E 20577 F
95. Band Heft 1
ausgegeben am 26. 1. 1993

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1993

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 95, Heft 1

1. Abteilung

A. Krieg, H. Petersson: Max Koecher zum Gedächtnis 1
H. Strade: Die Klassifikation der einfachen Lie-Algebren über Körpern mit positiver Charakteristik: Methoden und Resultate 28

2. Abteilung

Nadaraya, E. A., Nonparametric Estimation of Probability Densities and Regression Curves (*J. Franke*) *1*
Behnen, K., Neuhaus, G., Rank Tests with Estimated Scores and Their Application (*M. Denker*) *2*
Dubin, D. A., Hennings, M. A., Quantum mechanics, algebras and distributions (*K. Schmüdgen*) *2*
Mazzola, G., Geometrie der Töne (*K. Jacobs*) *3*
Levendorskii, S., Asymptotic distributions of eigenvalues of differential operators (*N. Jacob*) *4*
Hilgert, J., Hofmann, K. H., Lawson, J. D., Lie Groups, Convex Cones and Semigroups (*G. Ólafsson*) *5*
Arnold, V. I., Singularities of Caustics and Wave Fronts (*Th. Bröcker*) *8*
Vitushkin, A. G. (Ed.), Several Complex Variables I (*G. Schumacher*) *8*
Encyclopaedia of mathematics (*A. Dold*) *10*
Collected works of Arne Beurling, Vol. I Complex Analysis, Vol. II Harmonic Analysis (*H. Leptin*) *11*
Masani, P. R., Norbert Wiener 1894–1964 (*H. Heyer*) *12*
Grattan-Guinness, I., Convolutions in French Mathematics, 1800–1840, From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics (*J. Lützen*) *14*

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

J. Brüning: Zum Gedenken an Vojislav Gregor Avakumović
J. Cuntz: A Survey of Some Aspects of Non-Commutative Geometry
S. K. Donaldson: On the Work of Andreas Floer
U. Hamenstädt: Starrheitseigenschaften kompakter Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung
I. Kersten: Ernst Witt 1911–1991
B. Rauhut: Rudolf Henn: Eine Bilanz
L. Stammler, W. Vogel: Ott-Heinrich Keller
K. Stein: Zur Abbildungstheorie in der komplexen Analysis

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 1–27
AMS subject classification: 01 A 70

Max Koecher zum Gedächtnis

A. Krieg, Münster, und H. P. Petersson, Hagen[1])

Max Koecher wurde am 20. Januar 1924 in Weimar als einziges Kind eines in Apolda (Thüringen) wohnhaften Kaufmanns geboren. In Apolda verbrachte Koecher seine Jugend, besuchte dort sowohl die Volksschule als auch das Gymnasium und erwarb 1942 das Reifezeugnis.

Nach zweijährigem Dienst beim Militär geriet er 1944 in amerikanische Gefangenschaft, aus der er 1946 wieder entlassen wurde. Im Sommersemester 1947 nahm Koecher das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Göttingen auf, wo er am 23. Februar 1951 mit der Dissertation „Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung" zum Doktor der Naturwissenschaften promo-

---

[1]) Beim Schreiben dieses Nachrufs wurden die Autoren von Frau Hansi Koecher sowie von zahlreichen, dem Verstorbenen persönlich oder fachlich nahestehenden Kollegen im In- und Ausland vielfältig unterstützt. Ihnen allen sei hiermit auf das herzlichste gedankt.

vierte. Wenn dabei auch Max Deuring als offizieller Berichterstatter fungierte, muß gleichwohl Hel Braun als wahre Betreuerin des im übrigen selbstgewählten Dissertationsthemas und Koecher somit als ihr Schüler angesehen werden.

Nachdem Koecher im Herbst 1951 ein Forschungsstipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft wahrgenommen hatte, wechselte er 1952 an das II. Mathematische Institut der Universität Münster, wo er eine wissenschaftliche Assistentenstelle antrat. Hier kam er über Hans Petersson und seine Schule verstärkt mit der Theorie der Modulformen einer Variablen in Berührung. Die Anregungen, welche er dabei erhielt, veranlaßten ihn, intensiv nach höherdimensionalen Analoga zu suchen, und lösten so eine überaus fruchtbare Schaffensperiode aus. Durch die Entdeckung des sog. Koecher-Effektes gelangte er schon in jungen Jahren zu hohem internationalen Ansehen. 1953 heiratete Koecher Hansi Ponfick; aus der Ehe gingen zwei Kinder hervor, Max (geb. 1955) und Martina (geb. 1957). Am 16. Juli 1954 habilitierte Koecher sich mit der Habilitationsschrift „Zur Operatorentheorie der Modulformen n-ten Grades“ und erhielt die venia legendi für das Fach Mathematik. Nachdem er 1956 in eine Diätendozentur eingewiesen worden war, wurde er 1960 zum außerplanmäßigen Professor ernannt. Im akademischen Jahr 1961/62 folgte Koecher einer Einladung auf eine Gastprofessur an der University of Minnesota, die ihm Gelegenheit gab, den von ihm 1957 entwickelten Begriff des Positivitätsbereiches sowie dessen fundamentale Beziehung zu Jordan-Strukturen und beschränkten symmetrischen Gebieten erstmalig systematisch darzustellen. Aus diesen Vorlesungen gingen die Lecture Notes „Jordan algebras and their applications“ hervor, die noch heute zu seinen am häufigsten zitierten Werken zählen.

Der nachhaltige wissenschaftliche Eindruck, den Koecher während dieses Gastaufenthaltes hinterlassen hatte, wird darüber hinaus durch die Tatsache dokumentiert, daß er im Mai 1962 einen Ruf an die University of Minnesota erhielt. Er lehnte jedoch ab, schlug auch ein entsprechendes Angebot der Universität Münster aus und folgte statt dessen im Oktober des gleichen Jahres einem Ruf auf eine ordentliche Professur für Mathematik an der Universität München, wo er seine rege Lehr- und Forschungstätigkeit mit unverminderter Intensität fortsetzte. Vor allem konzentrierte er sich nun auf Untersuchungen aus der nichtassoziativen Algebra, wobei die von ihm diskutierten Fragestellungen ihren analytischen Hintergrund nie verleugnen konnten; dies kam der behandelten Materie außerordentlich zugute. Die von Koecher in diesem Zusammenhang erzielten Resultate fanden zu einem wesentlichen Teil ihren Niederschlag in seinem gemeinsam mit Hel Braun in den „Grundlehren“ des Springer-Verlages publizierten Lehrbuch über Jordan-Algebren, das sich, vor allem im Hinblick auf Anwendungen in der Analysis, zu einem Standardwerk entwickelt hat. Den Schülerkreis, welchen er bereits während seiner Münsteraner Zeit um sich zu sammeln begonnen hatte, baute er in München weiter aus. Gastaufenthalte an der Yale University im akademischen Jahr 1965/66 (auf Einladung N. Jacobsons), an der Universität Aarhus im Frühjahr 1967 und schließlich an der Rice University im Frühjahr 1969 runden das Bild eines Wissenschaftlers ab, dessen mathematisches Werk wachsender Beachtung und Anerkennung durch die Fachwelt gewiß sein konnte. Dies fand auch seinen Ausdruck in Koechers um diese Zeit einsetzende

Tätigkeit als Mitherausgeber bedeutender mathematischer Zeitschriften, insbesondere der Mathematischen Annalen (1968–1980). Schließlich tat er sich als Begründer und langjähriger Leiter einer Tagung über Jordan-Algebren am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach hervor, die dort seit dem Jahre 1967 im regelmäßigen Zyklus stattfindet und sich im In- und Ausland hoher Wertschätzung erfreut.

Im Oktober 1970 kehrte Koecher als ordentlicher Professor für Mathematik an die Universität Münster zurück. Seine bisherigen Aktivitäten fanden an dieser Wirkungsstätte ihre natürliche Fortsetzung. Er beschäftigte sich weiter mit nichtassoziativen Algebren auf der Grenzlinie zur Analysis und brachte unter diesem Aspekt insbesondere grundlegende Untersuchungen über die Riccatische Differentialgleichung und über konvexe Kegel hervor. Die Zahl seiner Schüler wuchs stetig an. 1971 wurde Koecher korrespondierendes Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Den 1975 ergangenen Ruf auf einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Bayreuth lehnte er ab. Einen wesentlichen Teil des Jahres 1977 verbrachte er als Gastprofessor an der University of Ottawa.

In der letzten Dekade seines Lebens wandte sich Koecher wieder denjenigen Fragen der klassischen Mathematik zu, die ihn bereits in seiner Jugend fasziniert hatten. Dies wird nicht nur in seinen wissenschaftlichen Arbeiten erkennbar, in denen der explizite Bezug zu Modulformen und zur Zahlentheorie wieder deutlich überwiegt, sondern auch in seinen während dieser Periode entstandenen Vorlesungsausarbeitungen und Monographien. So findet seine Liebe zur klassischen Geometrie in dem für die FernUniversität geschriebenen Fernstudienkurs „Geometrie der Ebene“ ebenso ihren Niederschlag wie in seinem Lehrbuch „Lineare Algebra und analytische Geometrie“. In diese Zeitspanne fällt auch Koechers Tätigkeit als Mitherausgeber der Lehrbuchreihe „Grundwissen Mathematik“. Der Kreis schließt sich mit seinem Lehrbuch „Klassische elementare Analysis“, in dem der im Titel genannte Gegenstand eine beispielhafte Darstellung erfährt. Während seiner letzten Lebensjahre schrieb Koecher an einer Monographie über ganzzahlige Matrizen, die durch ein Akademie-Stipendium der Stiftung Volkswagenwerk gefördert wurde, und fertigte eine Vorlesungsausarbeitung über elliptische Modulformen an; beide Manuskripte sollen posthum veröffentlicht werden.

Wie viele Mathematiker entwickelte Koecher mit zunehmendem Alter ein starkes Interesse für die geschichtliche Entwicklung der Mathematik. Beispielsweise wird dies durch die historischen Bemerkungen, die seine erwähnten Lehrbücher über Lineare Algebra und Analysis durchsetzen, nachdrücklich dokumentiert. Aber auch die Tatsache, daß Koecher gegen Ende seines Lebens die Herausgabe der (partiellen) Lebenserinnerungen von Hel Braun ([Br2]) mit großem persönlichen Engagement betrieb, beruht zu einem nicht geringen Teil auf seinem ausgeprägten Geschichtsbewußtsein.

Max Koecher wurde am 28. Februar 1989, schon schwer krank, emeritiert. Er starb nach langem, mit großer Geduld ertragenem Leiden am 7. Februar 1990 in Lengerich (Westfalen) und wurde auf dem Friedhof von Tecklenburg beigesetzt.

*

Intellektuelle Brillanz und mathematischer Einfallsreichtum zeichneten Max Koecher nicht nur in seinem wissenschaftlichen Werk aus; sie fanden gleichermaßen Eingang in die von ihm gehaltenen Vorlesungen und Referate, traten aber auch pointiert in Diskussionen auf, an denen er beteiligt war. Die in seinen Vorlesungen gestellten Ansprüche waren hoch, ohne je überzogen zu sein. Tendenzen zu exzessiven Verallgemeinerungen durchaus abhold, zögerte Koecher gleichwohl nicht, abstrakte Formalismen zu benutzen, falls dies der Sache dienlich war.

Koechers gewissermaßen sprungbereite mathematische Intelligenz trat besonders deutlich bei Diskussionen zutage, etwa im Anschluß an Kolloquien auswärtiger Referenten. Auf beeindruckende Weise manifestierte sich hier seine Fähigkeit, die verborgenen Zusammenhänge, welche die Mathematik regieren, auch dann instinktiv zu erfassen, wenn er selbst auf dem zur Diskussion stehenden Gebiet nicht gearbeitet hatte. Seine Schüler fanden in Max Koecher einen akademischen Lehrer, der ihnen eine optimale Betreuung zuteil werden ließ. Stets zu einem fachlichen Gedankenaustausch bereit, zeigte er einerseits große Geduld, wenn sich anfänglich die Erfolge nicht recht einstellen wollten, erzeugte er andererseits aber auch durch beharrliches Nachfragen in den ihm Anvertrauten jene heilsame Unruhe, ohne die ein wissenschaftliches Werk nicht zur Reife gelangen kann.

Als Mensch entsprach Max Koecher in keiner Weise den klischeehaften Vorstellungen, welche man sich in der Öffentlichkeit über Mathematiker zu bilden pflegt und die von Mathematikern auch kultiviert werden. Er war weder zerstreut noch weltfremd, verfügte im Gegenteil über ein höchst sachkundiges, mit großer Menschenkenntnis gepaartes Urteil in politischen und wirtschaftlichen Fragen, brachte Problemen der Technik in Theorie und Praxis großes Interesse entgegen und war darüber hinaus manuell außerordentlich geschickt; hiervon zeugen insbesondere die mit professioneller Perfektion gefertigten Tischlerarbeiten, die man in seinem Hause bewundern kann. Seine Berufsauffassung war einerseits von den Maximen preußischer Pflichterfüllung geprägt, wie sie sich beispielsweise im letzten Jahr vor seiner Emeritierung manifestierten, als er seinen Dienstaufgaben in der Lehre mit aufopferungsvollem Engagement nachkam, obwohl ihn seine Krankheit bereits wiederholt zu längeren Aufenthalten im Krankenhaus gezwungen hatte. Auf der anderen Seite war er aber ein viel zu unabhängiger Geist und widersprach es im übrigen auch seinem menschlichen Naturell, als daß er der Gefahr obrigkeitsstaatlicher Unterwürfigkeit hätte erliegen können, wie sie ja nicht selten mit preußischer Pflichterfüllung einhergeht. Dem Geschäft der akademischen Selbstverwaltung unterzog er sich mit Augenmaß und Engagement. Obwohl politisch eher konservativ eingestellt, gelang es ihm stets, etwa während seiner Amtszeit als Geschäftsführender Direktor des Mathematischen Instituts der Universität München (1964/65) oder als Dekan des Fachbereichs Mathematik der Universität Münster (1972/73), das Gespräch auch mit der studentischen Linken nicht nur zu finden, sondern konstruktiv zu nutzen, weil die andere Seite eben wußte, daß auf sein Wort Verlaß war.

Die Bereitschaft, sich neben seinen Aktivitäten in Lehre und Forschung für die Belange der Universität und der Mathematik einzusetzen (von 1975 bis 1982 war er Mitglied des Präsidiums der DMV), verstellten Max Koecher freilich nicht den Blick für die Gefahren, in administrativen Funktionen dieser Art vollständig aufzugehen. Eifersüchtig wachte er darüber, daß seine Privatsphäre gewahrt blieb und die Belange seiner Familie nicht zu kurz kamen. Mit besonderem Nachdruck betonte er immer wieder, wie wichtig es sei, persönliche Freundschaften und Beziehungen auch außerhalb der Universitätskreise zu pflegen.

Im persönlichen Umgang vermittelte Max Koecher, vor allem in seinen späteren Jahren, den Eindruck großer innerer Disziplin. Nur wer ihn sehr gut kannte, vermochte Anzeichen dafür zu entdecken, wie unsagbar tief ihn der tragische Unfalltod seines Sohnes im Frühjahr 1975 getroffen haben muß. Die von Tatkraft und Mut gekennzeichnete Haltung, mit welcher er am Schluß das Schicksal seiner schweren Krankheit auf sich nahm, verliehen seinem Leben jene Würde, die zu einem wesentlichen Teil den Sinn der menschlichen Existenz ausmacht.

*

In dem mathematischen Gesamtwerk Max Koechers lassen sich die folgenden großen Entwicklungslinien ausmachen.

I Analysis und Zahlentheorie, insbesondere Modulformen von mehreren Variablen ([1]–[10], [12], [15]–[17], [40]–[45])

C. L. Siegel ([Si1]) entwickelte in den dreißiger Jahren eine systematische Theorie der Modulformen n-ten Grades, die als Verallgemeinerung der klassischen elliptischen Modulformen aufzufassen sind. Dazu geht man vom *Siegelschen Halbraum* H_n aus, der aus allen komplexen symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen mit positiv definitem Imaginärteil besteht. Unter einer *Siegelschen Modulform vom Grad n und Gewicht k* (aus $\mathbb{Z}$) versteht man nach [Si1] eine Funktion $f: H_n \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(SMF.1) *f ist holomorph.*

(SMF.2) *Für alle Matrizen* $\begin{pmatrix} A B \\ C D \end{pmatrix}$ *aus der* Siegelschen Modulgruppe $\Gamma_n := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ *und alle* $Z \in H_n$ *gilt*

$$f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \det(CZ+D)^k f(Z).$$

(SMF.3) *f ist im Bereich $\{Z \in H_n : (\operatorname{Im} Z) - E$ positiv semidefinit$\}$ beschränkt.*

Jede Siegelsche Modulform f besitzt eine Fourier-Entwicklung der Form

$$(1) \qquad f(Z) = \sum_{T \geqslant 0} \alpha_f(T) e^{2\pi i \operatorname{Spur}(TZ)} \qquad (Z \in H_n),$$

wobei T die halbganzen symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen durchläuft. Die Regularitätsforderung (SMF.3) im Unendlichen stellt sicher, daß in (1) nur positiv semidefinite Matrizen T aufreten.

Die klassische Theorie elliptischer Modulformen ist in dem geschilderten Ansatz mit $n=1$ enthalten. In diesem Fall hatte Hecke ([He1]) das sog.

Umkehrproblem gelöst, indem er eine Korrespondenz zwischen (ganzen) elliptischen Modulformen und Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung herstellte.

Durch Hel Braun war Koecher mit der Siegelschen Theorie in Berührung gekommen. In seiner Dissertation ([1], [2]) wendet er sich nun dem Umkehrproblem für beliebiges n zu, nachdem Maaß ([M1]) zuvor den Fall $n=2$ behandelt hatte. Für gerades k betrachtet man zu einer Siegelschen Modulform f die Dirichlet-Reihe

$$(2) \qquad D_n(f,s) := \sum_T \frac{\alpha_f(T)}{\#(\mathrm{Aut}\,T)} (\det T)^{-s} \qquad (s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) \gg 0),$$

wobei T ein Vertretersystem der Klassen $\{U^t S U : U \in GL_n(\mathbb{Z})\}$ positiv definiter halbganzer Matrizen durchläuft und $\#(\mathrm{Aut}\,T)$ die Ordnung der Automorphismengruppe von T bezeichnet. Neben den sog. *Koecher-Maaß-Reihen* (2) betrachtet Koecher eine Verallgemeinerung der Epsteinschen Zetafunktion, die man heute *Koechersche Zetafunktion* nennt. Die Koechersche Zetafunktion ist im wesentlichen eine spezielle Selbergsche Zetafunktion und kann als Eisenstein-Reihe zu einer maximalen parabolischen Untergruppe der GL_n aufgefaßt werden ([T2]).

Koecher leitet für beide Typen von Dirichlet-Reihen analytische Fortsetzung, Funktionalgleichung und Residuenformeln her. Allerdings enthält die Arbeit einen Fehler, weil ein dort auftretendes Mellin-Integral divergiert (vgl. Zbl. Math. **55** (1956/57) 55–56 oder [T2]). Diese Lücke konnte erst wesentlich später durch die Arbeiten von Terras ([T1]), Maaß ([M3]), Arakawa ([Ar1], [Ar2], [Kli]) und Wohlfahrt ([Wo]) geschlossen werden. Erst kürzlich wurde entdeckt, daß die Koecher-Maaß-Reihe (2) auch interessante arithmetische Eigenschaften hat ([Bö], [BSP], [Kr2]).

Koecher zeigt dann in seiner Dissertation, daß das Umkehrproblem für $n>1$ mit nur einer Dirichlet-Reihe nicht lösbar ist. Diese Frage ist bis heute aktuell. Es gibt inzwischen Lösungen von Imai ([I]) für $n=2$ und von Weissauer ([Wei]) für den allgemeinen Fall.

Diesen Problemkreis greift Koecher später in [42] mit einer allerdings etwas anderen Zielrichtung wieder auf. Dort untersucht er ganzzahlige Darstellungen von quadratischen Formen n-ten Grades durch solche m-ten Grades. Im Fall $n=1$ führt er dann eine zur Epsteinschen Zetafunktion analoge matrixwertige Zetafunktion ein, für die er analytische Fortsetzung, Funktionalgleichung und eine Residuenformel herleitet.

In [5] und [6] überträgt Koecher die wesentlichen klassischen Resultate auf Siegelsche Modulformen zu Kongruenzuntergruppen von Γ_n. Dabei enthält [5], Satz 1, Koechers wichtigstes Resultat aus dem Bereich der automorphen Formen. Man nennt es *Koecher-Effekt* oder *Koecher-Prinzip:* Die Regularitätsforderung (SMF.3) folgt für $n>1$ bereits aus (SMF.1) und (SMF.2). Für $n=1$ ist das nicht der Fall.

Zum *Beweis* betrachtet man eine holomorphe Funktion $f: H_n \to \mathbb{C}$, die (SMF.2) erfüllt. f besitzt eine absolut konvergente Fourier-Entwicklung der Form (1), wobei allerdings über alle halbganzen symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen T zu summieren ist. Darüber hinaus impliziert (SMF.2)

$$\alpha_f(U^t T U) = \alpha_f(T) \quad \text{für alle} \quad U \in SL_n(\mathbb{Z}).$$

Aus $\alpha_f(T) \neq 0$ folgt somit die absolute Konvergenz der Reihe

$$(3) \qquad \sum_{S} e^{2\pi i \operatorname{Spur}(SZ)} \qquad (Z \in H_n),$$

wobei S die Menge $\{U^t T U : U \in SL_n(\mathbb{Z})\}$ durchläuft. Im Fall $n > 1$ kann Koecher nun elementar zeigen, daß die Reihe (3) genau dann absolut konvergiert, wenn T positiv semidefinit ist. Damit erhält man (1) und somit auch (SMF.3).

Als Folgerung aus dem Koecher-Effekt schließt man leicht, daß jede Siegelsche Modulform vom Grad $n > 1$ und Gewicht $k > 0$ Nullstellen besitzt. Also existiert für $n > 1$ kein Analogon der Diskriminante $\Delta(\tau)$. Ferner ist jede auf H_n holomorphe, Γ_n-invariante Funktion für $n > 1$ konstant, so daß auch kein Analogon der Standard-Modulfunktion $j(\tau)$ existiert.

Für Hilbertsche Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ war das entsprechende Resultat bereits von Götzky ([Gö]) bewiesen worden. Der Koecher-Effekt gilt aber allgemein für große Klassen von automorphen Formen (vgl. [Br1], [F2], [Kr1], [PS], [Zi]).

Im Rahmen der komplexen Analysis kann man den Koecher-Effekt unter dem folgenden Phänomen einordnen: Mit Hilfe der Satake-Kompaktifizierung ([S1]) kann man H_n/Γ_n als offenen, dichten Teilraum eines kompakten topologischen Raumes X_n auffassen, der die Struktur eines normalen komplexen Raumes trägt. Für $n > 1$ ist die Kodimension von H_n/Γ_n in X_n größer als 1. Also folgt die Regularitätsforderung (SMF.3) in diesem Fall schon aus einem allgemeinen Hebbarkeitssatz für normale komplexe Räume (vgl. [F1], Kap. II und Anhang VI).

In der klassischen Theorie der elliptischen Modulformen spielen die sog. *Hecke-Operatoren* eine zentrale Rolle, weil sie den arithmetischen Charakter der Fourier-Koeffizienten enthüllen. Die Interpretation der Fourier-Koeffizienten als Eigenwerte der Hecke-Operatoren bei simultanen Eigenformen ergibt die Eulersche Produktdarstellung der zugehörigen Dirichlet-Reihe. Aufbauend auf diese klassischen Ergebnisse von Hecke ([He2], [He3]) und H. Petersson ([P1], [P2]) gelangte Maaß ([M2]) zu ersten schönen Resultaten für Siegelsche Modulformen.

Koecher ([7]–[9]) hat sich intensiv bemüht, eine zur klassischen Theorie analoge Operatorentheorie für Siegelsche Modulformen zu entwickeln. Die von ihm eingeführten Operatoren sind jedoch i.a. keine Endomorphismen mehr, sondern Homomorphismen zwischen Vektorräumen von Siegelschen Modulformen zu verschiedenen Kongruenzgruppen, so daß der technische Aufwand recht erheblich wird.

Später führte Shimura ([Sh2]) die abstrakte Hecke-Algebra ein und bestimmte ihre Struktur für die Siegelsche Modulgruppe in [Sh1]. Eine übersichtliche Darstellung der Operatorentheorie für Siegelsche Modulformen findet man in [F1] und [An]. Ein wesentlich allgemeinerer Ansatz der Hecke-Theorie geht auf Satake ([S2]) zurück, der sphärische Funktionen auf p-adischen reduktiven algebraischen Gruppen betrachtet.

Im Anschluß an Selbergs Vortrag über die Spurformel 1956 in Bombay gibt Koecher in [10] einen Beweis der Eichler-Selbergschen Spurformel für den Spezialfall der Hecke-Operatoren zu elliptischen Modulformen. Insbesondere führt er aus, wie in diesem Fall das Ergebnis relativ leicht aus den klassischen Resultaten von H. Petersson ([P1]) gewonnen werden kann.

In den Arbeiten [3] und [4] beschäftigt sich Koecher mit nicht-analytischen Modulformen. [4] enthält einen neuen Beweis der Kroneckerschen Grenzformel für die nicht-analytische Eisenstein-Reihe auf der oberen Halbebene. Dieser Beweis verwendet nicht die Produktdarstellung der Diskriminante $\Delta(\tau)$, sondern benutzt ihre Charakterisierung durch das Transformationsverhalten.

In [3] greift Koecher die Siegelschen Ansätze ([Si2]) über Theta-Reihen zu indefiniten quadratischen Formen auf und verallgemeinert sie auf den Fall der Darstellung von quadratischen Formen n-ten Grades durch solche m-ten Grades. Man kann diese Theta-Reihen als nicht-analytische Siegelsche Modulformen auffassen. Sie zeigen ein zu (SMF.2) analoges Transformationsverhalten unter der Siegelschen Modulgruppe. Anstelle von (SMF.1) genügen sie einer partiellen Differentialgleichung der Ordnung $2n$. Im Fall $n=1$ erhält man auf diesem Wege die konfluente hypergeometrische Funktion.

Im Jahre 1943 hatte C. L. Siegel ([Si3]) erstmals systematisch den Zusammenhang zwischen diskontinuierlichen und diskreten Transformationsgruppen untersucht. Gemeinsam mit W. Roelcke beschreibt Koecher in [15] den Fall, daß die Gruppe Ω aus den Isometrien eines lokal-kompakten metrischen Raumes X besteht. Betrachtet man auf Ω die kompakt-offene Topologie, so fallen die beiden Begriffe weitgehend zusammen: Jede diskontinuierliche Untergruppe Γ von Ω ist diskret. Ist X zusammenhängend, so ist jede diskrete Untergruppe Γ von Ω auch diskontinuierlich.

In [41] beschäftigt sich Koecher mit dem Moore-Penrose-Inversen oder verallgemeinertem Inversen von rechteckigen Matrizen. Ist A eine ganzzahlige Matrix, so ist das Moore-Penrose-Inverse A^* von A i.a. nur rational. Aus dem Elementarteilersatz gewinnt man eine ganzzahlige Maximalrangzerlegung von A. Damit kann Koecher eine Abschätzung für die Nenner von A^* geben. Die Ergebnisse werden angewendet, um die Lösungen von diophantischen Gleichungssystemen explizit zu bestimmen.

II Positivitätsbereiche und Jordan-Algebren ([11]–[14], [16]–[21], [31], [35], [37], [BK])

Die Arbeit [11], in der der fundamentale Begriff des Positivitätsbereiches entwickelt und ihm eine erste gründliche Untersuchung gewidmet wird, stellt einen tiefen Einschnitt in Koechers mathematischem Schaffen dar. Dieser Begriffsbildung liegt das Bestreben zugrunde, die verschiedenen Typen von Modulformen mehrerer Variablen einheitlich zu behandeln. Was der Theorie der Positivitätsbereiche dabei ihr unverwechselbar-eigentümliches Gepräge gibt, ist ein ebenso überraschender wie fruchtbarer Zusammenhang, den Koecher zwischen dieser und der Theorie der Jordan-Algebren herstellt ([13], [14], [18]).

Jordan-Algebren waren erstmals Anfang der dreißiger Jahre bei dem von Pascual Jordan unternommenen Versuch aufgetreten, einen algebraischen Formalismus zur Beschreibung der Quantenmechanik zu entwickeln ([Jo1]–[Jo3]).

Daran hatten sich Strukturuntersuchungen endlich-dimensionaler formal-reeller Jordan-Algebren ([JNW]), endlich-dimensionaler Jordan-Algebren über algebraisch abgeschlossenen Grundkörpern ([A1]–[A3]) und schließlich solcher über beliebigen Grundkörpern ([JJ]) angeschlossen, ehe es Jacobson ([J1]) gelang, die Theorie um zwei grundlegende methodische Hilfsmittel zu bereichern, nämlich um die quadratische Darstellung und den Begriff des Homotops.

Bezeichnet $\mathscr{J}$ eine beliebige *Jordan-Algebra* über einem Körper K der Charakteristik ungleich zwei (also eine kommutative K-Algebra, welche an Stelle des Assoziativgesetzes der *Jordan-Identität*

$$(4) \qquad u(u^2v) = u^2(uv) \qquad (u, v \in \mathscr{J})$$

genügt), so bestand Jacobsons erste grundlegende Einsicht darin, daß es weniger die *Linksmultiplikation* ist (also die lineare Abbildung $L: \mathscr{J} \to \mathrm{End}_K(\mathscr{J})$ mit $L(u)v = uv$ für $u, v \in \mathscr{J}$), welche die Struktur von $\mathscr{J}$ beherrscht, als vielmehr die *quadratische Darstellung* $P: \mathscr{J} \to \mathrm{End}_K(\mathscr{J})$, erklärt durch

$$P(u) = 2L^2(u) - L(u^2) \qquad (u \in \mathscr{J}).$$

Die zentrale Bedeutung dieser Abbildung kommt dabei durch die von Jacobson vermutete, von ihm selbst aber nur in Spezialfällen verifizierte *Fundamentalformel*

$$P(P(u)v) = P(u)P(v)P(u) \qquad (u, v \in \mathscr{J})$$

zum Ausdruck, die sich für die weitere Entwicklung der Theorie in der Tat als fundamental erwiesen hat. Jacobsons zweite grundlegende Einsicht bestand darin, daß man gleichberechtigt neben der ursprünglichen Algebra $\mathscr{J}$ ihre sämtlichen *Homotope* $\mathscr{J}^{(w)}$ $(w \in \mathscr{J})$ zu betrachten hat, welche auf dem $\mathscr{J}$ zugrundeliegenden Vektorraum durch die neue, von dem jeweiligen Element w abhängige Multiplikation

$$u \cdot^{(w)} v = u(vw) + v(uw) - (uv)w \qquad (u, v \in \mathscr{J})$$

gegeben sind. Die Signifikanz dieser Bildungen wird dabei durch den ebenfalls von Jacobson vermuteten, wiederum aber nur in Spezialfällen verifizierten *Homotopiesatz* unterstrichen, wonach mit $\mathscr{J}$ auch jedes ihrer Homotope eine Jordan-Algebra ist.

Die von Koecher gewonnene Beziehung zwischen Positivitätsbereichen und Jordan-Strukturen erlaubt es, für die hier geschaffene algebraische Begriffswelt[2]) gänzlich neue, gewissermaßen analytische Betrachtungsweisen zu entwickeln. Wie dies geschieht, werde kurz skizziert ([18]). Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, versehen mit einem Skalarprodukt σ. Wir betrachten einen *Positivitätsbereich Y in V mit Charakteristik* σ, d. h. eine nicht-leere, in der natürlichen Topologie von V offene Teilmenge mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(POS.1) *Für alle $x, y \in Y$ gilt $\sigma(x,y) > 0$.*

---

[2]) Einer Anregung Hel Brauns folgend, sprach Koecher dabei nicht von Homotopen, sondern von *Mutationen* einer Jordan-Algebra.

(POS.2) *Für alle $x \in V$ mit $\sigma(x,a) > 0$ für alle $a \neq 0$ aus dem topologischen Abschluß $\bar{Y}$ von Y gilt $x \in Y$.*

Es wird stets angenommen, Y sei *homogen*, d.h. die lineare Automorphismengruppe

(5) $\mathrm{Aut}(Y) = \{W \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) : WY = Y\} \subset GL(V)$

operiere transitiv auf Y. Unter einer *Norm von Y* verstehen wir eine stetige Funktion

$$N : \bar{Y} \to \mathbb{R},$$

die auf dem Rand verschwindet, in Y reell-analytisch und strikt positiv ist und das Transformationsverhalten

$$N(Wy) = |\det W| N(y) \qquad (W \in \mathrm{Aut}(Y), y \in Y)$$

aufweist. Aus Homogenitätsgründen kann es natürlich (bis auf einen positiven Faktor) nicht mehr als eine Norm auf Y geben; die Existenz wird umgekehrt durch die Zuordnung

$$y \mapsto \left(\int_Y \mathrm{e}^{-\sigma(y,y')} \mathrm{d}y' \right)^{-1}$$

garantiert. Bezeichnet nun N irgendeine Norm von Y, so stellt man fest, daß diese homogen und das Negative ihrer logarithmischen Hesseform an einer beliebigen Stelle $y \in Y$, also $-(D^2 \log N)(y)$, ein Skalarprodukt auf V ist. Es gibt daher eindeutig bestimmte, von N unabhängige reell-analytische Abbildungen $\iota : Y \to V$ sowie $H : Y \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit

$$\sigma(\iota(y), u) = (D \log N)(y)u \qquad (y \in Y, u \in V),$$
$$\sigma(H(y)u, v) = -(D^2 \log N)(y)(u, v) \qquad (y \in Y, u, v \in V),$$

und für alle $y \in Y$ ist $H(y)$ positiv definit bezüglich σ. Ferner erweist sich ι als eine Involution von Y, die genau einen Fixpunkt e besitzt. Nunmehr kann V eindeutig mit einer (nichtassoziativen) Algebrenstruktur $\mathscr{J}$, $(u,v) \mapsto uv$, versehen werden, so daß

$$\sigma(uv, w) = \frac{1}{2}(D^3 \log N)(e)(u, v, w)$$

für alle u, v, $w \in V$ gilt. Trivialerweise ist $\mathscr{J}$ eine kommutative Algebra mit Einselement e. Die Homogenität von Y garantiert darüber hinaus, daß $\mathscr{J}$ der Jordan-Identität (4) genügt, es sich insgesamt also um eine Jordan-Algebra handelt. Bemerkenswerterweise bekommt man dabei für deren quadratische Darstellung, mit den hier beschriebenen analytischen Daten durch die Formel

$$P(y) = H(y)^{-1} \qquad (y \in Y)$$

verbunden, die Fundamentalformel zu Gesicht, ehe überhaupt feststeht, ob man es mit einer Jordan-Algebra zu tun hat. Auch der Homotopiebegriff fügt sich zwanglos in diesen Rahmen ein. Da nämlich Y die Charakteristik σ keineswegs eindeutig bestimmt, kann man zu einem neuen Skalarprodukt σ' übergehen, das Y

ebenfalls zu einem Positivitätsbereich macht, die hier geschilderte Konstruktion mit σ' an Stelle von σ reproduzieren und so zu einer neuen Jordan-Algebra $\mathcal{J}'$ gelangen, von der man sich rasch überzeugt, daß sie ein Homotop der alten ist. Obwohl sich $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}'$ bei genauerer Betrachtung sogar als isomorph erweisen, erscheint hier die Homotopie mehr noch als die Isomorphie als eine der Theorie der Jordan-Algebren besonders angepaßte Begriffsbildung, weil diese dabei auf völlig kanonischem Wege zustande kommt, während jene ganz spezieller, im rein algebraischen Kontext kaum lebensfähiger Argumente bedarf.

Quadratische Darstellung und Homotopiebegriff haben also einen handfesten analytischen Hintergrund. Vor diesem Hintergrund sind analytisch orientierte Beweise der Fundamentalformel durch Hertneck ([Her]) und des Homotopiesatzes durch Koecher ([20]) für Jordan-Algebren endlicher Dimension geführt worden. Der allgemeine Fall folgt aus einem von Macdonald ([Ma]) entwickelten universellen Prinzip über die Gültigkeit nichtassoziativer Polynomidentitäten in beliebigen Jordan-Algebren. Erst etliche Jahre später haben McCrimmon ([J3]) und Meyberg ([Me1], [28]) elementare ad-hoc-Beweise vorgelegt.

Im übrigen darf nicht unerwähnt bleiben, daß sowohl die Fundamentalformel als auch der Homotopiesatz ihrem Charakter nach völlig elementare Aussagen und in der Tat bereits eine sichere Beute der modernen Computer-Algebra geworden sind. Wie uns nämlich I. R. Hentzel brieflich mitgeteilt hat, benötigt sein Computer, versehen mit dem von D. Jacobs entwickelten Programm „ALBERT“, weniger als fünf Minuten, um für die freie Jordan-Algebra in 3 Erzeugenden eine Basis der homogenen Elemente von Grad 7 zu ermitteln, und danach weniger als eine Sekunde (!), um etwa die Fundamentalformel zu verifizieren. Da jedoch auch unsere heutigen Computer nach wie vor hoffnungslos überfordert sind, sobald es darum geht, Identitäten wie die Fundamentalformel oder den Homotopiesatz zu *erraten*, kommt dem Koecherschen Ansatz gerade unter diesem Aspekt eine besondere Bedeutung zu.

Der Nutzen des von Koecher ([13]) entdeckten, von Vinberg ([V1]) auf einem anderen, mehr Lie-theoretisch orientierten Wege gewonnenen Zusammenhangs zwischen Positivitätsbereichen und Jordan-Algebren erschöpft sich aber nicht nur in der Möglichkeit, algebraische Begriffsbildungen zu motivieren. So verdankt man Hertneck ([Her]) die fundamentale Einsicht, daß dieser Zusammenhang eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen homogenen Positivitätsbereichen und *formal-reellen*, also solchen Jordan-Algebren endlicher Dimension (über $\mathbb{R}$) induziert, in denen die Gleichung $x^2+y^2=0$ nur trivial lösbar ist. Da die endlich-dimensionalen formal-reellen Jordan-Algebren bereits in [JNW] vollständig klassifiziert wurden, impliziert dies nunmehr eine vollständige Klassifikation der homogenen Positivitätsbereiche. Darüber hinaus hat sich der hier geschilderte Zusammenhang aber auch bei der systematischen Behandlung analytischer Fragestellungen vielfach bewährt. In diesem Zusammenhang sei der Leser insbesondere auf die Untersuchungen von Faraut-Korányi ([FK1], [FK2]), Faraut-Travaglini ([FT]), Iochum ([Io]), Korányi ([Ko]), Lassalle ([L4]), Muhly-Renault ([MR]), Nomura ([No]) und Satake ([S5]) hingewiesen.

Die allgemeine Theorie der Positivitätsbereiche geht in ihren Anwendungsmöglichkeiten weit über den hier geschilderten Bezug zu Jordan-Algebren hinaus, indem sie nicht nur, ihrer ursprünglichen Bestimmung gemäß, Verbindungen zur Theorie der automorphen Funktionen ([12]) und zur Reduktionstheorie quadratischer Formen ([16], [17]), sondern auch zur Differentialgeometrie im Großen ([14]) herstellt. So verfügt jeder Positivitätsbereich kanonisch über eine unter der linearen Automorphismengruppe ((5)) invariante Maßbestimmung. Die diesbezüglichen Geodätischen sind folglich bekannt, sobald man diejenigen unter ihnen bestimmt hat, welche durch das Einselement der assoziierten Jordan-Algebra führen; letzere wiederum werden durch die dieser Jordan-Algebra zugeordnete Exponentialfunktion beschrieben. Die hierin sichtbar werdende Beziehung zwischen Jordan-Algebren und Differentialgeometrie, welche sich desgleichen in dem von Koecher ([BK] XI Satz 2.4, vgl. auch [31]) bewiesenen Satz widerspiegelt, daß die Einskomponente der Menge der invertierbaren Elemente einer halbeinfachen reellen Jordan-Algebra ein homogener symmetrischer Raum ist, hat auch seine Schüler zu differentialgeometrischen Untersuchungen angeregt. In dem zur Diskussion stehenden Zusammenhang sind U. Hirzebruch ([Hi2], [Hi4]), Helwig ([Helw2], [Helw3]) und insbesondere Loos ([Lo1], [Lo2]) zu nennen, dem mit seinem Begriff des Spiegelungsraumes eine völlig neue Begründung der Theorie der symmetrischen Räume gelang.

Geht man von einem Positivitätsbereich Y in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V aus, so nennt man

$$V + \mathrm{i}Y \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

den zugehörigen *Halbraum*. In [12] stellt Koecher das Konzept einer Theorie von automorphen Formen auf Halbräumen vor. Darin sind die klassisch bekannten elliptischen, Siegelschen, Hermiteschen oder Hilbertschen Modulformen als Spezialfälle enthalten. Koecher skizziert die wesentlichen Ergebnisse einer einheitlichen Theorie von Modulformen auf Halbräumen.

Die „moderne" Methode, automorphe Formen auf halbeinfachen Lie-Gruppen oder auf den adelischen Punkten von reduktiven Gruppen zu untersuchen (vgl. [Bo], [B], [G], [BC]), übertrifft den Koecherschen Ansatz ohne Zweifel an Allgemeinheit. Dennoch ist der Koechersche Ansatz von unabhängigem Interesse, da er die explizite Verbindung zur Theorie der Jordan-Algebren herstellt. Wie nützlich dies sein kann, wird beispielsweise in den von Resnikoff ([R]) und Dorfmeister ([D2]) geführten Untersuchungen über Theta-Funktionen formal-reeller Jordan-Algebren demonstriert. Schließlich wurde der Koechersche Ansatz, automorphe Formen auf Halbräumen zu studieren, auch von Selberg ([Se]) aufgegriffen.

Zur Durchführung des in [12] angekündigten Programms einer Theorie der Modulformen auf Halbräumen bedarf es einer Reduktionstheorie auf Positivitätsbereichen, da der in [12] konstruierte Fundamentalbereich für die Anwendung auf Modulformen nicht optimal zu sein scheint. Dazu greift Koecher in [16], [17] auf einen fast in Vergessenheit geratenen Ansatz von Voronoï ([Vo1], [Vo2]) zu einer geometrisch orientierten Reduktionstheorie quadratischer Formen zurück, der alle Darstellungen des Minimums einer quadratischen Form benutzt. Koecher ändert Voronoïs Definition vollkommener Matrizen etwas ab und überträgt dann die Methode auf eine große Klasse diskontinuierlicher Automorphismengruppen

Γ von Positivitätsbereichen. In dieser Allgemeinheit erscheinen die Ergebnisse der Minkowskischen Reduktionstheorie und der Humbertschen Verallgemeinerung auf algebraische Zahlkörper als Beispiele.

Die für die Theorie der Modulformen so wesentlichen Minkowski-Siegelschen Ungleichungen werden zur Definition der *Minkowskischen Pyramiden* herangezogen. Wie in der Humbertschen Reduktionstheorie kann man unter relativ schwachen Voraussetzungen an Γ folgern, daß es einen Fundamentalbereich von Γ gibt, der in endlich vielen Bildern von Minkowskischen Pyramiden enthalten ist.

Die Koecherschen Untersuchungen sind von Helwig ([Helw1]) weitergeführt und ergänzt worden. Eine Weiterentwicklung des Voronoïschen Ansatzes spielt heutzutage in der Informatik eine wesentliche Rolle: Bei den *Voronoï-Diagrammen* geht es darum, einem Punkt x die Menge aller Punkte zuzuordnen, die von x den kürzesten Abstand haben. Sie wurden 1975 von Shamos und Hoey ([SH]) in die Informatik eingeführt. Eine moderne Darstellung findet man bei Klein ([Kl]).

Positivitätsbereiche sind im wesentlichen dasselbe wie selbstduale reguläre Kegel. Dieser elementare Sachverhalt hat Koecher zu umfangreichen Untersuchungen konvexer Kegel angeregt und zu einer vielbeachteten Vorlesungsausarbeitung an der Universität München, aber auch zu den gemeinsam mit Dorfmeister verfaßten Publikationen [35], [37] geführt; darüber hinaus bestehen enge Beziehungen zu den Arbeiten von Rothaus ([Ro1]–[Ro4]), Vinberg ([V1]–[V3]), Dorfmeister ([D1], [D3]–[D5]) und Sato-Kimura ([SK]).

III Lie-Algebren und Jordan-Algebren ([18], [22]–[24], [BK])

Die tiefen Beziehungen, welche die Theorie der algebraischen Gruppen, der Lie-Gruppen und der Lie-Algebren mit anderen nichtassoziativen Strukturen verbinden, sind seit langem bekannt. In der klassischen Phase ihrer Entwicklung, als es vor allem darum ging, zu den Lie-Algebren oder -Gruppen vom Ausnahmetyp kanonische, besonders leicht zugängliche Modelle anzugeben (vgl. [Sc], [FF], [J4]), war Koecher an diesen Beziehungen mit der Entdeckung der Strukturgruppe ([18]) beteiligt, die ebenfalls einen handfesten analytischen Hintergrund besitzt: Ist Y ein Positivitätsbereich, $\mathcal{J}$ die zugehörige (formal-reelle) Jordan-Algebra und P ihre quadratische Darstellung, so entsteht durch zweimalige logarithmische Differentiation der Transformationsformel für die Norm die Beziehung

$$P(Wu) = WP(u)W^{\sigma} \qquad (u \in \mathcal{J}),$$

wobei W^{σ} den bezüglich σ adjungierten Endomorphismus von $W \in \operatorname{Aut}(Y)$ bezeichnet. Dieses Transformationsverhalten hat Koecher nun zum Anlaß genommen, um in einem rein algebraischen Kontext, also für eine beliebige unitäre Jordan-Algebra $\mathcal{J}$ über einem beliebigen Körper K (char $K \neq 2$), die *Strukturgruppe* $\operatorname{Str}(\mathcal{J})$ von $\mathcal{J}$ als die Gesamtheit derjenigen linearen Automorphismen W von $\mathcal{J}$ zu definieren, zu denen ein linearer Automorphismus $W^{\#}$ existiert mit

$$P(Wu) = WP(u)W^{\#} \qquad (u \in \mathcal{J}).$$

Offenbar ist Str $(\mathcal{J})$ eine lineare algebraische Gruppe. Spezialisiert man $\mathcal{J}$ zu einer zentral-einfachen Ausnahme-Jordan-Algebra (der Dimension 27) über K, so ist die Lie-Algebra dieser algebraischen Gruppe bereits von Chevalley-Schafer ([CS]) ausgiebig untersucht und (nach Reduktion modulo ihrem Zentrum) als eine Ausnahme-Lie-Algebra vom Typ E_6 identifiziert worden.

In der zweiten Hälfte der sechziger Jahre hat Koecher sodann die Beziehungen zwischen Lie-Algebren und Jordan-Algebren durch einen Beitrag neu belebt, der einer beliebigen unitären Jordan-Algebra $\mathcal{J}$ über dem Körper K eine Lie-Algebra Lie $\mathcal{J}$ in der Weise zuordnet, daß $\mathcal{J}$ als Untervektorraum von Lie $\mathcal{J}$ kanonisch realisiert und die Multiplikation von $\mathcal{J}$ durch diejenige von Lie $\mathcal{J}$ vermöge einer expliziten Formel vollständig beschrieben werden kann. Dieser in [22]–[24] dargestellte Beitrag hat inzwischen unter dem Namen Tits-Koecher-Algebra Berühmtheit erlangt. In der Tat war es Tits ([Ti1]) schon einige Jahre zuvor gelungen, ein Verfahren zur Konstruktion von Lie-Algebren mit Hilfe von Jordan-Algebren zu entwickeln, von dem sich nun zeigte, daß es über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper mit dem Koecherschen äquivalent, über einem beliebigen Grundkörper jedoch allgemeiner ist; andererseits besitzt die Koechersche Konstruktion wohl den Vorzug größere Einfachheit und Transparenz. Im übrigen verdankt man Tits ([Ti2]) eine wesentliche Verallgemeinerung seiner ursprünglichen Konstruktion und Kantor ([Ka1], vgl. auch [27]) eine Methode, mit Hilfe polynomialer Vektorfelder Lie-Algebren aus Jordan-Algebren zu gewinnen, die sich nachträglich (vgl. [27]) mit dem von Koecher angegebenen Verfahren als äquivalent erwiesen hat. Im folgenden wird daher Lie $\mathcal{J}$ als die *Tits-Kantor-Koecher-Algebra* von $\mathcal{J}$ bezeichnet.

Um diese explizit beschreiben zu können, sind die folgenden zusätzlichen Bestimmungsstücke erforderlich:

- Die *innere Strukturalgebra*, welche unter Verwendung der Lie-Klammer linearer Endomorphismen durch

$$\operatorname{instr}(\mathcal{J}) = L(\mathcal{J}) + [L(\mathcal{J}), L(\mathcal{J})]$$

definiert werden kann und für halbeinfache Jordan-Algebren endlicher Dimension über einen Körper der Charakteristik Null mit der Lie-Algebra der algebraischen Gruppe Str $(\mathcal{J})$ übereinstimmt.
- Die *kanonische Involution* der inneren Strukturalgebra, welche durch

$$T \mapsto -T^* \quad \text{mit} \quad T^* = 2L(Te) - T \qquad (e = 1_{\mathcal{J}})$$

erklärt ist.
- Spezielle Elemente der inneren Strukturalgebra, welche durch die Abbildungen

$$L(u, v) = L(uv) + [L(u), L(v)] \qquad (u, v \in \mathcal{J})$$

gegeben sind. (Übrigens ist $L(u, v)$ die Linksmultiplikation mit u im v-Homotop von $\mathcal{J}$.)

Nunmehr kann auf dem K-Vektorraum

(6) $\quad \operatorname{Lie} \mathscr{J} = \mathscr{L}_{-1} \oplus \mathscr{L}_0 \oplus \mathscr{L}_1$

mit $\quad \mathscr{L}_{-1} = \mathscr{L}_1 = \mathscr{J}, \ \mathscr{L}_0 = \operatorname{instr}(\mathscr{J})$

eine Algebren-Struktur erklärt werden, indem man für $u_i, v_i \in \mathscr{J}$, $T_i \in \operatorname{instr}(\mathscr{J})$, $i = 1, 2$, definiert:

$$[u_1 \oplus T_1 \oplus v_1, u_2 \oplus T_2 \oplus v_2] = u \oplus T \oplus v$$

mit

(7) $\quad u = T_1 u_2 - T_2 u_1,$

(8) $\quad T = [T_1, T_2] + 2L(u_1, v_2) - 2L(u_2, v_1),$

(9) $\quad v = T_2^* v_1 - T_1^* v_2.$

Unter Verwendung von Standard-Identitäten aus der Theorie der Jordan-Algebren verifiziert man, daß $\operatorname{Lie} \mathscr{J}$ auf diese Weise zu einer Lie-Algebra wird, welche in (6) eine $\mathbb{Z}$-Graduierung der Länge 3 und in der Abbildung

$$\theta : \operatorname{Lie} \mathscr{J} \to \operatorname{Lie} \mathscr{J}, \ \theta(u \oplus T \oplus v) = v \oplus (-T^*) \oplus u,$$

einen Automorphismus der Periode 2 besitzt; dieser kehrt die Graduierung um, vertauscht also $\mathscr{L}_1$ mit $\mathscr{L}_{-1}$ und läßt $\mathscr{L}_0$ invariant. Identifiziert man $\mathscr{J}$ über den ersten Summanden kanonisch in $\operatorname{Lie} \mathscr{J}$, so liefert die elementare Relation

(10) $\quad uv = \dfrac{1}{2}[[u, \theta(e)], v] \qquad (u, v \in \mathscr{J})$

nunmehr die gewünschte explizite Beschreibung der Algebren-Struktur von $\mathscr{J}$ durch diejenige von $\operatorname{Lie} \mathscr{J}$.

Die herausragende Bedeutung der in dieser Form auf Koecher ([22]) zurückgehenden Konstruktion gegenüber den von Tits ([Ti1]) und Kantor ([Ka1]) angegebenen Varianten liegt in dem prägnanten Formalismus, der die Algebrenstrukturen von $\mathscr{J}$ und $\operatorname{Lie} \mathscr{J}$ durch die Relationen (7)–(10) miteinander verbindet. Über Körpern der Charakteristik Null gestattet dieser eine Fülle bemerkenswerter Anwendungen, von denen hier nur eine kleine Auswahl genannt werden kann. So ist es mit Hilfe der Tits-Kantor-Koecher-Algebra möglich, etwa den klassischen Satz von Hermann Weyl über die vollständige Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren oder auch den Satz von Levi-Malcev-Harish Chandra, wonach jede Lie-Algebra eine zum Radikal komplementäre Teilalgebra besitzt und je zwei solche Teilalgebren unter inneren Automorphismen konjugiert sind, von Lie-Algebren auf Jordan-Algebren zu übertragen ([22] Corollaries of Theorems 7, 8 und [KR]). Obwohl das Ergebnis dieser Übertragungen zum Zeitpunkt seiner Publikation bereits bekannt war, stellen diese gleichwohl einen überaus bedeutsamen methodischen Fortschritt dar, weil alle anderen *bis heute* bekannten Beweise dieser Tatsachen nicht etwa intrinsisch verlaufen, sondern auf der Albertschen Klassifikation ([A3]) der einfachen Jordan-Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper basieren.

Die Tits-Kantor-Koecher-Algebra hat gerade in ihrer von Koecher angegebenen Form eine Fülle daran anknüpfender Publikationen ausgelöst. So ist sie beispielsweise von Allison ([Al2]) für *strukturierbare Algebren* an Stelle von Jordan-Algebren nachgebildet worden; als Ergebnis erhält man alle isotropen einfachen Lie-Algebren der Charakteristik Null ([Al3]). In eine etwas andere Richtung weisende Verallgemeinerungen findet man in den Arbeiten von Hein ([Hei1]–[Hei5]) und Allison ([Al1]). Besondere Erwähnung verdient ferner die erste, wenngleich lückenhafte Klassifikation der einfachen Jordan-Superalgebren durch Kac ([K]), der die Tits-Kantor-Koecher-Algebra auch in diesem Kontext simulierte und so die bereits vollzogene Klassifikation der einfachen Lie-Superalgebren verwenden konnte. In neuerer Zeit schließlich findet die Tits-Kantor-Koecher-Algebra auch in der mathematischen Physik vielfältige Verwendung ([ATGS], [BG1], [BG2], [Gü1]–[Gü3], [GS], [GST]).

IV Beschränkte symmetrische Gebiete und Jordan-Tripelsysteme ([25]–[28], [30], [31])

Dem Eingeweihten konnte nicht entgehen, daß Koecher auf seine Version der Tits-Kantor-Koecher-Algebra, ähnlich wie im Falle der quadratischen Darstellung und des Homotopiebegriffs, durch analytische Überlegungen geführt worden war: Bezeichnet $\mathscr{J}$ eine formal-reelle Jordan-Algebra, Y den $\mathscr{J}$ im Sinne der Hertneckschen Korrespondenz entsprechenden homogenen Positivitätsbereich und

$$\hat{\mathscr{J}} = \mathscr{J} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathscr{J} \oplus \mathrm{i}\mathscr{J}$$

ihre Komplexifizierung (die nach Wahl einer $\mathbb{R}$-Basis von $\mathscr{J}$ mit $\mathbb{C}^N$, $N = \dim_{\mathbb{R}} \mathscr{J}$, identifiziert werden kann), so ist

$$Z = \mathscr{J} + \mathrm{i}Y = \{u + \mathrm{i}y;\, u \in \mathscr{J}, y \in Y\}$$

ein Gebiet im $\mathbb{C}^N$ (eben der zu Y gehörige Halbraum), das sich unter dem Einfluß der *Cayley-Transformation* (also der in die Sprache der Jordan-Algebren übertragenen gebrochen-linearen Transformation $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$) in ein beschränktes symmetrisches Gebiet des $\mathbb{C}^N$ verwandelt ([Hi1]). Folglich kann die Gruppe Aut(Z) der holomorphen Automorphismen von Z in der Weise mit der Struktur einer reellen Lie-Transformationsgruppe versehen werden, daß die zugrundeliegende Topologie übereinstimmt mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen ([He] VIII § 3). *Die Lie-Algebra dieser reellen Lie-Transformationsgruppe ist nun*, wie man sich z. B. mit Hilfe von [25] Satz 4.4 leicht überlegt, *zur Tits-Kantor-Koecher-Algebra von $\mathscr{J}$ kanonisch isomorph.*

Das von U. Hirzebruch ([Hi1]) angegebene Erzeugendensystem der Gruppe Aut(Z) veranlaßt Koecher in [25], für eine beliebige endlich-dimensionale Jordan-Algebra $\mathscr{J}$ über dem Körper K die von der Strukturgruppe sowie den Transformationen $x \mapsto x+u$ $(u \in \mathscr{J})$, $x \mapsto -x^{-1} = -P(x)^{-1}x$ erzeugte Gruppe

$\Xi = \Xi(\mathscr{J})$ birationaler Selbstabbildungen zu untersuchen. Indem er die Elemente von Ξ durch eine Differentialgleichung charakterisierte, konnte er zeigen, daß Ξ eine algebraische Gruppe ist. Die Frage nach der Eindeutigkeit der Darstellung von Elementen aus Ξ als Produkte der Erzeugenden führte Koecher überdies auf eine Äquivalenzrelation in der Algebra $\mathscr{J}$, die auch in beliebigen nicht-kommutativen Ringen sinnvoll betrachtet werden kann ([26]).

Die Realisierung der Tits-Kantor-Koecher-Algebra Lie $\mathscr{J}$ als Lie-Algebra der Automorphismengruppe eines beschränkten symmetrischen Gebietes (und damit von polynomialen Vektorfeldern, vgl. [27] III § 1,4.) kommt erst dann in ihrer ganzen Tragweite zur Geltung, wenn man die von Koecher ([28]) gemachte, von Meyberg ([Me1], [Me2]) ausgebaute fundamentale Beobachtung registriert, daß sie gar nicht in vollem Umfang von der Jordan-Algebra $\mathscr{J}$, sondern lediglich von den linearen Abbildungen $L(u, v)$ $(u, v \in \mathscr{J})$ und damit von dem *Jordan-Tripel-Produkt* abhängt, welches durch

$$\{uvw\} = L(u, v)w = (uv)w + u(vw) - v(uw)$$

für $u, v, w \in \mathscr{J}$ erklärt ist. In der Tat entsteht in Lie $\mathscr{J}$ auch dann eine Lie-Algebra, wenn wir es in $\mathscr{J}$ nicht mit einer Jordan-*Algebra*, sondern lediglich mit einem *Jordan-Tripelsystem* zu tun haben, d. h. einem K-Vektorraum, versehen mit einer trilinearen Verknüpfung $(u, v, w) \mapsto \{uvw\}$, welche in den beiden äußeren Argumenten symmetrisch ist und der Identität

$$\{uv\{xyz\}\} - \{xy\{uvz\}\} = \{\{uvx\}yz\} - \{x\{vuy\}z\}$$

genügt. Genauer verwandelt die Tits-Kantor-Koecher-Konstruktion ein beliebiges Jordan-Tripelsystem in ein Paar $(\mathscr{L}, \theta)$ bestehend aus einer Lie-Algebra $\mathscr{L}$ mit $\mathbb{Z}$-Graduierung der Länge 3 und einem involutorischen Automorphismus θ, der die Graduierung umkehrt. Fragt man nach *allen* Paaren $(\mathscr{L}, \theta)$, welche auf diese Weise zustandekommen und für die θ eine Cartan-Involution ist, so zeigt sich unter naheliegenden Regularitätsbedingungen ([28] II § 5), daß es sich dabei gerade um diejenigen Lie-Algebren mit Cartan-Involution handelt, die in der Cartanschen Klassifikationstheorie der beschränkten symmetrischen Gebiete auftreten (vgl. [Hel] VIII § 7).

Dieser Sachverhalt legt eine fundamentale Beziehung zwischen Jordan-Tripelsystemen und beschränkten symmetrischen Gebieten nahe, die, ansatzweise schon bei U. Hirzebruch ([Hi3]) erkennbar, in vollem Umfange allerdings erst durch Koechers bahnbrechende Untersuchung [28] hergestellt wurde. In der Folgezeit haben insbesondere Meyberg ([Me3]–[Me6]) und Loos ([Lo2]–[Lo5]) die algebraische Theorie der Jordan-Tripelsysteme weiter vorangetrieben. Nachdem durch die Theorie der Jordan-Paare ([Lo6]) ein erster Abschluß erreicht worden war, erhielt dieser Zugang zu den beschränkten symmetrischen Gebieten seine in gewissem Sinne definitive Gestalt durch Loos ([Lo7]) im Jahre 1977. *Inhaltlich* gipfelt er in einer kanonischen Bijektion zwischen beschränkten symmetrischen Kreisgebieten und positiven hermiteschen Jordan-Tripelsystemen; *methodisch* hat er zu einer weitgehenden Ablösung der im klassischen Zugang vorherrschenden Techniken der Lie-Theorie durch die demgegenüber wesentlich elementareren Techniken der Jordan-Theorie geführt. Im übrigen ist er für eine Vielzahl neuerer

Forschungsaktivitäten verantwortlich, die hier nur in groben Zügen angedeutet werden können.

So hat Loos die algebraische Gruppe $\Xi = \Xi(\mathscr{J})$, die übrigens auch in einer neueren Arbeit von Tits ([Ti3]) eine nicht unbedeutende Rolle spielt, in einen wesentlich allgemeineren Zusammenhang gestellt und ihr eine systematische Untersuchung gewidmet ([Lo9]). Die in [25] diskutierte Äquivalenzrelation wird in [Lo8] modifiziert und zu einer einheitlichen, unter sehr allgemeinen Umständen lebensfähigen Realisierung der kompakten hermiteschen symmetrischen Räume als projektiv algebraische Varietäten herangezogen. Auf analytischer Seite hat die von W. Kaup ([Kau2]–[Kau4]) nach Vorarbeiten von Harris ([H]) erbrachte Klassifikation der unendlich-dimensionalen beschränkten symmetrischen Gebiete deutlich gezeigt, wie sehr der Koechersche Ansatz der Problemstellung angepaßt ist, weil hier der Versuch, die klassischen Methoden der Lie-Theorie in vollem Umfange zu übertragen, nicht zum Erfolg führt. Aber auch die Behandlung analytischer Fragen endlich-dimensionaler beschränkter symmetrischer Gebiete ist durch die Beziehung zu Jordan-Strukturen nachhaltig gefördert worden; hier verdienen die Untersuchungen von Upmeier ([U1]–[U4]) über Toeplitz-Operatoren und harmonische Analysis auf beschränkten symmetrischen Gebieten ebenso Erwähnung wie diejenigen von Lassalle ([L1], [L2]) über den Poisson-Kern und die Huasche Gleichung. Schließlich ist es Satake ([S3]) und vor allem Dorfmeister ([D6], [D7]) gelungen, die algebraische Beschreibung beschränkter symmetrischer Gebiete auf allgemeinere Siegel-Gebiete auszudehnen; in diesen Kontext gehören ebenso die Untersuchungen von W. Kaup, Matsushima und Ochiai ([KMO]) sowie von W. Kaup ([Kau1]). Eine systematische Darstellung des gesamten Problemkreises findet man in [S4]. Auch die von Koecher initiierte Theorie der Jordan-Tripelsysteme hat inzwischen eine eindrucksvolle Entwicklung durchgemacht, die hier nur mit wenigen Stichworten angedeutet werden kann. So verdankt man Neher neben der Entwicklung der aus Vorarbeiten von McCrimmon ([McC4]) und McCrimmon-Meyberg ([MM]) hervorgegangenen, höchst vielseitigen *Grid-Methode* ([N6]) eine algebraische Strukturtheorie endlich-dimensionaler ([N1]–[N5]) und Zel'manov ([Z]) eine solche beliebiger Jordan-Tripelsysteme. Besonders intensiv sind Jordan-Tripelsysteme während der letzten fünfzehn Jahre im Zusammenhang mit Problemen der Funktionalanalysis untersucht worden. Über die diesbezügliche Literatur kann sich der Leser in den Monographien von Upmeier ([U3]) und Neher ([N6]) informieren.

V Nichtassoziative Algebra ([BK], [21], [32]–[34], [36], [38], [39])

Auch die unter dieser Rubrik zusammengefaßten Publikationen können ihren analytischen Hintergrund nicht verleugnen, sind allerdings, mit Ausnahme von [34], mehr dem Geist als einem konkreten Problemkreis der Analysis verhaftet.

In der Monographie [BK] beispielsweise wird der Differentialkalkül in der nichtassoziativen Algebra gewissermaßen hoffähig gemacht. Damit soll, wie in

[21] dargelegt, ein übergeordneter Standpunkt eingenommen werden, der durchaus verschiedene Algebrenklassen (wie etwa alternative und Jordan-Algebren) auf einheitliche Weise zu behandeln gestattet, ohne allzu intensiv mit speziellen Identitäten arbeiten zu müssen. Ursprünglich auf endlich-dimensionale Algebren beschränkt, kann er auch im Unendlichdimensionalen durchaus nutzbringend verwendet werden ([McC1], [McC2], [McC5]). Wie tragfähig dieser Zugang tatsächlich ist, zeigt insbesondere die Behandlung der *Hauptnorm* (oder *generischen Norm*) einer strikt potenzassoziativen Algebra, die als der normierte genaue Nenner der *Inversion*, also der rationalen Abbildung $x \mapsto x^{-1}$, charakterisiert wird ([BK] II § 4, 4.) – ein Tatbestand, dem man alle relevanten Informationen ohne Schwierigkeit entnehmen kann und der im übrigen auch für assoziative Algebren Interesse verdient, weil dort, zumindest im separablen Falle, die Hauptnorm mit der reduzierten Norm übereinstimmt ([BK] III Satz 4.6). Bezüglich der demgegenüber doch einigermaßen künstlichen traditionellen Einführung der reduzierten Norm bei zentral-einfachen assoziativen Algebren vergleiche man [We] IX Proposition 6. Inzwischen hat sich der Differentialkalkül, wie man etwa den Monographien von Jacobson ([J2]) und Springer ([Sp]), aber auch [McC3] und [Kü] entnehmen kann, in der nichtassoziativen Algebra weitgehend durchgesetzt.

In [32], [36] werden die im Koecherschen Werk so vielfältig vertretenen Begriffe wie quadratische Darstellung, Homotopie, Jordan-Tripelsystem, Tits-Kantor-Koecher-Algebra in den allgemeinen Rahmen der *Algebra der Algebren* gestellt: Diese entsteht, indem man die Gesamtheit $\mathrm{Alg}(V)$ aller (nichtassoziativen) Algebrenstrukturen auf einem Vektorraum V nach kanonischer Identifikation mit $\mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$ nicht nur zu einem Vektorraum macht, sondern darüber hinaus nach Wahl eines Elementes $0 \neq u \in V$ mit einer Algebrenstruktur versieht ([32] § 1, 2.); die Algebra $\mathrm{Alg}(V)$ erweist sich dabei als einfach und bis auf Isomorphie von u unabhängig. In [34] geht es um eine naheliegende, in der Literatur gleichwohl stiefmütterlich behandelte Beziehung zwischen nichtassoziativer Algebra und Analysis, derzufolge nämlich jede *Riccatische Differentialgleichung* in der Form

$$\dot{x} = x^2$$

geschrieben werden kann, wobei man das Quadrat zur Rechten in einer geeigneten kommutativen $\mathbb{R}$-Algebra A von endlicher Dimension zu bilden hat. Es zeigt sich ([34] Satz A), daß die Gruppe der lösungserhaltenden umkehrbaren reell-analytischen Funktionskeime im Nullpunkt durch eine gewisse Jordan-Unteralgebra von A parametrisiert wird, falls A ein Einselement besitzt. Die algebrentheoretische Betrachtungsweise beim Studium gewöhnlicher Differentialgleichungen ist später vor allem von Röhrl ([Rö1], [Rö2]) und Walcher ([W1]–[W3]) aufgegriffen worden.

*

Zusammengefaßt machen die vorstehenden Ausführungen deutlich, daß das mathematische Werk Max Koechers vor allem von zwei übergreifenden Prinzipien beherrscht wird: Zum einen von dem steten Bemühen, zu nichttrivialen Gegenständen der Mathematik einen in gewissem Sinne elementaren Zugang zu gewinnen, zum anderen von dem mit großem Ideenreichtum gepaarten tiefen Verständnis für die verborgenen Mechanismen, welche es auch noch so disparaten Teilgebieten der Mathematik erlauben, miteinander zu kooperieren. In einer Zeit, da die Einheit selbst der Reinen Mathematik durch das exponentielle Wachstum der wissenschaftlichen Erkenntnis ernstlich bedroht ist, kommt beiden Aspekten in gleichem Maße immer größere Bedeutung zu. Indem er neue Wege suchte und fand, auf denen man von den Anfängen möglichst rasch zu fortgeschrittenen Bereichen der Mathematik vorstoßen kann, verwirklichte Max Koecher die Artinsche Forderung nach Vereinfachung und gedanklicher Durchdringung einer mathematischen Theorie auf eindrucksvolle Weise. Indem er die verborgenen Mechanismen bloßlegte, welche das globale Gefüge durchaus verschiedener mathematischer Disziplinen in seinem Innersten zusammenhalten, erwies er sich als ein Forscher von seltener Originalität. Indem er schließlich beide Aspekte auf beispielhafte Weise miteinander verknüpfte, schuf er ein mathematisches Gesamtwerk, das seinen Platz in der internationalen Literatur längst gefunden hat und, wie wir glauben, die Vertreter unserer Zunft auch in den kommenden Jahrzehnten zu neuen Forschungen inspirieren wird.

Literaturverzeichnis

[A1] Albert, A. A.: On Jordan algebras of linear transformations. Trans. Amer. Math. Soc. **59** (1946) 524–555

[A2] –: The Wedderburn principal theorem for Jordan algebras. Ann. of Math. (2) **48** (1947) 1–7

[A3] –: A structure theory for Jordan algebras. Ann. of Math. (2) **48** (1947) 546–567

[Al1] Allison, B. N.: A construction of Lie algebras from *J*-ternary algebras. Amer. J. Math. **98** (1976) 285–294

[Al2] –: A class of nonassociative algebras with involution containing the class of Jordan algebras. Math. Ann. **237** (1978) 133–156

[Al3] –: Models of isotropic simple Lie algebras. Comm. Algebra **7**(17) (1979) 1835–1875

[An] Andrianov, A. N.: Quadratic forms and Hecke operators. Grundlehren Math. Wiss. **286**. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1987

[Ar1] Arakawa, T.: Dirichlet series corresponding to Siegel's modular forms. Math. Ann. **238** (1978) 157–173

[Ar2] –: Dirchlet series corresponding to Siegel's modular forms of degree n with level N. Tôhoku Math. J. **42** (1990) 261–286

[ATGS] Awada, M.; Townsend, P. K.; Günaydin, M.; Sierra, G.: Convex cones, Jordan algebras and the geometry of D^9 Maxwell-Einstein supergravity. Class. and Quant. Grav. **2** (1985) 801–814

[B] Baily, W. L.: Introductory lectures on automorphic forms. Tokyo – Princeton: Iwanami Shoten und Princeton University Press 1973

[BG1] Bars, I.; Günaydin, M.: Dynamical theory of subconstituents based on ternary algebras. Phys. Rev. D. (3)**22** (1980) 1403–1413

[BG2] –: Unitary representations of non-compact supergroups. Comm. Math. Phys. **91** (1983) 31–51

[Bö] Böcherer, S.: Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß. Preprint, Freiburg 1987

[BSP] Böcherer, S.; Schulze-Pillot, R.: Dirichlet series of Koecher and Maaß and modular forms of weight 3/2. Math. Z. **209** (1992) 273–287

[Bo] Borel, A.: Introduction to automorphic forms, pp. 199–210. In Borel, A.; Mostow, G. D. (eds.): Algebraic groups and discontinuous subgroups. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. IX. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1966

[BC] Borel, A.; Casselman, W. (eds.): Automorphic forms, representations and L-functions. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XXXIII. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1979

[Br1] Braun, H.: Der Basissatz für hermitesche Modulformen. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **19** (1955) 134–148

[Br2] –: Eine Frau und die Mathematik 1933–1940. (Hrsg. von M. Koecher). Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1990

[BK] Braun, H.; Koecher, M.: Jordan-Algebren. Grundlehren Math. Wiss. **128**. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1966

[CS] Chevalley, C.; Schafer, R. D.: The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **36** (1950) 137–141

[D1] Dorfmeister, J.: Zur Konstruktion homogener Kegel. Math. Ann. **216** (1975) 79–96

[D2] –: Theta functions for special, formally real Jordan algebras. (A remark on a paper by H. L. Resnikoff.) Invent. Math. **44** (1978) 103–108

[D3] –: Peirce-Zerlegungen und Jordan-Strukturen zu homogenen Kegeln. Math. Z. **169** (1979) 179–194

[D4] –: Inductive construction of homogeneous cones. Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979) 321–349

[D5] –: Algebraic description of homogeneous cones. Trans. Amer. Math. Soc. **255** (1979) 64–89

[D6] –: Quasisymmetric Siegel domains and the automorphisms of homogeneous Siegel domains. Amer. J. Math. **102** (1980) 537–563

[D7] –: Homogeneous Siegel domains. Nagoya Math. J. **86** (1982) 39–83

[FK1] Faraut, J.; Korányi, A.: Fonctions hypergéométriques associées aux cônes symétriques. C. R. Sci. Paris **307** (1988) 555–558

[FK2] –: Function spaces and reproducing kernels on bounded symmetric domains. J. Funct. Anal. **88** (1990) 64–89

[FT] Faraut, J.; Travaglini, G.: Bessel functions associated with representations of formally real Jordan algebras. J. Funct. Anal. **71** (1987) 123–141

[FF] Faulkner, J. R.; Ferrar, J. C.: Exceptional Lie algebras and related algebraic and geometric structures. Bull. London Math. Soc. **9** (1977) 1–35

[F1] Freitag, E.: Siegelsche Modulfunktionen. Grundlehren Math. Wisss. **254**, Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1983

[F2] –: Hilbert modular forms. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1990

[G] Gelbart, S.: Automorphic forms on adele groups. Ann. Math. Stud. **83**. Princeton – Tokyo: Princeton University Press und University of Tokyo Press 1975

[Gö] Götzky, F.: Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher. Math. Ann. **100** (1928) 411–437

[Gü1] Günaydin, M.: Unitary highest weight representations of noncompact supergroups. J. Math. Phys. **29** (1988) 1275–1282

[Gü2] –: Vertex operator construction of nonassociative algebras and their affinizations. J. Math. Phys. **30** (1989) 937–942

[Gü3] –: On an exceptional nonassociative superspace. J. Math. Phys. **31** (1990) 1776–1782

[GS] Günaydin, M.; Sacliogu, C.: Oscillator-like unitary reprentations of non-compact groups with a Jordan structure and the non-compact groups of supergravity. Comm. Math. Phys. **87** (1982) 159–179

[GST] Günaydin, M.; Sierra, G.; Townsend, P. K.: The geometry of N^2 Maxwell-Einstein supergravity and Jordan algebras. Nuclear Phys. B **242** (1984) 244–268

[H] Harris, L.: Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces. Lect. Notes Math. **364**, pp. 13–40. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973

[He1] Hecke, E.: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. **112** (1936) 664–699

[He2] –: Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I, II. Math. Ann. **114** (1937) 1–28, 316–351

[He3] –: Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Medd. **17** (1940)

[Hei1] Hein, W.: Innere Lie-Tripelsysteme und $\mathcal{J}$-ternäre Algebren. Math. Ann. **213** (1975) 195–202

[Hei2] –: A construction of Lie algebras by triple systems. Trans. Amer. Math. Soc. **205** (1975) 79–95
[Hei3] –: On the structure of reduced $\mathscr{J}$-ternary algebras of degree > 2. Math. Z. **176** (1981) 521–539
[Hei4] –: On the structure of reduced $\mathscr{J}$-ternary algebras of degree 2. J. Algebra **82** (1983) 157–184
[Hei5] –: Imbedding of pair algebras into Lie algebras. Indag. Math. **89** (1986) 319–336
[Hel] Helgason, S.: Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. New York: Academic Press 1978
[Helw1] Helwig, K.-H.: Zur Koecherschen Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen. I, II, III. Math. Z. **91** (1966) 152–168, 169–178, 355–362
[Helw2] –: Halbeinfache reelle Jordan-Algebren. Math. Z. **109** (1969) 1–28
[Helw3] –: Jordan-Algebren und symmetrische Räume. I. Math. Z. **115** (1970) 315–349
[Her] Hertneck, C.: Positivitätsbereiche und Jordan-Strukturen. Math. Ann. **146** (1962) 433–455
[Hi1] Hirzebruch, U.: Halbräume und ihre holomorphen Automorphismen. Math. Ann. **153** (1964) 395–417
[Hi2] –: Über Jordan-Algebren und kompakte Riemannsche symmetrische Räume vom Rang 1. Math. Z. **90** (1965) 339–354
[Hi3] –: Über Jordan-Algebren und beschränkte symmetrische Gebiete. Math. Z. **94** (1966) 387–390
[Hi4] –: Über eine Realisierung der hermiteschen symmetrischen Räume. Math. Z. **115** (1970) 371–382
[I] Imai, K.: Generalization of Hecke's correspondence to Siegel modular forms. Amer. J. Math. **102** (1980) 903–936
[Io] Iochum, B.: Cônes autopolaires et algèbres de Jordan. Lect. Notes Math. **1049**. Berlin: Springer 1984
[JJ] Jacobson, F. D.; Jacobson, N.: Classification and representation of semisimple Jordan algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949) 141–169
[J1] Jacobson, N.: A theorem on the structure of Jordan algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956) 140–147
[J2] –: Structure and representations of Jordan algebras. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. XXXIX, Providence, RI, 1968
[J3] –: Lectures on Quadratic Jordan Algebras. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research 1969
[J4] –: Exceptional Lie algebras. New York: Marcel Dekker 1971
[Jo1] Jordan, P.: Über eine Klasse nichtassoziativer hyperkomplexer Algebren. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1932) 569–575
[Jo2] –: Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1933) 209–214
[Jo3] –: Über die Multiplikation quantenmechanischer Grössen. Z. Phys. **80** (1933) 285–291
[JNW] Jordan, P.; Neumann, J. v.; Wigner, E.: On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Ann. of Math. (2)**36** (1934) 29–64
[K] Kac, V. G.: Classification of simple Z-graded Lie super algebras and simple Jordan super algebras. Comm. Algebra **5** (1977) 1375–1400
[Ka1] Kantor, I. L.: Classification of irreducible transitively differential groups. Soviet Math. Dokl. **5** (1964) 1404–1407 [russ.: Dokl. Akad. Nauk. SSSR **158** (1964) 1271–1274]
[Ka2] –:Models of exceptional Lie algebras. Soviet Math. Dokl. **14** (1973) 254–258
[Kau1] Kaup, W.: Einige Bemerkungen über polynomiale Vektorfelder, Jordan-Algebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten. Math. Ann. **204** (1973) 131–144
[Kau2] –: Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds. Math. Ann. **228** (1977) 39–64
[Kau3] –: Über die Klassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension. I, II. Math. Ann. **257** (1981) 463–483; **262** (1983) 57–75
[Kau4] –: A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces. Math. Z. **183** (1983) 503–529
[KMO] Kaup, W.; Matsushima, Y.; Ochiai, T.: On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains. Amer. J. Math. **92** (1970) 475–497
[Kl] Klein, R.: Concrete and Abstract Voronoï Diagrams. Lect. Notes Computer Science **400**, Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1989

[Kli] Klingen, H.: Introductory lectures on Siegel modular forms. Cambridge Stud. Adv. Math. **20**. Cambridge: Cambridge University Press 1990

[Ko] Koranyi, A.: Monotone functions on formally real Jordan algebras. Math. Ann. **269** (1984) 73–76

[Kr1] Krieg, A.: Modular forms of half-spaces of quaternions. Lect. Notes Math. **1143**. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1985

[Kr2] –: Koecher-Maaß-series for modular forms of quaternions. Manuscripta Math. **66** (1990) 431–451

[Kü] Kühn, O.: Construction of Jordan pairs by the quasi-inverse. J. Algebra **50** (1978) 265–273

[KR] Kühn, O.; Rosendahl, A: Wedderburnzerlegung für Jordan-Paare. Manuscripta Math. **24** (1978) 403–435

[L1] Lassalle, M.: Systèmes triples de Jordan, *R*-espaces symétrique et equations de Hua. C. R. Sci. Paris **298** (1984) 501–504

[L2] –: Sur la valeur au bord du noyau de Poisson d'un domaine borné symétrique. Math. Ann. **268** (1984) 417–423

[L3] –: Les équations de Hua d'un domaine borné symétrique du type tube. Invent. Math. **77** (1984) 129–161

[L4] –: Algèbres de Jordan et ensembles de Wallach. Invent. Math. **89** (1987) 375–393

[Lo1] Loos, O.: Symmetric spaces. I, II. Reading, MA: W. A. Benjamin 1969

[Lo2] –: Lectures on Jordan triples. University of British Columbia Lecture Notes, Vancouver 1971

[Lo3] –: Alternative Tripelsysteme. Math. Ann. **198** (1972) 205–238

[Lo4] –: Assoziative Tripelsysteme. Manuscripta Math. **7** (1972) 103–112

[Lo5] –: Representations of Jordan triples. Trans. Amer. Math. Soc. **185** (1973) 199–211

[Lo6] –: Jordan pairs. Lect. Notes Math. **460**. Berlin: Springer 1975

[Lo7] –: Bounded symmetric domains. University of California Lectures Notes, Irvine, CA, 1977

[Lo8] –: Homogeneous algebraic varieties defined by Jordan pairs. Monatsh. Math. **86** (1978) 107–129

[Lo9] –: On algebraic groups defined by Jordan pairs. Nagoya Math. J. **74** (1979) 23–66

[M1] Maaß, H.: Modulformen zweiten Grades und Dirichletreihen. Math. Ann. **122** (1950) 90–108

[M2] –: Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulformen. Math. Ann. **124** (1951) 87–122

[M3] –: Siegel's modular forms and Dirichlet series. Lect. Notes Math. **216**. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1971

[Ma] Macdonald, I. G.: Jordan algebras with three generators. Proc. London Math. Soc. (3)**10** (1960) 395–408

[McC1] McCrimmon, K.: Generically algebraic algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967) 527–551

[McC2] –: Koecher's principle for quadratic Jordan algebras. Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971) 39–43

[McC3] –: Axioms for inversion in Jordan algebras. J. Algebra **47** (1977) 201–222

[McC4] –: Compatible Peirce decompositions of Jordan triple systems. Pacific J. Math. **103** (1982) 57–102

[McC5] –: Adjoints and Jordan algebras. Comm. Algebra **13** (1985) 2567–2596

[MM] McCrimmon, K.; Meyberg, K.: Coordinatization of Jordan triple systems. Comm. Algebra **9** (1981) 1495–1542

[Me1] Meyberg, K.: Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren. Math. Z. **115** (1970) 58–78

[Me2] –: Zur Konstruktion von Lie-Algebren aus Jordan-Tripelsystemen. Manuscripta Math. **3** (1970) 115–132

[Me3] –: Identitäten und das Radikal in Jordan-Tripelsystemen. Math. Ann. **197** (1972) 203–220

[Me4] –: Von Neumann regularity in Jordan triple systems. Arch. Math. **23** (1972) 589–593

[Me5] –: Lectures on algebras and triple systems. University of Virginia Lecture Notes, Charlottesville, VA, 1972

[Me6] –: A characterization of von Neumann regular Jordan triple systems. Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975) 25–27

[MR] Muhly, P. S.; Renault, J. N.: C^*-Algebras of multivariate Wiener-Hopf operators. Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982) 1–44

[N1] Neher, E.: Cartan-Involutionen von halbeinfachen reellen Jordan-Tripelsystemen. Math. Z. **169** (1979) 271–292
[N2] –: Klassifikation der einfachen reellen speziellen Jordan-Tripelsysteme. Manuscripta Math. **31** (1980) 197–215
[N3] –: Jordan triple forms of Jordan algebras. Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1982) 386–388
[N4] –: Jordan triple systems with completely reducible derivation and structure algebras. Pacific J. Math. **113** (1984) 137–164
[N5] –: On triagonal elements and centralizers in Jordan triple systems. J. Algebra **90** (1984) 18–36
[N6] –: Jordan triple systems by the grid approach. Lect. Notes Math. **1280**. Berlin: Springer 1987
[N7] –: Klassifikation der einfachen reellen Jordan-Tripelsysteme. J. Reine Angew. Math. **122** (1988) 145–169
[No] Nomura, T.: Algebraically independent generators of invariant differential operators on a symmetric cone. J. Reine Angew. Math. **400** (1989) 122–133
[P1] Petersson, H.: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Math. Ann. **116** (1939) 401–412
[P2] –: Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **49** (1939) 49–75
[PS] Pyatetskii-Shapiro, I.-I.: Automorphic functions and the geometry of classical domains. New York – London – Paris: Gordon and Breach 1969
[R] Resnikoff, H. L.: Theta functions for Jordan algebras. Invent. Math. **31** (1975) 87–104
[Rö1] Röhrl, H.: A theorem on non-associative algebras and its applications to differential equations. Manuscripta Math. **21** (1977) 181–187
[Rö2] –: Algebras and differential equations. Nagoya J. Math. **68** (1977) 59–122
[Ro1] Rothaus, O.: Domains of positivity. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **24** (1960) 189–235
[Ro2] –: The construction of homogeneous cones. Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963) 248–250
[Ro3] –: Order isomorphisms of cones. Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966) 1284–1288
[Ro4] –: The construction of homogeneous convex cones. Ann. of Math. (2) **69** (1966) 358–376
[Ro5] –: Ordered Jordan algebras. Amer. J. Math. **100** (1978) 925–941
[S1] Satake, I.: On the compactification of the Siegel space. J. Indian Math. Soc. **20** (1956) 259–281
[S2] –: Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields. Publ. Math. I.H.E.S. **18** (1963) 229–293
[S3] –: On classification of quasisymmetric domains. Nagoya Math. J. **62** (1976) 1–12
[S4] –: Algebraic structures of symmetric domains. Tokyo – Princeton: Iwanami Shoten und Princeton University Press 1980
[S5] –: On zeta functions associated with self-dual homogeneous cones. Proc. Srinivasa Ramanujan Birth Centenary Intern. Coll. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research 1988
[SK] Sato, M.; Kimura, T.: A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. Nagoya Math. J. **65** (1977) 1–155
[Sc] Schafer, R. D.: An introduction to nonassociative algebras. New York: Academic Press 1966
[Se] Selberg, A.: Linear operators and automorphic forms, pp. 1–13. In: Collected Papers, vol. II. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1991
[SH] Shamos, M. I.; Hoey, D.: Closest point problems. In: Proceedings 16th Symposium on Foundations of Computer Science (1975) 151–162
[Sh1] Shimura, G.: On modular correspondences for $\mathrm{Sp}(N,\mathbb{Z})$ and their congruence relations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **49** (1963) 824–828
[Sh2] –: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Tokyo – Princeton: Iwanami Shoten und Princeton University Press 1971
[Si1] Siegel, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **166** (1939) 617–657
[Si2] –: On the theory of indefinite quadratic forms. Ann. of Math. (2) **45** (1940) 577–622
[Si3] –: Discontinuous groups. Ann. of Math. (2) **44** (1943) 674–689
[Sp] Springer, T. A.: Jordan algebras and algebraic groups. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **75**. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973
[T1] Terras, A.: A generalization of Epstein's zeta function. Nagoya Math. J **42** (1971) 173–188

[T2] –: Harmonic analysis on symmetric spaces and applications. I. II. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1985, 1988
[Ti1] Tits, J.: Une classe d'algèbres de Lie en relation avec des algèbres de Jordan. Indag. Math. **24** (1962) 530–535
[Ti2] –: Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionelles. I. Construction. Indag. Math. **28** (1966) 223–237
[Ti3] –: Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups. J. Algebra **131** (1990) 648–677
[U1] Upmeier, H.: Toeplitz C^*-algebras on bounded symmetric domains. Ann. of Math. (2) **119** (1984) 549–576
[U2] –: Toeplitz operators on symmetric Siegel domains. Math. Ann. **271** (1985) 401–414
[U3] –: Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras. Mathematics studies **104**. Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland 1985
[U4] –: Jordan algebras and harmonic analysis on symmetric spaces. Amer. J. Math. **108** (1986) 1–25
[V1] Vinberg, E. B.: Homogeneous cones. Soviet Math. Dokl. **1** (1961) 787–790 [russ.: Dokl. Akad. Nauk SSR **133** (1960) 9–12]
[V2] –: The theory of convex homogeneous cones. Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963) 340–403 [russ.: Trudy Moscov. Mat. Obšč **15** (1963) 303–358]
[V3] –: The structure of the group of automorphisms of a homogeneous cone. Trans. Moscow Math. Soc. **13** (1965) 63–93 [russ.: Trudy Moscov. Math Obšč **13** (1965) 56–83]
[Vo1] Voronoï, G.: Sur quelques propriétés de formes quadratiques positives perfaites. J. Reine Angew. Math. **133** (1908) 97–178
[Vo2] –: Recherches sur les parallélоètres primitifs. I, II. J. Reine Angew. Math. **134** (1908) 198–287; **136** (1909) 67–181
[W1] Walcher, S.: A characterization of regular Jordan pairs and its application to Riccati differential equations. Comm. Algebra **14** (1986) 1967–1978
[W2] –: Über polynomiale, insbesondere Riccatische Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen. Math. Ann. **275** (1986) 269–280
[W3] –: Algebras and differential equations. Palm Harbor: Hadronic Press 1992
[We] Weil, A.: Basic number theory. Grundlehren Math. Wiss. **144**. Berlin: Springer 1967
[Wei] Weissauer, R: Siegel modular forms and Dirichlet series. Preprint. Mannheim 1986
[Wo] Wohlfahrt, H.: Polstellen und Residuen von Dirichlet-Reihen zu Siegelschen Modulformen. Dissertation, Freiburg 1990
[Z] Zel'manov, E. I.: Primary Jordan triple systems. I, II, III. Sibirskii Mat. Zh. **24** (1983) 23–37; **25** (1984) 50–61; **26** (1985) 71–82
[Zi] Ziegler, C.: Jacobi forms of higher degree. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **59** (1989) 191–224

Schriftenverzeichnis Max Koechers

I Wissenschaftliche Abhandlungen

[1] Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung. Dissertation, Göttingen 1951
[2] Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung. J. Reine Angew. Math. **192** (1953) 1–23
[3] Über Thetareihen indefiniter quadratischer Formen. Math. Nachr. **9** (1953) 51–85
[4] Ein neuer Beweis der Kroneckerschen Grenzformel. Arch. Math. **4** (1953) 316–321
[5] Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades I. Math. Z. **59** (1954) 399–416
[6] Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades II. Math. Z. **61** (1955) 455–466
[7] Einheiten schiefsymmetrischer Matrizen. Math. Nachr. **13** (1955) 367–382
[8] Zur Operatorentheorie der Modulformen n-ten Grades. Math. Ann. **130** (1956) 351–385
[9] On the Hecke operators for modular forms of degree n. Report of an Internat. Coll. on Zeta-functions, Bombay (1956) 289–295
[10] Ein Beweis der Eichler-Selbergschen Spurformel für die Hecke-Operatoren. Preprint (1956) 1–18
[11] Positivitätsbereiche im $\mathbb{R}^n$. Amer. J. Math. **79** (1957) 575–596

[12] Automorphic forms in half-spaces. Seminars on analytic functions II, Princeton (1958) 105–119
[13] Analysis in reellen Jordan-Algebren. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen **4** (1958) 67–74
[14] Die Geodätischen von Positivitätsbereichen. Math. Ann. **135** (1958) 192–202
[15] Diskontinuierliche und diskrete Gruppen von Isometrien metrischer Räume. Math. Z. **71** (1959) 258–267 (gemeinsam mit W. Roelcke)
[16] Beiträge zu einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen I. Math. Ann. **141** (1960) 384–432
[17] Beiträge zu einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen II. Math. Ann. **144** (1961) 175–182
[18] Jordan algebras and their applications. Lecture notes, Univ. of Minnesota, Minneapolis, Minn. **14** (1962) 1–149
[19] On real Jordan algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962) 374–377
[20] Eine Charakterisierung der Jordan-Algebren. Math. Ann. **148** (1962) 244–256
[21] On homogeneous algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966) 347–357
[22] Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras I. Amer. J. Math. **89** (1967) 787–816
[23] Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras II. Amer. J. Math. **90** (1968) 476–510
[24] On Lie algebras defined by Jordan algebras. Aarhus Universitet, Mathematisk Institut (1967) 1–42
[25] Über eine Gruppe von rationalen Abbildungen. Invent. Math. **3** (1967) 136–171
[26] Eine Äquivalenzrelation in Ringen. Sitzungber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Natur. Kl. **6** (1967) 72–82
[27] Gruppen und Lie-Algebren von rationalen Funktionen. Math. Z. **109** (1969) 349–392
[28] An elementary approach to bounded symmetric domains. Rice University, Houston (1969) 1-143
[29] Beweis von $\mathrm{Aut}^*L(a) = \mathrm{Aut}\,L(a)$ für formal reelle Jordan-Algebren. Preprint (1969) 1-12
[30] On bounded symmetric domains. Rice University studies **56** (1970) 63–65
[31] Jordan algebras and differential geometry. Actes, Congrès intern. math., Nice **1** (1970) 279–283
[32] Über Standard-Konstruktionen von nicht-assoziativen Algebren. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Natur. Kl. **3** (1974) 35–57
[33] Was sind und was sollen Algebren? Math.-Phys. Semesterber. **23** (1976) 174–191
[34] Die Riccati-sche Differentialgleichung und nicht-assoziative Algebren. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **46** (1977) 129–141
[35] Relative Invarianten und nicht-assoziative Algebren. Math. Ann. **228** (1977) 147–186 (gemeinsam mit J. Dorfmeister)
[36] Eine Konstruktion von Jordan-Algebren. Manuscripta math. **23** (1978) 387–425
[37] Reguläre Kegel. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **81** (1979) 109–151 (gemeinsam mit J. Dorfmeister)
[38] On commutative nonassociative algebras. J. Algebra **62** (1980) 479–493
[39] Von Matrizen zu Jordan-Tripelsystemen. Vorträge der Rheinisch-Westfälischen Akademie der Wissenschaften **307** (1982) 53–68
[40] Carl Ludwig Siegel. Jahrbuch Bayer. Akad. Wiss. 1983, 1–5 (gemeinsam mit K. Stein)
[41] The generalized inverse of integral matrices. Lin. Algebra and Appl. **71** (1985) 187–198
[42] Über ganzzahlige Darstellungen quadratischer Formen. Sitzungsber. Öst. Akad. Wiss **195** (1986) 95–104
[43] On endomorphisms of degree two. Proc. Indian. Acad. Sci. Sect. A**97** (1987) 179–188
[44] Einige Bemerkungen zur Eulerschen Konstanten. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Natur. Kl. **2** (1990) 9–15
[45] Castel del Monte und das Oktogon. In: Miscellanea mathematica. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1991, 221–233

II Lehrbücher, Monographien u. ä.

1. Jordan-Algebren. Grundlehren Math. Wiss. **128**. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1966 (gemeinsam mit Hel Braun)
2. Einführung in die Algebra. Studienbriefe der FernUniversität in Hagen, 1977
3. Geometrie der Ebene. Studienbriefe der FernUniversität in Hagen, 1981
4. Lineare Algebra und analytische Geometrie. Grundwissen Mathematik **2**. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1983, 3. Aufl. 1992

5. Zahlen. Grundwissen Mathematik **1**. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1983, Beiträge: Reelle Divisionsalgebren, Einleitung, Kap. 6–9, (gemeinsam mit R. Remmert), 3. Aufl. 1992
6. Klassische elementare Analysis. Basel – Boston: Birkhäuser 1987

Die Promovenden Max Koechers

1. Hertneck, Charlotte (19. 12. 1959): Positivitätsbereiche und Jordan-Strukturen
2. Hirzebruch, Ulrich (21. 12. 1960): Über die holomorphen Selbstabbildungen eines Halbraumes
3. Helwig, Karl-Heinz (21. 12. 1962): Diskontinuierliche Transformationsgruppen von Kreiskegeln und ihren Halbräumen
4. Meyberg, Kurt (22. 07. 1964): Über die Spur der quadratischen Darstellung in Jordan-Algebren
5. Loos, Ottmar (22. 12. 1965): Spiegelungsräume und homogene symmetrische Mannigfaltigkeiten
6. Petersson, Holger (22. 12. 1965): Über eine Verallgemeinerung von Jordan-Algebren
7. Richter, Manfred (22. 02. 1967): Einige Untersuchungen nicht-assoziativer Algebren
8. Pfister, Helmut (16. 07. 1968): Algebren mit Clifford-Basis
9. Zagler, Ludwig (30. 08. 1968): Ausgeartete alternative quadratische Algebren
10. Sacher, Reinhold (08. 07. 1970): Durch Jordan-Algebren definierte Lie-Moduln
11. Jörn, Enno (03. 02. 1971): Identitäten für kommutative Algebren mit nicht-ausgearteter, assoziativer und symmetrischer Bilinearform
12. Erné, Marcel (29. 11. 1972) Struktur- und Anzahlformeln für Topologien auf endlichen Mengen
13. Kühn, Oda (13. 02. 1974): Bemerkungen über Tripelsysteme
14. Dorfmeister, Joseph (22. 03. 1974): Eine Theorie der homogenen, regulären Kegel
15. Von Groote, Uta (19. 03. 1975): Klassifizierung formal-reeller Algebren vom Grad 3
16. Heinze, Joachim (20. 07. 1977): Die Potenzreihen eines Banachraumes als rechtssymmetrische Algebra und als Lie-Algebra
17. Neher, Erhard (15. 02. 1978): Klassifikation der einfachen reellen Jordan-Tripelsysteme
18. Krieg, Aloys (21. 12. 1983): Modulfunktionen auf dem Quaternionen-Halbraum

Aloys Krieg
Mathematisches Institut
Universität
Einsteinstr. 62
4400 Münster

Holger P. Petersson
Fachbereich Mathematik
FernUniversität
Lützowstr.
5800 Hagen

(*Eingegangen 11. 2. 1992*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 28–46
AMS subject classification: 17 B 50

Die Klassifikation der einfachen Lie-Algebren über Körpern mit positiver Charakteristik: Methoden und Resultate*)

H. Strade, Hamburg

§ 1 Die Frühzeit

Die Theorie der endlich dimensionalen Lie-Algebren über Körpern mit positiver Charakteristik - man sagt dazu häufig abkürzend: der modularen Lie-Algebren - wurde in gewissem Sinne von *Nathan Jacobson* und *Ernst Witt* vor 1940 begründet.

N. Jacobson [J 37] untersucht rein inseparable Körpererweiterungen von Grad 1, d. h. Körpererweiterungen von Typ $F(c_1, \ldots, c_n) : F$, wobei jedes c_i eine p-te Wurzel ist: $c_i^p \in F$ mit $p = \mathrm{Char}(F)$. Indem er Derivationen anstelle von Automorphismen betrachtet, kann er einen Satz vom Galois-Typ beweisen. Man bemerkt dazu, daß die Menge $\mathrm{Der}_F F(c_1, \ldots, c_n)$ aller F-Derivationen von $F(c_1, \ldots, c_n)$ in kanonischer Weise die Strukturen

- eines $F(c_1, \ldots, c_n)$-Moduls
- der Abbildung $D \mapsto D^p$
- einer Lie-Algebra vermöge $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$

trägt. Jacobson etabliert eine Bijektion von den Zwischenkörpern der Erweiterung und den Unteralgebren von $\mathrm{Der}_F F(c_1, \ldots, c_n)$, die diese drei Strukturen tragen.

Satz [J 37]. *Es gibt eine Bijektion von den Zwischenkörpern einer rein inseparablen Erweiterung* $F(c_1, \ldots, c_n) : F$ *vom Grad* 1 *auf die Unterverktorräume von* $\mathrm{Der}_F F(c_1, \ldots, c_n)$, *die die oben genannten drei Strukturen tragen.* □

Schon in dieser ersten Arbeit wird die grundlegende Definition einer Lie-p-Algebra eingeführt. Mit ad (oder genauer ad_L) bezeichnet man die Multiplikation in der Lie-Algebra L, $(\mathrm{ad}\, x)(y) = [x, y]$.

Definition. Eine Lie-Algebra L zusammen mit einer Abbildung $[p] : L \to L$, $x \mapsto x^{[p]}$ heißt eine *Lie-p-Algebra*, wenn $[p]$ die Eigenschaften hat

---

*) Dieser Bericht ist die erweiterte Version eines Vortrags auf der DMV-Tagung 1991 in Bielefeld.

a) $\operatorname{ad} x^{[p]} = (\operatorname{ad} x)^p$,
b) $(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]}$ für alle $\alpha \in F$, $x \in L$,
c) $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant p-1} s_i(x,y)$, wobei der Korrekturterm gegeben wird durch $(\operatorname{ad}(x \otimes T + y \otimes 1))^{p-1}(x \otimes 1) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p-1} i s_i(x,y) \otimes T^{i-1}$ in der Lie-Algebra $L \otimes_F F[T]$.

In [J 37] bezeichnet Jacobson eine Lie-Algebra, die eine Abbildung $[p]$ mit der Eigenschaft a) zuläßt, bereits als Lie-p-Algebra. Solche Algebren nennt man heute p-abgeschlossen [St 84].

In einer weiteren Arbeit [J 41] konstruiert Jacobson 1941 Charakteristik-p Versionen der klassischen einfachen Lie-Algebren vom Typ A–D. 1956 gibt dann Claude Chevalley [Che] eine sehr allgemeine Konstruktion an, mit der man die gesamte Klasse der „klassischen einfachen Lie-Algebren" erhält, während W. H. Mills und G. B. Seligman 1957 eine axiomatische Charakterisierung dieser Algebren liefern [M-Se]. In gewissem Sinn, z. B. wenn die Charakteristik p „groß" ist, verhalten sich diese Algebren wie bei Charakteristik 0. Sie stehen in engem Zusammenhang mit den algebraischen Gruppen.

Irgendwann vor 1939 entdeckt E. Witt ein Beispiel einer einfachen Lie-Algebra, deren Struktur von denen der klassischen Algebren total abweicht. Eigentlich war Witt (und auch H. Zassenhaus ist in diesem Zusammenhang zu nennen) an neuen einfachen Gruppen interessiert und hoffte, solche als Automorphismengruppen von geeigneten Objekten (hier: Lie-Algebren) zu finden. Nachdem sich aber schnell herausstellte, daß diese Hoffnung in bezug auf diese Art von Lie-Algebren unbegründet war, verlor er anscheinend das Interesse an ihnen. Er selbst hat das folgende Beispiel niemals publiziert. Es erscheint zuerst als Untersuchungsobjekt der Doktorarbeit von Chang Ho Ju [Cha], der sich darin explizit auf Witt bezieht. Man setze für $p > 3$

$$\begin{aligned} W(1;\underline{1}) &:= \oplus_{-1 \leqslant i \leqslant p-2} F e_i, \\ [e_i, e_j] &:= (j-i) e_{i+j} \qquad \text{falls } -1 \leqslant i+j \leqslant p-2 \\ &:= 0 \qquad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Dies ist die p-dimensionale *Wittalgebra*. Sie besitzt eine Filtrierung in folgender Weise. Setze

$$W(1;\underline{1})_{(i)} := \textstyle\sum_{j \geqslant i} F e_j.$$

Dann läßt sich $W(1;\underline{1})$ ausschöpfen durch Untervektorräume

$$W(1;\underline{1}) = W(1;\underline{1})_{(-1)} \supset \ldots \supset W(1;\underline{1})_{(p-2)} \supset W(1;\underline{1})_{(p-1)} = \{0\},$$

die die Eigenschaft

$$[W(1;\underline{1})_{(i)}, W(1;\underline{1})_{(j)}] \subset W(1;\underline{1})_{(i+j)}$$

haben. Die Menge

$$S(W(1;\underline{1})) := \{x \in W(1;\underline{1}) \mid (\operatorname{ad} x)^2 = 0\}$$

ist von $\{0\}$ verschieden. Z. B. enthält sie e_{p-2}, wie man leicht mit Hilfe der Indexrechnung sieht. Nach A. I. Kostrikin heißen für eine Lie-Algebra L die Elemente von $S(L)$ die „sandwich-Elemente" von L, und eine Lie-Algebra mit $S(L) \neq \{0\}$ heißt *streng ausgeartet.* Im allgemeinen ist $S(L)$ kein linearer Raum. Diese Menge ist aber abgeschlossen unter der Lie-Multiplikation, denn es gilt ja für $c, d \in S(L)$, $u, v \in L$

$$\begin{aligned} 0 &= (\operatorname{ad} c)^2([u, v]) = [(\operatorname{ad} c)^2(u), v] + 2[[c, u], [c, v]] + [u, (\operatorname{ad} c)^2(v)] \\ &= 2[[c, u], [c, v]] = 2[c, [u, [c, v]]] - 2[u, [c, [c, v]]] = 2[c, [u, [c, v]]], \end{aligned}$$

und daher wegen $p \neq 2$

$$\begin{aligned} &(\operatorname{ad}[c, d])^2(v) \\ &= [c,[d,[c,[d,v]]]] - [c,[d,[d,[c,v]]]] - [d,[c,[c,[d,v]]]] + [d,[c,[d,[c,v]]]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Deshalb ist die lineare Hülle span $S(L)$ eine Unteralgebra, die natürlich unter allen Automorphismen von L invariant bleibt. Beide Phänomene sind in klassischen Algebren unbekannt. Dort gibt es keine sandwich-Elemente, weil man jedes nilpotente Element in eine $sl(2)$ einbetten kann als Mitglied einer kanonischen Basis (e, f, h) (und $(\operatorname{ad} e)^2 \neq 0$ gilt). Es gibt auch keine Unteralgebren, die unter allen Automorphismen auf sich abgebildet werden, weil (für $p \geqslant 5$) jede echte Unteralgebra unter geeigneten inneren Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} u)$ instabil ist. Es liegt also mit der Witt-Algebra eine Algebra von völlig neuem Typ vor, und damit stellt sich das Klassifikationsproblem bei Körpern mit positiver Charakteristik auf neue Weise.

Seit 1937 hat man viele neue Typen von einfachen Lie-Algebren entdeckt, ohne wirklich zu verstehen, warum sie existieren. Ich gebe eine (unvollständige) Liste von teilweise illustren Mathematikern an, die an dieser Entdeckungsreise beteilgt waren.

E. Witt $1935 \leqslant ? < 1939$
H. Zassenhaus [Z 39]
N. Jacobson [J 41], [J 43]
A. A. Albert/M. Frank 1954/55 [A–F]
I. Kaplansky 1954 [Kap]
M. Frank [F 54], [F 64]
S. A. Jennings/R. Ree [J–R]
R. Ree 1956 [R]
R. E. Block 1958 [B]
A. I. Kostrikin/I. R. Šafarevič [Ko-S 66], [Ko-S 69]
R. L. Wilson [Wil 69], [Wil 76]
V. Kac [Kac 74]

§ 2 Klassen einfacher Algebren ($p > 5$)

Die bekannten einfachen Lie-Algebren sind entweder *klassisch* oder vom *Cartan-Typ*.

Für die Konstruktion der *klassischen* Algebren geht man nach Chevalley zunächst von einer einfachen Lie-Algebra L über $\mathbb{C}$ aus und findet darin eine sogenannte „Chevalley-Basis" $(e_1, \ldots, e_m)$. Diese Basis hat u. a. die Eigenschaft, daß $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \mathbb{Z} e_i$ unter dem Lieprodukt abgeschlossen ist und also eine $\mathbb{Z}$-Lie-Algebra darstellt. Zu einem beliebigen Körper K der Charakteristik p ist dann $L_K := K \otimes_{\mathbb{Z}} (\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \mathbb{Z} e_i)$ eine Lie-Algebra über K. Die Multiplikationskonstanten bezüglich einer solchen Chevalley-Basis werden nur durch wenige Primzahlen geteilt. Dies impliziert, daß für $p > 3$ die Algebra L_K eine einfache Lie-Algebra ist, mit der einzigen Ausnahme $L \cong sl(n, \mathbb{C}), p \mid n$. Dann nämlich besitzt L_K als eindimensionales Zentrum $Z(L_K)$ den von der Einheitsmatrix aufgespannten Raum. $L_K/Z(L_K) \cong psl(n, K)$ ist wieder einfach. Die klassischen Algebren kann man also nahezu wie im Charakteristik-0-Fall definieren, es gibt die Typen

$$A_n(p \nmid n+1), psl(n+1)(p \mid n+1), B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.$$

Von Kostrikin und Šafarevič [Ko-S 66] stammt (nach Jacobson [J 43]) eine weitere allgemeine, andere große Klassen erzeugende Konstruktion. Man betrachte zunächst den reduzierten Polynomring und seine Derivationsalgebra

$$A(m; \underline{1}) := F[X_1, \ldots, X_m]/(X_1^p, \ldots, X_m^p) =: F[x_1, \ldots, x_m] \quad \text{mit} \quad x_i^p = 0,$$

$$W(m; \underline{1}) := \operatorname{Der} A(m; \underline{1}) \text{ die } m\text{-te } \textit{Jacobson-Witt-Algebra.}$$

Die frühere Beschreibung von $W(1; \underline{1})$ findet man hier wieder durch die Realisierung $e_i \mapsto x^{i+1} \mathrm{d}/\mathrm{d}x, -1 \leqslant i \leqslant p-2$. Man erkennt bereits an dieser Konstruktion sehr gut das typische Charakteristik-p-Phänomen: der Polynomring $F[X_1, \ldots, X_m]$ hat für $p > 0$ ein derivationsinvariantes Ideal $(X_1^p, \ldots, X_m^p)$ endlicher Kodimension, und deshalb erzeugt die *unendlich dimensionale* Lie-Algebra aller Derivationen des Polynomringes hier eine geeignete *endlich dimensionale* Lie-Algebra.

$W(m; \underline{1})$ enthält drei Klassen von Unteralgebren, die durch Differentialformen definiert werden. Wir definieren Differentialformen ω_S, ω_H, ω_K als

$$\omega_S = \mathrm{d}x \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_m,$$

$$\omega_H = \textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{i+r} \quad (m = 2r),$$

$$\omega_K = \mathrm{d}x_{2r+1} + \textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} x_i \mathrm{d}x_{i+r} - x_{i+r} \mathrm{d}x_i \quad (m = 2r+1)$$

und setzen

$$S(m; \underline{1}) := \{D \in W(m; \underline{1}) \mid D(\omega_S) = 0\},$$

$$H(2r; \underline{1}) := \{D \in W(2r; \underline{1}) \mid D(\omega_H) = 0\},$$

$$K(2r+1; \underline{1}) := \{D \in W(2r+1; \underline{1}) \mid D(\omega_K) \in A(m; \underline{1}) \omega_K\}.$$

Die iterierten Derivierten $S(m;\underline{1})^{(1)}, H(2r;\underline{1})^{(2)}, K(2r+1;\underline{1})^{(1)}$ sind einfache Lie-p-Algebren. Sie bilden die Klassen der Speziellen Algebren, Hamiltonschen Algebren und Kontaktalgebren.

Man kann diese Konstruktion stark verallgemeinern. Dies ist in einem ersten Schritt durch Kostrikin-Šafarevič [Ko-S 69] und Wilson [Wil 69] geschehen. Dazu wähle man ein beliebiges m-Tupel $\underline{n}=(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^m$ und das derivationsinvariante Ideal $(X_1^{p^{n_1}},\ldots,X_m^{p^{n_m}})$ im Polynomring $F[X_1,\ldots,X_m]$ und betrachte den Quotienten

$$B := F[X_1, \ldots, X_m]/(X_1^{p^{n_1}}, \ldots, X_m^{p^{n_m}}) =: F[\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_m], \bar{X}_i^{p^{n_i}} = 0.$$

B ist eine kokommutative Koalgebra, genauer, es gibt einen Homomorphismus

$$\Delta : B \to B \otimes B \quad \text{mit} \quad \Delta(\bar{X}_i) = \bar{X}_i \otimes 1 + 1 \otimes \bar{X}_i.$$

Daher ist der Dualraum B^* eine kommutative und assoziative Algebra unter dem Produkt

$$(f \circ g)(b) := (f \otimes g)(\Delta b).$$

Wir bezeichnen diese Algebra $(B^*, \circ)$ mit $A(m;\underline{n})$. Sei $(\prod \bar{X}_i^{a_i} | 0 \leqslant a_i \leqslant p^{n_i}-1)$ eine Basis von $F[X_1,\ldots,X_m]/(X_1^{p^{n_1}},\ldots,X_m^{p^{n_m}})$. Unter Benutzung der Multiindex-Schreibweise bezeichnen wir mit $(x^{(a)}|0\leqslant a_i \leqslant p^{n_i})$ die duale Basis in B^*. Man rechnet elementar nach, daß

$$x^{(a)}x^{(b)} = \prod \binom{a_i+b_i}{a_i} x^{(a+b)}$$

gilt. Für $\underline{n}=(1,\ldots,1)$ ist $A(m;\underline{1})$ selbstdual, d.h. $A(m;\underline{1})=F[X_1,\ldots,X_m]/(X_1^p,\ldots,X_m^p)$ mit dem gewöhnlichen Produkt ist algebra-isomorph zu $(F[X_1,\ldots,X_m]/(X_1^p,\ldots,X_m^p))^*$ mit dem Produkt $\circ$. Man sieht nämlich sehr leicht, daß $\{x^{(\varepsilon_1)},\ldots,x^{(\varepsilon_m)}\}$ nur die durch $(x^{(\varepsilon_i)})^p=0$ erzeugten Relationen erfüllt. Hierbei bezeichne ε_i das m-Tupel, welches an der Stelle i eine 1 und sonst 0 hat.

Damit hat man zunächst eine Verallgemeinerung des zugrunde liegenden kommutativen Ringes gefunden. Für jedes i gibt es eine Derivation D_i von $A(m;\underline{n})$ mit der Eigenschaft $D_i(x^{(a)})=x^{(a-\varepsilon_i)}$. Wir setzen $x_i := x^{(\varepsilon_i)}$,

$$W(m;\underline{n}) := \sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant m} A(m;\underline{n})D_i$$

und definieren eine Aktion auf Differentialformen durch

$$(fD_i)(g\mathrm{d}x_j) = (f(D_i(g))\mathrm{d}x_j + \delta_{ij}\sum\nolimits_k gD_k(f)\mathrm{d}x_k.$$

Wie oben erhält man nun unter Benutzung der Differentialformen ω_S, ω_H, ω_K Unteralgebren von $W(m;\underline{n})$. Diese Konstruktion liefert die *graduierten* Cartan-Typ Lie-Algebren. $W(m;\underline{n})$ ist genau für $\underline{n}=\underline{1}$ die volle Derivationsalgebra von $A(m;\underline{n})$, und daher kann man $W(m;\underline{n})$ als Verallgemeinerung von $W(m;\underline{1})$ ansehen.

In einem weiteren Verallgemeinerungsschritt kommt nach Wilson [Wil 69], [Wil 76] und Kac [Kac 74] erschwerend hinzu, daß man diese Differentialformen noch durch geeignete Automorphismen Φ von $A(m;\underline{n})$ transformieren kann, die keine Automorphismen der entsprechenden Lie-Algebren induzieren. Man hat deshalb Deformationen von Lie-Algebren zu betrachten, und zwar nur solche, die wieder einfache Lie-Algebren liefern. Die Details hierzu sind sehr technischer Natur und sollen deshalb bei diesem Übersichtsartikel unterdrückt werden.

Wir fassen diese Darlegungen zusammen. Es sind für $p > 5$ zwei große Familien von einfachen Lie-Algebren bekannt:

- die *klassischen Algebren.* Sie haben ein endlich dimensionales Pendent über $\mathbb{C}$ und stehen in Verbindung mit den algebraischen Gruppen. Alle Algebren dieser Familie sind Lie-p-Algebren.
- die *Cartan-Typen* bestehend aus den vier Serien der Wittalgebren $W(m; \underline{n})$, Speziellen Algebren $S(m; \underline{n}; \Phi)^{(1)}$, Hamiltonschen Algebren $H(m; \underline{n}; \Phi)^{(2)}$ und Kontakt-Algebren $K(m; \underline{n}; \Phi)^{(1)}$. Sie haben unendlich dimensionale Analoga über $\mathbb{C}$, die in der Differentialgeometrie von Elie Cartan [C] auftreten. Kac hat in [Kac 74] gezeigt, daß $W(m; \underline{1})$, $S(m; \underline{1})^{(1)}$, $H(m; \underline{1})^{(2)}$, $K(m; \underline{1})^{(1)}$ genau die Lie-p-Algebren vom Cartan-Typ sind.

§ 3 Klassifikationsresultate und -methoden

Alle Bemühungen in der Klassifikation zielen auf den Beweis einer alten Vermutung von Kostrikin und Šafarevič von 1966, die zunächst für Lie-p-Algebren ausgesprochen wurde und später, nachdem man die allgemeinste Form der Definition für Algebren vom Cartan-Typ gefunden hatte, als die entsprechende Verallgemeinerung verstanden wurde, und gipfeln im Beweis des folgenden Satzes.

Klassifikationssatz [St-W 91]. *Sei F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p > 7 und L eine einfache endlich dimensionale Lie-Algebra über F. Dann ist L klassisch oder vom Cartan Typ.* □

Der Beweis, über den ich nun berichten will, ist natürlich eine Gemeinschaftsleistung vieler Mathematiker während der letzten 25 Jahre. Den ersten wirklichen Durchbruch allerdings stellt erst das folgende Ergebnis von Block und Wilson von 1988 dar.

Satz [B-W 88]. *Der Klassifikationssatz ist richtig für Lie-p-Algebren.* □

Entscheidende Hilfsmittel bei der Klassifikation der einfachen Lie-Algebren in der klassischen Situation über $\mathbb{C}$ sind die Killing-Form

$$\varkappa(x, y) := \mathrm{Spur}\,(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)$$

einerseits und die Wurzelraumzerlegung nach einer Cartan-Unteralgebra H

$$L = \oplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha, \qquad L_\alpha := \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x \ \forall\, h \in H\}$$

andererseits. Mit Hilfe der Killing-Form beweist man, daß H abelsch ist und bestimmt für Wurzeln $\alpha \neq 0$ die

1-Schnitte: $\quad L(\alpha) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} L_{i\alpha} \cong sl(2) \oplus Z(L(\alpha)), \qquad Z(L(\alpha)) \subset H.$

Mit Hilfe der Darstellungen der $sl(2)$ untersucht man dann Eigenschaften der Wurzelsysteme. Schließlich leitet man mit Hilfe der Killing-Form und geometrischen Überlegungen die Cartan-Matrizen und Dynkin-Diagramme ab und erkennt auf diese Weise die einfachen Algebren über $\mathbb{C}$. Keine dieser Methoden funktioniert im Fall positiver Charakteristik, weil im allgemeinen die Killing-Form verschwindet und daher bereits der erste Schritt dieser Methode versagt. Wie bereits oben erwähnt wurde, hat z. B. (ähnliche Überlegungen kann man für alle Cartan Typ Lie-Algebren anstellen) die Wittalgebra $W(1;\underline{1})$ eine Filtrierung mit den Eigenschaften $W(1;\underline{1}) = W(1;\underline{1})_{(-1)}$, $W(1;\underline{1})_{(p-2)} \neq 0$. Daher bildet für $p > 3$ jede lineare Transformation $(\operatorname{ad} e_{p-2}) \circ (\operatorname{ad} x)$ mit $e_{p-2} \in W(1;\underline{1})_{(p-2)}$, $x \in W(1;\underline{1})$ einen Raum $W(1;\underline{1})_{(i)}$ in $W(1;\underline{1})_{(i+1)}$ ab, d. h. diese Transformationen operieren nilpotent. Damit erhält man für die Killingform $\varkappa(W(1;\underline{1})_{(p-2)}, W(1;\underline{1})) = 0$. Da $W(1;\underline{1})$ einfach ist, folgt sogar $\varkappa = 0$. Dennoch versucht man im modularen Fall analog vorzugehen, wobei man nun auf die Argumente, die die Killing-Form benutzen, verzichten muß. Ich möchte drei Themen ausführlicher behandeln:

- Cartan-Unteralgebren
- Schnitte
- Erkennungssätze.

A) Cartan-Unteralgebren

Ein Beispiel zeigt, welche Veränderungen schon in den Resultaten über Cartan-Unteralgebren (CSA) gegenüber der klassischen Situation auftreten.

Satz [St 77]. *Für jede Primzahl $p > 2$, jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ und jeden Körper F der Charakteristik p gibt es eine einfache Lie-Algebra über F, welche n* CSAen *besitzt mit paarweise verschiedener Dimension und paarweise verschiedenem Nilpotenzgrad.* □

Bereits dieser Satz zeigt, daß die Verhältnisse im modularen Fall sehr viel komplizierter sind als im klassischen. Denn dort sind ja alle CSAen abelsch und auch konjugiert. Also ist die eine CSA so gut wie die andere. Im modularen Fall ist z. B. a priori völlig unklar, welche von diesen CSAen man zu nehmen hat. Dies macht plausibel, warum CSAen nicht die Rolle spielen können wie im klassischen Fall. Besser geeignet sind Tori.

Definition. Eine Unteralgebra T einer Lie-Algebra L heißt Torus, wenn folgendes gilt:

1) $T^{(1)} = 0$
2) $\operatorname{ad}_L x$ ist ein halbeinfacher Endomorphismus für alle $x \in T$.

Wenn L eine Lie-Algebra von Matrizen ist, dann sind Tori gerade solche Unteralgebren, die sich simultan auf Diagonalmatrizen transformieren lassen. Bei den klassischen Algebren über $\mathbb{C}$ sind die maximalen Tori genau die CSAen H, denn die obige Bemerkung über die Wurzelraumzerlegung zeigt gerade, daß es eine Basis von L gibt, die simultan für alle $\operatorname{ad} x, x \in H$, aus Eigenvektoren besteht.

Der bei diesem Vorgehen entscheidende technische Vorteil der Lie-p-Algebren liegt in dem engen Zusammenhang von Tori und CSAen. Wir bezeichnen für eine Unteralgebra G von L

$$Z_L(G) := \{x \in L \mid [G, x] = 0\}.$$

Lemma. *Es sei T ein maximaler Torus einer Lie-p-Algebra L. Dann ist $Z_L(T)$ eine* CSA *von L.* □

In einem ersten Schritt zur Klassifikation konstruiert man eine p-Hülle von L ([St 84], [St 89a]), d. h. eine Lie-p-Algebra L_p, die L als Ideal enthält und als Lie-p-Algebra von L erzeugt wird, und imitiert damit das klassische Vorgehen. Man nehme in L_p einen Torus T mit maximaler Dimension und zerlege das Ideal L bezüglich T in Eigenräume

$$L = \oplus_{\alpha \in T^*} L_\alpha(T).$$

Leider gibt es eine weitere Komplikation. Im modularen Fall gilt der Satz von Lie über auflösbare Algebren nicht, der besagt, daß die erste Derivierte $G^{(1)}$ einer auflösbaren Lie-Algebra G auf jedem endlich dimensionalen G-Modul nilpotent operiert. Dies bedeutet, daß man auflösbare Lie-Algebren im modularen Fall nur unter starken zusätzlichen Voraussetzungen simultan auf Dreiecksgestalt bringen kann, und es zeigt sich leider, daß man keineswegs immer diese Dreiecksgestalt für CSAen erreichen kann. Der folgende schwache Ersatz ist allerdings ausreichend für die Klassifikation.

Satz [Wil 77], [St 89b]. *Sei L eine einfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p > 7$, L_p eine p-Hülle von L, und T ein Torus maximaler Dimension in L_p. Dann ist $Z_{L_p}(T)$ eine* CSA *von L_p, und $Z_{L_p}(T)^{(1)}$ operiert nilpotent auf L_p.* □

Dieser Satz hat zur Folge, daß man unter den obigen Voraussetzungen $Z_{L_p}(T)$ doch simultan als Dreiecksmatrizen realisieren kann (allerdings immer noch nicht wie im klassischen Fall als Diagonalmatrizen). Das Fehlen des Satzes von Lie ist ein zweites entscheidendes Handikap der modularen Klassifikationstheorie. An dieser Stelle tritt zum ersten, aber nicht zum letzten Mal die Bedingung $p > 7$ auf.

B) Schnitte

Das Resultat über die Triangulierbarkeit von CSAen wird entscheidend für die Bestimmung der 1-Schnitte benutzt.

Satz [Wil 78], [St 89b]. *Sei L eine einfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p > 7$, L_p eine p-Hülle von L, und T ein Torus maximaler Dimension in L_p. Für $\alpha \in T^*$ sei $L(\alpha) = \sum_{i \in GF(p)} L_{i\alpha}(T)$ ein 1-Schnitt von L bez. T. Dann ist entweder $L(\alpha)$ auflösbar oder es gilt:* $\operatorname{rad} L(\alpha)$ *ist nilpotent und es gibt genau ein maximales Ideal S von $L(\alpha)$ mit den Eigenschaften*

1) *$L(\alpha)/S$ ist nilpotent*
2) $\operatorname{rad} L(\alpha) \subset S$
3) *$S/\operatorname{rad} L(\alpha)$ ist eine einfache Lie-Algebra vom Typ $sl(2)$, $W(1;\underline{1})$, $H(2;\underline{1})^{(2)}$.* □

Die 1-Schnitte der p-Hülle L_p lassen sich völlig analog charakterisieren [St 89b]. Man vergleiche diese Ergebnisse mit der viel einfacheren Situation über $\mathbb{C}$, wo $L(\alpha) \cong sl(2) \oplus Z(L(\alpha))$ gilt. Die genaue Beschreibung der 2- und 3-Schnitte ist im Detail technisch komplizierter und soll deshalb hier unterbleiben. Ich gebe eine vereinfachte Version der Charakterisierung der 2-Schnitte an, bei der aber alle technischen Details unterdrückt werden.

Satz [B-W 88], [St 89b]. *Sei L eine einfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p > 7$, L_p eine p-Hülle von L und T ein Torus maximaler Dimension in L_p. Für $\alpha, \beta \in T^*$ sei $L(\alpha, \beta) = \sum_{i,j \in GF(p)} L_{i\alpha + j\beta}(T)$ ein 2-Schnitt von L bez. T. $\mathrm{rad}_T L(\alpha,\beta)$ bezeichne das maximale T-invariante auflösbare Ideal von $L(\alpha,\beta)$. Sei $K := L(\alpha,\beta)/\mathrm{rad}_T L(\alpha,\beta)$ der T-halbeinfache Quotient und $S = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r} S_i$ die Summe der minimalen T-invarianten Ideale von K. Dann gilt:*

1) $r \leqslant 2$,
2) *es gibt einfache Lie-Algebren G_i vom klassischen oder Cartan-Typ, so daß jedes S_i von der Form $S_i = G_i \otimes K[X_1, \ldots, X_{n_i}]/(X_1^p, \ldots, X_{n_i}^p)$* ist. □

Block und Wilson haben in [B-W 88] den hierzu analogen Satz zunächst für einfache Lie-p-Algebren bewiesen. Zum Beweis des Resultates für beliebige einfache Lie-Algebren zieht man dieses Ergebnis heran. Deshalb sind die in [B-W 88] angegebenen Beweise substantieller Teil der Beweise der entsprechenden Sätze für beliebige einfache Lie-Algebren.

C) Erkennungssätze

Nachdem man die Schnitte bestimmt hat, setzt man diese Informationen zusammen und verwendet Sätze, die die Algebren zu erkennen gestatten. Man schließt aus der Kenntnis der 1-Schnitte $L(\alpha)$, daß es genau eine Unteralgebra $Q(\alpha)$ von $L(\alpha)$ gibt mit folgenden Eigenschaften

(i) $\mathrm{rad}\, L(\alpha) \subset Q(\alpha)$,
(ii) $Q(\alpha)$ ist auflösbar oder $Q(\alpha)/\mathrm{rad}\, Q(\alpha)$ ist klassisch einfach,
(iii) $\dim L(\alpha)/Q(\alpha) \leqslant 2$.

Nach [B-W 88] kann man mit Hilfe der Strukturaussagen über die 2-Schnitte $L(\alpha,\beta)$ den Ausgangstorus T so twisten (durch Anwendung von „Winter's exponential mapping"), daß man als Ergebnis einen Torus T' maximaler Dimension in L_p erhält, der in den 1-Schnitten $L(\alpha)$ bez. T' die Unteralgebra $Q(\alpha)$ invariant läßt, m.a.W. für den $[T', Q(\alpha)] \subset Q(\alpha)$ gilt. Ein solcher Torus heißt *optimal.* Für einen optimalen Torus zeigen [B-W 88] (für Lie-p-Algebren) und [B-O-St] (für den allgemeinen Fall), daß mit $x \in Q_\alpha$, $y \in Q_\beta$ auch $[x,y] \in Q_{\alpha+\beta}$ gilt, d. h. daß $Q := \sum_{\alpha \in (T')^*} Q(\alpha) = \sum_{\alpha \in (T')^*} Q_\alpha(T')$ eine T'-invariante Unteralgebra von L ist.

Wenn jeder 1-Schnitt auflösbar oder von klassischem Typ ist, dann gilt nach Konstruktion $Q = L$. Gibt es darüber hinaus einen nicht auflösbaren 1-Schnitt, dann läßt sich nach [St 91] auf grund der Kenntnisse über die 2-Schnitte der folgende Erkennungssatz auf L anwenden. Man erkennt mit ihm, daß L klassisch ist.

Satz (Axiome von Mills-Seligman [Se]). *Sei $p>3$. Eine einfache Lie-Algebra L ist klassisch, wenn L eine abelsche* CSA *H besitzt, so daß gilt:*

a) $L=\oplus_{\alpha\in H^*}L_\alpha$ *mit* $L_\alpha=\{x\in L\,|\,[h,x]=\alpha(h)x\ \forall\, h\in H\}$, *d. h. H ist ein Torus,*
b) *für $\alpha\neq 0$ ist $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ eindimensional,*
c) *für Wurzeln α, β, $\beta\neq 0$ sind nicht alle $\{\alpha+k\beta\,|\,k\in GF(p)\}$ Wurzeln.* □

Falls L einen 1-Schnitt besitzt, der weder auflösbar noch von klassischem Typ ist, dann erhält man nach Konstruktion $Q\neq L$. Daher läßt sich mit Hilfe von Q eine T'-invariante Filtrierung von L konstruieren,

$$L=Q_{(-r)}\supset Q_{(-1)}\supset Q_{(0)}=Q\supset\ldots\supset Q_{(s)}=\{0\}.$$

Hierbei ist $Q_{(1)}$ das maximale T'-invariante Ideal von Q, das nilpotent auf L operiert, $Q_{(-1)}=\{x\in L\,|\,[x,Q_{(1)}]\subset Q\}$, und

$$Q_{(i+1)}=\{x\in Q_{(i)}\,|\,[x,Q_{(-1)}]\subset Q_{(i)}\}\qquad i\geqslant 0,$$
$$Q_{(i-1)}=[Q_{(i)},Q_{(-1)}]+Q_{(i)}\qquad i\leqslant -1.$$

Zu jeder filtrierten Lie-Algebra kann man in kanonischer Weise eine graduierte Lie-Algebra gr(L) konstruieren, indem man auf dem Vektorraum $\oplus\, Q_{(i)}/Q_{(i+1)}$ die Multiplikation komponentenweise mit Hilfe von Representanten definiert. In der vorliegenden Situation läßt sich ein Resultat von B. Weisfeiler [We] anwenden. Man erhält

Satz [St IV]. *Sei L eine einfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p>7$, L_p eine p-Hülle von L und T' ein optimaler Torus in L_p. Sei $Q\neq L$ und* gr(L) *die mittels Q definierte graduierte Lie-Algebra. Dann gilt:*

1) *T' operiert auf* gr(L). gr(L) *besitzt genau ein minimales T'-invariantes Ideal $A(L,T')$.*
2) *$A(L,T')$ ist homogen bez. der Graduierung von* gr(L).
3) *Es gibt eine einfache graduierte Lie-Algebra $S(L,T')$ und $m\in\mathbb{N}$ mit $A(L,T')\cong S(L,T')\otimes A(m;\underline{1})$.*
4) *Die Graduierung von $S(L,T')$ liefert die Graduierung von $A(L,T')$, d. h. $S(L,T')_i\otimes A(m;\underline{1})$ wird bei dem in* 3) *angegebenen Isomorphismus auf $A(L,T')_i$ abgebildet.* □

Zur Bestimmung von $S(L,T')$ greift man zurück auf Untersuchungen in L. Jeder 2-Schnitt $Q(\alpha,\beta)$ von Q operiert auf allen Unterräumen $\sum_{i,j\in GF(p)}L_{\gamma+i\alpha+j\beta}/Q_{\gamma+i\alpha+j\beta}$ $(\gamma\in(T')^*)$. Die Strukturaussagen über die 3-Schnitte $L(\alpha,\beta,\gamma)$ lassen deshalb Folgerungen über die Struktur der 2-Schnitte von Q zu. Daraus erhält man Informationen über $Q/Q_{(1)}\subset$ gr(L). Nun beachtet man, daß $A(L,T')_0\cong S(L,T')_0\otimes A(m;\underline{1})$ ein T'-invariantes Ideal in $Q/Q_{(1)}$ ist und erhält schließlich als Ergebnis, daß man auf $S(L,T')_0^{(1)}/\{Z(S(L,T')_0)\cap S(L,T')_0^{(1)}\}$ die Axiome von Mills-Seligman anwenden kann. Damit sieht man sich in der Lage, auf $S(L,T')$ die graduierte Version [Kac 70] des folgenden Erkennungssatzes anzuwenden.

Satz (Recognition Theorem) [Kac 70], [Kac 74], [Wil 76]. *Sei L eine einfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F der Charakteristik $p>5$ und $L_{(0)}$ eine maximale Unteralgebra. Sei $L_{(-1)}$ ein Unterraum und*

$$L = L_{(-r)} \supset \ldots \supset L_{(-1)} \supset L_{(0)} \supset \ldots$$

eine Filtrierung mit folgenden Eigenschaften;

a) $L_{(-1)}/L_{(0)}$ *ist ein irreduzibler $L_{(0)}$-Modul*
b) $x \in L_{(k)}$, $[x, L_{(-1)}] \subset L_{(k)} \Rightarrow x \in L_{(k+1)} \quad k \geqslant 0$
c) $x \in L_{(k)}$, $[x, L_{(1)}] \subset L_{(k+2)} \Rightarrow x \in L_{(k+1)} \quad k \leqslant 0$
d) $L_{(0)}/L_{(1)}$ *ist die direkte Summe von klassisch einfachen Algebren; $gl(n)$, $sl(n)$ $(p \mid n)$; eindimensionalen Algebren*
e) $L_{(0)}/L_{(1)}$ *ist eine Lie-p-Algebra, und die Aktion von $L_{(0)}/L_{(1)}$ auf $L_{(-1)}/L_{(0)}$ definiert eine p-Darstellung.*

Dann ist L klassisch oder vom Cartan-Typ. □

Man erhält hieraus

Satz [St IV]. *$S(L, T')$ ist als graduierte Algebra isomorph zu einer Lie-p-Algebra von Cartan-Typ.* □

Diese Information über das Ideal $A(L, T')$ in gr (L) liefert starke Strukturaussagen über L selbst. Sie gestatten die Anwendung des Recognition Theorems und des folgenden Erkennungssatzes.

Satz [Wil 76]. *Sei L eine einfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p>3$. L enthalte eine maximale Unteralgebra $L_{(0)}$, so daß eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist*

a) $\dim L/L_{(0)} = 1$
b) *es gibt $Y \in L_{(0)}$ mit*

$$\dim([Y, L] + L_{(0)})/L_{(0)} = 1\,, \qquad [[Y, [Y, L_{(0)}]], L] \not\subset L_{(0)}.$$

Dann ist L klassisch vom Typ A oder C oder vom Cartan-Typ. □

Man erhält durch leichte zusätzliche Überlegungen darüber hinaus, daß für $Q \neq L$ nur Lie-Algebren vom Cartan-Typ auftreten.

Im letzten noch verbleibenden Fall ist jeder 1-Schnitt auflösbar. Hier haben Wilson und der Autor mit einer etwas direkteren Methode gezeigt, daß L vom Cartan-Typ ist. Es gilt sogar genauer, daß nur bestimmte Spezielle Algebren $S(m; \underline{n}; \Phi)^{(1)}$ oder Hamiltonsche Algebren (nämlich die Algebren von Block) auftreten.

§ 4 Kleine Charakteristiken

Für $p \leqslant 7$ trifft man schon in einem frühen Stadium dieses Klassifikationsprogrammes auf weitere Schwierigkeiten. Der oben erwähnte schwache Ersatz für den Satz von Lie konnte zunächst nur für $p>7$ bewiesen werden. Ein neues Ergebnis, das kürzlich von A. A. Premet (Minsk) publiziert wurde, bringt weitere

Klarheit zu diesem Problem. Wir bemerken dazu, daß für $p=5$ eine weitere Klasse von Algebren bekannt ist, die sogenannten Melikjan-Algebren $g(m,n)$ der Dimension 5^{m+n+1}. Die Melikjan-Algebren besitzen nicht-triangulierbare CSAen [Ku]. Der folgende Satz ist eine leichte Variation des Originalresultats.

Satz [Pre]. *Sei L eine einfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p und H eine* CSA *von L.*

1) *Für $p>5$ operiert $H^{(1)}$ nilpotent auf L.*

2) *Sei $p=5$. Wenn $H^{(1)}$ nicht nilpotent auf L operiert, dann gibt es Wurzeln α, β bez. H, so daß der Quotient des 2-Schnittes $L(\alpha,\beta)$ nach einem geeigneten maximalen Ideal $M(\alpha,\beta)$ isomorph ist zu einer Melikjan-Algebra $L(\alpha,\beta)/M(\alpha,\beta)\cong g(1,1)$.* □

Mir scheint dieses Resultat der entscheidende Schritt dafür zu sein, daß man die Einschränkung an p auf die Bedingung $p>3$ reduzieren kann. Die Bedingung an die Charakteristik wird zwar auch an weiteren Stellen der Beweise für die Klassifikation benötigt. Dort wird sie aber nach allen bisherigen Erfahrungen mit der Ausdehnung der Klassifikationsresultate auf immer größere Teilklassen vermutlich leichter zu ersetzen sein. Premet schließt aus dem genannten Satz z. B.

Satz [Pre]. *Sei L eine einfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p>3$. L besitze eine* CSA *H von toralem Rang 1 in L, d. h. es gebe eine Wurzel α bez. H, so daß $L=\sum_{i\in GF(p)} L_{i\alpha}$ gilt. Dann ist L eine Algebra vom Typ $sl(2)$, $W(1;\underline{n})$, oder $H(2;\underline{n};\Phi)^{(2)}$.* □

Aus diesem Satz kann man ziemlich direkt folgern, daß die 1-Schnitte einer einfachen Lie-Algebra für $p>3$ in der gleichen Weise beschrieben werden, wie wir es oben für $p>7$ getan hatten. Nach meiner Einschätzung gibt es nun keine prinzipiellen Hindernisse mehr für eine Klassifikation bei $p>3$. Die bisherigen Methoden von Block, Wilson und dem Autor sollten zusammen mit der Premetschen Modifikation ausreichen, dies Problem zu lösen. Deshalb glaube ich, daß der Klassifikationssatz auch für $p=7$ richtig ist, daß für $p=5$ außer den klassischen und Cartan-Typen nur noch die Klasse der Melikjan-Algebren existiert, und daß diese Vermutung in Kürze bewiesen werden wird.

Bei den Charakteristiken $p=2,3$ stellt sich das Problem in ganz anderer Weise. Man erhält schon bei den klassischen Algebren neue Phänomene: die Wurzelketten $\alpha+i\beta$ haben im klassischen Fall über $\mathbb{C}$ höchstens die Länge 4. Für Charakteristik 0 oder $p\geqslant 5$ gibt es also Lücken in diesen Ketten. Die Existenz dieser Lücken ist ein sehr wichtiges Argument bei der Klassifikation dieser Algebren. Aus simplen arithmetischen Gründen fehlen sie für $p\leqslant 3$. Damit bricht bereits für die klassischen Algebren eine fundamentale Argumentation zusammen. Diese beweistechnische Überlegung wird untermauert durch die Tatsache, daß es für $p=2,3$ eine Unzahl neuer Algebren gibt. Um ein Beispiel vorzustellen, betrachten wir den Fall $p=2$. Die Algebra $sl(2)$ ist dann nicht mehr einfach, sondern nilpotent. Die einzige einfache Lie-Algebra der Dimension 3 hat die Multiplikationstabelle

$$[e,f]=h, \qquad [h,e]=e, \qquad [h,f]=f.$$

Es gilt $(\mathrm{ad}\, e)^2 \neq 0$, und deshalb ist dies keine Lie-2-Algebra. Man rechnet leicht nach, daß die kleinste Lie-2-Algebra, die diese 3-dimensionale Algebra enthält, bereits 5-dimensional ist.

Ich betrachte die Klassifikation für diese Charakteristiken nicht als ein Problem, daß in absehbarer Zeit lösbar wäre.

§ 5 Isomorphismen

Im dritten Abschnitt haben wir die Klassifikation auf das Problem der Isomorphismen zwischen klassischen und Cartan Typ Lie-Algebren zurückgeführt. Da die einfachen Lie-Algebren vom Cartan-Typ genau die einfachen Lie-Algebren mit nichttrivialen sandwich-Elementen sind, gibt es keine Isomorphismen zwischen Lie-Algebren von klassischem und Cartan-Typ.

Die Isomorphismen zwischen den klassischen Algebren sind bekannt, und lassen sich unterdrücken, indem man für die vier Serien die auch bei den Algebren über $\mathbb{C}$ üblichen Einschränkungen an die Ränge macht [Se].

Den Beweis der folgenden Eigenschaft der Cartan-Typen findet man zum Beispiel in [Ba-St]. Eine Lie-Algebra L vom Cartan-Typ $W(m; \underline{n})$ oder $X(m; \underline{n}; \Phi)^{(2)}$ mit $X \in \{S, H, K\}$ besitzt genau eine maximale Unteralgebra $L_{(0)}$ der Kodimension $\leqslant m$. Bezeichnet $L_{(1)}$ das maximale Ideal von $L_{(0)}$, das auf L nilpotent operiert, so ist $L_{(0)}/L_{(1)}$ isomorph zu $gl(m)$, $sl(m)$, $sp(m)$ oder $sp(m-1)\oplus F$, entsprechend den vier Familien. Daher sind die Anzahl m der „Unbestimmten" und der Typ W, S, H, K Isomorphieinvarianten. Weiterhin gilt bei vorgegebenen Typ und m folgendes.

$W(m; \underline{n})$ und $W(m; \underline{n}')$ sind genau dann isomorph, wenn $\underline{n}'$ durch eine Permutation aus $\underline{n}$ gewonnen wird [Wil 71]. Sind $S(m; \underline{n}; \Phi)^{(1)}$ und $S(m; \underline{n}'; \Phi')^{(1)}$ isomorph, so entsteht $\underline{n}'$ aus $\underline{n}$ durch eine Permutation [Kac 74]. Bei festem $\underline{n}$ gibt es (in Abhängigkeit von Φ) nur endlich viele Isomorphieklassen [Wil 80]. In der Familie der Hamiltonschen Lie-Algebren gibt es bei festem m und $\underline{n}$ unendlich viele Isomorphietypen (Skryabin 1986). Auch für die Familie der Kontaktalgebren hat Skryabin alle Isomorphieklassen bestimmt. Zu vorgegebener Dimension gibt es wiederum nur endlich viele Isomorphietypen.

§ 6 Weitere Resultate

Zusammenfassend kann man sagen, daß das Klassifikationsproblem zum großen Teil gelöst ist. Einige noch offene Fragen stehen vor einer Lösung, während einige Spezialfragen wohl im Augenblick nicht vollständig klärbar sind. Bemerkenswerterweise haben sich aber durch diese Lösung Wege zu anderen interessanten Problemen geöffnet, für die sowohl die Ergebnisse als die Methoden der Klassifikation benutzt werden. Zwei Beispiele will ich andeuten.

A) Unendlich dimensionale Algebren

Wir sind interessiert an einer Charakterisierung von unendlich dimensionalen Lie-Algebren und streben eine Beschreibung durch direkte Limiten von endlich dimensionalen Algebren an. Um die Klassifikationsresultate endlich dimensionaler Lie-Algebren anwenden zu können, setzen wir allgemein voraus

(A1) F ist ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 7$.

Natürlich muß man geeignete Endlichkeitsbedingungen einführen, denn sonst sind kaum Strukturaussagen zu erwarten. In einem ersten Schritt bietet sich an

(A2) L ist lokal-endlich, d. h. je endlich viele Elemente von L erzeugen eine endlich dimensionale Unteralgebra.

Selbst mit dieser Voraussetzung ist die Beschreibung von L durch direkte Limiten von endlich dimensionalen Lie-Algebren schwierig. Es gibt nämlich, um ein Beispiel für die auftretenden Schwierigkeiten zu nennen, natürliche Zahlen t und verschiedene Einbettungen

$$\varphi_n, \psi_n : sl(t^n) \to sl(t^{n+1}) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},$$

so daß die zu (φ_n) und (ψ_n) gehörigen direkten Limiten einfache, lokal endliche, aber nicht isomorphe Lie-Algebren sind. Man muß also zur Bestimmung der direkten Limiten nicht nur die Isomorphietypen der endlich dimensionalen Algebren, sondern auch deren Einbettungen genau kennen – für klassische einfache Lie-Algebren ein nahezu unlösbares Problem. Die Lie-Algebren vom Cartan-Typ verhalten sich in dieser Hinsicht sehr viel starrer. Um dieses Phänomen beherrschen zu können, setzen wir weiter voraus, daß die klassischen Faktoren beschränkt sind.

(A3) Es gibt eine natürliche Zahl d, so daß für jede Unteralgebra G von L und für alle maximalen Ideale I von G eine der beiden Voraussetzungen gilt

a) $\dim_F G/I < d$,
b) G/I ist einfach vom Cartan-Typ.

Wir erinnern an die Definition einer geeigneten Filtrierung. Sei $L_{(0)}$ eine maximale Unteralgebra endlicher Kodimension, $L_{(1)}$ das größte Ideal von $L_{(0)}$, welches nilpotent auf $L/L_{(0)}$ operiert, und

$$\begin{aligned} L_{(-1)} &:= \{x \in L \mid [x, L_{(1)}] \subset L\}, \\ L_{(i+1)} &:= \{x \in L_{(i)} \mid [x, L_{(-1)}] \subset L_{(i)}\} \qquad i \geqslant 0, \\ L_{(i-1)} &:= [L_{(i)}, L_{(-1)}] + L_{(i)} \qquad i \leqslant 1. \end{aligned}$$

In gewissem Sinn lassen sich unter der Voraussetzung (A1) bis (A3) die Algebren klassifizieren.

Satz [Ba-St], [St 92]. *L sei eine einfache, unendlich dimensionale Lie-Algebra über dem Körper F und erfülle* (A1) *bis* (A3). *Dann gilt:*

1) *Es gibt eindeutig bestimmte $X \in \{W, S, H, K\}$ und $m \in \mathbb{N}$, so daß L der direkte Limes von einfachen Unteralgebren vom Cartan-Typ $\{U < L \mid \exists\, \underline{n}, \Phi$ mit $U \cong X(m; \underline{n}; \Phi)^{(2)}\}$ ist.*

2) *Es gibt eine maximale Unteralgebra* $L_{(0)}$ *der Kodimension m. Sei* $L_{(1)}$ *das maximale Ideal von* $L_{(0)}$, *daß auf* $L/L_{(0)}$ *nilpotent operiert. Dann ist* $L_{(0)}/L_{(1)}$ *entsprechend dem Typ X isomorph zu* $gl(m)$, $sl(m)$, $sp(m)$ *oder* $sp(m-1)\oplus F$.
3) *Sei* $\mathrm{gr}(L)$ *die graduierte Algebra, die durch die von* $L_{(0)}$ *bestimmte Filtrierung von L definiert wird. Es existieren* $n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $\underline{n}:=(n_1,\ldots,n_m)$ *mit der Eigenschaft*

$$\mathrm{gr}(L) \cong X(m;\underline{n})^{(2)}. \qquad \square$$

Zum Beweis verwendet man den Klassifikationssatz, aus der Gruppentheorie bekannte Methoden („lokale Systeme“) und genaue Kenntnis der Eigenschaften der Cartan Typ Lie-Algebren sowie ihrer Automorphismen.

B) Support-Varietäten, Wachstum von Kohomologie-Gruppen, Darstellungstyp, etc.

Zu jeder endlich dimensionalen Lie-p-Algebra L mit p-Abbildung $[p]$ und jeder Linearform $\chi\in L^*$ existiert eine endlich dimensionale assoziative Algebra $U(L,\chi)$, die χ-reduzierte Universelle Einhüllende. Man erhält sie, indem man aus der unendlich dimensionalen Universellen Einhüllenden $U(L)$ das Ideal herauskürzt, welches durch den Untervektorraum $\{x^p-x^{[p]}-\chi(x)^p 1 \mid x\in L\}$ des Zentrums von $U(L)$ erzeugt wird. $U(L,\chi)$ besitzt die folgende universelle Eigenschaft.
Eine Darstellung $\varrho: L\to gl(M)$ von L heißt χ-Darstellung, wenn $\varrho(x^{[p]})=\varrho(x)^p-\chi(x)^p \mathrm{id}_M$ für alle $x\in L$ gilt. M heißt dann ein χ-Modul für L. Jede χ-Darstellung von L läßt sich nun in eindeutiger Weise zu einer (assoziativen) Darstellung $\hat{\varrho}: U(L,\chi)\to \mathrm{End}(M)$ fortsetzen. Für $\chi=0$ schreibt man auch $U(L,0)=u(L)$ und die entsprechenden Darstellungen und Moduln nennt man p-Darstellungen und p-Moduln.
Das Wachstum eines graduierten Vektorraumes $X:=\oplus X_n$ wird angegeben durch die Folge $(\dim X_n)$. X hat polynomiales Wachstum, wenn es Zahlen a, c gibt mit

$$\dim X_n \leqslant a n^{c-1} \quad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Sei M ein endlich dimensionaler $U(L,\chi)$-Modul und (P_n) eine minimale projektive Auflösung von M. Die kleinste natürliche Zahl c, für die es eine Konstante a gibt, so daß $\dim P_n\leqslant a n^{c-1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt, heißt die Komplexität $c_L(M)$ des Moduls M. Man sieht relativ leicht, daß der triviale Modul F polynomiales Wachstum hat. Nach J. C. Jantzen [Ja] läßt sich die Komplexität in der folgenden Weise beschreiben.

Satz [Ja]. *Sei F algebraisch abgeschlossen und* $(L,[p])$ *eine endlich dimensionale Lie-p-Algebra über F. Dann ist die Komplexität* $c_L(F)$ *die Dimension der algebraischen Varietät* $\{x\in L \mid x^{[p]}=0\}$. $\square$.

E. Friedlander und B. Parshall [F-P] konnten ähnliche Ergebnisse für L-Moduln zu einem beliebigen Charakter herleiten.
Aufgrund der Definition schließt man unmittelbar

$$\dim_F \mathrm{Ext}^n_{u(L)}(F,M) \leqslant a(M) n^{c_L(F)-1} \quad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Man kann sogar genauer zeigen, daß $c_L(F)-1$ der kleinste Exponent ist, der diese Ungleichung erfüllt.

Die Komplexität $c_L(F)$ einer Lie-p-Algebra sagt etwas aus über den Darstellungstyp von $u(L)$. Eine endlich dimensionale assoziative Algebra heißt von endlichem Darstellungstyp, wenn es nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer A-Moduln gibt. A ist vom zahmen Darstellungstyp, wenn es a) unendlich viele Isomorphieklassen endlich erzeugter unzerlegbarer Moduln gibt, und b) man diese durch 1-Parameterfamilien beschreiben kann, von denen es zu jeder Dimension nur endlich viele gibt. Wenn A weder zahm noch von endlichem Darstellungstyp ist, dann heißt A wild. Nach J. Rickert [Ri] ist $u(L)$ wild, sofern $c_L(F)>2$ gilt. Lie-p-Algebren mit $c_L(F)\leqslant 2$ lassen sich nun vollständig beschreiben.

Satz [F-St 92], [F-St]. *Sei $(L,[p])$ eine Lie-p-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F der Charakteristik $p>2$. T bezeichne den maximalen Torus von $Z(L)$, und $N(L)$ sei das (eindeutig bestimmte) maximale nilpotente Ideal von L. Es gilt genau dann $c_L(F)\leqslant 2$, wenn L von folgendem Typ ist.*

1) *$L\cong G\oplus Z(L)$ ist die direkte Summe einer Unteralgebra $G\cong sl(2)(=Fe\oplus Fh\oplus Ff)$ mit dem Zentrum $Z=Z(L)$. Es gilt* $\dim Z/Z^{[p]}\leqslant 2$. *$G\oplus T$ zusammen mit $[p]$ erzeugt die gesamte Algebra. Genauer gilt $\dim Z/Z^{[p]}\leqslant 1$, oder $e^{[p]}$ und $f^{[p]}$ sind* modulo $Z^{[p]}$ *linear unabhängig und die Konstanten α, β, definiert durch $h^{[p]}-h\equiv\alpha e^{[p]}+\beta f^{[p]}$* modulo $Z^{[p]}$, *erfüllen $\alpha\beta\neq 1$.*

2) *L ist auflösbar $L/N(L)$ ist ein höchstens 2-dimensionaler Torus. Es gilt $N(L)^3=\{0\}$ und* $\dim N(L)/N(L)^{[p]}\leqslant 2$. □

Hieraus leitet man eine Liste aller Lie-p-Algebren L ab, für die $u(L)$ von endlichem Darstellungstyp oder zahm ist.

Satz [F-St 92], [F-St], [P-V], [V]. *Sei $(L,[p])$ eine Lie-p-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F der Charakteristik p.*

1) *Sei $p\geqslant 2$. $u(L)$ ist genau dann von endlichem Darstellungstyp, wenn L die folgende Gestalt hat:*

a) *$L/N(L)$ ist ein höchstens eindimensionaler Torus.*

b) *$N(L)$ ist abelsch und $N(L)/T$ ist nilzyklisch.*

2) *Sei $p\geqslant 3$. Ist $u(L)$ vom zahmen Darstellungstyp, dann gilt $L\cong sl(2)\oplus Z(L)$, und* $\dim Z/Z^{[p]}\leqslant 1$. *$G\oplus T$ zusammen mit $[p]$ erzeugt die gesamte Algebra.* □

Zum Beweis dieser Ergebnisse beachtet man, daß die Einschränkung an die Komplexität, interpretiert als die Dimension von $\{x\in L\,|\,x^{[p]}=0\}$, Informationen über den Verband der p-Unteralgebren von L liefert. Man setzt nun nicht die Resultate, sondern die Methoden der Klassifikation ein, um hieraus die nötigen Schlüsse zu ziehen.

Literatur

[A-F] Albert, A. A.; Frank, M. S.: Simple Lie algebras of characteristic p. Rend. Torino **14** (1954/55) 117–139

[Ba-St] Bahturin, Yu. A.; Strade, H.: Locally finite simple Lie algebras. Manuskript 1991

[B-O] Benkart, G. M.; Osborn, J. M.: Rank one Lie algebras. Ann. of Math **119** (1984) 437–463

[B-O-St] Benkart, G. M.; Osborn, J. M.; Strade, H.: Contributions to the classification of simple modular Lie algebras. Erscheint in Trans. Amer. Math. Soc.

[B] Block, R. E.: New simple Lie algebras of prime characteristic. Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958) 421–449

[B-W 88] Block, R. E.; Wilson, R. L.: Classification of the restricted simple Lie algebras. J. Algebra **114** (1988) 115–259

[C] Cartan, E.: Les groupes de transformations continus, infinis, simples. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **26** (1909) 93–161

[Cha] Chang, H. J.: Über Wittsche Lie-Ringe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **14** (1941) 151–184

[Che] Chevalley, C.: Sur certains groupes simple. Tôhoku Math. J. (2) **7** (1956) 14–66

[D 70] Demuškin, S. P.: Cartan subalgebras of the simple Lie p-algebras W_n and S_n. Sibirsk. Mat. Zk. **11** (1970) 310–325 [Russian]; Sibirian Math. J. **11** (1970) 233–245 [English transl.]

[D 72] –: Cartan subalgebras of simple nonclassical Lie p-algebras, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972) 915–932 [Russian]; Math. USSR-Izv. **6** (1972) 905–924 [English transl.]

[Fe-St 92] Feldvoss, J.; Strade, H.: Restricted Lie algebras with bounded cohomology and related classes of algebras. manuscripta math. **74** (1992) 47–67

[Fe-St] –: Restricted Lie algebras of complexity 2. Manuskript 1991

[F 54] Frank, M. S.: A new class of simple Lie algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40** (1954) 713–719

[F 64] –: Two new classes of simple Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **112** (1964) 456–482

[F-P] Friedlander, E. M.; Parshall, B. J.: Modular representation theory of Lie algebras. Amer. J. Math. **110** (1988) 1055–1094

[J 37] Jacobson, N.: Abstract derivation and Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937) 206–224

[J 41] –: Classes of restricted Lie algebras of characteristic p, I. American J. Math. **63** (1941) 481–515

[J 43] –: Classes of restricted Lie algebras of characteristic p, II. Duke Math. J. **10** (1943) 107–121

[Ja] Jantzen, J.: Kohomologie von p-Lie-Algebren und nilpotente Elemente. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **76** (1986)

[J-R] Jennings, S. A.; Ree, R.: On a family of Lie algebras in characteristic p. Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957) 192–207

[Kac 70] Kac, V. G.: The classification of the simple Lie algebras over a field with nonzero characteristic. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970) 385–408 [Russian]; Math. USSR-Izv. **4** (1970) 391–413 [English transl.]

[Kac 74] –: Description of filtered Lie algebras with which graded Lie algebras of Cartan type are associated. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **38** (1974) 800–834; Errata, **40** (1976) 1415 [Russian]; Math USSR-Izv. **8** (1974) 801–835; Errata, **10** (1976) 1339 [English transl.]

[Kap] Kaplansky, I.: Seminar on simple Lie algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **60** (1954) 470–471

[Ko 63] Kostrikin, A. I.: Strong degeneracy of simple Lie p-algebras. Soviet Math. Dokl. **4** (1963) 637–640

[Ko 67] –: Squares of adjoint endomorphisms in simple Lie p-algebras. Math. USSR-Izv. **1** (1967) 434–473

[Ko 79] –: Sandwiches in Lie algebras. Mat. Sb. (N.S.) **110** (152) No. 1 (1979) 3–12 [Russian]; Math. USSR Sbornik **38** (1981) 1–9 [English transl.]

[Ko-S 66] Kostrikin, A. I.; Šafarevič, I. R.: Cartan pseudogroups and Lie p-algebras. Dokl. Akad. Nauk SSSR **168** (1966) 740–742 [Russian]; Soviet Math. Dokl. **7** (1966) 715–718 [English transl.]

[Ko-S 69] –: Graded Lie algebras of finite characteristic. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **33** (1969) 251–322 [Russian]; Math. USSR-Izv. **3** (1969) 237–304 [English transl.]

[M-Se] Mills, W. H.; Seligman, G. B.: Lie algebras of classiccal typ. J. Math. Mech. **6** (1957) 519–548

[P] Premet, A. A.: Generalization of Wilson's theorem on Cartan subalgebras of simple Lie algebras. Manuskript 1991

[P-V] Pfautsch, W.; Voigt, D.: The representation-finite algebraic groups of dimension zero. C. R. Acad. Sci. Paris **306** (1988) 685–689

[R] Ree, R.: On generalized Witt algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956) 510–546

[Ri] Rickard, J.: The representation type of self-injective algebras. Bull. London Math. Soc. **22** (1990) 540–546

[Se] Seligman, G. B.: Modular Lie algebras. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band **40**. Berlin – New York: Springer 1967

[St 77] Strade, H.: Cartanalgebren in modularen Lie-Algebren. Comm. Algebra **5** (1977) 1335–1359

[St 84] –: Einige Vereinfachungen in der Theorie der modularen Lie-Algebren. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **54** (1984) 257–265

[St 89a] –: The absolute toral rank of a Lie algebra. In: Lie Algebras, Madison 1987. (ed. by Benkart, G. M.; Osborn, J. M.) Springer Lecture Notes in Math. **1373**. Berlin – New York: Springer 1989, 1–28

[St 89b] –: The classification of the simple modular Lie algebras: I. Determination of the two-sections. Ann. of Math. **130** (1989) 643–677

[St II] –: The classification of the simple modular Lie-algebras: II. The toral structure. Erscheint in J. Algebra

[St 91] –: The classification of the simple modular Lie algebras: III. Solution of the classical case. Ann. of Math. **133** (1991) 577–604

[St IV] –: The classification of the simple modular Lie algebras: IV. The determination of the associated graded algebra. Manuskript 1991

[St V] –: The classification of the simple modular Lie algebras: V. Algebras with hamiltonian two-sections. Manuskript 1991

[St 92] –: Locally finite simple graded Lie algebras. Manuskript 1992

[St-F] Strade, H.; Farnsteiner, R.: Modular Lie Algebras And Their Representations. Marcel Dekker Textbooks and Monographs, Vol. **116,** 1988

[St-W 91] Strade, H.; Wilson, R. L.: Classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields of prime characteristic. Bull. Amer. Math. Soc. **24** (1991) 357–362

[St-W] –: The classification of the simple modular Lie algebras: VI. Solution of the final case. Manuskript 1992

[V] Voigt, D.: The algebraic infinitesimal groups of tame representation type. C.R. Acad. Sci. Paris **311** (1990) 757–760

[We] Weisfeiler, B. Yu.: On the Structure of the Minimal Ideal of Some Graded Lie Algebras of Characteristic $p > 0$. J. Algebra **53** (1978) 344–361

[Wil 69] Wilson, R. L.: Nonclassical simple Lie algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969) 987–991

[Wil 71] –: Classification of generalized Witt algebras over algebraically closed field. Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971) 191–210

[Wil 76] –: A structural characterization of the simple Lie algebras of generalized Cartan type over fields of prime characteristic. J. Algebra **40** (1976) 418–465

[Wil 77] –: Cartan subalgebras of simple Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977) 435–446; Correction Trans. Amer. Math. Soc. **305** (1988) 851–855

[Wil 78] –: Simple Lie algebras of toral rank one. Trans. Amer. Math. Soc. **236** (1978) 287–295

[Wil 80] –: Simple Lie algebras of type S. J. Algebra **62** (1980) 292–298

[Win] Winter, D. J.: On the toral structure of Lie p-algebras. Acta Math. **123** (1969) 69–81

[Z] Zassenhaus, H.: Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **13** (1939) 1–100

Prof. Dr. H. Strade
Universität Hamburg
Mathematisches Seminar
Bundesstr. 55
2000 Hamburg 13

(Eingegangen 13. 2. 1992)

Buchbesprechungen

Nadaraya, E. A., Nonparametric Estimation of Probability Densities and Regression Curves, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1989, 213 S., Dfl. 170.00

Kernschätzer und verwandte Verfahren zur nichtparametrischen Kurvenschätzung entwickeln sich gegenwärtig zu einem etablierten Handwerkszeug der Statistik, nachdem in der jüngeren Vergangenheit zahlreiche Publikationen auch zu einer besseren theoretischen Fundierung beigetragen haben. Nadaraya ist einer der Pioniere dieses Teilgebiets der mathematischen Statistik, und das vorliegende Buch macht die Ergebnisse seiner langjährigen Arbeit einem breiten, des Russischen nicht mächtigen Publikum zugänglich.

Der erste Teil des Buches widmet sich Kernschätzern für uni- und multivariate Wahrscheinlichkeitsdichten. Zuerst werden unter verschiedenen Glattheitsannahmen an die zu schätzende Dichte und an den Kern die bekannten asymptotischen Entwicklungen für den mittleren quadratischen Schätzfehler und für sein Integral hergeleitet. Sie werden auf ihre Konsequenzen für die Konsistenz der Kernschätzer und die Wachstumsrate des Glättungsparameters hin untersucht. Im sich anschließenden zweiten Kapitel leitet Nadaraya wesentlich stärkere Konsistenzaussagen her: er zeigt hier die fast sichere Konvergenz der Kernschätzer in der Supremums und L^2-Norm und in der Totalvariationsnorm, angewandt auf die zu den Dichten gehörenden Maße. Das dritte Kapitel ist schließlich der Herleitung der Grenzverteilungen von standardisierten Abweichungen eines Kernschätzers zur zugrundeliegenden Dichte bzw. zu einem zweiten, aus einer unabhängigen Stichprobe gewonnenen Kernschätzer gewidmet. Aus diesen Resultaten lassen sich im Geiste des Kolmogorov-Smirnov-Test Anpassungstests herleiten, aber auch Tests auf Symmetrie einer Verteilung bzw. auf Unabhängigkeit der Komponenten eines Zufallsvektors.

Der zweite Teil des Buches gibt einen knappen Überblick über die analoge Theorie der Kernschätzer für Regressionsfunktionen. Der dritte und letzte Teil befaßt sich mit einer anderen Klasse von Schätzern, den empirischen Orthogonalreihenentwicklungen, und gibt einen Überblick über das Werk Chentsovs.

Der Text ist im Stil einer Originalpublikation, nicht eines Lehrbuchs geschrieben, und das unübersichtliche Layout erschwert zusätzlich den Überblick. Diesen Nachteil macht allerdings die ausgezeichnete und umfangreiche Einleitung wett, die die wesentlichen Ideen und Resultate referiert und die Orientierung innerhalb des Textes sehr erleichtert.

Das Buch scheint bis auf eine im Anhang abgedruckte Originalarbeit die Übersetzung des russischen Originals von 1983 zu sein.

Entsprechend spiegelt sein Inhalt auch den damaligen Stand wieder und geht nicht auf Arbeiten ein, die wie die umfangreiche Diskussion der automatischen Glättungsparameterwahl erst in jüngerer Vergangenheit entstanden sind. Aber auch in dem vom Buch erfaßten Zeitraum sind die erwähnten Literaturstellen zweckmäßig, aber keineswegs vollständig. Vor allem die im englischsprachigen Bereich entstandenen Arbeiten werden nur zu einem kleinen Teil angesprochen.

Auch in anderer Hinsicht ist der Text nicht als Einführung in den gegenwärtigen Stand des Wissens über nichtparametrischen Kurvenschätzer geeignet. Im Gegensatz zu Silvermans *Density Estimation* von 1986 oder Härdles *Applied Nonparametric Regression* von 1990 fehlt jegliche Diskussion des praktischen Aspekts und der Beziehungen zu anderen Schätzern wie z. B. Splineglätter. Monte-Carlo-Studien und beispielhafte Anwendungen auf reale Daten wie auch eine Diskussion der beschränkten Aussagekraft von asymptotischen Resultaten in diesem Bereich der Statistik sucht man vergebens. Dafür gibt Nadaraya einen wesentlichen besseren Einblick in die Mathematik, die hinter der Theorie der Kernschätzer steht, und diskutiert darüberhinaus wesentlich tiefgehendere theoretische Resultate als die beiden erwähnten einführenden Werke. Für den mathematisch interessierten Leser, der über die elementaren Grundlagen der nichtparametrischen Kurvenschätzung bereits informiert ist, ist das vorliegende Buch daher eine wertvolle Ergänzungslektüre.

Kaiserslautern J. Franke

Behnen, K., Neuhaus, G., Rank Tests with Estimated Scores and Their Application (Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik), Stuttgart. B. G. Teubner 1989, 428 S., DM 54,–

Der vorliegende Text beschreibt statistische Rangverfahren unter verallgemeinerten Lokationsmodellen für einige klassische Problemstellungen und basiert auf Forschungen der Autoren während der letzten Jahre. Die Idee, die diesen Untersuchungen zugrunde liegt, kann mit wenigen Worten so beschrieben werden: (1) Einfache lineare Rangstatistiken sind im Shiftmodell optimal für Scorefunktionen, die den zugrunde liegenden Verteilungen angepaßt sind, und sollten mit geeigneten Schätzern approximiert werden. (2) Reine Shiftmodelle sind in der Praxis unrealistisch und sollten durch verallgemeinerte Modelle der Form $F(x-\theta D(x))$ $(x, \theta \in \mathbb{R})$ mit bekannter Funktion D ersetzt werden.

Die Autoren verknüpfen diese beiden Überlegungen zu einer geschlossenen Darstellung. Im verallgemeinerten Shiftmodell werden asymptotisch optimale Tests bestimmt und die zugehörige Scorefunktion durch einen geeigneten Schätzer approximiert. Der Text ist in 2 Teile gegliedert. Teil 1 enthält im ersten Kapitel die Modellannahmen und im zweiten Kapitel eine Darstellung der neuen Teststatistiken in Form eines „Kochbuches" zusammen mit numerischen Beispielen und Monte-Carlo-Studien über die Gütefunktion. Der zweite Teil enthält die theoretischen Resultate, die der Darstelung in Kapitel 2 zugrunde liegen. Die Schätzer der Scorefunktion (Kernschätzer und Projektionsschätzer) werden in Kapitel 3 im Zusammenhang mit dem Zweistichproben-Problem für Lokationsparameter behandelt. Des weiteren behandeln die Kapitel 4–6 das c-Stichproben-Problem, Skalenparameter, Zensorierung, Symmetrieprobleme und Tests auf Unabhängigkeit.

Obwohl man Einwände gegen das gewählte verallgemeinerte Shiftmodell haben kann, erscheint dieses Buch als ein gelungener Versuch, traditionelle statistische Denkweisen in einen größeren Rahmen zu stellen. Die Darstellung ist klar und gut verständlich (wenn man sich die Notation zu eigen gemacht hat). Es sei aber nicht verschwiegen, daß vom Leser eine gehörige Portion an Vorkenntnissen über Stochastik verlangt wird, insbesonders erscheint das Buch von Hájek und Šidák als Vorkenntnis unabdingbar. Hinweise zur umfangreichen Literatur über Rangstatistiken finden sich nur äußerst spärlich. Insofern ist das vorliegende Buch nur mit erheblichen Abstrichen für eine Lehrveranstaltung geeignet; für Statistiker kann es nur wärmstens empfohlen werden.

Göttingen M. Denker

Dubin, D. A., Hennings, M. A. Quantum mechanics, algebras and distributions (Pitman Research Notes in Math. 238), New York u. a.: Longman, 1990, 238 S., £ 18.50

Es ist seit langem bekannt, daß eine mathematisch strenge Darlegung vieler Gebiete der Theoretischen Physik in der Regel relativ umfangreiche mathematische Hilfsmittel und Theorien erfordert. Dies zeigen etwa die 4 Bände der „Methods of Modern Mathematical Physics" von M. Reed und B. Simon bei Academic Press sehr eindrucksvoll. Das zu besprechende Buch von D. A. Dubin und M. A. Hennings will zur mathematischen Fundierung und somit zu einem tieferen Verständnis der Quantenmechanik beitragen.

Wichtige Beispiele von Observablen der Quantenmechanik wie Ortsoperator, Impulsoperator oder Drehimpuls lassen sich nur durch unbeschränkte Operatoren im Hilbertraum realisieren. Dadurch motiviert wird als Observablenalgebra eine unbeschränkte Operatorenalgebra genommen: die $*$-Algebra $L^+(S(\mathbb{R}^{3N}))$. Diese besteht aus allen auf dem dichten Bereich $W := S(\mathbb{R}^{3N})$ im Hilbertraum $L^-(\mathbb{R}^{3N})$ definierten linearen Operatoren, die zusammen mit ihrem Adjungierten den Bereich W invariant lassen. Die Zustände werden als lineare Funktionale auf der Observablenalgebra $L^+(W)$ definiert, die auf dem Kegel der positiven Operatoren nichtnegativ sind. Es läßt sich dann beweisen, daß alle Zustände auf $L^+(W)$ durch eine Dichtematrix gegeben werden können. In diesem allgemeinen Schema wird in dem Buch Quantenmechanik betrieben. Die physikalischen Begriffe und Prinzipien werden dabei immer im engen Zusammenhang mit der Beschreibung der nötigen mathematischen Strukturen diskutiert, wobei die algebraischen Aspekte und die Theorie der lokalkonvexen Räume eine besondere Betonung erfahren. Dem Charakter des Buches entsprechend, werden die (physikalischen und mathematischen) Begriffe immer exakt definiert und gut motiviert, für Beweise mathematischer Resultate wird aber häufig auf die Literatur verwiesen.

Kapitel 2 behandelt die allgemeinen Grundlagen der Quantenmechanik. Es werden Zustände, Observable, die kanonische Vertauschungsrelationen und ein Eindeutigkeitssatz für ihre Darstellungen (basierend auf einer Arbeit von Kristensen, Mejlbo und Thue-Poulsen), Drehmoment, Spin u. a. diskutiert. Danach wird systematisch mit dem Aufbau des algebraischen Zugangs begonnen. Kapitel 3 befaßt sich mit topologischen Algebren und Kapitel 4 mit der Observablenalgebra $L^+(W)$. In Kapitel 5 werden die Zustände des Quantensystems und in Kapitel 6 die Dynamik und die Symmetrien des Systems untersucht. Zur Inhaltsbeschreibung seien einige Stichworte aufgezählt: Positivitätskegel, Ordnungstopologie, gleichmäßige Topologie, GNS-Darstellung, verallgemeinerte Eigenvektoren, ergodische Zustände, Extremalzerlegung von Zuständen. Kapitel 6 gibt in dem beschriebenen Kontext einen interessanten Zugang zur Theorie der Quantenmessung; er beruht auf einer gemeinsamen Arbeit von D. A. Dubin mit J. Sotelo-Campos.

Das Neue an dem Buch von D. A. Dubin und M. A. Hennings ist, daß hier – wohl erstmalig in einem Buch – die Quantenmechanik im Kontext allgemeiner topologischer Algebren bzw. unbeschränkter Operatorenalgebren behandelt wird.

Leipzig K. Schmüdgen

Mazzola, G., Geometrie der Töne (Elemente der mathematischen Musiktheorie), Basel u. a.: Birkhäuser-Verlag 1990, 380 S., 107 Abb., 7 Notenbeispiele, 6 Tabellen, geb., DM 98,–

Mathematik und Musik sind einander im Laufe der Geschichte vielfältig begegnet. Die Tonhöhenarithmetik der Pythagoreer ist ein frühes Beispiel. Augustinus weithin wirkende Schrift „De musica" behandelte auch das Zahlenspiel der Rhythmen. Strenge Formen der Komposition, allen voran die Fuge, haben mathematische Strukturen der Musik einem großen Publikum nahegebracht. Komponisten wie Boulez, Ligeti und Xenakis haben sich mathematischer Instrumentarien bedient. Das Kult-Buch „Gödel-Escher-Bach" von D. Hofstadter hat die Idee des Selbstbezugs bis in die Musik hinein verfolgt.

Der Autor, zahlreichen DMV-Mitgliedern durch einen Vortrag auf einer Jahrestagung bekannt, unternimmt in dem vorliegenden Buch den Versuch einer alle Aspekte der Musik umspannenden systematischen Theorie unter Einsatz eines vielfältigen Instrumentariums mathematischer Strukturen: Gruppen, Moduln, Mannigfaltigkeiten u. a. m. Das hat z. T. veranschaulichenden Charakter, etwa wenn die 12-Tonskala $\mathbb{Z}$ mod 12 als Torus $(\mathbb{Z} \bmod 3) \oplus (\mathbb{Z} \bmod 4)$, der dann in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet wird, dargestellt wird, um Terzverhältnisse in geometrische Lagebezeichnungen zu übersetzen und dadurch sichtbar zu machen. Besonders originell finde ich die Darstellung von Kompositionen als globaler Atlas aus lokalen Kompositionselementen nach dem Mannigfaltigkeiten-Schema. Ebenso die hier auf eine mathematische Form gebrachte Begründung dafür, daß ausgerechnet die Besetzung Geige-Geige-Bratsche-Cello erforderlich war, um gewisse Fülle-Anforderungen minimal zu realisieren.

Mathematikern bietet das Buch u. a. die Möglichkeit, das, was ihnen bei den Verlautbarungen mathematisch nicht oder kaum vorgebildeter Musiktheoretiker unverständlich blieb, nunmehr unter Ausnutzung mathematischen Gewußt-Wo's rasch, umfassend und gründlich zu lernen, um sich dann unter Musikern – er lernt in diesem Buch die Ideen vieler kennen – etwa so bewegen zu können, wie einst, von v. Neumann-Morgenstern belehrt, unter im wesentlichen verbal arbeitenden Ökonomen. Ob die Musiker in ähnlicher Weise zur Mathematik aufschließen werden, wage ich zu bezweifeln – zu bedeutend und bereits befriedigend ist hier die bare Vitalität, an der es mathematisch höchstens nachträglich etwas zu deuten gibt. Doch möchte ich meinen, daß manche neuartige Idee des Verfassers, vielleicht aufs Laienniveau heruntergeholt, in die Gedankenwelt der Musik-Theoretikerschaft Eingang finden wird. Ein in den Geisteswissenschaften probates Mittel, solche Verbreitung zu fördern, nämlich die Entfaltung einer imponierenden Terminologie, hat der Autor jedenfalls nicht verschmäht – der Mathematiker sieht's mit leiser Skepsis.

Ein Mathematiker, der das Buch durchstudiert hat – es liest sich angenehm – dürfte musiktheoretisch fest im Sattel sitzen. Und das ist sicher ein lohnendes Ziel.

Erlangen K. Jacobs

Levendorskii, S., Asymptotic distributions of eigenvalues of differential operators, Dordrecht u.a.: Kluwer Academic Publishers 1990, 267 S., DFL 220

Die vorliegende Monographie beschäftigt sich mit der Asymptotik der Eigenwerte von (Pseudo-) Differentialoperatoren. Als Hauptanwendungsgebiete werden Probleme aus der mathematischen Physik angesprochen, die Zusammenhänge zur (Riemannschen) Geometrie werden hingegen kaum berührt. Folgende Themen werden behandelt:
Kapitel 1: Weyl-Hörmander-Kalkül für Pseudodifferentialoperatoren – Kapitel 2: Approximation von Spektralprojektoren (skalar- und matrixwertig) – Kapitel 3: Operatoren in beschränkten Gebieten (elliptische Operatoren vom Douglis-Nirenberg-Typ, allgemeine Randwertprobleme für elliptische Operatoren, der elektromagnetische Resonator, linearisiertes Navier-Stokes-System) – Kapitel 4: Operatoren in unbeschränkten Gebieten (Schrödinger-Operatoren, Dirac-Operatoren) – Kapitel 5: Asymptotik des Spektrums von Pseudodifferentialoperatoren mit operatorwertigen Symbolen – Kapitel 6: Entartete Differentialoperatoren (Schrödinger Operatoren mit homogenen Potentialen, entartete Operatoren in beschränkten Gebieten, entartete Operatoren in unbeschränkten Gebieten).

In einem Anhang werden einige Resultate aus der Variationsrechnung für quadratische Funktionale zusammengestellt. Ferner gibt es eine kurze Besprechung der Literatur und eine insbesondere in Bezug auf das russisch-sprachige Schrifttum umfangreiche Bibliographie (16½ Seiten). Ein wenig albern wirkt das Stichwortverzeichnis: Es gibt 30 Eintragungen, fünf davon lauten: Weyl Symbol, Weyl symbol principal, Weyl symbol classical, Weyl symbol left, Weyl symbol right.

Das Buch ist schwer lesbar, teilweise ungenau geschrieben, es fehlen z. B. öfters saubere (auffindbare) Definitionen. Trotzdem glaube ich, daß für Experten die vorliegende Monographie hilfreich ist, um sich über die Arbeiten aus dem russisch-sprachigen Raum in diesem hochinteressanten Gebiet der Analysis zu informieren.

Erlangen N. Jacob

Hilgert, J., Hofmann, K. H., Lawson, J. D., Lie Groups, Convex Cones and Semigroups, Oxford: Oxford Univ. Press 1989, 645 S., £55.00

Kausalität und Ordnung spielen eine große Rolle in der Mathematik und in der theoretischen Physik. Einer der Grundgedanken der Relativitätstheorie ist, daß jedem Punkt m der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit M ein Lichtkegel in dem Tangentialraum $T_m(M)$ zugeordnet ist, $M \ni m \mapsto C(m) \subset T_m(M)$. Dieses Kegelfeld gibt den möglichen Ereignissen eine Richtung und erzeugt eine lokale oder globale kausale Ordnung auf der Mannigfaltigkeit. Dabei ist $m \leqslant n$, n ist von m erreichbar, genau dann wenn es eine kausale Kurve α gibt mit $\alpha(0) = m$ und $\alpha(1) = n$, wobei α kausal genannt wird, wenn $\dot{\alpha}(t) \in C(\alpha(t))$ für alle $t > 0$ gilt. Ist die Mannigfaltigkeit M homogen $M = G/H$, G zusammenhängend, und operiert G kausal auf M, d.h. $dl_g(C(m)) \subset C(l_g(m))$, wobei l_g der Diffeomorphismus $m \mapsto g \cdot m$ ist, so gilt für alle $h \in H$, $dl_h(C(eH)) = C(eH)$. Damit ist $C(eH)$ ein *invarianter Kegel* in dem Vektorraum $T_{eH}(G/H)$. Ist umgekehrt C ein H-invarianter Kegel in $T_{eH}(G/H)$, so ist $gH \mapsto C(gH) := dl_g(C)$ ein Kegelfeld und die Operation von G ist kausal. Die kanonische Abbildung $\pi : G \to G/H$ induziert eine surjektive lineare Abbildung $d\pi : \mathfrak{g} \to T_{eH}(G/H)$. Es ist $C := \pi^{-1}(C(eH))$ ein H-invarianter Kegel in $\mathfrak{g}$. Wir bemerken, daß $\mathfrak{h} \subset C \cap -C$. Hiermit stoßen wir auf die Probleme:

1. Gegeben sei eine Liesche Gruppe H, die auf den Vektorraum V operiert. Klassifiziere alle unter H invarianten Kegel in V.
2. Sei H eine in G abgeschlossene Untergruppe. Bestimme alle unter H-invarianten Kegel in $\mathfrak{g}$.

Der (lokalen) invarianten Ordnung auf M ist ein zweites Objekt zugeordnet. Die kausale (lokale) Halbgruppe S wird definiert durch

$$S := \{g \in G \mid gH \geqslant eH\}.$$

Ist umgekehrt eine Halbgruppe in G gegeben mit $H \subset S \cap S^{-1}$, so läßt sich eine G-invariante Ordnung auf M durch $aH \geqslant bH$ genau dann, wenn $b^{-1}a \in S$ gilt, definieren. Die Halbgruppe besitzt einen Tangentialkegel $C(S)$ in der Lie-Algebra von G. Ist S abgeschlossen, so ist

$$C(S) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall\, t > 0 : \exp tX \in S\}.$$

Ein zweiter Fragenkomplex ist dann

3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Halbgruppe S und dem Kegel C? Ist die Halbgruppe S in irgendeinem Sinne durch den Kegel C bestimmt, bzw. ist der Kegel *global?* Welcher Zusammenhang besteht zwischen C und $C(S)$?
4. Welche Kegel in $\mathfrak{g}$ bestimmen eine (lokale) Halbgruppe in G und welche Halbgruppen liefern denselben Kegel?

Dieselben oder ähnliche Fragen treten in anderen Zusammenhängen auf. So sind geometrische Eigenschaften von Differentialoperatoren oft mit Kegeln und Ordnungsrelationen verbunden [3]. Hardy-Räume werden mit Hilfe von Kegeln und Halbgruppen definiert [6, 7, 15, 17]. Darstellungen mit höchsten Gewicht, oder positiver Energie, werden durch Halbgruppen beschrieben [13]. Auf geordneten Räumen lassen sich klassische

Objekte, wie etwa die Volterra-Algebra, die Laplace-Transformierte [2] und Wiener-Hopf-Operatoren [5] definieren. Hier sind nur einige Anwendungsbeispiele, die dem Autor naheliegen, aufgeführt. Die Liste läßt sich erheblich verlängern, aber an dieser Stelle möchte ich doch nur auf das Buch [8] hinweisen, wo verschiedene Anwendungen von Halbgruppen dargestellt werden. Nebenbei sei bemerkt, daß diese Monographie eine ausgezeichnete Einführung in die Theorie samt deren Anwendungen liefert und als Nebenlektüre zu dem Buch von Hilgert, Hofmann und Lawson sehr zu empfehlen ist.

Obwohl die Fragen wichtig sind, ist die Theorie erst neueren Datums. Grundlegende Arbeiten wurden von Ol'shanskii, Paneitz und Vinberg geleistet [13, 14, 16, 18, 19]. Sie haben diejenigen einfachen Lie-Algebren bestimmt, die einen invarianten Kegel besitzen und die invarianten Kegel klassifiziert. Insbesondere Ol'shanskii, aber auch Vinberg, hat sich auch mit der Frage der zugehörigen Ordnung beschäftigt. Ihre Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Eine einfache Liesche Algebra besitzt einen invarianten Kegel genau dann, wenn das Zentrum einer maximalen kompakten Unteralgebra nicht trivial ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn der Raum G/K ein komplexes, symmetrisches Gebiet ist.
2. Ist $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ eine kompakte Cartan-Unteralgebra, so ist jeder abgeschlossene (bzw. offene) invariante Kegel C eindeutig durch die Kegel $C \cap \mathfrak{t}$ bestimmt.
3. Die Wurzeln der kompakten Cartan Unteralgebra $\mathfrak{t}$ bestimmen einen minimalen Kegel $c_{\min}$ und einen maximalen Kegel $c_{\max}$ in $\mathfrak{t}$, die beide unter der Weyl-Gruppe invariant sind. Ein Kegel c in $\mathfrak{t}$ rührt genau dann von einem invarianten Kegel in $\mathfrak{g}$ her, wenn er invariant unter der Weyl-Gruppe ist und, bis auf Multiplikation mit ± 1, gilt $c_{\min} \subset c \subset c_{\max}$.

Ferner hat Ol'shanskii gezeigt, daß jeder abgeschlossene invariante Kegel eine abgeschlossene Halbgruppe in der komplexen Gruppe G_c durch $S(C) = G\exp(iC) \subset G_c$ liefert und diese Halbgruppe ist homöomorph zu $G \times C$. Halbgruppen dieser Art werden deshalb oft Ol'shanskii-Halbgruppen genannt [1]. Die allgemeine Theorie stellte sich aber als erheblich schwieriger dar. Zum Beispiel stand die notwendige Strukturtheorie nicht zur Verfügung. Das Buch „Lie Groups, Convex Cones and Semigroups" von Joachim Hilgert, Karl Heinrich Hofmann und Jimmie D. Lawson stellt nun zum ersten Mal eine einheitliche Zusammenfassung der Theorie, die bis 1988 bekannt war, dar. Dabei sind viele Teile der Theorie von den Autoren in den letzten Jahren aufgebaut worden und einige davon sind ausschließlich in dem Buch veröffentlicht. Grob aufgeteilt besteht das Buch aus vier Teilen. Der erste Teil behandelt die Geometrie, insbesondere die Geometrie des Randes eines Kegels und Dualitätssätze. Der nächste Teil behandelt die infinitesimale Theorie, d.h. Halbalgebren und invariante Kegeln in Lie-Algebren. Hier muß sich der Leser auf detaillierte und oft nicht einfache Beschreibung der Strukturtheorie kausaler Lie-Algebren einlassen. Dies ist aber in meinem Augen einer der wichtigsten Teile des Buches. Hier wird zum ersten Mal eine einheitliche Strukturtheorie für kausale Lie-Algebren entwickelt und diese Theorie ist für jede Anwendung unumgänglich. Die Ergebnisse am Schluß zeigen dann, daß, nach notwendiger Umformulierung, die obigen Ergebnisse für einfache Lie-Algebren allgemein richtig sind.

Der dritte Teil beschreibt die lokale Theorie der Halbgruppen. Hier ist das wichtigste Hilfsmittel die Campbell-Hausdorff-Multiplikation, die in einer Nullumgebung in $\mathfrak{g}$, der sogenannten Campbell-Hausdorff-Umgebung, richtig ist:

$$X * Y := \log(\exp X \exp Y).$$

Da diese Multiplikation durch eine „universale" Potenzreihe gegeben ist, erlaubt sie innerhalb der Lieschen Algebra ohne Bezug auf die Gruppe zu arbeiten. Ein Lie-Kegel in $\mathfrak{g}$ ist ein Kegel mit $\exp(\operatorname{ad} X)C \subset C$ für alle $X \in C \cap -C$. Eine lokale Halbgruppe bzgl. einer Campell-Hausdorff-Umgebung U ist eine Teilmenge S von U mit $(S * S) \cap U \subset S$. Die Menge ist somit lokal unter Multiplikation abgeschlossen. Übertragung des dritten Lieschen Satzes auf Halbgruppen sagt nun aus, daß genau dann C ein Lie-Kegel ist, wenn es bzgl. einer Campbell-Hausdorff-Umgebung eine lokale Halbgruppe gibt, deren Tangentialkegel mit C übereinstimmt. Die Kegel C rührt aber im allgemeinen nicht von einer globalen Halbgruppe her. Dies zeigt deutlich die neuen Probleme, die sich in der Theorie der Halbgruppen ergeben. Hier stellt sich auch heraus, wie viel schwieriger im Vergleich mit der globalen Theorie der Lieschen Gruppen die globale Theorie der Halbgruppen ist. Diese Fragen werden in dem vierten Teil des Buches behandelt. Bis jetzt sind aber die Ergebnisse fragmentarisch und viele Fragen stehen offen. Seitdem das Buch herauskam, sind aber erhebliche Fortschritte, die nicht zuletzt hierauf aufbauen, erzielt worden. Dazu sei an dieser Stelle nur auf die Arbeiten von K.-H. Neeb [10, 11] und den Seminarbericht [8] hingewiesen.

Es ist keine Frage, daß dieses Buch eine Pflichtlektüre für alle, die über Halbgruppen, Kausalität auf Lieschen Gruppen und homogenen Räumen arbeiten, sein wird. Es muß aber auch zugegeben werden, daß das Buch oft schwer zu lesen ist. Die Autoren haben sich aber Mühe gegeben, dem Leser mit vielen ausführlichen Beispielen von den niedrig dimensionalen Algebren zu helfen, insbesonders in den Kapiteln II.3 und V.4. Dasselbe gilt auch für die Einführung, die vorbildlich ist. Am Ende jedes Kapitels sind kurze, aber interessante Hinweise auf Geschichte, die gerne etwas länger hätten sein können, zusammengefaßt. Der Nachteil des Buches besteht darin, daß für diejenigen, die an Problemen arbeiten, die diese Theorie benutzen sollten, das Buch doch oft zu schwer zugänglich ist, was hoffentlich in der Zukunft durch ein weiteres Buch behoben wird. Ferner ist zu hoffen, daß bald der zweite Band, in dem die verschiedenen Anwendungen, wie auch die Ergebnisse über homogene kausale Mannigfaltigkeiten, die seit der Veröffentlichung des Buches erzielt worden sind [4, 5, 7, 9, 12], mit einbezieht, folgen würde.

Literatur

[1] Dörr, N.: On Ol'shanskii's Semigroups. Math. Ann. **288** (1990) 21–33

[2] Faraut, J.: Algèbres de Volterra et transformation de Laplace sphérique sur certains éspaces symmetriques ordonnés. Symp. Math. **29** (1986) 183–196

[3] Günter, P.: Huygen's principle for linear partial differential operators of second order. Boston: Birkhäuser 1987

[4] Hilgert, M.; Hofmann, K. H.: On the causal structure of homogeneous manifolds. Math. Scand. **67** (1990) 199–144

[5] Hilgert, J.; Neeb, K-H.: Wiener Hopf operators on ordered symmetric spaces. Preprint 1991

[6] Hilgert, J.; Ólafsson, G.: Analytic extensions of representations, the solvable case. Erscheint demnächst in Jap. J. of Math.

[7] Hilgert, J.; Ólafsson, G.; Ørsted, B.: Hardy spaces on affine symmetric spaces. J. reine angew. Math. **415** (1991) 189–218

[8] Hofmann, K. H.; Lawson, J. D.; Pym, J. S. (Eds): The Analytical and Topological Theory of Semigroups. Berlin: de Gruyter Verlag 1990

[9] Lawson, J. D.: Ordered Manifolds, Invariant Cone Fields and Semigroups. Forum Math. **1** (1989) 275–285

[10] Neeb, K.-H.: Globality in semisimple Lie groups. Annales de l'Institut Fourier. **40** (1991) 493–536

[11] Neeb, K.-H.: Codal orders on homogeneous spaces. Invent. Math.**104** (1991) 467–496

[12] Ólafsson, G.: Symmetric spaces of Hermitian type. Diff. Geom. and Appl. **1** (1991) 195–233

[13] Ol'shanskii, G. I.: Invariant cones in Lie algebras, Lie semigroups and the holomorphic discrete series. Functional Anal. Appl. **15** (1981) 275–285

[14] Ol'shanskii, G. I.: Convex cones in symmetric Lie algebras, Lie semigroups and invariant causal (order) structures on pseudo-Riemannian symmetric spaces. Sov. Math. Dokl. **26** (1982) 97–101

[15] Ol'shanskii, G. I.: Complex Lie semigroups. Hardy spaces and the Gelfand Gindikin Program. Erscheint in Diff. Geom. and Appl.

[16] Paneitz, S.: Invariant convex cones and causality in semisimple Lie algebras and groups. J. Funct. Anal. **43** (1981) 313–359

[17] Stanton, R. J.: Analytic extension of the holomorphic discrete series. Amer. J. Math. **108** (1986) 1411–1424

[18] Vinberg, 'E. B.: The theory of homogenous convex cones. Trans. Moscow Math. Soc. (1963) 340–403

[19] Vinberg, 'E. B.: Invariant convex cones and ordering in Lie groups. Functional Anal. Appl. **15** (1982) 1–10

Roskilde G. Ólafsson

Arnold, V. I., Singularities of Caustics and Wave Fronts, Dordrecht u. a.: Kluwer Academic Publishers Group 1990, 274 S., US$ 99.00

Wenn es auf dem Buchdeckel heißt, das Buch beschreibe die Fortschritte in der Theorie der Singularitäten von Wellenfronten „in a comprehensive, selfcontained way", und wenn dann „readers with a minimal mathematical background" der größte Gewinn für physikalische Anwendungen versprochen wird, so darf man dies gewiß nicht dem Autor zurechnen, wie man auch das etwas fetzige Vorwort des Herausgebers in Kauf nehmen muß. Eigentlich handelt es sich um einen Ergebnisbericht, eine auf ein Vielfaches erweiterte, fast enzyklopädisch umfassende Version von dem, was Arnold 1981 als Heftchen über Katastrophentheorie vorgelegt hat. Eine beeindruckende Fülle von Ergebnissen vor allem von Arnold selbst und seinem Kreis von Schülern und Mitarbeitern wird hier in einen systematischen Zusammenhang gebracht. Den mathematischen Hintergrund, symplektische und Kontaktgeometrie, Technik der Klassifikation von Singularitäten, Gauß-Manin Zusammenhang, Lagrange-Kobordismus und vieles mehr, faßt Arnold an seinem Ort jeweils in wenigen Prosaworten zusammen, die das Wesentliche treffen, die man aber freilich nur verstehen kann, wenn man sich zuvor lange und fleißig auch mit dem Unwesentlichen vertraut gemacht hat. Arnold beschreibt einen mathematisch sinnvoll strukturierten Zusammenhang der Arbeiten, die am Ende des Buches in 186 Nummern in der Reihenfolge stehen, wie sie im Text auftreten. Der Text enthält vor allem für die expliziterteren Aussagen der Klassifikation keine Beweise, aber er zeigt einen Weg durch die referierten Arbeiten. Wir dürfen hoffen, daß schöne Lehrbücher und Lecture notes für Studenten with a minimal mathematical background den Wegen folgen werden, die der Meister gewiesen hat.

Regensburg Th. Bröcker

Vitushkin, A. G. (Ed.), Several Complex Variables I (with contributions by Chirka, E. M., Dolbeault, P., Khenkin, G. M., Vitushkin, A. G.) (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 7), Berlin u.a.: Springer Verlag 1989, 265 S., DM 128,–

Der erste Band über Komplexe Analysis enthält verschiedene Monographien zu wichtigen Bereichen. Ziel aller Beiträge ist es, eine zusammenfassende Darstellung bis hin zu neueren Ergebnissen zu geben.

In seinem einleitenden Artikel *Remarkable Facts of Complex Analysis* spricht der Herausgeber dieser Reihe A. G. Vitushkin verschiedene Probleme an, die für die weitere Entwicklung bedeutsam waren. Im einzelnen geht er ein auf den Begriff der Holomorphiekonvexität, streng pseudokonvexe Gebiete, analytische Polyeder, die Klassifikation von Gebieten des C^n, die Kernfunktionen von Cauchy, Bochner-Martinelli-Fantappié-Leray, die Lösung des $\bar\partial$-Problems, die Poincaré-Lelong-Gleichung, Steinsche Mannigfaltigkeiten und Deformationen komplexer Strukturen.

Die weiteren Artikel sind *The Method of Integral Representation in Complex Analysis* von G. M. Henkin, *Complex Analytic Sets* von E. M. Chirka, sowie *Holomorphic Mappings and the Geometry of Hypersurfaces* von A. G. Vitushkin und *General Theory of Multidimensional Residues* von P. Dolbeault.

Ein zentraler Beitrag dieses Bandes ist der Artikel von G. M. Henkin. Ausgehend von den klassischen Problemen von Weierstraß und Mittag-Leffler in mehreren Veränderlichen, den Sätzen von Cousin und dem Kontinuitätsprinzip von Hartogs, sowie dem damit zusammenhängenden Levi-Problem, werden zunächst die Integralformeln von Bochner-Martinelli (bzw. Cauchy-Fantappié) zur Lösung der Cauchy-Riemann-Gleichung $\bar{\partial} f = g$ einführend betrachtet. Schwerpunkte sind Integralformeln auf streng pseudokonvexen Gebieten in Zusammenhang mit Abschätzungen der Bergmannschen Kernfunktion und Lösungen des $\bar{\partial}$-Neumann-Problems, die Theorie der CR-Funktionen und die $\bar{\partial}$-Kohomologie für q-konvex-p-konkave Mannigfaltigkeiten. Der Artikel von Henkin gibt eine umfassende, präzise Darstellung des Gebietes.

Der Beitrag „Complex Analytic Sets" von E. M. Chirka befaßt sich mit der lokalen Theorie analytischer Mengen. Die Abschnitte sind überschrieben „Local Structure of Analytic Sets, Tangent Cones, Multiplicity and Intersection Theory, Metric Properties of Analytic Sets, Holomorphic Chains" und „Analytic Continuation and Boundary Properties".

Chirka geht hier von einem mengentheoretischen Standpunkt aus, ganz wie es durch die Entwicklung vorgegeben ist. Es liegt hier das Schwergewicht auf Differentialformen und Integration über analytische Mengen. Bei der Darstellung der Grundlagen wird allerdings vom Gang der Entwicklung abgewichen. Dazu seien einige Beispiele angeführt: Die Anwendung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes auf die Theorie analytischer Überlagerungen und eigentliche Abbildungen, waren Mittel um algebraische Methoden nutzen zu können. Stattdessen verweist der Autor auf eine mehr als zwanzig Jahre jüngere Referenz aus der algebraischen Geometrie. Und ähnlich auch im letzten Kapitel, in dem die inzwischen klassischen Fortsetzungssätze für analytische Mengen, die entscheidend für die starke Beziehung von Komplexer Analysis und Algebraischer Geometrie und die Theorie meromorpher Abbildungen waren, nur am Rande als Korollare späterer Verallgemeinerungen erwähnt werden. Ansonsten findet der Leser viel Wichtiges und Nützliches.

Keime holomorpher Abbildungen von reellen Hyperflächen benutzte Poincaré, um etwa biholomorphe Abbildungen der Sphäre im Raume C^2 zu klassifizieren. Die von Chern und Moser konstruierte Normalform war dann wichtig für die weitere Entwicklung, die im Artikel von A. G. Vitushkin dargestellt wird. Die Abschnitte sind „The Normal Form for Representing a Hypersurface, Chains, The Equation of a Chain, The Circular Normal Form, Normal Parametrization of a Chain. The Non-Spherical Characteristic of a Hypersurface, Strictly Pseudoconvex Hypersurfaces, Automorphisms of a Hypersurface" und „Smooth Hypersurfaces". In den ersten Abschnitten werden Notationen, Methoden und Ergebnisse dargestellt, während im letzten Drittel mehr auf speziellere Ergebnisse, auch mit Beweisen, eingegangen wird.

Den Abschluß des vorliegenden Bandes bildet ein kürzerer Artikel von P. Dolbeault über mehrdimensionale Residuen, der sich etwas durch Strenge und Knappheit der Formulierung auszeichnet. Behandelt werden: „Residue Homomorphism, Principal Value, Residual Currents, Differential Forms with Singularities of Any Codimension, Interpretation of the Residue Homomorphism, Residue Theorem, Theorem of Leray, Residue Formulae".

Dieser Band der Enzyklopädie ist sicherlich für einen sehr großen Leserkreis von Nutzen. Die Monographien bieten sowohl Einführungen als auch Übersichten zu wichtigen Gebieten der Komplexen Analysis bis hin zum aktuellen Stand.

Bochum

G. Schumacher

Encyclopaedia of Mathematics. An updated and annotated translation of the Soviet „Mathematical Encyclopaedia". Editor: Hazewinkel, M., Dordrecht u. a.: Kluwer Acad. Publ., in 10 Bänden, à Hfl. 365,00

Die russische Matematicheskaia enziklopedia (=M.e.) besteht aus fünf Bänden (erschienen 1977, 79, 82, 84, 85) mit insgesamt fast 3000 doppelspaltigen Seiten. Die überarbeitete englische Ausgabe Encyclopaedia of Mathematics (=E.m.) wird aus zehn Bänden bestehen, der letzte davon wird ein Indexband sein. Bisher sind die Bände 1–7 (A–Ray) erschienen (1988–91). Dem Besprecher lagen die Bände 1, 3, 4 mit jeweils rund 500 doppelspaltigen Seiten vor. Die Bearbeiter der englischen Ausgabe E.m. ergänzten die Texte der M.e. durch zusätzliche Literaturangaben und Hinweise auf neuere Entwicklungen. Sie kommentieren abweichenden Sprachgebrauch (z. B. generalized functions vs. distribution, geometric objects vs. G-structures). Sie erläutern oder ergänzen Artikel in M.e., die als zu eng oder zu einseitig angesehen werden (z. B. **functional equation, homotopy type**). Sie behandeln Begriffe oder Stichworte, die in M.e. nicht oder weniger vollständig erscheinen (z. B. H^∞ control theory, formal languages and automata). Die Beiträge der M.e. sind mit Autorennamen gezeichnet, die der E.m. dagegen i. allg. nicht.

Die E.m. erinnert durch ihren Titel an die berühmte Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (Teubner, 1845–1935), sowie an die russisch/englische Encyclopaedia of Mathematical Sciences (VINITI/Springer 1988–?), ist aber von ganz anderer Art. Ähnlich wie die E.m. in Anlage und Umfang hingegen ist das „Encyclopedic Dictionary of Mathematics" der Japanese Math. Society 1954 (Englisch 1977, MIT Press). Nach deutschem Sprachgebrauch sollte die E.m. eher „Lexikon der Mathematik" o.ä. heißen. Sie besteht aus Erklärungen von alphabetisch angeordneten Stichworten. Je nach der Bedeutung des Themas sind das einige Zeilen oder ein kleiner Essay (der in manchen Fällen als Kurzeinführung dienen kann) oder eine Übersicht mit Verweisen auf spezifischere Stichworte. Z. B. findet man unter **geometry** (2½ Seiten) eine Kurzdefinition, summarische historische Bemerkungen, kurz erläuterte Hinweise auf spezifische Stichworte. Bei letzteren erscheint u.a. **geometry in the large** (global geometry) aber nicht **local geometry** – die i.w. bei **geometry of immersed manifolds** (3½) Seiten untergebracht ist. Das Vorwort des Herausgebers unterscheidet 1. survey type articles, 2. spezifischere (technischere) Artikel mittlerer Länge, 3. kurze Definitionen. Tatsächlich ist diese Einteilung unscharf, die Übergänge sind fließend, was sowohl an den Themen als auch den Autoren liegen mag. Sie führt mitunter zu Merkwürdigkeiten, z. B. einem Artikel **graphs** und einem zweiten **theory of graphs** oder zu drei Artikeln **homology group, – theory, – of a polyhdron,** die besser kombiniert worden wären. Der Beitrag **function** (5 Seiten) beginnt historisch und allgemein, wird dann aber technisch und handelt vor allem von reellen und komplexen Funktionen.

An wen richtet sich die E.m.? Laut Vorwort sollen die Übersichtsartikel Mathematikstudenten mittlerer Semester u.a. zugänglich sein. Das trifft mit erheblichen Einschränkungen zu. Im wesentlichen sind es jedoch die in der mathematischen Forschung und der entsprechenden Lehre Tätigen, die das Nachschlagewerk nutzen können und es auch schätzen werden. Wer eine mathematische Veröffentlichung liest, wird häufig vom Autor mit Andeutungen (Stichworten) bedient, für die ihm die E.m. rasch die gesuchte Erklärung (und mehr) geben kann. Wer selbst forscht und schreibt, erinnert sich häufig an Beziehungen, die zunächst vage sind und in seinem Gedächtnis schwanken; ihm wird die E.m. vermutlich Hilfe und Anregung geben. Darüber hinaus wird der wißbegierige und informierte Leser wie in einem guten Lexikon von einem zum anderen Thema geführt. Hieran knüpft auch eine gewisse Kritik an dem Werk: Es hätte sich stärker auf den soeben beschriebenen hauptsächlichen Benutzer einstellen sollen. Vage Beschreibungen und Leerformeln sind überflüssig und eher störend (**fraction** – a number consisting of one or more equal parts of a unit. Ein Beitrag wie **geocrylogy** hätte sich besser auf einen Hinweis auf das Stefanproblem beschränkt. **Homology base** sollte nicht auch noch den Begriff der linearen Abhängigkeit erklären). Andererseits vermißt man auch wichtige Themen (topologische Fixpunktsätze, – Immersionssätze u.a.), die aber vielleicht in den späteren Bänden erscheinen werden.

Druckfehler habe ich kaum gefunden. Andererseits stößt man immer wieder auf kleine Unregelmäßigkeiten wie z. B. die folgenden. Die Einträge **Fréchet derivative** und **-differential** behandeln denselben Begriff $f'(x_0)$ – und vertauschen die Benennung. Der editorial comment zu *function* bemängelt, daß „many-valued function" streng genommen dort keinen Sinn habe, tatsächlich hat sich der Autor aber nur etwas ungewöhnlich ausgedrückt. Die **fundamental class** 1), also $r_n \in H^n X$, wäre einfacher und allgemeiner durch $\langle r_n, \xi \rangle = \xi$, $\xi \in H_n X$, zu definieren für $(n-1)$-azyklische X; die **fundamental class** 2) von $(M, \partial M)$ entspricht dann der fundamental class 1) von $X = (\mathbb{R}^N - \partial M, \mathbb{R}^N - M)$, wobei $M \subset \mathbb{R}^N$. Für **H-spaces**, die parakompakt und semilokal zusammenziehbar sind, existiert das Homotopieinverse ohne weitere Annahme. Unter **homotopy-type** fehlt nach dem Diagramm (3) die Bedingung $\pi_j X_{n+1} = \pi_j X_n$ für $j \leqslant n$. Den positiven Gesamteindruck soll diese Kritik jedoch nicht beeinträchtigen. Die E.m. (und vorher die M.e.) stellen eine große, erfolgreiche Leistung dar. Leider ist auch der Preis sehr hoch: 365 hfl/£ 125 pro Band für die Subskription per Januar 91.

Heidelberg A. Dold

Collected works of Arne Beurling, Vol. I Complex Analysis, Vol. II Harmonic Analysis (ed. by Carleson, L., Malliavin, P., Neuberger, J., Wermer, J.), Basel: Birkhäuser Verlag 1989, 415 S. u. 389 S., DM 198,–

Arne Beurling (1905–1986) gehört zu den am schwierigsten einzuordnenden „Großen" der Analysis dieses Jahrhunderts, jedenfalls der harmonischen Analysis, wie ich einschränkend hinzufügen muß, da mir für die Gebiete der komplexen Analysis und der Potentialtheorie die notwendige Kompetenz fehlt. Oberflächlich betrachtet hat er weder der Theorie neue Wege gewiesen, wie etwa N. Wiener, Calderon und Zygmund, L. Schwartz oder – vor allem – I. M. Gelfand, noch tragen in der harmonischen Analyse fundamentale Sätze seinen Namen. Trotzdem wird man wohl keinen Fachmann finden, der am wissenschaftlichen Rang Beurlings zweifelt. Vertieft man sich in seine Arbeiten, so kommt einem dieser Umstand rasch weniger merkwürdig vor. Immer handelt es sich in Beurlings Arbeiten um konkrete, sich aus der mathematischen Situation ergebende Probleme über ebenso konkrete Gegenstände der klassischen Mathematik, bei denen von vornherein keine Möglichkeit besteht, sie elegant wegzudefinieren. Allgemeinere Begriffe und Theorien werden in der Regel nur so weit benutzt, wie sie zum Erzielen der Ergebnisse erforderlich sind. Fast unausweichlich führen die Arbeiten über harmonische Analyse und Synthese immer wieder zurück zur reellen Geraden und ihren Funktionen. Man hat manchmal den Eindruck, daß der Autor nur widerwillig allgemeine moderne Begriffe verwendet, so z. B. bei der Beschreibung stetiger linearer Abbildungen mit translationsinvariantem Kern, Bd. 2, S. 67, oder bei der Einführung der Faltungsalgebra der beschränkten Radonschen Maße auf $\mathbb{R}$ und ihren abgeschlossenen Idealen der absolut stetigen und der stetigen Maße in der Arbeit [4] (Literaturverzeichnis S. XVI) aus dem Jahre 1938. Andererseits findet man in dieser Arbeit – als Spezialfall – bereits die fundamentale Formel für den Spektralradius $\varrho(f) = \lim \sqrt[n]{|f^n|}$ drei Jahre vor Gelfand. Man stößt bei der Lektüre auch sonst immer wieder auf Begriffe und methodische Ansätze, oft in speziellen Situationen und gelegentlich in verhüllter Form, die inzwischen zu harmonisch-analytischem Gemeingut geworden sind. Von einigen dieser Ideen bin ich sicher, daß sie noch immer nicht methodisch voll nutzbar gemacht worden sind, etwa den seit langem als Beurling-Algebren bezeichneten gewichteten Faltungs-Algebren.

Arne Beurling hat relativ wenig publiziert, das Schriftenverzeichnis enthält 46 Titel, von denen eine nicht geringe Anzahl an schwer zugänglichen Stellen erschienen ist. Darüber hinaus jedoch hat er eine große Zahl nicht veröffentlichter Manuskripte hinterlassen, die in den vorliegenden Bänden als „Mittag-Leffler Lectures (1977–1978)“ und „Selected Seminars, University of Uppsala, 1938–1952“ zum Teil mit aufgenommen worden sind. Editorische Einzelheiten hierzu enthält das Vorwort. Desgleichen liest man dort, daß die Aufteilung in zwei Bände, der erste über komplexe Analysis, der zweite über harmonische Analyse, „in accordance with Beurling's wishes“ erfolgt sei. Ich kann mir allerdings kaum vorstellen, daß die Zusammenstellung der Bände, so wie sie jetzt vorliegt, auf den Autor zurückgeht, mir scheint sie wenig motiviert, z. T. willkürlich und verwirrend. Kaum denkbar ist auch, daß Beurling den Wunsch hatte, eine seiner Arbeiten (On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. **81** (1949)), in beiden Bänden abdrucken zu lassen, selbst wenn es sich hierbei um eine seiner bedeutendsten Leistungen handelt, die zu den Fundamenten der modernen H^p-Theorie gerechnet werden muß. Im zweiten Band (Seiten 107–123) taucht diese Arbeit übrigens nicht im Inhaltsverzeichnis auf. Spuren editorischer Sorglosigkeit findet man auch sonst, zum „Commentary by Arne Beurling“, Bd. I, S. 357, fehlen bibliographische Angaben, es ist nicht einmal klar, ob der gedruckte Text des Kommentars von Beurling stammt, er würde in diesem Falle von sich selbst in der dritten Person reden. Schließlich ist auch das simple Abkopieren einer mit z. T. unleserlichen Handschrift korrigierten Vorlage (Bd. II, Sur les spectres des fonctions, S. 125–145) nicht das heute technisch mögliche Optimum.

In beiden Bänden ist zu Beginn (S. IX–XV) der Nachruf auf Beurling von Ahlfors und Carleson aus den Acta Math. 161 (1988) abgedruckt, der auch eine, verständlicherweise sehr globale, Würdigung der wichtigsten Beiträge Beurlings zur Mathematik enthält. Dort wird sein Werk in drei Gruppen eingeteilt: Komplexe Analysis, harmonische Analyse und Potentialtheorie. Auch diese Einteilung ist ebenso wie diejenige in zwei Bände und vermutlich jede andere oberflächlich. Die Bedeutung Beurlings liegt zum nicht geringen Teil gerade darin, in seinen Werken konsequent nachgewiesen zu haben, daß sich in derartigen Einteilungen allenfalls verschiedene Aspekte derselben Sache spiegeln und daß man zu tieferen Einsichten gerade durch das Verknüpfen dieser Aspekte gelangt.

Bielefeld H. Leptin

Masani, P. R., Norbert Wiener 1894–1964 (Vita Mathematica), Basel u.a.: Birkhäuser Verlag 1989, 416 S., DM 98,–

Das vorliegende mit großem Engagement verfaßte und akribisch recherchierte Werk über einen der bedeutendsten Wissenschaftler unseres Jahrhunderts in wenigen Zeilen zu würdigen, übersteigt die Kraft des Referenten auch dann noch, wenn er es ein ganzes Jahr lang als bevorzugte Nebenlektüre immer wieder zur Hand nahm, um die zum Teil allzu fachspezifischen Ausführungen mit dem Ziel zu durchdringen, der bemerkenswerten Leistung des Autors gerecht zu werden. So kann es im folgenden nur um eine bruchstückhafte Skizze dessen gehen, was über Norbert Wiener und dessen außergewöhnliche Geisteskraft dargelegt wird. Der besondere Beitrag des Biographen P. R. Masani besteht darin, keine bloße „Vita Mathematica“ verfaßt zu haben, sondern eine fundierte wissenschaftliche Arbeit über mehrere sich berührende geistige Entwicklungen desjenigen Zeitraums, in dem Wiener wirkte.

Es ist wohlbekannt, daß Wiener ein mächtiges wissenschaftliches Werk hinterlassen hat, daß er in der Theorie stochastischer Prozesse (Brownsche Bewegung), Potentialtheorie (Dirichlet-Problem), harmonischen Analyse (Verallgemeinerte Fouriertransformierte), Ergodentheorie (Homogenes Chaos), Ingenieurwissenschaft (Netzwerke), Neurophysiologie (Prothetik), Kybernetik, mathematischen Ökonomie und Philosophie (der Naturwissenschaften) gearbeitet hat, daß ihm große wissenschaftliche Durchbrüche gelungen sind, die zum Teil seinen Namen tragen: das Wiener-Maß, die Perron-Wiener-Methode, die Wiener-Tauber-Theorie, die Hopf-Wiener-Gleichungen, das Paley-Wiener-Theorem und das Lee-Wiener-Netzwerk. Es ist auch bekannt, wie nahe Wiener der Entdeckung des nach S. Banach genannten Raumes war, als er in den frühen 20er Jahren seine Arbeiten über stetige Transformationen veröffentlichte, wie weit ihm die Formulierung des von G. D. Birkhoff gefundenen individuellen Ergodensatzes vorschwebte, als er sich mit J. W. Gibbs' statistischer Mechanik beschäftigte, und wie stark er seine Prognose-Theorie bereits ausgebaut hatte, als A. N. Kolmogoroff im Jahre 1941 über stationäre Folgen in Hilberträumen schrieb.

Was weniger bekannt sein dürfte, sind Wieners wissenschaftliche Berührungen mit herausragenden Fachkollegen auch benachbarter Arbeitsgebiete: mit O. D. Kellog, von dem er in die Potentialtheorie eingeführt wurde, mit M. Born, mit dem er über Quantenfeldtheorie nachdachte, natürlich mit E. Hopf, R. E. A. C. Paley und Y. W. Lee, mit W. S. McCulloch, der ihn an Fragen der Sozialpolitik heranführte, mit J. von Neumann, der ihn in dessen Funktion als Commissioner of Atomic Energy herausforderte, und mit weiteren Geistern seiner Zeit, denen er seinen oft festen Standpunkt in religiösen und künstlerischen Fragen nahebrachte.

In der vorliegenden Studie wird Wiener zugleich als Philosoph vorgestellt, als „America's Second Leibniz" (rangnächst dem Pragmatiker Charles Sanders Peirce) und als Wissenschaftstheoretiker („First science philosopher of the stochastic age"). Das mögen emotional gefärbte Klassifikationen sein, die der Autor als früherer Mitarbeiter seines Meisters nicht zu relativieren vermochte. Das umfassende und breit gefächerte Werk Wieners als einem „universal thinker of colossal proportions" hat er in hervorragender Weise zugänglich gemacht. Und dabei hat er nicht verschwiegen, daß der „lovable quirk" schwierig im Umgang war, höchst unobjektiv sein konnte (Man lese über seine Haltung gegen Harward) und gelegentlich gravierende Irritationen auslöste (Man denke an seinen Rückzug aus der National Academy of Sciences). Der Wissenschaftstheoretiker G. de Santillana sagt es anders: „In his reactions he was a child, in his judgement a philosopher".

Als besonders lesenswert hat der Referent die Abschnitte „The Brownian Motion". „The parallel evolutions of von Neumann and Wiener", dazu den Brief von Neumanns an Wiener aus dem Jahre 1946, in dem dieser Richtlinien für kybernetische Forschung angibt, und „The Mathematicians Credo" empfunden.

Das zur Betrachtung stehende Buch gliedert Wieners Werk nach Sachgebieten in der Abfolge seiner großen Entdeckungen. Der Autor liefert eine durchweg von Sachkompetenz gezeichnete Darstellung der zahlreichen Forschungsgebiete des großen Gelehrten. Referenzen werden ernstgenommen, Quellen konsequent zitiert. Mit Anhängen, die Motive, Zusatzbemerkungen und Beweisideen enthalten, wird der laufende Text ergänzt. Eine Klassifikation der mathematischen Arbeiten Wieners hilft, die umfangreiche Bibliographie leichter zu überschauen. Eine Zusatzbibliographie und ausführliche Indizes unterstützen die Lektüre.

Prolog und Epilog zeichnen in vollendeter Diktion ein Bild des universellen Forschers und Denkers Wiener, das man in dieser konzentrierten Form in der bisherigen Literatur über Wiener (einschließlich der diesbezüglichen Beiträge in den „Collected Works") nicht findet. Masanis Buch zu studieren bleibt ein mühevoll errungenes höchst ergiebiges intellektuelles Vergnügen.

Tübingen H. Heyer

Grattan-Guinness, I., Convolutions in French Mathematics, 1800–1840, From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1990, Basel u.a.: Birkhäuser-Verlag, vol. 1, 2, 3 insg. 1601 S, DM 420,–

With these three volumes, Ivor Grattan-Guinness has done a pioneering work in three respects: 1. He has painted a comprehensive portrait of a very important mathematical community during an extended period. 2. He has included applied mathematics, in particular physics, astronomy, and engineering. 3. He has tried to combine the traditional approach of the historian of mathematics (internal study of the technical sources) with the more sociological approach of the historian of science.

Volume I presents the state of the art in mathematics and mathematical physics in France around 1800 and follows the developments of these ideas till around 1815. The main theories dealt with here are mathematical analysis, mechanics (including celestial mechanics) and, as a great novelty, engineering. Also Laplacian physics is discussed in a separate chapter. Volume II is devoted to the new theories and approaches introduced during the period 1815–1849 starting with Fourier's theory of heat, Fourier analysis, and Cauchy's complex analysis and so called introduction of rigour in analysis. It continues with the rise of mathematical optics, electro magnetism, and elasticity theory and ends with a chapter on engineering mathematics, a chapter on the 1830s, and a view past 1840. In the introductory chapters 1 and 2 and in the final "Chorus" Grattan-Guinness outlines the general aims and conclusions of the work and discusses the institutional setting.

The last volume contains various manuscripts and letters published here for the first time, a number of interesting tables including a long chronology, a very extensive and useful bibliography, and finally three indexes of which, however, the subject index is not comprehensive enough for a work of this size (I looked in vain for "Huygens' principle", "Legendre polynomials", and "Spheroid" – the latter in a vain attempt to find out what the author meant by this term. Legendre and his contemporaries used it to denote an almost spherical object but seeing that Grattan-Guinness on p. 498 writes about "a nearly spherical spheroid" I realised that he uses the word in a different way.)

The books are based on an impressive number of primary sources many of which Grattan-Guinness discovered. Grattan-Guinness is never boring to read. He writes in a refreshing style, often with an ironic attitude towards the "old boys" he discusses. He gives a vivid picture of the time, of the personalities, of the "savants", of their scientific rivalries and the competitive atmosphere. He gives a detailed account of the history, functioning, and geographic location of the scientific institutions and schools: the procedures in the Académie des sciences, its elections and report writing, the curricula and staff at the schools such as the École polytechnique and the specialized engineering schools. He carefully describes the publication patterns, both the journal side, with its possibilities for fast or slow publication of short or long papers, and the monograph side, in particular the text books. He ranks the latter in three levels and discusses who the authors were, how many copies were printed, what they cost, in which schools they were used etc. He often calls attention to relatively unknown early versions of ideas and to the contribution of minor figures that tend to be neglected in other historical works.

This fine description of the social setting is the greatest merit of these books.

The treatment of the pure and applied mathematics and its development is unfortunately not of a similar standard. To be sure, Grattan-Guinness attempts to give a non-distored picture of the mathematical development by 1. presenting it in all its technical complexity, 2. pointing out the links between pure mathematics and its applications and more generally between various branches of mathematics, and 3. presenting the arguments in their proper context without projecting modern ideas back into the period. This is all very well, except I think he carries the latter too far when it comes to notation. He usually does not use modernized symbolism such as vector notation, even in cases where it would have helped the modern reader without distorting the meaning (though he introduces some very unconventional notation, such as τ for $\pi/2$, which do not help the reader). True to this principle Grattan-Guinness explicitly abstains from analyzing the mathematics from a modern point of view except in a few places (for example on p. 289–290 he criticises Euler's derivation of the wave equation and proposes a different derivation which, however, seems to take for granted that if $f(x)$ is small on (a, b) them $f'(x)$ is also small). It is regrettable that Grattan-Guinness also avoids deep mathematical analyses of the technical material in the spirit of the time, such as Buchwald's analysis of Fresnel's optics or Bôcher's analysis of the relationship between Sturm's early algebraic and analytic research.

On the other hand, Grattan-Guinness presents general classifications of the various approaches and styles. He distinguishes between a Lagrangean and an Eulerian tradition in mechanics, and he gives an interesting classification of the mathematicians according to their "Denkweisen": geometric, algebraic, and analytic. However, because of the comparison with Lagrange, Euler is characterised as having a geometrical "Denkweise". In my opinion this is off the point; his work is best described as formal and algebraic. Moreover Grattan-Guinness divides the mathematicians into a MAMP group (mathematical analysis and mathematical physics) and a CME group (calculus, mechanics, and engineering). The usefulness of this classification seems more doubtful to me, and the following division (p. 1297) of mathematicians into three groups according to mathematical techniques seems a strange mix: "[some] gave a central place to differential equations and their solutions, wherease [others] lent prominence to energy conservation (and maybe loss), and [others again] drew much on the law of (de)composition of 'forces '. Thus these innovators chose quite different mathematical helpmeets."

Perhaps one cannot expect deep analyses of the technical material in a book of this broad scope, but one might hope to get summaries of the mathematics and its development. In fact, about half of the books is occupied by accounts of the technical mathematics but I must admit that I find much of this incomprehensible. Grattan-Guinness often writes as though he just wants to remind the reader of something he already knows. Therefore many of the summaries are imprecise in a way that makes them hard to follow even for a reader who is in fact familiar with the subject. I shall now illustrate the kinds of problems I have encountered with a few typical examples.

In one of the first mathematical passages in the book (p. 132), the author discusses how Euler, Lagrange, and Legendre introduced and used third order Jacobians. Grattan-Guinness summarises Legendre's argument as follows:

> "To transform the triple integral $\int P\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ into variables (p, q, r) given by relationships to (x, y, z) such as
>
> $$\mathrm{d}x = A\mathrm{d}p + B\mathrm{d}q + C\mathrm{d}r \qquad (323.1)$$
>
> he took y and z constant, thus reducing the other two relationships to
>
> $$0(=\mathrm{d}y) = A'\mathrm{d}p + B'\mathrm{d}q + C'\mathrm{d}r, \qquad (323.2)$$
>
> $$0(=\mathrm{d}z) = A''\mathrm{d}p + B''\mathrm{d}q + C''\mathrm{d}r. \qquad (323.3)$$
>
> These gave him the 'Jacobian' determinant to convert from (x, y, z) to (p, y, z) but with a denominator $(B'C'' - B''C')$. He then set $\mathrm{d}p=0$ in (323.2–3) to get into (p, q, z), and then $\mathrm{d}z=0$ in (323.3) to end up with (p, q, r) via the Jacobian as required".

This made little sense to me when I first read ist. Why would one keep y and z constant in a triple integral? What is the denominator of a Jacobian determinant? If $\mathrm{d}p$ is set equal to zero in (323.2–3) one gets two (probably inconsistent) equations relating $\mathrm{d}q$ and $\mathrm{d}r$. How does that give a transformation into (p, q, z)? Finally $\mathrm{d}z$ already put equal to zero in (323.3), so why should we do it again,and how does the resulting equation in $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$ lead to (p, q, r)? After having looked at Lengendre's own clear exposition, I now know the reasons for my confusion. In the first step Legendre wants to transform the integral $\int P\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ into the form $\int PT\mathrm{d}p\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. To this end, he remarks that the x and p integration in the two integrals should be performed while keeping y and z constant. Therefore $\mathrm{d}p$ can be found by solving (323.1–3) with $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$. This leads to a relation $\mathrm{d}x = T\mathrm{d}p$ where T is a rational expression in A, B, C, A',... whose denominator is the expression mentioned in the quote above. Secondly, in order to transform $\mathrm{d}y$ into $\mathrm{d}q$ while retaining $\mathrm{d}p$ and $\mathrm{d}z$ Legendre similarly asumes $\mathrm{d}p$ and $\mathrm{d}z$ equal to zero in the equations

$$\mathrm{d}y = A'\mathrm{d}p + B'\mathrm{d}q + C'\mathrm{d}r$$

$$dz = A''\mathrm{d}p + B''\mathrm{d}q + C''\mathrm{d}r$$

Remark that $\mathrm{d}y$ is no longer zero as it is indicated in (323.2) above. Solving these equations for $\mathrm{d}q$ in terms of $\mathrm{d}y$ leads Legendre to an integral of the form $\int PTU\mathrm{d}p\mathrm{d}q\mathrm{d}z$. Finally in order to find $\mathrm{d}r$ in terms of $\mathrm{d}z$ Legendre sets $\mathrm{d}p = \mathrm{d}q = 0$ (not $\mathrm{d}z = 0$ as Grattan-Guinness does) and he is left with an expression of the form $\int PTUC''\mathrm{d}p\mathrm{d}q\mathrm{d}r$. Here TUC'' ist in fact the Jacobian. Thus a more intelligible account of Legendre's need not be much longer than Grattan-Guinness' account.

I shall take my next example from a more physical part of the book, namely sections 14.2.2–14.2.3 the first of which is entitled "Ampère's adoption of the electrical aether, 1820–1821". This title is somewhat of a mystery. In fact the section contains nothing about an aether theory and indeed the ideas Ampère had on the aether had no influence on his mathematical electrodynamics which was an action at a distance theory. Having presented Ampère's first expression for the differential interaction between two conducting elements, Grattan-Guinness continues (with my remarks in brackets):

> "Concluding from his experimental work that an inverse square law of central forces of attraction and repulsion could be adopted, he cautioned that the 'action' was not isotropic [an untraditional use of this word]. Thus, using a differential model, the action A of an infinitely long straight wire at the point P [the distinctive feature in Ampère's electromagnetism, is that the action does not act on a point but on a conducting element, i.e. an infinitely small vector conducting a given current] perpendicularly distant a from one end Q [there is no figure in the book but it seems as though the infinite wire is semi-infinite and Q is its endpoint] is given by
>
> $$A = \int_0^\infty gf(x/a)/(a^2 + x^2)\mathrm{d}x = g/a$$
>
> where g was an electrical constant and f denoted the unknown function [we have not heard of any unknown function only of an unknown constant in the formula for the differential action between two conducting elements] of the angle between $\mathrm{d}x$ and Q [I cannot think of an interpretation of the geometry of the experiment which will not make this angle 0]: the evaluation g/a [?] was verified by experimental work ..."

I must admit that I cannot follow the argument although I believed I understood Ampère's theory in advance.

Even in places where Grattan-Guinness admits that there are problems with the interpretation of the mathematics he often does not provide adequate analyses of what the author could have meant but presents rather undigested summaries often filled with verbatim quotations. One such case is the account (p. 653) of Cauchy's (1814) treatment of singular integrals (an anticipation of the residue theorem). More problematic is the section on p. 906 where Fresnel is accused of being obscure. Grattan-Guinness quotes Fresnel saying: "This done, I take for unity the common coefficient of all the absolute velocities of the molecules in the incident ray". According to Buchwald's recent book on Fresnel, he here refers to the velocity of the transverse vibrations of the molecules (Fresnel was the great proponent of the wave theory of light) but Grattan-Guinness writes that Fresnel was "presumably referring to the velocity of propagation of the incident ray". With such an interpretation in mind, the subsequent string of formulae indeed becomes obscure. Already to interpret an expression involving the square of the velocity of propagation as a kinetic energy is strange in a wave theory of light. There are other places, where Grattan-Guinness in a similar manner accuses 19th century mathematicians of being obscure.

Some sections are marred by simple errors. For example in the discussion of Descartes' rule of sign, Fourier's theorem is wrongly stated (p. 245). This must make most of the section difficult to read for a reader who does not know the theorem in advance. The chapter is in fact typical for the whole book for at the same time it contains an interesting discussion of the priority dispute between Fourier and Budan taking the reaction of many minor figures into account.

The very first mathematical summary contains the surprising statement that "Lagrange did not produce the differential form of the remainder term which is often named after him; instead he estimated the limits within which it should lie" (p. 131). Therafter Grattan-Guinness quotes a formula from Lagrange's "Théorie des fonctions analytiques" which is in fact only an intermediary step in the deduction of the following results:

$$\begin{aligned} f(z+x) &= f(z) + xf'(z+u) \\ &= f(z) + xf'(z) + x^2/2f''(z+u) \\ &= f(z) + xf'(z) + x^2/2f''(z) + x^3/2.3f'''(z+u) \\ &\ldots \end{aligned}$$

"ou u désigne une quantité indéterminée, mais renfermée entre les limites 0 et x". In my opinion this gives Lagrange's remainder very explicitly.

Finally let me quote the beginning of the discussion on *p.* 1128–1129 of Abel's theorems on series (Remark how Grattan-Guinness consiciously always writes mathematical theorems in the past tense):

> "Abel's paper began with theorems on the convergence of series now known as 'Abel's limit theorems'. The most general, thm. 5, can be expressed as
>
> *Theorem* 172.1 If $\sum_{s=0}^{\infty} v_s(x)\delta^s$ converged for $a \leqslant x \leqslant b$ and each $v_s(x)$ was a continuous function of x, then
>
> $$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} v_s(x)\alpha^s, \qquad \text{where } \alpha < \delta,$$
>
> was convergent and continuous over the same range of values of x".

In fact this "theorem" is not usually known as Abel's limit theorem.Grattan-Guinness mentions that Abel's proof was flawed (although I do not understand his argument) but he fails to mention that the theorem itself is false and that Abel, according to Sylow later discovered this mistake. On the contrary, by beginning the next paragraph with the words "Two *other* results have *also* been durable" (my emphasis) he creates the impression that the theorem is correct. Moreover, one of the two other durable results is stated as follows by Grattan-Guinness:

$$\text{if } \varrho_m > 0, \sum_{m=0}^{\infty} \varrho_m \text{ diverged, and } \varepsilon_m \to 0 \text{ as } m \to \infty, \text{ then } \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \varrho_m \text{ diverged}$$

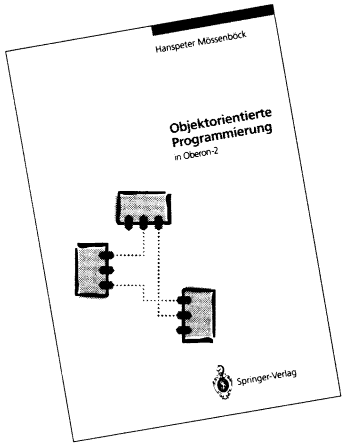
This "theorem" is so patently wrong, that it would be surprising if Abel had formulated it. In fact, Abel assumed that ε_m *does not* get arbitrarily close to zero (and also that ϱ_{m+1}/ϱ_m approaches a limit greater than 1). This theorem is of course correct.

I shall end my list of examples here, but I must mention that even when the technical details of a particular piece of mathematics is correctly presented, Grattan-Guinness often does not stress what is conceptually and historically important. For example, discussing Sturm-Liouville theory he does not point out that since the coefficient functions in the differential equation are not explicitly given, Sturm and Liouville were faced with a conceptually novel problem compared to their predecessors, and that this necessarily forced them to develop a qualitative theory. (I also do not like the statement (p. 1230) that Liouville *attempted* to prove convergence of the Fourier series. He did prove it!).

Despite my criticism of the accounts of the technical mathematics, this part of the book may prove of some value to the reader, since the fairly verbatim quotes give an impression of what kind of mathematics is involved. If the merits of the books (i.e. the description of the scientific community) are taken into account, I think the work is worth study for anyone who wants to get a picture of this important chapter of the history of mathematics. In the preface Grattan-Guinness writes that his goal has been to "open up this vast, neglected area of the history of science". He has reached this goal. Any later historian working on French mathematics and mathematical physics during the beginning of the 19th century will find much of value in these volumes.

Kopenhagen J. Lützen

Literatur von Experten



H. Mössenböck

Objektorientierte Programmierung in Oberon-2

1992. Etwa 280 S. 40 Abb. Brosch. DM 59,-
ISBN 3-540-55690-7

E. Gamma

Objektorientierte Software-Entwicklung am Beispiel von ET++

Design-Muster, Klassenbibliothek, Werkzeuge

1992. XII, 193 S. 98 Abb. Brosch. DM 69,-
ISBN 3-540-56006-8

A. Weinand

Objektorientierte Architektur für grafische Benutzungsoberflächen

Realisierung der portablen Fenstersystemschnittstelle von ET++

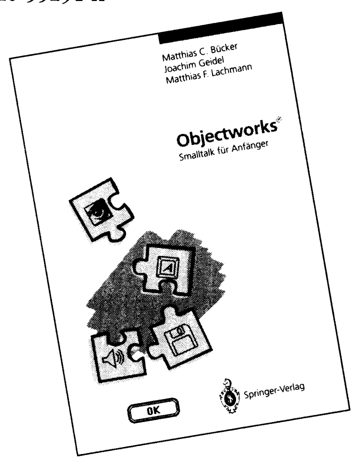
1992. XII, 205 S. 101 Abb. 3 Tab. Brosch. DM 69,-
ISBN 3-540-56010-6

M.C. Bücker, J. Geidel, M.F. Lachmann

Objectworks®

Smalltalk für Anfänger

1992. Etwa 200 S. 30 Abb. Geb. DM 68,-
ISBN 3-540-55291-X



Springer

Preisänderungen vorbehalten.

d&p.248.MNT/E/1

Springer Verlag ☐ Heidelberger Platz 3, W-1000 Berlin 33, F.R. Germany ☐ 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA ☐ 8 Alexandra Rd., London SW 19 7JZ, England ☐ 26, rue des Carmes, F-75005 Paris, France ☐ 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan ☐ Room 701, Mirror Tower, 61 Mody Road, Tsimshatsui, Kowloon, Hong Kong ☐ Avinguda Diagonal, 468-4° C, E-08006 Barcelona, Spain ☐ Wesselényi u. 28, H-1075 Budapest, Hungary

POWER BOOKS

S. Garfinkel, M. Mahoney

Teubner - Texte zur Mathematik

Bd. 117: Surveys on Analysis, Geometry and Mathematical Physics
Hrsg. Schulze/Triebel. 308 Seiten. Kart. DM 51,-

Bd. 118: Equadiff 7
Proceedings of the 7th Czechoslovak Conference on Differential Equations and their Applications held in Prag, 1989
Hrsg. Kurzweil. 312 Seiten. Kart. DM 42,-

Bd. 119: Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications · Vol. 4
Proceedings of the Spring School held in Roudnice nad Labem, 1990
Hrsg. Krbec/Kufner/Opic/Rakosnik. 256 Seiten. Kart. DM 42,-

Bd. 120: Function Spaces
Proceedings of the Second International Conference, Poznan 1989
Hrsg. Musielak/Hudzik/Urbanski. 268 Seiten. Kart. DM 42,-

Bd. 121: Numerical Treatment of Differential Equations
Selection of Papers presented at the Fifth Seminar „NUMDIFF - 5" held in Halle, 1989
Hrsg. Strehmel. 372 Seiten. Kart. DM 59,-

Bd. 122: Huber-Dyson, **Gödel's Theorems; a Workbook on Formalization**
292 Seiten. Kart. DM 46,-

Bd. 123: Nahapetian, **Limit Theorems and Some Applications in Statistical Physics**
244 Seiten. Kart. DM 38,-

Bd. 124: Baum/Friedrich/Grunewald/Kath, **Twistors and Killing Spinors on Riemannian Manifolds**
180 Seiten. Kart. DM 29,-

Bd. 125: Stern, **Semimodular Lattices**
236 Seiten. Kart. DM 38,-

Bd. 126: Thalheim, **Dependencies in Relational Databases**
220 Seiten. Kart. 38,-

Bd. 127: Strehmel/Weiner, **Linear-implizite Runge-Kutta-Methoden und ihre Anwendungen**
356 Seiten. Kart. DM 49,-

Bd. 128: Hoffmann, **Improved Estimation of Distribution Parameters: Stein-Type Estimators**
176 Seiten. Kart. DM 29,-

Bd. 129: Dubovoj/Fritzsche/Kirstein, **Matricial Version of the Classical Schur Problem**
356 Seiten. Kart. DM 49,-

Bd. 130: Richter, **Approximation of Gaussian Random Elements and Statistics**
156 Seiten. Kart. DM 29,-

Bd. 131: Symposium „Analysis on Manifolds with Singularities", Breitenbrunn 1990
Hrsg. Schulze/Triebel. 308 Seiten. Kart. DM 44,-

Bd. 132: Leonov/Reitmann/Smirnova, **Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems**
VIII, 242 Seiten. Kart. DM 39,-

Preisänderungen vorbehalten.

B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Stuttgart · Leipzig