E 20577 F
95. Band Heft 3
ausgegeben am 29. 7. 1993

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1993

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany — ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-68723 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 95, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

L. Arnold: Zufällige dynamische Systeme
E. Bayer-Fluckinger: Galois Cohomology and the Trace Forms
R. Bölling: Karl Weierstraß – Stationen eines Lebens
J. Brüning: Zum Gedenken an Vojislav Hregor Avakumović
H.-W. Burmann, H. Günzler, H. S. Holdgrün, K. Jacobs: Wilhelm Maak 1912–1992
H. Grauert: Analytische und meromorphe Zerlegungen und der reelle Fall
I. Kersten: Ernst Witt 1911–1991
H. Koch: Nachruf auf Hans Reichardt †4. April 1991
W. Plesken: Hans Zassenhaus 1912–1991
B. Rauhut: Rudolf Henn: Eine Bilanz
M. Struwe: Das Plateausche Problem
K. Wohlfahrt: Hans Petersson zum Gedächtnis
H. Zassenhaus: Methoden und Probleme der modernen Algebra

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 95–102

Ott-Heinrich Keller

L. Stammler und W. Vogel, Halle

Am 5. Dezember 1990 verstarb im Alter von 84 Jahren Prof. Dr. Ott-Heinrich Keller in Halle (Saale). Es sei an dieser Stelle des Lebens und Wirkens dieses Wissenschaftlers gedacht, der prägend beteiligt war an der Bewahrung und vertiefend weiterführenden Belebung mathematischer Tradition über die schwere Zeit der Mitte dieses Jahrhunderts hinweg.

Keller wurde am 22. 6. 1906 in Frankfurt (Main) geboren. Er studierte an den Universitäten Frankfurt, Wien, Berlin und Göttingen. Mit einer Arbeit [4] über die lückenlose Ausfüllung des Raumes mit Würfeln erwarb er 1929 bei Max Dehn die Promotion zum Dr. phil. nat. Er war dann bis 1931 Assistent in Frankfurt, anschließend bei Georg Hamel in Berlin. Dort habilitierte er sich 1933 mit einer Arbeit [7] über Cremona-Transformationen. Bis 1945 war er, erst als Dozent, dann als apl. Professor für Mathematik und Mechanik, an der Technischen Hochschule Berlin tätig; in den Kriegsjahren ab 1941 auch, von dort abgeordnet, an der Marineschule Flensburg.

Nach kürzeren Tätigkeiten 1945 bis 1947 an den Universitäten Kiel und Münster wurde er als o. Professor an die Technische Hochschule Dresden und 1951 an die Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg auf den Lehrstuhl von Heinrich W. E. Jung berufen. In Halle hat er bis zu seinem Tode eine wissenschaftliche Tätigkeit von bemerkenswerter inhaltlicher Tiefe, Breite und Ausstrahlungskraft ausgeübt. In dem von ihm geleiteten I. Mathematischen Institut (bis eine Hochschulreform die Institutsstruktur beseitigte) hat er mit Weitblick und tiefem Verständnis sein international und auch durch den Nationalpreis gewürdigtes Ansehen einzusetzen gewußt zur Aufrechterhaltung und Weiterführung mathematischer Lehre und Forschung; so manches persönliche Eintreten wissen ihm die Mitarbeiter aus dieser Zeit zu danken.

Er war Mitglied der Akademie der Naturforscher Leopoldina in Halle und der Sächsischen Akademie der Wissenschaften. Für die Deutsche Mathematiker-Vereinigung war er insbesondere von 1960 bis 1966 im Vorstand und von 1960 bis 1961 (DMV-Tagung in Halle) als Vorsitzender tätig; dies war somit der damals letzte gesamtdeutsche Vorsitz. Daß nun das Wirken der DMV in ganz Deutschland wieder möglich geworden ist, konnte er gerade noch kurz vor seinem Tode miterleben.

Seine wissenschaftlichen Arbeiten lagen mit deutlichem Schwerpunkt in der Geometrie, der algebraischen Geometrie und in der Topologie. Sie erstrecken sich gleichwohl auch auf Themen weiter entfernter Gebiete; so wurden auch zahlentheoretische und analytische Themen sowie Betrachtungen mehr philosophischen Charakters von ihm aufgegriffen. Dem entspricht auch die Vielfalt der Arbeitsrichtungen seiner Schüler im engeren und weiteren Sinne, von denen seit den sechziger Jahren namhafte Vertreter an mehreren Hochschulen wirken.

Zunächst seien einige der geometrischen Arbeiten Kellers betrachtet. In seiner Dissertation [4] knüpft er an eine Vermutung von Minkowski über diophantische Approximationen an. Er verschärft sie, in geometrischer Fassung als Aussage über die Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes mit Würfeln, durch Verzicht auf die Voraussetzung gitterförmiger Anordnung und beweist die so betrachtete „Kellersche Vermutung" für einige Werte von n, in einem späteren Beweis [10] für alle $n \leqslant 6$ (woraus man Minkowskis Vermutung für alle $n \leqslant 8$ erhalten kann). Der bekannte Satz von Hajós (1942) über endliche abelsche Gruppen brachte dann den Beweis der vollständigen Minkowskischen Aussage; freilich bleibt die Kellersche Vermutung offen, doch spricht vieles für ihre Richtigkeit.

In diesen Arbeiten [4], [10] kann man auch eine Keimzelle des großen Enzyklopädie-Artikels [1] sehen. Er lag schon 1939 vor, wurde aber damals infolge des Krieges nicht gedruckt, sondern erschien erst 1954. Keller stellt darin das zu einem wichtigen Bindeglied zwischen Geometrie und Zahlentheorie herangewachsene Gebiet der Geometrie der Zahlen dar.

Der frühen Schaffensperiode Kellers gehört die Arbeit [5] über kompakte Mengen in unendlichdimensionalen Räumen an. Er formuliert, als er das Thema in einem der beiden von ihm auf dem Gedenk-Kolloquium für W. Rinow gehaltenen

Vorträge [41], [42] nochmals aufgreift: „Eine erste Überraschung ist, daß die Kugel im Hilbertschen Raum nicht kompakt ist und es daher keine offenen kompakten Mengen gibt. Dann kann es auch keine inneren Punkte einer kompakten Menge geben; alle ihre Punkte sind topologisch gleichwertig." In [41] nimmt er Bezug auf eine von Anderson als „Kellerscher Raum" eingeführte Verallgemeinerung des Hilbertraumes.

Zu den geometrischen Arbeiten Kellers läßt sich der G. Hamel gewidmete Aufsatz [19] zählen. Er deutet zugleich auf später ausführlicher verfolgte topologische Motive hin und wendet sich auch einem philosophischen Diskussionsthema zu, der Anschaubarkeit des Vierdimensionalen. Keller gibt darin ein aus Quadratflächen gebildetes in den 4-dimensionalen Raum einbettbares Modell der projektiven Ebene und einer mit ihr verschlungenen Kurve.

Von weitgehender Bedeutung für das Wirken Kellers in der algebraischen Geometrie ist die Serie von Aufsätzen über Cremona-Transformationen, beginnend mit [6], [7] und in weiteren umfangreichen Arbeiten bis [25] auf die Zeit um 1960 erstreckt. Ein grundlegendes Motiv zur Beschäftigung mit Cremona-Transformationen war für Keller ihre Bedeutung als Instrument zur Untersuchung algebraischer Kurven: Sowohl die Tranformationsschritte als auch die an ihrem Ende erhaltenen Standardformen führen zu Klassifikationsaussagen über die Ausgangskurve, insbesondere zur Charakterisierung ihrer Singularitäten. So eröffnet sich ein großer Bogen von den algebraischen Geometern des 19. Jahrhunderts wie Plücker und Max Noether bis zur heute weit gefächerten Theorie der Auflösung und Klassifikation von Singularitäten. Später hat Keller in dem Buch [3] solche Verfahrensweisen, auch unter Einbeziehung von Potenzreihen und deren „wesentlichen Zahlen", lehrbuchmäßig zusammenhängend dargestellt.

Schon die in den Dreißiger und Vierziger Jahren entstandenen Aufsätze [11], [14], [16], [17], [18], mit ihrer Thematik auch Arbeiten H. W. E. Jungs fortsetzend, fanden internationale Resonanz. Häufig wird die Arbeit [14] in Verbindung mit dem „Kellerschen Problem" zitiert. Keller schildert es so: „... Es sind nur die Fälle 6., 7. noch unentschieden, also die Frage, ob Polynome mit der Funktionaldeterminante 1 sich stets durch Polynome umkehren lassen. ... Mir scheint die Frage eine Untersuchung sehr zu lohnen, sie scheint jedoch bereits im ebenen Fall sehr schwierig zu sein." In der Tat, dieser ebene Fall ($n = 2$) ist immer noch offen.

Ebenfalls bis heute wiederholt aufgegriffen ist der in [9] behandelte Gegenstand. Keller schreibt: „Wir wollen uns die Aufgabe stellen, für die Weierstraß-Punkte dasselbe zu leisten, was durch Hesse für die Wendepunkte geleistet wurde ... eine in der Ebene definierte Kurve, die die Grundkurve in den Weierstraß-Punkten schneidet, und aus deren algebraischem Verhalten in den Schnittpunkten wir die Lückenzahlen ablesen können. ... Wir werden dann zu zeigen haben, daß die Weierstraß-Kurven kovariant sind gegenüber Cremona-Transformationen."

Die algebraisch-geometrischen Arbeiten setzen sich folgerichtig in einer Serie idealtheoretischer Aufsätze fort. Dazu gehören einige Arbeiten [22], [26], [34] zum Stichwort „erträglich viele Schritte" bei körper- und idealtheoretischen Operationen. In [34] nennt Keller als Ziel, Operationen zu „... vermeiden, die theoretisch leicht zu verstehen, rechnerisch aber sehr mühselig sind." Mit dem dort entwickelten Algorithmus ermittelte er z. B. die definierenden Gleichungen der rationalen Raumkurve 4. Ordnung, ein für viele Fragen bis heute, z. B. auch computergestützt, nutzbares nichttriviales Beispiel imperfekter Raumkurven.

Als ein wichtiges Ziel idealtheoretischen Arbeitens sah Keller es an (sowohl anknüpfend an seine eigenen idealtheoretischen Arbeiten, außer den genannten etwa [15], [28], [35], [36], [40], als auch in Diskussionen und Anregungen für seine Schüler), zwei große Entwicklungslinien der algebraischen Geometrie zusammenzuführen. Sie sind verbunden mit Namen wie einerseits B. L. v. d. Waerden, A. Weil und andererseits F. S. Macaulay, W. Gröbner. Inhaltlich beschrieb Keller sie einerseits als „dynamisches" Prinzip der *Spezialisierungs*vielfachheit, dem andererseits das „statische" Prinzip einer *strukturell* (zunächst als Ideallänge) definierten Vielfachheit gegenübersteht. Den Ausbau dieses Fragenkomplexes, der in der algebraischen Geometrie der letzten Jahrzehnte stattgefunden hat, verfolgte Keller stets mit großem Interesse.

Wiederum konsequent war es für ihn, einen Zugang zu Eigenschaften algebraischer Mannigfaltigkeiten nun auch auf dem Gebiet der Topologie zu suchen. Einerseits finden sich in mehreren Arbeiten, so [32], [42], [44], detaillierte Aussagen zur topologischen Struktur algebraischer Nullstellengebilde. Andererseits stellte er in [37] und [38] grundlegende Möglichkeiten topologischen Arbeitens bereit:

In [37] führt er ein von Lefschetz angedeutetes Motiv zur induktiv-definitorischen Erfassung von Schnitt- und Verschlingungszahlen vollständig durch. Mit Bezug auf die obengenannten Vielfachheitsbegriffe motiviert er sein Vorhaben: „Mir scheint, daß hier ein echtes Skandalon vorliegt. Beide Definitionen der Vielfachheit sind da und wohlbegründet, aber sie sind miteinander unverträglich. Es drängt sich daher die Frage auf, wie die Dinge in der Topologie stehen." Er sieht dann das topologische „Homologieprinzip" als Ausdruck der Spezialisierungsvielfachheit, gibt dieser aber nun eine „strukturelle" Definition: Zwei sich schneidende Zyklen werden auf den Simplexstern des Schnittpunktes eingeschränkt; die Verschlingungszahl der Einschränkungen ist die Schnittzahl der Zyklen. Dieses von Lefschetz angeregte Motiv befreit Keller durch konsequenten induktorischen Aufbau und die erforderlichen Invarianzbeweise von der Vorab-Verwendung des Homologieprinzips.

Die Arbeit [38] bietet ein vielfältig nutzbares Hilfsmittel zum Auffinden von Homologiegruppen. Keller definiert dort eine „verallgemeinerte Projektion". Bei ihr ergibt sich: „... Die Homologiegruppen erweisen sich als direkte Summen, deren Glieder den Homologiegruppen von Projektionszentrum und Projektionsschirm isomorph sind." Auf mehrere Beispiele zur Anwendung dieses Verfahrens geht Keller in [38] sogleich selbst ein: Projektive Räume, Quadriken, Graßmannsche Mannigfaltigkeiten.

Unter den topologischen Arbeiten sei schließlich noch [43] hervorgehoben, ebenfalls eine Arbeit von grundlegendem Charakter, zugleich auch von methodisch-philosophischem Interesse. Keller vergleicht dort eine ursprüngliche Fassung des Alexanderschen Dualitätssatzes als Verschlingungsaussage für Zyklen mit der späteren verallgemeinernden Umformulierung jenes Satzes in eine

Isomorphieaussage für Homologie- und Kohomologiegruppen. Zu dieser Fassung bemerkt er: „Diese Verkürzung scheint mir durch die Sache nicht erzwungen, sondern Ausdruck eines neuen Stilgefühls zu sein. Es ist doch auffällig, daß schon das Phänomen der Verschlingung aus dem Bewußtsein verschwunden ist.“ Mit den „... alten und neuen Beweisgedanken ... ist ein Beweis von Satz 1 möglich, der allen modernen Ansprüchen gerecht wird, aber nirgends in dieser Form nachzulesen ist.“ Schließlich vergleicht Keller „... die beiden Fassungen unter verschiedenen Aspekten miteinander: Anschaulichkeit, Eleganz des Beweises, Invarianz des Begriffssystems, Allgemeinheit der Aussage, Folgerungen, Ontologie mathematischer Sätze.“

Von den eingangs erwähnten Arbeiten Kellers aus anderen, zum Teil auch fernab liegenden Gebieten seien genannt: Die gruppen- und zahlentheoretischen Arbeiten [12], [21], [30], [45] über Galois-Gruppen, Gruppenkomposition (dargestellt durch Streckenkomplexe), Quadratsummen und Numeri idonei; ferner zu reell- und komplex-analytischen Themen: [13], [8] über Kettenbrüche bzw. Ableitungen (kombinatorisch-graphentheoretisch zurückgeführt auf Baum-Anzahlen) sowie [29], [33], wo elliptische Funktionen genutzt bzw. natürliche Gleichungen einer speziellen Raumkurve integriert werden. An philosophischen Darlegungen sind besonders interessant: [20] zu erkenntnistheoretischen und ontologischen Fragen der Geometrie (auch [19] berührt, wie erwähnt, diesen Fragenkreis); ferner der Aufsatz [47] (in ausführlicher Fassung [46]) zur Psychologie und Ontologie des Zahlbegriffs sowie die Fassung [39] eines Vortrags „Das Unendliche in der Geometrie“.

Ergänzend und in ihrer Gesamtkonzeption erhellend tritt den algebraisch-geometrischen und topologischen Einzelarbeiten die oben schon erwähnte Lehrbuchdarstellung [3] zur Seite. Keller gelangt darin durch Zusammenführung von Motiven der Idealtheorie, der Topologie, der Potenzreihen- und der Divisorentheorie abschließend bis zu einer eindrucksvollen Mehrfachdarstellung des Satzes von Riemann-Roch.

Ein wertvolles Buch ist ferner die „Analytische Geometrie und lineare Algebra“ [2]. Es besticht durch geometrische Plastizität, verbunden mit flexibler und in vielen Details reichhaltiger, auf konkrete Ausführbarkeit bedachter linear-algebraischer Begründung.

Die Erwähnung dieses Lehrbuchs läßt bereits das große Thema der persönlichen Wirkungskraft Kellers anklingen. Wer das Glück hatte, als Student, Schüler im weiteren Sinne, Mitarbeiter, Kollege und Freund mit Keller Verbindung zu haben, konnte stets zutiefst beeindruckt sein von Eigenschaften wie Hilfsbereitschaft, Feinfühligkeit und Toleranz bei gleichzeitiger Geradheit und Lauterkeit des Charakters. Wer ihn näher kannte, wußte, daß dies begründet war in lebendiger Verwirklichung christlichen Glaubens. Zugleich kamen Gastfreundschaft und Offenheit für anregende Gespräche immer wieder zum Tragen. An dieser Stelle muß auch hervorgehoben werden, wie wertvoll für ihn die stete Unterstützung durch seine Gattin und das von ihrer Aufmerksamkeit und Güte geprägte harmonische Familienleben war. Gäste und Freunde des Hauses erinnern sich mit besonderer Dankbarkeit an die Stunden dort, an mancherlei Ausflüge wie auch die „Heidespaziergänge“, die lange Zeit ein gern geübter Brauch waren.

Viele weitere Dinge wissenschaftlicher und persönlicher Art konnten hier nur anklingen oder gar nicht weiter erwähnt werden, so die Tätigkeit als mitbegründender Herausgeber der „Beiträge zur Algebra und Geometrie", die an anderer Stelle ausführlicher gewürdigte Mitwirkung in der Evangelischen Forschungsakademie und mancher persönliche Rat in schwieriger Situation.

Mit vielen seiner Mitarbeiter, Schüler und Freunde werden wir uns des großen Menschen und Wissenschaftlers stets dankbar erinnern.

Buchveröffentlichungen von Keller

[1] Geometrie der Zahlen. Enzykl. Math. Wiss. I.2, H.11, T.III (1954), 27,1–27,84
[2] Analytische Geometrie und lineare Algebra. Berlin: Dt. Verlag d. Wiss. 1957, 442 S.; u. weitere Auflagen
[3] Vorlesungen über algebraische Geometrie. Leipzig: Geest & Portig 1974, 334 S.

Originalarbeiten

[4] Über die lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln. Crelle **163** (1930) 231–248
[5] Die Homoiomorphie der kompakten konvexen Mengen im Hilbertschen Raum. Math. Ann. **105**, H.5 (1931) 748–758
[6] Über eine diskontinuierliche Gruppe von Cremona-Transformationen. Jber. d. Dt.-Math.-Verein. **42**, H.9–12 (1933) 130–131
[7] Cremona-Transformationen algebraischer Kurven. Crelle **169**, H.4 (1933) 193–218
[8] Über die n-te Ableitung einer impliziten Funktion. Sitz.ber. Berliner Math. Ges. XXXIV (1935) 72–86
[9] Die Weierstraßkurven einer algebraischen Kurve. Jber. d. Dt.-Math.-Verein. **45**, H.5–8 (1935) 74–75
[10] Ein Satz über die lückenlose Erfüllung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit Würfeln. Crelle **177** (1937) 61–64
[11] Über eine Kovariante bei Cremona-Transformationen. Math. Ann. **144**, H.5 (1937) 700–741
[12] Eine Bemerkung zur Berechnung der Diskriminante imprimitiver Gleichungen, insbesondere der Ikosaedergleichung. Math. Ann. **116**, H.3 (1939) 456–462
[13] Eine Bemerkung zu den verschiedenen Möglichkeiten, eine Zahl in einen Kettenbruch zu entwickeln. Math. Ann. **116**, H.5 (1939) 734–741
[14] Ganze Cremona-Transformationen. Monatsh. Math. Phys. **47** (1939) 299–306
[15] Eine Bemerkung zu den Plückerschen Formeln. Math. Ann. **118** (1943) 626–628
[16] Zu einem Satze von H. W. E. Jung über ganze birationale Transformationen der Ebene. Crelle **186**, H.2 (1949) 78–79
[17] Zur Theorie der ebenen algebraischen Berührungstransformationen. Math. Ann. **120**, H.5/6 (1949) 650–675
[18] Zur Theorie der ebenen algebraischen Berührungstransformationen. II. Teil. Die charakteristische Determinante. Math. Ann. **121** (1950) 467–495
[19] Zur unmittelbaren Anschaubarkeit 4-dimensionaler Gegenstände: Ein anschaubares singularitätenfreies topologisches Modell der projektiven Ebene im R_4. Math. Nachr. **8** (1952) 179–183
[20] Die Gründe geometrischer Gewißheit. Wiss. Z. d. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg 3; Mathemat.-naturwiss. Reihe H.5 (1953) 475–481
[21] Eine Darstellung der Komposition endlicher Gruppen durch Streckenkomplexe. Math. Ann. **128** (1954) 177–199
[22] Eine Bemerkung zur Ausführung der körpertheoretischen Operationen in erträglich vielen Schritten. Math. Z. **63** (1955) 277–285
[23] (Zusammen mit W. Engel): Heinrich Wilhelm Ewald Jung. Wiss. Z. d. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg 4; Mathemat.-naturwiss. Reihe (1955), 417–422.
Auch (gekürzt) in: Jber. d. Dt.-Math.-Verein. **58** (1955) 5–10
[24] Heinrich Brandt. Leopoldina, Reihe 3, H.1 (1955) 17–19

[25] Zur Theorie der ebenen birationalen Berührungstransformationen. III. Teil. Der Grad der Bildkurven. Math. Ann. **139** (1960) 239–254

[26] Zur Berechnung des Galois'schen Körpers und der Galois'schen Gruppe einer Gleichung in erträglich vielen Schritten. Ber. Sächs. Ak., Math.-nat. Kl. **104**, H.5 (1961) 3–23

[27] (Zusammen mit G. Liebold): Bemerkungen zur Inhaltslehre der ebenen hyperbolischen Geometrie. Math. Ann. **142** (1961) 254–258

[28] Zum Noetherschen Fundamentalsatz und zur van der Waerdenschen Fassung des Satzes vom Doppelpunktdivisor. Math. Ann. **150** (1963) 293–316

[29] Ein neuer Beweis eines Satzes von Salmon über Kurven 3. Ordnung mit Hilfe elliptischer Funktionen. Math. Z. **84** (1964) 277–278

[30] Darstellungen von Restklassen (mod *n*) als Summen von zwei Quadraten. Acta Sc. Math. XXV, F.3–4 (1964) 191–192

[31] Zur Topologie der Flächen 3. Ordnung. Forsch. u. Fortschr. Ak.-Verl. **38**, H.10 (1964) 293–295 (= Kurzfassung von:)

[32] Die Homologiegruppen der Flächen 3. Ordnung. Sitz.ber. Sächs. Ak. Math.-nat. Kl. **107**, H.1 (1965) 3–15

[33] Ein Beispiel für ein System elementar-integrierbarer natürlicher Gleichungen für eine Raumkurve. Archiv Math. XVI, F.2 (1965) 94–97

[34] Berechnung eines Primideals aus seiner allgemeinen Nullstelle. Math. Z. **87** (1965) 160–162

[35] Die verschiedenen Definitionen des adjungierten Ideals einer ebenen algebraischen Kurve. Math. Ann. **159** (1965) 130–144

[36] Eine Bemerkung zu einer Arbeit von Max Noether. Math. Ann. **159** (1965) 145–150

[37] Über eine Definition von S. Lefschetz in der topologischen Schnitttheorie. Sitz.ber. Sächs. Ak. Math.-nat. Kl. **108**, H.4 (1969) 3–29

[38] Bestimmung von Homologiebasen durch Projektionen. Math. Nachr. **45**, H.1–6 (1970) 295–306

[39] Das Unendliche in der Geometrie. Leopoldina, Reihe 3, Jg. 17.1971, (1973) 117–133

[40] Normalformen für Flächen 3. Ordnung. Beitr. Alg. Geom. **3** (1974) 11–21

[41] Innere Punkte von kompakten konvexen Mengen unendlicher Dimension. Mitt. d. Math. Gesellsch. d. DDR 1980, H.4, 58–62

[42] Die Homologiegruppen der Mannigfaltigkeit, die aus den linearen *k*-Räumen auf einer nicht-ausgearteten 2*k*-Quadrik besteht. Beitr. Alg. Geom. **9** (1980) 161–169
Auch (gekürzt) in: Mitt. d. Math. Gesellsch. d. DDR 1980, H.4, 63–66

[43] Anschaulichkeit und Eleganz beim Alexanderschen Dualitätssatz. Sitz.ber. Sächs. Ak. Math.-nat. Kl. **114**, H.3 (1980) 3–19

[44] Ergänzungen zu meiner Arbeit „Die Homologiegruppen der Mannigfaltigkeit, die aus den linearen *k*-Räumen auf einer nicht-ausgearteten 2*k*-Quadrik besteht". Beitr. Alg. Geom. **13** (1982) 127–129

[45] Über die „Numeri idonei" von Euler. Beitr. Alg. Geom. **16** (1983) 79–91

[46] Das Zählen als angeborene Verhaltensweise. Sitz.ber. Sächs. Ak. Math.-nat. Kl. **117**, H.5 (1984) 3–36

[47] Die Zahl. Leopoldina, Reihe 3, Jg. 29.1983 (1986) 121–124

Von Keller angeregte bzw. (als Erst-Gutachter) betreute Dissertationen

[48] Engel, W.: Primteiler höherer Art im rationalen Funktionenkörper von *n* Veränderlichen und ihr Verhalten bei Cremona-Transformationen. Diss. Halle 1953

[49] Mrowka, E.: Automorphismen positiver ternärer quadratischer Formen. Diss. Halle 1955

[50] Pfeiffer, R.: Komplexe Farey-Netze und die Reduktion binärer quadratischer Formen $K(i)^n$. Diss. Halle 1957

[51] Pazderski, G.: Die Ordnungen, zu denen nur Gruppen mit gegebener Eigenschaft gehören. Diss. Halle 1958

[52] Herrmann, M.: Über birationale Berührungstransformationen zweiter Ordnung. Diss. Halle 1958

[53] Günther, H.: Die quadratischen birationalen Transformationen der Strahlen des R_3. Diss. Dresden 1960
(S. auch: Wiss. Z. d. TU Dresden **13**, H.3 (1964), 727–743)
[54] Liebold, G.: Zur Inhaltslehre der ebenen hyperbolischen Geometrie. Diss. Halle 1961
(s. auch [27])
[55] Fritzsche, R.: Beitrag zur Theorie der Modulfunktionen 2. Grades. Diss. Halle 1962
[56] Krötenheerdt, O.: Über einen speziellen Typ alternierender Knoten. Diss. Halle 1962
[57] Renschuch, B.: Verallgemeinerungen des Bézoutschen Satzes. Diss. Halle 1964
[58] Schmidt, W.: Zum Begriff des Leitideals in Potenzreihenringen. Diss. Halle 1965
[59] Vogel, W.: Idealtheoretische Schnittpunktsätze in homogenen Ringen mit Vielfachkettensatz. Diss. Halle 1965
[60] Stammler, L.: Resultantentheoretische Vielfachheitsdefinition zur Grundlegung bei Schnitt- und Berührungsproblemen. Diss. Halle 1965
[61] Nowotny, A.: Eine spezielle windschiefe Projektion zur Abbildung des projektiven vierdimensionalen Raumes in eine Hyperebene. Diss. Halle 1967
[62] Drechsler, K.: Homologiegruppen rationaler Varietäten. Diss. Halle 1968
[63] Lanckau, R.: Das verallgemeinerte freie Produkt in primitiven Klassen universeller Algebren. Diss. Halle 1968
[64] Ihle, W.: Untersuchungen über vollständige Quadriken. Diss. Halle 1968
[65] Weisbrod, J.: Torsentreue Abbildungen des Linienraumes. Diss. Halle 1971
[66] Buchsteiner-Kießling, E.: Über gewisse globale und lokale topologische Bedingungen. Diss. Halle 1975
[67] Schiemann, G.: Berechnung der Homologiegruppen singularitätenfreier algebraischer Hyperflächen und Konstruktion von Repräsentanten ihrer Erzeugenden. Diss. Halle 1977

Prof. Dr. Wolfgang Vogel,
Doz. Dr. Ludwig Stammler
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Postfach
O-4010 Halle

(*Eingegangen 8. 4. 1992*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 103–120

On the work of Andreas Floer

S. K. Donaldson, Oxford

This article is based on a lecture given at the DMV meeting in September 1991, in which I described some of the main strands in Floer's work. In this written version I have added some extra material, discussing Floer's later work on instanton homology, in line with the title which Floer originally proposed for the DMV lecture: *"Gauge theory and the category of* 4*-dimensional cobordisms"*.

1 Early Work

The background for much of Floer's work is a multi-faceted analogy between two areas of differential geometry: on the one hand *gauge theory*, and its links with the topology of 3 and 4-dimensional manifolds, and on the other hand *symplectic geometry*, and in particular the approach to symplectic geometry based on "holomorphic curves". Let us begin by recalling some of the basic ideas in these subjects. In gauge theory, over a Riemannian base manifold Z and with structure group a compact Lie group G, we study connections on a principle G-bundle $P \to Z$. Such a connection A has a curvature tensor $F(A)$ which lies in $\Omega^2(\mathrm{ad}\,P)$ – the 2-forms on Z with values in the associated bundle of Lie algebras. The Yang-Mills functional

$$E(A) = \int_Z |F(A)|^2$$

is a measure of the "energy" of a connection. If the energy is zero, so the curvature vanishes everywhere, the connection is locally trivial, and globally is determined by its *holonomy representation.*

$$\varrho_A : \pi_1(Z) \to G.$$

The Euler-Lagrange equations associated to E, regarded as a functional on the space of all connections, are the Yang-Mills equations. These are second-order PDE which are nonlinear, if the group G is not Abelian. The historical roots of the subject lie in electromagnetism, since one obtains the familiar linear Maxwell equation by taking the special case of the abelian structure group S^1 (and a Lorentzian metric on Z).

Turning to symplectic geometry: a symplectic structure on a manifold V^{2n} is a 2-form ω on V which is closed ($d\omega = 0$) and everywhere non-degenerate (i.e. ω^n is a volume form). The roots of this subject lie in Hamiltonian dynamics. If $H: V \to \mathbf{R}$ is a smooth function on V we have an associated vector field $v_H = \omega^{-1}(dH)$, and this generates a 1-parameter group $f_t: V \to V$ of "symplectomorphisms", i.e. diffeomeorphisms with $f_t^*(\omega) = \omega$. When V is the cotangent bundle of another manifold N, with its canonical symplectic form $\sum dq_i \wedge dp_i$, this flow corresponds to solutions of Hamilton's equations

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

To see how these subjects come together, let us consider the case when the base manifold Z for our gauge theory is a compact, oriented, Riemannian 4-manifold. Then for any connection we can form the integral:

$$(1) \qquad \varkappa = (8\pi^2)^{-1} \int_Z \mathrm{Tr}(F(A)^2).$$

According to the Chern-Weil theory, this integral is a topological invariant of the bundle P; it does not depend on the particular connection A on P. For example when $G = SU(2)$, $\varkappa = \langle c_2(P), [Z] \rangle$. Now the metric on Z allows us to decompose the curvature tensor into self-dual and anti-self-dual pieces

$$F(A) = F^+(A) + F^-(A),$$

according to the eigenspaces of the $*$ operator on 2-forms. One finds that

$$E(A) = \|F^-\|^2 + \|F^+\|^2$$
$$8\pi^2\varkappa = \|F^-\|^2 - \|F^+\|^2.$$

This means that if $\varkappa(P) \geqslant 0$ the energy $E(A)$ is bounded below by $8\pi^2\varkappa$, with equality if A has anti-self-dual curvature $F^+(A) = 0$. This is the well-known "instanton" equation in gauge theory: it is a first order, nonlinear, equation whose solutions automatically satisfy the full Yang-Mills equations, and which minimise energy as we have just seen.

To obtain the analogous differential-geometric set-up in the symplectic case we suppose that we have a symplectic manifold (V, ω) which has in addition a Hermitian metric; otherwise said, there is an almost-complex structure I on V such that $v \mapsto \omega(v, Iv)$ is a positive definite metric on each tangent space. We now consider *smooth maps* from a closed, oriented, Riemannian surface Σ to V. For any such map f we can form two integrals; first the "energy" used in the theory of harmonic maps:

$$e(f) = \int_\Sigma |\nabla f|^2,$$

and second the topological invariant

$$(2) \qquad D(f) = \int_\Sigma f^*(\omega).$$

The latter is just the "degree" of the homology class of the image $D(f) = \langle \omega, f_*(\Sigma) \rangle$. Now we decompose the derivative ∇f into complex linear and anti-linear parts

$$\nabla f = \partial f + \bar{\partial} f,$$

and one finds that:

$$e(f) = \|\partial f\|^2 + \|\bar{\partial} f\|^2$$
$$D(f) = \|\partial f\|^2 - \|\bar{\partial} f\|^2$$

So in classes of positive degree the energy is bounded below by D, with equality if and only if f is a *holomorphic* map, with $\bar{\partial} f = 0$. In the case when V is a complex manifold, and ω is the imaginary part of a Kähler metric, these are just the usual holomorphic maps from Σ, regarded as a Riemann surface. The holomorphic equation $\bar{\partial} f = 0$ is a first-order equation whose solutions are automatically harmonic maps (and the images are minimal surfaces in V). The solutions are the analogues of the instantons in the gauge theory case.

To sum up, we have analogous differential-geometric objects: instanton connections over Riemannian 4-manifolds and holomorphic maps from surfaces into symplectic, almost complex, manifolds. On the one hand this can be seen as a part of a wider analogy between Yang-Mills solution and harmonic maps, on the other hand the two first-order equations have distinctive and parallel properties of their own; not seen in the second order variational equations. For example, the linearisations of the first-order equations involve operators with topologically non-trivial symbols, and these gives rise to positive dimensional *moduli spaces* of solutions. An essential feature in each case is the *stability* of these moduli spaces with respect to changes in the underlying differential geometry. In the gauge theory case we can vary the Riemannian metric on the 4-manifold, and in the symplectic case we can vary the complex structure on the symplectic manifold V. In both situations we can find essential features of the solutions which do not depend on the choice of these structures.

Floer moved between these two areas: gauge theory and symplectic geometry, from the beginning of his research career. In his Bochum doctoral thesis [5] he extended the approach of Conley and Zehnder to the Arnold conjecture in symplectic geometry, which we will discuss in Section 2 below. Shortly after, in work [6] supervised by Taubes, he initiated the study of "magnetic monopoles" on asymptotically Euclidean 3-manifolds. These magnetic monopoles arise in Yang-Mills-Higgs theory. One considers, in addition to a connection on a principle bundle $P \to Z$, a "Higgs field" ϕ, which is a section of an associated vector bundle. The Higgs field can be incorporated into the energy Lagrangian in various ways. In the case at hand we take the Higgs field to be a section of the bundle of Lie algebras $\operatorname{ad} P$ and the energy

$$E(A, \phi) = \int_Z |F(A)|^2 + |\nabla_A \phi|^2.$$

This is related to pure Yang-Mills theory on the product $Z \times \mathbf{R}$. When Z is 3-dimensional there are special solutions which correspond to the instantons in 4-

dimensions, and these are called "magnetic monopoles". The equations are only interesting on non-compact 3-manifolds, and one imposes the boundary condition that $|\phi|$ tends to a constant M at infinity. In the basic case when $Z = \mathbf{R}^3$ an explicit solution was discovered by Prasad and Sommerfeldt, for the structure group $SU(2)$. It has a "particle like" character, with rotational symmetry about a centre in $\mathbf{R}^3$, and the energy density concentrated in a ball of radius $\mathcal{O}(M^{-1})$ about the centre. The nonlinearities in the equation govern the behaviour of the solution near the centre: at infinity the solution is asymptotic to the fundamental solution of a linearised equation: it esentially behaves like a familiar electromagnetic field.

Floer considered a general, asymptotically Euclidean, Riemannian 3-manifold Y and showed that, when M is large, there are monopole solutions on such a manifold. He proved this using a "gluing" procedure, of the kind introduced by Taubes [13]. In this approach one starts by constructing a connection and Higgs field (A_0, ϕ_0) which is an approximate solution of the monopole equations. To do this one identifies a ball in Y with a ball in Euclidean space, using geodesic coordinates. Inside this ball one defines A_0, ϕ_0 to be equal to the corresponding Prasad-Sommerfeld solution. Outside a slightly larger ball one defines A_0, ϕ_0 using the fundamental solution of the linearised, electro-magnetic, equation, and one interpolates smoothly between these pieces, in the remaining annulus, by means of a cut-off function. The pair A_0, ϕ_0 fails to be a solution of the monopole equations on Y for three different reasons:

(1) In the interior ball the metric on Y is not Euclidean, so the Prasad-Sommerfeldt solution on $\mathbf{R}^3$ does not transplant to a precise solution here.

(2) In the exterior region, the electro-magnetic solution is not a precise solution, due to the higher order, nonlinear, terms in the monopole equation.

(3) In the intermediate annulus there are additional error terms introduced by the cut-off functions.

The strategy then is to seek a nearby solution of the equation

$$(A, \phi) = (A_0, \phi_0) + (a, \psi),$$

with (a, ψ) small, in appropriate norms. The monopole equation for (A, ϕ) is now regarded as an equation for (a, ψ), which we can write symbolically as

$$\mathscr{D}(a, \psi) + N(a, \psi) = J_0,$$

where $\mathscr{D}$ is a linear differential operator, and N contains non-linear terms. The right-hand side J_0 contains the fixed error terms, listed above, in the approximate solution. One shows that this equation has a small solution, when J_0 is small, using an implicit function theorem. The key to this is to construct an inverse of the linear operator $\mathscr{D}$, and to estimate its operator norm, in suitable function spaces. On the other hand, one shows that when M is large, so the basic solution is extremely localised, the initial error term J_0 is small. Gluing techniques of this kind are a powerful analytical tool for constructing solutions of various non-linear equations, and they form one of the main themes in Floer's work. We will see in the next two Sections how these techniques are applied to the instanton and holomorphic equations: another very interesting problem which Floer treated is the existence of self-dual metrics on connected sums [9].

About the same time as Floer's work, P. Braam [2] studied monopoles on hyberbolic 3-manifolds. Apart from this, not very much has been done in the area, and there appears to be a good deal of scope for further research, understanding moduli spaces of monopoles on general 3-manifolds. (In the case of $\mathbf{R}^3$ a great deal is known about the topology of the monople moduli spaces, see [3] for example.)

2 The Arnold Conjecture and Instanton Homology

One of Floer's most decisive achievements was his solution of the "Arnold conjecture" on fixed points of a symplectomorphism. This conjecture has its roots in the work of Poincaré on "twist maps". Let Ω be the annulus $\{1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$ in $\mathbf{R}^2$ and $f: \Omega \to \Omega$ be an area-preserving diffeomorphism which preserves the two boundary components and rotates them in opposite senses. The Poincaré-Birkhoff theorem states that such a map f must have a fixed point in Ω. The motivation for studying these fixed points was the case when f is the return map of a dynamical system in 3 dimensions, with cross-section Ω; then the fixed points of f correspond to closed orbits of the dynamical system. The area-preserving hypothesis is essential, since it is easy to see that the conclusion is false without it. It is also easy to see that the result is true in the case when f is a member of a 1-parameter subgroup generated by a Hamiltonian H on Ω. For the hypotheses require that the normal derivative $\partial H/\partial r$ has opposite signs on the two boundary components: say $\partial H/\partial r > 0$ when $r = 1$ and $\partial H/\partial r < 0$ when $r = 2$. Thus H must have an interior maximum in Ω, where the derivatives of H vanish, and this is a fixed point of f.

In his book [1], Arnold asked whether a similar result holds for a symplectomorphism $f: V \to V$ of a compact $2n$-dimensional symplectic manifold. This possibility is again suggested by the case when f is generated by a Hamiltonian $H: V \to \mathbf{R}$. Suppose for simplicity that H is a Morse function (which will imply that all fixed points are nondegenerate). Then we know that the number of critical points of H is bounded below by the topological invariant

$$B(V) = \sum_{\lambda} \dim H_{\lambda}(V; k),$$

where we take cohomology in any co-efficient field k. This is the basic principle of Morse theory, and it holds just because the homology can be computed from a chain complex (C_*, d) where the chain group C_λ in dimension λ has a basis corresponding to the critical points of the Morse function H. The passage to homology can only reduce the dimensions, so

$$\#\ \text{Critical points} = \sum_{\lambda} \dim C_{\lambda} \geqslant \sum_{\lambda} \dim H_{\lambda} = B(V),$$

and our result follows since, again, the critical points of H are fixed points of f.

Of course, it is not true that all symplectomorphisms are generated by Hamiltonians. Apart from anything else, there is an obvious obstruction in $H^1(V;\mathbf{R})$. To state the general conjecture we consider a symplectomorphism f which is isotopic, through symplectomorhisms, to the identity map. Such a map f defines a "Calabi class" $C_f \in H^1(V;\mathbf{R})$. For example, a rigid rotation of a symplectic torus $\mathbf{R}^{2n}/\Lambda$ obtained from the translation by a vector $\tau \in \mathbf{R}^{2n}$ has Calabi invariant $\omega(\tau) \in (\mathbf{R}^{2n})^* \cong H^1(\mathbf{R}^{2n}/\Lambda)$. Arnold's conjecture (which he proved for maps close to the identity) is that any such symplectomorphism f which has nondegenerate fixed points and $C_f = 0$ must have at least $B(V)$ fixed points. (If one wants to allow degenerate critical points one should replace $B(V)$ by the cup-length of V.) The point to emphasise is that the bounds one expects in the symplectic case can be much stronger than the elementary bound by the Euler characteristic, which holds for any smooth map isotopic to the identity.

Two approaches to these fixed point questions had been developed before Floer's work. One approach, which was used by Conley and Zehnder [4] to prove the conjecture for tori, is based on the calculus of variations. Consider the space LV of free, null-homotopic, loops in V. Suppose for simplicity that $\pi_2(V) = 0$, so any loop $\gamma \in LV$ bounds a disc $\delta : D^2 \to V$, unique up to homotopy. We define a functional $S : LV \to \mathbf{R}$ by

$$(3) \qquad S(\gamma) = \int_{D^2} \delta^*(\omega).$$

(To see that this is well-defined, one glues a pair of discs along their boundaries.) The basic idea is to apply variational arguments to functionals like S. More precisely, let $f: V \to V$ be our symplectomorphism and consider paths $\gamma : [0,1] \to V$ with $\gamma(1) = f(\gamma(0))$. Let $L_f V$ be the component in the space of these paths which corresponds to the null loops under the isotopy from f to the identity. Fix a base path $\gamma_0 \in L_f V$ and for any other path γ consider a map $\delta : [0,1] \times [0,1] \to V$ with

$$\delta(1,s) = f(\delta(0,s)), \quad \delta((t,0) = \gamma_0(t), \quad \delta(t,1) = \gamma(t).$$

Then set

$$S_f(\gamma) = \int_{[0,1]^2} \delta^*(\omega),$$

giving a functional S_f on $L_f V$. It is easy to see that the critical points of S_f on L_f are precisely the constant paths, which correspond to the fixed points that we seek. (Another, equivalent, set-up is to deform the functional S on the same space LV by adding a term from a time-dependent Hamiltonian.)

The problem that we are lead to, finding critical points of a functional on a space of paths, is in some respects similar to familiar topics in the calculus of variations, such as the search for geodesics as a critical points of the energy function. But his symplectic case is quite different from the analytical point of view. In these classical variational problems one treats functionals that are "almost-positive" in the sense that their Hessian at any critical point has only a finite number of negative eigenvalues: thus one can attach an index to each critical point. The functionals have compactness properties which can be used to find critical points by Morse theory or mini-max arguments. The problem we are considering is quite different: the Hessians at critical points have infinitely many positive and negative eigenvalues, the functional is unbounded in both directions, and there are no compactness properties. For example consider the space $V=\mathbf{C}$ with the standard symplectic form. We can write a loop as a Fourier series

$$\gamma(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

and the functional S is the quadratic function

$$S(\gamma)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} n|a_n|^2.$$

So we have an eigenspace decomposition

$$T(L\mathbf{C})=\mathscr{H}^+\oplus\mathscr{H}_0\oplus\mathscr{H}^-,$$

where the part $\mathscr{H}^+$, $\mathscr{H}^-$ associated to the positive and negative eigenvalues of the Hessian are the infinite dimensional spaces of positive and negative frequency Fourier series.

In the Conley-Zehnder approach one gets around these difficulties by projecting the infinite dimensional problem onto a large finite dimensional subspace, and then using ordinary Morse theory on this subspace. This works well when V is a torus, since the loops can be represented by Fourier series, and also, as Floer showed [5], for some other cases such as products of surfaces. For more general manifolds V the method was limited by the difficulty of choosing a finite dimensional model for the loop space.

A second approach to these fixed point problems was found by Gromov. In his seminal paper [12] Gromov used the homolomorphic maps from 2-dimensional surfaces into a symplectic manifold to obtain a whole range of new results in symplectic geometry. Here we have to choose an almost-complex structure to define the relevant holomorphic maps, but the conclusions one draws in the end are independent of this choice. Among his many other results Gromov proved that a map f of the form considered above has at least *one* fixed point. Gromov's proof was rather indirect: it hinges on establishing the existence of a certain holomorphic may by deforming the almost-complex structure on a product space $V\times S^2$. It is not clear from Gromov's approach how the topology of V should produce more critical points.

Floer's attack [7] on the Arnold conjecture brought these two points of view (variational arguments and holomorphic curves) together. To explain his idea we should step back to review the basic statement in Morse theory, discussed above, that the homology of a (compact) manifold W can be computed from a chain complex where the chain groups are generated by the critical points of a Morse function $g: W\to\mathbf{R}$. This can be seen in a number of ways. One way goes through a cell decomposition of W using the gradient flow of g, relative to an auxiliary Riemannian metric on W. In fact we get two, dual, cell decompositions using the ascending and descending flows. Another way came to prominence in the famous paper of Witten [15]. In this approach one gives an explicit description of the boundary operator $\partial : C_\lambda \to C_{\lambda-1}$, as follows. We look at the integral curves

$$\sigma : \mathbf{R} \to W,$$

of the gradient vector field, i.e. solutions of the equation $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t = -(\mathrm{grad}\, g)_{\sigma(t)}$. Any curve has limits as $t \to \pm\infty$, which are critical points of g. For two critical points p, q we let $M_0(p,q)$ be the space of gradient curves with these limits, modulo the obvious action of $\mathbf{R}$ be reparametrisation. Then one sees that, for a general metric on W, the dimension of $M_0(p,q)$ is the difference of the Morse indices of p and q. In particular, if p has index λ and q has index $\lambda - 1$ the space $M_0(p,q)$ is a finite set. These sets are the geometric data one needs to define the boundary operator ∂. If one works with $\mathbf{Z}/2$ co-efficients, one simply defines the matrix entry of ∂ corresponding to a pair p, q to be the number of points in $M_0(p,q)$, modulo 2. For integer co-efficients, one needs to discuss orientations and attach a sign ± 1 to each point of $M_0(p,q)$: then the matrix entry is given by counting the points with sign. Now, starting from this definition, if one shows that

(1) The map ∂ satisfies $\partial^2 = 0$, so (C_*, ∂) is a chain complex,

(2) The chain complexes constructed from different Morse functions, or metrics on W, are chain homotopic,

then one sees that the homology groups of (C_*, ∂) are topological invariants of W; and of course these are just the ordinary homology groups of W.

This yield a rather attractive approach to the ordinary Morse theory. It is not fundamentally different to the other approach, since one can interpret the matrix entries as the intersection numbers of the cells in the two cell decompositions. But it is not hard to establish points (1) and (2) directly, and thus to bypass a good deal of the ordinary theory. For example, to see (1), we consider critical points p, r of indices λ, $\lambda - 2$. Then the space of flow lines $M_0(p,r)$ is a 1-dimensional manifold, which will not, in general be compact. Suppose q is a critical point of index $\lambda - 1$, and that σ_1, σ_2 are gradient lines from p to q and q to r respectively. Then one can construct a family of gradient lines $\sigma_1 \#_\varepsilon \sigma_2$, indexed by a real parameter $\varepsilon \in (0,1)$ which start at time $-\infty$ at p, move down to a neighbourhood of q at time 0, following closely a translate of σ_1, and then, after dallying for a time $O(\varepsilon^{-1})$ near q, move down to r at time $+\infty$, following closely a translate of σ_2. What one needs to see is that the ends of the manifold $M_0(p,r)$ are made up precisely of these families. In other words we can compactify $M_0(p,r)$ by adding points corresponding to "factorised" flow lines, which go from p to r via some point q of index $\lambda - 1$. Then the number of ends of $M_0(p,r)$ is the sum

$$\sum_{q,\, \mathrm{ind}\, q = \lambda - 1} \# M_0(p,q) \times \# M_0(q,r)$$

and this is just the matrix entry of the composite $\partial^2 : C_\lambda \to C_{\lambda-2}$. (Here we either reduce modulo 2 or count with orientations and signs, depending on the co-efficients.) Thus the assertion that $\partial^2=0$ follows from the fact that the boundary of a 1-manifold is zero. There is a similar direct proof of the second assertion, using the flow lines in a family to define the matrix elements of a chain homotopy.

Floer's wonderful insight was that one can use this approach to set up a Morse theory, and hence appropriate homology groups, in infinite-dimensional situations where the ordinary cell-decomposition point of view does not apply. The crucial thing is to have a good understanding of the analogues of the gradient curves σ. With this insight we turn back to our symplectic geometry discussion, and the functional $S: LV \to \mathbf{R}$. This will play the part of the function $g: W \to \mathbf{R}$ above. What are the gradient curves of S? We fix a Hermitian metric on V and use this, in a standard way, to define a metric on the loop space LV, via the L^2 norm of a vector field along a curve. The gradient curves are maps from $\mathbf{R}$ to LV, and we can think of these as maps from the cylinder $S^1 \times \mathbf{R}$ to V. The essential point now is that *the gradient curves correspond to the holomorphic maps from the cylinder to the almost-complex manifold V.* Here we use the obvious complex structure on the cylinder. The verification of this point is a very simple calculation. To get control at infinity, we restrict to maps f on $S^1 \times \mathbf{R}$ with finite energy

$$\int_{S^1\times\mathbf{R}} |\nabla f|^2 < \infty,$$

and one can show that this implies that the map extends smoothly to the conformal compactification S^2 of the cylinder. The images of the poles in S^2 are, of course, analogues of the limits of σ at $\pm\infty$. The moduli spaces of such holomorphic maps are precisely what are studied in Gromov's theory. In sum, we can hope to base a "Morse theory" for the function S on the spaces of holomorphic curves in V. The homology groups we obtain can be thought of formally as the infinite dimensional homology of the loop space. In fact it is natural to regard the homology groups as lying in roughly the "middle dimension", since one should think of the infinite dimensional positive and negative spaces for the Hessian at a critical point as being of comparable size.

To simplify things, we have overlooked an important point in the preceding discussion. To define the function S on the loop space we assumed that $\pi_2(V)=0$, and under this condition the only holomorphic curves will be constants so the theory will not be interesting. Suppose we want to study a manifold, such as complex projective space, with $\pi_2(V)=\mathbf{Z}$. Then the loop space is not simply connected and the functional S can be defined on a covering of the loop space. Alternatively, S can be defined as a map from LV to the circle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, but this is not a fundamental problem, since gradient curves still make sense. In any case, for the Arnold conjecture we were interested in the twisted loop space $L_f V$, where f is isotopic to the identity, and here we still get something interesting when $\pi_2(V)=0$. In this twisted case the gradient curves correspond to "holomorphic strips", i.e. holomorphic maps

$$\phi : [0, 1] \times \mathbf{R} \to V,$$

with $\phi(1,t)=f(\phi(0,t))$. The gradient curves between critical points p, q, which we have seen are fixed points of $f: V \to V$, correspond to maps ϕ with

$$\lim_{t\to\infty} \phi(s,t) = p, \qquad \lim_{t\to-\infty} \phi(s,t) = q.$$

From the analytical point of view these behave much like holomorphic spheres. They enjoy certain compactness properties and there is a *Fredholm* index $\delta(p,q)$ associated to any pair of fixed points such that the moduli space $M(p,q)$ of holomorphic strips with these limits is, generically, a manifold of dimension $\delta(p,q)$. As before, there is a translation action of $\mathbf{R}$ on $M(p,q)$ with quotient $M_0(p,q)$ of dimension $\delta(p,q)-1$. We interpret $\delta(p,q)$ as the difference of the "Morse indices" of the function S_f at the two critical points, so one makes sense of this difference even though the individual indices are infinite. In fact, in the case at hand, there is a way to fix a finit "renormalised index" $\lambda(p)$ of each fixed point p, so that the difference $\lambda(p)-\lambda(q)$ is $\delta(p,q)$. Thus Floer was lead to define chain groups C_λ generated by the fixed points of renormalised index λ, and a boundary map ∂ whose matrix entries are obtained by counting points in the 0-dimensional space $M_0(p,q)$, when pq have adjacent indices, just as before.

The key thing is then to establish the analogues of points (1) and (2) in this infinite dimensional situation. The topological scheme is given by the finite dimensional model, and one has to show that the moduli spaces have the appropriate properties. Essentially this comes down to understanding the failure of compactness. For example the analogue of the construction of the gradient paths $\sigma_1 \#_\varepsilon \sigma_2$ is a "gluing construction" for holomorphic strips, which is similar to the gluing problem for monopoles that we described in Section 1. Given a pair of holomorphic strips with a common end point one constructs an approximate solution to the holomorphic equations using cut-off functions, and then applies an implicit function theorem to deform this to a genuine solution.

Putting this together, Floer obtained a chain complex generated by the fixed points whose homology is independent of the continuous deformation of the problem: i.e. of the map f (with trivial Calabi class) and the auxiliary Hermitian metric on V. Thus the sum of the dimensions of these homology groups provides a lower bound on the number of fixed points. To solve the Arnold conjecture he used the hypothesis that f is isotopic to the identity. This means that we can compute the homology groups using a map f' which is close to the identity, and generated by a Hamiltonian H on V. Then he showed that in this case the Morse theory in $L_{f'} V$ based on holomorphic strips essentially reproduces the ordinary Morse theory of H on V. So we conclude that the homology groups, for *any* of our maps f are the ordinary homology groups of V, and the Arnold bound on the number of fixed points follows immediately.

In the situation we have been considering above the Floer groups do not lead to any new structures – the whole point is that we reproduce the ordinary homology of the symplectic manifold. However if one varies the set-up slightly this "infinite dimensional homology" becomes more mysterious. When $\pi_2(V)$ is non-trivial the homology groups are no longer graded by the integers, but by $\mathbf{Z}/a$, for an integer a which depends on the topology of V. This is related to the ambiguity in the definition of the functional S. In one direction we can consider maps f which are not isotopic to the identity. Then we can follow through the same procedure to get Floer homology groups, constructed from a complex generated by the fixed points, which are invariants of the isotopy class of f. (There is also a more general theory for intersections of Lagrangian submanifolds.) There seems to be no obvious conjecture as to what these groups should be: they are potentially very rich new invariants of symplectic diffeomeorphisms, but the author is not aware of any case when they have been calculated. In another direction we can return to the original case of the ordinary loop space LV. The Floer homology in this situation is just the ordinary homology of V, with the grading reduced mod a. But, as Witten has explained in [16], we get something new when we study *products*. Poincaré duality is built into Floer's construction, and we can regard his groups equally well as cohomology groups. Thus we have a (graded) group $HF^*(LV)$, which is isomorphic to $H^*(V)$ but which appears formally as the cohomology in the "middle dimension" of the loop space LV. Now we can copy the definition of the ordinary cup-product to define a product

$$HF^*(LV) \otimes H^*(LV) \to HF^*(LV),$$

i.e. we multiply an infinite dimensional class with a finite dimensional class to ge an infinite dimensional class. In particular, we can do this for the part of the cohomology of LV which is lifted up from the cohomology of V by the evaluation map $e: LV \to V$, $e^*: H^*(V) \to H^*(LV)$. So we get a product

$$HF^*(LV) \otimes H^*(V) \to HF^*(LV).$$

Now if we remember that $HF^*(LV) \cong H^*(V)$ we have finally a map

$$H^*(V) \otimes H^*(V) \to H^*(V), \tag{4}$$

and this is *not* in general the ordinary cup-product. If one unwinds the definitions one finds that it is given as follows. We fix 3 points $0, 1, \infty$ in S^2, so for any moduli space M of holomorphic spheres there is an evaluation map

$$e: M \to V \times V \times V.$$

The image of the fundamental class of M lies in $H_*(V) \otimes H_*(V) \otimes H_*(V)$. We use Poincaré duality to identify this tensor product with $\mathrm{Hom}(H^*(V) \otimes H^*(V), H^*(V))$. The product operation (4) is given by summing these contributions from different moduli spaces M. The constant maps give the ordinary cup-product, but there may be higher terms which give a new ring structure on $H^*(V)$, and Witten discusses some remarkable properties of these structures.

3 Floer's Instanton Homology and 4-dimensional Cobordisms

Floer realised very quickly that his approach to the variational problem on loop space discussed in the previous section has a counterpart in gauge theory. The function S on the loop space LV can be regarded as a secondary invariant, associated with the degree of maps of closed surfaces. That is, we use the same integral expression in the definition (3) of S as we used in the definition (2) of the degree, but taken over a disc rather than a closed surface. Thus we should seek, for the analogue in the gauge theory case, a similar secondary invariant, associated to the 4-dimensional characteristic class (1) of bundles over closed 4-manifolds. This secondary invariant is the *Chern-Simons invariant* of a connection A over a closed, oriented, 3-manifold Y. We suppose Y is the boundary of some 4-manifold X, and that A is extended to a connection $\mathbf{A}$ over X. Then the Chern-Simons invariant is the element of $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$

$$\theta(A) = (8\pi^2)^{-1} \int_X \operatorname{Tr}(F(\mathbf{A})^2) \bmod \mathbf{Z}.$$

A gluing argument, as before, shows that this is independent of the manifold X and extension $\mathbf{A}$. We obtain a map from the space $\mathscr{B}_Y^*$ of gauge-equivalence classes of irreducible connections over Y,

$$\theta : \mathscr{B}_Y^* \to \mathbf{R}/\mathbf{Z},$$

which plays the same role as S in the theory. The critical points of θ are the flat connections, which we can identify with representations of $\pi_1(Y)$. The gradient lines can be identified with solutions of the instanton equation on the cylinder $Y \times \mathbf{B}$. Suppose initially that the function θ satisfies the analogue of the Morse nondegeneracy condition, so in particular the flat connections are isolated. One constructs a complex generated by the *irreducible* flat connections and with a differential ∂ defined by counting instanton solutions over the tube. This defines the Floer instanton homology of the 3-manifold. Once one has the basic analysis in place, dealing with gauge theory on these non-compact base manifolds, the discussion follows that of the previous section without much change. (The relevant analysis was largely developed by Taubes in his paper [14].) If the Chern-Simons function θ is not a Morse function, so there may be whole manifolds of flat connections over Y, one deforms the function to a nearby Morse function, and then studies gradient lines for the deformed problem.

To be a bit more precise, Floer defined homology groups in two situations [8], [10], [11]:

(1) For connections on an $SU(2)$ bundle over a homology 3-sphere Y.

(2) For connections on an $SO(3)$ bundle P over a 3-manifold $\bar{Y}$ with the property that $w_2(P)$ is non-zero in $\operatorname{Hom}(H_2(\bar{Y};\mathbf{Z}), \mathbf{Z}/2)$.

The Floer homology groups, which we will just write $HF^*(Y), HF^*(\bar{Y})$, are graded by $\mathbf{Z}/8$ but in case (2) there is an extra symmetry which gives an involutive isomorphism $g: HF^i(\bar{Y}) \to HF^{i+4}(\bar{Y})$. As in the loop-space case, these groups can be regarded formally as the cohomology groups in roughly the "middle dimension" of the infinite dimensional space $\mathscr{B}_Y^*$ of connections.

These Floer groups appear naturally when one studies 4-manifolds with boundary. Suppose we first consider a closed, oriented, 4-manifold X. For any bundle P over X there is a number $s(P)$ which is the "formal dimension" of the moduli space of instantons on P. If $s(P)=0$ then, under suitable technical conditions, the moduli space will be a finite set of points for generic metrics on X.

We can attach a sign to each point so that the number of points in the moduli space, counted with signs, is independent of the particular Riemannian metric, and hence is a differential-topological invariant $\Psi_X \in \mathbf{Z}$ of the 4-manifold. Now the basic idea is that for a 4-manifold X_1 with boundary, $\partial X_1 = Y$, one gets a class Ψ_{X_1} in $HF_*(Y)$. If we have another manifold with $\partial X_2 = -Y$ (i.e. Y with the opposite orientation) then we get a class in $HF_*(-Y)$ which is the same as the cohomology $HF^*(Y)$. There is then a "gluing relation"

(5) $$\Psi_X = \langle \Psi_{X_1}, \Psi_{X_2} \rangle$$

where X is the closed manifold obtained by pasting X_1 to X_2 along Y, $-Y$ and the pairing on the right hand side is the canonical pairing between homology and cohomology.

It is useful to have two ways of thinking about these Floer classes and the gluing relation. For the first way we choose a Riemannian metric on the manifold-with-boundary X_1 and then add on a half-tube $Y \times [0, \infty)$ to get a complete Riemannian manifold $\hat{X}_1$. We study instanton connections on a bundle over $\hat{X}_1$ which are asymptotic to a given flat connection ϱ over Y on the half-tube. Here we will assume that ϱ is irreducible and that the Chern-Simons function for Y is a Morse function. The connections over $\hat{X}_1$ which are asymptotic to ϱ are divided into classes by a topological invariant, a "relative Chern class". For each of these classes $[P]$ there is a virtual dimension $s([P])$, and $s([P])$ modulo 8 depends only on ϱ. If $s([P]) = 0$ the corresponding moduli space of instantons is, for generic metrics, a finite set and we can define a number $n_\varrho(X_1)$ by counting, with signs, the points in this set. Then the sum $\psi_{X_1} = \sum_\varrho n_\varrho(X_1)$ is a chain in the Floer complex used to define the Floer homology. One shows that

(1) ψ_{X_1} is a cycle in the Floer complex, $\partial \psi_{X_1} = 0$.

(2) If we choose another generic metric on X_1, to get another cycle ψ'_{X_1}, then $\psi_{X_1} - \psi'_{X_1}$ is a boundary in the Floer complex.

The proofs of these are much the same as the proofs of the corresponding basic properties of the Floer complex, discussed in Section 2 above. One concludes that the Floer homology class Ψ_{X_1} of ψ_{X_1} is a differential topological invariant of X_1, independent of the Riemannian metric used to define the instanton equation. Now if one defines the class Ψ_{X_2} in just the same way the gluing relation (5) follows rather easily. One considers a family of metrics g_t on the closed manifold X in which the tube around Y is stretched out to length t, and examines the instanton moduli space for large t. Roughly speaking, we think of X as degenerating into a disjoint union of the manifolds $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$. One argues that the relevant instantons on X are obtained by gluing together instantons on each piece with the same flat limit at infinity, so we have a relation on the chain level

$$\Psi_X = \sum_\varrho n_\varrho(X_1) n_\varrho(X_2),$$

which gives the corresponding formula (5) on homology classes.

The other way of thinking about these classes provides a satisfying conceptual picture, although it is not directly amenable to a rigorous development, at present. Here we consider the infinite dimensional moduli space $\mathcal{M}_{X_1}$ of instantons on the incomplete manifold X_1. There is an obvious restriction map i_1 from $\mathcal{M}_{X_1}$ to the space $\mathcal{B}_Y^*$ of connections on the boundary Y, and similarly for X_2. We may suppose that these maps are injective, and then the moduli space of instantons over X is identified with the intersection

(6) $\quad M_X = i_1(\mathcal{M}_{X_1}) \cap i_2(\mathcal{M}_{X_2}).$

Now recall that the Floer homology is formally the infinite dimensional homology of the ambient space $\mathcal{B}_Y$. We imagine that we have made sense of this in such a way that the submanifolds $i_1(\mathcal{M}_{X_1})$, $i_2(\mathcal{M}_{X_2})$ carry fundamental homology classes, and that the intersection of submanifolds goes over to a pairing on homology, just as in the familiar case of ordinary homology. Then we would just define Ψ_{X_1}, Ψ_{X_2} to be the fundamental classes of the submanifolds, and the gluing relation (5) would be the homological counterpart of (6). From this point of view the first approach, in which we extend the metric by tubes, amounts to the usual way in which one relates cycles in a manifold to the Morse complex by flowing down the gradient flow. For if we write $\mathcal{M}_{X_1}(t)$ for the moduli space of instantons over a 4-manifold formed by adding a finite tube $Y\times[0,t]$ to X_1 the set of boundary values $i_1(\mathcal{M}_{X_1}(t))$ can be regarded as being obtained from $i_1(\mathcal{M}_{X_1})$ by flowing for time t down the gradient flow.

The invariants of 4-manifolds defined by the Yang-Mills instantons have enjoyed a good deal of success in applications, but their relationship with conventional topological methods remains rather obscure. In particular, it is natural to ask whether these invariants can be defined, or at least characterised, by purely topological methods. For this one would like to understand how to calculate the invariants from a description in which a 4-manifold is built up out of simple pieces, and it should be clear from the above that Floer's instanton homology groups are a fundamental ingredient in such a theory. Floer's later work on the instanton homology groups [10], [11] makes a great step in this direction, and seems to point towards some more axiomatic approach to the 4-manifold invariants, which may distill out the essence of the differential-geometric constructions. To discribe this work of Floer we begin with an important variant of the construction above, when the boundary of our 4-manifold is not connected: in other words we have a 4-manifold W which is a cobordism between oriented 3-manifolds $Y_1, -Y_2$. The Floer homology of the disjoint union is naturally the tensor product of the homologies of each factor, and taking account of the duality worked by the change in orientation we get a map

$$\Psi_W : HF_*(Y_1) \to HF_*(Y_2).$$

There is now a gluing relation which says that the composite of such maps Ψ_{W_1}, Ψ_{W_2} is the same as the map defined by the obvious composite cobordism. More formally, Floer considered a category $\mathcal{C}$ in which the objects are $SU(2)$ or $SO(3)$ bundles over 3-manifolds, of one of the kinds detailed above, and the morphisms are given by bundles over 4-dimensional cobordisms. Then the Floer homology is a functor from $\mathcal{C}$ to $\mathbf{Z}/8$-graded abelian groups. Floer saw that this functorial property gives an extremely powerful method of proving results about his homology groups, leading to explicit calculations. We will now describe two important results which he obtained in this way: the *surgery exact sequence* and the *Künneth formula*.

For the surgery sequence, we consider a framed knot K in a 3-manifold Y. So the boundary of a tubular neighbourhood of K is identified with $S^1 \times S^1$ and we can regard Y as being obtained from a manifold-with-boundary Y_K, with $\partial Y_K = S^1 \times S^1$ by gluing a solid torus $D^2 \times S^1$ to the boundary, so that the class $(0,1)$ in $H_1(S^1 \times S^1)$ maps to zero in $H_1(D^2 \times S^1)$. We can form two other manifolds $\bar{Y}$, Y' by gluing the solid torus to Y_K in different ways, so that the classes $(1,0)$ and $(1,1)$, repectively, map to zero in $H_1(D^2 \times S^1)$, (these operations are called *Dehn surgeries* along the knot). If we start with a bundle over Y we can define corresponding bundles over $\bar{Y}$, Y'. For example, if Y is a homology sphere and we start with an $SU(2)$ bundle (necessarily trivial), we will consider another trivial $SU(2)$ bundle over another homology sphere Y', while $\bar{Y}$ has the homology of $S^1 \times S^2$ and we consider a non-trivial $SO(3)$ bundle over $\bar{Y}$. There is a triangle of standard cobordisms between these three manifolds,

$$\partial W_1 = Y' - Y, \quad \partial W_2 = Y - \bar{Y}, \quad \partial W_3 = \bar{Y} - Y',$$

and these induce maps

$$\ldots \xrightarrow{\Psi_3} HF^*(Y') \xrightarrow{\Psi_1} HF^*(Y) \xrightarrow{\Psi_2} HF_*(\bar{Y}) \xrightarrow{\Psi_3} HF^{*+1}(Y') \ldots.$$

In a great *tour de force* [10], Floer showed that this sequence of maps is exact. The proof is difficult and involves a number of new ideas. One of the main ideas is the use of particular deformations of the Chern-Simons function, which "simulate" the effect of surgery. We consider a family of parallel copies K_s of the knot K, labelled by a parameter s in the unit disc. Now fix a bump function $\sigma(s)$, of compact support, and let $\xi: SU(2) \to \mathbf{R}$ be a function invariant under the adjoint action of $SU(2)$. If A is an $SU(2)$ connection over Y we can apply ξ to the holonomy $h(K(s), A)$ of A around a loop K_s then we put

$$\Xi(A) = \int_{D^2} \xi(h(K(s), A))\sigma(s)\,\mathrm{d}\mu_s.$$

This a smooth function on the space $\mathscr{B}_Y^*$ of connections, and we can perturb the Chern-Simons function θ to $\theta + \Xi$. The new function serves equally well to compute the Floer homology of Y, from a complex built out of critical points. On the other hand it is a straightforward problem in differential geometry to analyse these critical points: they correspond precisely to the flat connections over Y_K for which the holonomies around the meridian and longitude of the knot satisfy a particular relation, depending on the function ξ.

Another important ingredient in Floer's proof derives from a general "monotonicity" property of the Floer functor on $\mathscr{C}$. Suppose again that W is a cobordism between 3-manifolds Y_1, Y_2 so we have $\Psi_W: HF_*(Y_1) \to HF_{*+d}(Y_2)$. This is defined on the chain level by fixing a metric and extending W with tubes at each end to a complete manifold $\hat{W}$. Then for flat connections ϱ, σ over Y_1 and Y_2 respectively, which lie in the appropriate chain groups $C_\lambda(Y_1)$, $C_{\lambda+d}(Y_2)$, we define a number $n_{\varrho,\sigma}$ by counting instantons over $\hat{W}$ with the appropriate limits. These numbers form the matrix entries for map

$$\psi : C_\lambda(Y_1) \to C_{\lambda+d}(Y_2)$$

and this induces the map Ψ on homology. Now the Chern-Simons function θ is only defined modulo $\mathbf{Z}$ but, by bringing in the virtual dimension of the instanton moduli spaces, one sees that there is a natural lift $\theta(\varrho, \sigma)$ of the difference $\theta(\varrho) - \theta(\sigma)$ to the reals, for $\langle\varrho\rangle \in C_\lambda(Y_1)$, $\langle\sigma\rangle \in C_{\lambda+d}(Y_2)$ such that for any instanton A over $\hat{W}$ which contributes to the count $n_{\varrho,\sigma}$

$$\int_{\hat{W}} |F(A)|^2 = \theta(\varrho, \sigma).$$

It follows then that the entries $n_{\varrho,\sigma}$ vanish for any pair ϱ, σ with $\theta(\varrho, \sigma) > 0$, and this gives constraints on the map Ψ on homology. Moreover if $\theta(\varrho, \sigma) = 0$ then any instanton contributing to $n_{\varrho,\sigma}$ is flat. We thus obtain, roughly speaking, a leading term in the map Ψ (with respect to a filtration of the chain groups) which is determined in an elementary way by the fundamental group of W.

The second result of Floer which we mention is the Künneth formula, which is another relation between the Floer homology groups of manifolds obtained by cutting and pasting across a 2-torus, $S^1 \times S^1$. Suppose we have two oriented 3-manifolds Y_1, Y_2 which contain embedded tori T_1, T_2 and we have $SO(3)$ bundles P_1, P_2 over the manifolds which are non-trivial over the tori. Then we have Floer homology groups $HF_*(Y_1)$, $HF_*(Y_2)$, based on these bundles which are periodic of period 8, but with an involution h of degree 4. Let us write $HF_*(Y_1)_h$, $HF_*(Y_1)_h$ for the corresponding $\mathbf{Z}/4$-graded groups. (That is, we identify x and $h(x)$. This is actually the more natural grading in the case of a non-trivial $SO(3)$ bundle.) Now let us cut Y_1 and Y_2 along the respective tori to get manifolds $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$ say. We glue together the boundaries of $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$, in a manner determined by the orientations, to get a new closed manifold Y. Then we get a nontrivial $SO(3)$ bundle over Y, and so a $\mathbf{Z}/4$-graded group $HF_*(Y)_h$. Floer's Künneth formula is:

$$HF_*(Y)_h = HF_*(Y_1)_h \otimes HF_*(Y_2)_h.$$

The key point in the proof of this formula is the elementary fact that, up to gauge equivalence, there is a *unique* flat connection on a non-trivial $SO(3)$ bundle over the 2-torus. This connecting actually reduces to the subgroup $O(2) \subset SO(3)$, and so has an automorphism of order 2. This means that for every $SO(3)$ connection over $\tilde{Y}_1$, on a bundle which is non-trivial over each boundary component, leads to precisely 2 flat $SO(3)$ connections over Y_1, and a pair of flat connections over $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$ leads to 4 flat connections over Y. (One must take special account of cases when the connections over the 3-manifolds reduce to $O(2)$.) The upshot of this is that there is an isomorphism between the relevant *set* of equivalence classes of flat connection over Y and the product of the corresponding sets for Y_1, Y_2. If we assume we are in the nondegenerate situation where the Chern-Simons functions are Morse functions we thus obtain an elementary isomorphism

$$C_*(Y)_h = C_*(Y_1)_h \otimes C_*(Y_2)_h$$

between the respective chain groups. This is a good motivation for the result, but it does not constitute a proof by itself since we have not built in any information about the differentials, which depend on the solutions of the instanton equations over tubes. To do this Floer considers a pair of standard cobordisms

$$\partial U = Y - (Y_1 \cup Y_2), \qquad \partial V = (Y_1 \cup Y_2) - Y,$$

and shows that the induced maps $\Psi_U: HF_*(Y) \to HF_*(Y_1)_h \otimes HF_*(Y_2)_h$, $\Psi_V: HF_*(Y_1)_h \otimes HF_*(Y_2)_h) \to HF_*(Y)_h$ are inverse isomorphisms. By the gluing property it is suffices to show that the composite cobordisms induce the identity maps, and this is done by performing another surgery to compare the composite cobordisms with products. (Floer developed a similar approach for *connected sums* of 3-manifolds.)

It is well-known that any 3-manifold can be obtained from the 3-sphere by a sequence of surgeries. The Floer homology groups yield, by surgery, invariants of knots in the 3-sphere and Floer used these properties of the instanton homology to obtain "skein relations" for the knot invariants. This gives a way to carry out explicit calculations, and also lead him to a theoretical result [11] that the Floer functor is characterised (among functors from $\mathscr{C}$ to graded groups) by the exact surgery sequence, the Künneth property and the fact that, using a non-trivial $SO(3)$ bundle over the 3-torus,

$$HF_*(S^1 \times S^1 \times S^1)_h = \mathbf{Z}.$$

References

[1] Arnold, V. I.: Mathematical methods of classical mechanics. Springer 1978

[2] Braan, P. J.: Magnetic monopoles on 3-manifolds. J. Differential Geometry **30** (1989) 425–464

[3] Cohen, R. L.; Jones, J. D. S.: Representations of braid groups and operators coupled to monopoles. In: Geometry of low dimensional manifolds, Vol. I. (Ed. Donaldson and Thomas). Cambridge U.P. 1990

[4] Conley, C.; Zehnder, E.: The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold. Investiones Math. **73** (1983) 33–49

[5] Floer, A.: Proof of the Arnold conjecture for surfaces, and generalisations for certain Kahler manifolds. Duke Math. J. **53** (1986) 1–32

[6] Floer, A.: Monopoles on asymptotically Euclidean 3-manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **16** (1987) 125–127

[7] Floer, A.: Morse Theory for Lagrangian intersections. J. Differential Geometry **28** (1988) 513–547

[8] Floer, A.: An instanton invariant for 3-manifolds. Commun. Math. Phys. **118** (1988) 215–240

[9] Floer, A.: Self-dual conformal structures on $l\mathbf{CP}^2$. J. Differential Geometry **33** (1991) 551–574

[10] Floer, A.: Instanton homology and Dehn surgery. Preprint

[11] Floer, A.: Instanton homology for knots. Preprint

[12] Gromov, M.: Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds. Inventions Math. **83** (1985) 307–347
[13] Jaffe, A.; Taubes, C. H.: Vortices and monopoles. Boston: Birkhäuser 1980
[14] Taubes, C. H.: Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. J. Differential Geometry **25** (1987) 363–430
[15] Witten, E.: Supersymmetry and Morse theory. J. Differential Geometry **17** (1982) 661–692
[16] Witten, E.: Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space. Preprint

Prof. S. K. Donaldson
Mathematical Institute
University of Oxford
24–29 St. Giles'
Oxford OX1 3LB
Großbritannien

(*Eingegangen 5. 3. 1992*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 121–133
AMS subject classification: 32 H02, 04

Zur Abbildungstheorie in der komplexen Analysis*)

K. Stein, München

In diesem Bericht möchte ich auf zwei mir interessant erscheinende Entwicklungen in der komplexen Analysis eingehen. Im ersten Teil lege ich dar, daß zum Studium holomorpher Abbildungen spezieller Gebiete in komplexen Zahlenräumen (allgemeiner in komplexen Mannigfaltigkeiten) Methoden der Gewebetheorie mit Nutzen verwendet werden können. Der zweite Teil handelt von besonderen meromorphen Abbildungen, die ich als *zentral* bezeichne. Solche meromorphen Abbildungen sind von Bedeutung im Hinblick auf algebraische Funktionenkörper auf komplexen Räumen, wie sie von W. Thimm erstmals betrachtet worden sind.

§ 1 Methoden der Gewebetheorie in der Theorie der holomorphen Abbildungen

1.1. Ein Gebiet im komplexen Zahlenraum $\mathbb{C}^m$, $0 < m < \infty$, heiße *topologisch einfach*, wenn es vom topologischen Typus einer $2m$-dimensionalen offenen Zelle ist.

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz ist jedes topologisch einfache beschränkte Gebiet des $\mathbb{C}^m$ im Falle $m = 1$ auf die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene biholomorph abbildbar. Es ist seit langem bekannt, daß eine analoge Aussage im Falle $m > 1$ nicht gilt. Hierzu seien einige alte und neuere Ergebnisse zitiert und damit in Verbindung stehende Konzepte erläutert.

1.1.1. Der Einheitsdizylinder

$$D_2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

und die Einheitskugel

$$B_2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

sind topologisch einfache beschränkte Gebiete im $\mathbb{C}^2$. *Es gibt jedoch keine biholomorphe Abbildung von D_2 auf B_2* (H. Poincaré [13], 1907). Denn die reellen

*) Modifizierte Fassung eines Vortrags am 20. September 1991 auf der DMV-Tagung in Bielefeld. – S. auch den Vortrag von R. Remmert auf der Jahrestagung 1974 der DMV in Hannover: Jber. d. Dt. Math.-Verein. 77 (1975), 89–105.

Liegruppen $\operatorname{Aut} D_2$ und $\operatorname{Aut} B_2$ der holomorphen Automorphismen von D_2 bzw. von B_2 sind nicht isomorph (es ist $\dim(\operatorname{Aut} D_2)=6$ und $\dim(\operatorname{Aut} B_2)=8$).

1.1.2. Ein Gebiet $G\subset\mathbb{C}^m$ heißt *Holomorphiegebiet*, wenn es eine in G holomorphe Funktion gibt, die in keinen Randpunkt von G holomorph fortsetzbar ist (z. B. sind D_2 und B_2 Holomorphiegebiete). Nach H. Cartan und P. Thullen ([5], 1932) ist G genau dann Holomorphiegebiet, wenn G *holomorph-konvex* ist; dies bedeutet: Zu jeder Folge von Punkten $p_\nu\in G$ ohne Häufungspunkt in G gibt es eine in G holomorphe Funktion f mit $\sup_\nu |f(p_\nu)| = \infty$. Im Falle $m=1$ ist jedes G holomorph-konvex, also Holomorphiegebiet. Für $m\geqslant 2$ trifft dies nicht zu. Z. B. ist das Gebiet

$$H := G^{(1)}\cup G^{(2)} \quad \text{mit}$$

$$G^{(1)} := \{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : |z_1|<1,\ 1/2<|z_2|<1\} \quad \text{und}$$

$$G^{(2)} := \{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : |z_1|<1/2,\ |z_2|<1\}$$

kein Holomorphiegebiet, denn jede in H holomorphe Funktion ist, wie sich zeigen läßt, zu einer im H umfassenden Dizylinder D_2 holomorphen Funktion fortsetzbar. H ist also nicht holomorph-konvex, jedoch topologisch einfach und beschränkt.

Die Eigenschaft *holomorph-konvex* eines Gebietes $G\subset\mathbb{C}^m$ ist invariant gegenüber biholomorphen Abbildungen von G. Daher gilt: *Es gibt keine biholomorphe Abbildung eines Nichtholomorphiegebietes auf ein Holomorphiegebiet im* $\mathbb{C}^m$. Demnach ist das Gebiet H weder auf den Dizylinder D_2 noch auf die Kugel B_2 biholomorph abbildbar.

1.1.3. Ein Gebiet $G\subset\mathbb{C}^m$ heißt *biholomorph starr*, wenn die identische Abbildung die einzige biholomorphe Abbildung von G auf sich ist.

Es ist leicht einzusehen, daß es im $\mathbb{C}^m$, $m\geqslant 2$, biholomorph starre Gebiete gibt, die topologisch einfach und beschränkt sind. Solche Gebiete erhält man etwa dadurch, daß man aus topologisch einfachen beschränkten Gebieten geeignete niederdimensionale Stücke herausnimmt (Beispiel: Man nehme aus dem Dizylinder D_2 den „Stachel"

$$S := \{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0,\ \operatorname{Re} z_1, = \operatorname{Re} z_2,\ 0\leqslant \operatorname{Re} z_1 < 1\}$$

heraus). Aber die so konstruierten Gebiete sind keine Holomorphiegebiete. Zu Anfang der dreißiger Jahre war die Frage von Interesse, ob es auch entsprechende Holomorphiegebiete gibt.

W. Rothstein ([20], 1935) war der erste, der diese Frage im positiven Sinne beantwortet hat: Die Gebiete

$$\begin{aligned} G_\varepsilon := \{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 :\ & 0<\operatorname{Re} z_1<2,\ 0<\operatorname{Im} z_1<2,\ 0<\operatorname{Re} z_2<1,\ 0<\operatorname{Im} z_2<1,\\ & \operatorname{Re}(z_1+(1-i\cdot\varepsilon/2)\cdot z_2-(3-\varepsilon))<0 \text{ für genügend}\\ & \text{kleine positiv reelle } \varepsilon\} \end{aligned}$$

sind sämtlich biholomorph starr. Jedes dieser G_ε ist offener Kern eines kompakten konvexen Polyeders. Ein Gebiet im $\mathbb{C}^m$ mit dieser Eigenschaft heißt ein *euklidisches Polyedergebiet;* ein solches Gebiet ist stets holomorph-konvex, also ein Holomorphiegebiet.

Weitere Beispiele von biholomorph starren topologisch einfachen beschränkten Holomorphiegebieten stammen von H. Behnke und E. Peschl ([2], 1936). Später hat K. Hedtfeld ([9], 1954) von kontinuierlichen Parametern abhängige Familien biholomorph starrer topologisch einfacher beschränkter Holomorphiegebiete angegeben, die paarweise biholomorph inäquivalent sind (d. h. die nicht biholomorph aufeinander abgebildet werden können).

Die Berandungen der von Rothstein, Behnke-Peschl und Hedtfeld beschriebenen biholomorph starren Gebiete sind nicht überall glatt: Der Rand ∂G eines solchen Gebietes G setzt sich aus Stücken glatter Hyperflächen zusammen, die sich zum Teil so schneiden, daß Kanten auf ∂G entstehen. J. Eickel ([6], 1961) hat gezeigt, daß aus starren euklidischen Polyedergebieten (deren Rand notwendig Kanten aufweist) mit Hilfe eines Glättungsprozesses biholomorph starre topologisch einfache Holomorphiegebiete mit überall differenzierbarem Rand gewonnen werden können.

1.1.4. Unter einem *analytischen Polyeder* im $\mathbb{C}^m$ wird eine nichtleere kompakte Menge $P \subset \mathbb{C}^m$ mit folgender Eigenschaft verstanden: Es gibt eine offene Umgebung U von P und endlich viele in U holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$, so daß ein Punkt $z \in U$ genau dann zu P gehört, wenn gilt $|f_1(z)| \leqslant 1, \ldots, |f_k(z)| \leqslant 1$.

Ein *analytisches Polyedergebiet* im $\mathbb{C}^m$ ist eine zusammenhängende Komponente A des offenen Kernes $\mathring{P}$ eines analytischen Polyeders P mit der folgenden Eigenschaft: Die Umgebung U von P und die Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ können so gewählt werden, daß jeweils für $\varkappa = 1, \ldots, k$ die Menge $\{z \in U: |f_\varkappa(z)| = 1\} \cap \partial A$ die topologische Dimension $2m-1$ hat. – Ein System $\{f_1, \ldots, f_k\}$ von Funktionen mit dieser Eigenschaft heißt ein *zu A gehöriges Funktionensystem* (dabei sind U und die $f_\varkappa$ durch A nicht eindeutig bestimmt, und es ist auch zugelassen, daß einige der $f_\varkappa$ zur Darstellung von A überflüssig sind).

Beispiele analytischer Polyedergebiete:

(1) *Euklidische Polyedergebiete* (siehe oben), insbesondere *Simplexgebiete* (d. h. die offenen Kerne von Simplizes) im $\mathbb{C}^m$: Als Elemente eines zu einem solchen Gebiet gehörigen Funktionensystems $\{f_1, \ldots, f_k\}$ lassen sich stets Funktionen der Gestalt $f_\varkappa = \exp(l_\varkappa)$ mit komplex linearen $l_\varkappa$ wählen.

(2) *Affine analytische Polyedergebiete*, speziell der Einheitsdizylinder D_2 im $\mathbb{C}^2$: Ein analytisches Polyedergebiet $A \subset \mathbb{C}^m$ heißt *affin*, wenn es ein zu A gehöriges Funktionensystem $\{l_1, \ldots, l_\varkappa\}$ mit komplex linearen $l_\varkappa$ gibt.

Analytische Polyedergebiete sind holomorph-konvex, also Holomorphiegebiete. Ferner: Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^m$ ist genau dann holomorph-konvex, wenn es durch analytische Polyedergebiete „ausgeschöpft" werden kann, d. h. wenn es eine Folge $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von analytischen Polyedergebieten A_ν mit $\bar{A}_\nu \subset A_{\nu+1} \subset G$ für alle ν und $\bigcup_\nu A_\nu = G$ gibt.

Sei A ein analytisches Polyedergebiet im $\mathbb{C}^m$ und $\{f_1, \ldots, f_k\}$ ein zu A gehöriges Funktionensystem. Die Zusammenhangskomponenten der Fasern jeder Abbildung $f_\varkappa | A: A \to \mathbb{C}$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, bilden die Elemente je einer *Zerlegung von A*, die eine *charakteristische Zerlegung von A* heißt. Zwei Funktionen $f_{\varkappa_0}$ und $f_{\varkappa_1}$

bestimmen die gleiche charakteristische Zerlegung von A genau dann, wenn sie analytisch abhängig sind. Die Anzahl der charakteristischen Zerlegungen von A heißt die *Stufe* s von A (es ist also $s \leqslant k$). s hängt nur von A ab, nicht aber von der speziellen Wahl eines zugehörigen Funktionensystems. – Die Menge $\{Z_1, \ldots, Z_s\}$ der (paarweise verschiedenen) charakteristischen Zerlegungen von A wird im folgenden mit W_A bezeichnet.

Seien G, G' Gebiete im $\mathbb{C}^m$ und $f: G \to G'$ eine holomorphe Abbildung. f sei *endlich*, d.h. alle Fasern von f sind endliche Mengen und alle f-Bilder von abgeschlossenen Mengen in G sind abgeschlossen in G'. Vermöge einer solchen Abbildung wird G als (evtl. verzweigte) *unbegrenzte Überlagerung* von G mit einer endlichen Blätterzahl, dem *Abbildungsgrad* $\mathfrak{g}(f)$, dargestellt; f ist genau dann biholomorph, wenn $\mathfrak{g}(f) = 1$ ist.

Seien nun A und A' analytische Polyedergebiete im $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 2$, mit den Stufen s bzw. s' und den Mengen $W_A = \{Z_1, \ldots, Z_s\}$ bzw. $W_{A'} = \{Z'_1, \ldots, Z'_{s'}\}$ der charakteristischen Zerlegungen von A bzw. A'; sei weiter $f: A \to A'$ eine endliche holomorphe Abbildung. Dann gilt:

f induziert eine injektive Abbildung $F: W_A \to W_{A'}$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $Z_\sigma \in W_A$, so wird jedes Element von Z_σ vermöge f auf ein Element von $F(Z_\sigma) \in W_{A'}$ abgebildet, und jedes Element von $F(Z_\sigma)$ tritt so als Bild eines Elementes von Z_σ auf.

Diese Aussage wurde für den Fall $m = 2$ von R. Remmert und K. Stein ([17], 1960) bewiesen; sie impliziert $s \leqslant s'$*). Von H. Rischel ([18], 1964) wurde gezeigt, daß F auch surjektiv, also $s = s'$ ist. In einer späteren Arbeit hat Rischel die obige Aussage mit ihrer Ergänzung für beliebiges $m \geqslant 2$ auf „irreduzible holomorphe Überlagerungskorrespondenzen" ausgedehnt (s. [19], 1964): Auch in dieser allgemeineren Situation wird eine bijektive Abbildung $W_A \to W_{A'}$ induziert.

Für analytische Polyedergebiete ist demnach die Stufe eine Invariante gegenüber irreduziblen holomorphen Überlagerungskorrespondenzen, speziell gegenüber endlichen holomorphen Abbildungen.

Beispiel: Ein Simplexgebiet im $\mathbb{C}^2$ läßt sich nicht endlich holomorph auf den Einheitsdizylinder D_2 abbilden. Denn die Stufe eines Simplexgebietes im $\mathbb{C}^2$ ist mindestens 3, die Stufe von D_2 aber gleich 2.

1.2. Die einem analytischen Polyedergebiet $A \subset \mathbb{C}^m$, $m \geqslant 2$, zugeordnete Menge W_A der charakteristischen Zerlegungen von A kann als ein *komplex analytisches Gewebe* in A betrachtet werden (zur klassischen Theorie der Gewebe siehe etwa Blaschke-Bol ([4], 1938) und Blaschke ([3], 1955)). Bei dieser Auffassung der W_A besagen die in 1.1.4 zitierten Aussagen gerade, daß endliche holomorphe Überlagerungsabbildungen, allgemeiner irreduzible holomorphe Überlagerungskorrespondenzen, zwischen analytischen Polyedergebieten gewebetreu sind. Es liegt daher nahe, zur Gewinnung weiterer Invarianten bezüglich

---

*) Beim Beweis der Aussage werden wie in der Dissertation von Rothstein und in den zitierten Arbeiten von Behnke und Peschl und von Hedtfeld Randeigenschaften holomorpher Abbildungen benutzt; siehe hierzu auch R. Narasimhan ([12], 1971), dort pp. 71–77.

solcher Abbildungen Methoden der Gewebetheorie heranzuziehen. Dies wurde von J. Baumann in seiner Münchener Dissertation von 1981 (veröffentlicht in [1], 1982) unternommen.

Grundlegend für die Baumannschen Untersuchungen ist das Konzept des *meromorphen* $(m+1)$*-Gewebes in einer komplexen Mannigfaltigkeit der (komplexen) Dimension* $m \geqslant 2$. Die Invariantentheorie solcher Gewebe liefert zahlreiche neue Ergebnisse über Inäquivalenz und Starrheit analytischer Polyedergebiete bezüglich endlicher holomorpher Überlagerungsabbildungen. Diese Ergebnisse können hier nicht im einzelnen wiedergegeben werden; es sei lediglich die folgende Aussage genannt:

Im $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 2$, können ein *euklidisches Polyedergebiet und ein affines analytisches Polyedergebiet gleicher Stufe* $s > m$ *nicht endlich und holomorph aufeinander abgebildet werden.* – Insbesondere kann also ein analytisches Polyedergebiet der Stufe $s > m$ nicht zugleich euklidisch und affin sein.

Es sei bemerkt, daß auf dem neuen Wege auch die alten Ergebnisse von Rothstein, Behnke-Peschl und Hedtfeld wiedergewonnen werden.

Hinweis. Die Baumannsche Theorie ist z. T. dargestellt in dem Werk von Goldberg, Vladislav V.: Theory of Multicodimensional $(n+1)$-Webs. Dordrecht – Boston – London 1988, dort Ch. 6.3.

§ 2 Zentrale meromorphe Abbildungen und Thimmsche Funktionenkörper

2.1. Eine in einem Gebiet des $\mathbb{C}^m$ gegebene meromorphe Funktion kann im Falle $m \geqslant 2$ in speziellen Punkten des Gebietes „unbestimmt" sein. Als ein Beispiel sei die Funktion z_1/z_2 im Raum $\mathbb{C}^2$ der zwei komplexen Variablen z_1, z_2 betrachtet. Der Koordinatenursprung O_2 des $\mathbb{C}^2$ ist eine Unbestimmtheitsstelle der Funktion; das Gebiet $\mathbb{C}^2 - \{O_2\}$ wird durch sie holomorph auf die ergänzte komplexe Ebene $\bar{\mathbb{C}}$ abgebildet, und zwar gibt es zu jedem Wert in $\bar{\mathbb{C}}$ eine komplexe Gerade durch O_2, auf der außerhalb O_2 die Funktion konstant gleich diesem Wert ist. Es liegt nun nahe, ganz $\bar{\mathbb{C}}$ als „Wert" von z_1/z_2 in O_2 zu erklären. z_1/z_2 wird so zu einer *Korrespondenz* (d. h. einer mengenwertigen Abbildung), durch die jedem Punkt des $\mathbb{C}^2$ eine Bildmenge, die nicht stets einpunktig ist, zugeordnet wird. Diese Korrespondenz φ ist das Standardbeispiel einer nichtkonstanten *zentralen meromorphen Abbildung.* „Zentral" besagt hier, daß es einen Punkt des $\mathbb{C}^2$ gibt, nämlich den Punkt O_2, dessen Bild gleich dem gesamten Wertevorrat von φ im $\mathbb{C}^2$ ist.

Im folgenden werden zunächst mit Korrespondenzen und meromorphen Abbildungen verbundene Konzepte erläutert und diskutiert.

2.1.1. Eine *Korrespondenz* f einer Menge X in eine Menge Y, geschrieben $f: X \multimap Y$, ordnet jedem Element x von X eine Teilmenge $f(x)$ von Y (die leer sein kann) zu; für eine Menge $A \subset X$ ist $f(A) := \bigcup_{x \in A} f(x)$ (ist A leer, so auch $f(A)$). Jede Korrespondenz $f: X \multimap Y$ ist durch eine Teilmenge der Produktmenge $X \times Y$, ihren Graphen G_f, festgelegt: Es ist

$$G_f := \{(x, y) \in X \times Y : x \in Y, y \in f(x)\},$$

und zu einer Menge $M \subset X \times Y$ gibt es genau eine Korrespondenz $f: X \multimap Y$ mit $G_f = M$ (ist X oder Y leer, so auch G_f). f heißt leer, wenn G_f leer ist. Abbildungen $X \to Y$ werden als spezielle Korrespondenzen aufgefaßt (zwischen einelementigen Mengen und ihren Elementen wird nicht unterschieden).

Zu einer Korrespondenz $f: X \multimap Y$ gehören zwei Abbildungen $\check{f}: G_f \to X$ und $\hat{f}: G_f \to Y$, die durch die Projektionen $X \times Y \to X$ bzw. $X \times Y \to Y$ induziert werden; für $x \in X$ gilt $f(x) = \hat{f}(\check{f}^{-1}(x))$.

Unter der *Verbindung* $(f_1, \ldots, f_k)$ von k Korrespondenzen $f_\varkappa: X \multimap Y_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$; $k \geqslant 2$) wird die Korrespondenz $X \multimap Y_1 \times \ldots \times Y_k$ verstanden, die jedem $x \in X$ die Produktmenge $f_1(x) \times \ldots \times f_k(x)$ zuordnet (ist wenigstens eines der $f_\varkappa$ leer, so auch $(f_1, \ldots, f_k)$).

Die *Komposition* von $f: X \multimap Y$ mit einer Korrespondenz $g: Y \multimap Z$ ist die Korrespondenz $g \circ f: X \multimap Z$, die durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für $x \in X$ bestimmt ist.

Jede Korrespondenz $f: X \multimap Y$ läßt sich umkehren: Der Graph der *Umkehrkorrespondenz* $f^{-1}: Y \multimap X$ ist

$$G_{f^{-1}} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in G_f\}.$$

Man hat die Regeln $(f^{-1})^{-1} = f$ und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Für die zu f gehörenden Abbildungen $\check{f}: G_f \to X$ und $\hat{f}: G_f \to Y$ gilt $\hat{f} \circ \check{f}^{-1} = f$.

2.1.2. Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 1$. Eine Menge M in G heißt *analytisch*, wenn gilt: Jeder Punkt von G besitzt eine Umgebung U, derart daß $M \cap U$ mit der Menge der gemeinsamen Nullstellen von jeweils endlich vielen in U holomorphen Funktionen übereinstimmt. Zu den analytischen Mengen in G gehören insbesondere die leere Menge und die Menge aller Punkte von G. Jede analytische Menge in G ist abgeschlossen in G. Eine analytische Menge in G heißt *reduzibel*, wenn sie Vereinigung von zwei verschiedenen nichtleeren in G analytischen Mengen ist; trifft dies nicht zu, so heißt sie *irreduzibel*.

Sei $M \subset G$ analytisch. Man hat auf M die *Garbe* $\mathcal{O}_M$ der holomorphen Funktionskeime, die von holomorphen Funktionskeimen in G durch Beschränkung auf M induziert werden; $\mathcal{O}_M$ heißt die *Strukturgarbe von* M (sie beschreibt die „komplexe Struktur" von M). Das Paar $(M, \mathcal{O}_M)$ ist ein „lokales Modell" in der durch J. P. Serre [21] eingeführten Klasse komplexer Räume, die heute *reduziert* genannt werden: Ein reduzierter komplexer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_M)$, bestehend aus einem Hausdorffschen Raum X und einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von stetigen Funktionskeimen, so daß $(X, \mathcal{O}_X)$ in der Umgebung eines jeden Punktes von X zu einem Modellraum $(M, \mathcal{O}_M)$ isomorph ist; X besitzt also eine Überdeckung durch offene Mengen, die zu analytischen Mengen in komplexen Zahlenräumen isomorph sind.*) Eine *komplexe Mannigfaltigkeit* ist ein reduzierter komplexer Raum

*) Zum allgemeinen Begriff des komplexen Raumes und zu den weiteren hier und im folgenden nicht näher erläuterten Begriffen siehe etwa [8] und die dort zitierte Literatur. In [8] ist auch die Historie der Entwicklung des Konzeptes *Komplexer Raum* skizziert.

$(X, \mathcal{O}_X)$, der lokal zu (mit der üblichen komplexen Struktur versehenen) Gebieten in komplexen Zahlenräumen isomorph ist; insbesondere ist jede Riemannsche Fläche eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Eine *holomorphe Funktion* in einem reduzierten komplexen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist eine durch einen globalen Schnitt von $\mathcal{O}_X$ bestimmte Abbildung $X \to \mathbb{C}$. – Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer reduzierter komplexer Raum und f eine stetige Abbildung des Hausdorffschen Raumes X in den Hausdorffschen Raum Y; f heißt dann *holomorph*, wenn für jede in einer offenen Menge $V \subset Y$ definierte holomorphe Funktion $\varphi: V \to \mathbb{C}$ die Liftung $\varphi \circ f: f^{-1}(V) \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Der Begriff der analytischen Menge in einem komplexen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist wie in Gebieten komplexer Zahlenräume definiert, und eine solche Menge trägt wieder die Struktur eines reduzierten komplexen Raumes.

Üblicherweise wird in der Bezeichnung nicht zwischen einem komplexen Raum und seiner Trägermenge unterschieden, wenn feststeht, wie die Strukturgarbe definiert ist; statt $(X, \mathcal{O}_X)$ wird dann nur X geschrieben. Im folgenden wird eine analytische Menge in einem reduzierten komplexen Raum X immer auch selbst als ein reduzierter komplexer Raum betrachtet und der Gesamtraum X immer auch als eine analytische Menge in X. Die Terme *reduzibel* und *irreduzibel* sind dann für reduzierte komplexe Räume wohldefiniert.

Ein komplexer Raum X besitzt in jedem Punkt $x \in X$ eine wohlbestimmte (komplexe) *Dimension* $\dim_x X$ (die topologische Dimension von X in x ist $2 \cdot \dim_x X$). Die Dimension von X schlechthin ist $\dim X := \sup_{x \in X} \dim_x X$; ist X leer, so wird $\dim X$ gleich -1 gesetzt.

Sei $\mathfrak{R}$ die Klasse der reduzierten komplexen Räume. Man hat die folgenden Aussagen:

1) Direkte Produkte von je endlich vielen Räumen aus $\mathfrak{R}$ gehören zu $\mathfrak{R}$.

2) Unverzweigte und „analytisch verzweigte" Überlagerungen von Räumen aus $\mathfrak{R}$ gehören zu $\mathfrak{R}$.

Bemerkung. Analytisch verzweigte Überlagerungen komplexer Mannigfaltigkeiten sind nicht notwendig wieder komplexe Mannigfaltigkeiten: Es können Verzweigungspunkte auftreten, die keine uniformisierbaren Umgebungen besitzen. Z. B. hat das (zweiblättrige) „Riemannsche Gebiet" der Funktion $\sqrt{z_1 \cdot z_2}$ über dem Ursprung des $\mathbb{C}^2$ einen derartigen Verzweigungspunkt.

2.1.3. *Seien X und Y reduzierte komplexe Räume. Eine Korrespondenz $f: X \multimap Y$ heißt holomorph*), wenn gilt:*

(α) *Der Graph G_f von f ist eine im Produktraum $X \times Y$ analytische Menge.*

(β) *Die Abbildung $\check{f}: G_f \to G$ ist eigentlich, d. h. die Urbilder kompakter Mengen sind kompakt.*

Sei $f: X \multimap Y$ holomorph. Dann sind $\check{f}: G_f \to X$ und $\hat{f}: G_f \to Y$ holomorphe Abbildungen. Weiter ist $f(x) = (\hat{f} \circ \check{f}^{-1})(x)$, $x \in X$, stets eine analytische Menge in Y und $f^{-1}(y) = (\check{f} \circ \hat{f}^{-1})(y)$, $y \in Y$, stets eine analytische Menge in X; $f^{-1}(y)$ heißt die *Faser* von f über y. Unter der *Dimension* von f (Bezeichnung: $\dim f$) wird die

*) Vgl. [22], [29]. Siehe auch [23], wo eine andere Notation benutzt wird.

(komplexe) Dimension von G_f verstanden; der *Rang* von f (Bezeichnung: $\operatorname{rg} f$) ist als der (globale) Rang von $\hat{f}$ erklärt: Es ist

$$\operatorname{rg} f := \operatorname{rg} \hat{f} = \sup_{\xi \in G_f} (\dim_\xi G_f - \dim_\xi \hat{f}^{-1}(\hat{f}(\xi))),$$

falls f nicht leer ist, anderenfalls ist $\operatorname{rg} f := -1$. f heißt *reduzibel* oder *irreduzibel*, je nachdem ob G_f reduzibel oder irreduzibel ist.

Im folgenden wird der komplexe Raum X als irreduzibel mit $\dim X > 0$ vorausgesetzt.

Unter einer meromorphen Abbildung von X in Y wird dann eine holomorphe Korrespondenz $f: X \multimap Y$ verstanden, die den folgenden Bedingungen genügt:

(1) *f ist irreduzibel*;

(2) *Es gibt analytische Mengen $M \subsetneq G_f$ und $N \subsetneq X$, derart daß $G_f \setminus M$ auf $X \setminus N$ durch $\check{f}$ biholomorph bezogen wird und daß $\check{f}(M) = N$ ist.*

Ist f eine meromorphe Abbildung, so ist auch die Notation $f: X \rightharpoonup Y$ gebräuchlich. – Jede holomorphe Abbildung von X in Y ist auch meromorph (es können dann M und N als leere Mengen gewählt werden).

Die Bedingung (2) besagt, daß die zu einer meromorphen Abbildung $f: X \rightharpoonup Y$ gehörende Abbildung $\check{f}: G_f \to X$ eine *Modifikationsabbildung* ist; werden $G_f \setminus M$ und $X \setminus N$ vermöge $\check{f}$ miteinander identifiziert, so entsteht G_f aus X dadurch, daß N aus X herausgenommen und durch M ersetzt, also X in den Punkten von N „modifiziert“ wird. – Es sei hervorgehoben, daß (2) auch $f(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$ impliziert; ist $f(x)$ mehrpunktig, so heißt x eine Unbestimmtheitsstelle von f. Es folgt ferner $\dim f = \dim X < \infty$ und $0 \leqslant \operatorname{rg} f \leqslant \dim X$.

Notiz. Der hier erläuterte Begriff der meromorphen Abbildung eines reduzierten komplexen Raumes stammt von R. Remmert [14, 15]; zur Ausdehnung des Begriffs auf nichtreduzierte komplexe Räume siehe G. Kraus [11]. Ein von dem Remmertschen Konzept verschiedener Begriff der meromorphen Abbildung eines reduzierten komplexen Raumes wurde von W. Stoll [24] eingeführt; siehe hierzu auch A. Hirschowitz [10].

Die in 2.1 betrachtete durch z_1/z_2 bestimmte Korrespondenz $\varphi: \mathbb{C}^2 \multimap \bar{\mathbb{C}}$ ist eine meromorphe Abbildung: Die in $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ laufende komplexe Variable w werde durch $w = w_1 : w_2$ homogenisiert; der Graph von φ ist dann

$$G_\varphi = \{(z_1, z_2, w_1 : w_2) \in \mathbb{C}^2 \times \bar{\mathbb{C}} : z_1 w_2 - z_2 w_1 = 0\},$$

und die Abbildungen $\check{\varphi}: G_\varphi \to \mathbb{C}^2$ bzw. $\hat{\varphi}: G_\varphi \to \bar{\mathbb{C}}$ werden gegeben durch $(z_1, z_2, w_1 : w_2) \mapsto (z_1, z_2)$ bzw. durch $(z_1, z_2, w_1 : w_2) \mapsto w_1/w_2$. Ersichtlich ist G_φ eine irreduzible analytische Menge in $\mathbb{C}^2 \times \bar{\mathbb{C}}$ und $\check{\varphi}$ eine eigentliche holomorphe Abbildung; die analytischen Mengen $M \subsetneq G$ und $N \subsetneq X$ gemäß der obigen Bedingung (2) sind

$$M = \{(0, 0, w_1 : w_2) \in \mathbb{C}^2 \times \bar{\mathbb{C}}\} \quad \text{und} \quad N = \{O_2\} \subset \mathbb{C}^2.$$

M kann mit der projektiven Geraden $\mathbb{P}_1$ identifiziert werden. Der Punkt $O_2 \in \mathbb{C}^2$ wird vermöge $\check{\varphi}^{-1}$ zu diesem $\mathbb{P}_1$ „aufgeblasen“, der sodann durch $\hat{\varphi}$ biholomorph auf $\bar{\mathbb{C}}$ abgebildet wird.

Die Verbindung $(f_1,\ldots,f_k)$ von k meromorphen Abbildungen $f_\varkappa: X \rightharpoonup Y_\varkappa$ ($\varkappa = 1,\ldots k$; $k \geqslant 2$) ist immer eine holomorphe Korrespondenz (s. [22]), aber nicht notwendig eine meromorphe Abbildung, weil der Graph $G_{(f_1,\ldots,f_k)}$ reduzibel sein kann. $G_{(f_1,\ldots,f_k)}$ besitzt jedoch genau eine irreduzible Komponente (die „Hauptkomponente"), die Graph einer meromorphen Abbildung von X in $Y_1 \times \ldots \times Y_k$ ist. Diese meromorphe Abbildung heißt die *meromorphe Verbindung* der $f_\varkappa$; sie wird mit $[f_1,\ldots,f_k]$ bezeichnet.

Für zwei meromorphe Abbildungen $f: X \rightharpoonup Y$ und $f_0: X \rightharpoonup Y_0$ ist stets $\operatorname{rg}[f,f_0] \geqslant \operatorname{rg} f$. f_0 heißt von f *abhängig*, wenn $\operatorname{rg}[f,f_0] = \operatorname{rg} f$ gilt; f und f_0 heißen *verwandt*, wenn f_0 von f abhängig und f von f_0 abhängig ist.

Unter einer *meromorphen Funktion* auf X wird im folgenden immer eine meromorphe Abbildung $X \rightharpoonup \bar{\mathbb{C}}$ verstanden, die X nicht konstant in den Punkt $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ überführt. Meromorphe Funktionen auf X lassen sich rational verknüpfen. Die Menge aller meromorphen Funktionen auf X bildet so einen Körper, der mit $M(X)$ bezeichnet sei. Zu $M(X)$ gehören insbesondere die holomorphen Funktionen; sie bilden einen Unterring von $M(X)$, der wiederum den Körper $K_{\mathbb{C}}$ der konstanten Funktionen enthält. $K_{\mathbb{C}}$ ist auf natürliche Art isomorph zum Körper $\mathbb{C}$ und wird überlicherweise vermöge dieser Isomorphie mit $\mathbb{C}$ identifiziert; $M(X)$ wird so zu einer $\mathbb{C}$-Algebra. Ist eine meromorphe Abbildung $\phi: X \rightharpoonup Y$ gegeben, so bilden auch die von ϕ abhängigen meromorphen Funktionen auf X einen Unterkörper (und eine Unter-$\mathbb{C}$-Algebra) von $M(X)$; Bezeichnung: $M_\phi(X)$.

Jede Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $M(X)$ besitzt einen *Rang* (Bezeichnung: $\operatorname{rg}\mathfrak{M}$), der wie folgt erklärt werden kann:

(α) Ist $\mathfrak{M} = \emptyset$, so sei $\operatorname{rg}\mathfrak{M} := -1$.

(β) Besteht $\mathfrak{M}$ aus lauter konstanten Funktionen, so sei $\operatorname{rg}\mathfrak{M} := 0$.

(γ) $\mathfrak{M}$ enthalte wenigstens eine nichtkonstante meromorphe Funktion. – Es werden Tupel $\{f_1,\ldots,f_k\}$ von nichtkonstanten meromorphen Funktionen $f_\varkappa$ auf X ($\varkappa = 1,\ldots,k$; $k \geqslant 2$) betrachtet; dabei wird nicht verlangt, daß die $f_\varkappa$ paarweise verschieden sind. Zwei Fälle sind möglich:

(γ_1) Es ist stets $\operatorname{rg}[f_1,\ldots,f_k] = 1$.

(γ_2) Es gibt Tupel $\{f_1,\ldots,f_k\}$, so daß $\operatorname{rg}[f_1,\ldots,f_k] = k$ ist.

Im Falle (γ_1) sei $\operatorname{rg}\mathfrak{M} := 1$. – Je zwei nichtkonstante Funktionen aus $\mathfrak{M}$ sind dann verwandt.

Im Falle (γ_2) ist stets $k \leqslant \dim X$. Sei r das Maximum aller auftretenden Ränge k. Es sei dann $\operatorname{rg}\mathfrak{M} := r$.

2.2. Im folgenden bezeichne X weiterhin einen irreduziblen reduzierten komplexen Raum, dessen Dimension größer als Null ist.

Sei $f: X \rightharpoonup Y$ eine meromorphe Abbildung. Ein Punkt $x \in X$ heiße ein *Zentrum* von f, wenn $f(x)$ mit der gesamten Bildmenge $f(X)$ übereinstimmt; f heißt *zentral*, wenn f ein Zentrum besitzt.

Ist f konstant, so ist also jeder Punkt von X ein Zentrum von f. Ist f nicht konstant, so ist jedes Zentrum von f eine Unbestimmtheitsstelle von f.

Es ist klar, daß die oben betrachtete meromorphe Funktion $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightharpoonup \bar{\mathbb{C}}$ zentral mit dem Ursprung des $\mathbb{C}^2$ als einzigem Zentrum ist. Allgemeiner gilt: (i) Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $f: X \rightharpoonup \bar{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion mit

Unbestimmtheitsstellen, so ist f zentral mit genau diesen Unbestimmtheitsstellen als Zentren. – (ii) Sei für beliebiges ganzes $m \geqslant 2$

$$\varphi_m : \mathbb{C}^m \multimap \mathbb{P}_{m-1}$$

die durch

$$G_{\varphi_m} : \left\{(z_1, \ldots, z_m), (w_1 : \ldots : w_m)) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{P}_{m-1} : \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} z_1 \ldots z_m \\ w_1 \ldots w_m \end{pmatrix} = 1\right\}$$

gegebene holomorphe Korrespondenz (es ist also $\varphi_2 = \varphi$); dann ist φ_m eine zentrale meromorphe Abbildung mit $O_m := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^m$ als einzigem Zentrum.

Die Menge aller Zentren von $f: X \rightharpoonup Y$ werde mit $\mathfrak{Z}(f)$ bezeichnet; es ist also f zentral genau dann, wenn $\mathfrak{Z}(f) \neq \emptyset$.

Man hat die folgenden Aussagen:

(1) *Ist f zentral, so ist $f(X)$ eine kompakte irreduzible analytische Menge in Y.*

(2) *$\mathfrak{Z}(f)$ ist eine analytische Menge in X.*

(3) *Ist f zentral und nicht konstant, so gilt*

$$\operatorname{rg} f \geqslant 1 \quad \text{und}$$

$$0 \leqslant \dim \mathfrak{Z}(f) \leqslant \dim X - \operatorname{rg} f - 1,$$

also insbesondere

$$\dim X \geqslant 2.$$

(4) *Sei $f_0: X \rightharpoonup Y_0$ eine von f abhängige meromorphe Abbildung. Dann gilt*

$$\mathfrak{Z}(f_0) \supset \mathfrak{Z}(f);$$

mit f ist also auch f_0 zentral.

(5) *Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit; der (topologische) Unterraum $\mathfrak{U}_f$ der Unbestimmtheitsstellen von f enthalte isolierte Punkte. Dann ist jeder solche Punkt ein Zentrum von f, und es ist*

$$\operatorname{rg} f = \dim X - 1.$$

Definition. *Sei T ein Unterkörper von $M(X)$. T heiße ein Thimmscher Funktionenkörper auf X, wenn gilt:*

(I) $\mathbb{C} \subsetneqq T$.

(II) *Es gibt eine zentrale meromorphe Abbildung $\phi: X \rightharpoonup Z$, so daß jede meromorphe Funktion $\varphi \in T$ von ϕ abhängig ist.*

Ein Thimmscher Funktionenkörper T auf X ist wegen (I) insbesondere auch eine $\mathbb{C}$-Algebra und enthält nichtkonstante meromorphe Funktionen. – Eine zentrale meromorphe Abbildung ϕ gemäß (II) heißt eine *T zugeordnete meromorphe Abbildung.*

Notiz. Funktionenkörper mit den Eigenschaften (I) und (II) sind zuerst von W. Thimm betrachtet worden; siehe [25, 26, 27, 28].

Sei $T \subset M(X)$ ein Thimmscher Funktionenkörper. Es läßt sich zeigen, daß die folgenden Sätze gelten:

(a) *Es ist* $1 \leqslant \operatorname{rg} T \leqslant \dim X - 1$.

Folgerung: Ein Funktionenkörper K auf X mit $\operatorname{rg} K = \dim X$ ist nicht Thimmsch.

Eine T zugeordnete meromorphe Abbildung ist durch T nicht eindeutig bestimmt. Jedoch gilt:

(b.1) *Sei* $\operatorname{rg} T = 1$. *Dann ist jede nichtkonstante meromorphe Funktion* $f: X \rightharpoonup \bar{\mathbb{C}}$ *aus T eine T zugeordnete meromorphe Abbildung, und für jede weitere T zugeordnete meromorphe Abbildung* $\phi: X \rightharpoonup Z$ *ist* $\operatorname{rg} \phi \geqslant \operatorname{rg} T = \operatorname{rg} f$.

(b.2) *Sei* $\operatorname{rg} T = r > 1$; *sei* $\{f_1, \ldots, f_r\}$ *ein Tupel meromorpher Funktionen aus T mit* $\operatorname{rg}[f_1, \ldots, f_r] = r$. *Dann ist* $[f_1, \ldots, f_r]: X \rightharpoonup \bar{\mathbb{C}}^r$ *eine T zugeordnete meromorphe Abbildung, und für jede weitere T zugeordnete meromorphe Abbildung* $\phi: X \rightharpoonup Z$ *ist* $\operatorname{rg} \phi \geqslant \operatorname{rg} T$.

Folgerung: Seien ϕ und $\tilde{\phi}$ dem Thimmschen Funktionenkörper $T \subset M(X)$ zugeordnete Abbildungen mit $\operatorname{rg} \phi = \operatorname{rg} \tilde{\phi} = \operatorname{rg} T$. Dann ist wegen Aussage (4) (s. oben) $\mathfrak{Z}(\phi) = \mathfrak{Z}(\tilde{\phi})$; die analytische Menge $\mathfrak{Z}(\phi) \subset X$ ist also allein durch T bestimmt. Sei $\mathfrak{Z}(T) := \mathfrak{Z}(\phi)$. Wegen Aussage (3) (s. oben) gilt dann

$$0 \leqslant \dim \mathfrak{Z}(T) \leqslant \dim X - \operatorname{rg} T - 1.$$

(c) *Jeder Unterkörper* T_1 *von T mit* $\mathbb{C} \subsetneq T_1$ *ist Thimmsch, und es gilt* $\mathfrak{Z}(T_1) \supset \mathfrak{Z}(T)$.

Folgerungen:

(i) Jeder Punkt von $\mathfrak{Z}(T)$ ist eine Unbestimmtheitsstelle jeder nichtkonstanten Funktion aus T.

(ii) Enthält ein Unterkörper K von $M(X)$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion, so ist K nicht Thimmsch.

(d) *Die analytisch abgeschlossene Hülle* $\bar{T}$ *von T ist Thimmsch.*

Erläuterung. $\bar{T}$ besteht genau aus denjenigen meromorphen Funktionen auf X, die von einer T zugeordneten meromorphen Abbildung vom Range $\operatorname{rg} T$ abhängig sind (vgl. [16]); es gilt also $\bar{T} \supset T$ und $\operatorname{rg} \bar{T} = \operatorname{rg} T$.

(e) **(Satz von Thimm)** *T ist ein algebraischer Funktionenkörper über* $\mathbb{C}$ vom *Transzendenzgrad* $\operatorname{rg} T$.

Zu Beweisen dieses Satzes siehe die zitierten Arbeiten von W. Thimm sowie auch [16] und [22].

Bemerkung. Eine Theorie Thimmscher Funktionenkörper läßt sich auch für meromorphe Funktionskeime auf punktalen irreduziblen komplexen Raumkeimen entwickeln, und die angegebenen Sätze lassen sich übertragen. Darüber hinaus gilt:

(e*) *Jeder Thimmsche Funktionenkörper auf einem punktalen irreduziblen komplexen Raumkeim* $\tilde{X}$ *läßt sich zu einem Thimmschen Funktionenkörper von* $\tilde{X}$ *vom Range* $\dim \tilde{X} - 1$ *erweitern.*

Abschließend seien einige Beispiele betrachtet.

Mit $z_1, \ldots, z_m$ werden wieder die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 2$, bezeichnet.

a) Es seien meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$, $k \geqslant 1$, aus $M(\mathbb{C}^m)$ gegeben. Sei $F_1 := f_1$ im Falle $k=1$, und $F_k := [f_1, \ldots, f_k]$ im Falle $k>1$; sei

$$K(f_1, \ldots, f_k) := M_{F_k}(\mathbb{C}^m)$$

der Körper der von F_k abhängigen meromorphen Funktionen aus $M(\mathbb{C}^m)$.

a_1) Sei $k \leqslant m-1$ und $f_\varkappa := z_{\varkappa+1}/z_\varkappa$ für $\varkappa = 1, \ldots, k$. Dann ist $K(f_1, \ldots, f_k)$ auf dem $\mathbb{C}^m$ Thimmsch vom Range k; eine $K(f_1, \ldots, f_k)$ zugeordnete meromorphe Abbildung vom Range k ist F_k; $K(f_1, \ldots, f_k)$ ist $\mathbb{C}$-isomorph zum Körper der rationalen Funktionen im $\mathbb{C}^k$.

a_2) Sei $m=3$ und $k=2$; sei $f_1 := z_2/z_1$ und $f_2 := (z_2 - z_1 \cdot z_3)/(z_2 + z_1 \cdot z_3)$. Zu $K(f_1, f_2)$ gehört die Funktion $f_1 \cdot (1-f_2)/(1+f_2) = z_3$, die holomorph und nicht konstant ist; nach Folgerung (ii) aus Satz (c) ist also $K(f_1, f_2)$ nicht Thimmsch. Es ist $\operatorname{rg} K(f_1, f_2) = 2$; der Transzendenzgrad von $K(f_1, f_2)$ über $\mathbb{C}$ ist gleich der Mächtigkeit des Kontinuums.

b) Sei $h : \mathbb{C}^2 \multimap \bar{\mathbb{C}}$ die durch

$$G_h := \{((z_1, z_2), (w_1 : w_2)) \in \mathbb{C}^2 \times \bar{\mathbb{C}} : w_1^2 \cdot z_1 \cdot z_2 - w_2^2 \cdot (z_2 - z_1) \cdot (z_2 + z_1) = 0\}$$

gegebene holomorphe Korrespondenz (h kann auch, etwas unpräzise, durch $h = \sqrt{z_2/z_1 - z_1/z_2}$ beschrieben werden). Es gibt

1. eine zweiblättrige Überlagerung X des $\mathbb{C}^2$ mit der Projektionsabbildung $\pi : X \to \mathbb{C}^2$, deren Verzweigungspunkte über den vier Geraden des $\mathbb{C}^2$, die durch $z_1 = 0$ bzw. $z_2 = 0$ bzw. $z_1 = z_2$ bzw. $z_1 = -z_2$ gegeben sind, liegen, und
2. eine meromorphe Funktion $f : X \rightharpoonup \bar{\mathbb{C}}$, die zentral mit dem über $O_2 \in \mathbb{C}^2$ gelegenen Punkt $O \in X$ als einzigem Zentrum ist, derart daß $h = f \circ \pi^{-1}$ gilt.

Der Thimmsche Funktionenkörper $M_f(X)$ der von f abhängigen meromorphen Funktionen auf X ist ein elliptischer Funktionenkörper.

Literatur

[1] Baumann, J.: Starrheit und Nichtäquivalenz von analytischen Polyedergebieten. Schriftenreihe des Math. Inst. d. Univ. Münster, 2. Serie, H. 24 (1982)

[2] Behnke, H.; Peschl, E.: Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Starre Regularitätsbereiche. Monatshefte f. Math. u. Phys. **43** (1936)

[3] Blaschke, W.: Einführung in die Geometrie der Waben. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1955

[4] –; Bol, G.: Geometrie der Gewebe. Berlin: Springer 1938

[5] Cartan, H.; Thullen, P.: Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. **106** (1932)

[6] Eickel, J.: Glatte starre Holomorphiegebiete vom topologischen Typ der Hyperkugel. Schriftenreihe des Math. Inst. d. Univ. Münster, H. 20 (1961)

[7] Forster, O.; Stein, K.: Entwicklungen in der komplexen Analysis. In: Perspectives in Mathematics. Anniversary of Oberwolfach. Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1984

[8] Grauert, H.; Remmert, R.: Coherent Analytic Sheaves. Berlin – Heidelberg – New York – Tokio: Springer 1984

[9] Hedtfeldt, K. H.: Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Starre einfach zusammenhängende Holomorphiegebiete. Schriftenreihe des Math. Inst. d. Univ. Münster, H. 8 (1954)
[10] Hirschowitz, A.: Les deux types de méromorphie diffèrent. J. reine angew. Math. **313** (1980)
[11] Kraus, G.: Meromorphe Funktionen auf allgemeinen komplexen Räumen. Math. Ann. **209** (1974)
[12] Narasimhan, R.: Several Complex Variables. Chicago Lectures in Mathematics. Chicago and London: Univ. of Chicago Press 1971
[13] Poincaré, H.: Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. Rend. Circ. mat. Palermo **23** (1907)
[14] Remmert, R.: Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen. Math. Ann. **132** (1956)
[15] –: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133** (1957)
[16] –: Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions. Amer. J. of Math. **82** (1960)
[17] –; Stein, K.: Eigentliche holomorphe Abbildungen. Math. Z. **73** (1960)
[18] Rischel, H.: Ein Satz über eigentliche holomorphe Abbildungen von analytischen Polyedergebieten. Math. Scandinavica **14** (1964)
[19] –: Holomorphe Überlagerungskorrespondenzen. Math. Scandinavica **15** (1964)
[20] Rothstein, W.: Zur Theorie der analytischen Abbildungen im Raume zweier komplexer Veränderlichen. Das Verhalten der Abbildung auf glatten analytischen Randhyperflächen. Dissertation, Münster (1935)
[21] Serre, J. P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. de l'Institut Fourier **6** (1955)
[22] Stein, K.: Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen. II. Amer. J. of Math. **86** (1964)
[23] –: Topics on holomorphic correspondences. Rocky Mountain J. of Math. **2** (1972)
[24] Stoll, W.: Über meromorphe Modifikationen II. Math. Z. **61** (1954)
[25] Thimm, W.: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. II. Math. Ann. **125** (1953)
[26] –: Über die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung. Math. Z. **57** (1953)
[27] –: Untersuchungen über ausgeartete meromorphe Abbildungen. Math. Ann. **127** (1954)
[28] –: Meromorphe Abbildungen von Riemannschen Bereichen. Math. Z. **60** (1954)
[29] Wolffhardt, K.: Existenzbedingungen für maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen. Math. Z. **85** (1964)

Prof. Dr. K. Stein
Gartenstr. 3B
8050 Freising

(*Eingegangen 11. 4. 1992*)

Buchbesprechungen

Meschkowski, H., Denkweisen großer Mathematiker. Ein Weg zur Geschichte der Mathematik, Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn 1991, X + 286 S., gbd., DM 58,-

Als das vorliegende Buch des 1990 verstorbenen Autors 1961 in erster Auflage erschien, war es noch kartoniert und 95 Seiten dünn, ein kurzer Streifzug durch Leben und Werk von 9 Mathematikern, ein erster Zugang zu einer Entwicklungsgeschichte mathematischer Gedanken, an dem Werk einzelner dokumentiert, die die in dem jeweiligen Kapitel nach Möglichkeit auch selbst zu Wort kamen, nicht als ein wissenschaftliches Werk geschrieben, sondern als eine Art Lesebuch für Neulinge in der Geschichte der Mathematik, spannend und zugleich nüchtern geschrieben ohne zu viele Prisen Phantasie (vgl. etwa die Bücher von Colerus oder Bell), mit dem Schwerpunkt auf der Entwicklung mathematischer Ideen, höchstens Abiturwissen in Mathematik voraussetzend.

In der vorliegenden 3. Auflage ist es erheblich dicker, besser ausgestattet und teurer geworden, ohne daß sich der Charakter des Buches geändert hätte. Die jetzt behandelten Mathematiker sind die Pythagoreer, Euklid, Archimedes, Nikolaus von Cues, Cardano/Tartaglia, Fermat, Pascal, Leibniz, Jakob/Johann Bernoulli, Euler, Gauß, Bolzano, Bolyai/Lobatschewski, Kummer, Boole, Weierstraß, Riemann, Cantor, Klein, Poincaré, Hilbert, E. Schmidt, Brouwer, E. Noether und J. von Neumann. Die Beziehungen der Mathematik zu den Nachbarwissenschaften beschränken sich hier vor allem auf die Philosophie, was der Einheitlichkeit des Buches zu gute kommt, aber ein etwas einseitiges Bild der historischen Entwicklung der Mathematik liefert.

Obwohl die Konkurrenz und die Vielfältigkeit derartiger Bücher heute größer ist als 1961, hat das Buch als Einführung (insbesondere für den an den mathematischen Grundlagen Interessierten) seinen eigenen Reiz behalten, den insbesondere die klare, den Leser mitreißende Diktion und die zahl- und umfangreichen Zitate ausmachen. Eine Kritik an diesem oder jenem Halbsatz wird der Intension des Lesebuches nicht gerecht; für den, der Feuer gefangen hat, hätte aber das Literaturverzeichnis an einigen Stellen etwas umfangreicher (und moderner) sein können; auch das Manko der ausgesparten Beziehungen der Mathematik zu anderen Disziplinen hätte hier ein Feigenblatt finden können.

Erlangen W.-D. Geyer

Brezinski, C., History of Continued Fractions and Padé Approximants (Springer Series in Computational Mathematics, vol. 12), Berlin u.a.: Springer-Verlag 1991, 551 pages, DM 188,-

Every mathematician who is working in any branch of mathematics will sooner or later use continued fractions. Even if he claims he never did, he is using continued fractions, but he doesn't know it.

Whether this statement is a theorem can be contested, but an indication in the direction of its correctness is given by the present book. In any case, the set of mathematicians who never came in contact with continued fractions seems to be very thin. While you are reading this book, you shall become more and more aware of the fact that continued fractions creep in many tiny veins of mathematics and sooner or later they pop up like a computer virus that has been latent for a long time.

Like Umberto Eco in his novel *The name of the rose*, Claude Brezinski dives into the deep dark (and also bright) ages of mathematics and like a detective finds many hidden and disguised continued fractions wandering around sometimes in unexpected corners of the mathematical monastry.

The Euclidean algorithm (ca. 300 BC) to compute the greatest common divisor is generally accepted to be one of the earliest nontrivial mathematical algorithms and ... it actually computes continued fractions. It is thus no surprise that the book starts off at this platform. The role of continued fractions in number theory (for example the approximation of π), square root computation and in the solution of diophantine equations etc. in the early ages is traced in the rest of this opening chapter.

The first people who became conscious users of continued fractions are found in the North of Italy. Fibonacci (ca. 1200) was the first to attempt to give a general definition. It was Bombelli who – besides inventing the imaginary numbers – in 1572 gave a continued fraction type square root algorithm and Cataldi synthesized the theory in 1613.

The term continued fraction was only used in the seventeenth century when Wallis in his *Arithmetica infinitorum* (1655), inspired by Brouncker's work, gave a continued fraction expansion for $4/\pi$ and he wrote *"Nempe si unitati adjungatur fractio, quae denominatorem habeat continue fractum"*. Also the Dutch astronomer C. Huygens was active in the continued fraction research. He computed the number of teeth for the gears of his planetarium using continued fractions.

During the eigtheenth century, the theory was brought from the early formalization of the seventeenth century to the maturity of the nineteenth century. The central motor was the Berlin Academie of Sciences with the outstanding mathematicians: Euler, Lambert and Lagrange. Also in this century – hundred years before Padé – we find the first traces of what is now called Padé approximants. Already Bernoulli was fairly close to it in 1728 but Lagrange, in his quest for solving differential equations had the real thing since he writes that the convergents of the continued fraction and the solutions did agree *"jusqu'à la puissance de x inclusivement qui est la somme des deux plus hautes puissances de x dans le numérateur et dans le dénominateur"*. This is precisely the definition of Padé approximants.

The full maturity of the nineteenth century came with an explosion of new results that can not be reported in any detail in this review. It is in this century that the roots of the contemporary theory of continued fractions and Padé approximants are found and the readers familiar with their applications in transcendental numbers, orthogonal polynomials, approximation theory, physics and the many engineering disciplines that benefit from the theory, will be most interested in this period. It might even prevent them from reinventing certain results. In this book, the thickest chapter deals with this century. It is divided into two long sections: one where the elements of the continued fractions are numbers and one where these elements depend on one or several complex variables. The author admits that it is difficult to give a very structured account of such a turbulent period. Both historically and mathematically further research is needed and apart from the distinction between numbers and functions, he neither follows a strict chronological order nor a strict classification by subject. Everything seems to be related with everything. The chapter ends however in beauty: it shows how Padé approximants emerged from Cauchy's *Cours d'Analyse*, were shaped by Frobenius and culminated in Padé's thesis in 1892.

The last chapter deals with the first 38 years of our century. The separation by the century is artificial and these 38 years are actually the continuation of the previous century. A beacon is certainly Perron's book *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (1913). Many of the readers of this review will have used this early bible on the subject (and they might still do).

Of course, one might end the "history" of continued fractions and Padé approximants in 1938, the subject is far from dead after that. On the contrary, there has been an ever growing interest and the applications are plenty. We just mention some cornerstones of this post-history period (I cannot call it the modern times, since this was the title of Brezinski's last chapter). There are the following books: *Analytic theory of continued* *fractions* by H.S. Wall from 1948, a subject that needed a new book in 1980 when Jones and Thron published their *Continued fractions: analytic theory and applications.* Also the book by G.A. Baker Jr., *Essentials of Padé approximants* from 1975 was rewritten as a two volume work by Baker and Graves-Morris in 1981 under the title *Padé approximants.* Besides these, there are several other books that were published as lecture notes and that grew out of PhD theses and also many conference proceedings were published since the early 1970's on this and on related subjects.

The author C. Brezinski is very active in the field himself. What was done originally for mathematical reasons, namely looking through old papers, became an hobby and even a passion that lead him deeper and deeper into the past: not only the European, but also Hindu and Japanese roots were discovered. However, writing history books obeys completely other rules than writing mathematics. Brezinski, not being an historian describes this book as a collection of facts and references about continued fractions and their history, rather than an historical work in the proper sense of the word. This describes rather precisely what the reader should expect. It doesn't read very smoothly. You will not find the deeper historical analysis of the older works and moreover, the reader is supposed to be familiar with the modern theory of continued fractions. He is constantly forced to make mathematical gymnastics to see the connection between an old result and its modern interpretation. Also the many (sometines long) citations from many different languages (French, Italian, Latin, English, often in an old spelling) is quite demanding. Also the ever changing letter types (proper names in capitals, citations in italic, text in roman and stuffed with mathematical symbols) do not improve readability.

Consumed in smaller bites, this book is for the insider an everlasting source of information. Not only the text itself (311 pages) but also the scientific bibliography with 2302 entries, the historical bibliography with 478 entries and the name index of 43 pages with almost 1500 names are thesauri that will be consulted with pleasure by everyone interested.

Leuven A. Bultheel

Novikov, S. P., Fomenko, A. T., Basic Elements of Differential Geometry and Topology, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1990, 500 S., Dfl 260.–

1971 begann man in der Fakultät für Mechanik und Mathematik an der Staatsuniversität Moskau damit, den traditionellen Lehrstoff in Differentialgeometrie und Topologie zu modernisieren. Das vorliegende Buch ist die Übersetzung ins Englische des aus diesem Projekt entstandenen Textbuchs.

Das Ergebnis präsentiert sich als eine originelle Mischung aus Klassischer Differentialgeometrie in altmodischer Darstellung mit vielen Indizes einerseits und ganz modernen eher globalen Gegenständen andererseits, wie Fundamentalgruppe, Abbildungsgrad, Klassifikation der geschlossenen Flächen, de Rahm-Kohomologie bis hin zu Quasikristallen und Eichtheorie. Stets wird die enge Verbindung zur Physik hervorgehoben, von der ja auch die Differentialgeometrie zu allen Zeiten die entscheidenden neuen Impulse bekam. So werden auch indefinte Metriken betrachtet und darüber reflektiert, daß hier die Forderung an eine Mannigfaltigkeit, hausdorffsch zu sein, gar nicht natürlich ist.

Die Übersetzung ist manchmal ein wenig holprig. Bei den Verweisen auf die Literatur hat man versäumt, die Kennummern gemäß der englischen Fassung zu ändern. Aber davon einmal abgesehen, stellt das Buch eine wertvolle Ergänzung zu der im Westen verfassten Lehrbuchliteratur dar: Die breite, fast gemütlich zu nennende Darstellung, in welche zahlreiche Beispiele und Figuren eingebaut sind, hat ihren eigenen Charme. Daß unter solchen Umständen trotz des Umfangs von fast 500 Seiten kaum auf die globalen

Resultate in der Riemannschen Geometrie eingegangen werden kann, wie sie in den letzten 50 Jahren gefunden wurden, kann nicht weiter überraschen. Zum Ausgleich findet sich manches, was man in übrigen Büchern vergebens suchen würde, ich habe oben versucht, einiges davon anzudeuten.

Bonn W. Klingenberg

Donaldson, S. K., Kronheimer, P.B., The Geometry of Four-Manifolds (Oxford Math. Monographs), Oxford: Clarendon Press 1990, 440 S., £ 35.– und

Petrie, T., Randall, J., Connections, Definite Forms, and Four-Manifolds (Oxford Math. Monographs), Oxford: Clarendon Press 1990, 131 S., £ 20.–

Es ist nun fast genau zehn Jahre her, daß zwei Ein-Mann-Expeditionen in das bis dahin für neugierige Besucher unzugängliche Reich der vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten zu ungeahnten, einander wundersam ergänzenden Erkenntnissen führten. Der eine der beiden Forscher, Michael Freedman, entdeckte eine vollständige Klassifikation der einfach zusammenhängenden geschlossenen 4-dimensionalen *topologischen* Mannigfaltigkeiten; er fand, daß jede ganzzahlige quadratische Form die Schnittform einer solchen Mannigfaltigkeit ist und daß höchstens zwei verschiedene Mannigfaltigkeiten dieselbe Schnittform haben können. Der andere hingegen, Simon Donaldson, bewies, daß sehr viele quadratische Formen nicht auf *differenzierbaren* Mannigfaltigkeiten leben können, während manche andere Formen wiederum von vielen verschiedenen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten angenommen werden.

Nachdem die Originalarbeiten der beiden seinerzeit im Journal of Differential Geometry veröffentlich wurden, erschien 1990 bei Princeton University Press das Buch „Topology of 4-Manifolds" von Freedman und Quinn, in dem die eine Seite dieser Geschichte noch einmal ausführlicher und von einem etwas geänderten Gesichtspunkt aus dargestellt wird, und es erschien das Buch von Donaldson und Kronheimer, das im Mittelpunkt dieser Besprechung steht.

Donaldsons revolutionäre Vorgehensweise bestand, grob gesprochen, in folgendem: Man fixiere über einer gegebenen Mannigfaltigkeit M ein Bündel E und betrachte zunächst die Gesamtheit $\mathscr{A}$ aller Zusammenhänge auf E. Dabei ist ein Zusammenhang eine differentialgeometrische Zusatzstruktur, die es erlaubt, Tangentialvektoren von E in eine horizontale und eine vertikale Komponente zu zerlegen. Ist M von der Dimension 4, so legt es die Yang-Mills-Theorie, die ihre Wurzeln in der Physik hat, nahe, die Teilmenge $\mathscr{S}$ von $\mathscr{A}$, die aus den anti-selbstdualen Zusammenhängen besteht, zu untersuchen. Die Elemente von $\mathscr{S}$ sind die Lösungen einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung, die zwar nicht elliptisch ist, aber durch Hinzunahme einer weiteren Gleichung zu einem elliptischen System abgeändert werden kann. Der Quotient $\mathscr{M} = \mathscr{S}/\mathscr{G}$ von $\mathscr{S}$ nach der Gruppe $\mathscr{G}$ der Automorphismen von E, der sogenannten Eichgruppe, heißt *Modulraum*. Er ist endlichdimensional; sein Studium erlaubt die erstaunlichen Rückschlüsse auf die Struktur der Ausgangsmannigfaltigkeit M.

Die Durchführung dieses Programms überschreitet natürlich weit den Rahmen der bloßen Differentialtopologie: Es werden Hilfsmittel aus Analysis, Differentialgeometrie und Algebraischer Geometrie gebraucht. Donaldson und Kronheimer gehen *nicht* auf einem Weg vor, der möglichst direkt und mit möglichst wenig Hilfsmitteln zu ein, zwei bedeutenden Resultaten führt, sonden sie verlassen oft die direkte Route, machen Abstecher und Umwege, die aber alle *ein* Ziel haben: möglichst viel Einsicht zu vermitteln. (Allerdings kommt, abgesehen von einigen gelegentlichen Hinweisen auf die Elektrodynamik, keine Physik vor.) Es ist das erklärte Ziel der Autoren, ein Buch von bleibendem Wert zu schreiben. Deswegen haben sie darauf verzichtet, alle aktuellen Ergebnisse aufzunehmen; stattdessen konzentrieren sie sich auf die zentralen Methoden.

Nun zu einem Bericht über Inhalt, Aufbau und Stil: Das wichtigste Ergebnis des 2. Kapitels, das den Zusammenhängen auf Bündeln gewidmet ist, ist der grundlegende Satz von Uhlenbeck, der besagt, daß über einer Kugel in $\mathbb{R}^n$ ein Zusammenhang mit kleiner Krümmung eichäquivalent zu einem Zusammenhang ist, der, geeignet gemessen, selbst klein ist. Im Beweis lernt der Leser den Umgang mit den beiden wichtigsten analytischen Hilfsmitteln, dem Satz über implizite Funktionen und den Manipulationen mit Sobolev-Räumen. Die Autoren gehen bei der Darstellung dieses Satzes aus vom einfachsten Spezialfall, dem Lemma von Poincaré (eine geschlossene 1-Form auf der Kugel ist exakt). Immer wieder werden in diesem Beweis und im ganzen Buch die wichtigsten Schlußweisen zunächst in typischen einfachen Fällen und dann erst in voller Allgemeinheit vorgeführt; häufig werden auch mehrere verschiedene Beweise für wichtige Sätze geliefert.

In Kapitel 3 werden die anti-selbstdualen Zusammenhänge über dem 4-dimensionalen Torus und der S^4 studiert; in letzterem Fall liefert die Konstruktion von Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin eine sehr explizite matrizentheoretische Beschreibung der Modulräume. Dieses Kapitel ist, im Gegensatz zu den beiden folgenden, für den Beweis der differentialtopologischen Hauptresultate vielleicht nicht unbedingt notwendig. Die Autoren haben sich sehr bemüht, jedes Kapitel weitgehend für sich selbst lesbar zu machen.

Kapitel 4 ist der lokalen Struktur und der Kompaktifizierung der Modulräume gewidmet. Dabei wird Uhlenbecks Hebbarkeitssatz für Singularitäten anti-selbstdualer Zusammenhänge gebraucht, für den ein neuer, einfacherer Beweis geführt wird. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit den globalen Eigenschaften der Modulräume.

In Kapitel 6 werden die Beziehungen zwischen anti-selbstdualen Zusammenhängen und den im Sinne der Algebraischen Geometrie stabilen Vektorbündeln dargestellt; dies ist später wichtig für das Studium der Differentialtopologie komplexer Flächen.

Kapitel 7 untersucht Zusammenhänge auf zusammenhängenden Summen von Mannigfaltigkeiten. Dabei wird wieder von einer archetypischen Situation ausgegangen, dem Ausschneidungsprinzip für elliptische lineare Operatoren, das ein wesentlicher Bestandteil des Beweises des Indexsatzes von Atiyah-Singer ist, der ja ohnehin gebraucht wird, zum Beispiel für die Berechnung der Dimension der Modulräume. Vieles von dem, was in diesem Kapitel dargestellt wird, wurde ursprünglich von Taubes entwickelt.

In den Kapiteln 8 bis 10, den drei letzten des Buches, werden dann die differentialtopologischen Früchte dieser Mühen geerntet: In Kapitel 8 wird gezeigt, daß viele quadratische Formen nicht als Schnittformen differenzierbarer 4-Mannigfaltigkeiten vorkommen. Im Kapitel 9 werden die sogenannten Donaldson-Invarianten eingeführt; bereits die allereinfachste von ihnen zeigt, daß der h-Kobordismussatz in Dimension 4 falsch ist. In Kapitel 10 wird mittels dieser Invarianten bewiesen, daß es komplexe Flächen gibt, die zueinander homöomorph, aber nicht diffeomorph sind.

So eindrucksvoll diese Theorie auch ist, löst sie doch nicht alle Probleme der Differentialtopologie in der Dimension vier. Eines Tages wird jemand mit klugen neuen Ideen kommen und Fragen wie die folgende beantworten: Ist eine Mannigfaltigkeit, die homöomorph zu S^4 ist, auch diffeomorph zu S^4? Bis dahin wird das Werk von Donaldson-Kronheimer *die* Grundlage für das Studium der Geometrie vierdimensionaler Mannigfaltigkeiten sein. (Damit soll das vorzügliche Buch „Instantons and Four-Manifolds“ von Freed-Uhlenbeck keinesfalls herabgesetzt werden.) Aber auch der Nicht-Fachmann sollte getrost einmal in dieses Dokument einer großartigen Entdeckung und einer gewandelten mathematischen Grundeinstellung hineinschauen.

Es ist nun noch kurz auf ein zweites Buch einzugehen, das demselben Gegenstand gewidmet ist, im selben Verlag und sogar in derselben Reihe erschienen ist, und dessen Autoren Petrie und Randall sind. (In keinem der beiden hier besprochenen Bücher erscheint das jeweils andere im Literaturverzeichnis!) Die Autoren setzen sich zum Ziel, auf knappem Raum zu einem Spezialfall eines Donaldsonschen Satzes zu kommen, der ausreicht, zusammen mit dem Resultat von Freedman die Existenz exotischer differenzierbarer Strukturen auf dem $\mathbb{R}^4$ zu zeigen. Von Lawsons „The Theory of Gauge Fields in Four Dimensions" unterscheidet sich die Darstellung hauptsächlich dadurch, daß nach Fintushel-Stern Bündel mit der Strukturgruppe $SO(3)$ statt $SU(2)$ betrachtet werden und daß insbesondere der Indexsatz und seine Anwendung ausführlicher erläutert werden. Der Geruch von äquivarianter Topologie ist – kein Wunder bei diesen Autoren – manchmal wahrnehmbar. Die analytischen Sätze von Uhlenbeck werden ohne Kommentar und ohne Beweis als Propositionen zitiert.

Für ein Buch, das die Begriffe „Zusammenhänge" und „definite Formen" im Titel führt, wird über diese beiden Gegenstände recht wenig gesagt; die Einführung der Zusammenhänge ist auch formal wegen des unüberlegten Gebrauchs der Zeichen $\otimes$ und $\wedge$ nicht leicht verdaulich. Das Buch endet mit einigen Resultaten über Homologiesphären der Dimension 3. Für die Vorbereitung einer Vorlesung über vierdimensionale Mannigfaltigkeiten wird das Buch von Petrie und Randall nützlich sein.

Düsseldorf W. Singhof

Glass, A. M. W., Holland, W. C., Lattice-Ordered Groups, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 1989, 400 S., Dfl. 185.–

Während linear geordnete Gruppen bereits zu Beginn dieses Jahrhunderts von Hölder und Hahn untersucht wurden, erblühte das Gebiet der allgemeineren Verbandsgruppen – Gruppen mit einer Verbandsstruktur, die mit der Gruppenmultiplikation verträglich ist – in den letzten 30 Jahren. Es stellt nun ein gut entwickeltes, aktives Forschungsgebiet dar mit zahlreichen Anwendungen in so verschiedenen Gebieten wie der Theorie der Bézout-Bereiche, unendlichen Permutationsgruppen, instabilen Theorien in der Modelltheorie, Varietäten in der universellen Algebra, Vervollständigungen gewisser „semitopologischer" Gruppen.

Das vorliegende Buch gibt eine detaillierte Darstellung der verschiedenen Gebiete in der Theorie der Verbandsgruppen. Es entstand aus einem 1985 in Bowling Green, dem „Zentrum" der Verbandsgruppen, gehaltenen Workshop. Die geladenen Experten erstellten anschließend umfassende Übersichtsartikel der Forschungsresultate ihrer jeweiligen Gebiete; diese stellen nun die Kapitel des Buches dar. Dank umfangreicher Editierung durch die beiden Herausgeber sind die einzelnen Kapitel aufeinander abgestimmt, können jedoch auch zum großen Teil für sich gelesen werden. Es wurde besonderer Wert darauf gelegt, nicht nur den Experten, sondern auch Mathematiker mit angrenzenden Forschungsgebieten anzusprechen. Der nötige Hintergrund wird in zwei einführenden Abschnitten bereitgestellt. Fast alle Kapitel schließen mit einer Liste von herausfordernden offenen Fragen des jeweiligen Gebietes. Schließlich enthält das Buch eine umfangreiche Bibliographie (bis ca. 1987).

Wir reißen nun kurz den Inhalt der einzelnen Kapitel an. Nach zwei Einführungskapiteln untersucht Holland die Gruppe aller ordnungserhaltenden Permutationen von linear geordneten Mengen. Versehen mit der punktweisen Ordnung für Funktionen, stellen diese Gruppen wichtige Beispiele von (i. a. nicht-abelschen) Verbandsgruppen dar. Nach einem wichtigen Satz von Holland läßt sich jede Verbandsgruppe in eine derartige Automorphismengruppe einer geeignet gewählten Kette einbetten, was zu einer Reihe universeller Einbettungssätze führt und das Studium genau dieser Gruppen und ihrer Verbandsuntergruppen nahelegt.

Anschließend untersucht Weißpfenning die Modelltheorie abelscher Verbandsgruppen, insbesondere Fragen elementarer Äquivalenz, Entscheidbarkeit und Quantoren-Elimination. Unter anderem wird die Entscheidbarkeit der Theorie dichter Untergruppen der reellen Zahlen durch ihre Szmielew-Invarianten (aus der Theorie der abelschen Gruppen) charakterisiert, und es werden Gurevich' tiefe Resultate zur elementaren Klassifikation und primitiv-rekursiven Entscheidbarkeit der Theorie abelscher geordneter Gruppen dargestellt.

Mott betrachtet den wohlbekannten Zusammenhang zwischen teilweise geordneten abelschen Gruppen und der Teilbarkeitsrelation in verschiedenen Arten von Integritätsbereichen. Das Kapitel von Conrad, Anderson und Martinez ist eine schöne Zusammenfassung der Arbeit von drei Jahrzehnten über den Verband $\mathscr{C}(G)$ der konvexen Verbandsuntergruppen einer Verbandsgruppe G. Es wird gezeigt, daß sich viele Eigenschaften einer Verbandsgruppe G bereits an der Struktur des Verbandes $\mathscr{C}(G)$ ablesen lassen. Im folgenden Kapitel gibt Martinez einen Überblick über Torsionsklassen von Verbandsgruppen. Viele wichtige Klassen von Verbandsgruppen bilden Torsionsklassen. Leider wird der Leser hier für viele Beweise auf die Literatur verwiesen.

Verbandsgruppen lassen verschiedene Arten von Vervollständigungen zu, wie z. B. die Dedekindsche Schnitt-, Ordnungs-, Chauchy- oder Lateral-Vervollständigung. Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise dieser verschiedenen Vervollständigungen sind häufig recht kompliziert. Ball stellt nun eine neuartige „ausgezeichnete“ Vervollständigung vor, in der alle übrigen Vervollständigungen einer Verbandsgruppe enthalten sind. Die Konstruktion ist recht kompliziert, aber die Nützlichkeit dieser Vervollständigung als allgemeines Konstruktionsverfahren offensichtlich. Im folgenden Kapitel charakterisieren Ball und Hager Epimorphismen und Epi-Vervollständigungen in Kategorien von Archimedischen Verbandsgruppen sowie Archimedischen Verbandsgruppen mit ausgezeichneter schwacher Einheit. Ihre Resultate gelten auch in den entsprechenden Kategorien von Vektorverbänden.

McCleary leitet anschließend eine treue und 2-fach transitive Darstellung der freien Verbandsgruppe F_η vom Range $\eta > 1$ auf einer Rechtsordnung der freien Gruppe G_η her. Hieraus lassen sich viele Eigenschaften der freien Verbandsgruppe F_η (z. B. triviales Zentrum, Unzerlegbarkeit) ableiten.

Ein sehr fruchtbares Gebiet stellte das Studium der Varietäten von Verbandsgruppen dar. Die abelschen Verbandsgruppen bilden die kleinste nichttriviale Varietät, es gibt auch eine größte echte Varietät, und nach einem Satz von Gurchenkov gibt es für jedes $n \geqslant 3$ Kontinuum-viele Varietäten von Verbandsgruppen der Nilpotenzklasse n. Dies zeigt die Komplexität des Varietätenverbandes, und über die Fülle der erreichten Resultate gibt Reilly einen sehr gelungenen Überblick.

In zwei Kapiteln betrachten Powell und Tsinakis freie Produkte und Amalgamierungen in Varietäten von Verbandsgruppen. Verschiedene Varietäten lassen die Bildung freier Produkte zu, für die auch häufig explizite Beschreibungen existieren. Die Varietät der abelschen Verbandsgruppen erfüllt die Amalgamierungseigenschaft, viele andere Varietäten von Verbandsgruppen jedoch nicht, und es ist bis heute ein offenes Problem, ob die abelschen Verbandsgruppen die einzige „Ausnahme“ bilden.

Im letzten Kapitel untersucht Glass Entscheidbarkeits- und Einbettungsprobleme für Verbandsgruppen. Er weist unter anderem die Existenz einer Verbandsgruppe mit zwei Erzeugenden und einer definierenden Relation, aber unlösbarem Wortproblem nach. Das Isomorphieproblem für Verbandsgruppen mit 10 Erzeugenden und einer Relation einer rekursiv axiomatisierbaren Varietät nichttrivialer Verbandsgruppen ist unlösbar. Für Verbandsgruppen mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen gibt Glass verschiedene effektive Einbettungssätze an. Da Amalgamierungen von Verbandsgruppen i. a. nicht existieren, müssen zum Beweis dieser schönen Sätze kombinatorische Methoden, insbesondere subtile Darstellungen (nach dem Satz von Holland) der Verbandsgruppen als Gruppen ordnungserhaltender Permutationen einer Kette verwendet werden.

Die einzelnen Kapitel dieses Buches bilden durchweg hervorragende Übersichtsartikel, in denen auch komplizierte, tiefe Beweise zur Illustration der Techniken gut dargelegt werden. In ihrer Gesamtheit bilden sie eine umfassende und sehr gelungene Darstellung aktueller Forschungsresultate des rasch expandierenden Gebietes der Verbandsgruppen. Eine Berücksichtigung derartig vieler Aspekte, wie hier dank verschiedener Autoren geschehen, wäre für einen einzelnen Autor wohl unmöglich gewesen; durch die Bemühungen der beiden Herausgeber ist jedoch gleichzeitig ein einheitliches, klares und übersichtliches Buch entstanden. Es ist eine sehr wertvolle Quelle für jeden, der auf dem Gebiet der geordneten algebraischen Strukturen arbeitet oder sich über Forschungsresultate in dem Gebiet der Verbandsgruppen zuverlässig informieren möchte.

Essen M. Droste

Corwin, L., Greenleaf, F. P., Representations of nilpotent Lie groups and their applications, Part 1, Basic theory and examples, Cambridge: Cambridge University Press 1990, 268 S., $ 69,50

Kirillovs Bahnenmethode zur Bestimmung des unitären Duals von einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie-Gruppen ist eine der schönsten Theorien der Mathematik überhaupt. Um so erstaunlicher ist es, daß sie bisher so wenig in der Lehrbuchliteratur abgehandelt worden ist. Abgesehen von Pukanszkys Vorlesung (siehe die Literaturliste am Ende) sind die mir bekannten Texte entweder schwer zugänglich, wie der CIMPA-Kurs von M. Rais, oder aufwendig zu lesen wie Kirillovs Buch über Darstellungstheorie im russischen Stil (d.h. als eine Aneinanderreihung von Übungsaufgaben konzipiert).

Die zwei fundamentalen Probleme in der Theorie der unitären Darstellungen von Lie-Gruppen sind die Bestimmung aller irreduziblen Darstellungen (bis auf unitäre Äquivalenz) und die Zerlegung vorgegebener Darstellungen, speziell der regulären Darstellung, in irreduzible. Kirillovs bahnbrechende Entdeckung war es, daß man im Falle einer nilpotenten, einfach zusammenfängenden Lie-Gruppe G die Menge $\hat{G}$ der Äquivalenzklassen von irreduziblen unitären Darstellungen von G durch die Menge der Bahnen $\mathfrak{g}^*/G$ der Gruppe im Dualraum $\mathfrak{g}^*$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G parametrisieren kann. Dabei ist die Operation von G auf $\mathfrak{g}^*$ die sogenannte koadjungierte Wirkung, die man durch Dualisierung aus der Ableitung der inneren Automorphismen von G erhält.

Zum Beweis dieser Korrespondenz definiert man zu jedem Element f von $\mathfrak{g}^*$ zuerst über $e^{2\pi i f}$ einen Charakter (d.h. eine eindimensionale Darstellung) einer zu f konstruierten Untergruppe H_f und induziert diesen dann hoch zu einer Darstellung π_f von G. Dann hat man zu zeigen, daß die Äquivalenzklassen von π_f nur von der Bahn $G \cdot f$ und nicht von der Gruppe H_f, für die man Wahlmöglichkeiten hat, abhängt. Schließlich muß man zeigen, daß jedes Element von $\hat{G}$ so gefunden wird.

Die Hilfsmittel, die man zur Durchführung dieses Programms braucht, sind die Strukturtheorie nilpotenter einfach zusammenhängender Lie-Gruppen, die Theorie der induzierten Darstellungen und der Satz von Stone-von Neumann, der die unitären Darstellungen der Heisenberg-Gruppe beschreibt.

Aus der Strukturtheorie benutzt man insbesondere den Umstand, daß man über die Exponentialfunktion und geeignete Basen von $\mathfrak{g}$ nützliche Koordinaten auf G erhält, die oft Induktionsbeweise ermöglichen. Darüberhinaus spielt Kirillovs Lemma eine Schlüsselrolle.

Es besagt im wesentlichen, daß die Heisenberg-Algebra ein entscheidender Baustein in *jeder* (nicht abelschen) nilpotenten Lie-Algebra ist. Alle diese Fakten werden im ersten Kapitel des Buches bereitgestellt.

Von der Theorie der induzierten Darstellungen benützen die Autoren nur die elementaren Aussagen, die sie ohne Beweis zitieren. Der Satz von Stone-von Neumann wird vollständig bewiesen. Diese Vorbereitungen und der Beweis der Kirillov-Korrespondenz bilden den Inhalt von Kapitel 2.

Das dritte Kapitel ist wieder strukturtheoretisch und als Vorbereitung für das vierte Kapitel zu verstehen. Dort wird die Plancherelformel, d.h. die Zerlegung der regulären Darstellung in irreduzible besprochen. Um den Beitrag der einzelnen irreduziblen Darstellung, also jeder koadjungierten Bahn, zur regulären Darstellung zu verstehen, braucht man eine Beschreibung des Raumes $\mathfrak{g}^*/G$ aller Bahnen. Diese Beschreibung und weitere Detailinformationen liefert Kapitel 3.

In vierten Kapitel führen die Autoren C^∞-Vektoren und den Distributionscharakter einer Darstellung, sowie Schwartzfunktionen auf einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie-Gruppen ein. Grundlegende Aussagen dazu sind in die Anhänge verbannt. Gerüstet mit diesen Hilfsmitteln, sowie der Strukturtheorie aus dem dritten und den Koordinatisierungen aus dem ersten Kapitel läßt sich die Plancherelformel auf euklidische Fourier-Analyse zurückführen. Das Kapitel enthält auch einen Abschnit über nicht einfach zusammenhängende nilpotente Lie-Gruppen, der aber eher skizzenhaft bleibt. So werden dort zum Beispiel auch Schwartzfunktionen verwendet, obwohl sie nirgendwo definiert wurden.

Das letzte Kapitel behandelt diskrete Untergruppen in nilpotenten Lie-Gruppen und nimmt keinerlei Bezug auf Darstellungstheorie. Die Ergebnisse dieses Kapitels scheinen, wie auch schon Abschnitte im dritten und vierten Kapitel zum Thema quadratisch integrierbarer Darstellungen, der Vorbereitung für weitere Entwicklungen im zu erwartenden Band II des Buches zu sein.

Das Buch ist klar geschrieben und enthält viele instruktive Beispiele. Leider sind auch eine Menge Druckfehler stehen geblieben, die aber selten sinnentstellend sind. Der ideale Leser hat Grundkenntnisse in Lie-Theorie und Darstellungstheorie lokal kompakter Gruppen sowie euklidischer Fourier-Analyse. Er sollte bereit sein, ein Buch mit Papier und Bleistift zu lesen und hin und wieder eine zitierte Behauptung zu glauben. Dann wird er den Kauf sicher nicht bereuen.

Man darf auf den zweiten Teil gespannt sein!

Literatur

Felix, R.: Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Gruppen. Ein distributionen-theoretischer Zugang. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **93** (1991) 107–126

Kirillov, A. A.: Unitary representations of nilpotent Lie groups. Russ. Math. Surveys **17** (1962) 53–104

–: Elements of the theory of representations. Berlin u.a.: Springer 1976

Pukanszky, L.: Leçons sur les représentation des groupes. Paris: Dunod 1967

Rais, M.: Représentations des groupes des Lie nilpotents et methode des orbites. In: Les cours des CIMPA, 1982

Taylor, M. E.: Noncommutative harmonic analysis. Providence: AMS 1986

Vergne, M.: Representations of Lie groups and the orbit method. In: Emmy Noether in Bryn Mawr (B. Srinivasan and J. Sally Eds.) New York: Springer 1983

Wallach, N.: Symplectic geometry and Fourier analysis. Brookline, Mass.: Math. Sci. Press 1977

Erlangen J. Hilgert

Reimer, M., Constructive Theory of Multivariate Functions, with an Application to Tomography, Mannheim u.a.: BI-Wissenschaftsverlag 1990, 288 S., Kartoniert, DM 38,–

In der mutivariaten Approximationstheorie lassen sich gegenwärtig die folgenden Haupttendenzen unterscheiden:

- Boolesche Methoden
- Tensorprodukt-Methoden
- Sphärische Methoden

Einen leicht zugänglichen Überblick über die beiden erstgenannten Forschungsrichtungen liefern die Berichte [5] und [10]. Die derzeit intensiv diskutierte Approximation multivariater Funktionen mit Box-Splines läßt sich den Tensorprodukt-Methoden und ihren Verfeinerungen unterordnen.

Gegenstand des vorliegenden Buches sind die sphärischen Approximationsmethoden. Sie zeichnen sich durch ihre vom Autor zu Recht hervorgehobene Eleganz, ihre numerische Implementierbarkeit, sowie ihre Nähe zur Physik aus. Der Grund dafür ist geometrisch-gruppentheoretischer Natur: Die kompakte Einheitssphäre $S_{n-1} = \mathbf{SO}(n, \mathbf{R})/\mathbf{SO}(n-1, \mathbf{R})$ des n-dimensionalen reellen Euklidischen Vektorraumes $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, ist invariant unter Drehungen um Drehwinkel $\theta \in \mathbf{SO}(n-1, \mathbf{R}) \setminus \mathbf{SO}(n, \mathbf{R})/\mathbf{SO}(n-1, \mathbf{R})$ gegen einen festen Kugeldurchmesser. Während frühere Texte ([1], [2], [6], [12]) die Theorie der unitären linearen Gruppendarstellungen des kompakten Gelfand-Paares $(\mathbf{SO}(n, \mathbf{R}), \mathbf{SO}(n-1, \mathbf{R}))$ heranziehen, basiert der vorliegende Text auf dem Begriff des invarianten Reprokerns und vermeidet den Begriff der quadratisch-integrierbaren irreduziblen unitären Darstellung. Beide Zugänge sind im wesentlichen äquivalent ([15], [8], [7]). Der vom Autor bereits in einer früheren Arbeit [11] herangezogene Begriff des invarianten Reprokerns hat den Vorteil, daß er dem hauptsächlich an effizienten Rekonstruktionsalgorithmen für Bildgebungsverfahren interessierten Numeriker her näher liegt als die geometrisch motivierte Maschinerie der unitären linearen Gruppendarstellungen.

Die in der Kernspintomographie (KST) am häufigsten verwandten Algorithmen zur Bildrekonstruktion aus den im axialen Hologramm gespeicherten, phasenkodierten Rohdaten beruhen auf der direkten Fourier-Methode und damit auf der harmonischen Analyse der Heisenberg-Gruppe: Das diskrete Spektrum des irreduziblen reduktiven Dualpaares $(\mathbf{O}(n, \mathbf{R}), \mathbf{Sp}(1, \mathbf{R}))$ innerhalb der symplektischen Gruppe $\mathbf{Sp}(n, \mathbf{R})$ führt mit Hilfe des Projektionssatzes zu einer Singulärwertzerlegung der Radon-Transformation R [13]. Schränkt man die Aktion des Rückprojektors von R auf Funktionen mit Träger im Einheitszylinder des $\mathbf{R}^n$ ein, so sind zur Konstruktion einer Singulärwertzerlegung von R die projektive Oszillatordarstellung von $\mathbf{Sp}(n, \mathbf{R})$ auf die maximal kompakte Untergruppe $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R}) = S_1$ einer Iwasawa-Zerlegung von $\mathbf{Sp}(1, \mathbf{R}) = \mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ zu restringieren und die holomorphen Darstellungen niedrigsten Gewichts mit Rodrigues-Formeln zu kombinieren. Das schlecht gestellte Rekonstruktionsproblem der Computer-Tomographie (CT) läßt sich dann mit einem vom Autor detailliert ausgearbeiteten interpolatorischen Tensorprodukt-Algorithmus approximativ behandeln: Eine sphärische Approximationsmethode für ein inverses Streuproblem wird in eine numerisch implementierbare Überlagerung von Gauß-Gegenbauer-Quadraturen übergeführt.

Der vom Autor gewiesene konstruktive Zugang zu den spärischen Approximationsmethoden und ihren Skalen von Polynomräumen, deren geometrisch-gruppentheoretischen Hintergründe oben beleuchtet wurden, kann als solides, sorgfältig gefügtes Fundament für das Buch von S.R. Deans [3] betrachtet werden. Dort und in dem neueren Übersichtsartikel von S.R. Deans [4], findet der Leser die für den weiteren Ausbau der sphärischen Approximationsmethoden wichtigen Integraltransformationen, wie etwa die Hankel-, Gegenbauer-, Zernike-, und Cebysev-Transformationen, sowie eine Reihe von

Anwendungen auf verwandte Bildgebungsverfahren der radiologischen Diagnostik, geophysikalischen Exploration, Seismik und Radio-Astronomie.

Trotz des bemerkenswerten Ansatzes von R. Lenz [9] steht eine die geometrisch-gruppentheoretischen wie die konstruktiven Aspekte der sphärischen Approximationsmethoden gleichermaßen berücksichtigende Monographie aus. Sie wird den subtilen Zusammenhang zwischen Quantisierung und CT sowie den auf inverser Streuung beruhenden holographischen Bildgebungsverfahren, etwa das durch synthetische Apertur hochauflösende Radar (SAR), herauszustellen haben. Damit wird ein einheitlicher Zugang zur Theorie der Gabor-Wavelets und zur KST eröffnet ([14]). Denn der Spin hat als der „quantenmechanischste" aller physikalischen Begriffe kein klassisches Gegenstück.

[1] Coifman, R.R.; Weiss, G.: Representations of compact groups and spherical harmonics. L'Enseignement Math. **14** (1968) 121–173

[2] Coifman, R.R.; Weiss, G.: Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242. Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag 1971

[3] Deans, S.R.: The Radon Transform and Some of Its Applications. New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore: J. Wiley 1983

[4] Deana, S.R.: The Radon transform. Mathematical Analysis of Physical Systems. R.E. Mickens, (ed.) pp. 81–133. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985

[5] Delvos, F.-J.; Schempp, W.: Boolean methods in interpolation and approximation, Pitman Research Notes in Mathematics, Vol. 230, Harlow, Essex: Longman Scientific and Technical, 1989

[6] Dieudonné, J.: Special Functions and Linear Representations of Lie Groups. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. 1980

[7] Faraut, J.: Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques. J. Math. pures et appl. **58** (1979) 369–444

[8] Kunze, R.A.: Positive definite operator-valued kernels and unitary representations. Functional Analysis. Proc. of a Conference held at the University of California, Irvicne. B.R. Gelbaum, Editor, pp. 235–247. Washington, D.C.: Thompson Book 1967

[9] Lenz, R.: Group Theoretical Methods in Image Processing, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 413. Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag 1990

[10] Light, W.A.; Cheney, E.W.: Approximation in tensor product spaces, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1169. Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag 1985

[11] Reimer, M.: Die Wirkung der Randon-Transformation auf Polynomräume. Results in Math. **16** (1989) 323–344

[12] Schempp, W; Dreseler, B.: Einführung in die harmonische Analyse. Stuttgart: B.G. Teubner 1980

[13] Schempp, W.: The oscillator representation of the metaplectic group applied to quantum electronics and computerized tomography. Stochastic Processes in Physics and Engineering. S. Albeverio, P. Blanchard, M. Hazewinkel (ed.) pp. 305–344. Dordrecht - Boston - Lancaster - Tokyo: D. Reidel 1988

[14] Schempp, W.: Bohr's indeterminacy principle in quantum holography, adaptive neural networks, cortical self-organization, molecular computers, magnetic resonance imaging, and nanotechnology. J. Electronic Imaging 1992 (in print)

[15] Schwartz, L.: Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés; applications aux représentations des groupes de Lie. Deuxième Colloque sur l'Analyse Fonctionelle, pp. 153–163. Centre Belge de Recherches Mathématiques, Louvain-Belgique 1964

Siegen W. Schempp

Schmüdgen, K., Unbounded Operator Algebras und Representation Theory, Basel u. a.: Birkhäuser-Verlag 1990, 380 S., DM 148,–

Algebren von unbeschränkten linearen Operatoren in Hilberträumen tauchen, vielleicht zum ersten Mal, in 1936 in einer Arbeit von F. J. Murray und J. von Neumann auf, wo gezeigt wird, daß die dicht definierten abgeschlossenen linearen Operatoren, „affiliiert" zu einer endlichen von Neumannschen Algebra M, eine natürliche *-Algebra-Struktur haben, die die *-Algebra-Struktur von M fortsetzt. Dies impliziert, daß selbstadjungierte Darstellungen π einer *-Algebra A durch unbeschränkte Operatoren, so daß der Bikommutant $\pi(A)''$ eine endliche von Neumannsche Algebra ist, verhalten sich ähnlicherweise, wie die selbstadjungierte Darstellungen von A durch beschränkte Operatoren.

Dagegen, wie dies gerade vom Verfasser des vorliegenden Buches in 1986 bewiesen wurde, für jede eigentlich unendliche von Neumannsche Algebra M in einem separablen Hilbertraum existiert eine selbstadjungierte Darstellung π der kommutativen *-Algebra $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ aller komplexen Polynome mit zwei Veränderlichen durch unbeschränkte Operatoren, so daß $\pi(\mathbb{C}[X_1, X_2])'' = M$ durchaus nicht-kommutativ ist. Dies illustriert die Komplexität der Darstellungstheorie durch unbeschränkte Operatoren.

Algebren von unbeschränkten linearenOperatoren, sowie Darstellungen durch unbeschränkten linearen Operatoren sind wichtige Instrumente, unter anderen, in der Theorie der Quantenfelder und in der Darstellungstheorie von Lieschen Gruppen.

Betrachten wir, zum Beispiel, eine unitäre Darstellung U einer Lieschen Gruppe G in einem Hilbertraum H. Angenommen, H ist endlichdimensional, die Wichtigkeit der Rolle des Differentials dU von U, eine *-Darstellung der Lieschen Algebra $\mathfrak{g}$ oder, äquivalent, der einhüllenden Algebra $E(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$, bedürfte keiner Rechtfertigung. Nun, im Falle von unendlichdimensionalem H wird dU eine *-Darstellung von $E(\mathfrak{g})$ durch unbeschränkte Operatoren, alle definiert auf dem dichten linearen Unterraum von H, gebildet aus allen C^∞-Vektoren für U. Das zentrale Problem der infinitesimalen Darstellungstheorie ist auch in diesem Falle: Gegeben eine *-Darstellung π von $E(\mathfrak{g})$ durch unbeschränkte lineare Operatoren, unter welchen Bedingungen existiert eine unitäre Darstellung U von G, so daß $\pi = dU$, oder wenigstens, was im allgemeinen Fall auch sinnvoll ist, $\pi \subset dU$?

Das vorliegende Buch ist der erste Versuch, das relativ neue Gebiet der Algebren von unbeschränkten linearen Operatoren und der Darstellungen durch unbeschränkte lineare Operatoren ausführlich darzustellen. Ohne in technische Einzelheiten einzugehen, berichten wir kurz über die behandelten Themen:

Im ersten Teil des Buches werden die algebraischen und topologischen Aspekte der Algebren von unbeschränkten linearen Operatoren in einem Hilbertraum dargelegt. Stichwörter sind: Graphentopologie, Dichtigkeitssätze, Dualität, Kommutant.

Im zweiten Teil wird die Theorie der Darstellungen von *-Algebren durch unbeschränkte lineare Operatoren in Hilberträumen dargestellt. Besondere Aufmerksamkeit ist gewährt an die *-Darstellungen der einhüllenden Algebra der Lieschen Algebra einer Lieschen Gruppe und an das oben angesprochene zentrale Problem. Stichwörter sind: Zerlegung in zyklische Darstellungen, Integralzerlegung, analytische Vektoren, vollständige Positivität, Integrierbarkeit und Exponentiabilität.

Die Begriffe und die Tragweite der einzelnen Ergebnisse sind genau abgegrenzt durch zahlreiche klare Beispiele.

Herausgekommen ist ein Buch, das auf eine echte Lücke in der mathematischen Literatur trifft, und das den Forscher auf diesem Gebiet als willkommenes Nachschlagwerk dienen kann.

Rom L. Zsidó

Venkov, A. B., Spectral Theory of Automorphic Functions and Its Applications (Mathematics and Its Applications 51), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1990, 175 S., Dfl. 160,00

Die Theorie der automorphen Formen entwickelte sich im vergangenen Jahrhundert aus der Theorie der elliptischen Funktionen. Während man die Anfänge schon bei Gauß findet, erreicht die Theorie mit den Arbeiten von Klein und Poincaré ihren ersten Höhepunkt. Die Untersuchungen von Maaß über nicht-analytische Modulfunktionen und von Selberg über automorphe Funktionen bezüglich einer endlich-dimensionalen unitären Darstellung brachten einen Wendepunkt. Gegenstand dieser Monographie ist nun die Spektraltheorie automorpher Funktionen mit ihren Anwendungen, die man auch als Selberg-Theorie bezeichnen kann.

Das Buch besteht aus 13 Kapiteln und einem zweiteiligen Anhang. Zum Inhalt im einzelnen: Kapitel 1 beschreibt die historischen Bezüge und die Teilgebiete der Spektraltheorie automorpher Funktionen. Es folgt eine kurze Beschreibung der wichtigsten Ergebnise über (holomorphe) elliptische Modulformen in Kapitel 2.

Kapitel 3 führt den Leser in die Problemstellung ein, die in diesem Buch behandelt wird. Betrachtet man die Operation der diskreten Gruppe $\mathbb{Z}^2$ als Translationen der Euklidischen Ebene, so kann man die Hardy-Voronoi-Formel als Analogon der Selbergschen Spurformel betrachten.

Kapitel 4 beinhaltet die Grundlagen der Spektraltheorie auf der hyperbolischen Ebene. Es werden z. B. invariante Differential- und Integraloperatoren sowie die Eisenstein-Maaß-Reihen behandelt.

In Kapitel 5 steht die Fourier-Entwicklung automorpher Formen im Mittelpunkt. Dabei wird die Summenformel von Kuznetsov verwendet, um eine Abschätzung des Wachstumsverhaltens der Fourier-Koeffizienten von Spitzenformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$ zu erhalten.

In Kapitel 6 wird die Selbergsche Spurformel für eine beliebige Fuchssche Gruppe Γ erster Art und eine endlich-dimensionale unitäre Darstellung χ von Γ hergeleitet. Anschließend führt der Autor die Selbergsche Zetafunktion für Γ ein und beschreibt ihre wesentlichen Eigenschaften. In Kapitel 8 erhält man einen Überblick über die Ergebnisse im Zusammenhang mit dem diskreten Spektrum des automorphen Laplace-Operators $A(\Gamma;\chi)$, insbesondere das Weylsche asymptotische Gesetz und die Selbergsche 1/4-Vermutung.

In Kapitel 9 geht der Autor kurz auf Fragen ein, die auf das Werk von Gelfand zurückgehen: In welchem Umfang bestimmt das Spektrum des Laplace-Operators auf einer Riemannschen Fläche die Geometrie der Fläche?

Kapitel 10 beschäftigt sich mit automorphen Funktionen auf dem drei-dimensionalen hyperbolischen Raum. Als Anwendung erhält man die Lösung des Kummer-Problems über die Verteilung der Argumente kubischer Gaußscher Summen nach Heath-Brown und Patterson.

In Kapitel 11 und 12 findet man einen Ausblick auf die allgemeine Selbergsche Spurformel für reduktive Lie-Gruppen sowie Zusammenhänge zwischen automorphen Funktionen, Darstellungen und L-Funktionen ala Langlands.

Kapitel 13 enthält schließlich Bemerkungen und Kommentare mit Verweisen auf Originalarbeiten.

In den beiden Teilen des Anhangs beschäftigt sich der Autor mit Monodromie-Gruppen und zeigt, wie man automorphe Funktionen zu einer effektiven Lösung des Riemann-Hilbertschen Problems für Fuchssche Gruppen erster Art verwenden kann.

Der Autor pflegt einen etwas informellen Stil: Die Problemstellung und die Ergebnisse werden sorgfältig erklärt, aber nur kurze Beweise werden ausgeführt. Ansonsten wird der Leser auf die Literatur verwiesen. Die englische Übersetzung kommt mit einiger Verzögerung auf den Markt, denn der Hauptteil des russischen Originals stammt aus dem

Jahre 1984. Dennoch handelt es sich um ein sehr nützliches Buch, das einen guten Überblick über diesen sich rasant entwickelnden Teil der Mathematik gibt.

Münster A. Krieg

Bedford, T., Keane M., Series, C. (Eds.), Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces (Oxford Science Publications), Oxford: Oxford University Press 1991, 396 pp., Hard cover £ 40, soft cover £ 11.50

Im April 1989 fand am „International Centre for Theoretical Physics" in Trieste eine Arbeitsgemeinschaft über „Hyperbolic Geometry and Ergodic Theory" statt. Sie wurde für junge Mathematiker aus der sogenannten ‚Dritten Welt' veranstaltet, um sie an die Grenzen der Forschung in den im Titel genannten Gebiete zu bringen. Die Herausgeber haben jetzt die Vorlesungen, die dort gehalten wurden, in Buchform einem weiteren Publikum zugänglich gemacht. Das Ergebnis ist ein sehr schönes Buch, das, obwohl das Werk mehrerer Autoren, eine einheitliche Einführung in ein Forschungsgebiet bietet, das sich in den letzten zehn Jahren sehr stark entwickelt hat. Der Leser wird an aktuellen Forschingsinteressen herangebracht.

Sei $\mathbb{H}^{n+1}$ der hyperbolischer Raum von Dimension $n+1$ sei Γ eine diskrete Gruppe von Isometrien von $\mathbb{H}^{n+1}$. Dann sind die Hauptthemen die folgenden:

- die Geometrie von $\mathbb{H}^{n+1}$ und $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$,
- die Ergodentheorie des geodätischen Flußes auf dem Sphärenbündel von $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$
- Die Darstellung des geodätischen Flußes durch symbolische Dynamik
- der Einfluß der Hyperbolizät von $\mathbb{H}^{n+1}$ auf der kombinatorischen Gruppentheorie von Γ (Theorie der hyperbolischen Gruppen)
- die Kodierung von Γ und Anwendungen bei Wachstumsfunktionen.

Das Buch ist in elf Kapitel aufgeteilt; jedes Kapitel wurde von einem Experten geschrieben. Die Kapitel sind: 1.An introduction to hyperbolic geometry (A.F. Beardon), 2. Ergodic theory and subshifts of finite type (M.S. Keane), 3. Dynamics of geodesic and horocycle flows on surfaces of constant negative curvature (A. Manning), 4. Geodesic flows, interval maps and symbolic dynamics (R.L. Adler), 5. Geometrical methods of symbolic coding (C.M. Series), 6. Closed geodesics and zeta functions (M. Pollicott), 7. Continued fractions and related transformations (D.H. Mayer), 8. Probabilistic methods in certain counting problems of ergodic theory (S.P. Lalley), 9. A measure on the limit set of a discrete group (P.J. Nicholls) 10. Infinite groups as geometric objects (after Gromov) (E. Ghys & P. de la Harpe) and 11. The theory of negatively curved spaces and groups (J.W. Cannon)

Es gibt eine nicht geringe Überlappung zwischen den verschiedenen Kapiteln; diese sind aber hilfreiche Überschneidungen mit ihren eigenen Standpunkten und Einsichten – man vergleiche die Ausführungen über die Modulgruppe $PSL_2(\mathbb{Z})$ in Kap. 4, 5 und 7, oder die zwei Beiträge über die von Rips, Gromow und Cannon entwickelte Theorie der hyperbolischen Gruppen (Kap. 10 und 11). Es gibt weitere Beispiele dieser Art; trotzdem ist keiner der Beiträge zu lang oder gar überflüssig.

Es wäre weder möglich innerhalb des Rahmen einer kurzen Besprechung, die Vielfältigkeit dieses Buches zu beschreiben, noch die Beiträge der einzelnen Autoren detailliert zu würdigen. Es ist ein Buch, das gleichzeitig eine Einführung und neueste Einsichten anbietet. Ich kann es jedem Studenten, der in diesem Gebiet arbeiten möchte, wärmstens empfehlen. Für diejenigen, die in diesem Gebiet arbeiten, wird es eine Fundgrube von Ideen sein. Es ist auch in dieser Hinsicht erfreulich, daß der Verlag das Buch nicht wie üblich nur gebunden, sondern auch gleich als ein preiswertes Taschenbuch veröffentlicht haben. Damit ist es für Studenten erschwinglich.

Göttingen S.J. Patterson

Tikhomirov, V. M., Analysis II, Complex Analysis and Approximation Theory (Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 14), Berlin u.a.: Springer 1990, 270 S., DM 128,–

Dieses Buch ist ein Band aus der russischen Enzyklopädie der Mathematik und fällt somit aus dem Rahmen der üblichen Monographien. Entsprechend seinem speziellen Charakter versucht es, auf knappem Raum die Entwicklung der konvexen Analysis und der Approximationstheorie darzustellen und den aktuellen Forschungsstand aufzuzeigen.

Die erste Hälfte des Buches ist der konvexen Analysis gewidmet. Im einleitenden Kapitel werden die wesentlichen geometrischen Begriffe bei konvexen Mengen und Funktionen erklärt. Anschließend wird auf Dualitätsbeziehungen und topologische Eigenschaften, und schließlich auf die Sätze von Hahn-Banach, Krein-Milman und Alaoglu eingegangen. Das nächste Kapitel befaßt sich in knapper Form mit grundlegenden Resultaten der klassischen konvexen Analysis: Dualität, Legendre-Young-Fenchel-Theorie, Subdifferentiale. Kapitel 3 ist sicherlich der interessanteste Abschnitt des ersten Teils, wenn Anwendungen bei der linearen und konvexen Optimimierung, in der Geometrie, der Approximationstheorie und bei Kontrollproblemen behandelt werden. Schließlich wird auf neuere Verallgemeinerungen der konvexen Analysis im Sinne von Clarke, Demyanov-Rubinov und Ioffe aufmerksam gemacht, sowie auf die Erweiterung der Extremalpunktdarstellung konvexer Mengen durch die Choquet-Theorie.

Der zweite Teil des Buchs gehört der Approximationstheorie. Nach einer kurzen historischen Entwicklungsstudie wird die klassische Approximationstheorie mit orthogonalen Polynomen und der Ideenkreis von Tschebyscheff und Weierstrass entwickelt. Qualitative Aussagen im Sinne von Jackson und Bernsteinsche Umkehrsätze schließen das erste Kapitel ab. Danach werden Approximationen bezüglich verschiedener Approximationsklassen – algebraische und trigonometrische Polynome, rationale Funktionen und Splines – untersucht und ihre Approximationseigenschaften bei glatten Funktionen angegeben. Approximation in der komplexen Ebene, Hausdorff-Approximationen und Quadraturprobleme werden stichwortartig angesprochen.

Nachdem in den fünfziger und sechziger Jahren eine Fülle von klassischen Approximationsmethoden bereits zur Verfügung stand, andererseits aber neue Approximationsklassen wie Splines mehr und mehr in den Vordergrund drängten, stellte sich verständlicherweise die Frage, welche der Methoden in einem gewissen Sinn als „optimal" gelten können. Diesen Fragenkreis um die Begriffe „Weite", „ε-Entropie" und „Optimal recovery" behandelt das vierte Kapitel. Zuletzt wird auf die Verbindungen der Approximationstheorie zu Nachbardisziplinen wie Harmonische Analysis, Funktionalanalysis und Geometrie eingegangen.

Insgesamt ist der Band ein glänzend geschriebenes, lebendiges Buch enzyklopädischen Zuschnitts, mit einer Fülle von Informationen über neueste Forschungsergebnisse und dazugehörenden Literaturhinweisen. Zwangsläufig muß aus Rationalisierungsgründen auf viele Beweise verzichtet werden. Ein solches enzyklopädisches Werk ist aber immer in Gefahr, durch die aktuelle Forschung in gewissen Bereichen schnell überholt zu werden. So auch hier, da inzwischen das vollständige Analogon zur klassischen trigonometrischen Favard-Jackson-Stechkin-Approximation auch für algebraische Polynome durch Z. Ditzian and V. Totik bekannt ist.

Tikhomirov versteht es glänzend, den Leser beim Einstieg in beide Teile des Buches durch eine profunde geschichtliche Entwicklungsstudie zu fesseln und den Aufbau der weiteren Kapitel durchsichtig zu machen. Den Abschluß des Buches bilden einige – auch philosophisch inspirierte – Gedanken und Erwartungen des Autors über die weitere Entwicklung der Approximationstheorie, Gedanken, die sicherlich allgemeines Interesse verdienen. Fazit: Ein Buch, hervorragend geeignet, einen Überblick über die verschiedenen Gebiete der konvexen Analysis und Approximationstheorie mit ihren aktuellen Forschungsschwerpunkten zu gewinnen.

Eichstätt H.-P. Blatt

Neumaier, A., Interval Methods for systems of Equations, Cambridge: Cambridge University Press 1990, 255 S., £35.00

Das Buch von A. Neumaier füllt in dankenswerter Weise eine seit [1], [2], [3] lange offene Lücke, die seit Ende der siebziger Jahre in der Intervallrechnung erzielten Ergebnisse in geschlossener Form darzustellen. Das war um so notwendiger, als seither eine Vielzahl neuer Methoden in der Intervallrechnung entwickelt wurden.

Neumaiers Buch setzt lediglich Grundkenntnisse in linearer Algebra und Analysis und numerischer Mathematik voraus. Insofern wird die Materie breitesten Leserkreisen zugänglich.

In den ersten drei Kapiteln werden (in weiterem Sinne) die Grundlagen der Intervallrechnung behandelt. Im ersten Kapitel sind dies die Intervalloperationen mit ihren algebraischen und topologischen Eigenschaften. Neben den üblichen Definitionen werden Implementierungshinweise gegeben unter Einbeziehung der Möglichkeiten, die der IEEE-754-Arithmetik-Standard zur Verfügung stellt. Neumaier verwendet außer den Gleitpunktzahlen das NaN (Not a Number); gelegentlich kann die Verwendung von unendlich (auch vorzeichenbehaftet) hilfreich sein. In jedem Fall macht die Implementierung von Intervalloperationen auf praktisch allen modernen Rechnern keine Schwierigkeiten mehr.

Im zweiten Kapitel wird das hauptsächliche Hilfsmittel der Intervallrechnung eingehend erörtert, die Auswertung von Funktionen über einem Intervall, das heißt die Abschätzung des Wertebereichs einer Funktion über einem Intervall. Fast alle Beweise sowie die Konstruktion von Intervallverfahren beruhen auf diesem Prinzip. Im zweiten Kapitel wird auch die sogenannte „automatische Differentiation" mit einbezogen, die im Falle der Intervallrechnung auch die Einschließung des Wertebereichs (auch mehrfacher) partieller Ableitungen von Funktionen erlaubt, die als arithmetischer Ausdruck einschließlich transzendenter Funktionen über den Eingabevariablen gegeben ist. Im Prinzip ist also jede Funktion zulässig, die durch ein Computerprogramm berechenbar ist. Diese vage Beschreibungsart wird von Neumaier sehr schön formalisiert.

Im dritten Kapitel werden die Grundlagen linearer Intervall-Abbildungen gelegt einschließlich der notwendigen Sätze aus der Perron-Frobenius-Theorie. Dies macht, wie Neumaier auch in der Einleitung ausführt, das Buch einem breiteren Publikum zugänglich und ist auch für den Kenner durch einige originelle Beweise lesenswert. Für die folgenden Kapitel sind diese Ausführungen notwendig, um die bei Intervalloperationen auftretenden Überschätzungen beschreiben und rigoros abschätzen zu können.

Nach diesen Vorbereitungen werden im vierten und fünften Kapitel lineare Gleichungssysteme und nichtlineare Gleichungssysteme behandelt und gelegentlich auch Algorithmen angedeutet. Neumaier beschränkt sich bewußt auf diese beiden Themenkomplexe und läßt Gebiete wie Eigenwert-, Singulärwerteinschließung, Optimierung, Quadratur u.a. ebenso aus wie unendlichdimensionale Probleme. Das ist nachvollziehbar, denn einerseits würde die eingehende Behandlung der genannten Gebiete zweifelsohne ein weiteres Buch füllen, andererseits decken die beiden Kapitel 4 und 5 hinreichend viel Material ab, um sich in die Materie einzuarbeiten. Hier, wie im gesamten Buch, beschreibt der Autor im wesentlichen den Stand der Forschung bis zur Fertigstellung des Buches. Die knappe und doch klare, objektive Behandlung der Materie ist ansprechend.

Im sechsten und letzten Kapitel schließlich wird die Berechnung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit toleranzbehafteten Daten behandelt, d.i. die Menge aller Lösungsvektoren für Daten innerhalb der gegebenen Toleranzen. Es wird insbesondere auf die Sensitivitätsanalyse linearer Gleichungssysteme eingegangen.

Für den mit der Materie wenig oder gar nicht vertrauten Leser ergibt sich leider eine Schwierigkeit. Neumaier benutzt in seinem Buch eine einheitliche Notation für Zahlen (Punktgrößen) und für Intervalle. Er begründet diesen Schritt einerseits mit der in der Literatur uneinheitlichen Notation und andererseits damit, daß skalare Größen kanonisch in die entsprechende Menge der Intervalle eingebettet werden können. Die in der Intervallrechnung üblichen Schlußweisen sind jedoch, wie die Erfahrung zeigt, gelegentlich eher fremd. Nach kurzer Eingewöhnung dürfte dies dem geneigten Leser keine Probleme mehr bereiten.

In vielen Abschnitten des Buches fließen immer wieder neue, unveröffentlichte Ergebnisse des Autors ein. Die Aktualität des Buches macht es jedem auf diesem Gebiet arbeitenden Wissenschaftler zur Pflichtlektüre.

[1] Alefeld, G.; Herzberger, J.: Einführung in die Intervallrechnung. Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag 1974
Alefeld, G.; Herzberger, J.: Introduction to Interval Computations. Academic Press 1983
[2] Moore, R. E.: Interval Analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1966
[3] Moore, R. E.: Methods and Applications of Interval Analysis, Philadelphia: SIAM 1979

Hamburg S. M. Rump

Guddat, J., Guerra Vasquez, F., Jongen, H. Th., Parametric Optimization: Singularities, Pathfollowing and Jumps, Stuttgart: B. G. Teubner; Chichester: J. Wiley & Sons 1990. 191 S., DM 88,–

Optimierungsprobleme, die von einem Parameter abhängen, treten in natürlicher Weise im Zusammenhang mit global konvergenten Verfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme, globalen Optimierungsproblemen und Vektoroptimierungsproblemen auf. Die Entwicklung von Verfahren zur Lösung parametrischer Optimierungsprobleme ist deshalb ein wichtiges Anliegen der mathematischen Optimierung.

Das vorliegende Buch untersucht Lösungsalgorithem für einparametrische Optimierungsprobleme, d. h. für Optimierungsprobleme $P(t)$, die von einem reellen Parameter $t \in [0, 1]$ abhängen. Unter einem Lösungsalgorithmus versteht man dabei ein Verfahren, das einen (diskreten) Lösungspfad $x(t)$, $t \in [0,1]$ berechnet, d. h., $x(t)$ ist lokale Lösung oder stationärer Punkt von $P(t)$.

Unter geeigneten Voraussetzungen kann man klassische Homotopieverfahren zur Berechnung eines Lösungspfades lokaler Optimallösungen oder stationärer Punkte benutzen. Diese Voraussetzungen sind jedoch sehr stark und bei vielen Problemen nicht erfüllt. Anliegen des Buches ist es daher, die klassischen Verfahren zu verallgemeinern.

Eine Verallgemeinerung besteht darin, daß man anstelle lokaler Optimallösungen oder stationärer Punkte „verallgemeinerte kritische Punkte" betrachtet. Die Motivation hierbei ist, daß in bestimmten Situationen der Lösungspfad für stationäre Punkte nicht fortgesetzt werden kann, während ein Lösungspfad für verallgemeinerte kritische Punkte existiert. Eine weitere Verallgemeinerung besteht in der Konstruktion von Algorithmen, die im Gegensatz zu den klassischen Verfahren auch Unstetigkeiten (Sprünge) im Lösungspfad zulassen.

Nach dem einführenden Kapitel 1 werden im 2. Kapitel die theoretischen Grundlagen der parametrischen Optimierung zusammengestellt. Insbesondere wird durch Untersuchung verschiedener Typen von Singularitäten eine Klassifizierung verallgemeinerter kritischer Punkte angegeben. In Kapitel 3 werden Lösungsalgorithmen für Pfade lokaler Optimallösungen untersucht. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Berechnung von Lösungspfaden stationärer Punkte. Danach werden, auf der Basis der in Kapitel 2 angegebenen Klassifizierung, Verfahren zur Berechnung von Lösungspfaden verallgemeinerter kritischer Punkte angegeben. In Kapitel 5 werden Verfahren für den Fall untersucht, daß der Lösungspfad Sprünge hat. Kapitel 6 diskutiert verschiedene Anwendungen.

Das Buch faßt in knapper und übersichtlicher Form die Forschungsresultate der letzten Jahre auf dem Gebiet der Lösungsalgorithmen für einparametrische Optimierungsprobleme zusammen. Die theoretischen Resultate und die Vorgehensweise bei den Algorithmen werden stets durch Beispiele ergänzt, veranschaulicht und motiviert. Jedes Kapitel enthält eine Übersicht der wichtigsten Resultate und Hinweise zu ergänzender Literatur. Das Buch wendet sich an Leser, die mit den Grundlagen der Optimierungstheorie vertraut sind. Für diesen Leserkreis ist das Buch eine nützliche und wertvolle Bereicherung.

Bayreuth W. Alt

Dimovski, J. H., Convolutional Calculus, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1990, 184 S. $79.00

Ausgehend von der Duhamel-Konvolution

$$f*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

werden in diesem Buch eine Vielzahl von Varianten der klassischen Konvolution und Anwendungen dieser Varianten behandelt. Diese Varianten ordnen sich dem folgenden Begriff der Konvolution für einen Endomorphismus unter: Eine bilineare, kommutative und assoziative Operation $*: X\times X\to X$ auf einen linearen Raum X heißt Konvolution für einen Endomorphismus $L: X\to X$, wenn für alle $x, y\in X$ die Beziehung $L(x*y)=L(x)*y$ gilt.

Das Buch hat 3 Kapitel: 1. Konvolutionen für lineare Operatoren. Multiplikatoren und Multiplikator-Quotienten. – 2. Konvolutionen für allgemeine Integrationsoperatoren. Anwendungen. – 3. Konvolutionen, die mit linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung zusammenhängen. – In diesem 3. Kapitel werden insbesondere Konvolutionen für eine Rechtsinverse zu einem Differentialoperator behandelt.

Das Buch enthält eine Fülle von speziellen Anwendungsbeispielen aus den verschiedensten Gebieten der Analysis. Darüber hinaus vermittelt es einen guten Eindruck von den vielfältigen wissenschaftlichen Aktivitäten auf dem Gebiet der Konvolutionstheorie.

Trier P. Dierolf

Bauer, H., Maß- und Integrationstheorie, Berlin u. a.: Walter de Gruyter 1990, 259 S., geb. DM 78,–, kart. DM 42,– (inzwischen 2. Auflage 1991)

Der Verfasser hat sein Lehrbuch „Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie“, seit 1968 in drei deutschen und zwei englischen Auflagen erschienen, in zwei separate neue Lehrbücher „Maß- und Integrationstheorie" und „Wahrscheinlichkeitstheorie" aufgeteilt und dabei natürlich wesentlich überarbeitet und erneuert. Er hat freilich im hier zu besprechenden ersten Buch die prinzipielle Struktur in weiten Teilen beibehalten und nur das Kapitel über topologische Maßtheorie neu konzipiert: wie er im Vorwort schildert, veranlaßt durch eine über Generationen andauernde Beliebtheit bei Lernenden und durch fast beschwörenden Rat von Kollegen, und abweichend von seinen früheren Plänen. Es ist in der Tat schwer vorstellbar, wie die betreffenden Parteien in Klarheit und Attraktivität wesentlich verbessert werden könnten. Der Verfasser betont seine Absicht, die Theorie von Maß und Integral „nicht in voller Breite und mit allen Verzweigungen" darzustellen, sondern dem Leser „einen sicheren Einstieg und ... zuverlässigen Wegführer" zu bieten, und weist dabei auf ihre vielen alten und neuen Anwendbarkeitsbereiche hin. Ein solches Werk sollte bei allem einführenden Charakter dem aktuellen Stand des Gebietes entsprechen. Es wird sich in diesem Punkte ein wesentlicher Dissens zwischen Verfasser und Rezensenten herausstellen. Ich will zunächst den Inhalt des Bandes schildern und dies mit Kommentaren zu Einzelpunkten verbinden, und danach auf das Prinzipielle zu sprechen kommen.

Kapitel I: Maßtheorie (55 Seiten). §§ 1–3 und 5: Erzeugung von Maßen auf σ-Algebren aus Prämaßen auf Ringen von Teilmengen einer Grundmenge Ω, beide definiert durch σ-Additivität bei disjunkten Mengenfolgen. Existenz mittels des klassischen äußeren Maßes von Carathéodory, Eindeutigkeit im σ-endlichen Falle mittels der auch sonst nützlichen Dynkinsysteme, die der Verfasser meines Wissens als erster in einem Lehrbuch anstelle der monotonen Mengensysteme einsetzte. §§ 4 und 6: Das Lebesguesche Prämaß auf dem Ring der endlichen Vereinigungen der nach oben halboffenen beschränkten Intervalle des $\mathbb{R}^d$, und das Lebesgue-Borelsche Maß λ^d *auf* $\mathbb{R}^d$. §§ 7–8: Meßbare Abbildungen und Bildmaße. Verhalten des λ^d bei affinen Abbildungen, mit vielen interessanten Ausblicken.

Kapitel II: Integrationstheorie (94 Seiten). § 9: Meßbare numerische Funktionen. §§ 10–12: Konstruktion des zu einem Maß gehörenden Integrales in drei Schritten: Für meßbare Elementarfunktionen $\to [0,\infty[$, für meßbare Funktionen $\to [0,\infty]$, und für integrierbare Funktionen $\to \mathbb{R}$. Die Funktionen des zweiten Schrittes werden als die isotonen sequentiellen Limites von Elementarfunktionen definiert, eine Variante, bei der ich keinen Vorteil sehe. Sehr schön ist das Faktorisierungslemma 11.7 (auch wenn ein § 46, in dem es in Aktion treten soll, nicht existiert). §§ 13–15: Ausbau der Theorie durch Nullmengen, Funktionenräume L^p und Konvergenzsätze. Hier sollte die praktisch so nützliche Tatsache, daß für $1 \leqslant p < \infty$ eine in L^p konvergente Folge stets eine fast überall konvergente und dem Betrage nach durch eine feste Funktion aus L^p majorierte Teilfolge besitzt, auch explizit als Satz erscheinen. Sehr bemerkenswert ist der von Novinger stammende kurze Beweis des Satzes 15.4 von F. Riesz. § 16: Fundamentale theoretische und praktische Beispiele für die Anwendbarkeit der Konvergenzsätze. §§ 17–18: Der Satz von Radon-Nikodym und die Zerlegungssätze von Hahn und Jordan. Hier muß der Rezensent ernsthaftere Bedenken anmelden: Nach [S] lehrt einerseits die endlich-additive Situation, daß die Jordan-Zerlegung die primäre und die Hahn-Zerlegung die sekundäre Rolle spielen. Und andererseits haben dann im σ-additiven Falle sowohl die Hahn-Zerlegung als auch der Satz von Radon-Nikodym als Kern das nachstehende Resultat aus [D], das das wirklich nicht ansehnliche Lemma 17.9 ersetzen sollte: Ein σ-additives signiertes Maß $\to\,]-\infty,\infty]$ auf einer σ-Algebra ist nach unten beschränkt und nimmt sein Infimum an. Hiernach wäre es sinnvoll, die Reihenfolge der betrachteten Sätze umzukehren. § 19: Ein abstrakter Transformationssatz. § 20: Stochastische Konvergenz. Dieser und der nächste Paragraph sind, wie man dankbar anerkennen muß, wesentlich intensiver als in anderen ähnlichen Lehrbüchern. § 21: Gleichgradige Integrierbarkeit. Hier könnten die zentralen Sätze 21.4 und 21.7 den irrtümlichen Eindruck erwecken, daß gleichgradige Integrierbarkeit und stochastische

Konvergenz nahe miteinander verbunden seien. Des Pudels Kern ist für mich eher Aufgabe 2. Ferner wird Lemma 21.6 auf Grund von 13.6 evident.

Kapitel III: Produktmaße (22 Seiten). §§ 22–23: Existenz und Eindeutigkeit des Produktmaßes (von zwei und von endlich vielen Maßen) und Satz von Fubini-Tonelli, wie in den meisten Lehrbüchern nur im σ-endlichen Falle. Dabei sind von (23.1) an die Notationen leider nicht einwandfrei. Es besteht wie in den anderen Teilen der Theorie selbstverständlich auch Interesse an Produktmaßen über den σ-endlichen Fall hinaus. Wir wollen vorab erwähnen, daß die neuen Theorien, von denen später die Rede sein wird, in natürlicher Weise hier außer dem bekannten Existenzsatz auch respektable Eindeutigkeitssätze liefern können. Man kann weiter den fundamentalen Schnittmengensatz 23.8 ohne die Annahme der σ-Endlichkeit (und sowohl mit $\geqslant$ als auch mit $>$) erhalten. § 24: Sehr schöne Diskussion der Faltung auf $\mathbb{R}^d$.

Kapitel IV: Maße auf topologischen Räumen (77 Seiten). Hier betritt der Leser eine neue Welt. Der Grundraum heißt nicht mehr Ω, sondern fortan E und ist ein Hausdorffscher topologischer Raum. Es seien $O(E)$ und $K(E)$ die Systeme seiner offenen/kompakten Teilmengen. § 25: Fundamentale Definitionen. Wie üblich wird die Borelsche σ-Algebra $B(E)$ als die von $O(E)$ erzeugte definiert (die Bairesche σ-Algebra kommt nicht vor). Unter Borelmaßen werden die Maße $\mu : B(E) \to [0, \infty]$ mit $\mu | K(E) < \infty$ verstanden. In der neuen Welt erscheint ein neuer Begriff: die Regularität. Die Radonmaße werden definiert als die Borelmaße, die (im evidenten Sinne) innenregulär $K(E)$ sind, und es wird ferner die Endlichkeit auf $K(E)$ zur lokalen Endlichkeit verstärkt. Der letztere Zusatz ist bekanntlich kontrovers und behindert, soweit ich sehe, ein substantielles Erweitern des Rieszschen Darstellungssatzes über den Rahmen der lokal-kompakten Räume hinaus, er ist aber für die hier betrachteten Raumklassen irrelevant. Im Hinblick auf ihr späteres Vorkommen wäre auch ein explizites Erwähnen solcher Borelmaße zu wünschen, die einerseits außenregulär $O(E)$ und andererseits innenregulär $K(E)$ auf $O(E)$ sind, werden doch anderswo ebendiese als die nichtpathologischen Borelmaße bezeichnet. § 26: Polnische Räume. Hier handelt es sich nicht um die Konstruktion von Maßen. Der Hauptsatz lautet, daß ein lokal-endliches Borelmaß auf einem polnischen Raum innenregulär $K(E)$ und außenregulär $O(E)$ sowie σ-endlich ist. Mit seinem über sechs Seiten verlaufenden Beweis kann ich mich nicht befreunden: Die Substanz der polnischen Räume erscheint nur auf der ersten dreiviertel Seite, der Rest sind weithin ad-hoc Versionen der bekannten Regularitäten von Bairemaßen, die man auch selbst mitsamt Präliminarien flott abhandeln kann. Daran schließt eine Version des Satzes von Lusin.

Im Rest des Buches ist E lokal-kompakt. Um der Kürze willen muß ich hier manchmal abweichende Notationen verwenden. § 27: Reichhaltigkeit des Raumes $C_c(E)$ der stetigen Funktionen $E \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Halbstetige Funktionen kommen nicht vor, es werden also auch nicht die antitone/isotone Hülle von $C_c(E)$ identifiziert (fortan mit $USC\!\downarrow\!(E)$ und $LSC\!\uparrow\!(E)$ bezeichnet). §§ 28–29: Positive lineare Funktionale $I : C_c(E) \to \mathbb{R}$ und Rieszscher Darstellungssatz. Die kanonischen Fortsetzungen von I auf $USC\!\downarrow\!(E)$ und $LSC\!\uparrow\!(E)$, und als fundamentale Dini-Konsequenzen deren τ- ($:=$ nichtsequentielle) Stetigkeiten und Additivität kommen nicht explizit vor, was dem Rezensenten nicht akzeptabel erscheint (und was beispielweise den Beweis des Rieszschen Satzes 29.1 verkompliziert). Es werden vielmehr nur die darin enthaltenen Mengenfunktionen $\varphi : K(E) \to [0, \infty[$ und $\psi : O(E) \to [0, \infty]$ betrachtet, alsdann die innere Regularisierte $\varphi_* : P(E) \to [0, \infty]$ und die äußere Regularisierte $\psi^* : P(E) \to [0, \infty]$. Man erkennt relativ schnell 0) $\psi = \varphi_* | O(E)$ und $\varphi = \psi^* | K(E)$, und also $\varphi_* \leqslant \psi^*$. Die Hauptschritte zum Gewinnen von Maßen sind dann 1) ψ^* ist ein Carathéodorysches äußeres Maß; 2) vermittels § 5 ist $\psi^* | B(E) =: \mu^0$ ein Borelmaß; 3) $\varphi_*(A) = \psi^*(A)$ für alle borelschen A mit $\psi^*(A) < \infty$; und endlich 4) $\varphi_* | B(E) =: \mu_0$ ist ein Borelmaß. Damit ist μ_0 ein Radonmaß, während μ^0 von der oben im Anschluß daran formulierten Art ist. Wenn man mit dem

Verfasser das Maß μ_0 als das fundamentalere unter den beiden ansieht, dann ist der vorstehende Weg zu ihm ein phantastischer Umweg. Es ist fast ein Wunder, daß er überhaupt zum Ziele führt, und das ist nur der sehr speziellen lokal-kompakten Situation zuzuschreiben. Dies wird ein Hauptpunkt in meiner anschließenden prinzipiellen Kritik sein. Der Rieszsche Satz 29.1 lautet dann, daß sowohl μ_0 als auch μ^0 das Funktional I darstellen. Der Beweis ließe sich freilich mittels des Schnittmengensatzes 23.8 und der kanonischen Fortsetzung von I auf $USC\!\downarrow\!(E)$ wesentlich einfacher führen und mit dem umfassenderen Resultat, daß alle φ fortsetzenden Maße auf $B(E)$ das Funktional I darstellen. In den anschließenden Eindeutigkeitssätzen ist der Hauptpunkt, daß sowohl μ_0 als auch μ^0 in ihren oben beschriebenen Klassen die einzigen darstellenden Maße sind, während mehrere darstellende Borelmaße existieren können, welche bloß außenregulär $O(E)$ sind. §§ 30–31: Konvergenz und Topologie im Raum der Radonmaße. Die positiven linearen Funktionale auf $C_c(E)$ bilden einen konvexen Kegel $M_+(E)$ im algebraischen Dualraum $(C_c(E))^*$ von $C_c(E)$. Die natürliche Topologie auf $M_+(E)$ ist deshalb die daraus fließende schwach*-Topologie, bezeichnet als vage Topologie, wenn man $M_+(E)$ nach dem Rieszschen Satz 29.1 mit dem Raum der Radonmaße auf E identifiziert. Es entsteht sofort das Problem, die vage Konvergenz von Radonmaßen mit der punktweisen Konvergenz auf natürlichen Klassen von Borelmengen zu verbinden. Die Antwort ist das Portemanteau-Theorem 30.2/10. Der Beweis von 30.2 ist freilich zu kompliziert; er wird fast trivial, wenn man den Schnittmengensatz 23.8 (mit $\geqslant$ und $>$) mit dem Satz von Fatou kombiniert. Ähnlich verhält es sich bei zwei weiteren Hauptresultaten, bei der Dichtheit der diskreten Maße 30.4/5 und dem Kompaktheitssatz 31.2/3. Hier trifft der Vorwurf aber die Experten der topologischen Vektorräume, die es versäumt haben, den Bipolarensatz und den Satz von Banach-Alaoglu, die beide mit dem Tiefsinn ihrer Theorie nichts zu tun haben, so wunderbar einfach wie etwa den Satz von Stone-Weierstraß zu formulieren und damit zum selbstverständlichen Besitz aller Mathematiker zu machen. Ich muß aus evidenten Gründen alles nähere unterdrücken. Das Buch schließt mit dem sehr schönen Beweis eines weiteren Fundamentalsatzes 31.5: $M_+(E)$ in der vagen Topologie ist dann und nur dann ein polnischer Raum, wenn E eine abzählbare Basis besitzt, das heißt selbst polnisch ist.

Ich komme zu meiner Kritik im Prinzipiellen. Das Hauptproblem in Kapitel I ist die Konstruktion von Maßen aus viel elementareren Daten. Dieses Problem ließe sich auf eine solche Weise behandeln, daß die späteren Konstruktionen in Kapitel IV § 28 als natürliche Spezialfälle und eben nicht als aus einer anderen Welt kommend erscheinen, und daß zudem viel umfassendere Situationen zu erfassen sind. Das ist im Prinzip seit mindestens 20 Jahren bekannt und das Werk von mehreren Mathematikern, aber an erster Stelle steht wohl Topsøe [T1][T2], dessen Name hier nicht einmal vorkommt. Es ist heute ohne wesentlichen Mehraufwand ausführbar. In aller Kürze das Wesentliche: Die elementaren Mengensysteme sind nicht Ringe, sondern Verbände von Teilmengen einer Grundmenge. Damit wird man im $\mathbb{R}^d$ die häßlichen halboffenen Intervalle los, die meines Wissens in der Analysis auch sonst keine Rolle spielen, und in topologischen Räumen ist ohnehin evident, daß die natürlichen elementaren Mengensysteme praktisch immer Verbände und praktisch niemals Ringe oder ähnliches sind. Ein Inhalt auf einem Verband S ist dann eine isotone und modulare Funktion $\vartheta: S \to [0,\infty]$ mit $\vartheta(\emptyset)=0$, und an die Stelle der σ-Additivität auf disjunkten Mengenfolgen treten die aufsteigende und absteigende σ-Stetigkeit. Aber alles dies reicht (trotz des Satzes von Horn-Tarski) nicht aus, um ϑ zu einem Maß auf einer σ-Algebra fortzusetzen. Man ist vielmehr verloren ohne das ordnende Prinzip der Regularität. Sie erscheint als Außen- und als Innenregularität, und im Hinblick auf die topologische Maßtheorie, in der einerseits Kompaktheit mit Endlichkeit des Maßes verbunden ist und andererseits das Überschreiten des lokal-kompakten Rahmens immer unvermeidbarer wird, ist die Innenregularität die fundamentalere. In dieser Situation ist nun das traditionelle Carathéodorysche äußere Maß (5.1) leider unrettbar nicht mehr brauchbar:

i) hat bisher niemand vermocht, sein wunderbares Funktionieren bei Ringen auf Verbände hinüberzuretten, ii) ist es per definitionem Teil der äußeren Theorie und besitzt kein natürliches Analogon in der inneren Theorie, iii) ist es seiner Struktur nach der sequentiellen σ-Theorie verhaftet und besitzt nichts Entsprechendes in der im topologischen Kontext so fundamentalen nichtsequentiellen τ-Theorie. Es wird iv) hinzukommen, daß die ihm innewohnende Additivität ohne Not ein Zusammenkommen der Maßtheorie mit der Theorie der nicht-additiven Mengenfunktionen wie der Choquetschen Kapazitäten behindert. Die Resultate von Topsøe handeln von der inneren Theorie und stehen in definitiver Form in [PT Theorem B]. Sein Satz liefert, wenn man ihn auf die Situation in Kapitel IV § 28 des Bauerschen Buches anwendet, nach den natürlichen Präliminarien mit einem Teil des Aufwandes für das damals formulierte 0) sofort das Endresultat 4). Man erlaube bitte dem Rezensenten den Hinweis auf seine persönliche Arbeit [K1], in der die Symmetrie von innerer und äußerer σ-Theorie und dabei sowohl die Regularitätspostulate der Straffheit (tightness) als auch die relevanten Regularisierten als nahe Verwandte des Carathéodoryschen äußeren Maßes in definitiver Form etabliert werden, und auf die demnächst erscheinende [K2], die unter anderem das Entsprechende in der τ-Theorie und den unter iv) erwähnten Punkt behandelt. Damit erscheinen auch die anderen Resultate in § 28 als direkte Spezialfälle der abstrakten Maßtheorie. Darüber hinaus liefern die neuen Theorien als direkten Spezialfall insbesondere den fundamentalen Existenzsatz von Kisyński [K] für Radonmaße auf beliebigen Hausdorffräumen, den Startpunkt für Topsøe, der sehr schön etwa in [BChR Chapter 2] zu finden ist. Für einen Leser des Bauerschen Buches ist dies praktisch Neuland. Es muß noch betont werden, daß erst durch die neuen Theorien die brillanteste und rätselhafteste Idee des Altmeisters Carathéodory, nämlich seine Definition der Meßbarkeit, in optimales Licht kommt: Sie liefert allemal die eindeutig bestimmte maximale unter den im relevanten Sinne regulären Maßfortsetzungen des initialen elementaren Inhaltes.

Der vorstehende Absatz über das Einbinden von Kapitel IV § 28 in die abstrakte Maßtheorie wäre nun zu wiederholen für das Einbinden von § 29 in einen umfassenden Satz von Daniell-Stone. Für mich ist dieser Satz, und zwar mit der vollen Gleichheit der auf die bekannten verschiedenen Weisen konstruierten Funktionenräume L^1 und Integrale und sowohl im σ- als auch im τ-Falle, ein unverzichtbarer Fundamentalsatz der Analysis. Die neuen Theorien erlauben besonders adäquate Beweise sowohl der traditionellen äußeren als auch der inneren Version des Satzes. Das frühere Werk des Verfassers entwickelte ein Stückweit die σ-Theorie, das ist nun entfallen. Ein entsprechendes Stück der τ-Theorie würde als direkten Spezialfall den Rieszschen Darstellungssatz 29.1 enthalten.

Die skizzierten neuen Theorien der Konstruktion von Maßen, deren Entstehen man Topsøe verdankt, sind heute ohne wesentlichen Mehraufwand soviel potenter als die konventionelle Theorie, daß ich es auch in einem einführenden Lehrbuch nicht mehr für vertretbar halte, sie zu ignorieren. Diese Kritik trifft die meisten existierenden Lehrbücher der Theorie von Maß und Integral. Diese Theorie, schon öfter als mumifiziert betrachtet, ist in vollem Fluß. Ein dramatisches anderes Beispiel ist die kürzlich erschienene Arbeit [L] über eine neue Theorie des Denjoy-Integrals. Mir schwebt ein Lehrbuch vor, in dem die Theorie nicht wiederzuerkennen ist: Verbände anstelle von Ringen, Regularität von der ersten Seite an, halbstetige Funktionen und Funktionenkegel anstelle von stetigen Funktionen und Funktionenräumen, und alles Lokal-Kompakte im Kleindruck. Die Zeit ist reif dafür: Die entsprechende Version des Satzes von Daniell-Stone-Riesz steht im Prinzip bereits in [T3]. Die soeben erschienene Monographie [AP] scheint mir, soweit ich sehe, diese Tendenz zu vertreten.

Das Bauersche Buch aber, so muß ich zum Abschluß bei aller Kritik im Großen und im Kleinen bekennen, ist in seiner Art meisterhaft verfaßt, und es wird vermutlich auf absehbare Zeit die Beliebtheit des früheren Werkes behalten.

Zusatz bei der Korrektur (Dezember 1992): Die vorstehende Rezension (beendet im April 1992) handelt von der ersten Auflage des Buches. Die nach kurzer Zeit erforderliche und inzwischen erschienene zweite Auflage weicht davon nur an isolierten Stellen ab. Man findet in § 6 eine umfassendere Diskussion der Borelmaße auf $\mathbb{R}$ und in § 29 eine neue, nach Ansicht des Rezensenten adäquatere Version der Schlußphase im Beweis des Rieszschen Darstellungssatzes (nicht der Konstruktion der repräsentieren Maße!), daneben unter kleineren Modifikationen auch neue Literaturhinweise.

[AP] Anger, B.; Portenier, C.: Radon Integrals. PM 103, Birkhäuser 1992
[BChR] Berg, C.; Christensen, J. P. R.; Ressel, P.: Harmonic Analysis on Semigroups. GTM 100, Springer 1984
[D] Doss, R.: The Hahn Decomposition Theorem. Proc. AMS **80** (1980) 377
[K] Kisyński, J.: On the Generation of Tight Measures. Studia Math. **30** (1968) 141–151
[K1] König, H.: On the Basic Extension Theorem in Measure Theory. Math. Z. **190** (1985) 83–94
[K2] König, H.: New Constructions Related to Inner and Outer Regularity of Set Functions. In: Topology, Measures, and Fractals, Math. Res. 66, Akademie Verlag 1992, pp. 137–146
[L] Leinenkugel, C.: A Daniell-Stone Approach to the General Denjoy Integral. Proc. AMS **114** (1992) 39–52
[PT] Pollard, D.; Topsøe, F.: A Unified Approach to Riesz Type Representation Theorems. Studia Math. **54** (1975) 173–190
[S] Schmidt, K. D.: On a Result of Cobzas on the Hahn Decomposition. Arch. Math. **39** (1982) 564–567
[T1] Topsøe, F.: Compactness in Spaces of Measures. Studia Math. **36** (1970) 195–212
[T2] Topsøe, F.: Topology and Measure. LN Math. 133, Springer 1970
[T3] Topsøe, F.: Further Results on Integral Representations. Studia Math. **55** (1976) 239–245

Saarbrücken H. König

LeCam, L., Lo Young, G., Asymptotics in Statistics Some Basic Concepts, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1990, 180 S., DM 58,–

Die vor mehr als zwanzig Jahren erschienenen grünen „Montréal Notes“ des ersten Verfassers („Théorie Asymptotique de la Décision Statistique“, Les Presses de l'Université de Montréal, 1969), haben eine ganze Generation von Mathematischen Statistikern begleitet und das Gebiet der Asymptotischen Statistik nachhaltig geprägt. Manche sahen hier sogar den Keim einer umfassenden mathematischen Theorie der Statistik dargestellt.

Das vorliegende Werk stellt eine völlig umgestaltete Neuauflage dieser „Montréal Notes“ dar. Wie schon die alte, vollzieht die neue Version die Abstraktion von speziellen „Entscheidungsproblemen“ und stellt Äquivalenzklassen von „Experimenten“ in das Zentrum der Betrachtung. So bleibt die („französisch“-) klare Präsentation der Asymptotik erster Ordnung auf entscheidungstheoretischer Grundlage, die manch einen in den Bann gezogen hat.

Das Buch wurde um manches moderne Kapitel (z. B. LAMN, asymptotische Minimax-Theorie für Schätzer, Hájeks Faltungssatz) erweitert. Klassische Kapitel wurden überarbeitet, so daß das Buch als Fundgrube allen Asymptotikern der alten Schule empfohlen werden kann (beispielsweise findet man eine Weiterentwicklung der klassischen Approximation durch exponentielle Familien unter der LAQ-Bedingung („locally asymptotically quadratic“). Bedauerlich ist vielleicht, daß kein Kapitel über Minimum-Distanz-Schätzung mehr aufgenommen wurde.

Auch die Neuauflage ist reich an wertvollen historischen Anmerkungen. Geblieben sind aber auch die hohen Ansprüche an die Leser. Die distanzierte Betrachtungsweise setzt bei ihnen eine gehörige mathematisch-statistische Vorbildung voraus. Die Autoren verzichten zudem häufig auf Beweise und verweisen dann auf Originalliteratur. Den Studenten jedenfalls wird man dieses Buch nicht ohne weiteres empfehlen können.

Die Asymptotische Statistik hat sich in zwanzig Jahren gewandelt und den hier abgesteckten Rahmen gesprengt. Man hat über den Stichprobenumfang hinaus die Anzahl der Parameter in die Asymptotik einbezogen. Klassische Verfahren wie etwa die Maximum-Likelihood-Schätzer in Kontingenztafel-Modellen studiert man heute in einem solchen Rahmen und erkennt eigentlich erst dort ihr Verhalten und ihre notorische Korrekturbedürftigkeit.

Dieser Sicht verschließt sich naturgemäß ein Ansatz, bei dem die Parameterdimension fixiert ist. Dabei könnten solche Erkenntnisse auf der Linie der Autoren liegen, die laut Vorwort eine Denkweise in der Asymptotik vermitteln wollen, „somewhat more coherent than the traditional reliance upon maximum likelihood".

Im alten Feindbild also, die Anhänger der Likelihood-„Mystik" im Visier, ist das Werk sich treu geblieben. Und auch mit den Neo-Bayesianern findet weiter Zwiesprache statt: man blättere an das Ende des Buchs, zu „7.5 Bayes procedures behave miserably". Ob die hier dargestellten älteren und neueren negativen Resultate über Bayes-Verfahren wohl die alte Kontroverse wiederbeleben werden? Jedenfalls verabschieden sich die Autoren in einer milden (versöhnlichen?) Form („one should exert caution in selecting prior distributions and using Bayes procedures").

Die Autoren kündigen eine Übersetzung ihres Werks ins Chinesische an, die dem Referenten allerdings (bislang?) unzugänglich ist.

Heidelberg D. W. Müller

Berger, M., Mathematical Structures of Nonlinear Science, Dordrecht: Kluwer Ac. Publ. 1990, 430 S., Dfl. 220.-

In diesem Buch werden - im Prinzip - interessante Probleme der nichtlinearen Analysis aus den verschiedensten Anwendungsgebieten, wie z.B. aus der Strömungslehre, der Differentialgeometrie, oder der Yang-Mills-Theorie diskutiert. Es ist das Ziel des Autors, allgemeine Zusammenhänge aufzuzeigen und auftretende Phänomene mittels relativ einfacher mathematischer Techniken, nämlich der Variationsrechnung und der Bifurkationstheorie zu erklären.

Leider ist es dem Verfasser nicht gelungen, dieses Ziel zu erreichen. Die Darstellung ist weitschweifig und unpräzis. Beweise werden bestenfalls angedeutet. Das Literaturverzeichnis ist sehr bescheiden. Somit kann man aus der Lektüre dieses Buches nicht viel mehr lernen, als daß es interessante Probleme gibt, die mit den Methoden der Nichtlinearen Funktionalanalysis behandelt werden können.

Hinzu kommen die schlechte äußere Aufmachung dieses Buches, was beim Preis von US-$ 99.- eine Zumutung ist. Das Manuskript wurde offensichtlich mit einem Nadeldrucker einfachster Art gedruckt, was sich darin niederschlägt, daß mit bloßem Auge die Anzahl der „dots", aus denen sich die einzelnen Buchstaben zusammensetzen, abgezählt werden kann. Dies erschwert rein äußerlich die Lektüre erheblich.

Zürich H. Amann

Walter de Gruyter
Berlin • New York

Norbert Steinmetz, Universität Dortmund

Rational Iteration

Complex Analytic Dynamical Systems

1993. 17 x 24 cm. X, 189 pages. With 44 figures. Cloth DM 108,-
ISBN 3-11-013765-8
de Gruyter Studies in Mathematics, Volume 16

This book gives a comprehensive and self-containted presentation of the theory of rational iteration. It includes, among others, a rigorous treatment of the fundamental work of Julia and Fatou, results of Siegel, Arnol'd and Herman on rotation domains, Sullivan's No Wandering Domain Theorem, and part of the work of Douady and Hubbard on iteration of polynomials.

The theory of rational iteration - complex analytic dynamical systems on the Riemann sphere - is a very active field in analytic function theory, partly due to the work of Sullivan, Douady and many others, and partly due to the wonderful computer graphics of Julia-Fatou sets, illustrating the esthetics of this field. The material presented may serve as a textbook for a course following a one-year introduction to analytic function theory. Each section is provided with a list of exercises, most of which are purely mathematical, but there are also problems which stimulate the reader to do experimental mathematics.

Contents:

Evgenii I. Khukhro

Nilpotent Groups and their Automorphisms

1993. 17 x 24 cm. XIV, 252 pages. *USA, Canada, Mexico:* Cloth US $ 89.00
All other countries: DM 158,- ISBN 3-11-013672-4

de Gruyter Expositions in Mathematics, Volume 8

Editors: O.H. Kegel - V.P. Maslov - W.D. Neumann - R.O. Wells, Jr.

This book is devoted to the exposition of recent results on the structure of nilpotent groups admitting certain groups of automorphisms. The first part presents linear and combinatorial methods in the theory of nilpotent groups and is written in a style accessible to students who would like to learn the basic results and techniques. The second part of the book deals with the present state of the theory, including detailed proofs and comments as well as open problems. A particular feature of this text is the interplay of methods and techniques from various parts of mathematics, which leads to interesting and highly non-trivial results.

Contents: