E 20577 F
95. Band Heft 2
ausgegeben am 21. 4. 1993

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1993

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 95, Heft 2

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

R. Bölling: Karl Weierstraß – Stationen eines Lebens
J. Brüning: Zum Gedenken an Vojislav Gregor Avakumović
S. K. Donaldson: On the Work of Andreas Floer
H. Grauert: Analytische und meromorphe Zerlegungen und der reelle Fall
I. Kersten: Ernst Witt 1911–1991
W. Plesken: Hans Zassenhaus 1912–1991
B. Rauhut: Rudolf Henn: Eine Bilanz
L. Stammler, W. Vogel: Ott-Heinrich Keller
K. Stein: Zur Abbildungstheorie in der komplexen Analysis
M. Struwe: Das Plateausche Problem

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 95 (1993) 47–59
AMS subject classification: 53

Starrheitseigenschaften kompakter Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung

U. Hamenstädt, Bonn

Einleitung

Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit negativer Schnittkrümmung mit universeller Überlagerung $\tilde{M}$ und Einheitstangentialbündel T^1M. Jeder Einheitstangentialvektor $v \in T^1M$ bestimmt dann eine Geodätische γ_v mit Anfangsgeschwindigkeit $\gamma_v'(0) = v$. Der *geodätische Fluß* ϕ^t ist das durch $\phi^t v = \gamma_v'(t)$ definierte dynamische System auf T^1M. Im Falle negativer Schnittkrümmung handelt es sich hierbei um einen sog. *Anosov-Fluß* (die einen solchen Fluß charakterisierenden Eigenschaften wurden zuerst von Anosov in [Ano] angegeben). Die Frage nach der Beziehung zwischen rein dynamischen Eigenschaften des geodätischen Flusses, der Geometrie der Mannigfaltigkeit M und der Potentialtheorie von $\tilde{M}$ hat in den letzten Jahren besondere Aufmerksamkeit gefunden. Ziel dieser Übersicht soll sein, einige der interessantesten Entwicklungen und Resultate vorzustellen. Dies geschieht gemäß der folgenden Gliederung:

Kapitel 1: Anosov-Flüsse
(1.1) Allgemeine Eigenschaften.
(1.2) Anosov-Flüsse auf 3-dim. Mannigfaltigkeiten.
(1.3) Gebündelte und symplektische Anosov-Flüsse.
(1.4) Kanai-Zusammenhang und zeiterhaltende Konjugation.

Kapitel 2: Potentialtheorie
(2.1) Harmonische Maße.
(2.2) Entropie und „spectral gap".
(2.3) Partiell elliptische Differentialgleichungen und Starrheit.

1 Anosov-Flüsse

Sei $\{\phi^t\}$ ein Fluß auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit N. Der Fluß heißt *Anosov* falls es eine stetige, ϕ^t-invariante Zerlegung $TN = E^{su} \oplus E^{ss} \oplus E^0$ gibt, die sogenannte *Anosov-Zerlegung*, wobei gilt:

i) E^0 wird von dem ϕ^t erzeugenden Vektorfeld aufgespannt.

ii) Es gibt Konstanten $c > 0$, $a > 0$ so daß für alle $X \in E^{ss}$, $Y \in E^{su}$ und $t > 0$ gilt $|d\phi^t X| \leqslant ce^{-at}|X|$ und $|d\phi^t Y| > c^{-1}e^{at}|Y|$.

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Finsler-Metrik $|\quad|$.

1.1 Allgemeine Eigenschaften

Ist $\{\phi^t\}$ ein Anosov-Fluß, so sind die Distributionen E^{ss}, E^{su} integrabel, d.h. zu jedem $x \in N$ gibt es C^∞-immersierte Untermannigfaltigkeiten $W^{su}(x)$, $W^{ss}(x)$, die x enthalten und tangential zu E^{su}, E^{ss} sind. Dies bedeutet, daß N zwei ϕ^t-invariante Blätterungen W^{su}, W^{ss} besitzt. Die Blätter der *stark stabilen Blätterung* W^{ss} (bzw. der *stark instabilen Blätterung* W^{su}) sind genau die Mannigfaltigkeiten $W^{ss}(x)$ (bzw. $W^{su}(x)$) für $x \in N$. Diese Blätterungen sind Hölder-stetig, d.h. es gibt eine Zahl $\alpha \in (0,1)$ und zu jedem $x \in N$ lokale Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ der Klasse C^α, definiert auf einer Umgebung U von x, so daß für jedes $y \in U$ die Teilmenge $\{\bar{y} \in U \mid x_j(y) = x_j(\bar{y})$ für $\dim E^i(v) + 1 \leqslant j \leqslant \dim N\}$ in $W^i(y)$ enthalten ist. Das Blatt $W^i(x)$ hängt sogar stetig in der C^∞-Topologie von x ab ([Sh]), insbesondere sind die Distributionen E^i stetig und sogar Hölder-stetig ([Ano] 2) ($i = ss, su$).

Ein *periodischer Punkt* x von ϕ^t der Periode $\tau > 0$ erfüllt $\phi^\tau x = x$. Die Periode τ heißt *Primperiode*, falls es kein $t \in (0, \tau)$ mit $\phi^t x = x$ gibt. Eine periodische Bahn von ϕ^t ist ein Orbit, der einen periodischen Punkt enthält. Ein solcher Orbit ist natürlich homöomorph zu einem Kreis der Länge τ, wobei τ die Primperiode eines Punktes auf dem Orbit ist. Ein Anosov-Fluß besitzt unendlich viele periodische Bahnen: Nämlich für ein $\varepsilon > 0$, $t > 0$ sei $\#(t, \varepsilon)$ die Zahl aller paarweise disjunkter periodischer Orbiten mit Periode im Intervall $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$. Dann gibt es eine Zahl $h > 0$, die sogenannte *topologische Entropie* des Flusses, so daß $\frac{1}{t} \log \#(t, \varepsilon) \to h (t \to \infty)$. ([Bw]).

Jeder periodische Orbit $\mathcal{O}$ ist der Träger eines natürlichen, ϕ^t-invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\nu(\mathcal{O})$ auf N, das man aus dem normalisierten Lebesgue-Maß auf dem Kreis S^1 via obiger Identifikation des Orbits mit S^1 erhält. Weil periodische Bahnen dicht in N liegen, ist die Menge aller konvexer Kombinationen solcher Maße dicht in der konvexen Teilmenge $\mathcal{M}$ des Dualraums von $C^0(N, \mathbb{R})$, welche die ϕ^t-invarianten W-Maße beschreibt.

Für jedes genügend große $t > 0$ kann man ein Maß $\mu(t)$ durch $\mu(t) = \frac{1}{\#(t, \varepsilon)} \sum \{\nu(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O}$ ist periodischer Orbit mit Periode in $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)\}$ definieren. Die Maße $\mu(t)$ konvergieren schwach mit $t \to \infty$ gegen ein Maß μ aus $\mathcal{M}$, welches das *Bowen-Margulis-Maß* genannt wird.

Das Blatt $W^u(x)$ *der instabilen Blätterung* von N ist durch $W^u(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi^t W^{su}(x)$ definiert. Für $x \in N$ und kleines $\varepsilon > 0$ sei $W^i_\varepsilon(x)$ die ε-Umgebung von x in $W^i(x)$ bezüglich einer fest gewählten Riemannschen Metrik g auf N. Für $x, y \in N$, welche nahe genug beieinander liegen, ist die *kanonische Abbildung* $A : W^u_\varepsilon(x) \to W^u(y)$ durch $A(z) = W^{ss}(z) \cap W^u_\varepsilon(y)$ erklärt. Eine Familie von Radon-Maßen auf lokal instabilen Mannigfaltigkeiten heißt *quasi-invariant*, falls die kanonischen Abbildungen die Nullmengen erhalten. Ein Maß ν auf N heißt *quasi-invariant unter der stark stabilen Blätterung* falls es eine quasi-invariante Familie ν_T von Radon-Maßen auf lokal instabilen Mannigfaltigkeiten T gibt, so daß für jedes T eine Teilmenge E von T genau dann eine ν_T-Nullmenge ist, wenn $\nu(\bigcup \{W^{ss}(x) \mid x \in E\}) = 0$ gilt. Die Familie $\{\nu_T\}$ heißt dann ein *transversales Maß* für v. Das Bowen-Margulis-Maß ist quasi-invariant unter der stark stabilen Blätterung. Es ist sogar *vollständig invariant*, d. h. μ besitzt eine Familie $\{\mu^u\}$ konditionierter Maße auf instabilen Mannigfaltigkeiten, welche sogar invariant unter kanonischen Abbildungen ist. Diese Eigenschaft charakterisiert μ eindeutig unter allen Elementen aus $\mathcal{M}$ (siehe [Ma], [Bw], [B-M]). Außerdem ist μ *ergodisch* unter dem Anosov-Fluß, d. h. für jede ϕ^t-invariante Borel-Menge $A \subset N$ gilt entweder $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) = 1$.

Die Anosov-Zerlegung bestimmt eine stetige, ϕ^t-invariante 1-Form ω auf N durch $\omega(X^0) \equiv 1$ und $\omega(E^{su} \otimes E^{ss}) \equiv 0$ wobei X^0 der infinitesimale Erzeuger von ϕ^t ist. Der Anosov-Fluß heißt *symplektisch* falls ω eine Kontaktform der Klasse C^1 ist, d. h. falls die Einschränkung des äußeren Differentials $\mathrm{d}\omega$ von ω auf $E^{su} \otimes E^{ss}$ nichtdegeneriert ist. In diesem Falle ist die Dimension m von N ungerade, d. h. $m = 2n-1$ wobei $n-1 = \dim E^{su} = \dim E^{ss}$ und die Bündel E^{su}, E^{ss} sind *Lagrangesch* bezüglich $\mathrm{d}\omega$. Es gibt also $\mathrm{d}\omega | E^i \equiv 0$ und die Zuordnung $Y \to \mathrm{d}\omega(Y, \cdot)$ definiert einen stetigen Bündel-Isomorphismus von E^{su} (bzw. E^{ss}) auf den Dualraum $(E^{ss})^*$ von E^{ss} (bzw. $(E^{su})^*$ von E^{su}).

Außerdem ist die $(2n-1)$-Form $\omega \wedge (\mathrm{d}\omega)^{n-1}$ ein ϕ^t-invariantes Volumenelement für N. Insbesondere besitzt N ein ϕ^t-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß λ in der Lebesgue-Maßklasse, welches einfach *Lebesgue-Maß* genannt wird. Das Lebesgue-Maß ist ergodisch unter ϕ^t.

Geodätische Flüsse auf dem Einheitstangentialbündel T^1M einer kompakten Mannigfaltigkeit M negativer Krümmung sind symplektisch. In diesem Falle ist die *kanonische Kontaktform* ω sogar von der Klasse C^∞ und die Form $\omega \wedge (\mathrm{d}\omega)^{n-1}$ ist genau die Volumenform der *Sasaki-Metrik* auf T^1M, die Einschränkung auf T^1M derjenigen Riemannschen Metrik auf dem Tangentialbündel TM, welche natürlich von der Metrik auf M induziert wird. Das Volumenelement der Sasaki Metrik wird auch *Lebesgue-Liouville-Maß* genannt.

Beispiel. Sei M ein kompakter lokalsymmetrischer Raum negativer Krümmung, d. h. $M = \mathbb{K}H^n/\Gamma$ ist der Quotient eines hyperbolischen Raumes $\mathbb{K}H^n$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{K} = Ca$ und $n = 2$ und Γ ist ein kokompaktes Gitter in der Isometriegruppe $\mathrm{Iso}(\mathbb{K}H^n)$ von $\mathbb{K}H^n$. In diesem Falle sind die Blätterungen von T^1M von der Klasse C^∞ (sogar reell analytisch) und das Bowen-Margulis-Maß μ stimmt mit dem Lebesgue Maß λ überein.

Die Eigenschaften des Beispiels sind nicht typisch für allgemeine Anosov-Flüsse. Anosov konstruiert in [Ano] 1 einen Anosov-Fluß, für den die Anosov-Zerlegung nicht von der Klasse C^2 ist. Allerdings ist dieses Beispiel kein geodätischer Fluß für eine kompakte Mannigfaltigkeit negativer Krümmung. Zum Nachweis von Nichtregularität untersucht Anosov die *Poincaré-Abbildung* α in einem periodischen Punkt x von ϕ^t, die man wie folgt erhält: Sei H eine zu ϕ^t transversale glatte lokale Hyperfläche durch x und sei τ die Primperiode des Punktes x. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x in H so daß für jedes $y \in U$ der Orbit von y einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt $\alpha(y)$ mit H im Zeitintervall $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ besitzt. α ist dann ein hyperbolischer Diffeomorphismus von U in H mit Fixpunkt x (siehe [Ano] 1, [Sh]). Anosov findet ein Hindernis im

3-Jet von α in x, das für Flüsse mit C^2-Anosov-Zerlegung verschwinden muß, aber in seinem Beispiel von 0 verschieden ist.

1.2 Anosov-Flüsse auf 3-dim. Mannigfaltigkeiten

Hurder und Katok ([H-K]) greifen Anosovs Idee auf und verfeinern sie. Ihre Methode liefert scharfe Ergebnisse für Anosov-Flüsse auf 3-dim. kompakten Mannigfaltigkeiten. Zur Formulierung der Resultate benötigen wir die folgenden Begriffe:

a) Eine stetige Funktion $f:(a,b)\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist in der *Zygmund-Klasse* $\Lambda_*(a,b))$ enthalten, falls

$$\Lambda_*(f)=\sup_{a<x<b}\ \limsup_{h\to\infty}\frac{|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|}{|h|}<\infty$$

gilt. Eine solche Funktion hat Stetigkeitsmodus $\mathcal{O}(s|\log s|)$, insbesondere ist sie α-Hölder für jedes $\alpha\in(0,1)$. Sie braucht aber nicht von endlicher Variation oder Lipschitz zu sein (siehe [Z]).

b) Ein reellwertiger *Kozyklus* über dem Fluß ϕ^t ist eine Funktion $f:N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ welche $f(p,t+s)=f(p,t)+f(\phi^t p,s)$ für alle $p\in N$, alle $s,t\in\mathbb{R}$ erfüllt. Zwei Kozykel heißen *kohomolog* falls es eine meßbare Abbildung $\psi:N\to\mathbb{R}$ gibt mit $f(p,t)=\psi(\phi^t p)+g(p,t)-\psi(p)$ für alle $p\in N$, $t\in\mathbb{R}$. Kohomologie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kozyklen, und eine *Kohomologieklasse* ist eine Äquivalenzklasse von Kozyklen.

Mit Hilfe von speziellen, dem Problem besonders gut angepaßten Koordinaten untersuchen Hurder und Katok das von Anosov entdeckte Hindernis für Regularität in periodischen Punkten. Es gelingt ihnen, die exakte Regularität der Anosov-Zerlegung im 3-dim. Fall bei Existenz eines glatten, invarianten Volumenelementes zu beschreiben.

Theorem 1 ([H-K]) *Sei ϕ^t ein glatter Anosov-Fluß auf einer 3-dim. kompakten Mannigfaltigkeit, welcher ein glattes Volumenelement invariant läßt.*

1. *Die schwach stabile Distribution $E^s=E^{ss}\oplus E^0$ und die schwach instabile Distribution $E^u=E^{su}\oplus E^0$ sind von der Klasse C^1, mit 1. Ableitungen in der Zygmund-Klasse.*

2. *Es gibt eine Kohomologieklasse $A(\phi^t)$, repräsentiert durch einen Kozyklus der Klasse C^1, die genau dann verschwindet, wenn E^s oder E^u meßbare transversale 2. Ableitungen auf einer Teilmenge von N von positivem Maß besitzen. In diesem Falle sind E^u und E^s dann sogar von der Klasse C^∞.*

Im Falle von geodätischen Flüssen für Flächen negativer Krümmung war C^1-Regularität der Distributionen E^s,E^u bereits E. Hopf bekannt ([Ho]). In diesem Falle kann man sogar mehr sagen: Eine *zeiterhaltende Konjugation* zweier Anosov-Flüsse ϕ^t auf N, ψ^t auf V ist ein Homöomorphismus $\Lambda:N\to V$ der mit ϕ^t und ψ^t kommutiert, d. h. so daß $\psi^t\circ\Lambda=\Lambda\circ\phi^t$ gilt. Ghys ([Gh]) zeigt, daß die Anosov-Zerlegung eines geodätischen Flusses auf einer Fläche M genau dann von der Klasse C^∞ ist, wenn es eine Fläche S konstanter negativer Krümmung und eine glatte zeiterhaltende Konjugation $\Lambda : T^1M \to T^1S$ der geodätischen Flüsse von M, S gibt. Eine solche Konjugation erhält notwendig das Bowen-Margulis-Maß μ und das Lebesgue-Maß λ, insbesondere stimmen μ und λ auf T^1M überein. Andererseits zeigt Katok ([K] 1), daß $\lambda = \mu$ für eine Fläche genau dann gilt, wenn die Fläche konstante Krümmung besitzt. Zusammenfassend erhält man heraus:

Theorem 2 ([H-K], [K] 1, [Gh]) *Sei M eine kompakte Fläche negativer Krümmung. Dann sind gleichwertig:*

i) *Die Anosov-Zerlegung ist von der Klasse* $C^{1,1}$.
ii) $\lambda = \mu$.
iii) *Die Fläche hat konstante Krümmung.*

1.3 Gebündelte und symplektische Anosov-Flüsse

Der Beweis von E. Hopf der C^1-Regularität der Anosov-Zerlegung für geodätische Flüsse auf Flächen basiert auf einer Analyse des Wachstums unter dem geodätischen Fluß von zu E^{su} tangentialen Vektoren. Dieser Ansatz wurde von Hirsch, Pugh und Shub aufgegriffen. Sie entwickeln eine leistungsfähige Methode, um den Zusammenhang zwischen Regularität der Anosov-Zerlegung und dem logarithmischen asymptotischen Wachstum verschiedener zu E^{su} oder E^{ss} tangentialer Vektoren zu analysieren. Relevante Größe ist hierbei ein Wachstumsquotient, der in der folgenden Definition beschrieben wird.

Definition 3 ([H-P-S], [Hs]) *Ein Fluß ϕ^t heißt α-*gebündelt *für ein $\alpha \in (0,2]$ falls es eine Zahl $c>0$ und Zahlen $0<\mu_1<\mu_2<1<\nu_2<\nu_1$ gibt mit $\mu_2\nu_2^{-1} < \min((\mu_1, \nu_1^{-1}))^\alpha$ so daß für alle $X \in E^{ss}$, alle $Y \in E^{su}$ und $t>0$ gilt*

$$\frac{1}{c}\mu_1^t\|X\| \leqslant \|d\phi^t X\| \leqslant c\mu_2^t\|X\| \quad \textit{und}$$

$$\frac{1}{c}\nu_1^{-t}\|Y\| \leqslant \|d\phi^{-t} Y\| \leqslant c\nu_2^{-t}\|Y\|.$$

Für α-gebündelte Anosov-Flüsse erhält man die folgende Regularitätseigenschaft.

Theorem 4 ([H-P-S], [Hs]) *Die Anosov-Zerlegung eines α-gebündelten Anosov-Flusses ϕ^t ist von der Klasse $C^{\alpha-\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon>0$ und $\alpha \in (0,2]$.*

Dieses Theorem wurde von Hirsch, Pugh und Shub für den Fall $\alpha \in (0,1]$ gezeigt. Hasselblatt erhält in [Hs] die Erweiterung für alle $\alpha \in (0,2]$, indem er die Ideen von Hirsch, Pugh und Shub mit dem Ansatz von Hurder und Katok in [H-K] kombiniert.

Beispiel eines α-gebündelten Anosov-Flusses ist der geodätische Fluß einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit negativer Krümmung, deren Krümmung punktweise *strenges* $\frac{\alpha^2}{4}$ *-pinching* besitzt. Dies bedeutet, daß für jedes $p \in M$ der Quotient zwischen dem Betragsminimum und dem Betragsmaximum der Krümmung K in p nicht kleiner als $\frac{\alpha^2}{4}$ ist. Für Flächen findet man noch einmal das Resultat von Hurder und Katok: Die Anosov-Zerlegung für den geodätischen Fluß auf einer Fläche ist C^α für jedes $\alpha < 2$.

Für symplektische Anosov-Flüsse besitzt Theorem 4 im generischen Fall eine Art Umkehrung. Zur Beschreibung des Begriffs „generisch" führt man auf der Menge aller glatten symplektischen Anosov-Flüsse ϕ^t auf einer festen kompakten Mannigfaltigkeit N eine Topologie S wie folgt ein: Es gelte $\phi_i^t \to \phi$ in $\mathcal{S}(i \to \infty)$ genau wenn die Zeit-1-Abbildungen ϕ_i^1 gegen ϕ^1 in der C^∞-Topologie konvergieren und wenn außerdem die kanonischen 1-Formen ω_i von ϕ_i^t gegen die kanonische 1-Form ω von ϕ^t in der C^2-Topologie konvergieren. Die Menge aller symplektischen Anosov-Flüsse auf N mit der Topologie $\mathcal{S}$ werde mit $\mathcal{A}$ bezeichnet. Für $\alpha \in (0,2]$ definiere $\mathcal{A}_\alpha = \{\phi^t \in \mathcal{A} \mid \phi^t$ hat einen periodischen Punkt x der nicht α-gebündelt ist, d. h. für den die in Def. 3 angegebene Bedingung verletzt ist.$\}$ Hasselblatt zeigt:

Theorem 5 ([Hs]) *Für jedes $\alpha \in (0,2]$ ist die Anosov-Zerlegung $\phi^t \in \mathcal{A}_\alpha$ generisch nicht von der Klasse C^α. Für ein generisches $\phi^t \in \mathcal{A}$ ist die Anosov-Zerlegung nicht von der Klasse $C^{1+|x \log x|}$.*

Theorem 5 liefert allerdings keine Informationen über geodätische Flüsse, weil die Menge aller geodätischen Flüsse auf N keine offenen Teilmengen aus $\mathcal{A}$ enthält.

1.4 Kanai-Zusammenhang und zeiterhaltende Konjugation

In der Folge nehmen wir stets an, daß ϕ^t ein symplektischer Anosov-Fluß auf der kompakten Mannigfaltigkeit N ist, erzeugt von einem glatten Vektorfeld X^0, mit Anosov-Zerlegung von der Klasse C^k für ein $k \geqslant 1$ und kanonischer Form ω der Klasse C^{k+1}. Sei J das durch $J(y) = -y$ für $y \in E^{ss}$, $J(y) = y$ für $y \in E^{su}$ und $J(\mathbb{R}X^0) \equiv 0$ definierte $(1,1)$-Tensorfeld. Die Form $d\omega$ und der Tensor J definieren dann eine indefinite Metrik h auf N der Klasse C^k durch $h(Y,Z) = d\omega(Y, JZ) + \omega \otimes \omega(Y,Z)$. Dies bedeutet, daß es einen eindeutig bestimmten affinen Zusammenhang ∇_N der Klasse C^{k-1} auf N gibt mit den folgenden Eigenschaften:

i) h ist parallel bezüglich ∇_N.
ii) Die Torsion von ∇_N ist $d\omega \otimes X^0$.

Dieser Zusammenhang ist invariant under dem Anosov-Fluß und läßt die Anosov-Zerlegung invariant. Er wurde von Kanai in [Kn] 1 eingeführt und heißt *Kanai-Zusammenhang.*

Als Zusammenhang der Klasse C^{k-1} ist ∇_N eine lineare Abbildung des Vektorraumes aller C^k-Schnitte von TN in den Raum der 1-Formen auf N mit Werten in TN der Klasse C^{k-1}. Gleichwertig hierzu ist, daß ∇_N in glatten lokalen Koordinaten auf N durch eine Familie von Christoffel-Symbolen der Klasse C^{k-1} definiert ist.

Für jede Kurve φ auf N der Klasse C^k ist die Parallelverschiebung eines Vektors entlang φ erklärt als Lösung einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit stetigen (genauer: C^{k-1}-)Koeffizienten zu vorgegebener Anfangsbedingung. Ein solches paralleles Vektorfeld ist ein Schnitt der Klasse C^k des C^k-Vektorbündels $TN|_\varphi$ über φ.

Eine *∇_N-flache Parallelisierung* eines Unterbündels E von TN über einer glatten Untermannigfaltigkeit S ist eine Trivialisierung von $E_{|S}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Vektorfeld aus der Trivialisierung die ∇_N-kovariante Ableitung in Richtung von S identisch verschwindet. Dies erfordert, daß $E_{|S}$ ein Bündel der Klasse C^k ist. Für jedes $x \in N$ erhält man eine natürliche ∇_N-flache Trivialisierung von E^{su} über $W^{ss}(x)$ wie folgt: Für jedes $y \in W^{ss}(x)$ gibt es eine Umgebung U von y in $W^{su}(x)$ und einen C^k-Diffeomorphismus $A(x,y): U \to W^{su}(y)$ so daß $A(x,y)z \in W^s(z)$ für alle $z \in U$. Die Wahl einer Basis $X^1(x), \ldots X^{n-1}(x)$ von E^{su}_x bestimmt dann eine Trivialisierung $X^1, \ldots, X^{n-1}$ von E^{su} über $W^{ss}(x)$ via $X^i(y) = dA(x,y)(X^i(x))$. Kanai zeigt in [Kn] 2, daß diese Trivialisierung ∇_N-flach ist, insbesondere sind die Felder X^i Schnitte von E^{su} über S der Klasse C^k.

Im Falle $k \geqslant 2$ ist der Krümmungstensor R von ∇_N erklärt; R ist ein ϕ^t-invariantes Tensorfeld auf N. Ist ϕ^t der geodätische Fluß eines kompakten, lokalsymmetrischen Raumes S, dann ist R parallel bezüglich ∇_{TS}. Umgekehrt zeigt Kanai in [Kn] 1, daß $\nabla_{TM} R = 0$ gilt falls die Krümmung von M strenges 2/9-Pinching besitzt und die Anosov-Zerlegung von der Klasse C^∞ ist. Dies benutzt er zum Nachweis, daß der geodätische Fluß zeiterhaltend konjugiert zu dem geodätischen Fluß auf einer Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung ist.

Ist ϕ^t allgemeiner ein Anosov-Fluß mit C^∞-Anosov-Zerlegung auf N, so operiert der Anosov-Fluß auf N als Automorphismengruppe von ∇_N mit dichten Orbiten. Andererseits ist die Automorphismengruppe eines glatten Zusammenhangs ∇ auf einer kompakten Mannigfaltigkeit *starr* im Sinne von Gromov ([G] 1), d. h. bei Existenz eines dichten Orbits gibt es auch einen offenen und dichten Orbit. Für ϕ^t bedeutet dies, daß das System (N, ∇_N) auf einer offenen, ϕ^t-invarianten Teilmenge von N lokal homogen ist. Diese Tatsache wird von Benoist, Foulon und Labourie ausgenutzt, um das Resultat von Kanai wie folgt zu verallgemeinern:

Theorem 6 ([Kn] 1, (B-F-L]) *Sei ϕ^t ein glatter symplektischer Anosov-Fluß auf einer kompakten Mannigfaltigkeit N. Dann gibt es eine endliche Überlagerung $\tilde{N}$ von N und eine glatte ordnungserhaltende Orbit-Äquivalenz des Lifts von ϕ^t zu $\tilde{N}$ mit dem geodätischen Fluß auf einem kompakten lokalsymmetrischen Raum negativer Krümmung.*

Hierbei ist eine *Orbit-Äquivalenz* zweier Anosov-Flüsse ϕ^t, ψ^t auf N, V ein Homöomorphismus $A: N \to V$, welcher die Orbiten von ϕ^t auf die Orbiten von ψ^t abbildet.

Orbit-Äquivalenzen von geodätischen Flüssen erhält man unter rein topologischen Voraussetzungen: Sind M, S homotopieäquivalente Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung, d. h. sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(M)$ von M und $\pi_1(S)$ von S isomorph, dann sind die geodätischen Flüsse von M und S orbit-äquivalent, insbesondere sind $T^1 M$ und $T^1 S$ homöomorph ([G] 2). (Sogar M und S sind dann homöomorph, aber dies ist ein sehr tiefes Resultat von Farrel und Jones in [F-J]). In dem Falle eines geodätischen Flusses folgern Benoist, Foulon und Labourie, daß sogar eine zeiterhaltende Konjugation unter den Voraussetzungen von Theorem 6 existiert.

Im allgemeinen impliziert die Existenz einer Orbit-Äquivalenz keineswegs die Existenz einer zeiterhaltenden Konjugation von geodätischen Flüssen: Otal

([O]) und Corke ([C]) haben gezeigt, daß geodätische Flüsse auf Flächen M, S genau dann zeiterhaltend konjugiert sind, wenn M, S isometrisch sind.

Die Existenz zeiterhaltender Konjugationen kann mit Hilfe der Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$, $\pi_1(S)$ von M, S charakterisiert werden. Hierzu erinnern wir daran, daß jede nichttriviale Konjugationsklasse $\langle\psi\rangle$ in $\pi_1(M)$ durch eine eindeutig bestimmte Geodätische der Länge $l\langle\psi\rangle$ repräsentiert werden kann. Sei C die Menge aller Konjugationsklassen von $\pi_1(M)$. Das *markierte Längenspektrum* von M ist das Element $(l\langle\psi\rangle|_{\langle\psi\rangle\in C})$ des mit C indizierten direkten Produktes $\mathbb{R}^C$. Das markierte Längenspektrum von M und S stimmt genau dann überein (d. h. es gibt einen Isomorphismus von $\pi_1(M)$ auf $\pi_1(S)$, der die markierten Längenspektra ineinander überführt), falls die geodätischen Flüsse von M, S zeiterhaltend konjugiert sind ([H] 1). Eine solche Konjugation $\Lambda: T^1M \to T^1S$ überführt das Bowen-Margulis-Maß (bzw. das Lebesgue-Maß) auf T^1M in das Bowen-Margulis-Maß (bzw. das Lebesgue-Maß) auf T^1S. Besitzt die Krümmung von M oder S strenges 1/4-Pinching oder ist die Anosov-Zerlegung von TT^1M und TT^1S von der Klasse C^1, dann ist Λ notwendig ein C^2-Diffeomorphismus ([H] 2, [H] 3).

2 Potentialtheorie

Sei zunächst $\tilde{M}$ eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit beschränkter negativer Krümmung K, d. h. es gibt Zahlen $0 < a \leqslant b < \infty$ so daß $-b^2 \leqslant K \leqslant -a^2$. Der *Laplace-Operator* Δ auf $\tilde{M}$ erzeugt dann eine konservative Diffusion auf $\tilde{M}$, die sogenannte *Brownsche Bewegung*, welche durch eine Familie $\{P^x\}(x \in \tilde{M})$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf dem Raum Ω aller stetigen Wege $\omega: [0, \infty) \to \tilde{M}$ beschrieben wird. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist von der Fundamentallösung $p: \tilde{M} \times \tilde{M} \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ der *Wärmeleitungsgleichung* $\Delta - \dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ bestimmt, d. h. für jede Borel-Menge $A \subset \tilde{M}$ und jedes $\tau > 0$ haben wir $P^x\{\omega | \omega(\tau) \in A\} = \int_A p(x, y, t)\mathrm{d}y$. Die Brownsche Bewegung ist *transient*, und ein typischer Brownscher Weg $\omega: [0, \infty) \to \tilde{M}$ konvergiert mit $t \to \infty$ gegen einen Punkt des *idealen Randes* $\partial\tilde{M}$ von $\tilde{M}$ (dies wurde zuerst von Prat in [P] angegeben). Dies bedeutet, daß das Maß P^x zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß ω^x auf $\partial\tilde{M}$ projiziert werden kann (siehe [B-G-S] zur Beschreibung von $\partial\tilde{M}$). Die Maßklasse von ω^x auf $\partial\tilde{M}$ ist unabhängig von $x \in \tilde{M}$.

2.1 Harmonische Maße

Sei jetzt wieder $\tilde{M}$ die universelle Überlagerung einer kompakten negativ gekrümmten Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe Γ. Mittels der kanonischen Identifikation von $T_x^1\tilde{M}$ mit $\partial\tilde{M}$ kann das Maß ω^x als W-Maß auf $T_x^1\tilde{M}$ aufgefaßt werden. Für $\varphi \in \Gamma$ erhält man dann $\omega^{\varphi x} = \omega^x \circ (\mathrm{d}\varphi)^{-1}$, d. h. die Maße ω^x projizieren zu W-Maßen auf den Fasern T_p^1M der Faserung $T^1M \to M$, die wir ebenfalls mit ω^p *bezeichnen. Sei* λ_0 das normalisierte Lebesgue-Maß auf M; dann erhält man ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß ω auf T^1M durch $\omega(A) = \int \omega^x(A \cap T_x^1M)\mathrm{d}\lambda_0(x)$.

Zur Charakterisierung dieses Maßes erinnern wir daran, daß die stabilen Mannigfaltigkeiten in T^1M lokal diffeomorph zu M sind. Dies bedeutet, daß die

Riemannsche Metrik auf M zu einer stetigen Riemannschen Metrik g^s auf dem Tangentialbündel TW^s von W^s geliftet werden kann, deren Einschränkung auf jedes Blatt von W^s glatt ist. Für $v \in T^1M$ induziert daher diese Metrik einen Laplace-Operator Δ^s auf $W^s(v)$. Diese Operatoren setzen sich dann zu einem Differentialoperator Δ^s auf T^1M zweiter Ordnung mit stetigen Koeffizienten zusammen mit der Eigenschaft, daß für jede glatte Funktion f auf T^1M der Wert von $\Delta^s(f)$ in $v \in T^1M$ nur von $f_{|W^s(v)}$ abhängt. Wir sagen, daß Δ^s *subordiniert* zu der stabilen Blätterung ist.

Ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß η auf T^1M heißt *harmonisch* für Δ^s falls $\int(\Delta^s f)d\eta = 0$ für jede glatte Funktion f auf T^1M. Harmonische Maße existieren immer ([Ga]). Für den Operator Δ^s ist das Maß ω harmonisch und als solches eindeutig bestimmt bis auf eine Konstante (Ledrappier in [L] 3). Eine gleichwertige Beschreibung eines harmonischen Maßes für Δ^s erhält man wie folgt: Weil $W^s(v)$ lokal diffeomorph zu M ist, kann die Brownsche Bewegung auf M zu einem Markov-Prozeß auf T^1M geliftet werden. Das Maß ω ist dann das eindeutig bestimmte Maß, welches invariant unter diesem Prozeß ist ([Ga]).

Obige Beschreibung von ω erlaubt es, asymptotische Größen der Brownschen Bewegung auf $\tilde{M}$ durch Integration bezüglich ω zu berechnen. Ein Beispiel hierzu ist die asymptotische Divergenzgeschwindigkeit $\alpha = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{dist}((\omega(0), \omega(t))$ eines typischen Brownschen Weges ω auf $\tilde{M}$; sie hängt nicht von ω ab. Zu ihrer Berechnung bezeichnen wir für $v \in T^1M$ mit $U(v)$ die zweite Fundamentalform in Pv der Hyperfläche $PW^{ss}(v)$ in M, normalisiert in solcher Weise daß $U(v)$ positiv definit ist; hierbei ist $P: T^1M \to M$ die kanonische Projektion. Sei $(\operatorname{tr} U)(v)$ die Spur von $U(v)$; dann gilt $\alpha = \int(\operatorname{tr} U)d\omega$ ([Km]).

Einen zweiten Differentialoperator 2. Ordnung auf T^1M mit stetigen Koeffizienten erhält man wie folgt: Die Riemannsche Metrik g^s induziert eine stetige Riemannsche Metrik g^{ss} auf TW^{ss}, deren Einschränkung auf jedes Blatt von W^{ss} glatt ist. Die Laplace-Operatoren der Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(W^{ss}(v), g^{ss})(v \in T^1M)$ setzen sich dann wie zuvor zu einem Differentialoperator Δ^{ss} auf T^1M zweiter Ordnung mit stetigen Koeffizienten zusammen. Auch dieser Operator besitzt ein eindeutig bestimmtes harmonisches Maß σ, das wie folgt beschrieben werden kann: Sei λ^{ss} das von g^{ss} auf den Blättern von W^{ss} induzierte Lebesgue-Maß und sei μ^u eine Familie von konditionierten Maßen des Bowen-Margulis-Maßes auf instabilen Mannigfaltigkeiten, welche invariant ist unter kanonischen Abbildungen.

Dann gilt $d\sigma = d\lambda^{ss} \times d\mu^u$ (bis auf eine Konstante); diese Definition ist möglich, weil die Blätterungen W^{ss}, W^u transversal zueinander sind (siehe [L] 3, [Kni], [H] 4).

Andererseits ist die Blätterung von T^1M in die Fasern der Faserung $T^1M \to M$ ebenfalls transversal zu der instabilen Blätterung. Dies bedeutet, daß die Maße $\omega^x (x \in M)$ die transversalen Maße eines ϕ^t-invarianten Borel-Wahrscheinlichkeitsmaßes ν auf T^1M sind (Ledrappier in [L] 1), d. h. es gilt für $E \subset T^1_pM$ Borel daß $\omega^p(E) = 0$ genau wenn $\nu(\bigcup_{v\in E} W^u(v)) = 0$. Dieses sogenannte *harmonische Maß* ist ergodisch unter ϕ^t. Ist M lokalsymmetrisch, so stimmen die Maße λ, ν, ω und σ

alle überein. Wie zuvor ist dies nicht typisch für Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung. In der Tat gilt:

Theorem 7 ([K] 2, [L] 2) *Für eine kompakte Fläche negativer Krümmung sind gleichwertig:*

i) $\lambda = \nu$.
ii) $\nu = \mu$.
iii) *Zwei der Maße λ, σ, ω sind äquivalent.*
iv) *Die Krümmung der Fläche ist konstant.*

Der Beweis der Äquivalenz i) $\Leftrightarrow$ iv) stammt von Katok ([K] 2). Ledrappier zeigt ii) $\Leftrightarrow$ iv) in [L] 2, ein weiterer Beweis ist in [H] 1 enthalten. Zu iii) vergleiche [L] 3 und [H] 4.

2.2 Entropie und „spectral gap"

Sei wieder $\tilde{M}$ eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit beschränkter negativer Krümmung. Dann besitzt $\tilde{M}$ *eine Greensche Funktion* G; welche auf dem Komplement der Diagonalen in $\tilde{M} \times \tilde{M}$ definiert und differenzierbar ist. Mit Hilfe dieser Funktion definiert man den *Martin-Rand* von $\tilde{M}$, der unter den Krümmungsvoraussetzungen mit dem idealen Rand $\partial \tilde{M}$ übereinstimmt ([A-S], [A]). Dies bedeutet insbesondere, daß es zu jedem Punkt $\xi \in \partial \tilde{M}$ eine (bis auf konstanten Faktor eindeutige) minimale positive harmonische Funktion φ_ξ auf M gibt mit Pol in ξ. Der Gradient des Logarithmus von φ_ξ kann dann als Vektorfeld Y_ξ auf derjenigen stabilen Mannigfaltigkeit $W_\xi \subset T^1\tilde{M}$ aufgefaßt werden, die aus allen Tangenten von nach der Bogenlänge parametrisierten Geodätischen auf $\tilde{M}$ besteht, welche asymptotisch zu ξ sind (W_ξ ist dann diffeomorph zu $\tilde{M}$). Auf diese Weise erhält man einen stetigen Schnitt Y von TW^s über $T^1\tilde{M}$, dessen Einschränkung auf jede stabile Mannigfaltigkeit glatt ist. Außerdem ist er äquivariant unter der Aktion der Isometriegruppe von $\tilde{M}$ auf $T^1\tilde{M}$. Besitzt $\tilde{M}$ einen kompakten Quotienten $M = \tilde{M}_{/\Gamma}$, dann projiziert Y zu einem Vektorfeld auf T^1M, das wir wieder mit Y bezeichnen.

Sei X der *geodätischen Spray* auf T^1M und sei h_k die durch $h_k = \int g^s(Y, Y)\,\mathrm{d}\omega$ definierte *Kaimanovich-Entropie*. Dann gilt:

Theorem 8 ([Km], [L] 1) 1. $\int g^s(X, Y)\,\mathrm{d}\nu$ *ist die Entropie von* ν *bzgl.* ϕ^t.

2. *Für jedes* $x \in \tilde{M}$ *und* P^x*-fast jeden Brownschen Weg* ω *in* $\tilde{M}$ *gilt* $h_k = -\lim \frac{1}{t} \log p(x, \omega(t), t)$.

3. $h_k \leqslant h\alpha$ *mit Gleichheit genau für* $\nu = \mu$.

4. $h_k \leqslant h^2$ *mit Gleichheit genau falls* $\operatorname{tr} U \equiv h$.

Die Teile 1), 3), 4) wurden von Ledrappier gezeigt, und 2) stammt von Kaimanovich.

Sei jetzt Δ der (negativ definite) Laplace-Operator auf $\tilde{M}$. Dann stimmt die kleinste obere Schranke λ_1 des L^2-Spektrums für Δ mit der größten unteren

Schranke für das positive Spektrum überein (Sullivan in [S]). Eine Abschätzung für λ_1 erhält Ledrappier wie folgt:

Theorem 9 ([L] 2, [L] 4) *Es gilt* $\lambda_1 \geqslant -h_k/4$ *mit Gleichheit genau falls* $\operatorname{tr} U \equiv h$.

2.3 Partiell elliptische Differentialoperatoren und Starrheit

Der Differentialoperator Δ^s auf T^1M ist *partiell elliptisch*, d. h. die Einschränkung von Δ^s auf jedes Blatt von W^s ist elliptisch. Bezeichnet Y das in 2.2 definierte Vektorfeld, dann ist das harmonische Maß ω für Δ^s ebenfalls harmonisch für $\Delta^s + Y$ und sogar *selbstadjungiert*, d. h. für glatte Funktionen α, β auf T^1M gilt

$$\int \alpha(\Delta^s + Y)(\beta)\mathrm{d}\omega = \int \beta(\Delta^s + Y)(\alpha)\mathrm{d}\omega.$$

Auch das Lebesgue-Maß λ ist selbstadjungiertes harmonisches Maß eines partiell elliptischen Operators der Form $\Delta^s + Z$ für einen stetigen Schnitt Z von TW^s, dessen Einschränkung auf jedes Blatt von W^s glatt ist ([H] 4). Dies bedeutet, daß Δ^s einen bezüglich λ adjungierten Operator $\mathscr{L}$ besitzt, welcher ebenfalls partiell elliptisch ist. Genauer gilt $\mathscr{L} = \Delta^s + 2Z + \varrho$ wobei $\varrho : T^1M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, deren Einschränkung auf die Blätter von W^s glatt ist. Dies bedeutet, daß das Maß ω genau dann in der Lebesgue-Maßklasse enthalten ist, wenn es eine meßbare, λ-integrierbare Funktion $f: T^1M \to (0, \infty)$ gibt, welche schwache Lösung der Gleichung $\mathscr{L} = 0$ ist. Zum Auffinden einer solchen Lösung kann die Tatsache benutzt werden, daß harmonische Maße für elliptische oder hypoelliptische Gleichungen 2. Ordnung stets in der Lebesgue-Maßklasse enthalten sind. Sei also Δ^v der faserweise Laplaceoperator auf den Fasern der Faserung $T^1M \to M$ bezüglich der Standard-Metrik. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ der Operator $\Delta^s + \varepsilon\Delta^v$ elliptisch, mit adjungiertem Operator $\mathscr{L} + \varepsilon\Delta^v$. Der Operator $\Delta^s + \varepsilon\Delta^v$ besitzt ein harmonisches Maß der Form $f_\varepsilon\lambda$, wobei $f_\varepsilon : T^1M \to (0, \infty)$ eine Lösung der Gleichung $(\mathscr{L} + \varepsilon\Delta^v)(f_\varepsilon) = 0$ mit $\int f_\varepsilon d\lambda = 0$ ist. Die Maße $f_\varepsilon\lambda$ konvergieren dann in $(C^0(T^1M))^*$ gegen das Maß ω (siehe [H] 4).

Unter der Voraussetzung, daß die Anosov-Zerlegung von der Klasse $C^{2,\alpha}$ für ein $\alpha > 0$ ist, erhält man eine punktweise a-priori-Abschätzung für die Norm des Gradienten $\nabla^s(\log f_\varepsilon)$ der Funktionen $\log f_\varepsilon$ in Richtung der stabilen Mannigfaltigkeiten. Dies bedeutet, daß es eine Folge $\{\varepsilon_i\} \subset (0, 1]$ mit $\varepsilon_i \to 0$ gibt, so daß die Vektorfelder $\nabla^s(\log f_{\varepsilon_i})$ mit $i \to \infty$ gegen einen Schnitt ζ von TW^s in der L^2-Topologie im starken Sinne konvergiert ([H] 4). Insgesamt erhält man:

Theorem 10 ([H] 4) *Ist die Anosov-Zerlegung von* T^1M *von der Klasse* $C^{2,\alpha}$ *für ein* $\alpha > 0$, *so gilt* $\lambda = \mu = \nu$.

Im Falle $\lambda = \mu$ ist das infinitesimale Wachstum des Maßes λ^s auf den stabilen Mannigfaltigkeiten unter der Operation von ϕ^{-t} bis auf einen beschränkten Faktor unabhängig von dem Ausgangspunkt (siehe [L] 2). Dies ermöglicht die Approximation von Δ^s durch eine Familie hypoelliptischer Operatoren; in gleicher Weise wie zuvor erhält man:

Theorem 11 ([H] 5) *Gilt* $\lambda = \mu$, *so auch* $\lambda = \mu = \nu$.

Bibliographie

[A] Ancona, A.: Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary. Ann. Math. **125** (1987) 495–536

[A-S] Anderson, M.; Schoen, R.: Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature. Ann. Math. **121** (1985) 429–461

[Ano] 1 Anosov, D. V.: Geodesic flows on Riemannian manifolds with negative curvature. Proc. Steklov Inst. Math. **90** (1967)

[Ano] 2 Anosov, D. V.: Tangent fields of transversal foliations in "U-systems". Math. Notes Acad. of Sciences, USSR 2, **5** (1967) 818–823

[B-G-S] Ballmann, W.; Gromov, M.; Schroeder, V.: Manifolds of nonpositive curvature. Birkhäuser 1985

[B-F-L] Benoist, Y.; Foulon, P.; Labourie, F.: Flots d'Anosov à distributions stable et instable differentiables. J. Amer. Math. Soc. **4** (1992) 33–74

[Bw] Bowen, R.: Periodic orbits for hyperbolic flows. Amer. J. Math. **94** (1972) 1–30

[B-M] Bowen, R.; Marcus, B.: Unique ergodicity for horocycle foliations. Israel J. of Math. **26** (1977) 43–67

[C] Croke, C.: Rigidity for surfaces of nonpositive curvature. Comment. Math. Helv. **65** (1990) 150–169

[F-J] Farrell, T.; Jones, L.: A topological analogue of Mostow's rigidity theorem. J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 257–370

[Ga] Garnett, L.: Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion. J. Func. Anal. **51** (1983) 285–311

[Gh] Ghys, E.: Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. Ann. Ecole Normale Sup. **20** (1987) 251–270

[G] 1 Gromov, G.: Rigid transformation groups.

[G] 2 Gromov, G.: Three remarks on geodesic dynamic and fundamental groups. Preprint

[H] 1 Hamenstädt, U.: Time preserving conjugacies of geodesic flows Erg. Th. & Dyn. Sys. **12** (1992) 67–74

[H] 2 Hamenstädt, U.: Regularity of time preserving conjugacies for contact Anosov flows with C^1-Anosov splitting. Erscheint in Erg. Th. & Dyn. Sys.

[H] 3 Hamenstädt, U.: Regularity of infinity of compact negatively curvced manifolds. Preprint

[H] 4 Hamenstädt, U.: Harmonic measures for compact negatively curved manifolds and rigidity. Preprint

[H] 5 Hamenstädt, U.: In Vorbereitung

[Hs] Hasselblatt, B.: Regularity of the Anosov splitting and A new description of the Margulis measure. Dissertation, Caltech. 1989

[H-P-S] Hirsch, M.; Pugh, C.; Shub, M.: Invariant manifolds. Lecture Notes in Math. Springer 1977

[Ho] Hopf, E.: Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **91** (1939) 261–304

[H-K] Hurder, S.; Katok, A.: Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows. Publ. IHES

[Km] Kaimanovich, V. A.: Brownian Motion and harmonic functions on covering manifolds. An entropy approach. Soviet Math. Dokl. **33** (1986) 812–816

[Kn] 1 Kanai, M.: Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations. Erg. Th. & Dyn. Syst. **8** (1988) 215–240

[Kn] 2 Kanai, M.: Differential geometric studies on dynamics of geodesic and frame flows. Preprint

[K] 1 Katok, A.: Entropy and closed geodesics. Erg. Th. & Dyn. Syst. **2** (1982) 339–367

[K] 2 Katok, A.: Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics. Erg. Th. & Dyn. Syst. **8** (1988) 139–152

[Kni] Knieper, G.: Horospherical measure and rigidity of manifolds of negative curvature. Preprint

[L] 1 Ledrappier, F.: Ergodic properties of Brownian motion on covers of compact negatively curved manifolds. Bol. Soc. Bras. Mat. **19** (1988) 115–140

[L] 2 Ledrappier, F.: Harmonic measures and Bowen Margulis measures. Israel J. Math. **71** (1990) 275–287

[L] 3 Ledrappier, F.: Ergodic properties of the stable foliations. In: Ergodic Theory and Related Topics III. Proceedings, Güstrow 1990. Springer Lecture Notes in Math. 1514 (1992) 131–145

[L] 4 Ledrappier, F.: A heat kernel characterization of asymptotic harmonicity. Preprint

[Ma] Margulis, G. A.: Certain measures associated with *U*-flows on compact manifolds. Funct. Anal. App. **4** (1970) 53–67

[O] Otal, J. P.: Le spectre marqué des surfaces à courbure négative. Ann. Math. **131** (1990) 151–162

[P] Prat, J. J.: Etude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownian sur une variéte à courbure négative. C.R.A.S. Paris **280** (1985) A1539–A1542

[SH] Shub, M.: Global stability of dynamical systems. Springer 1987

[S] Sullivan, D.: Related aspects of positivity in Riemannian geometry. J. Diff. Geo. **25** (1987) 327–351

[S] Zygmund, A.: Trogonometric Series. Cambridge Univ. Press 1968

Prof. Dr. Ursula Hamenstädt
Universität Bonn
Mathematisches Institut
Beringstr. 6
5300 Bonn

(*Eingegangen 12. 2. 1992*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 60–84
AMS subject classification: 19 K xx, 46 L 87

A Survey of Some Aspects of Non-Commutative Geometry

J. Cuntz, Heidelberg

Introduction

The idea that "non-commutative spaces" are modeled by non-commutative algebras made its first appearance in the foundations of quantum mechanics. Over the past 50 years, starting from the work of Murray – von Neumann and of Gelfand – Naimark, the theory of non-commutative analysis and operator algebras has gradually been built up. In recent years this program has gained momentum through input from index theory and from K-theory and also through the introduction of very many important new classes of examples of non-commutative C^*-algebras. At the same time, the emphasis in non-commutative analysis has shifted more and more towards geometric and topological concepts. There are important and deep applications of these methods in other branches of mathematics and in mathematical physics. However, one would not understand this circle of ideas properly, if one viewed it simply as a collection of new methods which allow to handle non-commutative problems. The philosophical motivation behind it for all the specialists in the field is a new vision of space which demands an intuition of its own. In certain respects the approach is similar to algebraic geometry. A "space" is given by the algebra of (continuous or differentiable) "functions" on the space with the difference that here the algebra is non-commutative. But the methods are mostly a little less algebraic and often closer to topology and analysis.

Since the subject is growing more and more diverse, let us give first a schematic synopsis of the different lines of development in non-commutative geometry in recent years:

1. K- and KK-theory, index theorems for differential operators with non-commutative coefficients, index theorems for differential operators on foliated manifolds, Novikov conjecture etc. Important contributions here are due to G. Kasparov.

2. Cyclic homology, non-commutative de Rham complexes, non-commutative characteristic classes, non-commutative differential calculus and Riemannian structures. Most ideas here are due to A. Connes.

3. Subfactors, knot polynomials, invariants for low dimensional manifolds, models in statistical mechanics and low-dimensional quantum field theory. Most of this has been initiated by V. Jones.

4. Quantum groups. These are deformations of classical groups. There is one approach due to Woronowicz, based on C^*-algebras, where the commutative algebra of continuous functions on a classical, say compact, group is deformed into a non-commutative Hopf algebra and another more algebraic approach, e.g. Drinfeld, where the enveloping algebra of the Lie algebra is deformed.

5. Applications in other branches of mathematics like non-commutative harmonic analysis, duality theory for locally compact groups, ergodic theory, quantum probability, recently even number theory etc.

There are many connections between these different points but they are particularly close between 1. and 2. and between 3. and 4.

It would be impossible to give an even approximate survey of all these ideas in a single article. Therefore we will concentrate in the sequel on the general framework of non-commutative C^*-algebras and on some aspects of 1. and 2. The reader who wants a more complete introduction should consult Connes' survey book [5], which we recommend anyway.

We start our survey with a brief introduction to C^*-algebras, including some examples. A C^*-algebra is the non-commutative analogue of the algebra of *continuous* functions vanishing at infinity on a locally compact space and therefore most appropriate for non-commutative *topology*. Depending on the purpose, one sometimes has to use other classes of algebras. For instance, von-Neumann algebras are a special class of C^*-algebras which model non-commutative L^∞-algebras and are appropriate for non-commutative *measure theory*. Certain subalgebras of C^*-algebras which have properties analogous to an algebra of smooth functions on a compact manifold are used in non-commutative *differential geometry*. Non-commutative algebras without any topology correspond to non-commutative *algebraic geometry*.

After giving a general idea of what a C^*-algebra is, we first give an introduction to elementary topological K-theory. Here we include proofs and this part could be used for an introductory course in the subject. Next, we introduce KK-theory which is a far reaching extension of K-theory in a version which is due to the author and which is particularly well suited to explain the common algebraic framework underlying KK-theory and cyclic cohomology. In section 4, we establish some methods which allow to compute K and KK, in particular the long exact sequences for KK. In sections 3 and 4 many of the proofs are sketched. We mention that there is a recent modification of KK, the so-called E-theory of Connes and Higson [7, 14]. The advantage of E over KK is the fact that any exact sequence of C^*-algebras induces a long exact sequence in E. In KK this holds only for exact sequences with a completely positive lifting. Therefore, E is in certain cases even more computable than KK. It has been shown in [22] that KK and E are in fact different, which was not clear a priori. Nevertheless, KK has other advantages and still seems to be more fundamental. In particular, elements of E are not very naturally represented by linear maps between algebras so that the relation to cyclic homology is more tenuous.

Next, we discuss shortly the connection between KK, cyclic cohomology and the non-commutative de Rham complex. We end with a detailed description of the fundamental algebra $q\mathbb{C}$ which is a basic object in K-theory and cyclic homology. This part appears here for the first time.

General references are [12, 15, 19] for C^*-algebras and [1, 16] for K-theory and C^*-algebra K-theory.

Contents

1 Concrete and Abstract C^*-Algebras

An abstract C^*-algebra is a complete normed algebra A over $\mathbb{C}$ with an involution* $(x^{**}=x, (\lambda x+\mu y)^*=\bar{\lambda}x^*+\bar{\mu}y^*, (xy)^*=y^*x^*, x, y \in A, \lambda, \mu \in \mathbb{C})$ such that $\|x\|^2=\|x^*x\|$ for all $x \in A$. Any algebraic *-homomorphism (i.e. respecting the involution) between two C^*-algebras is norm-decreasing thus continuous and every *-isomorphism between two C^*-algebras is isometric. When speaking of homomorphisms between C^*-algebras we will always assume that they are *-homomorphisms.

If H is a Hilbert space and $\mathscr{L}(H)$ is the algebra of bounded operators on H with involution $x^*=$(adjoint of x) then $\mathscr{L}(H)$ is a C^*-algebra and more generally any normclosed *-subalgebra of $\mathscr{L}(H)$ is a C^*-algebra. We call such C^*-algebras concrete C^*-algebras. A fundamental theorem states that every abstract C^*-algebra is isomorphic to a concrete C^*-algebra.

Another important theorem states that every commutative C^*-algebra B is isomorphic to the algebra $\mathscr{C}_0(X)$ of continuous complex valued functions on X vanishing at ∞, where X is the spectrum of B, i.e. the space of maximal ideals of B. The spectrum X is a locally compact space in a natural way and the norm and involution on $\mathscr{C}_0(X)$ are given by $\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$ and $f^*(x)=\overline{f(x)}$ respectively, for $f \in \mathscr{C}_0(X)$.

In particular, if A is any C^*-algebra and $z \in A$ generates a commutative C^*-algebra $C^*(z) \subset A$ (this is the case if and only in $z^*z=zz^*$), then $C^*(z) \cong \mathscr{C}_0(X)$ where $X=\operatorname{Sp} z \cup \{0\}$, $\operatorname{Sp} z$ the spectrum of z in A. Therefore, "locally" every C^*-algebra looks like $\mathscr{C}_0(X)$ for some X. This also gives rise to the very important so called functional calculus: if f is a continuous function in $\mathscr{C}_0(\operatorname{Sp} z)$, then $f(z)=f\circ z$ respresents an element in $C^*(z)$.

Many important C^*-algebras are naturally given by generators and relations and the topological invariants of K-theory are generally most easily computed for such C^*-algebras. Giving a C^*-algebra with a system of generators and relations can be thought of as being analogous to giving a topological space with a triangulation or the structure of an (affine) algebraic variety or of a manifold. (An important feature of C^*-algebra theory which we cannot discuss here, however, is the fact, that rather than with discrete systems of generators one can also work with continuous systems. Even in cases where a natural finite system of generators exists it is often useful to replace it by another continuous system).

The general construction goes as follows. Let $\mathscr{A}$ be an involutive algebra over $\mathbb{C}$. We say that an algebra (i.e. submultiplicative) semi-norm p on $\mathscr{A}$ is a C^*-seminorm if $p(x^*x)=p(x)^2$. If $\|x\|=\sup\{p(x)|p$ a C^* seminorm on $\mathscr{A}\}$ is finite for every $x\in\mathscr{A}$, then $\|\cdot\|$ defines a C^*-seminorm, in fact the largest possible C^*-seminorm on $\mathscr{A}$, and we can form the completion $C^*(\mathscr{A})=\overline{\mathscr{A}/N}^{\|\cdot\|}$, $N=\{x\in\mathscr{A}|\ \|x\|=0\}$ with respect to it. $C^*(\mathscr{A})$ has the universal property that any $*$-homomorphism from $\mathscr{A}$ into a C^*-algebra factors uniquely through the map $\mathscr{A}\to C^*(\mathscr{A})$ (which is not necessarily injective).

Suppose now given a set $\{x_i\}_{i\in I}$ of symbols together with a set of $*$-algebra relations $\{R_j\}$ between the x_i.

Let $\mathscr{A}$ be the free $*$-algebra generated by the x_i divided by the given relations. If $\sup\{p(x_i)|p$ a C^* – seminorm on $\mathscr{A}\}$ is finite for every i, then the corresponding sup is finite for any $x\in\mathscr{A}$, since x is a linear combination of monomials in x_i and x_i^*. Thus $C^*(\mathscr{A})$ is well defined and we denote it by $C^*(\{x_i\}, \{R_j\})$ or simply by $C^*(\{x_i\})$.

Let us look at a number of examples (the proofs of the asserted isomorphisms in 1.1–1.6 are based on very elementary C^*-algebra theory):

1.1 Let $C^*(u)$ be the universal C^*-algebra generated by one generator u with relations $u^*u=uu^*=1$ (this is shorthand for $(u^*u)u=u$, $(u^*u)u^*=u^*$, $(uu^*)u=u$, $(uu^*)u^*=u^*$). An element u satisfying these relations is called unitary. Then $p(u)^2=p(u^*u)=p(1)=1$ for any C^*-seminorm p (except $p=0$). Thus $C^*(u)$ is well defined and $C^*(u)\cong\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))=\mathscr{C}(S^1)$ where $S^1=\{\lambda\in\mathbb{C}|\ |\lambda|=1\}$ is the unit circle.

1.2 Let $C^*(u_1,\dots,u_n)$ be the universal C^*-algebra generated by $u_1,\dots,u_n$ with relations $u_i^*u_i=u_iu_i^*=1$ and $u_iu_j=u_ju_i$. Then $C^*(u_1,\dots,u_n)\cong\mathscr{C}(\mathbb{T}^n)$ where $\mathbb{T}^n=S^1\times\dots\times S^1$ is the n-Torus.

1.3 Let $C^*(h_0,\dots,h_n)$ be generated by $h_0,\dots,h_n$ with relations $h_i=h_i^*$, $h_ih_j=h_jh_i$ and $\sum_{i=0}^n h_i^2=1$.
Then $C^*(h_0,\dots,h_n)$ is isomorphic to $\mathscr{C}(S^n)$ where S^n is the n-sphere.

1.4 Let $C^*(x_1,\dots,x_n)$ be the C^*-algebra with generators $x_1,\dots,x_n$ and relations $x_i^*x_i=x_1$, $x_j^*x_i=0$ for $i\neq j$, $i,j=1,\dots,n$. This C^*-algebra is isomorphic to the algebra of complex $n\times n$-matrices $M_n(\mathbb{C})$. Here x_i corresponds to the matrix (Z_{ij}) where $Z_{i1}=1$ and $Z_{ij}=0$ otherwise.

1.5 Let $C^*(x_1, x_2,\dots)$ be the C^*-algebra with the same relations as in 1.4 but with infinitely many generators. This algebra is isomorphic to the algebra $\mathscr{K}$ of compact operators on a Hilbert space H of countable infinite dimension ($\mathscr{K}$ ist the closure in $\mathscr{L}(H)$ of the finite rank operators). It is simple (i.e. has no closed two-sided ideals).

1.6 Let $C^*(v)$ be the C^*-algebra with one generator v and relation $v^*v=1$. Then $e=1-vv^*$ is a projection ($e^2=e=e^*$) and the ideal J generated by e in $C^*(v)$ is easily seen to be the C^*-algebra generated by $x_i=v^{i-1}e$, $i=1,2,\dots$.

The x_i satisfy the relations of 1.5 and the image u of v in $C^*(v)/J$ satisfies $u^*u=uu^*=1$. Thus by 1.1 and 1.5 we have an exact sequence

$$0 \to \mathscr{K} \to C^*(v) \to \mathscr{C}(S^1) \to 0.$$

Moreover, if w is any element of a C^*-algebra satisfying $w^*w=1$ and $1-ww^* \neq 0$, then the natural map $C^*(v) \to C^*(w)$ is an isomorphism.

1.7 Let Γ be a discrete group and $C^*(\{u_g | g \in \Gamma\}) = C^*(\Gamma)$ the C^*-algebra with generators u_g and relations $u_{g^{-1}} = u_g^*$, $u_{gh} = u_g u_h$ (in particular the u_g are unitary). The algebra $C^*(\Gamma)$ is called the group C^*-algebra of Γ. (Non-degenerate) representations of $C^*(\Gamma)$ in $\mathscr{L}(H)$ are in obvious bijective correspondence with unitary representations of Γ on H.

1.8 Let Γ be a discrete group acting by automorphisms α_g, $g \in \Gamma$ on the C^*-algebra A. The "crossed product" $A \rtimes_\alpha \Gamma$ is by definition the ideal generated by A in the C^*-algebra $C^*(A, \Gamma)$ with generators $a \in A$, u_g, $g \in \Gamma$ with relations those of A for $a \in A$ and those of $C^*(\Gamma)$ for the u_g and in addition $u_g a u_g^* = \alpha_g(a)$ for $a \in A$, $g \in \Gamma$.

1.9 Let $0 < \theta < 1$ be irrational and A_θ the C^*-algebra with two unitary generators u, v with relation $uv = e^{2\pi i\theta} vu$. This is the "irrational rotation algebra". It shares many geometric properties with the 2-torus, cf. 1.2, even though it is non-commutative and even simple. From 1.1 and 1.8 we see that A_θ can also be described as the crossed product $\mathscr{C}(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ where $\mathbb{Z}$ acts on $\mathscr{C}(S^1) \cong C^*(v)$ by rotation by the angle θ on S^1, and where $u_g = u^g$ for $g \in \mathbb{Z}$.

1.10 Take $\mu \in [-1, 1]$ and two generators α, γ with relations $\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1$, $\alpha\alpha^* + \mu^2\gamma^*\gamma = 1$, $\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*$, $\alpha\gamma = \mu\gamma\alpha$, $\alpha\gamma^* = \mu\gamma^*\alpha$. Then $C^*(\alpha, \gamma)$ for $\mu = 1$ is isomorphic to $\mathscr{C}(SU(2))$. For $\mu \in [-1, 1]$, $C^*(\alpha, \gamma)$ is denoted by $SU_\mu(2)$ and is the basic example for a compact quantum group in the sense of Woronowicz [23]. One checks easily that the elements $\alpha' = \alpha \otimes \alpha - \mu\gamma' \otimes \gamma$, $\gamma' = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma$ of $SU_\mu(2) \otimes SU_\mu(2)$ satisfy the same relations so that one obtains a homomorphism $SU_\mu(2) \to SU_\mu(2) \otimes SU_\mu(2)$ mapping α to α' and γ to γ' – the coproduct – which makes $SU_\mu(2)$ a Hopf algebra.

1.11 Let A, B be two C^*-algebras. The free product $A * B$ is the C^*-algebra whose generators are the elements of A with the relations of A and the elements of B with the relations of B with no further relations. Obviously, $A * B$ is the completion of the algebraic free product of A by B.

1.12 The (maximal) tensor product $A \otimes B$ can also be described as a universal algebra even though this may be less natural. In fact, $A \otimes B$ is the ideal generated by elements of the form ab, $a \in A$, $b \in B$ in the C^*-algebra with generators $a \in A$ with relations of A, $b \in B$ with relations of B and the additional relation $ab = ba$, $a \in A$, $b \in B$. The tensor product has the following properties:

$$\mathscr{C}_0(X) \otimes \mathscr{C}_0(Y) \cong \mathscr{C}_0(X \times Y)$$

$$\mathscr{C}_0(X) \otimes A \cong \mathscr{C}_0(X, A) = \{A\text{-valued continuous functions } f \text{ on } X \text{ with } f(\infty) = 0\}$$

$$M_k(\mathbb{C}) \otimes A \cong M_k(A) = \{k \times k\text{-matrices over } A\}$$

1.13 Let A by any C^*-algebra and $\tilde{A} = C^*(A, 1)$ the universal C^*-algebra generated by $a \in A$ with relations of A and a unit element 1 s.t. $11^* = 1^*$, $1a = a$. Then $\tilde{A}$ is unital and contains A as an ideal such that $\tilde{A}/A \cong \mathbb{C}$. If $A = \mathscr{C}_0(X)$ for a locally compact space X, then $\mathscr{C}_0(X)^{\sim} \cong \mathscr{C}(X^+)$ where X^+ is the one-point compactification of X.

Let us end this list here and look at some example of concrete C^*-algebras.

1.1′ Let H be a Hilbert space and $\mathscr{K}(H)$ the algebra of compact operators on H. Since Hilbert spaces of the same (Hilbert space-) dimension are isomorphic, one has $\mathscr{K}(H) \cong \mathscr{K}(H')$ if H, H' have the same dimension. The algebra $\mathscr{K}(H)$ for H of countable infinite dimensions is simply denoted by $\mathscr{K}$. It can also be described by generators and relations, cf. 1.5 above.

1.2′ Let $H = l^2(\mathbb{N})$ and $s \in \mathscr{L}(H)$ be defined by $s(\xi_n) = \xi_{n+1}$, where $\{\xi_n\}$ is the standard orthonormal basis of $l^2(\mathbb{N})$.
We have $s^*s = 1$ and $1 - ss^*$ is the projection onto the subspace $\mathbb{C}\xi_0$. The C^*-algebra $C^*(s)$ generated by s can be described as the algebra of all Toeplitz matrices or also as the algebra of Toeplitz operators on the unit disc, cf. [2]. If $C^*(v)$ is the universal algebra of 1.6 above, then by the remark in 1.6, the map $v \to s$ extends to an isomorphism $C^*(v) \xrightarrow{\cong} C^*(s)$.
The ideal $J \cong \mathscr{K}$ of $C^*(v)$ obviously corresponds under this isomorphism to the actual compact operators on $l^2(\mathbb{N})$.

1.3′ Let Γ be a discrete group and $H = l^2(\Gamma)$. Every $g \in \Gamma$ defines in a natural way a unitary operator λ_g on H by $\lambda_g(\xi_h) = \xi_{gh}$ where $\{\xi_g\}_{g \in \Gamma}$ is the natural orthonormal basis of $l^2(\Gamma)$. The C^*-algebra generated by the operators $\{\lambda_g\}$ is denoted by $C^*_{\text{red}}(\Gamma)$. The natural surjection $C^*(\Gamma) \to C^*_{\text{red}}(\Gamma)$, $C^*(\Gamma)$ as in 1.7 above, is an isomorphism if and only if Γ is amenable (this can be taken as the definition of an amenable group). The algebra $C^*_{\text{red}}(\Gamma)$ for a non-amenable group (e.g. a non-commutative free group) is one of the examples of a concrete C^*-algebra that can not be described naturally as an abstract C^*-algebra.

1.4′ Let M be a compact C^∞-manifold, $H = L^2(M)$ and $\Psi(M)$ the C^*-algebra of pseudodifferential operators of order $\leqslant 0$ acting on $H(\Psi(M)$ is the closure in $\mathscr{L}(H)$ of the algebra of smooth pseudodifferential operators of order $\leqslant 0$). Again, this algebra seems to be difficult to describe abstractly. A presentation of $\Psi(M)$ in terms of generators and relations should be quite useful.

1.5′ Let $H = L^2(S^1)$, $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ and $0 < \theta < 1$ irrational. Let w, z be unitary operators on H defined by $(zf)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, $(wf)(\lambda) = f(e^{-2\pi i\theta}\lambda)$. Then $wz = e^{2\pi i\theta} zw$, and the map $u \to v$, $v \to z$ of A_θ, cf. 1.9 above, onto the C^*-algebra generated by w and z is an isomorphism since A_θ is simple.

2 Elementary K-Theory for C^*-Algebras

The basic group $K_0(A)$ is defined for a C^*-algebra A in the same way that it is defined for any ring. The special feature of K-theory for C^*-algebras that comes in already at that level, however, is the fact that isomorphism of projective modules over A corresponds to homotopy of the corresponding projections in matrices over A. Thus, from the start, K-theory is defined more naturally in terms of homotopy, rather than purely algebraically. Let A be a C^*-algebra and $e, f \in A$ projections (i.e. self-adjoint idempotents). We say that e is homotopic to f and write $e \sim f$ if there is a continuous path of projections in A connecting e to f.

Before turning to projections, we need a lemma on unitaries in a C^*-algebra. If A is a unital C^*-algebra we denote by $U(A)$ the group of unitary elements of A and by $U_0(A)$ its connected component of the identity.

Lemma 2.1. *Let A be unital and $u \in U(A)$.*

(a) *If $\|u-1\| < 2$, then there is $h = h^* \in A$ such that $u = e^{ih}$.*

(b) *$U_0(A)$ consists exactly of products of the form $e^{ih_1} e^{ih_2} \dots e^{ih_n}$ where $\{h_1, \dots, h_n\}$ is a finite family of self-adjoint elements in A.*

(c) *If $\sigma: A \to B$ is a surjective *-homomorphism, then $\sigma: U_0(A) \to U_0(B)$ is surjective.*

Proof: (a) The assumption implies that $-1 \notin \mathrm{Sp}\, u$. Thus the principal branch of the logarithm defines a continuous function on $\mathrm{Sp}\, u$ and we can put $h = -\mathrm{i} \log u$.

(b) Every such product obviously is in $U_0(A)$. If u_t, $t \in [0,1]$ is a homotopy connecting 1 to u, let $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ be a partition of $[0,1]$ such that $\|u_{t_i} - u_{t_{i-1}}\| < 2$, $i = 1, \dots, n$ and write $u = w_1 w_2 \dots w_n$, $w_i = u^*_{t_{i-1}} u_{t_i}$ and write $w_k = e^{ih_k}$ using (a).

(c) follows from (b). □

Lemma 2.2. *Let A be a unital C^*-algebra and $e, f \in A$ projections.*

(a) *If $\|e - f\| < 1$ then there exists a canonical unitary u in $U_0(A)$ such that $ueu^* = f$. For a given e, u depends continuously on f.*

(b) *$e \sim f$ if and only if there is $u \in U_0(A)$ such that $ueu^* = f$.*

Proof: (a) Consider the unitaries $x = 2e - 1$ and $y = 2f - 1$. We have $\|1 - xy\| = \|x(x-y)\| < 2$. By 2.1 (a), there is $h = h^* \in A$ such that $xy = e^{ih}$. From $x^2 = 1$ and $yx = (xy)^{-1}$ it follows that $y = xe^{ih}$, $xe^{ih}x = e^{-ih}$ and $xhx = -h$. Thus, putting $u = e^{-ih/2}$ we have $uxu^* = e^{-ih/2} x e^{ih/2} = xe^{ih} = y$.

(b) Assume that e is homotopic to f via the continuous path $t \mapsto p_t$, $t \in [0,1]$. Let $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ be a partition of $[0,1]$ such that $\|p_{t_i} - p_{t_{i-1}}\| < 1$ for all $i = 1, \dots, n$. Put $u = u_n u_{n-1} \dots u_1$ where $u_i \in U_0(A)$ such that $u_i p_{t_{i-1}} u_i^* = p_{t_i}$. □

Corollary 2.3. *Let A be a C^*-algebra, not necessarily unital, and $e, f \in A$ projections. Then $e \sim f$ in the 2×2-matrices $M_2(A)$ if and only if there is $x \in A$ such that $x^*x = e$, $xx^* = f$.*

Proof: By 2.2 $e \sim f$ in $M_2(A)$ iff there is $u \in U_0(M_2(\tilde{A}))$, cf. 1.12, such that $ueu^* = f$. Putting $x = ue$ we have $xx^* = f$, $x^*x = e$ and $x \in A \subset M_2(A)$. Conversely, if such an x exists, then $u = \begin{pmatrix} x & 1-f \\ 1-e & x^* \end{pmatrix}$ is a unitary in $U_0(M_2(\tilde{A}))$ such that

$$u \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^* = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ □

Let us now give the definition of $K_0(A)$. For a C^*-algebra B, embed B into $M_2(B)$ via the map $x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Given a C^*-algebra A, let $M_\infty(A)$ be the inductive limit of the sequence $A \to M_2(A) \to M_4(A) \to M_8(A) \to \ldots$ where at each step we use the standard embedding described above. $M_\infty(A)$ is a normed algebra with a C^*-norm but not necessarily complete. For a unital C^*-algebra A we define $K_0(A)$ as the enveloping group of the abelian semigroup $\mathscr{S}(A) = \{[p] \mid p$ is a projection in $M_\infty(A)\}$ where $[p]$ stands for the homotopy class of p and the addition in $\mathscr{S}(A)$ is defined by $[e] + [f] = \left[\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right]$ for $e, f \in M_{2^k}(A)$, $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \in M_{2^{k+1}}(A) \subset M_\infty(A)$.

The enveloping group for $\mathscr{S}(A)$ can be defined for instance as the quotient $(\mathscr{S}(A) \times \mathscr{S}(A))/\Delta, \Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathscr{S}(A)\}$ the diagonal in $\mathscr{S}(A) \times \mathscr{S}(A)$. K_0 has the following obvious properties:

(1) K_0 is a homotopy functor ($K_0(\varphi) = K_0(\psi)$ if φ, $\psi: A \to B$ are two $*$-homomorphisms that are homotopic in the topology of pointwise convergence).

(2) There is a natural isomorphism $K_0(A \oplus B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B)$.

(3) The map $a \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ induces an isomorphism $K_0(A) \to K_0(M_2(A))$.

For a not necessarily unital C^*-algebra A, we adjoin a unit to obtain $\tilde{A}$, see 1.12, and take $K_0(A)$ as the kernel of the natural map $K_0(\sigma): K_0(\tilde{A}) \to K_0(\mathbb{C})$ induced by $\sigma: \tilde{A} \to \mathbb{C}$. If A already had a unit e then $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}(1-e)$ and the two definitions of K_0 coincide by (2). Moreover, the new K_0 obviously still satisfies (1), (2) and (3).

Elements of $K_0(A)$ can be described as images of pairs $([p], [1_{2^k}])$ with $[\sigma(p)] = [1_{2^k}]$ in $\mathscr{S}(A) \times \mathscr{S}(A)/\Delta$ where 1_{2^k} is the unit matrix in $M_{2^k}(\tilde{A})$. In fact, if $([p], [q])$ represents an element in $K_0(A)$ and $p, q \in M_{2^k}(\tilde{A})$ then

$$\left(\left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1_{2^k} - q \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1_{2^k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\right)$$

represents the same element.

Proposition 2.4. *Let* $0 \to J \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} A/J \to 0$ *be an exact sequence of* C^**-algebras. Then*

$$K_0(J) \xrightarrow{K_0(j)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(A/J)$$

is exact.

Proof: One has $K_0(\pi)K_0(j) = K_0(\pi j) = 0$.

If $([p], [1_{2^k}])$ represents an element of $K_0(A)$ whose image in $K_0(A/J)$ is 0 we may (after adding to $(p, 1_{2^k})$ some $(1_{2^j}, 1_{2^j})$ if necessary) assume that $\pi(p) \sim 1_{2^k}$.

By Lemma 2.2 there is $u \in U_0(M_{2^k}(A/J^\sim))$ such that $u\pi(p)u^* = 1_{2^k}$. By Lemma 2.1 there is $w \in U_0(M_{2^k}(\tilde{A}))$ such that $\pi(w) = u$. We have $([p], [1_{2^k}]) = ([wpw^*], [1_{2^k}])$ in $K_0(A)$ and $\pi(wpw^* - 1_{2^k}) = 0$ so that $wpw^* \in M_{2^k}(\tilde{J})$. □

If X is a locally compact space and A a C^*-algebra we write $A(X)$ (or AX) for the C^*-algebra $\mathscr{C}_0(X, A)$ of continuous A-valued functions f on A for which $f(\infty)=0$. The cone CA over A is the algebra $A[0,1)$. It is obviously contractible (the identity automorphism is homotopic to 0 in the space of endomorphisms of $A[0,1)$) so that $K_0(CA)=0$. If $\alpha: A \to B$ is a *-homomorphism, then the mapping cone C_α is defined as the subalgebra $\{(x,y) \mid \alpha(x)=y(0)\}$ of $A \oplus B[0,1)$ while the mapping cylinder Z_α is the subalgebra $\{(x,y) \mid \alpha(x)=y(0)\}$ of $A \oplus B[0,1]$. There is an obvious exact sequence $0 \to C_\alpha \to Z_\alpha \to B \to 0$.

There are natural maps $C_\alpha \to A$, $Z_\alpha \to A$ (given by projection onto the first factor). The map $Z_\alpha \to A$ is a homotopy equivalence with homotopy inverse $x \to (x, \alpha(x))$, $x \in A$.

Proposition 2.5. *The short exact sequence* $K_0(C_\alpha) \to K_0(A) \xrightarrow{K_0(\alpha)} K_0(B)$ *is exact.*

Proof: The diagram

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_\alpha) & \to & K_0(Z_\alpha) & \to & K_0(B) \\ \| & & \downarrow\cong & & \| \\ K_0(C_\alpha) & \to & K_0(A) & \to & K_0(B) \end{array}$$

is commutative and the first row is exact by 2.4. □

For the next proposition we write SA for $A(0,1)$. The algebra SA is the "suspension" of A.

Proposition 2.6. *Let* $0 \to J \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ *be an exact sequence of* C^**-algebras.*

(a) *There is a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & J & \to & A & \to & B & \to & 0 \\ & & e\downarrow & & \| & & & & \\ 0 & \to & SB & \to & C_\pi & \to & A & \to & 0 \end{array}$$

with exact rows, where e is the natural inclusion of J in C_π *defined by* $e(x)=(x,0)$.

(b) $K_0(C_e)=0$ *and* $K_0(e): K_0(J) \to K_0(C_\pi)$ *is an isomorphism.*

(c) *There is a long exact sequence*

$$\ldots \to K_0(SJ) \xrightarrow{K_0(Sj)} K_0(SA) \xrightarrow{K_0(S\pi)} K_0(SB) \to K_0(J) \xrightarrow{K_0(j)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(B).$$

Proof: (a) Obvious.

(b) C_e is isomorphic to $\{f:[0,1] \to C_\pi \mid f$ continuous, $f(0) \in J = e(J)$, $f(1)=0\}$. The exact sequence $0 \to CJ \to C_e \to SCB \to 0$ shows that $K_0(C_e)=0$ by 2.4. Thus $K_0(e)$ is injective by 2.5 and surjective because of the exact sequence $0 \to J \xrightarrow{e} C_\pi \to CA \to 0$.

(c) Combining (a) and (b) one obtains the exact sequence $K_0(SB) \to K_0(C_\pi) \cong K_0(J) \to K_0(A) \to K_0(B)$. Applying the same argument to the exact sequences $0 \to SB \to C_\pi \to A \to 0$ and $0 \to SJ \to SA \to SB \to 0$ we obtain the asserted exact sequence, provided we can show that the map $K_0(SA) \to K_0(SA)$ induced by this construction is actually $K_0(S\pi)$. Inspection shows that this follows from the commutativity, up to homotopy, of the diagram

$$\begin{array}{ccc} & SA & \\ -S\pi & \downarrow & \searrow \\ & SB & \to C_\varrho \end{array}$$

where ϱ is the quotient map in the exact sequence $0 \to SB \to C_\pi \to A \to 0$, and $-S\pi$ is $S\pi$ composed with the automorphism of SA which reverses the orientation of $(0, 1)$. □

The group $K_0(SA)$ can be described in a different way. It will be denoted by $K_1(A)$.

Proposition 2.7. *There is a natural isomorphism* $K_0(SA) \cong U(M_\infty(A)^\sim)/U_0(M_\infty(A)^\sim)$.

Proof: An element of $K_0(SA)$ is represented by a pair $(p, 1_{2^k})$ where p is a projection in $M_{2^{k+1}}(SA^\sim)$. Now $M_{2^{k+1}}(SA^\sim)$ is isomorphic to the algebra of functions

$$\{f \in M_{2^{k+1}}(\tilde{A})[0, 1] | f(0), f(1) \in M_{2^{k+1}}(\mathbb{C})\}.$$

Thus p is a continuous path p_t of projections in $M_{2^{k+1}}(\tilde{A})$ and one may assume that $p(0) = p(1) = 1_{2^k}$. By Lemma 2.2 (a), (b) there are (nearly) canonical unitaries u_t, $t \in [0, 1]$ in $M_{2^{k+1}}(\tilde{A})$ such that $u_t p_0 u_t^* = p_t$. Then $w = 1_{2^k} u_1 1_{2^k} + (1 - 1_{2^k})$ is a unitary in $M_\infty(A)^\sim$. The verification that the map $([p], [1_{2^k}]) \to [w]$ induces an isomorphism is straightforward. We omit it since we don't really need this proposition in the sequel. □

The last property of K_0, K_1 that we need, is continuity, i.e. compatibility with inductive limits. Recall that if

$$G_0 \xrightarrow{\varphi_0} G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots$$

is an inductive system of groups, then the inductive limit $\varinjlim_{\varphi_n} G_n$ is defined as the quotient of the group

$$\{(g_n)_{n \geqslant 0} | g_n \in G_n, \exists\, N \text{ such that } \varphi_n(g_n) = g_{n+1}, n \geqslant N\}$$

by the normal subgroup

$$\{(g_n)_{n \geqslant 0} | g_n \in G_n, \exists\, N \text{ such that } g_n = e, n \geqslant N\}.$$

If $A_0 \xrightarrow{\varphi_0} A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots$ is an inductive system of C^*-algebras then the C^*-algebra inductive limit $\varinjlim_{\varphi_n} A_n$ is defined as the completion with respect to the norm $\|(x_n)\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|$ of the quotient of

$$\{(x_n)_{n \geqslant 0} | x_n \in A_n, \exists\, N \text{ such that } x_{n+1} = \varphi_n(x_n), n \geqslant N\}$$

by the closed subalgebra

$$\{(x_n)_{n\geqslant 0} \mid x_n \in A_n,\ \exists\, N \text{ such that } x_{n+1} = \varphi_n(x_n),\ n \geqslant N \text{ and } \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0\}$$

Thus, this quotient A_∞ is a dense subalgebra of $\varinjlim A_n$.

Proposition 2.8. *There is a natural isomorphism* $K_0\left(\varinjlim_{\varphi_n} A_n\right) \cong \varinjlim_{K_0(\varphi_n)} K_0(A_n)$.

Proof: Replacing A_n by $\tilde{A}_n$ we may assume that A_∞ and $\varinjlim A_n$ are unital. If p is a projection in $M_\infty(A_n)$ and $x = x^* \in M_\infty(A_\infty)$ such that $\|p-x\| < \varepsilon$ (ε a sufficient small universal constant) then $\|x^2 - x\| < \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{2} \notin \operatorname{Sp} x$. Thus $f(x)$ with $f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{2} \\ 1 & t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$ is a projection in $M_\infty(A_\infty)$ of distance <1 to p. Thus $p \sim f(x)$ by 2.2 and we may assume that $p \in M_\infty(A_\infty)$. If p is a projection in $M_\infty(A_\infty)$ then p is represented by a sequence $(x_k)_{k\geqslant 0}$ such that $\|x_k^2 - x_k\| \to 0$, $x_k = x_k^*$. Then $\|x_k - f(x_k)\| \to 0$ and the map $[p] \to ([f(x_k)])$ gives the required isomorphism. □

Let us apply this proposition to the inductive system

$A \to M_2(A) \to M_4(A) \to \ldots$

Its inductive limits is the completion of $M_\infty(A)$. The completion of $M_\infty(\mathbb{C})$ clearly is the algebra $\mathcal{K}$, cf. 1.5, and the completion of $M_\infty(A)$ can be described as $\mathcal{K} \otimes A$.

Corollary 2.9. *The natural inclusion* $A \to \mathcal{K} \otimes A$ *induces an isomorphism* $K_0(A) \to K_0(\mathcal{K} \otimes A)$.

Proof: By 2.8 one only has to show that the natural inclusion $A \to M_2(A)$ induces an isomorphism $K_0(A) \to K_0(M_2(A))$, see property (3) above. This is obvious for a unital algebra A and results in the general case from a commutative diagram involving $M_2(\tilde{A})$ and $M_2(A)^\sim$. □

For concrete computations, in general one does not need the actual definition of K_0, K_1 but only the abstract properties of the functor. In particular, computations of K-groups can, in principle, be deduced from the following three properties of K_0:

1) K_0 is homotopy invariant,
2) K_0 is stable, i.e. it satisfies the conclusion in Corollary 2.9,
3) K_0 is half-exact, i.e. it satisfies the conclusion of Proposition 2.4.

In fact, these three properties, together with the normalization $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ determine K_0 and K_1 on a very large class of C^*-algebras.

In practice however, one uses for computations some very powerful additional techniques (which in principle can be deduced from the three properties above), most notably the Kasparov product, cf. sections 3 and 4, and the Pimsner-Voiculescu sequence, section 4. Thanks to these techniques the K-groups and more generally the KK-groups can be computed in most cases of interest. For instance, for the non-commutative torus A_θ in 1.9 one has $K_0(A_\theta)=\mathbb{Z}^2$, $K_1(A_\theta)=\mathbb{Z}^2$. Note that this is the same as the K-theory of the commutative 2-torus. For the algebra $SU_\mu(2)$ in 1.10 one has $K_0(SU_\mu(2))=\mathbb{Z}$, $K_1(SU_\mu(2))=\mathbb{Z}$. Again this is the same as the K-theory of the commutative algebra $\mathscr{C}(SU(2))=SU_1(2)$.

3 KK-Theory and Universal Algebras

Kasparov based his theory on certain bimodules – now called Kasparov modules. Given two C^*-algebras A and B, an even Kasparov module is a triple $(\mathscr{E}, F, G)$ where

1) $\mathscr{E}$ is a (countably generated) Hilbert space over B, i.e. it is a right B-module which admits a scalar product with values in B and is complete. (In the special case, where $B=\mathscr{C}_0(X)$, $\mathscr{E}$ may be viewed as a field, i.e. a not necessarily locally trivial bundle, of Hilbert spaces over X.)

2) A is represented (as a $*$-algebra) by bounded operators on $\mathscr{E}$.

3) F is a bounded operator on $\mathscr{E}$ such that, for each $x\in A$, the expressions $(F^2-1)x$, $(F-F^*)x$, $Fx-xF$ are all compact operators on $\mathscr{E}$.

4) G is a bounded operator on $\mathscr{E}$ such that $G^2=1$, $G=G^*$, $GF=-FG$, $Gx=xG$ for all $x\in A$.

An odd Kasparov module is a pair $(\mathscr{E},F)$ satisfying only 1), 2), 3). Then $KK(A,B)$ (resp. $KK_1(A,B)$) can be defined as the set of homotopy classes of even (resp. odd) Kasparov $A-B$ modules. These are abelian groups with the addition coming from the direct sum of Kasparov modules. Kasparov modules are very flexible receptacles for all kind of information. The most diverse objects and situations give rise to Kasparov modules. This is the case for vector bundles, elliptic operators, extensions of C^*-algebras, homomorphisms between algebras and many other things. But it was soon recognized that the relevant information in a Kasparov module is contained already in a relatively small part of it and that for manipulating Kasparov modules it is often more convenient to retain only this information.

We sketch now the approach to KK-theory introduced in [9]. For complete proofs we refer to [9]. We are going to use a universal algebra (or ring) qA associated to a C^*-algebra (or to a general ring) A.

Given a C^*-algebra A, we define the C^*-algebra free product $A*A$ as in 1.10. For a ring A, the free product $A*A$ is defined in the usual way.

There are two natural inclusions $\iota,\bar\iota:A\to A*A$ and the free product has the universal property that for any pair α, β of homomorphisms ($*$-homomorphisms in the C^*-algebra case) from A into B there exists a unique homomorphism $\alpha*\beta:A*A\to B$ such that $(\alpha*\beta)\iota=\alpha$ and $(\alpha*\beta)\bar\iota=\beta$. For $x\in A$ we write $q(x)$ or qx for the element $\iota(x)-\bar\iota(x)$ of $A*A$.

Definition 3.1. If A is a ring, qA is the (two-sided) ideal generated by $q(x)$, $x\in A$ in $A*A$. If A is a C^*-algebra, qA is the closed ideal generated by $q(x)$, $x\in A$ in the C^*-algebra free product $A * A$ (thus qA is a C^*-algebra). In both cases qA can be described as the kernel of the map $\mathrm{id} * \mathrm{id} : A * A \to A$.

Now, qA obviously has the following universal property: if $\alpha, \beta : A \to B$ is a pair of homomorphisms and J is an ideal (closed in the C^*-algebra case) in B such that $\alpha(x) - \beta(x) \in J$ for all $x \in A$, then there is a unique homomorphism $\alpha * \beta : qA \to J$ such that $\alpha * \beta(q(x)) = \alpha(x) - \beta(x)$, $x \in A$ and $\alpha * \beta(xy) = \alpha(x)(\alpha * \beta)(y)$ for $x \in A$, $y \in qA$.

We note that any even Kasparov $A - B$ module $(\mathscr{E}, F, G)$ where $F = F^*$, $F^2 = 1$ (this can always be assumed) induces a homomorphism from qA to the ideal $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ of compact operators on $\mathscr{E}$ by setting $\alpha(x) = \frac{1}{2}(1 + G)x$, $\bar{\alpha}(x) = \frac{1}{2}(1 + G)FxF$.

The restrictions of the natural maps $\mathrm{id} * 0$, $0 * \mathrm{id} : A * A \to A$ define maps $\pi_0, \pi_1 : qA \to A$, respectively.

We formulate the following proposition for K_0 but it holds, with the same proof, for much more general functors (in particular of course for K_1).

Proposition 3.2. *Let A be a C^*-algebra.*

(a) *The maps* $\mathrm{id} * 0 \oplus 0 * \mathrm{id} : A * A \to A \oplus A$ *and* $(x, y) \to \begin{pmatrix} \imath(x) & 0 \\ 0 & \bar{\imath}(y) \end{pmatrix}$ *from $A \oplus A$ to $M_2(A * A)$ induce isomorphisms inverse to each other, between $K_0(A * A) \cong K_0(M_2(A * A))$ and $K_0(A \oplus A) = K_0(A) \oplus K_0(A)$.*

(b) *There is a natural isomorphism $K_0(A * A) \cong K_0(qA) \oplus K_0(A)$.*

(c) *The map $K_0(\pi_0) : K_0(qA) \to K_0(A)$ is an isomorphism with inverse*

$$K_0(\imath) - K_0(\bar{\imath}) : K_0(A) \to K_0(qA) \subset K_0(A * A).$$

Proof: (a) The proof is based on the homotopy between the homomorphisms

$$\begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\imath} \end{pmatrix} \quad \text{and}$$

$$\begin{pmatrix} \imath * \bar{\imath} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \bar{\imath} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A * A \to M_2(A)$$

given by rotating $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\imath} \end{pmatrix}$ to $\begin{pmatrix} \bar{\imath} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

and the fact that the homomorphism $b \to \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ from B to $M_2(B)$ induces an isomorphism $K_0(B) \to K_0(M_2(B))$ for any B.

(b) This follows from 2.6 (c) and the split exact sequence $0 \to qA \to A * A \xrightarrow{\mathrm{id} * \mathrm{id}} A \to 0$ (a splitting $A \to A * A$ is given by $\imath$). The direct summand $K_0(qA)$ corresponds to the kernel of $K_0(\mathrm{id} * \mathrm{id})$ in $K_0(A * A)$, the second one to $K_0(\imath)K_0(A)$.

(c) This follows from (a) and (b). □

Using the C^*-algebra $q\mathbb{C}$ we can give an alternative description of $K_0(A)$. We denote, for two C^*-algebras A and B, by $[A,B]$ the set of homotopy classes of homomorphisms $A \to B$. For any A and B the set $[A, \mathcal{K} \otimes B]$ is an abelian semigroup with addition

$$[\varphi] + [\psi] = \left[\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} \right] \quad \text{where}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} : A \to M_2(\mathcal{K} \otimes B) \cong \mathcal{K} \otimes B$$

is the homomorphism that maps x to $\begin{pmatrix} \varphi(x) & 0 \\ 0 & \psi(x) \end{pmatrix}$.

Proposition 3.3. *For any C^*-algebra A the map that maps $[\varphi] \in [q\mathbb{C}, \mathcal{K} \otimes A]$ to $K_0(\varphi)(e) \in K_0(\mathcal{K} \otimes A) \cong K_0(A)$, e the canonical generator of $K_0(q\mathbb{C}) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong Z$ is an isomorphism. Its inverse maps an element of $K_0(A)$ represented by a pair $([p], [1_{2^k}])$, p a projection in $M_{2^{k+1}}(\tilde{A})$, cf. section 1, to $[\varphi_0 * \varphi_1]$ where φ_0, φ_1 are the homomorphisms $\mathbb{C} \to M_{2^{k+1}}(\tilde{A})$ mapping $1 \in \mathbb{C}$ to p resp. 1_{2^k} (note that $\varphi_0(1) - \varphi_1(1)$ is in the ideal $M_{2^{k+1}}(A)$ of $M_{2^{k+1}}(\tilde{A})$ and that $M_{2^{k+1}}(A) \subset \mathcal{K} \otimes A$).*

Proof: Straightforward. □

Note that under the identification of $K_0(A)$ with $[q\mathbb{C}, \mathcal{K} \otimes A]$, the inverse $-x$ of $x \in K_0(A)$ corresponds to $[\varphi \circ \tau]$ if x corresponds to φ, where τ is the restriction to $q\mathbb{C}$ of the automorphism of $\mathbb{C} * \mathbb{C}$ that exchanges the two copies of $\mathbb{C}$. We denote in general by τ the restriction to qA of the automorphism of $A * A$ that exchanges the two copies of A. Since $K_0(\tau)(K_0(\imath) - K_0(\bar{\imath})) = K_0(\bar{\imath}) - K_0(\imath)$, by 3.2 $K_0(\tau)$ acts as multiplication by -1 on $K_0(qA)$.

More generally, we have the following

Proposition 3.4. *In the abelian semigroup $[qA, \mathcal{K} \otimes B]$ one has $[\varphi] + [\varphi\tau] = [0]$ and $[\varphi] + [0] = [\varphi]$. In particular $[qA, \mathcal{K} \otimes B]$ is an abelian group.*

Proof: For the first assertion it suffices to show that $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} : qA \to M_2(qA)$ is homotopic to 0. The homotopy is given by rotating in the map $\begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & \bar{\imath} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \bar{\imath} & 0 \\ 0 & \imath \end{pmatrix} : A * A \to M_2(A * A)$ the second factor to $\begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & \bar{\imath} \end{pmatrix}$. The second assertion follows from the well known fact that the canonical inclusion $\mathcal{K} \otimes A \to M_2(\mathcal{K} \otimes A) \cong \mathcal{K} \otimes A$ is homotopic to the identity of $\mathcal{K} \otimes A$. □

Given two C^*-algebras A and B, we define $KK(A,B)$ to be the group $[qA, \mathcal{K} \otimes B]$.

Remark. It is important to take $\mathcal{K} \otimes B$ rather than $M_\infty(B)$ in the definition of $KK(A,B)$. For instance, it is not hard to show that the inverse Bott element in $KK(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2), \mathbb{C})$, see below, can not be realized by a homomorphism from

$q(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2))$ (or even $q^n(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2))$) to $M_k(\mathbb{C})$ for any k. Moreover, unlike $K_0, KK(A,\cdot)$ is not continuous for inductive limits in general.

The following theorem implies the existence of the Kasparov product $KK(A_1,A_2)\times KK(A_2,A_3)\to KK(A_1,A_3)$.

Theorem 3.5. *If A is separable, then the map $\pi_0: q^2A=q(qA)\to qA$ admits a homotopy inverse up to stabilization by 2×2-matrices. More specifically, there exists a homomorphism $\varphi_A: qA\to M_2(q^2(A))$ such that $\pi_0\varphi_A$ and $\varphi_A\pi_0$ are homotopic to the natural inclusions of qA and $q^2(A)$ into $M_2(qA)$ and $M_2(q^2A)$, respectively.*

For the proof, we refer to [9].

Given two C^*-algebras A and B it is easy to see that the map

$$[A, \mathscr{K}\otimes B]\ni[\alpha]\to[\mathrm{id}_{\mathscr{K}}\otimes\alpha]\in[\mathscr{K}\otimes A, \mathscr{K}\otimes\mathscr{K}\otimes B]\cong[\mathscr{K}\otimes A, \mathscr{K}\otimes B]$$

is an isomorphism. Theorem 3.5 allows us to do the same argument for q in the place of $\mathscr{K}\otimes$.

In fact, if A and B are C^*-algebras and $[\alpha]$ is an element of $KK(A,B)$ (thus α a homomorphism $qA\to\mathscr{K}\otimes B$), we can define the homomorphism $q(\alpha): q(qA)\to q(\mathscr{K}\otimes B)$ (q is a covariant functor). Moreover there is a natural surjection $(\mathscr{K}\otimes B)*(\mathscr{K}\otimes B)\to\mathscr{K}\otimes(B*B)$ (identifying the two copies of $\mathscr{K}$), thus also a surjection $\varrho: q(\mathscr{K}\otimes B)\to\mathscr{K}\otimes qB$. The composition $M_2(\varrho q(\alpha))\varphi_A$ is a homomorphism $qA\to M_2(\mathscr{K}\otimes qB)\cong\mathscr{K}\otimes qB$. We obtain the following

Proposition 3.6. *$KK(A,B)$ is isomorphic to $[\mathscr{K}\otimes qA, \mathscr{K}\otimes qB]$.*

The proof that the map constructed above actually induces an isomorphism is not very difficult.

The (associative) product $KK(A_1,A_2)\times KK(A_2,A_3)\to KK(A_1,A_3)$ is now obvious. Moreover, every homomorphism $\alpha: A\to B$ induces an element $KK(\alpha)=[\mathrm{id}_{\mathscr{K}}\otimes q(\alpha)]$ of $KK(A,B)$ in such a way that $KK(\alpha)KK(\beta)=KK(\alpha\beta)$. We thus obtain a category KK whose objects are separable C^*-algebras and whose morphisms are $KK(A,B)$ and a functor from the category of separable C^*-algebras with ordinary morphisms (*-homomorphisms) into this new category. In particular, $KK(A,B)$ is a covariant functor in B and a contravariant functor in A. By construction $KK(\mathbb{C},B)$ is equal to $K_0(B)$.

4 Higher KK-Groups and Some Applications of the Product

In this section we describe some of the techniques that allow to compute the K- and KK-groups, in particular the long exact sequences and Bott periodicity.

We follow here [11].

There is one easily obtained long exact sequence, namely the Puppe sequence. For this let $\omega: A\to B$ be a homomorphism of C^*-algebras and $C_\omega\subset A\oplus B[0,1)$ the mapping cone, cf. section 2. Recall that there is an exact sequence

$$0\to B(0,1)\xrightarrow{i} C_\omega\xrightarrow{p} A\to 0.$$

Proposition 4.1. *For any C^*-algebra D, there is a long exact sequence*

$$\ldots \to KK((D, C_\omega(0,1)) \overset{p_*}{\to} KK(D, A(0,1)) \overset{\omega_*}{\to} KK(D, B(0,1)) \overset{i_*}{\to} KK(D, C_\omega) \overset{p_*}{\to} KK(D,A) \overset{\omega_*}{\to} KK(D,B).$$

Proof: Since C_p is homotopy equivalent to $B(0,1)$ and C_i is homotopy equivalent to $A(0,1)$ it suffices to prove exactness at $KK(D,A)$.
If $\varphi: qD \to \mathcal{K} \otimes A$ is a homomorphism such that $\omega\varphi$ is homotopic to 0 via a homotopy $\psi_t: qD \to \mathcal{K} \otimes B$, $t \in [0,1]$ then $\{\psi_t)$ gives rise to a homomorphism $\psi: qD \to \mathcal{K} \otimes B[0,1]$ and $\sigma = \varphi \oplus \psi$ defines a homorphism $qD \to \mathcal{K} \otimes C_\omega$ for which $p\sigma = \varphi$. □

We say that a short exact sequence $0 \to J \to A \to B \to 0$ of C^*-algebras is semi-split, if there exists a "complementary" exact sequence $0 \to \mathcal{K} \otimes J \to \bar{A} \to B \to 0$ such that, for the C^*-algebras of formal 2×2-matrices

$$E = \begin{pmatrix} A & J(\mathcal{K} \otimes J) \\ (\mathcal{K} \otimes J)J & \bar{A} \end{pmatrix} \qquad J' = \begin{pmatrix} J & J(\mathcal{K} \otimes J) \\ (\mathcal{K} \otimes J)J & \mathcal{K} \otimes J \end{pmatrix}$$

(we use here the natural embedding $J \to \mathcal{K} \otimes J$), there exists a homorphism $\varphi: B \to E$ such that $\pi\varphi(x) = (x,x)$ where $\pi: E \to E/J' \cong B \oplus B$ is the quotient map. It is well known that many if not most exact sequences of C^*-algebras are semi-split. We will see that, for a semi-split exact sequence of separable C^*-algebras $0 \to J \to A \overset{\omega}{\to} B \to 0$ the algebras C_ω and J are isomorphic in the category KK, i.e. there is an invertible element in $KK(J, C_\omega)$. In view of 4.1, this gives the long exact sequence in the second variable of KK (we can replace, in 4.1, $KK(D, C_\omega)$ by $KK(D,J)$).

To start with, we can associate with every semi-split exact sequence $\varrho: 0 \to J \to A \to B \to 0$ a pair of homomorphisms φ, $\bar{\varphi}: B \to \mathcal{K} \otimes J[0,1]$ defining a homomorphism $\varrho': qB \to \mathcal{K} \otimes J(0,1)$ in the following way. Let $\varphi: B \to E$ be a cross-section as above. Write $\varphi(x)(t) \equiv \varphi(x)$ and $\bar{\varphi}(x)(t) = F_t\varphi(x)F_t^{-1}$ where $x \in B$, $t \in [0,1]$ and

$$F_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i t} \end{pmatrix}.$$

The Bott element $\beta = [\sigma'] \in KK(\mathbb{C}, \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2))$ is the element obtained from the semi-split exact sequence $\sigma: 0 \to \mathbb{C}(0,1) \to \mathbb{C}[0,1) \to \mathbb{C} \to 0$ (identifying $\mathbb{R}$ with $\mathbb{C}(0,1)$).

Explicitly, $\sigma': q\mathbb{C} \to M_2(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2))$ is given by the pair $p, \bar{p}$ of projections in $M_2(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2)^\sim)$ (corresponding to homomorphisms from $\mathbb{C}$ into this algebra) where

$$p(z) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{p}(z) = W(z)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W(z)^*$$

$$\text{with} \quad W(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}}\begin{pmatrix} z & 1 \\ -1 & \bar{z} \end{pmatrix}, \qquad z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2.$$

The inverse Bott element $\alpha \in KK(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2), \mathbb{C})$ is represented by the homomorphism $q(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2)) \to M_2(\mathscr{K}(L^2(\mathbb{R}^2)))$ obtained from the pair of homomorphisms μ, $\bar{\mu}: \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2) \to M_2(\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^2)))$

$$\mu(f) = \begin{pmatrix} \mu_0(f) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{\mu}(f) = \hat{W} \begin{pmatrix} \mu_0(f) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{W}^*$$

$$\text{with} \quad \hat{W} = \frac{1}{\sqrt{1-\partial\bar{\partial}}} \begin{pmatrix} \bar{\partial} & 1 \\ 1 & \partial \end{pmatrix}, \qquad \partial = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}, \qquad \bar{\partial} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$$

and $\mu_0(f)$ multiplication by $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2)$ on $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Showing that $\alpha\beta \in KK(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ is equal to $KK(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ boils down to showing that the operator

$$\frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}\sqrt{1-\partial\bar{\partial}}} \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \bar{\partial} & 0 \end{pmatrix}$$

on $L^2(\mathbb{R}^2) \oplus L^2(\mathbb{R}^2)$ has index 1. This follows from the fact that this operator is "half" of the Euler characteristic operator on the 2-sphere S^2, cf. [17].

In the following we will denote by α_A, β_A the elements $\mathrm{id}_A \otimes \alpha$, $\mathrm{id}_A \otimes \beta$ of $KK(A(\mathbb{R}^2), A)$, $KK(A, A(\mathbb{R}^2))$ (thus α_A is obtained by the composition $q(A \otimes \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2)) \to A \otimes q(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2)) \to A \otimes \mathscr{K}$).

Let us return to the semi-split exact sequence $0 \to J \to A \xrightarrow{\omega} B \to 0$. Let $e: J \to C_\omega$ be the natural inclusion, cf. 2.6.

Theorem 4.2. *The element $KK(e)$ of $KK(J, C_\omega)$ is invertible. Its inverse is given by $u = \alpha_J[\sigma']$ where $\sigma: 0 \to J(0,1) \to A[0,1) \to C_\omega \to 0$.*

Proof: The fact that $uKK(e) = KK(\mathrm{id}_J)$ follows from the fact that $\alpha\beta = KK(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$. Consider now the exact sequence

$$0 \to C_e \to C_\omega[0,1] \xrightarrow{\varphi} B[0,1] \to 0$$

where $\varphi = \pi_0 p_0$, $p_0: C_\omega[0,1] \to C_\omega$ evaluation at 0 and $\pi: C_\omega \to B[0,1]$ defined by $\pi((x,f)) = f$. Repeating the argument at the beginning of the proof for φ in place of ω one sees that for any separable D the map $KK(D, C_e) \to KK(D, C_\varphi)$ is injective. But, by 4.1, $KK(D, C_\varphi) = 0$ whence $KK(D, C_e) = 0$. Again by 4.1, one sees that $KK(S^2 e) \in KK(J((0,1)^2), C_\omega((0,1)^2))$ is invertible (we write $S^2 e$ for the homomorphism $J((0,1)^2) \to C_\omega((0,1)^2)$ induced by e).
Since $\alpha\beta = KK(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$, we know that $KK(J((0,1)^2), C_\omega((0,1)^2))$ and $KK(C_\omega((0,1)^2), J((0,1)^2))$ contain $KK(J, C_\omega)$ and $KK(C_\omega, J)$, respectively, as direct summands. Since $KK(S^2 e)$ respects this direct sum decomposition, one sees that $KK(e)$ is invertible (with inverse u since u is a left inverse). □

Corollary 4.3. *For any separable D there is a long exact sequence*

$$\ldots \to KK(D, J(0,1)) \to KK(D, A(0,1)) \to KK(D, B(0,1)) \to KK(D, J)$$
$$\to KK(D, A) \to KK(D, B).$$

Proof: Combine 4.1 with 4.2. □

Consider now the universal C^*-algebra $C^*(v)$ with one generator v and relation $v^*v=1$, cf. 1.6. Recall that there is an exact sequence

$$0 \to \mathscr{K} \to C^*(v) \to \mathscr{C}(S^1) \to 0.$$

If $\hat{C}$ is the ideal generated by $1-v$ in $C^*(v)$ ($\hat{C}$ is a "dual cone"), then $\mathscr{K} \subset \hat{C}$ and we obtain a commutative diagram.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{K} & \to & \hat{C} & \to & \mathscr{C}_0((0,1)) & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathscr{K} & \to & C^*(v) & \to & \mathscr{C}(S^1) & \to & 0 \end{array}$$

with exact rows.

Proposition 4.4. *Let $\sigma: q\hat{C} \to \mathscr{K} \otimes \hat{C}$ be the composition of $\pi_0: q\hat{C} \to \hat{C}$ and of the natural inclusion $\hat{C} \to \mathscr{K} \otimes \hat{C}$. Then σ is homotopic to* 0.

Proof: It is not difficult to exhibit the homotopy explicitly (homomorphisms from universal algebras are often easy to construct!) We refer to [8] (4.2) for details. □

Since $[\sigma] \in KK(\hat{C}, \hat{C})$ represents $KK(\mathrm{id}_{\hat{C}})$ one sees that $KK(\hat{C} \otimes A, B) = KK(A, \hat{C} \otimes B) = 0$ for all A, B. From the exact sequence $0 \to \mathscr{K} \to \hat{C} \xrightarrow{\omega} \mathscr{C}_0((0,1)) \to 0$ one obtains, by 4.3, for any separable D the exact sequence

$$0 = KK(D, \hat{C}(0,1)) \to KK(D, \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{\partial} KK(D, \mathscr{K}) \to KK(D, \hat{C}) = 0.$$

Thus ∂ is an isomorphism.

On the other hand, ∂ is multiplication by the element of $KK(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2), \mathscr{K})$ that is obtained by composition in KK of the inclusion $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2) \to C_\omega$ and $u = [e]^{-1} \in KK(C_\omega, \mathscr{K})$, cf. 4.2. This composition is exactly the inverse Bott element α. The fact that ∂ is an isomorphism for all D, thus in particular for $D = \mathscr{K}$ and $D = \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^2)$ implies that α is invertible (with inverse β).

Corollary 4.5. (a) *Multiplication by β_B or α_A on the right or left gives isomorphism $KK(A,B) \cong KK(A, B(\mathbb{R}^2)) \cong KK(A(\mathbb{R}^2), B)$.*

(b) *"Tensoring" with $\mathrm{id}_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R})}$ gives an isomorphism $KK(A,B) \cong KK(A(\mathbb{R}), B(\mathbb{R}))$.*

Thus, we see that the exact sequences in 2.6 and 4.3 become periodic.

Using 4.5 one can now also deduce the Puppe sequence in the first variable of KK, see [11] for the argument.

Thus, using 4.3, one obtains the long exact sequence of 4.3 in the first variable.

Remark: With a semi-split exact sequence $\sigma: 0 \to J \to A \xrightarrow{\omega} B \to 0$ we associated above an element $[\sigma']$ of $KK(B, J(0,1))$. Under the identification $KK(B(0,1)) \cong KK(B, J(0,1))$ this element corresponds to the composition, in KK, of the inclusion $B(0,1) \to C_\omega$ and the element u of $KK(C_\omega, J)$.

The connecting map in the long exact sequence 4.3 is multiplication by this element of $KK(B, J(0,1))$, the connecting map in the long exact sequence for the first variable multiplication by $[\sigma']$.

The group $KK(A(0,1), B) \cong KK(A, B(0,1))$ is denoted $KK_1(A,B)$. It can also be defined as $KK_1(A,B) = [\varepsilon A, \mathscr{K} \otimes B]$ where $\varepsilon A = qA \rtimes_\tau \mathbb{Z}/2$, cf. [24).

Let us end this section with the description of another exact sequence that is quite useful in applications. Assume that α is an automorphism of a C^*-algebra A (unital for simplicity), and $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z} = C^*(A, u)$ the crossed product, cf. 1.8.

Let also $C^*(v)$ be the universal C^*-algebra with one generator v such that $v^* v = 1$, cf. 1.6. One can easily show for the C^*-subalgebra T_α of $C^*(A,u) \otimes C^*(v)$ generated by $A \otimes 1$ and $u \otimes v$, that there is an exact sequence

$$\varrho : 0 \to \mathscr{K} \otimes A \to T_\alpha \to A \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \to 0.$$

Using an argument analogous to 4.4 one can show that the inclusion $j: A \to A \otimes 1 \subset T_\alpha$ induces an invertible element $KK(j)$ in $KK(A, T_\alpha)$: Thus in the long exact sequence associated to ϱ one can replace T_α by A and one obtains the Pimsner-Voiculescu sequence

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \to & K_0(A) & \to & K_0(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) & \leftarrow & K_1(A) & \leftarrow & K_1(A) \end{array}$$

Inspection shows that the map $K_*(A) \to K_*(A)$ in this sequence is given by $\mathrm{id} - K_*(\alpha^{-1})$. Since ϱ is semi-split one obtains similar sequences for $KK_*(D, \cdot)$ and $KK_*(\cdot, D)$ (for a separable C^*-algebra D).

Applying the above sequence to $A_\theta = \mathscr{C}(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, cf. 1.9, one obtains for example $K_0(A_\theta) = \mathbb{Z}^2$ and $K_1(A_\theta) = \mathbb{Z}^2$ (note that $K_*(\mathscr{C}(S^1))$ is known: by 2.6 and 2.7 and Bott periodicity $K_0(\mathscr{C}(S^1)) \cong \mathbb{Z}$, $K_1(\mathscr{C}(S^1)) \cong \mathbb{Z}$).

5 Connections with Cyclic Cohomology

The algebraic constructions above involved in the definition of KK lead naturally to the introduction of cyclic cohomology [3, 6].

For this, let A be an algebra over $\mathbb{C}$ and define qA as in section 3.

Thus qA is the two-sided ideal generated by $q(x) = \iota(x) - \bar{\iota}(x)$ in the algebraic free product $A * A$. Now $q(x)$ satisfies the following relation

$$(Q)\, q(xy) = xq(y) + q(x)y - q(x)q(y), \qquad x, y \in A$$

(identifying x with $\iota(x)$). Conversely, if $q(x)$ is linear in x and satisfies (Q), then the map $x \to x - q(x)$ is a homomorphism. This shows that the free product $A * A$ which we denote in this section by QA, can be described as the universal algebra generated by elements x, $x \in A$ with relations of A, and symbols $q(x)$, $x \in A$ linear in x and satisfying (Q). Any element of QA can therefore be written uniquely as a linear combination of expressions of the form $x_0 qx_1 qx_2 \ldots qx_n$ or $qx_1 qx_2 \ldots qx_n$, $n \geqslant 0$. Any element of qA is a linear combination of such elements with $n \geqslant 1$. Moreover, if $(qA)^k$ is the ideal given by the k-th power of the ideal qA then any element of $(qA)^k$ is a linear combination of such elements with $n \geqslant k$.

Now, by definition, the K-homology group $K^0(A) = KK(A, \mathbb{C})$ is given by $[qA, \mathcal{K}]$ (this definition makes sense even if A is not a C^*-algebra. A homomorphism $\varphi: qA \to \mathcal{K}$ representing an element of $K^0(A)$ is also called a Fredholm module. It may happen, that φ is "p-summable" i.e. that the image of φ is contained in the Schatten l^p-class. If this is the case then the image of $(qA)^p$ under φ is contained in l^1, thus for $x \in (qA)^p$, $\operatorname{Tr}(\varphi(x))$ is defined, where Tr is the standard trace of l^1. But then $T = \operatorname{Tr} \circ \varphi$ defines a trace on $(qA)^p$, i.e.

$$T(\alpha\beta) = T(\beta\alpha) \quad \text{for} \quad \alpha \in (qA)^r, \beta \in (qA)^s \quad \text{with} \quad r + s = p.$$

Suppose now that $k = p - 1$ is even and write, for $x_0, \ldots, x_k \in A$,

$$g_T(x_0, x_1, \ldots, x_k) = T(qx_0 qx_1 \ldots qx_k).$$

Then g_T is a $k+1$-linear form on A satisfying

(a) $\lambda g_T = g_T$,

(b) $b g_T = 0$.

Here, $\lambda h(x_0, \ldots, x_n) = (-1)^n h(x_n, x_0, \ldots, x_{n-1})$ for any $n+1$-linear form h, while b is the Hochschild boundary operator

$$\begin{aligned} bh(x_0, \ldots, x_{n+1}) &= h(x_0 x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) - h(x_0, x_1 x_2, \ldots, x_{n+1}) + \ldots \\ &+ (-1)^n h(x_0, \ldots, x_n x_{n+1}) + (-1)^{n+1} h(x_{n+1} x_0, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Property (a) of g_T is obvious. Property (b) is easily proved using the relation (Q).

Thus, g_T is a "cyclic cocycle", i.e. a cocycle in the Connes complex

$$C_\lambda^0(A) \xrightarrow{b} C_\lambda^1(A) \xrightarrow{b} C_\lambda^2(A) \to \ldots$$

defined by $C_\lambda^n(A) = \{h \mid h \text{ is an } n+1\text{-linear form on } A \text{ such that } \lambda h = h\}$.

The cyclic cohomology $H_\lambda^*(A)$ is by definition the cohomology of the Connes complex.

There exists a periodicity operator

$$S: H_\lambda^n(A) \to H_\lambda^{n+2}(A).$$

Theorem 5.1 [6]. *For $p \in \mathbb{N}$, let $T_p(A)$ be the set of traces on $(qA)^p$ and $\varrho: T_p(A) \to T_{p+1}(A)$ the restriction map. Then*

(a) $T_{p+1}(A)/\varrho T_p(A) = \begin{cases} 0 & \text{if } p \text{ is odd}, \\ H_\lambda^p(A)/S H_\lambda^{p-2}(A) & \text{if } p \text{ is even}. \end{cases}$

(b) $H_\lambda^p(A) = T_{p+1}(A)/\varrho^p\{$*traces on qA such that $T(q(x)) = 0$, $x \in A$*$\}$ *if p is even.*

(c) *The operator $S: H_\lambda^p(A) \to H_\lambda^{p+2}(A)$ is the map induced by the restriction map ϱ^2.*

The isomorphisms in (a) and (b) are induced by the map that associates the class of g_T to $T \in T_{p+1}(A)$, p even.

This description of cyclic cohomology is useful in particular in connection with the notion of positivity for cyclic cocycles on a C^*-algebra A. If A is involutive, then so is qA and a positive trace on $(qA)^{2p}$ is a trace T for which $T(\alpha^*\alpha) \geqslant 0$; $\alpha \in (qA)^p$, cf. [6]. One can show that under certain natural assumptions on A, a positive trace on $(qA)^{2p}$ gives rise to a KK-element, [6].

One can go much further in this direction and use the algebra $QA = A * A$ to obtain a description of cyclic cohomology which can really be viewed as the non-commutative version of de Rham theory [4, 10]. For this let A be an algebra (not necessarily with any topology) and ΩA the universal differential graded algebra over A. By definition, ΩA is generated by A together with symbols $\mathrm{d}x$, $x \in A$, which are linear in x and satisfy $\mathrm{d}(xy) = x\mathrm{d}y + \mathrm{d}(x)y$. It carries a graded derivation d.

We modify the multiplication in ΩA and introduce a new product by

$$\omega_1 \circ \omega_2 = \omega_1\omega_2 - (-1)^{|\omega_1|}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2.$$

This product has been used by Fedosov on ordinary differential forms [13]. Surprisingly, it turns out that ΩA with this new product is isomorphic to QA, where $\mathrm{d}x$ corresponds to qx, [6, 10]. Let $\hat{Q}A$ denote the adic completion with respect to the ideal $qA \subset QA$: $\hat{Q}A = \varprojlim_n QA/(qA)^n$. We introduce the following $\mathbb{Z}/2$-graded complex $X(\hat{Q}A)$, [10]

$$\hat{Q}A \underset{\beta}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} \Omega^1(\hat{Q}A)_\#$$

where $\Omega^1(\hat{Q}A)$ is the degree 1 part in $\Omega(\hat{Q}A)$, i.e. the 1-forms over $\hat{Q}A$, and $\#$ denotes the quotient by supercommutators with respect to the $\mathbb{Z}/2$-grading of $\hat{Q}A$. Moreover, $\delta(\omega) := (\mathrm{d}\omega)_\#$, $\beta((\alpha\mathrm{d}\beta)_\#) := [\alpha, \beta]$ (supercommutator). The periodic cyclic homology of A can now be defined as the homology of $X(\hat{Q}A)$ divided by the subcomplex given by the image of $X(A)$ under the map that maps an element of $X(A)$ to its odd part (with respect to the grading of $\hat{Q}A$) in $X(\hat{Q}A)$. Thus, since the image of β consists of all sums of supercommutators, periodic cyclic *cohomology* can be viewed as the space of all supertraces on $\hat{Q}A$ divided by formal derivatives of supertraces. This description makes the homotopy invariance of periodic cyclic homology immediate. Periodic cyclic homology can be described as the space of all closed elements $\omega \in \hat{Q}A$ (i.e. $\mathrm{d}\omega$ is a sum of supercommutators) divided by all sums of supercommutators. This gives rise to a very natural and useful description of characteristic classes as elements of $\hat{Q}A$. Let $u \in A$ be invertible and let $f \in A$ satisfy $f^2 = 1$. Let moreover $u = \iota(u)$, $\bar{u} = \bar{\iota}(u)$, $f = \iota(f)$, $\bar{f} = \bar{\iota}(f)$ be the canonical images of these elements in $\hat{Q}A$. Then the characteristic classes corresponding to u and f are given by

$$\log(u^{-1}\bar{u}) \quad \text{and} \quad \frac{p(f)}{\sqrt{p(f)^2}}$$

where $p(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ (the corresponding power series converge in $\hat{Q}A$). Periodic cyclic cohomology can be described either by the even or by the odd part of $X(\hat{Q}A)$. Let $\hat{R}A$ be the even part (with respect to the natural $\mathbb{Z}/2$-grading of $\hat{Q}A$. In the case where $A = \mathscr{C}^\infty(M)$, M a compact $\mathscr{C}^\infty$-manifold there are natural maps $\hat{R}A \to \Omega^{\text{even}}M$, $(\Omega^1\hat{R}A)_\# \to \Omega^{\text{odd}}M$, where $\Omega^{\text{even}}M$, $\Omega^{\text{odd}}M$, are the even, resp. odd ordinary differential forms, giving rise to the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \hat{R}A & \underset{\beta}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} & (\Omega^1\hat{R}A)_\# \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{\text{even}}M & \underset{2d}{\overset{(n+2)d}{\rightleftarrows}} & \Omega^{\text{odd}}M \end{array}$$

(n = degree). The characteristic classes defined above then correspond to the usual Chern classes, after normalizing the de Rham complex (from $(n+2)d$, $2d$ to d).

6 The structure of $q\mathbb{C}$

The reader might wonder what qA looks like, at least in the simplest case where $A = \mathbb{C}$. It turns out, that $q\mathbb{C}$ can be described very explicitly and that its structure is closely related to the suspension operation in topology. It also is the natural frame for some of the constructions in Quillen's work on superconnections [20] (it is an ideal in the C^*-algebra of the dihedral group). The free product $\mathbb{C} * \mathbb{C}$ is the universal C^*-algebra with two generators p and $\bar{p}$ and relations $p = p^* = p^2$, $\bar{p} = \bar{p}^* = \bar{p}^2$ ($p, \bar{p}$ correspond to $\iota(1)$ and $\bar{\iota}(1)$).

Proposition 6.1. *The C^*-algebra $\mathbb{C} * \mathbb{C}$ is isomorphic to the subalgebra of $M_2(\mathbb{C})\,[0, 1]$ consisting of continuous functions $f\colon [0, 1] \to M_2(\mathbb{C})$ such that $(f(0))_{ij} = 0$ for $ij \neq 11$ and $(f(1))_{ij} = 0$ for $i \neq j$. In this isomorphism p corresponds to the constant function $p(t) \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ while $\bar{p}$ corresponds to the function $\bar{p}(t) = \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}$ where $c(t) = \cos\dfrac{\pi t}{2}$, $s(t) = \sin\dfrac{\pi t}{2}$.*

The ideal $q\mathbb{C}$ is the subalgebra of functions f such that $f(0) = 0$.

Proof: Let $\pi : \mathbb{C} * \mathbb{C} \to \mathscr{L}(H)$ be a representation and $E, \bar{E} \subset H$ the closed subspaces $p(H)$ and $\bar{p}(H)$. We may assume that the closed subspace generated by E and $\bar{E}$ is H. We also may assume that $E \cap \bar{E}^\perp = \bar{E} \cap E^\perp = \{0\}$. This implies that the phase of $x = p\bar{p}(1-p)$ in the polar decomposition is an isomorphism $E^\perp \to E$. Relative to the decomposition $H = E \oplus E^\perp$ we may write $\bar{p}$ as a 2×2-matrix

$$\begin{pmatrix} a & x \\ x^* & b \end{pmatrix},$$

where a, b are positive and x, x^* are, after multiplying by the inverse of their phase in the polar decomposition, positive, too. But then we can write $a = c^2$, $b = s^2$ with positive operators c, s and we necessarily have $x = x^* = cs$ and $c^2 + s^2 = 1$ (identifying E with $E^\perp$). The universal C^*-algebra generated by two positive elements c, s such that $c^2 + s^2 = 1$ is isomorphic to $\mathscr{C}([0, 1])$ under the isomorphism that sends c to $\cos\dfrac{\pi t}{2}$ and s to $\sin\dfrac{\pi t}{2}$. □

Proposition 6.2 *The following universal C^*-algebras are isomorphic.*

(1) $\widetilde{\mathbb{C}*\mathbb{C}}$.

(2) *The universal C^*-algebra $C^*(F,G)$ generated by two symmetries (i.e. $F=F^*$, $G=G^*$, $F^2=G^2=1$).*

(3) *The universal C^*-algebra $C^*(F,U)$ generated by a symmetry F and a unitary U such that $FUF=U^*$.*

(4) *The crossed product $\mathscr{C}(S^1)\rtimes_\alpha \mathbb{Z}/2$ where the generator of $\mathbb{Z}/2$ acts on S^1 by $\lambda\to\bar\lambda$, $\lambda\in S^1=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid |\lambda|=1\}$.*

Proof: The symmetries F, G in (2) correspond to $1-2p$, $1-2\bar p$. The unitary U in (3) corresponds to FG. The algebra $\mathscr{C}(S^1)$ in (4) corresponds to $C^*(U)$, i.e. to the universal C^*-algebra generated by a unitary, while F represents the generator of $\mathbb{Z}/2$. □

Now $q\mathbb{C}$ itself is the ideal generated in $\widetilde{\mathbb{C}*\mathbb{C}}$ by $p-\bar p$. It is therefore isomorphic to the ideal generated in $C^*(F,U)$ by $1-U$.

The corresponding ideal in $\mathscr{C}(S^1)\rtimes_\alpha\mathbb{Z}/2$ is $\mathscr{C}_0(S^1\setminus\{1\})\rtimes_\alpha\mathbb{Z}/2$ which is obviously isomorphic to the crossed product $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})\rtimes_\alpha\mathbb{Z}/2$ where the generator of $\mathbb{Z}/2$ acts on $\mathbb{R}$ by $t\to -t$, $t\in\mathbb{R}$ (we still denote this action by α).

Any crossed product by an abelian group carries a natural action of its dual group, the dual action. The dual action $\hat\alpha$ on $\mathscr{C}(S^1)\rtimes_\alpha\mathbb{Z}/2\cong C^*(F,U)$ is given by $\hat\alpha(F)=-F$, $\hat\alpha(U)=U$. Similarly, $q\mathbb{C}\cong\mathscr{C}_0(\mathbb{R})\rtimes_\alpha\mathbb{Z}/2\subsetneqq C^*(F,1-U)$ carries this dual action. On the other hand we have the canonical action of $\mathbb{Z}/2$ on $q\mathbb{C}$ given by τ, cf. section 3. This action is the restriction of the automorphism of $C^*(F,G)$ that exchanges F and G. Obviously $\hat\alpha$ acts on $C^*(F,G)\cong C^*(F,U)$ by $\hat\alpha(F)=-F$, $\hat\alpha(G)=-G$.

Proposition 6.3. *The actions τ and $\hat\alpha$ are conjugate on $q\mathbb{C}$ (but not on $C^*(F,G)$ or $\mathbb{C}*\mathbb{C}$). Thus there is an isomorphism between $q\mathbb{C}$ and $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})\rtimes_\alpha\mathbb{Z}/2$ that carries τ to $\hat\alpha$.*

Proof: We use the representation of $q\mathbb{C}$ as a subalgebra of $M_2(\mathbb{C})[0,1]$ given in 6.1. Let

$$S=\begin{pmatrix} c & s\\ s & -c\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix} 0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}.$$

Then $S=S^*$, $T=T^*$, $S^2=T^2=1$ and $\tau=\operatorname{Ad}S$, $\hat\alpha=\operatorname{Ad}T$. Moreover S and T anticommute. Thus $X=\frac{1}{\sqrt2}(S+T)$ is a symmetry such that $XSX=T$. One checks that if $f\colon[0,1]\to M_2(\mathbb{C})$ is a continuous function such that $f(0)=0$ while $f(1)$ is a diagonal matrix, then so is XfX. Therefore $\operatorname{Ad}X$ is an automorphism of $q\mathbb{C}$ and one clearly has $\operatorname{Ad}X\,\tau\operatorname{Ad}X=\hat\alpha$. □

By duality for crossed products, cf. [19], this shows in particular that $q\mathbb{C} \rtimes_\tau \mathbb{Z}/2$ with the dual action $\hat{\tau}$, is isomorphic to $M_2(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}))$, with the action induced by $t \to -t$ on $\mathbb{R}$ times an inner automorphism of $M_2(\mathbb{C})$. We mentioned above that $KK_1(A,B)$ can also be described as $[\varepsilon A, \mathscr{K} \otimes B]$ where $\varepsilon A = qA \rtimes_\tau \mathbb{Z}/2$. Thus in particular, $KK_1(\mathbb{C},B) = [\varepsilon\mathbb{C}, \mathscr{K} \otimes B] = [M_2(\mathscr{C}_0(\mathbb{R})), \mathscr{K} \otimes B] = [\mathscr{C}_0(\mathbb{R}), \mathscr{K} \otimes B]$. It is interesting to note that this coincides exactly with the definition of $K_1(B)$ in 2.7. In fact giving a unitary in $\mathscr{K} \otimes B^\sim$ can be viewed as giving a unital homomorphism from $C^*(u) \cong \mathscr{C}(S^1)$ into $\mathscr{K} \otimes B^\sim$ (where $C^*(u)$ is the universal C^*-algebra generated by a unitary) which is equivalent to giving a homomorphism from $C^*(1-u) \cong \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ into $\mathscr{K} \otimes B$, cf. also [21].

Bott periodicity and the suspension operation are related to the fact that qA and εA are equivalent in KK (actually even in a stronger sense) to $q\mathbb{C} \otimes A$ and $\varepsilon\mathbb{C} \otimes A \cong \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \otimes M_2(A)$, respectively, and that $\varepsilon^2 A$ is equivalent to qA.

References

[1] Blackadar, B.: K-Theory for Operator Algebras. MSRI publications n° 5. New York – Berlin – Heidelberg: Springer 1986

[2] Coburn, L. A.: The C^*-algebra generated by an isometry I. Bull. Amer. Math. Soc. **13** (1967) 722–726

[3] Connes, A.: Non-commutative differential geometry. Publ. Math. IHES **62** (1986) 257–360

[4] Connes, A.: Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules. K-theory **1** (1988) 519–548

[5] Connes, A.: Géometrie non-commutative. Paris: InterEditions 1990

[6] Connes, A.; Cuntz, J.: Quasi-homomorphismes, cohomologie cyclique et positivité. Comm. Math. Phys., to appear

[7] Connes, A.; Higson, N.: Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante. C. R. Acad. Sci. Paris **311**, série I (1990) 101–106

[8] Cuntz, J.: K-theory and C^*-algebras. Proc. Conf. on K-theory (Bielefeld 1982). Springer Lecture Notes in Math. **1046**, 55–79

[9] Cuntz, J.: A new look at KK-theory. K-theory **1** (1987) 31–51

[10] Cuntz, J.; Quillen, D.: Algebra extensions and nonsingularity, preprint; succeeding articles in preparation

[11] Cuntz, J.; Skandalis, G.: Mapping cones and exact sequences in KK-theory. J. Operator Theory **15** (1986) 163–180

[12] Dixmier, J.: C^*-algebras. Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland 1977

[13] Fedosov, B. V.: Analytic formulas for the index of elliptic operators (translation from Russian). Trans. Moscow Math. Soc. **30** (1974) 159–240

[14] Higson, N.: Categories of fractions and excision in KK-theory. J. Pure Appl. Algebra **65** (1990) 119–138

[15] Kadison, R.; Ringrose, R.: Fundamentals of the theory of operator algebras, vol. I, II. New York: Academic Press 1983

[16] Karoubi, M.: K-Theory: An Introduction. New York – Berlin – Heidelberg: Springer 1978

[17] Kasparov, G. G.: Topological invariants of elliptic operators I: K-homology (English translation). Math. USSR Izv. **9** (1975) 751–791

[18] Kasparov, G. G.: The operator K-function and extensions of C^*-algebras (English translation). Math. USSR Izv. **16** (1981) 513–572

[19] Pedersen, G. K.: C^*-algebras and their automorphism groups. London – New York – San Francisco: Academic Press 1979

[20] Quillen, D.: Superconnection character forms and the Cayley transform. Preprint

[21] Rosenberg, J.: The role of K-theory in noncommutative algebraic topology. In: Operator algebras and K-theory. Contemporary Math. Vol. **10**, 155–182. Amer. Math. Soc. 1982
[22] Skandalis, G.: Le bifoncteur de Kasparov n'est pas exact. C. R. Acad. Sci. Paris **313**, série I (1991) 939–941
[23] Woronowicz, S. L.: Compact matrix pseudogroups. Comm. Math. Phys. **111** (1987) 613–665
[24] Zekri, R.: A new description of Kasparov's theory of C^*-algebras extensions. J Functional analysis **84** (1989) 441–471

Joachim Cuntz
Mathematisches Institut
der Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
W-6900 Heidelberg

(*Eingegangen 24. 2. 1992*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 95 (1993) 85–94
AMS subject classification: 32, 34, 35, 47, 53, 58, 70, 85

Cantor-Medaille für Jürgen Moser

E. Zehnder, Zürich

Vorbemerkung der Redaktion: *Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung hat zum Gedächtnis an Georg Cantor, ihren Gründer und ersten Vorsitzenden, die Georg-Cantor-Medaille gestiftet. Sie wurde auf der Jubiläumstagung 1990 in Bremen zum ersten Mal verliehen und zwar an Karl Stein (siehe* Jber. d. Dt. Math.-Verein. **93** (1991) 1–5). *Auf der Jahrestagung 1992 in Berlin erhielt Jürgen Moser die Medaille. Die Urkunde dazu hat folgenden Text: „Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung verleiht unter dem Vorsitz von Winfried Scharlau die Georg-Cantor-Medaille an Prof. Dr. Jürgen Moser. Die Vereinigung ehrt einen herausragenden Wissenschaftler, der durch vielseitige Beiträge die Mathematik wesentlich gefördert hat. Seine Arbeiten zur Himmelsmechanik, Spektraltheorie, Variationsrechnung, Theorie der partiellen Differentialgleichungen sowie zur Differentialgeometrie und komplexen Analysis waren richtungsweisend für wesentliche neue Entwicklungen. Die KAM-Theorie der dynamischen Systeme zählt zu den großen mathematischen Leistungen dieses Jahrhunderts. Berlin, den 14. September 1992."*

Jürgen Moser wurde am 4. Juli 1928 in Königsberg, dem heutigen Kaliningrad, geboren. Dort besuchte er das Wilhelms-Gymnasium, das auch David Hilbert zu seinen früheren Schülern zählte. Seine Kindheit und Jugend waren überschattet von der Nazi-Herrschaft und dem 2. Weltkrieg. 1947 verließ er die ehemalige Ostzone, um in Göttingen bei F. Rellich Mathematik zu studieren. Die Rückkehr C. L. Siegels nach Göttingen im Jahr 1950 sollte entscheidend werden für seine weitere mathematische Entwicklung. Siegels kraftvolle Mathematik, seine hohen Maßstäbe und sein Stil beeindruckten ihn tief. 1953 besuchte er mit einem Fulbright-Stipendium zum erstenmal die New York University. Nach einer kurzen Rückkehr nach Göttingen als Siegels Assistent übersiedelte er 1955 in die USA. Dort begann seine lange und fruchtbare Verbindung mit dem Courant Institute, die nur durch einen Aufenthalt am MIT unterbrochen wurde (1957–1960). Die anregende Atmosphäre am Courant Institute hatte einen starken Einfluß auf ihn und seine Entwicklung als Mathematiker. In dieser Zeit entstanden viele wichtige Arbeiten. 1980 wechselte er an die ETH Zürich, wo er als Direktor des Forschungsinstitutes für Mathematik tätig ist.

Im Zeitraum 1983 bis 1986 war Moser Präsident der Internationalen Mathematischen Union. Im Jahre 1969 wurde er mit der Craig Watson Medal der National Academy of Sciences der USA ausgezeichnet; 1968 erhielt er den George D. Birkhoff Prize in Applied Mathematics der AMS; 1984 hielt er die J. v. Neumann Lecture der SIAM in Seattle; 1984 wurde ihm die L. E. J.-Brouwer-

Medaille (Groningen) für seine Leistungen auf dem Gebiet der Analysis und der klassischen Mechanik verliehen.

Jürgen Moser hat fundamentale Beiträge zur Analysis geliefert, welche dieses alte Gebiet der Mathematik wesentlich verändert und weiter entwickelt haben. Er hat nicht nur tiefe Resultate gefunden, sondern auch überraschende neue Phänomene entdeckt und, was für die Weiterentwicklung der Mathematik von besonderer Bedeutung ist, kraftvolle neue Techniken entwickelt, welche in einer Vielzahl mathematischer Gebiete benutzt werden.

Mosers einflußreiche Beiträge zur Mathematik erstrecken sich über ein breites Spektrum von Fragestellungen. Er verfügt über eine ungewöhnlich weite Sicht der Mathematik als Ganzes. Dies wird auch aus dieser Auswahl einiger seiner Arbeiten ersichtlich, welche unter anderem illustrieren, daß für ihn die Trennung in reine und angewandte Mathematik nicht existiert.

Dynamische Systeme und Nash-Moser-Iteration

Probleme der Himmelsmechanik haben im Laufe der Zeit Anlaß zu vielen Entwicklungen der Mathematik gegeben. Viele Mathematiker, von Laplace und Lagrange über Poincaré bis zu G. Birkhoff und Siegel, fühlten sich von dem schwierigen Stabilitätsproblem herausgefordert. Es handelt sich dabei um ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem, welches eine reibungsfreie Bewegung beschreibt, in dem naturgemäß die Oszillationen nie abklingen können, was zu komplizierten Resonanzphänomenen führt, die mathematisch als Probleme der kleinen Nenner bezeichnet werden. Nachdem N. Kolomogorov 1954 am Mathematiker-Kongreß in Amsterdam mit der Ankündigung einer Lösung für dieses Problem großes Aufsehen erregt hatte, gelang Moser 1961 der spektakuläre Durchbruch mit seinem berühmten Twisttheorem [1], das die Schwierigkeit der kleinen Nenner im einfachsten Fall überwindet. Er betrachtet eine maßerhaltende Abbildung $u: A \to \mathbf{R}^2$ der Ebene, definiert auf einem Kreisring $A: a < x^2 + y^2 < b$, welche in der Nähe einer integrablen Twistabbildung ist:

$$u: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos a(r^2) & -\sin a(r^2) \\ \sin a(r^2) & \cos a(r^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \text{Störung}, \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

Solche Abbildungen tauchen im restringierten Dreikörperproblem auf und wurden schon von Birkhoff untersucht. Die ungestörte Abbildung wird als nichtlinear vorausgesetzt: $a' > 0$; sie läßt jeden Kreis invariant und dreht ihn mit der Rotationszahl $a(r^2) = \alpha$, welche nach Voraussetzung vom betrachteten Kreisradius abhängt. Moser zeigt nun, daß unter einer Störung ein Kreis mit Rotationszahl α eine Fortsetzung zu einer in der Nachbarschaft liegenden, invarianten Kurve $C: S^1 \to \mathbf{R}^2$ hat, auf der die Abbildung überdies konjugiert linear ist, d.h. gelöst wird die nichtlineare Gleichung

$$u \circ C(\vartheta) = C(\vartheta + \alpha), \qquad \vartheta \in S^1.$$

Vorausgesetzt ist erstens, daß u hinreichend glatt ist, zweitens, daß die Störung mit hinreichend vielen Ableitungen klein ist und drittens, daß die Rotationszahl α

diophantisch ist und daß das ungestörte Problem nichtlinear ist. Es handelt sich also um ein subtiles analytisches Resultat. Keine der Voraussetzungen kann weggelassen werden. Liouville-Kreise können durch kleine glatte Störungen zerstört werden, große Störungen können alle invarianten Kurven auswischen. Variiert man α, so erhält man eine Cantormenge von invarianten Kurven, die also viele Löcher hat, deren Maß aber positiv ist. Dies ist ganz im Gegensatz zu maßerhaltenden Homöomorphismen, etwa der Kreisscheibe, wo Oxtoby and Ulam gezeigt haben, daß die ergodischen typisch sind. Ergodizität im differenzierbaren Fall kann also nicht durch kleine Störungen erreicht werden, wie etwa von Physikern wie Fermi vermutet worden war. Als Anwendung zeigt Moser insbesondere, daß ein elliptischer Fixpunkt eines nichtlinearen, maßerhaltenden, lokalen Diffeomorphismus in der Ebene topologisch stabil ist, ein Ergebnis, welches nicht nur in der Astronomie sondern auch in der Theorie der Teilchenbeschleuniger eine Rolle spielt. Diese Stabilitätsfrage wurde früher schon von Birkhoff untersucht, der am Ende seiner Untersuchungen aber zur entgegengesetzten Meinung gekommen war. Bald nach seinem Durchbruch im Spezialfall ist es Moser gelungen, invariante Tori zu konstruieren für die Klasse von Hamiltonschen Systemen, welche, wie das Planetensystem, in der Nähe eines integrablen Systems sind ([2] und [3]). Damit hat Moser die Grundlagen der Stabilitätstheorie Hamiltonscher Gleichungen geschaffen, auf denen in der Folge eine Fülle tiefer Untersuchungen auch vieler anderer Mathematiker aufbauen.

Bahnbrechend für die spätere Entwicklung ist insbesondere die Beweismethode. Sie besteht in einem konstruktiven Iterationsverfahren in einer Familie von linearen Räumen. Bei jedem Schritt wird ein lineares Problem gelöst, wobei auf Grund der kleinen Nenner Ableitungen verloren gehen, so daß die Lösungen wieder geglättet werden müssen; dabei wird der kumulative Effekt der Glättungen durch das formal schnell konvergente Verfahren kontrolliert. Glättungsoperatoren waren vorher von J. Nash eingeführt worden im Rahmen eines ganz anderen Iterationsverfahrens, mit welchem er das isometrische Einbettungsproblem gelöst hatte. Aus diesem Grund spricht man von Nash-Moser-Techniken. Übrigens kann jetzt dieses geometrische Problem durch eine adäquate Formulierung des Funktionals mittels einfacher Standardtechniken der partiellen Differentialgleichungen gelöst werden, wie M. Günther gezeigt hat.

Mosers Iterationstechniken bilden heutzutage ein unentbehrliches, äußerst schlagkräftiges und flexibles Instrumentarium, welches auch dort noch zum Ziel führt, wo alle üblichen Verfahren versagen. Es wird angewendet auf analytisch subtile nichtlineare Probleme, bei denen die linearisierten Probleme nur sehr schwache Lösungseigenschaften zulassen, welche aber quantitativ abgeschätzt werden können. In verschiedener Form wurden die Techniken später abstrakt dargestellt in sogenannten harten Theoremen über implizite Funktionen unter anderem von R. Hamilton und L. Hörmander. Bei seinem ersten Existenzbeweis globaler Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen in höheren Dimensionen hat beispielsweise S. Klainermann diese Techniken benutzt, um den iterativen Verlust an Abklingeigenschaften der Lösungen der linearisierten Gleichungen in den Griff zu bekommen. Der Existenzbeweis der sogenannten Anderson-Lokalisierung in der Festkörperphysik, welcher T. Spencer und J. Fröhlich gelungen ist, ist durch

Mosers Techniken inspiriert. Erst kürzlich haben diese Techniken zur Störungstheorie realistischer, unendlich dimensionaler, integrabler Systeme, wie etwa der Korteweg-de-Vries-Gleichung, durch S. Kuksin und J. Pöschel geführt.

Gleichzeitig und unabhängig von Moser hat V. Arnold das Problem der kleinen Nenner im analytischen Fall, wo sich das Glätten erübrigt, gelöst, was zum Akronym KAM-Theorie geführt hat, eine Theorie, die zu den herausragenden Errungenschaften dieses Jahrhunderts gehört. Sie hat vor allem eine völlig neue Vorstellung der Stabilität von hamiltonschen Systemen in der Nähe von integrablen Systemen gebracht. Eine große Cantormenge von positivem Maß im Phasenraum besteht aus stabilen Lösungen, aber in allen Löchern dazwischen tauchen generisch hyperbolische, instabile und chaotische Phänomene auf, so daß stabile und unstabile Vorgänge prinzipiell nicht voneinander getrennt werden können.

Regularitätstheorie elliptischer und parabolischer PDE

In [4] und [5] entwickelte Moser eine neue, inzwischen klassisch gewordene Iterationsmethode, die wiederum auf der Ausnutzung eines schnellen Konvergenzverfahrens basiert. Damit konnte Moser einen neuen Beweis für die Lösung des 19ten Hilbertschen Problems in n Dimensionen geben, die kurz zuvor DeGiorgi und J. Nash gelungen war. Wichtiger noch ist aber eine von Moser aufgestellte sogenannte „Harnacksche Ungleichung" für Lösungen elliptischer Gleichungen mit meßbaren Koeffizienten, die besser „Mosersche Ungleichung" heißen sollte und ganz unentbehrlich geworden ist, beispielsweise auch für die Behandlung elliptischer Systeme, etwa vom Typ der harmonischen Abbildung Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Die Ungleichung besagt, daß für eine in der Kugel B_{2r} vom Radius $2r$ positive Lösung u einer elliptischen partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} = 0$$

die Ungleichung

$$\max_{B_r} u \leqslant C \min_{B_r} u$$

gilt. Dabei hängt die Konstante C nur von Schranken für die Eigenwerte der symmetrischen Matrix (a_{ij}) ab. Das Wesentliche für die Regularitätstheorie ist, daß diese Abschätzung keine Voraussetzungen über die Glattheit oder Stetigkeit der Koeffizienten $a_{ij}(x)$ erfordert.

Über einige Teilaspekte gibt die Monographie von Gilbarg-Trudinger (Band 224 der gelben Reihe) Auskunft. Später gelang es Moser in [10], ähnliche Resultate auch für parabolische Gleichungen zu gewinnen. Hierauf beruht zu einem wesentlichen Teil die moderne Theorie nichtlinearer parabolischer Gleichungen. Wie bei den unter 1. genannten Untersuchungen handelt es sich bei diesen Publikationen um „Jahrhundertarbeiten".

Komplexe Analysis

Die Frage, ob man eine reell analytische Hyperfläche von reeller Kodimension 1 in komplexen Räumen $\mathbf{C}^n$ durch eine biholomorphe Abbildung in $\mathbf{C}^n$ auf eine andere solche Hyperfläche abbilden kann, ist alt und wurde schon von Poincaré 1907 und von É. Cartan angegangen. Dabei handelt es sich um das lokale Problem. Im Spezialfall $n=1$ ist bekannt, daß jedes analytische Kurvenstück konform auf jedes andere abgebildet werden kann. Dies ist nicht der Fall für $n \geqslant 2$; Poincaré hat bewiesen, daß zwei reelle Hyperflächen im $\mathbf{C}^2$ im allgemeinen nicht biholomorph äquivalent sind. Inspiriert durch Poincarés Zugang zur Äquivalenzfrage dynamischer Systeme mittels Normalformen konstruiert Moser in der gemeinsamen Arbeit mit S. S. Chern [8] für eine gegebene Hyperfläche unter Anwendung einer biholomorphen Abbildung eine lokale Normalform für die Fläche, welche alle Invarianten enthält und Mosersche Normalform genannt wird. Den Ideen É. Cartan's folgend kommt man in [8] zudem für abstrakte C.R.-Strukturen auf anderem Weg zu denselben Invarianten, wobei die Identifikation allerdings nicht einfach ist. Diese Normalform führte auch zur Entwicklung einer höchst interessanten, ausgezeichneten Familie von Kurven auf der Fläche (chains), welche bezüglich der komplexen Struktur eine analoge Rolle spielen wie die geodätischen Kurven auf einer Mannigfaltigkeit bezüglich der Riemannstruktur. Später, 1977, hat C. Feffermann diese Kurven auf höchst originelle Weise aus einem Variationsprinzip gewonnen und geometrisch gedeutet. Diese Phänomene werden beschrieben im Buch von H. Jacobowitz: An Introduction to CR-Structures, AMS 1990.

Zum Beispiel läßt sich für den Spezialfall einer streng pseudokonvexen Hyperfläche in $\mathbf{C}^2$ mit den komplexen Variablen $z=x+iy$ und $w=u+iv$ die Mosersche Normalform als

$$v = z\bar{z} + c_{24} z^2 \bar{z}^4 + c_{42} z^4 \bar{z}^2 + \sum_{j+k \geqslant 7} c_{jk} z^j \bar{z}^k$$

mit $\min\{j,k\} \geqslant 2$ schreiben. Daraus ersieht man sofort, daß diese Fläche die Quadrik $v = z\bar{z} = x^2 + y^2$ bis zur fünften Ordnung osculiert, und zwar nicht nur an einem Punkt, sondern sogar entlang der u-Achse, die ein Beispiel einer chain darstellt. Für $\mathbf{C}^n$ mit $n \geqslant 3$ ist die Normalform von komplizierterer Natur.

Für höhere Kodimensionen sind die entsprechenden Äquivalenzfragen noch offen. Moser und Webster behandeln in [15] den Spezialfall der reellen Kodimension 2 in $\mathbf{C}^2$. Hier stellt es sich heraus, daß an einem Punkt mit komplexem Tangentialraum eine vollständige Lösung existiert, das heißt, es gibt eine Normalform, welche die sämtlichen biholomorphen Invarianten enthält. Der Beweis fußt auf Ideen aus den dynamischen Systemen, insbesondere auf einem früheren Resultat von Moser über die Normalform einer reell analytischen Abbildung an einem hyperbolischen Fixpunkt.

Differentialgeometrie

Jede Metrik ds^2 auf der Zweisphäre S^2 bestimmt eine Gaußkrümmung, die nach der Gauß-Bonnet-Formel $\int_{S^2} K\,dA = 4\pi$ erfüllt. In [6] befaßte sich Moser mit der inversen Frage, diejenigen glatten Funktionen auf S^2 zu charakterisieren, die auf diese Weise aus einer Riemannschen Metrik, die konform zur Standard Metrik ist, gewonnen werden können. Er zeigte, daß unter den Funktionen $K(\xi)$, $\xi \in S^2$, mit $K(\xi) = K(-\xi)$ die Krümmungsfunktionen durch die Bedingung $\max K > 0$ charakterisiert sind. Der Beweis dieser Aussage beruht auf den direkten Methoden der Variationsrechnung, die Moser auf das Funktional

$$\mathscr{F}(v) := \log\left[\frac{1}{2\pi}\int Ke^{2v}dA\right] - \frac{1}{4\pi}\int |\nabla v|^2 dA - \frac{1}{2\pi}\int v\,dA$$

anwandte. Grundlegend ist eine optimale Variante einer von Trudinger angegebenen Integralabschätzung, die Moser in [7] bewies. Daß bei dieser Ungleichung das Maximum angenommen wird, ist ein überraschendes Resultat, das erst 1986 von L. Carleson und S. A. Chang bewiesen wurde. Man hat gelernt, daß scharfe Abschätzungen vom Moserschen Typ der Schlüssel zu sogenannten „kritischen Variationsproblemen" sind.

Elektrische Netzwerke

Als man seinerzeit die Esaki-Diode als Computerelement verwenden wollte, tauchte das Stabilitätsproblem großer nichtlinearer Netzwerke mit vielen Gleichgewichtspunkten auf. Insbesondere suchte man nach Bedingungen, unter denen Oszillationen und seltsame Attraktoren vermieden werden und die Lösung möglichst schnell zur Ruhe kommt. In seiner Arbeit [12] mit R. K. Brayton hat Moser die Gleichungen für nichtlineare Netzwerke in der Form

$$L_n \frac{di_n}{dt} = \frac{\partial P}{\partial i_n}, \qquad C_m \frac{dv_m}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial v_m} \qquad (n = 1,\dots N,\, m = 1,2,\dots M)$$

mittels einer Potentialfunktion $P = P(i, v)$ („content" genannt) dargestellt, wobei i_n die Stromstärke, v_m die Spannung, L_n die Induktivität und C_m die Kapazität bedeuten. Man kann diese Gleichung als ein Gradienten-Vektorfeld bezüglich der indefiniten Metrik

$$\sum_n L_n(di_n)^2 - \sum_m C_m(dv_m)^2$$

interpretieren. Diese Darstellung erlaubte Moser durch Konstruktion von Lyapunovfunktionen scharfe Stabilitätskriterien zu beweisen. Diese Netzwerk-Theorie, welche Eingang in die Lehrbuchliteratur der Elektroingenieure gefunden hat, wurde später von S. Smale in globaler Form auf Mannigfaltigkeiten dargestellt.

Volumenformen und symplektische Strukturen

Betrachtet man zwei diffeomorphe kompakte Mannigfaltigkeiten M und N mit Volumenformen α und β, so kann man nach Bedingungen fragen, unter denen es einen Diffeomorphismus gibt, der zusätzlich volumenerhaltend ist: $\varphi^*\beta = \alpha$. Offensichtlich ist

$$\int_M \alpha = \int_N \beta$$

eine notwendige Bedingung. Auf Grund einer Wette mit R. Palais hat Moser in [17] gezeigt, daß diese Bedingung schon hinreichend ist, so daß also das Totalvolumen die einzige Invariante ist. Zum Beweis hat sich Moser eine einfache, sehr effiziente Methode ausgedacht, welche deshalb auch sehr populär geworden ist und als Mosersche Deformationsmethode häufig in der Differentialtopologie und symplektischen Geometrie verwendet wird. Das Ungewöhnliche der Methode besteht darin, daß man umgekehrt vorgeht und nach einer Differentialgleichung sucht, deren Lösung dann zur Zeit 1 die gesuchte globale Abbildung ist, was auf ein lineares Problem für ein Vektorfeld führt. Mit dieser Methode hat Moser auch gezeigt, daß zwei symplektische Formen äquivalent sind, falls man sie in der Klasse der Formen mit festen Perioden ineinander deformieren kann. Eine Klassifikation von symplektischen Strukturen gibt es noch nicht.

Im Falle 2-dimensionaler Mannigfaltigkeiten ist natürlich eine symplektische Form eine Volumenform, so daß also 2-dimensionale kompakte symplektische Mannigfaltigkeiten durch Volumen und Eulercharakteristik klassifiziert werden. Stellt man in höheren Dimensionen die zu Volumenformen analoge Frage für symplektische Formen symplektischer Mannigfaltigkeiten, so steht man vor einem Problem ganz anderer Natur, und erst in neuester Zeit haben die großartigen Entdeckungen von M. Gromov und von H. Hofer und ihren Mitarbeitern zu überraschenden und mysteriösen globalen, symplektischen Invarianten geführt, welche die symplektische Geometrie in völlig neuem Licht erscheinen lassen.

Spektraltheorie für Schrödingergleichungen

Die Natur des Spektrums eines Schrödinger-Operators

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \qquad \text{in } L^2(\mathbf{R})$$

mit fastperiodischem Potential ist noch unbekannt. Im Gegensatz zum periodischen Fall, bei dem das Spektrum rein kontinuierlich ist, können für ein fastperiodisches Potential Eigenwerte auftreten und sogar in einem gewissen Intervall dicht liegen, wie T. Spencer erst kürzlich bewiesen hat. Das Spektrum kann auch eine Cantormenge bilden. Von besonderem Interesse sind die Lücken, die im Spektrum auftreten. Moser untersucht in [11] dieses Problem mit Hilfe einer ebenfalls von den dynamischen Systemen inspirierten Rotationszahl. Falls, grob gesprochen, φ eine komplexe Lösung der Gleichung $L\varphi = l\varphi$ für l reell ist, so existiert der Grenzwert

$$-\frac{\arg \varphi(x,l)}{x} \to \alpha(l) \qquad \text{für } x \to \infty$$

und definiert die Rotationszahl α. Mit Hilfe der Werte der Rotationszahl gelingt es Moser, die Lücken durch gewisse ganze Zahlen zu charakterisieren, heutzutage gap labeling genannt. Auch dieses Phänomen wurde von anderen Mathematikern weiter verfolgt. Moser stellt auch einen engen Zusammenhang her mit unendlich dimensionalen integrablen Systemen, indem er zeigt, daß die Rotationszahl, aufgefaßt als Funktional des Potentials V, die Integrale der Korteweg-de-Vries-Gleichung erzeugt. Mit diesen Fragen eng verwandt ist natürlich die inverse Spektraltheorie, welche umgekehrt das Spektrum vorgibt und nach dem Potential sucht. Ein besonders interessanter Fall, wo das Spektrum nur endlich viele Lücken aufweist (finite gap potential) wurde von Novikov 1979 ausführlich untersucht. Er führt ebenfalls auf fastperiodische Potentiale, was in Mosers Lezioni Fermiane [16] völlig anders, mit Hilfe eines integrablen Hamiltonschen Systems auf der Kugel beschrieben wird. Moser hatte schon früher das Gebiet der integrablen Systeme durch wichtige Beispiele bereichert [9]. Insbesondere hatte sein Nachweis, daß ein merkwürdiges System von Calogero, welches n Teilchen beschreibt, die alle miteinander wechselwirken, integrabel ist und sich deshalb vollständig integrieren läßt, einen starken Einfluß auf dieses Teilgebiet der dynamischen Systeme, welches mit der algebraischen Geometrie verknüpft ist.

Aubry-Mather-Theorie und Blätterungen

Der Mechanismus beim Zusammenbruch der Stabilität bei großen Störungen ist noch offen. Twistabbildungen, die nicht in der Nähe von integrablen sind, sind der KAM-Theorie nicht mehr zugänglich. Vor 10 Jahren haben Aubry und Mather unabhängig voneinander eine interessante Theorie entwickelt, die, als Ersatz für die invarianten Kurven, für jede Rotationszahl abgeschlossene, invariante Mengen garantiert. Diese Theorie beruht auf einer geschickten Anwendung von Variationsmethoden in singulären Situationen. Moser hat in [13] gezeigt, daß diese Methoden auf nichtlineare partielle Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten erweitert werden können. Sie liefern für gewisse partielle Differentialgleichungen, die Eulergleichungen eines Variationsprinzips sind, die Existenz von quasiperiodischen Lösungen. Diese Lösungen können sich zu einer Blätterung des Torus durch Blätter der Kodimension 1 zusammenfügen, oder aber eine sogenannte Lamination bilden. Zu dieser Theorie hat später V. Bangert wesentliche Beiträge geliefert. Man stellt sich am besten vor, daß man auf einem Torus mit Riemannscher Metrik nach Minimalflächen der Kodimension 1 sucht, die den Torus dicht bedecken. Dabei sind die Blätter globale Minimale für das Variationsprinzip, wie schon von Giusti und Giacquinta eingehend untersucht worden war. Als einfaches Beispiel dieser Theorie kann man die nichtlineare elliptische partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = f(x, u), \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

ansehen, wobei f eine glatte Funktion der $n+1$ Argumente $x_1, \ldots, x_n$ und u ist. Die Theorie garantiert die Existenz von Lösungen der Form

$$u(x) = \langle \alpha, x \rangle + p(x, \langle \alpha, x \rangle),$$

wobei p eine periodische Funktion seiner $n+1$ Argumente ist und α aus $\mathbf{R}^n$ ist. Beschränkt man sich auf Systeme in der Nähe eines Systems, welches nicht von den unabhängigen Variablen abhängt (integrabler Fall), so führt eine Erweiterung der KAM-Theorie [14] auf eine glatte Blätterung, wenn man noch geeignete diophantische Bedingungen an den Rotationsvektor der Lösung stellt. Mit diesem Resultat ist Moser eine genuine Erweiterung der KAM-Theorie von gewöhnlichen auf partielle Differentialgleichungen gelungen.

Dies führt zu einem größeren Fragenkreis der Geometrie, der von M. Gromov untersucht wurde. Von großem Interesse sind heutzutage Minimalflächen in hyperbolischen Räumen. Interessante erste Resultate wurden neuerdings von U. Lang erzielt, dem es gelang, die Existenz von globalen Minimalen der Kodimension 1 mit vorgeschriebenem Randverhalten im Unendlichen in hyperbolischen Räumen nachzuweisen. Diese Fragen befinden sich noch in ihren Anfängen.

Wir können hier nur einige Aspekte des bisherigen, ungewöhnlich vielseitigen mathematischen Werkes beschreiben. Doch Jürgen Moser bereichert die Mathematik nicht nur durch seine mathematischen Beiträge, sondern auch durch seine Persönlichkeit, seine Integrität und Bescheidenheit. Wir freuen uns über die Verleihung der Georg-Cantor-Medaille an Jürgen Moser. Diese Wahl gereicht auch dem Preis zur Ehre.

Literatur

[1] On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1962) 1–20

[2] A rapidly convergent iteration method and non-linear (partial) differential equations. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **20** (1966), Part I: 265–315, Part II: 499–535

[3] Convergent Series Expansions for Quasi-Periodic Motions. Math. Ann. **169** (1967) 136–176

[4] A New Proof of de Giorgi's Theorem Concerning the Regularity Problem for Elliptic Differential Equations. Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960) 457–468

[5] On Harnack's Theorem for Elliptic Differential Equations. Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961) 577–591

[6] On a nonlinear problem in differential geometry. Proc. Symp. Univ. Bahia, Aug. 1971. In: Peixoto. Dynamical Systems Acad. Press 1973, 273–280

[7] A Sharp Form of an Inequality by N. Trudinger. Indiana Univ. Math. J. **20** (1971) 1077–1092

[8] (with S. S. Chern) Real hypersurfaces in complex manifolds. Acta Math. **133** (1974) 219–271

[9] Three Integrable Hamiltonian Systems Connected with Isospectral Deformations. Advances in Math. **16** (1975) 197–220

[10] On a Pointwise Estimate for Parabolic Differential Equations. Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971) 727–740

[11] (with R. Johnson) The Rotation Number for Almost Periodic Potentials. Comm. Math. Phys. **84** (1982) 403–438

[12] (with R. K. Brayton) A theory of nonlinear networks. Quarterly of Appl. Math. **22** (1964) Part I: 1–33, Part II: 81–104

[13] Minimal Solutions of Variational Problems on a Torus. Ann. Inst. H. Poincaré: Anal. nonlin. **3** (1986) 229–272

[14] A Stability Theorem for Minimal Foliations on a Torus. Ergodic Theory and Dynamical Systems **8** (1988) 251–281

[15] (with S. Webster) Normal forms for real surfaces in $\mathbf{C}^2$ near complex tangents and hyperbolic surface transformations. Acta Math. **150** (1983) 255–296

[16] Integrable Hamiltonian systems and spectral theory. Fermi Lectures, Pisa 1981. Lezioni Fermiane, Acad. dei Lincei, Pisa 1981

[17] On the volume elements on a manifold. Transactions of the AMS **120** (1965) 286–294

Prof. Dr. Eduard Zehnder
Mathematik, ETH Zentrum
CH-8092 Zürich

(*Eingegangen 3. 11. 1992*)

Buchbesprechungen

Parikh, C., The Unreal Life of Oscar Zariski, Boston u.a.: Academie Press 1991, 263 S., $ 12.50

Eine umfassende Biographie von Oscar Zariski (1899–1986), dessen Arbeiten die algebraische Geometrie in unserem Jahrhundert entscheidend geprägt haben, wird erst im 21. Jahrhundert erstellt werden können, da sein Nachlaß bis 2001 bei der Widener Library unter Verschluß liegt. Der vorliegenden Interims-Biographie ist dieses Erschwernis bei der Informationsbeschaffung möglicherweise zum Vorteil geraten: die Autorin, als Schriftstellerin („fiction") ausgewiesen und mit einem Logiker verheiratet, hat mit Zariskis Familie und einer Reihe bedeutender Fachvertreter der algebraischen Geometrie (u.a. Heisuke Hironaka, Michael Artin und David Mumford) ausgiebige Gespräche geführt, in denen die Persönlichkeit des großen Mathematikers gewiß lebendiger erstand als aus hinterlassenen Aufzeichnungen. Das Ergebnis ist weit mehr als ein Interim: ein vor allem für Mathematiker, aber sicher auch für mathematisch interessierte Laien gut zu lesendes Buch mit 18 biographischen Kapiteln der Verfasserin, sowie einem Laien in die algebraische Geometrie einführenden Vorspann von David Mumford, einem das wissenschaftliche Werk von Zariski würdigenden Appendix von Mumford, M. Artin, Lipman und Teissier, und einer Liste von 98 Publikationen von Zariski. Die Einteilung der 18 Kapitel folgt vor allem dem Themenwechsel in Zariskis Forschungen, aber auch den Etappen seines Lebenslaufs, der im „Schtetl" Kobrin in Weißrußland begann und mit langjährigem Wirken in Harvard (ab 1947) zuende ging. Eine halbe Generationsspanne trennt Oscar Zariski von Mark Kac (1914–1984), in dessen bemerkenswerter Autobiographie „Enigmas of chance" man Parallelen an Tragik findet: beide Mathematiker wurden im Zarenreich geboren, beider Heimatorte wurden nach dem 1. Weltkrieg polnisch, beide fanden ihre neue Heimat in den USA, während ihre Elternfamilien im Holocaust umkamen. Freilich gibt es beachtliche Unterschiede. Im Gegensatz zur umgänglichen East-Coast-Brillanz Kac's erscheint Zariski weniger US-angepaßt: wegen seiner langjährigen sozialistischen Überzeugungen wurde ihm noch lange nach dem 2. Weltkrieg das „clearing" des FBI verweigert. Die Entwicklung seiner politischen Auffassungen bildet einen bemerkenswerten Strang im Geflecht dieses ungewöhnlichen Lebens, dessen erste akademische Stationen Kiew und dann Rom (Studium bei Enriques, Severi und Castelnuovo, der Zariskis Doktorvater wurde: Promotion 1924), waren, worauf 1927/28 ein Rockefeller-Stipendium mit darauffolgender Anstellung in Baltimore (Johns Hopkins, tenure 1932) folgte. Von den zahlreichen Kongreßreisen sei hier nur der Besuch der Topologie-Konferenz in Moskau 1935 erwähnt, der zugleich ein letztes Wiedersehen mit der Familie in Kobrin ermöglichte. 1940 vertieften sich die Kontakte zu Harvard, die schließlich 1947 zu Zariskis Übersiedlung dorthin führten. Das Sonderschicksal, Jude zu sein, spielte – wie schon in Rußland, Polen und Italien – auch in diesen Entwicklungen eine Rolle. – Das Buch ist fesselnd geschrieben und mit zahlreichen Photos, die Oscar Zariski allein oder im Kreise seiner Weggefährten – unter denen seine Frau Yole, geb. Cagli besonders hervorzuheben ist – zeigen, ausgestaltet; es sollte jeden Mathematiker interessieren. Algebraische Geometer werden sowohl aus dem biographischen Text als auch aus den Zusätzen, die ihre Kollegen beigesteuert haben, bedeutenden Gewinn erzielen.

Erlangen

K. Jacobs

Chatterji, S. D., et al. (ed.), Jahrbuch Überblicke Mathematik 1991, Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn 1991, X + 235 S., pb., DM 49,-

Nach dem Jahr 1986 wurde das Jahrbuch Überblicke Mathematik vom Bibliographischen Institut nicht mehr fortgeführt. Im Frühjahr 1989 planten die Herausgeber die Ausgabe des vorliegenden Bandes als Ost-West-Gemeinschaftsproduktion von Akademie-Verlag und Vieweg-Verlag. Die politischen Verhältnisse haben dieser Ost-West-Kooperation ein anderes Gesicht gegeben, doch der Band ist erschienen.

Er enthält eine Reihe aktueller Themen wie die Berichte über die Algebra-Konferenz in Nowosibirsk 1989 und den Internationalen Mathematiker-Kongress Kyoto 1990, sowie einen kritischen Bericht von W. Walter über den neuen Fortran-Standard, er stellt einige in den letzten Jahrzehnten in den Vordergrund getretenen Themen dar wie wissenschaftliches Rechnen, Numerik in der Quantenchemie, Gröbner-Basen, Kollisionsprobleme bei Robotern, aber auch zeitlose Themen wie Klassenzahlformeln, inkorrekt gestellte Probleme, Computer-Kunst und etwas Mathematikgeschichte wie die Entwicklung der Lieschen Theorie, die Entwicklung des Funktionsbegriffes und einen kurzen Nachruf auf I. Fenyö.

Insgesamt ist so ein bunter Strauß entstanden von fast durchweg auch von Studenten und Mathematiklehrern gut genießbaren Beiträgen, ein Band, der auch einem Studienanfänger einen Eindruck von der Mathematik an ausgewählten Beispielen gibt. An ein Abdecken aller mathematischer Disziplinen kann bei dem Umfang des Jahrbuchs nicht gedacht werden, dies kann nur über die Jahre hinweg geschehen, die diesem Unternehmen gewünscht seien, das in meinen Augen eine Lücke in dem Angebot an mathematischer Literatur (zumindest auf dem deutschen Markt) schließt.

Auffallend, aber vielleicht nicht überraschend ist die Tatsache, daß die Benutzung moderner Textverarbeitungssysteme Druckfehler nicht vermindert, ja sie teilweise selbst erzeugt (so 26 der Druckfehler in dem Aufsatz über inkorrekt gestellte Probleme). Die Autoren lesen offenbar nicht mehr, was sie geschrieben haben, während sie früher doch dem Setzer mißtrauten. Andernfalls wären z. B. nicht die fehlerhafte Formulierung des Satzes von Lie auf S. 96/97 oder das falsche Goethe-Zitat auf S. 99 stehen geblieben.

Erlangen W.-D. Geyer

Dikranjan, D. N., Prodanov, I. R., Stoyanov, L. N., Topological Groups, New York u. a.: Marcel Dekker, Inc. 1989, 312 S., $ 119.50

Die Autoren haben ein Programm. Sie wollen die Theorie der topologischen Gruppen entwickeln, ohne gebietsfremde, funktionalanalytische Anleihen zu machen. Wenn man in Standardwerke schaut wie Hewitt-Ross: Abstract Harmonic Analysis oder Rudin: Fourier Analysis on Groups, so scheint das ein ziemlich ehrgeiziges Vorhaben. Man mag auch Zweifel hegen, ob es wünschenswert ist, auf so schöne und vertraute Hilfsmittel wie kompakte, symmetrische Operatoren im Hilbertraum und Banachalgebren freiwillig zu verzichten. Nach der Lektüre muß ich bekennen, die Abstinenz hat sich gelohnt, auch wenn das ursprüngliche Programm vollständig nur für abelsche Gruppen zu verwirklichen war.

Grundlegend (Kapitel I) ist ein Satz von E. Følner über die Existenz stetiger Charaktere auf abelschen topologischen Gruppen. Ein zentrales Anliegen der Autoren ist eine Darstellung der Theorie minimaler Gruppen, das sind topologische Gruppen, deren Topologie minimal ist in der Menge aller ihrer hausdorffschen Gruppentopologien. Hauptergebnis (Kapitel III) und eine Anwendung des Følnerschen Satzes ist der Satz, daß alle minimalen abelschen Gruppen präkompakt sind. Für lokalkompakte abelsche Gruppen wird in Kapitel III die Pontryaginsche Dualitätstheorie und die Strukturtheorie dieser Gruppen entwickelt. Hier findet man auch eine Diskussion der Gruppen $\mathbb{Z}_p$ p-adischer Zahlen und der Charaktergruppe $\mathbb{Q}^*$ der diskreten, additiven Gruppe $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen. In Kapitel IV wird jeder kompakten, abelschen Gruppe G und jeder Primzahl p ein $\mathbb{Z}_p$-Modul $td_p(G)$ zugeordnet, welcher eine Untergruppe von G ist und den p-Torsionsanteil von G enthält. Ist der freie Rank m_p *von* $td_p(G)$ über $\mathbb{Z}_p$ endlich für alle p, dann lassen sich die Torsionsanteile von G explizit beschreiben. Kapitel V behandelt den Zusammenhang zwischen minimalen abelschen Gruppen und kompakten abelschen Gruppen. Es werden Kardinalitätsinvarianten eingeführt, die in Zusammenhang stehen mit minimalen abelschen Gruppen. Kapitel VI widmet sich der Frage, wann Produkte (minimaler) abelscher Gruppen minimal sind. Im letzten Kapitel VII werden drei spezielle nicht abelsche topologische Gruppen untersucht. Die Gruppe $S(X)$ aller Permutationen einer Menge X versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf X, die Gruppe $\mathfrak{U}$ aller unitären Abbildungen eines Hilbertraumes mit der starken Operatortopologie, sowie $SL(2, \mathbb{R})$ mit der von $M(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ induzierten Topologie. Alle drei Gruppentopologien sind minimal.

Jedes Kapitel schließt mit ausführlichen Anmerkungen zur Literatur und einer Serie von Übungen, die den Text teilweise ergänzen. Es bleibt festzuhalten, daß den Autoren eine exzellente, auch typographisch ansprechende Darstellung ihres Arbeitsgebietes gelungen ist.

München G. Schlichting

Haymann, W. K., Subharmonic Functions, Vol. 2, London u.a.: Academic Press 1989, 512 S, £ 53,50

Der vorliegende zweite Band von W. K. Haymans Werk über subharmonische (im folgenden abgekürzt s.h.) Funktionen ist mit seinen 616 Seiten gut doppelt so dick wie der erste Band (Subharmonic Functions, Vol 1, London 1976). Dieser Umfang ist einerseits bedingt durch die Fülle des dargebotenen Materials und andererseits durch die Ausführlichkeit der Darstellung, die ich jedoch eher als angenehm empfand. Das Hauptinteresse dieses zweiten Bands liegt auf den s.h. Funktionen in der komplexen Ebene, manchmal, besonders im siebten und im neunten Kapitel, auf s.h. und δ.s.h. (Differenzen von s.h.) Funktionen in Gebieten $D \subset \mathbb{C}$, und es gibt auch einige wenige Passagen über s.h. Funktionen im $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$.

Das Buch beginnt mit dem sechsten Kapitel (Kapitel 1–5 befinden sich im ersten Band) über Maximum und Minimum von s.h. Funktionen. Erster kleiner Höhepunkt ist folgendes bemerkenswerte Theorem von Wiman (1905): Ist $u(z) \neq \text{const}$ s.h. in $\mathbb{C}$, und ist $A(r, u) := \inf_{|z|=r} u(z)$ nach oben beschränkt, so ist $\liminf\limits_{r \to \infty} \dfrac{B(r, u)}{r^{1/2}} > 0$ mit der Bezeichnung $B(r, u) = \sup_{|z|=r} u(z)$. Der Rest von Kapitel sechs ist weiteren Resultaten über das Verhalten von $A(r, u)$ und $B(r, u)$ gewidmet, die ihren Ausgangspunkt mehr oder minder in diesem Satz nahmen. Erwähnenswert ist noch eine Ungleichung von Littlewood für s.h. Funktionen u mit unterer Ordnung $\lambda < \infty$:

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{A(r, u)}{B(r, u)} \geqslant -C(\lambda);$$

die Konstante $-C(\lambda)$ ist nur für $0 < \lambda \leqslant 1$ exakt bekannt ($-C(\lambda) = \cos \pi\lambda$). Hayman hat 1952 gezeigt, daß $C(\lambda)$ für $\lambda \to \infty$ zwischen zwei positiven Vielfachen von $\log \lambda$ liegt. In Kapitel sechs werden Verschärfungen des Littlewoodschen Resultats diskutiert. Das Haymansche Resultat wird mehrfach erwähnt, ohne daß ein Beweis aufgenommen wurde.

Stattdessen sind Sätze über s.h. Funktionen mit extremen Verhalten, ein Theorem von Beurling, ein Abschnitt über die Wiman-Valironsche Theorie über Potenzreihen, sowie die Barrysche Theorie über s.h. Funktionen mit langsamen Wachstum aufgenommen.

Kapitel sieben ist der Untersuchung von *Ausnahmemengen* gewidmet, also etwa Mengen irregulärer Punkte für das Dirichletsche Problem. Nach einer ausführlichen Behandlung des Wienerschen Kriteriums für die Dünnheit einer Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ in einem Randpunkt oder im Unendlichen und einem Abschnitt über langsam wachsende s.h. Funktionen findet sich hier ein schöner, mit Beispielen und expliziten Rechnungen gewürzter Abschnitt über „geometrische Kapazitätsabschätzungen", den man sich umfangreicher wünschen könnte. Die zweite Hälfte dieses Kapitels beschäftigt sich mit den zweidimensionalen und funktionentheoretischen Aspekten der Ausnahmemengen: mit verdünnten (rarefied) Mengen und negativen s.h. Funktionen in der Halbebene, sowie mit dem Randverhalten von δ.s.h. Funktionen mit (lokal) beschränkter Charakteristik in der Einheitskreisscheibe.

Trakte (tracts), asymptotische Werte und asymptotische Funktionen sind das Thema des achten Kapitels, das die im ersten Band begonnene Untersuchung fortsetzt und auf den zweidimensionalen Fall einschränkt. Der erste Teil entwickelt eine sehr allgemeine Form der Tsujischen Konvexitätsformel, wobei insbesondere Resultate von Carleman und Heins miteingearbeitet sind, sowie eine Reihe von teils ziemlich komplizierten Anwendungen. Zur Abrundung des Bildes sind noch die Begriffe *asymptotische Funktion* und *asymptotischer Pfad* sowie Fentons Theorem dazu dargestellt. Der zweite Teil des achten Kapitels wird vom Konzept der *extremen Länge* beherrscht. Exemplum ist ein relativ neuer Beweis (Jenkins 1987) des Ahlforsschen *spiral asymptotic theorem,* und den krönenden Abschluß bildet folgender Satz von Kjellberg: Ist $u(z) \neq \text{const}$ von endlicher unterer Ordnung, und ist $K > 1$, so sind die Komponenten der Menge $\{z : u(z) + KB(|z|, u) < 0\}$ alle beschränkt.

Das neunte Kapitel behandelt eine spezielle Art der Maximalisierung und Symmetrisierung von Funktionen, nämlich die Konstruktion der Baernsteinschen *-Funktion und deren Anwendungen auf konforme Abbildungen und Ungleichungen für δ.s.h. und meromorphe Funktionen. Der Weg führt zunächst über gewisse Extremalitätseigenschaften des „symmetrisierten" Gebiets D^* eines Gebietes D zu den Baernsteinschen Sätzen über die Majorisation gewisser Mittel von Potenzen (schwach) univalenter Funktionen. Weiter finden sich hier die Ergebnisse einer relativ neuen (Weitsman 1986) Untersuchung zur hyperbolischen (Poincaré-) Metrik, zusammen mit einer scharfen Form eines alten Satzes von Landau über diese Metrik. Der Aufhänger für den Rest von Kapitel neun ist die Paleyschen Vermutung über den Quotienten $B(r, u)/T(r, u)$ (hier ist $T(r, u)$ die im ersten Band eingeführte Nevanlinna-Charakteristik von u) für Funktionen der Form $u(z) = \log |f(z)|$, f ganz von endlicher Ordnung. Ein Beweis einer Verschärfung der Paleyschen Vermutung sowie eine Reihe verwandter Resultate und ein Exkurs über harmonische Splines als Klasse von Gegenbeispielen beenden dann dieses Kapitel.

Den Schluß des Buches bildet das zehnte Kapitel, das in gewisser Weise auch das interessanteste Kapitel ist. Es werden eine Reihe ausgefeilter Beispielklassen beschrieben, die von vielen der zuvor bewiesenen allgemeinen Ungleichungen zeigen, daß sie scharf sind. Trotzdem finden sich hier auch allgemeine Sätze und Methoden, etwa das *access theorem* über das Erreichen von Werten am Rand bei s.h. Funktionen auf Gebieten des $\mathbb{R}^m$, oder die Methode von Kjellberg, Kennedy und Katifi zur Approximation von s.h. Funktionen durch Funktionen des Typs $u(z) = \log |f(z)|$.

W. K. Haymans zweiter Band über s.h. Funktionen behandelt in beachtenswerter Weise einen Überlappungsbereich zwischen Potentialtheorie und Funktionentheorie, der in der Buchliteratur bisher nur wenig Niederschlag gefunden hat. Obwohl bereits die Seite „Corrections to Volume 1" nicht ohne Druckfehler ist, wirkt das Buch insgesamt sorgfältig aufgebaut und ausgearbeitet. Lobenswert ist außerdem das umfangreiche Literaturverzeichnis, bei dem hinter jeder Referenz die Seitenzahlen angegeben sind, wo sie zitiert wird. Der Text ist so ausführlich gestaltet, daß die Überlegungen und Beweise i.a. gut nachvollziehbar sind – und das ist eine Verbesserung gegenüber dem ersten Band. Das Buch kommt daher durchaus auch für die Lehre in Frage, allerdings nur für höhere Semester bzw. fortgeschrittene Studenten, da die Ergebnisse und Beweise vielfach technisch aufwendig sind, und da als Voraussetzung die Beherrschung eines großen Teils des im ersten Band behandelten Stoffes erforderlich ist. Wer jedoch diese Voraussetzungen mitbringt, sollte sich nicht durch die Dicke des Buchs von diesem reizvollen Gebiet abschrecken lassen.

Eichstätt G. Wirsching

Kashiwara, M., Schapira, P., Sheaves on Manifolds (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 292), Berlin u.a.: Springer-Verlag 1990, 512 pp., Hardcover, DM 168,–

Dieser Band der Grundlehren-Reihe stellt einige wichtige Entwicklungen in der Theorie der Garben seit dem Erscheinen von R. Godement's „Topologie algébrique et théorie des faisceaux“ dar. In Termen der wohlbekannten heuristischen Entsprechung zwischen der Theorie der Garben einerseits und der Theorie der Funktionen andererseits kann man das Thema des Buches von Godement charakterisieren als die Theorie der stetigen Funktionen auf (lokal kompakten) topologischen Räumen, während das vorliegende Buch sich mit der Theorie der C^∞- oder C^ω-Funktionen auf C^∞- oder reell-analytischen Mannigfaltigkeiten beschäftigt.

Das erste Drittel des Buches ist den Ideen der Schule von Grothendieck gewidmet. Das Kapitel 1 stellt die Grundzüge der homologischen Algebra im Rahmen der derivierten Kategorien dar. In den nächsten beiden Kapiteln werden die 6 Grothendieckschen Kohomologieoperationen auf den derivierten Kategorien von Garben auf topologischen Räumen eingeführt: $Rf_*, f^*, Rf_!, f^!, \otimes^{\mathbf{L}}, RHom$. Die Operation $f^!$ ist nur im Rahmen der derivierten Kategorien definierbar; ihre Existenz ist im wesentlichen äquivalent zur Dualitätstheorie von lokal kompakten Räumen von Verdier, die die Poincarédualität bzw. Borel-Moore-Dualität verallgemeinert. Das Material dieses ersten Drittels (Kap. 1–Kap. 3.3), einschließlich wichtiger in der Form von Übungsaufgaben gebrachter Ergänzungen (Künnethformel!), eignet sich vorzüglich für eine moderne Einführung in die Theorie der Garben auf lokal kompakten topologischen Räumen.

Das zweite Drittel des Buches beschäftigt sich mit den von der Sato-Schule eingeführten zusätzlichen Strukturen auf der derivierten Kategorie der Garben, die durch die Struktur einer C^∞-Manigfaltigkeit definiert werden (Lokalisierung im Cotangentialbündel). Zunächst (zweite Hälfte von Kapitel 3) wird die Fourier-Sato-Transformation eingeführt (Analogon der Fouriertransformation in der Garbentheorie), die eine Äquivalenz von Kategorien zwischen den derivierten Kategorien von *konischen* Garben auf einem Vektorbündel auf einer Mannigfaltigkeit (d. h. invariant unter der $\mathbb{R}_+^\times$-Operation) und der entsprechenden Kategorie auf dem dualen Vektorbündel definiert. Mit Hilfe der MacPherson'schen Konstruktion der „Deformation auf die Normale“ (im Kontext der C^∞-Mannigfaltigkeiten) wird die *Spezialisierung* $\nu_M(F)$ eines Objekts der derivierten Kategorie der Garben auf X entlang einer Untermannigfaltigkeit M von X definiert. Dies ist eine konische Garbe auf dem Normalbündel von M in X. Die *Mikrolokalisierung von* F ist die Fourier-Sato-Transformierte $\mu_M(F)$ von $\nu_M(F)$. In Kapitel 4 werden die funktoriellen Eigenschaften dieser Konstruktionen, wie auch der Verallgemeinerung μhom von μ_M untersucht. Das Kapitel 5 bringt einen weiteren fundamentalen Begriff: den Microsupport oder singulären Träger $SS(\mathscr{F})$ einer Garbe $\mathscr{F}$, das Analogon in der Garbentheorie der Wellenfront einer Distribution in der Theorie der Funktionen, dessen Verhalten unter den 6 Operationen auf den derivierten Kategorien untersucht wird. Die Involutivität von $SS(\mathscr{F}) \subset T^*X$ ist im Kapitel 6 bewiesen, in dem auch – mit Hilfe von Kontakttransformationen – gezeigt wird, daß der Träger von $\mu_M(\mathscr{F})$ im Normalenkegel an $SS(\mathscr{F})$ enthalten ist. Da die Autoren ganz allgemein C^∞-Mannigfaltigkeiten studieren, sind die Definitionen und Sätze komplizierter als im komplex-analytischen Fall (in dem zum Beispiel im Falle einer perversen Garbe der singuläre Träger mit der charakteristischen Varietät des entsprechenden $\mathscr{D}$-Moduls zusammenfällt, vgl. 11.4., und eine einfache Beziehung zum Funktor der verschwindenden Zykeln existiert, vgl. 8.6.4.).

Der Rest des Buches beschäftigt sich mit Anwendungen, auf konstruierbare Garben und auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ($\mathscr{D}$-Moduln) auf Mannigfaltigkeiten. Im Kapitel 11 werden perverse Garben auf einer reell-analytischen Manigfaltigkeit eingeführt und in Kapitel 12 wird gezeigt, daß der Lösungskomplex eines holonomen $\mathscr{D}$-Moduls auf einer komplexen Mannigfaltigkeit eine perverse Garbe ist (und, wie weiter oben bemerkt, die Beziehung zwischen charakteristischer Varietät und singulärem Träger hergestellt). Die volle Entsprechung zwischen holonomen $\mathscr{D}$-Moduln und perversen Garben ist allerdings nicht durchgeführt, aber das Hauptthema des Buches sind ja C^∞-Mannigfaltigkeiten und nicht komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Eine der interessantesten Anwendungen auf konstruierbare Garben ist die mikrolokale Indexformel (11.5.), eine andere eine Lefschetz'sche Fixpunktformel für einen Endomorphismus einer Mannigfaltigkeit, der nur isolierte transversale Fixpunkte besitzt und der auf ein Objekt der derivierten Kategorie der konstruierbaren Garben geliftet ist.

Das Buch enthält eine Fülle von wichtigem und nützlichem Material, das in dieser Form nirgendwo in der Buchliteratur zu finden ist. Die Darstellung ist bemerkenswert klar und durchorganisiert. Die mitunter recht technische Natur des Stoffes erklärt sich zum Teil aus dem von den Autoren eingenommenen Standpunkt. Es ist aber darauf hinzuweisen, daß jüngere Arbeiten in der Darstellungstheorie von halbeinfachen reellen Liegruppen (z. B. von Kashiwara selbst) gezeigt haben, daß die hier entwickelte Theorie wichtige Anwendungen hat bzw. zweifellos noch haben wird. Der Kreis der Interessenten des Buches dürfte vom Forscher in der Theorie der linearen PDE über den reellen Darstellungstheoretiker bis hin zum algebraischen bzw. analytischen Geometer reichen.

Wuppertal M. Rapoport

Böttcher, A., Silbermann, B., Analysis of Toeplitz Operators, Berlin u.a.: Springer-Verlag 1990, 495 pp., hard cover, DM 128,–

The first and simplest example of a Toeplitz operator is an operator T on l^2, the Hilbert space of all square summable sequences $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$, defined by the following rule:

$$(T\vec{x})_i = \sum_{j=0}^{\infty} c_{i-j} x_j, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{*}$$

The operator T is a bounded operator on l^2 if and only if there exists a bounded measurable function c on the unit circle $\mathbb{T}$, called the symbol of T, such that

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(e^{i\theta}) e^{ij\theta} d\theta, \qquad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

By identifying l^2 with the Hardy space H^2, consisting of all square integrable functions f on $\mathbb{T}$ that have an analytic continuation on the unit disc, the action of a Toeplitz operator T may also be described by the formula

$$Tf = P(cf), \qquad f \in H^2,$$

where c is the symbol of T and P is the orthogonal projecton of $L^2(\mathbb{T})$ onto H^2. In the latter form the definition carries over readily to other Hilbert or Banach spaces of functions of one or several variables. One speaks about block Toeplitz operators when the coefficients c_j in (*) are matrices or operators.

The theory of Toeplitz operators forms an important part of modern analysis. Problems involving Toeplitz operators or their continual analogues, Wiener-Hopf integral operators, appear naturally in various branches of mathematical physics, in prediction theory and probability theory, and in engineering sciences. On the other hand, Toeplitz operators form a class of operators with a remarkable rich theory and many intriguing results, which are based on an effective combination of harmonic analysis, complex function theory and the theory of Banach algebras. E.g., Toeplitz operators provide one of the first examples for the modern index theory in which the analytical Fredholm index is identified as a topological index. The field also supplies a large number of unsolved problems, in particular, for the multi-variable case.

The authors, experts in this area, have produced a most useful book, which can serve both the beginner and the expert in the field. The first seven chapters provide a systematic and thorough account of the theory of Toeplitz operators over the unit circle. Toeplitz operators over the quarter plane are treated in Chapter VIII. Continual analogues are discussed in Chapter IX, and the last chapter presents the theory of Toeplitz determinants, including various generalizations of the classical limit theorems of Szegö and Kac-Achiezer. The emphasis is on block Toeplitz operators with matrix symbols. The operators are considered on H^2 and l^2 spaces and on various weighted H^p and l^p spaces. The main topics are evaluation and computation of the norm, inversion of the operator, approximation of the inverse by the finite section method, computation of the spectrum, necessary and sufficient conditions for the operator to be Fredholm, various Fredholm characteristics, index theory, etc.. The analysis ist carried out for various classes of symbols, e.g., continuous, piecewise continuous, $C+H^\infty$, local sectorial, Fisher-Hartwig, oscillating symbols on the line, and others. Methods from Banach algebra theory, principles of localization, and functional calculi modulo compact operators are some of the main tools. Several unsolved problems are mentioned throughout the text. Notes and comments indicating the main sources of the theory are included. The given account is up to date. In fact, many recent results known only from mathematical journals, in particular, Soviet ones, have been incorporated. The book is somewhat encyclopaedic in nature (not all results are given with a full proof), but parts of the book could be used as a text for a graduate course.

Amsterdam M.A. Kaashoek

Goldmann, H., Uniform Fréchet-Algebras, Amsterdam: North-Holland 1990, 365 S, Dfl 200.00

Das vorliegende Buch befaßt sich hauptsächlich mit neueren Entwicklungen in der Theorie der uniformen Fréchet-Algebren.

Eine *Fréchet-Algebra* ist eine vollständige metrisierbare topologische Algebra, die eine Nullumgebungsbasis aus konvexen multiplikativ abgeschlossenen Nullumgebungen besitzt. Die Topologie einer Fréchet-Algebra A läßt sich von einer Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

multiplikativer Halbnormen erzeugen. („Multiplikativ" bedeutet, daß $p_n(fg) \leqslant p_n(f)p_n(g)$ für alle $f, g \in A$.) Hat das Halbnormensystem (p_n) die zusätzliche Eigenschaft $p_n(f^2) = p_n(f)^2$ für alle $f \in A$ und $n \in \mathbb{N}$, so spricht man von einer *uniformen Fréchet-Algebra*. Eine *Motivation* zum Studium von (uniformen)Fréchet-Algebren ist die Tatsache, daß wichtige Beispiele von Fréchet-Algebren keine Banach-Algebren sind, z. B. die Räume Hol(X) und $C(X)$ holomorpher bzw. stetiger Funktionen (für nicht kompaktes X). Ein *zentrales Problem* des Buches ist die Frage, wann eine uniforme Fréchet-Algebra algebraisch und topologisch isomorph zu Hol(X) mit geeignetem X ist. Zwei *Hilfsmittel* spielen hier bei der Untersuchung einer Fréchet-Algebra A eine besondere Rolle:

1. Die *Gelfand-Transformierte:* Die Abbildung, die jedem $f \in A$ seine Gelfant-Transformierte $\hat{f}$ zuordnet, liefert eine injektive Einbettung von A in einen Raum stetiger Funktionen genau dann, wenn A halbeinfach ist. Insbesondere kann jede uniforme Fréchet-Algebra als Raum stetiger Funktionen dargestellt werden.
2. Die Darstellung einer Fréchet-Algebra als *projektiven Limes* von Banach-Algebren. Das gestattet häufig die Übertragung von Ergebnissen für Banach-Algebren auf den Fall von Fréchet-Algebren.

Eine besondere Beachtung findet in dem Buch die bis heute ungelöste Frage, ob jeder komplex-wertige Algebrahomomorphismus auf einer Fréchet-Algebra stetig ist („*Michael's Problem*"). Für Banach-Algebren läßt sich die Frage leicht mit „ja" beantworten. Das genannte Problem erschwert bisweilen die Übertragung von Ergebnissen für Banach-Algebren auf den Fall von Fréchet-Algebren.

Das Buch ist gegliedert in 3 Teile. 19 Kapitel und 49 Abschnitte. Durch die feine Einteilung und dadurch, daß den drei Teilen sowie den Kapiteln jeweils kurze Einleitungen vorangestellt sind, kann man sich gut in dem Buch zurechtfinden. Im ersten Teil werden die für das Buch wichtigsten Definitionen und Sätze über Banach-Algebren und kurz die Algebra holomorpher Funktionen in mehreren Variablen vorgestellt. Der zweite Teil behandelt die allgemeine Theorie der Fréchet-Algebren und der dritte Teil schließlich das zentrale Problem des Buches, nämlich die Darstellung gewisser Fréchet-Algebren als Räume holomorpher Funktionen. – Auffallend ist die Vielzahl der gebotenen Beispiele und Gegenbeispiele.

Ein fortgeschrittener Student mit einschlägigen Kenntnissen in Funktionalanalysis, Topologie und Funktionentheorie kann das Buch erfolgreich lesen. Es dürfte sich aber hauptsächlich an den an der Forschung interessierten Leser richten. Sein Wert besteht vor allem darin, daß viele Resultate, insbesondere des dritten Teils, – zuvor nur durch Originalliteratur zugänglich – erstmals in Buchform dargestellt werden.

Potenza H. Weber

Foias, C., Frazho, A. E., The Commutant Lifting Approach to Interpolation Problems (Operator Theory Vol. 44), Basel u.a.: Birkhäuser Verlag 1990, 632 pp., DM 224,–

Das Buch schlägt eine Brücke zwischen der analytischen Theorie der Carathéodory-Interpolation, der funktionalanalytischen Theorie von kontraktiven linearen Abbildungen zwischen Hilbert-Räumen und Anwendungen in Signaltheorie, inversen Streuproblemen usw. Es ist das dritte von 4 Büchern, die jetzt innerhalb von 4 Jahren zu dem Fragenkreis herauskommen und jeweils sehr unterschiedliche Aspekte beleuchten, vgl. [1,2, 3].

Ausgangspunkt ist die Theorie, zu der Carathéodory, Schur und Féjer die Grundsteine gelegt haben: Sei H^∞ der Raum der im Einheitskreis D beschränkten analytischen Funktionen, versehen mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\{|f(z)|;\ z \in D\}$ und H_1^∞ die Einheitskugel in H^∞. Betrachtet wird folgendes Problem: Zu einem Polynom $a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$ wird eine Funktion

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + O(z^n)$$

in H_1^∞ also eine analytische Funktion mit der Norm $\leqslant 1$ gesucht.

Für $n = 1$ ist die Lösbarkeit offensichtlich durch die Bedingung $|a_0| \leqslant 1$ charakterisiert. Im Fall $n > 1$ wird nach Schur im Sinne einer Induktion der Funktion f die Funktion

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \frac{a_0 - f(z)}{1 - \bar{a}_0 f(z)}$$

umkehrbar eindeutig zugeordnet. Es ist nun $f \in H_1^\infty$ äquivalent zu $f_1 \in H_1^\infty$. Während bei f die n ersten Koeffizienten fixiert sind, gilt dies wegen der Division durch z nur für die $n-1$ ersten von f_1. Nach n Schritten ist die Lösbarbeit des Problems entschieden.

Ein wichtiges Bindeglied für die weiteren Untersuchungen bilden die Toeplitz-Matrizen

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_0 \end{bmatrix},$$

die mit den Daten des Interpolationsproblems gebildet werden. Die Lösbarkeit des obigen Erweiterungsproblems ist äquivalent dazu, daß die Matrix A_n eine Kontraktion für den Euklidischen $\mathbb{C}^n$ ist, also stets $\|A_n x\| \leqslant \|x\|$ gilt. Dies liegt letzten Endes daran, daß die rationale Operation $A_n \mapsto (I - \bar{a}A_n)^{-1}(aI - A_n)$, die bei der obigen Konstruktion von Schur benutzt wurde, nicht aus der Klasse der kontraktiven Toeplitz-Matrizen herausführt.

Während sich das Ausgangsproblem auf H^∞, also nicht auf einen Hilbert-Raum bezieht, ist man mit der Untersuchung der Kontraktionseigenschaft bei einem Hilbert-Raum gelandet: Kann man die Toeplitz-Matrix A_n zu einer Toeplitz-Matrix A_{n+1} erweitern, so daß die Kontraktionseigenschaft erhalten bleibt? Nun lassen sich die Toeplitz-Matrizen durch eine Vertauschungsrelation charakterisieren. Mit der Shift-Matrix $S\,[S_{ij} = 1$ für $i = j+1$ und 0 sonst$]$ sind die Toeplitz-Matrizen durch $S'A = AS$ charakterisiert.

Das vorliegende Problem paßt in einen allgemeinen Rahmen. Eine Abbildung $B: H \oplus D \to H' \oplus D'$ wird als Erweiterung (lifting) von $A: H \to H'$ aufgefaßt, wenn $AP_H = P_{H'}B$ ist. Im endlich-dimensionalen Falle würde sich mit Blockmatrizen eine Aufspaltung

$$B = \begin{pmatrix} A & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

ergeben. Seien $T: H \to H$ und $T': H' \to H'$ Kontraktionen auf den Hilbert-Räumen H und H'. Wenn $A: H \to H'$ die Vertauschungsrelationen

$$T'\mathrm{A} = AT$$

erfüllt und eine Kontraktion ist, wird kurz $A \in I_1(T, T')$ geschrieben, wobei der Buchstabe I für das englische Wort „intertwining" steht. Den Mittelpunkt des Buches bildet das

Commutant Lifting Theorem. Die Kontraktionen U von $H \oplus D$ in sich und U' von $H' \oplus D'$ in sich seien Erweiterungen von T bzw. T'. Dann gibt es zu $A \in I_1(T, T')$ eine Erweiterung $B \in I_1(U, U')$.

Es gibt eine ganze Reihe von Approximations- und Lifting-Problemen ähnlicher Struktur, die auf Beurling, Gelfand, Halmos, Lax, Löwner, Nehari und Pick zurückgehen und die man – je nach Geschmack – mit stärker analytischen Hilfsmitteln oder mit Hilbert-Raum-Methoden behandeln kann. Die Autoren wählen mit Vorliebe den Zugang über das genannte commutant lifting theorem, wie auch im Titel zum Ausdruck gebracht wird. Daß man eine einheitliche Theorie allerdings oft mit einer schwerfälligen Formulierung erkauft, wird schon bei der Formulierung des Theorems deutlich.

Am Rande sei bemerkt, daß man in diesem mathematischen Gebiet auch Arbeiten unter dem Namen der Tochter des rumänischen Diktators Ceaucescu findet.

Von Anfang an werden die natürlichen Verbindungen zu Anwendungen außerhalb der Mathematik einbezogen. So besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Schurschen Prozeß und der Berechnung von Reflexionskoeffizienten bei der Streuung an geschichteten Medien. So ordnen sich inverse Streuprobleme und ähnliche Approximationsaufgaben in die Theorie der Erweiterungsprobleme ein, wie sie in diesem Buch behandelt werden.

Das Buch ist so geschrieben, daß man es einem fortgeschrittenen Studenten gut in die Hand geben kann. Da es eine breite Palette von Problemen abdeckt, muß man ihm jedoch bei der Auswahl helfen. Der Referent, der bisher den Zugang von Adamjan, Arov und Krein über die rationale Approximation kannte, hat verschiedene Kapitel des Buches äußerst gerne gelesen. Zum Nachschlagen erscheint es wegen der Breite der Probleme auch gut geeignet.

[1] Dym, H.: J Contractive Matrix Functions, Reproducing Kernel Hilbert Spaces and Interpolation. CBMS Regional Conference Series No 71, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1989
[2] Ball, J.; Gohberg, I,; Rodman L.: Interpolation of Rational Matrix Functions, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990
[3] Dubovoj, V.K.; Fritzsche, B.; Kirstein, B: Matricial Version of the Classical Schur Problem. Teubner, Stuttgart und Leipzig, 1991/92

Bochum D. Braess

Mishchenko, A.S., Shatalov, V.E., Sternin, B.Yu., Topology of Lagrangean Manifolds, Berlin u.a.: Springer-Verlag 1990, 320 S., DM 148,–

Gegenstand der Monographie ist derjenige Teil der mikrolokalen Analysis, der mit den Begriffen WKB-Methode im Sinne der semiklassischen Approximation der Quanten-Mechanik, Lagrange-Mannigfaltigkeiten, Maslovs kanonischer Operator, asymptotische Lösungen verbunden ist. Maslovs Schule, zu der die drei Autoren gehören, hat ja bekanntlich wesentliche Grundlagen der mikrolokalen Analysis gelegt, die zusammen mit Satos Theorie und Vorarbeiten aus der Hamilton-Mechanik, der geometrischen Optik und der Ausbreitung von Singularitäten bei hyperbolischen Gleichungen sowie der Pseudo-Differentialoperatoren wesentlich in Hörmanders Theorie der Fourier-Integraloperatoren eingeflossen sind.

Für das Verhalten der asymptotischen Lösungen, insbesondere von Cauchy-Problemen parameterabhängiger Gleichungen, ist die Topologie der Lagrange-Mannigfaltigkeiten von besonderem Interesse.

Die vorliegende Monographie gibt eine übersichtliche und leicht zugängliche Einführung in diese Theorie. Im Teil I wird die Topologie der reellen und komplexen Lagrange-Mannigfaltigkeiten dargestellt. Teil II enthält die Theorie des Maslovschen kanonischen Operators, ebenfalls im reellen und komplexen Fall. Weiterhin werden Anwendungen auf die Konstruktion asymptotischer Lösungen gegeben.

Das Buch ist eine schöne Ergänzung der bereits vorhandenen Literatur, insbesondere der Monographien von Maslov und Maslov-Fedorjuk, und es bewahrt auch seine Spezifik gegenüber den sehr eleganten „frühen" Darstellungen der Fourier-Integraloperatoren von Duistermaat und Duistermaat-Hörmander. Dem gesamten Anliegen verwandt sind auch die Monographien von Treves und Guillemin-Sternberg.

Das Buch ist Studenten und Aspiranten zugänglich und es ist für diejenigen Mathematiker und Physiker von Interesse, die sich mit semiklassischer Asymptotik befassen.

Berlin B.-W. Schulze

Gasper, G., Rahman, M., Basic Hypergeometric Series (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 35), Cambridge: Cambridge University Press, 1990, 287 + xx pp., £ 35.00

Anfang der fünfziger Jahre wurde im sogenannten *Bateman Manuscript Project* unter Leitung von A. Erdélyi der durchaus erfolgreiche Versuch unternommen, in drei Bänden die wichtigsten, höheren transzendentalen Funktionen und ihre Eigenschaften zu beschreiben. Lange Zeit bildete dieses Werk zusammen mit dem ebenfalls weit verbreiteten *Handbook of Mathematical Functions* von M. Abramowitz und I. A. Stegun die Standardreferenz auf dem Gebiet der speziellen Funktionen, ergänzt durch Monographien über Teilbereiche oder Teilaspekte der Theorie. Eine besondere Stellung innerhalb des Gebietes nahm naturgemäß die (verallgemeinerte) hypergeometrische ${}_rF_s$-Funktion ein, da sie eine einheitliche prägnante Darstellung nahezu aller bekannten, elementaren wie speziellen Funktionen erlaubte. In Abhängigkeit von $r+s$ Parametern $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$, ist sie bekanntlich durch die Potenzreihe

$${}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_r)_n}{(b_1)_n \ldots (b_s)_n} \frac{z^n}{n!}$$

erklärt, wobei $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(\alpha+1) \ldots (a+n-1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Spätestens seit Ende der siebziger Jahre wurde aber zunehmend klar, daß dieses Bild einer vermeintlich abgeschlossenen, klassischen Theorie nicht mehr aufrechtzuerhalten war. Äußerlich zeigte sich dieser Wandel durch das Auftreten neuer Anwendungsbereiche wie etwa in der theoretischen Physik, Kommunikationstheorie, Kombinatorik, Statistik oder Zahlentheorie, und auch der Einsatz von Computeralgebrasystemen wie Mathematica oder Macsyma erlaubte neue Anwendungsmöglichkeiten. Als Hauptgrund ist aber zu nennen, daß die Theorie selbst eine wesentliche Bereicherung erfuhr, und zwar nicht zuletzt durch die Entdeckung der sogenannten *basic* oder *q-analogues* zu allen klassischen speziellen Funktionen sowie durch die Einführung neuer Begriffe wie *quantum groups* oder *quantum operators*. Generell steht hier das Attribut „*basic*", "*q-*" bzw. "*quantum*" für eine Verallgemeinerung eines mathematischen Objekts (Zahl, Funktion, Gruppe, Integral, Differential etc.), die einen zusätzlichen Parameter q aufweist – die sogenannte Basis – und sich im Grenzübergang $q \to 1$ auf das ursprüngliche Objekt reduziert.

Das vorliegende Buch gibt eine sachkundige und ausführliche Antwort auf die Frage, was man im einzelnen unter den q-Analoga spezieller Funktionen zu verstehen hat und welche Bedeutung sie haben. Dabei lernt der interessierte Leser eine faszinierende Welt mathematischer Formeln kennen, die typisch für diesen Bereich der Analysis sind. In der Tat bestehen die Hauptaussagen in zum Teil recht kompliziert aufgebauten Identitäten, die endliche oder unendliche Summen, reelle bzw. komplexe Integrale sowie Quotienten gewisser Produkte zueinander in Beziehung setzen. Mögen die meisten dieser Formeln auf den ersten Blick auch verwirrend erscheinen, so dürfte es den Autoren dank einer sehr verständlichen Präsentation des Stoffes doch schnell gelingen, den Leser von der Nützlichkeit und Natürlichkeit der vorgestellten Ergebnisse zu überzeugen.

Im Mittelpunkt der Abhandlung steht die große Klasse der *basic hypergeometric functions,* welche hier die gleiche zentrale Rolle spielen wie die hypergeometrischen Funktionen in der klassischen Theorie. Ihre wichtigste Unterklasse bilden die verallgemeinerten Heine-Reihen, die mit Hilfe des *q-shifted factorial* $(a;q)_0=1$, $(a;q)_n=\prod_{k=1}^{n}(1-aq^{k-1})$ definiert sind durch

$$ {}_r\phi_s\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_r \\ b_1,\dots,b_s \end{matrix};q,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}]^{1+s-r}\frac{(a_1;q)_n\dots(a_r;q)_n z^n}{(b_1;q)_n\dots(b_s;q)_n(q;q)_n} $$

für $r,\ s\in\mathbb{N}_0$. Die Analogie zur ${}_rF_s$-Funktion wird deutlich, wenn man beachtet, daß für die *basische Zahl* $[a]=(1-q^a)/(1-q)$ gilt:

$$ [a]\,[a+1]\cdots[a+n-1]=(q^a;q)_n/(1-q)^n\to(a)_n \qquad (q\to 1). $$

Durch zahlreiche historische Kommentare erfährt man, daß die Beschäftigung mit diesen Funktionen bereits auf Euler, Gauß, Jacobi und Heine zurückgeht und ursprünglich durch Fragestellungen aus der Zahlentheorie und Kombinatorik (elliptische Thetafunktionen, Partitionen) motiviert wurde. Einen Höhepunkt erreichte diese Entwicklung in der Herleitung der berühmten Rogers-Ramanujan-Identitäten, deren erste lautet:

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\left[\prod_{k=0}^{\infty}(1-q^{5k+1})(1-q^{5k+4})\right]^{-1} \qquad (|q|<1). $$

Den entscheidenden Impuls erhielt das Gebiet wohl aber erst in jüngerer Zeit durch die Zusammenarbeit von G.E. Andrews, R. Askey und einigen renommierten Mitarbeitern, in der sich die kombinatorische Analysis und die Theorie der Orthogonalpolynome zu beiderseitigem Gewinn beeinflußten. Die mehr als 600 im Buch zitierten Publikationen, viele von ihnen aus den letzten Jahren, sind ein Beleg hierfür.

Was die Theorie der q-Analoga spezieller Funktionen so reichhaltig und vielschichtig macht, ist die simple Tatsache, daß jede klassische Funktion im Prinzip unendlich viele q-Analoga besitzt (denn jede q-Potenz strebt im Grenzwert gegen 1, und es gilt $(0,q)_n=1$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$, wofür es kein klassisches Gegenstück gibt). Insbesondere gehen die Autoren darauf ein, daß es für die klassischen Orthogonalpolynome jeweils mehrere bedeutende q-Analoga gibt. So werden etwa drei Systeme von q-Jacobi-Polynomen (*little, big, continuous*) diskutiert, von denen die ersten beiden bzgl. eines diskreten Maßes orthogonal sind und nur das dritte bzgl. eines absolut stetigen Maßes. Es ist darüberhinaus auch sinnvoll, wie im Buch geschehen, zweiseitig unendliche q-Reihen (*bilateral* ${}_r\psi_s$ *functions*) zu studieren und ebenfalls solche Verallgemeinerungen, in denen zwei oder mehr Basen auftreten (*bibasic, multibasic*).

Zu den wichtigsten vorgestellten Identitäten gehören zweifelsohne Jackson's q-Analogon der Dougallschen ${}_7F_6$-Summationsformel, die q-Clausen-Formeln der beiden Autoren, Bailey's Transformation zwischen zwei ${}_{10}\phi_9$-Reihen, die q-Analoga der beiden Integralformeln von Barnes über Produkte von Gamma-Funktionen sowie das q-Beta-Integral von Askey und Wilson. Es fällt auf, daß allen diesen Identitäten eine gewisse Ästhetik innewohnt, die in erster Linie aus ihrer Symmetrie bezüglich der Parameter resultiert sowie aus Eigenschaften der q-hypergeometrischen Reihen, die als *well-poised, very-well-poised* bzw. *balanced* bezeichnet werden. Es ist ein Verdienst der Autoren, diesen Aspekt in der Motivation einzelner Beweisschritte transparent werden zu lassen, was sicherlich zum Verständnis beiträgt.

Das Buch besitzt acht Kapitel, die in eine Reihe von Unterabschnitten gegliedert sind. In der Regel enthalten letztere jeweils nur eine zentrale Aussage und treten somit an die Stelle üblicher Theoreme. Am Ende jedes Kapitels findet man zahllose Übungsaufgaben und Kommentare, die den Stoff weiter vertiefen und abrunden. Eine sinnvolle Numerierung der Formeln sowie ausführliche Autor-, Symbol- und Sachregister tragen dazu bei, daß das Buch auch gut als Nachschlagewerk verwendet werden kann. Besonders nützlich dürfte in diesem Zusammenhang sein, daß die wichtigsten Formeln in einem dreigeteilten Anhang noch einmal übersichtlich zusammengestellt sind.

Die ersten drei Kapitel beschäftigen sich mit Summations- und Transformationsformeln für ${}_r\phi_s$-Funktionen, wobei zur Motivation jeweils das klassische Vorbild vorangestellt wird. Nach einem Kapitel über (komplexe) Integraldarstellungen werden im 5. Kapitel bilaterale Reihen, ausgehend von Ramanujan's ${}_1\psi_1$-Summe, behandelt. Die Kapitel 6 und 7 sind dann den q-Orthogonalpolynomen gewidmet, unter denen die Askey-Wilson und q-Racah-Polynome die „Meisterklassen" bilden, da alle wichtigen Orthogonalpolynome durch Grenzwertbeziehungen aus ihnen hervorgehen. Das Buch schließt ab mit vielen interessanten Anwendungen.

Zusammenfassend kann dem Buch von Gasper und Rahman bescheinigt werden, daß es einen hervorragenden Überblick über ein sehr aktuelles Gebiet der angewandten Analysis gibt mit Berührungspunkten zu vielen mathematischen Disziplinen. Neben klassischen Ergebnissen findet man auch viele aus jüngster Zeit, die nicht zuletzt durch die Autoren selbst erzielt wurden. Das Buch ist von vielen Forschern auf dem Gebiet der speziellen Funktionen sehnlichst erwartet worden und bereits als Standardwerk anerkannt. Es wendet sich aber auch an die vielen Nichtexperten, die in ihrer Arbeit auf die eine oder andere im Buch behandelte Formel oder Aussage aufmerksam geworden sind und mehr darüber erfahren möchten. Schließlich ist das Buch auch allen Studenten im Hauptstudium und ihren Dozenten wärmstens empfohlen, die Lust haben, sich einmal mit diesem reizvollen Gebiet zu beschäftigen.

Aachen C. Markett

Wentzell, A.D., Limit Theorems on Large Deviations for Markov Processes (Mathematics and its Applications, Soviet Series 38), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1990, 176 pp., Dfl 150.00

Das russische Original der vorliegenden Übersetzung ist 1986 im Verlag „Nauka" (Moskau) erschienen. Der Autor hatte bereits einige Jahre zuvor zusammen mit M.I. Freidlin ein vielbeachtetes Buch „Random Perturbations of Dynamical Systems" (Springer 1984, Original auf russisch: Nauka 1979) geschrieben, worin der damalige Stand der bereits Ende der sechziger Jahre begründeten Freidlin-Wentzell'schen Theorie der kleinen zufälligen Störungen von dynamischen Systemen umfassend dargestellt wurde. Ein Prototyp der in dieser Theorie erzielten Resultate ist der folgende: Sei X^ε Lösung der stochastischen Differentialgleichung $dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon) + \varepsilon\sigma(X_t^\varepsilon)\,dW_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $X_0^\varepsilon = z_0$, wobei b eine n-vektorwertige Funktion, $\sigma \equiv a^{1/2}$ eine $n \times n$ matrixwertige Funktion, W ein n-dimensionaler Wienerprozeß und ε ein reeller Parameter ist. Dann gilt unter gewissen milden Bedingungen an a und b für eine große Klasse von Teilmengen A des Pfadraums: Für $\varepsilon \to 0$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß der zufällige Pfad X^ε zu A gehört, gleich $\exp[-\varepsilon \inf_{x \in A} S(x) + o(\varepsilon)]$, wobei das „Wirkungsfunktional" S gegeben ist durch $S(x) := \frac{1}{2} \int_0^T \|a^{-1/2}(x_t)(\dot{x}_t - b(x_t))\|^2 \mathrm{d}t$, falls x absolut stetig mit quadratisch integrierbarer Ableitung $\dot{x}$ und Startpunkt z_0 ist, und andernfalls $S(x)=\infty$ gesetzt wird. Bis auf logarithmische Äquivalenz (also in diesem Sinne „grob") wird somit die Asymptotik großer Abweichungen von X^ε für $\varepsilon \to 0$ bestimmt durch $\varepsilon S(x)$. Dieses Resultat gehört zu den „groben Grenzwertsätzen für große Abweichungen bei Markoffschen Prozessen" – so der Titel einer Serie von vier Arbeiten von A.D. Wentzell in der sowjetischen „Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und deren Anwendungen" zwischen 1976 und 1982. In der dritten, 1979 erschienenen Arbeit dieser Serie hatte der Autor zusätzlich zur Diffusion der Größenordnung ε auch noch zufällige Sprungmechanismen zugelassen, bei denen die Sprunghäufigkeit von der Ordnung τ^{-1} und die Sprunggröße von der Ordnung h ist – dies erzwingt, sollte nicht der Diffusionsmechanismus den Sprungmechanismus dominieren (bzw. umgekehrt), daß ε von der Ordnung $\tau^{-1}h^2$ ist. An die Stelle des skalaren Parameters ε tritt somit das Paar (τ, h). Je nachdem, ob nun τ ebenso schnell, schneller bzw. weniger schnell gegen Null konvergiert als h, spricht der Autor von „very large", „not very large" bzw. „super-large deviations". Diese Unterscheidung wird plastisch am klassischen Beispiel von Irrfahrten ζ_n: es handelt sich dann um Abweichungen von derselben, einer kleineren bzw. einer größeren Ordnung als $\sqrt{n}$. Der Fall „nicht sehr großer Abweichungen" erlaubt es, auch Sprungverteilungen zu behandeln, die keine exponentiellen Momente, allerdings aber noch „power tails" mit zweiten Momenten besitzen. Wieder hat S die oben angegebene Gestalt, wobei an die Stelle von a jetzt die Summe aus der Diffusionsmatrix und der Matrix der zweiten Momente der Sprungverteilung tritt. In diesem Fall versagt die vom Autor um 1973 entwickelte Methode der „verallgemeinerten Cramér-Transformation"; diese Schwierigkeit wird durch eine geeignete Abschneidetechnik in der vierten Arbeit der erwähnten Serie überwunden; überdies werden dort die wichtigsten der früheren Resultate auch auf Markoffprozesse mit Werten in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ausgedehnt.

In drei der sechs Kapitel des hier zu besprechenden Buches werden nun die Resultate der vier Arbeiten in geschlossener und an einigen Stellen noch einmal verschärfter Form zusammengestellt. In der Einleitung des Buches steht die Devise: „The author preferred not to prove a great number of different limit theorems on large deviations for Markov processes independently from one another, but to deduce them from certain few standard results of general nature. This role in the present work is played by Theorems 3.2.3 and 3.3.2." Diese beiden Theoreme zusammen implizieren, in lockeren Worten ausgedrückt, daß das „grobe" asymptotische Verhalten der großen Abweichungen einer Familie X^θ von lokal unbegrenzt teilbaren Prozessen (das sind Markoffprozesse mit Diffusions- und Lévyschem Sprunganteil) mit Kumulanten G^θ durch den Exponenten $k(\theta)S_0(x)$ kontrolliert wird, falls $k(\theta)^{-1}G^\theta(t, y; k(\theta)z)$ für konvergierenden Parameter θ in hinreichend starkem Sinn gegen ein $G_0(t, y; z)$ konvergiert und $S_0(x)$ gleich dem Integral $\int_0^T H_0(t, x_t, \dot{x}_t)dt$ der Legendretransformierten $H_0(t, y;.)$ von $G_0(t, y;.)$ entlang des Pfades x ist. Die Kumulanten $G^\theta(t, y,.)$ sind im zeitdiskreten Fall nichts anderes als die logarithmierte momenterzeugende Funktion der Einschrittübergangswahrscheinlichkeiten bei Start im Raum-Zeit-Punkt (t, y). Es sei hier auch erwähnt, daß der Autor konsequent durch das ganze Buch den zeitdiskreten Fall neben den zeitkontinuierlichen stellt, was das intuitive Verständnis mancher Begriffe erleichtert.

Als Vorbereitung zum genannten Hauptresultat werden in Kapitel 2 die beiden in Wentzells Technik benötigten grundlegenden Abschätzungen jeweils für einen *festen* lokal unbegrenzt teilbaren Markoffprozeß hergeleitet. Diese beiden Abschätzungen sind die „untere" für die Wahrscheinlichkeit, daß der Pfad des Prozesses durch eine Röhre der Dicke δ um einen vorgegebenen deterministischen Pfad läuft, sowie die „obere" für die Wahrscheinlichkeit, daß der Pfad des Prozesses sich um mehr als δ von der Menge all der Pfade entfernt, deren Wirkungsfunktional S nicht größer als eine Konstante C ist.

Viele im Verlauf des Buches benötigte Grundbegriffe und Hilfsresultate allgemeiner Natur (vor allem aus der stochastischen Analysis) werden zuvor in Kapitel 1 zusammengestellt.

In Kapitel 4 werden die allgemeinen Resultate aus Kapitel 3 zur Herleitung der „Spezialfälle“ herangezogen, von denen einige hier eingangs diskutiert wurden. In Kapitel 5 wird – unter Rückgriff auf die in Kapitel 2 bereitgestellten Abschätzungen – ein Resultat von Schilder (1960) über die asymptotische Entwicklung des Erwartungswertes von $G(\varepsilon W)\exp(\varepsilon^{-2}F(\varepsilon W)$ neu bewiesen und in Anlehnung an Arbeiten von Dubrovskii (1976) auf lokal unbegrenzt teilbare Prozesse (mit endlichen exponentiellen Momenten) verallgemeinert.

Kapitel 6 wendet sich schließlich einer qualitativ völlig anderen Art von großen Abweichungen zu: es werden Markoffprozesse X^{θ} betrachtet, deren Sprungverteilungen im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung mit Parameter $\alpha < 2$ liegen (und die somit keine endlichen zweiten Momente besitzen). Die großen Abweichungen im Grenzwert kleiner Störungen rühren vor allem davon her, daß der Prozeß einen oder mehrere Sprünge vollführt; für die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen dieses Typs werden – basierend auf Arbeiten von Godovan'chuk (1978, 1981) asymptotische Formeln hergeleitet, die sich wiederum auf den klassischen Fall von Summen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen (ohne zweite Momente) spezialisieren lassen: sie liefern Resultate von Fortus (1957), Heyde (1968) sowie Verfeinerungen davon.

Das vorliegende Buch wird Forschern auf dem Gebiet sicher als Standardreferenz dienen können, und sie werden ihre Resultate auch an der Schärfe und Allgemeinheit der dort präsentierten Sätze messen können. Die Lektüre des Buches ist vor allem auch dem Fachmann zu empfehlen, der sich ein Bild von der Weiterentwicklung der Wentzell-Freidlinschen Theorie der Asymptotik großer Abweichungen bei Markoffschen Prozessen in der Sowjetunion Ende der siebziger und Anfang der achtziger Jahre machen will; in der Tat beziehen sich die fünf neuesten Referenzen des Buches auf Arbeiten, die in der Sowjetunion zwischen 80 und 84 erschienen sind. Jemand aber, der diese Theorie erst einmal kennenlernen will, sollte sich zuerst das Buch von Freidlin/Wentzell (1984) vornehmen. Dafür spricht, daß dieses mit 326 Seiten viel breiter und eher im Stil eines Lehrbuches geschrieben ist; es ist – nebenbei bemerkt – im Druck gesetzt und trotzdem billiger als der als Computermanuskript übernommene Text von Wentzell.

Der recht kurz geratene Abschnitt 0.4 des hier zu besprechenden Buches heißt „Survey of work on large deviations for stochastic processes“. Es seien an dieser Stelle exemplarisch noch zwei andere Texte aus den achtziger Jahren erwähnt, die sich mit verwandten Fragestellungen aus der Theorie großer Abweichungen beschäftigen und weitere bibliographische Notizen beinhalten: S.R.S. Varadhan, „Large Deviations and Applications“, SIAM, 1984 (ein Abschnitt davon hat den Titel „The Ventcel-Freidlin Theory“), sowie J.D. Deuschel und D. Strook, „Large Deviations“, Academic Press 1989 (im ersten Kapitel dieses Buches findet sich auch eine alternative Herleitung des eingangs erwähnten „Prototyp-Resultats“ von Wentzell-Freidlin aus dem Theorem von Schilder, die sich auf Ideen von A. Azencott (um 1978) stützt).

Linz A. Wakolbinger

Allen, A.O., Probability, Statistics and Queueing Theory with Computer Science Applications, Boston u.a.: Academic Press Inc., 1990, xxi + 740 S., £ 30.50

Auch die vorliegende zweite, überarbeitete und erweiterte Auflage des Buches von Allen richtet sich vornehmlich an den Anwender stochastischer Methoden und Modelle im

Bereich der Informatik. Es bietet eine computerorientierte Einführung in die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung einschließlich spezieller stochastischer Prozesse und behandelt die wichtigsten Bedienungssysteme (mit Anwendungen auf Computer-Systeme) sowie eine Reihe von statistischen Standardverfahren. Der Text ist leicht zugänglich und setzt nur Grundkenntnisse in Analysis, Linearer Algebra und Informatik voraus. Viele Beispiele, humorvoll aufbereitet, erleichtern das Verständnis der theoretischen Resultate. Die große Zahl der Übungsaufgaben, etwa doppelt so viele wie in der 1. Auflage, mit angegebenem Schwieriegkeitsgrad, bietet dem Leser ausreichend Gelegenheit, seine Kenntnisse zu überprüfen.

Dabei ist es nicht die Absicht des Autors, die zugrundeliegende Theorie vollständig zu entwickeln, sondern er setzt die Schwerpunkte auf Motivation und Anwendung der Ergebnisse auf Computer-Systeme. Beweise werden nur geführt, wenn sie „(a) geradlinig sind, (b) zum Verständnis beitragen und (c) nicht zu lang sind." Ersatzweise wird allerdings immer auf weiterführende Literatur verwiesen. Bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben soll gleichzeitig zum Umgang mit Personalcomputern angeregt werden, möglichst unter Einbeziehung einschlägiger Software wie z. B. MINITAB, SAS/STAT, EXPLORE, APL und *Mathematica.*

Das Buch ist seinem Titel entsprechend in drei Teile untergliedert: I. Probability, II. Queueing Theoriy, III. Statistical Inference.

Teil I enthält die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen. In § 2 werden die Grundbegriffe behandelt (Wahrscheinlichkeitsmaße, Zufallsvariable und Momente, elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte, Transformationen, Ungleichungen). § 3 stellt Eigenschaften spezieller diskreter und absolut-stetiger Verteilungen bereit, ferner den zentralen Grenzwertsatz sowie weitere Anwendungsmöglichkeiten der angesprochenen Transformationen (Laplace-Stieltjes-Transformationen, erzeugende und momenterzeugende Funktionen). Schließlich werden in § 4 noch die im Teil II benötigten Hilfsmittel aus der Theorie stochastischer Prozesse erläutert: Poisson-Prozeß, Geburts- und Todesprozeß, Markovketten, Erneuerungstheorie.

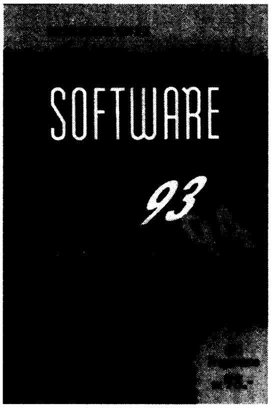
Teil II gibt eine Einführung in die wichtigsten Modelle der Warteschlangentheorie und deren Anwendungen bei Computer-Systemen (§ 5). Vor dem Hintergrund komplizierter Kommunikationssysteme werden in § 6 Bedienungssysteme modelliert, die sich als Netzwerkmodelle kanonischer Systeme beschreiben lassen. Alle wichtige Formeln für die behandelten Wartemodelle sowie eine Sammlung nützlicher APL-Programme sind als Anlage zur Verfügung gestellt.

Teil III schließlich behandelt die grundlegenden statistischen Verfahren, beginnend mit Schätzen und Datenanalyse in § 7 einschließlich Konfidenzintervallen und explorativer Datenanalyse. Verfahren zum Testen unbekannter Parameter und Verteilungen werden in § 8 diskutiert, jeweils in für den Benutzer leicht anwendbarer algorithmischer Form und anhand von Beispielen aus der Informatik. Neben Tests für Erwartungswerte und Varianzen (unter Normalverteilung bzw. asymptotischer Normalverteilung) werden Anpassungstests (X^2-, Kolmogorov-Smirnov-, Anderson-Darling-Test), Varianzanalyse sowie nicht-parametrische Tests besprochen. Neu aufgenommen wurde § 9 zur Regressions- und Korrelationsanalyse: einfache lineare Regression, nichtlineare Regression, multiple Regression.

Das Buch wird ergänzt durch einen umfangreichen Anhang: A. Statistische Tabellen, B. APL-Programme, C. Formeln zur Warteschlangentheorie, D. *Mathematica*-Programme, E. Lösungen zu den Übungsaufgaben.

Marburg J. Steinebach

...mehr als 600 Software-Pakete



ASK - Akademische Software Kooperation,
Universität Karlsruhe

Software-Führer '93/94
Lehre und Forschung
Ingenieurwissenschaften

1993. Etwa 500 S. Etwa 170 Abb. Brosch.
DM 98,– ISBN 3-540-56286-9

Dieser Führer macht erstmals in größerem Umfang Software publik, die an den Hochschulen entwickelt und von den jeweiligen Autoren angeboten wird. Er informiert in katalogartiger Darstellung über mehr als 600 Programm-Pakete von Hochschulen und kommerziellen Software-Häusern für Aufgaben in Lehre und Forschung.
Der Schwerpunkt liegt auf Simulationsprogrammen, Tutorials, Autorensystemen und Hilfsprogrammen, die eine effizientere und zeitgemäßere Ausbildung der Studenten insbesondere im Bereich der Natur- und Ingenieurwissenschaften ermöglicht.

Zusätzlich zur ausführlichen Beschreibung findet der Suchende zu jedem Programm Auskunft über

- Erstellungsdatum
- Autor
- Fachgebiet
- Anwendungsbereich
- Hard- und Software-Anforderungen
- Betriebssystem
- Preis
- Bezugsbedingungen
- Bezugsadresse

Der Software-Führer soll jährlich in aktualisierter und erweiterter Form erscheinen und nicht nur den Anwender im Hochschulbereich bei der Lösung seiner Probleme unterstützen. Vielmehr ist er auch als Forum für Software-Autoren gedacht, zur weiteren Verbreitung ihrer Programme. Dieser Software-Führer stellt einen Auszug aus dem elektronischen Software-Katalog ASK-SISY (Software Informations SYstem) der Akademischen Software Kooperation (ASK) an der Universität Karlsruhe dar.

Springer

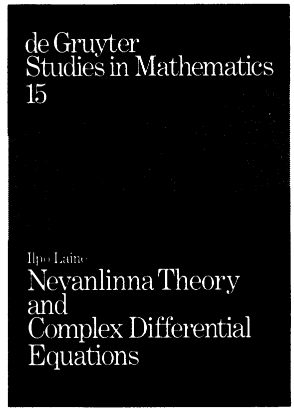
Preisänderungen vorbehalten.

d&p.221.MNT/E/1

Springer-Verlag ☐ Heidelberger Platz 3, W-1000 Berlin 33, F.R. Germany ☐ 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA ☐ 8 Alexandra Rd., London SW 19 7JZ, England ☐ 26, rue des Carmes, F-75005 Paris, France ☐ 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan ☐ Room 701, Mirror Tower, 61 Mody Road, Tsimshatsui, Kowloon, Hong Kong ☐ Avinguda Diagonal, 468-4° C, E-08006 Barcelona, Spain ☐ Wesselényi u. 28, H-1075 Budapest, Hungary

Walter de Gruyter Berlin · New York

Ilpo Laine



Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations

1992. 24 x 17 cm. VIII, 341 pages. Cloth DM 154,-
ISBN 3-11-013422-5

de Gruyter Studies in Mathematics, Volume 15

Editors: *H. Bauer; J. L. Kazdan; E. Zehnder*

This book contains a concise treatment of Nevanlinna theory applications to the theory of complex differential equations, beginning from classical results up to current research. The book is addressed to specialists in differential equations and to graduate students who would like to enter this area of mathematics.

Contents: