltigkeiten. In dem Kapitel über Brownsche Bewegung werden neben harmonischen Abbildungen u. a. die

Beziehungen zwischen den verschiedenen Vollständigkeitsbegriffen studiert (i. e. die geodätische, Martingal- und Brownsche Vollständigkeit).

Kapitel VI und VII enthalten eine leicht verständliche Darstellung der „2nd order geometry“ von L. Schwartz und ihrer Anwendung auf Semimartingale $(X_t)_{t \geq 0}$ auf Mannigfaltigkeiten M . Die so erhaltene und der Intuition sehr nützliche Interpretation von dX_t als Vektorfeld zweiter Ordnung führt dann zur Definition eines stochastischen Integrals, dessen Integrand ein stochastischer Prozeß mit Werten in den Formen zweiter Ordnung und dessen Integrand das M -wertigen Semimartingale $(X_t)_{t \geq 0}$ ist. Anschließend wird (was nach diesen Vorbereitungen recht einfach geht) ein Stratonovich-Integral für 1-Form-wertige Semimartingale und im Fall, daß ein affiner Zusammenhang auf M gegeben ist, ein Itô-Integral für 1-Form-wertige stochastische Prozesse eingeführt. Letzteres ist möglich mit einer zuvor bewiesenen, sehr interessanten Charakterisierung von affinen Zusammenhängen mit Hilfe von „2nd-order-geometry“. In den genannten Fällen werden auch jeweils Existenz- und Eindeutigkeitsätze der zugehörigen stochastischen Differentialgleichungen bzw. Sätze über diskrete Approximationen bewiesen.

Das letzte Kapitel VIII behandelt (stochastische) Parallelverschiebungen und „moving frames“, zugehörige Itô/Stratonovich „depictions“ und „liftings“ von Semimartingalen auf einer Mannigfaltigkeit in den Tangentialraum.

Am Ende eines jeden Kapitels findet man Bemerkungen über die zugrundeliegende Literatur. Einen Terminology-Index sucht man jedoch vergeblich. Dafür sind die wichtigsten Ergebnisse am Anfang jedes Kapitels stichwortartig (und versehen mit den entsprechenden Nummern im Text) zusammenfaßt, was die Lektüre erheblich erleichtert.

Ich halte dieses Buch für eine schöne Einführung in die Theorie der stochastischen Prozesse auf Mannigfaltigkeiten. Obwohl es in erster Linie an Wahrscheinlichkeitstheoretiker gerichtet ist, bietet es (nicht zuletzt wegen des bereits erwähnten Anhangs von P. A. Meyer) auch Lesern aus anderen Gebieten der Mathematik einen schnellen Einstieg in diese Theorie. Da das Buch so konzipiert ist, daß zum Verständnis ein Minimum an geometrischem Vorwissen ausreicht, wird zwar ein Geometer manch wichtigen, in diesem Zusammenhang nützlichen geometrischen Begriff vermissen (z. B. wird die kovariante Ableitung nur am Rande erwähnt). Doch sollte es mit geringem Arbeitsaufwand möglich sein, z. B. bei der Vorbereitung einer Vorlesung auf der Grundlage dieses Buches für eine geometrisch besser vorgebildete Hörschaft, den Inhalt entsprechend zu modifizieren. (Hilfreich sind dabei sicherlich die zahlreichen Bemerkungen, in denen der Autor vieles in die Sprache der Vektorbündel übersetzt). Dieses Buch sollte in keiner mathematischen Bibliothek in der Abteilung Stochastik oder Geometrie fehlen.

Bonn

M. Röckner

Pinkus, A., On L^1 -Approximation, Cambridge University Press 1989, 239 S., \$ 44,50

Die lineare Theorie bester gleichmäßiger Approximation ist in Büchern ausführlich behandelt worden. Dies gilt nicht für die lineare Theorie der besten L^1 -Approximation. Das vorliegende Buch ist im wesentlichen eine Abhandlung über die qualitative Theorie der besten L^1 -Approximation durch endlich dimensionale Unterräume. Die Fragestellungen sind klassisch, aber erst in den letzten Jahren wurden viele davon beantwortet. Nun wird in diesem Buch die Fülle der neuen Ergebnisse zusammen mit den klassischen Ergebnissen dargestellt. Das Buch ist in sieben Kapitel eingeteilt. Nach jedem Kapitel sind Übungen angegeben, die Teil des Ganzen sind. Die Kapitel enden mit Hinweisen auf die Originalliteratur.

Kapitel 1 behandelt zunächst allgemeine Ergebnisse aus der Approximationstheorie. Es werden Fragen der Existenz, Eindeutigkeit und Charakterisierung des besten Approximationsoperators betrachtet.

Kapitel 2 untersucht die Approximation von Funktionen in $L^1(B, \nu)$ durch endlich dimensionale Unterräume. Zunächst wird das Hauptkriterium für beste Approximationen durch lineare Räume angegeben. Dann wird eine Variante für endlich dimensionale Unterräume U von $L^1(B, \nu)$ gezeigt. Im Beweis wurde dabei ein Satz von Liapounoff benutzt. Gerade diese Variante hat sich als besonders fruchtbar erwiesen. Die Frage der Eindeutigkeit der besten Approximation muß in diesem allgemeinen Fall zunächst negativ beantwortet werden. Es gibt stets Funktionen, die mehrdeutige beste Approximationen besitzen. Die Menge dieser Funktionen ist sogar dicht. Außerdem existieren keine stetigen Selektionen.

Kapitel 3 beschäftigt sich daher mit der Approximation stetiger Funktionen; denn in diesem Fall stellt sich die Situation der Eindeutigkeit ganz anders dar. Sei $C(K)$ der Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen, die auf einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^d$ definiert sind, wobei K gleich dem Abschluß seines Inneren ist. Dann sei $C_1(K, \mu)$ der Raum $C(K)$ versehen mit der Norm $\|f\|_1 = \int_K |f| d\mu$. Im folgenden wollen wir einen endlich dimensionalen Unterraum U von $C_1(K, \mu)$ einen Eindeutigkeitsraum nennen, wenn jede Funktion in $C_1(K, \mu)$ eine eindeutige beste Approximation aus U besitzt. Zunächst wird eine genaue Charakterisierung jener Funktionenräume angegeben, die Eindeutigkeitsräume sind. Für den Fall, daß kein Eindeutigkeitsraum vorliegt, wird die Größe der Funktionenmenge untersucht, deren Elemente eine eindeutige beste Approximation besitzen. Außerdem wird das Problem stetiger Selektionen betrachtet.

Die Kriterien von Kapitel 3 besitzen allerdings auch Nachteile. Sie sind schwer nachweisbar und vom Maß μ abhängig. In Kapitel 4 werden daher Räume mit der sogenannten *Property A* eingeführt. Ein Unterraum U erfüllt *Property A* genau dann, wenn U ein Eindeutigkeitsraum für eine große Klasse von Maßen ist. Es werden allgemeine Folgerungen von *Property A* angegeben. Daraus ergibt sich für $K \subset \mathbb{R}^d$ eine völlige Charakterisierung der Unterräume mit *Property A*. Für $K \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ist eine allgemeine Charakterisierung nicht bekannt. Doch es werden viele wichtige Teilergebnisse gezeigt. Die leichte Anwendbarkeit der obigen Sätze wird an einer Reihe von Beispielen demonstriert. Es wird nachgewiesen, daß Räume von Splinefunktionen und zusammengesetzte Tschebyscheffsysteme Eindeutigkeitsräume sind. Es wird aber auch ein Beispiel für Funktionen in zwei Variablen angegeben.

Kapitel 5 betrachtet das Problem der besten einseitigen L_1 -Approximation (von unten). Dieses Problem wurde in letzter Zeit intensiv untersucht. Es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen L_1 -Approximation und einseitiger L_1 -Approximation. Hier wird durch eine konvexe Menge eines endlich dimensionalen Raums approximiert, die abhängig von der zu approximierenden Funktion ist. Außerdem sind die Ergebnisse hinsichtlich Eindeutigkeit und Charakterisierung der besten Approximationen anders geartet. Falls man stetige Funktionen approximiert, existieren für die gebräuchlichen Unterräume stets Funktionen, die mehrere beste Approximationen besitzen. Es wird nachgewiesen, daß die Eindeutigkeitsräume in gewissen Sinne trivial sind. Falls man sich aber auf die Klasse der stetig differenzierbaren Funktionen $C^1(K)$ beschränkt, erhält man wesentlich andere Ergebnisse. Es zeigt sich, daß ein Unterraum U eine sogenannte *Property B* genau dann erfüllt, wenn für jedes zulässige Maß μ eine eindeutige, beste einseitige Approximation von U an jedes $f \in C^1(K)$ existiert. Die *Property B* wird intensiv untersucht und es werden eine Reihe von Beispielen angegeben.

In Kapitel 6 wird auf diskrete Approximation im \mathbb{R}^m eingegangen. Es werden die theoretischen Probleme der ein- und zweiseitigen $I_1^m(\omega)$ -Approximation diskutiert. Die Ergebnisse sind im wesentlichen eine Verallgemeinerung oder Spezialisierung der früheren Resultate. Es gehen aber auch einige Eigenschaften verloren.

Kapitel 7 befaßt sich schließlich mit Algorithmen zur besten zwei- und einseitigen L^1 -Approximation. Verschiedene Möglichkeiten werden aufgezeigt, um die besten Approximationen zu berechnen. Eine Methode verwendet die Theorie der Subgradienten. Zu diesem Zweck werden Gradienten und Subgradienten kurz diskutiert. Zunächst wird das Problem der diskreten Approximation behandelt. Diese Aufgaben können durch Methoden der linearen Optimierung gelöst werden. Bei der zweiseitigen Approximation werden jedoch Algorithmen angegeben, die auch die spezielle Situation des Approximationsproblems berücksichtigen. Dann wird beste einseitige und zweiseitige L^1 -Approximation im Fall stetiger, kontinuierlicher Funktionen betrachtet. Neben Diskretisierungsverfahren werden Subgradientenmethoden und schließlich auch Newtonverfahren untersucht.

Dem Buch sind noch zwei Kapitel als Anhang hinzugefügt.

In Anhang A werden Tschebyscheffsysteme und schwache Tschebyscheffsysteme betrachtet. In sehr übersichtlicher Weise ist eine Reihe von Ergebnissen, die in früheren Kapiteln benötigt wurden, zusammengestellt. Da schwache Tschebyscheffsysteme in der L^1 -Approximation eine größere Bedeutung besitzen, wurden sie ausführlicher behandelt.

Anhang B untersucht L^1 -Approximation für Funktionen aus einem Konvexitätskegel. Dies sind Funktionen f , so daß zu einem schwachen Tschebyscheffraum U auch span $\{U, f\}$ schwach tschebyscheffsch ist. In diesem Fall hat das (einseitige) Approximationsproblem einen speziellen Charakter. Im Fall zweiseitiger Approximation erhält man für Funktionen im Konvexitätskegel die beste Approximation durch Interpolation in bestimmten kanonischen Punkten. Diese Theorie wird hier entwickelt. Danach wird eine entsprechende Theorie für das Problem einseitiger Approximation dargestellt. Schließlich wird noch ein Zusammenhang zur Momententheorie angegeben.

In diesem hervorragend geschriebenen Buch ist die aktuelle Forschung in der L^1 -Approximation in einer sehr abgerundeten Form wiedergegeben. Viele Ergebnisse aus den Kapiteln 4 und 5 und Teile aus den Kapiteln 3 und 6 wurden erst kürzlich gewonnen. Das Buch enthält auch hochinteressantes und ganz aktuelles Material, das sich bisher noch nirgends findet. Bestechend ist dabei die Klarheit und die Übersichtlichkeit, mit der die Ergebnisse dargestellt sind. Auch umfangreiche und komplizierte Beweise sind sehr gut lesbar. Hervorzuheben ist außerdem die Illustration der Theorie durch viele wichtige Beispiele. Daher spricht das Buch einen großen Leserkreis an.

Alles in allem beeindruckt das Werk sehr durch die umfassende Wiedergabe der bekannten Ergebnisse und durch die Eleganz und Durchsichtigkeit der Darstellung.

Erlangen

H. Strauß

Hernández-Lerna, O., Adaptive Markov Control Processes, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 148 S., DM 78,-

Das vorliegende Buch befaßt sich mit einer Klasse von zeitdiskreten Steuerungsprozessen, die in der Literatur als gesteuerte Markovsche Prozesse bekannt sind. Ebenfalls üblich sind die Bezeichnungen Markovsche Entscheidungsprozesse und Markovsche Dynamische Programme.

Die Steuerungstheorie ist ein Zweig der sich rasch entwickelnden und weit verbreiteten Systemtheorie. Aus einer intuitiven Perspektive beschäftigt sich diese unter anderem mit der Analyse qualitativer und quantitativer Phänomene, die sich als zeitabhängige Prozesse darstellen lassen und in einem Objekt – dem System – stattfinden. Ferner sucht sie das nötige Instrumentarium zur Verfügung zu stellen, mit dem eine zieladäquate Beeinflussung der Prozedynamik möglich ist.

Man geht dabei von zwei Mengen X und A aus, die mit den σ -Algebren \mathcal{B} und \mathcal{A} der meßbaren Untermengen von X bzw. A ausgestattet sind. Das heißt, man startet mit zwei meßbaren Räumen (X, \mathcal{B}) , dem Zustandsraum des Grundprozesses, und (A, \mathcal{A}) , dem Raum der Interventionen, Aktionen oder Steuerungen.

N bezeichne die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen, \mathcal{B}^N bzw. \mathcal{A}^N jeweils die σ -Algebren auf X^N bzw. A^N , die von der entsprechenden Zylindermenge erzeugt werden. Für $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in X^N$ und $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in A^N$ interpretiert man x_n bzw. a_n als die Zustandswerte des Grundprozesses bzw. der Intervention oder Steuerung zur Zeit n .

Wenn das betrachtete System Änderungen stochastischer Natur unterliegt, benötigt man zur Bestimmung eines gesteuerten Prozesses:

Erstens, eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mu(\cdot|\cdot)$ auf \mathcal{B}^N , die mittels einer Familie von bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p = \{p_n(dx_n|x_0, \dots, x_{n-1}; a_0, \dots, a_{n-1}), n = 1, 2, \dots\}$ bestimmt wird. Die Familie $\{\mu(\cdot|a), a \in A^N\}$ definiert ein gesteuertes Objekt.

Zweitens, eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\nu(\cdot|x)$ auf \mathcal{A}^N , die ebenfalls mittels einer Familie von bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen $q = \{da_n|x_0, \dots, x_n; a_0, \dots, a_{n-1}, n = 0, 1, \dots\}$ bestimmt wird. Die Familie $\{\nu(\cdot|x), x \in X^N\}$ definiert eine Steuerungsstrategie.

Unter angemessenen Bedingungen konstruiert man einen (stochastischen) gesteuerten Prozeß $(\xi, \alpha) = \{(\xi_n, \alpha_n) \in X \times A, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Genauer gesagt existiert für jedes gesteuerte Objekt μ und jede Strategie ν ein gesteuerter Grundprozeß $\xi = \{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ und eine Steuerungsfolge $\alpha = \{\alpha_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, für die eine eindeutige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $X^N \times A^N$ im Sinne von Kolmogorov konstruiert werden kann. Wenn der gesteuerte Prozeß (ξ, α) zur Verfügung steht, wird die Frage nach den optimalen Steuerungsstrategien zum grundlegenden Problem der Steuerungstheorie.

Um dieser Frage nachzugehen, konzentriert man sich auf eine Familie von zulässigen Steuerungsstrategien \mathfrak{A} , d. h. eine Familie von Steuerungsstrategien $\nu(\cdot|\cdot)$ mit deren Hilfe ein gesteuertes Objekt $\mu(\cdot|\cdot)$ mit der gewünschten Eigenschaft bestimmt werden kann.

Um eine optimale Steuerung auszuwählen, wird ein in Bezug auf $\mathcal{B}^N \times \mathcal{A}^N$ meßbares Funktional $r(x, a)$ auf $X^N \times A^N$ eingeführt, das die Steuerungskosten bzw. das Interventionsentgelt beschreibt. \mathbf{E} , bezeichne für eine ausgewählte Steuerungsstrategie die mathematische Erwartung in Bezug auf dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß, das mit dem gesteuerten Prozeß (ξ, α) assoziiert ist. Verwendet man die Steuerung $\nu(\cdot|\cdot)$, werden die entstehenden Steuerungskosten bzw. das resultierende Entgelt durch die Beziehung

$$J(\nu) = \mathbf{E}, r(\xi, \alpha) \tag{1}$$

beschrieben. Daher besteht das Optimierungsproblem darin, eine Strategie $\nu(\cdot|\cdot) \in \mathfrak{A}$ zu wählen, mit deren Hilfe (1) ihren minimalen Wert erreicht.

Geht es um ein System, bei dessen Beschreibung entscheidende Information entweder fehlt oder unzureichend ist, so spricht man von einem adaptiven Steuerungsproblem. Aus diesem Grund führt man einen Parameter θ ein, dessen Werte gemäß der neu gewonnenen Information angepaßt werden.

Die Bezeichnung „Steuerungsmodell“ bezieht sich auf die Zusammenfassung der eingeführten Instrumente in ein Tupel der Form (X, A, p, q, r, θ) und die Kennzeichnung der Komponenten durch dem Steuerungsziel entsprechende Eigenschaften, z. B. ist X ein vollständiger separabler metrischer Raum, p markovsch und ähnliches.

Das Buch besteht aus 6 Kapitel und 4 kurzen Anhängen, die dem Leser einen raschen Zugriff auf einige oft auftretende Begriffe und Sätze aus der Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie ermöglichen. Kapitel 1 stellt wesentliche Aspekte des Markov-Steuerungsmodells (MCM) und seine wichtigen Varianten dar. Darüberhinaus werden

zusätzliche Grundzüge des Steuerungsprinzips anhand einer Reihe sehr interessanter Beispiele erläutert, die einen Einblick in Anwendungsbereiche wie zum Beispiel Lagerhaltungs- und Produktionssysteme, Steuerung von Wasserreservoirs, Bewirtschaftung von erneuerbaren Naturressourcen vermitteln.

Die Kapitel 2 bis 4 sind der Behandlung von MCM-Fragen mit diskontierten und Durchschnittsteuerungskosten sowie unvollständigen Informationen gewidmet. Diese Kapitel beginnen mit einer sehr klaren Einführung des Steuerungsproblems und geben weiterhin eine Übersicht der jeweiligen Optimalitätsbedingungen. Ferner werden verschiedene Approximationsverfahren und Wertiterationsmethoden ausführlich diskutiert, wobei die Aufmerksamkeit insbesondere auf Fragen der adaptierten Steuerung gerichtet ist.

Im Fall von MCM mit unvollständiger Information, wie es vor allem bei Zustandsprozessen vorkommt, die nur zum Teil beobachtet werden können, wird in den Fall von MCM mit vollständiger Information umgewandelt und anschließend mit den in den vorangehenden Kapiteln eingeführten Methoden behandelt. In den letzten beiden Kapiteln werden die dazugehörigen Parameterschätzungs- und Diskretisierungsmethoden untersucht. Zwei Beispiele erläutern in Kapitel 5 einige Merkmale der Kontrastfunktion und ihre Rolle bei der Parameterschätzung. Rekursive und nichtrekursive Verfahren führen über die Diskretisierung zu einer Art von Schätzungs- und Steuerungsprinzip, das die adaptiven Steuerungsstrategien umfaßt.

Alle Kapitel schließen mit Bemerkungen und Literaturhinweisen, die einen sehr guten Einblick in die Entwicklung, Ziele und verwandte Fragen der adaptierten Markov-Steuerung vermitteln. Insgesamt bietet dieses Buch eine kurze und schöne Darstellung einiger sehr aktueller Fragen des Gebiets der adaptiven Steuerung mit diskreter Zeit, insbesondere derjenigen, bei denen der Verfasser entscheidend mitgewirkt hat.

Erlangen

G. Gómez

Horst, R., Hoang Tuy, Global Optimization – Deterministic Approaches, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1990, 696 S., 55 Abb., 6 Tab., DM 220,-

Im Gegensatz zur gewöhnlichen Optimierungstheorie für nichtlineare Probleme beschäftigt sich die globale Optimierung mit der Bestimmung eines oder mehrerer globaler Optima bei Problemen mit mehreren lokalen, Lösungen. Die Standardtechniken der nichtlinearen Optimierung liefern dagegen höchstens lokal optimale Lösungen. Im Vergleich zur lokalen Optimierung ist die globale Optimierung noch ein recht junges Forschungsgebiet. Neben vereinzelten früheren Arbeiten begann eine intensive Forschungstätigkeit auf diesem Gebiet erst Ende der siebziger Jahre. So ist es auch nicht verwunderlich, daß erst wenige Bücher über globale Optimierung vorliegen.

Dieses seit längerem erwartete Buch trifft auf eine echte Lücke in der mathematischen Buchliteratur. Umfangreichere Darstellungen der deterministischen Verfahren zur globalen Optimierung liegen im englischen Sprachraum bisher sonst nur in Originalarbeiten oder in knapper Übersichtsform ohne Beweise vor.

Das vorliegende Buch ist in drei große Abschnitte gegliedert: Teil A: Einführung und grundlegende Techniken, Teil B: Konkave Minimierung und einem kurzen Teil C: Allgemeine nichtlineare Optimierung.

Im Teil A werden, nach einer kurzen Charakterisierung einiger globaler Optimierungsprobleme (konkave Probleme, D.C.-Probleme, also solche, bei denen sich die Zielfunktion in eine Differenz konvexer Funktionen zerlegen läßt, und Probleme mit lipschitzstetigen Funktionen) die grundlegenden Techniken der äußeren Approximation, der Konkavitäts-Schnitte, und von Branch and Bound (BB) eingeführt.

Im Teil B werden Schnittmethoden, sukzessive Approximationsmethoden, und Subdivisionsmethoden für konkave Minimierungsprobleme betrachtet. Auch die für die praktische Anwendung wichtige Zerlegung großer Probleme in handlichere wird eingehend erörtert. Ein Kapitel über spezielle Probleme der konkaven Optimierung schließt Teil B ab.

Teil C enthält eine kurze Betrachtung nicht-konkaver Probleme. Einer Betrachtung von Verfahren für D. C.-Probleme schließt sich ein Kapitel über Lipschitz-Probleme an, in dem im wesentlichen das klassische Verfahren von Piyavkii und Shubert und seine Varianten beschrieben werden. Weiter wird gezeigt, daß sich viele der klassischen Methoden unter ein einheitliches BB-Schema fassen lassen. Teil C wird mit der Beschreibung einer neuen konzeptionellen Methode von Thach und Tuy abgeschlossen.

Viele eingestreute Beispiele erleichtern das Verständnis der behandelten Sätze und Methoden und viele Verfahren sind in verständlichem Pseudocode beschrieben. Dagegen sind nur wenige numerische Tests zu finden, aus denen man etwas über die Effizienz der Verfahren entnehmen kann. Überhaupt fehlen Aufwandsbetrachtungen und eine gewisse Bewertung der verschiedenen Verfahren fast völlig.

Trotz seines Umfangs bietet das Buche keineswegs einen Überblick über die deterministischen Verfahren der globalen Optimierung. Stattdessen konzentrieren sich die Autoren auf konkave Minimierungsprobleme, also auf Probleme, bei denen eine konkave Zielfunktion über einer konvexen Menge zu minimieren ist. Diese Auswahl mag aus zwei Gründen gerechtfertigt sein: Zum einen ist diese Problemklasse für die praktische Anwendung sehr wichtig, und viele Probleme die zunächst nicht diese Form haben, lassen sich in ein solches Problem transformieren. Zum anderen lassen sich diese Probleme in Form von Sätzen und Beweisen einigermaßen einheitlich und systematisch behandeln. Es ist den Autoren gelungen, viele verstreute Ansätze unter einheitlichen Gesichtspunkten darzustellen und die Gemeinsamkeiten und Beziehungen dieser Ansätze zueinander herauszuarbeiten.

Der Satz des Buches hätte im Zeitalter der computerisierten Satzsysteme besser sein können und amerikanische Rezensoren werden sicher das Fehlen von Übungsaufgaben bemängeln. Für den Forscher auf diesem Gebiet aber wird dieses Buch ein willkommenes Nachschlagewerk werden.

Göttingen

I. Diener

Grimmett, G., Percolation, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 320 S, DM 98,-

Das Thema des Buches ist die Kantenperkolation in \mathbb{Z}^d , einem der aktivsten Felder der Wahrscheinlichkeitstheorie in den 80er Jahren. Perkolation bedeutet, mit jeder Kante ist eine Zufallsvariable assoziiert, die sagt, ob eine Kante offen oder geschlossen ist, und zwar mit Wahrscheinlichkeit p . Es bezeichne $\theta(p)$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Menge aller Punkte, die sich durch einen offenen Pfad mit 0 verbinden lassen, unendlich ist. Dann existiert ein kritischer Wert p_c , so daß $\theta(p) = 0$ für $p < p_c$ und $\theta(p) > 0$ für $p > p_c$. Von besonderem Interesse ist nun p_c zu bestimmen, z. B. das berühmte Resultat von H. Kesten $p_c = 1/2$ in \mathbb{Z}^2 und das Verhalten für $p \rightarrow p_c$ zu studieren; es zeigt sich nämlich, daß die Kantenperkolation ein Modell liefert, an dem man hoffen kann, Konzepte der mathematischen Physik wie Phasenübergang, Potenzgesetze, kritische Exponenten und Universalität rigoros abzuleiten. Damit gemeint ist eine genauere Untersuchung des Verhaltens am kritischen Punkt. Es wird vermutet, daß am kritischen Punkt interessante Größen wie zum Beispiel die erwartete Clustergröße wie eine Potenz divergiert, daß $\theta(p)$ wie eine Potenz für $p \downarrow p_c$ verschwindet und daß die auftauchenden Exponenten nur von der Dimension, aber nicht von der Graphenstruktur abhängen. Der kritische Wert selbst ist

natürlich extrem abhängig sowohl von der Dimension, als auch Einzelheiten der Graphenstruktur.

Das Buch beginnt mit einer Einführung in diese Zusammenhänge (Kap. 1). In Kap. 2 werden die wichtigsten mathematischen Instrumente, FKG-Ungleichung, BK-Ungleichung und Russos Formel entwickelt. Im dritten Kapitel werden zwei Beweise gegeben für die Tatsache, daß für $p < p_c$ die erwartete Größe des Clusters, das die 0 enthält, endlich ist. Kap. 4 befaßt sich mit der Zahl offener Cluster pro Punkt. In Kap. 5 werden dann die Eigenschaften im Bereich $p < p_c$ hergeleitet, Korrelationslänge, Verteilung der Clustergröße etc. Das nächste Kapitel behandelt den superkritischen Bereich $p > p_c$, es wird die Eindeutigkeit des unendlichen Clusters hergeleitet. Das Kapitel schließt mit Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktionen $\theta(\cdot)$, $\chi^f(\cdot)$ = erwartete Clustergröße bedingt auf die Endlichkeit des Clusters. In den Kapiteln 7, 8 wird das Verhalten nahe am kritischen Punkt diskutiert und eine Einführung in die Skalierungstheorie und Renormalisierung, wie sie in der Physik kursiert, gegeben. Das Kap. 9 enthält den Beweis des oben erwähnten Sachverhaltes $p_c = 1/2$ in $d=2$. Kap. 10 diskutiert einige Erweiterungen wie Perkolation mit langer Reichweite, elektrische Netzwerke und „first passage“-Perkolation. Leider enthält das Buch kein Kapitel über gerichtete Perkolation und die Anwendung von Techniken aus der Perkolation in der Theorie von Wachstumsprozessen wie z. B. dem Kontaktprozeß. Das Buch behandelt auch wichtige Resultate, die erst nach dem Erscheinen von Kestens Buch „Percolation for Mathematicians“ erzielt wurden.

Zwei Dinge fallen an dem Buch auf. Einmal die große Sorgfalt, die darauf verwendet wird, die Perkolation im Zusammenhang mit den Fragestellungen der statistischen Physik zu sehen, das Kap. 7 über Skalierungstheorie ist hier besonders ausgezeichnet. Zum zweiten werden die Beweise gut motiviert und eine einfache Heuristik wird jeweils vorangestellt. Weiterhin bringt die Beschränkung auf Kantenperkolation in \mathbb{Z}^d es mit sich, die Lesbarkeit für den Nichtexperten ganz entscheidend zu erhöhen und damit hoffentlich das Gebiet insgesamt populärer zu machen. Literaturverzeichnis und Index erscheinen vollständig und erleichtern den Zugang für Leser mit speziellen Interessen.

Von den Voraussetzungen her ist es möglich, mit dem Buch als Grundlage ein Seminar abzuhalten, dessen Hörer nicht mehr Vorkenntnisse, als eine elementare Einführung in die Stochastik benötigen. Auf der anderen Seite bieten insbesondere die Kapitel, die sich mit dem Verhalten am kritischen Punkt beschäftigen, genügend Stoff für Veranstaltungen auf fortgeschrittenem Niveau. Es ist schade, daß das Kapitel 10 über elektrische Netzwerke, „first passage“-Perkolation nicht etwas ausführlicher geraten ist, insgesamt ist das Buch aber sehr zu empfehlen.

Göttingen

A. Greven

Nguyen, H. T., Rogers, G. S., Fundamentals of Mathematical Statistics (Vol. 1: Probability for Statistics, Vol. 2: Statistical Inference) (Springer Texts in Statistics), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 440 S./425 S., DM 84,- pro Band

Dies ist ein Text für eine zweisemestrige Kursusvorlesung über Mathematische Statistik.

Er beginnt mit einer (im wesentlichen maßtheoriefreien) Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und führt hin bis zu klassischen Lehrstücken der Mathematischen Statistik wie etwa der Theorie der gleichmäßig besten unbiased Tests. Das Besondere an diesem Werk ist die Gliederung des Stoffs in 97 je in sich geschlossene „Lektionen“ – eine Lektion kann dabei in einer etwa einstündigen Vorlesung abgehandelt werden. Die Autoren haben 22 Lektionen gekennzeichnet, die ausgelassen werden können, ohne spürbare Lücken

aufzureißen. Diese Gliederung des Stoffs kommt den Besonderheiten des Fachs sehr entgegen; sie ermöglicht eine größere Breite unter Verzicht auf Systematik. Insbesondere ist anzuerkennen, daß die eigentliche Statistik hier keineswegs nur als Anhängsel zur Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt wird, sondern daß statistische Themen wie Tests und Konfidenzbereiche in Spezialfällen schon frühzeitig behandelt werden. Allgemein bemühen sich die Autoren, Begriffe und Methoden aus konkreten Beispielen heraus zu entwickeln. Als (zwangsläufigen) Nachteil kann man dabei empfinden, daß bei diesem Konzept nicht alle Gegenstände gründlich genug behandelt werden können und oft auf Beweise verzichtet werden muß. Auch tritt bei dieser Konzeption der Pluralismus statistischer „Prinzipien“, zur Genüge bekannt aus der Lehrbuchliteratur, hier stärker und verwirrender hervor: neben logisch begründbaren statistischen Verfahren werden solche vorgestellt, die nur auf „heuristischen“ Prinzipien beruhen, wie Likelihood-Quotienten-Tests und Maximum-Likelihood-Schätzer. Man sollte daher vielleicht ernsthaft in Betracht ziehen, in *einführenden* Vorlesungen auf heuristische Prinzipien gänzlich zu verzichten. So könnte die Konstruktion von statistischen Verfahren mehr an formulierbaren Zielen, wie z. B. der Robustheit, von der im vorliegenden Werk übrigens gar keine Rede ist, als an geheimnisvollen Likelihood-Prinzipien orientiert werden.

Das Werk ist in der vorliegenden Form mit Bedacht als Grundlage für Vorlesungen für Mathematik-Studenten zu verwenden; die zugrundeliegende Konzeption ist zur Erprobung und Weiterentwicklung zu empfehlen.

Heidelberg

D. W. Müller

Reiss, R. D., Approximate Distributions of Order Statistics (Springer Series in Statistics), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 360 S., DM 124,-

Verteilungen von Ordnungsstatistiken zu unabhängigen und identisch verteilten reellen Zufallsvariablen lassen sich zwar explizit mit Hilfe der zugrundeliegenden Verteilungsfunktionen bzw. Dichten beschreiben, die dabei auftretenden analytischen Ausdrücke erweisen sich aber häufig als sehr unhandlich. Infolgedessen sind Approximationen durch einfachere Verteilungen mit expliziten Fehlerschranken von theoretischem und praktischem Interesse. Die vorliegende Monographie enthält eine einheitliche Theorie derartiger Approximationen zusammen mit verschiedenen Anwendungen von Ordnungsstatistiken im Rahmen statistischer Modelle, an deren Entwicklung der Verfasser in den letzten fünfzehn Jahren einen entscheidenden Anteil hatte.

Das Buch ist in drei Teile mit insgesamt zehn Kapiteln gegliedert, denen ein kurzes, einleitendes Kapitel 0 vorangestellt ist. Einige technische Resultate sind in drei Anhängen zusammengefaßt. Jedem Kapitel sind Übungsaufgaben und Ergänzungen, häufig mit Literaturhinweisen versehen, beigelegt. Separate bibliographische Anmerkungen machen nicht nur die Bezüge zur Literatur deutlich, sondern zeigen auch historische Entwicklungen auf. Das Literaturverzeichnis weist knapp 240 Titel meist jüngerer Datums aus, und das Sachverzeichnis ist hinreichend detailliert für eine sinnvolle Nutzung.

Charakteristisch für die dargestellten Approximationen ist die Verwendung des Hellingerabstands oder der Variationsnorm als Abstandsmaß für Verteilungen anstelle des üblicherweise in klassischen Grenzwertsätzen der Stochastik betrachteten (schwächeren) Kolmogorov-Smirnov-Abstands für Verteilungsfunktionen. Auf diesen Ansatz, der etwa bei mehrdimensionalen Verteilungen vorteilhaft ist, wenn die Dimension mit dem Stichprobenumfang wächst, bereitet Kapitel 0 den Leser vor. Hier werden auch das unterschiedliche Verhalten zentraler und extremer Ordnungsstatistiken sowie die Einschränkung auf den Fall unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariabler diskutiert.

Teil I behandelt unter der Überschrift „Exact Distributions and Basic Tools“ einige grundlegende Eigenschaften von Ordnungsstatistiken (in Kapitel 1 z. B. exakte unbedingte und bedingte Verteilungen, die Markoveigenschaft, Momente und Darstellungen vom Rényi-Typ) sowie die für die Gewinnung von Approximationen benötigten Hilfsmittel (in Kapitel 3 z. B. stochastische Ungleichungen, das Konzept asymptotischer Entwicklungen und die verschiedenen Abstands begriffe für Verteilungen, insbesondere den Hellingerabstand und die Variationsnorm mit ihren später benötigten Eigenschaften). Als beweistechnisches Hilfsmittel findet bei der Herleitung von exakten wie später von approximativen Verteilungen durchweg die Methode der Quantiltransformation Verwendung, die eine Reduktion auf Spezialfälle wie den der Gleich- oder Exponentialverteilung gestattet und dadurch zu einheitlich strukturierten Beweisen führt. Die Grundlagen dieser leistungsfähigen Methode zur Behandlung unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen werden in Kapitel 1 in sehr ausführlicher Form dargestellt.

Teil II über „Asymptotic Theory“ bildet in theoretischer Hinsicht den Hauptteil des Buches. In Kapitel 4 wird zunächst die Normalverteilungsapproximation für eine oder mehrere Ordnungsstatistiken vorgestellt; anschließend stehen asymptotische Entwicklungen höherer Ordnung im Mittelpunkt. Kapitel 5 ist den extremen Ordnungsstatistiken gewidmet. Nach einer allgemeinen Einführung in die Grenzwertsätze der Extremwerttheorie folgen Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit im Hellingerabstand und asymptotische Entwicklungen in der Variationsnorm für die k größten Extremwerte. Die Leistungsfähigkeit von asymptotischen Entwicklungen in diesem Bereich demonstriert das Beispiel des Maximums von normalverteilten Zufallsvariablen (Seite 172 ff.), in dem die Entwicklung bis zur Ordnung zwei für den Stichprobenumfang 40 eine bessere Approximation der wahren Verteilung liefert als es die Gumbel-Grenzverteilung beim Stichprobenumfang 400 vermag. Kapitel 6 bringt in seiner ersten Hälfte Anwendungen von Ergebnissen aus den Kapiteln 4 und 5 auf die Momentenkonvergenz bei Ordnungsstatistiken und auf die Approximation von Verteilungen von Funktionen von Ordnungsstatistiken. In der zweiten Hälfte werden Approximationen eines gänzlich anderen Typs besprochen, nämlich die Bahadur-Approximation zwischen empirischer Verteilungs- und Quantilfunktion sowie die Bootstrap-Approximation für empirische Quantile.

Teil III ist mit „Statistical Models and Procedures“ überschrieben und enthält Anwendungen von Ordnungsstatistiken in verschiedenen Gebieten. In Kapitel 8 sind dies z. B. Kernschätzer für empirische Quantile und die Bootstrap-Approximation für empirische Quantile basierend auf geglätteten empirischen Verteilungsfunktionen bei glatter wahrer Verteilungsfunktion, die der Bootstrap-Approximation aus Kapitel 6 überlegen ist, bei der die klassische empirische Verteilungsfunktion verwendet wurde. Kapitel 9 beschäftigt sich u. a. mit der Schätzung des Index der Grenzverteilung in Modellen der Extremwerttheorie, während in Kapitel 10 die approximative Suffizienz einer kleinen Anzahl von Ordnungsstatistiken studiert wird.

In den bisher angesprochenen Kapiteln werden ausschließlich Ordnungsstatistiken zu Zufallsvariablen mit Werten in der reellen Zahlengeraden mit der natürlichen Ordnung betrachtet. Die Kapitel 2 und 7 dagegen führen in die Theorie der Ordnungsstatistiken für Zufallsvektoren im R^d mit $d > 1$ ein. Da keine natürliche Ordnung mehr ausgezeichnet ist, gibt es verschiedene Ansätze zur Definition von Ordnungsstatistiken in dieser Situation, von denen einige vorgestellt werden. Das Schwergewicht liegt auf Aussagen über exakte und asymptotische Verteilungen von komponentenweise definierten Ordnungsstatistiken.

Die Monographie bietet professionellen Stochastikern eine Fülle von Informationen über Ordnungsstatistiken, die bisher noch nicht in Buchform verfügbar waren. An vielen Stellen wird der Leser, z. T. anhand von neuen Resultaten, an die aktuelle Forschung herangeführt. Da nicht nur Extremwerte behandelt werden und der Verfasser dort, wo er Extremwerttheorie betreibt, immer den quantitativen Aspekt der Approximationsgüte

betont, sind die Überschneidungen mit neueren Darstellungen der Extremwerttheorie von Galambos, Leadbetter-Lindgren-Rootzén und Resnick minimal.

Das Buch ist auch Studenten höherer Semester zugänglich, sofern sie die mit asymptotischen Entwicklungen notwendigerweise verbundene Analysis meistern können und etwas mehr als nur oberflächliche Kenntnisse in Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischer Statistik mitbringen. Daneben ist die Bereitschaft zu einem ergänzenden Blick in die Literatur gelegentlich hilfreich: Die asymptotische Überlegenheit einer geglätteten empirischen Verteilungsfunktion über die klassische Version bei zugrundeliegender glatter Verteilungsfunktion ist z. B. in der zitierten Originalarbeit des Verfassers ausführlicher erklärt als auf Seite 262 ff. der vorliegenden Monographie.

Insgesamt gesehen stellt das Buch einen wichtigen Beitrag zur Literatur über Ordnungsstatistiken und ihre Anwendungen dar, den jeder an diesem Teilgebiet der Stochastik Interessierte in seine „Werkzeugkiste“ aufnehmen sollte.

München

E. Häusler

Pruscha, H., Angewandte Methoden der Mathematischen Statistik, Lineare, loglineare, logistische Modelle (Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik), Stuttgart: B. G. Teubner 1989, 391 S., Kart., DM 49,-

Der vorliegende Text will aus den mathematischen Grundlagen der Stochastik heraus die einzelnen Verfahren bis zur anwendbaren Formel hin mathematisch deduktiv ableiten und mit praxisbezogenen Hinweisen sowie Fallstudien die numerische Anwendung illustrieren. Dies gelingt in beeindruckendem Umfang.

Die ersten beiden Kapitel umfassen vorbereitende Grundlagen, einschließlich Überlegungen zur Planung des Stichprobenumfangs. Kapitel 3–5 sind dem linearen statistischen Modell gewidmet und spezialisieren dieses zur Varianzanalyse und zu Regressionsmodellen. Kapitel 6 untersucht das asymptotische Verhalten des Maximum-Likelihood-Schätzers (Konsistenz, Normalität), sowie des Loglikelihood-Quotienten und der Pearson-Fisher-Teststatistiken (χ^2 -Verteilung). In Kapitel 7 wird das lineare Modell zum generalisierten linearen Modell verallgemeinert, mit besonderer Berücksichtigung des logistischen Modells. Kapitel 8 bietet eine ausführliche Darstellung loglinearer Modelle zur Analyse von Kontingenztafeln.

Damit hat der Autor viele der für die Anwendungen wichtigen Verfahren in den vorliegenden Text eingebracht. Sein Ziel, etwas von dem deduktiven Hintergrund dieser Verfahren so aufzubereiten, daß in Schlüssigkeit und Prägnanz ein mathematisch geschulter Leser angesprochen wird, hat der Autor in bestem Maße erreicht.

Die Teubner-Skriptenreihe, in der das Buch erschienen ist, strebt bewußt keinen Perfektionismus an. Einige wenige stilistische Unebenheiten, die beim Lesen auffallen, sind deshalb gerne entschuldbar. Die Quellen Pearson 1900 (Seite 56) und W. Gossett 1908 (Seite 96) sind nicht nachgewiesen. Die Verwendung des Symbols $|A|$ sowohl für die Norm (Seite 7) wie auch die Determinante (Seite 17) ist mißlich. Ein Wechselwirkungseffekt (Seite 131) ist auf Deutsch wohl eine Wechselwirkungswirkung. Der Druckfehler in der Definition der Normalverteilungsdichte (Seite 18) ist vielleicht sogar didaktisch wertvoll. Ansonsten ist das Buch in beeindruckendem Maße frei von Druckfehlern.

In die Diskussion der Verfahren eingeschlossen sind kurze Bemerkungen, inwieweit sie in den Programmpaketen BMDP, SAS and SPSS implementiert sind. Diese sind eher rudimentär geraten, oder das Vorwort mit seinem Hinweis auf Fallstudien und auf die Beratungstätigkeit des Autors hat beim Rezensenten die falschen Erwartungen geweckt. Auf das erste ausführlichere Beispiel muß man 122 Seiten lang warten. Insgesamt machen

die ca. 12 Fallstudien etwa 24 Seiten aus. Das sind 24 Seiten, die in vielen anderen Büchern zur Mathematischen Statistik gar nicht existieren. Vielleicht wegen ihrer Platzierung am Ende der methodischen Abschnitte ist der Ton der Darstellung eher so, als wäre die vorgeschlagene Analyse logisch richtig und mathematisch zwingend, anstatt von den Irrungen und Wirrungen statistischer Modellbildung zu berichten und von den Lernzyklen, die dabei durchlaufen werden müssen. Hier scheint dem Rezensenten ein wesentliches Defizit unserer derzeitigen mathematischen Ausbildung zu bestehen. Bücher wie das vorliegende sollten dazu dienen, unsere angehenden Mathematik-Absolventen in ihrer Fähigkeit zur Modellbildung und zur Modellkritik zu schulen und hierin auf ein Niveau zu bringen, das den Absolventen anderer Fachrichtungen gleichkommt. Andererseits muß der Rezensent beim wiederholten Lesen des Vorworts zugeben, daß sich der Autor seine Ziele so nicht gesetzt hat.

Der Autor hat sein Ziel, wichtige statistische Verfahren vor ihrem mathematischen Hintergrund darzustellen, in hervorragender Weise erreicht, treffend in der Auswahl und prägnant in der Darstellung. Das Skript wird sich bewähren als Schnellreferenz, insbesondere zu generalisierten linearen Modellen und Kontingenztafeln-Analyse. Es eignet sich als Studiertext für Mathematik-Studenten, die eine erste Stochastik-Vorlesung besucht haben. Es bietet eine anregende thematische Auswahl, um den Text in einer Vorlesung zu verwenden oder in einem Seminar zu vertiefen.

Augsburg

F. Pukelsheim

Zavialov, O. I., Renormalized Quantum Field Theory (Mathematics and its applications, Soviet Series), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1989, 560 S., Dfl. 295,00

Renormierung, konzipiert als eine Methode unphysikalische Parameter wie etwa die „nackte Masse“ des Elektrons (also des Elektrons ohne sein elektromagnetisches Selbstfeld) durch physikalische, also meßbare Parameter zu ersetzen, wird häufig als ein dubioses Verfahren angesehen, „Unendlich“ von „Unendlich“ zu subtrahieren. Dieser Eindruck wird genährt durch die Behandlung des Problems in vielen älteren Lehrbüchern der Quantenfeldtheorie – mit einer rühmlichen Ausnahme, dem Buch von Bogoliubov und Shirkov. Dort findet man die bereits die Grundlagen für die mathematisch einwandfreie Lösung des Renormierungsproblems, wie sie in der darauffolgenden Periode von Hepp, Zimmermann, Speer, Epstein und Glaser, um nur einige zu nennen, erarbeitet worden. Abgesehen von den Originalarbeiten findet man diese Resultate leider nur in speziellen Monographien bzw. Berichten von Sommerschulen (z. B. Les Houches), sie haben jedoch noch keine übersichtliche Darstellung in einem Lehrbuch gefunden. Es gibt zwar auch neuere Lehrbücher über Renormierung (z. B. Itzykson und Zuber, Collins etc.), jedoch haben diese mehr die praktische Anwendung im Auge, insbesondere die Störungstheorie der nichtabelschen Eichtheorien, und weniger die mathematisch rigorose Behandlung des Renormierungsproblems. Ein Grund dafür liegt sicherlich darin, daß die mathematisch exakte Behandlung die Einführung einer Reihe komplizierter technischer Hilfsmittel erfordert, die für die praktische Anwendung mehr oder weniger nutzlos sind.

Schließt also das Buch von Zavialov hier eine Lücke? Diese Frage ist sicher zu bejahen, wenn auch mit gewissen Einschränkungen, die nachfolgend noch zu diskutieren sein werden. Zuerst soll jedoch eine kurze Inhaltsbeschreibung des umfangreichen Werkes (524 Seiten) erfolgen.

Der Inhalt ist in fünf Kapitel aufgeteilt. Das erste trägt den Titel „Elements of Quantum Field Theory“. Dort wird zuerst die Theorie der freien Felder und ihrer Wick-geordneten Produkte dargestellt. Es folgt eine Diskussion der Probleme, die bei der

Konstruktion Zeit-geordneter Produkte freier Felder auftreten. Dies geschieht im Hinblick auf die störungstheoretische Entwicklung der Streumatrix, deren formale Konstruktion sich anschließt.

Im zweiten Kapitel werden die technischen Hilfsmittel bereitgestellt, die eine systematische Analyse der Singularitäten regularisierter Feynman-Amplituden erlauben. Dazu gehört insbesondere die sogenannte α -parametrische Darstellung in ihrer einheitlichen graphentheoretischen Form. Es folgt eine ausführliche Erläuterung der rekursiven Bogoliubovschen R-Operation, die eine systematische Umsetzung der Renormierungsidee (d. h. Renormierung der Parameter des Wirkungsfunktional) in die Sprache der Feynman-Graphen darstellt.

Kapitel III beginnt mit dem Konvergenzbeweis der rekursiv renormierten Feynman-Integrale. Es folgt eine Diskussion der Probleme die auftreten, falls ein Teil der Felder masselos ist. Hinreichende Kriterien für infrarot-konvergente Theorien werden angegeben und ein modifiziertes Renormierungsverfahren („soft mass renormalization“) eingeführt. Abschließend werden noch weitere Renormierungsverfahren (u. a. die „Dimensionale Renormierung,“) vorgestellt und ihre Äquivalenz zur Bogoliubovschen R-Operation gezeigt.

Das vierte Kapitel ist der Renormierung zusammengesetzter Feldoperatoren gewidmet, die insbesondere für die Formulierung des Schwingerschen Wirkungsprinzips von ausschlaggebender Bedeutung sind. Eine wichtige Rolle für die Anwendung spielt auch die sogenannte Operatorproduktentwicklung, sowohl die „Short-Distance Expansion“ als auch die „Light Cone Expansion“. Schließlich folgt eine Anwendung des Wirkungsprinzips auf die Herleitung der Renormierungsgruppen-Gleichung bzw. der Callan-Symanzik-Gleichung.

Im letzten Kapitel wird die wohl schwierigste, aber auch wichtigste Anwendung der Renormierungstheorie, die Renormierung der Yang-Mills-Theorien beschrieben. Zavalov weicht dabei von den etablierten Verfahren ab, indem er anstelle der üblichen BRS-Invarianz eine abgeschwächte Invarianzbedingung fordert, die die übliche Konstruktion zusammengesetzter Feldoperatoren vermeidet. Für diese neue Invarianz konzipiert er eine Klasse von invarianten Regularisierungen, ähnlich denen, die für abelsche Eichtheorien schon früher von Breitenlohner und Mitter vorgeschlagen wurden.

Der Abschluß bildet eine kurze Diskussion des Anomalie-Problems für den Axialvektorstrom in abelschen Eichtheorien.

Es ist hier sicher nicht der Ort für eine ins Einzelne gehende Detailkritik des Buches von Zavalov. Allerdings scheint es angebracht, angesichts des in beiden Vorworten ausdrücklich betonten Anspruchs der mathematischen Rigorosität einige kritische Anmerkungen zu machen.

Es fällt auf, daß der Autor häufig die Überzeugungskraft seiner Argumente dadurch zu steigern versucht, daß er Floskeln verwendet wie „is sure to be valid“ etc. In diesen Fällen ist gelegentlich etwas Vorsicht angebracht, wie z. B. die Ausführungen über die „Dimensionale Renormierung“ auf Seite 222ff. zeigen. Zavalov argumentiert hier mit der Integration über „innere Impulse“ in der α -parametrischen Darstellung, die gar keine inneren Impulse mehr enthält.

Unbefriedigend finde ich die Behandlung des Infrarot-Problems. Zavalov führt hier die Begriffe „infrared safe“ and „catastrophic“ ein. Der mit den Details weniger vertraute Leser muß Theorien, die das Prädikat „catastrophic“ erhalten für unrettbar infrarot-singulär halten. Ein Blick in die relevante Literatur zeigt jedoch, daß dem nicht so ist und Zavalovs Kriterien für die Abwesenheit von Infrarotdivergenzen weitaus zu restriktiv sind.

Wie schon erwähnt geht Zavalov bei der Renormierung der Yang-Mills-Theorien neue Wege. Er modifiziert nicht nur die üblichen BRS-Transformationen, sondern fordert eine schwächere „On-shell“-Invarianz. Dabei bleiben m. E. entscheidende Fragen offen:

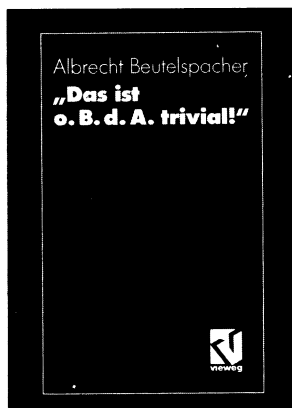
- i) Unitarität der Theorie
- ii) Kopplung des Yang-Mills-Feldes an Materie-Felder
- iii) Fälle für die keine invariante Regularisierung bekannt ist (z. B. chirale Eichtheorien wie das Standard-Modell).

Gewisse Schwierigkeiten können dem Leser aus der Art erwachsen, wie Zavalov mit seinen Zitaten der bestehenden Literatur verfährt. In der Einleitung wird darauf hingewiesen, daß Originalarbeiten nur in den Fällen zitiert werden, in denen Resultate Verwendung finden, die im Text nicht bewiesen werden. Davon abgesehen, daß diese Grundsätze nicht immer eingehalten werden, wird dem Leser die Möglichkeit genommen, die Argumente des Autors mit denen der Originalarbeiten zu vergleichen. Dies wird zwar teilweise durch die kurze Literaturübersicht am Ende des Buches ausgeglichen, allerdings stört dabei etwas die Konzentration auf die eigenen Arbeiten des Autors. Das führt zum vielleicht problematischsten Aspekt des Buches: die starke Ausrichtung des Stoffes an den eigenen – sicher wichtigen – Beiträgen des Autors zum Gegenstand. Insofern meine ich, kann das Buch nicht ohne weiteres die eingangs angesprochene Lücke füllen.

Positiv vermerkt werden sollte auf jeden Fall die originelle Darstellung der „Light Cone Expansion“ (Kap. IV, § 4), die eine Reihe von Problemen der üblichen Behandlung dieses Themas vermeidet.

Ohne Zweifel verdient die Mühe, die sich Zavalov mit der mathematisch anspruchsvollen Darstellung der „vertrackten“ Renormierungstheorie gemacht hat, Anerkennung. Jeder potentielle Leser, insbesondere ein nicht mit dem Thema vertrauter, sollte sich jedoch nicht der Illusion hingeben eine leicht lesbare Darstellung des Gegenstands vor sich zu haben. Vielleicht fühlt sich der eine oder andere Fachmann auf diesem Gebiet angesprochen, eine weniger umfangreiche, leichter lesbare und doch mathematisch saubere Darstellung dieses wichtigen Gebiets der theoretischen Physik zu wagen.

„Das ist o. B. d. A. trivial!“

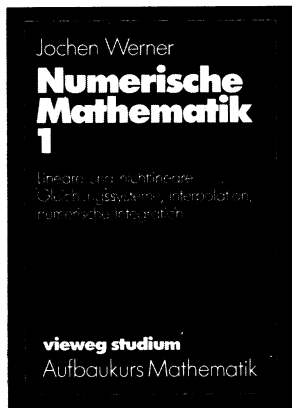


Albrecht Beutelispacher
„Das ist o.B.d.A. trivial!“

Eine Gebrauchsanleitung zur Formulierung mathematischer Gedanken mit vielen praktischen Tips für Studenten der Mathematik und Informatik 1991. VI, 84 S. Kart. DM 14,80
ISBN 3-528-06442-0

Was Sie schon immer über die Kunst, mathematische Texte zu formulieren, wissen wollten, aber nie zu fragen wagten: Was bedeutet eigentlich „trivial“, „wohldefiniert“, „Korollar“, „eindeutig“, „o. B. d. A.“, . . . ? Was sind gute Bezeichnungen? Wie organisiert man einen Beweis?

Dieses Buch hilft dem Studierenden der Mathematik mit vielen Beispielen und konkreten Ratschlägen bei der Formulierung von mathematischen Übungsaufgaben, Seminararbeiten und der Examensarbeit.

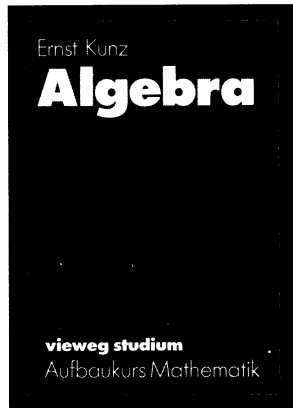


Jochen Werner
Numerische Mathematik

Band 1: Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme, Interpolation, numerische Integration
X, 281 S., mit 43 Abb. und 137 Aufg. Pb. DM 36,—
ISBN 3-528-07232-6

Band 2: Eigenwertaufgaben, lineare Optimierungsaufgaben, unrestringierte Optimierungsaufgaben
VIII, 277 S., mit 8 Abb. und 122 Aufg. Pb. DM 36,—
ISBN 3-528-07233-4

Mit der „Numerischen Mathematik“ legen Autor und Verlag ein zweibändiges Lehrbuch vor, das Studenten der Mathematik und Physik ab dem dritten Semester in die Grundlagen dieses Fachgebietes einführt. Vorausgesetzt werden Kenntnisse der Analysis und der linearen Algebra. Es wurde eine möglichst gut lesbare Darstellung angestrebt, welche insbesondere ein Selbststudium erleichtert.



Ernst Kunz
Algebra

1991. X, 254 S. Pb. DM 36,—
ISBN 3-528-07243-1

Geometrische Aufgaben lassen sich in die Algebra übersetzen und in deren präziser Sprache behandeln. Es ist das Leitmotiv des Buches, die Theorie anhand leicht verständlicher Probleme zu entwickeln und durch ihre Lösung zu motivieren. Dabei lernt man kennen, was zu einer Einführung in die Algebra im Grundstudium gehört: Die Körper mit ihren Erweiterungen bis hin zur Galoistheorie, ferner die elementaren Techniken der Gruppen- und Ringtheorie. Der Text enthält 350 Übungsaufgaben von verschiedenen Schwierigkeitsgraden einschließlich Hinweisen zu ihrer Lösung.

Elementary Categories, Elementary Toposes

Colin McLarty

This book introduces categories and elementary toposes while requiring little mathematical background. It defines the key concepts and gives complete elementary proofs of theorems. It ends with topos theoretic descriptions of sets, of basic differential geometry, and of recursive analysis.

Oxford Logic Guides No. 21

0-19-853392-6, 352 pp., illus., June 1992 £45.00

Foundations of the Prediction Process

Frank B. Knight

Presents a unified treatment of the prediction process approach to continuous time stochastic processes. Using the underlying idea of stationary physical time and the moving observer's time, the author develops a theory of stochastic processes considering two processes coexisting on the same probability space.

Oxford Studies in Probability No. 1

0-19-853593-7, 260 pp., Clarendon Press, February 1992 £40.00

General Galois Geometries

J. W. P. Hirschfeld and J. A. Thas

This volume is the culmination of a three volume treatise on projective geometries over finite fields. With its two companion volumes, this work will provide a major reference on the subject.

Oxford Mathematical Monographs

0-19-853537-6, 420 pp., illus., Clarendon Press, November 1991 £55.00

Projective Representations of the Symmetric Groups

Q-Functions and Shifted Tableaux

P. N. Hoffman and J. F. Humphreys

This book is the first completely detailed and self-contained presentation of the wealth of information now known on the projective representations of the symmetric and alternating groups.

Oxford Mathematical Monographs

0-19-853556-2, 304 pp., Clarendon Press, May 1992 £30.00

Probability and Random Processes

Second Edition

Geoffrey Grimmett and David Stirzaker

This text on probability and stochastic processes begins at an elementary level and progresses quickly to cover more advanced topics. It has been comprehensively revised, with new chapters, more exercises at the ends of sections, and many new problems at the ends of chapters.

0-19-853666-6, 416 pp., illus., Clarendon Press, April 1992 £35.00

0-19-853665-8, paperback £19.50

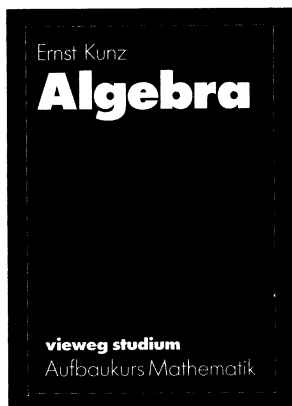
0-19-853448-5 **Solutions Manual** 675 problems with solutions, paperback £14.50

FURTHER INFORMATION/TO ORDER: Please write to Susan Harrison,
*SMJ Marketing Department, Oxford University Press, Walton Street,
 Oxford OX2 6DP. Phone +44 (0)865 56767; fax +44 (0)865 56646.*

OXFORD UNIVERSITY PRESS



Neue Bücher bei Vieweg



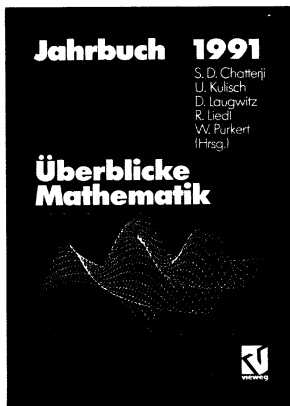
Ernst Kunz

Algebra

1991. X, 254 S. (vieweg studium, Bd. 43, Aufbaukurs Mathematik; hrsg. von Gerd Fischer) Pb. DM 36,—

ISBN 3-528-07243-1

Geometrische Aufgaben lassen sich in die Algebra übersetzen und in deren präziser Sprache behandeln. Es ist das Leitmotiv des Buches, die Theorie anhand leicht verständlicher Probleme zu entwickeln und durch ihre Lösung zu motivieren. Dabei lernt man kennen, was zu einer Einführung in die Algebra im Grundstudium gehört: Die Körper mit ihren Erweiterungen bis hin zur Galois-theorie, ferner die elementaren Techniken der Gruppen- und Ringtheorie. Der Text enthält 350 Übungsaufgaben von verschiedenen Schwierigkeitsgraden einschließlich Hinweisen zu ihrer Lösung.

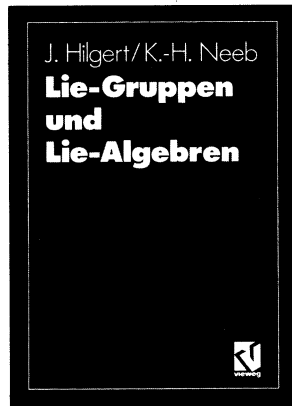


S. D. Chatterji,
Ulrich Kulisch,
Roman Liedl und
Walter Purkert (Hrsg.)

Jahrbuch Überblicke Mathematik 1991

1991. X, 236 S. Kart. DM 49,—
ISBN 3-528-08946-6

Das Jahrbuch informiert über die aktuellen Entwicklungen in der Mathematik. Dabei wird auch die Mathematik-Historie in angemessenem Umfang berücksichtigt. Die einzelnen Beiträge sind vom Niveau her so gehalten, daß sie auch für Nicht-Spezialisten und Studenten mit solider mathematischer Grundbildung verständlich und gut lesbar sind.



Joachim Hilgert
und Karl-Hermann Neeb

Lie-Gruppen und Lie-Algebren

1991. X, 361 S. Kart. DM 48,—
ISBN 3-528-06432-3

Das Buch versteht sich als Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen. Der Begriff der Lie-Gruppe wird ausgehend von den einfachsten Beispielen, den Matrizen-gruppen, entwickelt. Eine große Anzahl von Problemen für Lie-Gruppen kann man durch Übertragung auf die zugehörigen Lie-Algebren lösen. Dies ist der Leitgedanke des Buches. Vorausgesetzt werden Kenntnisse in der Linearen Algebra, der Differentialrechnung mehrerer Variablen und der elementaren Gruppentheorie.

Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH · Postfach 58 29 · 6200 Wiesbaden

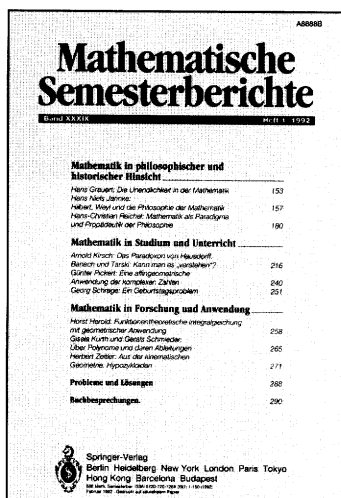


vieweg

Ab 1992 bei
Springer-Verlag

Mathematische Semesterberichte

Geschäftsführender
Herausgeber:
N. Knoche, Essen



Die Mathematischen Semesterberichte widmen sich zwei Aufgabenbereichen:

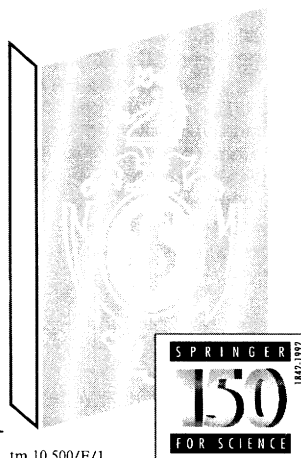
- der Fortbildung von Mathematikern, die als Lehrer oder Diplommathematiker im Berufsleben stehen
- grundlegenden didaktischen Fragen des Lehrens und Lernens von Mathematik an Schule und Hochschule

Aus diesem doppelten Aufgabenbereich ergibt sich eine Stellung der Zeitschrift zwischen rein fachwissenschaftlichen Journalen und Zeitschriften, die sich ausschließlich didaktischen Fragestellungen widmen.

Der Intention der Zeitschrift entsprechen die Rubriken „Mathematik in Forschung und Anwendung“, „Mathematik in Studium und Unterricht“ und „Mathematik in historischer und philosophischer Sicht“.

In allen Rubriken umfaßt Mathematik die Informatik.

Die Rubrik „Probleme und Lösungen“ dient der Kommunikation. Hier können Fragestellungen diskutiert werden, aber auch gezielt Probleme angesprochen werden, deren Lösung für die eigene Forschung relevant ist.



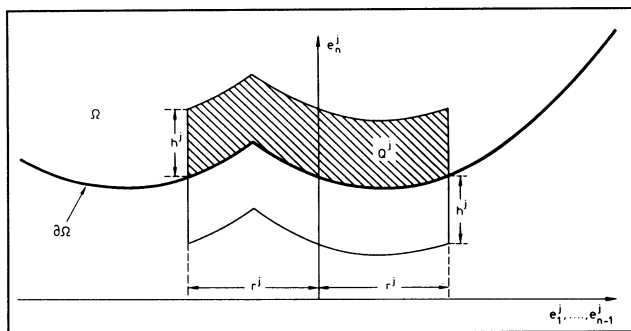
Bezugsbedingungen:

ISSN 0720-728X Titel Nr. 591
1992, Bd. 39 (2 Hefte)
DM 68,- zzgl. Versandkosten
DM 3,53 (Inland);
DM 6,70 (Ausland)

Springer-Verlag

Heidelberger Platz 3, W-1000 Berlin 33, F. R. Germany

tm.10.500/E/1



P. Bundschuh

Einführung in die Zahlentheorie

2. Aufl. 1992. Etwa 340 S. 7 Abb.
(Springer-Lehrbuch) Brosch. DM 48,-
ISBN 3-540-55178-6

Aus den Besprechungen:

„Die vorliegende, umfangreiche Einführung berücksichtigt stärker als andere die historische Entwicklung. Das bedeutet nicht, daß der Autor grundsätzlich die ersten in der Literatur vorliegenden Beweise gewählt hat, sondern daß er angibt, wer die entsprechenden Sätze gefunden hat und wie sie im Laufe der Zeit verschärft und verallgemeinert wurden. Das ist eines der Unterscheidungsmerkmale von anderen Einführungen in die Zahlentheorie. Ein zweites liegt in der Betonung der Theorie der Diophantischen Approximation, genauer in den Untersuchungen über Irrationalität und Transzendenz. Man findet zu diesem Thema auch als Kenner überraschende Schlüsse. (...) Die Darstellung ist ausführlich, sehr gut lesbar und kommt ohne spezielle Kenntnisse aus. Das Buch kann daher jedem Studenten schon im nullten Semester empfohlen werden.“

Monatshefte für Mathematik

H. W. Alt ▲

Lineare Funktional- analysis

*Eine anwendungsorientierte
Einführung*

2., verb. Aufl. 1992. X, 330 S.
19 Abb. (Springer-Lehrbuch)
Brosch. DM 48,-
ISBN 3-540-54724-X

Dieses Lehrbuch behandelt den Grundkanon der linearen Funktionalanalysis, so wie er in vielen Teilgebieten der Mathematik und auch in der Physik benötigt wird. Dieser Kanon umfaßt einmal die Einführung von Banach- und Hilberträumen, die Eigenschaften von konvexen und kompakten Teilmengen sowie Aussagen über schwache Konvergenz. Zum anderen werden die wichtigsten Klassen von Operatoren behandelt: Funktionale, Projektionen, kompakte Operatoren. Das Buch schließt mit der Spektraltheorie kompakter Operatoren.

In der Darstellung wird die algebraische Seite der Funktionalanalysis mit gleichem Gewicht behandelt wie die analytische. Abstrakte Theorie wird stets im Zusammenhang mit konkreten Anwendungen gesehen. Die Gliederung der einzelnen Abschnitte ermöglicht es dem Leser, schnell zu den zentralen Aussagen vorzustoßen. Das Buch enthält viele Übungen (die meisten mit Lösung), instruktive Abbildungen und vier Anhänge, die dem Leser Hintergrundwissen vermitteln.

R. Schaback, H. Werner

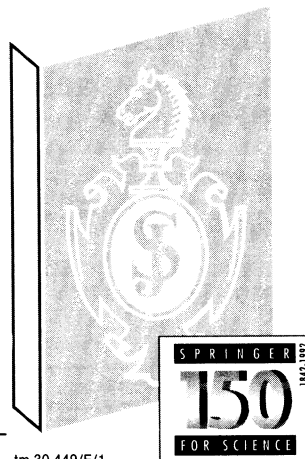
Numerische Mathematik

4., vollst. überarb. Aufl. 1992. IX,
326 S. 40 Abb. (Springer-
Lehrbuch) Brosch. DM 38,-
ISBN 3-540-54738-X

Vollständig neu bearbeiteter
Nachfolger des bekannten zwei-
bändigen Werkes **Werner/Scha-
back: Praktische Mathematik**
(erschieden in der Reihe Hoch-
schultext), kurzgefaßt und in
einem Band, mit neu hinzugefü-
gten Schwerpunkten:

- Grundlagen des Computer-
Aided Design
- Algorithmen für Vektor- und
Parallelrechner
- Lineare und nichtlineare
Optimierung
- Singulärwertzerlegung
- Verfahren konjugierter
Gradienten mit Vorkonditio-
nierung und moderner
Darstellung von Splines und
Eigenwertproblemen.

Der erste Teil des Buches kann
auch als Grundlage einer nur
einsemestrigen Vorlesung über
Numerische oder Praktische
Mathematik dienen.

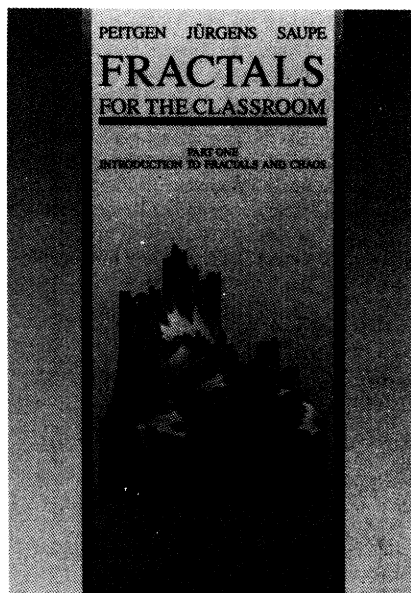


Springer-Verlag

Heidelberger Platz 3, W-1000 Berlin 33, F. R. Germany

tm.30.449/E/1

The new Peitgen...



... presents a broad view of the view of the underlying notions behind, fractals, chaos, and dynamics.

... presents how fractals and chaos relate to each other and to many other aspects of mathematics as well as to natural phenomena.

... presents the inherent visual and imaginative beauty in the structures and shapes of fractals and chaos.

Table of Contents:

Foreword: Benoit B. Mandelbrot: Fractals and the Rebirth of Experimental Mathematics. - The Backbone of Fractals: Feedback and the Iterator. -

Classical Fractals and Self-Similarity. - Limits and Self-Similarity. - Length, Area and Dimension. - Measuring Complexity and Scaling Properties. - Encoding Images by Simple Transformations. - The Chaos Game: How Randomness Creates Deterministic Shapes. - Irregular Shapes: Randomness in Fractal Constructions.

H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe

FRACTALS FOR THE CLASSROOM

Part 1

Introduction to Fractals and Chaos

1992. XIV, 450 pp. 289 figs. 8 in color. Hardcover DM 54,-
ISBN 3-540-97041-X

Part 2

Mandelbrot Set and Complex Iterators

1992. Approx. 300 pp. 125 figs. Hardcover DM 54,-
ISBN 3-540-97722-8

Springer-Verlag

- Heidelberger Platz 3, W-1000 Berlin 33, F.R. Germany 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA
 8 Alexandra Rd., London SW19 7JZ, England 26, rue des Carmes, F-75005 Paris, France
 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan
 Room 701, Mirror Tower, 61 Mody Road, Tsimshatsui, Kowloon, Hong Kong
 Avinguda Diagonal, 468-4°C, E-08006 Barcelona, Spain Wesselényi u. 28, H-1075 Budapest, Hungary



tm.30.415/E/1



Walter de Gruyter
Berlin · New York

Nicolas Bouleau
Francis Hirsch

Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space

1991. X, 325 pages. 17 x 24 cm.
Cloth DM 128.00 ISBN 3-11-012919-1

de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 14
Editors: Heinz Bauer, Jerry L. Kazdan,
and Eduard Zehnder

de Gruyter
Studies in Mathematics
14

Nicolas Bouleau Francis Hirsch
Dirichlet Forms
and Analysis on
Wiener Space

This book presents an introduction to the ideas, phenomena, and methods of analysis in infinite-dimensional spaces, in particular Wiener spaces, and stochastic differential equations. Emphasis is led upon the interaction between two important tools: the Malliavin calculus and the theory of Dirichlet forms and spaces. The text introduces the reader to an important subject of current research and is accessible to advanced undergraduate or graduate students, since it requires only a first course in analysis and probability theory as background. At the same time, it is also of interest to researchers because it contains many recent and new results, some of which appear here for the first time. Numerous exercises and examples form an important and integral part of the book and will help the reader testing the understanding of the general theory in the text.

Contents:

General Dirichlet forms · Closed forms · Sub-Markovian symmetric operators · Dirichlet forms and Dirichlet operators · The carré du champ operator · Locality · Functional calculus · Absolute continuity of image measures · Capacity · Distributions of finite energy · **Dirichlet forms on vector spaces** · Standard Dirichlet structure on \mathbb{R}^{N^*} · Standard structure on the Wiener space · Abstract Wiener spaces · Dirichlet forms and directional derivatives · An absolute continuity criterion · Operators D and δ · Sobolev spaces · **Analysis on Wiener space** · Operations on chaos decompositions · Derivation operator · Calculus on stochastic integrals · Representation of positive distributions · **Stochastic differential equations** · Solution for a fixed initial condition · Existence of densities · Regularity of the flow · Accurate versions of the flow · **The algebra of Dirichlet structures** · Image structures · Tensor products and projective limits · Other constructions of Dirichlet structures · Dirichlet-independence · Substructures and conditioning · **An extension of Girsanov's theorem** · Distribution-measures · Extension of Girsanov's theorem · Examples · **Quasi-everywhere convergence** · Derivation operator · Ergodic theorems · Convergence of martingales · Stochastic differential equations.

Price subject to change

Walter de Gruyter & Co., Genthiner Str. 13, D-1000 Berlin 30 (Germany)
Phone (30) 2 60 05-0, Telex 1 84 027, Fax (30) 2 60 05-2 51

Teubner - Texte zur Mathematik

Bd. 117: Surveys on Analysis, Geometry and Mathematical Physics

Hrsg. Schulze/Triebel. 308 Seiten. Kart. DM 51,-

Bd. 118: Equadiff 7

Proceedings of the 7th Czechoslovak Conference on Differential Equations and their Applications held in Prag, 1989

Hrsg. Kurzweil. 312 Seiten. Kart. DM 42,-

Bd. 119: Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications · Vol. 4

Proceedings of the Spring School held in Roudnice nad Labem, 1990

Hrsg. Krbec/Kufner/Opic/Rakosnik. 256 Seiten. Kart. DM 42,-

Bd. 120: Function Spaces

Proceedings of the Second International Conference, Poznan 1989

Hrsg. Musielak/Hudzik/Urbanski. 268 Seiten. Kart. DM 42,-

Bd. 121: Numerical Treatment of Differential Equations

Selection of Papers presented at the Fifth Seminar „NUMDIFF - 5“ held in Halle, 1989

Hrsg. Strehmel. 372 Seiten. Kart. DM 59,-

Bd. 122: Huber-Dyson, Gödel's Theorems; a Workbook on Formalization

292 Seiten. Kart. DM 46,-

Bd. 123: Nahapetian, Limit Theorems and Some Applications in Statistical Physics

244 Seiten. Kart. DM 38,-

Bd. 124: Baum/Friedrich/Grunewald/Kath, Twistors and Killing

Spinors on Riemannian Manifolds

180 Seiten. Kart. DM 29,-

Bd. 125: Stern, Semimodular Lattices

236 Seiten. Kart. DM 38,-

Bd. 126: Thalheim, Dependencies in Relational Databases

220 Seiten. Kart. 38,-

Bd. 127: Strehmel/Weiner, Linear-implizite Runge-Kutta-Methoden und ihre Anwendungen

356 Seiten. Kart. DM 49,-

Bd. 128: Hoffmann, Improved Estimation of Distribution Parameters: Stein-Type Estimators

176 Seiten. Kart. DM 29,-

Bd. 129: Dubovoj/Fritzsche/Kirstein, Matricial Version of the Classical Schur Problem

356 Seiten. Kart. DM 49,-

Bd. 130: Richter, Approximation of Gaussian Random Elements and Statistics

156 Seiten. Kart. DM 29,-

Bd. 131: Symposium „Analysis on Manifolds with Singularities“, Breitenbrunn 1990

Hrsg. Schulze/Triebel. 308 Seiten. Kart. ca. DM 44,-

Bd. 132: Leonov/Reitmann/Smirnova, Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems

VIII, 242 Seiten. Kart. ca. DM 39,-

Preisänderungen vorbehalten.



B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Stuttgart · Leipzig