E 20577 F
96. Band Heft 1
ausgegeben am 27. 1. 1994

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1994

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of $ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 $ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart 1994 – Verlagsnummer 2909/1
Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-68723 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 96, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

L. Arnold: Zufällige dynamische Systeme
E. Bayer-Fluckiger: Galois Cohomology and the Trace Forms
R. Bölling: Karl Weierstraß – Stationen eines Lebens
H.-W. Burmann, H. Günzler, H. S. Holdgrün, K. Jacobs: Wilhelm Maak 1912–1992
R. Howe: Some simple examples in the representation theory of semisimple groups
M. Struwe: Das Plateausche Problem
K. Wohlfahrt: Hans Petersson zum Gedächtnis

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jb. d. Dt. Math.-Verein.
96 (1994) 1–20
AMS subject classification: 01 A 70
© 1994 B. G. Teubner Stuttgart

Hans Zassenhaus 1912–1991

W. Plesken, Aachen

Biographie

Hans Zassenhaus, emeritierter Forschungsprofessor der Ohio State University, Columbus, Ohio, starb am 21. 11. 1991 in Columbus nach schwerer Krankheit. Seine fast sechzigjährige Forschungs- und Lehrtätigkeit hinterläßt unauslöschliche Spuren in der Mathematik.

Hans Zassenhaus wurde am 28. 5. 1912 in Koblenz-Moselweiß geboren, wo sein Vater als Gymnasialdirektor tätig war. 1916 zog seine Familie in einen Vorort Hamburgs. Nach zwei Jahren Privatunterricht bereitete er sich an der Schule seines Vaters und an der Lichtwarckschule, an der er 1930 sein Abitur ablegte, auf sein Studium vor, welches er im gleichen Jahr an der Universiät Hamburg aufnahm. Bei E. Artin, E. Sperner und E. Hecke studierte er Mathematik, Physik bei W. Lenz und P. Koch und Biologie bei H. Winkler. Im Juli 1934 promovierte er mit der von E. Artin angeregten Arbeit „Kennzeichnung linearer Gruppen als Permutationsgruppen“ mit „summa cum laude“. Bereits ein Jahr zuvor hatte er das Schmetterlingslemma veröffentlicht, welches jeder Mathematikstudent in der Algebravorlesung beim Beweis des Schreier-Zassenhausschen Verfeinerungssatzes kennenlernt, aus dem dann der Jordan-Höldersche Satz über die Unabhängigkeit der Kompositionsfaktoren einer Gruppe von der gewählten Kompositionsreihe folgt. Von November 1934 bis Juni 1936 bereitete er sich auf das Staatsexamen für das höhere Lehramt in Rostock vor, wo er als „wissenschaftlicher Hilfsarbeiter“ an der dortigen Universität beschäftigt war. Gleichzeitig schrieb er dort sein epochemachendes Buch über Gruppentheorie, welches durch eine Vorlesung von E. Artin inspiriert war. Im Juni 1936 wurde er zum Assistenten E. Artins in Hamburg ernannt. Er blieb in der Assistentenposition auch nach der erzwungenen Emigration Artins im Jahre 1937. Seine Habilitation erfolgte 1938 mit der Habilitationsschrift „Theorie Lie'scher Ringe von Primzahlcharakteristik“.

Einer Universitätskarriere stand seine tief empfundene Ablehnung des Naziregimes entgegen. Immerhin wurde er im März 1940 zum Diätendozent der Universität Hamburg ernannt. Um einem Eintritt in die NSDAP zu entgehen, meldete sich Hans Zassenhaus im Januar 1940 freiwillig zur Marine, wo er die meiste Zeit des Krieges als Mitglied der metereologischen Versuchsgruppe verbrachte, die sich mit mittelfristiger Wettervorhersage beschäftigte. Daneben hatte er sich mit Fragen der Wellenausbreitung auseinanderzusetzen. Jedoch wurde er auch dreimal als Marineartillerist bei der Küstenverteidigung eingesetzt. 1943 erhielt er einen Ruf an die Universität Bonn, auf den er erst nach dem Krieg zurückkam, ihn jedoch nicht annahm, da die Stelle nur dann zur Verfügung stand, wenn ein aus politischen Gründen suspendierter Professor nicht wieder in sein Amt eingesetzt wurde. Statt dessen wurde er Direktor des Mathematischen Institutes der Universität Hamburg, an dessen Wiederaufbau er zusammen mit E. Hecke tatkräftig arbeitete. Seine Antrittsvorlesung [46] steht in der Tradition der großen Antrittsvorlesungen des letzten Jahrhunderts und zeigt Perspektiven auf, deren Relevanz durch die historische Entwicklung bestätigt wurde, vgl. auch [Ben 92]. Im Mai 1947 wurde er zum Professor und Direktor der „Forschungsstelle für praktische Mathematik“ ernannt, einem Institut, welches auf seine Anregung hin geschaffen wurde und später als Institut für angewandte Mathematik von L. Collatz weitergeleitet wurde. Er wirkte mit an der Ausbildung der ersten Studentengeneration nach dem Krieg. Herausragende Studenten waren P. Roquette, H. Leptin und J. André, die später bei Hasse, Witt bzw. Pickert promovierten.

1942 lernte Hans Zassenhaus seine spätere Ehefrau Lieselotte Lohmann kennen, welche er im September desselben Jahres heiratete. Aus dieser Ehe gingen drei Kinder hervor, Michael, Angela und Peter, welche in den Jahren 1943, 1947 und 1949 geboren wurden.

Oktober 1948 bis Juni 1949 verbrachte er als Stipendiat des Bristish Council an der University of Glasgow, wo er im Juni 1949 durch einen „honorary M. A. degree“ ausgezeichnet wurde. Im Oktober desselben Jahres nahm er einen Ruf an die McGill University, Montreal, Canada, als Peter-Redpath-Professor an, um dort eine Graduiertenschule für Mathematik zu gründen. Nach 6 Monaten folgte seine Familie nach. Die zehnjährige Tätigkeit in Montreal wurde durch einen Aufenthalt am Institute of Advanced Studies, School of Mathematics, Princeton, New Jersey, vom Herbst 1955 bis Mai 1956 unterbrochen, sowie von einem Aufenthalt am California Institute of Technology, Pasadena, als Gastprofessor vom Herbst 1958 bis August 1959. Nach der Rückkehr von Princeton wurde er zum Fellow of the Royal Society of Canada gewählt. Es war wohl auch am Caltech, daß er erstmalig selber experimentelle Computeruntersuchungen im Bereiche der algebraischen Zahlentheorie anstellte.

Im Herbst 1959 folgte Hans Zassenhaus einem Ruf an die Notre Dame University, wo er auch von April 1963 bis Februar 1964 das Rechenzentrum leitete. Die Anstellung dort gab er im Februar 1964 endgültig auf. Von Herbst 1963 an ging er zunächst für ein Jahr als Mershon visiting professor zur Ohio State University nach Columbus, Ohio, wo er dann anschließend eine permanente Stellung als Forschungsprofessor annahm, um weiterhin mit Arnold Ross als chairman zu arbeiten, welcher auch von Notre Dame zur OSU gewechselt hatte. Schon zu diesem frühen Zeitpunkt entwickelte er einen Kurs über konstruktive Zahlentheorie und „brachte den Computer in den Hörsaal", indem er die experimentelle Seite der mathematischen Forschung betonte. Er beteiligte sich auch an der Betreuung von besonders begabten Schülern von Highschools, die in sechswöchigen Sommerschulen in aktuelle Gebiete der Mathematik eingeführt wurden. Die Zeit in Columbus war mit vielen auswärtigen Aufenthalten verbunden. So war er im Sommer 1967 Gaußprofessor in Göttingen, im Sommer 1969 Gastprofessor in Heidelberg, 1970 für zwei Terms Gastprofessor an der UCLA in Los Angeles, 1972 im Herbst in Warwick, England, im Zusammenhang mit dem dort stattfindenden Gruppentheoriekolloquium, 1974/75 ging er als distinguished Fairchild Scholar an das California Institute of Technology, Pasadena, 1977–78 und 1983 als sesquicentennial University Professor an die Montreal University. Eine Reihe kürzerer wiederholter Aufenthalte an vielen Europäischen Universitäten wie z. B. Saarbrücken, Linz, London, Aachen etc. sowie ein permanenter Besucherstrom nach Columbus zeigen die vielfältigen Kontakte und Zusammenarbeiten, die er mit Begeisterung und begeisternd pflegte.

Von den vielen akademischen Auszeichnungen, die Hans Zassenhaus erhielt, seien hier die folgenden erwähnt: Dr. h. c. der Universität Ottawa im Jahre 1966, Lester Ford prize for best exposition beim Treffen der MAA in Wisconsin 1967, Dr. Sc. h. c. der McGill University im Jahre 1974, Honorarprofessor der Johannes-Kepler Universität, Linz, Österrreich 1984, Humboldt U. S. Senior Scientist award 1979, Dr. h. c. der Universität Saarbrücken 1985. Von 1969 bis 1991 war er Hauptherausgeber des Journal of Number Theory.

Dieser Bericht wäre unvollständig, wenn er nicht auf den nachhaltigen Einfluß eingehen würde, den H. Zassenhaus über seine wissenschaftlichen Veröffentlichungen, die nach ihm benannten Sätze und Algorithmen sowie die von ihm betreuten Dissertationen hinaus auf mehrere Generationen von Mathematikern ausgeübt hat. Die Gründe, warum er bis zu seinem Lebensende immer wieder junge Menschen in seinen Bann ziehen konnte, sind vielfältig. Offenheit für alles Wißbare, ja Wissensdrang, und fundiertes Allgemeinwissen gekoppelt mit persönlichem Charme machten ihn nicht nur für Mathematiker zu einem beliebten

Gesprächspartner. Seine hilfsbereit-engagierte Art war von Lebendigkeit und Begeisterung getragen, mit denen er auf jede Fragestellung einging. Häufig tauchte in einer Diskussion mit ihm eine Frage auf, die ihn nicht mehr losließ, und am nächsten Morgen überreichte er seinem Diskussionspartner ein oft mehrseitiges Manuskript, in welchem er seine Überlegungen dazu aufgeschrieben hatte. Es gibt sicher viele Arbeiten, bei denen H. Zassenhaus nicht immer Koautor ist, in denen Ideen aus diesen Manuskripten eine wichtige Rolle gespielt haben. Sein breites wie tiefes Wissen war die Grundlage für seine oft unerwarteten Einsichten besonders in Zusammenhänge zwischen verschiedenen Gebieten, und ebenso für sein feines Gespür für zukunftsträchtige Entwicklungen in der Mathematik. Durch seine vielseitigen Interessen erschloß er sich immer wieder neue Arbeitsgebiete, ohne die alten ganz zu verlassen. Am meisten Freude machte es ihm wohl, mit frisch promovierten Mathematikern zusammenzuarbeiten. Er sagte einmal, daß die Zeit direkt nach der Promotion die wichtigste Zeit im Werdegang eines Mathematikers sei, da er einerseits schon eine fertige Ausbildung hinter sich und ein Problem gelöst habe und andererseits offen für neue Probleme sei. Zu den nachfolgend aufgeführten Besuchern aus Deutschland, mit denen er an Notre Dame, OSU bzw. Caltech zusammengearbeitet hat, wie Helmut Hasse, Reinhold Baer, Helmut Wielandt, Hermann Heineken, Wolfgang und Marie Luise Kappe, Peter Roquette, Wolfram Jehne, Herbert Benz, Horst Kempfert, Horst Günter Zimmer, Joachim Neubüser, Hans Peter Rehm, Wilhelm Plesken, Michael Pohst, Wolfgang Rump, Rudolf Land und Johannes Buchmann (in ungefährer zeitlicher Reihenfolge, wobei viele mehrmals oder über Jahre hinweg in Columbus waren), gehören neben damals bereits etablierten Wissenschaftlern besonders viele junge Mathematiker, die sich in dieser kritischen Phase ihres Werdeganges befanden. Die Aufzählung setzt sich fort durch eine Reihe distinguierter ausländische Besucher wie z. B. L. J. Mordell, T. Skolem, M. Eichler und A. Schinzel. In diesem Zusammenhang muß seiner Familie, insbesondere seiner Frau Lieselotte, ein ganz besonderer Dank ausgesprochen werden: Als Besucher oder Doktorand gehörte man zur erweiterten Familie und fand ein warmes menschliches Klima vor, in dem man sich rasch wohl fühlte.

Die Interessen an der Lehre beschränkten sich keinesfalls auf den rein wissenschaftlichen Bereich. Hans Zassenhaus hat seine Konzepte vom Mathematikunterricht in der Schule mit Nachdruck vertreten, er hat sich über Jahre hinweg aktiv an dem von Arnold Ross durchgeführten Sommerschulen für hochbegabte Schüler beteiligt, aus denen mancher erfolgreiche Mathematiker hervorgegangen ist, er hat einen neuen Typ von Vorlesungen kreiert, wie man sehr gut in [67g] nachlesen kann. Seine Botschaft war auf allen Ebenen dieselbe: Den Lernenden so für die Sache zu begeistern und ihn in die Lage zu versetzen, daß er selbst durch Experimente zu (alten oder neuen) mathematischen Endeckungen geführt wurde oder, in seinen eigenen Worten ausgedrückt, vgl. [66a]: „Indem wir Mut zum Experimentieren beweisen, werden uns Experimente den Mut zum Beweisen geben!"

Bei der langen Liste der von ihm betreuten Dissertationen sind nur diejenigen aufgenommen, bei denen H. Zassenhaus offizieller Betreuer war. Für manche andere sind von ihm wesentliche Anregungen ausgegangen, etwa nach seiner offiziellen Emeritierung.

Wissenschaftliches Werk

Das wissenschaftliche Schaffen Hans Zassenhaus' kann in drei große Phasen gegliedert werden. Die erste von 1933 bis 1939 war von einer großen Vielseitigkeit, und seine Arbeiten begründeten oft neue Theorien. Die zweite von 1945 bis 1958 war der Ausführung der in den frühen Arbeiten vorgezeichneten Forschungsprogrammen gewidmet. Gleichzeitig bereitete sich in dieser Periode die dritte Phase vor, in welcher er u. a. durch richtungweisende Beiträge die experimentelle und algorithmische Zahlentheorie als selbständige Disziplin mitbegründet hat.

Thematisch war die erste Phase von der Gruppentheorie im weitesten Sinne motiviert, blieb aber nicht bei ihr stehen, sondern ging von ihr aus in verschiedene Richtungen wie Grundlagen der Geometrie, Ringtheorie, Theorie der Ordnungen, Theorie der modularen Liealgebren, mathematische Kristallographie. Methodisch spielte häufig die Darstellungstheorie eine große Rolle. In der zweiten Phase werden eine Reihe dieser Richtungen weiterverfolgt, insbesondere die Theorie der Liealgebren. Die Zahlentheorie tritt neu hinzu. Doch hatte sie sich durch die grundlegende Arbeit zur Theorie der Ordnungen [38 a] schon vorher angekündigt. Bei den betreuten Dissertationen kommt die diskrete Geometrie und die Geometrie der Zahlen neu hinzu, vgl. [61 b]. Die Erfahrung mit dem Instrumentarium der Geometrie der Zahlen in dieser Periode war sicher von großer Wichtigkeit für den Erfolg in der Entwicklung der algorithmischen Zahlentheorie in der letzten Phase. Besonders bemerkenswert ist, daß schon sehr früh, also vor 1950, konstruktive Fragen und Algorithmen in Gebieten, in denen vorher hauptsächlich theoretische Strukturfragen diskutiert wurden, eine Rolle in seinen Veröffentlichungen spielen. In dieser Hinsicht muß er als Pionier für eine Richtung gelten, die heute von großer Wichtigkeit ist, da sie großen Teilen der Mathematik den Zugang zur Benutzung von Computern eröffnet. In dieser Phase nimmt H. Zassenhaus auch Kontakt zur theoretischen Physik auf, den er bis zum Ende beibehält. Er selbst bezeichnet die Arbeit [54 a] „What is an angle?“ für die philosophische Grundlegung seiner Arbeit als richtungweisend und sieht hier die Ausrichtung der letzten Phase bereits vorweggenommen. Letztere wird in ihrer praktischen Ausprägung durch die gemeinsame Arbeit mit Dade und Taussky [62 b] eingeleitet. Neben der Entwicklung der experimentellen und algorithmischen Zahlentheorie sind die diskrete Geometrie und die Theorie der Liealgebren im Rahmen der mathematischen Physik zu nennen.

Im Gesamtüberblick kann man den mathematischen Standort Hans Zassenhaus' etwa folgendermaßen beschreiben. Hans Zassenhaus war in seinem Denken durch die strukturelle Algebra geprägt, die auch der Ausgangspunkt seiner frühen Arbeiten war. Er blieb jedoch nicht hier stehen, sondern wandte diese Vorgehensweise auf Probleme an, die von außen an ihn herangetragen wurden. Die zweite Säule seiner Arbeit war eine ausgeprägte geometrische Intuition. Aber selbst hier ließ er die durch die Gruppentheorie geprägte Denkweise nie außer acht, wie man z. B. an der späten Arbeit [87 b] zum Kugelpackungsproblem sieht. Es war seine feste Überzeugung, daß die Mathematik immer wieder Anregungen und Impulse von außen braucht, um nicht zu erstarren. Durch die Zusammenarbeit mit

Kristallographen und Physikern hat er diese Anregungen immer wieder gesucht. Schließlich ist das konstruktive Element in seiner Arbeit, das sich später bis zur Algorithmik hin entwickelt hat, ein weiteres Kennzeichen. Daß die Entwicklung elektronischer Rechner parallel verlief, muß als glücklicher Umstand gewertet werden. Aber auch hier dominiert bei ihm immer der abstrakte strukturell-algebraische Denkansatz. Im Zusammenhang mit den letzten beiden Punkten, nämlich den Anregungen von außen und der praktisch konstruktiven Behandlung von Problemen, muß auch seine experimentelle Neigung in der Mathematik gesehen werden. Diese war z. B. bei Gauß noch selbstverständlich, aber zu dem Zeitpunkt, als Zassenhaus sie propagierte, völlig zugunsten einer rein theoretischen Arbeitsweise außer Mode geraten. Der historische Prozeß, in dem sich die Mathematik weiterentwickelt, war Zassenhaus wohl besonders von seinen Implikationen her in [54a] klar vor Augen getreten. Neben den Auswirkungen auf die mathematische Arbeit in der dritten Phase ist hier auch wohl die Beschäftigung mit geschichtlichen Aspekten der Mathematik aus der Sicht des aktiven Mathematikers heraus zu sehen, vgl. z. B. die Herausgabe der Minkowskischen Briefe an Hilbert [73b].

Die außerordentliche Breite seines Wissens und Denkens findet ihren Niederschlag in seinen Arbeiten unter anderem auch dadurch, daß eine einzelne Arbeit oft mehr als einem Gebiet zuzuordnen ist. Daher erscheint es angemessener, bei der Besprechung seiner wissenschaftlichen Veröffentlichungen nicht nach Gebieten getrennt vorzugehen, sondern Zassenhaus' Werdegang durch die Diskussion einiger seiner Arbeiten und deren Auswirkungen nachzuzeichnen.

Die Zassenhaussche Dissertation [34b] kann als eine der ersten Beiträge zum Wiedererkennungsproblem von Gruppen aufgefaßt werden, wie es heute nach der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen häufig behandelt wird. Die in [34b] behandelten Gruppen, also gewisse doppelttransitive Permutationsgruppen mit Frobeniusgruppen als Stabilisatoren oder anders formuliert Permutationsgruppen, deren Elemente durch die Bilder dreier Punkte festgelegt sind, heißen heute Zassenhausgruppen, vgl. [HuB 82] Kap. XII. Einfachste Beispiele sind die $\mathrm{PSL}(2, q)$ für Primzahlpotenzen q in ihrer Operation auf der projektiven Geraden über $\mathbb{F}_q$, die ja auch in [34b] als Permuationsgruppen charakterisiert werden. Weiter sind in [34b] alle 3fach transitiven Zassenhausgruppen klassifiziert. Diese Arbeit hat auf Thompson und andere sicher einen großen Einfluß ausgeübt und einen wichtigen Impuls für die rund 25 Jahre später beginnende Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen gegeben. So entdeckte Suzuki 1960 eine weitere unendliche Serie von Zassenhausgruppen, die Suzukigruppen, und bewies nach Vorarbeiten von Feit 1962, daß dann damit alle Zassenhausgruppen bekannt sind.

In [35b] klassifiziert Zassenhaus die endlichen Fastkörper, welche bereits in seiner Disseration [34b] aufgetaucht waren. Ein Fastkörper erfüllt alle Axiome eines Schiefkörpers bis auf das rechtsseitige Distributivgesetz. Dickson hatte eine Reihe solcher Fastkörper angegeben. Zassenhaus gibt noch sieben weitere Isomorphietypen an und beweist, daß damit alle endlichen Fastkörper (bei ihm vollständige Fastkörper genannt) gefunden sind. Eine Lücke im Vollständigkeitsbeweis ist später von verschiedenen Mathematikern und auch von Zassenhaus selbst, vgl. [85c], geschlossen worden. In [35b] kommen die Grundlagen der Ring- und Körpertheorie, die Grundlagen der Geometrie und die Theorie der Frobeniusgruppen miteinander in Beziehung, welche vorher verbindungslos nebeneinanderstanden. Diese Arbeit hat die Geometrie sehr befruchtet. So sind beispielsweise in den fünfziger Jahren Ebenen über diesen Fastkörpern von J. André studiert worden, vgl. [Wäh 87], und Zassenhaus' Doktorand Kalscheuer hat 1940 alle lokalkompakten zusammenhängenden Fastkörper bestimmt. Fünfzig Jahre später kommt Zassenhaus auf sein frühes Thema zurück und löst beispielsweise durch die Konstruktion unendlicher nicht-Dicksonsche Fastkörper ein lange offenes Problem, vgl. auch [And 92]. Die im Rahmen der Untersuchung [35b] mit Hilfe der Darstellungstheorie klassifizierten endlichen linearen Gruppen, bei denen nur das Einselement den Eigenwert 1 hat, sind später mehrfach von Bedeutung gewesen, so bei der Bestimmung der endlichen Untergruppen der multiplikativen Gruppen von Divisionsalgebren durch Amitsur, so bei der Klassifikation der sphärischen Raumformen, vgl. [Wol 72], und natürlich beim Studium der Frobeniusgruppen selbst und bei weiterführenden Untersuchungen in der Gruppentheorie, vgl. z. B. [Joh 77].

Daß ein Mathematiker von 25 Jahren ein Lehrbuch schreibt, welches 30 Jahre lang das Standardwerk bleibt, aus dem jeder Student Gruppentheorie lernt, ist ein Wunder. Daß der Autor dadurch in seiner Forschung nicht aufgehalten wird, ist ein zweites Wunder. Sicher hat Artins Vorlesung Pate bei [37] gestanden, sicher war die Zeit reif durch die Forschungsarbeit der vorangegangenen Jahre für ein Buch, welches Burnsides und Speisers mehr pragmatische Gesichtspunkte durch eine klare und knappe Hervorhebung abstrakter Strukturen im Geiste von O. Hölder, E. Noether, O. Schreier und E. Artin, insbesondere des Homorphiebegriffes, ersetzt, aber das Buch enthält darüber hinaus eine Fülle neuer Resultate. Es kann mit Recht den Anspruch erheben, die Errungenschaften der Zassenhausschen Generation von Algebraikern zusammengefaßt zu haben, wie W. Magnus, E. Witt, H. Wielandt, O. Grün, H. Fitting, O. Ore und G. Birkhoff, welche durch P. Hall, E. Noether, E. Artin, W. Krull inspiriert waren. 1949 wurde das Buch ins Englische übersetzt [49b], 1958 gab es eine zweite leicht ergänzte Auflage [58b]. Als wichtigstes neues Resultat enthält [37] den Satz, daß ein Normalteiler in einer endlichen Gruppe, bei der Ordnung des Normalteilers und Index des Normalteilers in der Gruppe teilerfremd sind, immer ein Komplement hat, daß also die Restklassenvertreter bei geeigneter Wahl wieder eine Gruppe bilden, und daß alle Komplemente unter der ganzen Gruppe konjugiert sind. Für den Fall eines zentralen Normalteilers hatte I. Schur den ersten Teil dieses Satzes bereits 1902 durch sein berühmtes Summationsargument bewiesen, welches eines der wichtigen Schlüsse in der Kohomologietheorie endlicher Gruppen werden sollte. Für den zweiten Teil des Satzes muß Zassenhaus noch voraussetzen, daß Normalteiler oder Faktorgruppe auflösbar sind. Diese Voraussetzung ist automatisch erfüllt durch den 1963 von Feit und Thompson bewiesenen Satz, daß Gruppen ungerader Ordnung auflösbar sind. Ein allgemeiner Beweis ohne Benutzung des Satzes von Feit-Thompson existiert meines Wissens immer noch nicht.

Die Motivation für die Arbeit [38a] über die Endlichkeit der Klassenzahl endlicher ganzzahliger Substitutionsgruppen nimmt Zassenhaus sicher aus der

Kristallographie, wie sie in Beantwortung des 18. Hilbertschen Problems von Bieberbach und Frobenius bearbeitet wurde. Der Satz selbst, der in der Überschrift angespochen ist, stammt von Jordan und besagt, daß die Gruppe der unimodularen ganzzahligen Matrizen nur endlich viele Untergruppen endlicher Ordnung bis auf Konjugation hat. In [38] ist eine weitgehende Verallgemeinerung bewiesen, welche heute unter dem Namen Satz von Jordan-Zassenhaus bekannt ist und beispielsweise auch den Satz von Dirichlet über die Endlichkeit der Idealklassenzahl in algebraischen Zahlkörpern mit einschließt. Auch hier werden wieder zwei bis dahin weitgehend unabhängig voneinander gesehene Gebiete, die Theorie der endlichen unimodularen Gruppen und die Theorie der Ordnungen in Algebren, zusammengebracht. Der Satz von Jordan-Zassenhaus, welcher auch heute noch als ein ganz zentraler Satz dieser Theorie anzusehen ist, vgl. [Rei 75], ist das erste sehr allgemeine Ergebnis, welches sich nicht nur mit Maximalordnungen beschäftigt. Zassenhaus' Ansatz in [38] ist sogar noch allgemeiner, indem er auch noch ganzzahlige Darstellungen von Lieringen und Halbgruppen mitbehandelt. Sogar für den Jordanschen Fall gibt dieser Beweis völlig neue Einsichten und sogar Konstruktionsansätze.

[38 b] ist wohl aus einer ähnlichen Motivation wie [38 a] heraus entstanden; Ziel war sicherlich ein tieferes Verständnis des Bieberbachschen Satzes über die Existenz n linear unabhängiger Translationen in einer n-dimensionalen Raumgruppe, also einer diskreten Bewegungsgruppe mit kompaktem Fundamentalbereich im n-dimensionalen Euklidischen Raum. Zassenhaus stellt die Untersuchung in einen breiteren algebraischen Rahmen und beweist zunächst einige grundlegende Sätze über Matrixgruppen über Körpern, so z. B. die Auflösbarkeit lokalauflösbarer Matrixgruppen, deren derivierte Länge er zudem durch eine Funktion des Grades beschränken kann, vgl. [Weh 73]. Dann analysiert er diskrete komplexe Matrixgruppen, deren irreduzible Konstituentengruppen beschränkte Koeffizienten haben, genauer im Geiste des Frobeniusschen Ansatzes und gibt dann explizit Elemente an, die im Radikal, also dem größten auflösbaren Normalteiler der Gruppe, liegen müssen. Im Bieberbachschen Fall ist dieses Radikal der Translationsnormalteiler, dessen Rang sich ebenfalls aus der allgemeineren Zassenhausschen Analyse ergibt. Die Ergebnisse und die Methode greift Zassenhaus nochmals im Appendix von [78 g] auf, wo die Analyse so weit vervollständigt wird, daß ein Algorithmus zur Konstruktion aller diskreten n-dimensionalen Euklischen Bewegungsgruppen angeben wird, der die Kenntnis der Raumgruppen bis zur Dimension n voraussetzt. Der Fragenkreis um die kristallographischen Gruppen wird in [48 a] vorläufig abgerundet, wo der Zassenhaus-Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen unter Voraussetzung der Kenntnis der endlichen unimodularen Gruppen in der betrachteten Dimension und ihrer Normalisatoren erstmalig veröffentlicht ist. Zum einen nimmt hier Zassenhaus einen Standpunkt ein, der bis vor kurzem in der reinen Mathematik gar nicht so selbstverständlich war, daß es nämlich zwischen einer abstrakten Endlichkeitsaussage und einer expliziten aufzählenden Klassifikation noch Raum für einen Algorithmus gibt, der sogar in vielen Fällen wichtiger und wertvoller ist als eine mühsame Falldiskussion, die zur Klassifikation führt. Zum anderen ist von theoretischer Seite zu sagen, daß in einer Reihe von Arbeiten wie [37], [38 a] und [48 a] wesentliche Aspekte der Kohomolo-

gietheorie von Gruppen schon sehr sebstverständlich benutzt wurden, bevor letztere als eigenständige Disziplin in der Gruppentheorie in den fünfziger Jahren eingeführt wurde.

Der Kristallographie ist Zassenhaus sein Leben lang treu geblieben. Die grundlegenden Ideen aus [38a], [38b] und [48a] kommen nach den vorbereitenden Arbeiten [72e], [72f] und [73a] in dem umfassenden Buch [78g] zum Tragen, wo neben einer vollständigen Auflistung aller 4783 vierdimensionaler Raumgruppentypen auch erstmalig ein dimensionsunabhängiges Definitionsgebäude für die gängigen Begriffe der mathematischen Kristallographie gegeben wird. Neben Kristallographen und Gruppentheoretikern ist dieses Buch auch für Topologen wegen der fixpunktfreien Raumgruppen von Interesse, die ja als Fundamentalgruppen von flachen Mannigfaltigkeiten oder Euklidischen Raumformen auftreten, vgl. [Wol 72] oder [Cha 86]. Für den Autor dieses Artikels waren die Zassenhausschen Ideen in den gerade aufgezählten Arbeiten Basis für die Untersuchung endlicher unimodularer Gruppen in höheren Dimensionen.

Mit seiner Habilitationsschrift [39b] legte Zassenhaus die Fundamente der Theorie der modularen Liealgebren, welche heute durch die Klassifikation der einfachen Liealgebren zu einem ihrer Höhepunkte gelangt ist, den Zassenhaus bereits in [39b] als ein Ziel explizit erwähnt. Seine Motivation kam aus der Gruppentheorie und seine Hoffnung, daß alle endlichen einfachen Gruppen als Automorphismengruppen von modularen Liealgebren auftauchen, hat sich in der Tat realisiert, allerdings nicht in der Form, daß die Theorie der modularen Liealgebren zum Klassifikationsbeweis der endlichen einfachen Gruppen beigetragen hat. Verfeinerungen und Vereinfachungen von [39a] sowie nochmals der Zusammenhang mit den Magnusschen Ideen, p-Gruppen durch zugeordnete Liealgebren zu studieren, sind in [39c], [40], [53], [54b], [59c], [64c] diskutiert. Einige der Hauptergebnisse sind eine Primärzerlegung für nilpotente Liealgebren sowie der Satz, daß irreduzible Darstellungen von nilpotenten Liealgebren über algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik p immer p-Potenzgrad haben, vgl. [Sel 67] oder [StF 88]. Übrigens ist die später als Zassenhaus-Brauer-Jennings-Reihe bezeichnete Zentralreihe für p-Gruppen in [39c] erstmalig definiert. Natürlich war Zassenhaus auch an der Charakteristik-Null-Theorie für Liealgebren interessiert. Beispielsweise beweist er in [52a] eine weitgehende Verallgemeinerung des Satzes von Ado über die Existenz treuer endlichdimensionaler Darstellungen von Liealgebren. Die Zusammenarbeit mit theoretischen Physikern, vgl. [74b], [74c] etc., die bis in die letzten Jahre fortdauerte, hat hier eine ihrer theoretischen Wurzeln.

Zassenhaus gab den ersten elementaren, also ohne analytische Hilfsmittel auskommenden Beweis für Dirichlets Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen in [49a]. Diese sehr schöne Arbeit ist gleichzeitig seine erste rein zahlentheoretische Veröffentlichung. Sie stützt sich u. a. auf die Resultate über die elementare Durchführbarkeit der Anordnung des Körpers der reell algebraischen Zahlen aus der Dissertation seines von Artin übernommenen Doktoranden A. Hollkott von 1941. Die im klassischen Beweis verwendeten L-Reihen und ihre Eulerprodukte werden durch endliche Partialsummen bzw. Partialprodukte ersetzt. Sowohl [49a] als auch Hollkotts Dissertation liegt eine Philosophie der

„Finitisierung" der Beweise von Resultaten zugrunde, die mit klassischen Mitteln bewiesen worden sind, welche heute wieder durch die Bedeutung der Computer aktuell geworden ist und Zassenhaus' Werdegang deutlich beeinflußt hat. Speziell Hollkotts Existenzbeweis des rellen Abschlusses eines angeordneten Körpers ohne Benutzung des Zornschen Lemmas wurde bei der Entwicklung eines computergerechten Kalküls reeller Wurzeln von Polynomen von Zassenhaus in [70a] wieder aufgegriffen. Moderne Beweise des Hollkotschen Resultats findet man in [LoR 89] und [San 91]. Die Zahlentheorie, insbesondere die algebraische Zahlentheorie, spielte nach dem Auftakt in [49a] eine immer dominantere Rolle in Zassenhaus' mathematischer Arbeit.

Ein guter Teil der Beschäftigung mit der diskreten Geometrie und der Geometrie der Zahlen, zunächst im Rahmen von Dissertationsprojekten unter der Bezeichnung „statistische Geometrie", war sicherlich auch durch die Zahlentheorie motiviert. In [61b] gibt Zassenhaus einen Überblick über die Ergebnisse seiner Studenten und kommt in [72g] zu einer sehr schönen Packungsungleichung, die viele der Ergebnisse seiner Doktoranden einschließt.

Die entscheidende Arbeit, welche die dritte Phase seines mathematischen Schaffens einleitete, ist [62b] mit den beiden zusätzlichen Noten [61c] und [63a]. Es wird die Halbgruppenstruktur der Idealklassen einer Ordnung in einer kommutativen Algebra studiert. Der Hauptsatz besagt, daß in einer kommutativen Ordnung der Dimension n die $(n-1)$-te Potenz jedes Ideals bezüglich ihrer Ordnung invertierbar ist. Dies ist ein sehr überraschendes Ergebnis, welches eine ganze Reihe weitergehender theoretischer Untersuchungen zur Folge hatte, wie man indirekt [CuR 81] Par. 35 entnimmt. Jedoch sollte für Zassenhaus, mehr als für seine beiden Koautoren, die Tatsache Folgen haben, daß das Ergebnis zunächst experimentell durch Computerrechnungen „beobachtet" wurde. Wie Zassenhaus später schreibt, konnte jeder der drei Autoren einen Beweis erbringen, der entscheidende Schritt war jedoch das Aufstellen der Vermutung, die ohne aufwendige Computerrechnung nicht zustande gekommen wäre. Zassenhaus' Antwort auf diese Erfahrung hieß experimentelle Zahlentheorie und konstruktive Zahlentheorie. Auf letztere hatte auch das Resultat selbst Einfluß, da es die theoretische Grundlage für die ersten Algorithmen zur Auffindung der Maximalordnung in einem Zahlkörper darstellte. Wie er sich die experimentelle Zahlentheorie in der Lehre vorstellt, führt er eindrucksvoll in [66a] und [67g] aus. Was die Forschung betrifft, geht er mit großem Elan und Gründlichkeit daran, klassische Theorien aus dem Bereich Algebra und Zahlentheorie algorithmisch aufzuarbeiten. Schließlich sind Algorithmen und ihre Implementation der Weg zu den Experimenten, aber gleichzeitig vertiefen sie unser Verständnis der Theorie, wie diese Arbeiten zeigen. Die behandelten Themenkreise sind: Konstruktion von Maximalordnungen in [67a], von primitiven Elementen für Körpererweiterungen in [67b], Fundamentalsatz der Algebra und Nullstellen komplexer Polynome aus reeller Sicht in [67b], weitergeführt in dem Kalkül für reelle Wurzeln, der auf Hollkotts Dissertation aufbaut (s. o.) in [70a], endliche Körper in [68a], Galoisgruppen in [67a] und [71a], Faktorisierung ganzzahliger Polynome in [69g] und Einheitengruppen von Ordnungen in [72d]. Der erste große Erfolg, daß ein von außen gestelltes Problem mit solchen Methoden gelöst werden konnte, welches sich rein theoretischen Methoden verweigert hatte, kam in [69j], wo drei von Hasse angegebene Zahlkörper als gleich nachgewiesen wurden. Im Hinblick auf die konstruktive algebraische Zahlentheorie kristallisierten sich vier Grundaufgaben als wesentlich heraus, vgl. [82a]: 1. Auffinden der Galoisgruppe eines rationalen Polynoms, 2. Bestimmen einer Basis der Maximalordnung eines Zahlkörpers, 3. Bestimmen von Fundamentaleinheiten eines Zahlkörpers und 4. Bestimmung der Idealklassengruppe. Der Umgang mit endlichen und angeordneten Körpern, die Benutzung der Geometrie der Zahlen sowie die p-adischen Methoden ordnen sich hier ein. Im Laufe der Zeit wurden die Methoden verfeinert, so gab es mindestens drei Runden des Maximalordnungsprogammes jeweils beginnend mit [67a], [72a], [73e]. Praktisch jedes Computeralgebrapaket benutzt zum Faktorisieren von Polynomen mit rationalen Koeffizienten Methoden, die von Zassenhaus in [69g] und [75d] entwickelt wurden und auf dem p-adischen Hochheben von Idempotenten in Ordnungen beruhen, vgl. auch [78a] und [85d]. Als besondere Perle, die sich sowohl für die Präsentation in einer Grundvorlesung eignet als auch von großer praktischer Bedeutung ist, sei auf den Cantor-Zassenhaus-Algorithmus zum Faktorisieren von Polynomen über endlichen Körpern in [81c] verwiesen. Die Methoden zur Einheitenbestimmung aus [77j], [82c, d] und Klassengruppenbestimmung in [85e] sind wohl bis heute die besten bekannten Methoden. Eine lehrbuchmäßige Darstellung der algorithmischen algebraischen Zahlentheorie findet man in [89c]. Dieses Buch ist laut seinem Vorwort ein Schritt in eine neue Richtung, existierende Theorie von einem konstruktiven Standpunkt aus zu modifizieren und den Leser zu seinen eigenen Rechenexperimenten anzuregen. Es hat sicher das einzigartige Potential in unserer Forschungslandschaft, welche sich in immer zahlreichere Teildisziplinen aufspaltet, arithmetisch interessierte Mathematiker und Informatiker wieder an einen Tisch zu bringen.

Eine von Zassenhaus immer als sehr wichtig eingeschätzte Anwendung der algorithmischen Zahlen- und Gruppentheorie ist das Bemühen um die Klassifikation der vierdimensionalen Raumgruppen, welches nach Vorarbeiten in [72e, f] und [73a] schließlich in [78g] zu einem Standardwerk auf dem Gebiet der höherdimensionalen Kristallographie geführt hat. Die Entwicklung in Kristallographie und Festkörperphysik haben Zassenhaus recht gegeben: Raumgruppen bis zur Dimension 6 werden heute zur Beschreibung von Quasikristallen und modulierten Strukturen in Kristallen herangezogen. Gemäß seiner Doktrin, daß die Mathematik sich jung erhalten muß durch Problemstellungen und Erfahrungen aus den außermathematischen Anwendungen, hat Zassenhaus immer einen guten Kontakt mit Physikern gehalten. Da ist ein gemeinsames Seminar mit dem Physiker Pascual Jordan zu nennen, da ist die Beschäftigung mit der Relativitätstheorie aus den fünfziger Jahren, vgl. [58c], zu erwähnen, schließlich fand Zassenhaus Anfang der siebziger Jahre Partner aus der Physik und eine ihn besonders ansprechende Fragestellung, welche zu einer fast 20jährigen intensiven Kooperation führte. Es handelt sich um die Anwendung der Lietheorie in der Physik. Ausgangspunkt waren Fragen der Symmetriebrechung oder mathematisch gesprochen die Frage nach den abgeschlossenen Untergruppen der in der Physik auftretenden Liegruppen. Genauso wenig wie ihn der Bourbakische Zeitgeist in der Mathematik davon abhalten konnte, die algorithmische Zahlentheorie zu dem zu machen, was sie heute ist, hat er sich auch hier nicht daran gestört, daß innerhalb der Lietheorie Klassifikationen von auflösbaren Liealgebren, Bestimmung von Teilalgebren in reellen halbeinfachen Liealgebren etc. nicht gerade im Trend der Zeit lagen. Zunächst werden für ganz konkret vorgegebene Liealgebren alle Unteralgebren bestimmt und für gewisse unendliche Familien die maximal auflösbaren Teilalgebren, vgl. [74b–d], [75b, c]. Die zugehörigen Gruppen werden mitdiskutiert. Nach bekanntem Muster aus der Zahlentheorie werden die Methoden zu computerfähigen Algorithmen verfeinert. Am Ende, vgl. [87c], standen ziemlich allgemeine Programme zur Verfügung, um in diesem Fragenkreis konkrete Probleme zu erledigen. Im Laufe der Zeit kamen eine Reihe modifizierter und auch andersartiger Fragestellungen hinzu, so die Bestimmung von maximal abelschen Teilalgebren [78f], [83d], Bestimmungen von verallgemeinerten Casimirelementen und Invarianten [76h], [77e], Normalformen von Elementen [83c]. Wie immer bei Zassenhaus ergaben sich natürlich auch konstruktive und in Algorithmen umwandelbare Beweise klassischer Resultate, z. B. über die Existenz von Cartanteilagebren in [83a]. Es besteht kein Zweifel, daß in diesen Arbeiten die besten algorithmischen Methoden für den Umgang mit reellen Liealgebren entwickelt worden sind, und es bleibt zu hoffen, daß sich Mathematiker finden, die diese Art der Kontaktpflege mit der Physik weiterführen zur gegenseitigen Befruchtung der beiden Wissenschaften.

Es gibt ab 1960 eine Reihe von Arbeiten aus verschiedenen Gebieten, die weder mit der konstruktiven Zahlentheorie, noch der Lietheorie oder der Kristallographie eine Beziehung haben. Es sei hier deutlich gesagt, daß diese Arbeiten alleine schon jedem Mathematiker Ehre bereiten würden. Zumindest seien die Gebiete hier kurz erwähnt. Häufig, aber nicht immer sind die Arbeiten gemeinsam mit Koautoren verfaßt, wobei auf Grund seines mathematischen Werdegangs bei Zassenhaus ein natürliches Interesse vorlag und die Koautoren die konkreten Probleme mit Vorarbeiten beigesteuert haben. Als Beispiele seien hier genannt die Theorie der Ordnungen und die ganzzahlige Darstellungstheorie [61d], [66c], [67c], [67e], [69b], [72h], [77d], [78b], [83b], [85b], ganzzahlige Gruppenringe vgl. [74e], [77f–h], [84b], Gruppentheorie, vgl. [68d], [69c], [69k], [70c], [71b], [71e], [78d], [78e], Zahlentheorie vgl.[65e], [66d], [69a], Matrixtheorie vgl. [61a], [69d], [72b, c], nichtassoziative Strukturen vgl. [66b], Geschichte der Mathematik vgl. [73b–d], [75f], [82e, f]. Im Bereich der ganzzahligen Gruppenringe muß die Zassenhausvermutung, vgl. [RoT92], noch hervorgehoben werden, welche besagt, daß eine Gruppenbasis des ganzzahligen Gruppenringes $\mathbb{Z}G$ einer endlichen Gruppe G, bereits in der rationalen Gruppenalgebra $\mathbb{Q}G$ zu G konjugiert ist. Obschon sich die von Zassenhaus geäußerte Vermutung sich nicht voll bewahrheitet hat, hat sie doch das Isomorphieproblem für ganzzahlige Gruppenringe erheblich vorangebracht.

Mit diesen Bemerkungen bin ich sicher dem mathematischen Werk von Hans Zassenhaus nur sehr unvollkommen gerecht geworden, aber immerhin hoffe ich, die meisten der von ihm befruchteten Gebiete gestreift zu haben. Es gibt sicher wenige Mathematiker, die ein so weites Gebiet durch Forschungsbeiträge bearbeitet haben, die so viele grundlegende Beträge geleistet haben. Wenn diese Zeilen als Wegweiser durch die Zassenhausschen Veröffentlichungen dienen, so ist das sicher eher im Sinne von Hans Zassenhaus, als eine überschwengliche Würdigung seiner Leistungen. Denn jeder, der ihn kannte, weiß, daß die Mathematik sein Anliegen war und er jedem gerne einen Blick in seine faszinierende Welt eröffnete.

Danksagung. Bei dem Abfassen dieses Nachrufs haben mich zahlreiche Kollegen, Freunde und frühere Schüler von Zassenhaus unterstützt durch aufschlußreiche Gespräche, Hinweise, Manuskripte und Anregungen. Ihnen allen sei an dieser Stelle gedankt, insbesondere E. Becker, H. Bender, G. Cliff, W.-D. Geyer, M. L. Kappe, O. Kegel, A. Kostrikin, J. Neubüser, C. Müller, M. Pohst, P. Roquette, Sudarshan Sehgal, Surinder Sehgal, H. Wefelscheid, A. Weiss, H. G. Zimmer. Mein ganz besonderer Dank gilt Frau L. Zassenhaus.

Literatur

[And 92] André, J.: In Memoriam Hans Zassenhaus. Results in Math. vol 21, 223–224 (1992)
[Ben 92] Bender, H.: Entwicklungslinien der Theorie endlicher Gruppen. In: Geyer, W.-D. (Herausg.): Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Jubiläumstagung 100 Jahre DMV Bremen 1990. (1992), 77–123
[Cha 86] Charlap, L. S.: Bieberach Groups and Flat Manifolds. Springer Verlag 1982
[CuR 81] Curtis, C. W.; Reiner, I.: Methods of representation theory I. John Wiley 1981
[HuB 82] Huppert, B.; Blackburn, N.: Finite Groups III. Springer Verlag 1982
[Joh 77] Johnson, K.: Automorphismengruppen mit lauter zyklischen Fixgruppen. Habilitationsschrift, Kiel 1977
[LoR 90] Lombardi, H.; Roy, M.-F.: Elementary constructive theory of ordered fields. In: Proceedings MEGA 90 (hrgb. Mora u. Traverso). Birkhäuser 1990
[Rei 75] Reiner, I.: Maximal Orders. Academic Press 1975
[RoT 92] Roggenkamp, K. W.; Taylor, M. J.: Group Rings and Class Groups. DMV 18, Birkhäuser 1992
[San 91] Sander, T.: Existence and uniqueness of the real closure of an ordered field without Zorn's Lemma. J. Pure Appl. Alg. **73** (1991) 165–180
[Sel 67] Seligman, G. B.: Modular Lie Algebras. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Bd. 40, Springer 1967
[StF 88] Strade, H.; Farnsteiner, R.: Modular Lie Algebras and their Representations. Dekker 1988
[Wol 72] Wolf, J.: Spaces of constant curvature. Second edition. Berkeley 1972
[Wäh 87] Wähling, H.: Theorie der Fastkörper. Thales Verlag 1987
[Weh 73] Wehrfritz, B. A. F.: Infinite linear groups. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Bd. 76, 1973

Schriftenverzeichnis Hans Zassenhaus

[34a] Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **10** (1934), 106–108
[34b] Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. (Dissertation 28. 7. 34) Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1934), 17–40 (Gesamtband 1936)
[35a] Über transitive Erweiterungen gewisser Gruppen aus Automorphismen endlicher mehrdimensionaler Geometrien. Math. Ann. **111** (1935), 748–759
[35b] Über endliche Fastkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935), 187–220 (Gesamtband 1936)
[37] Lehrbuch der Gruppentheorie. Band 1. Teubner-Verlag, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Heft 21, 1937

[38a] Neuer Beweis der Endlichkeit der Klassenzahl bei unimodularer Äquivalenz endlich ganzzahliger Substitutionsgruppen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **12** (1938), 276–288
[38b] Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **12**, (1938), 289–312
[39a] Zum Gedenken an Hans Fitting. Jber. d Dt. Math.-Verein. **49**, Abt. 1 (1939), 93–96
[39b] Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **13** (1939), 1–100
[39c] Ein Verfahren, jeder endlichen p-Gruppe einen Lie-Ring mit der Charakteristik p zuzuordnen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **13** (1939), 200–207
[40] Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Ringe bei Charakteristik $p > 0$. J. reine u. angew. Math. **182** (1940), 150–155
[41] Tabelle der Absolutglieder der Eisensteinreihen $E_2(\tau)$ für die ersten Primzahlen und Dimensionen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **14** (1941), 285–288
[46] Methoden und Probleme der modernen Algebra, Antrittsvorlesung, Selbstverlag der Universität Hamburg, 1946
[48a] Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen. Commentarii Mathematici Helvetici **21** (1948), 117–141
[48b] Gruppentheorie. Fiat Rev. German Sci. 1939–1946. Pure Mathematics I, 1948, 59–80, auch erschienen in: Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946, Band 1: Reine Mathematik, Hrsg. W. Süss, 59–80. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung 1948
[49a] Über die Existenz von Primzahlen in arithmetischen Progressionen. Commentarii Mathematici Helvetici **22** (1949), 232–259
[49b] The Theory of groups, 1st Edition. (1949), VIII 159 pp
[50] An equation for the degrees of the absolutely irreducible representations of a group of finite order. Canadian J. Math. **2** (1950), 166–167
[52a] Über die Darstellung der Lie-Algebren bei Charakteristik 0. Commentarii Mathematici Helvetici **26** (1952), 252–274
[52b] A group-theoretic proof of a theorem of Maclagan-Wedderburn. („Mult.-Gruppe e. endl. Schiefkörpers ist abelsch"). Proc. Glasgow math. Assoc. **1** (1952), 53–63
[52c] The quadratic law of reciprocity and the theory of Galois fields. Proc. Glasgow math. Assoc. **1** (1952), 64–71
[53] Trace functions on algebras with prime characteristic. Amer. math. Monthly **60** (1953), 685–692
[54a] What is an angle? Amer. math. Monthly **61** (1954), 369–378
[54b] The representations of Lie algebras of prime characteristic. Proc. Glasgow math. Assoc. **2** (1954), 1–36
[54c] Über eine Verallgemeinerung des Henselschen Lemmas. Arch. Math. **5** (1954), 317–325
[57a] (mit S. Bourne) On a Wedderburn-Artin structure theory of a potent semiring. Proc. nat. Acad. Sci. USA **43** (1957), 613–615
[57b] A theorem of Friedrichs. Trans. roy. Soc. Canada III, **3**. Ser. 51 (1957), 55–64
[58a] (mit S. Bourne) On the semiradical of a semiring. Proc. nat. Acad. Sci. USA **44** (1958), 907–914
[58b] The theory of groups, 2nd edn. Chelsea Co., New York, 1958
[58c] (mit Max Wyman) Zero curvature tensor in Einstein's unified field theory. Phys. Review, **II**. Ser. 110 (1958), 228–236
[58d] On a normal form of the orthogonal transformation, I-III. Canadian math. Bull. **1** (1958), 31–39, 101–111, 183–191
[58e] Invariant bilinear forms on Lie algebras, (Abstract), Short communications. Internat. Congr. Math. (Edingburgh, 1958), pp. 25
[59a] (mit Olga Taussky) On the similarity transformation between a matrix and its transpose. Pacific J. Math. **9** (1959), 893–896
[59b] On an application of the theory of Lie algebras to group theory. Proc. Sympos. pure Math. **1** (1959), 105–108
[59c] On trace bilinear forms on Lie-Algebras. Proc. Glasgow math. Assoc. **4** (1959), 62–72
[61a] A remark on a paper of O. Taussky. J. Math. Mech. **10** (1961), 179–180
[61b] Modern developments in the geometry of numbers. Bull. Amer. math. Soc.**67** (1961), 427–439
[61c] (mit E. C. Dade und O. Taussky) On the semigroup of ideal classes in an order of an algebraic number field. Bull. Amer. math. Soc. **67** (1961), 305–308

[61d] (mit I. Reiner) Equivalence of representations under extensions of local ground rings. Illinois J. Math. **5** (1961), 409–411

[62a] On the spinor norm. Arch. Math. **13** (1962), 434–451

[62b] (mit E. C. Dade und O. Taussky) On the theory of orders, in particular on the semigroup of ideal classes and genera of an order in an algebraic number field. Math. Ann. **148** (1962), 31–64

[62c] Problem 5008. Amer. Math. Monthly **69** (1962), 171

[63a] (mit E. C. Dade) How programming difficulties can lead to theoretical advances. Proc. Sympos. appl. Math. **15** (1963), 87–94

[63b] The concept of depth in teacher training. Amer. Math. Monthly **70**, No. 1 (1963), 85–88

[64a] Emil Artin, his life and his work. Notre Dame J. formal Logic **5** (1964), 1–9

[64b] (mit R. P. Bambah und C. A. Rogers) On coverings with convex domains. Acta arithmetica **9** (1964), 191–207

[64c] (mit R. E. Block) The Lie algebras with a nondegenerate trace form. Illinois J. Math. **8** (1964), 543–549

[65a] Book Review on Generators and Relations for Discrete Groups. Second Ed. by H. S. M. Coxeter and W. Moser. SIAM Rev. **7**, No. 6 (1965), 588

[65b] On the Hensel lemma for Lie algebras. Math. Z. **86** (1965), 396–409

[65c] (mit R. P. Bambah und A. Woods) Three proofs of Minkowski's second inequality in the geometry of numbers. J. Austral. math. Soc. **5** (1965), 453–462

[65d] (mit K. Hoechsmann) Über das Kriterium von Cartan-Killing. Math. Z. **90** (1965), 202–204

[65e] (mit A. Schinzel) A refinement of two theorems of Kronecker. Michigan math. J. **12** (1965), 81–85

[66a] Experimentelle Mathematik in Forschung und Unterricht. Math. Phys. Semesterber., n. F. **13** (1966), 135–152

[66b] (mit W. Eichhorn) Herleitung von Acht- und Sechzehn-Quadrate Identitäten mit Hilfe von Eigenschaften der verallgemeinerten Quaternionen und der Cayley-Dicksonschen Zahlen. Arch. Math. **17** (1966), 492–496

[66c] (mit K. A. Hirsch) Finite automorphism groups of torsion-free groups. J. London Math. Soc. **41** (1966), 545–549

[66d] (mit D. J. Lewis und A. Schinzel) An extension of the theorem of Bauer and polynomials of certain special types. Acta arithmetica **11** (1966), 345–352

[67a] Ein Algorithmus zur Berechnung einer Minimalbasis über gegebener Ordnung. Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numer. Math., Oberwolfach Juni und November 1965, 90–103 (1967)

[67b] On the fundamental theorem of algebra. Amer. math. Monthly **74** (1967), 485–497

[67c] Orders as endomorphism rings of modules of the same rank. J. London math. Soc. **42** (1967), 180–182

[67d] The group of an equation. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. math.-phys. Kl. 1967, 147–166 (1967)

[67e] Über die Äquivalenz ganzzahliger Darstellungen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math. phys. Kl. II, 1967, 167–193 (1967)

[67f] Vorlesungen über Darstellungstheorie. II. Teil: Darstellungstheorie Liescher Algebren. Göttingen, Mathematisches Institut der Universität (1967)

[67g] Zahlentheoretische Experimente im Unterricht. Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numer. Math., Oberwolfach Juni u. November 1965, 104–108 (1967)

[67h] (mit J. Sonn) On the theorem on the primitive element. Amer. math. Monthly **74** (1967), 407–410

[68a] Über die Fundamentalkonstruktionen der endlichen Körpertheorie. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **70** (1968), 177–181

[68b] What makes a loop a group? Amer. math. Monthly **75** (1968), 139–142

[68c] (mit S. Chowla) Some conjectures concerning finite fields. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **41** (1968), 34–35

[68d] (mit K. Hoechsmann und P. Roquette) A cohomological characterization of finite nilpotent groups. Arch. Math. **19** (1968), 225–244

[68e] Book Review on Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry by Ellery B. Golos, Am. Math. Monthly **75** (1968)

[69a] (mit P. Roquette) A class rank estimate for algebraic number fields. J. London math. Soc. **44** (1969), 31–38
[69b] A condition for the compatibility of submodules of a module. J. Number Theory **1** (1969), 467–476
[69c] A presentation of the groups PSL(2, p) with three defining relations. Canadian J. Math. **21** 1969, 310–311
[69d] Characterization of unipotent matrices. J. Number Theory **1** (1969), 222–230
[69e] On a packing inequality for plane sectorial norm distances. Punjab Univ. J. Math. **2** (1969), 1–9
[69f] On a theorem of Kronecker. Delta (Waukesha) **1**, No. 3 (1969), 1–14
[69g] On Hensel factorization. I. J. Number Theory **1** (1969), 291–311
[69h] On linear noetherian groups. J. Number Theory **1** (1969), 70–89
[69i] On the integràl representations of an order. Theory Finite Groups, Sympos. Harvard Univ. 1968, 1981–193 (1969), Chin-Han Sah (ed.) R. Bauer (ed.)
[69j] (mit J. Liang) On a problem of Hasse. Math. Comp. **23** (1969), 515–519
[69k] (mit O. T. O'Meara) The automorphisms of linear congruence groups over Dedekind domains. J. Number Theory **1** (1969), 211–221
[70a] A real root calculus. Comp. Probl. Abstract Algebra, Proc. Conf. Oxford 1967, 383–392 (1970)
[70b] On a problem of H.-G. Steiner. J. Number Theory **2** (1970), 322–328
[70c] (mit O. Taussky) On the 1-cohomology of the general and special linear groups. Aequations math. **5** (1970) 129–201
[71a] On the group of an equation. Computers in Algebra and Number Theory, Proc. Sympos. Appl. Math. 1970, SIAM-AMS Proc. 4 (1971), 69–88
[71b] (mit Surinder K. Sehgal) The Frattini subgroups of linear noetherian groups. J. Number Theory **3** (1971), 111–114
[71c] (mit H. Brown) Some empirical observations on primitive roots. J. Number Theory **3** (1971), 306–309
[71d] Genetic development of the congruence axioms. Educ. Studies Math. **4** (1971), 150–152
[71e] (mit C. E. Johnson) On equivalence of finite group extensions. Math. Z. **123** (1971), 191–200
[72a] On the second round of the maximal order program. Appl. of Number Theory to Numerical Analysis (Proc. Sympos., Montreal, 1971), 389–431. (Academic Press, New York, London, 1972.)
[72b] (mit D. B. Wales) On L-groups. Math. Ann. **198** (1972), 1–12
[72c] On L-semi-groups. Math. Ann. **198** (1972), 13–22
[72d] On the units of orders. J. Algebra **20** (1972), 368–395
[72e] (mit H. Brown und J. Neubüser) On integral groups. I. The reducible case. Numer. Math. **19** (1972), 386–399
[72f] (mit H.Brown und J. Neubüser) On integral groups. II. The irreducible case. Numer. Math. **20** (1972), 22–31
[72g] (mit R. L. Graham und H. S. Witsenhausen) On the tightest packings in the Minkowski plane. Pacific J. Math. **41** (1972), 699–715
[72h] (mit I. Heinrich) Über die Ordnungen von Wohlfahrt. Arch. Math. **23** (1972), 469–481
[72i] The discriminant of an algebraic number field. Proceedings of the 1972 Number Theory Conference Univ. Colorado, Boulder, Colo., 247–255 (1972)
[73a] (mit H. Brown und J. Neubüser) On integral groups. III. Normalizers. Math. Comp. **27** (1973), 167–182
[73b] (mit L. Rüdenberg) Hermann Minkowski Briefe an David Hilbert, mit Beiträgen und herausgegeben von L. Rüdenberg und H. Zassenhaus. Springer Verlag, 1973
[73c] Zur Vorgeschichte des Zahlberichts. 17–21 in [73b]
[73d] Über Friedrich Althoff. 22–26 in [73b]
[73e] On the embedding of an order into a maximal order. Proc. Conf. on Orders, Group Rings and Related Topics (Columbus, Ohio, 1972), 204–221. Lecture Notes in Mathematics 353. Springer-Verlag, 1973
[74a] Reduction theory in algebraic number fields. Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 955–956
[74b] (mit J. Patera und P. Winternitz) The maximal solvable subgroups of the $SU(p, q)$ groups and all subgroups of $SU(2, 1)$. J. Math. Phys. **15** (1974), 1378–1393

[74c] (mit J. Patera und P. Winternitz) The maximal solvable subgroups of $SO(p, q)$ groups. J. Math. Phys. **15** (1974), 1932–1938

[74d] (mit J. Patera und P. Winternitz) On the classification of continuous subgroups of Lie groups. Group theoretical methods in physics Proc. Third Internat. Colloq., Vol. 2, 501–510. Centre Nat. Recherche Sci., Centre Phys. Theor., Marseille, 1974

[74e] On the torsion units of finite group rings. Studies in mathematics (in honor of A. Almeida Costa), 119–126. Instituto de Alta Cultura, Lisbon, 1974

[75a] (mit S. Bourne) Certain characterizations of the semiradical of a semiring. Comm. Algebra **3** (1975), 525–530

[75b] (mit J. Patera und P. Winternitz) Continuous subgroups of the fundamental groups of physics I. J. Math. Phys. **16** (1975) 1597–1614

[75c] (mit J. Patera und P. Winternitz) Continuous subgroups of the fundamental groups of physics II. J. Math. Phys. **16** (1975) 1615–1624

[75d] On Hensel Factorization II, Symposia Mathematica XV, Instituto Di Alta Matematica, Academic Press Publishers Inc., New York, London (1975), 499–513

[75e] On the Teaching of Algebra at the Pre-College Level. Cremel, Inc. (1975), 447–464

[75f] On the Minkowski-Hilbert dialogue on mathematization. Canadian Math. Bull **18** (1975), 443–461

[76a] (mit M. Delaney) The automorphism group of a space group. Comm. Algebra **4** (1976), No. 4, 305–317

[76b] (mit J. Patera und P. Winternitz) Quantum Numbers for Particles in De Sitter Space. J. Math. Phys. **17** (1976), 717–728

[76c] (mit J. Patera, R. T. Sharp und P. Winternitz) Subgroups of the Similitude Group of Three-Dimensional Minkowski Space. Canadian J. Phys. **54** (1976), 950–961

[76d] (mit J. Patera, R. T. Sharp und P. Winternitz) Subgroups of the Poincare group and their invariants. J. Math. Phys. **17** (1976), No. 6, 977–985

[76e] Gauss theory of ternary quadratic forms, an example of the theory of homogeneous forms in many variables, with applications. Semin. Number Theory, Calif. Inst. Techn. 74/75, Exp. 3, 84 pp (1976), auch erschienen in: Lecture Notes Pure Appl. Math. **79** (1982), 75–135

[76f] (mit W. Plesken) On Space-Time Groups. Group Theor. Meth. Phys., 4th int. colloq. Nijmegen 1975, Lecture Notes Phys. **50** (1976) 404–419

[76g] (mit J. Patera, R. T. Sharp und P. Winternitz) Casimir operators of subalgebras of the Poincare Lie algebra and of real Lie algebras of low dimension. Group Theor. Meth. Phys., 4th int. colloq., Nijmegen 1975, Lecture Notes Phys. **50** (1976), 500–515

[76h] (mit J. Patera, R. T. Sharp und P. Winternitz) Invariants of real low dimension Lie algebras. J. math. Phys. **17** (1976), 986–994

[77a] (mit W. Schwarz) In memoriam Bohuslav Divis. J. Number Theroy **9**, V–VII (1977)

[77b] Number Theory and Algebra. Collected papers dedicated to Henry B. Mann, Arnold E. Ross, and Olga Taussky-Todd. New York, San Francisco, London, Academic Press, XVIII (1977)

[77c] Arnold E. Ross (Biographical sketch). Number Theory and Algebra. Collected papers dedic. to H. B. Mann, A. E. Ross and Olga Taussky-Todd, XXVII–XXXIII (1977)

[77d] A theorem on cyclic algebras. Number Theory and Algebra. Collected papers dedic. To H. B. Mann, A. E. Ross and Olga Taussky-Todd, 363–393 (1977)

[77e] On the invariants of a Lie Group I. In Beck, R. E. (ed), Kolman, B. (ed): Computers in nonassociative rings and algebras. Academic Press Inc., IX (1977), S. 139–155

[77f] (mit Sudarshan K. Sehgal) Integral group rings with nilpotent unit groups. Commun. Algebra **5** (1977), 101–111

[77g] (mit Sudarshan K. Sehgal) Group rings without nontrivial idempotents. Arch. Math. **28** (1977), 378–380

[77h] (mit Sudarshan K. Sehgal) Group rings whose units form an FC-group. Math. Z. **153** (1977), 29–35

[77i] (mit J. Patera, R. T. Sharp und P. Winternitz). Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III: The de Sitter groups. J. math. Phys. **18** (1977), 2259–2288

[77j] (mit M. Pohst) An effective number geometric method of computing fundamental units of an algebraic number field. Math. Comp. **31** (1977), 754–770

[77k] (mit J. Liang) The minimum discriminant of sixth degree totally complex algebraic number fields. J. Number Theory **9** (1977), 16–35
[78a] A remark on the Hensel factorization method. Math. Comp. **32** (1978), 287–292
[78b] When is the unit group of Dedekind order solvable? Commun. Algebra **6** (1978), 1621–1627
[78c] On the maximal abelian subrings of the classical Lie algebras. Lie theoretical applications. Proc. Bien. Sem. Can. Math. Congr., Kingston 1977, Queens Papers in Pure a. Appl. Math. 48 (1978) 348–382
[78d] On a problem of Harvey Friedman. Commun. Algebra **6** (1978), 1629–1634
[78e] (mit A. S. Playtis und Surinder Sehgal) Equidistributed permutation groups. Commun. Algebra **6** (1978), 35–37
[78f] (mit J. Patera und P. Winternitz) The maximal abelian subgroups of the conformal groups of space-time. In Kramer, P. (ed), Rieckers, A. (ed): Group theoretical methods in physics, 6th int. colloq. Tübingen 1977, Lecture Notes in Physics **79** (1978)
[78g] (mit H. Brown, R. Bülow, J. Neubüser und H. Wondratschek) Crystallographic groups of four-dimensional space. New York: John Wiley and Sons, XIV (1978)
[79a] On the van der Waerden criterion for the group of an equation. Symbolic and algebraic computation. EUROSAM '79, Marseille, 1979. Lecture Notes Comput. Sci. **72** (1979), 95–107
[79b] (mit M. Pohst) On unit computation in real quadratic fields. Symbolic and algebraic computation. EUROSAM '79, Marseille, 1979. Lecture Notes Comput. Sci. **72** (1979), 140–152
[80a] On structural stability. Commun. Algebra **8** (1980), 1799–1844
[80b] (mit J. Patera und Y. Saint-Aubin) Finite subgroups of the generalized Lorentz groups $O(p, q)$. J. Math. Phys. **21** (1980), 234–239
[80c] (mit J. Patera und P. Winternitz) On the maximal abelian subgroups of the linear classical algebraic groups. C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can. **2** (1980), 231–236
[80d] On the sphere packing problem. Proceedings of the Conference on Kristallographische Gruppen, Part I (1980), Match 9, 127–135
[80e] (mit J. Patera und P. Winternitz) On the maximal abelian subgroups of the classical linear algebraic groups. C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can. **2** (1980), 237–242
[80f] Dedication, (second Chowla volume of Journal of Number Theory **12** (1980) 1 p.)
[80g] (mit J. Patera, P. Winternitz) Maximal abelian subalgebras of $sp(2n, \mathbb{R})$ and their applications in physics. Lecture notes in Physics **135**, (1980), S. 512–516
[81a] Lie groups, Lie algebras and representation theory. Séminaire de Mathématiques Supérieures, Départment de Mathématiques et de Statistique, Université de Montreal, 75, Les Presses de l'Université de Montreal (1981)
[81b] (mit Sudarshan K. Sehgal) On the supercentre of a group and its ring theoretic generalization. Integral representations and applications. Proc. Conf., Oberwolfach 1980, 117–144. Lecture Notes Math. **882** (1981)
[81c] (mit D. G. Cantor) A new algorithm for factoring polynomials over finite fields. Math. Comp. **36** (1981), 587–592
[82a] Über die konstruktive Behandlung mathematischer Probleme. Vortrag, Rheinisch-Westfäl. Akad. Wiss., Natur-Ingenieur-Wirtschaftswissenschaften *N* **307** (1982), 7–44
[82b] Rubik's cube: a toy, a Galois tool, group theory for everybody. Physica A **114** (1982), 629–637
[82c] (mit M. Pohst) On effective computation of fundamental units I. Math. Comp. **38** (1982), 275–291
[82d] (mit M. Pohst und P. Weiler) On effective computation of fundamental units II. Math. Comp. **38** (1982), 293–329
[82e] Emmy Noether, 1882–1955, by Auguste Dick, translated by H. I. Blocher, Birkhäuser Boston Inc., Cambridge, Mass., 1981, XIV + 193 pp., Book Review, Bulletin of the American Mathematical Society **6** (1982) (New Series) p. 224–230
[82f] Emmy Noether, A Tribute to her Life and Work, edited by James W. Brewer and Martha K. Smith (M. Dekker 1982): Bull. AMS **7** (new series) (1982), 618–622
[83a] On the Cartan subalgebra of a Lie algebra. Linear Algebra Appl. bf 52–53 (1983), 743–761
[83b] (mit I. Heinrich) Über die Ordnungen von Wohlfahrt II. Arch. Math. **40** (1983), 429–433
[83c] (mit D. Z. Djokovic, J. Patera und P. Winternitz) Normal forms of elements of classical real and complex Lie and Jordan algebras. J. Math. Phys. **24** (1983), 1363–1374

[83d] (mit J. Patera und P. Winternitz) Maximal abelian subalgebras of real and complex sympletic Lie algebras. J. Math. Phys. **24** (1983), 1973–1985
[84a] (mit P. Winternitz) The structure of maximal abelian subalgebras of classical Lie and Jordan algebras. Group theoretical methods in physics. 13th Int. Colloq., College Park/Md. 1984, 115–118
[84b] (mit Sudarshan K. Sehgal und Surinder K. Sehgal) Isomorphism of integral group rings of abelian by nilpotent class two groups. Commun. Algebra **12** (1984), 2401–2407
[85a] (mit J. Fabrykowski und A. Sharma) Some Birkhoff interpolation problems on the roots of unity. Linear Algebra Appl. **65** (1985), 1–23
[85b] (mit H. Benz) Über verschränkte Produktordnungen. J. Number Theory **20** (1985), 282–298
[85c] On Frobenius groups I. Resultate Math. **8** (1985), No. 2, 132–145
[85d] On polynomial factorization. Rocky Mountain J. Math. **15** (1985), 657–665
[85e] (mit M. Pohst) Über die Berechnung von Klassenzahlen und Klassengruppen algebraischer Zahlkörper. J. Reine Angew. Math. **361** (1985), 50–72
[87a] On Frobenius Groups II: Universal completion of nearfields of finite degree over a field of reference. Results in Math. Vol. **11**, (1987), 317–358
[87b] (mit Mary H. Daubenhauer) Local optimality of the critical lattice sphere packing of regular tetrahedra. Discrete Math. **64** (1987), no. 2-3, 129–146
[87c] (mit Rand, D. W.; Winternitz, P.) Pascal programs for the identification of Lie algebras II. SPLIT – a program to decompose parameter-free and parameter-dependent Lie algebras into direct sums. Comp. Phys. Comm. **46** (1987), no. 2, 297–309
[88a] (mit J. Patera) The Pauli matrices in n-dimensions and finest gradings of simple Lie algebras of type A_{n-1}. J. Math. Phys. No. 29 (3), March 1988, 665–673
[88b] (mit J. Patera) The construction of solvable Lie algebras from equidimensional nilpotent algebras, CRM–1538
[88c] (mit Rand, D. W.; Winternitz, P.) On the identification of a Lie algebra given by its structure constants. I. Direct decompositions, Levi decompositions and nilradicals. Linear Algebra Appl. **109** (1988), 197–249
[89a] (mit J. Patera) On Lie gradings I, CRM-1459 Linear Algebra Appl. **112** (1989), S. 87–159
[89b] (mit Grundhöfer, Theo) A criterion for infinite non-Dickson nearfields of dimension two. Resultate Math. **15** (1989), no. 3-4, 221–226
[89c] (mit M. Pohst) Algorithmic Algebraic Number Theory. Cambridge University Press, 1989
[91] Nachruf: Theodor Schneider (1911–1988). J. of Number Theory **39** (1991), no. 2, 129–143

Verzeichnis der unter Anleitung von H. Zassenhaus angefertigten Dissertationen

Universität Hamburg:

Fritz Erdmann Diedrichsen: Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz (1940)
Franz Kalscheuer: Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper über dem Körper der reellen Zahlen als Grundkörper (1940)
August Hollkott: Finite Konstruktion geordneter algebraischer Erweiterungen von geordneten Grundkörpern (zusammen mit E. Artin) (1941)

McGill University:

Joachim Lambek: a. Biquaternian vectorfields over Minkowski's space. b. The immersibility of a semigroup into a group (1950)
Norman E. Smith: A statistical problem in the geometry of numbers (1952)
B. Nonan: Induced representations of finite groups (1953)
Victor Linis-Linin: Analysis in nonarchimedean spaces (1953)
Jean Maranda: On p-adic integral representations of finite groups (1953)

Martin Burrow: A generalization of the method of Young operators and its use in constructing primitive idempotents for the representations of $GL(2, q)$ (1954)
Geoffrey Fox: Topology of the field of p-adic numbers (1954)
M. Rahman: A statistical problem in the geometry of numbers (Star-shaped domains of quadratic and hexagonal symmetry) (1957)
N. Oler: An inequality in the geometry of numbers (1957)

University of Notre Dame:

Sudarshan K. Sehgal: On structure and representations of ringoids (1962)
Klaus Hoechsmann: Simple algebras and derivations (1962)
Sister Mary Robert von Wolff: Densest admissible point sets for two star domains (1962)
Sister Elizabeth Louise Michaels: A study of simple groups of even order (1963)
Sister Mary Justin Markham: A group-theoretic characterization of the ordinary and isotropic Euclidean planes (1964)
James William Bond: The structure of Lie algebras with large minimal generating set (1964)
Donald Robert Weidman: The character ring of a finite group (1964)
Sister Mary Rosanna Hughes: An application of the domain of action to the Mordell cubic normdistance (1964)
Surinder K. Sehgal: On the existence of Cartan subgroups of finite groups (1965)
David Meronk: On a faithful irreducible integral representations of cyclic over cyclic groups (1969)

Ohio State University:

Harold D. Brown: Near Algebra (1966)
John E. Olson: Addition theorems in elementary abelian groups (zusammen mit H. Mann) (1967)
Clifford Queen: Non-conservative function fields of genus one (1969)
Joseph Jen-Yin Liang: On interrelations of arithmetical invariants in algebraic number fields (1969)
Jack Sonn: On the embedding problem for non-solvable Galois groups of algebraic number fields: reduction theorems (1970)
Robert L. McFarlane: On multiplers of abelian difference sets (zusammen mit H. B. Mann) (1970/71)
Charles Johnson: A local theory of group extensions (1970/71)
Daniel Allen Falk: Orders in separable algebras (1971)
Matthew Delaney: Discrete euclidean universes and associated automorphisms (1971)
Hektor Merklen: On crossed product orders (1972)
Kwok Chi Wong: Restricted representations of Classical Lie Algebras of Prime Characteristic. (zusammen mit J. C. Ferrar) (1973)
John Laurence Donaldson: Minkowski reduction of integral matrices (1975)
David Samuel Trushin: Coinduced Comodules and Applications to the Representation Theory of Coalgebras (zusammen mit H. P. Allen) (1975)
Ann Scrandis Playtis: Equally distributed permutation groups (zusammen mit Surinder K. Sehgal) (1975)
Jane Lovett: On the product formula for valuations of function fields in two variables (1978)
David J. Ford: On the computation of the maximal order in a Dedekind domain (1978)
Alfred R. Weiss: The least prime ideal with prescribed decomposition behaviour (1980)
Puhua Guan: Factorization of multivariate polynomials (1985)
Andrasz Bezdek: Packing and covering problems (dicrete geometry, convexity) (1986)

Wilhelm Plesken
Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 64
5100 Aachen

(*Eingegangen 26. 10. 1992, revidiert 11. 1. 1993*)

Jb. d. Dt. Math.-Verein. 96 (1994) 21–33
© 1994 B. G. Teubner Stuttgart

Methoden und Probleme der modernen Algebra

H. Zassenhaus [1])

Nach den großen Erfolgen der von Newton und Leibniz erfundenen Differential- und Integralrechnung in den ersten 150 Jahren ihres Bestehens trat um die Mitte des vorigen Jahrhunderts eine kritische Besinnung auf die Grundlagen unserer Wissenschaft ein. Der kritische Prozeß, der seinen Anstoß von dem Problem hernahm, den Konvergenzbegriff zu entwickeln, führte weit über die ursprüngliche Problematik hinaus und erstreckte sich schließlich auf alle Zweige unserer Wissenschaft. So ist auch die moderne Algebra entstanden durch kritische Zergliederung des Zahlbegriffs. In seiner Schrift: Stetigkeit und Irrationalzahlen, die 1872 erschien, untersucht Dedekind den Aufbau unserer reellen Zahlen. Welches sind die wesentlichen Eigenschaften unserer reellen Zahlen, aus denen wir alle überhaupt möglichen richtigen Aussagen über reelle Zahlen herleiten können? Es sind einige wenige Regeln über ihre Verknüpfung durch Addition und Multiplikation, die Existenz einer Anordnung der reellen Zahlen nach ihrer Größe, welche dem Postulat des Eudoxos genügt, und ein Vollständigkeitssatz, nämlich der Satz vom Dedekindschen Schnitt.

Verfolgen wir diesen Gedanken konsequent weiter, so gelangen wir dazu, uns die Gesamtheit der Zahlen axiomatisch gegeben zu denken als ein System mit gewissen logischen Eigenschaften und aus diesen Eigenschaften alles weitere zu deduzieren. Wir abstrahieren von dem intuitiven Ursprung der Zahlen. Durch noch weitergehende Abstraktion gelangt man zu abstrakten Zahlensystemen. Sie haben gewisse Eigenschaften mit dem System der reellen Zahlen gemein. Es ist typisch, daß wir von Systemen sprechen. In der modernen Algebra verblassen die einzelnen Elemente, aber gewisse, aus ihnen gebildete Kollektive rücken in den Brennpunkt der Betrachtung. So hat E. Steinitz in seiner algebraischen Theorie der Körper von den Größeneigenschaften der reellen Zahlen abstrahiert. Noch deutlicher zeigt sich das Bestreben, von der Betrachtung der einzelnen Elemente zu Kollektiven überzugehen in der bereits von Dedekind begründeten Verbandstheorie. Dort wird sogar von den Verknüpfungen abstrahiert. Frobenius,

---

[1]) Anmerkung der Redaktion: Dies ist die Antrittsvorlesung von Hans Zassenhaus, gehalten am 1. August 1947 im Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, erschienen als „Studienbehelf“ im Selbstverlag der Universität Hamburg. Dieses einflußreiche historische Dokument soll mit diesem Nachdruck zugänglicher gemacht werden und zugleich den vorstehenden Nachruf auf Zassenhaus illustrieren.

Schur, Burnside, Wedderburn, E. Nöther abstrahieren vom kommutativen Gesetz der Multiplikation. Die nichtkommutative Algebra erweist sich als mächtiges Hilfsmittel für die Behandlung komplizierter Zusammenhänge im Kommutativen.

Betrachten wir Bereiche, in denen nur noch eine Verknüpfung erklärt ist, die denselben Rechengesetzen genügt wie die reellen von 0 verschiedenen Zahlen bei Multiplikation, so gelangen wir zu den abelschen Gruppen. Durch Abstraktion vom Kommutativgesetz gelangen wir zu beliebigen Gruppen.

Die wesentlichen Merkmale der modernen Algebra sind

1. die axiomatische Methode:
   Gegenstand der Betrachtung sind Systeme von abstrakten Elementen, die gewissen Axiomen genügen. Andere Eigenschaften als die vorausgesetzten dürfen nicht verwendet werden. Jede Untersuchung endet mit einer Prüfung der logischen Notwendigkeit der einzelnen Axiome.
2. Übergang vom einzelnen Element zu Kollektiven.
3. An die Stelle der Herleitung von Formeln tritt die Klassifikation der Systeme nach ihrer Struktur, das begriffliche Operieren.
4. Systeme mit gleicher logischer Struktur (isomorphe Systeme) gelten nicht mehr als verschieden, gleichgültig wie sie auch gegeben werden.

Unter den Methoden der modernen Algebra möchte ich als typisch hervorheben zunächst einen Grundsatz meines verehrten Lehrers Artin: Wenn es möglich ist, durch begriffliches Schließen die Einzigkeit eines mathematischen Gegenstandes zu beweisen, so ist es auch möglich, ihn explicite formelmäßig anzugeben. So finden wir begrifflich, daß ein System von linearen Gleichungen für n Unbekannte bei linearer Unabhängigkeit genau eine Lösung hat. Unser Grundsatz führt uns auf die Leibniz-Cramersche Regel.

An einem Beispiel von Max Zorn wurde mir zuerst die metamathematische Methode klar: Wir können das Ergebnis einer mathematischen Schlußkette vorhersehen, ohne sie explicite auszuführen, wenn uns nur ein genügend allgemeines Modell in der mathematischen Formenwelt bekannt ist. Folgendes einfaches Beispiel: Eine Gruppe mit N Elementen, in der es für jeden Exponenten n höchstens n Lösungen der Gleichung $x^n = 1$ gibt, ist zyklisch. Der Vergleich der zunächst unbekannten Gruppe mit dem zyklischen Modell lehrt, wenn wir sie nach der Ordnung ihrer Elemente durchzählen, daß es in ihr zu jedem Teiler d von N höchstens soviel Elemente der Ordnung d gibt als im Modell. Also genauso viel! Also ein Element der Ordnung N.

Die moderne Algebra kommt aus einer einfachen Wurzel. Ihre Ergebnisse sind mannigfaltig. Lassen Sie mich nun einen Überblick über die Probleme geben, deren Untersuchung mir wichtig erscheint.

Fangen wir an bei der Gruppentheorie! Die endlichen Gruppen bilden ein interessantes Feld der Untersuchungen. Jede spezielle Aussage über eine endliche Gruppe läßt sich in endlich vielen Schritten entscheiden. Wir wollen aber Eigenschaften finden, die für unendlich viele endliche Gruppen gelten. In der Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung wird besonders deutlich, daß Mathematik treiben heißt: Die Grenze des Endlichen zum Unendlichen bestimmen. Das Strukturproblem läuft nach dem Ansatz von Hölder – Schreier – Fitting auf die Lösung folgender drei Aufgaben hinaus:

1. die endlichen einfachen Gruppen und ihre Automorphismengruppen zu bestimmen. Nach einer Vermutung von Schreier ist die äußere Automorphismengruppe stets auflösbar,
2. die endlichen auflösbaren Gruppen zu konstruieren,
3. die nicht isomorphen Erweiterungen einer gegebenen auflösbaren Gruppe mit einer gegebenen endlichen Gruppe ohne abelschen Normalteiler $\neq 1$ zu finden.

Das interessanteste Problem scheint mir die Aufsuchung aller endlichen einfachen Gruppen zu sein. Wir sind noch weit von einer Lösung dieses Problems entfernt. Das bisher Bekannte ist ungefähr folgendes: Seit Dickson ist eine große Anzahl von endlichen einfachen Gruppen bekannt. Sie verteilen sich auf die Systeme:

1. Gruppe $\mathfrak{A}_n$ aller geraden Permutationen von n Ziffern ($n > 4$).
2. Gruppe aller Kollineationen mit Determinante 1 bezüglich einer endlichen Geometrie.
3. Gruppe aller Kollineationen mit Determinante 1 bezüglich einer endlichen Geometrie, die eine nicht ausgeartete Fläche 2. Ordnung festlassen.
4. Gruppe aller Kollineationen bezüglich einer endlichen Geometrie, die ein gegebenes Nullsystem invariant lassen.
5. Gruppe aller Kollineationen bezüglich einer endlichen Geometrie mit Determinante 1, die eine nicht ausgeartete hermitesche Form invariant lassen.
6. Automorphismengruppe gewisser Liescher Ringe vom Rang 14, 52, 78, 133, 248 über beliebigen Galoisfeldern als Grundkörper. Bisher ist nur der Fall 14 (Automorphismengruppe der Cayleyalgebra) untersucht worden.
7. Fünf Ausnahmegruppen, die von Matthieu, Frobenius, Séguier und Witt mit Erfolg untersucht worden sind.

Andere endliche einfache Gruppen von zusammengesetzter Ordnung hat man nicht finden können. Auf die Gruppen 2. bis 6. ist man in Analogie zu der von Cartan und Killing geleisteten Bestimmung der einfachen endlich kontinuierlichen Gruppen über dem komplexen Zahlkörper gekommen. Die Gruppen aus 1. sind gekennzeichnet als mehrfach transitive Permutationsgruppen von möglichst hoher Transitivitätsordnung. Alle übrigen Gruppen sind Untergruppen der Automorphismengruppe endlicher projektiver Geometrien, die gewisse homogene Polynome oder spezielle Tensoren invariant lassen. Zu jeder projektiven endlichen Geometrie gehört aber ein eindeutig bestimmter endlicher Körper, der seinerseits durch eine Primzahlpotenz gekennzeichnet ist. Die Vermutung besteht, daß die vorhin aufgezählten endlichen einfachen Gruppen schon alle sind. Es müßte also möglich sein, einer endlichen einfachen Gruppe von zusammengesetzter Ordnung, die nicht zur $\mathfrak{A}_n$ isomorph ist, eindeutig eine Primzahlpotenz zuzuordnen. Von welcher Primzahl aber? Jedenfalls muß es sich um einen Teiler der Gruppenordnung handeln. Aber um welchen?

Richard Brauer hat die Theorie der modularen Darstellungen soweit ausgebildet, daß es möglich ist, die irreduziblen modularen Charaktere für viele endliche einfache Gruppen auszurechnen. Ich halte es für wahrscheinlich, daß durch die Betrachtung der modularen Darstellungen einer Gruppe in Kollineationen sich einer der Primteiler der Gruppenordnung wird auszeichnen lassen.

In Analogie zur Cartanschen Theorie der halbeinfachen Lie-Ringe über dem Körper der komplexen Zahlen kann man sich die Aufgabe stellen, die einfachen Lie-Algebren über Galoisfeldern zu klassifizieren. Die einfachen Gruppen würden sich als Automorphismengruppen ergeben. Man hat da merkwürdige Resultate gefunden, die zeigen, daß durch die Endlichkeit der Charakteristik unerwartete Schwierigkeiten auftreten. Wie Witt gezeigt hat, gibt es einfache Lie-Algebren bei Charakteristik p, die kein Gegenstück bei Charakteristik 0 besitzen. Ihre Automorphismengruppe ist auflösbar. Sie besitzen irreduzible Darstellungen in beliebiger Mächtigkeit. Die von mir angestellten Untersuchungen über nilpotente Lie-Ringe von Primzahlcharakteristik haben ebenfalls eine sehr viel größere Mannigfaltigkeit der Typen als bei Charakteristik 0 ergeben.

Aussichtsreicher erscheint es daher, die Cartansche Methode aus dem Bereiche der infinitesimalen Transformationen in das endliche Gebiet zu übertragen. Bisher liegt in dieser Richtung nur ein Ergebnis vor. Ich habe gefunden, daß die inhomogenen Modulargruppen gekennzeichnet sind durch die Eigenschaft, daß in ihnen jede Untergruppe der Ordnung rs (r, s verschiedene oder gleiche Primzahlen $\neq p$) zyklisch sind, während für die Primzahl p gilt, daß jede Untergruppe der Ordnung pq (q Primzahl) nicht zyklisch ist. Ich glaube, daß man auf dem vorher angedeuteten Wege auch einen neuen Zugang zur Cartan-Killingschen Theorie der einfachen kontinuierlichen Gruppen gewinnen kann.

Schließlich muß auf irgendeine Weise der geometrische Charakter der betrachteten Gruppen erkannt werden. Mir scheint die Verbandstheorie die geeigneten Grundlagen für die Beherrschung dieser Fragen zu schaffen. J. v. Neumann hat gezeigt: Ein komplementierbarer Dedekindverband endlicher Dimension ist, von trivialen Ausnahmen abgesehen, stets isomorph zu der Struktur, die von den linearen Unterräumen einer endlichen projektiven Geometrie gebildet wird. Es muß also untersucht werden, wann gewisse Strukturen der Untergruppen eine Dedekindstruktur bilden.

Die Aufsuchung aller endlichen einfachen Gruppen zusammengesetzter Ordnung erscheint mir als vernünftig gestelltes Problem auch einer vernünftigen Lösung fähig zu sein. Zu seiner Bewältigung müssen die Theorie der modularen Darstellungen, das Analogon zur Cartanschen Theorie bei endlicher Charakteristik und die Verbandstheorie hinzugezogen werden.

Von großem Interesse wäre eine algebraische Behandlung der Gruppen linearer Substitutionen über beliebigen Körpern, deren Koeffizienten als Lösungen endlich vieler algebraischer Relationen charakterisiert sind. Man kann diesen Gruppen durch formale Differentiationsprozesse einen Infinitesimalring aus Matrizen gleichen Grades zuordnen. Wie steht es mit der Umkehrung? Kann man behaupten, daß die Gruppen einfach sind bis auf triviale Normalteiler (etwa Untergruppe aller Skalarmatrizen), wenn dasselbe für ihre Infinitesimalringe gilt. Die von Witt gefundenen einfachen Lie-Ringe bilden ein Gegenbeispiel. Gibt es aber noch andere Ausnahmen? Läßt sich zumindest aus der Einfachheit der Gruppe nach der Erweiterung des Koeffizientenbereiches zum algebraisch abgeschlossenen Oberkörper auf die Einfachheit der ursprünglich gegebenen Gruppe zurückschließen. So möchte man vermuten, daß die Gruppe der Elemente mit Norm 1 modulo dem Zentrum in einer einfachen Algebra über einem algebraischen Zahlkörper einfach ist. Nichts ist bis heute darüber bekannt.

In der Theorie der kontinuierlichen Gruppen steht das Hilbertsche Problem V, ob sich aus der Stetigkeit der Zusammensetzung nach geeigneter Umänderung der Parameter der analytische Charakter der Gruppe ergibt, im Mittelpunkt der Untersuchungen. Mir scheint die Erklärung der bisherigen Mißerfolge aller Versuche, über den Bereich der kompakten Gruppen hinauszugelangen, darin zu bestehen, daß man den gruppentheoretischen Gesichtspunkt zu sehr vernachlässigt hat über den großen topologischen Schwierigkeiten des Problems. Durch die Bildung geeigneter abgeschlossener Untergruppen und den Übergang zu Faktorgruppen sollte es möglich sein, die Schwierigkeit zu reduzieren. Darauf deutet auch die Tatsache hin, daß es ein Gegenstück zur Hausdorffschen Formel gibt von der Art, daß e^{a+b} als Produkt unendlich vieler höherer Kommutatoren von Elementen aus den eingliedrigen Untergruppen, die von e^a und e^b erzeugt werden, dargestellt werden kann, wie ich bereits vor langer Zeit gefunden habe. Man muß also bereits in der kontinuierlichen Gruppe durch Kommutatorbildung ebenso weit kommen können, als man sonst in den Infinitesimalringen durch Ausführung der Lieschen Klammermultiplikation kommt.

Der Dualitätssatz von Pontrjagin handelt von dem Dualismus zwischen den bikompakten und den diskreten abelschen Gruppen, der durch Charakterenbildung zustande kommt. Für endliche abelsche Gruppen läuft der Satz auf den Isomorphismus der Gruppe mit der Gruppe ihrer Charaktere 1-ten Grades hinaus. Als Verallgemeinerung dieser Aussage für beliebige endliche Gruppen findet man, daß stets ein Isomorphismus zwischen dem Klassenring und dem Ring aller eigentlichen und uneigentlichen Darstellungen über dem gegebenen Grundkörper der Charakteristik 0 besteht. Sollte sich dieser Sachverhalt wohl verallgemeinern lassen zu dem Bestehen eines Isomorphismus zwischen dem Klassenring einer bikompakten Gruppe und dem Ring der Darstellungen?

Die so schöne Theorie von J. v. Neumann über die fastperiodischen Funktionen und beschränkten Darstellungen auf Gruppen gestattet leider nur sehr wenige Anwendungen. Man sollte die stetigen Funktionen auf topologischen Gruppen studieren und sie nach den Koeffizienten der stetigen Darstellungen entwickeln. Ohne die Voraussetzung, daß auf der Gruppe bereits eine Topologie gegeben ist, scheint es nicht zu gehen, wie die vielen vergeblichen Versuche, über die Resultate von J. v. Neumann hinauszukommen, ergeben haben.

Bei Charakteristik 0 kann man die e-Funktion bilden und logarithmieren, sobald ein perfekt bewerteter Koeffizientenbereich vorliegt. Bei Charakteristik p geht das nicht mehr. Was soll man an die Stelle der e-Funktion setzen, um einen Zusammenhang zwischen der Addition und der Multiplikation herzustellen? Hasse vermutet: Potenzieren mit p. Auch unter dem Aspekt dieser Frage erscheint es wichtig, den Zusammenhang zwischen Gruppen, die durch algebraische Zusammensetzungsfunktionen erklärt sind, und ihren Infinitesimalringen bei beliebiger Charakteristik zu studieren.

Ein anderes Problem, das mit der Logarithmierung mod p zusammenhängt, tritt im Zusammenhang mit der Kummerschen Behandlung des großen Fermatschen Problemes auf, nämlich ob die $(p-3)/2$ Einheiten

$$\varepsilon_2 = \frac{1-\zeta^2}{1-\zeta}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1-\zeta^3}{1-\zeta}, \quad \ldots \quad \varepsilon_{p-1/2} = \frac{1-\zeta^{(p-1)/2}}{1-\zeta} \qquad (\zeta^p = 1, \zeta \neq 1)$$

des p-ten Kreisteilungskörpers bereits modulo den p-ten Potenzen eine Einheitenbasis bilden. Kann man also einer Relation

$$\varepsilon_2^{\nu_2}\varepsilon_3^{\nu_3} \ldots \varepsilon_{(p-1)/2}^{\nu_{(p-1)/2}} = \pm \xi^p \cdot \zeta^l$$

im p-ten Kreiskörper bereits entnehmen, daß

$$\nu_2 \equiv \nu_3 \equiv \ldots \equiv \nu_{(p-1)/2} \equiv 0 \pmod p$$

ist. Rechnen wir modulo p, so können wir durch rechtzeitiges Abbrechen der e-Reihe und der logarithmischen Reihe einen Ersatz für die e-Funktion und den Logarithmus schaffen und finden so, daß die bekannten Kreiskörpereinheiten sogar modulo p multiplikativ unabhängig sind, sobald die Klassenzahl des p-ten Kreisteilungskörpers zu p teilerfremd ist. Die allgemeine Lösung des Problemes scheint die p-adische Bildung und Untersuchung zweier Regulatoren mit ihren Quotienten zu erfordern.

In der Zahlentheorie ist es eine alte Frage, ob die analytischen Methoden und damit die Verwendung des Auswahlpostulates zur Ableitung vieler ihrer Resultate unumgänglich nötig sind oder nicht. Mir gelang es kürzlich zu zeigen, daß die Existenz unendlich vieler Primzahlen in jeder arithmetischen Progression, die zum Modul prime Elemente enthält, sich bereits auf elementar arithmetischem Wege einsehen läßt. Zu diesem Zweck werden die von Dirichlet angegebenen Reihenentwicklungen an einer passend gewählten Stelle abgebrochen und die Partialsummen werden auf dem Dirichletschen Wege abgeschätzt. Sonst ist kein neuer Gedanke erforderlich. Vielleicht ist die analytische Behandlung zahlentheoretischer Fragen wirklich nur eine stenographische Zusammenziehung einer ungeheuren Menge von elementar arithmetischen Ungleichungen. Ich bekenne aber freimütig, daß ich persönlich stets den Weg für den richtigen halte, auf dem sich die größte Einsicht in den inneren Zusammenhang der Zahlenwelt erreichen läßt. Und hier scheint sich in sehr vielen Fällen die Analysis als ein Zauberstab zu bewähren.

Auch die Geometrie der Zahlen, von Minkowski als selbständige Disziplin vor mehr als 50 Jahren geschaffen, hat sich einen Platz erobert, von dem sie die scharfsinnigsten elementar arithmetischen Überlegungen nicht wieder verdrängen werden. Wenn es auch möglich ist, den Beweis des Einheitensatzes von Dirichlet ohne den Minkowskischen Satz über konvexe zentralsymmetrische Körper zu führen, so bildet doch Minkowskis Weg den durchsichtigsten Zugang zu jenem Theorem.

Die Zahlentheorie nicht konvexer Bereiche muß erforscht werden. Ich greife das folgende Problem heraus. Im R_n werde um den Nullpunkt als inneren Punkt ein sternförmiger Bereich B gelegt. Gesucht wird das Minimum $M(B)$ der

Gittermasche für alle Gitter, deren Punkte mit Ausnahme des Nullpunktes nicht im Inneren von B liegen. Wenn B konvex und zentralsymmetrisch ist, so ist nach Minkowski $M(B) \geqslant 2^{-n} V(B)$. Für nicht konvexe Bereiche sind keine allgemeinen Methoden zur Untersuchung der Frage bekannt. Davenport fand 1938 durch mühsames Rechnen mit Ungleichungen, daß $M(B)=7$ ist für den Bereich: $|xyz| \leqslant 1$ $(n=3)$. Für den Bereich $|xy| \leqslant 1$ war schon lange $M(B)=\sqrt{5}$ bekannt $(n=2)$.

Ich finde, daß zu sehr auf die Gittereigenschaft, aber zu wenig auf die Geometrie der Oberfläche von B geachtet wird. So möchte ich für das Problem von Minkowski – Mordell zunächst die folgende Abstraktion in Vorschlag bringen:

Über den unendlichen Raum mögen gesetzlos Punkte verteilt sein aber doch so, daß zwischen ihnen eine Distanz gewahrt bleibt. Und zwar soll es möglich sein, um jeden Punkt P der Menge einen sternförmigen Bereich ohne weiteren Punkt der Menge zu legen, der aus einem festen Bereich B um den Ursprung als inneren Punkt durch Parallelverschiebung vom Ursprung nach P entsteht. Denken wir uns nun einen beliebigen konvexen Körper K vom Volumen 1 homothetisch vom Nullpunkt aus vergrößert, so wird die Anzahl $A(t)$ der Punkte der Menge, die in tK enthalten sind, dividiert durch t^n nach oben beschränkt sein. Man soll eine möglichst gute obere Schranke für $\limsup A(t)/t^n$ angeben, die nur von B abhängt.

Durch nichteuklidische Betrachtungen ist es mir gelungen, im Falle B: $|xy| \leqslant 1$ $(n=2)$ zu zeigen, daß

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{A(t)}{t^n} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ist und diese Abschätzung ist bestmöglich.

Eine gute Abschätzung würde möglicherweise sowohl einen Beweis für den Klassenkörperturmsatz ergeben, als auch einen neuen Beweis für den Hauptsatz der Algebrentheorie über algebraischen Zahlenkörpern.

In der Einheitentheorie ist während des Krieges durch Siegel ein großer Fortschritt gemacht worden, der mit Hilfe der Minkowskischen Reduktionstheorie der quadratischen Formen zeigte, daß die Einheiten eine diskontinuierliche Gruppe mit beschränktem Fundamentalbereich bilden, wenn sie als Transformationen der Mannigfaltigkeit der positiv definiten hermitischen Formen mit Determinante 1 von passender Variablenzahl aufgefaßt werden. Er hat ein Verfahren zur Auffindung eines endlichen Erzeugendensystems angedeutet. Die nächste Aufgabe wäre es, einen Algorithmus anzugeben, nun durch endlich viele Prozesse ausgehend von der Basis eines n-gliedrigen Moduls in der halbeinfachen Algebra vom Range n über dem Körper der rationalen Zahlen ein endliches Erzeugendensystem der Gruppe von Einheiten, die als Rechtsmuliplikatoren vorkommen, aufzufinden.

Fassen wir die Einheiten als Gruppen linearer Substitutionen dieser Moduln auf, so gelangen wir zu speziellen Darstellungen von Gruppen in ganzzahligen Substitutionen, wobei der arithmetische Äquivalenzbegriff zur

Klasseneinteilung heranzuziehen ist. Hier liegt noch ein weites Feld offen. Man weiß sehr wenig. Es gibt endlich viele Klassen arithmetisch äquivalenter ganzzahliger Darstellungen von festem Grade für alle Darstellungen von Ordnungen mit halbeinfachem Quotientenring von endlichem Range über den rationalen Zahlen, wie sich mit Hilfe zahlengeometrischer oder rein algebrentheoretischer Betrachtungen zeigen läßt. Für zyklische Gruppen von Primzahlordnung lassen sich alle Darstellungen klassifizieren, wie mein leider nun gefallener Schüler Diedrichsen und ich gezeigt haben. Es gibt endlich viele Typen unzerfällbarer Darstellungen, deren Zusammensetzung aber nicht unabhängig voneinander geschieht, sondern es muß noch eine gewisse Idealklasse aus dem p-ten Kreisteilungskörper dabei invariant bleiben. Wenn die Gruppe nicht mehr Primzahlordnung hat, so gibt es unendlich viele unzerfällbare Typen. Ihre Beherrschung mit ganz rationalen Methoden scheint hoffnungslos.

Einen Fortschritt verspreche ich mir von der p-adischen Behandlung des Problemes. Zum Beispiel müßte untersucht werden, ob zwei Darstellungen einer endlichen Gruppe in ganzen Zahlen wohl arithmetisch äquivalent sind, wenn sie modulo allen Primzahlpotenzen äquivalent sind. Ferner wären die p-adischen Invarianten anzugeben. Offenbar hängt diese Aufgabe mit der Theorie der modularen Darstellungen, die durch Richard Brauer und seine Schüler so große Fortschritte gemacht hat, zusammen.

Kann man stets auf einer lokalbikompakten Gruppe diskrete Gruppen mit der Eigenschaft, daß die Linksrestklassen eine bikompakte Mannigfaltigkeit bilden, finden? Bei abelschen Gruppen ist dies richtig, wie Pontrjagin zeigt. Bei nicht abelschen Gruppen ist im allgemeinen nichts bekannt.

Die Klassifikation der Raumgruppen auf arithmetische Weise und die Verallgemeinerung für den R_n ist mir in allgemeinen Zügen in befriedigender Weise gelungen. Das Problem war nach den Arbeiten von Schoenflies, Bieberbach, Frobenius, Speiser, Burckhardt reif für eine rein arithmetische Behandlung geworden. Es wäre nicht uninteressant, auf Grund der allgemeinen Resultate die Klassifikation auch im R_4 durchzuführen. Man müßte vor allem einen Algorithmus zur Herleitung aller Klassen arithmetisch äquivalenter ganzzahliger Substitutionsgruppen in n Variablen entwickeln. Mir schwebt als Ideal eine Vereinigung der Minkowskischen Reduktionstheorie mit der algebrentheoretischen Methode zur Erreichung des genannten Zieles vor. Die Frage, ob zwei endliche ganzzahlige Substitutionsgruppen arithmetisch äquivalent sind, ist entscheidbar. Sie führt auf eine interessante Verallgemeinerung der Minkowskischen Reduktionstheorie, die noch näher untersucht werden muß.

Hier füge ich die Frage ein, die der naive Mathematiker stellt, wenn er vom Lauediagramm hört: Wie kommt es, daß die kleinsten Teile eines homogenen festen Körpers sehr oft kleine Schwingungen um Zentren ausführen, die ein reguläres Punktsystem: diskret, über den ganzen Raum verteilt, überall gleich umgeben, bilden? Ich bin der Meinung: Gleichgültig, wie die Wechselwirkungskräfte der Teilchen im einzelnen beschaffen sind, wenn nur ihr Potential bewegungsinvariant ist und gewissen Grenzbedingungen im Unendlichen und bei Annäherung an die Zentren genügt, so wird sich die Lage des Minimums an potentieller Energie bei vorgeschriebener Dichte der räumlichen Verteilung durch hohe Symmetrie auszeichnen. Ich schließe dies aus der eindeutigen Lösbarkeit des zugehörigen Variationsproblemes in endlich vielen bzw. unendlich vielen Variablen bei Einhaltung gewisser Nebenbedingungen.

Die Bornschen Untersuchungen über den Aufbau der kristallinischen Materie sollten von den Mathematikern weitergeführt werden!

Die Verbandstheorie, der älteste Zweig der modernen Algebra, eine von Dedekind geschaffene Disziplin, hat erst in jüngster Zeit ihre Legitimation gefunden durch die Untersuchungen J. v. Neumanns über die axiomatische Kennzeichnung der Verbände der linearen Unterräume projektiver Geometrien. In neuerer Zeit zeigte Wielandt, daß die Untergruppen einer endlichen Gruppe, die einer Kompositionsreihe angehören, einen Teilverband bilden. Es genügt, wie ich gezeigt habe, den Maximalkettensatz zu fordern. Diese nachinvarianten Verbände bilden eine Verallgemeinerung der von Dedekind untersuchten modularen Verbände. Durch die Grundlagenuntersuchungen der Geometrie kommt man auf eine andere Verallgemeinerung, nämlich auf die durch Punktgitter bestimmten Verbände. Beiden gemeinsam ist die Existenz eines vernünftigen Dimensionsbegriffes und hohe innere Symmetrie.

Die J. v. Neumannschen Untersuchungen zur Quantenmechanik und Überlegungen von P. Jordan legen ebenfalls nahe, diskrete, hochsymmetrische Verbände mit plausiblem Dimensionsbegriff zu untersuchen. Sie würden sich dazu eignen, ein mathematisches Gerüst für die Vorstellung von physikalischen Prozessen, bei denen den aufeinanderwirkenden Teilchen nur eine diskret liegende Menge von Konfigurationen zum Aufenthalt gestattet ist, zu bilden.

In der Algebra der Differentialformen und der Differentialideale liegen viele interessante Probleme verborgen. Ich nenne eines: Die Lösungen von linearen Differentialgleichungen haben die Eigenschaft, daß sich aus je zweien eindeutig (durch Addition) eine dritte gewinnen läßt. Alle Lösungen bilden eine Linearschar von endlicher bzw. von unendlicher Dimension, je nachdem es sich um gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen handelt. Unter welchen differentialtheoretischen Bedingungen läßt sich für die Lösungen nicht linearer Differentialgleichungen eine analoge Komposition erklären, so daß sich jede Lösung aus einer gewissen Anzahl von Basislösungen nach einem differentialalgebraischen Schema komponieren läßt ?

Die Beschäftigung mit den angewandt mathematischen Problemen der Meteorologie und der Ozeanographie hat bei mir den Eindruck hinterlassen, daß die Lösungen der hydrodynamischen Grundgleichungen auf der Sphäre fastperiodischen Charakter haben, sofern angenommen wird, daß die von außerhalb der Erde herrührenden Einflüsse selbst auch diesen Charakter haben. Das Problem ist aber bei dem heutigen Stand der Geophysik schwer zu präzisieren. Ich glaube jedoch, daß es weite Klassen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen auf der Kugelfläche bzw. in einer Kugelschale gibt, die bei vernünftigen Randbedingungen fastperiodische Lösungen, sogar lauter fastperiodische Lösungen in gewissen Fällen, haben. Dieses rein mathematische Problem wurde schon in speziellen Fällen untersucht. Ich denke, es läßt sich präzisieren. Hier liegt eine weitere Anwendungsmöglichkeit der Theorien von Bohr und J. v. Neumann.

Sie haben bei verschiedenen Gelegenheiten den Dualismus: diskret – kontinuierlich auftauchen sehen. Vom rationalen Standpunkt aus erscheint die Bildung von Grenzwerten als unzulässige Idealisierung. Aber auch im rein Kontinuierlichen wollen wir nicht bleiben. Die Topologie lehrt uns, die Eigenschaften des Kontinuums durch ganze Zahlen zu beschreiben. Diese Polarität: diskret – kontinuierlich bringt eine innere Dynamik in die moderne Mathematik hinein, die dem auf der höheren Schule gelehrten mathematischen Wissen ermangelt. Die konsequente Wandlung des mathematischen Schulunterrichtes zur Anerkennung jener inneren Spannung hin, die bereits seit Klein von uns erstrebt wird, ist nötig.

An den neuen sprachlichen Bildungen erkennen wir, daß sich in der modernen Algebra neue Gedanken durchsetzen. Wir können hier das Entstehen einer neuen Sprache in historischer Zeit verfolgen. Diese Sprache ist auf unwandelbare Begriffe geordnet: Die mathematischen Ausdrücke Gruppe, Ideal, Einheit werden von allen Mathematikern der Welt verstanden und respektiert. An dem Entstehen und Vergehen der vielen sprachlichen Neuerscheinungen verfolgen wir durch den Gang von Jahrzehnten, wie durch die rechte Bildung und Prägung der Begriffe unser Denken zur Einfachheit, Klarheit und Allgemeinheit erzogen wird. Das Ziel dieses Ausleseprozesses scheint mir das zu sein, unsere wertvollen mathematischen Erkenntnisse von allgemein menschlichem Interesse so einfach und verständlich auszudrücken und logisch zu verknüpfen, daß sie jedermann in sich aufnehmen kann, der will.

Erläuterungen und Literaturhinweise

(Die eingeklammerten Zahlen bezeichnen die Nummer im Literaturverzeichnis.)

Der Übergang vom naiven Zahlbegriff zu einem kritisch geläuterten Zahlbegriff wird in [17] und noch radikaler in [18] vollzogen.

Der Übergang von den einzelnen Elementen zu den Kollektiven wird in [63] vollzogen. Für die Entwicklung der modernen nichtkommutativen Algebra waren die Arbeiten [52], [53] grundlegend. Ein kurz zusammenfassender Überblick wird in [20] gegeben. Moderne Algebra [64]. Vgl. auch [51].

Gruppentheorie [32], [14], [62], [71], [40].

Zur axiomatischen Methode [31].

Das von Max Zorn gegebene Beispiel zur metamathematischen Methode ist in dem [71] S. 94 gegebenen Beweis zur Existenz der Erweiterungsgruppen mit zyklischer Faktorgruppe enthalten.

Zum Ansatz von Hölder-Schreier-Fitting vgl. [58], [59], [24].

Die Übersicht über die bekannten endlichen einfachen Gruppen steht in [21].

Über die von Mathieu entdeckten Ausnahmegruppen vgl. [41], [42], [60] S. 150 bis 159, [25], [68], [69], [70].

Über die einfachen endlich-kontinuierlichen Gruppen vgl. [37], [15].

Theorie der modularen Darstellungen in [6 bis 11].

Über die Wittschen Lie-Ringe vgl. [16].

Übertragung der Cartanschen Methode in das endliche Gebiet [73], Einleitung.

Verbandstheorie und Grundlagen der projektiven Geometrie [19], [23], [47 bis 49], [29].

Über das Hilbertsche Problem V [30], [45], [39].

Hausdorffsche Formel [27].

Dualitätssatz von Pontrjagin [56], [33 bis 36].
Fastperiodische Funktionen [4], [46], [50].
Fermat-Problem [1].
Satz von der arithmetischen Progression vgl. [28].
Geometrie der Zahlen und Anwendungen auf die Zahlentheorie [43], [44].
Die dichteste gitterförmige Lagerung bei Normabstand mindestens 1 wird durch das Gitter mit den Basisvektoren (1,1) und $((3-\sqrt{5})/2, (3+\sqrt{5})/2)$ gegeben.
Der Ansatz zum Beweis des Klassenkörperturmsatzes durch Verbesserung der Minkowskischen Abschätzung der Zahlenkörperdiskriminanten in Abhängigkeit vom Körpergrad stammt von E. Artin. Der entsprechende Ansatz zum Beweis des Hauptsatzes der Algebrentheorie: Jede normal einfache Algebra über einem algebraischen Zahlkörper von endlichem Grad über dem Körper der rationalen Zahlen, die an jeder Stelle zerfällt, zerfällt im großen, stammt von E. Witt [67].
Einheitentheorie [61].
Ganzzahlige Darstellungen bei arithmetischer Äquivalenz [22], [72].
Raumgruppen [57], [2], [3], [26], [62], [13].
Lauediagramm [5].
Zur Verbandstheorie vgl. außer [19], [23], [29] noch [54], [55], [66].
Zur Reform des mathematischen Schulunterrichtes [38].

Literaturverzeichnis

[1] Bachmann, P.: Das Fermat-Problem. Berlin und Leipzig; De Gruyter & Co. 1919
[2] Bieberbach, L.: Über die Bewegungsgruppen der n-dimensionalen euklidischen Räume I, II. Math Ann. **70** (1991) und Math. Ann. **72** (1912)
[3] –: Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen und die endlichen Gruppen linearer Substitutionen. Gött. Nachr. 1912
[4]. Bohr, M.: Fastperiodische Funktionen. Ergebnisse der Mathematik **5**.1. Berlin: Springer 1932
[5] Born, M.: Optik. Berlin: Springer 1933
[6] Brauer, R.: Über die Darstellung von Gruppen in Galois'schen Feldern. Actualités scientifiques et industrielles **195**. Paris: Hermann 1935
[7] –: On the modular characters of groups. Ann. of Math. **42** (1941)
[8] –: On the connections between the ordinary and the modular characters of groups of finite order. Ann. of Math. **42** (1941)
[9] –: On the Cartan invariants of groups of finite order. Ann. of Math. **42** (1941)
[10] –: On blocks of characters of groups of finite order I, II. Proc. Nat. Ac. Sc. **32** (1946)
[11] –: On Artin's L-Series with general group characters. Ann. of Math. **48** (1947)
[12] Brauer, R.; Nesbitt, C.: On the modular representations of groups of finite order. The University of Toronto Press 1937
[13] Burckhardt, J. J.: Die Bewegungsgruppen der Kristallographie. Basel: Birkhäuser 1947
[14] Burnside, W.: Theory of groups of finite order, 2. Auflage. Cambridge University Press 1911
[15] Cartan, É.: Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thése. Paris: Nony 1894
[16] Chang, Ho-Jui: Über Wittsche Lie-Ringe. Hamb. Abh. **14** (1941)
[17] Dedekind, R.: Stetigkeit und Irrationalzahlen. Braunschweig: Vieweg 1872
[18] –: Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig: Vieweg 1888
[19] –: Über die von drei Moduln erzeugten Dualgruppe. Werke II, S. 236
[20] Deuring, M.: Algebren. Ergebnisse der Mathematik **4**. Berlin: Springer 1935
[21] Dickson, L. E.: Linear groups. Leipzig: Teubner 1901
[22] Diedrichsen, F. E.: Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz. Hamb. Abh. **13** (1940)
[23] Dirichlet-Dedekind: Zahlentheorie, 4. Auflage. Braunschweig: Vieweg 1893, Supplemente
[24] Fitting, H.: Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Jahresbericht der DMV **48** (1938)

[25] Frobenius, G.: Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen. S. Ber. Preuß. Akad. Wiss. 1904
[26] –: Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen. S. Ber. Preuß. Akad. Wiss. 1911
[27] Hausdorff, F.: Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie. Leipziger Ber. **58** (1906)
[28] Hecke, E.: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig: Teubner 1923
[29] Hermes, H.; Köthe, G.: Die Theorie der Verbände. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I 1, **13** (1939)
[30] Hilbert, D.: Mathematische Probleme. Gött. Nachr. 1900
[31] –: Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig: Teubner 1930
[32] Jordan, O.: Traité des substitutions. Paris: Gauthier-Villars 1870
[33] van Kampen, E. R.: Locally compact abelian groups. Proc. Nat. Acad. Sc. USA. **20** (1934)
[34] –: The structure of a compact connected group. Amer. J. Math. **57** (1935)
[35] –: Locally bicompact abelian groups and their character groups. Ann. of Math. **36** (1935)
[36] –: Note on a theorem of Pontrjagin. Amer. J. of Math. **58** (1936)
[37] Killing, W.: Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen I–IV. Math. Ann. **31, 33, 34, 36** (1888–1890)
[38] Klein, F.: Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes an den höheren Schulen. Leipzig: Teubner 1904
[39] Köthe, G.: Unendliche abelsche Gruppen und Grundlagen der Geometrie. Jahresbericht der DMV **49** (1939)
[40] Magnus, W.: Allgemeine Gruppentheorie. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I 1, **9** (1939)
[41] Mathieu, E.: Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, sur la maniére de les former et sur les substitutions qui les laissent invariables. Liouvilles Journal **6** (1861)
[42] –: Sur la fonction cinq fois transitive de 24 quantités. Liouvilles Journal **18** (1873)
[43] Minkowski, H.: Geometrie der Zahlen. Leipzig: Teubner 1910
[44] –: Diophantische Approximationen. Leipzig: Teubner 1907
[45] von Neumann, J.: Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. Ann. of Math. **34** (1933)
[46] –: Almost periodic functions in a group I. Trans. of the Am. Math. Soc. **36** (1934)
[47] –: Continuous geometry I, II, III. Institute for advanced study, Princeton 1935–1937
[48] –: Continuous geometry. Proc. Nat. Ac. Sc. **22** (1936)
[49] –: Algebraic theory of continuous geometries. Proc. Nat. Ac. SC. USA. **23** (1937)
[50] Bochner, S.; Neumann, J. v.: Almost periodic functions in groups II. Trans. of Am. Math. Soc. **37** (1935)
[51] Noether, A. E.: Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. Math. Ann. **96** (1927)
[52] –: Hyperkomplexe Systeme und Darstellungstheorie. Math. Ztschr. **30** (1929)
[53] Noether, A. E.; Brauer, R.: Minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen. S. Ber. Preuß. Akad. Wiss. (1927)
[54] Ore, O.: On the foundation of abstract algebra I, II. Ann. of Math. **36** (1935), **37** (1936)
[55] –: Structures and group theory I, II. Duke Math. Journal **3** (1937), **4** (1938)
[56] Pontrjagin, L.: The theory of topological commutative groups. Ann. of Math. **35** (1934)
[57] Schoenflies, A.: Krystallsysteme und Krystallstructur. Leipzig: Teubner 1891
[58] Schreier, O.: Der Jordan-Höldersche Satz. Hamb. Abh. **6** (1928)
[59] –: Erweiterung von Gruppen I, II. Mh. Math. und Phys. (Wien) **34** und Hamb. Abh. **4** (1926)
[60] de Séguier, J. A.: Éléments de la théorie des groupes des substitutions, Paris 1912
[61] Siegel, C. L.: Discontinuous groups. Ann. of Math. **44** (1943)
[62] Speiser, A.: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin: Springer 1937
[63] Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. Crelles Journal **130** (1906)
[64] van der Waerden, B. L.: Moderne Algebra, 2. Aufl. Berlin: Springer 1937/1949
[65] Wedderburn, J. H. M.: On hypercomplex numbers. London Math. Soc. Proc. **6** (1907)
[66] Wielandt, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Ztschr. **48** (1939)
[67] Witt, E.: Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz. Math. Ztschr. **39** (1934)
[68] –: Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu. Hamb. Abh. **12** (1938)

[69] –: Über Steinersche Systeme. Hamb. Abh. **12** (1938)
[70] Zassenhaus, H.: Über transitive Erweiterungen gewisser Gruppen aus Automorphismen endlicher mehrdimensionaler Geometrien. Math. Ann. **111** (1935)
[71] –: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig: Teubner 1937
[72] –: Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen. Hamb. Abh. **12** (1938)
[73] –: Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik. Hamb. Abh. **13** (1939)

Buchbesprechungen

Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series Secunda, Volumen Vicesimum Quartum: Sol et Luna II. Edidit Charles Blanc. Basel: Birkhäuser Verlag 1991. xxviii, 326 S. DM 270,00

Innerhalb der Reihe II der *Opera* Eulers, in der die Untersuchungen zur Mechanik und Astronomie publiziert werden, wurden die Bände 22 bis 24 für Arbeiten zur Theorie von Sonne und Mond reserviert. Band 22, schon 1958 veröffentlicht, enthielt Eulers sog. zweite Mondtheorie (Theoria motuum lunae, nova methodo pertracta; 1772). Eulers erste Mondtheorie (Theoria motus lunae ...; 1753) bildete den Hauptteil von Band 23 (1969).

Im jetzt erschienenen Band 24 sind zehn Arbeiten Eulers, ein Briefauszug und eine Arbeit des Sohnes Johann Albrecht Euler wieder abgedruckt. Darunter befinden sich drei frühe, in Verbindung mit Eulers Berechnungen von Mondtafeln stehende Abhandlungen – die Tafeln selbst sind 1746 erschienen. Die weiteren Untersuchungen verdeutlichen die Entwicklung der verschiedenen mathematischen Ansätze Eulers in den Jahrzehnten, die auf die Publikation der ersten Mondtheorie folgten. Die wesentlichen Grundzüge dieser Ansätze hat der Herausgeber Ch. Blanc im Vorwort knapp skizziert. J. A. Eulers Arbeit (die einzige in deutscher Sprache – Leonhard Eulers hier publizierte Abhandlungen sind in lateinischer bzw. französischer Sprache verfaßt) ist eine Beantwortung der Preisaufgabe der Bayerischen Akademie aus dem Jahr 1762: „In was für einer (sic) Verhältniss sowohl die mittlere Bewegung des Monds, als auch seine mittlere Entfernung von der Erde mit den Kräften stehen, welche auf den Mond wirken?" Um die Bedeutung dieser Studien richtig einschätzen zu können, muß man sich vor Augen halten, daß Euler an Caspar Wettstein geschrieben hatte (in einem 1753 in englischer Übersetzung in den „Philosophical Transactions" veröffentlichten, im vorliegenden Band auszugsweise abgedruckten Brief), er sei – wie auch Clairaut – bis vor kurzem der Meinung gewesen, die Newtonsche Gravitationstheorie reiche nicht aus, um die Mondbewegungen vollständig zu erklären. Inzwischen hätten sie sich jedoch beide davon überzeugt, daß sich auch die Bewegung des Apogäums des Mondes mit Hilfe der Newtonschen Theorie berechnen lasse. Damit sei es möglich geworden, zufriedenstellende Mondtafeln anzufertigen. – Es war ja nicht zuletzt die Bedeutung von verläßlichen Mondtafeln für die Längenbestimmung auf See, die der Mondtheorie, über das rein theoretische Interesse der Astronomen und Mathematiker hinaus, eine so eminent wichtige Rolle für die Praxis der Schiffahrt verlieh. Maßgebliche Tafeln wurden dann vor allem von dem Göttinger Astronomen Johann Tobias Mayer (1723–1762) berechnet.

Hamburg C. J. Scriba

Scriba, C. J. (Hrsg.), Joseph Ehrenfried Hofmann: Ausgewählte Schriften, Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag 1990, 2 Bände, 509 und 500 S., DM 396,–

Die Schriften Joseph Ehrenfried Hofmanns (1900–1973) wurden beispielhaft für die folgende Generation von Mathematikhistorikern. Hofmanns überragender Bedeutung wird nun durch die Herausgabe „Ausgewählter Schriften" Rechnung getragen. Diesen vorangestellt ist ein möglichst vollständiges „Verzeichnis der Schriften" (I, 5–34), das 378 Nummern umfaßt. Daraus geht hervor, daß Hofmann schon im Jahre 1926, als er gerade Kontakte zu Heinrich Wieleitner zu knüpfen begann, erste Arbeiten publizierte. Für die vorliegende Edition konnten leider nur 50 Schriften ausgewählt werden, man verzichtete generell auf Hofmanns frühe Arbeiten aus den Jahren 1926–1949, auf seine didaktischen Arbeiten und aus Formatgründen auf Akademieabhandlungen.

Schwerpunkte in Hofmanns Schaffen bildeten G. W. Leibniz, P. de Fermat und Nikolaus von Kues; doch wurden in diese Edition insbesondere auch Arbeiten aufgenommen, die die volle Breite seines Wirkens widerspiegeln, Hofmanns Arbeitsgebiet reichte von der Antike bis ins 19. Jahrhundert. Seine Schrift „Zur Frühgeschichte des Funktionsbegriffs in der Antike" aus dem Jahre 1963, die bislang nur handschriftlich vorlag, wird hier erstmals veröffentlicht (II, 436–490).

Erfreulicherweise wird das Gesamtwerk Hofmanns durch ein Personenregister (II, 492–498) und ein thematisches Register (II, 499f.) erschlossen. Die Biographie Hofmanns wird durch das „Verzeichnis der Würdigungen und Nachrufe" (I, 38–40), das 22 Titel umfaßt, einer erstmals in Deutsch veröffentlichten Ansprache J. J. Burckhardts zm 65. Geburtstag Hofmanns (I, 41–48) und seine Autobiographie (II, 110–122) zugänglich gemacht.

Die vorliegende Edition beweist ein besonderes Kennzeichen von Hofmanns Arbeitsstil, seine historische Strenge. Auf Grund umfangreicher und fundierter Sprachkenntnisse war es Hofmann möglich, sich direkt mit den Quellen auseinanderzusetzen. Diese Sprachkenntnisse setzt Hofmann auch bei seinen Lesern voraus, lateinische Zitate z. B. wurden in der Regel nicht übersetzt. Möge dieser Arbeitsstil auch für die Zukunft beispielhaft sein und von den Mathematikhistorikern beherzigt werden, denn vor allem hinreichende Lateinkenntnisse sind für die Mathematikgeschichte eine notwendige, unverzichtbare Voraussetzung.

Hofmann veröffentlichte in vielen verschiedenen Zeitschriften, Nachschlagewerken, usw. Seine „Ausgewählten Schriften" bieten eine gute Möglichkeit, die wichtigsten Arbeiten rasch einer breiten Leserschaft zugänglich zu machen. Leider ist der Preis der beiden Bände von DM 396,– für Privatpersonen sicher abschreckend.

Stuttgart K. Reich

Coxeter, H. S. M., Regular Complex Polytopes, Second Ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1991, 210 S., £ 30.00

Ausgehend von den klassischen Beziehungen zwischen den regulären Polygonen und Polyedern (Platonische Körper) und endlichen Gruppen untersucht Coxeter den Zusammenhang zwischen geometrischen Figuren und den zugehörigen Dreh- und Spiegelungsgruppen im reellen bzw. im unitären Raum. Der Kern des Buches ist, daß der reelle 4-dimensionale Raum, der besonders reich an regulären (und halbregulären) Polytopen und Sternkörpern ist, als komplexe Ebene mit den Koordinaten $x_1 + ix_2, x_3 + ix_4$ behandelt wird.

Trotz seines Titels spielt das Buch, das durch G. Shephards Dissertation angeregt wurde, zum größeren Teil im Reellen. Es empfiehlt sich, das Buch zusammen mit Coxeters früherem Buch „Regular Polytopes" (2. Aufl. 1963, Zbl. 31,65 oder MR27#1856) zu studieren, da einfache und leicht verständliche Sachverhalte dicht neben schwierigen Problemen liegen – das gilt auch und besonders für die Exercises am Ende jeden Kapitels.

Kapitel 1 behandelt reguläre Polygone, die zugehörigen Gruppen sowie ebene und räumliche kinematische Probleme, die nach Coxeters Intention auch für Architekten, Ingenieure und Kristallographen von Interesse sein können. Kapitel 2 und 3 liefern Techniken der sphärischen Trigonometrie; es werden die Platonischen, Archimedischen und Kepler-Poinsotschen Körper eingeführt; dazu wird im 3. Kapitel das Ikosaedrische Kaleidoskop vorgestellt.

In Kapitel 4 und 5 werden die 16 regulären Polytope im 4-dimensionalen Raum eingeführt (6 konvexe, 10 Sternpolytope). Kapitel 4 ist der erste Höhepunkt des Buches. Hier wird der reelle 4-dimensionale Raum als komplexe Ebene behandelt und die Schläfli-

Coxeter-Symbolik konsequent eingesetzt. Das Kapitel enthält auch die berühmten Figuren der Kantengraphen regulärer komplexer Sternpolytope von P. McMullen. Es scheint, als hätte McMullen am Vorabend des Siegeszuges der Computergraphik noch einmal die Möglichkeiten der Zeichentechnik mit Zirkel, Bleistift und Lineal aufzeigen wollen. Seine spektakulärste Figur (mit mehreren tausend Linien) auf der Innenseite des Buches zeigt zugleich die Grenzen moderner Druck- und Kopiertechnik: Der Druck kann (im Gegensatz zur 1. Auflage) die einzelnen Linien nicht mehr trennen.

Die folgenden Kapitel 5 bis 9 behandeln periodische Muster, Quaternionen, weitere Polyedergruppen, den unitären Raum und die unitäre Ebene.

In Kapitel 10, einem weiteren Höhepunkt, werden mit Methoden von DuVal und Shephard-Todd die endlichen Spiegelungsgruppen der unitären Ebene aufgezählt. Kapitel 11 bis 13 behandeln die regulären komplexen Polygone und Polytope sowie deren Symmetriegruppen.

Das 14. und letzte Kapitel behandelt „fast reguläre" Polytope und endet mit einem Ausblick auf neuere Ergebnisse, z. B. Inzidenzpolytope und polyedrische Realisierungen.

Diese letzten und besonders wichtigen Kapitel enthalten ebenfalls so spektakuläre Figuren wie Kapitel 4.

In der vorliegenden 2. Ausgabe wird auch auf zwischenzeitliche Ergebnisse und Fortschritte durch J. H. Conway, A. M. Cohen, P. McMullen, T. A. Springer, J. G. Sunday u.a. hingewiesen. Das Buch, das Coxeter nach eigenen Angaben 20 Jahre lang beschäftigt hat und das er „wie eine Bruckner-Sinfonie" aufzubauen versucht hat, indem er Geometrie, Algebra und Gruppentheorie zu einem Ganzen verbunden hat, ist eine gelungene und zeitlose Synthese zwischen genialer Intuition, Strenge und Enthusiasmus.

Siegen J. M. Wills

Knus, M.-A., Quadratic and Hermitian Forms over Rings (Grundlehren der math. Wissenschaften, vol. 294), Berlin u.a.: Springer-Verlag 1991, 524 S., DM 198,–

Nachdem der Springer-Verlag erst vor 6 Jahren in derselben Reihe ein Buch von W. Scharlau mit fast identischem Titel herausgebracht hat, nimmt man dieses neue Buch zunächst mit einiger Überraschung zur Hand. Es zeigt sich aber schnell, daß die Worte „over rings" im Titel sehr wesentlich sind und daß es der Autor geschickt vermieden hat, den Inhalt des Buches von Scharlau oder anderer Bücher über „quadratische Formen über Körpern" einfach zu wiederholen. Überschneidungen treten fast nur in den Kapiteln I und II des vorliegenden Buches auf, und auch diese beiden Kapitel hätte er nur zum Teil und zum Schaden des Lesers durch Zitate ersetzen können.

Ringe sind hier grundsätzlich assoziativ mit 1, aber i.a. nicht kommutativ. Zur Definition der sesquilinearen (speziell: hermitischen, unitären oder quadratischen) Formen und Räume über R braucht man eine Involution (= Antiautomorphismus der Ordnung $\leqslant 2$) auf R. Für viele Ergebnisse ist allerdings eine einschränkende Voraussetzung an R zu machen, z. B. daß R eine Algebra endlicher Dimension über einem kommutativen Grundring ist. Der Aufbau ist rein algebraisch und möglichst funktoriell, so daß wichtige Sätze wie diejenigen von Krull-Schmidt und Witt in großer Allgemeinheit gewonnen werden. Eine wesentliche Rolle spielen Techniken wie die „patching diagrams" (I § 11), die „descent theory" (III § 1) und Kohomologiegruppen (III § 2). Die descent theory erlaubt einen „Abstieg" von S nach R für Elemente, Moduln und Algebren, wenn S eine kommutative treu-flache R-Algebra ist. Kohomologiegruppen beziehen sich auf die Zariski-Topologie, die etale Topologie oder die fppf-Topologie (faithfully flat and finitely presented) auf der Kategorie der kommutativen R-Algebren.

Zum eigentlichen Inhalt des Buches ist vorab zu sagen, daß fast alles Material aus den jüngsten 15–20 Jahren stammt und zu einem großen Teil vom Verfasser in Zusammenarbeit mit M. Ojanguren, R. Parimala und R. Sridharan geschaffen wurde. Weitere wesentliche Beiträge gehen auf M. Karoubi, M. Knebusch, M. Kneser, D. Quillen, J.-P. Serre und A. A. Suslin zurück. Themen des Buches sind unter anderem:

Azumaya-Algebren (= zentrale, separable und als Modul endlich erzeugte Algebren) über einem kommutativen Ring R; die Brauergruppe $\mathrm{Br}(R) \cong \check{H}^2_{et}(R, G_m)_{\mathrm{tor}}$; die Pfaffiante; Diskriminante und Arf-Invariante; Clifford-Algebren von semiregulären quadratischen Formen über einem kommutativen Ring R; orthogonale Gruppen, Spingruppen; weitgehende Klassifikation der quadratischen Formen vom Rang $\leqslant 6$ und der hermitischen Formen vom Rang $\leqslant 2$; verallgemeinerter Satz von Hurwitz über Kompositionsalgebren (existieren nur in den Dimensionen 1, 2, 4, 8); sehr elegante Behandlung der Kompositionstheorie von quadratischen Formen in den Dimensionen 1, 2, 4.

Der Höhepunkt des Buches liegt m. E. in den letzten 3 Kapiteln, in welchen eine Fülle von interessanten Entdeckungen, meistens mit vollständigen Beweisen, dargestellt wird, die der bescheidene Titel des Buches gar nicht vermuten läßt. So finden sich hier große Teile der algebraischen K-Theorie von Bass, Serre, Vaserstein u.a. und das berühmte Theorem von Quillen-Suslin über die Freiheit der projektiven Moduln über kommutativen Polynomringen. Im unitären Fall sind für die relevanten Zerfällungs-, Stabilitäts- und Kürzungssätze stärkere Voraussetzungen erforderlich als im linearen Fall, nämlich passende Isotropiebedingungen.

Das Kapitel über Polynomringe behandelt auch Polynomringe über Schiefkörpern und nichtkommutative euklidische Ringe und Hauptidealringe sowie die „Erweiterungstheorie" für quadratische und hermitische Räume. Als Beispiel sei ein Satz von Karoubi genannt:

„Sei A ein Ring mit Involution, in dem 2 invertierbar ist. Sei (M, b) ein ε-hermitischer Raum über $A[t_1, \ldots, t_r]$. Wenn M als Modul stabile Erweiterung eines A-Moduls ist, dann gilt das Entsprechende für (M, b)". Als Folgerung erhält man die Isomorphie

$$W^\varepsilon(A) \cong W^\varepsilon(A[t_1, \ldots, t_r]).$$

Ist in obigem Satz zusätzlich A eine endlich-dimensionale R-Algebra über einem noetherschen Ring R der Krull-Dimension d und sind gewisse lokale Witt-Indizes von M alle $\geqslant d+1$, so ist sogar (M, b) selbst Erweiterung von A, d.h. Tensorprodukt eines ε-hermitischen Raumes über A mit $A[t_1, \ldots, t_r]$. Das ist ein Satz von Ojanguren.

Für einen lokalen noetherschen Ring R werden die Theoreme von Grothendieck und Horrocks für Vektorbündel auf dem $\mathbb{P}^1_R$ sowie ein quadratisches Analogon von Parimala bewiesen. Beispiele und Gegenbeispiele, die häufig mit Hilfe von Quaternionenalgebren konstruiert werden, zeigen, daß die gemachten Voraussetzungen (2 ist Einheit von A, Isotropiebedingungen) tatsächlich erforderlich sind. Interessant sind auch Sätze von Quebbemann über die Erweiterung hermitischer Bündel über affinen Räumen auf die zugehörigen projektiven Räume.

Schließlich wird im letzten Kapitel die Wittgruppe eines Schemas X definiert (nach Knebusch) und in gewissen Fällen berechnet. Für einen Körper K mit von 2 verschiedener Charakteristik ist $W(\mathbb{A}^n_K) = W(K)$ nach Karoubi und $W(\mathbb{P}^n_K) = W(K)$ nach einem Satz von Arason. Für affine Kurven oder glatte affine Flächen über reell oder algebraisch abgeschlossenen Körpern ist deren Wittgruppe endlich erzeugt und in Spezialfällen explizit berechenbar. Wesentliches technisches Hilfsmittel ist hierbei der Satz, daß die natürliche Abbildung $W(R) \to W(K)$ injektiv ist, wenn R ein regulärer Integritätsbereich der Dimension $\leqslant 3$ und K sein Quotientenkörper ist. An diesem Satz waren viele Autoren beteiligt. Für $\dim R \geqslant 4$ ist er leider falsch.

Zusammenfassend kann man sagen, daß das vorliegende Buch sehr gut geschrieben ist und den neuesten Stand der Theorie in einheitlicher Darstellung vermittelt. Es wird sich vermutlich schon bald als Standard-Referenz für zukünftige Forschungsarbeiten erweisen, die z. Z. stark auf die Verbindung der rein-algebraischen Theorie der quadratischen und hermitischen Formen mit der algebraischen Geometrie hinzielen.

Das 16seitige Literaturverzeichnis scheint ziemlich vollständig zu sein. Außer dem Index (Stichwortverzeichnis) wäre ein Verzeichnis der verwendeten Bezeichnungen und Symbole nützlich. Stattdessen gibt es eine Reihe von Druckfehlern, die der aufmerksame Leser allerdings meistens schnell erkennen wird.

Mainz A. Pfister

Pisier, G., The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry, Cambridge u.a.: Cambridge University Press 1989, 250 S., £ 30.00

Die lokale Theorie der Banachräume untersucht die Zusammenhänge zwischen analytischen Eigenschaften dieser Räume und geometrischen Eigenschaften ihrer endlichdimensionalen Teilräume. In den letzten Jahren haben dabei Aussagen über Schnitte und Projektionen zentralsymmetrischer konvexer Körper und vor allem Volumenabschätzungen besondere Bedeutung gewonnen. Der erste (größere) Teil des Buches von Pisier befaßt sich mit drei fundamentalen Resultaten dieser Art, die zum besseren Verständnis hier wiedergegeben werden sollen. Unter einem Ball B im n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ sei eine kompakte konvexe Menge mit dem Nullpunkt als Symmetriezentrum und innerem Punkt verstanden. Theorem I (V. D. Milman, 1985) besagt: Zu $0<\varepsilon<1$ gibt es lineare Unterräume, $F_2 \subset F_1 \subset \mathbb{R}^n$, so daß die Projektion B' des Durchschnitts $F_1 \cap B$ auf F_2 $(1+\varepsilon)$-äquivalent zu einem Ellipsoid ist (d. h. $E \subset B' \subset (1+\varepsilon)E$ für ein passendes Ellipsoid E in F_2 erfüllt) und die Dimension von B' mindestens $\psi(\varepsilon)n$ ist, wo $\psi(\varepsilon)>0$ nur von ε abhängt. Wesentlich ist hier die in n lineare untere Schranke für die Dimension, im Gegensatz zu der Schranke der Ordnung $\log n$ im berühmten Satz von Dvoretzky, der sich nur auf Schnitte (oder Projektionen) bezieht. Theorem II, die inverse Santaló-Ungleichung (Bourgain & Milman, 1987), sagt aus, daß für die Volumina von B und dem Polarkörper B^0 die Ungleichung $n(\operatorname{vol}(B)\operatorname{vol}(B^0))^{1/n} \geqslant \alpha$ mit einer von n unabhängigen Konstanten $\alpha>0$ besteht. Theorem III (Milman, 1986) ist die inverse Brunn-Minkowski-Ungleichung: Zu zwei Bällen B_1, B_2 im $\mathbb{R}^n$ gibt es eine volumentreue lineare Abbildung L mit $\operatorname{vol}(B_1+LB_2)^{1/n} \leqslant C[\operatorname{vol}(B_1)^{1/n}+\operatorname{vol}(B_2)^{1/n}]$, wo C eine von n unabhängige Konstante ist.

Diese Aussagen sind typisch für die asymptotische Theorie der endlichdimensionalen Banachräume: Von Interesse sind weniger möglichst scharfe Abschätzungen in einem Raum fester Dimension n, sondern das Verhalten der eingehenden Konstanten und ihre Größenordnung für $n \to \infty$; bereits hieraus ergeben sich für die Geometrie der Banachräume reichhaltige Folgerungen. Bei gegebener Dimension $n \geqslant 3$ sind optimale Abschätzungen meistens unbekannt, wie etwa bei II und III, wären aber natürlich auch sehr interessant, vor allem im Hinblick auf die geometrische Charakterisierung der Optimalsituationen. Die lokale Theorie der Banachräume hat bemerkenswerte Fragestellungen und Resultate erbracht, die auch im Rahmen der eher klassischen Konvexgeometrie von großem Interesse sind, aber deren traditionellen Methoden bisher weitgehend unzugänglich zu sein scheinen.

Das vorliegende Buch verfolgt zwei verschiedene Zugänge zu den erläuterten Ergebnissen. Der eine, neue Zugang beweist zuerst Theorem III und erhält I und II als Folgerungen. Zweierlei erstaunt hieran: Zum einen, daß der inverse Brunn-Minkowski-Satz so wirkungsvoll ist, zum andern, daß die klassische Brunn-Minkowskische Theorie einen solchen Satz zuvor nicht kannte und anscheinend (jedenfalls bis jetzt) mit ihren elementareren Methoden auch nicht liefern kann. In einem weiteren Kapitel des vorliegenden Buches wird I im wesentlichen nach Milman bewiesen und gezeigt, daß II hieraus relativ leicht gewonnen werden kann. Die verwendeten Hilfsmittel werden in mehreren Kapiteln bereitgestellt. Dazu zählen Aussagen über Ellipsoide maximalen Volumens unter verschiedenen Nebenbedingungen, Gaußsche Prozesse, Entropie-Zahlen und Approximationstheorie, die sogenannte K-Konvexitäts-Konstante, insgesamt zahlreiche Resultate aus der lokalen Theorie der Banachräume, aber auch gemischte Volumina. Eher beiläufig fallen zum Beispiel elegante unkonventionelle Beweise für die Ungleichungen von Brunn-Minkowski und Urysohn ab.

Der zweite Teil des Buches ist von etwas speziellerem Charakter. Er behandelt ausführlich die Klassen der Banachräume, die mit weak cotype 2 bezeichnet worden sind (Milman und Pisier, 1986), und führt weak type 2 als in etwa dualen Begriff ein. Der Durchschnitt beider Klassen definiert die schwachen Hilberträume, die eingehender untersucht werden. All diese Eigenschaften haben zu tun mit der Approximierbarkeit der Normbälle endlichdimensionaler Unterräume durch Ellipsoide und haben damit einen starken geometrischen Gehalt.

Die Darstellung ist ausgefeilt und elegant und bietet dem Leser eine klare Einführung und einen lohnenden Zugang zu tiefliegenden Ergebnissen. Es bleibt eine Herausforderung, für diejenigen der Resultate, die im Rahmen der klassischen Konvexgeometrie von Interesse und einfach und anschaulich zu formulieren sind, auch Beweise in eben diesem Rahmen zu finden.

Freiburg R. Schneider

Yuan Wang, Diophantine Equations and Inequalities in Algebraic Number Fields, Berlin u.a.: Springer Verlag 1991, 180 S., DM 98,–

Der Verfasser, von dem in jüngster Zeit wichtige Arbeiten zum angesprochenen Problemkreis erschienen sind, befaßt sich, nach einer kurzgefaßten Darstellung der Methode an Hand der Lösung des Waringschen Problems über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen, mit Anwendungen der Hardy-Littlewood-[Vinogradov]-schen Kreismethode auf Fragestellungen in algebraischen Zahlkörpern.

Im algebraischen Zahlkörper K werden behandelt:

a) das *Waringsche Problem* der Darstellung total-positiver ganzer algebraischer Zahlen γ in der Gestalt

$$(*) \qquad \gamma=\lambda_1^k+\ldots+\lambda_s^k,$$

(wobei $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ total-positiv sind) einschließlich der notwendigen Abschätzungen von Exponentialsummen (Analoga der „Weylschen Abschätzungen" und von „Huas Mittelwertsatz") und der Auswertung der „Singulären Reihe".

Es bezeichne J_K den von den k-ten Potenzen der ganzalgebraischen Zahlen aus K erzeugten Ring. Ist γ aus J_K, so gilt:

(1) Die Singuläre Reihe $\mathscr{S}(\gamma)$ ist größer als eine positive Konstante c_1, falls

$$s\geqslant 4\mathrm{k}\cdot n$$

ist, wobei n den Grad von K über $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

(2) Die (erwartete) asymptotische Formel für die Anzahl der Lösungen von (*) wird bewiesen, wenn

$$s\geqslant \max(4k\cdot n,\, 2^{\mathrm{k}}+1)$$

ist.

(3) Die für die Darstellbarkeit totalpositiver ganzer Zahlen aus J_K mit großer Norm in (*) erforderliche minimale Anzahl $G_K(k)$ der Summanden läßt sich durch

$$G_K(k) \leqslant 2n \cdot G_{\mathbb{Q}}(k) + 4k \cdot n$$

abschätzen. [Für die Anzahl $G_{\mathbb{Q}}(k)$ im Rationalen hat T. D. Wooley in jüngster Zeit sehr beachtliche Verbesserungen erzielt].

b) *additive Gleichungen* der Gestalt

$$(**) \qquad \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \alpha_i \cdot \lambda_i^k = 0,$$

mit vorgegebenen ganzen Zahlen $\alpha_i \neq 0$ aus K.

Die zugehörige „Singuläre Reihe" erfüllt

$$\mathscr{S} > c_1(s, \max \|\alpha_i\|, K) > 0,$$

wenn $s \geqslant (2k)^{n+1}$ ist (für *ungerades* k trifft die Aussage $\mathscr{S} > c_2(s, \max \|\alpha_i\|, K) > 0$ sogar unter der schwächeren Voraussetzung $s > c \cdot n \cdot k \cdot \log k$ zu); $\|\alpha\|$ bezeichnet das Maximum der Absolutbeträge der Konjugierten von α.

Schließlich besitzt die Gleichung (**) eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \neq (0, \ldots, 0)$, die

$$\max_{\sigma} \|\lambda_\sigma\| \ll (\max_{j} \|\alpha_j\|^{c_4(k,n)})$$

erfüllt, wenn $s \geqslant c_3(k, n)$ gilt und wenn für jedes l die Zahlen

$$\alpha_i^{(l)}, \qquad i = 1, \ldots, s,$$

nicht dasselbe Vorzeichen besitzen.

c) die *Existenz „kleiner" Lösungen* von additiven Gleichungen der Gestalt

$$\alpha_1 \lambda_1^k + \ldots + \alpha_s \lambda_s^k = \alpha_{s+1} \cdot \lambda_{s+1}^k + \ldots + \alpha_{2s}^k \cdot \lambda_{2s}^k;$$

solche „kleinen" Lösungen mit

$$\max_i \text{Norm}\,(\lambda_i) \ll (\max_i \quad \text{Norm}\,(\alpha_i))^{1/k+\varepsilon}$$

existieren, wenn

$$s \geqslant c_4(k, n, \in)$$

ist.

d) die *Existenz „sehr kleiner" Lösungen* additiver Gleichungen der Gestalt (**) in dem Spezialfalle, daß k ein rein imaginärer algebraischer Zahlkörper ist.

e) in rein imaginär algebraischen Zahlkörpern die *Existenz „kleiner" Lösungen von Diophantischen Ungleichungen*; diese Ergebnisse stammen vom Verfasser (1989) und sind Analoga von Ergebnissen von Wolfgang M. Schmidt im rationalen Fall (für eine genauere Formulierung dieser Ergebnisse vgl. man Kapitel 11 des Buches).

Außer auf eigene Arbeiten stützt sich der Verfasser insbesondere auf die grundlegenden Arbeiten von C. L. Siegel, sodann auf solche von L. K. Hua, Jane Pitman, T. Tatuzawa, W. M. Schmidt und anderen.

Die Bibliographie umfaßt 24 Monographien und gut 60 Originalarbeiten. Sie ist mit Rücksicht auf die „References" in den zitierten Monographien recht kurz gehalten. Die Arbeiten von J. Brüdern sind noch nicht erwähnt. Der Index ist genau eine Seite lang. Nach jedem Kapitel geben unterschiedlich lange „Notes" wichtige Hinweise auf Quellen und Verallgemeinerungen bzw. Verbesserungen.

Es ist kaum vermeidbar, daß die Darstellung verhältnismäßig technisch ist und eine Vielfalt von Bezeichnungen (meist Standardbezeichnungen) erfordert; dies erschwert die Lesbarkeit dieses Werkes, das erstmalig ausführlich und ausschließlich der additiven Zahlentheorie in algebraischen Zahlkörpern gewidmet ist.

Die Monographie dürfte für zahlentheoretisch orientierte Mathematiker, die sich mit der analytischen Behandlung additiver Fragen in algebraischen Zahlkörpern beschäftigen wollen, von Wichtigkeit sein und weiterhin auch für Seminare über dieses Gebiet geeignet sein.

Frankfurt/Main W. Schwarz

Baues, H. J., Combinatorial Homotopy and 4-Dimensional Complexes (De Gruyter Expositions in Mathematics 2), Berlin u.a.: De Gruyter Verlag 1991, 380 S., DM 158,–

Die Homotopieklassifikation 3-dimensionaler CW-Komplexe und diejenige einfach zusammenhängender, 4-dimensionaler, endlicher CW-Komplexe mit algebraischen Hilfsmitteln wurde bereits von J. H. C. Whitehead geleistet. Im ersten Fall sind Kreuzmoduln und die Reidemeister-Peifferschen Identitäten zentrale Begriffe. Sie begleiten die noch ungelösten Probleme der Homotopietheorie 2-dimensionaler Komplexe auf Schritt und Tritt. Der zweite Fall wurde für die Klassifikation von 4-Mannigfaltigkeiten von entscheidender Bedeutung.

Für letztere war eine analoge Homotopieklassifikation 4-dimensionaler CW-Komplexe mit $\pi_1 \neq \{1\}$ wünschenswert, welche bei Whitehead offenblieb. Diese ist das Hauptthema und -ergebnis des vorliegenden Buches.

Zu diesem Zweck wird einem CW-Komplex X ein *quadratischer Kettenkomplex* zugeordnet, der wie folgt „über" dem Komplex der relativen Homotopiegruppen der Gerüste von X liegt:

$$\begin{tikzcd}
 & & & C_2 \otimes C_2 \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[dr, "d_3\omega"] & & & \\
\cdots \arrow[r] & \sigma_4 \arrow[rr, "d_4"] \arrow[d, "\approx"] & & \sigma_3 \arrow[rr, "d_3"] \arrow[d, two heads] & & \sigma_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, two heads] & \sigma_1 \arrow[d, "\approx"] \\
\cdots \arrow[r] & \pi_4(X^4,X^3) \arrow[rr] & & \pi_3(X^3,X^2) \arrow[rr] & & \pi_2(X^2,X^1) \arrow[r] & \pi_1(X^1)
\end{tikzcd}$$

$\approx$

Dabei sind die σ_i σ_1-Gruppen, C_2 die zweiten Reidemeisterschen Homotopieketten und die σ_i bis zur Dimension 3 i. allg. nichtabelsch. $\sigma_2 \xrightarrow{d_2} \sigma_1$ ist ein Prä-Kreuzmodul der Peiffer-Nilpotenzstufe 2 (d.h. Peifferkommutatoren, für welche eine Variable selbst Peifferelement ist, verschwinden); $d_3\omega$ bildet $a \otimes b$ auf den Peifferkommutator von a und b ab; die von $C_2 \otimes C_2$ ausgehenden zwei Spalten des Diagramms sind exakt; und für ω, d_3, d_2 gelten gewisse Hochhebungen der daraus zwischen $d_3\omega$ und d_2 folgenden Verträglichkeitseigenschaften. In diesen Daten ist insbesondere Information über die von der Hopfabbildung induzierte Abbildung $\pi_2(X^3) \xrightarrow{f} \pi_3(X^3)$ kodiert: $f(a+b)-f(a)-f(b)$ ist bilinear in a und b; daraus leiten sich die „quadratischen Begriffe" her in Fortführung solcher schon bei Whitehead verwendeter.

Als erster wichtiger Sachverhalt ist zu nennen, daß die Homologiegruppen $H_i = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i+1}$ des quadratischen Kettenkomplexes von X (existieren und) für $i = 1, 2, 3$ mit $\pi_i(X)$ übereinstimmen; H_4 ist dem Bild des Hurewicz-Homomorphismus isomorph; und die höheren H_i $(i \geqslant 5)$ sind die gewöhnlichen Homologiegruppen der universellen Überlagerung $\tilde{X}$. Das zentrale Ergebnis des Buches aber ist, daß (nach Übertragung des Homotopie-begriffs von Kettenkomplexen auf quadratische Kettenkomplexe) die Homotopietypen zusammenhängender 4-dimensionaler CW-Komplexe algebraisch klassifiziert werden können.

Das Buch präsentiert diese Ergebnisse zusammen mit einer Einführung in die Haupthilfsmittel der allgemeinen und der niederdimensionalen Homotopietheorie. Daß diese (wieder) zusammengeführt werden, ist ein wichtiges Verdienst des Autors. Es enthält auch etliche schöne Resultate, auf welche in dieser Besprechung nicht näher eingegangen werden kann, z. B. Zusammenhänge zwischen quadratischen Kettenkomplexen und Cohomologieinvarianten sowie algebraischer K-Theorie.

Freilich: allgemeine Klassifikationssätze ersetzen noch nicht weitere harte Arbeit, analog dazu, daß Whiteheads Resultate noch nicht klärten, ob zu gegebenem π_1 und gegebener Eulerscher Charakteristik überhaupt 2-Komplexe verschiedenen Homotopietyps existieren. Auch empfinden wir es als etwas mühsam, manches Juwel erst aus der Verpackung mehrerer Funktoren befreien zu müssen, bevor es (für uns) zu leuchten beginnt. Andererseits stellen das Vorwort von R. Brown und die Einleitung des Autors in vorbildlicher Weise den Kontext her, bevor sich der Leser den Mühen der detaillierten mathematischen Reise unterzieht. Auf dieser Reise erhält er wichtige Anregungen, sei es, daß er an der Whiteheadschen Asphärizitätsvermutung für 2-Komplexe oder über niederdimensionale Mannigfaltigkeiten arbeitet. Bereits Vorstufen des endgültigen Texts zirkulierten unter Experten mit dem Kommentar, daß in ihm ein mathematischer Schatz zu heben sei für die eigenen Projekte. Und wenn man dies zusammen mit der Tatsache betrachtet, daß das Buch schon Studierenden des zweiten Studienabschnitts empfohlen werden kann, ist es kein geringes Lob.

Frankfurt/Main C. Hog-Angeloni, W. Metzler

Onishchik, A. L., Vinberg, E. B., Lie Groups and Algebraic Groups, Berlin u.a.: Springer-Verlag 1990, 355 S., DM 128,–

Die Stimmungen *eines* Lesers über ein Buch dürfen noch nicht den Ausschlag geben. Mein Eindruck von dem vorliegenden Buch, um es aber gleich zu sagen, schwankt zwischen Irritation und Begeisterung. Die Begeisterung gilt dem Inhalt, seiner Fülle, seiner Grundkonzeption und dem offenkundigen Sachverstand seiner Verfasser. Aber seine Unebenheit, seine Organisation und – mindestens stellenweise – die Übersetzung sind ärgerlich.

Die Lie-Gruppen sind nach Dieudonnés Diktum ein zentrales Werkzeug geworden. Wir alle kennen sie in Form der Matrizengruppen $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und solcher klassischer Untergruppen wie der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{K})$ der Matrizen der Determinante 1, oder in Form der orthogonalenGruppen $\mathrm{O}(n)$ oder der unitären Gruppen $\mathrm{U}(n)$ mit den Untergruppen $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ oder $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$.Das wichtigste und nützlichste Merkmal ist die Zuordnung einer *Lie-Algebra* $\mathfrak{L}(G)$ zu$G$ und der *Exponentialfunktion* exp: $\mathfrak{L}(G) \to G$, die eine geeignete offene Umgebung der 0 in $\mathfrak{g}$ hoöomomorph auf eine offene Umgebung von 1 in G abbildet. In den Beispielen haben wir $\mathfrak{L}(G) = \mathfrak{g}l(n, \mathbb{K})$,die Lie-Algebra aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ mit der Multiplikation $[X, Y] = XY - YX$ und der Exponentialfunktion $\exp X = e^X \overset{\text{def}}{=} 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots$. Damit gibt es schon eines der wichtigsten Werkzeuge, nämlich der *adjungierten Darstellung* $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$, die durch $\exp \mathrm{Ad}(g)X = g \exp X g^{-1}$ gekennzeichnet ist und $\mathrm{Ad}(\exp X) = e^{\mathrm{ad}\, X}$, $(\mathrm{ad}\, X)(Y) = [X, Y]$, erfüllt. Jede Lie-Gruppe ist eine analytische Mannigfaltigkeit mit analytischer Multiplikation und Inversion. Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von

G, so definiert sie eine Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von G die durch die Exponentialfunktion lokal homöomorph in H abgebildet wird. Insbesondere ist sie eine Untermannigfaltigkeit und wird als *Lie-Untergruppe* bezeichnet. Jeder Lie-Untergruppe entspricht also eine Unteralgebra. Auf diese Weise werden im allgemeinen nicht alle Unteralgebren aufgelistet. Die reelle Unteralgebra $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\,it \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ ist keiner abgeschlossenen Untergruppe in dieser Weise beigestellt. Aber es gibt eine Untergruppe A für die hier sogar $\exp \mathfrak{a} = A$ gilt, nämlich die Gruppe $A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}it} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$, die in einer zweidimensionalen Torusgruppe dicht ist. Da solche Untergruppen Integralmannigfaltigkeiten einer Distribution sind, nennt Bourbaki sie *Integraluntergruppen.* In der Literatur ist für eine solche Untergruppe sonst der Ausdruck *analytische Untergruppe* üblich und akzeptiert. (Warum in diesem Buch dafür der Ausdruck *virtuelle Lie-Untergruppe* eintreten muß, bleibt das Geheimnis der Verfasser). Ein erstaunlicher und überaus nützlicher Satz von Yamabe und Gôto besagt, daß jede bogenzusammenhängende Untergruppe schon analytisch ist. Er ist tiefer als andere Sätze, in denen aus topologischen Voraussetzungen analytische Folgerungen gezogen werden, wie etwa der, daß eine abgeschlossene Untergruppe schon analytisch ist oder der, daß ein stetiger Gruppenmorphismus zwischen Lie-Gruppen analytisch ist. (Wir sehen hier ab von dem außenordentlich schwer zu beweisenden Satz von Gleason, Montgomery, Yamabe, und Zippin, daß eine lokal euklidische Gruppen schon eine Lie-Gruppe sein muß, eine Tatsache, die Hilbert an der Jahrhundertwende schon geahnt hat, deren Beweis aber mehr als ein halbes Jahrhundert auf sich warten ließ).

Bezeichnenderweise sind die genannten Beispiele linearer Gruppen auch Beispiele für Gruppen, die als Teilmengen eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes durch algebraische Gleichungen definiert sind, so etwa $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ als Teilraum des Vektorraums $M(n, \mathbb{K})$ aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$, der durch $\det g = 1$ gegeben ist. (Bei $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ muß man einen Moment überlegen, wie man eine solche Kennzeichnung zu bewerkstelligen hat, denn Ungleichungen zählen nicht). Die linearen Gruppen sind somit gleichzeitig auch die wichtigsten Beispiele für Gruppen, die auf algebraischen Varietäten definiert und deren Operationen polynomial, d.h. Morphismen in der Kategorie der Varietäten sind und die dementsprechend als *algebraische Gruppen* bezeichnet werden. Der Grundkörper K, der für die grundlegenden Definitionen und Sachverhalte noch ganz beliebig sein darf, gestattet eine große Allgemeinheit; für wichtige und grundsätzliche Folgerungen ist die algebraische Abgeschlossenheit von K erforderlich. Die Kategorie der algebraischen Gruppen und polynomialen Gruppenmorphismen hat vielerlei Eigenschaften, die sie nicht nur interessant sondern in angenehmem Licht erscheinen läßt, vorzuziehen sogar der schon in den Grundlagen komplizierten Kategorie der Lie-Gruppen! Zunächst gibt es, wie auf jeder Varietät, eine kanonische Topologie, nämlich die Zariski-Topologie. Translationen und Morphismen sind stetig. Algebraische Untergruppen sind stets abgeschlossen, Morphismen haben immer abgeschlossene Bilder; davon darf man bei Lie-Gruppen nicht einmal träumen. Wunderbar ist aber auch, daß die Bahn einer algebraischen Gruppenwirkung auf einer projektiven algebraischen Varietät eine nichtsinguläre algebraische Untervarietät ist, und daß demzufolge auch mindestens eine abgeschlossene Bahn existiert. (S. 104. Seitenhinweise beziehen sich auf das besprochene Buch [11]). Ist die Gruppe irreduzibel und auflösbar, so hat sie sogar einen Fixpunkt nach dem schönen Satz von Borel. (S. 117).

Freilich muß man für eine runde Theorie bezahlen. Die Voraussetzungen verlangen eine Kenntnis der Grundlagen der algebraischen Geometrie und komutativen Algebra. Diese müssen erst einmal bereitgestellt werden, bevor man sich an die Theorie der algebraischen Gruppen heranmachen kann. Im Falle der Lie-Gruppen kann man hilfreiche

Kompromisse machen, indem man mit linearen Lie-Gruppen anfängt [4, 8]; dieses Buch allerdings ist in dieser Hinsicht kompromißlos und seine Verfasser glauben in die Lie-Theorie gleich in voller Allgemeinheit einsteigen zu müssen.

Was ist nun die Beziehung zwischen algebraischen Gruppen und Lie-Gruppen? Zwar ist eine algebraische Gruppe ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Varietäten, so daß also etwa die Multiplikation $G \times G \to G$ ein Morphismus ist. Aber nun muß man sich zunächst daran gewöhnen, daß sie aber hinsichtlich der Zariski-Topologie keine topologische Gruppen sind. (Klar: Eine Gruppentopologie ist entweder nicht T_0 oder aber Hausdorffsch, eine Zariski-Topologie ist normalerweise T_1 und nicht Hausdorffsch, obschon die Diagonale in $G \times G$ Zariski-abgeschlossen ist!). Das liegt daran, daß die Zariski-Topologie des Produktes $G \times G$ i. a. echt feiner als die Produkttopologie ist. (S. 65, 81. Im Buch heißt die Zariski-Topologie eines Produktes Produkttopologie. S. 81: *„The direct product topology ... should not coinincide with the topology of the direct product of topological spaces ...“* Zur Klarheit trägt das nicht bei. (Im Übrigen: Semantisch falsch: *„should“*! Korrektes Englisch: „need“!). Nichtsdestoweniger kann man jeder algebraischen Gruppe G eine Lie-Algebra $\mathfrak{L}(G)$ zuordnen und zwar auf die folgende Weise: Die Gruppe G operiert auf dem Koordinatenring $K[G]$ durch $(\lambda f)(x) = f(g^{-1}x)$; eine Derivation X von $K[G]$ in sich heißt *linksinvarient,* falls sie mit allen λg, $g \in G$ vertauschbar ist. Die Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathrm{Der}(K[G])$, die aus den linksinvarianten Derivationen besteht ist $\mathfrak{L}(G)$. (Um diese Definition zu lernen, muß man andere Lehrbücher aufsuchen, etwa die im gleichen Verlag erschienenen von Hochschild or Humphreys [5, 7]). Ein Morphisms $f: G \to H$ hat ein Differential $\mathfrak{L}(f) \overset{\mathrm{def}}{=} df: \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$, und eine adjungierte Darstellung von G auf $\mathfrak{L}(G)$ ist somit zur Hand. Im Falle der linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n, K)$ und ihrer algebraischen Untergruppen ergeben sich die Lie-Algebren $\mathfrak{gl}(n, K)$ und die entsprechenden Unteralgebren. So hat man bei algebraischen Gruppen allgemein einen Ansatz einer Lie-Theorie, dessen Tragweite erstaunlich ist, wenn man bedenkt, daß hier i. a. eine Exponentialfunktion fehlt. (Man müßte für sie mindestens Charakteristik 0 haben, und selbst dann ist die Summenformel der Exponentialfunktion (etwa im linearen Fall) i. a. nur im Fall einer nilpotenten Gruppe und Algebra sinnvoll, weil hier die Konvergenzprobleme entfallen. (S. 111).

Ist der Grundkörper indessen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ so ist die Brücke zwischen den algebraischen Gruppen und den Lie-Gruppen leicht befahrbar: Jede algebraische Gruppe über $\mathbb{K}$ ist eine Lie-Gruppe (S. 101) und die für beide Klassen definierten Begriffe von Lie-Algebren fallen zusammen. Umgekehrt ist jede komplexe Lie-Gruppe, die mit ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmt und eine treue lineare Darstellung hat, in eindeutiger Weise eine algebraische Gruppe über C (S. 125). Insbesondere gilt dies für halbeinfache Gruppen. Ebenso ist jede kompakte Matrizengruppe algebraisch über $\mathbb{R}$ (S. 133). Da jede kompakte Lie-Gruppe eine treue lineare Darstellung hat (S. 245), ist jede solche auch algebraisch über $\mathbb{R}$. Ein Beispiel für eine Lie-Gruppe, die keine algebraische Struktur tragen kann, ist die zu $\mathbb{R}^3$ reell analytisch diffeomorphe universelle Überlagerungsgruppe von $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$. Allgemein hat jede algebraische Gruppe eine treue lineare Darstellung (S. 104). Eine Lie-Gruppe ohne treue endlichdimensionale Darstellung kann also grundsätzlich nicht mit der Struktur einer algebraischen Gruppen ausgestattet werden.

Wie der Titel des Buches es richtig andeutet, ist das große Leitmotiv des vorliegenden Buches die Querverbindung zwischen reellen oder komplexen Lie-Gruppen und reellen oder komplexen algebraischen Gruppen. Das ist sein enormer Vorzug, und hierzu breitet es einen im Vergleich zu existierender Lehrbuchliteratur überwältigenden Reichtum an wichtigen Informationen und nützlichen Fakten aus. Natürlich ist die 1161 Seiten dicke Lie-Monographie von Bourbaki breiter und allgemeiner in den Gebieten, die von ihm behandelt worden sind. Aber traurigerweise fehlen bei ihm am Ende immer noch wichtige Teile, über die man in dem vorliegenden Buch detaillierte Auskunft bekommt. Es führt in die Grundlagen der algebraischen Geometrie ein und baut darauf die Theorie der affinen algebraische Gruppen auf. Alle wesentlichen Facetten werden gezeigt: Torusuntergruppen, Boreluntergruppen, Normalisatoren, Zentralisatoren, Konjugationssätze. Nachdem die Verbindungen zwischen komplexen halbeinfachen Lie-Gruppen und den algebraischen Gruppen, von denen schon kurz die Rede war, hergstellt sind, wendet sich das Buch seinem Schwerpunkt zu: Der Theorie der komplexen halbeinfachen Lie-Gruppen. Das Klassifikationsprogramm über die Wurzelsysteme und Dynkin-Diagramme wird komplett abgehandelt einschließlich Eindeutigkeit und Existenz. Die Automorphismen der einfachen Lie-Algebren werden mit Hilfe der Kac-Diagramme klassifiziert. Aber dabei bleiben die Verfasser nicht stehen. Es folgt eine ausführliche Beschreibung der reellen halbeinfachen Lie-Gruppen und das Wechselspiel zwischen den Komplexifizierungen und den reellen Formen. Genau beschrieben wird im Rahmen der zusammenhängenden Lie-Gruppen die Entsprechung zwischen reduktiven komplexen und kompakten Lie-Gruppen (oder jedenfalls solchen, die zu einer kompakten lokal isomorph sind). Auf die maximalen Torusuntergruppen in kompakten Lie-Gruppen wird eingegangen, es fehlt aber der wichtige Satz, daß eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe Vereinigung ihrer Torusuntergruppen ist, d. h. eine surjektive Exponentialfunktion hat. Die Cartan-Zerlegung, reelle Wurzelzerlegung und Iwasawazerlegung halbeinfacher Lie-Algebren und Lie-Gruppen sowie die Levi-Zerlegungen beliebiger Lie-Algebren und Lie-Gruppen werden vorgeführt, die maximalen triangulierbaren Untergruppen einer reellen halbeinfachen Liegruppe werden betrachtet und es wird ihre Konjugiertheit gezeigt. Das Buch schließt mit einem Nachschlage- und Tabellenwerk, das dem in der Anlage immer noch sehr nützlichen Tabellenwerk von Tits [9] entspricht und dieses in ausgezeichneter Weise ergänzt. Die Bibliographie ist akkurat und übersichtlich, der alphabetische Index von dreieinhalb Seiten nicht enzyklopädisch, aber brauchbar. Der breiten Behandlung der algebraischen Gruppen und der halbeinfachen Gruppen wurde eine Einführung in die allgemeine Theorie Lie-Gruppen vorangestellt, die zu empfehlen ich mich allerdings nicht entschließen kann.

Wir haben viele Vorzüge des Buches vorgestellt. Was aber gibt es daran auszusetzen? Mehrere Generationen amerikanischer Topologen waren Doktoranden von Robert Lee Moore, der von 1920 bis 1969 an der University of Texas lehrte, darunter R. L. Wilder, G. T. Whyburn, F. B. Jones, R. H. Bing, E. E. Moise, R. D. Anderson, M. E. Rudin, E. Dyer, S. Armentrout, zu deren weitverzweigter akademischer Nachkommenschaft wiederum bekannte Topologen wie A. D. Wallace and J. L. Kelley zählen [10]. Offenbar hatte Moore nicht nur ein außergewöhnliches Charisma, sondern auch eine ganz besondere Pädagogik, die als „Moore method" oder „Texas method" bekannt wurde ([10], S. 149) und an der sich die Geister schieden. Das Grundprinzip war, Studenten nur Definitionen, Sätze oder Probleme vorzugeben. Gleichzeitig wurden sie darauf eingeschworen, keine anderen Quellen zu benützen und gegenseitig in keine Kommunikation über Beweise oder Lösungen einzutreten, die sie selbständig erarbeiten mußten. Anfang der sechziger Jahre zirkulierten im Süden der USA noch zahlreiche z. T. bekannte Skripten, die nur Definitionen und Sätze, aber keine Beweise enthielten, welche die Studierenden in den Lehrveranstaltungen vortragen mußten. Niemand kam jemals auf die Idee, solche Skripte direkt in Buchform zu veröffentlichen. Damit unterrichtete A. D. Wallace in den fünfziger Jahren an der Tulane University algebraische Topologie und topologische Halbgruppen mit durchschlagendem Erfolg, denn die Absolventen von Tulane wurden nach einer damals unabhängig erstellten Zählung zu den produktivsten Schreibern mathematischer Aufsätze in den USA. Es gab manche Gründe, weswegen sich die Moore-Methode nicht halten konnte. Sie war zu sehr an die Ausstrahlung einzelner Personen gebunden; sie war nicht geeignet, die in Europa an den Universitäten mitgeteilte Breite der Grundlagen zu erreichen und die Fülle neu entstandener Mathematik in einem für die mathematische Allgemeinbildung zureichendem Umfang zu bewältigen. Ihr Verdienst war es hingegen, daß durch sie mathematische Intellekte entdeckt und durch die gründliche Beackerung *eines* Feldes darin zu höchster Kreativität angespornt wurden.

Es ist ein kleiner Treppenwitz der Mathematikgeschichte, daß uns die in den USA ausgestorbene Texasmethode mit dem vorliegenden Buch aus Moskau ins Haus geliefert wird. Offenbar zirkulierten in der Sowjetunion Vorlesungs- und Seminarausarbeitungen nach dem Mooreschen Prinzip – wie es aussieht, mit ähnlichem Erfolg – und die Verfasser entschlossen sich, diesen Stil beizubehalten und noch weiteren Stoff draufzusatteln. Äußerlich ist das ganze Buch eine systematische Problemsammlung. Definitionen ja, Hilfssätze nein, Probleme ja, Sätze nein, Theoreme ja, Beweise nein – aber mit Ausnahmen. Die meisten Beweise der Kernresultate sind als Probleme aufgegeben. Am Ende eines Kapitels findet man Hinweise, aber wiederum nicht für alle Probleme. Manche Beweise sind, abweichend von der an sich gewählten Form, durchgeführt, vielfach und erbarmungslos durchsetzt mit Rückverweisen der Spielart „ ... nach Problem 43 gilt ...“ oder vergleichbaren Varianten. Was für ein Skript probat ist und für einen „Lecture Notes in Mathematics“-Band tolerabel sein mag, braucht deswegen noch lange nicht für ein Buch zwischen zwei harten Deckeln empfehlenswert zu sein. Aus einem Werk wie diesem möchte man doch sicherlich auch zitieren; denn das Gebiet quillt immer noch nicht von zitierbaren Quellen über! Aber wer verweist schon gerne auf ein Resultat aus einem Buch, dessen Beweis dort als Problem aufgeführt ist – Hinweise her, Hinweise hin? Ich konzediere gern, daß ein Leser, der sich schnell aber auf Kosten der Gründlichkeit über unser Gebiet informieren möchte, seine Lektüre, ohne sich bei ausformulierten und abgedruckten Beweisen aufzuhalten, in diesem Buch recht behende absolvieren kann. Aber letztlich bleibt ihm dann ein Unbehagen, das aus dem schlechten Gewissen kommt, die Probleme und Übungsaufgaben zwar zur Kenntnis genommen, aber nicht bearbeitet zu haben. Übungsaufgaben mit Hinweisen einzufügen, wenn sie zusätzliche Informationen anbieten, wie wir das von Bourbaki gewohnt sind, ist sogar erwünscht; wenn der Leser aber zentrale Beweise überspringt, weil sie als Aufgaben gehandelt werden, dann ist ihm das schlechte Gewissen sicher.

Die Aufstockung des Stoffs, von der man im Vorwort erfährt, ist dem Werk durch Hinzufügung des Materials über *reelle* halbeinfache Gruppen gut bekommen, aber der Vorspann zur Einführung in die Lie-Gruppen ist meiner Meinung nach verunglückt – doppelt schade, weil er das erste ist, was man zu Gesicht bekommt, wenn man das Buch zur Hand nimmt. Ohne recht gründliche Vorkenntnisse in den Techniken der Theorie der Mannigfaltigkeiten kommt man hier nicht weit. Die an sich für die Lie-Theorie wesentlichen Werkzeuge der Lie-Algebra und Exponentialfunktion kommen spät. Ein Beweis des an sich wichtigen Satzes, daß ein Lie-Algebrenmorphismus $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ auf zugehörigen Lie-Gruppen einen eindeutig bestimmten Morphismus $G \to \mathrm{H}$ bewirkt, der den gegebenen induziert – sofern nur G einfach zusammenhängend ist, wird, entgegen der sonst im Buch verbreiteten Texas-Moskau-Praxis, vollständig vorgetragen, und zwar mit Hilfe eines rein rechnerischen (an sich originellen) Hilfssatzes zum Rechnen auf Lie-Gruppen. Ohne weitere Bedenken wird aber als Tatsache vorausgesetzt, daß auf einer einfach zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit zwei differenzierbare Kurven mit gleichen Anfangs-und Endpunkten mittels einer *differenzierbaren* Homotopie ineinander übergeführt werden können (S. 30). Die Unterscheidung zwischem dem, was als bekannt oder einfach vorausgesetzt werden kann und dem, was nun hier und jetzt eines Argumentes bedürftig ist, verschwimmt. Daß semidirekte Produkte einigermaßen ausführlich behandelt werden (S. 15, 16, 36, 37) ist verdientsvoll. Aber man vermißt dann doch wieder eine wichtige Information, nämlich eine Angabe dazu, wie sich nun die Exponentialfunktion von der berechneten Lie-Algebra des semidirekten Produktes in die das semidirekte Produkt der Gruppen verhält. (Oder stößt man vielleicht doch auf sie, wenn man alle Beweise selbst durcharbeitet? Der etwas oberflächliche Leser kann sich dessen nie ganz sicher sein). Nun ist dies vielleicht ein unbedeutender Punkt. Aber das eingangs schon einmal angesprochene Schlüsselergebnis, daß eine abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe eine Lie-Untergruppe ist, wird nur mit Literaturzitat erwähnt (S. 34), und bleibt, mit welcher Methode auch immer, im Buch unbewiesen. Das ist eine schmerzliche Lücke. Beispielsweise benötigt der wertvolle Satz, daß für eine analytische Untergruppe H von G die Kommutatorgrupopen von H und $\bar{H}$, sowie die Kommutatoralgebren von $L(H)$ und $L(\bar{H})$ übereinstimmen (S. 52), eine Umschreibung, die der Sache nicht dient. Schön ist die Verwendung dieses Satzes zur Konstruktion analytischer Untergruppen (S. 34, 52, 53); man kann es aber auch anders machen. Das Radikal wird eingeführt (S. 55); die Levi-Malcev-Zerlegung kommt in dem Buch auch zu ihrem Recht, aber erst sehr viel später (S. 282ff.).

Ein Blick auf die Übersetzung! Der Dolmetscher hat sich Mühe gegeben, aber der Erfolg bleibt an vielen Stellen hinter dem gesteckten Ziel zurück. *„In geometry significant is not the G itself but its image in DiffX“.* (S. 12) Das ist kein Satz der englischen Sprache. – Die Frage der Artikel ist prekär. *„Proof is illustrated by the ... diagram“* (S. 70) ist typisch. Heißen sollte es „The proof ...“ oder „A proof ...“. – Das mag hingehen, aber wirklich bedenklich werden schlechte Übersetzungen, wenn sie den Sinn der Sache angreifen. Regelmäßig und systematisch formuliert der Übersetzer (z. B. S. 106): *„Let G be an algebraic group, H its algebraic subgroup“.* Gemeint ist: „ ..., *H* an algebraic subroup“ oder „..., H one of its algebraic subgroups“. Dieser Fehler ist sinnentstellend, weil er nach den Regeln englischer Syntax impliziert, daß es in G nur *eine* algebraische Untergruppe geben soll. – Sehr schwierig scheint für den Übersetzer der richtige Gebrauch unbestimmter Zahlwörter wie „any“, „some“, „each“ usw. zu sein. „Any element of $\mathfrak{g}$ *is contained in some of Borel subalgebras“.* (S. 127) sollte doch wohl „Each element of $\mathfrak{g}$ is contained in some Borel subalgebra“ heißen, oder allenfalls „Each element of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ is contained in one of its Borel subalgebras“. *„... certainly not any subalgebra is algebraic“* (S. 223) muß man korrekt als „... certainly not every subalgebra is algebraic“ lesen. Dies sind nur Beispiele. Hätte der Verlag einen englischen oder amerikanischen Lektor eingesetzt, wären diese Makel alle leicht zu vermeiden gewesen. (Die Orthographie des Übersetzers läßt keinen klaren Schluß zu, ob britisches oder amerikanisches Englisch intendiert ist. Er schreibt *„neighbourhood“,* aber *„center“.*)

Es gibt Druckfehler, aber ihre Zahl ist gering. Die Rückverweise auf frühere Nummern stimmen nicht immer; dem Numerierungsschema und Verweissystem folgen zu müssen ist ohnehin etwas mühsam, wie sich jeder Leser bald überzeugt. Die typographische Ausstattung ist vorzüglich; man ist es von dem Verleger des Buches nicht anders gewohnt.

Trotz seiner Nachteile werden Liebhaber der Lie-Gruppentheorie das Buch ihrer Sammlung einverleiben wollen, vor allem wegen seiner Reichhaltigkeit und der Fülle der angebotenen Fakten. Wenn schon nicht als Lesebuch, dann als Nachschlagebuch!

[1] Borel, A.: Linear Algebraic Groups. W. A. Benjamin, New York 1969, 398 pp.
[2] Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1 (1960, 144 pp.), Chap. 2, 3 (1972, 320 pp), Chap. 4, 5, 6 (1968, 288 pp.), Chap. 7, 8 (1975, 271 pp.). Paris, Hermann; Chap. 9 (1982, 138 pp.), Paris, Masson; insgesamt 1161 pp.
[3] Bröcker, Th.; tom Dieck, T.: Compact Lie groups and their representations. Springer-Verlag, Heidelberg etc. 1985, x + 311 pp.
[4] Hilgert, J.; Neeb, K.-H.: Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen. Vieweg 1991, xiii + 361 pp.
[5] Hochschild, G. P.: Basic Theory of Algebraic Groups and Lie algebras. Springer-Verlag, New York etc. 1981, viii + 267 pp.
[6] –, Introduction to Affine Algebraic Groups. Holden-Day, San Francisco 1971, vii + 116 pp.
[7] Humpreys, J. E.: Linear Algebraic Groups. Springer-Verlag, New York etc. 1975, xiv + 247 pp.
[8] Rossmann, W.: Lie Groups – An Introduction Through Linear Groups. Clarendon Press, Oxford 1991, to appear

[9] Tits, J.: Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, Springer Lecture Notes in Mathematics 40 (967), 53 S.

[10] Traylor, D. R.: Creative Teaching: Heritage of R. L. Moore. University of Houston, 1972, iv + 469 pp.

[11] Vinberg, E. B.; Onishchik, A. L.: Lie Groups and Algebraic Groups. (Russ. Ed. 1988) Springer-Verlag, Berlin etc. 1990, xix + 329 pp.

Darmstadt K. H. Hofmann

Klir, G. J., Folger, T. A., Fuzzy Sets, Uncertainty and Information, Hempstead: Prentice Hall 1988, 368 S., pb. £ 22.95

In den vergangenen Jahren ist die adäquate mathematische Interpretation, operative Verknüpfung und Analyse mit Vagheit und Unsicherheit behafteter Daten zu einem wichtigen Forschungszweig der verschiedensten wissenschaftlichen Disziplinen geworden.

Unter den bekannten Methoden der Vagheits- und Unsicherheitsmodellierung [2] hat in jüngster Zeit insbesondere die Theorie der Fuzzy-Mengen große Aufmerksamkeit auf sich lenken können, da ihre Applikation im Bereich der Regelungstechnik (Fuzzy Control) vor allem in Japan zu leistungsfähigen und kommerziell außerordentlich erfolgreichen Produkten geführt hat [3].

Das hier zu besprechende Lehrbuch von G. J. Klir und T. A. Folger versucht, einem möglichst großen Leserkreis von Studenten, Akademikern und professionellen Anwendern diverser Fachrichtungen einen Einblick in die Behandlung von Unsicherheit, Information und Komplexität aus der Sicht der Fuzzy-Mengen zu geben.

Die beiden ersten Kapitel bieten diesbezüglich eine ansprechende Einführung in grundlegende Konzepte der Fuzzy-Mengen und der auf ihnen definierten Operationen. Die Autoren weisen in diesem Zusammenhang auch auf das entscheidende Problem der Kreation der Fuzzy-Mengen charakterisierenden Zugehörigkeitsfunktionen hin. Dies zielt insbesondere auf die Notwendigkeit einer akzeptablen theoretischen Fundierung der Semantik von Fuzzy-Mengen, die in der überwiegend praxisorientierten Forschung erst vor wenigen Jahren die ihr zustehende Beachtung fand. Entsprechende Ansätze werden in jüngster Zeit diskutiert [1].

Kapitel 3 befaßt sich mit den für die Applikation von Fuzzy-Mengen in den Bereichen des Approximate Reasoning und Fuzzy Control fundamentalen Typen von Fuzzy-Relationen.

Die Diskussion von Fuzzy-Maßen, der dualen Klassen von Belief- und Plausibilitätsmaßen, speziell von Possibilitäts-, Notwendigkeits- und Wahrscheinlichkeitsmaßen, ist Gegenstand von Kapitel 4. Die Autoren stellen auf diese Weise die Bezüge zu alternativen Ansätzen der Vagheits- und Unsicherheitsmodellierung her, wie sie zum Beispiel durch die Evidenztheorie (Theorie oder Massenverteilungen), die Possibilitätstheorie und vor allem durch Anwendungen der traditionellen Wahrscheinlichkeitstheorie (Bayes-Theorie und ihrer Extensionen) etabliert sind.

Kapitel 5 enthält eine Einführung in klassische und eine ausführliche Betrachtung neuerer Unsicherheitsmaße und deren Einordnung in die Informationstheorie. Hartley-Maß und Shannon-Entropie werden dahingehend modifiziert, verschiedene Arbeiten von Unsicherheitsphänomenen wie Dissonanz, Konfusion und Nicht-Spezifizität erfassen zu können. Hierbei ist auf einige Originalresultate der Autoren hinzuweisen, deren Präsentation und Verifikation in den Anhang des Buches integriert worden ist.

Während die ersten fünf Kapitel der Darstellung theoretischer Ansätze dienen, illustriert das abschließende sechste Kapitel eine Vielzahl von Anwendungen aus den Sozialwissenschaften, der Medizin, Meteorologie, Regelungstechnik und Informatik.

Ausgesuchte Beispiele und Übungsaufgaben, verbunden mit der übersichtlichen Strukturierung des Buches, erleichtern das Verständnis der vorgestellten Konzepte.

Darüber hinausgehend geben die am Ende eines jeden Kapitels angeführten Hinweise und Bemerkungen mit ihren inzwischen allerdings schon aktualisierungsbedürftigen Referenzen gute Anregungen zur Vertiefung und stellen außerdem Zusammenhänge zu nicht explizit vorgestellten Alternativansätzen her.

Insgesamt genügt das Buch durchaus dem Anspruch, einer aufgrund der behandelten Thematik sehr unterschiedlich vorgebildeten Gruppe potentieller Leser einen verständlichen Überblick von angemessener fachlicher Tiefe zu vermitteln.

Den Autoren ist in dieser Hinsicht die Synthese aus einer eher theoretischen Darstellung von ausreichender mathematischer Präzision und einer eher anwendungsorientierten Perspektive gelungen.

Referenzen

[1] Dubois, D.; Prade, H.: Fuzzy Sets in Approximate Reasoning, Part 1: Inference with Possibility Distributions, Fuzzy Sets and Systems **40** (1991) 143–202; Fuzzy Sets in Approximate Reasoning, Part 2: Logical Approaches, Fuzzy Sets and Systems **40** (1991) 203–244

[2] Kruse, R.; Schwecke, E.; Heinsohn, J.: Uncertainty and Vagueness in Knowledge Based Systems-Numerical Methods (Series Artificial Intelligence), Berlin: Springer 1991

[3] Lee, C. C.: Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, **20**, No. 2 (1990) 404–435

Braunschweig R. Kruse

Nikol'skij, S. M. (Ed.), Analysis III, Spaces of Differentiable Functions (with contributions by L. D. Kudryavtsev, V. G. Maz'ya, S. M. Nikol'skij). (Encyclopaedia of Math. Sciences, ed. R. V. Gamkrelidze, Vol. 26) Berlin u.a.: Springer-Verl. 1991, 230 S., DM 128,–

Das Buch besteht aus 2 Teilen:

I: L. D. Kudryavtsev, S. M. Nikol'skij: Spaces of Differentiable Functions of Several Variables and Imbedding Theorems, pp. 1–140,

II: V. G. Maz'ya: Classes of Domains, Measures and Capacities in the Theory of Differentiable Functions, pp. 141–211,

mit getrennten „References" und gemeinsamen „Author Index" und „Subject Index".

Teil I: Die Theorie der Funktionenräume wird aus historischer Sicht dargestellt. Schwerpunkt sind insbesondere jene Entwicklungen der letzten 30 Jahre bei denen die Russische Schule entscheidende Beiträge geliefert hat. Dieser Teil besteht aus 10 Kapiteln. 1. Function Spaces (allgemeine Grundbegriffe, Lebesque und Morrey Räume), 2. Sobolev Spaces (endlicher, unendlicher, gebrochener Ordnung), 3. The Imbedding Theorems of Nikol'skij (ganze analytische Funktionen, isotrope und anisotrope Nikol'skij-Räume), 4. Nikol'skij-Besov spaces (Räume B^s_{pq}), 5. Sobolev-Liouville Spaces (gebrochene Sobolev-Räume L^r_p, Lizorkin-Triebel Räume, Verallgemeinerungen), 6. Spaces of Functions Defined in Domains (Integraldarstellungen, Spuren, Forsetzungen, kompakte Einbettungen, 7. Weighted Function Spaces (gewichtete Sobolev-Räume, Einbettungen, Spuren, Kiprijanov-Räume), 8. Interpolation Theory of Nikol'skij-Besov and Lizorkin-Triebel Spaces (Lorentz-Marcinkiewicz-Räume, reelle Interpolation), 9. Orlicz and Orlicz-Sobolev Spaces (Grundbegriffe, Einbettungen), 10. Symmetric and Nonsymmetric Banach Function Spaces (Verallgemeinerungen von Sobolev und Nikol'skij-Besov Räumen).

Teil II: In den letzten 30 Jahren wurde untersucht für welche Gebiete Ω im $\mathbb{R}^n$ die bekannten stetigen und kompakten Einbettungen zwischen Sobolev-Räumen gelten und für welche Gebiete Ω stetige Fortsetzungen von Sobolev-Räumen in Ω auf $\mathbb{R}^n$ möglich sind. Das führte zur Einführung neuer Klassen von Gebieten, zugehöriger Maße und Gewichte.

Von fundamentaler Bedeutung erweist sich der Begriff der Kapazität. Eng verknüpft hiermit sind Ungleichungen (Sobolev, Poincaré usw.). Dieser Teil gibt einen Bericht über Probleme dieser Art. Er besteht aus 3 Kapiteln. 1. The Influence of the Geometry of the Domain on the Properties of Sobolev Spaces (Isoperimetrische Ungleichung, beste Konstanten in Ungleichungen, „schlechte" Gebiete), 2. Inequalities for Potentials and Their Applications to the Theory of Spaces of Differentiable Functions (Riesz- und Bessel-Potentiale, punktweise Multiplikatoren), 3. Imbedding Theorems for Spaces of Functions Satisfying Homogeneous Boundary Conditions.

Jena H. Triebel

v. Weizsäcker, H., Winkler, G., Stochastic Integrals, Wiesbaden: Vieweg Verlag 1990, 322 S., Softcover, DM 78,–

Die Autoren dieses Buchs stellen sich der schwierigen Aufgabe, eine Einführung in das Gebiet des Itoschen Kalküls für Semimartingale und die darauf aufbauende stochastische Analysis zu geben, die den folgenden Bedingungen genügt: a) in sich geschlossen zu sein und den Leser behutsam an die Dinge heranzuführen, b) möglichst viele der sehr zahlreichen Anwendungen stochastischer Integrale zumindest zu streifen, c) Grundlage für eine einsemestrige Vorlesung zu sein.

Der angebotene Stoff zerfällt prinzipiell in zwei Teile: nach einem „Rundflug" über das Gebiet in Kap. 1 wird Kap. 2–8 die Theorie der nicht notwendig stetigen Semimartingale, ihrer stochastischen Integration und des Ito'schen Kalküls etwa im Sinn der Straßburger Schule entwickelt; in Kap. 9–12 wird sie auf verschiedene Probleme angewandt, deren wichtigstes die Untersuchung parabolischer PDGL der Analysis mit den Methoden der stochastischen DGL oder der Martingalcharakterisierung von Massen auf Räumen von Trajektorien diffundierender Teilchen ist. Das Schwergewicht liegt auf dem ersten Teil.

Nach Behandlung der wichtigsten Meßbarkeitsbegriffe in Kap. 2 und der Grundlagen der Martingaltheorie in Kap. 3 wird die Theorie in Kap. 4 in der üblichen Weise durch Einführung lokaler Martingale von Integrabilitätsforderungen an die Prozesse unabhängig gemacht. Die Einführung des zentralen Begriffs der Vorhersehbarkeit wird auf Kap. 6 verschoben, um in Kap. 5 zunächst eine einfachere Form des stochastischen Integrals für lokale Martingale zu betrachten, deren Integranden durch gleichmäßige Limiten aus Treppenfunktionen erhalten werden. Obwohl schon in dieser Form einfache Zerlegungssätze von Submartingalen in Martingale und wachsende Prozesse möglich sind, werden Eindeutigkeitsaussagen dabei erst durch die Verwendung der Vorhersehbarkeit in Kap. 6 erreichbar. Der in Kap. 7 eingeführte zentrale Begriff des Kalküls, das Semimartingal, wird erst hierdurch ausreichend motiviert. Daneben dient der Entwurf eines formalen Differentialkalküls für Seminartingale in Kap. 7 vor allem der einfacheren und übersichtlicheren Notation bei der Behandlung des Ito-Kalküls in Kap. 8, was sich auszahlt.

Die erwähnte Zäsur am Ende von Kap. 8 bildet auch das Ende des Tunnels durch die allgemeine Theorie stochastischer Prozesse. Von dem hohen Niveau aus, das nun erreicht ist, können viele Probleme der Stochastik und Analysis sehr schnell und elegant gelöst werden. In Kap. 9 wird die zentrale Stellung der Brownschen Bewegung vor allem durch ihre Charakterisierung im Rahmen der stetigen Martingale nach Levy und Folgerungen daraus deutlich. Weitere eindrucksvolle Anwendungen des Ito-Kalküls liefern die konforme Invarianz der Brownschen Bewegung, die Andeutung des Zusammenhangs mit der Potentialtheorie und die Charakterisierung der Martingale des Wienerraums vermöge seiner Chaoszerlegung. Durch den Levyschen Satz ist das zentrale Problem der Charakterisierung von Massen auf Räumen stetiger Funktionen durch Martingale im

„Martingalproblem" angesprochen. Seine Behandlung wird erst in Kap. 12 fortgesetzt. In Kap. 10 wird sie vorbereitet durch die Sätze von Cameron-Martin und Girsanov über Maßwechsel auf dem Wienerraum. Aus einem anderen Blickwinkel ergibt sich dabei auch die wichtigste Charakterisierung von Semimartingalen als L^0-Integratoren im Sinn der Theorie der Vektormasse. Kap. 11 dient der Entwicklung einer Lösungstheorie für stochastische DGL mit nicht notwendig stetigen treibenden Semimartingalen. Sie wird im abschließenden Kap. 12 über Diffusionen aber nur auf den stetigen Fall angewandt. Hier wird in einem relativ knappen Rahmen die schwache Lösungstheorie nach Yamada-Watanabe entwickelt, ihre Äquivalenz zur Lösung des Martingalproblems nachgewiesen, und der Zusammenhang zur Theorie von Halbgruppen hergestellt. Dadurch ist der Anschluß an den historischen Ausgangspunkt der stochastischen Analysis gefunden. Obwohl dieser Abschluß die Anwendung stochastischer Integrale krönt, bedauert man an dieser Stelle ein wenig, daß wegen der Länge des Wegs durch die allgemeine Theorie so wenig Raum bleibt für so bedeutende Anwendungen.

Versucht man sich als Neuling in ein bereits weit entwickeltes mathematisches Gebiet einzuarbeiten, stößt man auf folgende Schwierigkeit. Man hat eine Idee, wie ein Problem anzupacken wäre, die vordergründig und einfach erscheint. Aber die meisten Fachleute verfolgen einen anderen Weg. Führt die Idee nun wirklich zu einer Vereinfachung, oder stellt sich an späterer Stelle heraus, warum es besser war, den anderen Weg zu gehen? Die Autoren des Buches begeben sich von Anfang an auf diesen Standpunkt des Neulings. Daß es dadurch nicht nur an pädagogischem Wert gewinnt, sondern auch für Kenner der Materie zu einigen überraschenden neuen Einsichten führt, ist bemerkenswert. Die Autoren unterstützen die Neugier des Anfängers, indem sie konsequent zeigen, wie unkonventionelle Ideen direkte Wege zum Ziel weisen. Das Pardebeispiel hierfür ist das Hinterfragen der „üblichen Bedingungen" an die zugrundeliegenden Filtrationen. Vor allem die darin enthaltene Vollständigkeit der σ-Algebren, die den bereits schwierigen Begriffsapparat der Prozeßtheorie noch schwerer verdaulich macht, wird ohne viel Mehraufwand und bei geringen Nachteilen in großen Teilen elegant und konsequent umgangen: Statt $(\mathbf{F}_t)$ wird einfach die rechtsseitige „infinitesimale Vergrößerung" $(\mathbf{F}_t^+)$ betrachtet. Eine für mich überraschende Konsequenz daraus: ich kannte z. B. die Behandlung vorhersehbarer Stopzeiten und ihre Anwendung auf die wichtigen Zerlegungssätze in der dargebotenen Einfachheit und Klarheit bisher nicht. Ein weiteres Beispiel ist die sehr transparente Verwendung des Begriffs der Separabilität von Prozessen. Verständlich ist die Präsentation der allgemeinen Theorie von Prozessen, für die sich die Autoren entschieden, also auf jeden Fall: ist man durch beharrliches Kurshalten auf direkten Wegen schon einmal so weit gekommen, steigt natürlich die Neugier, wie weit man noch gehen kann. Ich habe mich allerdings gefragt, ob es nötig war, die Prozeßtheorie bis zur Beherrschung unstetiger Semimartingale voranzutreiben, um die Resultate dann doch nur für die abstrakte Lösungstheorie stochastischer DGL in Kap. 11, nicht mehr aber für ihre wichtigste Anwendung in Kap. 12 zu nützen.

Der Überhang der allgemeinen Theorie reizt in diesem Buch zweifellos am meisten zur Kritik. Dabei muß man zweierlei einräumen. Erstens liegen Wurzeln und Anwendungen stochastischer Integrale nicht nur in der Analysis; dann fehlen aber ein paar gute Beispiele aus anderen Bereichen mehr. Zweitens ist die Länge des allgemeinen Teils auch mit einem weiteren Positivum des Buches verknüpft, der Behutsamkeit und methodischen Vorsicht, mit der der Leser an die Materie herangeführt wird. Allerdings glaube ich nicht, daß Kap. 5 als Einstimmung auf den allgemeinen stochastischen Integralbegriff nötig ist; die Abschnitte über pfadweise Riemann-Stieltjes-Integrale empfinde ich als zu breit; warum soll der Begriff der vorhersehbaren Mengen dem Anfänger mehr Kopfzerbrechen machen als der der σ-Algebra? Alternativen, wie man Teil 1 zugunsten von Teil 2 zurückdrängen könnte, gibt es schon. Eine radikale Variante: man könnte sich von Anfang an auf die Behandlung stetiger Prozesse beschränken. Aber man muß die Dinge nicht durch die Brille der stochastischen Analysis sehen.

Ich glaube, daß das Buch seinem Konzept gerecht wird und die drei genannten, schwer vereinbaren Bedingungen erfüllt. Klarheit, Sorgfalt und Originalität der Darstellung, vor allem aber Einfühlungsvermögen in den Leser verfehlen ihre Wirkung nicht. Das Buch berüht die wichtigsten Bereiche, in denen stochastische Integrale eine Rolle spielen. Über die Gewichtung einzelner Teile war ich nicht ganz glücklich. Auch hätte der Text entweder ein paar Beispiele mehr oder ein Paradebeispiel mit mehr Gewicht verdient. Ich halte das Buch als Grundlage für einen ersten Kurs über stochastische Integration für sehr gut geeignet.

München P. Imkeller

Walz, G., Spline-Funktionen im Komplexen, Mannheim u.a.: BI Wissenschaftsverlag 1991, 190 S., Kart., DM 29,80

Splines im Komplexen sind, was ihre Definition anbelangt, eine Verallgemeinerung der bekannten reellen Splines. Man betrachtet dabei im Komplexen grundsätzlich zwei verschiedene Typen von Splines, nämlich *Kurvensplines* und *planare Splines.* Kurvensplines sind stückweise definierte Funktionen auf dem Rand ∂G eines beschränkten Jordangebietes G. Planare Splines erhält man, wenn man G in einfache Teilgebiete, z. B. in Dreiecke zerlegt und den Spline stückweise durch einfache Funktionen auf diesen Teilgebeten definiert. Da man in der Regel mindestens verlangt, daß die resultierenden Splines global stetig sind, kann man zur Definition der planaren Splines sinnvollerweise keine holomorphen Funktionen auf den Teilgebieten heranziehen, da nach einem Identitätssatz aus der Funktionentheorie bei Verwendung von holomorphen Funktionen auf den Teilgebieten diese alle Restriktionen einer einzigen holomorphen Funktion auf G wären. Vielmehr verwendet man meistens einfache Polynome in z und dem dazu konjugierten $\bar{z}$. Die planaren Splines könnten daher auch als finite Elemente mit komplexen Koeffizienten aufgefaßt werden. Kurvensplines wurden zuerst untersucht von Ahlberg, Nilson, Walsh und Schoenberg in verschiedenen Arbeiten am Ende der sechziger und am Anfang der siebziger Jahre. Die planaren Splines wurden zum ersten Mal eingeführt und auf ihre elementaren Eigenschaften untersucht von Puri, Schober und dem Referenten am Anfang der achziger Jahre.

Das Buch ist entsprechend in zwei getrennte Abschnitte aufgeteilt und enthält außerdem einen kleinen Anhang über asymptotische Entwicklungen, die bei Extrapolationsprozessen gebraucht werden.

Der Autor stellt in seinem Buch bekannte Ergebnisse über komplexe Splines zusammen, zu denen auch verschiedene Resultate des Autors selbst gehören. Er verwendet für beide Teile einen einheitlichen Ansatz, unter denen die Ergebnisse eine neue, ausführlichere und damit vollkommenere Gestalt erhalten. Z. B. gibt es eine ausführliche Darstellung der B-Splines im Kurvenfall, die in der Literatur so nicht zu finden ist. In diesem Zusammenhang verweist der Autor auf ein im Entstehen befindliches neues Buch von G. Meinardus. Im planaren Fall gibt es einen Abschnitt über die numerische Lösung (mit Beispielen) gewisser komplexer Differentialgleichungen. Das vorgelegte Buch ist vermutlich das erste zusammenfassende Werk über dieses Gebiet und insbesondere für Forscher, die sich mit komplexen Splines beschäftigen oder beschäftigen wollen, interessant. Zumal sowohl im Kurvenfall als auch im planaren Fall viele Fragen offen sind.

Hamburg G. Opfer

Grudzinski, O. von, Quasihomogeneous distributions (North-Holland Math. Studies, Bd. 165), Amsterdam: North-Holland 1991, 450 S., Dfl. 225,00

Homogenitätsbetrachtungen spielen in der Analysis eine herausragende Rolle. In der Analysis der linearen partiellen Differentialgleichungen, deren Umfeld das zu besprechende Buch zuzurechnen ist, sei u.a. an den „Hauptteil" eines Differentialoperators, an asymptotische Entwicklungen von Symbolen klassischer Pseudodifferentialoperatoren oder von Funktionen an singulären Stellen, und schließlich an die konische Struktur von Begriffsbildungen wie die der Wellenfront (im Sinne der mikrolokalen Analysis) erinnert. Dabei sind die Begriffe üblicherweise der kanonischen Vektorraumstruktur des R^n angepaßt. So heißt eine Funktion f auf einem Kegel $\Gamma \subset R^n$ homogen vom Grad m, falls $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$, $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in \Gamma$. Für C^1 Funktionen ist dies äquivalent zur „Eulerschen Gleichung" $Vf = mf$, wobei $V = \sum x_j \partial/\partial x_j$ das radiale Vektorfeld ist. Nicht immer ist es sinnvoll den R^n mit seiner kanonischen Vektorraumstruktur zu belassen. So ist zwar z. B. der Laplaceoperator $\Delta = \sum (\partial/\partial x_j)^2$ homogen vom Grade -2 in dieser Struktur (Δf ist homogen vom Grad $m-2$, falls $f \in C^2$ homogen vom Grad m ist), der Wärmeleitungsoperator $P = \partial/\partial t - \Delta$ auf dem $R_t \times R_x^n$ aber ist nicht homogen: sein Hauptteil Δ ist homogen vom Grad -2, während $\partial/\partial t$ homogen vom Grad -1 ist. Man kann beide Teile in P allerdings einander gleichstellen, indem man die Multiplikation auf dem R^{n+1} abändert: setzt man statt $\lambda(t, x) = (\lambda t, \lambda x)$, $M(\lambda)(t, x) = (\lambda^2 t, \lambda x)$, und definiert als „quasihomogen vom Grad m" Funktionen für die gilt daß $f(M(\lambda)(t, x)) = \lambda^m f(t, x)$, so wird P „quasihomogen" (vom Grad -2). Statt der Eulerschen Gleichung in der obigen Form hat man dann $\tilde{V}f = mf$, wobei $\tilde{V} = 2t\partial/\partial t + \sum x_j \partial/\partial x_j$. In der gleichen Weise wird natürlich auch der Schrödinger Operator $i\partial/\partial t - \Delta$ quasihomogen und ähnliche Überlegungen sind auch bei sogenannten quasielliptischen Differentialgleichungen nützlich. Allgemeiner kann man Quasihomogenität ausgehend von einer beliebigen Darstellung der multiplikativen Gruppe R_+ in den R^n definieren. Die Eulersche Gleichung wird dann ersetzt durch $Wf = mf$, wobei W ein beliebiges Vektorfeld der Form $W = \sum_{i,j} m_{ij} x_i \partial/\partial x_j$, $m_{ij} \in R$, sein kann. Die allgemeine Eulersche Differentialgleichung kann auch verwendet werden um Quasihomogenität für Distributionen (und zwar wieder durch die Beziehung $Wf = mf$) einzuführen. Ein interessantes Beispiel einer für beliebige m_{ij} quasihomogenen Distribution ist die Dirac Distribution im Ursprung, δ. (Quasihomogenität ergibt sich hier aus $x_j(\partial/\partial x_j)\delta = -\delta$). Es ist an dieser Stelle jetzt auch klar was man unter einem quasihomogenen Differentialoperator verstehen wird. Für einen vorgegebenen quasihomogenen Differentialoperator p kann man sich nun fragen ob man die Gleichung $pu = f$ im Rahmen quasihomogener Distributionen lösen kann. Hat p konstante Koeffizienten und ist $f = \delta$, so erhält man die Frage nach der Existenz einer quasihomogenen Fundamentallösung als Spezialfall. Am Beispiel des Laplaceoperators im R^n läßt sich nun erkennen was man in etwa erwarten wird dürfen. Für $n \geqslant 3$ hat die klassische Fundamentallösung die Gestalt $E = -c_n |x|^{-n+2}$ und ist somit homogen vom richtigen Homogenitätsgrad, $-n+2$. Eine andere homogene Fundamentallösung gibt es nicht: die Differenz u zu E wäre ja eine Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$ die homogen vom Grad vom $-n+2 < 0$ zu sein hätte. Insbesondere müßte u C^∞ sein, was aber mit dem Verhalten im Ursprung nicht vereinbar wäre. Wir haben also eine befriedigende Lösung unseres Problems, zumindest für den Fall $n \geqslant 3$. Ist allerdings $n = 2$, so ist die Standardfundamentallösung $E = (2\pi)^{-1} \log |x|$, und sie ist nicht homogen. Auch keine andere Fundamentallösung ist es, denn die Differenz zu E wäre eine harmonische Funktion mit logarithmischem Wachstum, mithin (nach Liouville) eine Konstante. Hinzufügen von einer Konstanten zu E reicht aber natürlich nicht aus um aus E eine homogene Funktion zu machen. Allerdings erfüllt E eine von der Eulerschen Gleichung nur wenig verschiedene Beziehung, nämlich $V^2 E = 0$. Dies führt nun zu einer der zentralen Definitionen des Buches: u heißt „fast quasihomogen" falls es k mit $(W-m)^k u = 0$ gibt. (Ein anderer wichtiger zugeordneter Begriff ist dann auch $d_j = (W-m)^j u$ für $j < k$. Die „d_j" werden „Defizienzindices" von u

genannt. Ein typisches Beispiel einer fast quasihomogenen Funktion in einer Dimension ist $(\log|t|)^j$). Im Rahmen von fast quasihomogenen Distributionen haben dann viele Gleichungen eine Lösung die sich quasihomogen nicht lösen lassen. Eines der Hauptanliegen des Buches ist es nun quasihomogene und fast quasihomogene Distributionen (bezüglich allgemeiner W's) zu untersuchen und für allgemeine quasihomogene Operatoren mit konstanten Koeffizienten notwendige und hinreichende Kriterien herzuleiten, mit denen man die Lösbarkeit (gegebenfalls unter Berücksichtigung zusätzlicher Invarianzen) quasihomogener Gleichungen in quasihomogenen oder fast quasihomogenen Distributionen testen kann. Dabei treten eine Reihe von zusätzlichen Fragen auf und neue Begriffsbildungen sind vonnöten. So ist z. B. im Falle $n=1$ eine homogene Funktion auf ganz R_+ bestimmt, wenn man sie in einem Punkt des R_+ kennt. In ähnlicher Weise kann man im R^n versuchen Distributionen die auf einer Fläche (die zu den Bahnen der zugrundeliegenden Multiplikation transversal liegt) definiert sind, zu quasihomogenen Distributionen auf einer unter dieser Multiplikation stabilen Menge auszudehnen, usw. Diese und verwandte Fragestellungen werden in dem Buch ausführlich untersucht, wobei das wichtigste Werkzeug eine auf Gårding zurückgehende Methode quasihomogener Mittelungen ist. Die meisten Ergebnisse stammen dabei vom Autor des Buches selbst und sind vorher nicht veröffentlicht worden. Untersuchungen dieser Art sind in dieser Konsequenz und Umfang bisher nicht angestellt worden. Das Buch ist sorgfaltig geschrieben und erfordert keine besonderen Vorkenntnisse. Aus der Sicht dieses Besprechers wäre es allerdings eine Überlegung wert gewesen, die Hauptergebnisse im (Lie-Gruppen theoretisch gesehen) „halbeinfachen“ (und in Wirklichkeit wesentlich einfacheren) Fall gesondert darzustellen oder wenigstens ausführlich zu erläutern, sowie die Darstellung im allgemeinen Fall durch einige Beispiele zu motivieren. Dies hätte den Fall klassischer Quasihomogenität gesondert erledigt und dem Leser die Möglichkeit geboten die Feinheiten des „allgemeinen Falles“ besser zu würdigen.

Bologna O. Liess

Moerdijk, I., Reyes, G. E., Models for Smooth Infinitesimal Analysis, Berlin u.a.: Springer Verlag 1991, 415 S., DM 148,–

Can the theory of smooth functions and manifolds learn something from the categorical (topos theoretic) method which was introduced in algebraic geometry by Grothendieck?

At a time where there seems to be a trend *against* toposes in algebraic geometry, it is courageous of Springer Verlag to bring this book to the public; but Springer was wise: it is a good book.

It is an account of a burst of activity that for a little more than a decade has taken place to understand, in topos-theoretic terms, the common features of algebraic and differential geometry, in particular, to transfer to the smooth context the technique and insight gained in algebraic geometry about nilpotent elements in structure sheaves, infinitesimal neighbourhoods, function spaces, change of base, ..., . This activity carried the formula "Synthetic Differential Geometry" as its banner, and it was inspired by Lawvere, both in the particular subject matter of geometry (or even "Categorical Dynamics"), and for the general method deriving from the thesis that any topos can be thought of as the category of sets (– provided one cultivates one's mathematical reasoning in constructive (intuitionist) direction. It is noteworthy that both authors of the present book were originally logicians!).

The value of this approach goes in two directions: First, the approach provides a simplicity deriving from the possibility of purely axiomatic ("synthetic") treatment of the basic geometric notions of differential calculus and manifolds; and secondly, it brings into play the power of topos theory (and hence sheaf theory), through the construction of specific toposes ("models"), each of which contains the category of all smooth manifolds. As the title of the book indicates, the second direction is the main concern of the authors.

The construction of such topos models depends on the "commutative algebra" (and ideal theory) of rings of smooth functions, and the first chapters is devoted to that, basing itself partly on classical results of Hadamard, Whitney, Frechet and others, and partly on some further developments of this purely classical discipline by Dubuc and the authors themselves, as well as of some of their collaborators. A tool is the consideration of the purely algebraic notion of C^∞ ring; by this is meant a commutative ring where not only real polynomials in n variables, but every smooth real function on $\mathbb{R}^n$ can be interpreted as an n-ary operation.

In analogy with the procedure in algebraic geometry, a suitable category of these rings is identified with the (dual of) a category of affine geometric objects ("affine schemes"), and the latter is then extended into a topos whose objects are to be thought of as general geometric spaces, but placed in a context where genuine synthetic reasoning is possible. As samples, the authors study deRham cohomology, singular homology (with real coefficients), and the relationship between sprays and affine connections in such synthetic terms.

Does the program of synthetic differential geometry contribute to mathematics in terms of new results? Or is it a mere geometric reproving of analytically well known ones? The authors argue that you do get more; they have a section entitled "From Synthetic to Classical Analysis", in which they stress some mathematically relevant features of the topos theoretic method, for instance, that any possible parametrization of any problem, when dealt with in the topos, is built into it in a smooth way, so that the results that come out, when you revert to the classical world (which is possible, because of the genesis of the topos in classical smooth function theory), always come with the added assertion: "this construction depends smoothly on parameters". They for instance point out that it provides a smooth-parameter form of the classical deRham theorem. Also a generalization of the (Ambrose-Palais-Singer-) relationship between sprays and affine connections (to, for instance, singular, and certain infinite-dimensional smooth manifolds) is offered as evidence that the topos theoretic/synthetic method feeds back new classical knowledge.

For most of their deeper work, the authors need to make the analytical and topological notions internal to the topos itself; e.g. partitions of unity, connectedness, compactness; this is slightly ironical, since the immediate aim of the synthetic method may be said to be the freeing of one's thinking from any explicit topological notions. These internalized topological notions require some ingenuity! The title of the book refers to this, more explicity to a comprehensive axiomatic system (provided in their last two chapters, together with models for it) in which the simple synthetic notions live side by side with the internalized analytical/topological ones, in fact in a way which is even compatible with certain features of non-standard analysis. – A quite different approach to these internal notions is found in the big article by Bunge and Dubuc in [1987]; their approach goes a bit deeper into the crucial question of uniqueness- and existence of solutions for differential equations (both formulating a suitable synthetic axiom to this effect, and constructing models where the axiom holds).

Earlier monographs on the present synthetic method of reasoning are the reviewer's book [1981], and the delightful little book by Lavendhomme [1987]. The latter takes quite the opposite line of Moerdijk and Reyes, by its pure and crisp axiomatic treatment (of pure geometric concepts, with no analysis), and with no explicit consideration of topos models. For somebody who wants to learn some of the basic notions and results of differential geometry, without prior knowledge of it, or of category theory, Lavendhomme's book is the choice. On the other hand, Moerdijk and Reyes make a point of convincing the learned mathematical public that the method provides new results, and that it raises relevant questions in classical differential geometry and smooth-function theory.

Bunge, M.; Dubuc, E.: Local concepts in Synthetic Differential Geometry and germ representability. In: Kueker, D. W.; Lopez-Escobar, E. G. K.; Smith, C. H. (editors): Mathematical logic and theoretical computer science. Marcel Dekker 1987

Kock, A.: Synthetic Differential Geometry. LMS Lecture Notes Series 51. Cambridge University Press 1981

Lavendhomme, R.: Leçons de géometrie différentielle synthétique naive. Louvain-la-Neuve 1987

Aarhus A. Kock

Sobczyk, K., Stochastic Differential Equations. With Applications to Physics and Engineering, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1991, 400 S., Dfl. 240.00

Es gibt einige sehr gute Darstellungen der Theorie der stochastischen Integration und der stochastischen Differentialgleichungen (allen voran Rogers und Williams *Diffusions, Markov Processes, and Martingales,* Vol. 2). Man könnte also meinen, daß wenig Bedarf an neuen Lehrbüchern besteht. Die vorliegende Monographie von Sobczyk wird jedoch ihre Leser finden. Sie stellt einen Aspekt der Theorie in dem Vordergrund der bisher kaum in den Lehrbüchern Beachtung fand: den Aspekt der Anwendung von stochastischen Differentialgleichungen in Physik und Ingenieurwissenschaften.

Das Gebiet der stochastischen Differentialgleichungen unterscheidet sich wesentlich von der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wo liegen die Unterschiede? Betrachten wir die Gleichung

$$\mathrm{d}Y_t = a(Y_t)\mathrm{d}t + b(Y_t)\mathrm{d}X_t, \qquad t \geqslant 0,$$

wobei die Funktion $X = (X_t)$ zufällig (d. h. Pfad eines stochastischen Prozesses) sei. Falls X nach t differenzierbar ist (pfadweise oder im Mittel), so können wir die Gleichung umformen zu $\mathrm{d}Y = \mathrm{a}(Y)\mathrm{d}t + b(Y)\dot{X}\mathrm{d}t$. Die Lösung (Y_t) läßt sich nun durch Integration gewinnen und hat ähnlich glatte Pfade wie (X_t). Dieser sog. *reguläre Fall,* der sich an die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen anlehnt, hat jedoch für die Stochastik wenig Bedeutung. Stochastische Prozesse mit differenzierbaren Pfaden sind einer mathematischen Analyse nur schwer zugänglich. Die relevanten stochastischen Prozesse mit stetigen Pfaden, wie die Brownsche Bewegung, Diffusionen oder stetige Martingale, weisen höchst irreguläre, nirgends differenzierbare Pfade auf. Man ist daher interessiert, auch in diesem Fall (dem *Itô-Fall*) der obigen Gleichung einen Sinn zu geben. Es entsteht das Problem, was unter einer Lösung der Gleichung verstanden werden soll. Die Antwort gibt die stochastische Integrationstheorie. Eine bemerkenswerte Aussage dieser auf Itô zurückgehenden Theorie ist, daß stochastische Differentiale nicht gemäß der Kettenregel zu transformieren sind, sondern nach der Itô-Formel

$$\mathrm{d}f(X) = \mathrm{f}'(X)\mathrm{d}X + \frac{1}{2} f''(X)(\mathrm{d}X)^2.$$

Dieser Sachverhalt, eine Konsequenz des irregulären Pfadverhaltens, steht im Zentrum des stochastischen Kalküls und macht gerade den Unterschied zum klassischen Differentialkalkül aus.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie spielen die regulären Differentialgleichungen also keine Rolle. In den Anwendungen stellt sich dies jedoch anders dar. Für die Modellierung physikalischer Vorgänge werden beide Typen von Differentialgleichungen benutzt, beide lassen sich auf dem Computer simulieren. Auch Sobczyk behandelt in seiner

Monographie die beiden Gleichungstypen gleichgewichtig. Infolgedessen ist seine Erörterung des stochastischen Kalküls auch breiter angelegt als in anderen Lehrbüchern. Es werden nicht nur Itôsche stochastische Integrale betrachtet, sondern auch Differentiation und Integration stochastischer Prozesse im quadratischen Mittel etc. Andererseits wird der Itôsche Kalkül nicht so weit entwickelt, wie dies sonst üblich ist. Leser, die sich für die klassischen Anwendungen des Kalküls in der Wahrscheinlichkeitstheorie wie Levys Charakterisierung der Brownsche Bewegung, Girsanovs Theorem, Lokalzeiten und Tanaka-Formel etc. interessieren, sind mit diesem Buch nicht gut bedient.

Zum Inhalt der Monographie: Im *ersten Kapitel* werden Teile der Wahrscheinlichkeitstheorie, insbesondere aus dem Gebiet der stochastischen Prozesse resümiert. Dem Autor geht es dabei um eine maßtheoretisch saubere Darstellung. Zum Selbstudium ist dieser Abschnitt wohl weniger geeignet. Er ist dennoch nützlich, da der Leser Hinweise erhält, was aus der Wahrscheinlichkeitstheorie später gebraucht wird. Im *zweiten Kapitel* geht es dann um stochastische Stetigkeit, stochastische Differentiation und stochastische Integration. Das stochastische Kalkül wird bis zur Itô-Formel entwickelt. Das *dritte Kapitel* enthält grundlegende Tatsachen über stochastische Differentialgleichungen: Existenz- und Eindeutigkeitssätze, starke und schwache Lösungen, Stratonovitch-Gleichungen, abstrakte Gleichungen etc. Außerdem wird der Leser in die Anfangsgründe der asymptotischen Analyse eingeführt (averaging principles sowie stationäre Lösungen). Zu knapp ist meiner Meinung nach der Abschnitt über Stabilitätsprobleme und Lyapunov-Exponenten, der Autor verweist hier auf die Literatur. Das *vierte Kapitel* hat die Überschrift „Analytische Methoden“ und enthält eine Sammlung von unterschiedlichen Resultaten, die für die Anwendung von Bedeutung sind. Stichworte sind: lineare Gleichungen, Linearisierung, Perturbationsmethoden, orthogonale Entwicklungen, weißes und reales Rauschen, Abweichungen von der Normalität, stochastic averaging, maximum entropy principle, stochastische partielle Differentialgleichungen. Im *fünften Kapitel* gibt der Autor einen Überblick über numerische Methoden. Das *sechste Kapitel* schließlich enthält Anwendungen aus den Ingenieurwissenschaften: zufällige Vibrationen von Fahrzeugen, Flugzeuge in turbulenten Strömungen, Modellierung von Erdbebenstößen, Schiffsbewegungen in zufälligen Seewellen, Stabilität von Hängebrücken. Für den Leser ohne einschlägige Vorbildung sind diese Erörterungen recht knapp, jedoch nicht völlig unzugänglich.

Dies ist ein Buch, das sehr viel Material enthält. Manche Abschnitte haben den Charakter von Übersichtartikeln, in denen der Autor die Literatur diskutiert und (glücklicherweise) nicht jede Behauptung beweist. An vielen Stellen findet man maßtheoretische Erörterungen, der Leser macht also Bekanntschaft mit dem technischen Fundament der Theorie und wird so auf die häufig sehr technische Literatur über stochastische Differentialgleichungen vorbereitet. Das geht allerdings, wie das meist der Fall ist, auf Kosten des intuitiven Verständnisses. Meiner Meinung nach besteht (nicht nur für Anwender) Bedarf an einer Einführung in die stochastischen Differentialgleichungen, die nur ein Minimum an Technik benützt, sozusagen die Forsetzung des Kapitels über Diffusionsprozesse in Karlins und Taylors *Second Course in Stochastic Processes.* Dies leistet das Buch von Sobczyk nicht. Dennoch wird es sich sicher für Physiker, Ingenieure und Mathematiker mit Interessen an Anwendungen als wertvoll erweisen.

Frankfurt/M G. Kersting

Struwe, M., Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Berlin u.a.: Springer-Verlag 1990, 244 S., DM 78,–

Das Buch beschäftigt sich mit bestimmten Aspekten der modernen Variationsrechnung. Im ersten Kapitel werden die direkten Methoden der Variationsrechnung vorgestellt, bei denen es darum geht, die Existenz des Minimums eines Variationsproblems als Limes einer Minimalfolge zu sichern. Man benötigt hierzu einen Kompaktheitsbegriff, der die Existenz eines solchen Limes sicherstellt, und eine Unterhalbstetigkeitsaussage, die impliziert, daß dieser Limes tatsächlich ein Minimum liefert. Der Autor diskutiert insbesondere verschiedene Methoden zur Sicherstellung der Kompaktheit (Verbesserung von Minimalfolgen durch zusätzliche Normalisierungen, Ausgleich von Kompaktheitsverlusten durch bestimmte nichtlineare Zwangsbedingungen, auf Dualitätsprinzipien beruhende Transformationen u.a.). Im nächsten Kapitel werden instabile kritische Punkte von Variationsproblemen gesucht. Eine allgemeine Bedingung, die dies ermöglicht, ist die Palais-Smale-Bedingung, und diese wird ausführlich behandelt. Die Palais-Smale-Bedingung garantiert, daß ein kritischer Punkt wirklich als Limes einer Sattelpunktfolge angenommen wird. Um Sattelpunktfolgen finden zu können, benötigt man noch Bedingungen topologischer Art, und von solchen wird eine Anzahl vorgestellt. Im dritten Kapitel geht es schließlich um Grenzfälle der Palais-Smale-Bedingung, wo diese global nicht mehr gilt, aber noch in bestimmten lokalen Bereichen. Solche Probleme sind in den letzten Jahren wegen ihrer vielfältigen Anwendungen besonders intensiv studiert worden, und insbesondere hier hat der Autor auch selber wesentliche Beiträge zur Forschung geleistet. In dem vorliegenden Buch werden einige derartige Probleme diskutiert und auch einige strukturelle Gemeinsamkeiten solcher Grenzfälle kurz angesprochen. Durch das ganze Buch zieht sich auch eine Vielzahl von Anwendungen der vorgestellten Methoden auf verschiedene Arten semilinearer elliptischer Gleichungen.

Das Buch ist weder ein Lehrbuch, denn der Stoff wird nicht lückenlos und systematisch entwickelt, sondern es wird an verschiedenen Stellen auf andere Publikationen verwiesen, noch eine Forschungsmonographie, da im wesentlichen schon anderweitig publizierte Ergebnisse vorgestellt werden (es gibt aber trotzdem einige Verbesserungen im Vergleich zur vorhandenen Literatur) noch ein vollständiger Überblick über die moderne Variationsrechnung, da der Autor oft recht selektiv vorgeht. Es werden vielmehr ausgewählte wichtige Methoden und Resultate der modernen Variationsrechnung strukturell entwickelt und an einer Vielzahl von Beispielen erläutert. – Der Referent könnte die Stoffauswahl im einzelnen kritisieren. Beispielsweise wird die Palais-Smale-Bedingung für geschlossene Geodätische nur in einem sehr speziellen Fall, aber nicht allgemein bewiesen, obwohl dies leicht hätte geschehen können, wird bei der Existenz zweidimensionaler harmonischer Abbildungen ausgerechnet der am wenigsten variationelle und vielleicht auch schwierigste Zugang gewählt, und werden Yang-Mills-Felder, welche in vier Dimensionen das von den Anwendungen (Donaldson, Taubes, Floer, u.a.) her wohl spektakulärste Beispiel eines Grenzfalls der Palais-Smale-Bedingung darstellen, nicht behandelt. Auch variiert die Ausführlichkeit stark; das Yamabe-Problem beispielsweise wird nur überblicksartig angesprochen, während für die Existenz harmonischer Abbildungen in zwei Dimensionen, wie schon bemerkt, ein langer Beweis gegeben wird.

Nichtdestoweniger ist es für denjenigen, der sich in der Variationsrechnung und ihren Anwendungen schon ein bißchen auskennt, ein sehr schönes Buch. Es gibt kein vergleichbares neueres Buch, in dem so viele verschiedene höchst aktuelle Techniken der modernen Variationsrechnung vorgestellt und an einem so breiten Spektrum von interessanten Beispielen erläutert werden. Dem Autor gelingt es zumeist, die wesentlichen Aspekte klar herauszustellen, und so werden dem Leser viele wichtige Ideen der Variationsrechnung nähergebracht, die sonst oft zwischen technischen Einzelheiten verborgen bleiben. Das Buch ist daher sehr empfehlenswert.

Der Ladenpreis ist im Vergleich zu dem heute leider üblichen Standard moderat.

Bochum J. Jost

Allgower, E. L., Georg, K., Numerical Continuation Methods. An Introduction (Springer Series in Computational Mathematics Vol. 13), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1990, 400 S, DM 128,-

Kontinuitätsmethoden zur Lösung parameterabhängiger Probleme haben in den letzten Jahren zunehmendes Interesse erfahren. Sei es, daß man (wie etwa bei vielen Anwendungen der parametrischen Optimierung) an der Lösung in Abhängigkeit von Modellparametern interessiert ist, oder aber daß man wie bei den Homotopie-Methoden das Problem in eine Schar einbettet und einen Pfad von einem einfachen Problem der Schar zum gewünschten verfolgt.

Grundlegend für all diese Verfahren ist das zentrale Problem des vorliegenden Buches, nämlich die Verfolgung von Lösungspfaden von Gleichungssystemen $H(x)=0$, $H: \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$. Das Buch zerfällt dabei in zwei Teile, die allerdings konzeptionell in enger Verbindung stehen. Im ersten wird der Weg als glatter Weg durch sog. Prädiktor-Korrektor-Verfahren verfolgt, wobei auch (einfache) Verzweigungen und deren Approximation in Betracht gezogen werden. Im zweiten Teil werden die Funktionen H auf Triangulierungen des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}+1}$ stückweise linear approximiert und danach die stückweise linearen Pfade mit (dem Simplex-Verfahren der linearen Optimierung ähnlichen) Austauschmethoden durch die Triangulierung nachgezogen.

Insofern ist das Thema des Buches weit gespannt zumal überdies ein ausgewogenes Verhältnis zwischen Theorie und Numerik angestrebt wird. Dadurch erhält es oft den Charakter einer Übersicht, die den Leser durch Hinweis auf die außerordentlich reichhaltige und aktuelle Literaturliste zum weitergehenden Spezialstudium anregen wird. An einigen Stellen wird dieser Übersichtscharakter vielleicht etwas übertrieben, indem die Darstellung zu sehr in Andeutungen und Querverweisen steckenbleibt, was insbesondere bei manchen Beweisführungen störend ist. Andererseits mag gerade dies Herausforderung und Anregung für den sein, der sich näher mit diesem Gebiet und seinen vielfältigen Anwendungen auseinandersetzen will. Ansonsten ist das Buch in seinen wesentlichen Teilen in sich abgeschlossen und mit Standardkenntnissen in Analysis und linearer Algebra auch gut zu verstehen. Die wesentlichen Algorithmen werden in einer PASCAL-Syntax formuliert, die sie auch für Anfänger leicht implementierbar macht. Zudem findet man am Ende des Buches arbeitsfähige FORTRAN-Programme der wesentlichen in dem Buch beschriebenen Verfahren.

Alles in allem ist das Buch sehr empfehlenswert nicht nur für diejenigen, die selbst auf einem der behandelten Themen arbeiten, sondern auch für viele Anwender, die solche Methoden in der einen oder anderen Form benötigen. Die Darstellung ermöglicht es, sich einzelne Verfahren herauszugreifen, ohne alles Vorhergehende im Detail zu studieren.

Das Buch ergänzt und aktualisiert die Übersichtsarbeit der beiden Autoren in den SIAM-Reviews von 1980 und bietet überdies auf dem algorithmischen Sektor eine Fülle zusätzlichen Materials.

Inhalt. Nach einer schönen Einführung in Kapitel 2 in die grundsätzlichen Ideen der darzustellenden Methoden werden in den nächsten Kapiteln Prädiktor-Korrektor-Verfahren in ihren verschiedenen Aspekten untersucht. In Kapitel 5 wird die Konvergenz des Basis-Verfahrens gezeigt, das sich aus einem Eulerschritt auf die Davidenko Differentialgleichung als Prädiktor und einem Newtonschritt als Korrektor zusammensetzt. Kapitel 6 enthält eine ausführliche Diskussioin von Schrittweitenstrategien für den Korrektorschritt. In Kapitel 7 wird der Ersatz des Newton-Verfahrens durch Sekantenverfahren (Broyden) beschrieben.

Die Darstellung ist auch vom numerischen Standpunkt aus befriedigend insofern in Kapitel 4 solche Fragen (inclusive Fehleranalyse und ein Ansatz zur Skalierung) detailliert diskutiert werden.

Kapitel 8 behandelt die Erkennung einfacher Verzweigungspunkte sowie die Verfolgung abzweigender Lösungspfade. Ist $c(s)$ ein (etwa durch die Bogenlänge s) parametrisierter glatter Lösungspfad von $H(x)=0$, so erkennt man das Überschreiten eines

Verzweigungspunkts auf $c(s)$ am Wechsel des Vorzeichens der Determinante der um den Vektor $c(s)$ erweiterten Jacobi-Matrix $H'(c(s))$. Ist ein (einfacher) Verzweigungspunkt bestimmt, so wird zur Berechnung abzweigender Pfade einmal die Betrachtung gestörter Probleme $H(x)=p$ vorgeschlagen, oder aber die diskrete Approximation des sich im Verzweigungspunkt kreuzenden Tangentenpaares. Die Diskussion der spezifischen numerischen Probleme (Genauigkeit, Länge des Prädiktorschritts, Wahl des Störparameters etc.) ist hier etwas kurz geraten. Die ausführliche Diskussion der Problematik an einem numerischen Beispiel wäre nützlich gewesen. Verzweigungen höherer Ordnung werden nicht betrachtet.

In Kapitel 9 werden einige wichtige Spezialprobleme behandelt, die auf die Berechnung spezieller Punkte des Pfades führen (Bestimmung von s^*, so daß $f(c(s))$ für $s=s^*$ eine Nullstelle oder ein Maximum besitzt, $f: \mathbb{R}^N \to R$ eine gegebene weitere Funktion).

Kapitel 10 schließlich behandelt die Verwendung des konjugierten Gradientenverfahrens als Korrektor-Methode, was insbesondere bei großer Dimension N vorteilhaft sein kann.

Nach einer Überleitung in Kapitel 11, in dem nochmals etwas genauer der Bogen von Fixpunktsätzen, konstruktiven Beweisen derselben zu Approximations- und Homotopiemethoden geschlagen wird, beginnt der Teil über stückweise lineare Ansätze in Kapitel 12. H wird nun eingeschränkt auf die Ecken einer Triangulierung und stückweise linear über die Simplices derselben interpoliert. Abhängig davon, ob man den nun stückweisen linearen Lösungspfad der Approximierenden $\hat{H}$ als Streckenzug bestimmen will oder sich mit einer zusammenhängenden Kette von Simplices begnügt, die ihn umfaßt, verwendet man Vektor- oder Integer-Bewertung. Im ersten Fall erkennt man, daß der Pfad durch eine durch Punkte $v_l, \ldots, v_{N,+1}$ bestimmte Facette läuft, daran, daß die Inverse der Bewertungsmatrix $L(v_1, \ldots, v_{N+1})$ (Spalten (v_i^1), $i=1, \ldots N+1$) lexikographisch positiv ist. Der Algorithmus tauscht in jedem Schritt eine Ecke v_i so aus, daß diese Eigenschaft erhalten bleibt, was zu einem dem Simplex-Verfahren der linearen Optimierung ähnlichen Verfahren führt.

In Kapitel 13 folgt die Anwendung auf Homotopie-Methoden. Um die breite Anwendungsmöglichkeit (etwa auf konvexe Optimierungsprobleme) zu demonstrieren, wird zunächst die Anwendbarkeit der Algorithmen auf die Approximation von Fixpunkten mengenwertiger Abbildungen gezeigt. Die danach besprochenen Homotopie-Verfahren unterscheiden sich im wesentlichen durch die Art der verwendeten Triangulierung. Wichtig ist dabei das Prinzip der lokalen Generierung von Simplices bestimmter Triangulierungen durch Spiegelungen.

In Kapitel 14 wird das Konzept erweitert auf stückweise lineare Mannigfaltigkeiten, die nicht mehr (wie bei Triangulierungen) aus Simplices sondern aus allgemeinen konvexen Polyedern zusammengesetzt sind. Auf diese Weise gelingt die Einordnung des Lemke-Verfahrens für lineare Komplementaritätsprobleme in die behandelte Verfahrensklasse.

Kapitel 15 beschäftigt sich mit der Approximation mehrdimensionaler Lösungsmannigfaltigkeiten von $H(x)=0$, $H: \mathbb{R}^{N+K} \to \mathbb{R}^N$. Der Textteil schließt mit einer Betrachtung zur numerischen Stabilität von Update-Formeln (verwendet in den beschriebenen „stückweise linearen" Kontinuitätsmethoden wie auch im Simplex-Verfahren).

Trier R. Hettich

Kunita, H., Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations, Cambridge u. a.: Cambridge University Press 1990, xiv + 346 pp., £ 40,00

Die vorliegende Monographie ist im wesentlichen aus *zwei* Vorlesungsserien hervorgegangen, die vom Autor anläßlich der Sommerschule in St. Flour 1982 und am Tata Institute of Fundamental Research in Bangalore 1985 gehalten wurden.

Das Hauptanliegen dieses Buches besteht darin, die Beziehung zwischen *stochastischen Strömen* von Diffeomorphismen und *stochastischen Differentialgleichungen* zu entwickeln und Eigenschaften zufälliger Ströme auf der Grundlage der Theorie stochstischer Differentialgleichungen zu studieren.

Stochastische Differentialgleichungen wurden bekanntlich im Jahre 1942 von K. Ito zur Beschreibung von *Diffusionsprozessen* eingeführt. Eine stochastische Differentialgleichung ist in ihrem Wesen eine *gewöhnliche* Differentialgleichung, die durch eine zufällige Störung aufgrund eines *Gaußschen weißen Rauschens* überlagert wird. Die integrale Form des Gaußschen weißen Rauschens ist die *Brownsche Bewegung,* als mathematisches Objekt 1923 von N. Wiener begründet. Da die Brownsche Bewegung fast sicher Pfade besitzt, die auf jedem Intervall von *unbeschränkter* Variation sind, war die Entwicklung eines neuen Integralbegriffes notwendig geworden. Neben K. Ito hat sich auch I. I. Gihman Anfang der 40er Jahre mit dieser Problematik beschäftigt. Dieses Integral, welches heute zu Recht als Ito-Integral bezeichnet wird, bildete den Ausgangspunkt zahlreicher neuer fruchtbarer Entwicklungen in der Theorie zufälliger Prozesse, die Inhalt der sogenannten *stochatischen Analysis* geworden sind. Das Ito-Integral wurde in dem zurückliegenden halben Jahrhundert vervollkommnet und in verschiedenen Richtungen verallgemeinert. Wesentlich beeinflußt wurden diese Entwicklungen von J. L. Doob, I. I. Gihman und A. V. Skorohod, P. A. Meyer und H. Kunita und S. Watanabe. Anstelle der Brownschen Bewegung betrachtet man heute beliebige *Semimartingale* als Integratoren, und K. Bichteler und C. Dellacherie haben gezeigt, daß diese die allgemeinsten stochastischen Integratoren sind, wenn man eine gewisse, minimale Stetigkeitsforderung an das stochastische Integral stellt.

Die vorliegende Monographie schließt eine empfindliche Lücke in der Literatur zur stochastischen Analysis. Außer dem Band von J.-M. Bismut [1], in dem insbesondere auch stochastische Ströme und stochastische Differentialgleichungen behandelt werden, scheint es keine geschlossene Darstellung zu diesem Gegenstand zu geben.

Der Wert dieses Buches besteht einerseits in der systematischen Behandlung von stochastischen Strömen und ihrem Zusammenhang zu Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen. Ist $X_{s,t}(x)$ Lösung einer stochastischen Differentialgleichung mit dem Anfangswert x aus R^d zum Zeitpunkt $s<t$, so kann man wie im Falle einer gewöhnlichen Differentialgleichung im R^d fragen, ob sie einen *Strom* von Homöomorphismen oder Diffeomorphismen darstellt, d. h., ob die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $X_{s,t}(x)$ ist stetig in s, t, x f.s.

(b) Die Abbildung $X_{s,t}$ ist ein Homöomorphismus oder Diffeomorphismus des R^d für alle $s<t$ f.s.

(c) $X_{s,u}=X_{t,u}\circ X_{s,t}$ für alle $s<t<u$ f.s.

Ist darüber hinaus die Familie $X_{s,t}$ für disjunkte Intervalle $[s, t)$ unabhängig, so spricht man von einem *Brownschen* Strom. Um die gestellte Frage zu beantworten, sind zahlreiche sorgfältige Argumente vonnöten, um die auftretenden Nullmengen zu beherrschen, was grob gesprochen mit Hilfe von geeigneten Regularitätsbedingungen in x erreicht wird. Umgekehrt ist die Frage interessant, ob jeder stochastische Strom als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung aufgefaßt werden kann. Unter geeigneten Regularitätsbedingungen ist die Antwort positiv, wenn man den Begriff der stochastischen Differentialgleichung verallgemeinert. Diese Verallgemeinerung beruht auf einer wesentichen Erweiterung der Konzeption der stochastischen Integration durch die Einführung von nichtlinearen stochastischen Integralen, manchmal auch Linienintegrale genannt.

Andererseits besteht der Wert des vorliegenden Bandes in der systematischen Darstellung von modernen Methoden der stochastischen Analysis, die für die Behandlung der angeschnittenen Fragestellungen von Bedeutung sind und die bisher wohl kaum in anderen Büchern auffindbar sind. Es handelt sich hier um Problemstellungen und Methoden der *unendlich-dimensionalen* stochastischen Analysis: Ein stochastischer Strom kann aufgefaßt werden als ein zufälliger Prozeß $X_{s,t}$ mit Werten im Raum der stetigen Funktionen über dem R^d oder geeigneten Unterräumen. Oder er kann aufgefaßt werden als ein zufälliger Prozeß $X_{s,t}$ mit Werten in der topologischen Gruppe der Homöomorphismen oder Diffeomorphismen über dem R^d.

In diesem Buch spielen eine zentrale Rolle zufällige Prozesse $F(t, x)$, die von einem Parameter x aus dem R^d abhängen. Unter der Voraussetzung, das F stetig von (t, x) abhängt, kann $F(t, .)$ als ein stetiger zufälliger Prozeß mit Werten im *unendlich-dimensionalen* Raum C der stetigen Funktionen des R^d in sich oder, bei zusätzlichen Regularitätsvoraussetzungen, in geeigneten Unterräumen aufgefaßt werden. Ist $F(t, x)$ für jedes x ein (stetiges) Semimartingal, so spricht man von einem *C-wertigen stetigen Semimartingal.* Im Kapitel 3 des vorliegenden Buches wird der stochastische *Ito- und Stratonovich-Kalkül* für C-wertige Semimartingale erweitert. Das geschieht auf der Grundlage eines Integralbegriffes, der im Vergleich zum klassischen Ito- bzw. Stratonovich-Integral die Eigenschaft der Linearität nicht mehr besitzt und eine Art *Linienintegral* darstellt. Herzstück dieser Erweiterung des stochastischen Kalküls ist die sogenannte *verallgemeinerte* Ito-Formel, den Spezialisten unter dem Namen *Ito-Ventzell-Formel* bekannt. Diese Formel unterscheidet sich wesentlich von der *klassischen* Ito-Formel durch einen zusätzlichen Ausdruck, der die Abhängigkeit vom Parameter x widerspiegelt.

Der Autor beginnt im Kapitel I mit einer Einführung in die Theorie Markovscher Prozesse, die Martingaltheorie und Brownsche Bewegung.

Anschließend wird in Kapitel II eine Übersicht über den klassischen Ito-Kalkül gegeben. Es ist schon erstaunlich, mit welcher Kürze und Prägnanz die Grundlagen der stochastischen Analysis an dieser Stelle bereitgestellt werden.

In Kapitel III werden Semimartingale mit einem räumlichen Parameter behandelt, worauf weiter oben bereits kurz eingegangen worden ist.

Kapitel IV mit dem Titel Stochastische Ströme ist sowohl vom Inhalt als auch vom Umfang der Kern der vorliegenden Monographie.

In Kapitel V werden Untersuchungen über die Konvergenz stochastischer Ströme durchgeführt.

Besondere Beachtung verdient das letzte Kapitel (Kapitel VI), welches der Theorie *stochastischer partieller Differentialgleichungen* gewidmet ist. Es werden sowohl stochastische partielle Differentialgleichungen *erster Ordnung* als auch *zweiter Ordnung* systematisch behandelt. Im Vergleich mit anderen Arbeiten über stochastische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche die mehr *analytische* Methode der partiellen Differentialgleichungen benutzen, verwendet der Autor die in diesem Buch bereitgestellte, eher *probabilistische* Methode der stochastischen Ströme. Eine schöne Anwendung der Theorie stochastischer Ströme, zumal wiederum Mangel an aktueller Buchliteratur über stochastische partielle Differentialgleichungen zu bestehen scheint.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die vorliegende Monographie ohne Zweifel eine wertvolle Bereicherung der Literatur über stochastische Analysis, insbesondere der unendlichdimensionalen stochastischen Analysis, darstellt. Das Buch ist sorgfältig und prägnant geschrieben, an vielen Stellen aber auch sehr knapp gehalten. Es ist für Leser geeignet, die einige Vorkenntnisse vor allem auf dem Gebiet stochastischer Prozesse mitbringen.

[1] J.-M. Bismut: Mécanique aléatoire. Lecture Notes in Mathematics 866, Springer-Verlag, Berlin, 1981

Jena H. J. Engelbert

Křížek, M., Neittaanmäki, P., Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications (Pitman Monographs 50), Horlow: Longman 1990, 265 S., £ 38.–

Das Buch gibt eine Einführung sowohl in die Theorie als auch die praktische Umsetzung der finite Elemente Methode. Laut Klappentext ist es für Berufsmathematiker, Mathematikstudenten und Ingenieure geschrieben.

Etwa die erste Hälfte des Buches ist der Approximation linearer elliptischer Gleichungen gewidmet. Nach einem einführenden Kapitel über die Grundlagen aus Mathematik und Elastizitätstheorie wird die Methode der finiten Elemente vorgestellt und Fehlerabschätzungen in der Energie- und der L^2-Norm bewiesen. In den folgenden Kapiteln werden praktische Fragen wie die Verwendung von Integrationsformeln, das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix, die Lösung des diskreten Gleichungssystems und das Postprocessing behandelt. Das Kapitel über konforme und nichtkonforme Verfahren zur Approximation des Plattenproblems gehört noch zum klassischen Stoff, leitet aber wegen seiner Kürze zum zweiten Teil des Buches über, in dem unterschiedliche Gleichungen und ihre Finite Elemente Approximationen studiert werden. Einige Stichworte: Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung, eindimensionale singulär gestörte Probleme, Systeme mit vorgeschriebener Divergenz und Rotation, zeitharmonische Maxwell Gleichung, Helmholtz Gleichung, Variationsungleichungen, Eigenwertprobleme, Verzweigungsprobleme, monotone Operatorgleichungen, rotationssymmetrische Probleme. Aufgrund der Vielzahl der behandelten Gleichungen können die meisten nur kurz dargestellt werden (z. B. Verzweigungsprobleme 4 S). Es werden die wichtigsten theoretischen Ergebnisse zitiert und in vielen Fällen numerische Ergebnisse angegeben. Gerade der letzte Punkt ist den Verfassern im Hinblick auf die Fülle des behandelten Stoffes hoch anzurechnen.

Das Buch von M. Křížek und P. Neittaanmäki ist – abgesehen von den Einführungskapiteln – knapp gehalten. Im Gegensatz zu anderen Büchern erfährt der Leser sehr früh, was die finite Elemente Methode ist und wozu sie verwendet werden kann. In den Kapiteln über speziellere Probleme findet sich zumindest eine kurze Darstellung der Gleichung und ihrer Diskretisierung sowie weiterführende Literatur. Trotzdem kann der Rezensent sich mit dem Buch nicht anfreunden. Über die Stoffauswahl, die hier zweifellos von den Arbeitsgebieten der Verfasser mitbestimmt wird, läßt sich bei einem solchen Buch natürlich streiten. Trotzdem stellt sich die Frage, warum Verbesserungen der Methode aus den letzten Jahren (singulär gestörte Probleme, gemischte Verfahren, adaptive Methoden) für das Buch kaum eine Bedeutung besitzen. Dadurch hebt es sich nicht vom Buch von P. G. Ciarlet ab, in dem der Stoff bis zum Jahre 1975 für den mathematisch interessierten Leser ausführlicher und mit vollständigen Beweisen dargestellt ist.

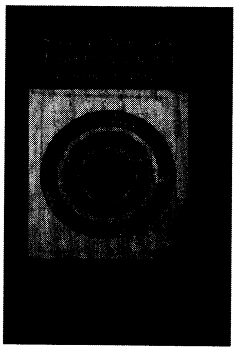
Erlangen M. Dobrowolski

BIRKHÄUSER

BAT
M. Artin
Algebra
1993. 720 pages. Gebunden
DM 88.– / öS 686.40 / sFr. 78.–
ISBN 3-7643-2927-0

BL 1
M. Brodmann
Algebraische Geometrie
Eine Einführung
1989. 296 pages. Hardcover
DM 110.– / öS 858.00 / sFr. 98.–
ISBN 3-7643-1779-5

P.L. Butzer, D. Lohmann
Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times



1993. 624 pages. Hardcover
Text English / German
DM 98.– / öS 764.40 / sFr. 88.–
ISBN 3-7643-2863-0

F. Klein
Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade
Herausgegeben mit einer Einführung und Kommentaren von Peter Slodowy
1992. 344 Seiten. Gebunden
DM 98.– / öS 764.40 / sFr. 88.–
ISBN 3-7643-2454-6

ISNM 113
L. Quartapelle
Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations
1993. 304 pages. Hardcover
DM 142.– / öS 1'107.60 / sFr. 128.–
ISBN 3-7643-2935-1

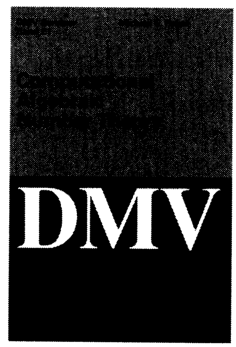
D.E. Rowe (Hrsg)
David Hilbert, Natur und mathematisches Erkennen
Vorlesungen, gehalten 1919 –1920 in Göttingen
1991. 125 Seiten. Gebunden
DM 68.– / öS 530.40 / sFr. 58.–
ISBN 3-7643-2668-9

ISNM Lehrbuch
P. Spellucci
Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung
1993. 568 Seiten. Broschur
DM 88.– / öS 686.40 / sFr. 78.–
ISBN 3-7643-2854-1

A. Weil
Zahlentheorie
Ein Gang durch die Geschichte Von Hammurapi bis Legendre
1992. 400 Seiten. Broschiert
DM 58.– / öS 452.40 / sFr. 52.–
ISBN 3-7643-2635-2

DMV 20
H. Esnault / E. Viehweg
Lectures on Vanishing Theorems
1992. 172 pages. Softcover
DM 56.– / öS 436.80 / sFr. 48.–
ISBN 3-7643-2822-3

DMV 21
M.E. Pohst
Computational Algebraic Number Theory



1993. 104 pages. Softcover
DM 39.– / öS 304.20 / sFr. 34.–
ISBN 3-7643-2913-0

DMV 22
H.W. Knobloch / A. Isidori / D. Flockerzi
Topics in Control Theory
1993. 176 pages. Softcover
Approx. DM 48.– / öS 374.40 / sFr. 42.–
ISBN 3-7643-2953-X

Please order through your bookseller or write to:
Birkhäuser Verlag AG
P.O. Box 133
CH-4010 Basel / Switzerland
FAX: ++41 / 61 / 271 76 66

For orders originating in the USA or Canada:
Birkhäuser
44 Hartz Way
Secaucus, NJ 07096-2491 / USA

MATHEMATICS

Birkhäuser

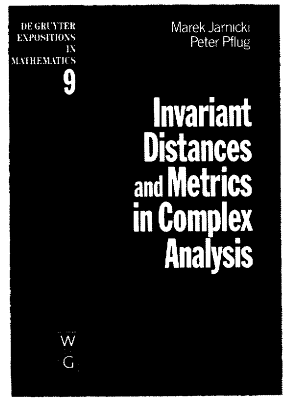
Birkhäuser Verlag AG
Basel · Boston · Berlin

Prices are subject to change without notice. 9/93

Walter de Gruyter Berlin • New York

de Gruyter Expositions in Mathematics

Editors: O.H. Kegel - V.P. Maslov - W.D. Neumann - R.O. Wells, Jr.



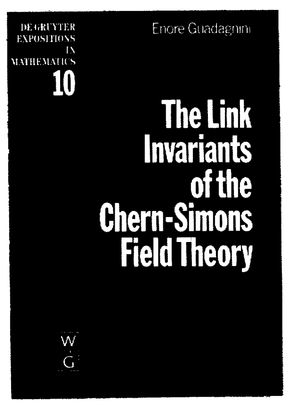
Volume 9

Marek Jarnicki, Peter Pflug

Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis

1993. 17 x 24 cm.
XI, 408 pages. With 6 figures.
Cloth DM 178,- / öS 1.389,- / sFr 171,-
ISBN 3-11-013251-6

Contents:
Hyperbolic geometry of the unit disc • The Carathéodory pseudodistance and the Caratheódory-Reiffen pseudometric • The Kobayashi pseudodistance and the Kobayashi-Royden pseudometric • Contractible systems • Contractible functions and metrics for the annulus • The Bergman metric • Hyperbolicity and completeness • Complex geodesics. Lempert's theorem • Product-property • Comparison on strongly pseudoconvex domains • Miscellanea • Appendix



Volume 10

Enore Guadagnini

The Link Invariants of the Chern-Simons Field Theory

- New Developments in Topological Quantum Field Theory -

1993. 17 x 24 cm.
XIV, 312 pages.With 157 figures.
Cloth DM 148,- / öS 1.155,- / sFr 143,-
ISBN 3-11-014028-4

Contents:
Introduction • Basic notions of knot theory • Framing in field theory • Non-Abelian Chern-Simons theory • Observables and perturbation theory • Properties of the expectation values • Ordering fermions and knot observables • Braid group • R-matrix and braids • Chern-Simons monodromies • Defining relations • The extended Jones polynomial • General properties • Unitary groups • Reduced tensor algebra • Surgery on three-manifolds • Surgery and field theory • Observables in three-manifolds • Three-manifold invariant • Abelian surgery invariant

Walter de Gruyter
Berlin • New York

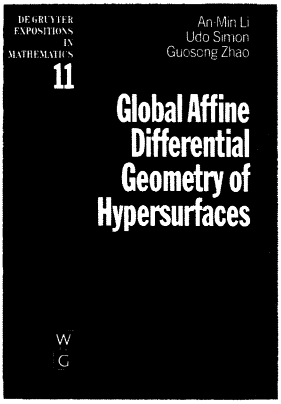
de Gruyter Expositions in Mathematics

Editors: O.H. Kegel - V.P. Maslov - W.D. Neumann - R.O. Wells, Jr.

Volume 11

An-Min Li, Udo Simon, Guosong Zhao

Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces



1993. 17 x 24 cm.
Cloth DM 178,- / öS 1.389 / sFr 171,-
ISBN 3-11-012769-5

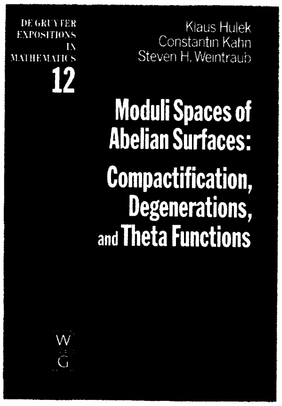
Contents:
Preliminaries and basic structural aspects • Local equiaffine hypersurface theory • Affine hyperspheres • Rigidity and uniqueness theorems • Variational problems and affine maximal surfaces • Geometric inequalities • Basic concepts from differential geometry • Laplacian Comparison Theorem

Volume 12

Klaus Hulek, Constantin Kahn, Steven H. Weintraub

Moduli Spaces of Abelian Surfaces:

Compactification, Degenerations, and Theta Functions



1993. 17 x 24 cm. XII, 347 pages.
With 24 figures
Cloth DM 168,- / öS 1.311,- / sFr 161,-
ISBN 3-11-013851-4

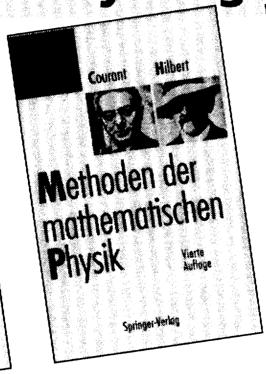
Contents:

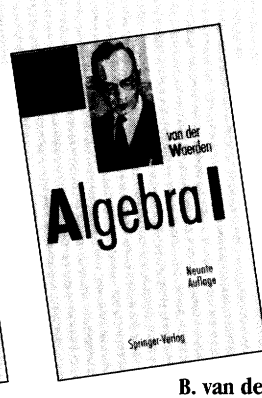
I • Compactified moduli spaces
Moduli spaces • Torus embeddings and applications • Toroidal compactification of $A(1,p)$ • The boundary of $A^*(1,p)$ • Humbert surfaces and scaffoldings • The Satake compactification

II Degenerations of abelian surfaces
Mumford's construction • The basic construction for surfaces • Degenerate abelian surfaces (the principally polarized case) • Degenerate abelian surfaces (the case of $(1,p)$-polarization) • Polarizations on degenerate abelian surfaces

III The Horrocks-Mumford map
Construction of the Horrocks-Mumford map • Extension of the Horrocks-Mumford map to $A(1,5)$ • Extension of the Horrocks-Mumford map to $A^*(1,5)$

Forever young





H. Weyl

Raum - Zeit - Materie

Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie

Herausgegeben von J. Ehlers mit neuem Vorwort und Kommentaren

8. Aufl. 1993. XVIII, 349 S. Geb.
DM 68,-; öS 530,40; sFr 75,00
ISBN 3-540-56978-2

Aus dem Vorwort von Jürgen Ehlers zur 7. Auflage: „Die ... Entwicklung der Physik macht verständlich, warum ein so „altes“ Werk wie **Raum, Zeit, Materie** noch aktuell ist: Die Riemann-Einsteinsche Raumzeitstruktur, die von Weyl so meisterhaft beschrieben und aus ihren mathematischen und physikalischen Wurzeln hervorwachsend dargestellt wird, ist immer noch die physikalisch umfassendste und erfolgreichste Raumzeittheorie, die bisher entwickelt und mit der Erfahrung konfrontiert wurde.“

R. Courant, D. Hilbert

Methoden der mathematischen Physik

4. Aufl. 1993. XVIII, 545 S. Geb.
DM 68,-; öS 530,40; sFr 75,00
ISBN 3-540-56796-8

Das vorliegende Buch enthält neben dem alten Band 1 zusätzlich das aus dem vormaligen Band 2 mitaufgenommene Kapitel 7 zum heute wieder aktuellen Thema „Lösung von Rand- und Eigenwertproblemen“.

B. van der Waerden

Algebra

Mit einem Geleitwort von J. Neukirch

Band 1

9. Aufl. 1993. XIII, 272 S. Geb.
DM 68,-; öS 530,40; sFr 75,00
ISBN 3-540-56799-2

Band 2

6. Aufl. 1993. Etwa 315 S. Geb.
DM 68,-; öS 530,40; sFr. 75,00
ISBN 3-540-56801-8

Aus dem Geleitwort: „Das vorliegende Werk von B.L. van der Waerden nimmt unter den mathematischen Lehrbüchern eine außergewöhnliche Stellung ein. Selten nur hat in der Vergangenheit ein Lehrbuch eine ähnlich große Wirkung auf das mathematische Leben ausgeübt wie dieses. Seit seinem ersten Erscheinen im Sommer 1930 ... haben Generationen von Mathematikern nach ihm die Algebra gelernt, zumindest im deutschsprachigen Raum.“

Springer

Preisänderungen vorbehalten.

d&p.1183.MNT/E/1

Springer-Verlag ☐ Heidelberger Platz 3, D-14197 Berlin, F.R. Germany ☐ 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA ☐ 8 Alexandra Rd., London SW 19 7JZ, England ☐ 26, rue des Carmes, F-75005 Paris, France ☐ 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan ☐ Room 701, Mirror Tower, 61 Mody Road, Tsimshatsui, Kowloon, Hong Kong ☐ Avinguda Diagonal, 468-4° C, E-08006 Barcelona, Spain ☐ Wesselényi u. 28, H-1075 Budapest, Hungary