94. Band Heft 3
ausgegeben am 16. 7. 1992

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1992

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 128,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10

Printed in Germany — ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 94, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

J. Cuntz: A Survey of Some Aspects of Non-Commutative Geometrie
U. Hamenstädt: Starrheitseigenschaften kompakter Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung
A. Krieg, H. P. Petersson: Max Koecher zum Gedächtnis
R. Kühnau: Einige neuere Entwicklungen bei quasikonformen Abbildungen
E. Kunz: Über den *n*-dimensionalen Residuensatz
H. Strade: Die Klassifikation der einfachen Lie-Algebren über Körpern mit positiver Charakteristik: Methoden und Resultate

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Memminger Str. 6, 8900 Augsburg
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
94 (1992) 105–117

Karl Strubecker zum Gedenken

K. Leichtweiß, Stuttgart

Am 19. Februar 1991 um die Mittagszeit erlag Prof. Dr. Karl Strubecker auf dem Weg zum Rotary Club in Karlsruhe einem plötzlichen Herztod. Mit ihm verliert die Deutsche Mathematiker-Vereinigung und die übrige Fachwelt einen hochangesehenen Mathematiker, welcher als besonders profilierter Vertreter der sogenannten „österreichischen Schule für Geometrie" die geometrische Forschung wesentlich beeinflußt hat, worüber später noch im einzelnen zu reden sein wird.

Karl Strubecker wurde am 8. 8. 1904 in Groß-Hollenstein an der Ybbs in Österreich geboren, wo sein Vater als Förster tätig war. Seine Eltern und Großeltern waren bis auf eine Ausnahme Wiener. In Groß-Hollenstein besuchte er bis zum frühzeitigen Tod seines Vaters im Jahre 1913 die Dorfschule und übersiedelte dann mit seiner Mutter und drei Geschwistern nach Wien. Dort besuchte er das humanistische Gymnasium im XII. Wiener Bezirk Meidling, das er als Abiturient mit Auszeichnung verließ.

Wie Strubecker in einem Lebenslauf von sich selbst schrieb, hatte er schon etwa zwei Jahre davor „der Neigung zu den mathematischen Wissenschaften folgend“ den Entschluß gefaßt, an der Universität Wien Mathematik und an der Technischen Hochschule daselbst Darstellende Geometrie sowie gewisse technische Fächer zu studieren. So bezog er 1924 diese Hochschulen und hörte (neben dem Studium der Physik, Philosophie und Pädagogik) mathematische Vorlesungen bei den Herren Furtwängler, Hahn, Helly, Lense, Vietoris und Wirtinger an der Universität sowie Müller und Schmid an der Technischen Hochschule. Dabei empfing er besondere wissenschaftliche Impulse vom Begründer der Wiener Schule der Darstellenden Geometrie Emil Müller, in dessen Seminar er mehrere Vorträge mit zum Teil eigenen Beiträgen hielt, aus denen seine spätere (selbstgewählte) Dissertation hervorging. So wurde Müller schnell auf den begabten jungen Studenten aufmerksam und stellte ihn sofort bei sich als Hilfsassistenten ein, wodurch die wenig erfreuliche finanzielle Situation Strubeckers gelindert wurde. Leider starb Müller bereits im selben Jahr (1927). Strubecker reichte daraufhin seine Doktorarbeit mit dem Titel: „Über nichteuklidische Schraubungen und einige spezielle nichteuklidische und euklidische Schraubflächen“ bei Wirtinger an der Universität Wien ein und wurde am 4. 7. 1928, d. h. schon in seinem achten Semester zum Dr. phil. promoviert. Ein Jahr später absolvierte er dort auch noch die Lehramtsprüfung für die Fächer Mathematik und Darstellende Geometrie, allerdings ohne das anschließende Probejahr, da er entschlossen war, die Hochschullehrerlaufbahn zu ergreifen.

Strubecker behielt daher seine Assistentenstelle an der I. Lehrkanzel für Darstellende Geometrie, besetzt durch Müllers Nachfolger Erwin Kruppa, bis zum Jahr 1938. In der Zwischenzeit erlangte er bereits 1931 die Lehrbefugnis für das Fach Geometrie an der Technischen Hochschule Wien und anschließend 1935 zusätzlich dieselbe an der Universität Wien für das Fach Mathematik. An den beiden genannten Hochschulen hielt er als Privatdozent Vorlesungen über verschiedene Zweige der Geometrie, so über die Theorie der Regelflächen, Zyklographie, Laguerresche Geometrie, Elementargeometrie, Differentialgeometrie, Affine Differentialgeometrie, Liniengeometrie, Geometrische Gruppen, Höhere Geometrie und neuere Kinematik.

Es empfiehlt sich nun, auf Strubeckers wissenschaftlichen Werdegang näher einzugehen. Sein Hauptarbeitsgebiet bestand in der Lösung von Problemen der Höheren Geometrie im Sinne Cayley-Kleins, d. h. der Invariantentheorie linearer Transformationen eines projektiven Raums mit einer ausgezeichneten Quadrik als „Absolutfigur“. Schon in seiner Dissertation (vgl. [1]) untersuchte Strubecker nichteuklidische Schraubungen als eine eingliedrige räumliche Kollineationsgruppe, deren Elemente alle Quadriken durch ein windschiefes Erzeugendenvierseit einzeln invariant lassen, wobei eine dieser Quadriken als Absolutfigur gewählt wird. Sind hierbei die vier Erzeugenden imaginäre Geraden erster bzw. zweiter Art, so kann man eine ovale bzw. nullteilige Fläche als „Maßfläche“ einer hyperbolischen bzw. elliptischen Geometrie wählen, was auf Schraubungen in nichteuklidischen Räumen führt. Die Bahnnormalen einer nichteuklidischen Schraubung gehören einem linearen Komplex an.[1])

Hier werden schon typische Merkmale der Arbeiten Strubeckers deutlich: Dazu zählen m. E.

a) die gruppentheoretisch-kinematische Denkweise: Transformationen werden von infinitesimalen Transformationen erzeugt, man betrachte insbesondere ihre Bahnkurven;

b) die Tatsache, daß der Liniengeometrie die gleiche Rolle wie der Punktgeometrie zugewiesen wird (vgl. u. a. die Arbeiten [26], [30] zur Theorie der quadratischen Komplexe);

c) das Charakteristikum, daß analytische Rechnungen zugunsten synthetischer Betrachtungen zurückgedrängt dafür aber Übertragungsprinzipien voll ausgenutzt werden. (Ein kleines typisches Beispiel hierfür stellt die elegante Lösung Strubeckers einer analytischen Aufgabe Liebmanns mit gewebegeometrisch-nomographischen Methoden dar; siehe [11].)

Unter die erwähnten Übertragungsprinzipien fällt bei Strubecker vor allem die in seiner Habilitationsschrift [3] (im Gegensatz zu Study) synthetisch behandelte nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation, die Studysche Abbildung der Bewegungen des elliptischen Raums auf die simultanen Drehungen zweier Kugeln (vgl. [12]) und die (als kinematisch angesehene) Liesche Abbildung der Linienelemente $\left(x, y, z := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \neq \infty\right)$ der Ebene auf die Punkte (x, y, z) des Raums (vgl. [16]). Bei der letztgenannten Übertragung hatte nämlich Strubecker die Idee, diese Linienelemente durch Anwendung von „Grenzbewegungen" $x' = x + a_1,\ y' = a_3 x + y + a_2 \left(\text{d. h.}\ \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_3\right)$ der „isotropen" (x, y)-Ebene (mit der Ferngeraden und dem Fernpunkt der y-Achse als Absolutgebilde) auf das spezielle Linienelement (0, 0, 0) darzustellen. Solche isotropen Ebenen (oder nach älterer Sprechweise „Minimalebenen") waren vorher von Beck, Berwald und Lense erstmalig untersucht worden. Strubecker verallgemeinerte sogleich den Begriff der isotropen Ebene in [21] zum Begriff des (einfach) isotropen Raums mit einem entarteten Absolutgebilde, bestehend aus der Fernebene und einem Paar darin liegender konjugiert-komplexer Geraden, auf welchem eine gewisse sechsgliedrige isotrope Bewegungsgruppe operiert. Damit hatte er eine „Goldader" angebohrt, die ihm für die Zeit seines Lebens Beschäftigung bot und zu einem heute selbständigen Zweig der Geometrie geführt hat.

Mittlerweile war der noch junge Privatdozent Strubecker so bekannt geworden, daß er bereits Berufungsangebote aus Brünn, Karlsruhe und Leoben erhielt. Er blieb jedoch in Wien, wo er (nach dem Anschluß Österreichs und dadurch bedingter Änderungen) im Jahre 1939 zum planmäßigen außerordentlichen Professor an der Technischen Hochschule ernannt wurde. Im selben Jahr

[1]) Das wissenschaftliche Werk Strubeckers wurde in einem Festvortrag von Prof. Dr. O. Giering in Karlsruhe anläßlich seines 85. Geburtstags ausführlich gewürdigt.

wurde er zugleich korrespondierendes Mitglied der österreichischen Akademie der Wissenschaften. Seine 1941 geplante Ernennung zum ordentlichen Professor an der Technischen Hochschule in Graz kam unter den widrigen Zeitumständen nicht zustande, so daß Strubecker sich entschloß, ein Jahr später einem Ruf an die neugegründete Reichsuniversität Straßburg Folge zu leisten, wo er als Ordinarius (in einem leeren Wohnhaus) ein mathematisches Institut mit einer großen Bibliothek aufbaute.

Diese Straßburger Zeit war, wie Strubecker selbst einmal geschrieben hat, „trotz aller kriegsbedingten Ereignisse die glücklichste in meinem Leben". Kein Wunder, wo er sich doch gerade mit der in Berlin geborenen Lehrerin Hildegard Salewsky verheiratet hatte. Nicht zuletzt war es der Umsicht seiner jungen Frau zu verdanken, daß beide der Besetzung Straßburgs durch die alliierten Truppen am 23. 11. 1944 gerade noch rechtzeitig entkommen und im Hegau nahe der Schweizer Grenze ein Unterkommen finden konnten. Strubeckers Gattin verstand es auch, ihrem Mann später die häusliche Atmosphäre zu verschaffen, welche er für seine Arbeit brauchte.

Während der Kriegsjahre entstanden die wohl meistzitierten und bedeutensten Arbeiten Strubeckers. Dazu gehörten zunächst zwei Schriften über diejenigen Flächen des projektiven Raums, bei denen die Tangenten der Asymptotenlinien beider Scharen jeweils linearen Komplexen angehören ([35], [45]), die sogenannten „zweisinnigen Komplexflächen". Diese lassen sich kinematisch durch Clifford-Schiebungen einer Asymptotenlinie an einer ebensolchen der anderen Schar in einem elliptischen, quasielliptischen oder isotropen Raum erzeugen und damit integrallos darstellen. Später führte Strubeckers Schüler W. Grimm diese Untersuchungen für den Fall kubischer Asymptotenlinien fort, und M. Barner studierte 1953 „einsinnige Komplexflächen" mit Mitteln der projektiven Kinematik. Weiter entstanden in Anlehnung an das Lehrbuch von Strubeckers Landsmann W. Blaschke über euklidische Differentialgeometrie fünf umfangreiche Abhandlungen Strubeckers zur isotropen Differentialgeometrie (siehe [34], [36], [38], [40], [43]). Dieselben beziehen sich auf den (x, y, z)-Raum mit der entarteten Riemannschen Metrik $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$. Die zugehörigen isotropen Bewegungen „äußern" sich daher im jeweiligen Grundriß als euklidische Bewegungen. Somit besteht eine gewisse Analogie zwischen euklidischer und isotroper Differentialgeometrie. Bei letzterer kann es allerdings vorkommen, daß gewisse Invarianten, wie z. B. Längen, Winkel, Krümmungen, Krümmungsmaß gelegentlich oder immer durch ihr Nullsein „versagen" können. Es zeigt sich aber, daß in allen diesen Fällen geeignete Ersatzinvarianten zur Verfügung stehen, mit deren Hilfe sich die isotrope Differentialgeometrie dann weiterentwickeln läßt. So tritt z. B. an die Stelle der (intrinseken) stets verschwindenden „Absolutkrümmung" einer Fläche im isotropen Raum deren (extrinseke) „Relativkrümmung", und die Flächen konstanter Relativkrümmung erweisen sich als identisch mit den uneigentlichen Affinsphären, den vielfach untersuchten Integralflächen der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \text{const} \neq 0$. Außerdem sind die isotropen Minimalflächen mit der verschwindenden (isotropen) „mittleren Krümmung"

$\frac{1}{2}\Delta z := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ gerade die (schon von K. Kommerell behandelten) „Potentialflächen" $z=\Re f(x+iy)$.[2])

Nach Kriegsende fand Strubecker bald wieder Anschluß an das Universitätsleben und folgte 1947 einem Ruf auf ein Ordinariat an der Technischen Hochschule Karlsruhe, die ihn bereits 1936 (wegen der damaligen politischen Verhältnisse allerdings erfolglos) zu sich holen wollte. Dieser Hochschule blieb er bis zu seiner Emeritierung 1972 d. h. ein Vierteljahrhundert treu, obwohl ihn in der Folgezeit ehrenvolle Rufe auf den Lehrstuhl für Geometrie an der Technischen Universität Berlin (Nachfolge Rembs 1955) und den Lehrstuhl für Geometrie an der Technischen Hochschule Wien (Nachfolge Kruppa 1956) erreichten. Die Tatsache, daß er in Karlsruhe (im Gegensatz zu früherer Tradition an den technischen Hochschulen) die Fächer Mathematik und Geometrie zusammen vertrat und er dort im Lauf der Zeit eine ausgezeichnete Ausstattung seines Instituts erreichte, mag bei der Ablehnung dieser Rufe mitgespielt haben.

In seiner Karlsruher Zeit entfaltete nun Strubecker eine ungeheure Aktivität. Zusammen mit anfänglich nur zwei Kollegen und einem Dozenten mußte er die Studierenden aller technischen Fakultäten sowie diejenigen der Mathematik und Physik in den für sie wesentlichen mathematischen Fächern ausbilden, bis nach den Empfehlungen des Wissenschaftsrats in den 60er Jahren der Lehrkörper stark ausgeweitet wurde, so daß dadurch für ihn eine gewisse Entlastung eintrat. Allerdings vervielfachte sich aber damals auch die Zahl der Studierenden.

An dem Aufbau der späteren „Universität" Karlsruhe nach dem Kriege hatte Strubecker wesentlichen Anteil. So war er 1949/50, 1951/52, 1962/63 Dekan der großen Fakultät für Natur- und Geisteswissenschaften, davor bzw. danach Leiter der Abteilung für Mathematik, außerdem Wahlsenator und Mitglied diverser Senats- und anderer Kommissionen der Universität. Unter diesen Umständen blieb für ihn für ein Forschungsfreisemester oder eine längere Tätigkeit als auswärtiger Gastprofessor keine Zeit.

Allerdings nahm Strubecker mit großer Regelmäßigkeit an in- und ausländischen Tagungen teil und hielt dort – sowie auf besondere Einladung – zahlreiche Vorträge (zum Teil sogar in italienischer Sprache). So führte ihn der Weg auch oft zur Geometrietagung am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, wo ich ihn selbst persönlich zuerst kennenlernte. Ich erinnere mich noch gut an seine wohldurchdachten und spannend formulierten Vorträge, die er mit einer tragenden Stimme darbot (wobei er bekannterweise den griechischen Buchstaben ϕ immer als „fü" artikulierte). Den ihm eigenen „preußischen" Pflichteifer erwartete er übrigens auch von seinen Mitarbeitern, was diese letztlich zu schätzen wußten. Überhaupt stellte Strubecker nicht nur im Wissenschaftsbereich eine überall respektierte Persönlichkeit dar. Er war

---

[2]) Wegen einer weiterführenden Darstellung dieser Dinge sei auf die Bücher von H. Sachs: „Ebene isotrope Geometrie" 1987 und „Isotrope Geometrie des Raums" 1990 verwiesen.

bestrebt, seine Wissenschaft auch einer breiteren Öffentlichkeit im Rahmen von Rundfunkvorträgen (z. B. in der Sendereihe „Lebendige Wissenschaft“) nahezubringen und somit eine heutzutage mehr denn je notwendige Öffentlichkeitsarbeit zu leisten.

Daneben kam aber seine wissenschaftliche Arbeit keineswegs zu kurz. Im Gegenteil, Strubeckers 1956–1984 erschienenes vierbändiges Buch „Einführung in die Höhere Mathematik“ mit über 3200 Seiten stellt wegen seiner Ausführlichkeit und Reichhaltigkeit an Beispielen und historischen Bezügen auch heute noch ein Standardwerk dar und wird von den Studenten gerne gelesen. Außerdem verfaßte Strubecker 1958 (2. Aufl. 1967) ein Lehrbuch über Darstellende Geometrie und 1955–1959 (2. Aufl. 1968/69) drei Göschenbände über klassische Differentialgeometrie, bei denen zwischen innerer und äußerer Flächengeometrie sorgfältig unterschieden und insbesondere auch auf die nichteuklidische Geometrie eingegangen wird.

Von seiner auch nach seiner Emeritierung ungebrochenen Schaffenskraft zeugen weiter u. a. mehrere Veröffentlichungen zu den isotropen Gegenstücken der Minimalflächen von Enneper, Scherk und Thomsen ([84], [87] und [88]) und zur Existenz „dualer“ isotroper Minimalflächen ([90]). Sie stellen exzellente Beispiele einer explizit betriebenen Differentialgeometrie dar. Dazu kommen Arbeiten Strubeckers zu so verschiedenen Dingen wie z. B. der isotropen Differentialgeometrie der Airyschen Spannungsfläche $z=z(x,y)$ mit $\Delta\Delta z=0$ ([71]), der kinematischen Erzeugung der Integralflächen von Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ([78]) oder der Existenz eines Feuerbachschen Kreises der isotropen Dreiecksgeometrie im Rahmen der ebenen Ausgleichsrechnung ([94]). Außerdem hat ihn die Anwendung von Übertragungsprinzipien immer wieder beschäftigt. So erhielten frühere Arbeiten Strubeckers über die Darstellung einer flächentreuen Ebenenabbildung als durch eine Fläche $z=z(x,y)$ im isotropen Raum gegebene „parataktische Abbildung“: $x_l=x+\frac{\partial z}{\partial y}$, $y_l=y-\frac{\partial z}{\partial x}$; $x_r=x-\frac{\partial z}{\partial y}$, $y_r=y+\frac{\partial z}{\partial x}$ (siehe [40], [41], [43]) in den letzten Jahren eine Fortsetzung durch ähnliche Darstellungen von dichtetreuen Geradenabbildungen der Ebene ([95], [97]). Dieselben konnte er aber nicht mehr ganz zu Ende führen (es sei deshalb an dieser Stelle der Auszug eines von ihm für die Geometrietagung im Mai 1991 in Thessaloniki vorgesehenen Vortrags wiedergegeben!). Insgesamt erschienen (neben Büchern, Kommentaren, Biografien) fast 100 wissenschaftliche Arbeiten Strubeckers, ein bewundernswertes Lebenswerk für einen Mathematiker.

Karl Strubecker sind im Laufe der Zeit verschiedene wichtige Ehrungen zuteil geworden: Nachdem er, wie schon erwähnt, 1939 korrespondierendes Mitglied der österreichischen Akademie der Wissenschaften wurde, folgte 1979 seine Ernennung zum korrespondierenden Mitglied der jugoslawischen Akademie der Wissenschaften und Künste in Zagreb sowie zum Ehrenmitglied der österreichischen Mathematischen Gesellschaft und 1981 die Verleihung der Medaille in Gold dieser Gesellschaft. Schließlich wurde 1978 sein Doktordiplom der Universi-

Name : STRUBECKER, KARL

Country : Deutschland

Lecture - Title : Zwei Beiträge zur Geometrie der dichtetreuen Geradenabbildungen der Ebene.

Summary :

Auf dem letzten Geometrie-Kongreß (Thessaloniki 1987) habe ich für die dichtetreuen Geradenabbildungen der Ebene eine einfache geometrische Konstruktion und eine einfache analytische Darstellung angegeben. Beschreibt man die Geraden t der (X,Y)-Ebene durch Gleichungen der Form $uX+vY+1=0$ und ist $z=z(x,y)$ eine C2-Fläche des Raums $Q(x,y,z)$ dann gehört zu dieser Fläche eine dichtetreue Abbildung der beiden Geradenfelder t_l, t_r, die durch die Formeln dargestellt wird:

$$t_l \dots\ u_l = (pz-q)/N_l, \quad v_l = (qz+p)/N_l$$

$$t_r \dots\ u_r = (pz+q)/N_r, \quad v_r = (qz-p)/N_r$$

mit $N_l = (1+z^2)-p(xz+y)-q(yz-x)$; $N_r = (1+z^2)-p(xz-y)-q(yz+x)$.
Für die beiden integralen Dichten der beiden Geradenfelder t_l, t_r ergibt sich der gemeinsame Wert

$$J_l = J_r = \iint \frac{(1+z^2)^2(rt-s^2) + (p^2+q^2)^2}{(1+z^2)^{3/2}\ (p^2+q^2)^{3/2}}\, dx\, dy\ .$$

Um genaue geometrische Einsichten in das Wesen dieser Formeln zu gewinnen, ist es notwendig, dem Bildraum $Q(x,y,z)$ eine quasielliptische Struktur zu geben. Der <u>quasielliptische Raum</u> Q ist dann ein Grenzfall des elliptischen Raums; seine Bewegungen sind das kommutative Produkt zweier dreigliedrigen Gruppen von <u>Cliffordschen Schiebungen</u>. Das absolute Gebilde von Q besteht aus der Ferngeraden der Ebane $z=0$, den beiden absoluten Ebenen $z=+i$ und $z=-i$ sowie den beiden absoluten Kreispunkten auf der Ferngeraden u von $z=0$. Es gibt zwei Paare von verschränkten Strahlbüscheln mit der Achse u, welche die absoluten Erzeugenden von Q bilden. Die Cliffordschen Schiebungen sind jene windschiefen Kollineationen, deren Achsen absolute Erzeugende sind.
Im <u>Vortrag</u> wird gezeigt, daß zu jeder dichtetreuen Geradenabbildung eine einfache Schar von Bildflächen gehört, die im quasielliptischen Sinne <u>Parallelflächen</u> voneinander sind.
Als <u>Beispiele</u> werden sodann behandelt die Cliffordschen Flächen des Raumes Q und eine bemerkenswerte Fläche, deren Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, und die durch Schiebung dieser Linien aneinander erzeugt werden kann.

tät Wien anläßlich des Goldenen Doktorjubiläums erneuert, und der Senat der Technischen Universität Wien verlieh ihm 1984 zu seinem 80. Geburtstag die Würde eines Ehrendoktors der Naturwissenschaften.[3])

Der Name Karl Strubecker wird als Vorbild für die heutige und spätere Mathematikergenerationen unvergessen bleiben.

Schriftenverzeichnis von K. Strubecker

I. Wissenschaftliche Arbeiten

[1] Über nichteuklidische Schraubungen und einige spezielle nichteuklidische und euklidische Schraubflächen, 1928 (Dissertation Universität Wien)
[2] Über die Schraubungen des elliptischen Raumes, Wien, Akad. S. Ber. **139** (1930) 421–450
[3] Zur nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformation, ebenda 685–705 (Habilitationsschrift TH Wien)
[4] Über nichteuklidische Schraubungen, MhMPh **38** (1931) 63–84
[5] Zur sphärischen Raumgeometrie, ebenda 275–290
[6] Über kubische Verwandtschaften bei nichteuklidischen Schraubungen, Wien, Akad. S. Ber. **140** (1931) 545–578
[7] Über rhombische Netze aus Geraden und Kreisen, Wien, Akad. S. Ber. **141** (1932) 33–39
[8] Über eine Klasse spezieller Dreiecksnetze aus Kreisen, MhMPh **39** (1932) 395–398
[9] Über Dreiecksnetze aus Kreisen und Parabeln gleicher Achsenrichtung, Bericht Intern. Math. Kongreß Zürich, 1932 II, 174
[10] Über eine Kreisfigur (Stanislaus Jolles zum 75. Geburtstag gewidmet), Crelle J. Math. **169** (1933) 79–86
[11] Lösung einer Aufgabe von H. Liebmann, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **43** (1933) 29–30 kursiv
[12] Zur Geometrie sphärischer Kurvenscharen, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **44** (1934), 184–198 (Habilitationsschrift Universität Wien)
[13] Über Konstruktionen in der Laguere-Geometrie, Wien, Akad. S. Ber. **143** (1934) 233–265
[14] Zur Möbius-Involution der Ebene, MhMPh **41** (1934) 439–444
[15] Über die Lie'schen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes, Anz. Österr. Akad. Wiss. **71**, 6. XII. (1934) 315–318
[16] Über die Lie'schen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes (Ein Beitrag zur Kinematik der Minimalebene), MhMPh **42** (1935) 309–376
[17] Über Flächen mit zweigliedriger nichteuklidischer Bewegungsgruppe (Wilhelm Wirtinger zum 70. Geburtstag gewidmet), MhMPh **44** (1936) 51–59
[18] Gruppentheoretische Begründung der Lie'schen Deutung der Flächenelemente (x, y, z, p, q) des R_3 als Punkte des R_5 (G. Kowalewski zum 60. Geburtstag gewidmet), ebenda 295–306
[19] Über zirkulare quadratische Komplexe, Wien, Akad. S. Ber. **145** (1936) 657–680
[20] Zur Infinitesimalgeometrie Pfaffscher Mannigfaltigkeiten, MhMPh **46** (1938) 233–247
[21] Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes, Crelle J. Math. **178** (1938) 135–173
[22] Zur Geometrie der Korbbögen (Bemerkung zur Mitteilung von G. D. Sandel), Z. f. angew. Math. u. Mech. **18** (1938) 148–149
[23] Satz über perspektivisch-konjugierte Krümmungsradien (Bemerkung zur Mitteilung von F. Staeble), ebenda 150
[24] Study'sches Übertragungsprinzip und Motorrechnung, Math. Z. **44** (1938) 1–19
[25] Über eine Anwendung des Study'schen Übertragungsprinzips auf Mechanik, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **48** (1938) 16–18
[26] Zur Theorie der zirkularen quadratischen Komplexe, Wien, Akad. S. Ber. **147** (1938) 37–47

[3]) Die Laudatio zu diesem Anlaß hielt sein jüngerer, leider allzufrüh verstorbene Kollege Heinrich Brauner.

[27] Eine Konstruktion der Asymptotenlinien auf Regelflächen 3. Ordnung (Aufgabe), Jber. d. Dt. Math.-Verein. **48** (1938) 37–47
[28] Die Geometrie des isotropen Raumes und einige seiner Anwendungen, ebenda 236–257
[29] Über die Eulersche Transformation, C. R. Inst. des sciences Roumanie **3** (1939) 150–155
[30] Transformationstheorie der Komplexe ([11], [112]), Mathematica (Cluj) **15** (1939) 135–156
[31] Direkte Herleitung der Darstellung der Bewegungen der Ebene durch Study'sche Quaternionen (Philipp Furtwängler zum 70. Geburtstag gewidmet), MhMPh **47** (1939) 213–216
[32] Beitrag zum Pohlke-Satz, Wien, Akad. Sitz. Ber. **148** (1939) 107–110
[33] Komplexe Geometrie und aufrechte Ellipsenbewegung, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **50** (1940) 43–58
[34] Differentialgeometrie des isotropen Raumes I: Theorie der Raumkurven, Wien, Akad. S. Ber. **150** (1941) 1–53
[35] Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, Anz. Österr. Akad. Wiss. **78** (1941) 90–94
[36] Differentialgeometrie des isotropen Raumes II: Die Flächen konstanter Relativkrümmung, Math. Z. **47** (1942) 743–777
[37] Zum Cauchyschen Problem der Differentialgleichung $rt-s^2=$ konst. Deutsche Math. **6** (1942) 507–524
[38] Differentialgeometrie des isotropen Raumes III: Flächentheorie, Math. Z. **48** (1942) 369–427
[39] Über die flächentreuen Abbildungen der Ebene, Bull. math. soc. Roumaine des sciences **44** (1942) 59–70
[40] Differentialgeometrie des isotropen Raumes IV: Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene, Math. Z. **50** (1944) 1–92
[41] Über die parataktischen Abbildungen der Flächenelemente des isotropen Raumes auf Punktepaare der Ebene, Crelle J. Math **186** (1945) 129–164
[42] Zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung $(a_1D+1)(a_2D+1)\ldots(a_nD+1)y=s(x)$ für reelle Konstante a_k, Arch. Math. **1** (1948) 65–72
[43] Differentialgeometrie des isotropen Raumes V: Zur Theorie der Eilinien, Math. Z. **51** (1949) 525–573
[44] Über einige Anwendungen der Differentialgeometrie des isotropen Raumes, Nachr. Österr. Math. Ges. Wien **3** (1949) Heft 8/9, 30–31
[45] Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören (Georg Faber zum 70. Geburtstag gewidmet), Math. Z. **52** (1950) 401–435
[46] Über monofokale Kegelschnitte (Erhard Schmidt zum 75. Geburtstag gewidmet), Math. Nachr. **4** (1950) 36–46
[47] Überblick über die Differentialgeometrie des isotropen Raumes, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **54** (1951) 34
[48] Elliptische Schraubungen und nichteuklidische Loxodromen, Matematisk Tidsskrift, B (1951) 71–76
[49] Erlanger Programm und Differentialgeometrie, Math. phys. Semesterber. (Göttingen) **2** (1952) 263–278
[50] Äquiforme Geometrie der isotropen Ebene, Arch. Math. **3** (1952) 145–153; siehe auch: Nachr. Österr. Math. Ges. Wien **6** (1952) H. 21/22, 50
[51] Über die Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden, Wien, Akad. S. Ber. **12** (1952) 103–110
[52] Le superficie, le cui asintotiche dei due sistemi appartengono a complessi lineari, Atti del 4. Congresso Unione Mat. Italiana Taormina 1951, 2 (Roma 1953), 441–445
[53] Kinematik, Lie'sche Kreisgeometrie und Geraden-Kugel-Transformation, Elemente der Mathematik **8** (1953) 4–13
[54] Alcune applicazioni della geometria differentiale dello spazio isotropo, Atti Convegno di Geometria Differenziale (Roma 1954), Editioni Cremonese, 322–331
[55] Über Potentialflächen, Arch. Math. **5** (1954) 32–38
[56] Transformationstheorie der quadratischen Linienkomplexe ([11], [22]), 1. Teil, Crelle J. Math. **193** (1954) 209–238
[57] Euklidische Schraubung und Liniengeometrie, Internationale Math. Nachr. **8**, Nr. 33/34 (1954) 69–70

[58] Minimalflächen des isotropen Raumes, Proc. Int. math. Congr. Amsterdam 1954, II, 1954, 258–260
[59] Über die Hüllkurven von Keplerbahnen fester Energie, welche eine feste Keplerbahn berühren, Elemente der Mathematik **10** (1955) 81–86
[60] Transformationstheorie der quadratischen Linienkomplexe ([11], [22]), 2. Teil, Crelle J. Math. **194** (1955) 1–20
[61] Differentialgeometrie isotroper Mannigfaltigkeiten. Begriff des Raumes in der Geometrie, Schriftenreihe des Instituts für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin **1** (1957) 143–155
[62] Über Flächen $rt-s=K=\text{const}$ und ihren Zusammenhang mit den Flächen $Kr+t=0$. Abh. math. Sem. Hamburg **21** (1957) 99–103
[63] Zur Vektoranalysis auf Flächen, Arch. Math. **9** (1958) 123–127
[64] Casi limiti di geometrie non euclidee, Istituto Mat. Univ. Roma (1958) 66 S.
[65] Über die Schraubflächen mit sphärischen oder ebenen Krümmungslinien, Math. Nachr. **19** (1958) 176–181
[66] Über Komplexflächen bei euklidischen Schraubungen, MhM **62** (1958) 297–323
[67] Das Rechnen mit ungenauen Zahlen, Der Math.-Naturwiss. Unterricht **11** (1958/59) 226
[68] Beitrag zur kinematischen Abbildung (Erwin Kruppa zum 75. Geburtstag gewidmet), MhM **65** (1961) 366–390
[69] Eine neue Erzeugung der Minimalfläche von Enneper (E. Bompiani zum wiss. Jubiläum), Ann. Matemat. pura appl. (IV) **55** (1961) 297–306
[70] Berichtigung dazu, ebenda (IV) **57** (1962) 221–222
[71] Airysche Spannungsfunktion und isotrope Differentialgeometrie, Celebrazioni archimedee del secolo XX, Siracusa 1961, I (1962) 107–109; siehe auch: Math. Z. **78** (1962) 189–198 und Internat. Congress of Math. (ICM) Stockholm 1962, Abstract of short communications, 1962, 144–145
[72] Anwendungen der Differentialgeometrie des isotropen Raumes auf Geometrie und Mechanik, Internationale Math. Nachr. **16**, H. 72 (1962) 51–52
[73] Über die Parabeln zweiter bis vierter Ordnung, Praxis d. Math. **4** (1962) 141–144, 169–174, 197–201
[74] Geometrie in einer isotropen Ebene, Der Math.-Naturwiss. Unterricht **15** (1962) 297–306, 343–351, 385–394
[75] Die Differentialgeometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen, S. Ber. Berliner math. G. 1962
[76] Casi limiti di geometrie non-euclidee, Rend. Sem. Mat. Univ. Torino **21** (1961/62) 141–212
[77] Über die Flächen von Monge und Serret im isotropen Raum, Math. Z. **81** (1963) 155–179
[78] Über Monge-Ampère'sche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Crelle J. Math. **217** (1965) 143–179
[79] Theorie und Praxis der Genauigkeit des Rechnens mit Rechenstäben verschiedener Länge, Aristo-Mitteilungen für Ingenieur- und Hochschulen, Heft 12 (1970) 1–12
[80] Geometrie isotroper Räume, Instituto nazionale di alta matematica, Symposia Matematica **V** (1971) 263–284
[81] Einleitung zum Band „Geometrie" der „Wege der Forschung", Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1972, 1–21
[82] Geometrie und Kinematik des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes (Deutsche Übersetzung von [76]), Band „Geometrie" der Sammlung „Wege der Forschung", Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1972, 156–226
[83] Über die Kegelschnitte des Torus, Wien, Akad. S. Ber. **180** (1972) 137–175
[84] Über das isotrope Gegenstück $z=3/2\,J(x+iy)^{2/3}$ der Minimalfläche von Enneper, Abh. math. Sem. Hamburg **44** (1975) 152–174
[85] Über einige Eigenschaften der Fläche $z=-1/2\,J(x+iy)^{-2}$, Boll. Unione mat. Ital., IV. Ser. 12, Suppl. Fasc. 3 (1975) 158–173
[86] Loxodromen im isotropen Raum, Wien, Akad. S. Ber. **184** (1975) 269–305
[87] Über die isotropen Gegenstücke der Minimalfläche von Scherk, Crelle J. Math. **293/294** (1977) 22–51
[88] Über die Minimalflächen des isotropen Raumes, welche zugleich Affinminimalflächen sind, MhM **84** (1977) 303–339

[89] Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene, Ber. math. stat. Sekt. Forschungszentrum Graz Nr. 93, 1978, 23 S.; siehe auch: Contributions to geometry, Proc. Symp., Siegen 1978, 313–329 (1979)

[90] Duale Minimalflächen des isotropen Raumes, Rad, Yugosl. Akad. Znan. Umjet., Razréd Mat. Fiz. Teh. Znan **16** (1978) 91–107

[91] Die Geometrie isotroper Räume und Mannigfaltigkeiten, Vortrag anläßlich des 90. Geburtstages von Josef Lense an der TU München, gehalten am 4. 11. 1980, TUM, gedruckt vom Institut für Mathematik und Informatik der TU München, Okt. 1980, 1-30

[92] Bemerkungen zur invarianten Hauptachsengestalt singulärer Quadriken des R^3, Arch. Math. **38** (1982) 81–89

[93] Eulersche Transformation und isotrope Raumgeometrie, Rad, Yugosl. Akad. Znan. Umjet., Razréd Mat. Fiz. Teh. Znan **20** (1982) 71–98

[94] Zwei Anwendungen der isotropen Dreiecksgeometrie auf ebene Ausgleichsprobleme, Wien, Akad. S. Ber. **192** (1983) 497–559

[95] Dichtetreue Geradenabbildungen der Ebene, Anz. Österr. Akad. Wiss. **124** (1987) 35–42

[96] Eine einfache Konstruktion von Punkten und Tangenten der Ellipse, Elemente der Mathematik **43** (1988) 22–23

[97] Einige Beiträge zur Theorie der dichtetreuen Geradenabbildungen der Ebene (aus dem Nachlaß des Verstorbenen), durch Prof. Dr. H. Sachs ausgearbeitetes Vortragsmanuskript für den Geometriekongreß in Thessaloniki 1991

II. Selbständige Bücher

[1] Differentialgeometrie
Bd. 1: Kurventheorie der Ebene und des Raumes, Sammlung Göschen, Bd. 1113/1113a, Walter de Gruyter, Berlin 1955¹, 150 S.; 1964², 253 S.
Bd. 2: Theorie der Flächenmetrik, Sammlung Göschen, Bd. 1179/1179a, Walter de Gruyter, Berlin 1958¹, 195 S.; 1969², 261 S.
Bd. 3: Theorie der Flächenkrümmung, Sammlung Göschen, Bd. 1180/1180a, Walter de Gruyter, Berlin 1959¹, 254 S.; 1969², 264 S.

[2] Vorlesungen über Darstellende Geometrie, studia math. 12, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1958¹, 324 S., 1967², 349 S. Übersetzt ins Serbokroatische: Nacrtna Geometrija, übersetzt von Dominik Palman, 300 S., Tehnicka Knjiga, Zagreb 1971

[3] Einführung in die Höhere Mathematik
Bd. 1: Grundlagen, Oldenbourg, München, 1956¹, 821 S.; 1966², 825 S.
Bd. 2: Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen, Oldenbourg, München, 1967, 806 S.
Bd. 3: Integralrechnung einer reellen Veränderlichen, Oldenbourg, München, Wien 1980, 807 S.
Bd. 4: Grundzüge der linearen Algebra. Differential- und Integralrechnung der Funktionen von mehreren Veränderlichen, Oldenbourg, München, Wien 1984, 817 S.

III. Mitarbeit an Büchern und an der Herausgabe von Sammelwerken

[1] Scheffers, G.: Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten, Math.-Phys. Bibliothek Reihe I, 85/86, B. G. Teubner, Stuttgart 1956², 114 S.

[2] Naas, I., Schmid, H. L.: Mathematisches Wörterbuch, Bd. 1/2: 150 Artikel über komplexe Geometrie und isotrope Geometrie, Akademie-Verlag, Berlin und B. G. Teubner, Stuttgart 1961

[3] Behnke, H.: Grundzüge der Mathematik, Bd. IV (Angewandte Mathematik): Artikel Graphische und instrumentelle Verfahren, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1966, 77 S.

[4] Blaschke, W.: Gesammelte Werke, Bd. I: Kommentar W. Blaschkes Beiträge zur Theorie der Schraublinien, zu einigen unendlichen ebenen Gruppen, zur ebenen und räumlichen Geometrie der Speere, zur Hermiteschen Geometrie und zur Geraden-Kugel-Transformation, Thales, Essen 1982, 33–47

IV. Wissenschaftliche Schriften allgemeiner Art

[1] Entwicklungslinien der Elementargeometrie, Naturwissenschaftliche Rundschau **5** (1952) 177–180

[2] Wahrheit und Irrtum in der Mathematik, Universitas **8** (1953) 47–54

[3] Bernhard Riemanns Habilitationsvorlesung (mit Erläuterungen), Physikalische Blätter **10** (1954) 296–313

[4] Das Unendliche in mathematischer Sicht, Universitas **9** (1954) 665–671

[5] Mathematik und Wirklichkeit, Pyramide **4** (1955) 122–131; siehe auch: Scientia (VI) **55** (1961) 1–8 (auch in französischer Übersetzung) und Physikalische Blätter **18** (1962) 293–298

[6] Mathematisches Denken und exakte Naturbeschreibung, Naturwissenschaftliche Rundschau **9** (1956) 261–266

[7] Die Quadratur des Kreises, Pyramide **5** (1956) 108–110

[8] Das Zahlenrechnen, ein Beitrag der Mathematik zur menschlichen Kultur, Physikalische Blätter **14** (1958) 289–296; siehe auch: Ventil, Karlsruher Studentenzeitung **5** (Nov. 1958) 15–17

[9] Die Entwicklung des Zahlenrechnens, Deutsche Universitätszeitung **13** (1958) 457–463

[10] Was ist ein vierdimensionaler Raum? Universitas **14** (1959) 961–970

[11] Mathematik als Hilfsmittel der modernen Erfahrungswissenschaften, Physikalische Blätter **16** (1960) 156–163; siehe auch: Ventil, Karlsruher Studentenzeitung **8** (Febr. 1960) 21–23

[12] Einige neuere Entwicklungen in der Mathematik, Scientia (VI) **54** (1960) 1–8 (französische Übersetzung: Quelques nouvelles lignes de Devellopment dans les mathématiques, ebenda)

[13] Neuere Entwicklungslinien in der Mathematik, Naturwissenschaftliche Rundschau **13** (1960) 457–461

[14] Die Architektur der Mathematik (Übersetzung nach N. Bourbaki mit Einleitung), Physikalische Blätter **17** (1961) 160–166, 212–218

[15] Berechnung von π auf 100.000 Dezimalen, Physikalische Blätter **19** (1963) 111–115

[16] Die Grenzen der Anschauung in der Mathematik, Scientia (VI) **58** (1964) 1–9 (französische Übersetzung: Les limites de l'intuition en mathématiques, ebenda)

[17] Mathematik und Anschauung, Physikalische Blätter **20** (1964) 567–570; **21** (1965) 10–15; siehe auch: Die Philosophie und die Wissenschaften, Simon Moser zum 65. Geb.tag, Anton Hain, Meisenheim/Glan 1967, 70–77

[18] Gelöste und ungelöste Fragen der Mathematik, Naturwissenschaftliche Rundschau **18** (1965)

[19] Geometrie in alter und neuer Zeit I/II, Bild der Wissenschaft **12** (1967) 1026–1034 und **13** (1968) 50–57

[20] Bourbaki, Physikalische Blätter **24** (1968) 208–209

[21] Bedeutung und praktische Anwendung der Mathematik in unserer Zeit, Universitas **24** (1969) 527–536

[22] Die Mathematisierung der Naturwissenschaften, IBM-Nachrichten **19** (1969) 902–908

[23] Hauptzüge der Entwicklung der Mathematik, Naturwissenschaftliche Rundschau **23** (1970) 89–93

[24] Der Wandel in den Grundlagen der Mathematik, Physikalische Blätter **26** (1970) 386–393

[25] Der Banachraum, Physikalische Blätter **27** (1971) 108–109

[26] Mathematik einst und jetzt, Physikalische Blätter **27** (1971) 488–496

[27] Neue mathematische Unterrichtsmethoden, Physikalische Blätter **29** (1973) 126–127

[28] Physikalische Blätter und Mathematik, ebenda 7–8

[29] Mengenlehre und Neue Mathematik in der Schule, Physikalische Blätter **30** (1974) 168–173

V. Biographisches

[1] Nachruf auf E. A. Weiss, Deutsche Math. **7** (1943) 254–298

[2] Carl Friedrich Gauß zum 100. Todestag, Physikalische Blätter **11** (1955) 240–250

[3] Professor Dr. Th. Pöschl (Nachruf), Mitt. Math. Labor, TH Wien **2** (1955) 133–134

[4] Adam Riese (1492–1559), Physikalische Blätter **15** (1959) 112–120

[5] Walter Lietzmann (Nachruf), Physikalische Blätter **16** (1960) 30–31

[6] Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, Enzyklopädie: Die Großen der Weltgeschichte, Band VII, Kindler, Zürich 1976, 530–549

[7] Carl Friedrich Gauß zum 200. Geburtstag, Physikalische Blätter **33** (1977) 145–150
[8] Carl Friedrich Gauß, Mathematicorum Princeps. Zum 200. Geburtstag, Bild der Wissenschaft **14** (1977) Heft 5, 118–126
[9] Bernhard Riemann, Enzyklopädie: Die Großen der Weltgeschichte, Band VIII, Kindler, Zürich 1978, 472–495
[10] Carl Friedrich Gauß (1777–1855), Fridericiana, Zeitschrift der Universität Karlsruhe, Heft 28 (1981) 51–72
[11] Emil Lampe. Neue Deutsche Biographie **13** (1982) 459/460
[12] Sophus Lie. Neue Deutsche Biographie
[13] Friedrich Levi. Neue Deutsche Biographie
[14] Leonhard Euler (1707–1763), Fridericiana, Zeitschrift der Universität Karlsruhe, Heft 33 (1983) 3–23
[15] Wilhelm Blaschke (13. 09. 1985–17. 03. 1962), Result. Math. **8** (1985) 153–163
[16] Wilhelm Blaschkes mathematisches Werk, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **88** (1986) 146–157

Liste der Doktoranden

1. Dr. phil. Hans *Pribyl* (Universität Wien, 1941): Die Transformationstheorie der Komplexe ([33])
2. Dr. rer. nat. Annemarie *Frey* (Universität Straßburg, 1944): Die Transformationstheorie der Komplexe ([11], [22])
3. Dr. rer. nat. Walter O. *Vogel* (Techn. Hochschule Karlsruhe, 1954): Die parataktische Abbildung im isotropen Raum von fünf Dimensionen
4. Dr.-Ing. Rupert *Merkel* (Techn. Hochschule Karlsruhe, 1955): Eine Darstellende Geometrie der orientierten Linienelemente
5. Dr. rer. nat. Helga *Wünsch* (Techn. Hochschule Karlsruhe, 1963): Die kugeltreuen Transformationen des isotropen Raumes
6. Dr. rer. nat. Werner *Klepper* (Universität Karlsruhe, 1971): Die Transformationstheorie der Linienkomplexe ([3], [21])
7. Dr. rer. nat. Wolfgang *Grimm* (Universität Karlsruhe, 1972): Über Flächen mit zwei Scharen von kubischen Asymptotenlinien

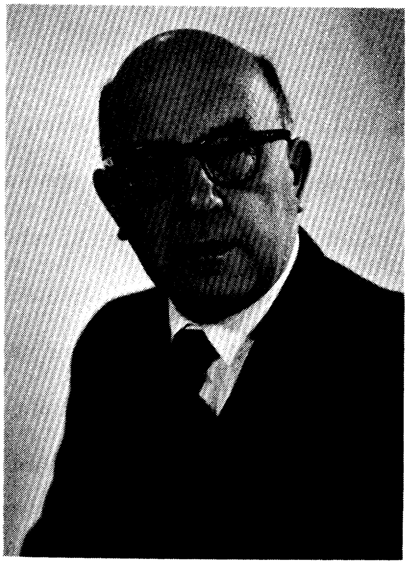
Prof. Dr. K. Leichtweiß
Mathematisches Institut B
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
7000 Stuttgart 80

(*Eingegangen 29. 11. 1991*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 94 (1992) 118–129
AMS subject classification: 01 A 70

Otto Volk 1892–1989

W. Barthel und H.-J. Vollrath, Würzburg



Sein Leben

Otto Theodor Volk wurde am 13. Juli 1892 als fünftes von 13 Kindern des Lehrers Josef Volk und seiner Ehefrau Albertine, geb. Bundschu, in Neuhausen auf den Fildern geboren. Die Filder sind die Ebene südöstlich von Stuttgart, gebildet von einer Platte des Schwarzen Jura im Vorland der Schwäbischen Alb.

Schon während der Volksschulzeit erhielt Otto Volk beim katholischen Pfarrer in Neuhausen zusammen mit Gleichaltrigen jeden Nachmittag, auch sonntags, Privatunterricht in Latein, dann in Französisch und später in Griechisch. Von 1903 bis 1906 besuchte er die Lateinschule in Rottenburg am Neckar, von 1906 bis 1910 dann das Gymnasium in Ehingen an der Donau, das er 1910 mit der Konkursprüfung (Abitur) abschloß. Otto Volk betonte, daß fast alle seine Lehrer am Gymnasium wissenschaftliches Ansehen genossen und wissenschaftlich aktiv waren. Sein Mathematiklehrer, Prof. Dr. B. Sporer, hatte ihn schon frühzeitig auf Gauß und dessen „Disquisitiones arithmeticae" hingewiesen.

Von 1910 bis 1914 studierte Otto Volk als Angehöriger des Wilhelmsstifts katholische Theologie, Philosophie und Mathematik an der Universität Tübingen. 1914 legte er das Theologische Staatsexamen ab und wurde 1915 ordiniert. Doch sein Interesse an der Mathematik war so stark, daß er beschloß, in Tübingen und München weiter Mathematik zu studieren. Zu seinen Lehrern in Tübingen gehörten Alexander von Brill, Ludwig Maurer und Oskar Perron; als Lehrer in München sind an der Technischen Hochschule Walther von Dyck, Georg Faber und Heinrich Liebmann zu nennen. An der Universität München hörte er bei Ferdinand von Lindemann, Alfred Pringsheim (Schwiegervater von Thomas Mann) und Aurel Voss.

Otto Volk schloß sein Studium 1917 mit der 1. Dienstprüfung für das höhere Lehramt ab. Anschließend ging er in den höheren Schuldienst in Schwäbisch Gmünd und Feuerbach und legte 1918 die 2. Dienstprüfung für das höhere Lehramt ab.

Zugleich arbeitete er an seiner Dissertation „Studien über einige Randwertaufgaben der Potentialtheorie“, die von Liebmann angeregt worden war. 1918 wurde er zum Dr.-Ing. an der Technischen Hochschule München promoviert. 1919 folgte er einer Einladung von Lindemann nach München an die Universität und wurde Assistent von Lindemann, Pringsheim und Voss. Er hatte für sie Übungen abzuhalten und die studentischen Übungen zu korrigieren. Dabei ließ es sich Pringsheim nicht nehmen, die von ihm korrigierten Arbeiten nochmals kritisch durchzusehen, was Volk erheblich unter Druck setzte. Volk wohnte bei Lindemanns und hatte neben seinen wissenschaftlichen Verpflichtungen noch manche häuslichen Pflichten zu übernehmen. Lindemann machte ihm klar, daß der erworbene Grad eines Dr.-Ing. für eine wissenschaftliche Karriere in Mathematik an einer Universität nicht ausreichte. So schrieb Otto Volk noch eine weitere Dissertation. Von Lindemann erhielt er das Thema: „Entwicklung der Funktionen einer komplexen Variablen nach den Funktionen des elliptischen Zylinders.“ 1920 wurde er an der Universität München zum Dr. phil. promoviert.

Mit der Entwicklung von Funktionen einer komplexen Variablen befaßt sich auch seine Habilitationsschrift. Er habilitierte sich 1922 an der Universität München und erhielt noch im gleichen Jahr einen Ruf an die neu gegründete Universität Kaunas in Litauen.

Otto Volk nahm den Ruf an und war von 1923 bis 1930 in Kaunas Ordinarius und Vorstand des Instituts für Mathematik und Astronomie, das er jedoch erst aufzubauen hatte. So richtete er dort eine mathematische Bibliothek neu ein, wobei es ihm gelang, die großen Bibliotheken von Carl Neumann und Aurel Voss aus den Nachlässen zu erwerben. Wenn auch die räumlichen Verhältnisse zunächst recht beengt waren, wurde doch sehr rasch für die Universität ein Neubau errichtet, in dem die Mathematik sehr großzügig bedacht wurde. Zunächst konnte er Vorlesungen, Übungen und Seminare in deutscher Sprache abhalten; nach etwa drei Jahren begann er, eine Hauptvorlesung in litauischer Sprache zu halten. Auch erste Arbeiten von ihm erschienen bereits ab 1924 in litauischer Sprache, dabei handelt es sich zunächst um Biographien bedeutender Mathematiker. Dann beginnt er, mathematische Lehrbücher in litauischer Sprache zu schreiben. Dabei wird er unter der Anleitung seiner Schüler häufig zum Sprachschöpfer mathematischer Begriffe in der litauischen Sprache. 1925 erschien zunächst seine „Höhere Algebra", 1929 folgten „Analytische Mechanik" und „Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen"; letzteres wird auch in Erich Kamkes bekanntem Lehrbuch über Differentialgleichungen angeführt.

Sicher war die Tätigkeit an einer neu gegründeten ausländischen Universität mit manchen Schwierigkeiten und persönlichen Risiken verbunden. Aber Otto Volk widmete sich seiner Aufgabe mit großem Engagement. So gehörten die Jahre in Kaunas, wie er selbst sagte, zu den schönsten seines Lebens. Er hatte die Genugtuung, daß eine Reihe seiner Schüler im Ausland promovierten und dann später Dozenten an der Universität Kaunas werden konnten. Die litauischen Mathematiker würdigen noch heute seine Leistungen für die Mathematik in ihrem Lande.

Gegen Ende der zwanziger Jahre wurden die politischen Verhältnisse unter sowjetischem Druck in Litauen schwierig. So war es für Otto Volk eine Erleichterung, als er 1930 einen Ruf auf das Extraordinariat in Würzburg erhielt, das 1929 durch den Tod von Emil Hilb (1882–1929) frei geworden war. Die beiden Ordinariate waren zu dieser Zeit von Georg Rost (1870–1958) und Eduard von Weber (1870–1934) besetzt. Otto Volk nahm den Ruf an. 1932 wurde er persönlicher Ordinarius und 1935 Nachfolger von Eduard von Weber. Das Extraordinariat wurde nicht mehr von einem Mathematiker besetzt, so daß Würzburg in der folgenden Zeit nur noch zwei Ordinariate für Mathematik hatte. Nach der Emeritierung von Georg Rost übernahm er auch die Astronomie. Ab 1937 war er damit Direktor des Mathematischen Seminars und Leiter des Astronomischen Instituts und der Sternwarte der Universität Würzburg. Als zweiter Ordinarius wurde 1936 Julius Wellstein (1888–1978) berufen.

Würzburg hatte neben der bereits 1757 errichteten „Alten Sternwarte" auf dem Turm der Neubaukirche noch die 1927/28 unter Georg Rost erbaute und gut ausgestattete „Neue Sternwarte" auf dem Westflügel der Neuen Universität. Das schon lange vorhandene astronomische Interesse von Otto Volk manifestierte sich in den folgenden Jahren in systematischen astronomische Beobachtungen, die vor allem kleinen Planeten und Kometen galten. Dabei entdeckte er einen neuen kleinen Planeten, dem er den Namen „Rostia" zu Ehren seines Vorgängers gab. Parallel zu den Beobachtungen befaßte er sich mit Fragen der Himmelsmechanik.

Als 1937 die Naturwissenschaftliche Fakultät gegründet wurde, wurde er ihr erster Dekan. Während des Krieges verlief der Betrieb am Mathematischen Seminar zunächst vergleichsweise normal. Otto Volk konnte sogar Drittmittel für ein Forschungsprojekt erhalten, mit dem er versuchte, Mitarbeiter vom Kriegsdienst freigestellt zu bekommen. Bei der Bombardierung Würzburgs am 16. März 1945 aber wurden alle Einrichtungen der Mathematik und Astronomie zerstört. Auch die große Bibliothek von Friedrich Prym wurde ein Opfer der Flammen. Otto Volks Wohnhaus wurde ebenfalls vernichtet, dabei verlor er auch seine reichhaltige Bibliothek und wertvolle Kunstgegenstände.

Obwohl er wie die meisten seiner Kollegen 1945 von der Militärregierung seines Amtes enthoben wurde, setzte er sich sogleich bei den Aufräumungsarbeiten an der Universität ein. Seine Wiedereinsetzung verzögerte sich allerdings auf Grund von mancherlei Widerständen.

Von 1947 bis 1948 wurde er Mitarbeiter und stellvertretender Institutsleiter am Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach. 1949 wurde er schließlich zum ordentlichen Professor an der Universität Würzburg wiederernannt und gleichzeitig aus gesundheitlichen Gründen pensioniert. Er übernahm dann Lehraufträge am Ohm-Polytechnikum in Nürnberg und durch Vermittlung von Guido Hoheisel an der Universität Köln. 1959 erreichte er die Emeritierung und erhielt damit das Recht, wieder Vorlesungen in Würzburg anzubieten. Davon machte er regen Gebrauch. Bis zum Sommersemester 1988 las er über Themen aus der Himmelsmechanik und der Geschichte der Mathematik. Als Fakultätsbeauftragter für praktische Astronomie bemühte er sich, in Würzburg wieder astronomische Beobachtungen zu ermöglichen, zuerst mit transportablen kleineren Instrumenten im Freien. 1961 wurde unter seiner Leitung eine Notsternwarte auf der Kanzel des Balthasar-Neumann-Hauses errichtet. Aber schon bald begannen unter seiner Initiative die mühevollen Vorarbeiten und Planungen für die „Sternwarte auf der Keesburg“. Nach zweijährigem Bau wurde 1966 die Sternwarte an der Johannes-Kepler-Straße eingeweiht. Volk gilt jetzt in Würzburg als „Vater der Sternwarte“. Über seine Unternehmungen wurde häufig in der „Main Post“ berichtet. So ist er in Würzburg prominent geworden.

Otto Volk hatte sich auch um die Einrichtung eines Lehrstuhls für Astronomie bemüht, der dann für das Haushaltsjahr 1965 an der Naturwissenschaftlichen Fakultät geschaffen wurde. Von 1965 bis 1967 wurde er mit der kommissarischen Wahrnehmung beauftragt, bis dann Hans Haffner (1912-1977) berufen wurde. Volk hat die Geschichte der Sternwarte und der Astronomie in Würzburg ausführlich dargestellt [61].

Die Zeit nach seiner Emeritierung war also erfüllt von vielseitigen Unternehmungen, die er durchweg mit großer Energie, Unternehmungslust und Beharrlichkeit betrieb. Noch 1969 erhielt er einen Ruf nach Izmir (Türkei), den er jedoch ablehnte. In den letzten Jahren wurde er durch seine nachlassende Sehkraft immer abhängiger von Hilfskräften. Doch stets hatte er eine Schar von Studenten um sich, bei denen er Resonanz fand und die ihm zur Hand gingen. In seinen letzten Veröffentlichungen drückt er ihnen seinen besonderen Dank aus.

Die 400-Jahr-Feier der Universität im Jahr 1982 war für Otto Volk ein Höhepunkt. Er verfaßte für die Festschrift einen Beitrag über die Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik in Würzburg [65] und hielt anläßlich seines 90. Geburtstages eine „Vorlesung für Hörer aller Fakultäten“ über das Thema „Die Kunst des Rechnens: ars ratiocinandi“, in der er besonders auf den Transzendenzbeweis für π seines Doktorvaters Ferdinand von Lindemann einging. In dieser Vorlesung bekennt er: „Ich liebte das Rechnen, und ich liebe es noch jeden Tag.“

Tatsächlich beeindruckte er seine Umgebung damit, daß er sich bis zu seinem Ende mit mathematischen Berechnungen beschäftigte. Nach einigen Stürzen in seinem Haus wurde er Ende 1988 pflegebedüftig. Er wurde liebevoll versorgt und starb am 21. März 1989. Auf dem Waldfriedhof fand er seine letzte Ruhe. Auf seinem Grabstein, den er noch zu Lebzeiten nach seinen Vorstellungen gestalten ließ, sind Planetenbahnen mit der Sonne im Brennpunkt abgebildet. Darüber ist der Spruch eingemeißelt: „Ad astra et in coelos“. Den Trauergottesdienst hielt sein Freund Eugen Biser aus München. Ein Requiem in lateinischer

Sprache wurde von den Benediktinern in Würzburg zelebriert. Das Mathematische Institut ehrte ihn mit einem Gedenkkolloquium am 14. Juli 1989.

Für Otto Volk bildeten Mathematik und Astronomie die Mitte seines Denkens und Schaffens. Aber immer sah er auch den Menschen. Wenn er über Mathematik und Astronomie vortrug, dann würdigte er die Wissenschaftler, denen diese Erkenntnis zu verdanken war. Seine Studenten begeisterte er für diese Wissenschaften und weckte zugleich Hochachtung vor den großen Leistungen dieser Forscher. Er interessierte die Öffentlichkeit für Mathematik und Astronomie durch seine Projekte, aber auch durch zahlreiche Zeitungsartikel, wobei er gern Geburtstage bedeutender Mathematiker und Astronomen zum Anlaß nahm.

Viele seiner Kollegen wurden zu Freunden. Auch seine Schüler blieben ihm treu verbunden. An ihrem Ergehen nahm er lebhaften Anteil. Zu seinen Freunden gehörten auch Kollegen anderer Fakultäten, Wissenschaftler aus anderen Hochschulen und Künstler. Als tief religiöser Mensch erfreute er sich vor allem an Bildern mit biblischen Motiven. Besonders wertvoll waren ihm die „Emmausjünger" seines Freundes Karl Caspar. Bis ins hohe Alter spielte er gern auf seinem Harmonium aus dem „Graduale Romanum".

Otto Volk forderte sich und seinen Studenten und Mitarbeitern viel ab. Täglich stieg er auf den Turm der Neubaukirche zu astronomischen Beobachtungen. Er war ein begeisterter Wanderer und ausdauernder Radfahrer. So fuhr er z. B. an einem Tag von Würzburg nach München, als Aurel Voss im Sterben lag. Er gehörte zu den ersten, die in Bad Hofgastein einen Skikurs ablegten. Mathematische Kongresse besuchte er gern, möglichst verband er sie mit einer größeren Wanderung. Bis ins hohe Alter besuchte er regelmäßig Tagungen in Oberwolfach und trug dort vor. Aber auch den schönen Seiten des Lebens war er aufgeschlossen. Er genoß den Frankenwein und freute sich an einem guten Essen im Freundeskreis.

Bis zu seinem Lebensende nahm er regen Anteil an den Geschehnissen in der Fakultät. Dabei beklagte er gelegentlich den Verfall akademischer Sitten und empörte sich über mangelndes Geschichtsbewußtsein und unzureichende Öffentlichkeitsarbeit. Aber er sorgte auch dafür, daß manch ein Projekt, das an bürokratischen Hürden zu scheitern drohte, dank seiner großzügigen finanziellen Hilfe realisiert werden konnte. So erwies er sich immer wieder als Wohltäter der Universität. Er stiftete wertvolle Bücher für die Bibliothek. Die Krönung war die Errichtung der Otto-Volk-Stiftung der Fakultät für Mathematik im Jahre 1983. Dabei waren ihm die großzügigen Stiftungen von Friedrich Prym (1841–1915) ein Vorbild. Aus den Erträgen der Stiftung sollen Mathematik, Himmelsmechanik und Geschichte der Mathematik und Astronomie gefördert werden. Er setzte seine Stiftung auch als Alleinerbin ein. 1987 wurde ihm das Bundesverdienstkreuz am Bande verliehen.

Im Mathematischen Institut ist ein Gedenkzimmer für Otto Volk nach seinen Wünschen eingerichtet. Der Raum ist mit Möbeln aus seinem Nachlaß ausgestattet. Hier finden sich sein alter Schreibtisch, ein Cembalo, eine große Standuhr, eine Büste von Lindemann, Bücherschränke und Bilder. Viele, teils wertvolle Werke, aus seiner Bibliothek sind hier greifbar, so Wolfs „Handbuch", Littrows „Wunder des Himmels", Newtons „Opuscula mathematica", Schotts „Organum mathematicum", Gehlers „Physikalisches Wörterbuch" usw. Dort finden sich auch eine vollständige Sonderdrucksammlung von Heinrich Liebmann und der wissenschaftliche Nachlaß von Ferdinand von Lindemann. Der Raum wird für historische Studien und als Gästezimmer genutzt. 1990 ließ die Fakultät für Mathematik in kleiner Auflage Otto Volks „Gesammelte Abhandlungen" von Hans-Joachim Vollrath erstellen. Von seinem Wirken zeugt auch eine Gedenktafel am Turm der Neubaukirche, die an die Universitätssternwarte und an die Würzburger Astronomen erinnert, die dort ihre Beobachtungen durchgeführt hatten.

Sein Werk

Die wissenschaftlichen Arbeiten von Otto Volk lassen sich unschwer in vier Perioden einteilen. Zuerst beschäftigte er sich mit *Analysis,* das war im wesentlichen während seiner Zeit in München. Die zweite Phase war der *Differentialgeometrie* gewidmet, dies entspricht der Zeit in Kaunas. In seiner Würzburger Zeit galt sein Interesse zunächst der *Astronomie* und nach dem Kriege der *Geschichte* zur Mathematik, Himmelsmechanik und Astronomie.

Analysis

In seiner ersten, zunächst nicht im Druck erschienenen Dissertation 1918 [1], [10] studiert Otto Volk Randwertaufgaben der Potentialtheorie, nämlich für die Kreisscheibe und den Stab. In der zweiten Dissertation 1920 [2] untersucht er die Entwicklung komplexer Funktionen nach den Heineschen Funktionen des elliptischen Zylinders. Die Differentialgleichungen dieser Funktionen spielen in der Astronomie bei der Störungstheorie und beim Dreikörperproblem sowie in der theoretischen Physik eine Rolle. Zwei weitere Arbeiten sind den Kugelfunktionen gewidmet, in [4] betrachtet er Mittelwerte der Laplace- und Legendre-Reihen, und in [5], [11] weist er die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$ nach. In seiner Habilitationsschrift 1922 [6], [7], [9] greift Otto Volk unter allgemeineren Gesichtspunkten die Entwicklung komplexer Funktionen nach Funktionen, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Parameter genügen, wieder auf. Als Beispiele erscheinen dabei die Kugel- und Besselfunktionen, die Heineschen Funktionen des elliptischen Zylinders sowie die Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen. Auch das Studium der Abbildung

$$\zeta = (\sqrt{z^2 - b^2} - \sqrt{z^2 - c^2})/\sqrt{c^2 - b^2}$$

in [8] steht im Zusammenhang mit der Entwicklung komplexer Funktionen, hier nach Laméschen Funktionen. Diese Untersuchungen aus dem Bereich der Funktionentheorie und der Potentialtheorie wirken in zwei späteren Arbeiten noch nach, bei der Entwicklung von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher nach Laméschen Funktionen [17] und bei der Berechnung des elektrischen Feldes eines Kreisplattenkondensators [48].

Diese frühen Arbeiten zur Analysis reichen bis in Otto Volks Anfangsjahre in Kaunas. Mit einigen von ihnen beginnt er eine Schriftenreihe der Fakultät für Mathematik in Kaunas. In seinen Arbeiten zeigt sich bereits eine souveräne Beherrschung der analytischen Hilfsmittel bis zur numerischen Auswertung, eine detaillierte Kenntnis der historischen Entwicklung der betrachteten Probleme und eine klare Formulierung, die notfalls auch Schwachstellen deutlich nennt.

Differentialgeometrie

In Kaunas beginnt die zweite Phase der wissenschaftlichen Arbeit von Otto Volk, während der er sich mit Differentialgeometrie beschäftigt. Angeregt durch Arbeiten von Aurel Voss untersucht er zunächst Kurvennetze in der Ebene, insbesondere isogonale und geradlinig rhombische [12], [19], [20]. Er zeigt u. a., daß die Kegelschnitte die einzigen Kurven sind, deren Tangenten ein rhombisches Netz bilden. Dann geht er zu geodätischen rhombischen Kurvennetzen auf Flächen über [18], die nach einem Satz von Voss nur auf Liouvilleschen Flächen möglich sind. Hierbei erweisen sich wieder die von ihm benutzten Differential-Funktionalgleichungen als ein sehr wirksames Hilfsmittel. Später untersucht er geodätische Dreiecksnetze auf Flächen konstanter Krümmung [26] und auf Rotationsflächen [27], sowie allgemein Flächen mit geodätischen Dreiecksnetzen [37], [40]. In allen diesen Arbeiten erweist sich Otto Volk als der virtuose Rechner, der seine mathematische Herkunft aus der Analysis nicht verleugnen kann. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit verallgemeinerten Fragestellungen: Spezielle Kreisnetze [35] und Flächen mit isogonalen rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung [39].

Während seiner Zeit in Kaunas schreibt Otto Volk auch drei mathematische Lehrbücher in litauischer Sprache: Über höhere Algebra 1925 [21], über analytische Mechanik 1929 [33] sowie über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen 1929 [34].

In Würzburg befaßt sich Otto Volk in seinen mathematischen Arbeiten mit dreifachen Flächensystemen, die sich in Geodätischen schneiden [42] und nochmals mit Flächengruppen mit rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung [44]. Außerdem gibt er aufgrund hinterlassener Aufzeichnungen algebraische Untersuchungen von Aurel Voss über orthogonaloide Systeme heraus [43].

In einer sehr späten Arbeit kommt Otto Volk 1978 noch einmal auf seine frühen differentialgeometrischen Untersuchungen über rhombische Netzeinteilung auf Flächen [62] zurück. In ihr gibt er zunächst einen ausführlichen historischen Rückblick auf diese von ihm selbst so oft bearbeitete Problematik bis zu den neuen Arbeiten von Richard Koch. In ihr führt er dann seine analytischen Betrachtungen bis zu konkreten Zeichnungen rhombischer Netze aus, und sie schließt er mit biographischen Notizen über Tschebyscheff, Darboux, Aurel Voss, Sebastian Finsterwalder und Heinrich Liebmann. In dieser Eduard Stiefel gewidmeten Arbeit schöpft der alte Otto Volk noch einmal aus dem Vollen seines umfangreichen Wissens und Könnens, sie gehört sicher zu den Höhepunkten seines späten wissenschaftlichen Werkes.

Astronomie

In seiner Würzburger Zeit wendet sich die wissenschaftliche Arbeit von Otto Volk zunächst verstärkt der Astronomie zu. Er führte in Würzburg eigene Beobachtungen von kleinen Planeten [45] und Kometen [46] durch. Die in den Kriegsjahren durch die Verdunklung der Ortschaften geprägten Nächte boten hierfür günstige Voraussetzungen.

Nach dem Kriege zeugen der Vortrag zur Mondfrage [51] und die Ausführungen zur Astronomie in Würzburg in Erinnerung an den 1977 verstorbenen Astronomen Hans Haffner [61] von Otto Volks astronomischen Interessen im allgemeinen und von seinem Engagement für die Würzburger Sternwarten im besonderen. Seine Untersuchungen zu der von Kustaanheimo und Stiefel eingeführten KS-Transformation in der Himmelsmechanik [59] zeigen die ganze Breite der astronomischen Betätigung von Otto Volk. Mit besonderer Vorliebe behandelte er zuletzt in Vorträgen zur Himmelsmechanik immer wieder das Thema „Johannes Kepler, Leonhard Euler und die Regularisierung", vieles davon findet sich in [60] wieder. Insgesamt stellen die beiden Arbeiten [59], [60] einen weiteren Höhepunkt des späten wissenschaftlichen Werkes dar.

Geschichte der Mathematik, Himmelsmechanik und Astronomie

Nach seiner Emeritierung stand in der wissenschaftlichen Arbeit von Otto Volk die Geschichte der Mathematik, der Himmelsmechanik und der Astronomie im Vordergrund. In einem sorgfältigen Quellenstudium, bei dem er auch einige Zeit in der Bibliothek des Vatikans zubrachte, erwarb er sich immense Detailkenntnisse. In einer ersten größeren Arbeit befaßte er sich im Gedenkband anläßlich des 100. Todestages von Gauß mit dessen Beiträgen zur Astronomie und Geodäsie [49]. Er würdigt die „Theoria motus corporum coelestium", geht dann aber vor allem auf die Fragen der Bahnbestimmung von kleinen Planeten und Kometen sowie der Störungsrechnung ein. Man merkt hier deutlich, daß Volk ein intimer Kenner der Materie war, denn er selbst hatte sich ja über viele Jahre mit diesen Fragen im Zusammenhang mit seinen astronomischen Beobachtungen auseinandergesetzt. In seinen Ausführungen über die Beiträge von Gauß zur Geodäsie geht er ausführlich auf die Rechtfertigung der Landvermessung im Königreich Hannover durch Gauß ein. Auch hier spürt man etwas von Volks Verständnis für die Faszination konkreter Meßarbeiten, denn er selbst hatte ja jahrelang astronomische Messungen vorgenommen und darüber berichtet [45], [46].

In den folgenden Jahren befaßte sich Otto Volk intensiv mit der Geschichte der Himmelsmechanik. Überblicke gab er in [57] und [60]. Er studierte Kepler, Newton und Euler. Dem Kepler-Forscher Max Caspar war er freundschaftlich verbunden. Er würdigte ihn in einem Nachruf [52]. Von der Intensität seines Quellenstudiums zeugen seine Beiträge [54] und [58].

Bei Newton ging er vor allem der Frage nach, wie sich dessen Ideen in Europa durchsetzten. Dabei wies er auf die große Bedeutung von Voltaire hin, durch dessen Einfluß auf die Madame du Châtelet Newtons Gravitationstheorie in Frankreich die Wirbeltheorie des Descartes überwand [57]. In der Fülle der

Namen und Beziehungen tauchen auch zwei berühmte Würzburger Mathematiker auf: Athanasius Kircher und Kaspar Schott, deren Leistungen er auch in anderen Arbeiten erwähnt.

Bei Euler würdigt er dessen Beiträge zum Dreikörperproblem [60], [64], [67]. Er kann nachweisen, daß sich die von P. Kustaanheimo und E. Stiefel 1965 in die Himmelsmechanik eingeführten KS-Transformationen bereits 1748 bei Euler in einem Brief an C. Goldbach finden. In Diskussionen nach Kolloquiumsvorträgen bereitete es Volk eine besondere Freude, wenn er darauf hinweisen konnte, daß sich einige der Ideen des Vortragenden bereits bei Euler finden!

Volk hatte ein besonderes Interesse an Biographien. Bereits in Litauen hatte er im „Kosmos" eine Reihe von Aufsätzen über bedeutende Mathematiker verfaßt ([13], [14], [23], [24], [25], [28], [29], [30], [31], [32]). Später lieferte er zahlreiche Beiträge für die „Neue Deutsche Biographie" [55]. Es war also nicht verwunderlich, wenn Volk uns immer wieder Details aus dem Leben berühmter Mathematiker berichten konnte. Allerdings war er gelegentlich auch empört, wenn wir einen dieser berühmten Wissenschaftler nicht kannten.

Volk arbeitete in der Tschirnhaus-Kommission der Akademie der Wissenschaften in Berlin mit. Daraus entwickelte sich eine Freundschaft mit E. Winter. Auch über Tschirnhaus versuchte er einige Fehlurteile zu revidieren. Er wies nach, daß zwar dessen Transformation für das Lösen von Gleichungen weniger tragfähig war, als dieser erhofft hatte, daß aber andererseits die Grundidee in zahlreichen Gebieten der Mathematik fruchtbar geworden ist. Bezüge zu Würzburg konnte er herstellen, indem er darauf hinwies, daß sich in der Bibliothek von Tschirnhaus Bücher von Kircher und Schott fanden [50].

Eine ähnliche Studie verfaßte Volk auch über Johann Heinrich Lambert, den Mitbegründer der Bayerischen Akademie der Wissenschaften [63]. Dessen kosmologische Betrachtungen ließen Volk eine Brücke zur Kosmogonie Kants schlagen, auf dessen Beiträge er in einer Arbeit über die Geschichte der Mathematik an der Universität Königsberg näher eingegangen war [56]. Volks besonderes Interesse an Königsberg erklärt sich vor allem daraus, daß dort sein Lehrer Lindemann gewirkt hatte, aus dessen Nachlaß er das Königsberger Seminarbuch besaß. Volk versuchte wiederholt, dieses Dokument herauszugeben. Alle Bemühungen zerschlugen sich jedoch. In seiner Schilderung von Königsberg schwingt aber auch deutlich seine Liebe zum Osten mit, die durch seine Zeit in Litauen geweckt worden war.

Schließlich galt auch der Universität Würzburg sein besonderes historisches Interesse. Er hatte die Dissertation von Maria Reindl (1966) über die Entwicklung der Mathematik, der Astronomie und der Naturwissenschaften an der Universität Würzburg mit großen Engagement betreut und zahlreiche Quellen, die er selbst gesammelt hatte, dazu beigetragen. Als Vorsitzender der Kommission für die Geschichte der Universität Würzburg gab er mehrere Bücher heraus. Zur 400-Jahr-Feier verfaßte er dann einen eigenen Beitrag, aus dem man seine besondere Wertschätzung für Adrianus Romanus, Athanasius Kircher, Kaspar Schott und Friedrich Prym erkennt [65], [66].

In seinen Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik ließ er es sich nie nehmen, besonders auf Würzburger Mathematiker hinzuweisen und möglichst

Werke dieser Mathematiker aus seiner Bibliothek mitzubringen und den Studenten in die Hand zu geben. So ist durch seine Forschungen, durch seine Lehre und durch die persönlichen Gespräche mit ihm die Geschichte der Mathematik in vielen von uns lebendig geworden.

Schriftenverzeichnis

[1] Studien über einige Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Diss. München 1918
[2] Entwicklung der Funktionen einer komplexen Variablen nach den Funktionen des elliptischen Zylinders. (Diss. München 1920) Stuttgart 1920
[3] (Bearb.) Bürklen, O.: Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 2. Aufl. Stuttgart 1920; 3. Aufl. Stuttgart 1930
[4] Über die Reihen von Laplace und Legendre. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl. (1921) 167–188
[5] Über die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl. (1922) 35–38
[6] Über die Entwicklung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen nach Funktionen, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Parameter genügen, mit besonderer Anwendung auf die Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen. Habil. München 1922
[7] Über die Entwicklung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen nach Funktionen, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Parameter genügen. Math. Ann. **86** (1922) 296–316
[8] Die Abbildung $\zeta = (\sqrt{z^2 - b^2} - \sqrt{z^2 - c^2})/\sqrt{c^2 - b^2}$. Lietuvos Universiteto Matematikos Gamtos Fakulteto Darbai, Kaunas 1923
[9] Über die Entwicklung komplexer Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen. Lietuvos Universiteto Matematikos Gamtos Fakulteto Darbai, Kaunas 1923
[10] Studien über einige Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Lietuvos Universiteto Matematikos Gamtos Fakulteto Darbai, Kaunas 1923 (Diss. München 1918)
[11] Bemerkung zu der Note: Über die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl. (1924) 195–196
[12] Zur Voss'schen Arbeit: Kurvennetze und Laplacesche partielle Differentialgleichungen. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss, Math.-nat. Abtl. (1924) 165–179
[13] (Folkis, O.): Jono Keplerio „Mysterium cosmographicum“ (lit. Johannes Keplers ...). Kosmos **1** (1924) 86–88
[14] (Folkis, O.): Blažys Paskalis kaipo matematikas ir fizikas (lit. Blaise Pascal als Mathematiker und Physiker). Kosmos **2** (1924) 177–182
[15] (Folkis, O.): Matematika ir pasaulėžiūra (lit. Mathematik und Weltanschauung). Logos **1** (1924) 64–67
[16] (Folkis, O.): Matematika ir pritaikomieji mokslai (lit. Mathematik und angewandte Wissenschaften. Kosmos **4** (1924) 309–313
[17] Über die Entwicklung von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen nach Laméschen Funktionen. Math. Zeitschr. **23** (1925) 224–237
[18] Über geodätische rhombische Kurvennetze auf krummen Flächen, insbesondere auf Flächen konstanter Krümmung. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss, Math.-nat. Kl. (1925), 13. Abhandlung
[19] Geradlinige rhombische Kurvennetze. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss, Math.-nat. Abtl. (1925) 35–38
[20] Nachträgliche Bemerkung zu der Note: Geradlinige rhombische Kurvennetze. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-nat. Abtl. (1925) 39–40
[21] (Folkis, O.): Aukštoji Algebra (lit. Höhere Algebra). Kaunas 1925
[22] (Folkis, O.): Apie matematišką pažinimą (lit. Über mathematische Erkenntnis). Logos **2** (1925) 85–114

[23] (Folkis, O.): Hugo von Seeliger 1849–1924 (lit.). Kosmos **4** (1925) 253–255
[24] (Folkis, O.): Kantas ir matematika (lit. Kant und die Mathematik). Kosmos **6** (1925) 320–325
[25] (Folkis, O.): Felix Klein 1849–1925 (lit.). Kosmos **4** (1925) 258–260
[26] Über geodätische Dreiecksnetze auf Flächen konstanten Krümmungsmaßes. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-nat. Kl. (1927), 3. Abhandlung
[27] Über diejenigen Rotationsflächen, auf denen drei Systeme von kongruenten geodätischen Linien ein Dreiecksnetz bilden. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-nat Abt. (1927) 261–272
[28] (Folkis, O.): Ferdinandas v. Lindemanas – matematikos didvyris: Ludolfo skaiči aus π nugalėtojas (lit. Ferdinand von Lindemann - Held der Mathematik: Sieger über die Ludolfinische Zahl π). Kosmos **4/5** (1927) 203–208
[29] (Folkis, O.): Vladimir Adrejevič Steklov (1863–1926) (lit.). Kosmos **2/3** (1927) 125–126
[30] (Folkis, O.): Newtono vieta mokslo istorijoje (lit. Newtons Platz in der Wissenschaftsgeschichte). Logos **1** (1927) 68–82
[31] (Folkis, O.): Carl Runge 1856–1927 (lit.). Kosmos **6** (1927) 247–248
[32] Magnus Gustav Mittag-Leffler 1846–1927 (lit.). Kosmos **3** (1928) 145–148
[33] (Volkas, O.): Analitinė Mechanika (lit. Analytische Mechanik). Paskaitos, Skaitytos Lietuvos Universitete 1928–1929, Kaunas 1929
[34] (Volkas, O.): Paprastųjų ir dalinių diferencialinių lygčių teorijos paskaitos (lit. Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen). Lietuvos Universiteto Matematikos – Gamtos Fakultetas, Kaunas 1929
[35] Über spezielle Kreisnetze. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-nat. Abtl. (1929) 125–134
[36] Anmerkung zu der vorstehenden Note des Herrn Liebmann, betreffend die Darbouxschen Gleichungen. Math. Zeitschr. **30** (1929) 186–187
[37] Über Flächen mit geodätischen Dreiecksnetzen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-nat. Kl. (1929), 1. Abhandlung
[38] Aurel Voß zum diamantenen Doktorjubiläum. Forschungen und Fortschritte **5** (1929) 95
[39] Über Flächen mit isogonalen rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung. Lietuvos Universiteto Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, Nr. 1, Kaunas 1930
[40] Über Flächen mit geodätischen Dreiecksnetzen. Atti Congr. Intern. Mat. Bologna, T. 4 (1931) 357–362
[41] Ferdinand von Lindemann zum 80. Geburtstage. Forschungen und Fortschritte **8** (1932) 145
[42] Über dreifache Flächensysteme, die sich in Geodätischen schneiden. J. reine angew. Math. **169** (1933) 98–102
[43] (Hrsg.) Voß, A.: Über orthogonaloide Systeme (Auf Grund hinterlassener Aufzeichnungen herausgeben). Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-nat. Abtl. (1933), 373–402
[44] Über Flächengruppen mit rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-nat. Kl. (1934), 17. Abhandlung; und in: Mathematische Abhandlungen, Heinrich Liebmann zum 60. Geburtstag am 22. Oktober 1934 gewidmet von Freunden und Schülern. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-nat. Kl. (1934), 8.–17. Abhandlung, 77–96
[45] Beobachtungen von kleinen Planeten. Astron. Nachr. **266** (1938) 233; **267** (1939) 365; **268** (1939) 385–390; **270** (1940) 52–53; **271** (1940) 140–141; **273** (1942) 42–43
[46] Photographische Beobachtungen von Kometen in Würzburg. Astron. Nach. **267** (1938) 321–322; **268** (1939) 389–390
[47] Zu F. K. Rubbert: „Zur Radizierung mit der Rechenmaschine“. ZAMM **29** (1949) 160
[48] Eine praktische Methode zur Berechnung des elektrischen Feldes eines Kreisplattenkondensators. Preh-Mitt. **1** (1951) 18–21
[49] Astronomie und Geodäsie bei C. F. Gauss. In: Reichardt, H. (Hrsg.): C. F. Gauss, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955. Leipzig 1957, 207–229
[50] E. W. von Tschirnhaus als Mathematiker und Physiker. In: Winter, E. (Hrsg.): E. W. von Tschirnhaus und die Frühaufklärung in Mittel- und Osteuropa. Berlin 1960, 247–265
[51] Tatsachen und Überlegungen zur Mondfrage (mit Lichtbildern). Ber. Phys.-Med. Ges. Würzburg. Neue Folge **70** (1960–1961) 69–78
[52] Max Caspar (1880–1956). Jahresber. d. Dt. Math.-Verein. **62** (1960) 93–98; **63** (1961) 52
[53] Beiträge zu: Naas, J., Schmid, H. L.: Mathematisches Wörterbuch, Bd. 1,2. Leipzig 1961

[54] Über Keplers Manuskripte und ihren Ankauf durch Katharina II. In: Jahrbuch für Geschichte der UdSSR und der Volksdemokratischen Länder Europas, Bd. 7. Berlin 1963, 381–388
[55] Beiträge zu: Neue Deutsche Biographie, Berlin 1964, 1966, 1972, 1977, 1980, 1982
[56] Die Albertus-Universität in Königsberg und die exakten Naturwissenschaften im 18. und 19. Jahrhundert. In: Mayer, F. (Hrsg.): Staat und Gesellschaft, Göttingen 1967, 281–292
[57] Bemerkungen zur Geschichte der Himmelsmechanik. Cel. Mech. **2** (1970) 398–423
[58] Kepleriana. Cel. Mech. **8** (1973) 283–289
[59] Concerning the derivation of the ks-transformation. Cel. Mech. **8** (1973) 297–305
[60] Miscellanea from the history of celestial mechanics. Cel. Mech. **14** (1976) 365–382
[61] Die Würzburger Sternwarten – Die Errichtung des Lehrstuhls für Astronomie. Ber. Phys.-Med. Ges. Würzburg. Neue Folge **85** (1977) 1–19
[62] Über rhombische Netzeinteilung auf Flächen. ZAMP **30** (1979) 374–387
[63] Johann Heinrich Lambert and the determination of orbits for planets and comets. Cel. Mech. **21** (1980) 237–250
[64] Franciscus Vieta und die Eulersche Identität (Quaternionen). El. Math. **36** (1981) 115–121
[65] Mathematik, Astronomie und Physik in der Vergangenheit der Universität Würzburg. In: Baumgart, P. (Hrsg.): Vierhundert Jahre Universität Würzburg. Neustadt a. d. A. 1982, 751–785
[66] 400 Jahre Mathematik und Astronomie an der Universität Würzburg: Alma Julia Herbipolensis 1582–1982. Cel. Mech. **28** (1982) 243–250
[67] Eulers Beiträge zur Theorie der Bewegungen der Himmelskörper. In: Leonhard Euler 1707–1783, Beiträge zu Leben und Werk. Basel 1983, 345–361

Verzeichnis der von Otto Volk betreuten Dissertationen

Jakob Glücksohn, Zum Entwicklungsproblem nach Laméschen Funktionen. (1931)

Otto Edmund Stanaitis, Das Potential des ungleichachsigen Ellipsoides bei speziellen Randwerten (1931)

Willibald Grehn, Über spezielle Kreisnetze und Flächen mit speziellen rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung (1937)

Alexis Oraw, Über dreifache Flächensysteme, deren Schnittkurven dreifach-rhombische geodätische Netze bilden (1937)

Otto Stammhammer, Beiträge zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades (1937)

Maria Knoll, Flächen mit einer Schar geodätischer Krümmungslinien und Flächen mit einer Schar kongruenter Krümmungslinien (1938)

Wilhelm Alt, Die Liouville'schen Kurvensysteme und die rhombisch-geodätischen Netze (1938)

Fritz Heywang, Kritische Untersuchung der neuen „Einfachen Methode der Bahnbestimmung“ von Y. Väisälä durch Anwendung auf den Planeten Vesta. Ableitung einer neuen Theorie der Bewegung dieses Planeten, unter Berücksichtigung der Störungen nach der Methode der numerischen Integration (1943)

Maria Reindl, Lehre und Forschung in Mathematik und Naturwissenschaften, insbesondere Astronomie, an der Universität Würzburg von der Gründung bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts (1966)

Prof. Dr. W. Barthel
Prof. Dr. H.-J. Vollrath
Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Am Hubland
8700 Würzburg

Jber. d. Dt. Math.-Verein. **94** (1992) 130–139

Kronecker's Arithmetical Theory of Algebraic Quantitities

H. M. Edwards, New York

I would like to begin with thanks and an apology. The thanks, of course, are for the invitation to speak at this splendid meeting of the DMV. The apology is for the fact that I will speak in English. I have been assured that German mathematicians are entirely comfortable with talks in English, for which you have my admiration and my gratitude.

As you have just heard, this talk is being given in recognition of the 100th anniversary of the death of Leopold Kronecker. I confess that it is not customary in America to observe the anniversary of a death, at least not the death of someone you like. However, I am a great admirer of Kronecker, and I have given a number of talks about him when there was no excuse at all, so I certainly would not miss this chance to talk about him. Moreover, 1891 was the year not only of Kronecker's death but also of the first meeting of the newly-formed DMV, a happy occasion connected with Kronecker because he was scheduled to give the inaugural lecture. That lecture would have taken place on September 21, 1891. Unfortunately, the death of his wife of 43 years on August 23 caused Kronecker to cancel his lecture and led to the decline of his own health and spirits, ending with his death on December 29, a few weeks after his 68th birthday.

In the letter Kronecker wrote to Georg Cantor[1]) cancelling his inaugural lecture to the DMV, he makes some remarks about his hopes for the newly founded Vereinigung. "... muss bei uns jeder Forscher König and Kärrner zugleich sein. Darum geben wir Mathematiker eigentlich das Beispiel einer echten Gelehrtenrepublik, in welcher jeder einzelne seine volle Forscherselbständigkeit bewahrt. Ich mag auch deshalb bei uns nicht den Ausdruck 'Schüler' gern ..." This sounds very unlike the man Hilbert called a "Verbotsdiktator" or the man portrayed in numerous, and, as I believe, ill-founded accounts as the authoritarian oppressor of Cantor. Whether Kronecker was indeed an oppressive dictator, or merely a prominent citizen of the mathematical Gelehrtenrepublik, it seems clear that his reputation was at its apex just before his death.

The popular opinion is that a mathematician does his best work before the age of 40. While that may have been true of Kronecker, there can be no doubt that

---

[1]) This letter was published in volume 5 of *Leopold Kronecker's Werke,* page 497.

the work he did in his 50s and 60s was of the first magnitude. The great tragedy of Kronecker's work is that so much of it was never presented in finished form. His published works are voluminous, but they were pouring forth in a form that was often difficult and obscure to his contemporaries, and that has not become more accessible with the passage of time.

The Berlin Academy soon after his death undertook to publish his collected works. Not surprisingly, the second publication of his works contributed little to their acceptance. Meanwhile, the general trend of mathematical thinking was running counter to Kronecker's style. In the 1890s, the influence of Dedekind, Cantor, and above all Hilbert, was growing while Kronecker's was waning.

Hilbert's attitude toward Kronecker's style can be inferred from some comments on Kummer's work he made in a letter[2]) to Hurwitz in 1894: "Die Ferien habe ich mit dem Studium der Kummerschen Arbeiten hingebracht, doch wird es eine grosse Mühe kosten die Gedanken heraus zu schälen, welche den furchtbaren $x$ereien Kummers zu Grunde liegen. Bisher habe ich nichts gewonnen ausser der Erkentniss, dass alle die Rechnereien von Kummer überflüssig gemacht werden müssen." In another letter to Hurwitz that same year he made the following remarks about his preparatory work for the Zahlbericht: "Mein Bericht hat mich auch hier in Rauschen schon beschäftigt, und ich erkenne immer neu, was für eine enorme Arbeit es verlangt Kummer und Kronecker vollständig zu verstehen," and, "Jetzt bin ich übrigens wieder bei der complexen Multiplication und studire die wunderbaren, tiefliegenden Sätze von Kronecker über den Invariantenkörper in der Hoffnung den arithmetischen Kern rein herauszuschälen so dass auch diese Theorie in meinem Bericht eine Stelle finden kann." In short, material Hilbert could not recast in his own style – and there was much material he could not – would find no place in the Zahlbericht. As I see it, the Zahlbericht became a barrier between Kummer and Kronecker and the generations that followed Hilbert.

I believe Kronecker died sooner than he expected to, that he thought there would be time to prepare expository accounts of his work and guides to the published papers. He certainly was mindful of his mathematical legacy. It pains me to read in Hensel's preface to the collected works of a "Reihe von Abhandlungen ... welche sich ganz oder teilweise ausgearbeitet in dem Nachlasse vorgefunden haben" and also of "weiteren Ergebnisse ... welche eine genaue Durchforschung des reichen, mit grosser Sorgfalt aufbewahrten wissenschaftlichen Nachlasses geliefert hat." Hensel never fulfilled his promise to publish this precious material from Kronecker's Nachlass, and it appears[3]) to have been entirely destroyed in an explosion in a mine at Volpriehausen in 1945.

But I must not paint too dark a picture. Kronecker is universally regarded as one of history's great mathematicians, his works are still studied, and here we are observing this centennial. I simply want to emphasize that Kronecker's work is for a variety of reasons less accessible than one might expect for a mathemati-

---

[2]) This letter and the following one are in the manuscripts collection of the Göttingen university library.

[3]) See my paper *On the Kronecker Nachlass*, Historia Mathematica 5 (1978), 419–426.

cian of his stature. Of course, with any great mathematician there are subtleties and intriguing ideas that are mentioned in passing but never developed; with Kronecker the very core and substance of his work is obscured by his unfamiliar style, by the fact that he published mostly research papers rather than expository treatises, and by the lack of secondary sources and disciples to develop and expand upon his ideas.

Today I want to advocate the study of Kronecker's works, and to try to give some slight assistance in that pursuit, but first let me pause to mention that Kronecker himself was a diligent student of the works of his predecessors. One of his works written in 1886 refers to a work of Jacobi from 1829 with the following words: "In einem jener nicht genug zu schätzenden und doch wohl nicht genug gekannten *Jacobi*'schen Aufsätze über die elliptischen Functionen, welche eine Hauptzierde der ersten Bände des Journals für Mathematik bilden, findet eine Recursionsformel ...."[4]) He goes on to say that this recursion formula was fundamental to his own studies of elliptic functions with singular modulus. Another instance of Kronecker's careful study of his predecessors is to be found in the 1891 letter to Cantor cancelling his DMV lecture, where he describes what his lecture would have been about. Recall that Eisenstein and Kronecker were contemporaries, but that Eisenstein had died almost forty years earlier. Kronecker wrote, "Der Vortrag selbst sollte kurzweg den Titel haben 'Über Eisenstein' oder auch 'Zum Gedächtniss von Eisenstein.' Ich wollte darin ganz kurz über die Zeit berichten, in der ich mit ihm persönlich bekannt war, auch einige Briefe wissenschaftlichen Inhalts, die ich von ihm besitze, mitteilen und danach – wie etwa in einer Gedenkrede – über seine Arbeiten sprechen. Dabei müssten dann ausser den rein arithmetischen and analytisch-arithmetischen noch ganz besonders seine rein analytischen Untersuchungen über elliptische Functionen hervorgehoben werden, welche dem Bewusstsein der Jetztzeit ganz abhanden gekommen sind, auf welche ich aber bei *meinen* neuesten Arbeiten habe zurückkommen müssen." As you may know, this work of Eisenstein and Kronecker on elliptic functions is the subject of a book by André Weil. I have chosen just two examples. Virtually all of Kronecker's papers contain detailed and appreciative citations of the work of others; Gauss, Dirichlet, Kummer, Abel, Galois, Sturm, Cauchy, Hermite, Weierstrass, Sylvester, and many, many others are repeatedly cited.

I promised in my title and my abstract to talk about the content and underlying philosophy of Kronecker's major treatise "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen," which, following Kronecker, I will refer to as his "Kummer Festschrift" or simply his "Festschrift." While preparing the talk I realized that after the publication of the Festschrift Kronecker no longer used the phrase "arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" and instead began to use the term "allgemeine Arithmetik." The reason, I believe, is that late in the writing of the Festschrift Kronecker realized that he could dispense with the notion of "algebraic quantities" altogether, and express everything in terms of the

[4]) *Kronecker's Werke*, volume 4, page 389.

arithmetic of polynomials with integer coefficients. The arithmetic of polynomials with integer coefficients is what he meant by "allgemeine Arithmetik." In fact, "allgemeine Arithmetik" can be based on polynomials with *natural numbers* as coefficients, and polynomials with integer coefficients can be derived from them. Once "algebraische Grössen" were subsumed in "allgemeine Arithmetik" the words "arithmetische Theorie" became redundant.

Much of the Festschrift deals with what Kronecker calls "Gattungen" of quantities algebraic over "natürliche Rationalitätsbereiche." I will say "natural fields" instead of "natürliche Rationalitätsbereiche." In modern terminology, a natural field is simply the field of quotients of the ring of polynomials $\mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ in some number n of indeterminates $x_1, x_2, \ldots, x_n$ with integral coefficients. (When $n=0$, the ring is the ring of integers and the natural field is the field of rational numbers.) A quantity algebraic over a natural field is simply an element of an algebraic extension field. Kronecker was well aware of the theorem of the primitive element, that is, he knew that any algebraic extension of finite degree of a natural field can be obtained by adjoining *one* algebraic quantity to a natural field. Two algebraic elements are said by Kronecker to be of the same "Gattung" if the fields they generate over the natural field are equal. The field they generate is called a "Gattungsbereich."

A Gattungsbereich is constructed, therefore, by adjoining to a natural field one root of a polynomial $F(x)$ irreducible over the field. This construction can easily be reduced to polynomial algebra – to "general arithmetic" – because the extended field is just the ring $\mathbf{Q}[x, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ modulo the ideal generated by F. (Kronecker described this using other terms, but the simple idea is the same.) This does not quite describe the adjunction in terms of "general arithmetic," however, because the polynomials have coefficients in $\mathbf{Q}$, not in $\mathbf{Z}$. If F is *monic* with coefficients in $\mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, as can be assumed without loss of generality, then $\mathbf{Z}[x, x_1, x_2, \ldots, x_n] \bmod F$ is a ring without zero divisors. Computations in its field of quotients can be described in terms of "general arithmetic", and this field of quotients is precisely the extension field in question. In this way, the most general "Gattungsbereich" can be described in terms of general arithmetic.

Since, as Kronecker shows, it is possible to factor a polynomial with coefficients in any algebraic extension of a natural field, one can then construct, using general arithmetic, a *splitting field* of any polynomial with coefficients in a natural field (and therefore of any polynomial with coefficients in an algebraic extension of a natural field).

The construction of the splitting field of a polynomial is the heart of Galois theory, so it is a construction worth attention. Kronecker pays it a great deal of attention. I don't have time to go into the details, but I can sketch some of the ideas of his constructions, which I feel convey very well the spirit and style of his work.

Consider the ring $R = \mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ and and let $F(x)$ be the polynomial $(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ with coefficients in R. The coefficients of F are of course $1, -\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3, \ldots, \pm\sigma_n$ where σ_i is the i-th elementary symmetric function in the x_j. Kronecker proves[5]):

---

[5]) See, for example, § 12 of the Festschrift.

Theorem. *Every element of R can be expressed in one and only one way as a polynomial in* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ *with coefficients in* $\mathbf{Z}$ *whose degree in* x_i *is at most* $n-i$. *An element of R is invariant under all permutations of the last k of the x's only if its expression in this form does not contain these x's.*

Note that the second statement says, in the case $k=n$, that the expression of a symmetric polynomial in this form is an expression of it as a polynomial in the σ's. Thus, the theorem that any symmetric polynomial is a polynomial in the σ's is a corollary of the theorem just stated. In my opinion, Kronecker's proof of the full theorem is simpler and more satisfactory than the proof that is usually given of just the corollary.

Here is Kronecker's proof. Let $F_1(x)$ be $F(x)$, and let $F_{i+1}(x)=F_i(x)/(x-x_i)$. Then the successive F's can be found by division of polynomials. Since $(A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2}+\cdots)/(x-c) = A_0x^{n-1}+(A_0c+A_1)x^{n-2}+(A_0c^2+A_1c+A_2)x^{n-3}+(A_0c^3+A_1c^2+A_2c+A_3)x^{n-4}+\cdots$ we have

$$F_1(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots$$

$$F_2(x)=x^{n-1}+(x_1-\sigma_1)x^{n-2}+(x_1^2-\sigma_1x_1+\sigma_2)x^{n-3}+\cdots$$

$$F_3(x)=x^{n-2}+(x_2+x_1-\sigma_1)x^{n-3}+(x_2^2+(x_1-\sigma_1)x_2+x_1^2-\sigma_1x_1+\sigma_2)x^{n-4}+\cdots$$

and so forth. Since $F_{i+1}(x)$ is $F(x)$ divided by $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_i)$ it is clear that these divisions leave no remainder. In the general case, $F_i(x)$ is monic of degree $n-i+1$ in x with coefficients that are polynomials in $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. The last one in the list is $F_n(x)=x+(x_{n-1}+x_{n-2}+\cdots+x_1-\sigma_1)$. To say that the divisions leave no remainder is the same as to say that $F_i(x_i)=0$. But in view of what was just said about the form of $F_i(x)$, the equation $F_i(x_i)=0$ gives an expression of x_i^{n-i+1} as a polynomial in the x's and the σ's which is of degree $n-i$ at most in x_i and is independent of $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$. This expression makes it possible to reduce any polynomial in the x's and σ's to one of degree $n-i$ at most in x_i, without changing the degrees in $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$. When $i=n$, $F_n(x_n)=0$ gives the obvious relation $x_n=\sigma-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}$, which makes it possible to eliminate x_n entirely. Next, $F_{n-1}(x_{n-1})=0$ gives an expression $x_{n-1}^2=Ax_{n-1}+B$ in which A and B are polynomials in the x's and σ's independent of x_{n-1} and x_n, which makes it possible to reduce the degree in x_{n-1} to 1, at most, without re-introducing x_n. Then the relation $F_{n-2}(x_{n-2})=0$ makes it possible to reduce the degree in x_{n-2} to 2, at most, without increasing the degrees in x_{n-1} or x_n. Continuing in this way, and finishing by using the relation $x_1^n=\sigma_1x_1^{n-1}-\sigma_2x_1^{n-2}+\cdots\pm\sigma_n$ to reduce the degree in x_1 to $n-1$, at most, without increasing the degrees in the other x's, proves that every element of R can be expressed in the required form.

It is to be shown now that there is *only one* way to write an element of R as a polynomial in the x's and σ's with this restriction on the degrees of the x's. Unfortunately, as far as I can see, all Kronecker says about this point in his published works is that it is "offenbar." Luckily, lecture notes[6]) taken by his students at Berlin University show how he proved it in his courses.

---

[6]) I have consulted a manuscript volume in the library of the University of Minnesota.

The proof that the representation is unique uses the second statement of the Theorem, so consider now that statement. In the case $k=1$, it is the tautologous statement that a polynomial of degree 0 in x_n does not contain x_n, because in this case the symmetry requirement is vacuous. Suppose it is true in the case k and let y be an element of R which is symmetric in the last $k+1$ of the x's. By the inductive hypothesis, any expression of y in the desired form does not involve the last k of the x's, so it is of the form $y=B_0x_{n-k}^k+B_1x_{n-k}^{k-1}+\cdots+B_k$, where the B's are polynomials in the σ's and x's which do not involve the last $k+1$ of the x's. Interchange of x_{n-k} with any subsequent x on the one hand does not change y and on the other hand, since it does not change the B's, is the element of R obtained by setting one of the last k of the x's in place of x in $B_0x^k+B_1x^{k-1}+\cdots+B_k$. Thus, $B_0x^k+B_1x^{k-1}+\cdots+(B_k - y)$ is a polynomial with coefficients in R which has the $k+1$ distinct roots $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n$. Since it has degree k at most, it must therefore be identically zero, and, in particular, B_0, B_1, $\ldots$, B_{k-1} must all be zero. Thus, the given expression of y is independent of x_{n-k}, as well as all subsequent x's, as was to be shown.

The last statement of the theorem is now proved, and the uniqueness of Kronecker's form for elements of R can be deduced as follows. If an element of R is expressed in two ways in this form, the difference of the expressions is an expression of 0 in this form. Because 0 is symmetric, such an expression does not involve the x's and is simply an equation $0=f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. All that remains to be shown is that the only equation of this form is the trivial one in which f is zero. When $n=1$, $\sigma_1=x_1$ and $f(\sigma_1)$ is zero as an element of R only if f is the zero polynomial. Suppose now that $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1})=0$ implies $f=0$ in the case of $n-1$ variables, and let g be a nonzero polynomial in the σ's. It is to be shown that g is not zero as an element of R. Since g is not zero, it can be written in the form $(g_k\sigma_n^k+g_{k-1}\sigma_n^{k-1}+\cdots+g_0)\sigma_n^j$, where the g_i are polynomials in $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ and $g_0 \neq 0$. Substitution of 0 for x_n gives a homomorphism from R to the ring of polynomials in $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ which carries σ_n to zero but carries the other σ's to the elementary symmetric polynomials in $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Thus, since the homomorphism carries $g_k\sigma_n^k+g_{k-1}\sigma_n^{k-1}+\cdots+g_0$ to a nonzero polynomial g_0 in the elementary symmetric polynomials in $n-1$ variables, the inductive hypothesis implies that it does not carry $g_k\sigma_n^k+g_{k-1}\sigma_n^{k-1}+\cdots+g_0$ to the zero element. Therefore, $g_k\sigma_n^k+g_{k-1}\sigma_n^{k-1}+\cdots+g_0$ is not zero as an element of R. Since σ_n is not zero as an element of R, it follows that g is not zero as an element of R, as was to be shown.

This completes the proof of the Theorem.

There are exactly $n!$ monomials $x_1^{e1}x_2^{e2}\cdots x_n^{en}$ in which $0\leqslant e_i\leqslant n-i$, and the theorem states that every element of $\mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ can be written in exactly one way as a linear combination $\sum c_{(i)}(\sigma)x^{(i)}$ of these monomials $x^{(i)}$ with coefficients in $\mathbf{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$. Addition in the ring extension $\mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \supset \mathbf{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$ is just the addition of such polynomials, whereas multiplication is multiplication of polynomials $\sum c_{(i)}(\sigma)x^{(i)}$ followed by the algorithm of the proof of the theorem for reducing the degrees in the x's to put the product in the standard form. In terms of Galois theory, this is an explicit construction of the splitting field of a polynomial whose Galois group is the full symmetric group with $n!$

elements; in the first instance it is the splitting field of the polynomial $F(x)$ with coefficients in the field $\mathbf{Q}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, but it applies equally well to any polynomial whose Galois group is the full symmetric group. The construction uses only "general arithmetic" and avoids "algebraic quantities" altogether; its essence is the polynomial ring $\mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$ modulo the relations $F_i(x_i) = 0$, with an algorithm for determining whether two polynomials are congruent modulo the relations.

Kronecker also investigated at length the construction, by similar means, of the splitting field of an *arbitrary* polynomial with coefficients in a natural field, but I prefer to use the remaining time to discuss a quite different topic from his Festschrift.

Kummer announced as early as 1859[7]) that Kronecker would soon publish a simple generalization to arbitrary number fields of the fruitful theory of "ideal prime factors" that Kummer had developed for cyclotomic fields. Unfortunately, Kronecker did not publish it until 1881 – a full decade after Dedekind had published the first version of his "ideal theory" – and when he did publish it, it was in a rather forbidding form in his forbidding Festschrift. The result was that Kronecker's superior theory has been misunderstood and neglected while Dedekind's has become the standard. Since there is not time enough to present Kronecker's theory in a way that will build on your familiarity with ideal theory, I will ask you to forget all about ideal theory for a moment and to consider Kronecker's theory *ab initio*.

In a natural field – that is, in the field of quotients of $\mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ where $n \geqslant 0$ – any finite set of nonzero elements has a *greatest common divisor.* This is an easy consequence of unique factorization in $\mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Kronecker's theory of what he called "divisors" extends the concept of a g.c.d. from natural fields to algebraic extensions of them. The idea can be described in one paragraph.

In order to remain on familiar ground I will talk about the case of the natural field $\mathbf{Q}$, but the general case is exactly the same. Let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ be algebraic numbers, that is, elements of an algebraic extension of the natural field $\mathbf{Q}$. I will describe the meaning Kronecker gives to the statement that the greatest common divisor of the α's divides an algebraic number β, in symbols, $\gcd(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) | \beta$. Let $f = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots \alpha_\nu u_\nu$ where the u's are indeterminates. Then f is a polynomial in the u's whose coefficients are algebraic numbers and there is a polynomial g in the u's, with coefficients that are algebraic numbers, such that fg has coefficients in $\mathbf{Z}$. For example, such a g can be found by taking the *norm* of f with respect to some algebraic number field containing the α's (an elementary construction), multiplying by an integer to clear the denominators, and dividing by f. Let d be the g.c.d. of the coefficients of fg. Then $\gcd(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) | \beta$ if and only if the coefficients of $\beta g/d$ are algebraic integers, that is, are roots of monic polynomials with integer coefficients. (Heuristically, the content of f divides β if and only if the content of fg divides βg, which is true if and only if d divides βg, which is true if and only if 1 divides $\beta g/d$. To test whether an algebraic number γ is

---

[7]) See page 57 of the paper proving his general reciprocity law – page 737 of volume 1 of Kummer's *Collected Papers.*

an algebraic integer, find $N(X-\gamma)$, a monic polynomial in X with rational coefficients; γ is an algebraic integer if and only if all the coefficients of $N(X-\gamma)$ are integers.)

That is the basic definition. Of course much needs to be done to show that "greatest common divisors" so defined have all the expected properties. For example, it must be shown that the defining property is independent of the choice of g. The crucial point, interestingly, is the proof that the greatest common divisor of $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ divides α_1, which is far from obvious from the definition. To tell the truth, Kronecker's development of the theory is sketchy at best. After Kronecker's death, when Hurwitz wanted to justify a point in Kronecker's development that Dedekind had called into question, he had to resort to notes of Kronecker's university lectures to do so. But the expected properties do hold, and this one definition generalizes Kummer's theory in one stroke from cyclotomic fields not only to all algebraic number fields but to all algebraic extensions of natural fields.

In the case of the natural field **Q**, Kronecker's theory is related to Dedekind's by the simple fact that the greatest common divisor of $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ divides β if and only if, in any algebraic number field K containing $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ and β, the ideal generated by the α's contains β. Note that Dedekind's abstract notion of membership in an ideal corresponds in Kronecker's theory to an algorithmic *test* for membership. Note also that Kronecker's theory pays no attention at all to what the ambient field containing the α's and β is, whereas Dedekind's notion of an "ideal" depends entirely on this ambient field. The coincidence of g.c.d.'s and ideals is a peculiarity of **Q**. In the natural field $\mathbf{Q}(x, y)$ the greatest common divisor of x and y is 1 – that is, in the unique factorization of polynomials, anything which divides both x and y divides any element of the natural ring $\mathbf{Z}[x, y]$ of which $\mathbf{Q}(x, y)$ is the ring of quotients – but 1 is not in the ideal generated by x and y. It is possible to regard the divergence of the two theories in this case as an indication that they serve different purposes, but I regard it as an indication that the Dedekindian theory, which was devised for algebraic number fields, does not capture the essence of the matter in a way that generalizes to other cases.

There is a tendency in the study of the history of mathematics to see the *Bourbakist* concept of "structures" as all-important, and to see the history of algebra as centering upon the creation of the abstract notions of groups, rings, and fields that comprise the substance of modern algebra. From this point of view, Kronecker is a figure of little importance. In fact, he is a villain, because he rejected Dedekind's non-algorithmic description of ideals and because he advocated in all of mathematics an algorithmic approach that was unattractive to generations from Hilbert to Emmy Noether to Bourbaki and beyond. But there must be something wrong with a view of history that consigns Kronecker to such a minor role, when he was such a dominant figure in his own time and when his work in algebra and number theory has been so important in the development of modern mathematics. This attitude toward history also makes it impossible for us to learn from our predecessors because it tells us to value earlier works only to the extent that they conform to our prejudices. I believe that it is important to study Kronecker's theory precisely because it does not conform to 20th century prejudices, and for this reason I have devoted an entire book[8]) to it, not a work of history, but a work of mathematics that attempts to show the virtues of Kronecker's approach to divisor theory and to overcome 20th century prejudices.

In closing, let me say a few words about Kronecker's philosophy of mathematics, or, better, let Kronecker say a few words. In a letter[9]) to Cantor written in 1884, Kronecker makes a few very interesting remarks about his views on the foundations. His attitude is surprisingly like that of a working mathematician of 1991; he wishes to ignore philosophy as much as possible and to concentrate on mathematics itself. He writes,

"Da Sie vor mehr als 20 Jahren selber noch meine Vorlesungen gehört und auch seitdem, in fast ununterbrochenen Beziehungen zu mir stehend, oft genug meine Ansichten vernommen haben, so wissen Sie besser, als ich es jetzt Ihnen auseinanderzusetzen vermöchte, dass ich – sehr früh unter Kummers Anleitung in philosophische Studien vertieft – nachher gleich ihm die Unsicherheit aller jener Speculationen erkannt und mich in den sicheren Hafen der wirklichen Mathematik geflüchtet habe. Was natürlicher, als dass ich in dieser Mathematik selbst nun mich bemüht habe, ihre Erscheinungen oder ihre Wahrheiten möglichst frei von jeden philosophischen Begriffsbildungen zu erkennen. Ich bin deshalb darauf ausgegangen, Alles in der *reinen* Mathematik auf die Lehre von den ganzen Zahlen zurückzuführen, und ich *glaube,* dass dies durchweg gelingen wird. Indessen ist dies eben nur mein *Glaube.* Aber wo es gelungen ist, sehe ich darin einen wahren Fortschritt, obwohl – oder weil – es ein Rückschritt zum Einfachen ist, noch mehr aber deshalb, weil es beweist, dass die neuen Begriffsbildungen wenigstens nicht *nothwendig* sind."

This is the cardinal point for Kronecker, that the new concepts being introduced by Cantor, Weierstrass, Dedekind, and others were *unnecessary.* In the passage I am citing he associates these new ideas with the name of Otto Stolz. In other passages, in footnotes to published work, he mentions the names of Eduard Heine and of Dedekind, but there can be no doubt that Weierstrass and Cantor were proponents of the same techniques.

One must notice, here, too, the inevitability of philosophy in mathematics. Kronecker's "sicherer Hafen der wirklichen Mathematik" was what Hilbert was trying to eliminate from algebraic number theory. Conversely, when a modern mathematician wants to avoid philosophical considerations, he puts everything strictly in terms of set theory, which, except for the theory of finite sets, lies far outside Kronecker's "sicheren Hafen."

Kronecker's letter to Cantor goes on to say that he intends to write an article in which he explains his "Einwendungen" to the new methods in analysis, and concludes with the following sentences:

"Dass ich jene Einwendungen nur gelegentlich machen will, beruht darauf, dass ich denselben nur einen höchst secundären Werth beilege. Einen wahren

---

[8]) *Divisor Theory*, Birkhäuser, 1990.

[9]) Published as an appendix to H. Meschkowski, *Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors,* Vieweg, 1967.

wissenschaftlichen Werth erkenne ich – auf dem Felde der *Mathematik* – nur in concreten mathematischen Wahrheiten, oder schärfer ausgedrückt, 'nur in mathematischen Formeln.' Diese allein sind, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, das Unvergängliche. Die verschiedenen Theorien für die Grundlagen der Mathematik (so die von Lagrange) sind von der Zeit weggeweht, aber die Lagrangesche Resolvente ist geblieben!"

Prof. Dr. H. M. Edwards
Courant Institute of Mathematical Sciences
New York University
251 Mercer Street
New York, N.Y. 10012, USA

(*Eingegangen 10. 12. 1991*)

Buchbesprechungen

Reichardt, H. (Hrsg.) Nachrufe auf Berliner Mathematiker des 19. Jahrhunderts: C.G.J. Jacobi - P.G.L. Dirichlet - E.E. Kummer - L. Kronecker - K. Weierstrass, mit Fotos, Dokumenten und Archivalien (Teubner-Archiv zur Mathematik 10), Leipzig: BSB, B.G. Teubner 1988, 166 S., DM 39,–

In diesem kleinen Band sind photomechanische Nachdrucke der klassischen Nachrufe von Dirichlet auf Jaocbi, Kummer auf Dirichlet, Hensel auf Kummer, Frobenius auf Kronecker und Hilbert auf Weierstraß zusammengestellt. Alle haben den Charakter von Gedächtnisreden vor einem größeren Publikum. Der Beitrag Hensels beruht auf einer Festrede vor der Berliner Mathematischen Gesellschaft zum hundertsten Geburtstag und geht auch ins mathematische Detail. Ein sehr kurzes Vorwort leitet den Band ein und am Ende sind einige Dokumente faksimiliert und ein Namen- und Sachregister angefügt. Die Texte bieten nicht nur Informationen über die Lebens- und Arbeitsgeschichten und geben einen Einblick in Hauptentwicklungen der Mathematik, sie sind auch selbst historische Dokumente, nicht zuletzt für die stilistischen Fähigkeiten der Mathematiker des 19. Jahrhunderts und für das ihnen eigene Pathos. Aber auch in der Darstellung und Bewertung der mathematischen Arbeiten sind es Zeitdokumente, denn z. B. nach den Arbeiten von Harold Edwards haben wir ein etwas anderes, genaueres Bild von der Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie als die Zeitgenossen. Auch aus diesem Grunde wäre über das magere Vorwort hinaus eine Annotierung der Texte und ein kritischer Kommentar wünschenswert gewesen.

Berlin H. Mehrtens

Gottfried Wilhelm Leibniz, Sämtliche Schriften und Briefe. Dritte Reihe: Mathematischer, Naturwissenschaftlicher und Technischer Briefwechsel, 2. Band; 1676–1679. Herausgegeben vom Leibniz-Archiv der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover. (Mit Beilage: Korrespondentenverzeichnis 1663–1683. 39 S.). Berlin: Akademie-Verlag 1987, XXXI + 1013 S., geb., DM 267,50

Gottfried Wilhelm Leibniz, Sämtliche Schriften und Briefe. Siebente Reihe: Mathematische Schriften, 1. Band, 1672–1676, Geometrie - Zahlentheorie - Algebra (1. Teil). Herausgegeben vom Leibniz-Archiv der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover. Berlin: Akademie-Verlag 1990, XL + 954 S., geb., DM 350,–

In der Besprechung von Bd. III, 1 der sog. „Akademie-Ausgabe" der Werke von Leibniz (s. Jber. d. Dt. Math.-Verein **83** (1981) 2. Abt., 55–56) war auf die lange, problemreiche Vorgeschichte der Reihe III hingewiesen worden. Jetzt liegt nicht nur der Fortsetzungsband III, 2 mit dem mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Briefwechsel aus den Jahren 1676 bis 1679 vor, sondern auch der erste Band der Reihe VII mit mathematischen Schriften aus der Pariser Zeit (1672–1676). Während aber der Band III, 1 seinerzeit vom Bearbeiter J. E. Hofmann noch neben seinem Beruf bzw. im Ruhestand für den Druck vorbereitet werden mußte, ist inzwischen die Weiterarbeit an beiden Reihen durch hauptamtliche Mitarbeiter des Leibniz-Archivs in Hannover gesichert und somit auch mit rascherem Erscheinen weiterer Bände zu rechnen. Zwar hat der bisher für die Publikation vertraglich zuständige Akademie-Verlag mit der Auflösung der Akademie der ehemaligen DDR seine Selbständigkeit verloren, doch ist nicht anzunehmen, daß die Publikation zukünftiger Bände an den (freilich erheblichen) Druckkosten scheitern wird.

Leibniz' mathematische Kreativität kam während seines Pariser Aufenthalts 1672 bis 1676 voll zum Ausbruch. Wie man aus dem Vorwort von A. Heinekamp bzw. der Einleitung des Bandes VII, 1 erfährt, sind etwa 1260 Blätter mit mathematischen Aufzeichnungen aus dieser Zeit erhalten. E. Knobloch hat sie inhaltlich elf Gruppen zugewiesen. Für den ersten Band wählten er und sein Mitarbeiter W. Contro daraus bisher eher unbekannte Gruppen aus: die Manuskripte zur Geometrie (ohne Infinitesimal-, Kurven- und Differentialgeometrie: 34 Nummern = S. 1–210), zur Zahlentheorie (unbestimmte Analytik, Primzahl- und Teilbarkeitsuntersuchungen sowie einige Spezialprobleme: 70 Nummern = S. 211–648) sowie die algebraischen Studien aus den Jahren 1672 bis 1674 (42 Nummern = S. 649–925). In der Geometrie dieser ersten Jahre geht es um Euklidische Geometrie, um Konstruktionsprobleme und um Inhaltsberechnungen mittels Polygonen, wobei Leibniz 1676 eng mit E. W. von Tschirnhaus zusammenarbeitete. Die Ausgaben von Diophant, Fermat und Frénicle standen Pate bei vielen Versuchen zur Diophantischen Analysis. Algebra war für Leibniz vor allem Gleichungstheorie, wobei die Werke von Viète und Descartes' „Geometrie" (in der kommentierten lateinischen Ausgabe von F. van Schooten) manche Anregungen lieferten, war doch Leibniz als Autodidakt *in mathematicis* auch Ende 1674 in vieler Hinsicht noch ein Anfänger.

Der Briefband III, 2 wurde von Heinz-Jürgen Heß gemäß den Grundsätzen der Leibniz-Edition bearbeitet. Diese schreiben äußerste philologische Genauigkeit, Vollständigkeit und ausführliche Erschließung durch Korrespondenten-, Personen-, Schriften-, Quellen- und Sachverzeichnisse vor, aber nur sparsame Kommentierung. Die Auswertung und historische Bearbeitung des Inhaltes der Briefe bzw. Schriften bleibt (mit Recht, da derart umfangreiche Editionen sonst nie abgeschlossen würden) den Lesern überlassen. Nur bei Band III, 1 hatte man eine Ausnahme gemacht, da sich J. E. Hofmann durch jahrzehntelange Studien zum besten Kenner der Entstehungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik in Paris entwickelt hatte: seine Einleitung umfaßte mehr als 50 Seiten und die Anmerkungen enthielten zum Teil umfangreiche historische und literarische Ergänzungen. H.-J. Heß gibt auf fünf Seiten Einleitung die erforderlichen sachlichen Informationen zu diesem Band: 260 Briefe, 112 erschlossene Stücke mit Kurzbeschreibungen; Hinweise auf zugehörige Briefe in den Briefreihen I und II; 50 Korrespondenten, wobei auf wenige von ihnen der Hauptteil des Briefwechsels entfällt. Er charakterisiert die so völlige andere Situation in Hannover, erwähnt die wichtigsten Korrespondenten und berichtet schließlich noch knapp und präzise über die thematischen Schwerpunkte der in diesem Bande veröffentlichten Briefe.

Exemplarisch nun noch einige Bemerkungen zu den zahlentheoretischen Studien in Bd. VII, 1 und ihrem Zusammenhang mit Leibniz' Korrespondenz. Mit nicht weniger als 30 Versuchen bemühte sich Leibniz um Ozanams Sechsquadrateproblem, drei Zahlen zu finden, so daß sowohl die Summe wie die Differenz von je zweien ein Quadrat wird (zwei weitere gleichwertige Formulierungen treten auf). In diesem Fall umfaßt der Kommentar der Bearbeiter etwa fünf engbedruckte Seiten, die – wie stets – teilweise für die Diskussion von Datierungsfragen verwendet werden. In Verbindung mit diesem Problem treten versteckte Ansätze zur Lösung der Fermatschen Vermutung für $n = 3$ und $n = 4$ auf. Sind sie auch ganz elementar, so wäre doch ein deutlicher Hinweis in den Anmerkungen wünschenswert. – Bei dem guten halben Dutzend von Versuchen von Leibniz, simultane lineare Kongruenzen zu lösen, wird zwar auf den Zusammenhang mit Kalenderproblemen hingewiesen, nicht aber *expressis verbis* gesagt, daß es sich um das sog. *chinesische Resteproblem* handelt. – Beim Davenantschen Problem, drei Zahlen in geometrischer Progression zu bestimmen, so daß ihre Quadratsumme und ihre Kubensumme gegebene Werte annehmen, findet der Leser Hinweise auf Parallelstellen bei Leibniz und in der Sekundärliteratur; auch wird angegeben, daß Leibniz später richtig erkennt, daß es sich um ein Problem 7. Grades handelt.

All diese Bemerkungen sollen verdeutlichen: dem Zweck der Ausgabe entsprechend, haben sich die Bearbeiter unendliche Mühe gegeben, die Texte aufs Genaueste zu edieren, was aber nicht bedeutet (auch nicht bedeuten kann), daß der Inhalt bereits für den ungeschulten Leser historisch aufbereitet ist. Vielmehr muß dieser die in der Regel lateinisch geschriebenen und fast immer mit Rechenfehlern behafteten (worauf auf fast jeder Seite hingewiesen wird!) Leibnizschen Entwürfe nun auf ihre Einfälle hin durchsehen, mit Bemerkungen in den Briefbänden vergleichen und zur zeitgenössischen mathematischen Literatur in Verbindung setzen.

Tut er dies z. B. für das Davenantsche Problem, findet er im Sachregister zu Bd. III, 1 zehn Hinweise, in Bd. III, 2 aber keinen: Leibniz war auf das Problem in den Jahren 1675–1676 mehrfach vom Sekretär der Royal Society Henry Oldenburg hingewiesen worden (ebenso auch sein Freund Tschirnhaus), ging darauf in seiner Korrespondenz aber nicht sofort ein. Ganz anders bei Frénicles Problem, daß ein pythagoräisches Zahlendreieck mit Quadratzahlfläche in rationalen Zahlen unmöglich ist, das Leibniz Ende 1675 durch Mariotte kennengelernt haben dürfte. Er versuchte sich sofort an einem Beweis (Bd. VII, 1, Nr. 83 + 84) und beschäftigte sich Ende 1678 erneut damit, woraus dann eine kleine Abhandlung hervorging. Zugleich gab er das Problem (und auch das Sechsquadrateproblem) über den Abt von Loccum, Molanus, anonym an den Cartesianer Arnold Eckhard weiter; eine monatelange indirekte Korrespondenz darüber schloß sich an. Im Briefwechsel mit Huygens erwähnte es Leibniz ebenfalls. – Ohne Resultat verliefen die Bemühungen, in Paris die Fertigstellung des Messingmodells der Vier-Spezies-Rechenmaschine zu erreichen. Über die vielen physikalischen, chemischen, medizinischen und technischen Fragen, die im Briefwechsel angesprochen werden, könnte man eine eigene Rezension schreiben!

Muß man noch erwähnen, daß es Leibniz immer wieder um die wissenschaftliche Methodik geht, um geeignete Definitionen, um die Verwendung einer universellen Symbolik, um den Aufbau einer rationalen Sprache, einer *characteristica universalis?* Nicht nur unfehlbare Beweise soll sie liefern, sondern vor allem die Erfindungskunst fördern.

Beide Bände sind sehr reich mit Registern ausgestattet, wie man es von der Akademie-Ausgabe gewohnt ist. Ein besonderes Lob verdient die mustergültige Gestaltung des schwierigen mathematischen Satzes (mit zahlreichen Sonderzeichen, besonders in Bd. VII, 1), ausgeführt im Druckhaus „Maxim Gorki" in Altenburg bei Leipzig. Die Bände halten jedem Vergleich mit den großen Ausgaben der Werke von Huygens oder Newton stand und setzen Maßstäbe, die nicht leicht zu übertreffen sind.

Hamburg C. J. Scriba

Pieper, H. (Hrsg.), Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und C. G. Jacob Jacobi. Berlin: Akademie-Verlag 1987, 307 S., 4 Tafeln, DM 58,–

Der gebürtige Berliner Alexander von Humboldt (1769–1859) und der gebürtige Postdamer Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) führten spätestens ab Dezember 1827/Januar 1828 einen Briefwechsel, der erst mit dem Tode Jacobis abbrach, der „ungekrönte Monarch in der Welt der Wissenschaften" (S. 8) mit dem nächst Gauß bedeutendsten deutschen Mathematiker unter seinen Zeitgenossen (S. 9). Die Korrespondenz setzte also fast unmittelbar nach Humboldts dauerhafter Rückkehr nach Berlin im Jahre 1827 ein. Einer solchen Verbindung ist das Interesse der Wissenschaftshistoriker sicher, und tatsächlich wird der Leser in seinen Erwartungen nicht enttäuscht. Von insgesamt 45 Briefen hat man derzeit Kenntnis (25 von Jacobi, 20 von Humboldt), von denen 14 (13 betreffen Jacobis Briefe) verschollen sind.

Pieper hat das Verdienst, zum ersten Mal diesen Briefwechsel soweit wie möglich erschlossen, mit großer Sachkenntnis herausgegeben und vor allem kommentiert zu haben. Nur 14 Briefe waren bisher durch Teildrucke bekannt.

Piepers Einleitung beschreibt das kulturelle und wissenschaftliche Leben in Berlin der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, charakterisiert die beiden so unterschiedlichen Gelehrten und gibt einen knappen Überblick über den Inhalt der gewechselten Briefe. Während Humboldts wissenschaftliche Leistungen vorwiegend den Geowissenschaften zuzuordnen sind, hat sich Jacobi vor allem um die reine Mathematik verdient gemacht und explizit den Standpunkt vertreten, daß das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen Geistes sei. Während sich Humboldt gegenüber anderen Zeitgenossen durchaus auch kritisch über Jacobi äußerte, ist der Briefwechsel von gegenseitiger Hochachtung geprägt. Insbesondere setzte sich Humboldt für Jacobi ein, als dieser aus politischen Gründen finanzielle Schwierigkeiten hatte.

Im Briefwechsel spiegelt sich das wissenschaftliche Leben dieser Zeit ebenso wie familiäre und private Freuden und Kümmernisse der beiden Briefpartner wider. Vor allem die mathematischen und astronomischen Zeitgenossen Jacobis wie Eisenstein, Kummer, Gauß, Dirichlet, Bessel, Encke usf. spielen naturgemäß eine große Rolle. Jacobi erläutert auf Humboldts Bitten naturwissenschaftliche und mathematische Probleme, etwa die Theorie des Erdmagnetismus von Gauß. Insbesondere geht Jacobi bereitwillig darauf ein, Humboldt bei der Abfassung seines „Kosmos" zu helfen. Der intensive Briefwechsel der Jahre 1846/47 betrifft vor allem Jacobis Darlegungen über die mathematischen Wissenschaften der Antike, deren sich Humboldt bedienen wollte, ohne es dann in größerem Maße zu tun. Die Gründe dafür werden von Pieper dargelegt. Jacobi hatte ursprünglich klassische Philologie studiert und verfügte über vorzügliche altsprachliche Kenntnisse. Tatsächlich hinterließ er eine Reihe von bis heute unveröffentlichten wissenschaftshistorischen Studien zur klassischen Antike. Was Jacobi über die Beziehungen zwischen Analysis und Synthesis, Analysis und Algebra (Brief 25) ausführt, verdient noch heute das Interesse der Wissenschaftshistoriker.

Pieper hat seine Edition überaus reichhaltig und bewußt ausführlich in über 900 Anmerkungen kommentiert, die von seiner umfassenden Vertrautheit mit Primär- und Sekundärliteratur beredtes Zeugnis ablegen. Diese gehen oft weit über unmittelbare Erläuterungen des Textes hinaus und geraten gelegentlich zu kleinen Exkursen etwa zur Geschichte der komplexen Zahlen (S. 98/99), der ägyptischen und antiken Planetentheorie (S. 79/80) usf. Da er einen möglichst breiten Leserkreis erreichen wollte, hat er auch Begriffe und Dinge erläutert, die dem Fachmann bekannt sind (Peripatetiker, Unlösbarkeit der Gleichung $x^2+1=0$ im Bereich der reellen Zahlen usf.).

Dieser Prinzip hat ihn auch bei der Abfassung des Anhanges geleitet, der die Hälfte des Bandes einnimmt. Dort sind zunächst Notizen Humboldts zur Geschichte der Mathematik, in Regestenform die Humboldtsche Abschrift eines Briefes von Legendre an Humboldt sowie Übersetzungen sämtlicher englischer, französischer, griechischer, italienischer und lateinischer Begriffe und Zitate (bei mehrfachem Auftreten auch mehrfach) abgedruckt, einschließlich von Worten wie Traité, Centre, in abstracto, pro oder contra. Die sich anschließenden Quellen- und Literatur- (68 Seiten), Personen- und Sachverzeichnisse erschließen den Band in vorbildlicher Weise.

Berlin E. Knobloch

Zeh, H.-D., The Physical Basis of the Direction of Time, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 20 figs., 166 pp., Softcover, DM 56,–

Das in den zwanziger Jahren von A. S. Eddington geprägte Stichwort „Arrow of Time" = „Zeitpfeil" bezeichnet eine der faszinierendsten Grundlagenfragen unseres Weltverständnisses: Alle gängigen Naturgesetze sind invariant gegen Zeitumkehr – warum zeigt uns dann die Erfahrung ständig Vorgänge, deren zeitliche Umkehr nie vorkommt? Beispielsweise: werfen wir einen Stein ins Wasser, so breiten sich Wellen ringförmig aus; daß Wellenringen an einer Stelle zusammenlaufen und einen Stein hochschleudern, ist mit den Bewegungsgesetzen der Mechanik verträglich, kommt aber nie vor. Oder: wenn mein Fahrradschlauch die Luft verloren hat, kann ich, die Voraussetzungen von Poincarés Wiederkehrsatz (1890) unterstellend, erwarten, daß er irgendwann einmal wieder prall wird; nur: ich erlebe es nicht. Daß die Welt irreversibel in der einen von zwei möglichen Zeitrichtungen abläuft, und nicht in der anderen, ist Gegenstand einer bis heute in wachsender Breite und mit steigender Plausibilität der Argumente stattfinden Diskussion, die einen Bereich „oberhalb" der gängigen Naturgesetze betrifft und einstweilen nichts endgültig Abschließendes gebracht zu haben scheint. Es geht dabei weniger um die Strenge von Deduktionen (so unbefriedigend man z. B. das Ausstehen eines strengen Beweises für die sog. Ergodenhypothese auch finden mag), sondern eher darum, ob gewisse Ansätze und Betrachtungsweisen als physikalisch und erkenntnistheoretisch zulässig oder angemessen anzusehen seien – großenteils Meta-Fragen also. – Das vorliegende Buch wendet sich zunächst hauptsächlich an Physiker, aber auch an physikgeschulte Philosophen; es ist aus einem 1977 auf deutsch erschienenen Lecture-Notes-in-Physics-Band des Verfassers durch Umarbeitung und Erweiterung hervorgegangen. Mathematiker würden dem Buch sicher erheblich mehr abgewinnen können, wenn es im Stil von Weyl oder v. Neumann geschrieben wäre. Andererseits ist das Thema viel zu faszinierend und mathematik-nah, als daß ein breit interessierter Mathematiker daran vorbeigehen könnte. Geboten wird ein umfassender Einblick in den derzeitigen Stand der inner-physikalischen Diskussion, in dem dort üblichen Stil. Zeitpfeil-Problematik wird in den Themenkreisen

ch. 2. The time arrow of radiation (Ausstrahlung **nach** Anregung)
ch. 3. The thermodynamical arrow of time (Boltzmann, Gibbs, ...)
ch. 4. The quantum mechanical arrow of time (Pauli, Everett, ...)
ch. 5. The time arrow of spacetime structure and cosmology („black holes"; Hawking, Ellis, ...)
ch. 6. The quantization of time

abgehandelt. Klassischen Gedankenexperimenten wird gebührende Aufmerksamkeit zuteil, historische Exkurse bereichern das Bild, ebenso einige Ausführungen philosophischen Charakters. – Auch Mathematiker werden von dieser Darstellung Gewinn haben.

Erlangen K. Jacobs

Gelfand, I.M., Collected Papers, Berlin u. a.: Springer-Verlag, Volume 1, 1987, VI, 883 pp., Hard cover, DM 248,–, Volume 2, 1988, X, 1039 pp., Hard cover, DM 248,–, Volume 3, 1989, X, 1075 pp., Hard cover, DM 248,-

Das mathematische Werk I. M. Gelfands erstreckt sich über viele Gebiete der Mathematik und man ist, wie B. Kostant ausführt, immer wieder überrascht, welche Schlüsselrolle Gelfands Ideen in der Entwicklung der verschiedensten Zweige spielen. Die Herausgabe der „Collected Papers" Gelfands ist deshalb durchaus ein sinnvolles Unterfangen, das von S. G. Gindikin, V. W. Guillemin, A. A. Kirillov, B. Kostant und S. Sternberg betreut wurde. Angesichts der Fülle der veröffentlichten Arbeiten Gelfand's kann es sich nur um eine Auswahl aus seinem Werk handeln. Ausweislich der jedem der drei Bände umfassenden Ausgabe beigegebenen Bibliographie erschienen zwischen den Jahren 1936 und 1988 462 Arbeiten, meist mit Kollegen und Schülern verfaßt. Die Arbeitskraft I. M. Gelfands ist ungebrochen, der berühmte Stil seines Seminars in Moskau, geprägt durch ein unmittelbares Einbeziehen aller Teilnehmer in das mathematische Geschehen und die Diskussion, lebte auch im Herbst 1990 an der Rutgers University, USA, fort.

Die ausgewählten Arbeiten Gelfands wurden nicht chronologisch angeordnet, sondern themenweise zusammengestellt.

Der Band I gliedert sich in: 1. Überblicksvorlesungen und Arbeiten von allgemeinem Interesse, 2. Banach-Räume und normierte Ringe, 3. Differentialgleichungen und mathematische Physik. Weiter sind dem Band sehr umfassende Würdigungen beigegeben, die anläßlich des 50sten, 60sten, 70sten Geburtstages von I. M. Gelfand verfaßt wurden und die seine mathematischen Ideen und Arbeiten diskutieren. V. W. Guillemin und S. Sternberg haben diesem Band noch einige Bemerkungen zum Werk Gelfands beigefügt.

Der Band II besteht aus Arbeiten Gelfands zur Darstellungstheorie. Diese bilden einen der wesentlichen Schwerpunkte seines Werkes und umspannen mehr als vierzig Jahre mathematischen Tuns. Im einzelnen finden sich hier die Arbeiten zu: 1. Allgemeinen Problemen der Darstellungstheorie; 2. Unendlichdimensionalen Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen; 3. Geometrie homogener Räume, sphärische Funktionen, automorphe Funktionen; 4. Modellen von Darstellungen, Darstellungen von Gruppen über verschiedenen Körpern; 5. Verma-Moduln, Auflösungen von endlich-dimensionalen Darstellungen; 6. Einhüllende Algebren und ihren Quotienten Schiefkörpern; 7. Endlich dimensionalen Darstellungen; 8. Unzerlegbaren Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen und endlich dimensionaler Algebren; 9. Darstellungen unendlich-dimensionaler Gruppen. Der Band wird beschlossen durch den Wiederabdruck zweier Arbeiten von G. Segal bzw. C. M. Ringel aus dem Jahre 1982, die sehr zum Verständnis verschiedener Aspekte der darstellungstheoretischen Arbeiten Gelfands beitragen.

Der Band III enthält die wichtigen Beiträge Gelfands zur Integralgeometrie, Kohomologie unendlich dimensionaler Lie-Algebren, Theorie der hypergeometrischen Funktionen. Über diese, die Teile 1, 2 und 5 ausmachenden Arbeiten finden sich in diesem Band Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Teil 3) und als Teil 4 eine umfangreiche Auswahl aus Gelfands Arbeiten zur Kybernetik, Automatentheorie und Biologie.

Es ist bekannt, daß Gelfand hier weniger von der Idee, mathematische Anwendungen zu finden, geleitet war, sondern daß er vielmehr auch experimentelle Arbeiten im Bereich der Neurophysiologie und Zellbiologie durchgeführt hat. Der Band III wird durch eine kurze Arbeit von V. I. Arnold zum Thema „Herzarhythmien und Kreisabbildungen", die sich auf seine Dissertation 1959 stützt, beschlossen. Als Herausgeber fügt B. Kostant einige persönliche Bemerkungen zum Werk Gelfands an. Er betont zwei Gesichtspunkte, die die mathematische Leistung Gelfands als herausragend erscheinen lassen: Zum einen vermitteln Gelfands Arbeiten mehrheitlich mathematische Konzepte und Perspektiven, denn nur technische Information. Gelfandsche Mathematik bringt neue Ideen, die Dinge anzusehen, und weist den Weg für überraschende Entwicklungen. Zum anderen zeichnen sich Gelfandsche Arbeiten dadurch aus, daß in ihnen Zusammenhänge zwischen verschiedenen, bisher nicht aufeinander bezogenen Gebieten, hergestellt werden. Hier leuchtet Gelfands Talent, übergreifende Ideen, Prinzipien und Begriffe entwickeln zu können, auf.

Die vorgelegte Auswahl aus dem Gelfandschen Werk gibt gute Gelegenheit, dies zu studieren, und ihm in seiner Entwicklung nachzugehen. Die Handhabung der Bände wäre erleichtert, wenn die aufgenommenen Arbeiten in der Bibliographie nicht nur durch Bandzahl und Teilenummer, sondern durch Seitenzahlen angegeben wären; so ist stets ein Blick ins Inhaltsverzeichnis erforderlich. Diese Marginalie trübt aber die Freude an möglichen Entdeckungen in dem so facettenreichen mathematischen Werk I. M. Gelfands nicht.

Eichstätt J. Schwermer

Appel, K., Haken, W., Every planar map is four colorable (Contemporary mathematics, vol. 98), Providence, Rhode Island: American Mathematical Society 1989, 741 pp., p.b., £ 64.00

Dieser dickleibige Band bietet eine „verbesserte" Version der 1976 im *Illinois Journal of Mathematics* erschienen Originalarbeit. Diese Arbeit brachte bekanntlich die Lösung des Vierfarbenproblems mittels der Reduktionsmethode, wobei die umfangreichen kombinatorischen Details des Beweises in einem als Microfiche beigefügten Anhang enthalten waren. Dieser Microfiche-Anhang ist in dem vorliegenden Buch nunmehr in normal lesbarer (und korrigierter) Form ausgedruckt; er macht etwa zwei Drittel des Umfangs aus. Neu ist ein Abschnitt über „Immersionsreduzibilität" (100 Seiten), welcher einen Algorithmus zur Vierfärbung ebener Landkarten enthält. Die Autoren zeigen, daß das zeitliche „worst case"-Verhalten des Färbungsalgorithmus für eine gegebene Triangulation mit N Ecken durch ein Polynom vierten Grades in N begrenzt ist.

Dem eigentlichen Beweis des Vierfarbensatzes von 1976 ist eine 30seitige Einführung vorangestellt, in der die gut hundertjährige Geschichte des Vierfarbenproblems umrissen wird. Ausgangspunkt der (letztlich erfolgreichen) Lösungsbemühungen ist die Annahme eines *minimalen* Gegenbeispiels zum Vierfarbensatz in Form einer 5chromatischen Minimaltriangulation der Ebene; wenn es nun gelingt zu zeigen, daß eine solche Minimaltriangulation keine Ecken vom Grade $\leqslant 5$ enthalten kann, dann ist ein Widerspruch zur Eulerschen Polyederformel hergestellt, und somit der Vierfarbensatz ex negativo bewiesen. Nachdem Kempe 1879 gezeigt hatte, daß Ecken vom Grade < 5 *reduzierbar* sind (also nicht in einem minimalen Gegenbeispiel enthalten sein können), blieb „nur noch" die Reduzierbarkeit der 5-Ecke nachzuweisen. Da dies auf direktem Wege nicht gelang, versuchte man, *unvermeidbare Mengen reduzibler Figuren* (Untergraphen) zusammenzustellen – unvermeidbar in dem Sinne, daß jede ebene Triangulation mindestens eine Figur der Menge enthält. Die Arbeit von Appel und Haken liefert nun die erste (und bisher einzige) Regel zur Konstruktion einer solchen unvermeidbaren Menge; diese Regel, von den Autoren „Entladungsprozedur" genannt, wurde in einem iterativen, von Überlegungen zur Reduktionswahrscheinlichkeit geleiteten Prozeß gewonnen. Das Resultat ist eine stark verästelte Entladungsprozedur mit einigen Grund- und hunderten von Ausnahmeregeln, die zu einer unvermeidbaren Menge von 1476 reduziblen Figuren führte.

Der Beweis gliedert sich in zwei Teile: I) Nachweis der Unvermeidbarkeit der per Entladungsprozedur konstruierten Figurenmenge, II) Nachweis der Reduzierbarkeit aller zur unvermeidbaren Menge gehörenden Figuren. Teil I wurde von Hand durchgeführt, Teil II von Rechnern. Obwohl sich viele Mathematiker an der rechnergestützten Beweisführung stießen, sind doch gerade die Ergebnisse von Teil II bestens gesichert, vor allem durch die jahrzehntelangen Untersuchungen von Heesch zum Vierfarbenproblem. Potentiell fehlerträchtig ist wegen seiner kombinatorischen Komplexität allenfalls Teil I (Entladungsprozedur und Unvermeidbarkeitsbeweis). In der Tat fand der Rezensent 1981 einen Fehler in Teil I, zu dessen Behebung die Autoren die Entladungsprozedur leicht abänderten – diese Änderungen machen den hauptsächlichen Unterschied zwischen der hier vorliegenden Beweisversion und der von 1976 aus. Rein methodisch gesehen ist diese Fehlerbehebung nur ein *zusätzlicher* Schritt aus einer Vielzahl von iterativen Schritten zur Herleitung einer geeigneten Entladungsprozedur, und die Autoren legen überzeugend dar, warum auch etwaige noch unentdeckte Fehler die „inhärente Stabilität" des Beweisverfahrens nicht gefährden würden.

Kritisch anzumerken bleibt, daß der Beweis in den dreizehn Jahren seit seiner Erstveröffentlichung nicht wesentlich vereinfacht wurde. Weder verwenden die Autoren die von Heesch in den siebziger Jahren gefundenen neuen Reduktionsstrukturen (*E*-, *F*-, ..., *K*-Reduktion), noch betrachten sie Figuren, deren Randkreiszahl größer als 14 ist. Letzteres mag 1976 als pragmatisches Argument hinsichtlich der damals verfügbaren Rechenleistung und Speicherkapazität berechtigt gewesen sein, aber gewiß nicht heute. Es bleibt zu fragen, ob nicht durch Einsatz des verfeinerten Reduktionsbegriffs und durch die Reduktion größerer Figuren (mit 18 bis 20 Randkreisecken) die Entladungsprozedur ganz wesentlich vereinfacht werden könnte.

Rödental U. Schmidt

Lorenz, F., Einführung in die Algebra (2 Bände), Mannheim: BI - Verlagsanstalt, Teil I, 1987, 338 S., kartoniert, DM 38,–, Teil II, 1990, 386 S., kartoniert, DM 44,–

Der Teil I des Buches behandelt den Stoff, der im wesentlichen in einer einführenden Algebra-Vorlesung gebracht werden sollte. Das Herzstück einer solchen Vorlesung ist die Galoistheorie mit ihren verschiedenen Verzweigungen und Anwendungen. Der Autor legt großes Gewicht darauf, die Entwicklung dieser Theorie anhand konkreter Probleme zu motivieren und beginnt deshalb in § 1 mit den klassischen Problemen der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal. Dies führt ihn dann in natürlicher Weise zu den Grundbegriffen der Körpererweiterungen und schließlich in § 8 zu den Hauptsätzen der Galoistheorie. Mit den Hauptsätzen ist es natürlich nicht getan; denn sie gewinnen erst ihr volles Leben durch Anwendung und konkrete Beispiele. Endliche Körper, Einheitswurzeln, Kreisteilungskörper, Kummertheorie, Artin-Schreier-Gleichungen, auflösbare Körpererweiterungen, auflösbare Gleichungen von Primzahlgrad, Gleichungen dritten Grades mittels cardanoscher Formeln (nicht aber Gleichungen vierten Grades), Normalbasen und Dedekinds Reduktionsprinzip werden ausführlich behandelt.

Während so der Körperbegriff immer im Mittelpunkt des Interesses steht, werden die anderen fundamentalen Grunstrukturen der Algebra, insbesondere Gruppen und Ringe nicht systematisch behandelt, sondern immer nur dann und insoweit, wie es für die Entwicklung der Galoistheorie erforderlich ist. So verteilt sich die Ringtheorie auf § 4, 5 und 16 und behandelt Teilbarkeitslehre, faktorielle Ringe, chinesischen Restsatz, Polynomringe, Satz von Gauß und ganze Ringerweiterungen. Grundbegriffe der Gruppentheorie findet man in § 10, 14 und 15: Operationen von Gruppen auf Mengen, Sätze von Sylow, endlich erzeugte abelsche Gruppen, prime Restklassengruppen, auflösbare Gruppen, Permutationsgruppen, symmetrische und alternierende Gruppen.

Einige Themen des Buches führen über den Stoff einer Algebra-I-Vorlesung noch hinaus: Unendliche Galoistheorie, transzendente Körpererweiterungen, Hilbertscher Nullstellensatz und die Transzendenz von π.

Der Teil II des Buches behandelt Körper mit zusätzlichen Strukturen. In § 20–22 wird die Theorie der reellen Körper und ihr Zusammenhang mit quadratischen Formen dargestellt. In § 27 wird die Tsen-Stufe eines Körpers definiert und es werden die Sätze von Chevalley, Warning, Lang und Nagata zu dem Tsenschen Problemkreis bewiesen. Der § 33 gibt eine Einführung in die Darstellungstheorie endlicher Gruppen im halbeinfachen Fall. Das Hauptthema von Teil II ist aber die lokale Klassenkörpertheorie und es wird ein detaillierter Beweis ihrer wichtigsten Sätze gegeben. Das erfordert natürlich eine Menge von Vorbereitungen, als da sind: Absolutbeträge, lokale Körper, Witt-Vektoren, Wedderburntheorie halbeinfacher Algebren, Brauergruppe, Kohomologietheorie, Hasse-Invarianten und lokales Normrestsymbol. Als Krönung folgen dann in § 32 lokales Reziprozitätsgesetz, lokaler Existenzsatz und lokaler Satz von Kronecker-Weber.

Das Buch erhält zusätzlichen Wert durch eine Fülle von Übungsaufgaben, die teils einfache Anwendungsbeispiele sind, teils Weiterführungen und Ergänzungen der im Text entwickelten Theorie. Im Teil I werden diese Aufgaben in einem Anhang (S. 269–328) gebracht, im Teil II jeweils im Anschluß an die einschlägigen Paragraphen.

Das Erscheinen dieses Buches ist sehr zu begrüßen. Besonders Teil I ist als Skript für die Algebra Vorlesung durch seine Stoffauswahl gut geeignet. Die Darstellung ist klar und wohldurchdacht. Der hier gewählte „problemorientierte" Aufbau ist sehr gut geeignet, die Fülle von Definitionen zu motivieren und dem Neuling schmackhaft zu machen. Aber auch Teil II hat große Meriten. Natürlich ist die Stoffauswahl einer Algebra-II-Vorlesung nicht so kanonisch festgelegt und wird je nach Interesse und Zielrichtung von Dozent zu Dozent eine andere sein. Teil II macht für diese Stoffauswahl einen wohlüberlegten und lohnenswerten Vorschlag.

Zum Schluß möchte ich zwei kleine kritische Bemerkungen machen. Da alle Definitionen, Sätze etc. nach der Nummer des Paragraphen und einer weiteren laufenden Nummer zitiert werden, würde das Auffinden sehr erleichtert, wenn man beim Blättern im Buch jederzeit wüßte, im Paragraphen welcher Nummer man sich befindet. In Teil I ist dies nicht der Fall, in Teil II ist dieser Mangel auf einfache Weise behoben. Die zweite Bemerkung betrifft den Transzendenz Beweis von Lindemann und Weierstraß. Für mich ist der Beweis so nicht klar und ich empfehle als wirklich befriedigende Darstellung desselben Nathan Jacobson, Basic Algebra I, S. 268–277.

Erlangen J. Köhn

Holt, D. F., Plesken, W., Perfect Groups, Oxford: Oxford University Press 1989, 363 S., £ 35.00

Es ist sicherlich ein unmögliches Unterfangen, ein Buch über die Theorie der perfekten Gruppen zu schreiben. Dies würde z. B. auch die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen einschließen. Somit kann das nicht das Ziel des vorliegenden Buches sein. Hier wird eine Klassifikation gewisser perfekter Gruppen gegeben. Um präzise zu sein, es werden die perfekten Gruppen G mit $|G| \leqslant 10^6$ klassifiziert, wobei nicht alle Gruppen, die Erweiterungen von 2-Gruppen mit A_2 oder $L_2(7)$ sind, angegeben werden, da man hierbei mit den Schwierigkeiten der Klassifikation von 2-Gruppen konfrontiert wird. Natürlich wird hierbei auf die Klassifikation der entsprechenden einfachen Gruppen aufgebaut, sie ist nicht Teil des Buches. Neben dieser konkreten Klassifikation hat das Buch aber noch ein zweites Anliegen. Es sollen allgemeine Techniken vorgestellt werden, die der Leser bei eigenen Klassifikationen erfolgreich benutzen kann. So kann man z. B. perfekte Gruppen als Faktorgruppen von perfekten kristallographischen oder p-adischen Raumgruppen gewinnen. Die irreduziblen unter diesen Raumgruppen werden bis zur Dimension 10 (kristallographisch) bzw. Dimension 8 (2-adisch, 3-adisch) klassifiziert.

Hier der Inhalt: § 1 Introduction: Es werden die charakteristischen Untergruppen $CR(G)$, die kleinste normale Untergruppe von G, so daß $G/CR(G)$ vollständig reduzibel ist, und die Gruppe $QCR(G)$, der Durchschnitt der Kerne der Epimorphismen auf quasieinfache Gruppen, studiert.

§ 2 Perfect groups with nontrivial Fitting subgroup: Dieses Kapitel ist der Kern des Buches. Hier werden Methoden der Konstruktion und der Klassifikation (subdirekte Produkte, profinite Gruppen, pro-p-Gruppen, Frattini-Erweiterungen, Darstellungstheorie, p-adische Raumgruppen und andere kompakte p-adische Gruppen) angegeben. Als Beispiel wird $G/O_p(G) \simeq A_5$ mit Hilfe der Gruppe $SL(2,R)$, R eine unverzweigte Erweiterung vom Grad 2 des Ringes der 2-adischen Zahlen, diskutiert.

Als Klassifikationshilfe wird ein Graph eingeführt, der als Ecken die Isomorphietypen der endlichen Gruppen hat. Zwei Klassen sind durch eine Kante verbunden, wenn man von der einen Klasse zur anderen kommen kann, indem man einen minimalen Normalteiler herausfaktorisiert. Als Beispiel wird der Untergraph aller perfekten Gruppen, die Erweiterungen von 2-Gruppen mit A_5 sind, beschrieben.

§ 3 Systematic enumeration of finite perfect groups: Hier wird beschrieben, wie konkret die Tafel der perfekten Gruppen der Ordnung $\leqslant 10^6$ bestimmt wird.

§ 4 Basic structure and enumeration of perfect space groups: Entspricht § 3 für die Raumgruppen.

§ 5 Tables of finite perfect groups.

§ 6 Tables of perfect space groups.

§ 7 Mapping a finitely presented group onto a group in the tables: Hier wird ein möglicher Algorithmus beschrieben, der entscheidet, ob eine gegebene Gruppe eine Faktorgruppe besitzt, die eine der Gruppen in den Tabellen ist.

Das Buch schließt mit einer Liste von Faktorgruppen einiger Raumgruppen, deren Charaktertafeln von W. Hanrath berechnet worden sind. Diese liegen als Microfiche bei.

Das Buch ist alles in allem recht ansprechend geschrieben. Man merkt, daß die Autoren einiges an Erfahrung auf diesem Gebiet aufzuweisen haben. Die ersten vier Kapitel enthalten Übungen verschiedener Schwierigkeitsgrade, mit denen sich der Leser unbedingt beschäftigen sollte, da Beweise teilweise in die Übungsaufgaben verlagert werden.

An Vorkenntnisse sollte der Leser einige Erfahrung in Darstellungstheorie mitbringen. Zwar werden die wesentlichen Grundlagen in § 2 gegeben. Jedoch ist die Darstellung so dicht, daß dies doch keine Einführung in Darstellungstheorie ist. Auch einige Erfahrung mit Raumgruppen ist nützlich.

An wen wendet sich nun das Buch. Wer sich für Gruppentheorie interessiert und die obigen Voraussetzungen mitbringt, für den sind sicherlich die ersten vier Kapitel des Buches (ca. 100 Seiten) lohnend, auch wenn er an der konkreten Klassifikation nicht interessiert ist. Derjenige, der nur an der Klassifikation bzw. an Informationen über gewisse Gruppen in den Tabellen interessiert ist, kann § 5 und § 6 lesen, ohne zunächst die ersten vier Kapitel studieren zu müssen. Da die Tabellen sehr viel an Information enthalten (Erzeuger und Relationen, Automorphismen, Multiplikatoren, Kohomologie), sind sie gerade für diesen Leserkreis sehr attraktiv. Allerdings, wie bei jedem Tafelwerk, so hängt auch hier der Nutzen sehr von dem Vertrauen ab, das man in sie hat. Da das Buch relativ wenige Druckfehler hat, kann man nur hoffen, daß dies auch für die Tabellen gilt. Einige schwerwiegendere, die bei flüchtigem Studieren der Tabellen aufgefallen sind: S. 238: $Q_8 \cdot Q_8 \cdot Q_8$ sollte $D_8 \cdot D_8 \cdot D_8$ heißen, S. 341: $O_8^+(2)$ sollte $\Omega_8^+(2)$ heißen. Daß die $U(3,3)$-Beispiele in den $L(3,3)$-Paragraphen gerutscht sind, ist dem Herausgeber anzulasten. Druckfehler in den Erzeuger und Relationen haben häufig den Vorteil, daß sie zu völlig abwegigen Resultaten führen und somit auch entdeckt werden können.

An dieser Stelle sollte ein wesentlicher Kritikpunkt angebracht werden. Für ein solches Buch ist die Literaturliste überraschend kurz. Dies wirkt sich nachteilig gerade bei den Tabellen aus. Es wäre für den Leser sicherlich interessant gewesen, zu erfahren, wo man weitere Informationen über die aufgelisteten Gruppen finden kann. Sicherlich wurde bei der Erstellung der Tabellen auch Sekundärliteratur benutzt. Das einzige Zitat für gewisse Erzeuger und Relationen, das im Text gegeben wird, befindet sich überraschenderweise nicht in der Literaturliste am Ende des Buches. Auch ein Zitat der Klassifikation der endlichen einfache Gruppen der Ordnung $\leqslant 10^6$ durch M. Hall [J. Algebra 20 (1972), 98–102] fehlt überraschenderweise völlig.

Alles in allem wurde hier ein gutes Buch vorgelegt, das gerade für den Anwender ein Born an Information und Beispielen ist.

Berlin G. Stroth

Apostol, T. M., Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory (2nd ed., Graduate Texts in Mathematics), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 205 S., DM 98,–

In diesem sehr lesenswerten Buch wird auf 200 Seiten in gedrängter Form die Theorie der Modulfunktionen, der elliptischen Funktionen und der ganzen Modulformen nebst Anwendungen in der Zahlentheorie behandelt. Dabei kommen u. a. Lehners Kongruenzen für die Fourierkoeffizienten Modulfunktion $j(\tau)$ und Heckes Theorie der ganzen Modulformen mit multiplikativen Fourierkoeffizienten unter Heranziehung der Heckeoperatoren ausführlich zur Sprache. Die Anwendungen betreffen einerseits die Partitionsfunktion $p(n)$ und Rademachers konvergente Reihe für $p(n)$, wobei die Funktionalgleichung für die Dedekindsche η-Funktion eine entscheidende Rolle spielt, und andererseits verallgemeinerte Dirichlet-Reihen, wobei Kroneckers Approximationssatz dazu benutzt wird, um Bohrs Äquivalenzsatz zu beweisen, dem zufolge äquivalente Dirichlet-Reihen in gewissen Halbebenen den gleichen Wertevorrat besitzen. Mittels des Satzes von Kronecker läßt sich auch zeigen, daß es keine nicht-konstanten meromorphen Funktionen mit drei linear-unabhängigen Perioden gibt, was natürlich im Hinblick auf die zweifach periodischen meromorphen Funktionen, also die elliptischen Funktionen, von Interesse ist.

Die vorliegende zweite Auflage des Buches unterscheidet sich von der ersten im wesentlichen nur durch das hinzugefügte Supplement zu Kapitel 3, in dem ein fünf Seiten langer Beweis für die Funktionalgleichung der Dedekinschen η-Funktion dargeboten wird, der sich wohltuend abhebt von dem in Kapitel 3 gegebenen etwas technischen Beweis dieser Funktionalgleichung mit Hilfe der Transformationsformel von Iseki.

Jedem Kapitel sind Übungsaufgaben beigefügt, die zum größten Teil theoretischen Charakters sind und den behandelten Stoff ergänzen und so zur Kürze der Darstellung beitragen. Der Text ist übrigens nicht durchweg knapp geraten. Vielmehr finden sich gedrängte Passagen (z. B. Siegels Beweis der Transformationsformel für Dedekinds η-Funktion) neben recht ausführlich abgehandelten Teilen (z. B. die analogen Beweise der Theoreme 2.4 und 6.1 über die Gleichheit der Anzahl der Nullstellen und Pole einer Modulfunktion bzw. über die Darstellung des Gewichts einer ganzen Modulform durch die Anzahl ihrer Nullstellen).

Als besonders schöne Anwendung des Bohrschen Äquivalenzsatzes heben wir diejenige auf gewöhnliche Dirichletsche Reihen hervor: Für einen Dirichlet-Charakter χ modulo k und eine Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad \text{mit } a_n \neq 0 \Rightarrow (n, k) = 1$$

besteht die Äquivalenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) a_n}{n^s}.$$

Insbesondere folgt für den Hauptcharakter χ_1 modulo k die Äquivalenz

$$L(s, \chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\chi_1(n)}{n^s} = L(s, \chi).$$

Nach dem Bohrschen Äquivalenzsatz hat daher jede Dirichletsche Reihe $L(s, \chi)$ zu einem Charakter χ modulo k in einer beliebigen offenen Halbebene innerhalb der absoluten Konvergenzhalbebene den gleichen Wertevorrat wie $L(s, \chi_1)$.

Der Bohrsche Satz liefert auch Turáns Resultat, wonach die Riemannsche Vermutung richtig ist, wenn es Konstanten $\alpha > 0$ und $c > 0$ und eine natürliche Zahl n_0 gibt, derart daß die Funktion

$$C(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\lambda(n)}{n},$$

in der $\lambda(n)$ die Liouvillesche Funktion bezeichnet, für alle $x \geqslant n_0$ der Ungleichung

$$C(x) > -c \frac{\log^{\alpha} x}{\sqrt{x}}$$

genügt.

Erwähnung verdient übrigens auch der kurze Beweis des Picardschen Abbildungssatzes unter Benutzung der Modulfunktion J in Kapitel 2.

Das vorliegende Buch stellt aufgrund der durchaus ungewöhnlichen Stoffauswahl, die von der klassischen Theorie der Modularformen bis hin zu neueren Entwicklungen im Bereich der verallgemeinerten Dirichlet-Reihen reicht, und wegen der originellen Beweise und der klaren Darstellung eine begrüßenswerte Bereicherung der Literatur auf dem behandelten interessanten und faszinierenden Gebiete der Zahlentheorie dar.

Saarbrücken H. G. Zimmer

Hahn, A.J., O'Meara, O.T., The Classical Groups and *K*-Theory (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 291), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 590 S., DM 198,–

Klassische Gruppen und K-Theorie: In einem Buchtitel die Namen zweier ausgedehnter mathematischer Disziplinen, die erste altehrwürdig und in etlichen Monographien berühmter Autoren behandelt (Dickson [1], v. d. Waerden [2], Weyl [3], Dieudonné [4]), die andere vergleichsweise jung, in der Lehrbuchliteratur bisher eher nur fragmentarisch dargestellt (etwa von Bass [7] oder Milnor [8], ein sehr guter Übersichtsartikel ist der von Suslin [9]).

Was ist der Hintergrund?

1. Klassische Gruppen: Mit Weyl [3] bezeichnet man so die allgemeine und spezielle lineare Gruppe $GL_n(K), SL_n(K)$ aus invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten etwa in einem Körper K, darüberhinaus auch solche Untergruppen von $GL_n(K)$, die eine auf K^n gegebene Sesquilinearform invariant lassen, also z. B. orthogonale, unitäre oder auch symplektische Gruppen, sowie deren projektive Varianten. In vielen Bereichen der Mathematik und der Physik spielen diese Gruppen eine wichtige Rolle. Wegen ihrer Beschreibbarkeit als Matrizengruppen oder, anders ausgedrückt, als Gruppen von Automorphismen von linearen Räumen, spricht man auch von linearen Gruppen. Als Koeffizientenbereich erlaubt man vielfach anstelle eines Körpers K auch allgemeine Ringe R, die nicht unbedingt als kommutativ vorausgesetzt werden.

Während Weyl in erster Linie an der Darstellungstheorie dieser Gruppen – insbesondere über den Körpern der reellen oder komplexen Zahlen – interessiert war, werden in [1, 2, 4] vorwiegend interne gruppentheoretische Eigenschaften untersucht wie Erzeugbarkeit durch gewisse besonders simple sogenannte „Elementarmatrizen“ oder „Transvektionen“, Bestimmung der Normalteiler und der Automorphismengruppen. Dabei zeigten sich stets sehr viele Gemeinsamkeiten dieser an sich durch „Aufzählen“ definierten

Klasse von Gruppen. Über Körpern z. B. hat man es häufig mit einfachen Gruppen zu tun, also solchen Gruppen, die keine echten Normalteiler enthalten, jedenfalls nachdem man den Quotienten nach einem – endlichen – Zentrum gebildet und die durch die Kommutatoren erzeugte Untergruppe gebildet hat.

Ein innerer Grund für diese Gemeinsamkeiten wurde klar mit dem Erscheinen der bahnbrechenden Arbeit [5] von Chevalley, in der gezeigt wurde, wie diese Gruppen zusammen mit einer überschaubaren Klasse von sogenannten „Ausnahmegruppen", für beliebige kommutative Ringe als Koeffizientenbereiche aus den einfachen Lie-Algebren über den komplexen Zahlen konstruiert werden können. Ausgehend von dieser Chevalley-Konstruktion beschrieb Steinberg in [6] die interne Struktur aller dieser Gruppen über Körpern durch Angabe einer uniformen Präsentation durch Elementarmatrizen als Erzeugenden und gewissen einfachen Relationen. Darüberhinaus wurden auch die zentralen Erweiterungen dieser Gruppen vollständig bestimmt.

Es zeigte sich bald, daß diese überaus wichtige Arbeit [6] den methodischen Schlüssel bot, um die klassischen Gruppen in noch weit allgemeineren Situationen als allein über kommutativen Ringen zu studieren, und dies war die algebraische K-Theorie.

2. K-Theorie (vgl. [7, 8, 9]): Die Menge der Isomorphieklassen (endlich erzeugter) projektiver Moduln über einem Ring R besitzt eine Halbgruppenstruktur vermöge direkter Summe. Man kann auf naheliegende Weise diese abelsche Halbgruppe zu einer abelschen Gruppe ausbauen ähnlich wie man aus den positiven Zahlen die ganzen Zahlen konstruiert. Diese Gruppe nun wird nach Grothendieck mit $K_0(R)$ bezeichnet und spiegelt die Komplexität der Struktur der Klassen projektiver Moduln über R wider. (Grothendieck wählte den Buchstaben K als Anfangsbuchstaben des Wortes „Klasse", da es sich um die Beschreibung von Modulklassen handelt.) So ist etwa $K_0(K) = \mathbb{Z}$ für einen Körper K, da die Dimension die einzige Invariante eines endlich erzeugten projektiven Moduls über einem Körper ist, und für den Ring $\mathcal{O}$ ganzer Zahlen eines Zahlkörpers ist $K_0(\mathcal{O}) = \mathbb{Z} \oplus \mathcal{C}$ mit der Idealklassengruppe $\mathcal{C}$ und $\mathcal{O}$. Die projektiven Moduln über einem Ring R stehen in einem offensichtlichen Zusammenhang mit der Gruppe $GL_n(R)$. Es lassen sich nun zwei weitere abelsche Gruppen $K_i(R), i = 1, 2$, definieren unter Ausnutzung der Steinbergschen Betrachtungen aus [6]: Zu $GL_n(R)$ läßt sich für nicht zu kleines n eine universelle zentrale Erweiterung $St_n(R)$ der durch Elementarmatrizen erzeugten (perfekten) Untergruppe $E_n(R)$ angeben, von diesen Gruppensystemen läßt sich in naheliegender Weise der induktive Limes über die Homomorphismen $GL_n(R) \to GL_{n+1}(R)$ usw. bilden und man bekommt wieder eine universelle zentrale Erweiterungssequenz der Limiten $St(R)$ und $GL(R)$. Die Gruppe $St(R)$ heißt die Steinberg-Gruppe von R. Kern und Cokern dieser Sequenz sind die gesuchten Gruppen, die Sequenz

$$0 \to K_2(R) \to St(R) \to GL(R) \to K_1(R) \to 0$$

ist exakt.

(Die Gruppen $K_i(R)$ können übrigens als Homotopiegruppen eines geeigneten R zugeordneten topologischen Raumes interpretiert werden, in diesem Sinne sind sie dann auch für $i > 2$ definiert, was aber in unserem Kontext keine Rolle spielt. Siehe hierzu [9].)

Die Gruppen $St_n(R)$, $St(R)$ sind durch eine Präsentation mittels Relationen zwischen Elementarmatrizen gegeben, es mißt also $K_1(R)$ die Abweichung der $GL(R)$ von der elementar erzeugten Untergruppe $E(R)$, während die Elemente von $K_2(R)$ als Relationen zwischen Elementarmatrizten gedeutet werden können, die neben den Standardrelationen zur Präsentation von $E(R)$ benötigt werden.

Ist R ein Körper, so ist $GL(R) \to K_1(R)$ gerade die Determinantenabbildung.

3. Das Buch: Das soeben skizzierte Programm wird in den ersten beiden Kapiteln dargestellt, die in einer Beschreibung des Satzes von Merkurjev und Suslin enden,ohne hierzu allerdings einen Beweis zu geben. Kapitel 3 beschreibt und beweist für Schiefkörper D

Isomorphiesätze für die Gruppen $GL_n(D)$, $n \geqslant 3$ sowie gewisse „volle“ Untergruppen. In Kapitel 4 werden mit der „stable range condition“ die Probleme diskutiert, die sich im Zusammenhang mit der erwähnten Bildung des induktiven Limes über n ergeben, und es werden normale Untergruppen von $GL_n(R)$ unter schwachen Voraussetzungen an R studiert; diese Überlegungen sind direkte Verallgemeinerungen der Einfachheitsaussagen im Fall, daß R Körper ist.

Ist R dagegen der Ring ganzer Zahlen eines Zahlkörpers, so münden diese Betrachtungen in die Fragestellung des berühmten Kongruenzuntergruppenproblems, dessen Lösung für die SL_n angedeutet wird.

Die Kapitel 5 bis 9 behandeln analoge Fragestellungen für allgemeine unitäre Gruppen, die technisch erheblich komplizierter werden. Besonders hervorzuheben ist hier das sehr schöne und ausführliche Kapitel 7 über Clifford-Algebren und Spin-Gruppen.

Die Bibliographie ist mit mehr als 600 Titeln sehr umfassend.

Das Buch bietet also das aktuelle Wissen über klassische Gruppen vorwiegend aus der Perspektive des Zugangs über die „Steinberg-Präsentationen“ dar. Wie bei Dieudonné [4] werden die verschiedenen Gruppentypen fallweise betrachtet und einzeln diskutiert. Der vereinheitlichende Aspekt aus der Chevalleyschen Arbeit [5], der sich aus der Theorie der halbeinfachen Lie-Algebren ergibt, kommt hier nicht zum Tragen. Begriffe wie „Wurzelsystem“ oder „*B-N*-Paar“ alias „Tits-System“, die für die Theorie der linearen algebraischen Gruppen über Körpern und kommutativen Ringen ganz zentral sind, tauchen im Index nicht auf. Das ist natürlich keineswegs ein Nachteil oder gar Fehler, sondern eine methodisch sinnvolle und vernünftige Entscheidung der Autoren, zumal diese Beschränkung es andererseits erlaubt, die Klasse der zugelassenen Grundringe sehr weit zu wählen.

Das Buch ist – mit der angedeuteten Einschränkung – zweifellos eine umfassende Darstellung des heutigen Wissens über klassische Gruppen und wird in der einschlägigen Literatur einen wesentlichen Rang einnehmen.

Auf eine Besprechung durch R. Steinberg [10] sei hier hingewiesen.

Literatur

[1] Dickson, L.E.: Linear groups, B.G. Teubner, Leipzig 1901.
[2] v. d. Waerden, B.L.: Gruppen von linearen Transformationen, J. Springer, Berlin 1935.
[3] Weyl, H.: The Classical Groups, Princeton University Press, Princeton, NJ 1941.
[4] Dieudonné, J: La géometrie des groupes classiques, Springer-Verlag, Berlin 1955 und 1963.
[5] Chevalley, C.: Sur certain groupes simples, Tôhoku Math. J. **7** (1955) 14–66.
[6] Steinberg, R.: Géneratéurs, rélations et revêtements de groupes algébriques, Coloqu. Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles 1962), Paris 1962, 113–127.
[7] Bass, H.: Algebraic *K*-Theory, Benjamin, New York 1968.
[8] Milnor, J.:Introduction to Algebraic *K*-Theory, Ann. Math. Stud. 72, Princeton University Press, Princeton, NJ 1971.
[9] Suslin,A.A.: Algebraic *K*-Theory, J. Soviet Math. **28**, 6 (1985).
[10] Steinberg, R.: Book Review in: Bull. Am. Math. Soc. **23** (1990) 594–598.

Bielefeld U.Rehmann

Fomenko, A. T., Symplectic Geometry, New York u.a.: Gordon and Breach 1988, 388 S, $180,00

Der Verlag *Gordon and Breach* hat es sich mit seiner Reihe *Advanced Studies in Contemporary Mathematics* offensichtlich zur Aufgabe gemacht, die Arbeiten russischer Mathematiker auch im Westen zugänglich zu machen. Das ist an sich sehr positiv zu bewerten, aber man kann den Sinn eines solchen Unterfangens bezweifeln, wenn das Resultat derartig sorg- und lieblos zusammengestellt ist wie das hier zu besprechende Buch.

Um es vorweg zu sagen: es handelt sich bei dem vorliegenden Buch *nicht* um ein Lehrbuch über symplektische Geometrie und auch nicht um eine Monographie zu speziellen Aspekten der symplektischen Geometrie, die hier ausführlich dargestellt werden. Vielmehr hat man den Eindruck, daß es aus Aufzeichnungen zu den vom Autor in Moskau abgehaltenen Seminaren zusammengestellt wurde. Abgesehen vom ersten Kapitel, *Symplectic geometry in Euclidean space,* das sehr elementar gehalten ist, werden in diesem Buch in erster Linie neuere Resultate russischer Mathematiker vorgestellt, für deren Beweise in vielen Fällen auf die Originalliteratur verwiesen wird.

Ein erheblicher Teil der zitierten Literatur ist zumindest in den mir bekannten (westlichen) Universitätsbibliotheken nicht zu finden. Daher läßt sich das Buch allenfalls als Einführung in die Resultate bzw. als Zitatenquelle nutzen. Andererseits wird schon bei den Standardergebnissen der symplektischen Geometrie derart großzügig mit der Angabe (oder Nicht-Angabe) von Voraussetzungen umgegangen, daß ich mich nur ungern blind auf die zitierten Sätze verlassen würde. So wird zum Beispiel die Frage nach der Vollständigkeit zu integrierender Vektorfelder grundsätzlich ignoriert.

Es ist ein wohlbekanntes Problem, bei der Übersetzung russischer Texte den richtigen Artikel zu finden, und in vielen Übersetzungen russischer Mathematikbücher findet man sinnentstellende Fehler, die von der Verwechslung von bestimmtem und unbestimmtem Artikel herrühren. Das gilt auch für das vorliegende Buch. Leider ist darüber hinaus auch die Bezeichnungsweise uneinheitlich und schon gar nicht konform mit der im Westen üblichen (zum Beispiel ist G eine Lie-*Algebra* und $\mathfrak{G}$ eine Lie-*Gruppe*). Das mag daher kommen, daß der Text nicht als ganzes konzipiert wurde. So fällt zum Beispiel auf, daß Teile von Abschnitt 3.2, *Hamiltonian systems with noncommutative symmetries,* wörtlich aus dem Buch *Differential Geometry and Topology* (DGT) desselben Autors übernommen wurden. Das ist besonders ärgerlich, weil gewisse Teile bei der Übertragung ausgelassen wurden, so daß jetzt kommentarlos Aussagen im Text stehen (die Kommutativität der Lie Algebra $H\xi$ auf Seite 112), die anderswo mehr als einer Seite Beweis bedürfen (DGT, Proposition 20.7, Seite 270). Es bleibt an dieser Stelle anzumerken, daß das Literaturverzeichnis (121 Einträge) weder alphabetisch noch chronologisch noch sonst in irgendeiner Weise erkennbar geordnet ist.

Inhaltlich liegt der Schwerpunkt des Buches bei der Diskussion vollständig integrierbarer Hamiltonscher Systeme. Kapitel 3, *Hamiltonian systems with symmetries on symplectic manifolds,* ist in erster Linie Verallgemeinerungen des Satzes von Arnold-Liouville gewidmet, der die Lösungen eines Systems mit einer n-dimensionalen *abelschen* Lie-Algebra von Erhaltungsgrößen (Dimension des Systems: $2n$) beschreibt. Kapitel 4, *Geodesic flows on two dimensional Riemann surfaces,* beschäftigt sich mit der Frage, wann der geodätische Fluß auf einer zweidimensionalen riemannschen Mannifaltigkeit, den man in natürlicher Weise als Hamiltonsches System auf dem Kotangentialbündel auffassen kann, vollständig integrierbar ist, das heißt den Voraussetzungen des Satzes von Arnold-Liouville genügt. Im letzten Kapitel, *Effective methods of constructing completely integrable systems on Lie algebras,* präsentiert der Autor seine mit A. S. Mischchenko erzielten Ergebnisse über die Integrierbarkeit gewisser Systeme auf koadjungierten Bahnen halbeinfacher Lie-Algebren.

Das Studium vollständig integrierbarer hamiltonscher System hat eine lange Geschichte, und in den letzten fünfzehn Jahren wurden eine Reihe interessanter Querverbindungen zu den Korteweg-de Vries-Gleichungen, zu abelschen Varietäten und zur Darsellungstheorie von Lie-Algebren aufgedeckt (vgl. die unten aufgeführte Literatur). Das Thema hätte eine bessere Darstellung als die hier gegebene verdient.

Literatur

Adler, M.; van Moerbeke, P.: Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves. Advances Math. **38** (1980) 267–313

Bobenko, A.T.; Reyman, A.G.; Semenov Tian-Shansky, M.A.: The Kowalevski Top 99 years later: A Lax pair, generalizations and explicit solutions. Comm. Math. Phys. **122** (1989) 321–354

Dubrovin, B.A.; Matveev, V.B.; Novikov, S.P.: Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite band linear systems and Abelian varieties. Russian Math. Surveys **31** (1976) 59–146

Kostant, B.: The solution to a generalized Toda lattice and representation theory. Advances Math. **34** (1980) 193–338

Reyman, A.G.; Semenov-Tian-Shansky, M.A.: Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations I, II. Inventiones Math. **54** (1979) 81–100; **63** (1981) 433–465

Erlangen J. Hilgert

Lubinsky, D.S., Strong Asymptotics for Extremal Errors and Polynomials Associated with Erdös-type Weights (Pitman Research Notes in Mathematics Series), New York: Harlow: Longman Scientific & Technical, 1989, 265 S., pb. £ 17,00

In der Analysis und der mathematischen Physik sind die Hermiteschen Polynome H_n, $n=0, 1, \ldots$, wohlbekannt und auch ein häufig genutztes Hilfsmittel. Bei geeigneter Normierung sind sie minimal in der L^2-Norm auf $\mathbb{R}$ mit der Gewichtsfunktion

$$W(x) = e^{-x^2/2},$$

und sie genügen, was gleichbedeutend mit der L^2-Minimalität ist, der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^j H_n(x) W(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^j H_n(x) e^{-x^2/2} dx = 0 \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n-1.$$

In der neueren Theorie treten diese Polynome als Spezialfall umfassender Systeme von orthogonalen Polynomen auf. Eine nahe liegende Verallgemeinerung entsteht durch Betrachtung ganzer Klassen von Gewichtsfunktionen. Für die L^2-Norm auf $\mathbb{R}$ sind dies Gewichtsfunktionen von der Form

$$W(X) = e^{-Q(x)}, \qquad Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Es erweist sich als sinnvoll, hier zwei Klassen zu unterscheiden, nämlich die Gewichtsfunktionen vom Freudschen (Freud weights) und die Funktionen vom Erdös'schen Typ (Erdös weights).

Bei den Freud weights wird angenommen, daß Q eine gerade Funktion ist, die nahe Unendlich ein polynomiales Wachstum besitzt und darüber hinaus noch einigen Glattheitsbedingungen genügen muß. Die Gewichtsfunktion der Hermiteschen Polynome kann hier als ein Prototyp angesehen werden.

Bei den Erdös weights wird ebenfalls angenommen, daß Q eine gerade und hinreichend glatte Funktion ist, aber nahe Unendlich wird nun gefordert, daß Q schneller als jedes Polynom wächst. Als Prototypen für diese Klasse können Funktionen, wie

$$W(x) = e^{-\exp\{\log(A^2+x^2)\}^{\alpha}}, \quad \alpha > 1. \qquad \text{oder} \qquad e^{-\exp_k(|x|^{\alpha})}, \quad \alpha > 0, k \geqslant 1,$$

angesehen werden, wobei in der zweiten Funktion $\exp_k$ die k-mal iterierte Exponentialfunktion bezeichnen soll.

Im vorliegenden Buch wird das asymptotische Verhalten von Polynomen untersucht, die minimal sind bezüglich der L^p-Norm auf $\mathbb{R}$ mit einer Gewichtsfunktion von Erdös'schen Typ. Das Thema gehört also zur zweiten Klasse von Gewichtsfunktionen. Im einzelnen werden folgende Themen behandelt. Es wird das asymptotische Verhalten der Fehlergröße

$$E_{np}(W) = \min_{\deg(P)<n} \|\{x^n - P(x)\}W(x)\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ und $n \to \infty$ abgeschätzt. Das asymptotische Verhalten der minimalen Polynome selbst wird auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ für $1 < p \leqslant \infty$ und auf $\mathbb{R}$ für $1 < p < \infty$ untersucht.

Von allen möglichen L^p-Normen ist sicherlich die L^2-Norm wegen ihres Zusammenhangs mit der Orthogonalität bei den minimalen Polynomen die interessanteste. Für diese Norm wird das punktweise Verhalten der minimalen Polynome auf $\mathbb{R}$ für $n \to \infty$ studiert. Die gleichen Untersuchungen werden auch für die Christoffel Funktion durchgeführt. (Die Christoffel Funktion ist von fundamentaler Bedeutung in der Theorie der orthogonalen Polynome).

Als ein wichtiges Hilfsmittel in den Beweisen werden Ergebnisse der gewichteten Approximation von ganzen Funktionen durch Polynome bereitgestellt und neu entwickelt. Diesem Thema sind zwei Paragraphen des Buches gewidmet.

Das Buch ergänzt eine frühere Arbeit (D.S. Lubinsky & E.B. Saff: Strong Asymptotics for Extremal Polynomials Associated with Weights on $\mathbb{R}$, Lecture Notes in Mathematics 1305, Springer-Verlag), in der der Autor zusammen mit E.B. Saff die gleichen Fragestellungen für Freud weights untersucht hatte. Beide Bücher sollten im Zusammenhang gesehen werden. In gewissem Sinne ist das vorliegende Buch eine Ergänzung und auch ein Abschluß der früheren Untersuchungen. Einige offen gebliebene Fragen werden im Anhang des neuen Buchs wieder aufgegriffen und zu einem Abschluß gebracht. Beide Bücher zusammen geben einen Überblick über Ergebnisse, die in den letzten 15 Jahren im Zusammenhang mit Arbeiten zur sog. Freudschen Vermutung publiziert wurden. Diese Vermutung bezog sich in ihrer speziellen Form auf das Wachstum der größten Nullstelle der orthogonalen Polynome auf $\mathbb{R}$ mit einer Gewichstfunktion der Form $W(x) = \exp\{-|x|^{\lambda}\}$.

Bei dem hier zu besprechenden Buch handelt es sich um eine Forschungsmonographie. Alle Ergebnisse werden vollständig und in möglichst großer Allgemeinheit bewiesen. Dies scheint nur um den Preis sehr technischer Einzelbetrachtungen möglich zu sein. Die Abhandlung ist dadurch nicht leicht zugänglich und fordert vom Leser einigen Durchhaltewillen. Ob man dies durch eine andere Organisation der technischen Hilfsmittel hätte vermeiden, oder doch wenigstens spürbar mildern können, läßt sich nicht einfach entscheiden. Aber eine einfacher zugängliche Darstellung, vielleicht unter spezielleren Annahmen, wäre wünschenswert. Etwas relativiert wird diese Kritik durch den zweiten Paragraphen des Buches, in dem ein Überblick über die wichtigsten Ergebnisse gegeben wird, und von dem auch der Leser etwas hat, der sich nicht der Mühe eines vollständigen Studiums aller Beweise unterziehen will.

Berlin H. Stahl

Dacorogna, B., Direct Methods in the Calculus of Variations (Applied Mathematical Sciences, Vol. 78), Berlin u.a.: Springer-Verlag 1989, 10 figs., 308 S., DM 120,–

Die direkten Methoden der Variationsrechnung zielen darauf ab, den Nachweis der Existenz eines *absoluten* Minimums eines Variationsintegrals auf einer gegebenen Menge von Vergleichsfunktionen zu führen, im Unterschied etwa zu Minimax- und morsetheoretischen Methoden, mit denen man vor allem Nichtminima erfassen will. Die in der vorliegenden Monographie betrachteten Variationsintegrale sind, wie üblich, von der Form

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x))dx,$$

wobei Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet und die Variable u für eine Abbildung $u:\Omega \to \mathbb{R}^m$ steht, die zu einem Sobolev-Raum $W^{1,p}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ gehört. Auf grund des Satzes von Banach-Alaoglu reduziert sich der Nachweis der Annahme des Minimums von I auf einer schwach abgeschlossenen Teilmenge von $W^{1,p}$ (jedenfalls für $1 < p < +\infty$) auf die folgenden beiden Schritte: erstens den Nachweis, daß eine Minimalfolge normbeschränkt ist und zweitens den Nachweis der Unterhalbstetigkeit von I bezüglich schwacher Konvergenz in $W^{1,p}$. Während der erste Schritt meist auf triviale Weise dadurch erledigt wird, daß man geeignete Wachstumsbedingungen an f fordert, welche die Koerzivität von I sicherstellen (d. h. $I(u) \to +\infty$ falls $\| u \| \to +\infty$), hat sich zur Frage, wie sich die Unterhalbstetigkeit von I aus Eigenschaften der Funktion f ablesen läßt, eine nichttriviale Theorie entwickelt. Die Darstellung dieser Theorie bildet das wesentliche Anliegen des Buches von Dacorogna. Es ist seit langem bekannt, daß die Konvexität von f bezüglich der dritten Variablen (also ∇u) jedenfalls hinreichend für die schwache Unterhalbstetigkeit von I ist. Es zeigt sich jedoch, daß die Konvexitätsforderung außer im „skalaren" Fall $m = 1$ oder $n = 1$ viel zu stark ist und wichtige Anwendungen ausschließen würde. Aus diesem Grunde sind verschiedene abgeschwächte Konvexitätsbegriffe entwickelt worden, s.u. Die logische Relation dieser Konvexitätsbegriffe untereinander, sowie ihr Hinreichen bzw. ihre Notwendigkeit für die schwache Unterhalbstetigkeit des zugehörigen Variationsintegrals werden von Dacorogna nach dem heutigen Stand der Forschung, an welcher er einen wichtigen Anteil hatte, auf erschöpfende Weise diskutiert. Nun zum Aufbau und Inhalt des Buches im einzelnen.

In Kapitel I wird eine sehr knappe, aber vollkommen verständliche Zusammenfassung der Hauptergebnisse gebracht. Kapitel II skizziert den notwendigen funktionalanalytischen Hintergrund. Kapitel III ist vor allem dem skalaren Fall ($m = 1$ oder $n = 1$) gewidmet. Die Hauptergebnisse lauten hier: Ist I konvex, so ist $f(x, u,.)$ konvex und: I ist genau dann schwach unterhalbstetig, wenn $f(x, u,.)$ konvex ist. Bei der Herleitung der Konvexität von f aus der Unterhalbstetigkeit von I kommt die von Morrey eingeführte *Quasikonvexität* ins Spiel: die Funktion $f = f(\nabla u)$ heißt quasikonvex, wenn jede lineare Abbildung $\bar{u}$ für das zugehörige I minimierend ist in der Klasse aller Vergleichsabbildungen, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω mit $\bar{u}$ übereinstimmen. Allgemein (d. h. für beliebiges m und n) folgt nun aus der Unterhalbstetigkeit von I die Quasikonvexität von $f(x, u,.)$; nur im Falle $m = 1$ oder $n = 1$ kann aus der Quasikonvexität von f die Konvexität geschlossen werden. Leider verfehlt der Beweis der letzten Implikation in Theorem 3.1 vollkommen die Pointe: die entscheidende Voraussetzung $m = 1$ oder $n = 1$ wird nicht erkennbar benutzt. Der zentrale Teil des Buches ist Kapitel IV, welches dem „vektoriellen" Fall gewidmet ist, d. h. $m > 1$ und $n > 1$. Hier kommt als weiterer Konvexitätsbegriff zunächst die von Ball eingeführte *Polykonvexität* hinzu: die Funktion $f = f(\nabla u)$ heißt polykonvex, wenn sie eine konvexe Funktion aller Minoren der Matrix ∇u ist. Des weiteren wird die *Rang-1-Konvexität* eingeführt: sie besagt, daß f konvex ist auf der Verbindungsgeraden von je zwei Matrizen, deren Differenz höchstens den Rang 1 hat. Die Hauptergebnisse des Kapitels lassen sich wie folgt zusammenfassen: Die Begriffe konvex, polykonvex, quasikonvex, Rang-1-konvex bilden eine aufsteigende Kette; die Quasikonvexität von f ist (unter Zusatzbedingungen) äquivalent zur schwachen Unterhalbstetigkeit von I; die Rang-1-Konvexität ist äquivalent zur Ellilptizität der Euler-Lagrange-Gleichungen. Im skalaren Fall sind die genannten Konvexitätsbegriffe identisch. Das fünfte Kapitel behandelt nichtkonvexe Integranden und die „Relaxation" der entsprechenden Variationsprobleme. Hierbei wird der nichtkonvexe Integrand durch seine untere quasikonvexe Hülle ersetzt. Unter gewissen Bedingungen kann gezeigt werden, daß relaxiertes und ursprüngliches Integral das gleich Infinum besitzen. In einem Anhang werden schließlilch Anwendungen auf Elastizitätstheorie und optimales Design besprochen.

Das Werk bietet eine umfassende Darstellung eines grundlegenden Teilaspekts der Variationsrechnung. Die Beweise sind – bis auf die oben erwähnte Ausnahme – sorgfältig ausgearbeitet. Den sprachlichen Stil hat der Referent als recht hölzern empfunden; auch werden direkte Spezialfälle gelegentlich unnötig bereit ausgeführt. Positiv hervorzuheben ist das umfangreiche und interessante Beispielmaterial. Für alle an Theorie und Anwendung der Variationsrechnung Interessierten stellt das Werk von B. Dacorogna eine wenn nicht vergnügliche so doch außerordentlich gewinnbringende Lektüre dar.

Heidelberg F. Tomi

Krasnosel'skij M. A., Lifshits Je. A., Sobolev A. V., Positive Linear Systems (The Method of Positive Operators), Berlin: Heldermann Verlag 1989, 354 S., Softcover, DM 88,–

Der Begriff der Positivität läßt sich von einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einen (linearen oder nichtlinearen) Operator $A: X \to Y$ (X, Y reelle lineare Räume) auf verschiedene Art und Weise übertragen. Am bekanntesten und für Anwendungen nützlichsten sind die folgenden beiden Methoden: Entweder man nimmt an, daß Y der Dualraum X^* von X bezüglich einer Dualität $\langle .,. \rangle$ ist, und fordert, daß $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ für alle $x \in X$ gilt. Oder man zeichnet in X und Y zwei Kegel K_X und K_Y „positiver Elemente" aus und fordert, daß $A(K_X) \subseteq K_Y$ gilt. Das vorliegende Buch hat ausschließlich die zweite Definition der Positivität zum Gegenstand, und zwar in erster Linie für lineare Operatoren A. Standardbeispiele für X und Y sind der Euklidische Raum $\mathbb{R}^N$ (mit dem Kegel aller Vektoren mit nichtnegativen Komponenten), Folgenräume wie l_p, l_∞, c usw. (mit dem Kegel aller Folgen mit nichtnegativen Folgengliedern), oder Funktionenräume wie L_p, L_∞, C usw. (mit dem Kegel aller [fast überall] nichtnegativen Funktionen). Zugehörige Standardbeispiele für positive lineare Operatoren A sind entsprechend $N \times N$-Matrizen mit nichtnegativen Einträgen, unendliche Matrizen mit nichtnegativen Elementen, oder Integraloperatoren mit nichtnegativen Kernfunktionen.

Vom ersten Autor ist das Buch „Positive Solutions of Operator Equations" (Moskau: Fizmatgiz 1962 bzw. Groningen: Noordhoff 1964) bekannt, welches ein Klassiker auf dem Gebiet der Nichtlinearen Analysis positiver Operatoren geworden ist. Das vorliegende Werk ist nicht – wie man vermuten könnte – ein „update" dieses Buches, sondern erweist sich als eine Quelle vieler neuer interessanter Beiträge, die bisher nur in Zeitschriften (meist sowjetischer Autoren) erschienen sind. Es ist ein großes Verdienst der Autoren, diese Beiträge erstmals in Monographieform einem breiteren Publikum zugänglich gemacht zu haben.

Das Buch besteht aus 4 Kapiteln annähernd gleicher Länge. Im ersten Kapitel wird systematisch die Theorie normierter Räume mit Kegeln und positiver linearer Operatoren und Funktionale entwickelt. Hier sind die Überlappungen mit dem oben erwähnten Standardwerk Krasnosel'skijs aus den Sechziger Jahren am größten. Andererseits werden bekannte Resultate in neuer Form vorgestellt; dem Rezensenten gefiel hier besonders die originelle und elegante Herleitung der Fundamentalsätze der Linearen Analysis (open mapping, closed graph, uniform boundedness usw.) über den Begriff der „idealkonvexen Menge".

Wesentliches Neuland betreten die Autoren in den Kapiteln 2, 3 und 4, die ausschließlich Anwendungen gewidmet sind. Das zweite Kapitel („Applications to spectral properties") behandelt zunächst sowohl klassische Ergebnisse über Eigenwerte und Eigenvektoren (Perron, Jentzsch, Krejn, Rutman) als auch neue Klassen positiver linearer Operatoren, die sich durch geometrische Eigenschaften auszeichnen. Als Beispiel seien hier die „fokussierenden" Operatoren A genannt, für die die sogenannte Fokussierungskonstante

$$\chi(A) = \sup\{\theta^{1/2}(Ax, Ay)\colon x, y, \in K; Ax, Ay \neq 0\}$$

$$\text{mit} \qquad \theta(u,v) := \frac{\inf\{t\colon tu - v \in K\}}{\sup\{t\colon v - tu \in K\}}$$

endlich ist. Große Aufmerksamkeit wird der Struktur des Spektrums eines Operators A geschenkt, in erster Linie seiner Aufteilung in den „führenden" (einfachen) Eigenwert $\lambda_0 = r(A)$ (= Spektralradius von A) und das Restspektrum $\sigma(A) \quad \{\lambda_0\}$ im Kreis $|\lambda| \leqslant q\lambda_0$, wobei das kleinste hier mögliche $q \leqslant 1$ als „Spektralspanne" $q(A)$ bezeichnet wird. In vielen Anwendungen tritt der typische Effekt auf, daß allein λ_0 (der „Leithammel") das Lösungs- und Stabilitätsverhalten linearer Gleichungen bestimmt, während $\sigma(A) \quad \{\lambda_0\}$ (die „Schafherde") keinen oder wenig Einfluß hierauf hat, besonders im Falle $q(A) \ll 1$. Andererseits trifft man oft auch auf Operatoren A, die gleich mehrere Eigenwerte λ auf dem „Spektralrand" $|\lambda| = r(A)$ besitzen; diese Eigenwerte sind dann erstaunlicherweise stets von der Form $\lambda = \varepsilon r(A)$ mit einer ganzen Einheitswurzel ε!

Kapitel 3 („Applications to iteration procedures") befaßt sich in weiten Teilen sowohl mit Konvergenzbedingungen als auch mit Abschätzungen für die Konvergenzgeschwindigkeit. Eine sehr erfolgreiche Idee besteht hier darin, einem Operator A gewisse numerische Charakteristiken zuzuordnen (Beispiel: Spektralradius $r(A)$, Spektralspanne $q(A)$, Fokussierungskonstante $\chi(A)$ usw.), Abschätzungen oder sogar explizite Formeln für diese Charakteristiken zu finden, und Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit von Iterationsverfahren mittels dieser Charakteristiken zu treffen. Hierdurch werden qualitative Ergebnisse durch quantitative ergänzt, die ja besonders die Numeriker erfreuen. Eine weitere Rolle spielen äquivalente Umformungen, die „unangenehme" in „angenehme" Gleichungen überführen. Spezifische Verfahren dieser Art sind mit den Namen Seidel-Nekrasov, Razumihin, Sokolov, Mamedov und Stetsenko verbunden. Im letzten Abschnitt des dritten Kapitels studieren die Autoren noch Folgen von Operatoren und Funktionalen.

Am interessantesten erschien dem Rezensenten das abschließende Kapitel 4 („Other applications"). Zum einen werden hier weitere innermathematische Anwendungen behandelt, etwa die Rolle positiver Operatoren für Randwertprobleme gewöhnlicher und elliptischer Differentialgleichungen, die positive Invertierbarkeit von Operatoren (und speziell Matrizen) aus einem „Ordnungsintervall" $[A, B] := \{C : A \leqslant C \leqslant B\}$, oder Kriterien für die (absolute) Stabilität von Systemen mit diskreten oder kontinuierlichen Zeitabläufen. Zum anderen diskutieren die Autoren ausführlich Anwendungen auf mechanische Probleme, wie z. B. die sogenannte „Impuls-Frequenz-Charakteristik" eines periodisch angeregten Systems. Es ist zu vermuten daß dieses Gebiet noch eine reiche Quelle weiterer interessanter Forschung sein wird. Das vierte Kapitel enthält auch – in Abweichung vom Titel des Buches – einige Abschnitte, in denen wichtige Aspekte nichtlinearer positiver Operatoren behandelt werden. Dies bezieht sich sowohl auf anwendungsorientierte Aspekte (erzwungene periodische Schwingungen in nichtlinearen Systemen, die Methode der „harmonischen Ausbalancierung" durch trigonometrische Polynome usw.) als auch theoretische Aspekte (Fixpunktsätze für positive nichtlineare Operatoren, Verzweigungen in parameterabhängigen Problemen usw.). Bemerkenswerterweise wird ja der („lineare") Perronsche Satz über die Existenz eines positiven Eigenvektors u mit $Au = r(A)u$ für eine positive Matrix A am einfachsten mit Hilfe des („nichtlinearen") Brouwerschen Fixpunktsatzes bewiesen.

Den Autoren des Buches ist es gelungen, eine Fülle interessanter, ja teilweise faszinierender Ergebnisse vorzustellen, ohne auf die Klarheit und Einfachheit der Sprache zu verzichten. Aus diesem Grund ist das Buch keineswegs nur für Spezialisten geeignet, sondern auch (beispielsweise) als Grundlage für studentische Seminare oder Examensarbeiten. Es ist zu hoffen, daß es eine entsprechend große Verbreitung erfährt.

Würzburg J. Appell

Zeidler, E., Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part II/A: Linear Monotone Operators, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 114 figs., 1200 pp., Hardcover, DM 244,–, Part II/B: Nonlinear Monotone Operators, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1989, 62 figs., 760pp., Hardcover, DM 264,–

Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende stetige Funktion mit

$$\lim_{u \to \pm\infty} f(u) = \pm\infty,$$

so hat die Gleichung $f(u) = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in \mathbb{R}$. Für festes b ist die Menge aller Lösungen beschränkt und konvex (also ein Intervall), und einpunktig, falls f sogar streng monoton steigend ist. Ist insbesondere $b = 0$ und $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, so ist $f = \varphi'$ genau dann monoton steigend, wenn φ konvex ist; die Nullstellen von f sind dann die Minima von φ.

Dieses jedem Studenten im ersten Semester geläufige Ergebnis bildet schon die Grundlage eines wichtigen Teils der Theorie monotoner Operatoren in Banachräumen. Eine allgemeine Fassung dieses Ergebnisses (Minty 1963) lautet beispielsweise so: Ist X ein reeller reflexiver Banachraum, $A\colon x \to X^*$ monoton (d. h. $\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant 0$), hemistetig (d. h. $\mapsto \langle A(u + tv), w\rangle$ ist stetig auf $[0, 1]$), und koerzitiv (d. h.

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \|u\|^{-1} \langle Au, u\rangle = \infty),$$

so hat die Gleichung $Au = b$ für jedes $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$. Für festes b ist die Menge aller Lösungen beschränkt und konvex, und einpunktig, falls A sogar streng monoton ist (d. h. $\langle Au - Av,\ u - v\rangle > 0$ für $u \neq v$). Ist insbesondere $b = 0$ und $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ ein Gâteaux-differenzierbares Funktional, so ist $A = \Phi'$ genau dann monoton, wenn Φ konvex ist; die Nullstellen von A sind dann die Minima von Φ.

Schon im Fall eines linearen Operators A wird die Tragweite dieses Ergebnisses klar, wenn man etwa für X einen Sobolevraum W_p^m und für A einen elliptischen Differentialoperator der Ordnung $2m$ wählt: In diesem Fall ist die Monotoniebedingung nämlich im wesentlichen eine Elliptizitätsbedingung, und die Koerzitivitätsbedingung im wesentlichen eine Wachstumsbedingung an den Hauptteil von A. Typische Beispiele für $m = 1$ sind der Laplace-Operator $Au = -\Delta u$ und sein quasilineares Analogon $Au = -[D_1(|D_1 u|^{p-2} D_1 u) + \ldots + D_N(|D_N u|^{p-2} D_N u)]$, wobei $1 < p < \infty$ sein darf.

Diese einfachen Bemerkungen sind weit davon entfernt, der Vielfalt des vorliegenden zweibändigen Werkes gerecht zu werden, welches auf fast 1200 Seiten einen umfassenden Einblick in die Theorie und die Anwendungen monotoner Operatoren gibt. Ein solches Werk kann man natürlich nicht „lesen" (im Sinne des englischen „armchair reading"), sondern man kann (und sollte) es „benutzen". Hieraus hat auch der Autor die Konsequenz gezogen, auf den ersten Seiten jedes der zwei Bände einen kompakten Überblick über die fundamentalen Ideen zu geben. Im folgenden soll versucht werden, einige der behandelten Themen ohne Anspruch auf Vollständigkeit vorzustellen.

Da der hier nicht zu besprechende Band I (Fixpunktsätze) 17 Kapitel enthält, beginnt der vorliegende Band II/A mit Kapitel 18. Hier werden die funktionalanalytischen Grundlagen für die Behandlung einiger Variationsprobleme gelegt, in erster Linie Hilberträume und quadratische Funktionale, aber auch theoretisch-numerische Aspekte wie das Ritzsche Verfahren. Schon dieses Kapitel enthält wie auch später eine gute Einführung in die historische Entwicklung, die verbunden ist mit den Namen Dirichlet, Poincaré, Hilbert, Friedrichs und Weyl. Kapitel 19 ist der Friedrichs-Fortsetzung eines symmetrischen Operators gewidmet, zusammen mit Anwendungen auf Eigenwertprobleme und die Halbgruppentheorie für Evolutionsgleichungen. Für die drei Standardklassen partieller Differentialgleichungen wird das Galjorkinverfahren vorgestellt, welches überhaupt im ganzen Buch große Aufmerksamkeit erfährt. Beziehungen zwischen Stabilität und

Konvergenz von Differenzenverfahren werden in Kapitel 20 diskutiert und auf gewöhnliche sowie elliptische partielle Differentialgleichungen angewandt. Damit sind alle für das Weitere notwendigen Grundlagen der (linearen) Theorie zusammengestellt.

Die folgenden Kapitel 21 bis 24 beinhalten Theorie und Anwendungen linearer monotoner Operatoren, also den eigentlichen Gegenstand des Bandes II/A. Das schon erwähnte Galjorkinverfahren wird vom allgemeinen operatortheoretischen Standpunkt aus umfassend in Kapitel 21 abgehandelt. Insbesondere gehören hierzu sowohl abstrakte Begriffe wie Dualität, schwache Konvergenz, Fredholmtheorie, Approximations- und Iterationsverfahren, als auch konkrete Begriffe wie Sobolevräume, Einbettungssätze und Interpolationsungleichungen. Die verbleibenden drei Kapitel sind Anwendungen der Hilbertraum- und Operatortheorie auf elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen gewidmet. Einerseits werden hier die üblichen Besonderheiten diskutiert, die jedem dieser Gleichungstypen innewohnen; andererseits wird gezeigt, wie die Theorie der monotonen Operatoren für alle Gleichungen neue Ergebnisse liefert oder klassische Ergebnisse auf eine präzise Grundlage stellt. Schon hier wird wie ein roter Faden die Erkenntnis sichtbar, daß die Bedeutung monotoner Operatoren weit auch in die nichtlineare Theorie hineinreicht.

Theorie und Anwendungen nichtlinearer monotoner Operatoren sind der Gegenstand des Bandes II/B, der – aufgrund der Gesamtkonzeption der fünf Bände nicht verwunderlich – noch detaillierter ausgefallen ist als der „lineare" Band II/A.

Kapitel 25 behandelt stark monotone Operatoren und ihren Zusammenhang mit Lipschitz-stetigen Operatoren, Projektions- und Iterationsverfahren, und monotone sowie pseudomonotone Potentialoperatoren. Hierher gehören im wesentlichen die am Anfang erwähnten Ergebnisse über monotone Operatoren mit konvexem Potential, die einen schönen Eindruck vom „Zusammenspiel" von Monotoniemethoden und Variationsmethoden geben. Die folgenden beiden Kapitel sind Anwendungen monotoner bzw. pseudomonotoner Operatoren auf quasilineare elliptische Differentialgleichungen gewidmet. Hier feiert die Theorie monotoner Operatoren ihre größte Triumphe, da topologische Methoden wegen der Nichtkompaktheit der auftretenden Operatoren in weiten Teilen versagen. (Terme niedriger Ableitungsordnung geben natürlich „vom Hauptteil aus gesehen" Anlaß zu kompakten Operatoren; dies ist gerade der Ausgangspunkt der Theorie pseudomonotoner Operatoren.)

Ein dankbares Anwendungsgebiet topologischer Methoden der nichtlinearen Analysis sind – gerade wegen ihrer Kompaktheit – bekanntlich nichtlineare Integraloperatoren. Daß auch Monotoniemethoden erfolgreich etwa auf Hammersteinsche Gleichungen angewandt werden können, zeigt Kapitel 28. Das anschließende Kapitel behandelt weiterführende Themen wie nichtlineare Fredholm-Alternativen, lokal monotone Operatoren, Koinzidenz-Abbildungsgrad, Stabilität, Verzweigungstheorie, und Anwendungen auf Landesman-Lazer- („Resonanz"-) Probleme, Multiplizitätssätze und Probleme der Mechanik.

Soweit werden in Band II/B ausschließlich stationäre Probleme behandelt; die folgenden Kapitel 30 bis 33 sind dagegen nichtstationären (d. h. evolutiven) Prozessen gewidmet. Ein zentraler Begriff ist hier der der „maximalen" Monotonie, der eigentlich in die Theorie mengenwertiger Abbildungen gehört und auf H. Brézis zurückgeht. Die Anwendungen reichen von großen Klassen von Evolutionsgleichungen über Variationsungleichungen bis zu Hammersteinschen Integralgleichungen; entsprechend umfangreich (80 Seiten) ist das zugehörige Kapitel 32. Die Ergebnisse dieses und des folgenden Kapitels (über Evolutionsgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen auf „Viskositätslösungen" allgemeiner Hamilton-Jacobi-Gleichungen) basieren insbesondere auf Galjorkinverfahren und Regularisierungsmethoden. Spezielle Klassen von Operatoren (wie winkelbeschränkte oder 3-monotone Operatoren) werden ebenfalls behandelt.

Die verbleibenden drei Kapitel widmen sich allgemeinen Diskretisierungsverfahren und ihren Anwendungen. Der operatortheoretische Standpunkt führt in natürlicher Weise auf sogenannte A-eigentliche Abbildungen (im Sinne von W. V. Petryshyn). Bekanntlich ist der topologische Abbildungsgrad eines A-eigentlichen Operators nicht mehr eine ganze Zahl, sondern eine Menge ganzer Zahlen, teilt aber viele Eigenschaften bei entsprechender Formulierung mit dem Leray-Schauder-Grad. Mit der Diskussion dieser Theorie findet Band II/B seinen Abschluß.

Der Autor hat sich seine Aufgabe sehr schwer gemacht, und damit dem Leser sehr angenehm. Trotz des riesigen Umfangs des bereitgestellten Materials wird man nirgends von technischen Komplikationen entmutigt; die grundlegenden Ideen werden dem Leser vielmehr durchweg in vorbildlich klarer Sprache „schmackhaft gemacht". Dies wird auch dadurch belegt, daß der Autor – über die eingangs erwähnte Kompaktdarstellung der Grundideen zu Beginn jedes Bandes hinaus – am Schluß noch eine Liste der wichtigsten Hauptsätze sowie einen „Stammbaum" der wichtigsten Beziehungen zwischen Theorie und Anwendung anbietet. Diese ermöglicht gerade dem Nichtfachmann eine gute Orientierung. Auch die äußere Gestaltung der beiden Bände läßt keine Wünsche offen; dem Rezensenten ist es trotz ehrgeiziger Suche nicht gelungen einen Druckfehler zu entdecken.

Es gibt inzwischen eine Vielzahl von Lehrbüchern und Monographien über Nichtlineare Funktionalanalysis; nur wenige sind so fachkundig und klar geschrieben wie dieses. Gegenüber den „Fingerübungen" desselben Autors in Form der vor 10 Jahren erschienenen deutschen Ausgabe stellt sich die vorliegende wesentlich weiterentwickelte englische Ausgabe als ein Gesamtkunstwerk dar, welches den Vergleich mit Dunford-Schwartz' „Linear Operators", Hörmanders „Differential Operators", oder Bachs „Kunst der Fuge" nicht zu scheuen braucht.

Würzburg J. Appell

Nürnberger, G., Approximation by Spline Functions, Berlin u. a.: Springer Verlag 1989, 243 S., DM 74,–

Ein fundamentales Problem in der angewandten Mathematik ist die Approximation von Funktionen, die explizit gegeben oder Lösungen von Operationsgleichungen sind. Die zur Approximation verwendeten Funktionen sollen einerseits gute Näherungen liefern, andererseits aber leicht berechenbar sein. Eine ganz zentrale Rolle haben bisher Räume von Polynomen P_m gespielt, wobei P_m der lineare Raum der Polynome bis zum Grad m ist. Obwohl Polynome viele günstige Eigenschaften besitzen, liefern sie keine guten Approximationen an Funktionen, die nicht glatt sind. Daher hat man sich in den letzten beiden Jahrzehnten sehr intensiv mit einer neuen Klasse von Funktionen beschäftigt. Das Approximationsintervall $[a, b]$ wird unterteilt und man arbeitet mit Polynomen auf den Teilintervallen. Da die entstehenden Funktionen auch differenzierbar sein sollen, führt dies auf folgende Räume

$$S_m(x_1, \ldots, x_k) = \{s \in C^{m-1}[a, b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_m,\ i = 0, \ldots, k\}.$$

Sie werden Räume von polynomialen Splinefunktionen vom Grad m zu den k Knoten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k x_{k+1} = b$ genannt. Diese Funktionen besitzen wesentlich bessere Approximationseigenschaften an nichtglatte Funktionen.

Das vorliegende Buch beschäftigt sich nun mit der Approximation durch Splinefunktionen. Es ist in zwei Kapitel unterteilt. Räume von Polynomen sind Prototypen für sog. Tschebyscheffräume, während Räume von Splinefunktionen Prototypen für schwach tschebyscheffsche Räume sind. In Kapitel I werden Tschebyscheffräume untersucht, während Kapitel II zunächst schwach tschebyscheffsche Räume betrachtet. All diese Ergebnisse haben vorbereitenden Charakter für die Behandlung der Approximationstheorie durch Splinefunktionen, die dann in Kapitel II erfolgt. In einem Anhang wird auf die neuesten Entwicklungen in der Forschung eingegangen.

Kapitel 1 beginnt mit der Untersuchung von Lagrange- bzw. Hermite-Interpolation durch Tschebyscheff- und erweiterte Tschebyscheffräume. Dann werden Methoden zur numerischen Lösung von Hermite-Interpolationsproblemen angegeben. Dazu benötigt man dividierte Differenzen, die auch im weiteren Verlauf noch eine große Rolle spielen. Außerdem wurden Fehlerdarstellungen für Polynominterpolation untersucht. Schließlich wird auf Ergebnisse hingewiesen, die aufzeigen, daß Interpolation in den sog. Tschebyscheff-Punkten „fast optimal" ist. Interpolation ist eine einfache Möglichkeit, um Funktionen näherungsweise darzustellen. Es ist aber auch natürlich, diejenigen Funktionen zu betrachten, die eine beste Approximation aus einem endlich dimensionalen Unterraum in einer bestimmten Norm an die vorgegebene Funktion sind. Zunächst sind elementare Aussagen über beste Approximationen in linearen Räumen angegeben. Dann wird beste Approximation durch Tschebyscheffräume in der L_∞-Norm (gleichmäßige Approximation) betrachtet. Insbesondere werden Charakterisierungssätze und Aussagen über (starke) Eindeutigkeit untersucht. Schließlich wird ein Algorithmus zur numerischen Berechnung der besten Approximationen angegeben. Die gleichen Überlegungen kann man auch für beste L_1-Approximation durchführen. Hier ergibt sich unter anderem, daß für spezielle Funktionenklassen das Approximationsproblem durch ein Interpolationsproblem zu lösen ist. Schließlich ist die beste einseitige L_1-Approximation von Interesse, da sie mit anderen Problemen in enger Beziehung steht. Es werden Gaußsche Quadraturformeln für Tschebyscheffräume betrachtet und die Existenz und Eindeutigkeit solcher Formeln mit Hilfe von Aussagen über beste Approximation gezeigt. Schließlich ist noch die L_2-Approximation erwähnt.

Kapitel 2 behandelt nun das eigentliche Thema dieses Buches. Es wird Interpolation und Approximation durch Räume von Splinefunktionen betrachtet. Räume von Splinefunktionen sind das wichtigste Beispiel für die Klasse von schwach tschebyscheffschen Räumen. Ein fundamentales Ergebnis sagt aus, daß schwach tschebyscheffsche Räume durch Tschebyscheffräume approximiert werden können. Deshalb übertragen sich einige Eigenschaften von Tschebyscheffräumen auf schwach tschebyscheffsche Räume. Es bestehen aber auch viele ganz wesentliche Unterschiede.

Nach einführenden Bemerkungen über Eigenschaften von schwach tschebyscheffschen Räumen wird beste gleichmäßige Approximation durch diese Räume untersucht. Es werden Ergebnisse über stark eindeutige Approximationen und Charakterisierungssätze durch Alternanteneigenschaften angegeben. In Räumen von Splinefunktionen spielen die sog. *B*-splines als Basisfunktionen eine fundamentale Rolle. *B*-splines sind Funktionen mit einem möglichst kleinen Träger, deren Funktionswerte durch Rekursionsformeln stabil berechnet werden können. Diese Eigenschaften begründen ihre große Bedeutung. Im Gegensatz zur polynomialen Interpolation ist Interpolation durch Splinefunktionen bei beliebiger Vorgabe von Interpolationspunktmengen nicht immer möglich. Es wird eine vollständige Charakterisierung von denjenigen Punktmengen gegeben, für die das Hermite-Interpolationsproblem eine eindeutige Lösung hat. Außerdem besitzen interpolierende Splinefunktionen gewisse Optimalitätseigenschaften. Schließlich wird Quasi-Interpolation diskutiert. Das Problem der besten gleichmäßigen Approximation durch Splinefunktionen mit festen Knoten ist in den letzten Jahren vollständig geklärt worden. Die Aussagen über die Charakterisierung, Eindeutigkeit und starke Eindeutigkeit von besten Approximationen werden ausführlich untersucht. Außerdem wird ein Algorithmus zur Berechnung von Approximationen angegeben. Es wird auch ein Algorithmus beschrieben, der beste stückweise polynomiale Approximationen für den Fall variabler Knoten berechnet. Der

Operator der besten Approximation – die sog. metrische Projektion – ist i.a. eine mengenwertige Abbildung. Es sind verschiedene Stetigkeitskonzepte für die Approximation durch Splinefunktionen angegeben. Außerdem wird die beste L_1-Approximation durch schwach tschebyscheffsche Räume unter besonderer Berücksichtigung der Splinefunktionen betrachtet. Jede beste L_1-Approximation aus einem Splineraum an eine stetige Funktion ist eindeutig. Für spezielle Funktionen ist die beste Approximation durch ein Interpolationsproblem zu bestimmen. Ähnliche Aussagen gelten auch für beste einseitige L_1-Approximationen. Aber hier besteht noch ein Zusammenhang zu Quadraturformeln vom Gaußschen Typ. Ergebnisse über die Existenz von eindeutig bestimmten Gaußschen Quadraturformeln bzgl. schwach tschebyscheffscher Räume sind abgeleitet. Schließlich wird am Ende von Kapitel II noch die Approximation linearer Funktionale in Räumen von stetigen Funktionen durch Linearkombinationen von Punktfunktionalen diskutiert. Es werden solche Approximationen betrachtet, die einen minimalen Fehler bezüglich gewisser Klassen von differenzierbaren Funktionen besitzen. Die Koeffizienten dieser Funktionale kann man durch Anwendung des Funktionals auf spezielle Splinefunktionen gewinnen.

Mit der Theorie der Splinefunktionen haben sich in den letzten Jahren sehr viele Autoren beschäftigt. In einem Anhang wird noch auf diese Entwicklung eingegangen. Eine kurze Einführung zu Splinefunktionen mit freien Knoten, Splinefunktionen in zwei Variablen und die Anwendung von Splinefunktionen zur Lösung von Differentialgleichungen ist angegeben. Besonders die Theorie der Splinefunktionen in zwei Variablen ist – auch durch ihre Anwendbarkeit in Computer Aided Design – besonders wichtig geworden. Es werden die grundlegenden Definitionen und einige typische Ergebnisse ohne Beweis vorgestellt. Zahlreiche Hinweise auf die Literatur – insbesondere auf Übersichtsartikel – ergänzen dieses Kapitel.

Das vorliegende Buch behandelt die Interpolation und vor allem beste Approximation durch Splinefunktionen. Es handelt sich um ein sehr interessantes Teilgebiet in der Theorie der Splinefunktionen. Um das Material übersichtlich zu gestalten, beschränkt sich die Darstellung im wesentlichen auf polynomiale Splinefunktionen mit einfachen Knoten. Während die Ergebnisse von Kapitel I überwiegend klassisch sind, wurden viele Ergebnisse von Kapitel II erst kürzlich gewonnen und sind noch in keiner Monographie enthalten. Es ist das Verdienst des Autors diese Resultate in einheitlicher Form darzustellen. Der Aufbau des Buches ist übersichtlich und die Beweise sind sehr klar geschrieben. Die ersten Paragraphen über Splinefunktionen eignen sich daher bestens als Einführung in diese Theorie. Die Resultate über beste Approximation durch Splinefunktionen können dem interessierten Forscher als sehr wertvolle Hilfe dienen. Die im Anhang angesprochenen Ergebnisse sind für den Einstieg in die Originalliteratur nützlich. Insgesamt ist die vorliegende Monographie ein sehr wichtiges Werk in der sich rasch entwickelnden Theorie der Splinefunktionen und ihrer Anwendungen.

Erlangen H. Strauß

Mecke, J., Schneider R, Stoyan, D., Weil, W., Stochastische Geometrie (DMV Seminar Bd. 16), Basel u. a.: Birkhäuser Verlag 1990, 216 S., Br., DM 48,–

This monograph collects the material of the lectures on stochastic geometry presented at a seminar in Kloster Neresheim, October 1989, which was organized by the Gesellschaft für mathematische Forschung and the Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

Stochastic geometry provides both models for random processes of geometrical objects and methods for analysis of such spatial structures, which have applications in areas like image analysis, stereology and spatial statistics. Indeed stochastic geometry is a large area and all aspects can not be included in an introductory book, so the selected material reflects the authors particular viewpoints and interests. However, the book offers a stimulating well-written and readable introduction to the subject for mathematicians with only a basic knowledge on probability theory. The exposition is mathematically exact, but most proofs are omitted or sometimes sketched in order to avoid technical details.

The text is organized as follows:

Chapter 1 concerns some topics of integral geometry which are of importance in stochastic geometry. The emphasis lays on a systematic introduction to Minkowski and curvature measures, which are first defined on the class of non-void compact convex subsets of $\mathbb{R}^d$ and secondly extended to the convex ring. In particular, the kinematic fundamental formula and Crofton's formula are discussed.

In chapter 2 random closed sets in the sense of Matheron and point processes of closed sets are treated. Various characteristics of random closed sets like the capacity functional, the covariance function and Quermass densities are introduced. Moreover, general point processes of closed sets as well as the special classes of hyperplane processes and point processes of compact sets are discussed. Finally, a number of results for Boolean models are established.

The first part of chapter 3 concerns random tessellations, i.e. random subdivisions of $\mathbb{R}^d$ into cells which are convex d-dimensional polytopes. For ease of exposition the planar case $d=2$ is mainly considered. Various characteristics of general planar tessellations are studied: mean value relations, which essentially are geometrical relations, are exposed, and the rose of directions for the process of cell-edges and the related Steiner compact are used as characteristics for anisotropic tessellations. In the second part of chapter 3 processes of k-spaces (k-dimensional affine subspaces) of $\mathbb{R}^d$ with $0 \leqslant k \leqslant d$ are treated. Especially, for $k=d-1$, random tessellations generated by general processes of hyperplanes are studied. Also a more detailed discussion of the particular case of not necessary isotropic Poisson processes of k-spaces is included.

Applications of stochastic geometry to spatial statistics is discussed in chapter 4. Statistical analysis of usual point processes play the principal part, but also Boolean models and planar tessellations are treated here. First and second moments for stationary and isotropic point processes are considered for a form of correllation analysis. Corresponding estimates which are unbiased or consistent and corrected for edge effects are exhibited and applied on some examples of real point patterns. Statistics for Poisson point processes are also introduced and possible departures from the Poisson hypothesis is discussed. Simulated examples of models which exhibit either attraction or repulsion between neighbouring points are presented, and simulation techniques based on spatial birth-and-death processes are outlined.

Finally, the book includes one appendix on the general theory of point processes and another on programmes written in Turbo Pascal for the simulations used in chapter 4.

In conclusion, the excellent book should be recommended as a valuable basis for any introductory course on stochastic geometry. I can also recommend the book to mathematicians and statisticians who want an impression of the state of the area.

Aarhus J. Møller

Mazja, W. G., Nasarow, S. A., Plamenewski, B. A., Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten I. Berlin: Akademie-Verlag 1991, 432 S. DM 148,00

Die Theorie elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit Ecken und Kanten wurde in den letzten 30 Jahren umfassend entwickelt. Rundet man die Randsingularitäten lokal etwas ab, so kommt man zu glatten Gebieten. Ähnlich kann man von punktierten Gebieten zu glatt berandeten Gebieten mit kleinen Löchern übergehen. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß man die Ergebnisse über das Verhalten der Lösungen in nicht glatt berandeten Gebieten auch für die Untersuchungen in den durch Abrunden entstandenen glatten Gebieten nutzen kann, die „fast“ das gleiche Aussehen haben. Die Autoren untersuchen diesen Zusammenhang. Sie fassen die glatten Gebiete, die kleine Löcher besitzen, oder die durch Abrundung konischer Randpunkte entstehen, als Störungen von Gebieten mit konischen Punkte auf und nennen diese „singulär gestörte Gebiete“.

Zur Behandlung derartiger Gebiete wird ein Störungsparameter ε eingeführt und das Verhalten der Lösungen von elliptischen Randwertaufgaben in den singulär gestörten Gebieten in einer asymptotischen Entwicklung nach Potenzen von ε beschrieben. Dabei werden Ergebnisse der Theorie elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit konischen Randpunkten zugrunde gelegt.

Die Autoren entwickelten in einer Reihe von Arbeiten, die zum größten Teil in russischer Sprache erschienen sind, Methoden zur Konstruktion dieser Asymptotik. Ziel des Buches ist es, die Fülle der Publikationen der Autoren zu diesem Thema in einer einheitlichen Gesamtübersicht darzustellen.

Die Verfasser beginnen mit Erläuterungen von Beispielen, stellen danach die allgemeine Theorie dar und räumen schließlich Anwendungen, insbesondere aus der Festkörpermechanik, einen großen Platz ein. So werden im Kapitel I zunächst das Dirichlet- und Neumannproblem für den Laplace-Operator in Gebieten mit konischen Punkten und dann in singulär gestörten Gebieten durch Konstruktion der Asymptotik untersucht. Dabei wird die von den Verfassern begründete, sehr effektive Methode der „zusammengesetzten“ Entwicklungen ausgebaut. Diese besteht aus einer Kombination von Lösungen geeignet konstruierter, von ε unabhängiger Innen- und Außenraumprobleme zur Berechnung der Koeffizienten in der Asymptotik.

Im Kapitel II wird eine Verallgemeinerung auf elliptische Randwertaufgaben (eingeschlossen sind auch Systeme) u.a. in Gebieten mit konischen Punkten vorgenommen. Die Asymptotik wird in den singulär gestörten Gebieten in der Nähe der gerundeten Randsingularitäten konstruiert. Im Abschnitt II/3 wird u.a. die Theorie allgemeiner elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit nicht glatten Rändern skizziert, die in den letzten 25 Jahren insbesonderen von W. A. Kondratjew, W. G. Mazja und B. A. Plamenewski entwickelt wurde. Der Abschnitt II/4 enthält die Hauptresultate der Autoren (Fredholmeigenschaften, Index, vollständige Asymptotik). Sie bilden die Grundlage für weitere Untersuchungen konkreter singulär gestörter Randwertaufgaben.

In den Kapiteln III und IV werden Anwendungen der Theorie behandelt. Hierbei ist es durchaus zulässig, daß die Störungen des nichtglatten Gebietes selbst nicht glatt sind. So wird z. B. im Kapitel III die Asymptotik für zusammenlaufende konische Punkte (ε ist der Abstand) konstruiert. Weiterhin werden verschiedene ebene Rißprobleme, die als Grenzfall ($\varepsilon \to 0$) einen Kurvenriß ergeben, untersucht. Die Asymptotik von Energieintegralen wird bei kleinen Abrundungen des Randes in der Nähe von konischen Punkten aufgestellt; u.a. wird eine Formel von Griffith-Irvin über die Änderung der Energie in Abhängigkeit von der Länge des Risses (Länge $+ \varepsilon$) hergeleitet.

Kapitel IV ist der Asymptotik der Eigenwerte von Randwertaufgaben in Körpern mit kleinen Öffnungen und Einschließungen gewidmet. Es werden insbesondere Beispiele aus der Elastizitätstheorie in zwei- und dreidimensionalen Gebieten betrachtet.

Der vorliegende Band I bietet eine Fülle von Material, das eine Fundgrube vor allem für Spezialisten in den entsprechenden Gebieten der Mathematik und Mechanik ist. Das Lesen erfordert einiges Wissen aus der Funktionanalysis, der Theorie der Funktionenräume, der Theorie elliptischer Randwertaufgaben und der Mechanik. So ist z. B. Kapitel II/3, das in sehr gedrängter Form grundlegende Eigenschaften der elliptischen Randwertaufgaben in Gebieten mit glatten Rändern, im Zylinder und in Gebieten mit konischen Punkten beschreibt, ohne ergänzendes Studium für den Nichtspezialisten sehr schwer verständlich. Die Lesbarkeit hätte durch Einfügen weiterer Abbildungen erhöht werden können.

Das vorliegende Werk sei Mathematikern, die sich mit elliptischen Randwertproblemen und ihren Anwendungen beschäftigen sowie Spezialisten auf dem Gebiet der Festkörpermechanik sehr empfohlen. Es bietet sich für Seminare an und gibt viele Anregungen für Dissertationsthemen. Ob, wie im Vorwort erwähnt, diese Theorie jedoch nützlich für die Entwicklung numerischer Methoden ist, bedarf noch einer Vielzahl weiterer Untersuchungen.

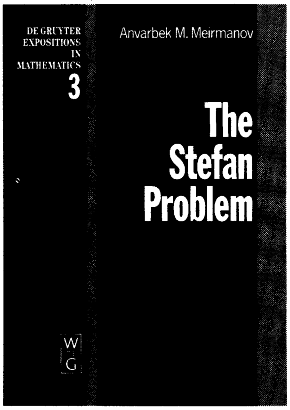
Rostock A.-M. Sändig

Walter de Gruyter
Berlin · New York

Anvarbek M. Meirmanov

The Stefan Problem

Translated from the Russian by
Marek Niezgódka and Anna Crowley



1992. IX, 245 pages. 17 x 24 cm.
Cloth DM 148,- ISBN 3-11-011479-8
(de Gruyter Expositions in Mathematics,
Volume 3)

The Stefan problem is one of the most classical free boundary problems of parabolic type. It arises from modelling phase-change phenomena, such as phase transitions between, for instance, liquid and solid states of a material. Since the appearance of Rubinstein's important monograph in 1967 this book provides the first systematic analysis of Stefan-type problems. The existence of classical solutions for the multidimensional Stefan problem was a long-standing problem. The author's approach to the solution of this problem forms the central part of the book. Together with a complete constructive proof of the classical solvability (local in time), examples of critical developments showing the lack of global-in-time solutions in the general setting are given. A careful analysis of the intrinsic structure of the free boundaries that can have the form of mushy zones is provided. For one-dimensional Stefan problems, qualitative properties of global classical solutions are studied, including an analysis of their asymptotic behaviour and periodicity. The role of compatibility conditions is discussed. This book is addressed to advanced students and research mathematicians, in particular applied mathematicians and engineers.

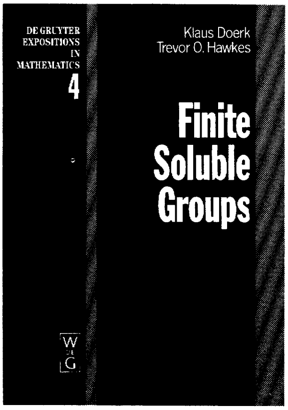
Contents:

Preliminaries · Classical solution of the multidimensional Stefan problem · Existence of the classical solution to the multidimensional Stefan problem on an arbitrary time interval · Lagrange variables in the multidimensional one-phase Stefan problem · Classical solution of the one-dimensional Stefan problem for the homogeneous heat equation · Structure of the generalized solution to the one-phase Stefan problem. Existence of a mushy region · Time-periodic solutions of the one-dimensional Stefan problem · Approximate approaches to the two-phase Stefan problem · Appendix: *I. G. Götz, A. M. Meirmanov:* Modelling of binary alloy crystallization.

Walter de Gruyter
Berlin · New York

Klaus Doerk and **Trevor Hawkes**

Finite Soluble Groups



1992. XIV, 891 pages. 17 x 24 cm.
Cloth DM 268,– ISBN 3-11-012892-6
(de Gruyter Expositions in Mathematics,
Volume 4)

This book presents an overall picture of the theory of finite soluble groups as it has developed over the past thirty years. Emphasis is on those parts of the subject where a coherent and unified body of knowledge has emerged: the theory of Schunck classes and formations with their associated projectors and normalizers; and the dual theory of Fitting classes with their injectors and radicals. All this material can be regarded as one vast and splendid generalization of the subgroups of Sylow and Hall: to have engendered an expansion of knowledge of such cosmic proportions, Sylow's theorem might well be compared to the Big Bang.
The book is essentially self-contained and includes all the basic and prerequisite results from group theory and representation theory to make it accessible to a student who is familiar with the basic methods of modern algebra. As a standard reference the book should provide a stimulus to further research in the subject area that has shown itself capable of a vigorous new life.

Contents:

Prerequisites – general group theory · Prerequisites – representation theory · Introduction to soluble groups · Classes of groups and closure operations · Projectors and Schunck classes · The theory of formations · Normalizers · Further theory of Schunck classes · Further theory of formations · Injectors and Fitting sets · Fitting classes – examples and properties related to injectors · Fitting classes – the Lockett section · Fitting classes – their behaviour as classes of groups · Appendix α: A theorem of Oates and Powell · Appendix β: Frattini extensions.

Walter de Gruyter & Co., Genthiner Str. 13, D-1000 Berlin 30, FRG, Phone (30) 260 05-0, Telex 1 84 027, Fax (30) 260 05-251
Walter de Gruyter, Inc., 200 Saw Mill River Road, Hawthorne, N.Y. 10532, USA, Phone (914) 747-0110, Telex 64 66 77, Fax (914) 747-1326