E 20577 F
95. Band Heft 4
ausgegeben am 20. 10. 1993

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1993

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-68723 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

95. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1993

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 95, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

L. Arnold: Zufällige dynamische Systeme
E. Bayer-Fluckinger: Galois Cohomology and the Trace Forms
R. Bölling: Karl Weierstraß – Stationen eines Lebens
H.-W. Burmann, H. Günzler, H. S. Holdgrün, K. Jacobs: Wilhelm Maak 1912–1992
R. Howe: Some simple examples in the representation theory of semisimple groups
W. Plesken: Hans Zassenhaus 1912–1991
M. Struwe: Das Plateausche Problem
K. Wohlfahrt: Hans Petersson zum Gedächtnis
H. Zassenhaus: Methoden und Probleme der modernen Algebra

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

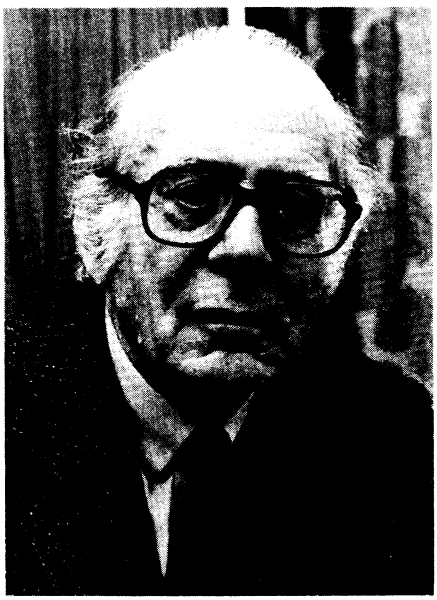
Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jb. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 135–140

Nachruf auf Hans Reichardt

† 4. April 1991

H. Koch, Berlin



Das wissenschaftliche Werk von Hans Reichardt umfaßt Beiträge zur algebraischen Zahlentheorie und zur Differentialgeometrie, im Zusammenhang mit einer umfangreichen Lehrtätigkeit gehört dazu der Aufbau einer Schule der algebraischen Zahlentheorie und einer Schule der Differentialgeometrie. Weiter gehören dazu eine Reihe von Buchpublikationen, darunter – wie er sich ausdrückte – seine Ausflüge in die Geschichte der Mathematik mit fünf Buchpublikationen.

Hans Reichardt wurde am 2. April 1908 in einer Arztfamilie in Altenburg geboren und besuchte in dieser Stadt das Humanistische Friedrich Gymnasium, wo er u. a. Unterricht in den 3 alten Sprachen Latein, Griechisch und Hebräisch erhielt. Ostern 1925 begann er das Studium der Mathematik, Physik und Philosophie in Jena. Von dort ging er nach einem einsemestrigen Zwischenspiel an der Universität Königsberg 1928 nach Berlin, wo damals die Mathematiker Bieberbach, von Mises, Erhard Schmidt, Schur u. a. und die Physiker Einstein, Planck, von Laue u. a. lehrten.

Unter den genannten Wissenschaftlern übte Issai Schur den größten Einfluß auf Hans Reichardt aus. Bei ihm hörte er eine zweisemestrige Vorlesung über algebraische Zahlentheorie, wodurch sein wissenschaftliches Interesse auf dieses Gebiet gelenkt wurde. Er blieb in Berlin bis zum Herbst 1931, nur unterbrochen durch ein Semester in Hamburg, wo er u. a. bei Artin und Hecke hörte. Dann ging er nach Marburg zu H. Hasse, der Zentralfigur der damaligen algebraischen Zahlentheorie, um bei ihm sein Studium 1934 mit einer Dissertation über kubische Zahlkörper abzuschließen.

Hasse hatte zu dieser Zeit eine Arbeit fertiggestellt, in der er eine Beschreibung der normalen Körpererweiterungen K des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gab, deren Galoissche Gruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

Dabei tritt ein quadratischer Zwischenkörper M auf, und Hasses wesentliches Hilfsmittel zum Studium von K war die Anwendung der Klassenkörpertheorie auf die abelschen Erweiterungen K/M. Hasse stellte Reichardt die Aufgabe, diesen Körper K mit Hilfe seiner Erzeugung durch Radikale zu studieren, also in gewisser Weise im Rahmen der Cardanoschen Formel für die Gleichung dritten Grades. Da in diesem Fall die dritten Einheitswurzeln benötigt werden, hat man den Körper $K(\xi_3) = K(\sqrt{-3})$ zu betrachten, der außer im Fall, daß die dritten Einheitswurzeln schon in K liegen, d. h. $M = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ist, drei quadratische Teilkörper enthält: $M = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Aus dem Studium von $K(\sqrt{-3})$ ergab sich nun eine Beziehung zwischen den 3-Rängen r und s der Klassengruppen von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$: Für $d > 1$ gilt $|r-s| \leqslant 1$.

Dieser Satz, den übrigens gleichzeitig und unabhängig auch A. Scholz gefunden hat, wurde später von Leopoldt zu seinem Spiegelungssatz verallgemeinert. So viel zur Dissertation, mit der Hans Reichardt sein Studium beendete.

Es schlossen sich Assistentenjahre in Frankfurt (1934–35 bei Siegel), Jena (1935–37 bei F. K. Schmidt) und Leipzig (1937–45 bei van der Waerden) an. Während des Krieges wurde er zur Arbeit bei der Kriegsmarine und bei Telefunken einberufen.

In seiner Assistentenzeit arbeitete Hans Reichardt vor allem an zwei Themen der algebraischen Zahlentheorie: Am Umkehrproblem der Galoisschen Theorie und über rationale Punkte auf elliptischen Kurven.

Beim Umkehrproblem der Galoisschen Theorie geht es um folgendes: Gegeben sei ein Körper K und eine endliche Gruppe G. Gibt es dann eine normale Körpererweiterung L von K mit einer Galoisschen Gruppe $G(L/K)$, die isomorph zu G ist? Die Beantwortung dieser Frage hängt natürlich in stärkstem Maße von der Natur des Grundkörpers K ab. Im klassischen Fall ist K gleich $\mathbb{Q}$ oder eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Einen solchen Körper nennt man einen algebraischen Zahlkörper. Wenn G abelsch ist, wird das Umkehrproblem in idealer Weise durch die Klassenkörpertheorie gelöst. Das erste darüber hinausgehende wesentliche Ergebnis stammt von Reichardt und unabhängig von ihm von A. Scholz. Es handelt sich um folgenden Satz: Sei p eine ungerade Primzahl, und sei G eine

p-Gruppe. Dann ist das Umkehrproblem für algebraische Zahlkörper lösbar. Diese Arbeit von 1937 enthielt bereits einige Kerngedanken der Theorie der Einbettungsprobleme, die nach 1945 unabhängig von Hasse und seiner Schule und von D. K. Faddejew entwickelt wurde.

Es dauerte bis 1954, ehe ein wesentlicher Fortschritt über diese Arbeit hinaus erzielt wurde. 1954 löste Schafarewitsch das Umkehrproblem für beliebige auflösbare Gruppen, wobei er die inzwischen entwickelte Theorie der Einbettungsprobleme sowie die Ideen von Reichardt und Scholz benutzte.

Neukirch betrachtete 1973 ein verfeinertes Problem. Bei ihm sind nicht nur die Galoissche Gruppe, sondern auch die Zerlegungsgruppen für eine endliche Zahl von Primstellen vorgegeben. Neukirch knüpft direkt an Reichardt und Scholz an. Wie diese muß er voraussetzen, daß der Grundkörper gewisse Einheitswurzeln nicht enthält.

Jetzt betrachten wir den zweiten Problemkreis: Rationale Punkte auf elliptischen Kurven. In zwei Arbeiten von 1940 und 1942 studierte Hans Reichardt die rationalen Punkte der ebenen Kurve C, die durch die Gleichung

$$ey^2 = ax^4 + bx^2 + c$$

gegeben ist, wobei a, b, c, e ganze Zahlen sind, die den Bedingungen $e \neq 0$ und $b^2 \neq 4ae$ genügen. Hat C wenigstens einen rationalen Punkt, so ist C über $\mathbb{Q}$ birational äquivalent zu einer projektiven Kurve mit Gruppenstruktur, die sich z. B. aus dem Additionstheorem der zugehörigen elliptischen Funktion ergibt. Nach dem Satz von Mordell bilden die rationalen Punkte eine endlich erzeugte Gruppe.

In der Arbeit von 1940, seiner Habilitationsschrift, untersuchte Reichardt den Zusammenhang dreier Probleme bezüglich der rationalen Lösungen der Gleichungen obigen Typs

1. Existenz einer Lösung,
2. Aufstellung einer Basis für die Gruppe aller Lösungen, wobei Basis im Sinne des eben erwähnten Mordellschen Satzes zu verstehen ist,
3. Bestimmung der Gleichungen, in die sich eine vorgegebene Gleichung transformieren läßt.

Reichardt bewies, daß diese drei Probleme äquivalent sind. In seiner Arbeit von 1942 zeigte er, daß das Hassesche Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen für elliptische Kurven im allgemeinen nicht gilt. Ein Gegenbeispiel ist die Gleichung $2y^2 = x^4 - 17$, die keine rationale Lösung hat, aber in allen Körpern $\mathbb{Q}_p$ und in $\mathbb{R}$, das heißt, in allen Lokalisierungen von $\mathbb{Q}$, lösbar ist.

Die Überlegungen von Reichardt wurden in den fünfziger Jahren von Weil, Schafarewitsch, Tate und anderen in der Sprache der abelschen Mannigfaltigkeiten wiedergefunden und verallgemeinert. Es entwickelte sich eine umfangreiche Theorie, die gerade gegenwärtig sehr lebendig ist.

Seit 1946 arbeitete Hans Reichardt als deutscher Spezialist in der Sowjetunion an Problemen der Raketentechnik, abgeschirmt auf der Insel Gorodomlja im Seliger See (Quellgebiet der Wolga).

1952 konnte er nach Deutschland zurückkehren und wurde zum Professor mit vollem Lehrauftrag an die Humboldt-Universität in Berlin berufen. Von 1954 bis zu seiner Emeritierung 1973 war er an dieser Universität als Professor mit Lehrstuhl tätig. In dieser Zeit verlagerte sich seine Haupttätigkeit auf Vorlesungen und auf Forschungen in der Differentialgeometrie. Seine Vorlesungszyklen über Algebra und Zahlentheorie gehörten zu den Höhepunkten des Studiums nicht nur seiner persönlichen Schüler, sondern ganzer Jahrgänge von Mathematikstudenten der Humboldt-Universität. Aus seinem Schaffen in der Differentialgeometrie möchte ich seine Bücher „Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung“ (1957, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin) und „Einführung in die Differentialgeometrie“ (zusammen mit W. Blaschke, 1960 (zweite Auflage), Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag Berlin) hervorheben.

Seit 1959 war Hans Reichardt auch als Direktor am neu eröffneten Institut für Reine Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften tätig und baute hier die Arbeitsgruppe für Zahlentheorie auf. Zu den ersten Mitarbeitern dieser Arbeitsgruppe gehörten W. Benz, W. Romberg, H. Koch, O. Neumann, G. Bruckner.

Sein wissenschaftliches Werk wurde 1960 mit dem Vaterländischen Verdienstorden und 1961 mit dem Nationalpreis für Wissenschaft und Technik der DDR geehrt. Die Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin wählte ihn 1962 zum Korrespondierenden und 1964 zum Ordentlichen Mitglied. 1962 wurde er zum Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher, Leopoldina, gewählt. An der Arbeit dieser Akademie hat er regen Anteil genommen u. a. als Obmann für Mathematik. Er war langjähriger Mitherausgeber der „Mathematischen Nachrichten“ und Mitglied des Wissenschaftlichen Beirates des Journals für Reine und Angewandte Mathematik.

Hans Reichardt war ein scharfer Beobachter seiner Zeit. Gegenüber den von ihm durchlebten Staatsformen bewahrte er eine skeptische Zurückhaltung. Insbesondere war es ihm, wie vielen anderen Wissenschaftlern seiner Generation, möglich, gegenüber dem SED-Staat eine geistige Unabhängigkeit zu behaupten und zum Teil auf seine Studenten zu übertragen. Die Universitätsreform von 1969, auf stärkere Gleichschaltung der Hochschulen der DDR mit der Staatsideologie ausgerichtet, drängte seinen Einfluß im Bereich der Mathematik der Humboldt-Universität zurück. Reichardt wandte sich stärker der Geschichte der Mathematik zu. 1976 erschien im Teubner-Verlag Leipzig sein Buch „Gauß und die nichteuklidische Geometrie“, und 1985 folgte die Herausgabe und Kommentierung klassischer Arbeiten von Gauß, Riemann und Minkowski zur Geometrie (zusammen mit J. Böhm). Seine letzte Arbeit in dieser Richtung war die Edition von fünf klassischen Nekrologen der Berliner Mathematiker Jacobi, Dirichlet, Kummer, Kronecker und Weierstraß. Die letztgenannten Bücher erschienen im Teubner-Archiv zur Mathematik, eine Reihe, an deren Gestaltung er wesentlichen Anteil nahm.

Hans Reichardt erlag am 4. April 1991 einem schweren Leiden. Mit ihm verliert die Mathematik einen der letzten Zeitzeugen und aktiven Mitgestalter der Mathematik der zwanziger und dreißiger Jahre. Sein Einsatz für den Wiederaufbau des Mathematikstandortes Berlin nach dem zweiten Weltkrieg, insbesondere auf dem Gebiet der algebraischen Zahlentheorie und der Differentialgeometrie bleibt unvergessen.

Verzeichnis der Publikationen

[1] Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers. Gemeinsam mit L. Redei. J. reine angew. Math. **170** (1933) 69–74

[2] Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper. J. reine angew. Math. **170** (1933) 75–82

[3] (Dissertation) Arithmetische Theorie der kubischen Körper als Radikalkörper. Mh. Math. Phys. **40** (1933) 323–350

[4] Die Diskriminante einer normalen einfachen Algebra. J. reine angew. Math. **173** (1936) 31–34

[5] Der Primdivisorsatz für algebraische Funktionenkörper über einem endlichen Konstantenkörper. Math. Z. **40** (1936) 713–719

[6] Über Normalkörper mit Quaternionengruppe. Math. Z. **41** (1936)

[7] Eine Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von F. K. Schmidt. Math. Z. **41** (1936) 439–442

[8] Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galois-Gruppe von Primzahlpotenzordnung. J. reine angew. Math. **177** (1937) 1–5

[9] Arithmetische Charakterisierung von algebraisch auflösbaren Körpern und Gleichungen von Primzahlgrad. Gemeinsam mit Udo Wegner. J. reine angew. Math. **178** (1937) 1–18

[10] (Habilitationsschrift) Über die diophantische Gleichung $ax+bx^2y^2+cy=ez^2$. Math. Annalen **117** (1940) 235–276

[11] Einige im Kleinen überall lösbare, im Großen unlösbare diophantische Gleichungen. J. reine angew. Math. **184** (1942) 12–18

[12] Stufenreihen im Potenzrestcharakter. Gemeinsam mit A. Aigner. J. reine angew. Math. **184** (1942) 158–160

[13] Einfache Herleitung der Jordanschen Normalform. Wiss. Zschr. d. Humboldt-Univ. zu Berlin, Math.-nat. Reihe III (1953/54) 445–447

[14] Eine Bemerkung zur Theorie des Jacobischen Symbols. Math. Nachr. **19** (1958) 171–175

[15] Ein Beweis des Hauptidealsatzes für imaginär-quadratische Zahlkörper. Math. Nachr. **17** (1959) 318–329

[16] Normalbasen in affin zusammenhängenden Räumen. Wiss. Zschr. d. Humboldt-Univ. zu Berlin, Math.-nat. Reihe IX (1959/60) 313–315

[17] Ausstrahlungsbedingungen für die Wellengleichung. Abh. a. d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg **24** (1960) 41–53

[18] Zur Theorie der Teilräume Riemannscher Räume. Forschen und Wirken, Festschr. z. 150-Jahrfeier d. Humboldt-Univ. zu Berlin (1960) 37–44

[19] Eine Aufspaltung von Windung und Krümmung in affin zusammenhängenden Räumen. Acta Szeged **XXI** (1960) 300–308

[20] Über Dirichlets zahlentheoretische Arbeiten. Bericht über die Dirichlet-Tagung 1959. Schriftenreihe der math. Institute der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1963

[21] Bestätigung einer Vermutung von Fejes-Toth. Revue Roumaine de Math. pures et appl. **15** (1970) 1513–1518

[22] Differentialgeometrie auf isotropen Kegeln. Math. Nachr. **49** (1971) 41–68

[23] C. F. Gauß-Artikel in Encyclopaedia Britannica 1974, 966–968

[24] C. F. Gauß. Artikel in Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1975, 300–320 (4. Aufl. 1989)

Buchpublikationen

Gauß-Gedenkband, herausgegeben anläßlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955. Leipzig: B. G. Teubner 1957, 251 S.

Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1957, XI + 499 S. (2. Aufl. 1968, XI + 504 S.)

Blaschke, W.; Reichardt, H.: Einführung in die Differentialgeometrie. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1960, VII + 173 S. (2. Aufl.)

Gauß und die nicht-euklidische Geometrie. Leipzig: Teubner 1976
Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie. Leipzig: Teubner 1985 (Mitarbeit)
Nachrufe auf Berliner Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Leipzig: Teubner 1988 (Herausgeber)

Helmut Koch
MPG AG „Algebraische Geometrie und Zahlentheorie"
Mohrenstr. 39
10117 Berlin

(*Eingegangen 29. 1. 1993*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 141–152

Zum Gedenken an Vojislav Gregor Avakumović

J. Brüning, Augsburg, und W. Eberhard, Duisburg

Am 19. August 1990 starb Vojislav G. Avakumović in seiner Wohnung bei Marburg im Alter von 80 Jahren. Er lebte in der Nähe Marburgs zurückgezogen als Emeritus der Philipps-Universität.

Avakumović wurde in Semlin (dem heutigen Zemun) als Sohn eines angesehenen Rechtsanwaltes am 12. März 1910 geboren. Seine Familie spielte im öffentlichen und politischen Leben eine hervorragende Rolle. Der Vater war südslawischer Abgeordneter im Parlament der Donaumonarchie, der Bruder war Diplomat und zwischen den Weltkriegen Botschafter des Königreiches Jugoslawien in verschiedenen europäischen Hauptstädten. Auch für den jungen Vojislav war zunächst die Offizierslaufbahn vorgesehen. Er entschied sich dann aber zunächst für einen einjährigen Aufenthalt in Rom, um Malerei zu studieren, später wechselte er zum Studium des Maschinenbaus an die Technische Hochschule Berlin-Charlottenburg. Hier hatte er in den Vorlesungen von Rothe und Hammerstein den ersten Kontakt mit der höheren Mathematik. Seine heimliche Leidenschaft jedoch galt dem Sport: Er war ein glänzender Boxer und wurde Bantamgewichtsmeister bei den studentischen Meisterschaften, er liebte aber auch das Bergsteigen. Das wurde ihm fast zum Verhängnis. Im Sommer 1931 stürzte er ab bei einem Alleingang auf den Triglaw, dem höchsten Berg Jugoslawiens in den Julischen Alpen. Erst am nächsten Tag wurde er geborgen, so daß der zu spät behandelte komplizierte Beinbruch zu einer schweren Sepsis und schließlich zur Amputation des rechten Beines führte. Damit war die Karriere des Ingenieurs beendet - die viel steilere eines hervorragenden Mathematikers wurde jedoch begründet.

Eine weitere Fügung des Schicksals war die enge Bekanntschaft des Hauses Avakumović mit J. Karamata, der damals gerade durch seine aufsehenerregenden Arbeiten über Taubersätze bekannt geworden war. Er entdeckte die besondere mathematische Begabung von Avakumović und förderte sein Talent nach Kräften. So begann ein Mathematikstudium in ganz und gar nicht herkömmlichen Bahnen. Die lange Zeit der Genesung verwandte Avakumović dazu, die von Karamata empfohlene Literatur zu erarbeiten. Zwar belegte er Mathematik und Physik als Studienfächer an der Universität Belgrad, er besuchte aber die Vorlesungen und Übungen nur, um zu kontrollieren, ob der zuhause erarbeitete Stoff das Curriculum umfaßte. Von der Möglichkeit, Karamata jederzeit aufsuchen zu können, mit ihm zu reden und den Fortgang seiner Untersuchungen zu verfolgen, machte er intensiven Gebrauch. Die Erfahrung des Studiums in engstem Kontakt mit der Forschung hat Avakumović geprägt und ihn frühzeitig angespornt, selber - zunächst ausgehend von Fragestellungen, die Karamata vorgab - Probleme zu bearbeiten und die Lösungen zu veröffentlichen. Bereits nach drei Semestern publizierte er dann die erste Arbeit *„Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité“* im Frühjahr 1935 in den „Comptes rendues“[1]). Wie Avakumović ein Problem anging, zeigt besonders schön die 1937 veröffentlichte Arbeit [6] *„Über die Anzahl der Zahlen* $\equiv -1 \pmod{d}$*, die keinen Primteiler derselben Form haben“*. Den Anstoß zu dieser Arbeit gab eine Aufgabe aus der berühmten Aufgabensammlung von Polya und Szegö. Im 8. Abschnitt findet sich unter Nr. 96 die Aufgabe, für die Zahlenfolge $6n-1\,(n \in \mathbb{N})$ nachzuweisen, daß jedes Glied einen Primfaktor derselben Bauart (also $\equiv -1 \bmod 6$) besitzt. Avakumović erweitert diese Aufgabe auf die entsprechende Fragestellung für beliebige arithmetische Progressionen der Form $dn-1\,(n \in \mathbb{N})$ und zeigt:

1. Genau für $d=2,3,4$ und 6 hat jedes Glied einen Primteiler derselben Bauart.

2. Für alle anderen $d \in \mathbb{N}$ enthält die Folge $dn-1$, $n \in \mathbb{N}$, stets unendlich viele Glieder, die keinen Primteiler derselben Form besitzen, wobei speziell für $d=5$ die Anzahlfunktion

$$A_5(x) = \{t \leqslant x \mid t \equiv -1 \pmod 5 \text{ und } p \not\equiv -1 \pmod 5 \text{ für alle Primteiler von } t\}$$

[1]) Er war nicht nur stolz auf seine erste Publikation, er wußte sie auch auf ungewöhnliche Weise zu vermarkten. Die Zeche in einem Gasthaus beglich er damit, daß er den dreiseitigen Sonderdruck an die Gäste verkaufte: Einen Sonderdruck für einen Slivovitz!

die Asymptotik

$$A_5(x) \sim Ax(\log x)^{-1/4}$$

besitzt.

Die Aussagen 1. und den ersten Teil von 2. beweist er ganz elementar, während er für die asymptotische Beziehung Taubersatzmethoden anwendet. Dazu betrachtet er die Dirichlet-Reihe

$$V(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

mit $a(n) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \equiv -1 \pmod 5 \text{ keinen Primteiler} \equiv -1 \pmod 5 \text{ besitzt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

und zeigt, daß sich V in der Form

$$V(s) = A(s-1)^{-3/4} + C(s-1)^{-1/4} + (s-1)^{3/4} V_1(s) + (s-1)^{1/4} V_2(s)$$

(V_1, V_2 holomorph für $\operatorname{Re} s > 1$) schreiben läßt. Auf

$$B(x) := e^{-x} \sum_{\log n \leqslant x} a(n) - \frac{A}{\Gamma(3/4)} x^{-1/4} - \frac{C}{\Gamma(1/4)} x^{-3/4}$$

wird die Laplace-Transformation angewendet. Dabei ergibt sich

$$\int_0^{\infty} e^{-su} B(u)\, du = (s+1)^{-1} V(s+1) - As^{-3/4} - Cs^{-1/4}.$$

Aufgrund des Verhaltens von V in der rechten Halbebene liefert ein Taubersatz vom Heilbronn-Landau-Typ die Asymptotik von B und damit die von A_5 für $x \to \infty$.

Bereits diese Arbeit machte Avakumović über die Grenzen von Jugoslawien hinaus bekannt; vor allem Ostmann würdigte sie in seinem Buch über Zahlentheorie ausführlich. 1939 promovierte Avakumović bei J. Karamata mit der Arbeit [11] *„Über das Verhalten Dirichletscher Reihen am Rande des Konvergenzgebietes"*. In dieser bemerkenswerten Untersuchung wird durch „Interpolation" die Verbindung hergestellt zwischen den Taubersätzen von Landau-Wiener und Littlewood, indem Avakumović einen Parameter α einführt. Im Spezialfall der Potenzreihen entspricht der Grenzfall $\alpha = 0$ dem Taubersatz von Hardy-Littlewood:

Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ im Punkt $x = 1$ linksseitig stetig und

gilt $na_n > -K$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

und der Grenzfall $\alpha = \infty$ dem Fatou-Rieszschen Satz:

> Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in einer Umgebung von $x = 1$ holomorph und ist (a_n) eine Nullfolge, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Der die beiden klassischen Taubersätze verbindende Satz von Avakumović lautet:

> Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stetig für jede Annäherung an $x = 1$ aus einem Teilgebiet des Einheitskreises, das in einer Umgebung von 1 konvex ist und mit dem Einheitskreis eine Berührung von der Ordnung $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$ aufweist, und gilt $n^{1/(1+\alpha)} a_n > -K$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Auch die übrigen in der Zeit bis 1941 veröffentlichten Arbeiten [1] bis [15] sind der Theorie der Taubersätze und ihrer Anwendungen gewidmet. Es werden bevorzugt Laplace-Stieltjes-Transformationen

$$J(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dA(t) \tag{1}$$

unter der Voraussetzung betrachtet, daß (1) für $\operatorname{Re} s > 0$ konvergiert und A monoton wächst. Aus dem asymptotischen Verhalten von J für $s \to 0$ wird dann auf das Verhalten von A für $t \to \infty$ geschlossen.

Während Avakumović ähnlich wie Karamata zunächst von einer Asymptotik der Art

$$J(s) \sim s^{-\alpha} L(s^{-1})$$

ausging, mit $\alpha \geqslant 0$ und mit einer langsam wachsenden Funktion L, d.h.

$$L(cx) \sim L(x) \quad \text{für } x \to \infty \text{ und jedes } c > 0,$$

hat sich für die späteren Anwendungen gerade der Fall exponentiellen Wachstums

$$J(s) \sim e^{1/s} \quad \text{für } s \to 0+ \text{ oder } J(s) \sim e^{-1/s} \text{ für } s \to 0+ \tag{2}$$

als bedeutsam erwiesen. So folgt z.B. (siehe [13]) im 1. Fall von (2) aus der Monotoniebedingung

$$A \text{ monoton wachsend} \tag{3}$$

und $\quad J(s) \simeq A e^{1/s} \quad$ für $s \to 0+$, mit $A \neq 0$

und gleichmäßig beschränkt in einem konvexen Bereich der rechten Halbebene, der in $s = 0$ eine Berührung erster Ordnung mit der imaginären Achse besitzt, daß

$$A(u) \sim \frac{A}{2\sqrt{\pi}} u^{-1/4} e^{2\sqrt{u}} \quad \text{für } u \to \infty. \tag{4}$$

Die Betrachtungen wurden dann in [14] weiter verfeinert, indem die gleichmäßige Beschränktheit von

$$J(s) - As^{\beta}e^{s^{-\alpha}} \quad (0 \leqslant \beta < 1,\ \alpha > 0)$$

vorausgesetzt wurde in einem konvexen Gebiet, das in $s = 0$ mit der imaginären Achse eine Berührung von der Ordnung α besitzt; unter der Monotoniebedingung (3) impliziert dies eine Asymptotik der Form

$$A(u) \sim Ac_1 u^{\gamma} \exp\left(c_2 u^{\alpha/(\alpha+1)}\right).$$

Im Gefolge der Arbeiten von Norbert Wiener bestand damals ein starkes Interesse für Taubersätze an sich. Die von Avakumović bewiesenen Sätze besaßen darüber hinaus interessante Anwendungen in der Zahlentheorie und – wie sich später zeigte – für die Eigenwertasymptotik elliptischer Operatoren. So läßt sich die von Hardy und Ramanujan für die Anzahl p_n der verschiedenen Zerlegungen einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ in positive ganzzahlige Summanden („Partitio numerorum") bewiesene Asymptotik

$$p_n \sim \frac{1}{4\sqrt{3n}} \exp\left(\pi \sqrt{2n/3}\right) \tag{5}$$

als Spezialfall von (4) darstellen [13]; denn über die Darstellung der erzeugenden Funktion

$$f(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{-sn} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-su})^{-1},$$

die man aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen kennt, und die Beziehung

$$\int_0^{\infty} e^{-st} A(t)\,dt = s^{-1}(1 - e^{-s}) f(s)$$

mit $A|_{[n,n+1)} := p_n$, folgt dann mit (4) die Hardy-Ramanujan-Formel (5).

Das Kriegsende brachte mit der kommunistischen Machtergreifung unter Tito in Jugoslawien auch für die Familie Avakumović tiefgehende Einschnitte. Der Vater starb, die Familie verlor durch Enteignung den größten Teil des Besitzes, der ältere Bruder emigrierte nach London. Vojislav Avakumović absolvierte zunächst die Referendarausbildung an einem Gymnasium, hielt aber gleichzeitig schon Vorlesungen an der Technischen Hochschule in Belgrad. 1949 wurde er dort zum außerordentlichen Professor ernannt. 1952 erhielt er einen Ruf als ordentlicher Professor an die Universität Sarajevo.

In dieser Zeit wandte er sich bevorzugt der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zu. Zunächst [16] untersuchte er die Lösung des Randwertproblems

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(a) = A, \qquad y(b) = B, \tag{6}$$

und verbesserte eine von Rosenblatt angegebene hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Mehrere Arbeiten [17], [18], [20] sind der Thomas-Fermi-Gleichung gewidmet. Es handelt sich dabei ursprünglich um die Differentialgleichung

$$y'' = x^{-1/2} y^{3/2},$$

die durch Separation der Variablen aus der von Fermi und Thomas in der Quantenmechanik untersuchten partiellen Differentialgleichung entsteht. Avakumović behandelt das allgemeinere Randwertproblem

$$y'' = f(x) y^{\lambda},$$

$$y(a) = b, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0,$$

für $a \geqslant 0, \lambda > 1$ und f „von regulärem Wachstum", d. h. $f(x) = x^{\delta} L(x)$ mit $\delta > -2$ und L langsam wachsend. Er beweist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung und gibt eine asymptotische Entwicklung für $x \to \infty$ an.

Die Arbeit [26] präsentiert einen sehr schönen Satz für ein spezielles Randwertproblem der Form (6), nämlich

$$y'' = f(x, y), \qquad y(a) = y(b) = 0. \tag{7}$$

Avakumović verbessert in diesem Fall den Existenzsatz von Picard, der unter der Voraussetzung

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{8K}{(b-a)^2} \tag{8}$$

für alle

$$(x, y) \in G_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b, \ |y| \leqslant K\}$$

und der Lipschitzbedingung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \lambda |y_1 - y_2| \tag{9}$$

mit $$\lambda < \frac{8}{(b-a)^2}, \tag{10}$$

für (7) genau eine Lösung liefert. Avakumović zeigt, daß (10) durch

$$\lambda < \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \tag{11}$$

ersetzt werden kann, und dies ist bestmöglich; nicht einmal die Gleichheit kann in (11) zugelassen werden. Außerdem schwächt er die Voraussetzung (8) ab zu

$$|f(x, y)| \leqslant h(x),$$

für eine auf $[a, b]$ stetige und positive Funktion h.

Wie wirkungsvoll dieser Satz von Avakumović ist, zeigen die folgenden Spezialisierungen. Ist $f(x, 0) \equiv 0$, so folgt für zwei aufeinanderfolgende Nullstellen

a, b der Lösung von (7) die Ungleichung

$$b - a \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

Falls $f(x,y) = -g(x)y$ und $0 \leqslant g(x) \leqslant \lambda$, ist dies die bekannte Sturmsche Ungleichung. Ersetzt man die Lipschitz-Bedingung (9) durch die Forderung, daß f stetig ist und die Ungleichung

$$|f(x, y)| \leqslant c_1 \, |y| + c_2$$

erfüllt mit $c_1 < \pi^2$, so ergibt sich die Existenz wenigstens einer Lösung von (7). Dies ist der Satz von Hammerstein.

Die Arbeit [22] ist dem Ideenkreis der „Landauschen Ungleichung" gewidmet. Landau hatte 1939 gezeigt, daß eine zweimal differenzierbare Funktion φ, die in [0, 1] die Ungleichungen

$$|\varphi''(x)| \leqslant 1 \tag{12}$$

und $$|\varphi(x) \leqslant \frac{1}{4} \tag{13}$$

erfüllt, auch der Ungleichung

$$|\varphi'(x)| \leqslant 1 \tag{14}$$

genügt. Diese Arbeit war Ausgangspunkt für die Theorie der Differentialungleichungen, ein immer noch sehr aktives Forschungsgebiet. Avakumović und Aljancić zeigten, daß allein aus der Ungleichung (12) die Abschätzung

$$|\varphi'(x) - \varphi(1) + \varphi(0)| \leqslant \frac{1}{2} - x + x^2, \qquad x \in [0, 1], \tag{15}$$

gefolgert werden kann, woraus (15) mit (14) folgt. In derselben Arbeit verallgemeinern sie diese Aussage auf höhere Ableitungen, indem sie aus der Ungleichung

$$|\varphi^{(n+1)}(x)| \leqslant \mu_{n+1}, \qquad x \in [0, 1], n \in \mathbb{N},$$

die (scharfe) Differentialungleichung

$$|\varphi'(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} [\varphi^{(\nu)}(1) - \varphi^{(\nu)}(0)] B_\nu(x)| \leqslant \mu_{n+1} \int_0^1 |B_n(x) - b_n(x-t)| dt$$

folgern (mit B_n das n-te Bernoulli-Polynom and b_n die n-te Bernoulli-Funktion).

Neben dem sicheren Geschmack in der Auswahl der Probleme und der originellen, oft sehr tiefliegenden Analyse beeindruckt die Vielzahl der mathematischen Arbeitsrichtungen, zu denen Avakumović Beiträge geleistet hat. So wandte er sich um 1950 auch der Differentialgeometrie zu, die ihm zwei schöne Sätze verdankt. Zum einen beweist er die Umkehrung des bekannten Fenchelschen Satzes, wonach die Tangentenkurve einer einfach geschlossenen Kurve auf der Sphäre zwei flächengleiche Teile begrenzt [25], und zum anderen beweist er einen Vierscheitelsatz für geschlossene konvexe Kurven im Raum, wonach sowohl die geodätische als auch die normale Krümmung mindestens vier Extrema aufweisen [27]. Die große internationale Anerkennung errang Avakumović allerdings erst durch seine Beiträge zur Spektraltheorie des Laplace-Operators. H. Weyl hatte 1911 gezeigt, daß die (der Vielfachheit nach gezählten) Eigenwerte, λ_k, des Dirichlet-Problems für den Laplace-Operator Δ in einem beschränkten Gebiet G des $\mathbb{R}^n$ der asymptotischen Beziehung

$$N(\lambda) := \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} 1 = C_n \operatorname{vol} G \lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2}) \tag{16}$$

genügen mit

$$C_n = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

Courant gelang 1920 eine erste Verbesserung von (16), indem er den o-Term durch $O(\lambda^{(n-1)/2} \log \lambda)$ ersetzte. 1934 konnte dann Carleman zeigen, daß auch die Spektralfunktion

$$e(x, x; \lambda) := \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \phi_n^2(x),$$

wobei ϕ_n eine normierte Eigenfunktion zum Eigenwert λ_n ist, eine Asymptotik besitzt, deren Hauptterm von x unabhängig ist:

$$e(x, x; \lambda) = C_n \lambda^{n/2} + o_x(\lambda^{n/2}). \tag{17}$$

Im Anschluß daran bemühten sich viele Mathematiker um die Bestimmung des bestmöglichen Restterms,

$$R(x, \lambda) := e(x, x; \lambda) - C_n \lambda^{n/2}$$

bzw. $R(\lambda) := N(\lambda) - C_n \operatorname{vol} G \lambda^{n/2}$,

in (16) oder (17); trotz großer Fortschritte in den letzten 20 Jahren sind diese Fragestellungen noch heute Gegenstand intensiver und fruchtbarer Forschung.

Avakumović [24] gelang dann 1952 der bahnbrechende Beweis der Abschätzung

$$|R(x, \lambda)| \leqslant C \lambda^{(n-1)/2} \operatorname{dist}(x, \partial G)^{-1}, \tag{18}$$

mit einer nur von G abhängigen Konstanten (unabhängig und mit einer anderen Methode wurde dies Resultat auch von B. Levitan erzielt). Hieraus folgt überdies für Gebiete im $\mathbb{R}^n$ durch Integration über G die Courantsche Abschätzung für $R(\lambda)$. Der Beweis stützt sich auf einen 1950 von Avakumović bewiesenen Taubersatz für Laplace-Transformationen, der eine Modifikation der oben zitierten Taubersätze darstellt: Sei $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ von beschränkter Schwankung auf jedem Kompaktum in $\mathbb{R}_+$ und

$$L(t) := t \int_0^\infty e^{-tu} A(u) du$$

konvergent für $t > 0$. Ist $L(t) = O(e^{-a/t})$ für $t \to 0+$ und für ein $a > 0$, und genügt A der Bedingung

$$A(v) - A(u) > -mu^{(n=1)/2}$$

für $u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$, so ist

$$A(u) = O(u^{(n-1)/2}) \tag{19}$$

für $u \to \infty$. Zur Anwendung dieses Satzes setzt man

$$A(u) = R(x, u); \tag{20}$$

dann liefern die Ergebnisse von Minakshisundaram und Pleijel über den Kern der Wärmeleitungsgleichung die Voraussetzungen, und die Abschätzung (18) folgt. Am Beispiel der Einheitskugel läßt sich zeigen, daß die λ-Potenz im O-Term von (18) nicht verbessert werden kann.

Die aus dem erzielten Durchbruch resultierende Anerkennung war erheblich: Das Ergebnis wurde in vielen Seminaren diskutiert (so von Siegel und Weyl in Princeton), Avakumović erhielt Einladungen nach Lund, Göttingen (Gastprofessor 1957/58 und 1959/60) und Gießen (Gastprofessor 1960/61), er wurde Mitglied der Serbischen Akademie der Wissenschaften und erhielt 1957 den Nationalpreis für Mathematik in Jugoslawien.

In einer weiteren Arbeit [30] übertrug dann Avakumović die Ergebnisse für den Laplace-Operator auf den Laplace-Beltrami-Operator auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten im Fall der Dimension drei (seine Methode ist jedoch in beliebigen Dimensionen durchführbar). Er beweist dazu tiefliegende Abschätzungen der Resolventen (die erst mittels des Kalküls der Pseudodifferentialoperatoren leichter zu erzielen sind), die zu den notwendigen Abschätzungen für den Kern der Wärmeleitungsgleichung führen. Ein ähnliches Taubersatzargument wie vorher liefert dann

$$|R(x, \lambda)| \leqslant C\lambda, \tag{21}$$

mit C unabhängig von x. Die Integration von (21) führt dann zu der Formel

$$R(\lambda) = (6\pi^2)^{-1} \operatorname{vol} G\lambda^{3/2} + O(\lambda)$$

für die Anzahlfunktion der Eigenwerte; das Beispiel der Einheitssphäre zeigt, daß diese Abschätzung wiederum bestmöglich ist.

Einen weiteren Beitrag zum Problemkreis „Eigenwerte der Schwingungsgleichung" enthält die Arbeit [31] von 1956. Für ein beschränktes Gebiet G im $\mathbb{R}^2$ wird der folgende Entwicklungssatz bewiesen: Ist f in G absolut integrierbar, so existieren die Entwicklungskoeffizienten

$$c_\nu := \int_G f(x)\phi_\nu(x)\,dx.$$

Die zugehörige Fourierreihe von f jedoch konvergiert bzw. ist summierbar nach geeigneten Verfahren nur dann, wenn f noch zusätzliche Voraussetzungen erfüllt. Avakumović betrachtet Summierbarkeit nach dem $G_\delta^\varkappa$-Verfahren, d. h. $\sum a_\nu$ ist $G_\delta^\varkappa$-summierbar genau dann, wenn $\sum_{\lambda_\nu \leqslant \lambda}(1 - e^{(\lambda_\nu - \lambda)\lambda^{-\delta}})^\varkappa a_\nu \to A$, $\lambda \to \infty$.

Man wußte, daß bei den Riesz-Mitteln $(R, \lambda, \varkappa)$ nur für $\varkappa \geqslant 1/2$ die Summierbarkeit der Fourierreihe in x von lokalen Eigenschaften von f in einer Umgebung von x abhängig ist. Eine entsprechende Aussage gelingt Avakumović, indem er zeigt, daß für $\delta \in [1/2, 1)$ und $\varkappa > 3/4(\delta - 1/2)^{-1}$ die $G_\delta^\varkappa$-Summierbarkeit von $\sum c_\nu \phi_\nu$ dann eintritt, wenn der Mittelwert

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0))\,d\varphi$$

die Bedingung $g(r) = o(r^\alpha)$ erfüllt für $r \to 0$, mit $\alpha > 0$.

Während der Gastprofessur in Gießen 1960/61 erhielt Avakumović das Angebot, die Leitung des kurz zuvor gegründeten Zentralinstituts für Angewandte Mathematik der Kernforschungsanlage Jülich zu übernehmen. Er nahm das Angebot an und wechselte zum 1.4.1961 nach Aachen, wo das Institut anfangs untergebracht war. Allerdings mußte er in Kauf nehmen, daß seine Frau und seine drei Kinder in Belgrad bleiben mußten; Tito verbot die Ausreise auch nur eines einzelnen Familienmitglieds aus Jugoslawien. Erst nach einem schweren Autounfall, bei dem sich Avakumović 1962 lebensgefährlich verletzte, ließen die jugoslawischen Behörden seine Frau und anschließend auch seine Kinder ausreisen.

Avakumović wurde Honorarprofessor an der RWTH Aachen und entfaltete eine fruchtbare Tätigkeit. Es gelang ihm – gemeinsam mit Claus Müller, der das Institut zunächst kommissarisch geleitet hatte – eine Konzeption für das Institut zu finden, die einmal den Anwendungen und der erforderlichen Zusammenarbeit mit den anderen Zentralinstituten, vor allem mit der Plasmaphysik, gerecht wurde, die zum anderen aber auch eigenständiger Forschung hinreichend Platz ließ. So war es aus späterer Sicht nicht verwunderlich, daß von den Mitarbeitern im Laufe der Jahre nicht weniger als fünfzehn auf Lehrstühle und Professuren berufen worden sind.

1966 folgte Avakumović dem Ruf auf einen Lehrstuhl an der Philipps-Universität Marburg, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1975 lehrte. In diesen neun Jahren begründete er – trotz ständig zunehmender gesundheitlicher Probleme – eine aktive Arbeitsgruppe mit Schwerpunkt in der Spektraltheorie elliptischer Operatoren. Sein eigenwilliger Arbeitsstil machte die Zusammenarbeit nicht immer leicht, seine Einsichten, sein Geschmack und seine intellektuelle Entschlossenheit haben seine Schüler aber nachhaltig beeinflußt. In die aktive Marburger Zeit fielen auch die Studentenunruhen der späten sechziger Jahre, die zu mancherlei Turbulenzen führten. Diese stürmische Zeit zwang oft dazu, Farbe zu bekennen, und Avakumović tat dies stets ohne Zögern. Die weltoffene Liberalität, die er seiner noch von der Donaumonarchie geprägten Erziehung verdankte, und seine sehr rationale Weltsicht machten ihn zum Befürworter vernünftiger Neuerungen, die Erfahrungen unter dem kommunistischen Regime veranlaßten ihn aber auch zum energischen Widerstand gegen jede Art von Opportunismus und Leistungsverweigerung.

Wer die Gelegenheit hatte, Vojislav Avakumović kennenzulernen, konnte sich der Faszination seiner Persönlichkeit kaum entziehen. Seine Geisteshaltung, sein Arbeitsstil und seine vielfältigen künstlerischen Interessen wiesen hinüber in eine kulturelle Epoche, die unwiderbringlich verloren ist, deren Werte er jedoch ohne Resignation vertrat. Am 19. August starb Vojislav G. Avakumović an den Folgen eines Schlaganfalles. Seine Urne wurde im Familiengrab in Sremski-Karlovici beigesetzt.

Schriftenverzeichnis

[1] Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris **200** (1935) 1-3

[2] Über einen 0-Inversionssatz. Bull. International de l'Acad. Jugoslave. **29-30** (1936) 107-117

[3] Über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von iteriertem Exponentialcharakter ist. Bull. de l'Acad. royale serbe (1936) 173-181

[4] (Mit J. Karamata) Über einige Taubersche Sätze, deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist. Math. Z. **41**, Heft 3 (1936) 345-356

[5] Über einen Satz von V. Ramaswami. Rev. Math. de l'Union Interbalkanique (Athènes) (1936) 1-2

[6] Über die Anzahl der Zahlen $= -1 \pmod{d}$, die keinen Primteiler derselben Form haben. Publ. Math. de l'univ. de Belgrad (1937) 48-60

[7] Théorèmes relatifs aux intégrales de Laplace sur leur frontière de convergence. Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) **204** (1937) 1-2

[8] Sur l'inversion d'un procédé de sommabilité avec application. Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) **207** (1938) 1-3

[9] Über das Verhalten Laplacescher Integrale an der Konvergenzgrenze mit neuem Beweis eines Satzes von Hardy-Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten. Bull. Math. de la Soc. Roumaine des Sci. t. **40** (1938) 3-8

[10] Neuer Beweis eines Satzes von G. H. Hardy und S. Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten. Amer J. Math. (1940) 377-380

[11] Über das Verhalten Dirichletscher Reihen am Rande des Konvergenzgebietes. Math. Z. **45** (1940) 650-664

[12] Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum vom Exponentialcharakter ist. I. Math. Z. **45** (1940) 62-66

[13] Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum vom Exponentialcharakter ist. II. Math. Z. **46** (1940) 67-69

[14] Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist. III. Math. Z. **47** (1940) 141-152

[15] Über die Konvergenzbedingung der Inversionssätze der Laplaceschen Transformation. Bull. internat. de l'Acad. Jugoslave **34** (1941) 1-9

[16] Sur le problème aux limites des équations différentielles du second ordre non linéaires. Bull. de l'Acad. Serbe des Sci. (1945) 53-65

[17] Sur l'équation différentielle de Thomas-Fermi. Théorèmes relatifs à l'existence des intégrales. Bull. de l'Acad. Serbe des Sci. (1945) 163-187

[18] Sur l'équation différentielle de Thomas-Fermi. I. Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci. (1947) 1-13

[19] Contribution à la théorie des intégrales de Laplace. Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci. (1948) 91-107

[20] Sur l'équation différentielle de Thomas-Fermi. II. Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci. (1948) 223-135

[21] Bemerkung über einen Satz von T. Carlemann. Math. Z. **53** (1950) 53-58

[22] Sur la meilleure limite de la dérivée d'une fonction assujettie à des conditions supplémentaires. Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci. (1950) 235-242

[23] Einige Sätze über Laplacesche Integrale. Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci. (1950) 287-304

[24] Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung. Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci. (1952) 95-96

[25] Über geschlossene Kurven auf der Kugel. Recueil des Travaux de l'Acad. Serbe des Sci. (1951) 101–108
[26] Über die Randwertaufgabe zweiter Ordnung. Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci. (1952) 1–8
[27] Über die Scheitel der geschlossenen Raumkurven. Recueil des Travaux de l'Acad. Serbe des Sci. (1953) 147–152
[28] Ein Lückensatz für Dirichletsche Reihen. Proc. of the Intern. Math. Congr. (1954) 1–2
[29] A note on the question set by P. Erdös and L. K. Hua. Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci. (1954) 47–56
[30] Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **65** (1956) 327–344
[31] Über die Eigenwerte der Schwingungsgleichung. Math. Scand. (1956) 161–173

Verzeichnis der Doktoranden von V. G. Avakumović

Bojanić, Ranko: Propriétés asymptotiques des solutions des équations differentielles linéaires; 1953

Vučković, Vladeta: Die Stieltjes-Transformation, die mit der Geschwindigkeit der Exponentialfunktion unendlich klein wird; 1953

Marić, Vojislav: On a class of Fourier integrals; 1957

Maravić, Manojlo: Sur un procédé de sommation des séries divergentes; 1957

Eberhard, Walter: Lineare Eigenwertprobleme beliebiger Ordnung mit zerfallenden Randbedingungen; 1964

Gromes, Wolfgang: Über das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion elliptischer Systeme; 1969

Brüning, Jochen: Über die Anzahlfunktion elliptischer Operatoren; 1972

Brübach, Rickleff: Über die Spektralmatrix elliptischer Systeme; 1973

Prof. Dr. J. Brüning
Universität Augsburg
Institut für Mathematik
Universitätsstr. 8
86159 Augsburg

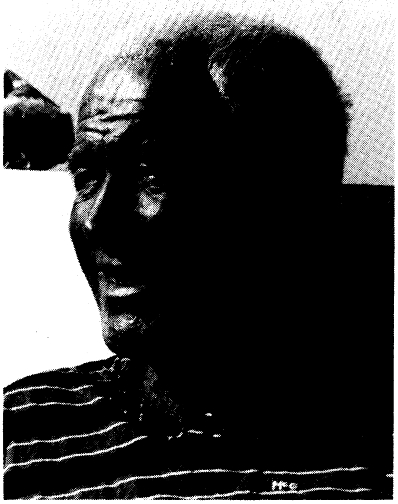
Prof. Dr. W. Eberhard
Universität Duisburg GHS
Fachbereich 11: Mathematik
Lotharstr. 65
47057 Duisburg

(*Eingegangen: 10. 3. 1992*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 153–165

Rudolf Henn: Eine Bilanz

B. Rauhut, Aachen



Am 18. November 1989 starb Prof. Dr. Rudolf Henn, ordentlicher Professor für Volkswirtschaftslehre und Statistik an der Universität Karlsruhe. Noch während seiner aktiven Zeit als Hochschullehrer setzte die Geißel Krebs seinem Leben vorzeitig ein Ende. Mit Rudolf Henn verlor Deutschland einen der aktivsten Verfechter der Nutzbarmachung quantitativer, insbesondere mathematischer Methoden in den Wirtschaftswissenschaften.

Rudolf Henn wurde am 9. November 1922 als einziges Kind von Johann Daniel Henn und seiner Frau Katharina Sophie Henn, geb. Haberscheidt, in Neuwied geboren. Er besuchte zunächst die Raiffeisen-Schule im Stadtteil Heddesdorf, wechselte von dort zur Staatlichen Oberschule für Jungen in Neuwied, wo er am 15. März 1941 nach achtjähriger Schulzeit an dieser Schule das Zeugnis der Reife erlangte. Zu dieser Zeit war sein Vater bereits einige Jahre tot. Rudolf Henn lebte mit seiner Mutter allein; sie erzog ihn großzügig und tolerierte auch sehr eigenwillige Entscheidungen von ihm.

Der Zeit entsprechend nahm Rudolf Henn im Anschluß an sein Abitur bis Mai 1945 am zweiten Weltkrieg teil, zuletzt als Kompanieführer in einem Panzerregiment. Als Soldat war er genauso draufgängerisch wie bei seiner lebenslangen Passion, dem Sport. Sichtbarer Beweis ist zum Beispiel die Tatsache, daß er während seiner Soldatenzeit Wehrmachtsniederrheinmeister im Boxen war.

Im Mai 1945 ins zivile Leben zurückgekehrt, übte Rudolf Henn zunächst die verschiedensten Tätigkeiten aus – z. B. arbeitete er einige Wochen als Holzfäller – um überhaupt ein Studium finanzieren zu können. Die vorerst letzte dieser Tätigkeiten war ein Praktikum bei der Bezirkssparkasse Heidelberg in der Zeit vom Juni bis September 1947. Rudolf Henn begann sein Studium der Wirtschaftswissenschaften in Karlsruhe im Oktober 1947. Jedoch bereits zum Wintersemester 1948/49 wechselte er an die Wirtschaftshochschule Mannheim, um dort im wesentlichen bei Walter Georg Waffenschmidt Vorlesungen zu hören.

Während seiner kurzen Mannheimer Studienzeit besuchte Rudolf Henn auch eine Reihe von Veranstaltungen an der Universität Heidelberg, speziell regelmäßig Seminare in Volkswirtschaftslehre und Vorlesungen in Mathematik. Dies konnte er relativ leicht durchführen, da er in Heidelberg wohnte. Bereits nach dreijähriger Studienzeit beendete Rudolf Henn sein Studium im Oktober 1950 mit der Diplomprüfung, wobei er eine Diplomarbeit mit dem Titel „Bedeutung des Elastizitätsbegriffes für die Theorie der Unternehmung“ vorlegte, die von Walter Waffenschmidt betreut worden war.

Nach dem Examen nahm er unverzüglich die Vorbereitungen für seine Promotion auf, u.a. dadurch, daß er regelmäßig Doktorandenseminare in Mannheim und Heidelberg sowie weiterhin Mathematikvorlesungen in Heidelberg besuchte. Er schrieb eine Dissertation bei Waffenschmidt mit dem Titel „Die Auswertung wirtschaftlicher Beobachtungen“, mit der er zweieinhalb Jahre nach seinem Diplomexamen am 31. Juli 1953 in Mannheim promovierte. Die Dissertation erschien als erste seiner Monographien im pfälzischen Anton Hain-Verlag in Meisenheim, der zu dieser Zeit noch Westkulturverlag hieß.

Im Anschluß an die Promotion wurde Rudolf Henn wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl von Waffenschmidt, 1955 Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle, wobei er die Nachfolge von Karl Brandt antrat, der als Assistent Waffenschmidts im Frühjahr 1955 eine Lehrstuhlvertretung in Braunschweig übernahm. Als Karl Brandt im Herbst 1955 nach Marburg berufen wurde, bekam Rudolf Henn endgültig die Assistentenstelle. Gleichzeitig erhielt er einen Lehrauftrag für Statistik an der Universität Heidelberg.

Seine Assistentenzeit währte jedoch nicht allzu lange, da er im Frühjahr 1956 die Leitung einer Forschungsgruppe übernahm, die von Walter Waffenschmidt bei der DFG beantragt und genehmigt worden war mit der Thematik „Mathematische Wirtschaftstheorie“. Diese Forschungsgruppe war paritätisch besetzt mit je drei Mathematikern und drei Ökonomen. Die Forschungsgruppe hatte zum Teil enge Kontakte zu einer Forschungsgruppe „Ökonometrie“ in Heidelberg, die von Preiser initiiert worden war.

Im Wintersemester 1955/56 erfolgte die Habilitation von Rudolf Henn an der Wirtschaftshochschule Mannheim, jedoch bereits im November darauf die Umhabilitation nach Heidelberg, wo Rudolf Henn die Venia legendi für „Wirtschafts- und Sozialwissenschaften" erhielt. Die Umhabilitation war im wesentlichen hochschulpolitisch begründet, da Heidelberg renommierter als Mannheim war; sie war jedoch auch sachlich begründet, da eine Zusammenarbeit mit Kromphardt begann, der in Heidelberg die Nachfolge Preisers angetreten hatte.

1958 erhielt der Privatdozent Dr. Rudolf Henn von der Universität Heidelberg einen Ruf auf ein Extraordinariat für Ökonometrie und Operations Research an der Hochschule St. Gallen als Nachfolger von Wilhelm Krelle, der einen Ruf nach Bonn angenommen hatte. Die Stelle in St. Gallen trat Rudolf Henn zum Sommersemester 1959 an, wobei er gleichzeitig einen Ruf auf ein Extraordinariat für Statistik nach Kiel ablehnte. Nach einer Gastprofessur 1960 in Basel erhielt er 1963 einen Ruf auf einen Lehrstuhl „Ökonometrie und Statistik" an der Universität Göttingen, den er Ende 1963 annahm.

Nach einer Gastprofessur an der Wayne State University in Detroit/USA folgte er schließlich 1966 einem Ruf auf den Lehrstuhl für Volkswirtschaftslehre an der Universität Karlsruhe. Jedoch war dies kein klassischer Lehrstuhl für Volkswirtschaftslehre. Vielmehr war in den Berufungsvereinbarungen festgehalten, daß er insbesondere die Gebiete Ökonometrie, Unternehmensforschung und Statistik vertreten sollte. Nach einer Gastprofessur im Sommersemester 1967 an der Universität Saarbrücken lehnte Rudolf Henn 1969 einen Ruf an die Technische Universität Wien und 1970 einen Ruf an die Universität Augsburg ab.

So verbrachte er schließlich die restliche Zeit seines Lebens an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Universität Karlsruhe, wo er meist als „Graue Eminenz" äußerst effizient wirkte. Lediglich in den Jahren von 1982 bis 1984 trat er als Dekan der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften bewußt sichtbar in Erscheinung. Nachdem er sich entschieden hatte, über das 65. Lebensjahr hinaus weiter als Hochschullehrer tätig zu sein, war ihm dies jedoch nur für relativ kurze Zeit gegönnt. Er starb am 18. November 1989 in Karlsruhe.

Mit dem hier dargestellten Lebenslauf von Rudolf Henn erhebt sich die Frage, weshalb ein Nachruf auf diesen ungewöhnlichen Menschen auch in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheint. Die Antwort darauf hängt eng zusammen mit der Stellung, die die Mathematik in anderen Wissenschaftszweigen und umgekehrt diese in der Mathematik haben. Gerade im Hinblick auf die derzeitige Diskussion um den Stand der Mathematik in Deutschland ist jemand wie Rudolf Henn von besonderem Interesse, da er als einer der wesentlichen Protagonisten der Mathematisierung der Wirtschaftswissenschaften anzusehen ist.

Er gehörte einer Generation an, der die für die wissenschaftliche Ausbildung besten Jahre geraubt wurden, ehe sie überhaupt mit ihrer Arbeit im wissenschaftlichen Bereich beginnen konnten. Gewissermaßen als Ausgleich dafür waren sie bei Studienbeginn wesentlich gereifter, da dieser – wie bei Rudolf Henn – in ein Alter fiel, in dem heutzutage die meisten Studierenden ihr Studium nahezu beendet haben. Dazu gehört insbesondere auch, daß nicht einfach die Studieninhalte lernend aufgenommen wurden, sondern daß vielmehr von vornherein eine kritische Auseinandersetzung mit dem Stand und den Entwicklungstendenzen der Wissenschaft erfolgte. Bei Rudolf Henn bestand das Ergebnis des Prozesses einer intensiven Beschäftigung mit der damaligen Lage der Wirtschaftswissenschaften darin, daß er sehr deutlich erkannte, wie dringend eine Mathematisierung der Wirtschaftswissenschaften notwendig war, um sie aus einem Bereich des rein Deskriptiven in einen Bereich des Erklärens und Planens überführen zu können.

Diese Erkenntnis war u. a. ein Grund, bereits nach zwei Semestern von Karlsruhe nach Mannheim zu wechseln: Ihm war berichtet worden, daß die Wirtschaftswissenschaften in Mannheim unter Walter Waffenschmidt, der von Haus aus Ingenieur war, wesentlich stärker mathematisiert waren, als es zu diesem Zeitpunkt in Karlsruhe der Fall war. In entsprechender Konsequenz besuchte Rudolf Henn dann auch sofort die Vorlesungen und Übungen zur Differential- und Integralrechnung I in Heidelberg. Soweit ihm seine Studien der Wirtschaftswissenschaften sowie seine Aufgaben am Lehrstuhl Waffenschmidt (u. a. als Tutor) Zeit ließen, besuchte er auch in der Folgezeit eine große Anzahl mathematischer Vorlesungen (und erwarb bei vielen auch einen Übungsschein). So hörte er z. B. die Differential- und Integralrechnung II im Sommersemester 1952 und die Analytische Geometrie II nach seiner Promotion in Wirtschaftswissenschaften im Wintersemester 1953/54. Diese Grundvorlesungen waren jedoch für ihn nur Mittel zum Zweck, um auch anspruchsvollere Gebiete der Mathematik verstehen und für die Wirtschaftswissenschaften möglicherweise nutzbar machen zu können. Mitte der fünfziger Jahre z. B. besuchte er in Heidelberg Vorlesungen bei Seifert über Statistik Cramér'scher Prägung, bei Schubert Topologie à la Bourbaki, Ökonometrie bei Krelle, später dann, als er selbst bereits Ordinarius in Göttingen war, einen Zyklus über Maßtheorie und Mathematische Statistik bei Jacobs und auch noch Ende der 70er Jahre eine Vorlesung über „Konvexe Analysis und mathematische Wirtschaftstheorie“, die Heinz König als Gastprofessor in Karlsruhe hielt.

Das Interesse von Rudolf Henn an der natürlicherweise sehr starken stochastischen Komponente innerhalb der Wirtschaftswissenschaften war jedoch bereits in den Heidelberger Tagen durch die Vorlesungen von Wilhelm Krelle geweckt geworden. Das zeigt sich auch darin, daß er zusammen mit Kromphardt und Förstner 1962 eines der ersten Lehrbücher im deutschsprachigen Raum verfaßte mit dem Titel „Lineare Modelle“, das sowohl im nichtstochastischen wie im stochastischen Bereich aktuelle Strömungen in bezug auf die Wirtschaftswissenschaften aufnahm. Gleichzeitig fielen in diese Zeit Überlegungen zur Gründung einer Zeitschrift, die speziell den mathematischen Bezug der Wirtschaftswissenschaften darstellen sollte. Diese Überlegungen führten 1963 zum Erscheinen des ersten Bandes der Zeitschrift „Methods of Operations Research“, die damals noch Operations Research Verfahren hieß.

Dies war jedoch nur der Beginn einer ganzen Reihe von Aktivitäten, die alle die Mathematisierung der Wirtschaftswissenschaften in Forschung und Lehre sowie eine enge Verzahnung von Mathematik und Wirtschaftswissenschaften zum Ziel hatten. Dazu gehörten in dieser Zeit vor allem Gedanken zur Errichtung eines Forschungsinstituts für „Mathematik und Ökonomie“. Es waren aber nicht nur Gedanken; es entstanden sogar eine fertig ausgearbeitete Satzung sowie Detailpläne zur Größe und Ausstattung eines derartigen Instituts. Die Idee dabei war, daß die Grundausstattung von einem Bundesland übernommen werden sollte, der laufende Unterhalt jedoch von der VW-Stiftung getragen würde. Eine Art Gründungsversammlung fand im Jahre 1966 in Heidelberg statt, an der u. a. die

Herren Jacobs, Bauer, Selten, Schneeweiß, Hildenbrandt sowie C.C. von Weizsäcker teilnahmen.

In allen Bundesländern der damaligen Bundesrepublik Deutschland wurde dieses Konzept vorgestellt, wobei schließlich Nordrhein-Westfalen mit Bielefeld den Zuschlag erhielt. Das hatte jedoch zur Folge, daß Rudolf Henn das Interesse an diesem Projekt, das er selbst ins Leben gerufen hatte, völlig verlor, da er den Standort für ungeeignet hielt. Bielefeld war eine neugegründete Universität, die international noch völlig unbekannt war, während Rudolf Henn richtigerweise davon ausging, daß Impulse gerade aus dem englischsprachigen Bereich vor allem in der Anfangsphase für ein derartiges Institut unbedingt vonnöten seien. Sein Rückzug war wohl auch ein wenig mitverursacht durch den tödlichen Autounfall seines langjährigen Freundes und Mitarbeiters Karl Förstner im Juni 1967. Karl Förstner hatte in Heidelberg Mathematik studiert und war bereits in der Waffenschmidt-Forschungsgruppe in Heidelberg Mitarbeiter von Rudolf Henn gewesen. Er war ihm dann nach St. Gallen, Göttingen und Karlsruhe gefolgt, wo er sich 1966 habilitierte.

Das weitere Schicksal dieses geplanten Forschungsinstituts hat der Einstellung Rudolf Henns wohl recht gegeben.

Nach dem – in Rudolf Henns Augen – Scheitern dieses Projektes verlegte er sich unermüdlich auf andere Möglichkeiten, seine Vorstellungen durchzusetzen. Er hatte inzwischen den Ruf an die Fakultät für Geistes- und Sozialwissenschaften in der Technischen Hochschule Fridericiana Karlsruhe angenommen. Bereits im Sommersemester 1967 stellte er bei der Fakultät für Naturwissenschaften I den Antrag, als Zweitmitglied aufgenommen zu werden. Im Juli 1967 stimmte der Senat in Karlsruhe diesem Antrag zu. In diesem Umfeld, d. h. durch Abstützen auch auf andere Fakultäten, trieb Rudolf Henn seine Vorstellungen der Lehre und Ausbildung im Fach Wirtschaftswissenschaften voran in einer Weise, die bereits 1969 zur Einführung des neuen Studienganges für „Wirtschaftsingenieure“ führte. Dieser Studiengang war geprägt durch eine sehr starke mathematische Komponente, erhielt seine besondere Note aber auch durch eine starke Einbeziehung des Operations Research und der sowohl allgemein als auch speziell an der Technischen Hochschule Karlsruhe noch jungen Informatik.

Nicht zuletzt diesem Studiengang ist es wohl zu verdanken, daß die jetzige Fakultät für Wirtschaftswissenschaften in Karlsruhe laut einer Umfrage unter 8000 Führungskräften aus der Wirtschaft, die das Managermagazin im Februar 1992 durchführte, die erste Adresse in Deutschland für die Ausbildung von Führungskräften ist, noch vor der traditionell hoch eingeschätzten Universität Köln.

Aber nicht nur durch Einflußnahme auf die Studiengänge in Karlsruhe versuchte Rudolf Henn, seine Vorstellungen umzusetzen. Als Mitglied der Studienreformkommission des Landes Baden-Württemberg in den Jahren 1975/76 für das Studium der Wirtschaftswissenschaften versuchte er auch landesweit, seine Vorstellungen von einem zukunftsorientierten Studium der Wirtschaftswissenschaften einzubringen.

Neben diesen Bemühungen um die Lehre standen entsprechende Aktivitäten im Bereich der Forschung. So gelang ihm erstmalig im Jahre 1968 zusammen mit Hans Paul Künzi und Horst Schubert, eine Operations Research Tagung im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach durchzuführen. Derartige Tagungen fanden in den darauffolgenden Jahren regelmäßig in Oberwolfach statt.

Als Höhepunkt seiner Bemühungen einer verstärkten Integration von Wirtschaftswissenschaften und Mathematik ist wohl die Etablierung der Gesellschaft für Mathematik, Ökonomie und Operations Research anzusehen. Der Gedanke an die Gründung einer derartigen Gesellschaft kam Mitte der siebziger Jahre auf und wurde entscheidend von Rudolf Henn propagiert, als es sich – zumindest in seinen Augen – zeigte, daß die Deutsche Gesellschaft für Operations Research diesen Integrationsgedanken nicht in der von Rudolf Henn erwarteten rigorosen Form unterstützte. Eine erste Tagung über Operations Research, unabhängig von der Deutschen Gesellschaft für Operations Research, fand 1976 in Heidelberg statt, eine zweite 1977 in Aachen. Im Anschluß an diese Tagung wurde die GMÖOR (Gesellschaft für Mathematik, Ökonomie und Operations Research) gegründet, wobei Rudolf Henn in Verfolgung seines Zieles darauf drängte, daß der erste Vorsitzende dieser Gesellschaft ein Mathematiker würde; es war Heinz König aus Saarbrücken.

Diese programmatische Wahl zeigte bereits, welche speziellen Aufgaben die neue Gesellschaft übernehmen sollte: Sie sollte eine sehr enge Verbindung bewirken zwischen den Wirtschaftswissenschaften auf der einen und der Mathematik auf der anderen Seite. Dieses Konzept zeigt sich auch bei den jährlichen Symposien (die 16. Tagung fand 1991 in Trier, die 17. 1992 in Hamburg statt), bei denen die Programmgestaltung wie auch die örtliche Tagungsleitung meist von Kollegen sowohl der Wirtschaftswissenschaften wie der Mathematik vorgenommen werden.

Wie bei vielen anderen Gelegenheiten hielt Rudolf Henn sich auch in diesem Fall nach außen hin sehr zurück. Zwar war er die entscheidend treibende Kraft bei der Gründung dieser Gesellschaft, doch gehörte er nie dem Vorstand an, dem wissenschaftlichen Beirat erst seit 1981, wobei er ab 1985 den Vorsitz dieses Beirats übernahm, den er bis zu seinem Tode innehatte.

Sieht man die Gründung der GMÖOR als einen Versuch Rudolf Henns an, Wirtschaftswissenschaften und Mathematik auf theoretisch-forschungsmäßiger Seite stärker zu verklammern, versuchte er seit Anfang der achtziger Jahre eine ähnliche Entwicklung auch im praktisch-angewandten Bereich zu initiieren. So startete er ab 1980 regelmäßige Tagungen in Karlsruhe über „Geld, Banken und Versicherungen“, die getragen wurden von einer, auf seine Initiative hin entstandenen Forschungsgesellschaft „Geld – Banken – Bausparkassen – Versicherungen“. Von 1983 bis 1987 war er auch Vorsitzender dieser Gesellschaft. Seine vielfältigen Verdienste auf diesem Gebiet, auch als zeitweiliger wirtschaftspolitischer Berater der Regierung Baden-Württembergs, führten dazu, daß ihm 1983 das Bundesverdienstkreuz verliehen wurde.

Vor einem Eingehen auf die wissenschaftlichen Veröffentlichungen und die herausgeberischen Aktivitäten Rudolf Henns soll und muß noch ein anderer wichtiger Aspekt in seinem Leben betrachtet werden: der sportliche. Dabei geht es nicht allein darum, daß er zeit seines Lebens in einer Vielzahl von Sportarten begeistert und erfolgreich engagiert war, sondern auch darum, daß er alle wissenschaftlichen und wissenschaftspolitischen Aktivitäten quasi sportlich angesehen hat. Sport war für ihn nicht nur eine Art der Körperertüchtigung und – vor allem bei den von ihm betriebenen Sportarten – eine Möglichkeit des Auslotens der eigenen, körperlichen Grenzen, er war für ihn auch ein generelles Programm: Die meisten Probleme, seien es mathematische, wirtschaftswissenschaftliche, hochschulpolitische oder auch allgemein menschliche, stellen Herausforderungen dar, denen man mit äußerstem Einsatz begegnen muß.

Diese Überzeugung zeigt sich auch in der Auswahl der Sportarten, die er betrieben hat. Neben dem Boxen, das er hauptsächlich und erfolgreich in frühen Jahren ausübte, war zunächst das Rudern seine bevorzugte Sportart. (Dort konnte er bei Ruderfahrten auf dem Rhein, ausgehend von seiner Heimatstadt Neuwied, schon früh üben, was ihn später in vielen Bereichen auszeichnete: Sein Mut und seine Ausdauer, sowohl mit als auch gegen den Strom zu rudern, je nachdem, was seine Überzeugung von ihm verlangte.) Später hat er jahrelang Freude am Bergsteigen gehabt (so hat er z. B. mehrere Male den Piz Palü überquert), 1973 begann er mit Judo und 1975 mit Karate. Diese letzte Sportart, der er besonders zugetan war, hat er allerdings nicht so betrieben, wie man es von einem über Fünfzigjährigen erwarten dürfte; vielmehr hat er auch dort versucht, an die Grenzen des körperlich Machbaren zu stoßen. Sport war für Rudolf Henn immer verknüpft mit einer Art Besessenheit.

Von einer derartigen Besessenheit geprägt ist auch der schriftliche Nachlaß von Rudolf Henn. Sein unbedingter Wille, Wirtschaftswissenschaften und Mathematik zu verbinden, und zwar nicht nur im „wissenschaftlich arithmetischen" Mittel, dem Operations Research, sondern auch und ganz besonders in der mathematischen Wirtschaftstheorie, wird bei allen Veröffentlichungen und herausgeberischen Tätigkeiten deutlich. Es sind nicht so sehr einzelne Arbeiten oder Bücher, die die wissenschaftliche Bedeutung Rudolf Henns für die Wissenschaftslandschaft an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Wirtschaftswissenschaften ausmachen, es ist vielmehr das Gesamtwerk, die wesentliche Zielrichtung darin sowie nicht zuletzt die Zeit, in der diese Arbeiten entstanden sind.

So schreibt z. B. Walter Waffenschmidt im Vorwort der 1957 mit Karl Förstner verfaßten Monographie „Dynamische Produktionstheorie und lineare Programmierung": „Manche Leser der Abhandlung ... werden in ihr eine mathematische Formulierung sehen, von der sie vermuten, daß man sie ebenso gut durch die Umgangssprache ersetzen könnte. Das ist jedoch nicht der Fall ..." An diesem Zitat erkennt man den damaligen methodischen Stand der Wirtschaftswissenschaften in Deutschland und man erkennt auch, welche Entwicklung seit dieser Zeit nicht zuletzt durch die Arbeiten Rudolf Henns auf diesem Gebiete stattgefunden hat.

Daß es Rudolf Henn bei seinen Bemühungen nicht um isoliertes Vorantreiben einiger Spezialgebiete ging, sondern wie bereits mehrfach erwähnt um die umfassende Nutzbarmachung mathematisch-quantitativer Verfahren für die gesamte Ökonomie, zeigt die Thematik seiner Arbeiten. Sie lassen sich grob in die drei Gebiete

- Stochastik
- Operations Reserach
- Wirtschaftstheorie

einteilen. Unter der Bezeichnung Stochastik sind dabei die Gebiete Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik sowie Ökonometrie zu verstehen. Zu bemerken ist dabei vor allem, daß Rudolf Henn im deutschsprachigen Raum als derjenige anzusehen ist, der sich als erster mit den verschiedenen Methoden des Operations Research in mehr als nur einem Spezialgebiet befaßt hat und diese Vielfalt - auch in bezug auf die Stochastik und die Wirtschaftstheorie - in seinen Arbeiten zum Ausdruck gebracht hat.

Detaillierte Angaben zu dem wissenschaftlichen Werk von Rudolf Henn finden sich in den News Letters der GMÖOR 1/2 von 1990.

Die wissenschaftliche Bedeutung von Rudolf Henn kann und sollte aber nicht nur an seinen Veröffentlichungen gemessen werden. Einen mindestens ebenso starken Einfluß hatten seine die wissenschaftlichen Arbeiten flankierenden organisatorischen und nachwuchspolitischen Maßnahmen. Während über den ersten Bereich schon hinreichend berichtet wurde, sind für den zweiten Bereich einige Bemerkungen noch notwendig.

So ist zum Bespiel festzustellen, daß an 64 erfolgten Habilitationen an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften in Karlsruhe in der Zeit von 1966 bis 1990 Rudolf Henn bei 21 als federführender akademischer Lehrer beteiligt war, an 10 weiteren als Gutachter und Förderer und an 11 weiteren indirekt durch maßgebliche Beteiligung seiner Schüler. Mit anderen Worten hat Rudolf Henn direkt oder indirekt in den letzten 20 Jahren seines Lebens ungefähr zwei Drittel aller Habilitationen der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät maßgeblich beeinflußt. Entsprechend seinem Grundanliegen der verstärkten Anwendung mathematisch-quantitativer Verfahren in den Wirtschaftswissenschaften hatte nahezu die Hälfte dieser Habilitandinnen und Habilitanden in ihrem Erststudium Mathematik studiert.

Mit Rudolf Henn hat die deutsche Hochschule einen akademischen Lehrer verloren, der wie wenige visionär Entwicklungen in seinem Fach gesehen hat und darüber hinaus auch imstande war, dies in überzeugender Weise auf die Studierenden, seine Mitarbeiter und auf seine wissenschaftliche und wissenschaftsorientierte Umwelt zu übertragen. Mit Rudolf Henn haben wir einen ungewöhnlichen Menschen verloren.

Veröffentlichungen von Rudolf Henn

I. Zeitschriftenaufsätze in wissenschaftlichen Reihen

[1] Die Anwendung ökonometrischer Verfahren in der Unternehmensplanung (mit K. Köstner). Zeitschrift für Betriebswirtschaft **26** (1956) 700–710
[2] Modellbetrachtungen in der Wirtschaft. Zeitschrift f. d. ges. Staatswissenschaft **113** (1957) 193–204
[3] Aufgabenstellung der linearen Planungsrechnung. Zeitschrift f. d. ges. Staatswissenschaft **114** (1958) 16–27

[4] Strategische Spiele und unternehmerische Entscheidungen. Zeitschrift für Betriebswirtschaft **28** (1958) 277–286

[5] Über stochastische Entscheidungsprozesse in der Wirtschaft. Zeitschrift f. d. ges. Staatswissenschaft **115** (1959) 40–53

[6] Zur Theorie des Wirtschaftskreislaufs. Weltwirtschaftliches Archiv **82** (1959) 274–282

[7] Markovsche Ketten bei Wirtschaftsprozessen. Metrika **3** (1960) 61–73

[8] Die Behandlung betrieblicher Störungen und Stauungen durch Übergangswahrscheinlichkeiten. Schweiz. Zeitschrift f. Volkswirtschaft und Statistik **96** (1960) 35–44

[9] Lineare Methoden des Operations Research und makroökonomische Expansionsmodelle. Zeitschrift für Nationalökonomie **21** (1962) 297–310

[10] Expansionsgleichgewichte bei vollständiger Konkurrenz. Zeitschrift f. d. ges. Staatswissenschaft **118** (1962) 19–24

[11] Wirtschaftliche Anwendungsmöglichkeiten stochastischer Prozesse. Industrielle Organisation **12** (1962) 19–24

[12] Makroökonomische Expansionsmodelle: v. Neumannsche Interpretation einiger Wachstumsmodelle. Unternehmensforschung **6** (1962) 16–25

[13] Über einige Ansätze der Wachstumstheorie (mit K. Brandt). Zeitschrift f. Nationalökonomie **22** (1962) 233–260

[14] Gleichgewichte bei vollständiger Konkurrenz. Zeitschrift f. Nationalökonomie **22** (1963) 368–376

[15] Über ein Problem der Fließbandfertigung bei stochastischer Nachfrage. Unternehmensforschung **7** (1963) 59–64

[16] Sur un Problème de Stocks de M. Karlin. Revue Française de Recherche Opérationelle (1963) 266–273

[17] Verfahren des Operations Research und ihre Anwendung in der Wirtschaft. Operations Research-Verfahren I. Meisenheim (1963) 9–35

[18] Stochastische Entscheidungsaufgaben bei Investition und Lagerhaltung. Operations Research-Verfahren I. Meisenheim (1963) 151–181

[19] Über die Struktur ökonomischer Entscheidungssituationen. Zeitschrift f. Betriebswirtschaft **34** (1964) 505–515

[20] Möglichkeiten, Ziele und Grenzen der Anwendung formaler Methoden in den Wirtschaftswissenschaften. Die Unternehmung (1964) 76–81

[21] Fließbandfertigung und Lagerhaltung bei mehreren Gütern. Unternehmensforschung **9** (1965) 43–47

[22] Bemerkungen zur Simplexmethode (mit K. Förstner). Operations Research-Verfahren II. Meisenheim (1965)

[23] Markovsche Ketten bei Lagerhaltung. Statistische Hefte, 7. Jahrgang (1966) 138–147

[24] Fließbandfertigung und Lagerhaltung bei mehreren Gütern. The Internationel Journal of Production Research, Vol. **5** (1966) 149–154

[25] Applications of Graphs in Economic and Social Life. Operations Research-Verfahren III. Meisenheim (1967)

[26] Kostengraphen und Projektplanung. Zeitschrift f.d. ges. Staatswissenschaften **128** (1968) 257–279

[27] Graphen und Relationen. Operations Research-Verfahren V. Meisenheim (1968) 445–452

[28] Fragestellungen und Methoden der modernen Unternehmensführung. Zeitschrift f. Betriebswirtschaft **39** (1969) 281–300

[29] Spieltheorie und Anwendungen in der Wirtschaft. Wirtschaftswissenschaftliches Studium, Heft 12, Vahlen-Verlag, München und Frankfurt 1972

[30] Über einige Anwendungen der semiinfiniten Optimierung (mit P. Kischka). Zeitschrift für Operations Research **20** (1976) 39–58

[31] Wiederkehreigenschaften in mengenwertigen dynamischen Systemen (mit P. Kischka). Methods of Operations Research **42** (1981) 115–122

[32] Neuere Entwicklungen in der Theorie der Geldnachfrage (mit G. Nakhaeizadeh). Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 206, 1989, 395–406

II. Bücher

[33] Die Auswertung wirtschaftlicher Beobachtungen. Meisenheim 1955
[34] Über dynamische Wirtschaftsmodelle. Stuttgart 1957
[35] Dynamische Produktionstheorie und lineare Programmierung (mit K. Förstner). Meisenheim 1957
[36] Lineare Entscheidungsmodelle (mit W. Kromphardt und K. Förstner). Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962
[37] Einführung in die Unternehmensforschung I (mit H.P. Künzi). Heidelberger Taschenbücher, Bd. 38, Springer-Verlag 1968
[38] Einführung in die Unternehmensforschung II (mit H.P. Künzi). Heidelberger Taschenbücher, Bd. 39, Springer-Verlag 1968
[39] Konsum- und Produktionstheorie I (mit O. Opitz). Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems Nr. 25, Springer-Verlag 1970
[40] Dynamische Produktionstheorie und lineare Programmierung (mit K. Förstner). 2. Aufl., Meisenheim 1970
[41] Konsum- und Produktionstheorie II (mit O. Opitz). Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems Nr. 71, Springer-Verlag 1972
[42] Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit G. Bamberg und K. Förstner). Meisenheim 1973
[43] Elementare Wachstumsmodelle. Verlag Anton Hain, Meisenheim 1977
[44] Statistik: Theorie und Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften (mit P. Kischka). Athenäum Verlag, Königstein, Teil I, 1979, 259 S.
[45] Statistik: Theorie und Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften (mit P. Kischka). Athenäum Verlag, Königstein, Teil II, 1981, 230 S.
[46] Beschäftigung und Technologietransfer (mit L. Späth, H. Lübbe, G. Krüger). Athenäum Verlag, Königstein 1985
[47] Employment and the Transfer of Technology (mit L. Späth, H. Lübbe, G. Krüger). Springer-Verlag 1986

III. Herausgebertätigkeit

[48] Technik - Wirtschaft - Politik in Aufsätzen von W.G. Waffenschmidt (mit A. Angermann und K. Brandt). Ludwigshafen 1962
[49] Production Theory (mit W. Eichhorn, O. Opitz, R.W. Shephard). Springer-Verlag 1974
[50] Mathematical Economics and Game Theory. Essays in Honor of Oskar Morgenstern (mit O. Moeschlin). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag 1977
[51] Theory and Applications of Economic Indices (mit W. Eichhorn, O. Opitz, R.W. Shephard). Physica-Verlag 1978
[52] Optimization and Operations Research (mit B. Korte und W. Oettli). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 157. Springer-Verlag 1978
[53] Game Theory and Related Topics (mit K. Fan, J. Los, O. Moeschlin, D. Pallaschke, B. Peleg, D. Plachky, S. Rolewicz, D. Schmeidler, E. Sperner). New York, Oxford 1979
[54] Quantitative Wirtschafts- und Unternehmensforschung (mit B. Schips und P. Stähly). Berlin-Heidelberg-New York 1980
[55] Geld, Banken und Versicherungen, Band I und II (mit H. Göppl). Beiträge zum 1.Symposium Geld, Banken und Versicherungen an der Universität Karlsruhe, Königstein 1981
[56] Economic Theory of Natural Resources (mit W. Eichhorn, K. Neumann, R.W. Shephard). Physica-Verlag 1982
[57] Quantitative Studies on Production and Prices (mit W. Eichhorn, K. Neumann, R.W. Shephard). Physica-Verlag 1983
[58] Mitherausgeber der Methods of Operations Research. Athenäum Verlag, Königstein und Oelgeschlager, Gunn & Hain, Cambridge (Mass.)
[59] Mitherausgeber der Mathematical Systems in Economics. Athenäum-Verlag, Königstein und Oelgeschlager, Gunn & Hain, Cambridge (Mass.)

[60] Mitherausgeber der Athenäum Taschenbücher. Athenäum Verlag, Königstein
[61] Mitherausgeber der Reihe Ökonometrie und Operations Research/Econometrics and Operations Research. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

IV. Beiträge zu Sammelbänden

[62] Die Gewinnung statischer Kennlinien aus dem Beobachtungsmaterial. In: Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge im Vergleich zu Regelungsvorgänge in der Technik (Hrsg. Geyer, Oppelt). München 1957, 86–97
[63] Dynamische Aspekte der Lohntheorie. In: Festschrift zum 70. Geburtstag von W.G. Waffenschmidt (Hrsg. Karl Brandt). Meisenheim 1958, 178–196
[64] Mathematical Appendix zu: W.A. Jöhr: Full employment and monetary stability. An application of indifference curves to the solution of economic policy problems. In: Money, growth and methodology and other essays, in honor of J. Ackermann (Hrsg. H. Hegeland). Lund 1961, 97–102
[65] Fließbandfertigung und Lagerhaltung bei stochastischer Nachfrage. In: Operations Research II (Coordinator V.F. Serbanescu). IBM European Education Centre. Blaricum-Holland 1962
[66] Expansionsmodelle vom v. Neumannschen Typ. In: Optimales Wachstum und optimale Standortverteilung (Hrsg. E. Schneider). Berlin 1962, 9–46
[67] Das Testen von Hypothesen in der Marktforschung. In: Zukunftsaufgaben in Wirtschaft und Gesellschaft. Festschrift zur Einweihung der neuen Gebäude der Hochschule St.Gallen für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, Zürich u. St. Gallen 1963, 159–167
[68] Verfahren zur Bestimmung der Kaufkraftparitäten von Währungen. In: Die Statistik in der Wirtschaftsforschung (Hrsg. H. Strecker, W.R. Bihn). Berlin 1967, 285–301
[69] Unternehmensforschung. In: Geschichte und Zukunft (Hrsg. A. Diemer). Meisenheim 1967
[70] Graphenalgorithmen in der Unternehmensforschung. In: Beiträge zur Unternehmensforschung (Hrsg. G. Menges). Physica-Verlag 1969
[71] Entscheidungshilfen der Unternehmensführung. In: Festschrift für W.G. Waffenschmidt. Meisenheim 1972, 76–100
[72] Dynamische Aspekte der Aktivitätsanalyse (mit O. Opitz). In: Proceedings in Operations Research 1971 (Hrsg. A. Jaeger et al.). Würzburg 1972
[73] On Efficient Points of a Stochastic Production Correspondences (mit E. Krug). In: Production Theory, Proceedings of an International Seminar. Held at the University of Karlsruhe May-July 1973 (Hrsg. W. Eichhorn, R. Henn, O. Opitz, R.W. Shepard). Berlin-Heidelberg-New York 1974, 221–229
[74] Neuere Entwicklungen im Operations Research. In: Proceedings in Operations Research 3 (Hrsg. P. Gessner, R. Henn, Steinecke, Todt). Würzburg-Wien 1974, 13–24
[75] The Scientific Work of Oskar Morgenstern. In. Mathematical Economics and Game Theory (mit O. Moeschlin). Essays in Honor of Oskar Morgenstern (Hrsg. R. Henn und O. Moeschlin). Berlin-Heidelberg-New York 1977, 1–9
[76] Zum Domarschen Wachstumsmodell in von Neumannscher Fassung. In: Quantitative Wirtschaftsforschung (Hrsg. H. Albach, E. Helmstädter, R. Henn). Tübingen 1977, 280–285
[77] Zur Anwendung spieltheoretischer Methoden in der Entscheidungstheorie (mit P. Kischka). In: Wirtschaftspolitik in Theorie und Praxis (Hrsg. E. Mändle, A. Möller, F. Voigt). Wiesbaden 1979
[78] Nichtwalrasianische Gleichgewichte. In: Quantitative Wirtschafts- und Unternehmensforschung (Hrsg. R. Henn, B. Schips, P. Stähly). Berlin-Heidelberg-New York 1980, 217–231
[79] Der Einfluß des Kreditpotentials auf makroökonomische Gleichgewichte bei Rationierung. In: Unternehmensplanung (Hrsg. K. Brockhoff und W. Krelle). Berlin-Heidelberg-New York 1981, 159–169
[80] Die Einflüsse des ausländischen Preisniveaus auf die heimische Inflation und Beschäftigung. In: Geld, Banken und Versicherungen, Band I (Hrsg. H. Göppl und R. Henn). Königstein 1981, 188–193
[81] Keynesianische Gleichgewichte bei zinsabhängigem Geldangebot. In: Struktur und Dynamik der Wirtschaft (Hrsg. Enke, Köhler, Schulz). Freiburg 1983, 331–338

[82] Nationale Geldpolitik, internationale Währungszusammenhänge und makroökonomische Portfoliotheorie (mit A. Karmann). In: Contributions to Production Theory, Natural Resources and Related Topics (dedicated to W. Eichhorn) (Hrsg. R. Henn und D. Pallaschke). Athenäum Verlag 1984, 271–283
[83] Methoden der Messung der Schattenwirtschaft (mit A. Karmann). In: Contributions to Econometrics and Statistics Today (Hrsg. R. Schneeweiß und H. Strecker). Springer-Verlag 1984, 101–112
[84] Tantonnement-Processes with Set-Valued Excess-Demand (mit P. Kischka). In: Operations Research and Economic Theory (Hrsg. H. Hauptmann, W. Krelle, K.C. Mosler). Springer-Verlag 1984, 15–22
[85] Entwicklungen in der Zinstheorie. In: Aspekte bankwirtschaftlicher Forschung und Praxis (Hrsg. H. Guthardt, R. Henn, A. Kremer, D. Pallaschke). Knapp-Verlag, Frankfurt a.M. 1985, 37–54
[86] Konzepte wirtschaftspolitischer Steuerung einer industriellen Gesellschaft. In: R. Henn, W.F. Schickinger (Hrsg.): Staat, Wirtschaft, Assekuranz und Wissenschaft. Verlag Versicherungswissenschaft, Karlsruhe 1986
[87] Characterization of Classical Systems by C*-Algebras (mit D. Pallaschke). Festschrift zum 100. Geburtstag von Otto Haupt, 1987
[88] On the Use of Predictive Distributions in Portfolio Theory (mit P. Kischka). Festschrift für Walther Eberl, 1987
[89] Der Modellbegriff in den Wirtschaftswissenschaften. In: M. Borchert, U. Fehl, P. Oberender (Hrsg.): Markt und Wettbewerb, Beiträge zur Wirtschaftspolitik, Band 47. Paul Haupt Verlag, Bern 1987
[90] Beschäftigungswirkungen und gesamtwirtschaftliches Wachstum durch technologiepolitische Fördermaßnahmen bei Mengenrationierung in einem multi-sektoralen Modell. In: R. Henn (Hrsg.): Technologie, Wachstum und Beschäftigung. Festschrift für Lothar Späth. Springer-Verlag 1987
[91] Vergleich verschiedener Versionen der permanenten Einkommenshypothese unter der Annahme adaptiver und rationaler Erwartungen (mit G. Nakhaeizadeh). In: W. Franz, W. Gaab, J. Wolters (Hrsg.): Theoretische und angewandte Wirtschaftsforschung. Springer-Verlag 1988, 155–165
[92] Die stochastische Lebenszyklushypothese und Neutralität der Fiskalpolitik (mit G. Nakhaeizadeh). In: P. Kall (Hrsg.): Quantitative Methoden in den Wirtschaftswissenschaften, Stand und Entwicklungstendenzen. Springer-Verlag 1989

V. Sonstiges

[93] Ökonometrie. Artikel im Handwörterbuch der Betriebswirtschaft, 3. Band, 1959, Spalte 4218–4228
[94] Mathematische Strukturlehre des Wirtschaftskreislaufs (Besprechungsaufsatz). Weltwirtschaftliches Archiv 83 (1959) 57–65
[95] Eine Einführung in die Theorie der Spiele (Besprechungsaufsatz). Schweiz. Zeitschrift f. Volkswirtschaft und Statistik 96 (1960) 459–464
[96] Ökonometrie. Artikel im Handwörterbuch der Sozialwissenschaften, 38. Lieferung, (1961) 51–59
[97] Stochastische Prozesse. Betriebswirtschaftliche Beilage der NZZ Nr. 558/559 (13.3.1962)
[98] Walter Georg Waffenschmidt 75 Jahre. Zeitschrift f. Betriebswirtschaft 32 (1962). 117–119
[99] Einleitung zu Operations Research-Verfahren II. Meisenheim 1965
[100] Bericht über das wirtschaftswissenschaftliche Studium in den angelsächsichen Ländern und Vorschläge für eine Reform des wirtschaftswissenschaftlichen Studiums in Deutschland. Teil I: England. Manuskript Institut für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften der Universität Karlsruhe 1966
[101] Bericht über das wirtschaftswissenschaftliche Studium in den angelsächsischen Ländern. Teil II. USA. Manuskript Institut für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften der Universität Karlsruhe 1966
[102] Einleitung Operations Research-Verfahren IV. Meisenheim 1967
[103] Stichprobenverfahren. Vervielfältigte Vorlesungsausarbeitung. Karlsruhe, Saarbrücken 1967

[104] Graphentheorie. In: Management Enzyklopädie, Bd. 3, München 1970, 282–286
[105] Ökonometrie (mit G. Bamberg). In: Wirtschaftslexikon (Hrsg. R.Sellien, H. Sellien). 9. Aufl., 1975, Sp. 562–570
[106] Ökonometrie (mit G. Bamberg). In: Gablers Volkswirtschaftslexikon. Wiesbaden 1981

Von Rudolf Henn betreute Dissertationen

Schickinger, W.F.	1969	Die Kapitallenkungsfunktionen der Lebensversicherung in der BRD
Murchland, J.D.	1970	A fixed matrix method for all shortest distances in a directed graph and for the inverse problem
Steinmetz, V.	1971	Verallgemeinerte Technologien bei Wachstumsmodellen von v. Neumannschem Typ
Emrich, O.	1971	Algorithmen zur Bestimmung optimaler Stopregeln bei endlichen Markoff-Ketten
Seele, C.A.	1973	Vorbeugende Instandhaltungspolitiken bei variabler Effizienz der Instandhaltungsaktionen
Bol, G.	1973	Effizienz bei mengenwertigen Produktionsfunktionen und linearer Präferenz
Krug, E.	1975	Stochastische Produktionskorrespondenzen
Winterberg, Ch.	1976	Die Mehrwerttheorie und ihre Anwendung in historisch und technologisch sich unterscheidenden Wirtschaftssystemen
Ballarini, C.	1976	Über Konsum in disaggregierten Ökonomien
Kogelschatz, H.	1976	Input-Output-Theoretische Untersuchungen über Strukturänderungen und Wachstumsgleichgewichte
Radermacher, F.J.	1976	Kapazitätsoptimierung in (stochastischen) Netzplänen
Lösch, M.	1979	Schätz- und Identifikationsproblematik CL/D- und Geld-Spezifizierter linearer ökonomischer Modelle
Karmann, A.	1979	Kompetitive Gleichgewichte in räumlichen Ökonomien
Hieber, G.	1980	On optimal growth paths with variable technology
Lange, W.	1980	Simultane Schätzverfahren für in Variablen und Koeffizienten nichtlineare interdependente ökonometrische Modelle
Ehemann, K.	1981	Entscheidungen bei partieller Information
Haas, P.	1981	Zustands- und Parameterschätzung in ökonometrischen Modellen mit Hilfe von linearen Filter-Methoden
Nakhaeizadah, G.	1984	Überprüfung der permanenten Einkommenshypothese mit Hilfe der Bayes-Statistik
Lehmann-Waffenschmidt, M.	1985	Gleichgewichtspfade für Ökonomien mit variierenden Daten
Renz, M.	1986	Anwendung des Zweikreissystems auf die versicherungstechnischen Jahresabschlußarbeiten und das interne Kontrollsystem eines Lebensversicherungsunternehmens
Jun-Hong Kim	1986	Das gemischte und ganzzahlige Optimierungsproblem und seine Anwendung

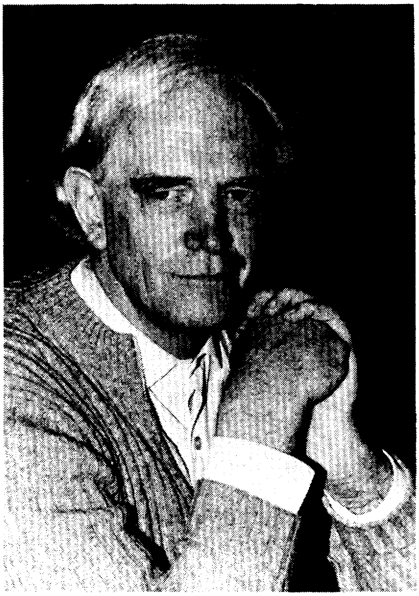
Prof. Dr. B. Rauhut
Institut für Statistik und
Wirtschaftsmathematik
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule
Wüllnerstr. 3
52062 Aachen

(*Eingegangen 12. 6. 1992*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 166–180
AMS subject classification: 01 A 70

Ernst Witt 1911–1991

I. Kersten, Bielefeld



Ernst Witt wurde am 26. Juni 1911 in Augustenburg auf der damals deutschen Ostseeinsel Alsen geboren während eines Heimaturlaubes seiner Eltern, die als Missionare der Liebenzeller Mission in China tätig waren. So verbrachte er die ersten neun Jahre seines Lebens in China, wo er neben deutsch auch fließend chinesisch sprechen lernte. Den ersten Unterricht erhielt er bei seinem Vater, der nicht nur ein hervorragender Theologe war, sondern sich auch auf den Gebieten der Geometrie und Astronomie umfassende Kenntnisse angeeignet hatte. Als der Vater das Interesse seines Sohnes an Zahlen und schwierigen Rechenaufgaben bemerkte, förderte er ihn besonders im Rechnen und lehrte ihn z. B. das Siebverfahren für Primzahlen und das Ziehen von Quadratwurzeln. Im Frühjahr 1920 schickten ihn seine Eltern nach Deutschland. Er kam im südbadischen Müllheim in ein Kinderheim der Mission, das von seinem Onkel geleitet wurde. Nachdem er in der Realschule in Müllheim die mittlere Reife erlangt hatte, besuchte er die Rotteck-Oberrealschule in Freiburg. Dort erkannte sein Klassenlehrer, Karl Öttinger, die außergewöhnliche mathematische Begabung von Ernst Witt. Von diesem Lehrer, der ein ausgezeichneter Mathematiker und Pädagoge war, wurde er so gefördert, daß er auf der Universität in den ersten beiden Semestern nichts Neues hörte, wie er seinem Bruder noch nach Jahrzehnten versicherte.[1]) Ab 1929 studierte Ernst Witt zunächst in Freiburg und dann in Göttingen Mathematik, Physik und Astronomie. 1933 promovierte er in Göttingen über den Riemann-Rochschen Satz und Zeta-Funktion im Hyperkomplexen (cf. [1934A]). Das Thema hatte Emmy Noether gestellt, Referent war Herglotz, und die mündlichen Prüfer waren Herglotz, Weyl und Pohl. 1934 wurde Witt Assistent bei Hasse in Göttingen. Er habilitierte sich dort 1936 mit einer Schrift über quadratische Formen (cf. [1937A]) und leitete von 1933 bis 1938 eine Arbeitsgemeinschaft, aus der sieben bedeutende Arbeiten hervorgegangen sind (cf. J. Reine Angew. Math. Bd. 176, Heft 3). Vom Sommersemester 1938 an nahm er in Hamburg – zunächst vertretungsweise – die Aufgaben von Emil Artin wahr, der ihn schon damals sehr schätzte. Zum 1. September 1939 wurde Witt dann zum Professor für Mathematik auf den Lehrstuhl von Artin berufen. 1940 heiratete er seine ehemalige Göttinger Kommilitonin Dr. Erna Bannow; sie bekamen zwei Töchter.

Im Frühjahr 1933 war Witt im Alter von 21 Jahren in die NSDAP und in die SA eingetreten. Dies ist ihm immer wieder vorgeworfen worden (und hat sein ganzes späteres Leben überschattet), obwohl er die erste Möglichkeit ergriffen hatte, wenigstens der SA den Rücken zu kehren, nämlich 1938, als er nach Hamburg zog. Ein Parteiaustritt wäre ohne schwerwiegende Folgen nicht möglich gewesen. 1941 wurde er zum Militärdienst eingezogen. Er kam zunächst nach Rußland, wurde aber 1942 aus gesundheitlichen Gründen wieder nach Deutschland geschickt. Bis Kriegsende war er dann in Berlin im Dechiffrier-Dienst eingesetzt. Danach kehrte er nach Hamburg zurück. Dort wurde er im Herbst 1945 von der Britischen Militärregierung vom Dienst suspendiert und dann im April 1947 vollständig rehabilitiert und wieder eingestellt. Er erhielt seine alte Stelle wieder, die aber seit September 1946 schon Zassenhaus innehatte und die somit (bis zum Weggang von Zassenhaus 1950) doppelt besetzt war. Wie Witt von seinen Kollegen damals eingeschätzt wurde, möchte ich mit einem Zitat belegen. Im Jahre 1947 war er in Hamburg einer der Kandidaten für die Nachfolge von Erich Hecke (dessen Nachfolger dann Deuring wurde), und der damalige Dekan der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät, der Astronom Otto Heckmann, begründete den Vorschlag Witt am 15. August 1947 in einem Schreiben an die zuständige Behörde folgendermaßen:

> „Witt hat sich zunächst einseitig und mit ganzer Kraft auf die Algebra konzentriert und darin schon in ganz jungen Jahren in verblüffenden Vereinfachungen bekannter Beweise und in der Auffindung neuer Ergebnisse solche Erfolge erzielt, daß Deuring über ihn vor

---

[1]) Die hier geschilderten Ereignisse und Daten aus der Kindheit und Jugend von Ernst Witt habe ich einem Abdruck der von seinem Bruder Otto Witt, Pfarrer i. R., am 9. 7. 1991 gehaltenen Grabrede „Abschied von Prof. Dr. Ernst Witt“ entnommen.

> kurzem mit Berechtigung schreiben konnte: ‚Witt steckt alle jüngeren Mathematiker in die Tasche'. Durch die bitteren Erfahrungen von Krieg und Nachkrieg ist Witt persönlich gereift, hat auch energisch den Kreis seiner Kenntnisse auf das Gesamtgebiet der Mathematik erweitert und versucht, sich in die neuere Physik einzuarbeiten. Menschlich ist Witt ein treuer, unbedingt zuverlässiger und zurückhaltender Kollege. Gerade seine jugendliche Einsatzbereitschaft und Opferfreudigkeit haben ihn 1933 in Partei und SA gebracht, aber insbesondere in der SA sehr früh zu Enttäuschungen geführt, die ihn bewogen haben, seit er nach Hamburg kam, sich am SA-Dienst nicht mehr zu beteiligen. Eingehende Untersuchung seiner Mitgliedschaft bei der Partei hat erwiesen, daß er charakterlich völlig einwandfrei ist und sich stets gegen Ausschreitungen wie die Judenverfolgung gewandt hat. Witts Lehrbegabung wird wegen seiner trefflichen Vorträge und seiner freundschaftlichen Zusammenarbeit mit Studenten und Kollegen von allen hoch geschätzt."

Seit 1947 war Witt, nur unterbrochen durch einige Auslandsaufenthalte in Madrid, Rom, Barcelona, Istanbul, Ankara, Princeton, St. John's (Neufundland), Hamilton und Stony Brook, bis zu seiner Emeritierung am 30. September 1979 am Mathematischen Seminar in Hamburg tätig. 1978 wurde er zum ordentlichen Mitglied der Göttinger Akademie der Wissenschaften gewählt.

Ernst Witt starb am 3. Juli 1991, eine Woche nach seinem 80. Geburtstag. Mit ihm verloren wir eine Persönlichkeit, die durch Wahrhaftigkeit, Humor, Originalität des Denkens und durch eine außergewöhnliche mathematische Begabung ausgezeichnet war. Er selbst hat seine Person stets hinter seine Mathematik zurücktreten lassen und schätzte es nicht, wenn viele Worte um ihn gemacht wurden. Er mochte auf Fernstehende und Studenten, die ihn nicht weiter kannten, verschlossen und gelegentlich sogar schroff wirken, aber sein Wohlwollen und seine Hilfsbereitschaft haben viele gespürt, wie auch seine Geradlinigkeit und seine Verläßlichkeit. Sympathie und Freundschaft bedeuteten ihm viel; dies hat er z. B. in originellen Worten in den „Erinnerungen an Gabriel Dirac" (cf. [1989]) deutlich werden lassen. Die mathematischen Arbeiten von Ernst Witt enthalten eine Fülle von fundamentalen Resultaten und begründeten viele neue Forschungsrichtungen. Mit seinen mathematischen Ideen war er häufig seiner Zeit weit voraus, und die Bedeutung dessen, was er gedacht und geschaffen hat, wurde oft erst später erkannt. Er war auch einer der ersten, die gesehen haben, daß Rechenmaschinen und später moderne Computer auch für die Erforschung der sogenannten Reinen Mathematik nützlich und wichtig sein können. Wie seine Arbeiten, so waren auch seine Vorlesungen und Seminare geprägt durch sein Streben nach Klarheit, Kürze und Eleganz. Ab 1948 gab es in Hamburg die Arbeitsgemeinschaft Deuring/Witt, an der unter anderen Banaschewski, Legrady und Leptin teilnahmen. Hieraus wurde 1951 nach Deurings Weggang die Arbeitsgemeinschaft Hasse/Witt, zu der dann auch Hasse-Schüler wie Jehne, Knobloch, Leopoldt und Roquette gehörten. Im Wintersemester 1955/56 gründete Witt das Seminar über Topologie, das er noch bis 1981 beibehielt. In diesem Seminar, an dem auch immer wieder Physiker (z. B. Ehlers und Kundt) teilnahmen, wurden neue Ergebnisse und aktuelle Fragestellungen aus nahezu allen Teilen der Mathematik besprochen (ein topologischer Aspekt fand sich dann stets). Viele seiner Schüler und Schülerinnen sind durch die von ihm vermittelte

Denkweise in ihrem mathematischen Stil und Geschmack entscheidend beeinflußt worden und denken in großer Dankbarkeit an ihn zurück; ich selbst bin sehr stolz darauf, eine Schülerin von Witt zu sein. Im folgenden gebe ich – in etwas überarbeiteter Form – den Inhalt eines Vortrages wieder, den ich in Hamburg am 7. Dezember 1991 gehalten habe im Rahmen eines Kolloquiums zum Gedenken an Prof. Dr. Ernst Witt.

Zum Werk von Ernst Witt

Es gibt kaum einen Mathematiker in der Welt, der nicht den Namen Witt kennt. Die meisten verbinden damit den Wittring der quadratischen Formen oder auch den Ring der Wittvektoren. Doch dies sind nur zwei unter den vielen mathematischen Objekten, die er gefunden oder erforscht hat. Ich möchte Ihnen hier einen Eindruck vermitteln von der Bedeutung und Vielfalt des Werkes von Ernst Witt.

Quadratische Formen
(cf. [1937A], [1954A, B] und [1957])

Witt erkannte als erster, daß geometrische Vorstellungen grundsätzliche Bedeutung für den Aufbau der Theorie der quadratischen Formen haben. So entspricht einer quadratischen Form in der geometrischen Sprache ein Vektorraum mit einem inneren Produkt. Der Isomorphie von Formen entspricht die Isometrie von Räumen, Diagonalisierbarkeit einer Form bedeutet die Existenz einer Orthogonalbasis u. s. w. Hervorheben möchte ich nun die folgenden Resultate aus der grundlegenden Arbeit [1937A]. Dabei sind q, q_1 und q_2 reguläre quadratische Formen über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$.

Wittscher Kürzungssatz. $q \perp q_1 \cong q \perp q_2$ impliziert $q_1 \cong q_2$.
Dieser Kürzungssatz ist äquivalent zu dem in geometrischer Sprache formulierten *Satz von Witt*: Eine Isometrie von Teilräumen läßt sich zu einem metrischen Automorphismus des ganzen Raumes fortsetzen. (Eine allgemeinere Formulierung des Satzes von Witt, die unter anderem die Charakteristik 2 berücksichtigt, ist in der Arbeit [1957] angekündigt und steht in der ersten Auflage des Buches von H. Lenz „Grundlagen der Elementarmathematik“, 1961.)

Wittzerlegung. Es gibt zu q eine ganze Zahl $r \geqslant 0$, den sog. *Wittindex* von q, derart, daß q eine Zerlegung $q \cong rh \perp q_{an}$ besitzt mit r Kopien einer 2-dimensionalen hyperbolischen Form h und einer anisotropen Form q_{an}. Die Form q_{an} ist hierbei nach dem Wittschen Kürzungssatz bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, und „anisotrop“ bedeutet, daß sie die Null nur trivial darstellt.

Wittring. Witt nannte zwei Formen q_1 und q_2 *ähnlich*, wenn ihre anisotropen Bestandteile isomorph sind, und zeigte, daß die Klassen ähnlicher Formen einen kommutativen Ring $W(K)$ bilden. Addition und Multiplikation werden dabei durch die orthogonale Summe $\perp$ und das Tensorprodukt induziert. Mit dieser wohl ersten Konstruktion eines „Grothendieckringes" war Witt seiner Zeit, die hauptsächlich an arithmetischen Anwendungen interessiert war, weit voraus. Erst in den 60er Jahren, beginnend mit den Arbeiten von Pfister, kristallisierte sich die fundamentale Bedeutung des Wittringes heraus. Heute ist der Wittring der quadratischen Formen Forschungsgegenstand von Mathematikern in aller Welt. Die Pfisterschen Resultate wurden von Witt wesentlich vereinfacht, indem er den Begriff einer *runden* quadratischen Form einführte. Hierüber hat Witt verschiedentlich vorgetragen. Seine Darstellung der Pfisterschen Theorie ist in dem Buch von F. Lorenz über quadratische Formen (Springer Lecture Notes 130, 1970) wiedergegeben.

Invarianten. Witt ordnete – in Verallgemeinerung einer Konstruktion von Clifford – jeder Diagonalform $q=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ eine Algebra $C(q)$ zu und zeigte, daß zu isomorphen Formen isomorphe Algebren gehören. Er erkannte, daß die Algebra $S(q):=C(q-\sum_{i=1}^{n} x_{-i}^2)$ einfach und zentral über K ist. Mit $C(q)$ ist auch $S(q)$ eine Invariante der Isomorphieklasse von q. Ferner bewies er, daß S und die Diskriminante ein volles Invariantensystem für Isomorphie quadratischer Formen der Dimension 1, 2 oder 3 bilden. Weitere Invarianten wurden in jüngster Zeit z. B. von Rost und Merkurjev-Suslin studiert.

Vermutung [1937A, S. 35]. Eine anisotrope Form bleibt anisotrop bei Grundkörpererweiterung ungeraden Grades. Ein Beweis für seine Vermutung wurde Witt schon 1937 von E. Artin mitgeteilt, vgl. [1957]. Bekannt ist dieser Satz aber heute als Theorem von Springer, da Springer 1952 unabhängig denselben Beweis fand und veröffentlichte (cf. C. R. Acad. Sci. 234, 1952). Eine Verallgemeinerung des Satzes in der Sprache der algebraischen Gruppen wurde von Bayer-Lenstra (Amer. J. Math. 112, 1990) bewiesen.

Klassenkörpertheorie
(cf. [1934A], [1935A, C], [1936B] und [1954D])

Emmy Noether stellte Witt die folgende Frage: Kann man Käthe Heys Dissertation „Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen" (Hamburg 1929) auf Funktionenkörper übertragen, um damit das Analogon des Riemann-Rochschen Satzes im Hyperkomplexen zu finden? Die Antwort von Witt [1934A] lautete: Ja, aber die Untersuchung verläuft in umgekehrter Richtung. Witt formulierte und bewies zunächst den Riemann-Rochschen Satz in großer Allgemeinheit, nämlich für zentrale einfache Algebren, deren Zentrum k ein algebraischer Funktionenkörper (in einer Variablen) mit vollkommenem Konstantenkörper Ω ist. Das wesentlich Neue dabei war die Konstruktion eines invarianten Gruppoids der einseitigen Divisoren. Mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes übertrug er dann die Arbeit von Käthe Hey. Vorausgesetzt war von da an, daß der Konstantenkörper Ω endlich ist. In Anlehnung an die Arbeit von K. Hey und eine Arbeit von F. K. Schmidt (Math. Z. 33, 1931) führte er die Z-Funktion eines über k

endlich dimensionalen zentralen Schiefkörpers ein und bewies ihre Funktionalgleichung. Durch Vergleich der Z-Funktion mit der ζ-Funktion des Zentrums erhielt er den Satz, daß jeder echte Schiefkörper an mindestens 2 Stellen verzweigt ist. Dieser impliziert das sogenannte Hasse-Prinzip für Algebren: Eine überall lokal zerfallende Algebra zerfällt global. Für den Körper $k = \mathbb{Q}(x, \sqrt{ax^2+b})$ (bei dem der Konstantenkörper nicht endlich ist) hat Witt in [1935A] ein Gegenbeispiel zu diesem Hasse-Prinzip angegeben. Im letzten Abschnitt der Arbeit [1934A] bestimmte er dann noch die Struktur der Brauergruppe von k, wobei seine Resultate analog denen waren, die Hasse (Math. Annalen 107, 1933) für Zahlkörper erhalten hatte.

Den Satz über die Existenz abelscher Körper zu vorgegebener Divisorengruppe bewies Witt für Funktionenkörper in der Arbeit [1935C]. Als Nebenresultat erhielt er dabei (in heutiger Sprache formuliert), daß die Galois-Kohomologiegruppen $H^n(G, K^+)$ für $n = 1,2$ trivial sind; hierbei ist G die Galoisgruppe einer endlich galoisschen Körpererweiterung K über einem beliebigen Grundkörper. Ferner gab er einen neuen kurzen Beweis für den Noetherschen Satz $H^1(G, K^*) = 1$ an, wobei K^* die multiplikative Gruppe $K \setminus 0$ bezeichnet. (Für zyklisches G ist dies der berühmte Satz 90 von Hilbert.) Auch die n-ten Galois-Kohomologiegruppen für $n > 2$ hat Witt bereits damals gekannt und gewußt, daß sie für die additive Gruppe K^+ alle verschwinden (cf. O. Teichmüller, Gesammelte Abh., S. 551). Für die Körperkonstruktion beim Beweis des Existenzsatzes benutzte Witt in [1935C] Gleichungen der Form $x^n = a$, und dies führte ihn dazu, die algebraische Theorie der Kummerschen Körper neu zu begründen; das sind die abelschen Körper vom Exponenten n, wenn die n-ten Einheitswurzeln im Grundkörper liegen. Völlig analog erhielt er dann – nur durch Benutzung einer additiven Schreibweise – die abelschen Körper vom Primzahlexponenten p bei Charakteristik p. Die dabei relevanten Gleichungen sind durch die Artin-Schreiersche Normalform $x^p - x = b$ gegeben. Hierauf aufbauend und unter Benutzung der oben angesprochenen Beziehung $H^n(G, K^+) = 0$ für $n = 1,2$ gab Witt in der Arbeit [1936A] eine Konstruktion aller galoisschen Körper über einem festen Grundkörper der Charakteristik p zu vorgegebener p-Gruppe G.

Die Funktionalgleichung für L-Reihen übertrug Witt im März 1936 auf Funktionenkörper. Diese Arbeit hat er auf Bitte von E. Artin nicht veröffentlicht, um die Dissertation von J. Weissinger (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 12, 1938) nicht zu gefährden. Der Wittsche Beweisansatz ging später mit ein bei einem weiteren Beweis dieser Funktionalgleichung von H. L. Schmid und Teichmüller (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 15, 1947).

In der Arbeit [1954D] gab Witt einen relativ kurzen Beweis des Hauptidealsatzes der Klassenkörpertheorie.

Reelle algebraische Funktionenkörper
(cf. [1934B] und [1937A])

Unter Verwendung von Abelschen Integralen zeigte Witt in [1934B] für einen reellen algebraischen Funktionenkörper k (in einer Variablen) u. a. folgendes: i) Ist eine Funktion des Körpers k eine Summe von Quadraten, so ist sie auch schon Summe von zwei Quadraten. ii) Ist -1 eine Summe von Quadraten, so ist jede Funktion aus k Summe von zwei Quadraten. Indem er den ersten funktionentheoretischen Teil der Arbeit [1934B] in eine algebraische Sprache übersetzte, konnte er die Gültigkeit des oben erwähnten Hasse-Prinzips über k zeigen, und er erhielt eine Übersicht über alle endlich dimensionalen zentralen k-Schiefkörper. Damit ist die Struktur der Brauergruppe von k bekannt. Durch Anwendung dieser Ergebnisse konnte Witt dann in [1937A, S. 43f] auch die quadratischen Formen über k vollständig behandeln.

Wittvektoren (cf. [1937B, D] und [1958])

In der Arbeit [1937B] führte Witt eine neue Vektorrechnung ein für Vektoren $x=(x_0, x_1, \ldots)$ mit abzählbar vielen Komponenten. Sind die Komponenten alle aus einem Körper k der Primzahlcharakteristik p, so bilden die Vektoren einen Ring $W(k)$, der vollständig ist bezüglich der folgenden diskreten Bewertung von $W(k)$. Für einen Vektor x ist $|x| = p^{-r}$, wenn x_r die erste von 0 verschiedene Komponente des Vektors $x=(x_0, x_1, \ldots)$ ist. Satz 6 in [1937B] besagt:

Ist k ein vollkommener Körper der Charakteristik p, so ist $W(k)$ ein Integritätsbereich, dessen Quotientenkörper ein diskret bewerteter, vollständiger Körper der Charakteristik 0 ist. Das von p erzeugte Ideal in $W(k)$ ist ein Primideal, und der Restklassenkörper $W(k)/(p)$ ist isomorph zu k.

Auf Grund von Satz 6 erhielt Witt dann in sehr einfacher Weise eine Übersicht über alle diskret bewerteten, vollständigen Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p, vgl. die Sätze 8 und 10 in [1937B]. Diese Körper, die die Henselschen p-adischen Körper verallgemeinern, waren zuvor von Hasse, F. K. Schmidt und Teichmüller untersucht worden. In der Arbeit [1937C] gab Witt auch eine Übersicht über alle endlich dimensionalen Schiefkörper, deren Zentrum ein diskret bewerteter vollständiger Körper mit vollkommenem Restklassenkörper ist.

Mit Hilfe der Wittvektoren konnte Witt die zyklischen Körper und Algebren vom Grad p^n über einem Körper k der Charakteristik p sehr einfach beschreiben. Die zyklischen Körper werden jeweils erzeugt durch einen Vektor $\Theta=(\Theta_0, \ldots, \Theta_{n-1})$ der Länge n mit Komponenten in einem algebraischen Abschluß von k, welcher der Artin-Schreierschen Normalform

$$\Theta^p - \Theta = b$$

genügt. Man beachte hierbei, daß $b=(b_0, \ldots, b_{n-1})$ ein Vektor der Länge n mit Komponenten aus dem Grundkörper k ist, $\Theta^p=(\Theta_0^p, \ldots, \Theta_{n-1}^p)$ komponentenweise gebildet wird, aber die Subtraktion bezüglich der Wittschen Vektorrechnung auszuführen ist. Zuvor waren diese Körper von A. A. Albert (Bull. Amer. Math. Soc. 40, 1934) etwas mühsam schrittweise aufgebaut worden. Die zyklischen Algebren vom Grad p^n sind (ebenfalls analog zum Fall $n=1$) durch die Gleichungen $\Theta^p - \Theta = b$, $u^{p^n} = a \in k^*$, $u\Theta u^{-1} = \Theta + 1$ vollständig charakterisiert, cf. [1937B, §§ 5, 6].

H. L. Schmid und Witt benutzten die Wittvektoren in der Arbeit [1937D], um den folgenden Satz von Hasse und Witt [1936C] auf den Grad p^n für beliebiges $n \geqslant 1$ zu verallgemeinern: K sei ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k der Charakteristik p und habe das Geschlecht g. Dann ist die Anzahl der unabhängigen zyklischen unverzweigten Erweiterungskörper p-ten Grades über K gleich dem Rang γ einer K invariant zugeordneten g-reihigen Matrix über K. Schmid und Witt zeigten: Die maximale unverzweigte abelsche Erweiterung vom Exponenten p^n über K hat den Grad $p^{n\gamma}$, und ihre Galoisgruppe ist vom Typ $(p^n, p^n, \ldots, p^n)$. Darüber hinaus fanden sie: Ist speziell k absolut algebraisch, so hat auch die Gruppe der Divisorenklassen von K/k vom Exponenten p^n diesen Typ.

Die Arbeiten [1937B, C, D] wurden alle drei am 29. August 1936 eingereicht. Sie sind ein Teil von insgesamt sieben Arbeiten, die in einer von Witt geleiteten Arbeitsgemeinschaft in Göttingen entstanden sind.

In der Arbeit [1958] beschrieb Witt die p-primäre Komponente der Brauergruppe $Br(k)$ eines Körpers k der Charakteristik p mit Hilfe des Moduls der Pfaffschen Formen über dem Ring $W = \bigcup W(k^{p^{-n}})$. Die p-primäre Komponente ${}_pBr(k)$ besteht aus denjenigen Algebrenklassen in $Br(k)$, die von der vollkommenen Hülle $\Omega = \bigcup k^{p^{-n}}$ zerfällt werden. Es sei P der vom Potenzieren mit p in Ω induzierte Automorphismus auf dem Ring $D(W)$ der formalen alternierenden Differentialformen über W, und es sei $\pi = P - p$. Witt zeigte, daß ${}_\mathrm{p}\mathrm{B}r(k) \cong WdW$ modulo $\pi(WdW) + W(k)dW$ gilt, und gab die behauptete Isomorphie explizit an. Als Nebenresultat ergab sich in [1958, Satz 1] die Bestätigung einer Vermutung von Teichmüller (Gesammelte Abh., S. 144): Diejenigen p-Algebren, die von einer festen rein inseparablen Erweiterung k_n/k vom Grad p^n zerfällt werden, lassen sich durch n Parameter aus dem Grundkörper beschreiben.

Von 1937 bis heute ist eine schon nicht mehr überschaubare Fülle von Publikationen über Wittvektoren erschienen. Die Wittvektoren werden auch in vielen Lehrbüchern behandelt, wie beispielsweise in Algebra II von F. Lorenz, in Corps locaux von J.-P. Serre oder in Groupes Algébriques, Chap. V, von M. Demazure/P. Gabriel. In dem Algebra-Buch von S. Lang ist in Kap. VIII, Exc. 21, eine funktorielle Einführung des Ringes $W(A)$ der Wittvektoren über einem beliebigen kommutativen Ring A abgedruckt, die Witt mündlich Lang mitgeteilt hat und die sich von seiner ursprünglichen Einführung in [1937B] unterscheidet.

Liesche Ringe
(cf. [1937E], [1941A], [1953A], [1956] und [1976])

1935 entdeckte Witt, daß man eine einfache Liealgebra über einem beliebigen Körper k der Charakteristik $p > 2$ erhält, wenn man eine k-Basis $e_0, \ldots, e_{p-1}$ und die Multiplikationsregel $e_i \cdot e_j = (j-i)e_{i+j}$ vorgibt, (wobei der Index $i+j$ modulo p zu verstehen ist), vgl. [1976] und Chang, Über Wittsche Lie-Ringe, Hamb. Abh. 14 (1941). Chang fand heraus, daß die Automorphismengruppe einer solchen Liealgebra auflösbar ist, und zerstörte damit eine Hoffnung von Zassenhaus (Hamb. Abh. 13, 1939, S. 5, Fußnote 3), neue endliche einfache Gruppen zu gewinnen. Ein sehr einfacher Beweis von Witt für die Auflösbarkeit ist in der Arbeit von Chang abgedruckt.

In der Arbeit [1937E] konstruierte Witt zu jeder Liealgebra über einem beliebigen Körper die universelle assoziative Hülle. Da Birkhoff (Annals of Math. 38, 1937) im selben Jahr das gleiche Resultat erzielte, nennt man den Satz über die Existenz der universellen assoziativen Hülle einer Liealgebra auch das Theorem von Birkhoff-Witt. Daß allgemeiner jeder Liesche Ring treue Darstellungen in assoziativen Ringen besitzt, bewies Witt in [1953A]. Witt untersuchte auch freie Liesche Ringe und zeigte in [1937E] unter anderem, daß in einem freien Lieschen Ring die homogenen Ausdrücke vom Grad n in q Erzeugenden einen Modul vom Rang $r=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)q^{n/d}$, bilden ($\mu$ die Möbiusfunktion). Er hielt es für merkwürdig, daß diese Rangformel mit der bekannten Gaußschen Formel für die Anzahl der Primpolynome $x^n+a_1\ x^{n-1}+\ldots+a_n$ über dem Galoisfeld von q Elementen übereinstimmt. Eine Erklärung für dieses Phänomen fanden später Dress-Siebeneicher (Hokkaido Math. J. 19, 1990).

Angeregt durch den Satz von O. Schreier (Hamb. Abh. 5, 1927), daß jede Untergruppe einer freien Gruppe frei ist, bewies Witt 1940, daß jede Unteralgebra einer freien Liealgebra frei ist, cf. [1953B, S. 114, Fußnote 3] und [1956].

Die halbeinfachen Liealgebren über $\mathbb{C}$ waren von E. Cartan (Thèse, Paris 1894) klassifiziert worden, und zwar mit Hilfe eines komplizierten Determinantenkalküls. In der Arbeit [1941A] führte Witt diese Klassifikation auf die Bestimmung aller Spiegelungsgruppen zurück. Dazu brachte er zunächst die Ergebnisse von Coxeter (Ann. of Math. 35, 1934 und J. London Math. Soc. 10, 1935), der die Spiegelungsgruppen als erster systematisch untersucht und aufgezählt hatte, in eine vereinfachte und elegante Form. Eine Spiegelungsgruppe G wird erzeugt von Spiegelungen im n-dimensionalen euklidischen Raum an den Wänden eines gewissen Bereiches B, den Witt als Fundamentalbereich von G erkannte. Witt kennzeichnete den Bereich B durch eine semidefinite quadratische Form $f=-\sum\xi_i\xi_j\cos\frac{\pi}{m_{ij}}$, wobei $\frac{\pi}{m_{ij}}$ die Winkel zwischen je zwei Wänden von B bezeichnen und $m_{ii}=1$ gesetzt ist. Läßt man für $i\neq j$ beliebige $m_{ij}=2,3,\ldots,\infty$ zu, so kann die quadratische Form $f=-\sum\xi_i\xi_j\cos\frac{\pi}{m_{ij}}$ auch indefinit sein. Witt beschrieb f anschaulich durch eine Coxeter-Figur, bei der jeweils die Punkte p_i und p_j durch $m_{ij}-2$ Striche verbunden sind. (Dadurch erhält die Figur G_2, die bei Witt $D_{(6)}$ heißt, einen Strich mehr, als sie in späteren Büchern hat wie z. B. von J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, 1966.) In [1941A, Satz 8] zeichnete Witt alle unzerlegbaren Coxeter-Figuren auf, die jeweils zu einer semidefiniten Form f gehören, und bestimmte somit alle unzerlegbaren Spiegelungsgruppen. Er zeigte auch, daß eine solche Gruppe genau dann endlich ist, wenn die zugehörige Form f positiv definit ist, und benannte alle Coxeter-Figuren, die zu positiv definiten unzerlegbaren Formen gehören. Mit Hilfe dieser Coxeter-Figuren stellte er in Satz 9 alle unzerlegbaren Vektordiagramme auf. Dabei ist ein Vektordiagramm ein System von endlich vielen Vektoren $\alpha\neq 0$ in einem euklidischen Vektorraum mit den folgenden beiden Eigenschaften: Mit α kommt auch $-\alpha$ vor, jedoch keine anderen Vielfachen. Das System ist für jedes α invariant unter der Spiegelung an der zu α senkrechten Hyperebene durch 0. Die Vektordiagramme verwendete Witt dann in Satz 10 zur Bestimmung der Ordnungen aller endlichen unzerlegbaren Spiegelungsgruppen.

Nach E. Cartan und H. Weyl (Math. Z. 23, 24, 1925) gehört zu jeder halbeinfachen Liealgebra über $\mathbb{C}$ ein Wurzelsystem, d. h. ein Vektordiagramm, das noch gewisse Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllt. Ist die Liealgebra einfach, so ist das Wurzelsystem unzerlegbar. Van der Waerden (Math. Z. 37, S. 448, 1933) hatte erkannt, daß die Weylsche Methode zur Normierung der Koeffizienten in der Multiplikationstabelle einer halbeinfachen Liealgebra angewandt werden kann, um zu zeigen, daß es zu einem unzerlegbaren Wurzelsystem bis auf Isomorphie höchstens eine einfache Liealgebra über $\mathbb{C}$ gibt. Dies Ergebnis bewies Witt noch einmal neu, und durch Weiterführung der Methode von Weyl bewies er in [1941A, Satz 15], daß zu jedem unzerlegbaren Wurzelsystem auch wirklich eine einfache Liealgebra existiert, vorausgesetzt, die Existenz ist in den Fällen von Wurzelsystemen der Dimension $\leqslant 4$ gesichert. Letzteres zeigte Witt dann noch in [1941A, § 7], wobei er u. a. eine neue bemerkenswerte Konstruktion des Ausnahmetyps F_4 gab (und mit einem entsprechenden Verfahren auch einen neuen, von Satz 15 unabhängigen Existenzbeweis für E_8 erhielt). Damit ergab sich dann die Cartansche Klassifikation der halbeinfachen Liealgebren über $\mathbb{C}$. Diese Klassifikation führt bekanntlich zur Klassifikation der halbeinfachen Liegruppen über $\mathbb{C}$, und nach Chevalley (Sém. Ec. Norm. Sup, 1956–58) erhält man analog auch die Klassifikation der halbeinfachen algebraischen Gruppen über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Generische Zerfällung (cf. [1935A])

Ein erstes Beispiel für einen generischen Zerfällungskörper wurde von Witt [1935A] gegeben. Es ist dies der algebraische Funktionenkörper $F = k(x, \sqrt{ax^2+b})$ mit Konstantenkörper k der Charakteristik $\neq 2$. Für $a, b \in k^*$ definiert man über k eine Quaternionenalgebra Q durch Erzeugende u, v mit den Relationen $u^2 = a$, $v^2 = b$ und $vu = -uv$. Witt zeigte, daß Q durch Skalarerweiterung mit F zu einem vollen 2×2-Matrixring über F zerfällt. Im Gegensatz zu den sonst üblicherweise betrachteten algebraischen Zerfällungskörpern ist in dem Zerfällungskörper F der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen. Darüber hinaus hat der Körper F die universelle Eigenschaft, daß jeder Zerfällungskörper K von Q eine k-Spezialisierung von F ist (d. h. es gibt eine k-Stelle $F \to K \cup \infty$). Da F in diesem Sinne jeden Zerfällungskörper erzeugt, heißt F generisch. Amitsur konstruierte 1953 allgemeiner für eine beliebige zentrale einfache k-Algebra einen solchen generischen Zerfällungskörper, und Roquette gab 1963 eine einfachere Konstruktion davon an mit Hilfe von nicht-abelscher Galois-Kohomologie. Dieser Körper spielte eine entscheidende Rolle beim Beweis des berühmten Theorems von Merkurjev-Suslin über Erzeugbarkeit der Brauergruppe durch zyklische Algebren. Knebusch untersuchte 1976 die generische Zerfällung von quadratischen Formen, und seitdem arbeiten viele Mathematiker an der generischen Zerfällung gewisser algebraischer Strukturen. U. Rehmann und ich haben gerade eine Arbeit verfaßt über die generische Zerfällung von reduktiven algebraischen Gruppen (diese werden nach Skalarerweiterung mit einem Zerfällungskörper zu Gruppen vom Chevalley-Typ). In dieser Arbeit wird als erstes grundlegendes Beispiel das Beispiel von Witt behandelt. Der von Witt angegebene Körper F ist ein generischer Zerfällungskörper der speziellen linearen Gruppe $SL_1(Q)$, die über jedem Zerfällungskörper K zu $SL_2(K)$ wird.

Modulformen (cf. [1941B] und [1954C])

Für die Anzahl $\varrho(n,g)$ der linear unabhängigen Modulformen n-ten Grades vom Gewicht g ($n=1,2,4,\ldots$ und $g=2,4,6,\ldots$) hatte Siegel (Math. Ann. 116, 1939) die Abschätzung $\varrho(n,g)<C_n g^n$ mit einer nur von n abhängigen Zahl C_n gezeigt. Witt [1941B] bewies mit derselben Methode und durch geschicktes Abschätzen:

$$\varrho(2,2)=0, \quad \varrho(2,4)=1, \quad \varrho(2,6)\leqslant 2, \quad \varrho(2,8)\leqslant 3.$$

In Analogie zu einer damals schon bekannten Identität für Modulformen ersten Grades bewies er die Identität $(\sum|AZ-B|^{-4})^2=\sum|AZ-B|^{-8}$, wobei A,B ein volles Repräsentantensystem der verschiedenen Klassen zweireihiger teilerfremder symmetrischer Matrizenpaare durchläuft und Z eine zweireihige symmetrische Matrix mit positivem Imaginärteil bedeutet. Auf Grund der Siegelschen Theorie quadratischer Formen hängen die Ergebnisse von Witt zusammen mit der Theorie der positiven geraden quadratischen Formen in m Variablen und mit Determinante 1. Es sei Γ_m das Geschlecht dieser Formen und h_m die Anzahl der Klassen aus Γ_m. Die Bedingung $8|m$ ist notwendig und hinreichend für die Existenz von Γ_m. Ein Klassenrepräsentant S_8 für Γ_8 war schon von Minkowski angegeben worden, und nach Mordell gilt $h_8=1$. Durch Betrachtung der den Klassen quadratischer Formen zugeordneten Gitter und Vektordiagramme bewies Witt [1941B], daß $h_{16}=2$ ist, und er gab Klassenrepräsentanten S_8+S_8, S_{16} an. Es ergab sich die interessante Tatsache, daß S_8+S_8 und S_{16} jede binäre Form gleich oft darstellen, obwohl die Formen in verschiedenen Klassen liegen. Witts Frage, ob auch noch jede ternäre Form gleich oft dargestellt wird, konnten J.-I. Igusa (Amer. J. Math. 89, 1967) und M. Kneser (Math. Ann. 168, 1967) positiv beantworten. Die Aufzählung aller Klassen aus Γ_{24} (und damit die Bestimmung von h_{24}, was Witt ‚nicht ganz leicht zu sein' schien) gelang H.-V. Niemeier (J. Number Theory 5, 1973). Witt hatte herausgefunden, daß $h_{24}>10$ gelten muß, und Niemeier erhielt $h_{24}=24$.

Gruppentheorie und Kombinatorik (cf. [1937E, Satz 4], [1938A, B, C], [1952A, B], [1954D] und [1955A])

Witt hat auch die Gruppentheorie um wichtige Sätze bereichert. Von besonderer Bedeutung ist die Arbeit [1952A] aus der Darstellungstheorie, in der er unter anderem den Brauerschen Induktionssatz allgemeiner auf Darstellungen durch Matrizen aus einer endlich dimensionalen Divisionsalgebra (anstelle eines Körpers) übertrug und entsprechend formulierte (cf. [1952A, Satz 7]). Dazu hatte er auch die Charakterentheorie in dieser Allgemeinheit neu zu entwickeln. Zu seinen Untersuchungen angeregt worden war Witt durch eine Arbeit von P. Roquette (J. Reine Angew. Math. 190, 1952), in welcher der Beweis des Satzes von Brauer durch das arithmetische Studium des Charakterenringes einer endlichen Gruppe wesentlich vereinfacht worden war. Es seien nun K ein Zahlkörper, G eine endliche Gruppe, χ ein absolut irreduzibler Charakter von G und A der einfache Bestandteil in der Wedderburnschen Zerlegung des Gruppenringes KG mit der Eigenschaft $\chi(A) \neq 0$. Mit Hilfe des verallgemeinerten Induktionssatzes und der in [1952A, Abschnitt 13] definierten Verlagerungsabbildung für Algebren löste Witt dann die Aufgabe, das von Hasse angegebene volle Invariantensystem der Algebra A aus der Gruppentafel von G und den Werten des Charakters χ zu bestimmen. Insbesondere erhielt er so auch den Schurschen Index von A. Aus der Arbeit [1952A] ergaben sich Sätze über die Schurgruppe eines Körpers der Charakteristik 0, und Anfang der 70er Jahre bestimmte Yamada die Schurgruppe eines p-adischen Körpers (cf. T. Yamada, The Schur subgroup of the Brauer group, Springer Lecture Notes 397 (1974), und F. Lorenz, Algebra II, § 33).

In der Arbeit [1955A] bewies Witt, daß die Kommutatorgruppe einer kompakten topologischen Gruppe mit einer abelschen Untergruppe von endlichem Index immer abgeschlossen ist. Dies ist z. B. auf die Galoisgruppe einer Körpererweiterung A_K/k anwendbar, wenn k ein beliebiger Körper und A_K die maximal abelsche Erweiterung eines über k endlich galoisschen Körpers K ist; und dafür war das Ergebnis zuvor von Jehne in seiner Dissertation über Klassenkörpertheorie bewiesen worden unter der Voraussetzung, daß k ein Zahlkörper ist. Im zweiten Abschnitt der Arbeit [1955A] belegte Witt durch ein Beispiel, daß die Kommutatorgruppe einer kompakten Gruppe im Allgemeinen nicht abgeschlossen zu sein braucht. Dabei konnte er die Gruppe sogar als Galoisgruppe einer passenden algebraischen Körpererweiterung wählen.

Berühmt sind die Arbeiten [1938A, B] über die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu und über Steinersche Systeme. Mathieu entdeckte 1861 die beiden 5-fach transitiven Permutationsgruppen M_{12} und M_{24} in 12 bzw. 24 Ziffern. Diese Gruppen und einige ihrer Untergruppen sind einfach. Man erhält so fünf einfache Permutationsgruppen M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, die bei der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen als exzeptionelle Gruppen auftreten. Wie Witt in der Einleitung von [1938A] schrieb, hat man der Gruppe M_{24} das Leben schwer gemacht, denn 1874 versuchte Jordan (Liouville's Journal) darzulegen, daß eine solche Gruppe gar nicht existieren kann. Die Existenz der Mathieuschen Gruppen wurde dann von Séguier unter großem Rechenaufwand bewiesen. Witt fand einen wesentlich einfacheren Existenzbeweis für die Gruppen M_{24} und M_{12} durch explizite Angabe von erzeugenden Permutationen in 24 bzw. 12 Ziffern und bewies auch die Einfachheit der oben genannten fünf Gruppen neu, cf. [1938A, Sätze 4, 5, 6]. Er leitete dann weitere Eigenschaften der Mathieuschen Gruppen her und betrachtete die folgende Aufgabe:

Aus 24 Personen sollen $\binom{24}{5}\Big/\binom{8}{5}$ Vereine gebildet werden mit jeweils 8 Mitgliedern. 5 beliebige Personen sollen jeweils einem einzigen Verein angehören.

Witt bewies in [1938A, Satz 7], daß M_{24} die Automorphismengruppe einer Lösung $S(5,8,24)$ dieser Aufgabe ist. M_{24} besteht also genau aus denjenigen Personenvertauschungen der Lösung $S(5,8,24)$, bei welchen Vereine in Vereine übergehen. Analog ist M_{12} die Automorphismengruppe einer Lösung $S(5,6,12)$, cf. [1938A, Satz 11], und es erhob sich die Frage, für welche anderen Zahlentripel (l,m,n) eine Lösung $S(l,m,n)$ der entsprechenden Aufgabe existiert. Eine solche Lösung nannte Witt in [1938B] ein Steinersches System, weil Steiner (J. Reine Angew. Math. 45, 1853) einmal eine ähnliche Aufgabe gestellt hatte. Steinersche Systeme waren zuvor als Spezialfälle sogenannter Konfigurationen von Carmichael (Amer. J. Math. 53, 1931) untersucht worden, der auch schon den Zusammenhang mit den Mathieuschen Gruppen erkannt hatte. In [1938B, (9)] zeigte Witt, wie man aus Systemen $S(3,4,n)$ und $S(3,4,v)$ ein System $S(3,4,nv)$ herstellen kann. Weiter gab er eine Übersicht über die ihm damals bekannten Steinerschen Systeme, wobei diese Liste noch durch Systeme aus Arbeiten von Bays-de Weck (Comm. Math. Helv. 7, 1935) und Barrau (Verh. Akad. Wet. Amsterdam 17, 1908) ergänzt werden sollte. Hauptziel der Arbeit [1938B] war es, die Einzigkeit der beiden gruppentheoretisch interessantesten Systeme $S(5,6,12)$ und $S(5,8,24)$ zu beweisen. Diese beiden Steinerschen Systeme werden heute auch *Witt designs* genannt, da Witts Arbeiten [1938A, B], in der diese behandelt werden, eine wesentliche Rolle in der Entwicklung der Design-Theorie spielen (cf. H. Lenz, Half a century of Design Theory, Mitt. Math. Ges. Hamb., XII, 1991).

Schlußbemerkung

Eine große Stärke von Witt war es auch, für bekannte Sätze überraschend kurze und elegante Beweise zu finden, so z. B. für den Satz von Wedderburn, daß jeder endliche Schiefkörper kommutativ ist (cf. [1931]), oder für den Satz von Ostrowski, daß jeder archimedisch bewertete vollständige Körper isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist (cf. [1952C]). Es gibt auch viele Resultate und Beweise von Witt, die er nur mündlich mitgeteilt hat. Zum Teil kann man solche in Kolloquiumsbüchern finden wie z. B. die Aufzählung der Neokörper oder Untersuchungen über einige unimodulare Gitter. In der Schrift von R. Mühlbach, Filter und andere moderne Begriffsbildungen in der Analysis (Schriftenreihe zur Schulmathematik Nr. 8 der Math. Ges. Hamburg, 1962) wird der Inhalt der Vorträge wiedergegeben, die Witt im WS 1956/57 vor der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg gehalten hat über den Begriff des Filters und eine neue Auffassung der Differenzierbarkeit. In den 70er Jahren hat Witt sehr viel programmiert, beispielsweise hat er in seiner Algebra-Vorlesung eine so erstellte Liste mit den Koeffizienten von Kreisteilungspolynomen ausgeteilt. Auch erstellte er eine Liste der Ordnungen (ohne 2-Potenzen) bis 10000 mit nur zyklischen, abelschen bzw. nilpotenten Gruppen.

Dieser Bericht über das Werk von Ernst Witt ist nicht vollständig. Viele schöne Resultate und Arbeiten von ihm konnte ich hier in der Kürze nicht wiedergeben. Aber auch so ist es offensichtlich, welche Breite und Tiefe sein Werk besitzt. Ernst Witt ist einer der großen Mathematiker dieses Jahrhunderts.

Schriftenverzeichnis von Ernst Witt

Die gesammelten Abhandlungen von Ernst Witt werden voraussichtlich 1993 im Springer-Verlag erscheinen.

[1931] Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **8** (1931) 413

[1934A] Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen. Math. Ann. **110** (1934) 12–28

[1934B] Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über reellem Funktionenkörper. J. Reine Angew. Math. **171** (1934) 4–11

[1935A] Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz. Math. Z. **39** (1935) 462–467

[1935B] Über die Invarianz des Geschlechts eines algebraischen Funktionenkörpers. J. Reine Angew. Math. **172** (1935) 75–76

[1935C] Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper. J. Reine Angew. Math. **173** (1935) 43–51

[1935D] Zwei Regeln über verschränkte Produkte. J. Reine Angew. Math. **173** (1935) 191–192

[1936A] Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f. J. Reine Angew. Math. **174** (1936) 237–245

[1936B] Bemerkungen zum Beweis des Hauptidealsatzes von S. Iyanaga. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1936) 221

[1936C] (zusammen mit H. Hasse) Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p. Monatsh. Math. Phys. **43** (1936) 477–492

[1937A] Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. J. Reine Angew. Math. **176** (1937) 31–44

[1937B] Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n. Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p. J. Reine Angew. Math. **176** (1937) 126–140

[1937C] Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern. J. Reine Angew. Math. **176** (1937) 153–156

[1937D] (zusammen mit H. L. Schmid) Unverzweigte abelsche Körper vom Exponenten p^n über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p. J. Reine Angew. Math. **176** (1937) 168–173

[1937E] Treue Darstellung Liescher Ringe. J. Reine Angew. Math. **177** (1937) 152–160

[1938A] Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **12** (1938) 256–264

[1938B] Über Steinersche Systeme. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **12** (1938) 265–275

[1938C] Zum Problem der 36 Offiziere. Jber. Dt. Math.-Verein. **48** (1938) 66–67

[1940A] Ein Identitätssatz für Polynome. Mitt. Math. Ges. Hamburg **VIII**, Teil 2 (1940) 188–189

[1940B] Die Automorphismengruppen der Cayleyzahlen. J. Reine Angew. Math. **182** (1940) 205

[1941A] Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **14** (1941) 289–322

[1941B] Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **14** (1941) 323–337

[1949] Rekursionsformel für Volumina sphärischer Polyeder. Arch. Math. **1** (1949) 317–318

[1950] Sobre el Teorema de Zorn. Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4) **10** (1950) 82–85

[1951A] Beweisstudien zum Satz von M. Zorn. Math. Nachr. **4** (1951) 434–438

[1951B] Algunas cuestiones de matemática intuicionista. Conferencias de Matemática II. Publ. del Instituto de Matemáticas „Jorge Juan". Madrid 1951, 8 Seiten

[1952A] Die algebraische Struktur des Gruppenringes einer endlichen Gruppe über einem Zahlkörper. J. Reine Angew. Math. **190** (1952) 231–245

[1952B] Ein kombinatorischer Satz der Elementargeometrie. Math. Nachr. **6** (1952) 261–262
[1952C] Über einen Satz von Ostrowski. Arch. Math. **3** (1952) 334
[1953A] Treue Darstellungen beliebiger Liescher Ringe. Collectanea Math. **6** (1953) 107–114
[1953B] Über freie Ringe und ihre Unterringe. Math. Z. **58** (1953) 113–114
[1953C] (zusammen mit P. Jordan) Zur Theorie der Schrägverbände. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. math.-naturw. Kl. 1953, Nr. 5, (1953) 225–232
[1954A] Über eine Invariante quadratischer Formen mod 2. J. Reine Angew. Math. **193** (1954) 119–120
[1954B] (zusammen mit W. Klingenberg) Über die Arfsche Invariante quadratischer Formen mod 2. J. Reine Angew. Math. **193** (1954) 121–122
[1954C] Über die Konstruktion von Fundamentalbereichen. Ann. Mat. Pura Appl. **36** (1954) 215–221
[1954D] Verlagerung von Gruppen und Hauptidealsatz. Proc. ICM 1954. Amsterdam, Bd. II, North-Holland Publ. Comp. 1954, 71–73
[1955A] Über die Kommutatorgruppe kompakter Gruppen, Rend. Mat. e Appl. (5) **14** (1955) 125–129
[1955B] Über den Auswahlsatz von Blaschke. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **19** (1955) 77
[1956] Die Unterringe der freien Lieschen Ringe. Math. Z. **64** (1956) 195–216
[1957] Verschiedene Bemerkungen zur Theorie der quadratischen Formen über einem Körper. Centre Belge Rech. Math., Coll. d'Algèbre sup. Bruxelles 1956 (1957) 245–250
[1958] p-Algebren und Pfaffsche Formen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **22** (1958) 308–315
[1975] Homöomorphie einiger Tychonoffprodukte. In: Topology and its Applications (Proc. Conf. Memorial Univ. Newfoundland, St. John's, Nfdl., 1973) 199–200. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **12**. New York: Dekker, 1975
[1976] Über eine Klasse von Algebren mit lauter endlich erzeugbaren Unteralgebren. Mitt. Math. Ges. Hamburg **X** (1976) 311
[1989] Erinnerungen an Gabriel Dirac in Hamburg. Ann. of Discrete Math. **41** (1989) 497–498

Liste der bei Ernst Witt angefertigten Dissertationen

Erna Bannow: Die Automorphismengruppen der Cayley-Zahlen, 1939
Fritz-Erdmann Diederichsen: Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz, 1940
Ho-Jui Chang: Über Wittsche Lie-Ringe, 1941
Horst Leptin: Über eine Klasse linear kompakter Abelscher Gruppen, 1954
Bernhard Banaschewski: Untersuchungen über Filterräume, 1954
Kurt Legrady: Symplektische Integralgeometrie, 1955
Sigrid Becken: Spiegelungsrelationen in orthogonalen Gruppen, 1959
Günter Harder: Über die Galois-Kohomologie der Tori, 1964
Reinhard Job: Über Modulformen dritten Grades, 1968
Jürgen Rohlfs: Zur Kohomologie endlicher Gruppen, 1970
Walter Borho: Wesentliche ganze Ringerweiterungen kommutativer Ringe, 1973
Ina Kersten: p-Algebren über semilokalen Ringen, 1977
Erich Böhme: G-Mannigfaltigkeiten mit Spinstruktur, 1977

Dieser Bericht über das Leben und Werk von Ernst Witt fand bereits vor dem Erscheinen ein sehr großes Interesse, und ich möchte all jenen, die mich mit wertvollen Hinweisen und Anregungen unterstützt haben, herzlich danken.

Ina Kersten
Fakultät für Mathematik
Universitätsstraße
33615 Bielefeld 1

(*Eingegangen 24. 9. 1992*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
95 (1993) 181-189
AMS subject classification: 32-06, 32H02, 32H04, 32C05

Analytische und meromorphe Zerlegungen und der reelle Fall

H. Grauert, Göttingen

1 Einleitung

Es sei zunächst $X=G$ ein Gebiet im n-dimensionalen komplexen Zahlenraum $\mathbb{C}^n=\{z=(z_1,\ldots,z_n)\}$ und f eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf G. Ist dann g eine weitere holomorphe Funktion auf G, so sagt man, daß g analytisch abhängig von f ist, wenn g auf den Zusammenhangskomponenten der Niveaumengen $f^{-1}(w)$, $w \in \mathbb{C}$, konstant ist. Bekanntlich ist das gleichbedeutend damit, daß die Funktionalmatrix der Abbildung $F=(g,f)$ überall in G einen Rang <2 hat.

Man möchte den Ring H der von f analytisch abhängigen holomorphen Funktionen g studieren. K. Stein stellte dieses Problem einem seiner Studenten als Doktorarbeit: K. Koch zeigte 1953, daß H isomorph zum Ring der holomorphen Funktionen auf einer zusammenhängenden nicht-kompakten Riemannschen Fläche Q ist. Q wurde durch eine Zerlegung von G mit minimalen Vereinigungen der Zusammenhangskomponenten der Niveaumengen $f^{-1}(w)$ gewonnen (s. [St 53]). Später hat K. Stein diese Ergebnisse zu einer sehr allgemeinen Theorie ausgebaut (vgl. etwa [St 56 + 63 + 64]). Andere Autoren folgten. Wir werden hier eine moderne Version betrachten (vgl. [Gr 83 + 85 + 87]).

Zugrundegelegt wird immer ein *normaler komplexer Raum X,* dessen Topologie abzählbar ist. An sich wäre das Resultat auch interessant, wenn X beliebig wäre, wenn also X nicht notwendig reduziert ist, die lokalen Ringe in X also auch nilpotente Elemente enthalten könnten. Um etwas in dieser Richtung zu beweisen, müßte man jedoch einen *Bildgarbensatz* bei nicht-eigentlichen holomorphen Abbildungen haben (zum Bildgarbensatz bei eigentlichen Abbildungen s. [GR 84]). Da ein solcher Satz nicht zur Verfügung steht, wird als Ersatz der *Singularitätensatz* von Remmert und Stein ([RS 53]) in Verbindung mit der *Existenz von holomorphen Funktionen zu analytischen Verzweigungen* ([GR 58]) und [De 90]) herangezogen. Das Gesamtresultat erhält dadurch eine rein mengentheoretische Natur: Der Quotientenraum Q ist wieder ein topologischer Raum, der mit einer komplexen Strukturgarbe von lokalen stetigen komplexen Funktionen versehen ist. Die Punkte von Q entsprechen den Fasern in X.

Der analoge Quotient Q im nicht-reduzierten Falle dürfte auch nur unter einschränkenden Voraussetzungen existieren.

2 Analytische Zerlegungen

Es sei immer R in dem normalen komplexen Raum $X \times X$ eine *analytische Menge,* die noch folgende beide Eigenschaften hat:

1) *Die Diagonale D von $X \times X$ ist in R enthalten.*
2) *R wird durch die Spiegelung $(x, y) \to (y, x)$ auf sich abgebildet.*

Man erhält nun *Fasern* in X: Ist $x \in X$ ein Punkt, so sei die *Faser* S_x durch x definiert als $\{y \in X\colon (y, x) \in R\}$. Eine solche Faser ist stets eine analytische Menge. Aber verschiedene Fasern können sich noch durchkreuzen, und auch ihre Dimension ist nicht immer die gleiche: sie kann plötzlich nach oben springen. Wir bezeichnen die durch R erhaltene *Faserung* auch mit R: An sich ist R nur ihr Graph.

Definition 1. R ist eine *analytische Zerlegung,* wenn sich ungleiche Fasern niemals durchkreuzen.

Im Falle einer analytischen Zerlegung gewinnt man einen Quotientenraum Q, den man mit der Quotiententopologie versieht. Die Quotientenabbildung $\pi\colon X \to Q$ ist dann stetig. Umgebungen seien stets offene Mengen. Ist $V \subset Q$, eine offene Menge, so ist das Urbild $U = \pi^{-1}(V) \subset X$ ebenfalls offen. Unter einer holomorphen Funktion in V verstehen wir eine komplexe Funktion g, deren Urbild $f = g \circ \pi$ holomorph in U ist. Wir erhalten so die *Garbe der lokalen holomorphen Funktionen* in Q. Diese Funktionen sind immer stetig. Die Abbildung π bringt lokale holomorphe Funktionen zu lokalen holomorphen Funktionen zurück. Wir heißen sie deshalb eine *holomorphe Abbildung.* Eine holomorphe Funktion f in X ist genau dann faserkonstant, wenn es eine komplexe Funktion g in Q mit $f = g \circ \pi$ gibt. Die faserkonstanten holomorphen Funktionen in X sind also die holomorphen Funktionen auf Q.

Wenn nun Q ein komplexer Raum ist, hat man wenigstens einen Teil der Kochschen Aufgabe gelöst. Leider ist das schon in einfachen Fällen nicht der Fall. Es sei etwa X der $\mathbb{C}^2$ und π die holomorphe Abbildung:

$$w_1 = z_1, \qquad w_2 = z_1 \cdot z_2.$$

Die Urbildpunkte von π geben eine analytische Zerlegung in X und die Menge Q ist die Vereinigung von $O = (0, 0)$ und $\{(w_1, w_2)\colon w_2 = 0 \text{ für } w_1 = 0\}$. Wir versehen Q mit der Quotiententopologie. Dann ist Q in O nicht lokal kompakt, die Umgebungsbasis in O ist nicht abzählbar und der Ring der Keime von holomorphen Funktionen in O ist nicht noethersch. Q ist also bei weitem kein komplexer Raum. Damit Phänomene dieser Art nicht auftreten ist notwendig und hinreichend, daß R *semi-eigentlich* ist.

Definition 2. Eine analytische Zerlegung R heißt *semi-eigentlich,* wenn jeder Punkt $y \in Q$ eine Umgebung $V(y)$ hat, so daß in X eine kompakte Menge K mit $\pi(K) \supset V$ ist.

Bei semi-eigentlichen analytischen Zerlegungen ist Q wenigstens ein lokalkompakter Hausdorffscher Raum. Jeder Punkt von Q hat eine abzählbare Umgebungsbasis.

Wenn der Quotient Q ein komplexer Raum ist, hat Q lokal sehr viele holomorphe Funktionen. Es muß deshalb auch in Umgebungen der Fasern von X sehr viele faserkonstante holomorphe Funktionen geben. Das ist leider nicht immer der Fall.

Das folgt etwa aus dem folgenden Beispiel. Es sei X der 2-dimensionale komplex projektive Raum $\mathbb{P}_2$. Es sei M eine Hyperebene. Die Menge R sei Vereinigung der Diagonalen D und $M \times M$. Es ist dann R eine analytische Zerlegung, die da X kompakt natürlich semi-eigentlich ist. Bei der Bildung des Quotientenraumes Q wird einfach M durch einen Punkt $\mathbf{a} \in Q$ ersetzt. Jeder Umgebung V von $\mathbf{a}$ entspricht eine Umgebung von M in X. Es gibt aber beliebig kleine Umgebungen von M, die pseudo-konkav sind. Jede holomorphe Funktion ist dann dort konstant. Also besitzt auch V nur konstante holomorphe Funktionen. Q ist kein komplexer Raum.

Wir brauchen notwendig, daß die folgende Definition erfüllt ist:

Definition 3. Eine analytische Zerlegung R heißt *ausbreitbar,* wenn es zu jedem Punkt $y \in Q$ eine Umgebung V und eine holomorphe Abbildung F: $U = \pi^{-1}(V) \to \mathbb{C}^m$ gibt, so daß F konstant auf den Fasern von π ist und die eventuell größeren Fasern von F doch die gleiche Dimension haben.

Natürlich wird hier nicht gefordert, daß Q lokal so viel holomorphe Funktionen hat, wie es lokal um die Fasern in X faserkonstante holomorphe Funktionen gibt. Unsere Bedingung ist viel schwächer. Man kann sie aber auch nicht wesentlich abschwächen, etwa durch eine Art von Levischem Differentialausdruck ersetzen.

Ist Q ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$ und X eine analytische Überlagerung von Q, so ist die zugehörige analytische Zerlegung immer ausbreitbar, wie aus der Definition unmittelbar folgt.

In [Gr 83] wurde gezeigt:

Satz 4. *Eine analytische Zerlegung ist genau dann semi-eigentlich und ausbreitbar, wenn der Quotientenraum Q ein komplexer Raum ist.*

Auf die Methoden des Beweises wurde schon in der Einleitung hingewiesen.

Ein wichtiges Beispiel stammt von H. Cartan [Ca 55]. Hier ist X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und L eine Gruppe von Automorphismen von X, die auf X *eigentlich diskontinuierlich* operiert. Wir setzen dann $R = \{(l \circ x, x) : x \in X, l \in L)$. Dann ist R, wie man leicht zeigt, eine semi-eigentliche ausbreitbare analytische Zerlegung. Der Quotient Q ist ein n-dimensionaler (normaler) komplexer Raum.

3 Meromorphe Zerlegungen

Besonders einfache analytische Zerlegungen R sind die *normalen Zerlegungen* von X. Es ist jetzt X ein rein n-dimensionaler (normaler) komplexer Raum. Die Fasern zu R haben überall die Dimension d mit $0 \leqslant d \leqslant n$. Man sieht dann leicht, daß R semi-eigentlich und ausbreitbar ist. Der Quotient Q ist dann ein rein $(n-d)$-

dimensionaler komplexer Raum. Die Abbildung $\pi: X \to Q$ ist offen. (Ein wesentlicher Teil dieses Satzes ist bereits früher von B. Kaup bewiesen worden, vgl. Literaturverzeichnis). Wir nennen ein solches R eine *d-dimensionale normale Zerlegung von X.*

Ist $P \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $R \subset X$ eine analytische Menge mit den beiden alten Eigenschaften, so verstehen wir unter $R \mid X - P$ den Graphen $R \cap ((X-P) \times (X-P))$. Ist R eine analytische Äquivalenzrelation, so ist auch $R \mid X-P$ eine analytische Äquivalenzrelation. Die Eigenschaften *ausbreitbar* und *normal* bleiben bei der Beschränkung erhalten.

Normale Zerlegungen sind wichtig, um *meromorphe Äquivalenzrelationen* zu definieren, die bei der Konstruktion grundlegender komplexer Räume, z. B. von Quotientenräumen nach algebraischen Gruppen verwandt werden. Eine ad-hoc-Definition wurde schon 1965 von D. Mumford gegeben ([Mu 65], vgl. auch [Ne 78]). Für unsere Durchführung siehe: [Gr 85 + 87].

Definition 1. Eine *d-dimensionale meromorphe Äquivalenzrelation in X* ist eine analytische Menge $R \subset X \times X$ mit den beiden alten Eigenschaften, so daß außerdem noch gilt:

1) Es gibt eine nirgends dichte analytische Menge $P \subset X$, so daß $R \mid X-P$ eine d-dimensionale normale analytische Äquivalenzrelation ist.

2) $R \cap (X \times P)$ liegt in R nirgends dicht.

Natürlich ist dann R durch $R \cap ((X-P) \times (X-P))$ bestimmt. Ferner ist es unabhängig von P. Ist f eine meromorphe Funktion in X, so nehmen wir für P die Menge der Unbestimmtheitsstellen von f. Der Graph R sei dann die Menge $\{(x, y) \in X \times X : f(x) = f(y)\}$. Wir erhalten so eine meromorphe Äquivalenzrelation in X. Die Menge P bezeichnet man auch als Polstellenmenge der *Abbildung f* von X in die projektive Gerade. Wir nennen deshalb allgemein *P eine Polstellenmenge* von R. Sie ist nicht eindeutig bestimmt. Aber es gibt eine wohldefinierte minimale.

Wir betrachten das folgende einfache Beispiel einer meromorphen Äquivalenzrelation: Es sei X der $(n+1)$-dimensionale komplexe Zahlenraum $\mathbb{C}^{n+1}$, R die analytische Menge $\{(x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$ linear abhängig$\}$, P sei einfach der Nullpunkt $O \in \mathbb{C}^{n+1}$. Ist dann $y \neq O$, so ist die Faser S_y die Gerade durch O und y, im Falle $y = O$ erhalten wir dagegen den ganzen $\mathbb{C}^{n+1}$. Die Dimension von S_y ist also von y abhängig. Auch durchkreuzen sich verschiedene Fasern.

Bei der Konstruktion eines Quotientenraumes Q stören die beiden letzten Eigenschaften. Man zeigt aber leicht: Es gibt in $X-P$ eine dichte Menge Z, so daß für $y \in Z$ jede Faser S_y (in ganz X) rein d-dimensional ist und keine irreduzible Komponente von ihr in P enthalten ist. Wir nennen eine solche Faser *allgemein.* Ist C eine lokale analytische Kurve in X, so betrachten wir nur die Fasern von R über $C \cap Z$. Unter einer *realen Faser S* in X verstehen wir dann die d-dimensionalen analytischen Teilmengen von X, die Grenzmenge von solchen Fasern sind. Wir erhalten dadurch eine *Faserung* $\Phi = \Phi(R)$ in X mit rein d-dimensionale Fasern. Sie hängt nicht von Z ab. Ungleiche Fasern können sich allerdings noch durchkreuzen.

Soweit läßt sich die Theorie mit relativ elementaren Methoden durchführen. Die Beseitigung des Durchkreuzens ist jedoch sehr schwierig. Es läuft auf eine mengentheoretische *Plattisierung* von X/R hinaus, die auf einer *eigentlichen Modifikation* beruht. Hironaka, Lejeune-Jalabert, Teissier [Hk 73] haben ein Theorem dieser Art zum ersten Male idealtheoretisch bewiesen. Vgl. auch [Sb 92].

Wir betrachten etwa den folgenden Fall: es sei $S = A_1 \cup A_2$ eine allgemeine Faser, die in zwei irreduzible Komponenten zerfällt. $A_2 = A_2(t)$ hänge noch von einem holomorphen Parameter $t \in G \subset \mathbb{C}$ ab, A_1 sei konstant. Wir haben also $S = S(t)$. Zwei verschiedene Fasern von $S(t)$ durchkreuzen sich stets auf ganz A_1. Wir müssen also ganz A_1 aufblasen, um das Durchkreuzen zu eliminieren. Es wird von $A_2(t)$ verursacht, das sehr weit „draußen" in X liegen kann. Das muß eingeschränkt werden, um aus X einen komplexen Raum mit normaler Zerlegung zu gewinnen. Notwendig ist:

Definition 2. Die meromorphe Äquivalenzrelation R heißt *regulär,* wenn folgendes gilt:

Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset X$ gibt es eine relativ-kompakte offene Menge $B \subset\subset X$, so daß keine nichtkonstante 1-parametrige Schar $S(t) \in \Phi$ mit $S(t) \cap K \neq \emptyset$ für alle t und $S(t) \cap B = \text{const}$ existiert.

Es gibt Fälle sogar von algebraischen meromorphen Äquivalenzrelationen, die nicht regulär sind. Doch sind alle „vernünftigen" meromorphen Äquivalenzrelationen auch regulär. Ist X kompakt, so ist jede meromorphe Äquivalenzrelation in X regulär.

Ist R eine reguläre meromorphe Äquivalenzrelation, so können wir jeden Punkt $x \in X$ durch die Menge der realen Fasern durch x ersetzen. Wir erhalten dadurch eine eigentliche Modifikation $X^\wedge$ von X mit einer Modifikationsabbildung $\pi\colon X^\wedge \to X$. Der Raum $X^\wedge$ wird so klein wie möglich gewählt: Er ist deshalb im allgemeinen nur semi-normal, d. h. jede lokale stetige komplexe Funktion, die außerhalb einer nirgends dichten analytischen Menge holomorph ist, muß überall holomorph sein.

Die Faserung Φ liftet sich zu einer normalen Äquivalenzrelation $R^\wedge$ mit einer Faserung $\Phi^\wedge$ in $X^\wedge$. Die Abbildung π bildet jede Faser $S^\wedge \in \Phi^\wedge$ holomorph, topologisch auf die entsprechende Faser $S \in \Phi$ ab. Die Umkehrung ist jedoch im allgemeinen nicht holomorph.

Zur Bildung der Quotientenraumes können wir auch zur Normalisierung von $X^\wedge$ übergehen. Die analytische Äquivalenzrelation bleibt dann normal. Wir erhalten einen normalen komplexen Raum Q. Wir schreiben $Q = X/R$ und identifizieren Q mit der Menge Φ.

Satz 3. *Ist R eine reguläre meromorphe Äquivalenzrelation in X, so ist der komplexe Quotientenraum $Q = X/R$ definiert.*

Ein Anwendungsfall liegt vor, wenn f eine meromorphe Funktion auf X ist. Die Niveauflächen von f bilden dann eine reguläre meromorphe Äquivalenzrelation in X. Man kann nun f als holomorphe Abbildung des Quotientenraumes $Q = X/R$ in den $\mathbb{P}_1$ deuten.

4 Der reelle Fall

Wir wollen unsere Resultate so weit wie möglich auf reell-analytische Räume übertragen. Dazu benötigen wir die Definition des mengentheoretischen (reduzierten) n-dimensionalen reell-analytischen Raumes. Wir brauchen zunächst lokale Repräsentanten.

Es sei G eine offene Menge im N-dimensionalen reellen Zahlenraum $\mathbb{R}^N$, dessen Punkte mit $(x_1, \ldots, x_N)$ bezeichnet seien. Es sei $F=(f_1, \ldots, f_m)$ ein m-tupel reeller reell-analytischer Funktionen in G und $O \in G$ ein beliebiger Punkt.

Definition 1. F heißt *glatt von der Dimension n* in O, wenn folgendes gilt:

1) $F(O)=0$;

2) bei geeigneter Numerierung ist die Determinante der Matrix

$$(f_{\varkappa x_\lambda}(O))_{\substack{\varkappa=1,\ldots,N-n \\ \lambda=1,\ldots,N-n}}$$

von Null verschieden;

3) es gibt eine Umgebung $U(O) \subset G$, so daß auf der Menge $A=\{x \in U: f_1(x)=\ldots=f_{N-n}(X)=0\}$ alle Funktionen von F verschwinden.

Bei kleinem U ist dann $A \subset U$ eine n-dimensionale analytische Untermannigfaltigkeit. Wir setzen $A^*=\{x \in G\colon F(x)=0\}$ und $\mathring{A}=\{x \in A^*\colon F$ ist glatt von der Dimension n in $x\}$. Die Menge $S=A^*-\mathring{A}$ wird dann lokal durch endlich viele analytische Gleichungen gegeben. Sie ist also eine analytische Teilmenge von G. Wir machen nun die einschränkende Voraussetzung, daß die Dimension von S überall kleiner als $n-1$ ist. Wir nehmen dann für A die abgeschlossene Hülle von $\mathring{A}$. Sie ist in A^* enthalten und hat überall die Dimension n. Man erhält sie aus A^*, wenn man niederdimensionale Mengen außerhalb von A fortläßt. Solche Mengen nennen wir *Stachel*. A ist dann im allgemeinen selbst nicht mehr eine analytische Menge. Aber auf solchen A sind die lokalen analytischen Funktionen f wohldefiniert. Ein f heißt analytisch, wenn es lokal Beschränkung einer analytischen Funktion aus einer offenen Teilmenge von G ist. Die Menge A trägt also eine Garbe von lokalen reellen Funktionen. Sie ist eine Strukturgarbe auf A (von lokalen $\mathbb{R}$-Algebren). Solche beringten Räume A werden die lokalen Repräsentanten unserer mengentheoretischen analytischen Räume sein. Wir definieren diese analog zu den reduzierten komplexen Räumen.

Definition 2. Ein *n-dimensionaler mengentheoretischer analytischer Raum* ist ein Hausdorffscher Raum, der mit einer Strukturgarbe von lokalen reellen Funktionen versehen ist, so daß diese Struktur lokal isomorph zu einem Repräsentanten ist.

Fortan nennen wir mengentheoretische analytische Räume stets einfach *analytische Räume.*

Man kann n-dimensionale analytische Räume eindeutig komplexifizieren. Wir definieren dabei den Begriff des analytischen Unterraumes in direkter Weise wie üblich. (Komplex) n-dimensionale reduzierte komplexe Räume sind auch $2n$-dimensionale analytische Räume.

Definition 3. Eine *Komplexifizierung* eines n-dimensionalen analytischen Raumes X ist ein (komplex) n-dimensionaler reduzierter komplexer Raum Z, der mit einer antiholomorphen Abbildung $\omega: Z \simeq Z$ versehen ist, so daß folgendes gilt:

1) die Fixpunktmenge von ω ist gerade X vereinigt mit Stacheln;

2) es gibt biholomorphe Einbettungen von geeigneten Umgebungen U der Punkte $z \in Z$ in offene Mengen $G \subset \mathbb{C}^N$, bei denen $U \cap X$ in $G \cap \mathbb{R}^N$ analytisch eingebettet wird und $\omega | U$ die Beschränkung des konjugiert Komplexen von G auf U ist.

Man hat also, daß ω^2 die Identität $\mathrm{id}: Z \simeq Z$ ist. Wir nennen zwei Komplexifizierungen lokal gleich, wenn kleine Umgebungen von X isomorph sind. Die Isomorphie ist dann kanonisch. Wir betrachten also in diesem Falle an sich nur Keime von Komplexifizierungen. Man kann nun leicht zeigen, daß jeder n-dimensionale analytische Raum eine lokal eindeutig bestimmte Komplexifizierung hat. Man kann sogar beliebig kleine Z finden, die Steinsche Räume sind. Lokale analytische Funktionen f auf X lassen sich lokal und analytisch in Z zu lokalen holomorphen Funktionen $f^{\sim}$ eindeutig fortsetzen. Es ist $f^{\sim} \circ \omega$ das konjugiert Komplexe von $f^{\sim}$. Ist umgekehrt für eine lokale holomorphe Funktion $f^{\sim} \circ \omega$ konjugiert komplex, so kommt $f^{\sim}$ von einem f. Man sieht also in Z, was die analytischen Funktionen auf X sind.

Man kann auch andere Objekte so von X nach Z holomorph fortsetzen. Unter einer (reellen) *meromorphen Äquivalenzrelation* in X verstehen wir eine reguläre meromorphe Äquivalenzrelation R in Z, für die $R \circ \omega = R$ gilt. Dabei ist die Liftung $R \circ \omega$ von R auf direktem Wege definiert. Wir erhalten die früher betrachtete eigentliche holomorphe Modifikation $\pi^{\sim}: Z^{\wedge} \to Z$ und die Quotientenabbildung $p^{\sim}: Z^{\wedge} \to Q^{\sim}$, wobei der Quotient $Q^{\sim}$ ein normaler $(n-d)$-dimensionaler komplexer Raum ist.

Man kann ω zu einer Involution $\omega^{\wedge}: Z^{\wedge} \to Z^{\wedge}$ liften. Es sei $X^{\wedge} \subset Z^{\wedge}$ der n-dimensionale analytische Unterraum über X. Die Fixpunktmenge unter $\omega^{\wedge}$ ist dann gerade $X^{\wedge}$, vereinigt eventuell mit einer Stachelmenge. Man hat die Beschränkungsabbildung $\pi: X^{\wedge} \to X$. Wir nennen $(X^{\wedge}, \pi)$ eine (reelle) *eigentliche Modifikation* von X. Natürlich ist π wieder eine analytische Abbildung.

Die Abbildung ω bestimmt auch eine Involution $\underline{\omega}: Q^{\sim} \to Q^{\sim}$. Es sei Q die Fixpunktmenge von $\underline{\omega}$, wobei wir wieder Stachel fortlassen. Es ist dann Q ein $(n-d)$-dimensionaler analytischer Raum. $X^{\wedge}$ wird durch die Beschränkung p von $p^{\sim}$ in Q abgebildet. Leider trifft nicht jede $\omega^{\wedge}$-invariante Faser (des Keimes) $Z^{\wedge}$ auch die Menge $X^{\wedge} \subset Z^{\wedge}$. Bezeichnet Q' das p-Bild dieser Menge, so ist also im allgemeinen Q' echt in Q enthalten.

Um zu weiteren Einsichten zu kommen, brauchen wir den Begriff des *semianalytischen* Raumes. Wir definieren zunächst die lokalen Repräsentanten. Es sei Y ein n-dimensionaler analytischer Raum und A eine nirgends dichte abgeschlossene Teilmenge von Y, die Vereinigung von endlich vielen analytischen Unterräumen ist. Dabei können die Unterräume verschiedene Dimensionen von 0 bis $n-1$ haben. Die Differenz $Y - A$ ist im allgemeinen nicht zusammenhängend. Wir nehmen eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten und bilden die abgeschlossene Hülle V in Y. Lokale analytische Funktionen auf V sind solche lokale reelle Funktionen auf V, die sich lokal zu lokalen analytischen Funktionen in Y fortsetzen lassen. Der topologische Raum V ist also ein geringter Raum.

Definition 4. Ein geringter Hausdorffscher Raum X heißt ein *n-dimensionaler semi-analytischer Raum,* wenn X lokal isomorph zu einem semi-analytischen Repräsentanten ist.

Die Begriffe *Kompaktifizierung* und *eigentliche analytische Abbildung* spielen wir auf eine (eventuell große) Komplexifizierung Z von X zurück. Wir nennen Z eine Kompaktifizierung von X, wenn Z ein (normaler) kompakter komplexer Raum ist. Sind X und Y analytische Räume und ist $p: X \to Y$ eine analytische Abbildung, so nennen wir *p analytisch eigentlich,* wenn es Komplexifizierungen Z_X von X und Z_Y von Y und eine eigentliche holomorphe Abbildung $p^{\sim}: Z_X \to Z_Y$ gibt, die eine Fortsetzung von p ist. Natürlich sind die Räume Z, Z_X und Z_Y durch X und Y bei weitem nicht bestimmt.

Im komplexen Falle gilt jedoch für eigentliche holomorphe Abbildungen $p: W \to Z$ von reduzierten komplexen Räumen das Remmertsche *proper mapping theorem: Die Bildmenge $p(W)$ ist ein reduzierter komplexer Unterraum von Y.* Im reellen Falle kommt man bei analytisch eigentlichen Abbildungen nur zu semi-analytischen Räumen $p(X)$ (sie hängen wirklich nicht von den Komplexifizierungen ab). Auch kann man es der Abbildung $p: X \to Y$ im allgemeinen nicht ansehen, ob sie analytisch eigentlich ist. In einem speziellen Falle ist dieses jedoch möglich:

Es seien X, Y n- bzw. m-dimensionale analytische Räume, X sei ein Unterraum von $\mathbb{R} \times Y$ und die Projektion $p: \mathbb{R} \times Y \to Y$ sei auf X endlich und (topologisch) eigentlich, selbst wenn man Stachel zu X hinzu nimmt. Dann ist das Bild $p(X)$ ein n-dimensionaler semi-analytischer Unterraum von Y.

Die Frage ist, ob unser Q' ein n-dimensionaler semi-analytischer Unterraum von Q ist. Das ist sicher dann der Fall, wenn die Abbildung $p: X^{\wedge} \to Q$ analytisch eigentlich ist. Dieser Fall tritt besonders bei Darstellungen von reduktiven Gruppen auf. Wir erhalten dann einen semi-analytischen Quotientenraum, dessen Funktionen die Invarianten der Gruppendarstellung sind.

Literatur

[BR 90] Bonhorst, G.; Reiffen, H. J.: Über offene analytische Äquivalenzrelationen auf komplexen Räumen. Osnabrück 1990

[Ca 55] Cartan, H.: Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. Algebraic geometry and topology. Princeton University Press

[De 90] Dethloff, G.: A new proof of a theorem of Grauert and Remmert with L^2-methods. Math. Ann. **286**, 129–142

[Gr 83] Grauert, H.: Set theoretic complex equivalence relations. Math. Ann. **265**, 137–148

[Gr 85] Grauert, H.: On meromorphic equivalence relations. In: Contributions to several complex variables in honor of Wilhelm Stoll. Wiesbaden: Vieweg

[Gr 87] Grauert, H.: Meromorphe Äqivalenzrelationen. Anwendungen, Beispiele, Ergänzungen. Math. Ann. **278**, 175–183

[GR 58] Grauert, H.; Remmert, R.: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245–318

[GR 84] Grauert, H.; Remmert, R.: Coherent analytic sheaves. Heidelberg: Springer

[Hk 73] Hironaka, H.; Lejeune-Jalabert, M.; Teissier, B.: Platificateur local en géométrie analytique et aplatissement local. Astérisque **8,** 441–463

[Ka 67] Kaup, B.: Äquivalenzrelationen auf allgemeinen komplexen Räumen. Dissertation Fribourg 1967. Schriftenreihe Math. Inst. Münster 39

[Ka 69] Kaup, B.: Über offene analytische Äquivalenzrelationen. Math. Ann. **183,** 6–16

[Ka 75] Kaup, B.: Zur Konstruktion komplexer Basen. Manusc. math. **15,** 385–408

[Ka 91] Kaup, B.: Quotienten schwach-normaler komplexer Räume nach semi-eigentlichen Äquivalenzrelationen. Preprint Mathematica Gottingensis 1992

[Mu 65] Mumford, D.: Geometric invariant theory. Erg. Math. 34. Heidelberg: Springer 1965

[Ne 78] Newstead, P. E.: Lecture Notes on introduction to moduli problems and orbit spaces. Tata Institute Bombay. Heidelberg: Springer 1978

[RS 53] Remmert, R.; Stein, K.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126,** 263–306

[Sb 92] Siebert, B.: A set theoretic flattening theorem. Math. Gott. 1992

[St 53] Stein, K.: Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten. Coll. fonct. pls. var. Bruxelles, 97–107

[St 56] Stein, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. **132,** 63–93

[St 63 + 64] Stein, K.: Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen, I and II. Am. J. **85,** 298–315 und **86,** 283–396

Prof. Dr. Hans Grauert
Universität Göttingen
Mathematisches Institut
Bunsenstr. 3–5
37073 Göttingen

(*Eingegangen 30. 11. 1992*)

Buchbesprechungen

Mehrtens, H., Moderne – Sprache – Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme, Frankfurt a. M.: Suhrkamp-Verlag 1990; 640 Seiten, DM 78,–

Das vorliegende Buch ist der Versuch eines ausgewiesenen Experten der Sozialgeschichte der Mathematik, die Entwicklung der Mathematik um die letzte Jahrhundertwende in die allgemeine kulturelle Entwicklung einzuordnen. Der für diesen Versuch gewählte begriffliche Rahmen ist das Gegensatzpaar „Moderne – Gegenmoderne". Die Moderne wird dabei als ein kulturhistorisches Phänomen verstanden, daß sich zu Ende des 19. Jahrhunderts ausbildet. In Deutschland trifft sie besonders nach dem Ersten Weltkrieg auf eine vehemente Gegenmoderne, die in der Zeit des Nationalsozialismus unter den veränderten politischen Bedingungen in eine agressive Anti-Moderne umschlägt. Die Moderne endet dann irgendwann in den siebziger Jahren (S. 320) oder auch erst „um 1990" (S. 7).

Herbert Mehrtens ist ein sehr gründlicher Mathematikhistoriker, dem man viele tiefe Einsichten in die politische Geschichte der Mathematik in Deutschland in den zwanziger und dreißiger Jahren verdankt. So ist das Buch auch fast durchweg eine äußerst anregende Lektüre, und die Menge der verarbeiteten Literatur aus den verschiedensten Gebieten ist so gewaltig, daß es mich wunderte, wenn Mehrtens etwa bei der Erwähnung Alan Turings zwar Rolf Hochhuths mäßigen Roman, nicht aber Andrew Hodges' vorbildliche Biographie (The Enigma of Intelligence, London & Sydney 1983) zitiert.

Aber das Buch hat ein allgemeineres Anliegen als Mehrtens' frühere historische Einzelarbeiten. Einzelne besonders gelungene Abschnitte – etwa, um nur diese herauszugreifen, das einfühlsame Portrait L. E. J. Brouwers (3.4; Kortevegs Rolle als Doktorvater hätte hier allerdings vielleicht etwas mehr Sympathie verdient), oder die Darstellung der Mathematik im wilhelminischen Schul- und Hochschulsystem (5.2) – lesen sich zwar fast wie separate Veröffentlichungen. Aber das Werk insgesamt muß kritisch an seinen umfassenden Zielen gemessen werden, nachdem die schiere Größe des Unternehmens ja auch zurecht spontane Hochachtung erweckt.

Skizzieren wir zunächst den Inhalt der ersten Hälfte des Buches (Kapitel 1 bis 4), die mit ihren 326 Seiten ein eigenes abgeschlossenes Buch abgeben könnte. Hier werden die wichtigsten Repräsentanten und Stationen der Geschichte von Moderne und Gegenmoderne in der Mathematik beschrieben und analysiert.

Im ersten Kapitel („Präludium") wird die Vorgeschichte der Moderne über das 19. Jahrhundert verfolgt. Die Namen sind Gauß, Dedekind, Peano für die Arithmetik; wiederum Gauß, Lobatschewski, Riemann und Klein im Gebiete der Geometrie (bei Klein thematisiert der Autor zum ersten Mal den Anschauungsbegriff); Dirichlet, Peano und Cantor beim Funktionsbegriff. Das Präludium klingt aus mit einer längeren Reflexion (1.5) über das, was für Mehrtens die Startlöcher der Moderne sind: der Selbstbezug der Mathematik, den Mehrtens so interpretiert, daß die eigene Sprache zum Gegenstand der Mathematik wird.

Hier spätestens geht es aber Mehrtens nicht so sehr um die genaue Beschreibung einer Entwicklung mathematischer Begriffe, sondern darum, die verschiedenen Ebenen zusammen zu verstehen, in denen etwa eine Rede Helmholtz' sich bewegt: „Es gehen eine politische, eine wissenschaftliche, eine wissenschaftspolitische und eine bürgerliche Rede über das Ich und Die Welt zugleich". (S. 102)

Das zweite Kapitel stellt die Moderne vor: Hilbert, Cantor, Zermelo und Hausdorff werden teilweise in sehr persönlicher Manier porträtiert. Entsprechend stellt das dritte Kapitel die (sehr verschiedenen) Protagonisten der Gegenmoderne vor: Kronecker, Klein, Poincaré und Brouwer. Jedes dieser Porträts ist hochinteressant und verdiente eine eigene Besprechung, für die hier aber kein Platz ist.

Anschließend, genau in der Mitte des Buches, findet sich eines seiner Glanzstücke, das (S. 13) auch das Hauptanliegen des Buches darstellt: In 4.1 (S. 289–299) wird die sogenannte *Grundlagenkrise* als ein historisches Phänomen analysiert, das aus der Verknüpfung der Grundlagenfragen mit der tiefen Krise des bürgerlichen Bewußtseins in Deutschland nach dem Ersten Weltkrieg entsteht. Sehr zurecht betont Mehrtens, daß die sogenannte Grundlagenkrise für die produktive Mathematik zu keiner Zeit eine Bedrohung, sondern im Gegenteil eine Bereicherung war. Der Verweis auf die quasi politische Rhetorik der am Grundlagenstreit Beteiligten (und der Vergleich mit der vor dem Weltkrieg sehr viel undramatischeren Diskussion derselben Probleme) belegt die paramathematische Natur dieser Krise.

Mehrtens' Vorgehen orientiert sich also am historischen Material, ist aber nicht historisch, sondern eher der Versuch einer rationalen Rekonstruktion entlang des vorgegebenen Begriffspaars. Häufig, allzu häufig fordert Mehrtens eine genauere historische Untersuchung des jeweiligen Fragenkreises. Bei einer solchen Gelegenheit (S. 182) nennt er sein Buch „meine eher strukturalistische Darstellung". Genauer entlehnt er seine Methode Michel Foucaults Diskurs-Analyse.

Der Begriff des Diskurses ist für Mehrtens das entscheidende Mittel, um 1. das Reden der Mathematiker über ihr Fach, 2. das informelle mathematische Gespräch (Heuristik), sowie 3. die fertigen, strikten mathematischen Texte methodisch parallel behandeln zu können. Dies soll auch die Zusammenschau von mathematischen und etwa politischen Kategorien ermöglichen. Bei aller Überzeugungskraft des oben erwähnten, von einer bestimmten historischen Konstellation (Deutschland nach dem Ersten Weltkrieg) handelnden Absatzes über die „Grundlagenkrise", scheint mir aber der Diskursbegriff im allgemeinen nur die zweifelhafte Rolle eines grammatischen *Zeugmas* zu spielen, das die verschiedenen Tätigkeiten der Mathematiker unter einen Titel zusammen- und so Mehrtens ein vorgebliches Methodenkapitel ab-zufassen erlaubt. Eine Methode wird aus diesem Allzwecklabel ‚Diskurs' deshalb nicht, weil seiner Anwendung keinerlei Schranken gesetzt sind. Dies macht die Seichtigkeit der Erläuterungen zu den „Funktionen des Diskurses" in 6.2 aus, und ist übrigens wohl auch der tiefere Grund dafür, warum Foucault in Frankreich heute bereits wieder *passé* ist.

Aber das eigentliche methodische Prinzip, dem Mehrtens in diesem Buch folgt, ist ja die Entfaltung des Gegensatzes Moderne – Gegenmoderne. Diese grundlegende Dialektik einerseits, und Mehrtens Stil an vielen Stellen andererseits (siehe z. B. S. 68 oben) erinnerten mich an Hegel. Und mir scheint, daß der Vergleich zu Hegels Umgang mit Gegensätzen hier sogar lehrreich ist. Für Hegel ist die Spannung des Widerspruchs ein methodisches Mittel, um die (systematische oder historische) Entwicklung der Begriffe zu verstehen (rational zu rekonstruieren). Mehrtens dagegen sucht immer denselben Gegensatz (Moderne – Gegenmoderne) bei verschiedenen Autoren und in verschiedenen Zeiten. Aber nicht auf jeden Vertreter der „Moderne" paßt dieses Epitheton so gut wie auf David Hilbert, von dem bunten Gemisch der „gegenmodernen" Mathematiker ganz zu schweigen.

Als Hegelsche Aufhebung des Gegensatzes Moderne – Gegenmoderne in seiner ersten Bestimmung (vor dem Ersten Weltkrieg) bietet sich „Göttingen" an. Das sagt Mehrtens in etwa auch (5.4). Aber er kann auch hier das Widerspruchspaar nicht loslassen und so muß es für ihn z. B. im Grunde problematisch bleiben, daß Felix Klein als Exponent der Gegenmoderne gleichzeitig für das Frauenstudium eintrat.

Ebenso hätte z. B. etwas Hegelsche Dialektik auch einigen der „Fortsetzungsgeschichten" – schon dieser Titel von Kapitel 4 erhebt nicht gerade einen hohen methodologischen Anspruch – erheblich mehr Relief geben können. Das gilt ganz besonders für den allzu kurzen Abschnitt 4.3 über „‚Arteigene' Anschauung". Hier hätte die Entwicklung von der

Gegenmoderne bis zur nationalsozialistisch auftrumpfenden *„Deutschen Mathematik“* viel sorgfältiger analysiert werden müssen. So liest man, um sich dem in jeder Hinsicht dialektischen Weg von Klein zu Bieberbach zu nähern, heute immer noch am besten Mehrtens' Bieberbach-Biographie von 1987.

Am Ende von 4.3 schreibt Mehrtens, daß die Errungenschaften der mathematischen *Moderne* durch die für den Nazistaat lebensnotwendigen *Anwendungen* der Mathematik gesichert wurden, und knüpft daran eine Assoziation zur „Dialektik der Aufklärung“ (S. 314f). Nun vertragen sich aber doch in Wahrheit alle Zweige der Mathematik, die damals zur Anwendung gelangten, bestens mit einem gegenmodernen Verständnis der Mathematik, ja sogar mit der „Antimoderne“ Bieberbachs. (Letzterer arbeitete gegen Kriegsende mit Udo Wegner an einem Handbuch über „Konforme Abbildung in Theorie und Praxis“). Gerne hätte man von Mehrtens hier etwas zu der wohlbekannten Frage gelesen, warum die Nazis die ihnen ideologisch wie praktisch durchaus gemäße angewandte Mathematik an den Universitäten so schlecht behandelten!

Obwohl Mehrtens sich „nicht in den mathematikphilosophischen Diskurs stellen will“ (S. 467, Fußnote), skizziert er doch seine eigene (formalistische, also modernistische) Auffassung von Mathematik, derzufolge Mathematik Arbeit an der eigenen Zeichensprache ist (6.3) und bietet auch seine Lösung des Problems an, warum eine so formalistisch gedachte Mathematik auf die Außenwelt „paßt“: im Wesentlichen hält er es für ein Scheinproblem (S. 471f). Während mir Mehrtens' Mathematikauffassung sehr naheliegt, überzeugt mich der letzte Punkt nicht, und ein bißchen mehr „philosophischer Diskurs“ wäre hier wohl am Platz gewesen. Übrigens halte ich die chronisch schlechte Behandlung, die Kant (bzw. das von ihm entworfene Zerrbild) im Buch immer wieder erfährt, für einen schweren Fehler.

Da diese Besprechung im Jahresbericht der DMV erscheint, sei erwähnt, daß Mehrtens auch die Gründung der DMV behandelt (5.1), wobei er m.E. die Außenseiterrolle Cantors zu sehr betont.

Und noch ein anderer Hinweis ist in dieser von Mathematikern (und damit nicht der Zielgruppe des Buches!) gelesenen Zeitschrift angebracht: derjenige auf Mehrtens' gelegentliche, oft mißglückte „Erläuterungen“ mathematischer Begriffe für den Laien. Da gibt es gedankenlose Schnitzer: so (S. 111) „Wenn sich die Kreiszahl Pi durch eine algebraische Gleichung darstellen ließe [gemeint ist: Lösung einer solchen wäre], dann wäre die Konstruktion mit Zirkel und Lineal [der Kreisquadratur] möglich“; oder das Durcheinander oben auf Seite 496; oder die Behauptung bei der „Erläuterung“ des Auswahlaxioms (S. 145), die Repräsentierung „jede[r] Teilmenge des Wahlvolks“ sei „unmöglich“, obwohl sie doch heute, z. B. durch Aufsuchen der jeweils kleinsten Ausweisnummer, sogar praktikabel ist. Aber auch da, wo Mehrtens keine Fehler unterlaufen, wird der Leser, der es nicht ohnehin besser weiß, mitunter sehr schlecht bedient (siehe etwa S. 62 zum Gruppenbegriff oder S. 85 über „Funktion“).

Am Ende hängt der Autor seinem Buch noch eine *Coda* an, im wörtlichen Sinne: mit Bezug auf Lacans psychoanalytische Essays, die Mehrtens, wie er selbst sagt, nicht verstanden hat, die aber jedenfalls häufigen Gebrauch von mathematischen Sprachfetzen machen, wird in ähnlich schwer verständlicher Weise über den phallischen Charakter der Eins und die nur private Einbeziehung von Frauen in das Leben Brouwers und Hilberts schwadroniert. Das Buch klingt aus mit einer (in der Tat mindestens hilflosen) Passage aus Freges sogenanntem Tagebuch, über den Begriff der Zahl, deren Einrückung an dieser Stelle libidinöse Untertöne suggeriert. Was von diesem Schluß zu halten ist, muß jeder Leser für sich entscheiden.

Strasbourg N. Schappacher

Jacobson, N., Collected Mathematical Papers (Edited by Gian-Carlo Rota), 3 Bände, Basel u. a.: Birkhäuser 1989, 1648 S., DM 498,–

Das in der Zeit von 1934 bis 1988 geschaffene Werk des großen Algebraikers Nathan Jacobson umfaßt neben mehreren Übersichtsartikeln 82 Publikationen (davon 9 mit Koautoren) und 14 Bücher.

Die vorliegenden Gesammelten Abhandlungen, in drei Bände aufgeteilt, dokumentieren nachhaltig die herausragenden Beiträge zu den folgenden Gebieten: Topologische Algebra, Lie-Algebren und allgemeine nicht-assoziative Algebren, Galois-Theorie, Strukturtheorie von Ringen, assoziative Algebren, Jordan-Ringe und Jordan-Algebren.

Die meisten seiner Ergebnisse über endlich dimensionale Lie-Algebren über einem Körper der Charakteristik Null wie u. a. die Klassifizierung der einfachen Lie-Algebren vom Typ A–D und G sowie die Theorie der vollreduziblen Lie-Algebren linearer Transformationen eines endlich dimensionalen Vektorraumes sind, zum Teil mit verbesserten Beweisen, in sein Buch „Lie Algebras" integriert.

Drei Arbeiten sind der Theorie der p-Lie-Algebren gewidmet. Jeder solchen Lie-Algebra L wird eine assoziative Algebra U – die u-Algebra von L – zugeordnet, die das „p-Analogon" zur universellen Einhüllenden bildet. U ist endlich dimensional, falls L es ist. Dies hat u. a. zur Folge, daß ein endlich dimensionales L nur endlich viele irreduzible p-Darstellungen gestattet. Gewisse Klassen von p-Lie-Algebren, die das Analogon der „gewöhnlichen" Lie-Algebren vom Typ A–D bilden, werden untersucht und Verallgemeinerungen der Derivationsalgebren rein inseparabler Erweiterungen eines Körpers der Charakteristik p werden gegeben.

Reichhaltige und vielseitige Ergebnisse der Originalarbeiten über Jordan-Ringe, Derivationen und Darstellungen von Jordan-Algebren, Klassifizierung und Realisierungen von Jordan-Algebren, Ausnahme-Jordan-Algebren, durch Jordan-Algebren definierte Transformationsgruppen, Koordinatisierung, sind in sein Buch „Structure and Representations of Jordan Algebras" eingearbeitet.

In einigen Arbeiten zur Galois-Theorie verfolgt Jacobson unter anderem drei Richtungen:

a) Eine Galois-Theorie endlicher Gruppen äußerer Automorphismen eines Schiefkörpers.
b) Erweiterung der Galois-Theorie auf nicht-normale und nicht-separable Körpererweiterungen.
c) Eine Galois-Theorie für Schiefkörper, die die äußere Theorie aus a) mit E. Noethers Galois-Theorie endlicher Gruppen innerer Automorphismen vereint. Entscheidender Gebrauch wird hierbei von einer Verallgemeinerung der Dedekind'schen Unabhängigkeit von Automorphismen und dem Jacobson-Bourbaki-Theorem gemacht.

In einer Reihe von Arbeiten entwickelt Jacobson eine Strukturtheorie einfacher Ringe ohne Endlichkeitsbedingungen, die als Spezialfall unter anderem die Wedderburn-Artin-Theorie enthält. Ein zentraler Begriff ist hierbei der der Dichte: Eine Teilmenge A des Ringes aller Endomorphismen eines Vektorraumes V über einem Schiefkörper heißt dicht, wenn jede lineare Abbildung eines endlich dimensionalen Unterraumes von V nach V die Restriktion eines Elementes von A ist. Ein Hauptergebnis besagt: Ein assoziativer Ring ist einfach und besitzt minimale Rechtsideale genau dann, wenn er isomorph ist zu einem dichten Ring A von Endomorphismen eines Vektorraumes V über einem Schiefkörper derart, daß jedes Element von A endlichen Rang hat. Bei der Beantwortung der Frage nach der Eindeutigkeit einer solchen Darstellung wird entscheidend der Dichtesatz von Chevalley-Jacobson benutzt. Dieser Satz spielt auch bei weiteren Untersuchungen eine Schlüsselrolle.

Die in seiner Arbeit „The radical and semi-simplicity for arbitrary rings" entwickelte Strukturtheorie wird sodann auf algebraische assoziative Algebren spezialisiert, wo unter anderen das folgende schöne Ergebnis erzielt wird, das einen Satz von Wedderburn über endliche Schiefkörper und einen Satz von M. Stone über Boole'sche Ringe verallgemeinert: Existiert zu jedem Element a eines Ringes A eine natürliche Zahl $n > 1$ mit $a^n = a$, dann ist A kommutativ.

Die in seinen Orginalarbeiten gewonnenen Ergebnisse über Ringe und über die Galois-Theorie findet man zum größten Teil in seinem Buch „Structure of Rings".

In allen drei Bänden hat Jacobson Kommentare zu seinen Arbeiten und Phasen seines Lebens eingestreut. „Personal History and Commentary" ist faszinierend und allein schon Grund genug, die sehr gut ausgestatteten Bände in die Hand zu nehmen!

München K.-H. Helwig

Kersten, I., Brauergruppen von Körpern, Braunschweig: Vieweg 1990, 178 S., Kart., DM 64,00

In den ersten drei Kapiteln bringt das Buch zunächst eine gute Einführung in die klassische Theorie der zentraleinfachen Algebren (wie man sie in einschlägigen Algebra-Lehrbüchern meistens vermißt). Hauptziel des Buches ist dann die eingehende Darstellung eines Beweises des berühmten Satzes von Merkurjev-Suslin. Die Nützlichkeit der Algebra für die Mathematik insgesamt steht gewiß außer Frage, aber nur selten findet man ein Ergebnis der reinen Algebra, das allein für sich genommen, bereits ein so bestechendes mathematisches Resultat darstellt wie der Satz von Merkurjev-Suslin.

Das Buch hat sich also ein verdienstvolles Ziel gesetzt. Wer nun der Verfasserin dahin folgen will, findet eine präzise und im Aufbau wohlüberlegte Darstellung vor. Diese Darstellung ist (bis auf ein paar Kleinigkeiten) auch sehr klar und zuverlässig. Bisweilen mag sie mancher Leser – je nach Geschmack – etwas lakonisch nüchtern finden, und vielleicht hätte hier und da etwas mehr Akzentuierung wirklich die gute Sache noch besser gemacht.

Zum Aufbau des Buches: Die ersten drei Kapitel vermitteln wie gesagt die Grundkenntnisse über die Brauergruppe eines beliebigen Körpers. Im vierten Kapitel werden nun die spezifischen begrifflichen Voraussetzungen zur Formulierung und dem Verständnis des Satzes von Merkurjev-Suslin besprochen, und es werden einige zum Beweis des Satzes unerläßliche methodische Hilfsmittel erarbeitet. Hierzu gehören vor allem eine (elementar-algebraische) Begründung der Projektionsformel für die K-Gruppen einer endlichen Körpererweiterung sowie die nötigen K-theoretischen Erörterungen des Zahlkörperfalles auf der Grundlage des Artinschen Reziprozitätsgesetzes. Dieses wird natürlich ohne Beweis zitiert, sonst aber ist die Darstellung in sich abgeschlossen. (Wenn es allerdings im Text heißt: „Einen elementaren Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes findet man bei Neukirch", so wird da leicht ein falscher Eindruck vermittelt. Kritisch ist hier auch anzumerken, daß nicht auf den Zusammenhang wenigstens hingewiesen wird, der zwischen dem Artinschen Reziprozitätsgesetz und den Ausführungen am Ende des zweiten Kapitels besteht, wo das einschlägige Resultat über die Brauergruppe eines Zahlkörpers zitiert wird, und dies in einer Weise, als handele es sich nur so um ein Resultat unter vielen anderen. Es ist aber ein wahrhaftiger Hauptsatz, aus dem sich auch das Artinsche Reziprozitätsgesetz auf relativ einfachem Wege ableiten läßt).

Das fünfte Kapitel des Buches ist nun dem eigentlichen Beweis des Satzes von Merkurjev-Suslin gewidmet. In den ersten Abschnitten wird der Satz nach dem Vorbild von Merkurjev mit noch elementaren Methoden auf den „Satz 90 von Hilbert für K_2" zurückgeführt. So einfach dieser Satz sich auch formulieren läßt und seine Aussage auch einleuchtet, so trifft seine Begründung doch auf erheblichen Widerstand. Im letzten Abschnitt des Buches muß dann auch das Feld elementarer algebraischer Kenntnisse endgültig verlassen werden, und es werden Methoden der Algebraischen Geometrie und der Quillenschen K-Theorie benötigt. Im Fall von quadratischen Körpererweiterungen läßt sich der „Satz 90 von Hilbert für K_2“ noch ziemlich elementar begründen. Die Behandlung dieses Falles (der den ursprünglichen, schon als sensationell aufgenommenen Satz von Merkurjev abdeckt) wird daher vorab durchgeführt, und zwar wird eine Beweisversion dargestellt, die auf M. Rost zurückgeht.

Das vorliegende Buch erschließt seiner Leserschaft einen guten Zugang zu einem faszinierenden, aktuellen und grundlegenden Resultat der Algebra; es steht also ein lohnendes Ziel vor Augen, und auf dem Wege dahin kann man - von der Verfasserin umsichtig und im ganzen instruktiv geleitet - viel Gutes und Nützliches lernen. Die ausführlichen und sorgfältig erstellten Literaturhinweise machen das Buch zusätzlich empfehlenswert.

Münster F. Lorenz

Falb, P., Methods of Algebraic Geometry in Control Theory: Part I, Basel u.a.: Birkhäuser Verlag 1990, 203 S., DM 72,-

At a first glance one could be inclined to assume that algebraic geometry and control theory don't have anything to do with each other. Those who are willing to correct this superficious opinion are invited to take a look at this very interesting book which makes the attempt of introducing into the methods of algebraic geometry within the context of control theory. The first part concentrates on so called single input-single output control systems which can be described by four concepts: (a) by a strictly proper rational meromorphic function $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, with Laurent series $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j z^{-j}$ about ∞; (b) a pair of relatively prime polynomials $p(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_{m-1} z^{m-1}$, $q(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m$; (c) by a Hankel matrix $H = (h_{i+j-1})_{i,j=1}^{\infty}$ with finite rank; and (d) by a triple (A, b, c) with A an $n \times n$ matrix, b an $n \times 1$ column vector and c a $1 \times n$ row vector.

The concepts (a) and (b) are clearly equivalent in the sense that $f(z)$ is a strictly proper rational meromorphic function, if and only if $f(z) = p(z)/q(z)$ with $p(z)$ and $q(z)$ relatively prime polynomials of the form given in (b) where m is called the degree of f. The equivalence of the concepts (a) and (c) is based on a theorem by Hankel which states that $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j z^j$ is a strictly proper rational meromorphic function, if and only if the corresponding Hankel matrix $H_f = (h_{i+j-1})_{i,j=1}^{\infty}$ has a finite rank which is equal to the degree of f. In view of this theorem a natural surjective map L:Rat$(n, \mathbb{C}) = \{f \mid f$ a strictly proper rational meromorphic function on $\mathbb{C}$ of degree $n\} \to$ Hank$(n, \mathbb{C}) = \{H{:}H$ a Hankel matrix over $\mathbb{C}$ of rank $n\}$ is defined which is called the Laurent map.

The first goal of the book now consists of giving an appropriate algebraic structure to both Rat(n, k), and Hank(n, k) and of showing that the Laurent map L is an isomorphism with respect to this algebraic structure. For this purpose the complex number field $\mathbb{C}$ is replaced by an arbitrary field k. Then the concepts (b), (c), and (d) of a linear single input-single output control system can be maintained without alterations. The concept of a strictly proper meromorphic function, however, has to be defined in the ring of formal power series as a formal Laurent series $f(z^{-1}) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j z^{-j}$ with $h_j \in k$ where z^{-1} is an indeterminate over k. The rationality of such a meromorphic function is then defined by two relatively prime polynomials p and q as in (b). With this definition the Hankel Theorem mentioned above remains true and the sets $\mathrm{Rat}(n, k)$ and $\mathrm{Hank}(n, k)$ (defined above for $k=\mathbb{C}$) can be identified with subsets of the $2n$-dimensional affine space $A_k^{2n}=k^{2n}$ which are complements of zero sets of suitable polynomials.

This is the point where affine algebraic geometry is coming into play. This is mainly concerned with affine algebraic subsets V of an N-dimensional affine space A_k^N over a field k which are defined as the common zero sets of families of polynomials $f\in k[x_1,\dots,x_N]$. The theory of affine algebraic sets in A_k^N is dominated by two famous results: The first is the so called Hilbert Basis Theorem which states that every polynomial ring $R[x_1,\dots,x_N]$ over a Noetherian ring R is also Noetherian which implies that $k[x_1,\dots,x_N]$ is Noetherian, i.e., every ideal $\mathfrak{A}$ in $k[x_1,\dots,x_N]$ has a finite basis $f_1,\dots,f_r$ such that every polynomial $f\in\mathfrak{A}$ can be represented in the form $f=p_1f_1+\dots+p_rf_r$ for some $p_1,\dots,p_r\in k[x_1,\dots,x_N]$. The second is the Hilbert Nullstellensatz whose formulation takes some definitions: For every subset V of A_k^N let $I(V)$ be the ideal of all polynomials in $k[x_1,\dots,x_N]$ that vanish on V and for every ideal $\mathfrak{A}$ in $k[x_1,\dots,x_N]$ let $V(\mathfrak{A})$ be the affine algebraic set of all common zeros of polynomials in $\mathfrak{A}$. Then the Hilbert Nullstellensatz states that

$$I(V(\mathfrak{A}))=\sqrt{\mathfrak{A}}=\{f\in k[x_1,\dots,x_N] \mid f^m\in\mathfrak{A} \text{ for some } m\}$$

holds true for every ideal $\mathfrak{A}$ in $k[x_1,\dots,x_N]$.

These results are presented and proved in Chapter 5 and are substantially used in the construction of an algebraic isomorphism between $\mathrm{Rat}(n, k)$ and $\mathrm{Hank}(n, k)$. A crucial step in this construction is the observation that both these sets are principal affine open subsets of A_k^N (see Definition 4.12) and therefore can be identified with certain affine algebraic subsets of the affine space A_k^{2n+1} (see Proposition 8.1) which are of the form $V((1-x_{2n+1}\varrho))$ and $V((1-x_{2n+1}\Theta))$, respectively, where ϱ and Θ is the polynomial such that $\mathrm{Rat}(n,k)$ and $\mathrm{Hank}(n,k)$ is the complement of the set of zeros of ϱ and Θ, respectively (where (f) denotes the ideal generated by $f\in k[x_1,\dots,x_{2n+1}]$). The final step is then to show that the Laurent map $L:R(n,k)\to\mathrm{Hank}(n,k)$ induces an isomorphism between $V((1-x_{2n+1})\varrho)$ and $V((1-x_{2n+1})\Theta)$ in the following sence: A k-morphism $\varphi: V\to W$ is a map of an affine algebraic set V in A_k^N into another such set W, which has the property that, for every $g\in k[W]=k[x_1,\dots,x_N]/I(W)$, it follows that $g\circ\varphi\in k[V]$, and a k-morphism $\varphi: V\to W$ is a k-isomorphism, if it is bijective and its inverse map φ^{-1} is also a k-morphism.

This rather detailed description of the essential content of the first eight chapters of the book has been given in order to enable the reader who is not familiar with control theory or affine algebraic geometry to get some idea of the profound relationship that is established in this book between these two seemingly unrelated topics. Of course, this relationship is purely theoretical and may not be of great practical use. But, nevertheless, it gives surprising new insights into the interplay between pure and applied mathematics.

After a second proof of the Laurent isomorphism theorem in a generalized context of the concept of morphism in Chapter 9 the state space realization (A, b, c) of a scalar linear control system is considered in terms of the transfer function $f(z)=c(zI-A)^{-1}b$ and, equivalently, in terms of the Hankel matrix $H=(h_{i+j-1})_{i,j=1}^{\infty}$ with $h_i=cA^{i-1}b$. This gives rise to the definition of the set $S_{1,1}^n$ of (scalar) linear systems of degree n as counterimage of $\mathrm{Rat}(n,k)$ or $\mathrm{Hank}(n,k)$ under suitable realization maps from $A_k^{n^2+2n}$ into A_k^{2n}. With this definition it then follows (see Theorem 10.18) that, if $x=(A,b,c)$ is in $S_{1,1}^n$, then $f_x(z)=c(zI-A)^{-1}b$ is in $\mathrm{Rat}(n,k)$ and, conversely, if $f(z)$ is in $\mathrm{Rat}(n,k)$, then there is some $x=(A,b,c)$ in $S_{1,1}^n$ such that $f_x(z)=f(z)$. A similar statement can also be made for the state space realization in terms of a Hankel matrix as defined above.

For reasons of space limitation no further details concerning the content of the book can be given here. The curious reader is invited to explore this very interesting representation of the relationship between scalar linear control systems and affine algebraic geometry on his own. The first volume will be followed by a second one that will be devoted to the application of projective algebraic geometry to multivariable linear control systems and to which some preliminary account is given in Chapter 23.

Darmstadt W. Krabs

Huppert., B., Angewandte Lineare Algebra, Berlin u.a.: de Gruyter 1990, 646S., DM 198,00

Das vorliegende Buch hat laut Vorwort das Ziel, eine Reihe von Ergänzungen und nichtgeometrischen Anwendungen der linearen Algebra im direkten Anschluß an den Stoff der Anfängervorlesung zu behandeln.

Dementsprechend zerfällt das Buch in zwei Teile. Im ersten Teil, der den Kapiteln I und II entspricht, werden in z.T. recht abstrakter Weise lineare Abbildungen und endlichdimensionale Hilberträume behandelt. Allerdings enthält Kapitel II auch Abschnitte über normierte Vektorräume, Algebrennormen, Ergodensätze und konvexe Mengen.

In den folgenden Kapiteln III–V wendet sich der Autor den Anwendungen zu. Kapitel III behandelt lineare Differential- und Differenzgleichungen und insbesondere Anwendungen auf Schwingungsprobleme. Hier gefallen mir die vielen Beispiele. Natürlich bleiben Wünsche offen. Es hätten sich m.E. sehr leicht noch Stabilitätsbetrachtungen unterbringen lassen, da z.B. bei Differenzengleichungen durch die ausführliche Behandlung der Ergodensätze in Kapitel III die Fundamente dafür gelegt sind.

Nichtnegative Matrizen werden in Kapitel IV behandelt. Nach Beweisen der Sätze von Perron-Frobenius werden mehrere Anwendungen davon behandelt: Das Austauschmodell von Leontieff, Bevölkerungsentwicklung und Analyse mit Hilfe von Leslie-Matrizen. Der Rest dieses Kapitels ist stochastischen Matrizen gewidmet. Auch hier sind viele Beispiele eingestreut, angedeutet durch Überschriften wie: Mischen von Spielkarten, Lagerhaltung und Warteschlangen, Prozesse mit absorbierenden Zuständen, Mittlere Übergangszeiten.

Es fällt auf, daß der Begriff des Graphen einer Matrix nicht explizit vorkommt. Ebenso werden hier M-(Minkowski)-Matrizen nicht behandelt. Allerdings kommen sie in Kapitel III vor, und zwar unter dem Namen Oszillationsmatrizen, der bei anderen Autoren für spezielle total nichtnegative Matrizen benutzt wird (Gantmacher-Krein).

In Kapitel 5 „Geometrische Algebra und spezielle Relativitätstheorie" werden Vektorräume mit Skalarprodukten ohne Definitheitsbedingungen und ihre Anwendung in der Physik behandelt. Der Einfluß von E. Artins Buch „Geometric Algebra" wird in der Einleitung erwähnt. Jedoch geht der behandelte Inhalt weit darüber hinaus. Der Leser wird auch durch die in § 10–12 ausführlich dargestellten Verbindungen zur Physik, insbesondere der speziellen Relativitätstheorie, an Verständnis und Motivation für dieses Gebiet gewinnen.

Das Buch vermittelt weitgehend klassische Resultate. Es ist klar und ausführlich geschrieben und erreicht daher sein Ziel, gewisse Begriffsbildungen der linearen Algebra durch Anwendungen zu motivieren. Hiervon können Dozenten (auch durch die vielen nichttrivialen Beispiele und Aufgaben geeignet für Proseminare) und insbesondere Studenten profitieren.

Es ist daher schade, daß der hohe Preis befürchten läßt, daß nur Wenige dieses Buch erwerben.

Bielefeld L. Elsner

Mathematik für Studium und Praxis

Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure

Eine computerorientierte Einführung
Von Prof. Dr. Hubert Schwetlick und Prof. Dr. Horst Kretzschmar
1991, 376 Seiten, 74 Abbildungen, 34 Tabellen
23 cm x 16,5 cm, ISBN 3-343-00580-0, Festeinband
DM 68,- öS 531,- sFr 68,-

Dieser Band der Reihe Mathematik für Ingenieure stellt Naturwissenschaftlern, Ingenieuren und Studenten technischer Fachrichtungen an Hochschulen die modernen numerischen Verfahren aus der Praxis vor. Die Verfahren können einerseits auf dem Papier und andererseits mit dem Computer auf anstehende Probleme angewendet werden.

Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre

Von Prof. Dr. Hans Göldner
Jeder Band 23 cm x 16,5 cm, Festeinband,
DM 38,- öS 297,- sFr 39,-

Band 1: Grundlagen der Elastizitätstheorie
3., verbesserte Auflage 1991,
236 Seiten, 116 Abbildungen
ISBN 3-343-00495-2

Band 2: Probleme der Elastizitäts-, Plastizitäts- und Viskoelastizitätstheorie
3., durchgesehene Auflage 1992,
356 Seiten, 197 Abbildungen
ISBN 3-343-00805-2

Für Studenten in den Fachrichtungen des Maschinenbaus, für Konstrukteure und Berechnungsingenieure bietet dieses zweibändige Lehrwerk u. a. die Themen: Ebener Spannungs- und ebener Verzerrungszustand - Platten - Schalen - Torsion - Querkraftschubspannungen in dünnwandigen Stäben - Drehsymmetrische Beanspruchung in Rotationskörpern - Statik der Stabtragwerke - Materialverhalten - Plastizitätstheorie - Viskoelastizitätstheorie.

Fachbuchverlag Leipzig

Unsere Bücher bestellen Sie bitte in Ihrer Buchhandlung.
Preisänderungen behalten wir uns vor.

Fachbuchverlag Leipzig GmbH, Naumburger Str. 26, 04229 Leipzig

Walter de Gruyter
Berlin · New York

ROLAND WAGNER-DÖBLER
JAN BERG

Mathematische Logik von 1847 bis zur Gegenwart

Eine bibliometrische Untersuchung

Groß-Oktav. X, 271 Seiten, ca. 200 graphische Darstellungen. 1993. Ganzleinen DM 148,-
ISBN 3 11 013987 1
(Grundlagen der Kommunikation und Kognition / Foundations of Communication and Cognition)

Die Verfasser nehmen eine quantitative Analyse anhand zweier umfassender Logik-Bibliographien vor. Folgende Themen werden behandelt: Fluktuationen wissenschaftlicher Aktivitäten; Epidemiologische Analyse logischer Teilgebiete; Differenzierungsprozeß der Logik im Zeitablauf; Publikationsaktivität und wissenschaftliche Bedeutung von Autoren; Themenwechsel als Markov-Prozeß; Die Ortega-Hypothese; Computersimulation vs. Wissenschaftssysteme.

Walter de Gruyter
Berlin • New York

Geometrie und Physik

von Werner Müller, Volker Enß und Ruedi Seiler
unter Mitwirkung von
Andreas Knauf, Gerhard Knieper
und Robert Schrader

Herausgeber:
Akademie der Wissenschaften zu Berlin
(Arbeitsgruppe: Wechselwirkungen zwischen Geometrie und Physik, Friedrich Hirzebruch (Sprecher)

Groß-Oktav. VII, 192 Seiten. Mit 4 Abbildungen. 1993.
Kartoniert DM 118,- ISBN 3-11-013944-8
(Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Forschungsbericht 8)

Darstellung aktueller Entwicklungen im Grenzgebiet von Mathematik und Physik.
Aus dem Inhalt: Dynamische Systeme, N-Körper Problem, Indextheorie, Spektraltheorie automorpher Formen, Born-Oppenheimer Entwicklung, Quanten-Hall-Effekt, Semiklassik, Elliptische Geschlechter.

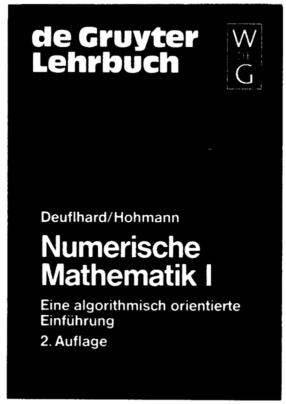
Walter de Gruyter
Berlin • New York

Peter Deuflhard / Andreas Hohmann

Numerische Mathematik I

- Eine algorithmisch orientierte Einführung -

2., überarbeitete Auflage



1993. 15,5 x 23 cm. XV, 371 Seiten.
Mit 62 Abbildungen, 14 Tabellen.
Gebunden DM 98,-- ISBN 3-11-013975-8
Broschur DM 46,-- ISBN 3-11-013974-X

de Gruyter Lehrbuch

Die vorliegende 2. Auflage dieses Lehrbuches über Numerische Mathematik ist gegenüber der 1. Auflage in einer Reihe von Details überarbeitet und zum Teil auch vereinfacht worden. Im Vorgriff auf das in Vorbereitung befindliche Buch Numerische Mathematik II - Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen - von P. Deuflhard und F. Bornemann heißt nun der vorliegende Band Numerische Mathematik I.

Inhalt:

1. Lineare Gleichungssysteme

Auflösung gestaffelter Systeme - Gaußsche Eliminationsmethode - Pivot-Strategien und Nachiteration - Cholesky-Verfahren für symmetrische, positiv definite Matrizen - Übungen

2. Fehleranalyse

Fehlerquellen - Kondition eines Problems - Stabilität eines Algorithmus - Anwendung auf lineare Gleichungssysteme - Übungen

3. Lineare Ausgleichsprobleme

Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate - Orthogonalisierungsverfahren - Verallgemeinerte Inverse - Übungen

4. Nichtlineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme

Fixpunktiteration - Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme - Gauß-Newton-Verfahren für nichtlineare Ausgleichsprobleme - Parameterabhängige nichtlineare Gleichungssysteme - Übungen

5. Symmetrische Eigenwertprobleme

Kondition des allgemeinen Eigenwertproblems - Vektoriteration - *QR*-Algorithmus für symmetrische Eigenwertprobleme - Singulärwertzerlegung - Übungen

6. Drei-Term-Rekursionen

Theoretische Grundlagen - Numerische Aspekte - Adjungierte Summation - Übungen

7. Interpolation und Approximation

Klassische Polynom-Interpolation - Trigonometrische Interpolation - Bézier-Technik - Splines - Übungen

8. Große symmetrische Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme

Klassische Iterationsverfahren - Tschebyscheff-Beschleunigung - Verfahren der konjugierten Gradienten - Vorkonditionierung - Lanczos-Methoden - Übungen

9. Bestimmte Integrale

Quadraturformeln - Newton-Cotes-Formeln - Gauß-Christoffel-Quadratur - Klassische Romberg-Quadratur - Adaptive Romberg-Quadratur - Schwierige Integranden - Adaptive Mehrgitter-Quadratur - Übungen

In Vorbereitung:

Peter Deuflhard/Folkmar Bornemann

Numerische Mathematik II

- Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen -

1993. ca. 400 Seiten. Gebunden ISBN 3-11-013936-7 Broschur ISBN 3-11-013937-5

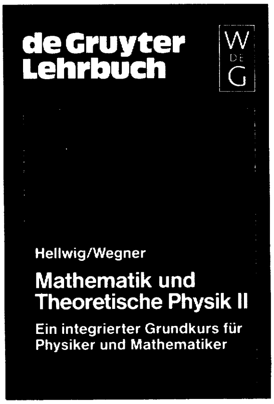
de Gruyter Lehrbuch

Walter de Gruyter
Berlin • New York

Karl-Eberhard Hellwig / Bernd Wegner

Mathematik und Theoretische Physik I, II

- Ein integrierter Grundkurs für Physiker und Mathematiker -



Band II:
1993. 15,5 x 23 cm. XII, 390 Seiten. 41 Abbildungen.
Gebunden DM 98,-/öS 765,-/sFr 96,- ISBN 3-11-013786-0
Broschur DM 58,-/öS 453,-/sFr 58,- ISBN 3-11-014005-5
- de Gruyter Lehrbuch -

Kapitel XIII. Spezielle Relativitätstheorie • Die Ätherhypothese und das Michelson-Morleysche Experiment • Einsteins Ansatz ohne Ätherhypothese • Die Poincarétransformationen • Der Minkowskiraum • Die Lorentzkontraktion und die Zeitdilatation • Das Ruhsystem, die Eigenzeit und die Vierergeschwindigkeit • Relativistische Punktmechanik • Die Elektrodynamik in der speziellen Relativitätstheorie •
Kapitel XIV. Funktionentheorie • Folgen und Reihen komplexer Zahlen • Komplexe Potenzreihen • Analytische Funktionen • Komplexe Integration • Anwendungen der komplexen Integration • Reihenentwicklungen
Kapitel XV. Funktionalanalysis • Normierte Vektorräume • Funktionenräume • Hilbert-Räume • Approximationen • Lineare Operatoren und Funktionale •
Kapitel XVI. Gewöhnliche Differentialgleichungen • Existenz- und Eindeutigkeitssätze • Elementar integrierbare Differentialgleichungen • Systeme linearer Differentialgleichungen • Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten • Variationsprobleme
Kapitel XVII. Partielle Differentialgleichungen • Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung • Die Wellengleichung • Die Laplace-Gleichung
Kapitel XVIII. Wellenbewegungen • Schwingungen einer dünnen homogenen Saite • Die eindimensionale Wellengleichung und die d'Alembertsche Lösung • Das Anfangwertproblem für die unbegrenzte Saite • Das Anfangs- und Randwertproblem der begrenzten Saite • Die dreidimensionale Wellengleichung • Die retardierten Potentiale • Der Separationsansatz und die Fourier-Methode • Fundamentallösungen und Eigenwertprobleme • Die Fouriertransformation
Kapitel XIX. Anfangsgründe der Quantenmechanik • Einige empirische Fakten, die der klassischen Mechanik widersprechen • Grundbegriffe aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie • Beugung von Mikroobjekten als Zufallsexperiment • Die Schrödingergleichung und die Bornsche Deutung • Folgerungen und Interpretationen • Unschärfen
Kapitel XX. Bindung eines Teilchens im Potential • Stationäre Lösungen der Schrödingergleichung • Der harmonische Oszillator • Das Elektron im Coulombpotential (Wasserstoffatom)

Bereits erschienen

Hellwig/Wegner: **Mathematik und Theoretische Physik, Band I**
1992. XI, 443 Seiten. 15,5 x 23 cm. 85 Abbildungen.
Gebunden DM 98,-/öS 765,-/sFr 96,- ISBN 3-11-013785-2
Broschur DM 58,-/öS 453,-/sFr 58,- ISBN 3-11-013857-3