

E 20577 F

96. Band Heft 4

ausgegeben am 24. 5. 1995

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil



B. G. Teubner Stuttgart 1995

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:

B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart 1995 – Verlagsnummer 2909/4

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-68723 Oftersheim

Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

96. Band



B. G. Teubner Stuttgart 1994/95

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970.0012-0456/83 \$ 01.00+.20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1995 – Verlagsnummern 2909/1, 2909/2, 2909/3, 2909/4

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim

Druck: pagina media gmbh, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

L. Arnold: Zufällige dynamische Systeme	85
E. Bayer-Fluckiger: Galois Cohomology and the Trace Form	35
R. Bölling: Karl Weierstraß – Stationen eines Lebens	56
H.-W. Burmann, H. Günzler, H. S. Holdgrün, K. Jacobs: Wilhelm Maak 1912–1992 ..	76
R. Howe: Some simple examples in the representation theory of semisimple Lie groups	131
W. Plesken: Hans Zassenhaus 1912–1991	1
M. Struwe: Das Plateausche Problem	101
K. Wohlfahrt: Hans Petersson zum Gedächtnis	117
H. Zassenhaus: Methoden und Probleme der modernen Algebra	21

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Akhmerov, R. R., Kamenskii, M. I., Potapov, A. S., Rodkina, A. E., Sadovskii, B. N., Measures of Noncompactness and Condensing Operators (<i>J. Appell</i>)	41
Allgower, E. L., Georg, K., Numerical Continuation Methods. An Introduction (<i>R. Hettich</i>)	26
Ambartzumian, R. V., Factorization calculus and geometric probability (<i>W. Weil</i>)	53
Appell, J., Zabrejko, P. P., Nonlinear superposition operators (<i>E. Zeidler</i>)	52
Artzy, R., Geometry – An Algebraic Approach (<i>W. Benz</i>)	36
Barnsley, M. F., Hurd, L. P., Fractal Image Compression (<i>Ch. Bandt</i>)	31
Basar, T., Bernhard, P., H^∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems, A Dynamic Game Approach (<i>C. Schere</i>)	48
Baues, H. J., Combinatorial Homotopy and 4-Dimensional Complexes (<i>C. Hog-Angeloni, W. Metzler</i>)	8
Benson, D. J., Representations and Cohomology I, II (<i>C. M. Ringel</i>)	57
Bernard Bolzano-Gesamtausgabe (<i>D. D. Spalt</i>)	88
Bouleau, N., Hirsch, F., Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space (<i>N. Jacob</i>)	46
Carl, B., Stephani, I., Entropy, Compactness and the Approximation of Operators (<i>E. Novak</i>)	96
Carmo, D., Riemannian geometry (<i>W. Ballmann</i>)	35
Chein, O., Pflugfelder, H. O., Smith, J. D. H., Quasigroups and Loops: Theory and Applications (<i>H. Hähl</i>)	69
Coxeter, H. S. M., Regular Complex Polytopes, Second Ed. (<i>J. M. Wills</i>)	2
Devlin, K., Logic and Information (<i>H.-D. Ebbinghaus</i>)	63
Dieck tom, T., Topologie (<i>K. H. Mayer</i>)	38
Eklof, O., Mekler, A., Almost free modules, set-theoretic methods (<i>R. Göbel</i>)	93
Euler, N., Steeb, W.-H., Continuous Symmetries, Lie Algebras and Differential Equations (<i>G. Czichowski</i>)	78
Evens, L., The Cohomology of Groups (<i>K. W. Gruenberg</i>)	59
Faltings, G., Chai, C.-Li, Degeneration of Abelian Varieties (<i>W. Lütkebohmert</i>) ..	32
Gilbert, J. E., Murray, M. A. M., Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis (<i>P. Slodowy</i>)	42

Griffith, P. H., Introduction to Algebraic Curves (<i>H. Lange</i>)	35
Grudzinski, O. von, Quasihomogeneous distributions (<i>O. Liess</i>)	20
Henstock, R., The General Theory of Integration (<i>J. Kurzweil, S. Schwabik</i>)	52
Horn, R. A., Johnson, C. R., Topics in Matrix Analysis (<i>L. Elsner</i>)	79
Iwasaki, K., Kimura, H., Shimomura, S., Yoshida, M., From Gauß to Painlevé (<i>H. Begehr</i>)	50
Jensen, K. K., Thomsen, K., Elements of <i>KK</i> -theory (<i>J. Cuntz</i>)	64
Kawakubo, K., The Theory of Transformation Groups (<i>K. Pawalowski</i>)	74
Kerber, A., Algebraic combinatorics via finite group actions (<i>Th. Müller</i>)	67
Khavin, V. P., Nikol'skij, N. K., Commutative Harmonic Analysis I, General Survey – Classical Aspects (<i>D. Müller</i>)	39
Klir, G. J., Folger, T. A., Fuzzy Sets, Uncertainty and Information (<i>R. Kruse</i>)	15
Knus, M.-A., Quadratic and Hermitian Forms over Rings (<i>A. Pfister</i>)	3
Křížek, M., Neittaanmäki, P., Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications (<i>M. Dobrowolski</i>)	30
Kunita, H., Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations (<i>H. J. Engelbert</i>)	27
Lang, S., Begegnungen mit Schülern (<i>J. Cofmann</i>)	32
Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series Secunda, Volumen Vicesimum Quartum: Sol et Luna II (<i>C. J. Scriba</i>)	1
Ljung, L., Pflug, G., Walk, H., Stochastic Approximation and Optimization (<i>G. Kersting</i>)	85
Lojasiewicz, St., Introduction to complex analytic geometry (<i>H. Grauert</i>)	56
Margulis, G. A., Discrete subgroups of semisimple Lie Groups (<i>J. Rohlf's</i>)	60
Marinov, C. A., Neittaanmäki, P., Mathematical Models in Circuit Theory: Theory and Applications (<i>J. Prüss</i>)	45
Moerdijk, I., Reyes, G. E., Models for Smooth Infinitesimal Analysis (<i>A. Kock</i>)	21
Nikol'skij, S. M. (Ed.), Analysis III (<i>H. Triebel</i>)	16
O'Malley, R. E. jr., Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations (<i>J. Scheurle</i>)	85
Onishchik, A. L., Vinberg, E. B., Lie Groups and Algebraic Groups (<i>K. H. Hofmann</i>)	9
Pisier, G., The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry (<i>R. Schneider</i>)	5
Pommerenke, C., Boundary Behaviour of Conformal Maps (<i>D. Gaier</i>)	82
Rao, M. M., Ren, Z. D., Theory of Orlicz Spaces (<i>H. Hudzik</i>)	80
Robinson, D. W., Elliptic Operators and Lie Groups (<i>W. Arendt</i>)	77
Roggenkamp, K. W., Taylor, M. J., Group Rings and Class Groups (<i>J. Ritter</i>)	66
Scriba, C. J. (Hrsg.), Joseph Ehrenfried Hofmann: Ausgewählte Schriften (<i>K. Reich</i>)	1
Selberg, A., Collected Papers (<i>S. J. Patterson</i>)	81
Sobczyk, K., Stochastic Differential Equations (<i>G. Kersting</i>)	23
Struwe, M., Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems (<i>J. Jost</i>)	24
Walz, G., Spline-Funktionen im Komplexen (<i>G. Opfer</i>)	19
Weizsäcker, H. von, Winkler, G., Stochastic Integrals (<i>P. Imkeller</i>)	17
Whitney, H., Collected Papers, Vol. I und II (<i>G. M. Ziegler</i>)	91
Yang, K., Komplex Algebraic Varieties (<i>Th. Peternell</i>)	65
Yuan Wang, Diophantine Equations and Inequalities in Algebraic Number Fields (<i>W. Schwarz</i>)	6
Zlatev, Z., Computational Methods of General Sparse Matrices (<i>L. Elsner</i>)	86
Zwillinger, D., Handbook of Differential Equations (<i>M. Schneider</i>)	87

Inhalt Band 96, Heft 4

1. Abteilung

R. Howe: Some simple examples in the representation theory of semisimple Lie groups	131
---	-----

2. Abteilung

Devlin, K., Logic and Information (<i>H.-D. Ebbinghaus</i>)	63
Jensen, K. K., Thomsen, K., Elements of <i>KK</i> -theory (<i>J. Cuntz</i>)	64
Yang, K., Complex Algebraic Varieties (<i>Th. Peternell</i>)	65
Roggenkamp, K. W., Taylor, M. J., Group Rings and Class Groups (<i>J. Ritter</i>)	66
Kerber, A., Algebraic combinatorics via finite group actions (<i>Th. Müller</i>)	67
Chein, O., Pflugfelder, H. O., Smith, J. D. H., Quasigroups and Loops: Theory and Applications (<i>H. Hähl</i>)	69
Kawakubo, K., The Theory of Transformation Groups (<i>K. Pawalowski</i>)	74
Robinson, D. W., Elliptic Operators and Lie Groups (<i>W. Arendt</i>)	77
Euler, N., Steeb, W.-H., Continuous Symmetries, Lie Algebras and Differential Equations (<i>G. Czichowski</i>)	78
Horn, R. A., Johnson, C. R., Topics and Matrix Analysis (<i>L. Elsner</i>)	79
Rao, M. M., Ren, Z. D., Theory of Orlicz Spaces (<i>H. Hudzik</i>)	80
Selberg, A., Collected Papers (<i>S. J. Patterson</i>)	81
Pommerenke, C., Boundary Behaviour of Conformal Maps (<i>D. Gaier</i>)	82
Ljung, L., Pflug, G., Walk, H., Stochastic Approximation and Optimization (<i>G. Kersting</i>)	85
O'Malley, R. E. jr., Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations (<i>J. Scheurle</i>)	85
Zlatev, Z., Computational Methods of General Sparse Matrices (<i>L. Elsner</i>)	86
Zwillinger, D., Handbook of Differential Equations (<i>M. Schneider</i>)	87
Bernard Bolzano-Gesamtausgabe (<i>D. D. Spalt</i>)	88
Whitney, H., Collected Papers, Vol. I und II (<i>G. M. Ziegler</i>)	91
Eklof, O., Mekler, A., Almost free modules, set-theoretic methods (<i>R. Göbel</i>)	93
Carl, B., Stephani, I., Entropy, Compactness and the Approximation of Operators (<i>E. Novak</i>)	96

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

R. Berndt: On Automorphic Forms for the Jacobi Group

B. Green, F. Pop, P. Roquette: On Rumely's Local-Global Principle

L. Volkmann: Regular graphs, regular factors, and the impact of Petersen's Theorems

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen

Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2

Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Some Simple Examples in the Representation Theory of Semisimple Lie Groups

R. Howe, New Haven, CT

This paper tries to present in as direct a way as is feasible some examples from representation theory of semisimple Lie groups. In relation to the current state of understanding in the field, these examples are extremely elementary. However, they are real: the main example, in §4, has received substantial attention over the years (see for example [Br], [Di], [Fa], [Hi1, 2], [JV], [J], [JW], [KG], [Ko], [Mo], [Ro], [Sp], etc.), it has played an important role in motivating and guiding more general investigations, and it has significant applications. Furthermore these examples exhibit an intrinsic structure which, while simple and easy to grasp directly, perhaps begins to suggest how more complex examples behave.

We start by computing the action of $SL(2, \mathbf{R})$ on spaces of homogeneous functions on \mathbf{R}^2 . These calculations are essentially equivalent to those of Bargmann [Ba] in his classification of the unitary representations of $SL(2, \mathbf{R})$ at the beginning of the study of representation theory of semisimple Lie groups. We then give several examples which extend Bargmann's calculations in various directions. The main example is that of the indefinite orthogonal group $O(p, q)$ acting on spaces of homogeneous functions on the light cone in \mathbf{R}^{p+q} . We also indicate how these calculations can be extended to the isometry groups $U(p, q)$ or $Sp(p, q)$ of hermitian forms over \mathbf{C} or \mathbf{H} (the quaternions). These examples are taken from [HT], to which the reader is referred for more details.

It is a curious and remarkable fact that Bargmann's calculations were not followed fairly promptly by examples similar to the ones presented here. There does not seem to be any technical reason why they could not have been done. The main techniques used here, namely study of the action of the Lie algebra and preliminary reduction with respect to the maximal compact subgroup, were already used by Bargmann, Gelfand-Naimark, etc., and were basic parts of Harish-Chandra's foundational work in the early 1950's. The particular calculations involved are straightforward applications of the classical theory of spherical harmonics. In fact (and this is one of the main points of this paper) these calculations are easy and require virtually no special technology. If these examples had been studied, the history of the subject might have been substantially different. For example, the results of Kostant [Ko] on reducibility and unitarity of the spherical principal series for rank one groups, which were

considered path-breaking [No] when they appeared in 1969, are (except for the one exceptional rank one group) included in results of [HT], which are partly described in § 4, 5. (They were already derived in [J], [JW], by an analysis with parallels to the discussion of [HT].) Also, one can read off, from the calculations here and in [HT], the unitary duals of $O(2, 1)$, $O(3, 1)$, $O(4, 1)$, and $U(2, 1)$. The first two of these were determined by Bargmann [Ba], and by Bargmann, Gelfand-Naimark [GN], and Harish-Chandra [HC1]. The unitary dual of $O(4, 1)$ was described by Dixmier in 1961 [Di], and the unitary dual of $U(2, 1)$ was not determined until 1966 [Hi2].

1 $SL(2, \mathbf{R})$

Consider the group $SL(2, \mathbf{R})$, of 2×2 real matrices of determinant one, acting on \mathbf{R}^2 in the standard way. This action gives rise to an action of $SL(2, \mathbf{R})$ on (complex-valued) functions on \mathbf{R}^2 by the familiar recipe

$$(1.1) \quad \varrho(g)f(v) = f(g^{-1}(v)) \quad f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}, g \in SL(2, \mathbf{R}), v \in \mathbf{R}^2$$

The same recipe works for any subset $X \subseteq \mathbf{R}^2$ which is invariant under \mathbf{R}^2 . In fact there are only two such sets: the origin, $\{0\}$, and its complement, $\mathbf{R}^2 - \{0\}$. We will consider functions on $\mathbf{R}^2 - \{0\}$. The space of all functions on $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ is very large, and contains many subspaces which are invariant under the action (1.1). We will consider the subspaces of functions which are smooth and homogeneous of some degree:

$$(1.2) \quad \mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2 - \{0\}) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^2 - \{0\}) : f(tv) = t^\alpha f(v), t \in \mathbf{R}^{+\times}, v \in \mathbf{R}^2\}$$

for $\alpha \in \mathbf{C}$.

For convenience we will abuse notation and write $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2 - \{0\}) = \mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$. When \mathbf{R}^2 is understood from context we may sometimes abbreviate $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2) = \mathcal{S}^\alpha$.

We observe that $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ can be further decomposed:

$$(1.3) \quad \mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2) = \mathcal{S}^{\alpha^+}(\mathbf{R}^2) \oplus \mathcal{S}^{\alpha^-}(\mathbf{R}^2)$$

into subspaces consisting of functions which are even (respectively, odd) under reflection in the origin.

$$\mathcal{S}^{\alpha^+} = \{f \in \mathcal{S}^\alpha : f(-v) = f(v)\}$$

$$\mathcal{S}^{\alpha^-} = \{f \in \mathcal{S}^\alpha : f(-v) = -f(v)\}$$

We will soon see that, for most α , the spaces $\mathcal{S}^{\alpha^\pm}(\mathbf{R}^2)$ are irreducible as $SL(2, \mathbf{R})$ -modules. For such a family of generically irreducible representations, two questions are of immediate interest:

- For what parameter values α is $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ not irreducible as an $SL(2, \mathbf{R})$ -module, and what is the module structure of \mathcal{S}^α for these α ?
- Which constituents of \mathcal{S}^α can be unitary, i.e., support an $SL(2, \mathbf{R})$ -invariant, positive definite Hermitian form?

The first step in analyzing the structure of the $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ as $SL(2, \mathbf{R})$ modules is to determine their structure as K -modules, where

$$(1.4) \quad K = SO(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R_\theta : \theta \in \mathbf{R} \right\}$$

is the group of rotations, also describable as a maximal compact subgroup of $SL(2, \mathbf{R})$. (Since all maximal compact subgroups of a semisimple Lie group are conjugate, one often, somewhat abusively, speaks of “the” maximal compact subgroup).

We may decompose $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ by means of polar coordinates.

$$(1.5) \quad \mathbf{R}^2 - \{0\} = \left\{ r \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} : r \in \mathbf{R}^{+\times}, \theta \in \mathbf{R} \right\} = \mathbf{R}^{+\times} \times \mathbf{S}^1$$

where $\mathbf{S}^1 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} : \theta \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x^2 + y^2 = 1 \right\}$

is the unit circle in \mathbf{R}^2 . The factorization (1.5) shows that a function f in $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ is determined by its restriction to \mathbf{S}^1 . Furthermore, we know that $SO(2)$ acts transitively on \mathbf{S}^1 . Thus it is natural to express f in $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ in terms of the Fourier series of its restriction to \mathbf{S}^1 . Let us define

$$(1.6) \quad f_{n,\alpha}(x, y) = f_{n,\alpha}(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^\alpha e^{in\theta}.$$

Then the $f_{n,\alpha}$ form a basis, in the sense of topological vector spaces, of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$. Precisely, the standard theory of Fourier series tells us we can write, for f in $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$,

$$(1.7) \quad f = \sum_n a_n f_{n,\alpha}$$

where the series on the right hand side is understood to converge in $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$. The coefficients a_n are of course determined by the familiar formula

$$(1.8) \quad a_n = (f, e^{in\theta})_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \left(\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \right) \overline{e^{in\theta}} d\theta.$$

For our purposes the essential property of the $f_{n,\alpha}$ is that they are eigenfunctions for $SO(2)$:

$$(1.9) \quad \varrho(R_\theta) f_{n,\alpha} = e^{-in\theta} f_{n,\alpha}.$$

Furthermore, the eigencharacters $R_\theta \rightarrow e^{in\theta}$ defined by the $f_{n,\alpha}$, $n \in \mathbf{Z}$, are mutually distinct. It follows that a closed subspace in $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^n)$ which is invariant under $SO(2)$ is spanned by the $f_{n,\alpha}$ which belong to it. In particular, any $SL(2, \mathbf{R})$ -invariant subspace of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ is determined by the $f_{n,\alpha}$ which it contains. Thus we may approach the question of the $SL(2, \mathbf{R})$ -module structure of the $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ by asking, if $f_{n_0,\alpha}$ belongs to a given $SL(2, \mathbf{R})$ -invariant subspace Y , which other $f_{n,\alpha}$ necessarily also belong to Y ? this leads us to investigate how $SL(2, \mathbf{R})$ acts on the $f_{n,\alpha}$.

It is much easier to compute how the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ acts on the $f_{n,\alpha}$. This is computed by differentiating at the identity the action of $SL(2, \mathbf{R})$, according

to the general rule

$$(1.10) \quad \varrho(X)f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varrho(\exp tX)f - f}{t} \quad X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}), f \in \mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2).$$

Concretely, the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ consists of traceless 2×2 matrices:

$$(1.11) \quad \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbf{R} \right\}.$$

It is spanned by the three standard basis elements

$$(1.12) \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

which satisfy the commutation relations

$$[h, e^\pm] = \pm 2e^\pm \quad [e^+, e^-] = h.$$

An easy calculation from definition (1.10) reveals that $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ is represented by first order differential operators as follows:

$$(1.13) \quad \varrho(h) = -x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad \varrho(e^+) = -y \frac{\partial}{\partial x} \quad \varrho(e^-) = -x \frac{\partial}{\partial y}.$$

To calculate how these operators act on the $f_{n,\alpha}$, it is helpful first to express the $f_{n,\alpha}$ in terms of the Cartesian coordinate system. To do this set

$$(1.14) \quad z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2.$$

Then

$$(1.15) \quad r^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

and

$$(1.16) \quad f_{n,\alpha} = z^n (z\bar{z})^{(\alpha-n)/2} = z^{(\alpha-n)/2} \bar{z}^{(\alpha-n)/2}.$$

Using (1.13) and (1.16), we may easily compute

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \varrho(h)f_{n,\alpha} &= - \left(\frac{\alpha-n}{2} \right) f_{n+2,\alpha} - \left(\frac{\alpha+n}{2} \right) f_{n-2,\alpha} \\ \varrho(e^+)f_{n,\alpha} &= \left(\frac{\alpha-n}{2} \right) \frac{i}{2} f_{n+2,\alpha} + i \frac{n}{2} f_{n,\alpha} - \left(\frac{\alpha+n}{2} \right) \frac{i}{2} f_{n-2,\alpha} \\ \varrho(e^-)f_{n,\alpha} &= \left(\frac{\alpha-n}{2} \right) \frac{i}{2} f_{n+2,\alpha} - \frac{in}{2} f_{n,\alpha} - \left(\frac{\alpha+n}{2} \right) \frac{i}{2} f_{n-2,\alpha} \end{aligned}$$

All these formulas have the form

$$(1.18) \quad \varrho(X)f_{n,\alpha} = (\alpha-n)c^+(X)f_{n+2,\alpha} + c^0(X)f_{n,\alpha} + (\alpha+n)c^-(X)f_{n-2,\alpha}.$$

We observe that the coefficient of $f_{n-2,\alpha}$ on the right-hand side of (1.18) is a product with a factor, $c^-(X)$, which depends (linearly) on X but not on α , with another

factor, $\alpha - n$, which depends on α but not on X . This means that $f_{n+2, \alpha}$ is in the span of $\rho(\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}))(f_{n, \alpha})$ if and only if the factor $\alpha - n$ is non-zero. Consequently, we will call $\alpha - n$ the *transition coefficient* for passing from $f_{n, \alpha}$ to $f_{n+2, \alpha}$. Similarly, $\alpha + n$ is the transition coefficient for passing from $f_{n, \alpha}$ to $f_{n-2, \alpha}$.

We can visualize the situation described by equations (1.17) and (1.18) as follows. Represent the $f_{n, \alpha}$ as the set of integral points on the real line. Then formulas (1.17) and (1.18) tell us that from the point n (representing $f_{n, \alpha}$) we can move, by the action of $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, two spaces right or left, to $n + 2$ or $n - 2$, providing the appropriate transition coefficient (written above its transition in Diagram (1.19)) in non-zero.

Diagram (1.19)

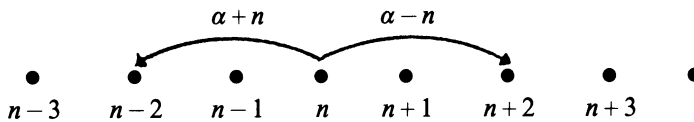


Diagram (1.19) immediately reveals the structure of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ as $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ -module. The fact that from n we move to $n \pm 2$, skipping over $n \pm 1$, reflects the decomposition (1.3) of \mathcal{S}^α into \mathcal{S}^{α^\pm} . In fact we have

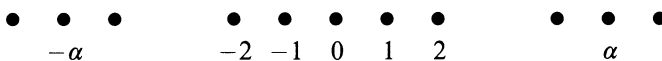
$$(1.20) \quad \mathcal{S}^{\alpha^+}(\mathbf{R}^2) = \text{span} \{f_{2n, \alpha}, n \in \mathbf{Z}\}$$

$$\mathcal{S}^{\alpha^-}(\mathbf{R}^2) = \text{span} \{f_{2n+1, \alpha}, n \in \mathbf{Z}\}$$

We could have from the beginning focussed attention on \mathcal{S}^{α^+} or \mathcal{S}^{α^-} individually. However, we have lumped them together in \mathcal{S}^α because it seems we gain coherence by doing so.

Next we see that, starting from a given $f_{n, \alpha}$, we can move left or right to the adjacent basis elements $f_{n \pm 2, \alpha}$, by action of $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, and we can continue to move both left and right, as long as the transition coefficient is non-zero. In particular if α is not in \mathbf{Z} , neither transition coefficient is ever zero, so from any $f_{n, \alpha}$ one can reach any other $f_{n+2k, \alpha}$, $k \in \mathbf{Z}$, by repeated applications of element of $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. Hence the modules $\mathcal{S}^{\alpha^\pm}(\mathbf{R}^2)$ are each irreducible. If $\alpha \in \mathbf{Z}$, then there is exactly one point ($n = \alpha$) where we can not move right. This point in fact constitutes a barrier to rightward motion from any point to its left: since the action of $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ moves us only one step (in the basis for \mathcal{S}^{α^+} or \mathcal{S}^{α^-}) at a time, we can never move from the left side of $f_{\alpha, \alpha}$ to the right side. Hence the functions $\{f_{\alpha-2j, \alpha}, j \geq 0\}$ span an $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ submodule of \mathcal{S}^{α^+} or of \mathcal{S}^{α^-} , according as α is even or odd. Similar remarks apply to leftward movement and the point $n = -\alpha$. Thus for α in \mathbf{Z}^+ , i.e. α integral and non-negative, we have the situation illustrated in Diagram (1.21).

Diagram (1.21)



Since $-\alpha \equiv \alpha \pmod{2}$, for $\alpha \in \mathbf{Z}$ the barriers at $n = \pm\alpha$ affect the same summand $\mathcal{S}^{\alpha, \pm}(\mathbf{R}^2)$. The affected summand thus breaks into 3 components (one finite-dimensional subrepresentation and two infinite dimensional quotients) while the other summand is irreducible. Thus in all in $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ there are 4 components when $\alpha \in \mathbf{Z}$, with one exception, when $\alpha = -1$. Then $\mathcal{S}^{-1, +}(\mathbf{R}^2)$ is irreducible and the two barriers exactly partition $\mathcal{S}^{-1, -}(\mathbf{R}^2)$ into a sum of two irreducible pieces, as pictured in Diagram (1.22).

Diagram (1.22) $\mathcal{S}^{-1, -}(\mathbf{R}^2)$



We summarize these conclusions in a formal statement.

Proposition (1.23). a) *If $\alpha \notin \mathbf{Z}$, then the summands $\mathcal{S}^{\alpha, \pm}(\mathbf{R}^2)$ of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ are irreducible as $SL(2, \mathbf{R})$ modules.*

b) *If $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\alpha \neq -1$, then one of the $\mathcal{S}^{\alpha, \pm}(\mathbf{R}^2)$ is irreducible, and the other is reducible but indecomposable, breaking into 3 constituents, one of which is finite dimensional.*

c) *$\mathcal{S}^{-1, +}(\mathbf{R}^2)$ is irreducible, and $\mathcal{S}^{-1, -}(\mathbf{R}^2)$ is a direct sum of two submodules, as pictured in Diagram (1.22).*

Remark. In this discussion we have been shifting back and forth without comment between $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ -module structure and $SL(2, \mathbf{R})$ -module structure. That these two structures are the same is guaranteed by an early theorem of Harish-Chandra [HC2], [Kn], [W]. In our case, we can see explicitly that, for example, the finite dimensional submodule of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^n)$, $\alpha \in \mathbf{Z}^+$, discovered as an $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ -submodule, consists of the polynomials of degree α in x and y , and therefore is certainly an $SL(2, \mathbf{R})$ submodule.

Now that the $SL(2, \mathbf{R})$ -module structure of the $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ is understood, we want to determine which of the constituents of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ can define unitary representations. To set the stage for the main computation, we make some preliminary observations.

First, some of the $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ “obviously” define unitary representations. Specifically consider the linear functional

$$(1.23) \quad J(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta.$$

Lemma (1.24). *The restriction of the functional J to $\mathcal{S}^{-2}(\mathbf{R}^2)$ defines an $SL(2, \mathbf{R})$ -invariant linear functional on $\mathcal{S}^{-2}(\mathbf{R}^2)$.*

Proof: If one interprets $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ as the homogeneous space $SL(2, \mathbf{R})/U$ where

$$U = \left\{ \left[\begin{array}{cc} 1 & x \\ 0 & 1 \end{array} \right] : x \in \mathbf{R} \right\}$$

then this becomes a standard fact about the expression of Haar measure on a semisimple Lie group relative to the Iwasawa Decomposition, see [Kn] or [W]. Alternatively, one can directly establish the invariance of J by considering the integral of $f \in \mathcal{S}^{-2}(\mathbf{R}^2)$ over large annuli $S^{-1} \leq \|x\| \leq S$, for $s \rightarrow \infty$, and using the invariance of Lebesgue measure on \mathbf{R}^2 under $SL(2, \mathbf{R})$.

Remark. Accompanying the identification of $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ as a homogeneous space for $SL(2, \mathbf{R})$, we can give a description of the $\mathcal{S}^{\alpha \pm}(\mathbf{R}^2)$ as the standard family of “induced representations” usually called the “principal series” [Kn], [W].

Corollary (1.25). a) *The pairing $(\cdot, \cdot)_1$ defined by*

$$(1.26) \quad (f, \tilde{f})_1 = J(f\tilde{f})$$

defines an $SL(2, \mathbf{R})$ -invariant non-degenerate bilinear pairing between $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ and $\mathcal{S}^{-2-\alpha}(\mathbf{R}^2)$.

b) *The pairing $(\cdot, \cdot)_{\bar{1}}$ defined by*

$$(1.27) \quad (f, \tilde{f})_{\bar{1}} = J(f\tilde{f})$$

where \tilde{f} indicates the complex conjugate of \tilde{f} , defines a non-degenerate $SL(2, \mathbf{R})$ -invariant Hermitian-bilinear pairing between $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ and $\mathcal{S}^{-2-\bar{\alpha}}(\mathbf{R}^2)$. In particular, it defines a positive-definite $SL(2, \mathbf{R})$ -invariant Hermitian inner product on $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ for $\alpha = -1 + it, t \in \mathbf{R}$.

Thus for α of the form $\alpha = -1 + it, \mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ defines a unitary representation. The line $\alpha = -1 + it$ is thus known as the *unitary axis*.

Our second observation is that, for any $SL(2, \mathbf{R})$ -invariant Hermitian form on $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$, the basis elements $f_{n,\alpha}$ must be mutually orthogonal, since they define eigenfunctions for $SO(2)$, and their self inner products $c_{n,\alpha}$ must be real and positive in order to define a unitary representation of $SL(2, \mathbf{R})$.

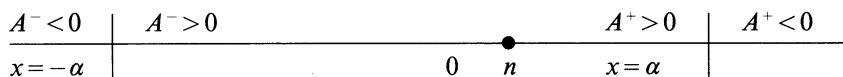
The condition that $(\cdot, \cdot)_\alpha$ be $SL(2, \mathbf{R})$ -invariant can be expressed by requiring that the operators $\rho(X), X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, be skew-Hermitian with respect to $(\cdot, \cdot)_\alpha$ [Kn], [W]. Combining this with formulas (1.17) gives the unitarity condition

$$(1.29) \quad (\alpha - n)c_{n+2,\alpha} + (\bar{\alpha} + n + 2)c_{n,\alpha} = 0.$$

If $\alpha = -1 + it$, then this criterion is satisfied with $c_{n,\alpha} = 1$, as we already know from Corollary (1.25b). If $\text{Re } \alpha \neq -1$, then it is easy to see that criterion (1.29) can not be satisfied for two successive values of n unless α is real.

Thus suppose α is real. Again imagine the $f_{n,\alpha}$ as the integer points on the real line. Think of the transition coefficients $A^+(n) = \alpha - n$ and $A^-(n) = \alpha + n$ as the values at integer points of functions defined on all of \mathbf{R} . Then the points $x = \alpha$ and $x = -\alpha$ are the places where the transition coefficients change sign. A representative configuration with $\alpha > 0$ is illustrated in Diagram (1.30).

Diagram (1.30)



If a transition from n to $n+2$ takes place in the region between the two barriers $A^\pm=0$ then both coefficients $A^-(n)$ and $A^-(n+2)$ have the same sign, and consequently equation (1.29), which can be rewritten.

$$(1.31) \quad \frac{c_{n+2,\alpha}}{c_{n,\alpha}} = - \frac{A^-(n+2)}{A^+(n)}$$

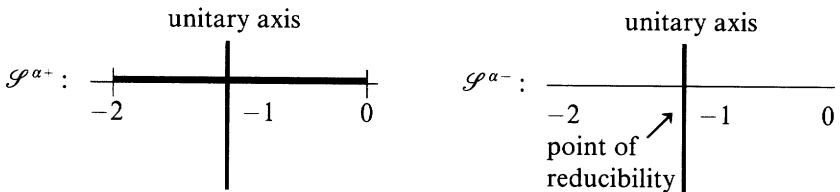
requires that $c_{n-2,\alpha}$ and $c_{n,\alpha}$ have opposite signs, so that not both can be positive. On the other hand, if the transition takes place outside the barriers, then we can solve equation (1.29) with two positive $c_{n,\alpha}$. Study of the geometry of transitions and barriers leads to the following conclusion.

Proposition (1.32). a) *The $SL(2, \mathbf{R})$ modules $\mathcal{S}^{\alpha^-}(\mathbf{R}^2)$ are unitary when $-2 < \alpha < 0$.*

b) *The only real α for which $\mathcal{S}^{\alpha^-}(\mathbf{R}^2)$ is unitary is $\alpha = -1$ (the real point on the unitary axis).*

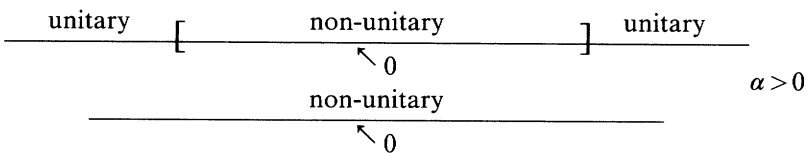
We illustrate this with pictures of the unitary points in the complex plane

Diagram (1.33)



The representations $\mathcal{S}^{\alpha^+}(\mathbf{R}^2)$ for $-2 < \alpha < 0$ are called the *complementary series*. When $\alpha \in \mathbf{Z}$, then one of $\mathcal{S}^{\alpha^\pm}(\mathbf{R}^2)$ is reducible, as described in Diagram (1.21). According to our discussion just before Proposition (1.32), the components outside the barriers do support unitary structures. However the component inside the barrier does not support a unitary structure, except in the exceptional case $\alpha = 0$ (and its dual at $\alpha = -2$), when the component inside the barrier is one-dimensional (and is the trivial module for $SL(2, \mathbf{R})$), so that there are no transitions and the unitarity criterion (1.29) is vacuous. Note that the points $\alpha = 0, -2$ are at the end of the complementary series. The typical situation at point of reducibility ($\alpha \in \mathbf{Z}$) is illustrated in Diagram (1.34).

Diagram (1.34) Unitarity when $\alpha \in \mathbf{Z}^+$



Remarks. a) When $\mathcal{S}^{\alpha,\pm}(\mathbf{R}^2)$ reduces, the two infinite dimensional components can be embedded as summands of $L^2(SL(2, \mathbf{R}))$. They are therefore referred to as *discrete series*.

b) One can show that the various constituents of the $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ in fact constitute all reasonable irreducible representations of $SL(2, \mathbf{R})$ [Kn], [La], [W]. In particular, the constituents which are unitary (i.e., the ones on the unitary axis, known as *principal series*, the complementary series, the discrete series, and the trivial representation) constitute all irreducible unitary representations of $SL(2, \mathbf{R})$. In succeeding sections, we will construct for other groups representations which bear strong analogies to the $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$. However, these representations will in most cases only account for a small portion of all representations of these other groups.

2 $GL(n, \mathbf{R})$

The spaces $\mathcal{S}^{\alpha\pm}(\mathbf{R}^2)$ are invariant not only under $SL(2, \mathbf{R})$ but by all of $GL(2, \mathbf{R})$. In $GL(2, \mathbf{R})$, the maximal compact subgroup is $O(2)$ rather than $SO(2)$. The group $SO(2)$ is the identity component of $O(2)$, and has index 2 in $O(2)$. The non-identity component of $O(2)$ acts on $SO(2)$ by sending R_θ to $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$. Its action on the characters of $SO(2)$ is to interchange $e^{i\theta}$ with $e^{-i\theta}$. Consequently the irreducible representations of $O(2)$ which are non-trivial on $SO(2)$ are two dimensional, and restrict to $SO(2)$ as the direct sum of $e^{i\theta}$ and $e^{-i\theta}$. Thus we can form a picture of the $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^2)$ as $GL(2, \mathbf{R})$ modules by folding the diagrams of § 1 in the middle. For example Diagram (1.21) would become

Diagram (2.1)



Consider now for $p \geq 2$ the spaces $S^\alpha(\mathbf{R}^p)$ (actually consisting of functions on $\mathbf{R}^p - \{0\}$) defined by (direct analogy with) formula (1.2). These spaces have the structure of modules for $GL(p, \mathbf{R})$ by means of the formula (1.1). We will show that their structure as $GL(p, \mathbf{R})$ -modules is also describable by Diagram (2.1).

We have polar coordinates on \mathbf{R}^p as on \mathbf{R}^2 :

$$(2.2) \quad \mathbf{R}^p - \{0\} \simeq \mathbf{R}^{+\times} \times \mathbf{S}^{p-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

where $r^2 = x \cdot x = \sum_{j=1}^p x_j^2 \quad s_j = \frac{x_j}{r}$.

According to the classical theory of spherical harmonics (cf. [He], [Ho], [Zh]), the functions on \mathbf{S}^{p-1} may be expanded in terms of spherical harmonics – the

restrictions of harmonic polynomials to S^{p-1} . Recall the Laplace operator

$$(2.3) \quad \Delta = \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

For each n it defines a mapping

$$(2.4) \quad \Delta : \mathcal{P}^n(\mathbf{R}^p) \rightarrow \mathcal{P}^{n-2}(\mathbf{R}^p)$$

from the space of polynomials on \mathbf{R}^p which are homogeneous of degree n to those which are homogenous of degree $n-2$. The kernel of this mapping is denoted $\mathcal{H}^n(\mathbf{R}^p)$, and called the space of harmonic polynomials of degree n . We have

$$(2.5) \quad C^\infty(S^{p-1}) \simeq \sum_{n \geq 0} \mathcal{H}^n(\mathbf{R}^p)$$

where the direct sum is interpreted topologically; the algebraic direct sum is dense. Combining this with the polar coordinates of equation (2.2), we find that for $f \in \mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^n)$ we have an expansion

$$(2.6) \quad f = \sum_{n \geq 0} h_n(r^2)^{(\alpha-n)/2}$$

where h_n is in $\mathcal{H}^n(\mathbf{R}^p)$, and the series on the right hand side converges in the topology of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^p)$.

The maximal compact subgroup of $GL(p, \mathbf{R})$ is the orthogonal group $O(p)$. The Laplace operator Δ commutes with the action (1.2) of $O(p)$ on $C^\infty(\mathbf{R}_n)$; thus the spaces $\mathcal{H}^n(\mathbf{R}^p)$ of harmonic polynomials are invariant under $O(p)$. It is standard [He], [Ho], [Zh] that the $\mathcal{H}^n(\mathbf{R}^p)$ define mutually distinct, irreducible $O(p)$ -modules. Therefore the decomposition (2.6) describes the $O(p)$ -module structure of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^p)$. In particular, any $GL(n, \mathbf{R})$ -submodule of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^p)$ must be a direct sum of its $O(p)$ -invariant subspaces

$$(2.7) \quad \mathcal{H}^n(\mathbf{R}^p) \otimes (r^2)^{(\alpha-n)/2}$$

whose elements are the terms in the sum in equation (2.6). We will refer to these spaces as K -types (for $K = O(p)$, the maximal compact subgroup of $GL(p, \mathbf{R})$).

To precisely determine the $GL(p, \mathbf{R})$ -module structure, we compute the effect of the Lie algebra $\mathfrak{gl}(p, \mathbf{R})$ on the summands. We have a decomposition (the Cartan Decomposition [Kn], [W])

$$(2.8) \quad \mathfrak{gl}(p, \mathbf{R}) \simeq \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

where \mathfrak{k} is the skew-symmetric matrices, the Lie algebra of $O(p)$, and \mathfrak{p} is the symmetric matrices. Since \mathfrak{k} preserves the spaces (2.7), we need only look at the effect of \mathfrak{p} . This space is spanned by the operators.

$$(2.9) \quad \mathcal{P}_{jk} = x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_j} \quad 1 \leq j, k \leq n$$

Select $h \in \mathcal{H}^n(\mathbf{R}^p)$. We may compute (and the reader may wish to check) that when $j \neq k$,

$$(2.10) \quad \mathcal{P}_{jk}(h(r^2)^{(\alpha-n)/2}) = (\alpha - n)\mathcal{P}_{jk}^+(h)(r^2)^{(\alpha-n)/2-1} \\ + (\alpha + p/2)\mathcal{P}_{jk}^0(h)(r^2)^{(\alpha-n)/2} \\ + (\alpha + n + p - 2)\mathcal{P}_{jk}^-(h)(r^2)^{(\alpha-n)/2+1}$$

where $\mathcal{P}_{jk}^+(h) = 2 \left[x_j x_k h - \frac{r^2 \left(x_j \frac{\partial h}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial h}{\partial x_j} \right)}{2n + p} + \frac{r^4 \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k}}{(2n + p)(2n - 2 + p)} \right]$

$$\mathcal{P}_{jk}^0(h) = \frac{2}{2n + p} \left[x_j \frac{\partial h}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{2r^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k}}{(2n - 4 + p)} \right]$$

$$\mathcal{P}_{jk}^-(h) = \frac{2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k}}{(2n - 2 + p)(2n - 4 + p)}$$

These are harmonic polynomials of degrees $n + 2$, n and $n - 2$ respectively.

As in the case of $SL(2, \mathbf{R})$, the dependence on α of each of the 3 terms on the right and side of equation (2.10) is completely contained in the scalar “transition coefficient” $\alpha - n$, $\alpha + p/2$, or $\alpha + n + p - 2$. The polynomials $\mathcal{P}_{jk}^+(h)$, $\mathcal{P}_{jk}^0(h)$, and $\mathcal{P}_{jk}^-(h)$ are independent of α .

It follows immediately from formula (2.10) that the summands $\mathcal{S}^{\alpha, \pm}(\mathbf{R}^p)$ of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^p)$ (cf. equation (1.3) – again we are using notation parallel to that used for $SL(2, \mathbf{R})$ in § 1) are both irreducible if α is not an integer, and that if $\alpha \in \mathbf{Z}^+$, then exactly one of the $\mathcal{S}^{\alpha, \pm}(\mathbf{R}^p)$ is reducible, with two constituents, one finite dimensional subrepresentation and one infinite dimensional quotient, as illustrated in Diagram (2.1).

However, there are also differences worth noting. To discuss them we should note that the unitary axis is now at $\text{Re } \alpha = -p/2$. The reasoning establishing it is parallel to the case of $p = 2$: one observes that the linear functional defined by

$$(2.11) \quad J(f) = \int_{\mathbf{S}^{p-1}} f(s) ds,$$

where ds is the $O(p)$ -invariant probability measure on \mathbf{S}^{p-1} , defines an $SL(p, \mathbf{R})$ -invariant functional on $\mathcal{S}^{-p}(\mathbf{R}^p)$. From this we derive an $SL(p, \mathbf{R})$ -invariant pairing between $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^p)$ and $\mathcal{S}^{-\alpha-p}(\mathbf{R}^p)$ by means of multiplication followed by J , as in formula (1.27).

Now we may observe that for $p \geq 3$, both components $\mathcal{S}^{\alpha, \pm}(\mathbf{R}^p)$ are irreducible in the interval $-p < \alpha < 0$ around the real point on the unitary axis. This is true for $GL(2, \mathbf{R})$, but not for $SL(2, \mathbf{R})$; but for $p > 2$, irreducibility persists under restriction to $SL(p, \mathbf{R})$. However, the main point is that for $p \geq 3$, this “interval of irreducibility” around the unitary axis is longer than the normal gap between

points of reducibility outside this interval. In terms of the description of irreducibility in terms of the moving barriers, we can say that, according to formulas (2.10), the barriers are at $x = \alpha$ and $x = -(\alpha + p - 2)$, and the separation between these barriers increases as p increases. Thus when α becomes less than zero, the barrier at $x = \alpha$ leaves the positive half-line where the K -types are located, and the second barrier does not enter the positive half-line until $\alpha = 2 - p$, and does not cause reducibility until $\alpha = -p$.

A second difference between $p = 2$ and $p > 2$ arises from the term $\mathcal{P}_{jk}^0(h)$. This term may be checked to vanish identically when $p = 2$, but can be non-zero when $p > 2$ and $n > 0$. The transition coefficient for this term, $\alpha + p/2$, is independent of n , the degree of h . Furthermore, unitarity requires that this coefficient be pure imaginary, which can only happen if $\operatorname{Re} \alpha = -p/2$; i.e., on the unitary axis. Hence we conclude: off the unitary axis, no constituents of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^p)$ can be unitary, except for the trivial representation $\mathcal{S}^0(\mathbf{R}^p)$ or $\mathcal{S}^{-p}(\mathbf{R}^p)$. In particular, there is no complementary series.

3 $GL(p, \mathbf{C})$

We perform an analysis parallel to that of § 2 for $GL(p, \mathbf{C})$ instead of $GL(p, \mathbf{R})$. Many aspects of the discussion are very similar, so we will be brief, and emphasize the differences.

The first point to be clear on is what is to be meant by "homogeneous" in this situation. The spaces $\mathcal{S}^{\alpha \pm}(\mathbf{R}^p)$ are precisely the eigenspaces for \mathbf{R}^\times , which is the centralizer of $GL(p, \mathbf{R})$ in $GL(p, \mathbf{R})$. The centralizer of $GL(p, \mathbf{C})$ is \mathbf{C}^\times ; this suggests that we should look at the eigenspaces of \mathbf{C}^\times in $C^\infty(\mathbf{C}^p - \{0\})$. We have a decomposition

$$(3.1) \quad \mathbf{C}^\times \simeq \mathbf{R}^{+\times} \times \mathbf{T}$$

$$\text{where } z \rightarrow \left(|z|, \frac{z}{|z|} \right)$$

$$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$$

is the unit circle in \mathbf{C} (and isomorphic to $SO(2)$). We can specify a character of \mathbf{C}^\times by specifying its restriction to the two factors in (3.1):

$$(3.2a) \quad \psi(z) = |z|^a \left(\frac{z}{|z|} \right)^n \quad a \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{Z}$$

If we write

$$|z| = (z\bar{z})^{1/2}$$

then, at least formally, (3.2) is equivalent to

$$(3.2b) \quad \psi(z) = z^{(a+n)/2} \bar{z}^{(a-n)/2}$$

(cf. formula (1.16)). We can also write

$$(3.2c) \quad \psi(z) = z^\alpha \bar{z}^\beta$$

where $\alpha = (a + n)/2 \quad \beta = (a - n)/2$.

A pair (α, β) can arise in (3.2c) if and only if $\alpha - \beta$ is an integer. With this convention we consider the spaces

$$(3.3) \quad \mathcal{S}^{\alpha, \beta}(\mathbb{C}^p) = \{f: (\mathbb{C}^p - \{0\}) \rightarrow \mathbb{C} : f(zv) = z^\alpha \bar{z}^\beta f(v); v \in \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{C}^\times\}$$

for $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ such that $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$. We call this space of functions the homogeneous functions of *bidegree* (α, β) .

Bidegree has a natural interpretation for polynomials. Let z_1, z_2, \dots, z_p be the standard complex coordinates on \mathbb{C}^p . Then the z_j and the \bar{z}_i generate the algebra $\mathcal{P}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p)$ of non-holomorphic polynomials on \mathbb{C}^n . We may decompose $\mathcal{P}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p)$ into spaces of homogeneous functions of bidegree (a, b) , with $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

$$(3.4) \quad \mathcal{P}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p) \simeq \sum_{a, b \geq 0} \mathcal{P}^{a, b}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p)$$

The space $\mathcal{P}^{a, b}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p)$ is the span of products of polynomials which are of degree a in the z_j with polynomials of degree b in the \bar{z}_j .

The maximal compact subgroup of $GL(p, \mathbb{C})$ is the unitary group $U(n)$, which is the group which leaves invariant the Euclidean length, or its square

$$(3.5) \quad r^2 = \sum_{j=1}^p z_j \bar{z}_j.$$

Dual to r^2 is the Laplace operator

$$(3.6) \quad \Delta = 4 \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_j \partial z_j}.$$

Since Δ is homogeneous of degree $(-1, 1)$, it maps $\mathcal{P}^{a, b}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p)$ to $\mathcal{P}^{a-1, b+1}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p)$. It follows that the space of harmonic polynomials decomposes into a sum of its bihomogeneous subspaces:

$$(3.7) \quad \mathcal{H}^n(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p) \simeq \sum_{a+b=n} \mathcal{H}^{a, b}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p).$$

In analogy with the standard case of the action of $O(p)$ on $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^p)$, it is known (see [Ho]) that the $\mathcal{H}^{a, b}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p)$ define irreducible, mutually inequivalent representations of $U(p, q)$.

If $h \in \mathcal{H}^{a, b}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p)$, and $\alpha - \beta = a - b$, then $f = h(r^2)^{(\alpha-a)}$ belongs to $\mathcal{S}^{\alpha, \beta}(\mathbb{C}^p)$. This gives us an expansion analogous to formula (2.6) for arbitrary functions in $\mathcal{S}^{\alpha, \beta}(\mathbb{C}^p)$, and gives us the description

$$(3.8) \quad \mathcal{S}^{\alpha, \beta}(\mathbb{C}^p) \simeq \sum_{a-b=\alpha-\beta} \mathcal{H}^{a, b}(\mathbb{C}_\mathbb{R}^p) \otimes (r^2)^{\alpha-a}$$

of $\mathcal{S}^{\alpha, \beta}$ as a $U(n)$ -module. We say that the $\mathcal{H}^{a, b}$ with $a - b = \alpha - \beta$ constitute the K -types of $\mathcal{S}^{\alpha, \beta}$.

By using the real and imaginary parts of z_j as coordinates, we can identify \mathbf{C}^p with \mathbf{R}^{2p} . This gives us an embedding $GL(p, \mathbf{C}) \rightarrow GL(2p, \mathbf{R})$. This embedding takes $U(p)$ to a subgroup of $O(2p)$. Also we see that

$$(3.9) \quad \mathcal{S}^\gamma(\mathbf{R}^{2p}) \simeq \sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma \\ \alpha-\beta \in \mathbf{Z}}} \mathcal{S}^{\alpha,\beta}(\mathbf{C}^p).$$

Thus the action of $GL(p, \mathbf{C})$ on $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}(\mathbf{C}^p)$ is obtained by restricting the action of $GL(2p, \mathbf{R})$ on $\mathcal{S}^\gamma(\mathbf{R}^{2p})$. In particular, an analog of formula (2.10) is valid. Set

$$(3.10) \quad \tilde{\mathcal{P}}_{jk} = z_j \frac{\partial}{\partial z_k} + z_k \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.$$

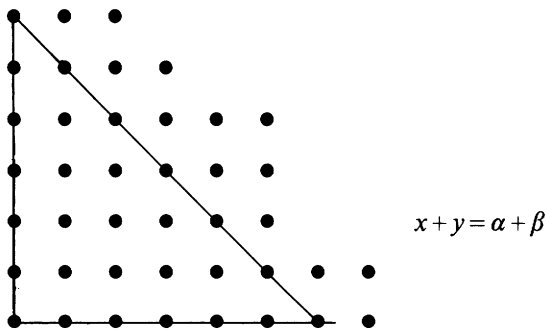
Then if $h \in \mathcal{H}^{a,b}(\mathbf{C}^p)$, we have

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{jk}(h(r^2)^{\alpha-a}) &= (\alpha + \beta - a - b) \tilde{\mathcal{P}}_{jk}^+(h)(r^2)^{\alpha-a-1} \\ &\quad + (\alpha + \beta + p) \tilde{\mathcal{P}}_{jk}^0(h)(r^2)^{\alpha-a} \\ &\quad + (\alpha + \beta + a + b + 2p - 2) \tilde{\mathcal{P}}_{jk}^-(h)(r^2)^{\alpha-a+1} \end{aligned}$$

where $\tilde{\mathcal{P}}_{jk}^+(h) \in \mathcal{H}^{a+1,b+1}(\mathbf{C}^p)$, $\tilde{\mathcal{P}}_{jk}^0(h) \in \mathcal{H}^{a,b}(\mathbf{C}^p)$, and $\tilde{\mathcal{P}}_{jk}^-(h) \in \mathcal{H}^{a-1,b-1}(\mathbf{C}^p)$ are all independent of α and β .

On the basis of formula (3.11) we can think of reducibility as follows. Represent the various K -types $\mathcal{H}^{a,b}(\mathbf{C}_R^p)$ as integral points in the positive quarter plane.

Diagram (3.12)



The K -types that occur in a given $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}(\mathbf{C}^p)$ then correspond to the points lying along the diagonal line $y = x + \alpha - \beta$. The point where the transition coefficient

$$A^+(x, y) = \alpha + \beta - x - y$$

vanishes is an antidiagonal line, which will intersect the positive quarter plane if $\alpha + \beta \geq 0$. If the intersection of the antidiagonal $A^+(x, y) = 0$ with the diagonal line $y = x + \alpha - \beta$, is $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ then the K -types of $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}$ to the south west of the point of intersection will span a $GL(p, \mathbf{C})$ submodule of $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}$. (When $\alpha, \beta \geq 0$, this happens precisely when α, β are integers).

If we fix $\alpha - \beta$ and look at $\mathcal{S}^{\alpha, \beta}(\mathbf{C}^p)$ as $\alpha + \beta$ varies, then the above picture suggests we should represent the K -types $\{\mathcal{H}^{a, b}(\mathbf{C}^p) : a - b = \alpha - \beta\}$ as the integer points on the positive half line $\{x \geq \alpha - \beta\}$. If we do so, then the picture of reducibility is just as for $GL(2p, \mathbf{R})$, except the fact that the K -types do not start until $|\alpha - \beta|$ means that there is a longer interval of irreducibility: $\mathcal{S}^{\alpha, \beta}(\mathbf{C}^p)$ is irreducible in the interval

$$-2p - |\alpha - \beta| < \alpha + \beta < |\alpha - \beta|,$$

which can be arbitrarily long, even when p is fixed.

The unitary axis is at $\text{Re}(\alpha + \beta) = -p$, and, when $p > 2$, just as for $GL(2p, \mathbf{R})$, there are no unitary constituents off the unitary axis, except for the trivial representation (which occurs when $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ or $(-p, -p)$).

4 $O(p, q)$

Here is our main example. It is more complex than those of the preceding sections (though still quite simple), but it will be seen that the same principles that were used to analyze the structure of the examples in § 1-3 apply here also.

Consider \mathbf{R}^{p+q} . We write points of \mathbf{R}^{p+q} as pairs (x, y) with $x \in \mathbf{R}^p, y \in \mathbf{R}^q$. On \mathbf{R}^{p+q} we consider the indefinite quadratic form

$$(4.1) \quad r_{p, q}^2(x, y) = r_p^2(x) - r_q^2(y) = \sum_{j=1}^p x_j^2 - \sum_{k=1}^q y_k^2.$$

Let $O(p, q) \subseteq GL(p+q, \mathbf{R})$ denote the group of isometries of $r_{p, q}^2$. It acts on \mathbf{R}^{p+q} , and hence acts on functions on \mathbf{R}^{p+q} , or on any subset of \mathbf{R}^{p+q} that is left invariant by $O(p, q)$, by means of the formula (1.1). Let

$$(4.2) \quad X^0 = \{(x, y) : r_{p, q}^2(x, y) = 0\} = \{(x, y) : r_p^2(x) = r_q^2(y)\}$$

be the “light cone” – the cone of null-vectors for $r_{p, q}^2$. It is clearly invariant under $O(p, q)$. It is well-known (a corollary, but also a basic ingredient of the proof, of Witt’s Theorem [Ja]) that $X^0 - \{0\}$ is a homogeneous space for $O(p, q)$. Let $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ denote the space of functions on $X^0 - \{0\}$ which are homogeneous of degree α :

$$(4.3) \quad \mathcal{S}^\alpha(X^0) = \{f \in C^\infty(X^0 - \{0\}) : f(tv) = t^\alpha f(v), t \in \mathbf{R}^{+\times}, v \in X^0\}.$$

The spaces are clearly mapped to themselves by the action of $O(p, q)$ on functions. We want to describe the spaces $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ as $O(p, q)$ -modules. Our strategy follows the common pattern illustrated in the preceding examples: first determine the module structure for the maximal compact subgroup, then study the action of the Lie algebra on the irreducible K -submodules. For the bulk of this discussion we will take $p, q \geq 2$. We will indicate at the end what happens if p or q equals 1.

Consider the subgroup of $O(p, q)$ which leaves all points of the form $(0, y) \in \mathbf{R}^{p+q}$ fixed. If we look only at what this group does to the points $(x, 0)$, we see it is isomorphic to $O(p)$. Hence we denote it simply by $O(p)$. Similarly the group which fixes each point of the form $(x, 0)$ is denoted $O(q)$. The product $O(p) \times O(q)$ is a maximal compact subgroup of $O(p, q)$.

We can introduce polar coordinates on X^0 :

$$(4.4) \quad X^0 - \{0\} \simeq \mathbf{R}^{+\times} \times S^{p-1} \times S^{q-1}$$

$$(x, y) \rightarrow \left(r_p^2(x)^{1/2}, \frac{x}{r_p^2(x)^{1/2}}, \frac{y}{r_p^2(x)^{1/2}} \right)$$

where S^{p-1} denotes the unit sphere in \mathbf{R}^p , and similarly for S^{q-1} . The set $S^{p-1} \times S^{q-1} \subseteq X^0 \subseteq \mathbf{R}^{p+q}$ is a single orbit for $O(p) \times O(q)$. Clearly each element of $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ is determined by its restriction to $S^{p-1} \times S^{q-1}$. Hence we can determine the $O(p) \times O(q)$ module structure of $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ by a slight extension of our procedure in § 2. Denote by $\mathcal{H}^{n,m,\alpha}(\mathbf{R}^{p+q})$ the linear span of functions of the form

$$(4.5) \quad h_1(x)h_2(y)(r_p^2)^{(\alpha-n-m)/2} \quad h_1 \in \mathcal{H}^n(\mathbf{R}^p), h_2 \in \mathcal{H}^m(\mathbf{R}^q).$$

It is easy to see that, first

$$(4.6) \quad \mathcal{S}^\alpha(X^0) \simeq \sum_{n,m \geq 0} \mathcal{H}^{n,m,\alpha}(\mathbf{R}^{p+q}),$$

and second, the space $\mathcal{H}^{n,m,\alpha}(\mathbf{R}^{p+q})$ is an irreducible $O(p) \times O(q)$ module, isomorphic to the tensor product $\mathcal{H}^n(\mathbf{R}^p) \otimes \mathcal{H}^m(\mathbf{R}^q)$. Thus equation (4.6) describes the decomposition of $\mathcal{S}^\alpha(X)$ into irreducible representations for $O(p) \times O(q)$ (the K -type decomposition). Any $O(p, q)$ -submodule of $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ will be a sum of those $\mathcal{H}^{n,m,\alpha}(\mathbf{R}^{p+q})$ which are contained in the submodule.

We next compute the action of the Lie algebra $\mathfrak{o}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ on the spaces $\mathcal{H}^{n,m,\alpha}(\mathbf{R}^{p+q})$. In analogy with decomposition (2.8) we may write

$$(4.7) \quad \mathfrak{o}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \simeq \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1$$

where $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{o}(\mathfrak{p}) \times \mathfrak{o}(\mathfrak{q})$ is the Lie algebra of $O(p) \times O(q)$, and \mathfrak{p}_1 is the intersection of $\mathfrak{o}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ with the symmetric matrices. Since \mathfrak{k}_1 preserves the $\mathcal{H}^{n,m,\alpha}$, it will be enough for us to compute the action of \mathfrak{p}_1 . A basis for \mathfrak{p}_1 is provided by the collection of operators

$$(4.8) \quad \hat{\mathcal{P}}_{jk} = x_j \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial}{\partial x_j}$$

We take f as in equation (4.5) and compute

$$(4.9) \quad \hat{\mathcal{P}}_{jk}(h_1 h_2 (r_p^2)^{(\alpha-n-m)/2}) = (\alpha - n - m) \hat{\mathcal{P}}_j^+(h_1) \hat{\mathcal{P}}_k^-(h_2) (r_p^2)^{\alpha-1}$$

$$+ (\alpha + n - m + p - 2) \hat{\mathcal{P}}_j^-(h_1) \hat{\mathcal{P}}_k^+(h_2) (r_p^2)^\alpha$$

$$+ (\alpha - n + m + q - 2) \hat{\mathcal{P}}_j^+(h_1) \hat{\mathcal{P}}_k^-(h_2) (r_p^2)^\alpha$$

$$+ (\alpha + n + m + p + q - 4) \hat{\mathcal{P}}_j^-(h_1) \hat{\mathcal{P}}_k^-(h_2) (r_p^2)^{\alpha+1}$$

where $a = (\alpha - n - m)/2$, and

$$\hat{\mathcal{P}}_j^+(h_1) = x_j h_1 - \frac{r_p^2 \frac{\partial h_1}{\partial x_j}}{(2n - 2 + p)} \quad \hat{\mathcal{P}}_j^-(h_1) = \frac{\frac{\partial h_1}{\partial x_j}}{2n - 2 + p}$$

$$\hat{\mathcal{P}}_k^+(h_2) = y_k h_2 - \frac{r_q^2 \frac{\partial h_2}{\partial y_k}}{2m - 2 + q} \quad \hat{\mathcal{P}}_k^-(h_2) = \frac{\frac{\partial h_2}{\partial y_k}}{2m - 2 + q}.$$

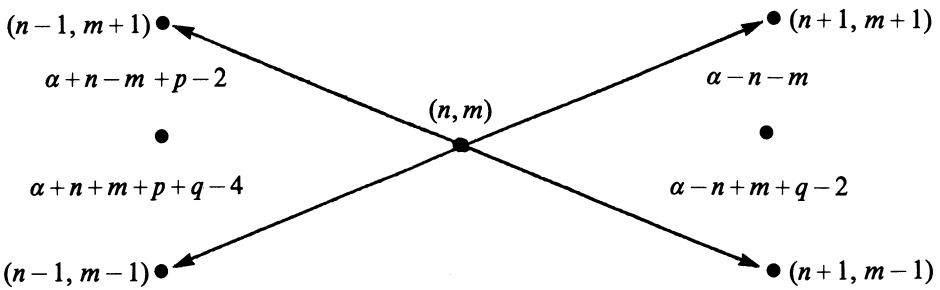
The reader may wish to check these formulas. We see that the 4 terms on the right hand side of equation (4.9) are in $\mathcal{H}^{n+1, m+1, \alpha}(\mathbf{R}^{p+q})$, $\mathcal{H}^{n-1, m+1, \alpha}(\mathbf{R}^{p+q})$, $\mathcal{H}^{n+1, m-1, \alpha}(\mathbf{R}^{p+q})$, and $\mathcal{H}^{n-1, m-1, \alpha}(\mathbf{R}^{p+q})$ respectively. As in our previous examples, the only dependence of these terms on α is via the transition coefficients

$$(4.10) \quad A^{++}(x, y) = \alpha - x - y \quad A^{+-}(x, y) = \alpha + x + y + p + q - 4$$

$$A^{-+}(x, y) = \alpha + x - y + p - 2 \quad A^{--}(x, y) = \alpha - x + y + q - 2$$

We may from a picture of the structure implied by formula (4.9) by a procedure similar to that of earlier sections. Represent the K -types $\mathcal{H}^{n, m, \alpha}$ as integer points (n, m) in the positive quarter plane. (It is here that we use our assumption that $p, q \geq 2$; when $q = 1$, $\mathcal{H}^m(\mathbf{R}^q) = \{0\}$ for $n > 1$.) Formula (4.9) tells us that from the point (n, m) , by one application of $\mathfrak{o}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ we can typically hope to move to any one of the four points $(n \pm 1, m \pm 1)$. For a particular value of α , our hope to move to a particular one of these points will be realized, providing the corresponding transition coefficient does not vanish. We illustrate the possible transitions, indicating the transition coefficients.

Diagram (4.11)



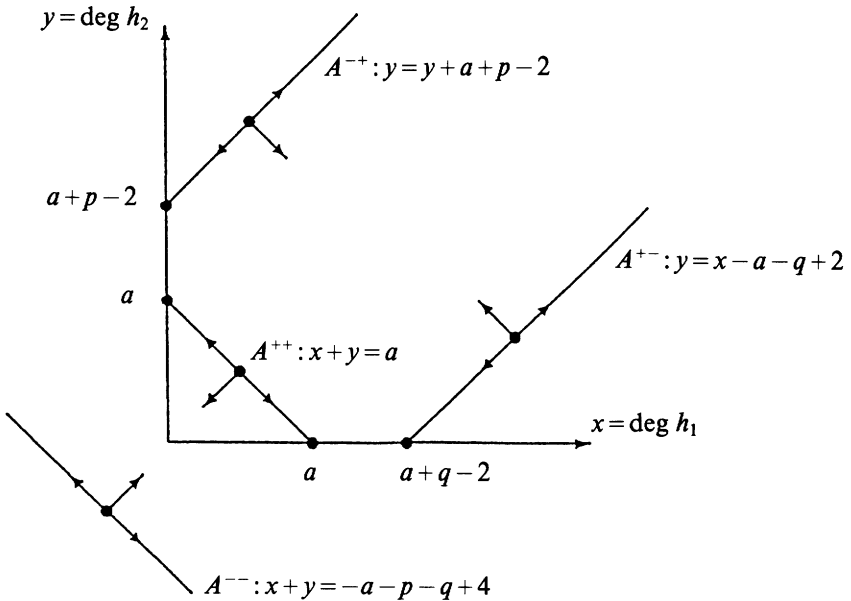
We observe first, that from a given point (n, m) we can move only to points (n', m') such that $n' + m' \equiv n + m \pmod{2}$. This reflects the decomposition, parallel to that of § 1, 2,

$$(4.12) \quad \mathcal{S}^\alpha(X^0) = \mathcal{S}^{\alpha^+}(X^0) \oplus \mathcal{S}^{\alpha^-}(X^0)$$

of $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ into the subspaces of elements which are even, or which are odd, under reflection in the origin.

We see also that we may move from (n, m) up and right to $(n + 1, m + 1)$, provided that the transition coefficient $A^{++}(n, m) = \alpha - n - m$ does not vanish. If it does vanish, then we can only move left and down, to $(n - 1, m - 1)$, or along the antidiagonal to $(n, m) \pm (1, -1)$. The antidiagonal is exactly the zero locus of A^{++} , so that we cannot move up and right from $(n, m) \pm (1, -1)$ either. Further reasoning along these lines convinces one that the line $A^{++}(x, y) = 0$ constitutes a barrier to motion up and right from the points (m, n) which lie on it, and gives rise to a submodule of $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$. Similar considerations apply to each of the transition coefficients. We may envision the situation as follows: the lines $A^{\pm\pm}(x, y)$ create “virtual barriers” which, when they pass through integral points prevent movement from one region of integral points to another, and so create submodules of $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$. By abuse of language, we will sometimes use $A^{\pm\pm}$ to refer to one of the transition coefficients (4.10), and sometimes to refer to the associated barrier. Context should make clear which is meant. The position of these barriers to typical $a \in \mathbb{Z}^+$ is illustrated in Diagram (4.13).

Diagram (4.13) Barriers for $O(p, q)$

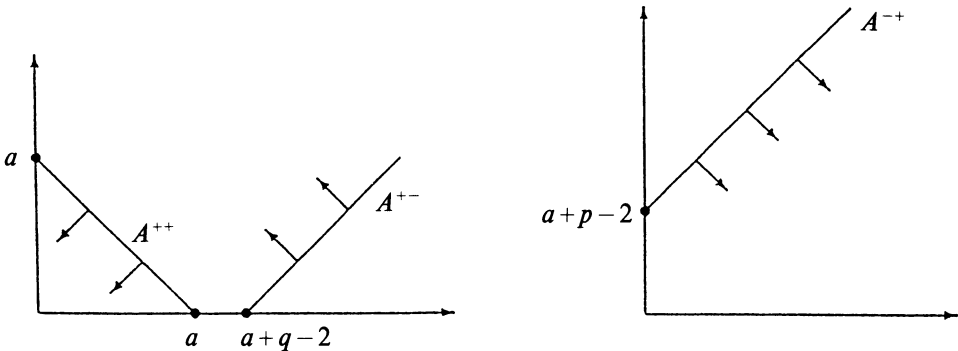


The arrows on the barriers indicate the direction of the submodules they create. As α varies, the barriers move in such a way that the gap between the intersections of the A^{++} and A^{+-} barriers with the x -axis is always $q - 2$, and the gap between the intersections of the A^{+-} and A^{-+} barriers with the y -axis is always $p - 2$. Note that the A^{+-} and A^{-+} barriers always intersect the positive quadrant, but that the A^{++} barrier does so only when $\alpha \geq 0$, and the A^{-+} barrier only when $\alpha \geq -(p + q - 4)$. Thus there is an interval $0 > \alpha > -(p + q - 4)$ in which only the A^{+-} and A^{-+} barriers intersect the positive quadrant.

When α is not an integer, all the barriers miss the integral points representing the K -types, so motion between any two K -types in the same component $\mathcal{S}^{\alpha\pm}(X^0)$ of $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ is possible, so each component is irreducible. However, if α is an integer then all the barriers which intersect the positive orthant will go through integer points and so will create a submodule of one of the $\mathcal{S}^{\alpha\pm}(X^0)$. The resulting submodule structure depends on which barriers affect which of the two components $\mathcal{S}^{\alpha\pm}(X^0)$, and because the relative positions of the barriers depend on p and q (see Diagram (4.13)), the submodule structure depends on p and q . The qualitative features of the submodule structure depends most heavily on the parities of p and q . We will describe briefly the different possibilities.

Case A: p odd, q even. In this case the barriers A^{++} and A^{--} affect one of the $\mathcal{S}^{\alpha\pm}$, while A^{+-} and A^{-+} affect the other. The situation looks like this when $\alpha \geq 0$.

Diagram (4.14)



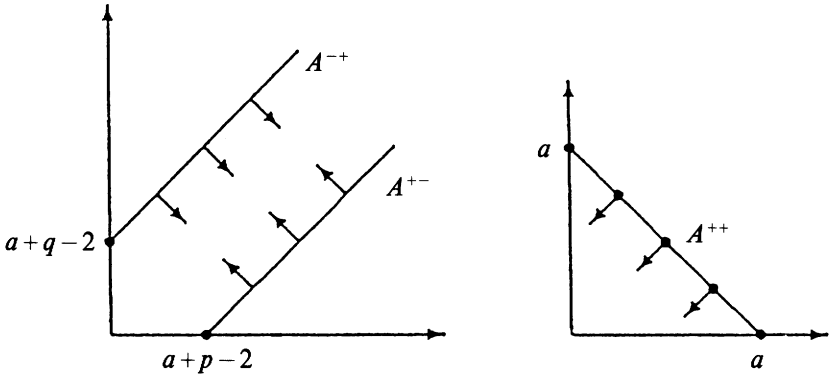
The Hasse diagram [St] of The submodule lattice of \mathcal{S}^α in this case is



Case B: p even, q odd. This case is, mutatis mutandis, the same as Case A. The barriers A^{++} and A^{--} affect one of $\mathcal{S}^{\alpha\pm}$, while A^{+-} and A^{-+} affect the other.

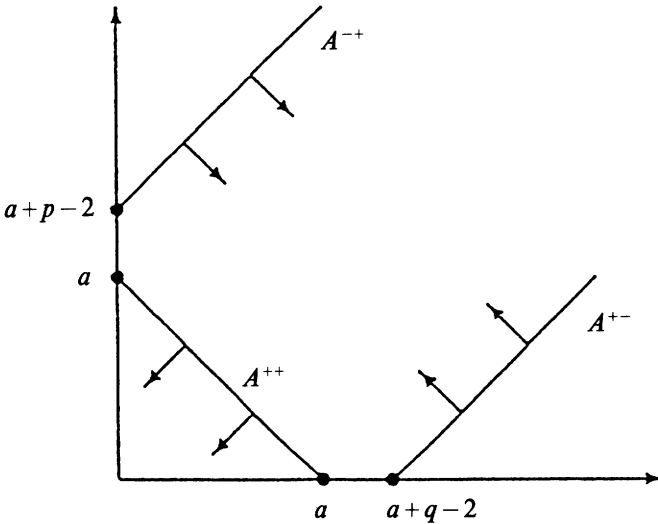
Case C: p odd, q odd. In this case the barriers A^{+-} and A^{-+} work together, while A^{++} and A^{--} affect the other component. The typical situation when $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ looks like this:

Diagram (4.15)



Case D: p even, q even. In this case all four barriers affect one of the $\mathcal{S}^{\alpha\pm}$, and the other is irreducible. The case of $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ is

Diagram (4.16)



The submodule diagrams are

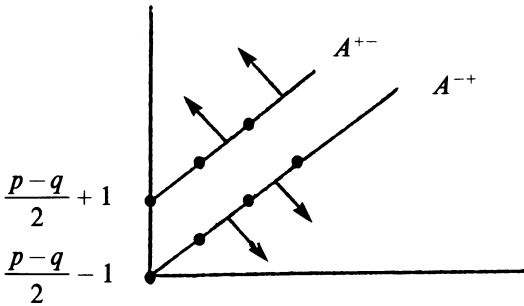


Remarks. a) Which of the $\mathcal{S}^{\alpha\pm}$ is affected by which barriers depends on the parities of α, p and q . When α increases by 1, the two types of module structures

change places. If for one value of α , the left hand picture in Diagram (4.14), (4.15) or (4.16) describe $\mathcal{S}^{\alpha+}$ and the right hand picture describes $\mathcal{S}^{\alpha-}$, then the right hand picture describe $\mathcal{S}^{(\alpha+1)+}$, and the left hand picture describes $\mathcal{S}^{(\alpha+1)-}$.

b) Although the $O(p, q)$ -module structure of \mathcal{S}^α varies drastically with the parities of p and q , there are always 5 constituents when $\alpha \in \mathbf{Z}^+$. When $\alpha \in \mathbf{Z}$, and $0 > \alpha > 2 - (p+q)$ the barriers A^{++} and A^{--} have no effect, and there are only 4 constituents. In fact, in one exceptional case, there are only 3 constituents: if $p+q$ is even, then for $\alpha = 1 - (p+q)/2$ the barriers A^{+-} and A^{-+} exactly partition the relevant $O(p) \times O(q)$ representation in two disjoint pieces, as illustrated here.

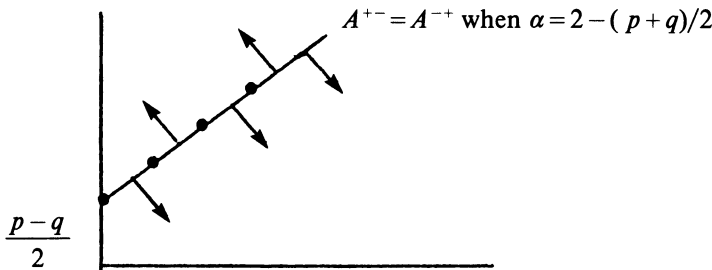
Diagram (4.17)



This is the only $\alpha \in \mathbf{Z}$ at which \mathcal{S}^α is completely reducible. We will see shortly that it is the real point on the unitary axis.

c) An interesting feature of the $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$, $\alpha \in \mathbf{Z}$, when $p+q$ is even, is the constituent containing the K -types between the barriers A^{+-} and A^{-+} . It is infinite dimensional but is in some sense “smaller” than the two components whose K -types are outside the barriers. One precise measure of such size is the Gelfand-Kirillov dimension [Bo], [GK]. These constituents have Gelfand-Kirillov dimension $p+q-3$, rather than $p+q-2$, which is the Gelfand-Kirillov dimension of $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$. This constituent is especially interesting for $\alpha = 2 - (p+q)/2$. For this value of α , the barriers A^{+-} and A^{-+} coincide, and create an $O(p, q)$ module with a single line of $O(p) \times O(q)$ modules. This is illustrated in Diagram (4.18).

Diagram (4.18)



We will see shortly that this representation is unitary. From [Li], [Ho2] we can conclude that when p and q are least 4, this and its tensor products with one-dimensional characters are the only unitary $O(p, q)$ representations of Gelfand-Kirillov dimension $p + q - 3$. It has been studied in [On], [Fr], and for $O(4, 2)$ it is of interest in physics, in connection with the “hidden symmetries” of the Kepler problem [En], [ON], [Fr].

We now study unitarity. As in the situations studied in §§ 1–3, there is an invariant functional leading to a canonical pairing between certain of the \mathcal{S}^α , leading to a unitary axis. Consider the functional

$$(4.19) \quad \hat{J}_1(f) = \int_{S^{p-1} \times S^{q-1}} f(x_1, y_1) dx_1 dy_1$$

defined by integration of f with respect to the $O(p) \times O(q)$ -invariant probability measure on $S^{p-1} \times S^{q-1}$. This defines an $O(p, q)$ -invariant functional on $\mathcal{S}^{2-p-q}(X^\alpha)$. Therefore the bilinear form

$$(4.20) \quad (f_1, f_2)^\wedge = \hat{J}_1(f_1 f_2)$$

defines a non-degenerate $O(p, q)$ -invariant pairing between $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ and $\mathcal{S}^\beta(X^0)$ where $\beta = 2 - p - q - \alpha$. If we replace f_2 with \bar{f}_2 , the complex conjugate of f_2 , we get a non-degenerate positive-definite Hermitian inner product on \mathcal{S}^α when $\alpha = 1 - (p + q)/2 + it$, $t \in \mathbf{R}$. Let us call the Hermitian version of form (4.20) the *standard inner product*.

We now ask when we can have a unitary structure on all or part of $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ when α is off the unitary axis. Since the $\mathcal{H}^{n,m,\alpha}$ are irreducible as $O(p) \times O(q)$ representations, the restriction of any $O(p, q)$ -invariant inner product of $\mathcal{H}^{n,m,\alpha}$ is a multiple $c_{n,m,\alpha}$ of the standard inner product. Since the $\mathcal{H}^{n,m,\alpha}$ are also mutually inequivalent, they must be orthogonal for any $O(p, q)$ invariant inner product. Hence the proposed invariant inner product is determined by the collection of scalars $c_{n,m,\alpha}$.

The criterion for unitarity is that the operators $\hat{\mathcal{P}}_{jk}$ described in formulas (4.8) and (4.9) should be skew Hermitian. For example, if $f_1 \in \mathcal{H}^{n,m,\alpha}$ and $f_2 \in \mathcal{H}^{n+1,m+1,\alpha}$, then we should have

$$c_{n+1,m+1,\alpha} (\hat{\mathcal{P}}_{jk}(f_1), f_2)^\wedge + c_{n,m,\alpha} (f_1, \hat{\mathcal{P}}_{jk}(f_2))^\wedge = 0.$$

Using formulas (4.9) and the knowledge that this equation is true on the unitary axis, we derive the numerical condition

$$(4.21a) \quad (\alpha - n - m)c_{n+1,m+1,\alpha} + (\bar{\alpha} + n + m + p + q - 2)c_{n,m,\alpha} = 0$$

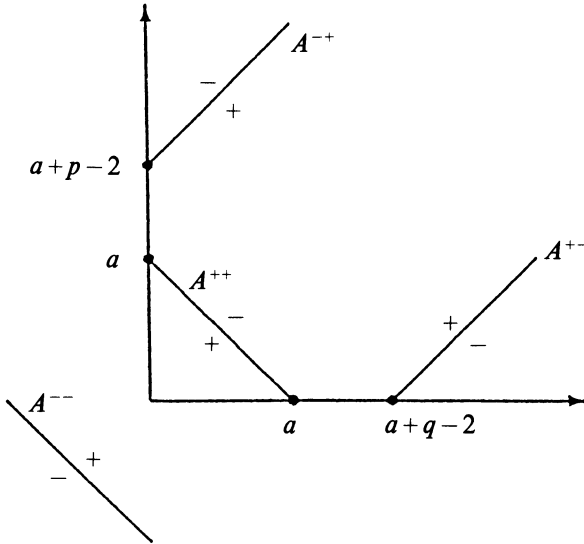
A similar condition arises from the transitions between $\mathcal{H}^{n,m,\alpha}$ and $\mathcal{H}^{n+1,m-1,\alpha}$.

$$(4.21b) \quad (\alpha - n + m + q - 2)c_{n+1,m-1,\alpha} + (\bar{\alpha} + n - m + p)c_{n,m,\alpha} = 0$$

or $A^{+-}(n, m)c_{n+1,m-1,\alpha} + A^{-+}(n+1, m-1)c_{n,m,\alpha} = 0.$

Of course we want the numbers $c_{n,m,\alpha}$ to be positive. It is easy to see that, even for the $c_{n,m,\alpha}$ to be real, α must either be on the unitary axis, or must be real. So assume α is real. Consider Diagram (4.22).

Diagram (4.22)

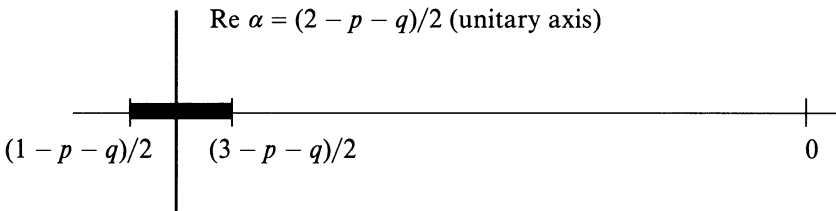


As is indicated in the diagram, the transition functions A^{--} and A^{+-} both are positive in the strip between their associated barriers. It follows that if both (n, m) and $(m + 1, m - 1)$ lie between the barriers, there is no solution to equation (4.21 b) with both $c_{n,m,\alpha}$ and $c_{n+1,m-1,\alpha}$ positive. On the other hand, outside the barriers, equation (4.21 b) does have positive solutions. Similar considerations apply to equation (4.21 a).

Applying these observations, we arrive at the following conclusions.

Proposition (4.23). i) *If $p + q$ is odd, then the set of points where $\mathcal{S}^{\alpha\pm}(X^0)$ is irreducible and unitary consists of the unitary axis together with the open interval $(1 - p - q)/2 < \alpha < (3 - p - q)/2$ of length one.*

Diagram (4.24)

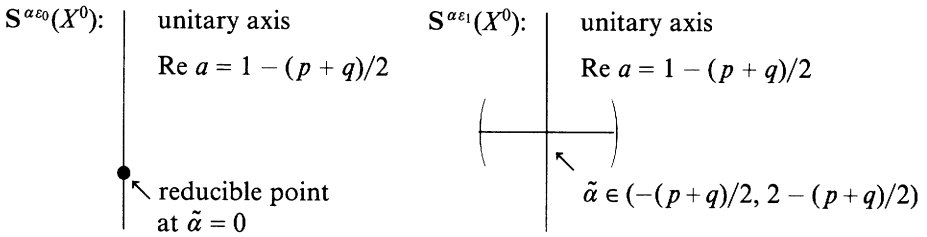


ii) *If $p + q$ is even then there are two possibilities:*

a) *If $\mathcal{S}^{\alpha\pm}$ is irreducible for $\alpha = 1 - (p + q)/2$, the unitary representations fill an interval of length two around the real point on the unitary axis, from $-(p + q)/2$ to $2 - (p + q)/2$.*

b) *If $\mathcal{S}^{\alpha\pm}$ is reducible for $\alpha = 1 - (p + q)/2$, then $\mathcal{S}^{\alpha\pm}$ is never unitary for α off the unitary axis.*

Diagram (4.25) Parameter values for unitarity of the full modules $\mathcal{S}^{a\pm}(X^0)$



iii) *At a point of reducibility the components which contain no K-types lying between the barriers A^{+-} and A^{++} are unitary, and components with such K-types are non-unitary. The case of p odd, q even, and p even, q even are illustrated below.*

Diagram (4.26) Unitarity at reducible points, p odd, q even, $a > 0$

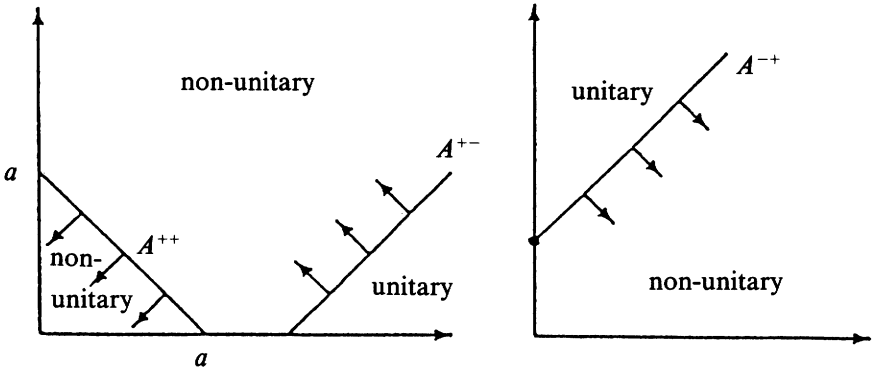


Diagram (4.27) (see page 154)

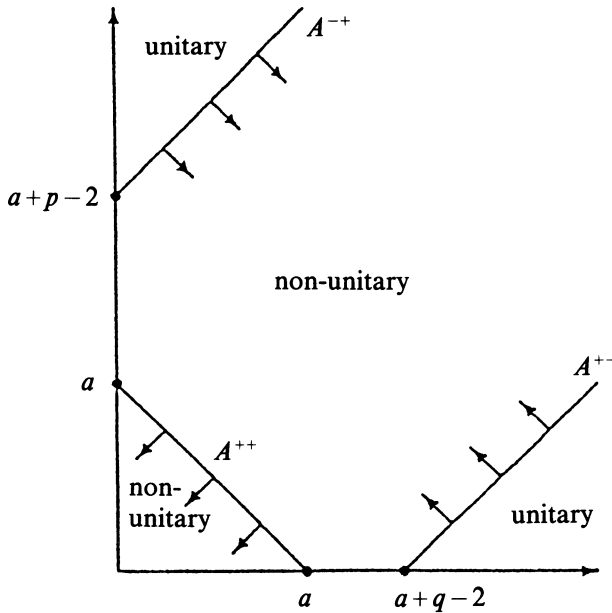
iv) *There are two exceptional cases.*

a) *When $\alpha = 0$ or $\alpha = 2 - p - q$, the point $(0, 0)$ is isolated in a module all by itself – the trivial module for $O(p, q)$. This is clearly unitary. (The equations (4.21) are vacuous here because there are no transitions).*

b) *When $p + q$ is even and $\alpha = 2 - (p + q)/2$ or $-(p + q)/2$, the module whose K-types lie on the line $y = x + (p - q)/2$ is unitary, because condition (4.21 b) is vacuous, since there are no transitions in the antidiagonal direction, and condition (4.21 a) is satisfiable, since the points lie outside the barriers A^{++} and A^{--} . Note that these values of α are at the ends of the interval of unitarity in the right-hand part of Diagram 4.25. The representation has 3 components, each of which is unitary, although the representation as a whole is not unitary. (It is not even completely reducible).*

Remark. As long as the transition functions do not vanish, equation (4.21) will have (when α is real) a unique-up-to-multiples real solution $\{c_{n,m,\alpha}\}$ which will determine a Hermitian, perhaps indefinite, inner product on $\mathcal{S}^{a\pm}(X^0)$, or some

Diagram (4.27) Unitarity at reducible points, p, q even, $a > 0$



constituent of it. We see that through this form the positions of the barriers $A^{\pm\pm}$ exert influence on the structure of the $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ even when they do not cause reducibility.

As noted above, the preceding discussion is valid for $p, q \geq 2$. When, say, $q = 1$, the situation must be modified as follows. The 0-sphere S^0 consists of 2 points. Correspondingly the light cone $X^0 - \{0\}$ breaks up into two pieces:

$$X^0 - \{0\} = X^{0+} \cup X^{0-}$$

where $X^{0+} = \{(x, y) : r_p^2(x) = y_1^2, y_1 > 0\}$ $X^{0-} = -X^{0+}$.

Note when $q = 1, y = [y_1]$ is just a scalar. The stabilizer $O^+(p, 1)$ of X^{0+} is a subgroup of index 2 in $O(p, q)$, and understanding $\mathcal{S}^\alpha(X^0)$ as an $O(p, q)$ -module is easily reduced to understanding $\mathcal{S}^\alpha(X^{0+})$ as an $O^+(p, q)$ -module. We have a polar coordinate decomposition

$$X^{0+} \simeq \mathbf{R}^{\times} \times \mathbf{S}^{p-1}$$

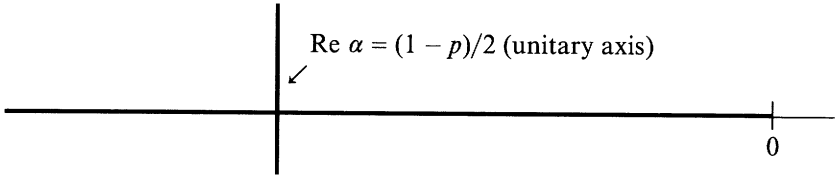
which in combination with the theory of spherical harmonics gives us a decomposition

$$\mathcal{S}^\alpha(X^{0+}) \simeq \sum_{n \neq 0}^{\infty} \mathcal{H}^n(\mathbf{R}^p) \otimes y^{\alpha-n}.$$

Thus we again have a single line of K -types, as in the case of $GL(p, \mathbf{R})$. The module structure is like that for GL , with reducibility when $\alpha \in \mathbf{Z}$, and $\alpha \geq 0$ or $\alpha \leq 1 - p$. The difference comes in unitarity. The diagonal term $\tilde{P}_{jk}^0(h)$ in formula (3.11) is

suppressed here. When this is combined with the fact that all K -types are outside the barriers when α satisfies $1 - p \leq \alpha \leq 0$, we find that the complementary series has length $p - 1$, and extends all the way from the unitary axis to the trivial representation (at $\alpha = 0$ or $\alpha = 1 - p$). It is this long interval of unitarity which gives rise to the many interesting problems concerning the eigenvalues of the Laplace operator on hyperbolic manifolds.

Diagram (4.28) Unitarity for $O(p, 1)$



5 Concluding Remarks

The discussion of § 4 can be extended to include the indefinite unitary groups $U(p, q)$ and symplectic groups $Sp(p, q)$ [HT]. The resulting picture is quite parallel to the results sketched in §§ 2, 3 for $GL(p, \mathbf{R})$ and $GL(p, \mathbf{C})$. Although the broad features of the situation for $U(p, q)$ are controlled by $O(2p, 2q)$, and for $Sp(p, q)$ by $O(4p, 4q)$, there are some interesting modifications, due primarily to the more complex K -type structure for $U(p, q)$ or $Sp(p, q)$. The possibilities for submodule structure, and for unitarity, both at points of reducibility and for the full modules, are again described by Diagrams (4.16), (4.25), and (4.27). However, variations in the K -type structure result in intervals of varying (and arbitrarily long) length in which there is no finite dimensional module, much as happened with $GL(p, \mathbf{C})$.

When $q = 1$, there is a degeneration in the K -types, just as there was for $O(p, 1)$. This results in considerably greater variability in module structure, and also in the possibilities for unitarity. Here one finds that for $U(p, 1)$, as for $O(p, 1)$ one has an interval of unitary representations stretching all the way from the unitary axis (at $\text{Re } \alpha = -p$) to the trivial representation (at $\alpha = 0$). For $Sp(p, 1)$, the interval of unitarity is similarly lengthened, but does not quite reach the trivial representation. It goes from the unitary axis ($\text{Re } \alpha = -(2p + 2)$) to $\alpha = -2$. The reason for this is the gap of length $q - 2$ in Diagram (4.13). For $U(p, 1) \subseteq O(2p, 2)$, this is zero, while for $Sp(p, 1) \subseteq O(4p, 4)$, this is 2. The fact that the trivial representation is not approachable through unitary representations, first observed by Kostant, has dramatic consequences for the geometry and analysis of the groups $Sp(p, 1)$. For example, it implies that they have Kazhdan's Property T [HV], [Zi], while $U(p, 1)$ and $O(p, 1)$ do not have this property.

All the above facts are demonstrated by the same kind of arguments as in § 4, based on the interaction between the K -types and the barriers $A^{\pm\pm}$. Details can be found in [HT].

After these examples, one may wonder how far this picture, explaining the submodule structure and unitarity of continuous series of representations in terms of the K -types, visualized as some collection of integral points, interacting with some moving barriers, can be extended. At this time, the answer is unclear. A large collection of examples, involving arbitrarily many K -type parameters, instead of the one or two in the examples given here (or 3 or 4 in the examples of $U(p, q)$ and $Sp(p, q)$ summarized above), will exhibit similar behavior. These examples will be reported on in future papers. They all have the property that the K -types are multiplicity one. For representations with K -types of higher multiplicity, no simple picture such as described here has yet been discovered, to this author's knowledge.

To conclude we give an example which shows that, even in the context of the very simple examples we have discussed here, some surprises can enter. Consider again the spaces $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^{2p})$, this time not as $GL(2p, \mathbf{R})$ -module, but as $Sp(2p, \mathbf{R})$ -modules, where $Sp(2p, \mathbf{R})$ is the isometry group of the skew-symmetric bilinear form

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y'_j - y_j x'_j$$

where we write a point in \mathbf{R}^{2p} as (x, y) with $x, y \in \mathbf{R}^p$.

If we think of \mathbf{R}^{2p} as \mathbf{C}^p , with coordinates $z_j = x_j + iy_j$, then the skew-form can be obtained as the negative of the imaginary part of the Hermitian form

$$(z, z') = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}'_j = \sum_{j=1}^n (x_j x'_j + y_j y'_j) - i(x_j y'_j - y_j x'_j).$$

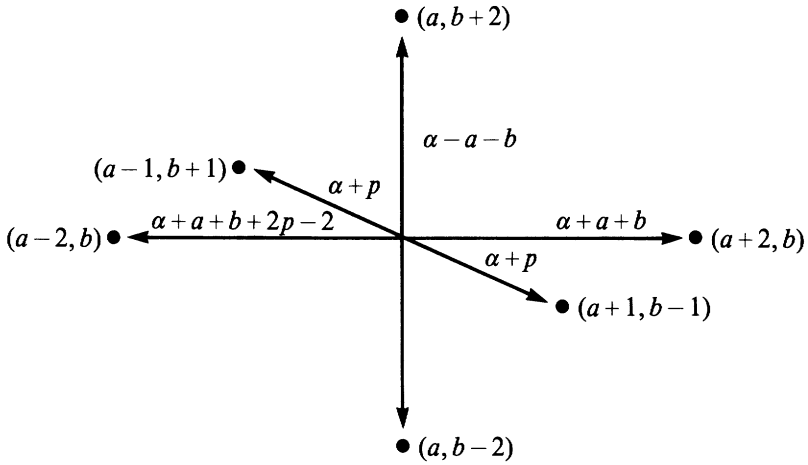
Therefore the unitary group $U(p)$ belongs to $Sp(p, \mathbf{R})$. It is a maximal compact subgroup of $Sp(p, \mathbf{R})$.

The structure of $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^{2p})$ as a $U(p)$ -module was described in § 3: it is a sum of the irreducible modules $\mathcal{H}^{a,b}(\mathbf{C}^p) \otimes (r_{2p}^2)^\beta = \mathcal{H}^{a,b,\alpha}$ where $2\beta + a + b = \alpha$. Since $Sp(2p, \mathbf{R}) \subseteq GL(2p, \mathbf{R})$, the action of the Lie algebra $\mathfrak{sp}(2\mathfrak{p}, \mathbf{R})$ is implicit in formula (2.10). However, since formula (2.10) describes a map from $\mathcal{H}^n(\mathbf{R}^{2p})$ to $\mathcal{H}^s(\mathbf{R}^{2p})$ where $s = n + 2, n$, or $n - 2$, and these are not irreducible for $U(p)$, we must define formula (2.10) in order to describe the action of $\mathfrak{sp}(2\mathfrak{p}, \mathbf{R})$ on an individual space $\mathcal{H}^{a,b,\alpha}$. The result is described by Diagram (5.1).

In this diagram we have represented the K -type $\mathcal{H}^{a,b,\alpha}$ as the point (a, b) in the positive quarterplane in \mathbf{R}^2 , and we have indicated to which other K -types one can move by applying $\mathfrak{sp}(2\mathfrak{p}, \mathbf{R})$, and we have indicated with each transition the associated transition coefficient (which is derived from formula (2.10)).

At this point we recall that $\mathcal{S}^\alpha(\mathbf{R}^{2p})$ breaks up into two summands $\mathcal{S}^{\alpha^\pm}(\mathbf{R}^{2p})$. It is easy to check that a $U(n)$ -component $\mathcal{H}^{a,b,\alpha}$ belongs to $\mathcal{S}^{\alpha^+}(\mathbf{R}^p)$ if $a + b$ is even, and to $\mathcal{S}^{\alpha^-}(\mathbf{R}^p)$ if $a + b$ is odd. It is also easy to check that by means of the transitions indicated in Diagram (5.1), it is possible to move from any point (a, b) to any other point (a', b') such that $a' + b'$ has the same parity as (a, b) . Hence each of $\mathcal{S}^{\alpha^\pm}(\mathbf{R}^p)$ is irreducible providing all the transition factors are non-zero. If $\alpha - n - m$ vanishes somewhere then $\mathcal{S}^{\alpha^\pm}(\mathbf{R}^{2p})$ already exhibits irreducibility as a

Diagram (5.1)



$GL(2p, \mathbf{R})$ module, so, *a fortiori* it reduces as an $Sp(2p, \mathbf{R})$ module. One can then check that the two $GL(2p, \mathbf{R})$ constituents remain irreducible as $Sp(2p, \mathbf{R})$ representations. Similarly, the story of the transition coefficient $\alpha + a + b + 2p - 2$ (which is just contragredient to the story for $\alpha - a - b$) is the same for $Sp(2p, \mathbf{R})$ as for $GL(2p, \mathbf{R})$.

However, something new happens at the real point on the unitary axis, $\mathcal{S}^{-p}(\mathbf{R}^{2p})$, which is the only place where the transition coefficient $\alpha + p$ can vanish. When $\alpha + p = 0$, the transitions from (a, b) to $(a, b) \pm (1, -1)$ are lost, and the remaining transitions, from (a, b) to $(a \pm 2, b)$ and $(a, b \pm 2)$, preserve not merely the parity of $a + b$, but the individual parities of a and b . It follows that both of $\mathcal{S}^{-p, \pm}(\mathbf{R}^{2p})$, which are irreducible for $GL(2p, \mathbf{R})$, when considered $Sp(2p, \mathbf{R})$ modules break up further into two summands each, specified by the individual parities of a and b . The resulting subrepresentations thus do not have their K -types separated by barriers, but have them intermingled, distinguished only by a parity condition reminiscent of, but evidently subtler than, the parity condition that divides \mathcal{S}^a into $\mathcal{S}^{a \pm}$.

Remark. An analytic treatment of this series of representations was given by K. Gross [Gr]. After completing this paper, the author learned of a series of papers by A. Klimyk and B. Gruber in the Journal of Mathematical Physics which have very substantial overlap with the results reported in § 4.

References

[Ba] Bargmann, V.: Irreducible unitary representations of the Lorentz group. *Ann. Math.* **48** (1947) 568–640
 [Bo] Borho, W.: A Survey on Enveloping Algebras of Semisimple Lie Algebras, I. In: *Lie Algebras and Related Topics*, CMS Conf. Proc. **5** (Britten, Lemire, Moody eds.), American Mathematical Society, Providence, 1986

- [Br] Branson, T.: Group representations arising from Lorentz conformal geometry. *J. Fun. Anal.* **74** (1987)
- [Di] Dixmier, J.: Représentations intégrables du groupe De Sitter. *Bull. Soc. Math. France* **89** (1961) 9–41
- [En] Englefield, M.: *Group Theory and the Coulomb Problem*. Wiley-Interscience, New York (1972)
- [Fa] Faraut, J.: Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques. *J. Math. pures et App.* **58** (1979) 369–444
- [Fr] Fronsdal, C.: Infinite multiplets and the hydrogen atom. *Phys. Rev.* **156** (1967) 1665–1677
- [GK] Gelfand, I.; Kirillov, A.: Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie. *Pub. Math. IHES* **31** (1966) 5–19
- [GN] Gelfand, I.; Naimark, M.: Unitary representations of the Lorentz group. *Izvestiya Akad. Nauk. SSSR* **11** (1947) 411–504
- [Gr] Gross, K.: The dual of a parabolic subgroup and a degenerate principal series of $Sp(n, \mathbb{C})$. *Am J. Math.* **93** (1971) 398–428
- [HC1] Harish-Chandra.: Infinite irreducible representations of the Lorentz group. *Proc. Royal Soc A* **189** (1947) 372–401
- [HC2] Harish-Chandra.: Representations of a semisimple Lie group on a Banach space I. *T.A.M.S* **75** (1953) 185–243
- [He] Helgason, S.: *Groups and Geometric Analysis*. Academic Press, Orlando, etc. 1984
- [Hi1] Hirai, T.: On irreducible representations of the Lorentz group of n -th order. *Proc. Japan. Acad.* **38** (1962) 258–262
- [Hi2] Hirai, T.: Classification and the characters of irreducible representations of $SU(p, 1)$. *Proc. Japan. Acad.* **42** (1966) 907–912
- [Ho] Howe, R.: Remarks on classical invariant theory. *T.A.M.S* **313** (1989) 539–570
- [Ho2] Howe, R.: Small unitary representations of classical groups. In: *Group Representations, Ergodic Theory and Operator Algebras and Mathematical Physics*. M.S.R.I. Pub. 6. Springer-Verlag, New York, etc. 1987, 121–150
- [HT] Howe, R.; Tan, E. L.: Homogeneous functions on light cones: the infinitesimal structure of some degenerate principal series representations, in preparation
- [HV] de la Harpe, P.; Valette, A.: *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*. Asterisque 175, Soc.Math. France, Paris 1989
- [Ja] Jacobson, N.: *Basic Algebra II*. Freeman, New York 1980
- [JV] Jacobson, H.; Vergne, M.: Wave and Dirac operators and representations of the conformal group. *J. Fun. Anal* **24** (1977) 52–106
- [Jo] Johnson, K.: Composition series and intertwining operators for the spherical principal series II, *T.A.M.S.* **215** (1976) 269–283
- [JW] Johnson, K.; Wallach, N.: Composition series and intertwining operators for the spherical principal series, *T.A.M.S.* **229** (1977) 137–173
- [KG] Klimyk, A.; Gavrilik, A.: The representations of the groups $U(n, 1)$ and $SO_0(n, 1)$.
- [Kn] Knapp, A.: *Representation Theory of Semisimple Groups, an overview based on examples*, Princeton University Press, Princeton, NJ 1986
- [Ko] Kostant, B.: On the existence and irreducibility of certain series of representations, *B.A.M.S.* **75** (1969) 627–642
- [La] Lang, S.: $SL_2(\mathbb{R})$, Addison-Wesley, Reading, MA 1975
- [Li] Li, J.-S.: Singular unitary representations of classical groups, *Inv. Math.* **97** (1989) 237–255
- [Mo] Molcanov, V.: Analogue of the Plancherel Formula for hyperboloids, *Soviet Math. Doklady* **9** (1968) 1287–1385
- [Na] Naimark, M.: Linear representations of the Lorentz groups, *Amer. Math. Soc. transl. Series Two* **6** (1952) 379–458
- [No] Kostant, B.: Citation for Steel Prize, *Notices of A.M.S.* **37** (1990) 803–804
- [On] Onofri, E.: Dynamical quantization of the Kepler manifold, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 401–408
- [Ro] Rossmann, W.: Analysis on real hyperbolic spaces, *J. Fun. Anal.* **30** (1978) 448–477
- [Sp] Speh, B.: Degenerate series representations of the universal covering group of $SU(2, 2)$, *J. Fun. Anal.* **33** (1979) 95–118

- [St] Stanley, R.: Enumerative Combinatorics, Vol. 1, Wadsworth and Cole, Monterey, CA 1986
- [Wa] Wallach, N.: Real Reductive Groups I, Academic Press, San Diego, etc., 1989
- [Zh] Zhelobenko, D.: Compact Lie Groups and Their Representations, Trans. Math. Mono. 40, American Mathematical Society. Providence, RI (1973)
- [Zi] Zimmer, R.: Ergodic Theory for Semisimple Groups, Mon. in Math. 81, Birkhäuser, Boston 1984

Roger Howe
Yale University
Department of Mathematics
Box 2155-Yale Station
New Haven, Connecticut 06520, USA

(Eingegangen: 5. 8. 1992)

Buchbesprechungen

Devlin, K., *Logic and Information*, Cambridge: Cambridge University Press 1991, 308 S., £ 17.95

Vorab: Dies ist kein Buch über mathematische Informationstheorie im herkömmlichen Sinn, es ist auch kein Buch, das sich mit der Rolle der heutigen mathematischen Logik im Kontext von Informationstheorie befaßt. Nach den Vorstellungen des Autors ist es ein Versuch, sich dem Informationsbegriff als einer „basic property of the universe“ empirisch zu nähern. Einmünden soll dieser Weg dann in ein mathematisches Modell, nun aber nicht mehr auf der Basis einer durch einen formalisierbaren Beweisbegriff geprägten und dadurch verarmten Mathematik, sondern getragen von Schlußweisen allgemeinerer Art, wie sie für die Naturwissenschaften und für große Teile der angewandten Mathematik charakteristisch sind.

Es war zunächst Jon Barwise, der vor rund zehn Jahren deutlich Kritik an der auf Frege zurückgehenden Semantik übte, und zwar in dem Sinne, daß sie die Bedeutung auf Wahrheitswerte reduziere und keine Rücksicht darauf nehme, daß Sprechen (wie auch Schreiben, Denken und Schließen) sich immer in bestimmten Situationen vollziehe und als eine dergestalt durch die umgebende Welt, durch psychologische Faktoren und eigene Sichtweisen bedingte Aktivität umgekehrt wieder auf die Gegebenheiten zurückwirke, durch die es beeinflusst sei. Barwise prägt hierfür den Begriff *situated activities* und plädiert dafür, sprachliche Äußerungen nicht zu bloßen Trägern von Wahrheitswerten verarmen zu lassen, sondern die Aufmerksamkeit den Informationen zuzuwenden, die sie insgesamt tragen, und dem Informationsfluß, den sie bewirken. Ausgehend von diesen Ideen entwickelte er in Zusammenarbeit mit J. Perry am neugegründeten Center for the Study of Language and Information der Stanford University die Situationssemantik und schuf damit die Basis für eine mathematisch-logische Theorie von Bedeutung und Information ([1], [2]).

Keith Devlin, der Ende der achtziger Jahre für längere Zeit an diesem Institut weilte, legt unter Einbeziehung eigener Vorstellungen mit dem hier in Rede stehenden Buch die erste umfassende und systematische Darstellung einer solchen Theorie vor. Er wendet sich nicht nur an Mathematiker und Logiker, sondern auch an Philosophen, Linguisten und Informatiker. Sein Vorgehen zielt nicht darauf, das Wesen von Information aufzuklären; im Vordergrund der Untersuchungen stehen vielmehr die Verarbeitung von Information und die Art und Weise, in der Information von Agent zu Agent (oder von Situation zu Situation) fließt, und das unter besonderer Betonung der Rolle, die Logik und Sprache in diesem Zusammenhang spielen. Erst in einem zweiten Band soll dann ein mathematisches Modell für die aufgedeckten Phänomene entwickelt werden. So dient denn der vorliegende Band in erster Linie dazu, den Leser auf einen Weg zu bringen, der die oben geschilderten Mängel der bisherigen, an der Semantik der klassischen Logik orientierten Vorgehensweise zu überwinden sucht. Unter weitgehender Vermeidung technischer Details ist eine überzeugende Einführung in die Situationssemantik und in eine darauf gegründete Informationstheorie entstanden. Dabei werden, und das mag die Breite der Diskussion unterstreichen, auch kognitive Aspekte (z. B. solche, die das Glauben betreffen) nicht ausgeklammert, sondern behutsam analysiert. Diese Behutsamkeit ist wohlüberlegt, weiß der Autor doch, daß er sich auf einem an Kontroversen reichen Gebiet bewegt, wenn er (auf Seite 145) sagt: „Our situation theoretic framework should enable us to say something about the behavior of the human mind (in particular), when viewed as an information processor. From this viewpoint, an account of mental states provides an illustration of the way situation theory may be used as a framework for a study of certain aspects of mind“.

Die Darstellung verbindet fachliche Kompetenz und erkenntnistheoretische Aufgeschlossenheit mit stilistischer Gewandheit und Frische. Erleichtert wird die Lektüre dem fachlich Unkundigen durch recht große Ausführlichkeit. (Liegt es an der Gefangenheit in herkömmlichen Begriffssystemen und Vorstellungen, wenn der Referent sich trotz der Fülle und der Dichte anregender Überlegungen eher eine kompaktere Darstellung gewünscht hätte?)

Sicher wird das Buch dazu beitragen, vielversprechende Sichtweisen einer neuartigen Theorie von Bedeutung und Information über den bisher noch recht kleinen Kreis von Kennern hinauszutragen. Nicht zuletzt kann es so mithelfen, Hoffnungen, die der Autor an sie knüpft, eher zu realisieren, Hoffnungen etwa auf neue Ansätze, um die grundsätzlichen Schwierigkeiten, vor denen die sogenannte künstliche Intelligenz steht, besser zu meistern.

[1] Barwise, J.; Perry, J.: Situations and Attitudes. Cambridge: The MIT Press 1983

[2] Barwise, J.: The Situation in Logic. CSLI Lecture Notes 17. Stanford 1988

Freiburg

H.-D. Ebbinghaus

Jensen, K. K., Thomsen, K., Elements of KK -theory, Basel u.a.: Birkhäuser-Verlag 1991, 250 S., DM 118,-

Die KK -Theorie ist einer der Grundpfeiler der nichtkommutativen Topologie und Geometrie, die ja in der letzten Zeit einen immensen Aufschwung erfahren hat. Sie hat sich aus Fragen der Indextheorie und aus der Ext-Theorie für C^* -Algebren entwickelt und stellt eine äußerst wirkungsvolle Methode zur Berechnung K -theoretischer Invarianten für nichtkommutative C^* -Algebren sowie zur Behandlung der verschiedensten verallgemeinerten Indexfragen dar.

Das vorliegende Buch über KK -Theorie ist mehr spezieller Natur. Der Autor hat zunächst die technischen Hilfsmittel aus der Theorie der C^* -Algebren (die inzwischen auch zu ziemlich unübersehbaren Ausmaßen gewachsen ist), auf denen die KK -Theorie aufbaut, zusammengestellt. Diese Hilfsmittel sind in keinem der existierenden Werke über Operatoralgebren vollständig enthalten, sondern mehr oder weniger über die Literatur verstreut. Behandelt werden z.B. Hilbertmoduln und Multiplikatoralgebren sowie die verschiedenen Stabilitätsresultate, die damit zusammenhängen. Allerdings werden bei dem Leser doch sehr gute Kenntnisse in der Theorie der Operatoralgebren vorausgesetzt.

Im Hauptteil des Buches werden dann die grundlegenden technischen Resultate der KK -Theorie (allerdings nur in ihrer einfachsten Form) bewiesen. Hierbei werden die verschiedenen Vereinfachungen (gegenüber der ursprünglichen Fassung von Kasparov) der Beweise, die sich in der Zwischenzeit ergeben haben, verwendet. Benutzt werden insbesondere die vereinfachte Darstellung der KK -Theorie von Skandalis und auch die Version des Referenten. Bewiesen wird die Existenz des Kasparovprodukts. Außerdem werden die grundlegenden Eigenschaften des Produkts und der Zusammenhang zwischen der KK -Theorie und der Theorie der Erweiterungen von C^* -Algebren diskutiert – aber das ist dann alles. Es wird kein einziges Beispiel der wirklich zahlreichen Anwendungen der KK -Theorie gegeben, ja, der größte Teil dieser Anwendungen wird nicht einmal erwähnt.

Heidelberg

J. Cuntz

Yang, K., Complex Algebraic Varieties, An Introduction to Curves and Surfaces, New York u. a.: Marcel Dekker 1991, 320 S., \$ 114.56

Anliegen des hier zu besprechenden Buches ist die Darstellung algebraischer, topologischer und transzendenter Methoden zur Untersuchung komplex-algebraischer Varietäten, insbesondere von Kurven und Riemannschen Flächen (Dimension 1) sowie algebraischer Flächen (Dimension 2). Dieser interessante und hochaktuelle Themenkreis ist beispielsweise in dem Standardwerk von Ph. Griffiths und J. Harris auf 800 Seiten abgehandelt, hier soll das gleiche auf 250 Seiten gelingen.

Die Frage stellt sich: was fehlt? Nun, es fehlt nicht am dargestellten Material, dafür an Beweisen. Besser gesagt: es wird überhaupt kein tieferliegendes Ergebnis bewiesen; das Buch besteht eigentlich nur aus einer Darstellung von Resultaten und Methoden. Aufgrund der Komplexität der Materie könnte allein dies schon verdienstvoll sein. Das vorliegende Buch beschränkt sich jedoch auf eine förmliche Aneinanderreihung von Resultaten, ohne jede Diskussion, ohne Aufzeigen von Zusammenhängen. Dies soll anhand einiger Beispiele dargelegt werden.

1. In Kapitel 2 werden transzendente Methoden behandelt. Auf S. 60 wird der zentrale Begriff der Kählerschen Mannigfaltigkeiten eingeführt. Beispiele werden aber nicht behandelt, und es wird überhaupt nichts über die Bedeutung des Begriffes gesagt. Im Abschnitt über die Hodge-Zerlegung wird auf S. 78 die absolut grundlegende Bedingung

$$(+) \quad \Delta_d = 2\Delta_g$$

für die Laplace-Operatoren aufgestellt. Die einzige Bemerkung des Autors dazu: „The reader should try a proof of (+)“. Die Hodge-Zerlegung folgt auf S. 80, durch nichts vorgehoben, ohne jede Bemerkung, daß dies eines der wichtigsten (transzendenten) Ergebnissen über algebraische (oder Kähler-) Mannigfaltigkeiten ist. Wie soll ein Nichtexperte, für den laut Vorwort das Buch geschrieben ist, die Bedeutung der Hodge-Zerlegung erkennen?

2. Das dritte Kapitel behandelt Riemannsche Flächen. Im Abschnitt 3 wird ein Existenzsatz über meromorphe 1-Formen (wie üblich ohne Beweis) angegeben, daraus die Existenz nichtkonstanter meromorpher Funktionen gefolgert. Hier müßte doch eine Bemerkung über die Algebraizität kompakter Riemannscher Flächen folgen, und im übrigen: die Existenz meromorpher Funktionen folgt doch am einfachsten aus dem Satz von Riemann-Roch, der viel zu spät bewiesen wird. Der Satz von Riemann-Roch wird auch nicht für die holomorphe Euler-Charakteristik ausgesprochen, so wie er auf den n -dimensionalen Fall verallgemeinert wird. Überhaupt fehlt die Kohomologie (z. B. Serre-Dualität) im ganzen Kapitel 3, obwohl diese Theorie doch vorher bereitgestellt wird.

3. Kapitel 4 beschreibt die Kodaira-Enriques-Klassifikation algebraischer Flächen, natürlich ohne Beweise. Hier ist der Leser jedenfalls wesentlich besser beraten, wenn er gleich zum Standardwerk von Barth, Peters und van de Ven (Springer) greift. Im übrigen scheint mir der beste Zugang zur Klassifikation algebraischer Flächen heutzutage derjenige über die in den letzten Jahren entwickelte sog. Mori-Theorie (extremale Strahlen etc.) zu sein. Demgegenüber ist die vorliegende Darstellung reichlich konzeptionslos. Bezüge zum höherdimensionalen fehlen.

4. Auf S. 63 wird der Begriff der kohärenten Garbe eingeführt – auf acht Zeilen, ohne daß etwas Substantielles über die Kohärenz der Strukturgarbe oder irgendetwas über Idealgarben gesagt wird. Warum wird hier nicht wenigstens auf das grundlegende Buch „Coherent Analytic Sheaves“ von Grauert-Remmert verwiesen? Drei weitere Zeilen spendiert der Autor dem Endlichkeitssatz von Cartan-Serre, ohne Beweis, ohne Zitat.

Diese Beispiele mögen genügen, um die Mängel des besprochenen Buches darzulegen. Für den Experten ist es ärgerlich; einem Nichtexperten wird es schwerfallen,

zwischen Wichtigem und Nebensächlichem zu unterscheiden. Wegen fehlender Beweise muß er ohnehin zu anderen Büchern, wie den hier angegebenen, greifen. Dieses Buch stellt jedenfalls keine Bereicherung der Literatur der komplexen Geometrie dar.

Bayreuth

Th. Peternell

Roggenkamp, K. W., Taylor, M. J., Group Rings and Class Groups, (DMV-Seminar Band 18), Basel u. a.: Birkhäuser-Verlag 1992, 216 S., DM 76,-

Dieses Buch, das aus Vorlesungen in einem DMV-Seminar im September 1990 in Günzburg entstanden ist, besteht aus zwei Teilen, die insofern verknüpft sind, als sie beide auf ganzzahliger Darstellungstheorie aufbauen. Der erste Teil, der die Überschrift „Group rings: Units and the Isomorphism Problem“ trägt und der i. w. von Roggenkamp aufgeschrieben wurde, aber auch Beiträge seiner Schüler Kimmerle und Zimmermann enthält, ist ganz auf die Diskussion der sogenannten Zassenhaus-Vermutung für Einheiten in ganzzahligen Gruppenringen endlicher Gruppen und daraus resultierender Konsequenzen konzentriert, insbesondere solcher im Hinblick auf das Isomorphieproblem. Hier werden in großer Allgemeinheit und mit viel Liebe zum Detail in für den Leser angenehm zu folgender Weise die von Roggenkamp und Scott erzielten Ergebnisse im Umkreis der Zassenhaus-Vermutung sowie die darauf beruhenden Resultate Kimmerles wiedergegeben. Leider ist der in [Crelle J. **415** (1991), 175–187] von A. Weiss bewiesene Hauptsatz, daß nämlich eine endliche augmentierte Einheitsgruppe in $\mathbb{Z}G$ für nilpotentes G stets rational konjugiert zu einer Untergruppe von G ist, nicht aufgenommen worden. Im einzelnen setzt sich dieser erste Teil des Buches aus eingehenden Untersuchungen zu den folgenden Themenkreisen zusammen: *Der Koeffizient bei Eins von Einheiten, die Klassensummenkorrespondenz, Permutationsmoduln und die Zassenhaus-Vermutung, Picardgruppen und Automorphismen ganzzahliger Gruppenringe, Konjugationsklassen von endlichen augmentierten Einheitsgruppen, das Isomorphieproblem, eine ganzzahlige Clifford-Theorie.* Letztere hat sich als wichtig bei der Konstruktion von Gegenbeispielen zur Zassenhaus-Vermutung herausgestellt. Neben der Präsentation solcher Gegenbeispiele enthält dieser Teil abschließend auch neue Variationen der Zassenhaus-Vermutung und damit Ansätze, in welcher Richtung hier weiter gearbeitet werden sollte, wenn man über nilpotente Gruppen hinauskommen möchte.

Der zweite Teil „Hopf orders and Galois module structure“ ist von Taylor aufgeschrieben und enthält daneben Beiträge seines Schülers Byott. In diesem Teil geht es um die Galoisstrukturbestimmung des Rings \mathfrak{o}_N der ganzen Zahlen einer galoissch-endlichen Erweiterung N eines Zahlkörpers K . Es wird zunächst an die von Fröhlich und Taylor erzielten früheren Ergebnisse erinnert, wenn die Erweiterung N/K nur zahme Verzweigung besitzt, und dann auf den allgemeineren Fall der wilden Verzweigung übergegangen. Hier übernehmen die Hopfordnungen die Rolle von $\mathbb{Z}G$ oder $\mathfrak{o}_X G$ in der zahmen Situation. Dem Studium dieser Ordnungen ist denn auch das ganze zweite Kapitel gewidmet. Die prinzipialen homogenen Räume sind die natürlichen Objekte, auf denen Hopfordnungen operieren. Sie werden im 3. Kapitel ausführlich studiert und in einem Spezialfall, nämlich wenn $[N:K]=p$ und K eine primitive p -te Einheitswurzel ζ_p enthält, explizit mit Hilfe der Kummertheorie berechnet. Des weiteren wird eine natürliche Abbildung ψ konstruiert, die zu jedem prinzipialen homogenen Raum ein Element in der lokal-freien Klassengruppe der zugrundeliegenden Hopfordnung ausweist. Es folgen schließlich arithmetische Anwendungen, und zwar sowohl für den zyklotomischen als auch für den elliptischen Fall. Im erstgenannten, wenn wieder $\zeta_p \in K$ und $[N:K]=p$ gilt, wird unter Anwendung von speziellen p -adischen L -Funktionen der Kern von ψ für ausgezeichnete Hopfordnungen klassifiziert.

Im zweiten Fall hängen die L -Funktionen und Hopfordnungen von einer elliptischen Kurve mit komplexer Multiplikation ab.

Beide Teile des Buches behandeln sehr spezielle Fragestellungen aus dem jeweiligen Gebiet. So sind im ersten Teil von vornherein nur Ergebnisse über Einheiten *endlicher Ordnung* in ganzzahligen Gruppenringen Gegenstand des Interesses; im zweiten Teil ist es die *additive* Galoisstruktur, die im Brennpunkt der Untersuchungen steht. Mir ist keine andere Quelle bekannt, aus der man zu diesen beiden speziellen Themenkreisen ähnlich ausführliche und gut verständliche Informationen erhalten könnte wie aus diesem Buch.

Augsburg

J. Ritter

Kerber, A., Algebraic combinatorics via finite group actions, Mannheim u.a.: Bibliographisches Institut 1991, 436 S., DM 68,-

Ist X eine endliche Menge, \sim eine Äquivalenzrelation auf X und $X = \bigcup_{i=1}^r X_i$ die via \sim auf X bewirkte Klasseneinteilung, so gibt es offenbar stets eine endliche Gruppe G , die derart auf X operiert, daß die G -Bahnen gerade die vorgegebenen Klassen X_1, \dots, X_r sind. Man kann ja z. B.

$$G = S(X_1) \times \dots \times S(X_r) = \{\pi \in S(X); \pi(X_i) = X_i \text{ für alle } i = 1, \dots, r\}$$

wählen. Grundansatz des vorliegenden, wesentlich von der Pólya-Redfieldschen Abzähltheorie inspirierten Buches ist, daß sich zahlreiche wichtige diskrete Strukturen in natürlicher Weise als Äquivalenzklassen auf endlichen Mengen (meist endlichen Abbildungsmengen) auffassen lassen. Man kann nun die in Rede stehende Äquivalenzrelation durch die Wirkung einer geeigneten endlichen Gruppe ersetzen und algebraische Hilfsmittel wie etwa das Lemma von Cauchy und Frobenius einsetzen, um die Zahl der Bahnen zu bestimmen. Mit letzterem gemeint ist die – historisch weniger bewanderten Individuen wie etwa dem Rezensenten (fälschlich) unter dem Namen „Lemma von Burnside“ bekannte – Beobachtung: Die Anzahl der Bahnen, in die eine endliche Menge unter der Wirkung einer endlichen Gruppe zerfällt, ist das arithmetische Mittel über die Fixpunktzahlen der Gruppenelemente.

Die Beschränkung dieser einfachen aber bereits erstaunlich wirkungsvollen Strategie liegt offenbar darin, daß sich die in Rede stehende Gesamtheit diskreter Strukturen häufig mit gewissen aber nicht allen Bahnen einer Gruppenaktion identifizieren läßt. Das legt nahe, das Lemma von Cauchy und Frobenius durch Einführung zusätzlicher Strukturelemente zu verfeinern. Diese Verfeinerung geschieht im zweiten und dritten Kapitel des vorliegenden Buches in drei Schritten:

(1) Einführung einer (auf den G -Bahnen konstanten) Gewichtsfunktion $X \rightarrow R$ mit Werten in einem kommutativen und \mathbb{Q} umfassenden Ring und Abzählung von Bahnen mit vorgegebenem Gewicht (in der Regel wird R ein Polynomring über \mathbb{Q} in genügend vielen Unbestimmten sein).

(2) Abzählung von Bahnen, deren Elemente eine gegebene Konjugationsklasse von Untergruppen als Stabilisatoren besitzen (nach Burnside [1]).

(3) Abzählung von Bahnen nach Gewicht und Stabilisatorklasse (nach [5]).

Mit diesen Verfeinerungen gewinnt die Methode der endlichen Gruppenaktionen erheblich an Spielraum und Beweglichkeit.

Typische Anwendungen der ursprünglichen (konstanten) Version des Lemmas von Cauchy-Frobenius sind: Abzählung der Doppelnebenklassen einer endlichen Gruppe nach gegebenen Untergruppen, Beweis des Sylowschen Existenzsatzes nach Wielandt [6] (diese

Arbeit wird leider nicht zitiert), Bestimmung der Anzahl kombinatorischer Graphen mit gegebener Eckenzahl sowie die Behandlung der Stirlingschen Zahlen erster und zweiter Art (all dies in Kapitel 1).

Die Verfeinerung (1) führt natürlich auf die im zweiten Kapitel behandelte Pólyasche Abzähltheorie mit den bekannten Anwendungen etwa auf Graphen gegebener Ecken- und Kantenzahl, das Abzählen von Wurzelbäumen etc. Diese Theorie gewinnt in Kerbers Behandlung beträchtlich an Tiefe durch die systematische Einbeziehung der lange unbeachtet gebliebenen Redfieldschen Arbeit [4]. Die Redfieldsche Cap-Produktbildung gestattet es insbesondere, die Lösung zahlreicher Abzählprobleme als Cap-Produkt von Zykluszeigern auszudrücken. Andererseits sind die mit der Redfieldschen Theorie einhergehenden Polynomoperationen nur vor dem Hintergrund der Linearen Darstellungstheorie endlicher symmetrischer Gruppen wirklich verständlich. Diese wird daher in Kapitel 4 soweit wie nötig abgehandelt. Die Darstellung folgt dabei im wesentlichen einer bereits in [2] ausgeführten und auf der Tagung Groups-St Andrews 1989 vorgetragenen Argumentation, die auf einer Sequenz mengentheoretischer Bijektionen aufbaut.

Dem Zusammenhang von darstellungstheoretischen Betrachtungsweisen und Abzähltheorie via endlicher Gruppenaktionen sind das 5. und 6. Kapitel gewidmet. Das äußerst dicht geschriebene 5. Kapitel bildet einen Höhepunkt des Buches. Die gegenseitig befruchtende Wirkung der beiden genannten Disziplinen wird hier u.a. am Beispiel der Schur-Polynome demonstriert, die zuerst mittels irreduzibler Charaktere symmetrischer Gruppen eingeführt, dann kombinatorisch interpretiert werden (als erzeugende Funktionen für das Abzählen von Standardtableaux). Das Redfieldsche Cap-Produkt von Zykluszeigern wird als inneres Produkt der zugehörigen Charaktere gedeutet; der Zusammenhang des Diagrammverbandes mit der Frage nach Unimodalität von Abzählfunktionen wird aufgezeigt, die Regeln von Littlewood-Richardson und Murnaghan-Nakayama werden hergeleitet, etc. Das 6. Kapitel setzt diese Diskussion mit der Behandlung spezieller Fragen aus der Kombinatorik symmetrischer Gruppen fort. Der Schwerpunkt liegt hier auf der Abzählung von Wurzeln und der Einführung der Schubert-Polynome. Das Buch endet mit einer Beschreibung algorithmischer Methoden zur Konstruktion bzw. uniformen Zufallserzeugung diskreter Strukturen in Kapitel 7, einer Vielzahl numerischer Informationen über Burnsidematrizen, Charaktere symmetrischer Gruppen etc. im Kapitel 8: „Tables“ und einem kommentierten Literaturverzeichnis (Kapitel 9).

Das Buch ist klar und sehr ausführlich geschrieben. Besondere Sorgfalt wird auf die Erläuterung aller die rudimentärsten Elemente der Algebra überschreitender algebraischer Hilfsmittel verwendet. Es ist daher im wesentlichen in sich abgeschlossen und Studenten jedenfalls ab dem 3. oder 4. Semester ohne weiteres zugänglich. Der Nachteil einer solchen Vorgehensweise ist offensichtlich. Dem Anspruch des Titels etwa, Algebraische Kombinatorik exemplarisch anhand der Theorie endlicher Gruppenaktionen darzustellen, kann das Werk – schon aus Gründen des Umfangs – trotz einiger Bemerkungen über q -Analoge, Spezies, Operationen auf strukturierten Mengen oder die Erwähnung des Burnsideringes nicht genügen. Bedauerlich ist auch (etwa im Zusammenhang mit Kapitel 7) das vollständige Fehlen asymptotischer Methoden und Resultate. Bezüglich eines der Hauptprobleme der (endlichen) Asymptotischen Gruppentheorie, der asymptotischen Abzählung endlicher Gruppenaktionen ${}_G X$ für großes $|X|$ bei gegebener Gruppe G , sei der Leser auf die Arbeit [3] des Rezensenten verwiesen.

Abschließend festzustellen bleibt, daß dem Verfasser eine vertiefte Behandlung einiger wesentlicher Aspekte der enumerativen Theorie endlicher Gruppenaktionen gelungen ist, die in überzeugender Weise die Lebendigkeit konkreter kombinatorischer Fragestellungen mit systematischer Darstellung verbindet – ein in der kombinatorischen Literatur nicht eben häufig anzutreffendes Phänomen. Schon deshalb sollte das Werk in keiner Bibliothek fehlen.

- [1] Burnside, W.: The theory of groups of finite order. 2. Aufl. Cambridge 1911. Nachgedruckt bei Dover Publ. 1955
- [2] Kerber, A.: La théorie combinatoire sous-tendant la théorie des représentations linéaires des groupes symétriques finis. In: M. Lothaire (Hrsg.): Mots. Paris 1990
- [3] Müller, Th.: Finite group actions, subgroups of finite index in free products and asymptotic expansion of $e^{P(z)}$. Manuskript 1991
- [4] Redfield, J. H.: The theory of group-reduced distributions. Amer. J. Math. **49** (1927) 433–455
- [5] Stockmeyer, P. K.: Enumeration of graphs with prescribed automorphism group. Dissertation, Ann Arbor 1971
- [6] Wielandt, H.: Ein Beweis für die Existenz von Sylowgruppen. Arch. Math. **10** (1959) 401–402

Bielefeld

Th. Müller

O. Chein, H. O. Pflugfelder, J. D. H. Smith (eds.), Quasigroups and Loops: Theory and Applications (Sigma series in pure mathematics, Vol. 8), Berlin: Heldermann, 1990, 568 + xii S., DM 148,-

Die Theorie nichtassoziativer algebraischer Strukturen mit guten Auflösungs-eigenschaften (Quasigruppen, Loops) hat in den letzten Jahrzehnten eine weitverzweigte Entwicklung erfahren, wobei die einzelnen Entwicklungslinien deutlich geprägt sind von dem jeweiligen mathematischen Kontext, aus dem die Anregung zur Untersuchung solcher Strukturen stammt. Die verschiedenen Ausgangs- und Anknüpfungspunkte sind sehr vielfältig. In der Theorie der Alternativkörper transzendierte die klassische Algebra in ganz natürlicher und zwangsläufiger Weise das Assoziativgesetz; ihre multiplikativen Strukturen sind die klassischen Vorbilder der Moufang-Loops. In der Inzidenzgeometrie, etwa in der allgemeinen Theorie affiner oder projektiver Ebenen, traten solche im allgemeinen nichtassoziativen algebraischen Strukturen als Koordinatenbereiche auf. In der angeordneten Geometrie und in der topologischen Geometrie werden geometrische Gebilde in Verschränkung mit Anordnungsstrukturen oder topologischen Strukturen studiert; die Erörterung der zugehörigen Koordinatenbereiche wird dann ein Gegenstand der topologischen Algebra. Die endliche Geometrie und ihre Koordinatenstrukturen sind verflochten mit der Kombinatorik, in der gewisse nichtassoziative algebraische Strukturen (wie etwa Steiner-Tripel-Systeme) schon lange betrachtet wurden. In der Theorie der endlichen (einfachen) Gruppen haben die Fischer-Gruppen enge Verbindungen zu einer Klasse von Quasigruppen. Die Bezüge zur Differentialgeometrie, die durch die von Bol, Blaschke, Chern und Thomsen ins Leben gerufene Theorie der Gewebe hergestellt werden, stehen mit an der Wiege der Theorie der Quasigruppen und Loops. Gewisse dabei natürlich auftretende algebraische Bedingungen erweisen sich in überraschender, aber ganz natürlicher Weise auch bei der Koordinatisierung inzidenzgeometrischer Strukturen wieder als relevant. Die Verbindung mit der Differentialgeometrie erschöpft sich aber nicht mit der Gewebetheorie; vielmehr wurden seit etwa 25 Jahren, insbesondere in Rußland, außerordentlich enge Beziehungen zur Theorie der Mannigfaltigkeiten mit affinem Zusammenhang hergestellt, wobei Nichtassoziativität als algebraisches Pendant der Krümmung auftritt. Es tauchen aber auch sonst immer wieder in überraschender Weise Themen in anderen Gebieten der Mathematik auf, in denen Quasigruppen eine Rolle spielen, so etwa in der Theorie der kubischen Hyperflächen oder bei quadratischen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Für einen solchen Themenkomplex, der in der beschriebenen Art in den verschiedensten Bezügen auftritt und sich weiterentfaltet, ist es von großer Bedeutung, wenn von Zeit zu Zeit der Wissensstand zentral zusammengefaßt wird. Für die Theorie der Quasigruppen und Loops liegen die wenigen existierenden Darstellungen dieser Art schon

längere Zeit zurück. Die ersten waren der Ergebnisbericht von R. H. Bruck, „A survey of binary systems“, Berlin: Springer, 1958, und einige Kapitel in dem Buch von G. Pickert, „Projektive Ebenen“, Berlin: Springer, 1955, in denen natürlich die Bezüge zur Inzidenzgeometrie im Vordergrund standen. 1967 folgte das Werk von V. D. Belousov, „Grundlagen der Theorie der Quasigruppen und Loops“ (russisch), Moskau: Izdat. „Nauka“, 1967, das leider nie übersetzt wurde. Seitdem ist keine zusammenfassende Darstellung mehr erschienen.

Erstmals nach so langer Zeit haben nun die Herausgeber und Autoren des vorliegenden Bandes wieder für eine Gesamtdarstellung des Gebietes gesorgt, das in der Zwischenzeit eine mächtige Entwicklung erfahren und – wie schon angedeutet – auch neue Zweige getrieben und weitere Querverbindungen hergestellt hat. Dem enzyklopädischen Charakter der Aufgabe wurden sie dadurch gerecht, daß in getrennten Kapiteln die verschiedenen Aspekte von wechselnden Autoren (insgesamt 19) behandelt werden. Die Darstellung ist in den einzelnen Kapiteln unterschiedlich gehandhabt; manche Teile referieren nur Ergebnisse und verzichten ganz auf Beweise, in anderen sind viele Beweise ausgeführt oder jedenfalls skizziert. Die Koordinierung zwischen den verschiedenen Kapiteln ist relativ lose; terminologische Varianzen sind festzustellen, aber nicht wirklich störend. Die Bibliographie ist allen Kapiteln gemeinsam; sie umfaßt ca. 1700 Einträge auf fast 90 Seiten, mit Verweisen auf die zugehörigen Referate in den *Mathematical Reviews* oder im Zentralblatt für Mathematik. Ein Stichwortverzeichnis hilft, die Querverbindungen zwischen den einzelnen Kapiteln herzustellen. Die Typographie ist – anders als bei den meisten Sammelbänden – für das ganze Buch einheitlich gestaltet; es ist sehr sorgfältig in TEX gesetzt.

Einen ersten Überblick über den Inhalt gibt die Liste der Kapitel mit ihren Autoren.

- I T. Evans: Varieties of loops and quasigroups (26 S.)
- II O. Chein: Examples and methods of construction (68 S.)
- III J. D. H. Smith: Centrality (20 S.)
- IV L. Bénétau: Commutative Moufang loops and related groupoids (28 S.)
- V L. Bénétau: Cubic hypersurface quasigroups (8 S.)
- VI M. Deza, G. Sabidussi: Combinatorial structures arising from commutative Moufang loops (10 S.)
- VII E. G. Goodaire, M. J. Kallaher: Systems with two binary operations, and their planes (36 S.)
- VIII A. Barlotti: Geometry of quasigroups (8 S.)
- IX K. H. Hofmann, K. Strambach: Topological and analytical loops (58 S.)
- X V. V. Goldberg: Local differentiable quasigroups and webs (50 S.)
- XI T. Grundhöfer, H. Salzmann: Locally compact double loops and ternary fields (44 S.)
- XII P. O. Miheev, L. V. Sabinin: Quasigroups and differential geometry (74 S.)
- XIII P. D. Gerber: LIP loops and quadratic differential equations (14 S.)
- XIV F. B. Kalhoff, S. H. G. Prieß-Crampe: Ordered loops and ordered planar ternary rings (22 S.)

Diese Kapitel hätten ausführliche Einzelreferate verdient. Hier kann nur ein erster Eindruck vermittelt werden, indem wir beispielhaft einzelne Gruppen von Themen und Ergebnissen aus den jeweiligen Kapiteln ansprechen.

In Kapitel I, von T. Evans, werden die Klasse der Quasigruppen und die Klasse der Loops systematisch unter Gesichtspunkten der universellen Algebra als Varietäten studiert. In diesem Rahmen werden unter anderem freie Loops and Quasigruppen sowie die Lösung von Entscheidungsproblemen für endlich präsentierte Loops (Wortproblem, Isomorphieproblem) behandelt.

Kapitel II, von Chein, stellt über 100 Methoden zur Konstruktion von Quasigruppen und Loops in systematischer Gliederung vor. Der letzte Abschnitt besteht in einer

Aufschlüsselung der Beispiele nach ihren algebraischen Eigenschaften, unter Verweis auf die Fundstellen in den anderen Abschnitten.

Kapitel III, von J. D. H. Smith, befaßt sich mit der Rolle der Zentralität für die algebraische Theorie der Quasigruppen, insbesondere anhand des Begriffs einer \mathfrak{Z} -Quasigruppe (der bei einem Vergleich mit der Gruppentheorie der Nilpotenzklasse ≤ 1 entspricht). Eine Anwendung ist die Klassifikation aller Quasigruppen von Primzahlordnung, unter Zuhilfenahme starker Hilfsmittel aus der Gruppentheorie.

Kapitel IV, von Bénétau, präsentiert den Stand der Theorie der kommutativen Moufang-Loops (CML's) und zugehöriger Gruppoide, insbesondere der terentropischen Quasigruppen, mit denen die CML's vermöge Isotopie in einer engen Beziehung stehen. Diese Beziehung wird hinsichtlich zentraler Nilpotenz ausgelotet. Weiter werden freie (endlich erzeugte) Objekte in verschiedenen Varietäten terentropischer Quasigruppen studiert und charakterisiert; sie sind bisher nur für kleine Erzeugendenzahlen bekannt. Konstruktionen von CML's mittels äußerer Algebren werden geschildert. Nilpotenz und Auflösbarkeit werden mit Faktorstrukturen in Verbindung gebracht. Schließlich werden die bekannten Klassifikationen von CML's und terentropischen Quasigruppen kleiner Ordnung referiert.

Kapitel V und VI befassen sich mit speziellen geometrischen und kombinatorischen Aspekten von kommutativen Moufang-Loops. Kapitel V, ebenfalls von Bénétau, behandelt die von Manin entdeckte Beziehung zwischen kubischen Hyperflächen beliebiger endlicher Dimension und speziellen kubischen Quasigruppen (= symmetrischen terentropischen Quasigruppen), die hier auf elementare algebraische Weise (und anders als bei Manin) eingeführt und charakterisiert werden. Kapitel VI, von Deza und Sabidussi, geht auf die enge Beziehung zwischen CML's vom Exponenten 3, symmetrischen distributiven Quasigruppen sowie zentrumsfreien Fischergruppen einerseits und Hall-Tripel-Systemen andererseits ein.

Kapitel VII, von Goodaire und Kallaher, behandelt Doppelloops und Ternärkörper und ihre Rolle bei der Koordinatisierung projektiver Ebenen. Die Typologie der Doppelloops wird dabei durch ihren geometrischen Hintergrund, die Lenz-Klassifikation, motiviert. Die einzelnen Typen werden dann in getrennten Abschnitten näher behandelt; ihre Struktur wird erläutert, allgemeine Strukturaussagen werden referiert, die bekannten Konstruktionsprinzipien zur Gewinnung endlicher Doppelloops werden vorgestellt, und es werden Existenz-, Klassifikations- und Charakterisierungsfragen erörtert. Der Text konzentriert sich dabei im wesentlichen auf endliche Doppelloops; insoweit ist der mitgeteilte Informationsstand erschöpfend. (In den Kapiteln IX, XI und XIV werden demgegenüber unendliche topologische bzw. angeordnete Doppelloops und Ternärkörper behandelt.) – Der letzte Abschnitt geht auf Loop-Ringe ein (die Entsprechung zu Gruppenringen für Loops statt Gruppen).

Das kurze Kapitel VIII, von Barlotti, beschäftigt sich mit dem Wechselspiel zwischen algebraischen Eigenschaften einer Quasigruppe oder Loop Q und geometrischen Eigenschaften des zugehörigen 3-Gewebes $\mathcal{W}(Q)$. Die geometrischen Eigenschaften werden dabei durch die Wirkung der Projektivitätengruppe („von Staudt'scher Standpunkt“) oder der Kollineationsgruppe („Kleinscher Standpunkt“) von $\mathcal{W}(Q)$ ausgedrückt. Auf diese Weise läßt sich beispielsweise kennzeichnen, wann Q eine Gruppe oder eine abelsche Gruppe ist; damit sei nur stellvertretend der Typus einer Vielfalt von Ergebnissen angedeutet. Ferner werden freie Konstruktionen von Quasigruppen, Loops and Geweben angesprochen. Die referierten Ergebnisse entstammen im wesentlichen der monumentalen Arbeit von Barlotti und Strambach, *Advances in Math.* 49 (1983), 1–105 über diese Gegenstände, deren Inhalt jedoch weit über das hier Dargestellte hinausgeht.

Kapitel IX, von Hofmann und Strambach, ist topologischen und analytischen Loops und Quasigruppen gewidmet. Nach einer Einführung werden zunächst die Beziehun-

gen zu homogenen Räumen mit Schnitt (u. a. nach Hudson und Kikkawa) erörtert. Ein Abschnitt über Loops, die gewissen Abschwächungen des Assoziativgesetzes genügen, beschreibt die einschneidenden algebraischen Auswirkungen topologischer Annahmen in solchen Loops (nach einem Zyklus von Arbeiten von Hofmann 1958–62 und Arbeiten von Hudson). Weitere Themen sind Aussagen von Scheerer und Strambach über die (algebraische) Topologie von Räumen, die eine idempotente reguläre Multiplikation tragen, sowie Konstruktionen von Strambach zur Gewinnung von topologischen distributiven Quasigruppen aus lokalkompakten abelschen Gruppen.

Das Herzstück des Kapitels ist eine in sich geschlossene Darstellung der Lie-Theorie analytischer Loops, d. h. der Beziehungen zwischen lokalen Lie-Loops und Akivis-Algebren, mit sehr erhellenden programmatischen Ausführungen über Analogien und Verschiedenheiten im Vergleich mit der Theorie der Liegruppen. Bei Spezialisierung auf Moufang-Lie-Loops und Mal'cev-Algebren wird die Theorie besonders übersichtlich. Die meist auf russisch erschienenen diesbezüglichen Ergebnisse von Mal'cev, Akivis, Kuz'min und ihren Schülern sind hier auf äußerst verdienstvolle Weise für den westlichen Leser aufbereitet. (Demselben Themenbereich gelten auch Abschnitte der Kapitel X und XII, wobei dort differentialgeometrische Aspekte im Vordergrund stehen.)

Kapitel X, von Goldberg, stellt die Ergebnisse der modernen Theorie der differenzierbaren Gewebe und ihre Beziehung zu (lokalen) differenzierbaren n -stelligen Quasigruppen in kurzgefaßter Form vor. Nach den klassischen Arbeiten von Blaschke und seiner Schule sowie von Bol und Chern wurde dieser Themenbereich wieder seit etwa 1970 intensiv von Akivis, Goldberg u. a. bearbeitet. Die frühen Arbeiten hatten sich fast ausschließlich mit 3-Geweben der Kodimension 1 befaßt, mit Ausnahme einer für das Weitere wegweisenden Arbeit von Chern. Akivis und seine Schule bauten eine systematische Theorie von 3-Geweben beliebiger Kodimension auf; mit Arbeiten von Goldberg über $(n+1)$ -Gewebe beliebiger Kodimension gewann die Theorie dann ihre heutige Allgemeinheit. Ihnen entsprechen Systeme von lokalen differenzierbaren n -stelligen Quasigruppen. In diesem Zusammenhang hat auch Akivis die Lietheorie differenzierbarer Loops (siehe die Ausführungen zu Kapitel IX) entwickelt. Eine zentrale Rolle im Aufbau der Theorie kommt dem mit einem Gewebe verbundenen Torsionstensor und dem Krümmungstensor zu, die in den genannten spezielleren Situationen auch schon von Chern und Akivis betrachtet wurden. Die Themenbereiche dieses Kapitels sind, neben anderen Gegenständen, umfassend in einem wenig früher erschienenen Buch des Verfassers, „Theory of multicodimensional $(n+1)$ -webs“, Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1988 dargestellt.

Kapitel XI, von Grundhöfer und Salzmann, handelt von lokalkompakten topologischen Doppelloops und Ternärkörpern. Das Schwergewicht liegt auf Ternärkörpern, die kompakte topologische projektive Ebenen koordinatisieren, und auf der Untersuchung dieser Ebenen unter dem Aspekt ihrer Automorphismengruppe (die stets eine lokalkompakte Gruppe ist). Ein erster Teil erörtert die allgemeine Situation, während im zweiten Teil Zusammenhangsvoraussetzungen hinzukommen. Ein Schwerpunkt des ersten Teils ist die Strukturtheorie von lokalkompakten Quasikörpern und speziell von lokalkompakten Fastkörpern und Alternativkörpern. Für lokalkompakte Fastkörper führt sie zu dem Ergebnis, daß es sich immer um Dickson-Fastkörper handelt; im (schwierigeren) total unzusammenhängenden Fall ist dies ein neueres, tiefliegendes Ergebnis von Grundhöfer. Die bekannte Klassifikation aller lokalkompakten Alternativkörper wird skizziert, mit zum Teil neuen Beweisen.

Der zweite Teil widmet sich den kompakten, zusammenhängenden projektiven Ebenen. Es handelt sich um eine kompakten Überblick über die Theorie dieser Ebenen unter dem Blickpunkt ihrer Automorphismengruppen. Diese Theorie hat Salzmann vor ca. 40 Jahren in Angriff genommen und seitdem zusammen mit seinen Schülern systematisch entwickelt und ausgebaut. Eines der Leitziele ist die explizite Bestimmung

aller solchen Ebenen, die gewisse Homogenitätsbedingungen erfüllen. Ist die topologische Dimension l einer Gerade endlich, so kann sie nach Ergebnissen von Löwen nur die Werte 1, 2, 4 oder 8 annehmen, entsprechend den klassischen Beispielen (den projektiven Ebenen über \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} oder der Oktavenalgebra \mathbb{O}). Als Homogenitätsmaß kann auch die topologische Dimension der Automorphismengruppe Σ dienen. In dieser Hinsicht läßt sich inzwischen für jeden Wert von $l \in \{1, 2, 4, 8\}$ eine Schranke g angeben derart, daß eine Ebene mit $\dim \Sigma > g$ notwendig klassisch sein muß, hingegen nichtklassische Ebenen mit $\dim \Sigma = g$ existieren. Falls Σ nicht halbeinfach ist und genügend große Dimension hat, so besagen Ergebnisse von Salzmann, daß eine Translationsebene vorliegen muß. Deren Theorie und Klassifikation, die für $l = 2$ von Betten und für $l \in \{4, 8\}$ vom Referenten stammt, führt dann zum Ziel. Auf ähnliche Weise kann man auch die nichtklassischen Ebenen mit $\dim \Sigma$ nahe bei g sämtlich explizit bestimmen. Diese werden in den letzten Abschnitten getrennt nach den Werten für l vorgestellt, zusammen mit weiteren dimensionsspezifischen Beispielen und Aussagen. – Seit dem Erscheinen des Buchs wurden im übrigen gegenüber dem geschilderten Stand bei der Klassifikation der Ebenen mit großer Gruppe weitere Fortschritte erzielt.

In Kapitel XII stammen die ersten sechs Abschnitte von Sabinin, die letzten beiden von Miheev und Sabinin. Hier ist wieder die Differentialgeometrie angesprochen, und zwar noch unmittelbarer als in der Gewebetheorie, obwohl die hier vorgestellte Theorie die jüngere ist. Das Generalthema ist die Beschreibung beliebiger differenzierbarer Mannigfaltigkeiten mit affinem Zusammenhang durch geeignete Familien von Quasigruppen, sowie die Korrespondenz zwischen differentialgeometrischen und algebraischen Begriffsbildungen und Eigenschaften, die dabei zu beobachten ist. Eine solche Beschreibung trat erstmals speziell für symmetrische Räume bei Loos auf. Die allgemeine Theorie für beliebige Zusammenhänge wurde unabhängig von Kikkawa und Sabinin entwickelt. Zur algebraischen Beschreibung eines Zusammenhangs ∇ auf einer Mannigfaltigkeit M benötigt man in jedem Punkt eine lokale Loop, wobei diese lokalen Loops untereinander in bestimmter Weise zusammenhängen. Sie werden durch Paralleltransport von Geodätischen entlang Geodätischen definiert und gestatten daher auch noch eine Art Skalarmultiplikation. Durch Verdichtung in eine einzige algebraische Struktur mit gewissen Differenzierbarkeitseigenschaften gelangt der Autor zum Begriff einer partiellen geodularen Struktur \mathcal{M} auf M . In \mathcal{M} finden dann differentialgeometrische Eigenschaften von (M, ∇) ihre algebraische Entsprechung. Dies wird für eine Reihe von Eigenschaften im einzelnen durchgeführt. Der (lokalen) Reduktivität wird dabei besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Sie steht in engem Zusammenhang damit, daß die zugehörigen Loops Links-A-Loops oder sogar (bei lokal symmetrischen Räumen) Links-Bol-Loops sind. In diesem Rahmen werden auch die von Ledger, Obata und Kowalski betrachteten Verallgemeinerungen von symmetrischen Räumen behandelt.

Ein eigener Abschnitt ist den Beziehungen zwischen (Links-)Quasigruppen und homogenen Räumen mit Schnitt gewidmet, auf der Grundlage von Arbeiten von Sabinin (1972). Hier bestehen thematische Überschneidungen mit Ausführungen aus Kapitel IX nach Hudson (1964) und Kikkawa (1975).

Die letzten beiden, gemeinsam mit Miheev verfaßten Abschnitte schildern Zugänge zur infinitesimalen Theorie analytischer Loops, die mit diesen differentialgeometrischen Methoden arbeiten. Sie gehen zunächst ganz andere Wege als in Kapitel IX. Die in der allgemeinen Situation konstruierten infinitesimalen Strukturen werden für Bol-Loops auf eine Bol-Algebra (ein spezielles Lie-Tripel-System) zurückgeführt. Im Fall von Moufang-Loops läßt sich diese weiter auf eine Mal'cev-Algebra reduzieren, womit die Ergebnisse mit den in Kapitel IX geschilderten konvergieren.

Das hier ausgebreitete Material, sofern es nicht überhaupt neu ist, lag bisher hauptsächlich in russisch oder allenfalls in Übersetzungen russischer Zeitschriftenartikel

vor. Es nun, samt vielen Beweisen oder zumindest Beweisskizzen, in systematischer Zusammenschau auf englisch zu finden, ist von großem Wert.

Das kurze Kapitel XIII, von Gerber, beschreibt Beziehungen zwischen (lokalen) Loops auf \mathbb{R}^n mit Linkskürzungsregel, die eine spezielle analytisch gegebene Gestalt haben, und gewissen Algebren. Diese Beziehungen ähneln denjenigen zwischen einer Liegruppe und (der assoziativen Einhüllenden) ihrer Liealgebra. Die von der Algebra zur Gruppe führenden quadratischen Differentialgleichungssysteme spielen dabei eine explizite, große Rolle. Verbindungen zu anderen Ansätzen für eine infinitesimale Theorie analytischer Loops, wie sie in den Kapiteln IX und XII erörtert wurden, werden nicht hergestellt.

Kapitel XIV, von Kalhoff und Sybilla Prieß-Crampe, behandelt angeordnete Loops und angeordnete Ternärkörper hinsichtlich ihrer algebraischen und ordnungstheoretischen Struktur. Die Darstellung legt das Hauptgewicht auf die neueren Entwicklungen seit dem Erscheinen des einschlägigen Buchs der zweiten Autorin [„Angeordnete Strukturen: Gruppen, Körper, projektive Ebenen“, Berlin: Springer, 1983]. Themenschwerpunkte sind archimedische und speziell ordnungsvollständige angeordnete Loops und Ternärkörper, sowie die bemerkenswerte Übertragung der Artin-Schreier-Theorie auf Ternärkörper, die dem ersten Autor in den letzten Jahren gelungen ist. Sie mündet in eine Verallgemeinerung wesentlicher Teile der Theorie des Witttrings eines formal reellen Körpers und des Raums seiner Ordnungen für anordenbare Ternärkörper.

Abschließend soll noch auf ein einführendes Buch zum selben Gegenstand hingewiesen werden, das die Mitherausgeberin Hala O. Pflugfelder parallel zu dem hier besprochenen Werk verfaßt hat [„Quasigroups and Loops: Introduction“ (Sigma Series in pure mathematics, Vol. 7), Berlin: Heldermann, 1990, 147 S.]. Es bewegt sich auf elementarem Niveau, die behandelten Gegenstände sind in allen Details ausgeführt, und jedem Abschnitt sind Übungen beigegeben. Die Themen der 5 Kapitel dieses Buches sind: Grundbegriffe über Quasigruppen und Loops; die Beziehungen zu Geweben und affinen Ebenen; Isotopietheorie; eine Einführung in die Theorie der Moufang-Loops und der Bol-Loops; einige spezielle Klassen von Quasigruppen (total symmetrische, distributive, sowie entropische Quasigruppen).

Kiel

H. Hähl

Kawakubo, K., The Theory of Transformation Groups, Oxford u.a.: Oxford University Press 1991, 338 S., 45 N/S

The theory of topological transformation groups is the study of the ways in which a given group may act on topological spaces. Often, the spaces are equipped with additional structures which make them such objects as polyhedra, CW complexes, topological manifolds, piecewise linear manifolds, or the most important, differentiable (smooth) manifolds. The group G acts on a space X by homeomorphisms (called *symmetries or transformations*) of X , usually, preserving the additional structure of X . As a result, if the action is effective, G becomes a group of transformations of X . The acting group G has a topology which, in most cases, makes G a locally compact topological group. This topology plays a substantial role in the structure of the transformation group. Properties of transformation groups of X are used to study properties of X itself. On the other hand, much information about specific G can be obtained by considering G as transformation group of various kinds of spaces.

Much of the important part of the theory deals with group actions on manifolds, and a natural question that occurs is *what kind of the acting group G are we dealing with?* Well, in his work, Lie has studied *analytic* transformation groups and, in his famous article

[Hi], Hilbert asked to what extent Lie's work could be developed without assuming differentiability. As Hilbert has shown, differentiability is dispensable in a number of problems, for example, in characterization of classical geometry in terms of transformation groups. The original Hilbert's Fifth Problem was followed by a conjecture (known as the Hilbert-Smith conjecture) which asserts that if a locally compact topological group G acts effectively on a topological manifold M , then G is a Lie group (so that *differentiability is not completely dispensable*). The work of Bochner and Montgomery [BM] provides the affirmative answer to this conjecture when M is a differentiable manifold and G acts on M by diffeomorphisms. Now, the conjecture can be reduced to the question of whether the p -adic group can act effectively on a connected manifold. Recently, the later question has been answered negatively by McAuley [McA], proving the Hilbert-Smith conjecture.

Topological transformation groups occur in various parts of mathematics and mathematical physics, and the theory (even when restricted to compact transformation groups) deals with so many disparate topics that it is impossible to cover all aspects of the subject in one book of reasonable length. In the nineteen fifties, the pioneering book on topological transformation groups was written by Montgomery and Zippin [MZ]. The book contains basic terminology of the subject, and a major part of the book is devoted to the solution of Hilbert's Fifth Problem on the structure of locally compact groups. The conference proceedings, one edited by Mostert [Mos] and one edited by Schultz [Sch], are excellent sources of information on subject developments up to the nineteen sixties and eighties, respectively.

The present book by Katsuo Kawakubo (originally published in Japanese by Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 1987) is intended to be an introduction to the theory of topological transformation groups. The book is divided into six chapters. Chapter 1 gives basic notions of the subject and presents many examples of the discussed objects. Chapter 2 introduces fibre bundles, principal bundles, G -vector bundles, invariant integration on compact topological group, and G -invariant metrics on G -vector bundles. Chapter 3 provides an introduction to the theory of differentiable (smooth) manifolds and Lie groups, in particular, to homogeneous spaces. Chapters 4 and 5 form a significant part of the book.

Chapter 4 deals with geometric results on the structure of smooth G -manifolds for a given compact Lie group G . This chapter contains the G -invariant tubular neighborhood theorem, the slice theorem, and two structure theorems. The first structure theorem describes the smooth fibre bundle determined by the projection of M onto the orbit space M/G for a smooth G -manifold M with one orbit type G/H . The second structure theorem describes the submanifold of a smooth G -manifold M consisting of all orbits in M of a given type G/H . Next, Chapter 4 contains a decomposition theorem which shows how one can decompose a compact smooth G -manifold M into a union of disk bundles over compact G -invariant submanifolds of M , each with one orbit type. There is also a blowing up theorem included which allows to reconstruct from a twisted product, the G -invariant subset of a smooth G -manifold M consisting of all orbits with isotropy type greater than or equal to (H) for a given closed subgroup H of G . Moreover, this chapter contains theorems asserting the finiteness of number of orbit types, the existence and uniqueness of principal orbit types, and describing the dimension of compact Lie groups admitting smooth, effective actions on connected manifolds.

Chapter 5 applies algebraic methods to study geometric structures of transformation groups. Specifically, for a finite group G , a discussion is provided on G -complexes, their orbit spaces and fixed point sets. The transfer homomorphism is presented and the famous Smith theory is described in the context of G -complexes and compact smooth G -manifolds. Then, the Lefschetz fixed point theorem is proved and formulae are given for Euler characteristics of fixed point sets and orbit spaces, and Lefschetz numbers of

transformations of G -complexes and compact smooth G -manifolds. Along the lines of the Smith theory, Chapter 5 presents also basic properties of finite groups acting freely or semi-freely on spheres.

In contrast to Chapters 1–5, Chapter 6 contains much more advanced topics and requires a good background preparation of the reader. Mainly, it covers topics related with author's research such as localization theorems, a topological proof of the Atiyah-Singer G -signature theorem, index formulae, equivariant Riemann-Roch theorems, and vanishing theorems of equivariant genera. It also presents a partial answer to the Petrie conjecture asserting that if a closed smooth manifold M of the homotopy type of the complex projective space $\mathbb{C}P^n$ admits a smooth (non-trivial) circle action, then M has the same total Pontrjagin class as does $\mathbb{C}P^n$.

Kawakubo's book is an introduction to the theory of topological transformation groups. Since this goal is shared by other books such as those written by Bredon [Br], Hsiang [Hs], and tom Dieck [tD], a brief explanation how Kawakubo's exposition differs is in order. Hsiang's book, along the lines of the classical linear representation theory of compact connected Lie groups, presents an approach to the cohomology theory of topological transformation groups. In turn, tom Dieck's book focuses on equivariant algebraic topology and presents (among other topics) localization technics for equivariant cohomology and provides an extensive discussion on the Burnside ring and related problems. To large extend, both [Hs] and [tD] can be regarded as complementary expositions to the material presented in Bredon's book which became a standard reference to background information on compact transformation groups. Most of the topics selected for presentation in Kawakubo's book (except for Chapter 6) one also finds in [Br] [Hs], or [tD].

As the author of the book under review noted in the preface, in writing his book, he has greatly profited from a number of sources, including Bredon's book [Br]. Chapter IV of [Br] presents a systematic discussion of *locally smooth* (in the literature, called also *locally linear*) actions on manifolds which (by the definition) have linear tubes about all orbits, so that these actions are halfway between smooth and continuous actions on manifolds. Since locally smooth actions have attracted much attention of topologists working on compact transformation groups, and they play an important role in the present developments of the subject, we shall quote the following sentence from the preface of [Br]: ... *locally smooth actions should be regarded as a basic subject for study (second only, in interest, to smooth actions), and should lead to interesting results in the future.* In Kawakubo's book, locally smooth actions are not discussed at all, and for most beginners in the subject, it should be interesting to learn that many results on smooth actions from the book they read, are also true for locally smooth actions (reference to [Br] would do the job). The absence of remarks on locally smooth actions in Kawakubo's book is an example of some lack of comments on the possibility of obtaining far-reaching generalizations of the discussed topics, especially, of the Smith theory (presented in [Br], [Hs], and [tD]).

The main virtue of Kawakubo's book is that it is very carefully and clearly written (with few misprints, not leading to confusion). The concepts and results are illustrated and motivated by many examples and applications. At the end of each chapter, some exercises are included, and at the end of the book, the answers are provided. Except for Chapter 6, the book is self-contained and requires only a basic background knowledge of algebra and topology. The introduction to fibre bundles, differentiable manifolds, and Lie groups is transparent and should be very useful for a beginner in the subjects. The expressed aim of this book is to present an introduction to the theory of transformation groups which will be suitable for all those coming to the subject for the first time. Undoubtedly, this aim has been achieved, and it is very likely that in years to come, the book will serve as an easy to read textbook on topological transformation groups.

References

[BM] Bochner, S.; Montgomery, D.: Locally compact groups of differentiable transformations, *Annals of Math.* **47** (1946) 639–653
 [Br] Bredon, G. E.: *Introduction to compact transformation groups* (Pure and Applied Math. 46), Academic Press 1972
 [tD] tom Dieck, T.: *Transformation groups* (de Gruyter Studies in Math. 8), Walter de Gruyter 1987
 [Hi] Hilbert, D.: *Mathematical problems*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **8** (1902) 437–479. Reprinted in *Proc. Amer. Math. Soc. Sympos. Pure Math.* **28** (1976) 1–34
 [Hs] Hsiang,, W.-Y.: *Cohomological theory of topological transformation groups* (EMG 85), Springer-Verlag 1975
 [McA] McAuley, L. F.: *A p-adic group can not act effectively as a transformation group on an n-manifold – Hilbert’s Fifth Problem (general version)*, Preprint 1993
 [Mos] Mostert, P. S. (ed.): *Proceedings of the conference on transformation groups* (New Orleans 1967), Springer-Verlag 1968
 [MZ] Montgomery, D.; Zippin, L.: *Topological transformation groups* (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 1), Interscience Publishers 1955
 [Sch] Schultz, R. (ed.): *Group actions on manifolds* (Contemporary Math. 36), Amer. Math. Soc. 1985

Poznań

K. Pawałowski

Robinson, D. W., Elliptic Operators and Lie Groups (Oxford Mathematical Monographs), Oxford: Clarendon Press 1991, 558 S., £ 45,00

Thema des Buches sind parabolische Gleichungen auf einem Banachraum X , wobei die Differenzierbarkeitsstruktur auf X durch eine Liegruppendarstellung induziert wird. Untersuchungsgegenstand ist also ein stark elliptischer Operator H und die von ihm erzeugte einparametrische Operatorhalbgruppe.

Wie definiert man in dieser allgemeinen Situation elliptische Operatoren? Klassisch betrachtet man den Banachraum $X=L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, $m \in 2\mathbb{N}$ und den Operator

$$(1) \quad H = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha A^\alpha,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ Multiindizes und $c_\alpha \in \mathbb{C}$ Konstanten (oder allgemeiner komplexwertige Funktionen auf \mathbb{R}^d) sind, die die starke Elliptizitätsbedingung

$$(2) \quad \operatorname{Re} \left((-1)^{m/2} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \right) \geq k \cdot |\xi|^m$$

($\xi \in \mathbb{R}^d$) mit $k > 0$ erfüllen. Die Operatoren A^α sind definiert durch $A^\alpha = A_1^{\alpha_1} \dots A_d^{\alpha_d}$, wobei $A_j = d/dx_j$ den Generator der Translationsgruppe in der j -ten Koordinate berechnet.

Der Autor geht nun von folgender allgemeineren Situation aus: Sei $U: G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ eine stark stetige Darstellung einer Liegruppe G auf dem Banachraum X . Es bezeichne $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ eine Basis der Liealgebra. Dann ist $(U(\exp(-t\alpha_j)))_{t \in \mathbb{R}}$ eine einparametrische Gruppe. Wählt man nun als A_j den Generator dieser Gruppe, so läßt sich der Operator H durch dieselbe Formel (1) definieren. (In der klassischen Situation ist somit $X=L^p(\mathbb{R}^d)$, $G=\mathbb{R}^d$, U die Darstellung durch Translation und $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ die natürliche Basis von \mathbb{R}^d .)

Die Untersuchung solcher Operatoren geht auf Langlands (1960) zurück. In den letzten Jahren nahm die Entwicklung, die wesentlich vom Autor geprägt worden ist, einen stürmischen Verlauf, so daß jetzt eine sehr interessante, in weiten Teilen definitive Theorie vorliegt. Diese wird im vorliegenden Buch dargestellt, wobei folgende Themen behandelt werden:

Hauptgegenstand bilden die oben definierten elliptischen Operatoren H mit konstanten Koeffizienten (Kapitel 1–4). Dabei sollte man sich vergegenwärtigen, daß diese (über Karten) lokal elliptischen Operatoren mit variablen Koeffizienten auf \mathbb{R}^d entsprechen. Eine besondere Schwierigkeit ergibt sich daraus, daß die Differentialoperatoren A_j nicht kommutieren.

In Kapitel 1 wird der grundlegende, von Langlands stammende, Satz bewiesen, daß H eine holomorphe Operatorhalbgruppe $(T(t))_{t>0}$ auf X erzeugt. Die elliptische Regularitätstheorie wird entwickelt und die zugehörigen analytischen Elemente werden untersucht (Kapitel 2). In Kapitel 3 wird gezeigt, daß die Halbgruppe durch einen von der Darstellung unabhängigen Kern in der Form

$$(3) \quad T(t)x = \int_G K_t(g)U(g)x dg \quad (t > 0, x \in X)$$

gegeben ist.

Ist H der Laplaceoperator und $G = \mathbb{R}^d$, so erhält man natürlich $K_t(\cdot)$ als den Gaußkern. Ein zentrales und sehr aktuelles Thema ist der punktweise Vergleich des allgemeinen Kerns mit dem Gaußkern. Kapitel 4 ist Operatoren zweiter Ordnung gewidmet. Für diese ist der Kern eine positive Funktion, und das asymptotische Verhalten von Kern und Halbgruppe für $t \rightarrow \infty$ hat besonders schöne Eigenschaften. In Kapitel 5 werden Operatoren mit variablen Koeffizienten auf $L^p(G)$ und $C_0(G)$ betrachtet. Auf allgemeinere als stark elliptische Operatoren wird an verschiedenen Stellen des Buches eingegangen.

Soweit zum Inhalt des Buches. Als Voraussetzung zur Lektüre benötigt man vor allem Funktionalanalysis und Halbgruppentheorie; was Liegruppen angeht, so reichen Grundkenntnisse.

Elliptische Operatoren auf Liegruppen spielen eine große Rolle in der Analysis und ihren Anwendungen. Ein Großteil der in dem Buch dargestellten Theorie ist erst kürzlich entstanden, und selbst im euklidischen Fall waren eine Reihe von Ergebnissen bisher nur schwer zugänglich. Es ist deshalb sehr zu begrüßen, daß nunmehr eine systematische und umfassende Darstellung in Buchform vorliegt.

Was den Stil angeht, so besticht die Fülle der kunstvoll geschriebenen, motivierenden Einleitungen und Erläuterungen. Neue Techniken werden zunächst informell beschrieben oder an Hand von speziellen Beispielen eingeführt. Generell wird die Struktur der Beweise klargestellt bevor Details gegeben werden. Dies alles macht die Lektüre sehr erfreulich.

Es handelt sich um eine sehr gelungene, originelle funktionsanalytische Darstellung eines hochinteressanten und aktuellen Teilgebiets der partiellen Differentialgleichungen.

Langlands, R. P.: Semi-groups and representations of Lie groups. Doctoral thesis, Yale University 1960

Langlands, R. P.: Some holomorphic semigroups. Proc. Nat. Acad. Sci. **46** (1960) 361–363.

Besançon

W. Arendt

Euler, N., Steeb, W.-H., **Continuous Symmetries, Lie Algebras and Differential Equations**, Mannheim u. a.: B. I. Wissenschaftsverlag 1992, 320 S., pb. DM 48,-

Die Lieschen Ideen zur gruppentheoretischen Behandlung von Differentialgleichungen sind schon vor etwa einem Jahrhundert entstanden. Sie bildeten ursprünglich den Kern der Lie-Theorie und haben heute, nach einer langen Phase der Entwicklung zur heutigen Theorie von Liegruppen und Liealgebren, wieder einen großen Aufschwung erfahren. Davon zeugen auch die in den letzten Jahren erschienen Bücher (P. Olver 1986,

G. W. Bluman and S. Kumei 1989, H. Stephani 1989), in diese Folge reiht sich das Buch von Euler und Steeb ein. Nach Thematik und Stoffumfang wäre es am ehesten mit dem Buch von Olver zu vergleichen. Aufbau und Herangehensweise sind jedoch recht unterschiedlich. Der Inhalt überdeckt ein weitgespanntes Gebiet von den Grundbegriffen der Gruppentheorie über Lie-Theorie bis hin zu Lie-Methoden (Symmetriebetrachtungen) für Differentialgleichungen und deren Anwendungen in Mathematik und Physik:

1. Introduction, 2. Groups, 3. Lie Groups and Lie Transformation Groups, 4. Infinitesimal Transformations and Generators, 5. Lie Algebras, 6. Introductory Examples, 7. Lie Derivative and Invariance, 8. Prolongation and Invariance, 9. Lie-Bäcklund Vektor Fields, 10. Differential Equation for a given Lie algebra, 11. A List of Symmetry Vector Fields, 12. Recursion Operators, 13. Conservation Laws, 14. Symmetries and Painleve Test, 15. Lie Algebra Valued Differential Forms, 16. Bose Operators and Lie Algebras, 17. Computer Algebra.

Die Abschnitte 1.–5. geben eine straffe Einführung zu den Grundbegriffen der Lie-Theorie. Obwohl ansprechend geschrieben, ist dies der weitaus schwächere Teil des Buches, der nicht wenige sprachliche Ungenauigkeiten und andere Ungereimtheiten enthält. So wird etwa vom linearen Raum aller nichtsingulären $m \times m$ -Matrizen gesprochen, die $GI(m, R)$ als lineare invertierbare Transformation bezeichnet, die Kompaktheit von $O(m)$ wird damit begründet, daß jedes Element abgeschlossen und beschränkt sei, und manches andere mehr. Dies kann man von den folgenden Abschnitten, die die eigentliche Thematik des Buches betreffen, nicht in gleicher Weise feststellen. Die Darstellung ist gedrängt, sehr informativ und verläuft meist nach dem Muster: Definition von Begriffen, wenige Sätze, wenige Beweise, dafür Beispiele, oft mit Hinweisen auf Quellen versehen. Überhaupt lebt dieses Buch sehr von den vielen instruktiven Beispielen (ca. 170), die sich im 2. Teil zumeist auf konkrete Differentialgleichungen beziehen, es ist damit auch für den mit dem Stoff vertrauteren Leser wertvoll. Der Abschnitt 11. gibt zudem zusammenfassend Auskunft über die Symmetrien von 22 bekannten Differentialgleichungen der Mathematischen Physik.

Damit ist das Buch sehr konkret, für manchen Leser werden aber wohl mitunter Motivation und verbindender Text zu kurz ausfallen. Am Ende wird ein kurzer Überblick zu Computeralgebra-Möglichkeiten gegeben, mit denen die neuere Entwicklung bei den Lie-Methoden für Differentialgleichungen sicherlich sehr eng zusammenhängt. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis enthält ca. 150 Titel. Trotz der genannten Schwächen ist dies ein sehr interessantes Buch und dem Leser zu empfehlen.

Greifswald

G. Czichowski

Horn, R. A., Johnson, C. R., Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press 1991, 607 S., £ 50.–

Im Jahre 1985 erschien das Buch *Matrix Analysis* der oben genannten Autoren. Die damals bereits angekündigte Ergänzung, die auch in der Besprechung in den Jahresberichten der DMV 90/4 erwähnt wurde, liegt nun vor.

Der Ergänzungsband ist stärker spezialisiert und stellt viele Ergebnisse aus den nachfolgenden Themengruppen erstmals in Buchform dar. Da aber auch Hintergrund, Motivation und historische Entwicklung beschrieben werden, eignet es sich auch für eine (allerdings recht spezialisierte) Vorlesung oder für Seminare. Hier sind die reichlich eingestreuten Übungen und Probleme, die jedoch von sehr unterschiedlichem Kaliber sind, nützlich. Die Auswahl der Themen ist stärker als im ersten Band durch die Forschungsgebiete der Autoren bestimmt.

Eine grobe Übersicht geben die Kapitelüberschriften:

1. The field of values – 2. Stable matrices and inertia – 3. Singular value inequalities – 4. Matrix equations and the Kronecker product – 5. The Hadamard product – 6. Matrices and functions.

Es fällt auf, daß die Kapitel 3 und 6 gegenüber der ursprünglichen Ankündigung dazugekommen sind. Sie sind bestimmt eine Bereicherung. Mir fiel besonders die sehr ausführliche Erörterung der historischen Entwicklung in § 3 auf.

Wie der erste Band ist auch dieses Buch sehr sorgfältig korrigiert. Es fiel mir eigentlich nur auf, daß im Gegensatz zu der historischen korrekten Form „Riccati“ durchgehend „Ricatti“ geschrieben wird.

Eine gewisse Unübersichtlichkeit kommt dadurch auf, daß Originalartikel nur am Ende von Abschnitten unter „Notes and further readings“ aufgeführt werden, während der Abschnitt „References“ am Ende nur Bücher enthält. Dagegen ist der Index überaus detailliert und das Verzeichnis der Notationen nützlich.

Die kleinen Einwände trüben den Gesamteindruck dieses Werkes nicht. Ich glaube, daß es ein großes Verdienst dieses Buches ist, ein Gebiet, das durch viele verstreute Einzelergebnisse gekennzeichnet ist, zusammengefaßt zu haben. Wie bereits der erste Band wird es (zumindest für die nähere Zukunft) ein Standardwerk sein.

Bielefeld

L. Elsner

Rao, M. M., Ren, Z. D., Theory of Orlicz Spaces, New York u. a.: Marcel Dekker 1991, \$ 145.–

In the theory of Orlicz spaces two monographs appeared about 35 years ago, namely: “Banach Function Spaces” by W. A. J. Luxemburg in 1955 and “Convex Functions and Orlicz Spaces” by M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutickii in 1956. In 1986 there was published (in Chinese) the monograph “Geometry of Orlicz Spaces” by Chinese mathematicians Wu Congxin, Wang Tingfu, Chen Shutao and Wang Yuwen. Three years ago there was published the monograph “Orlicz Spaces and Interpolation”, *Seminars in Math.* 5, Campinas 1989 by L. Maligranda.

However, during the last 35 years there has been published many interesting results in the Theory of Orlicz Spaces which were not included into any monograph mentioned above. Therefore, it was natural to publish a new monograph on this theory. The monograph by M. M. Rao and Z. D. Ren contains most of the classical results in this theory as well as many further results from the last 35 years in this topic. There has been included among others:

- comparison of Orlicz spaces, Orlicz classes and subspaces of order continuous elements in Orlicz spaces
- separability and basis in Orlicz spaces
- criteria for compactness and weak compactness in Orlicz spaces
- representation of linear continuous functionals over Orlicz spaces
- indices of Orlicz functions and their applications
- interpolation theorems of Riesz-Thorin type and of Marcinkiewicz type in Orlicz spaces
- fractional integration and packing constant in Orlicz spaces
- some application of Orlicz spaces into the probability theory
- some problems from the geometry of Orlicz spaces (rotundity, uniform rotundity, smoothness, ect.)
- operators between Orlicz spaces

- Hardy-Orlicz spaces
- Lorentz and Lorentz-Orlicz spaces
- Orlicz-Sobolev spaces
- generalized Orlicz spaces generated by so-called-functions (not necessarily convex).

Many bibliographical notices are also given (although many interesting papers are omitted here).

It seems that this monograph should be interesting and useful as well to study the theory of Orlicz spaces both for mathematicians working in the Theory of Function Spaces and in related topics (Interpolation Theory, Operator Theory, Probability Theory, etc.).

Poznan

H. Hudzik

Selberg, A., Collected Papers (2 Bände), Berlin u.a.: Springer-Verlag 1989, 1991, Bd. 1, 711 S, DM 238,-, Bd. 2, 253 S., DM 138,-

Der norwegische Mathematiker Atle Selberg ist einer der großen Mathematiker unserer Zeit. Er hat grundlegende Beiträge in einer Vielzahl von Gebieten der Mathematik geleistet. Seine Hauptinteressengebiete sind die analytische Zahlentheorie und die Theorie der Modulformen. Im ersteren hat er besonders in den vierziger Jahren neue und tiefe Methoden in der Theorie der Riemannschen Zetafunktion eingeführt; als Beispiel sei lediglich sein Beweis, daß ein positiver Anteil der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion auf der kritischen Gerade liegen, erwähnt. Auch in den vierziger Jahren hat er seine bahnbrechenden Untersuchungen in den Siebmethoden der analytischen Zahlentheorie begonnen, die er in der Zwischenzeit weiterentwickelt hat. In den fünfziger Jahren hat er sich hauptsächlich der Theorie der Modulformen gewidmet. Hier hat er die Selbergsche Spurformel entdeckt; vielleicht noch wichtiger war seine Theorie der sogenannten Eisensteinreihen, die das kontinuierliche Spektrum bei der Spektralanalyse von Modulformen darstellen. Seine Beweise der analytischen Fortsetzbarkeit dieser Reihen hat völlig neue Perspektiven in der Theorie der automorphen Formen eröffnet und kann kaum überbewertet werden. Aus diesen Gedanken heraus ist er auch zu der Vorstellung gekommen, daß mit wenigen Ausnahmen diskrete Untergruppen von Lie-Gruppen arithmetisch sind. Er hat eine Reihe Überlegungen angestellt, die diese Vermutung in manchen Fällen bestätigen. Es war G. A. Margulis vorbehalten, einen Beweis der Vermutung zu finden, der besonders reich an neuen Ideen in der Geometrie und der Gruppentheorie ist. Seine skandinavischen und besonders norwegischen Vorgänger Abel, Brun, Fredholm und Lie und der indische Mathematiker Ramanujan haben ihn stark beeinflußt; z. B. macht sein erster Beweis der analytischen Fortsetzbarkeit der Eisensteinreihen von Ideen von Fredholm Gebrauch. Am Schluß vom ersten Band wird ein Transkript eines Vortrags wiedergegeben, worin Selberg unter anderem über seine Entwicklung spricht.

Dieser kurze und lückenhafte Abriss macht deutlich, welche Bedeutung und Tiefe das Werk Selbergs aufweist, obwohl vieles unerwähnt bleibt. Selberg ist ein Meister der Technik und beschreibt seine Mathematik in einer klaren und knappen Prosa. Die Knappheit kann für manche Leser Schwierigkeiten bereiten; sie erlaubt es dem Leser aber die neuen Ideen hinter der Technik zu erkennen. In einem am Ende von Band 2 befindlichen Nachwort schreibt Selberg, daß ihm das Schreiben immer schwer gefallen ist. Zum großen Teil kann man diese Meinung verstehen, wenn man bedenkt, welche Ansprüche Selberg an sich stellt. Seine Abneigung gegenüber dem Schreiben findet auch in der Tatsache Ausdruck, daß er nach 1950 kaum in Zeitschriften veröffentlicht hat. Fast alle seiner Arbeiten sind in Tagungsberichten erschienen. Er deutet in solchen Arbeiten vieles in

wenigen Zeilen an, so daß der aufmerksame Leser einen Reichtum an Anregungen findet. Dadurch wird die Lektüre seiner Arbeiten sehr lohnenswert, und die Bedeutung der Herausgabe dieser gesammelten Werke wesentlich erhöht.

Selberg hat mehrere bedeutsame Ergebnisse nie veröffentlicht. Er hat sie bei vielen Gelegenheiten anderen zur Verfügung gestellt und oft darüber vorgetragen. Der zweite Band sollte die bedeutendsten dieser Ergebnisse enthalten. Im schon erwähnten Nachwort bedauert er, daß der für eine angemessene Veröffentlichung notwendige Aufwand wesentlich größer war, als er sich zuerst vorgestellt hat. Dadurch ist der zweite Band schmaler, als ursprünglich vorgesehen. Der Leser kann Selbergs Entscheidung, einen Strich nach seiner langen und wichtigen Abhandlung über Siebmethoden machen, nur traurig respektieren.

Diese schön herausgegebenen Bände werden eine Inspiration für alle sein, die in den von Selberg beeinflussten Teilen der Mathematik arbeiten. Sie sollten in jeder mathematischen Bibliothek vorhanden sein, und vielen wird der Preis nicht zu hoch sein, diese Bände zu besitzen, um an ihnen eine dauerhafte Freude haben zu können.

Göttingen

S. J. Patterson

Pommerenke C., Boundary Behaviour of Conformal Maps (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 299), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1992, 300 S., DM 98,-

Zu jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, gibt es nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine konforme (= biholomorphe) Abbildung (KA) f von $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ auf G . Anfänglich betrachtete man nur Gebiete mit stückweise analytischem Rand, für die f gleichzeitig die Abbildung von $\bar{\mathbb{D}}$ auf \bar{G} leistete. Erst durch Carathéodory kamen Gebiete mit komplizierterer Randstruktur ins Blickfeld. Er zeigte 1913, daß sich f zu einem Homöomorphismus von $\bar{\mathbb{D}}$ auf \bar{G} erweitern läßt, sofern der Rand ∂G von G eine Jordankurve ist, und machte bei ganz allgemeinen Gebieten durch die Einführung der Primenden von G klare Aussagen über das Stetigkeitsverhalten von f bei Annäherung an den Rand $\partial \mathbb{D}$.

In den 30er Jahren folgten dann genauere Ergebnisse von Ostrowski und Warschawski über das Verhalten von f und seinen Ableitungen am Rande unter gesteigerten Anforderungen an ∂G , aber erst in den letzten etwa 25 Jahren blühte das Geschäft richtig auf, weil man sich zunehmend mit Gebieten von komplizierter Randstruktur beschäftigte. Häufig wurden auch Fragen von außerhalb herangetragen, z. B. aus der komplexen Approximationstheorie (Smirnov-Gebiete) oder aus der Theorie des Cauchy-Operators (Ahlfors-reguläre Jordankurven), und natürlich kommen in der neueren Iterationstheorie Gebiete mit sehr kompliziertem Rand vor. Ganz allgemein versucht man, eine Verbindung herzustellen zwischen geometrischen Eigenschaften von G oder seines Randes ∂G und Eigenschaften der Abbildungsfunktion f .

Beispiele sind:

- Wann läßt f' eine stetige Fortsetzung nach $\bar{\mathbb{D}}$ zu?
- Wann existiert wenigstens die Winkelderivierte $\lim_{z \rightarrow \zeta} f'(z)$ für ein $\zeta \in \partial \mathbb{D}$ bei Annäherung im Winkelraum?
- Unter welchen Annahmen ist f' oder $\frac{1}{f'}$ in einer Hardy-Klasse H^p ?
- Ist $A \subset \partial \mathbb{D}$ und besitzt f Winkelgrenzwerte für $z \rightarrow \zeta \in A$, wie groß ist die Menge $f(A) \subset \partial G$, ausgedrückt durch Kapazität, Dimension, oder Hausdorff-Maß?

Gerade hierzu sind in den letzten Jahren fundamentale und oft scharfe Ergebnisse, vor allem durch Makarov, gefunden worden, die bisher nicht in Buchform vorliegen. Ziel von Pommerenkes Buch ist es, sowohl eine umfassende Einführung in die klassischen Ergebnisse zu geben als auch die neuen Entwicklungen darzustellen.

Das Buch gliedert sich in 11 Kapitel. Da manche Ergebnisse recht speziell sind und technisch schwierige Hilfssätze erfordern, wird jedes Kapitel mit einem Überblick über die wichtigsten Definitionen und Ergebnisse begonnen.

Kapitel 1 und 2 bringen Grundtatsachen (Spiegelungsprinzip, Koebe-Sätze, Folgen konformer Abbildungen) und die Sätze von Carathéodory über die Stetigkeit am Rande und die Primendentheorie. Ein wesentliches Hilfsmittel ist das Längen-Flächen-Prinzip (Wolffsches Lemma), was mindestens auf Courant (1914) zurückgeht. Hervorzuheben sind noch Sätze von Bagemihl und Collingwood mit Aussagen, die überall auf $\partial\mathbb{D}$ gelten mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen.

In Kap. 3 wird die Stetigkeit von f' und höheren Ableitungen untersucht. Ist ∂G glatt, so hat $\arg f'$ eine stetige Fortsetzung nach $\bar{\mathbb{D}}$ (und nur dann). Dies braucht für f' selbst nicht zu gelten, vielmehr ist dazu noch eine schwache Dini-Bedingung für den Tangentenwinkel hinreichend. Dini-glatte Ecken $\omega \in \partial G$ werden auch zugelassen und das Verhalten von f an $f^{-1}(\omega)$ studiert. Interessant ist der Fall, daß an ω zwei Bögen mit bekannter Krümmung zusammenstoßen.

In Kap. 4 geht es zunächst um Bloch-Funktionen und ihren Zusammenhang mit KA, sodann um die Winkelderivierte $f'(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$ für $z \rightarrow \zeta$ im Winkelraum.

Von besonderer Bedeutung für später ist folgender Satz von Gehring und Hayman. Ist f eine KA von \mathbb{D} nach G , $S = [x_1, x_2]$ mit $-1 < x_1 < x_2 < 1$, und J ein Jordanbogen, der x_1 mit x_2 in \mathbb{D} verbindet, so ist

$$\text{Länge } f(S) \leq K \cdot \text{Länge } f(J), \quad \text{diam } f(S) \leq K \cdot \text{diam } f(J)$$

mit von G unabhängiger Konstanten K .

Kap. 5 behandelt Gebiete mit quasikonformer Randkurve J und John-Gebiete. Sie sind rein geometrisch definiert; im ersten Fall muß $\text{diam } J(a, b) \leq M|a - b|$ sein für den Jordanbogen $J(a, b)$ zwischen a und b auf J . Die konforme Abbildung f von \mathbb{D} nach $\text{int } J = G$ ist auf $\partial\mathbb{D}$ quasisymmetrisch und läßt sich zu einem quasikonformen Homöomorphismus von \mathbb{C} nach \mathbb{C} fortsetzen. Dieser wird nach Douady-Earle konstruktiv angegeben. Mit Hilfe des Satzes von Schottky wird folgendes überraschende Resultat bewiesen. Ist (f_λ) eine in $\lambda \in \mathbb{D}$ holomorphe Familie injektiver Abbildungen von \mathbb{D} nach \mathbb{C} , mit $f_0(z) = z$ in \mathbb{D} , so hat jede Funktion f_λ eine homöomorphe Erweiterung nach $\bar{\mathbb{D}}$, und $f_\lambda(\partial\mathbb{D})$ ist eine quasikonforme Jordankurve. Daraus folgt mit Hilfe von Beckers Schlichtheitskriterium, daß jede in \mathbb{D}

holomorphe Funktion f mit $(1 - |z|^2) \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq \kappa < 1$ ein Gebiet $f(\mathbb{D})$ mit quasikonformem Rand erzeugt.

In Kap. 6 gibt es mehrere Sätze vom Typ: An fast allen Punkten $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ ist das Verhalten einer meromorphen Funktion (oder KA) entweder sehr gut oder sehr schlecht. Typisch dafür ist der Satz von Plessner (1927) oder der von McMillan (1969): Eine KA f von \mathbb{D} auf G ist an fast allen Punkten $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ konform (d. h. die Winkelderivierte existiert $\neq 0, \neq \infty$) oder „twisting“; letzteres heißt, daß

$$\liminf \arg [f(z) - f(\zeta)] = -\infty \quad \text{und} \quad \limsup \arg [f(z) - f(\zeta)] = +\infty$$

ist für $z \rightarrow \zeta$ längs jedes Bogens $\Gamma \subset \mathbb{D}$ mit Endpunkt ζ . Im Zusammenhang mit der Einführung des harmonischen Maßes wird folgendes verblüffende Resultat von Bishop et al. (1989) bewiesen: Für jede Jordankurve J gibt es eine Zerlegung $J = T \cup B \cup B^*$, wobei in

jedem Punkt $\zeta \in T$ eine Tangente existiert und $\omega(B) = \omega^*(B^*) = 0$ ist. Dabei ist ω das harmonische Maß bezüglich $\text{int } J$ und ω^* das bezüglich $\text{ext } J$. Man beachte, daß etwa mit Hilfe Hadamardscher Lückenreihen Jordankurven konstruiert werden können, die nirgends eine Tangente besitzen.

Kap. 7 behandelt Smirnov- und Lavrentiev-Gebiete; ∂G ist jetzt rektifizierbar. Smirnov-Gebiete sind solche, für die f' eine äußere Funktion ist, $\log |f'(z)|$ ist durch sein Poisson-Integral darstellbar. Hinreichend dafür ist (Zinsmeister 1984), daß ∂G „Ahlfors-regulär“ ist. Lavrentiev-Kurven sind solche, für die die Länge $A(J(a, b))$ eines Teilbogens $J(a, b)$ stets $\leq M|a - b|$ ist. Sie können charakterisiert werden als $J = h(\partial \mathbb{D})$, wo h eine Bilipschitz-Abbildung von \mathbb{C} auf \mathbb{C} ist.

In Kap. 8 wird das Anwachsen für $r \rightarrow 1$ der Integralmittel $\int |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi$ und $\int |f'(re^{i\varphi})|^p d\varphi$ für festes $p \in \mathbb{R}$ untersucht. Offen ist immer noch die Vermutung von Brennan, daß $\int |f'(re^{i\varphi})|^{-2} d\varphi = O((1-r)^{-1-\varepsilon})(r \rightarrow 1-)$ gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und jede KA f von \mathbb{D} . Auch ist unbekannt, für welche Exponenten α gilt $\int |f'(re^{i\varphi})| d\varphi = O((1-r)^{-\alpha})(r \rightarrow 1-)$, wenn f eine beschränkte, konforme Abbildung von \mathbb{D} ist. Ein Abschnitt über Hadamardsche Lückenreihen, die zur Konstruktion pathologischer KA nützlich sind, schließt sich an.

In Kap. 9 werden die Begriffe Kapazität und Greensche Funktion eingeführt. Ein Satz von Pfluger erlaubt, $\text{cap } E$ für $E \in \partial \mathbb{D}$ über den Modul einer Kurvenklasse auszuordnen. Dazu werden die auf Ahlfors und Beurling zurückgehenden Grundbegriffe der Moduln von Kurvenklassen ab ovo entwickelt. Verschiedene Sätze schätzen die Kapazität der Bildmenge $f(E)$ nach unten ab.

Kap. 10 werden Mengen durch ihr Hausdorff-Maß A_α und ihre Dimension $\dim E$ gemessen. So hat die bekannte Schneeflockenkurve die Dimension $\log 4 / \log 3$. Ein tiefliegender Satz von Makarov besagt: Ist f eine KA von \mathbb{D} und $A \subset \partial \mathbb{D}$, so ist $\dim f(A) > \frac{1}{2} \dim A$ falls $\dim A > 0$ ist, und $\dim f(A) \geq 1$ falls $\dim A = 1$ ist.

Das letzte Kap. 11 behandelt asymptotisch konforme Jordankurven und ihre analytische Charakterisierung, ferner das Verhalten des Visser-Ostrowski-Quotienten

$$q(z) = f'(z) / \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \quad \text{für } z \rightarrow \zeta \quad \text{im Winkelraum,}$$

sowie Zusammenhänge zwischen Moduln von Kurvenklassen und der Existenz der Winkelderivierten $f'(\zeta) \neq 0, \neq \infty$. Dies sind neuere Ergebnisse von Rodin und Warschawski sowie von Jenkins und Oikawa.

Wie der Leser sieht, wird das Thema des Randverhaltens von KA in ganzer Breite und bis zu neuesten Resultaten hin behandelt. Jeder Sektion sind Übungsaufgaben angeschlossen (im ganzen > 200!), die erheblich zur Vertiefung des Verständnisses beitragen. Ein eindrucksvolles Literaturverzeichnis (20 Seiten) und ein ausführliches Sachverzeichnis beschließen das Werk.

Das Buch wird für den Spezialisten, der sich für Fragen des Randverhaltens von KA interessiert, auf lange Zeit das Standardwerk werden. Es ist aber auch ein treffliches Gegenbeispiel zur These mancher Zeitgenossen, daß die Funktionentheorie ein sinkender Stern sei. Eher hat man den Eindruck: Viele Probleme sind gelöst, aber die wirklich schwierigen sind noch offen.

Ljung, L., Pflug, G., Walk, H., Stochastic Approximation and Optimization, Basel u. a.: Birkhäuser 1992, 120 S., p.b. DM 44,-

Die stochastische Approximation handelt von zufälligen Rekursionen, die im einfachsten Fall die Gestalt

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \alpha_n H(\theta_n, \varepsilon_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

haben und die für Aufgaben der stochastischen Optimierung brauchbar sind. In typischen Fällen ist θ_n zufällig und vektorwertig, ε_n eine Zufallsvariable mit einer von θ_n abhängigen Verteilung (bzw. bedingten Verteilung, gegeben $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$) und α_n eine reelle Konstante oder proportional zu $1/n$. Prototyp ist der von Robbins und Monro 1951 angegebene Algorithmus zur näherungsweise Bestimmung der Nullstelle θ einer monoton wachsenden Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Er hat die Gestalt

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{c}{n} Y_n = \theta_n - \frac{c}{n} (f(\theta_n) + \varepsilon_n).$$

Dabei bezeichnet Y_n eine Messung von $f(\theta_n)$, die mit einem zufälligen Fehler ε_n behaftet ist. Der Faktor $\alpha_n = \frac{c}{n}$ erzwingt unter geeigneten Voraussetzungen Konvergenz von θ_n gegen θ , die Konvergenzgeschwindigkeit $n^{-1/2}$ ist sehr viel langsamer als in vergleichbaren deterministischen Situationen.

Anfangs waren Stochastiker sicherlich wegen des nicht-linearen Charakters dieser Rekursionen interessiert. Dies erforderte neue Methoden, mit Erfolg erprobte man z. B. Martingalmethoden. Heute stehen u. a. komplexere, nicht-lineare adaptive Prozeduren im Vordergrund, wie sie z. B. bei der Kontrolle und Identifikation von dynamischen Systemen zur Anwendung kommen.

Das vorliegende Buch vereinigt je einen Übersichtsartikel der drei Autoren zum genannten Themenkomplex. Die Teile stehen recht unverbunden nebeneinander, so daß man kaum von einem Lehrbuch sprechen kann. Jedoch ist dies entschieden ein Vorteil. Durch die unterschiedlichen Zugänge der Autoren, die alle drei auf die stochastische Approximation spezialisiert sind, gewinnt das Buch an Perspektiven. Walk konzentriert sich auf Methoden von deterministischem Charakter und Martingalmethoden, wobei er besonderen Wert darauf legt, auch Hilbert- oder sogar reelle Banachräume als Wertebereich der θ_n zuzulassen. Pflug legt sein Schwergewicht auf Markoffsche Modelle samt potentiellen Anwendungen. Ljung schließlich geht es um den algorithmischen Aspekt. Er zeigt, wie man bei Aufgaben der Kontrolle und Adaption von zufälligen, durch nicht-lineare Regressionen beschriebenen Systemen auf adaptive Prozeduren der genannten Art stößt. All drei Autoren diskutieren die asymptotischen Eigenschaften der Prozeduren, unter unterschiedlichen Gesichtspunkten. Wesentliche Teile der Theorie werden auf den gut 100 Seiten angesprochen. Zwar werden nicht alle Beweise durchgeführt, was aber durch ausführliche Literaturhinweise völlig aufgewogen wird.

So liegt hier ein Buch vor, das Orientierung bietet und durchaus zum Einstieg ins Thema geeignet ist.

Frankfurt/Main

G. Kersting

O'Malley, R. E. jr., Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1991, 225 S., DM 78,-

Ein sinnvoll gestelltes Problem für eine gewöhnliche Differentialgleichung, welche von einem kleinen positiven Parameter ε abhängt, wird im vorliegenden Buch ein singuläres

Störungsproblem genannt, wenn für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Lösung nicht gleichmäßig im relevanten Bereich der unabhängigen Veränderlichen x gegen den „äußeren Grenzwert“ konvergiert. Unter dem äußeren Grenzwert wird eine geeignete Lösung des formalen Grenzproblems, das man erhält, indem man im ursprünglichen Problem $\varepsilon=0$ setzt, verstanden. Bei den behandelten Problemen tritt ε oder ε^2 als Faktor vor einer Ableitung höchster Ordnung in der Differentialgleichung auf. Die gleichmäßige Konvergenz geht typischerweise nur in kleinen Teilintervallen des x -Bereichs verloren, z.B. in der Nähe des Anfangs- oder Endpunkts. In diesem Falle hat die Lösung dort eine Grenzschicht. Passiert es dagegen nahe eines inneren Punkts, so spricht man von einer Übergangsschicht („transition layer“) der Lösung.

Das Buch beschäftigt sich mit der nicht-trivialen Frage, wie man in solchen Fällen dennoch eine gleichmäßige Approximation der Lösung für kleine ε konstruieren kann. Dies geschieht in Form von (formalen) asymptotischen Entwicklungen. Dabei wird nicht der Versuch gemacht, eine allgemeine Theorie zu entwickeln. Vielmehr werden einzelne Problemklassen exemplarisch studiert. Dabei hat sich der Autor bemüht, bei allen Problemklassen so weit wie möglich nach einer einheitlichen Strategie vorzugehen. Äußere Grenzwerte werden in Bereichen großer Veränderung der Lösung korrigiert. Das läuft im Endeffekt auf „zusammengesetzte asymptotische Entwicklungen“ hinaus, wie man sie im Zusammenhang mit der Methode der angepaßten äußeren und inneren Entwicklungen („matched asymptotic expansions“) kennt. Ein konzeptioneller Unterschied ist allerdings vorhanden, insbesondere im Fall von nichtlinearen Problemen. Andere bekannte Methoden der asymptotischen Analysis werden lediglich in einem Anhang über die historische Entwicklung der singulären Störungen erwähnt.

Im einzelnen werden folgende Problemklassen behandelt: Singulär gestörte Anfangswertprobleme für (nicht-autonome) lineare und nicht-lineare Systeme 1. Ordnung („Tikhonov-Levinson-Theorie“) sowie singulär gestörte Randwertprobleme für lineare, quasilineare und nichtlineare skalare Gleichungen 2. Ordnung und Systeme 1. Ordnung. Der mathematische Stil des Buches ist recht elementar. Beweise der Korrektheit der konstruierten asymptotischen Entwicklungen werden mit einer Ausnahme nicht geführt. Positiv anzumerken ist jedoch, daß gelegentlich auf einen Existenz- oder Eindeutigkeitssatz für Lösungen in der Literatur hingewiesen wird. Ferner besticht das Buch durch zahlreiche konkrete Beispiele, Übungsaufgaben und nicht zuletzt durch die Behandlung von Anwendungsproblemen, z.B. aus der Enzymkinetik, der Halbleiter- und Verbrennungstheorie.

Alles in allem stellt das Buch eine vorzügliche Anleitung für das praktische Lösen von Problemen der behandelten Klassen dar. Auch einige Bemerkungen zu numerischen Methoden werden gemacht.

Hamburg

J. Scheurle

Zlatev, Z., Computational Methods of General Sparse Matrices, Dordrecht: Kluwer Academic Publ. 1991, 352 S., Dfl. 185.-

In dieser Monographie beschreibt der Autor verschiedene von ihm und seiner Gruppe entwickelte Programmsysteme und Algorithmen für die numerische Lösung dünnbesetzter linearer Probleme.

Diese umfassen zunächst lineare Gleichungssysteme, hier insbesondere das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Nachiteration. Dann werden least-square Probleme behandelt, die durch Erweiterung (Augmentation) auf den vorigen Fall zurückgeführt werden.

Es werden die bei Anfangswertaufgaben für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen auftretenden Systeme und ihre Probleme (insbesondere Abbruchkriterien, Schrittweitensteuerung) diskutiert.

Weitere Themen sind Konditionsschätzer, parallele Löser, Orthogonalisierungsverfahren. Als Weiterführung des letzten Themas werden weitere mit der Verwendung von Givensrotationen im Zusammenhang stehende Probleme diskutiert.

Es scheint mir eine der Botschaften dieses Buches zu sein, daß bei praktischen Rechnungen alle Aspekte berücksichtigt werden müssen. Mit sehr genauen ausführlichen Beschreibungen sind sicher Praktiker, insbesondere auch solche mit geringerer mathematischer Ausbildung, angesprochen und gut bedient.

Das Buch eignet sich weniger zur Einführung in dieses an sich sehr interessante und aktuelle Gebiet. Dazu ist es zu unübersichtlich und auch etwas zu einseitig auf die Ergebnisse einer Arbeitsgruppe beschränkt.

Bielefeld

L. Elsner

Zwillinger, D., Handbook of Differential Equations (second Edition), Boston u. a.: Academic Press 1992, 787 S., \$ 54.95

Der Autor schreibt im Vorwort, er setze voraus, daß der Leser mit der Theorie von Differentialgleichungen und deren Lösungsmethoden vertraut ist. Seine Absicht ist nicht, neue, ungewohnte Lösungstechniken zu lehren, sondern Hinweise und Referenzen auf bekannte Verfahren anzugeben. Das Handbuch soll ein Nachschlagewerk sein und als Ergänzung zu Lehrbüchern über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen benutzt werden. Das Buch soll sinnvoll sein für den praktizierenden Ingenieur oder Wissenschaftler, der gelegentlich Differentialgleichungen zu lösen hat. Das Buch ist nicht geschrieben, um es auf einmal durchzulesen. Es soll konsultiert werden, wenn eine Notwendigkeit besteht.

Das Nachschlagewerk ist in folgende Abschnitte gegliedert:

I A Definitions and Concepts – B Transformations

II Exact Analytical Methods – A Exact Methods for Ordinary Differential Equations – B Exact Methods for Partial Differential Equations

III Approximate Analytic Methods

IV A Numerical Methods: Concepts – B Numerical Methods for Ordinary Differential Equations – C Numerical Methods for Partial Differential Equations

Jeder dieser Abschnitte ist in zum Teil sehr kurze Unterabschnitte aufgeteilt, in denen spezielle Lösungsmethoden an Hand von Beispielen vorgestellt werden und in denen dann Referenzen auf überwiegend englische Literatur angegeben werden. Zwei Beispiele:

Die Intervall-Analyse für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen wird auf den Seiten 470–472 am Problem $y' = y^2$, $y(0) = 1$ vorgestellt, und es werden dreizehn Referenzen genannt.

Für die n -dimensionale Wellengleichung sind die Lösungsformeln für das Cauchy-Problem auf den Seiten 429–431 angegeben und die Spezialfälle $n = 1, 2, 3$ aufgeführt. Die Referenzliste umfaßt drei Literaturstellen. Im Index erscheint unter dem Stichwort „wave“ = „jedoch kein Hinweis, daß diese Darstellungsformeln auf den Seiten 429–431 im Buch enthalten sind. Dies ist wohl eine Schwierigkeit für den Benutzer, eine vorgegebene Differentialgleichung im Handbuch auch zu finden. Die unter I. A. angegebenen Definitionen für Begriffe aus der Theorie der Differentialgleichungen sind in der Tat weitgehend nur dann „verständlich“, wenn der Benutzer mit der Theorie der Differentialgleichungen vertraut ist.

Karlsruhe

M. Schneider

Bernard Bolzano-Gesamtausgabe. Hrsg. von Eduard Winter†, Jan Berg, Friedrich Kambartel, Jaromír Loužil, Bob van Rootselaar. Reihe II: Nachlaß. A. Nachgelassene Schriften. Band 7: Größenlehre; Band 8: Reine Zahlenlehre, hrsg. von Jan Berg. 1975, 1976. B. Wissenschaftliche Tagebücher, Bände 2–4: *Miscellanea Mathematica*, hrsg. von Bob van Rootselaar und Anna van der Lugt. 1977–1991. Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog, insg. 1745 S., pro Band DM 379,-

Bernard Bolzano (1781–1848) ist den Mathematikern heute insbesondere als Verfasser einer strengen Analyse des Zwischenwertsatzes aus dem Jahr 1817 bekannt. Er gilt manchen als Vorläufer Cantors in der Entwicklung der Mengenlehre und als ein Wegbereiter der formalen Logik. Nach dem wegen sozialutopischer Predigten vom Jahr 1819 über ihn verhängten Lehr- und Publikationsverbot blieben seine später verfaßten mathematischen Abhandlungen zu seinen Lebzeiten ungedruckt; ausgenommen einzig jene mathematischen Betrachtungen, die in seiner vierbändigen *Wissenschaftslehre* von 1837 enthalten sind. Kurz nach seinem Tod erschien 1851 die nicht sorgfältig zusammengestellte Schrift *Paradoxien des Unendlichen*, die von nachfolgenden Generationen gelesen, jedoch – nicht zuletzt aufgrund ihrer Brüchigkeit – nicht gut verstanden wurde; soeben erschien eine von H. Sinaceur vorgenommene Übersetzung ins Französische. Erst im 20. Jahrhundert wurden aus Bolzanos Nachlaß weitere mathematische Neuerungen bekannt: Er habe (Jahrzehnte vor Weierstraß) eine überall stetige, nirgends differenzierbare Funktion angegeben, und er habe (Jahrzehnte vor Cantor/Heine und Dedekind) die reellen Zahlen arithmetisch konstruiert. Solche Nachrichten wecken die Neugier auf die mathematische Gesamtleistung Bolzanos.

Dieses Interesse schaut heute auf die seit 1969 in Frommann-Holzboog-Verlag erscheinende sehr ambitionierte *Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe* (kurz BGA), die inzwischen auf mehr als sechzig Bände veranschlagt ist. Leider aber sind die von Bolzano selbst seit 1804 publizierten mathematischen und mathematikphilosophischen Abhandlungen dort noch nicht neu verfügbar. Einzig die beiden mathematisch grundlegenden Texte des reifen Bolzano zur *Größenlehre* sowie die ebenfalls nach 1830 entstandene Schrift *Reine Zahlenlehre* erschienen in den Jahren 1975 und 1976 in zwei Bänden der BGA. Seit 1979 werden nun unter dem Titel *Miscellanea Mathematica* (kurz MM) Bolzanos mathematische Tagebücher verlegt. Bis 1991 sind davon drei Bände in sechs Teilbänden mit insgesamt mehr als eintausend großformatigen Druckseiten erschienen, welche die frühen Jahre 1803 und 1814 umfassen.

Diese mathematischen Tagebücher enthalten ein buntes Kaleidoskop von Ideen, Versuchen, Reflexionen, Ansätzen sowie in größerem Umfang zusammenfassende Wiedergaben und Kritiken durchgearbeiteter Bücher. Es sind Aufzeichnungen des Momentes, Probed Gedanken („Ein Gedanke!“ – 3/2: 76), „Versüchlein“ (z. B. 2/1: 101), immer wieder begleitet auch von emotiven Worten: „Daß dich!“ (2/1: 140), „Bravo“ (2/1: 102), „Wieder gefehlt!“ (3/2: 140), „Nicht doch!“ (3/2: 71) u. v. m. Indem wir diese Bände lesen, schauen wir direkt in Bolzanos Gedankenbewegungen: „ich schreibe diesen Beweis, weil er mir zuerst einfällt“ (2/1: 42). Dabei fällt auf, daß Bolzano seine Überlegungen immer wieder in Frage stellt („Aber ist denn das wahr?“ – 2/2: 129), neu bedenkt und so sein Denken wandelt.

Das Themenspektrum der mathematischen Tagebücher ist breit: Der erste Eintrag behandelt den Satz des Pythagoras in allgemeiner Form. Am Ende der vierten geometrischen Betrachtung (auf der zweiten Seite des Tagebuches) schon erscheint das „Project der Definitionen von Länge, Flächenraum, körperlichem Inhalt“, dessen ersten kurzen Entwurf Bolzano später verwirft: „dieß finde ich gegenwärtig April 1814 unrichtig“ (2/1: 22). Darauf folgt im Tagebuch der erste Eintrag zur Logik:

„Was die Sprachlehre für die Erlernung der Sprache ist: das ist die Logik für das richtige Denken Wie zur Sprache Übung nöthig ist, so ist auch zum Den-

ken Logik allein nicht hinreichend Die beste Uebung gibt die Mathematik.“ (2/1: 22f.)

Und so folgen die Themen bunt aufeinander.

Neben geometrischen Betrachtungen nehmen solche zur Mechanik einen breiten Raum in diesem ersten Teil der mathematischen Tagebücher ein. Weitere Themen sind die Größenlehre, in geringem Umfang die Ätiologie und Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen, daneben Differentialgeometrie, umfangreichere Betrachtungen zur allgemeinen Mathesis oder Arithmetik, auch Reflexionen über Raum und Zeit sowie gelegentlich philosophische Gedanken, die sich insbesondere gern kritisch auf Kant beziehen.

Bei Bolzano finden wir manchen Entwicklungskeim mathematischen Denkens, der sich heute in formale Begriffe und Lehrsätze, teilweise gar in eigene Gebiete (wie Mengenlehre, mengentheoretische Topologie, Grundlagen der Analysis) ausdifferenziert hat. Unter dem Thema „Uiber den Begriff einer krummen continuierlichen Linie, u. s. w.“ etwa entwickelt Bolzano auf vier Manuskriptseiten, das sind sechs große Druckseiten, aus dem Begriff der continuierlichen Linie:

- deren Ausdruck durch Funktionen, welche an einer Stelle ein- oder mehrwertig (auch unendlich-vielwertig!) sind, stetig, den Zwischenwertsatz erfüllen (der bei Bolzano noch nicht so heißt),
- weiterhin die Bestimmbarkeit der Linie durch ihre Punkte, durch zwei Gleichungen der Form $y=f(x)$, $z=\varphi(x,y)$ oder „noch besser“ von der Form $F(x,y,z)=0$, $\Phi(x,y,z)=0$,
- schließlich fordert Bolzano ein Symbol, „welches alle zwischen 2 Werthen enthaltenen Werthe andeutet“ und
- gibt zuletzt die analytische Kennzeichnung eines Endpunktes einer Linie (3/1: 87–93).

Gegen Ende des Teiles 3/2 beginnen Bolzanos Zusammenfassungen von und Auseinandersetzungen mit den Mathematikbüchern aus dem Zeitraum des vorausgegangenen Jahrhunderts, vor allem denen aus Deutschland und Frankreich. Dabei fällt auf, daß Bolzano eher zweitrangige Mathematiker studiert, von denen Lacroix noch der renommierteste ist. Allerdings ist auch eine ausführliche Auseinandersetzung mit Carnot zu finden (Band 4/2) – nicht hingegen etwa eine mit Lagrange, d’Alembert oder Euler.

In diesen kommentierenden Zusammenfassungen zeigt sich Bolzanos starkes methodisches Interesse:

„Es ist wider die gute Methode den Beweis eines Lehrsatzes aus einem anderen herzuleiten, in welchem die Hypothese des ersten gar nicht Statt findet.“ (4/2: 47)

Wie gegen sich selbst, so ist Bolzano auch gegen andere Denker sehr streng und respektlos:

„Bisher Carnot. Es sey uns vergönnt, ihm zu widersprechen.“ (4/2: 107)

„Verdienstlich ist es ohne Zweifel, daß der Verfasser gesucht, dieß zu beweisen. Aber sein Versuch ist ihm, wir müssen es frey gestehen, mißlungen ...“ (4/1: 174)

Die Drucklegung solch ausführlicher Protokolle des flüchtigen Gedankenwandels, wie sie Bolzanos mathematische Tagebücher darstellen, bildet eine gänzlich eigene Textgattung innerhalb der mathematischen Literatur. Mit Sicherheit waren diese Texte von ihrem Verfasser nicht zur Publikation vorgesehen. Die Veröffentlichung jetzt, und zwar in einer Werksausgabe, mißachtet diesen Willen des Autors. Sie hebt die Privatheit des persönlichen Denkens auf. Wie jede Verletzung einer Intimsphäre, so erfordert auch diese eine besondere Rechtfertigung wie besondere Sicherungsmaßnahmen gegen Mißbrauch. Leider aber gibt die BGA weder das eine noch das andere. Dieses moralische Versäumnis der Herausgeber ist höchst blamabel, und es ist ein Anschlag auf die Seriosität des wissenschaftlichen und philosophischen Publikationswesens.

Zu den wesentlichen Eigenschaften neuzeitlicher (wissenschaftlicher und) philosophischer Abhandlungen gehört ihre Kritisierbarkeit: ihre Beurteilbarkeit nach Bedeutung, Überzeugungskraft, Schönheit durch den Leser und die Leserin. Wenn ein Text zum Druck befördert wird, welcher gewiß nicht mit Rücksicht auf solche Anforderungen verfaßt wurde, so wird dieser Text als etwas präsentiert, das er weder ist noch sein will; er wird also verstellt. Ein verstellter Text aber ist eine Täuschung – des Verfassers wie des Lesers. Eine solche Täuschung nun stellen die MM dar.

Damit ist nicht gesagt, daß Bolzanos mathematische Tagebücher als Hinterlassenschaft für die Wissenschaft völlig wertlos und ihrem Zugriff vorzuenthalten seien – es wird nur der eklatante Mangel an Respektsbewahrung gegenüber dem Autor sowie die erforderliche Einführung der Leserschaft in diese besondere Gattung Text eingeklagt. Ein möglicher konstruktiver Umgang mit dieser Hinterlassenschaft ist oben bereits angedeutet: Beispielsweise können wir nachforschen, in welchen Formen sich bei Bolzano jene Begriffe und Urteile entwickelt haben, die in seine großen, fertig ausgearbeiteten Abhandlungen wie die *Wissenschaftslehre*, die (beiden Schriften zur) *Größenlehre* oder die *Reine Zahlenlehre* eingeflossen sind – etwa:

- Wir können nachsehen, wie früh sich bei Bolzano schon Vorstellungen von unendlich-großen und unendlichkleinen Zahlen finden, die in der *Reinen Zahlenlehre* dann streng konstruiert werden.
- Wir können suchen, ab wann Bolzano auf die strenge Unterscheidung zwischen einer *Größe* und ihren *Werten* achtete. Er tat dies anfangs ebensowenig wie seine namhaften Zeitgenossen Abel und Dirichlet (siehe z. B. 2/1: 65, 3/1: 51 – trotz etwa 2/1: 41), und in jedem Fall ist dies der Präzision mancher Argumentationen sehr abträglich. In seiner berühmten Abhandlung zum Zwischenwertsatz von 1817 ist diese Unterscheidung immer noch nicht klar, wohl aber in der nach 1830 verfaßten *Größenlehre* (2A7: 228f.), und damit erreicht Bolzano in den Grundlagen der Funktionenlehre eine Begriffsschärfe, wie sie unter seinen Zeitgenossen einzig noch Cauchy erzielt (der daraus aber, anders als Bolzano, wichtiges mathematisches Kapital schlägt).
- wir finden in diesen Tagebüchern, wie sich gewisse Konstruktionen zu Argumentationsmustern weiterentwickeln und schrittweise zu mathematischen Tatsachen werden.
- Und schließlich bieten diese Tagebücher die Möglichkeit, Sinn und Bedeutung solcher Begriffe nachzuspüren, die wir inzwischen verlernt haben, die heute keine Rolle mehr im mathematischen Denken spielen, etwa der Begriff der *intensiven Größe*.

Als mathematische Textgattung einer eigenen Art erlauben uns Bolzanos hinterlassene Tagebücher insbesondere zweierlei: erstens der Entwicklung seines Denkens nachzuspüren; zweitens sein Denken in Auseinandersetzung mit demjenigen seiner Zeitgenossen zu beobachten. Als mathematische Textgattung einer eigenen Art verbieten uns Bolzanos hinterlassene Tagebücher jedoch von sich aus, jeden Satz, jedes Argument darin als für die Publikation abgewogen und bestimmt zu nehmen und in dieser Weise – und das heißt also: kritisierend – darüber zu urteilen. Leider aber hat der Herausgeber der MM dies nicht gesehen; nirgendwo reflektiert er dieses Problem. In den mehr als hundert Seiten Einleitungen zu den sechs Teilbänden der MM werden eher ausnahmsweise Begriffsentwicklungen bei Bolzano aufgegriffen (etwa 3/1: 19), aber regelmäßig werden dort die Korrektheit der Argumentationen im Tagebuch thematisiert und kritisiert (noch dazu in der ganz ungeschichtlichen Perspektive von der heutigen Form des Denkens her).

Die besondere Leistung der beiden Herausgeber der MM besteht offenkundig in der Entschlüsselung der oft nur in Abkürzungen und schwer lesbarer Handschrift vorliegenden Texte. Leider aber sind die allgemeinen Editionsprinzipien der BGA so kompliziert gestaltet, daß am Ende aller anerkennenswerten Mühe doch wieder ein praktisch unlesbarer Text steht, nur diesmal im Druck:

„°(n[ä]hml[i]ch, d[ie]ß soll | also e[in]e *Erkl.[ärung]* o[der]
 R[e]chtf[er]t[i]g[un]g des vorh[e]rg[e]s[agten] s.[ein]e)“^o (4/1: 154)

ist ein beliebig herausgegriffenes Beispiel. Und nicht einmal der Formelsatz in der BGA folgt den seit Jahrhunderten bewährten Satzprinzipien der mathematischen Fachliteratur – Prinzipien, die inzwischen schon in den einschlägigen Softwareprogrammen der Textverarbeitung implementiert sind –, so daß dadurch die Lesbarkeit des Textes noch weiter ungemein und völlig grundlos erschwert wird.

Die Zurückhaltung der Herausgeber bei der strukturierenden Gestaltung der Druckfassung der Tagebuchnotizen ist absolut. Das gedruckte Buch ist so unübersichtlich und unerschlossen wie das Tagebuch selbst. Nicht einmal jene Abschnitte, in deren Verlauf Bolzano ein fremdes Lehrbuch erörtert, sind durch Gliederungselemente kenntlich gemacht. Wer einen späteren Band irgendwo aufschlägt, muß oft eifrig blättern, bis er oder sie herausgefunden hat, welches Buch welchen Autors Bolzano gerade erörtert. Und die neu angelegten Register sind derartig lückenhaft, daß jedem Bolzano-Forscher als dringlicher Rat für seine Erstlektüre mitgegeben werden muß, diese Register für sich selbst zu vervollständigen. (Die Register sind ein beständiger Schwachpunkt der BGA: In den beiden wichtigen Bänden zur Größen- und zur Zahlenlehre (2A7, 2A8) fehlen sie gar gänzlich!) Ausführlich immerhin sind jeweils die Personenregister sowie die Bibliographien der von Bolzano verwendeten Texte.

Die drei Momente: das entsetzliche Schriftbild der Bände, jedes Fehlen einer Gliederung, die völlig unzulänglichen Register, wären schon jedes für sich allein eine erhebliche Erschwernis für den Leser und die Leserin. Da sie hier alle drei zusammenkommen, wirken sie als eine echte Behinderung des Lesens. (Daß kein deutsches Lektorat die in den Niederlanden verfaßten Einleitungen in den gegebenen Einzelfällen nach Wortwahl und Zeichensetzung korrigierte, ist ein weiteres Ärgernis, das bei einer solch teuren Ausgabe nicht unerwähnt bleiben kann.)

Pointiert, aber nicht überspitzt: Bolzanos Text ist in der BGA zwar entziffert, bleibt aber fürs breite Lesepublikum verschlossen; die Förderer und Gönner Bolzanos haben die Grundintensionen seiner Denkleistungen nur in geringem Umfange aufgenommen – zu seinen Lebzeiten und unmittelbar danach wie auch heute. Die Drucklegung solcher mathematischer Tagebücher wie die Bolzanos bildet eine völlig eigenartige Gattung mathematischer Literatur, ohne daß diese Eigenartigkeit bemerkt, gar reflektiert oder problematisiert wurde. Was hiermit in ersten Hinweisen nachgeholt sei.

Literatur

Spalt, D. D.: Bolzanos Lehre von den meßbaren Zahlen 1830–1989, in: *Archive for History of Exact Sciences* 42 (1991) 15–70

Göttingen

D. D. Spalt

Whitney, H., Collected Papers, Vol. I und II, herausgegeben von Eells, J., Toledo, D., Basel u. a.: Birkhäuser 1991, 598 S. und 554 S., pro Band DM 208,-

Hassler Whitneys mathematische Publikationen beginnen in den 30er Jahren, den goldenen Zeiten, als die Topologie noch konkret war und die Graphentheorie ein Teil von ihr. In seinem ersten großen Aufsatz, „A theorem on graphs“ in den *Annals of Mathematics* 1931, beweist er, daß jeder maximale ebene Graph ohne trennende Dreiecke hamiltonsch ist: ein interessantes, wesentliches und auch heute noch nicht-triviales Ergebnis, das W.T. Tutte 1956 auf vierfach-zusammenhängende Graphen verallgemeinert hat. Dies ist der Anfang einer hochinteressanten Folge von Arbeiten zur Graphentheorie, für die das Vierfarbenpro-

blem die treibende Kraft ist und bleibt. Diese Arbeiten bilden das erste Kapitel von Band I der „Collected Papers“ (nur gestört dadurch, daß zwei zentrale Aufsätze, nur weil das Wort „logic“ im Titel irreführt, in das letzte Kapitel des zweiten Bandes verbannt worden sind, in eine Sammlung von Irrläufern mit den Titel „Other Subjects“). In Whitneys Arbeiten zur Graphentheorie finden sich unter anderem der „Whitney 2-Isomorphie-Satz“ über die verschiedenen Einbettungen eines Graphen in die Ebene, der „broken circuit complex“ in einer der verbannten Arbeiten, und der Aufsatz „An abstract theory of linear dependence“, der die Grundlagen der Matroid-Theorie gelegt hat. Jetzt, da das zehnte Buch über Matroide erschienen und das Vierfarbenproblem gelöst ist, wie es scheint, hat es einen eigenartigen Reiz, zu diesen Anfängen zurückzukehren.

Nach der Graphentheorie behandelt das Kapitel 2 des ersten Bandes Probleme der reellen Analysis, differenzierbare Funktionen und Singularitäten. Mit seiner Klassifikation der generischen Singularitäten glatter Abbildungen der Ebene in die Ebene kann Whitney (zusammen mit René Thom) als Begründer der Singularitätentheorie gelten. Darauf folgt Kapitel 3, mit vier Arbeiten über analytische Räume, die Grundlegendes in der Stratifikationstheorie leisten: das Konzept der „Whitney-Stratifikationen“ ist dort entwickelt.

„Grundlegendes“: dieses Prädikat gilt sicherlich für Whitneys Arbeiten zur algebraischen Topologie, die den größten Teil des zweiten Bandes ausmachen. Sie beginnen mit einem Paukenschlag: die Einbettungssätze für differenzierbare und analytische Mannigfaltigkeiten, mit Hilfe von „Whitneys Trick“ bewiesen. Das spannende an dieser Werkausgabe ist dann die Kontinuität der Gedanken. In der Tat bestechen Whitneys Arbeiten auch im Rückblick durch ihre Folgerichtigkeit: die Einbettungssätze führen zu Stiefel-Mannigfaltigkeiten, zur Theorie der charakteristischen Klassen („Stiefel-Whitney-Klassen“), und zu den klassifizierenden Räumen. Höhepunkt ist die „Produktformel“ für Stiefel-Whitney-Klassen, die auf früheren algebraischen Fortschritten beruht: der allgemeinen Konstruktion des Tensorprodukts von abelschen Gruppen und die ‚richtige‘ Formel für das cup-Produkt, die auch auf Whitney zurückgehen. Angesichts dieser Leistungen spricht Dieudonné [1, p. 68] von „Whitney, who came from Harvard, and who between 1935 and 1940 displayed an extraordinary production of new ideas in almost any question connected with algebraic topology“.

Ein zweiter Aspekt macht Whitneys Originalarbeiten zum Genuß: sie zeigen wesentliche Studienobjekte der algebraischen Topologie „in statu nascendi“: als konkrete geometrische Objekte, bevor sie in mehreren Abstraktionsstufen poliert, generalisiert und axiomatisiert worden sind. Sie zeigen eben auch die Produktformel, als sie noch Whitneys beste Leistung war, und bevor sie zum Axiom verkam, wie er bedauert [6]. Algebraische Topologie im Entstehen: hier kann sie genossen werden! („But let’s not forget that to the original geometers, homology was not a derived functor in the category of sheaves, nor a functor from spaces to groups satisfying axioms 1–7.“ [2, p. 23])

*

Whitneys Lebenswerk ist über jede Kritik erhaben, die Herausgabe seiner Aufsätze in diesen zwei Bänden ist es nicht – schade. Das zeigt sich schon im Vorspann, der beide Bände in derselben Version einleitet, knapp, lieblos und fehlerhaft. Das Vorwort der Herausgeber ist äußerst kurz angebunden, eine Würdigung der Person Whitneys findet nicht statt – da ist selbst der sehr konventionelle Klappentext informativer. Dann findet sich da auch eine trockene Tabelle von „Academic Appointments and Awards“ (weder fehlerfrei noch vollständig, vgl. [6, 7]), die man sich guten Gewissens hätte schenken können: oder besser noch ersetzen durch (zumindest) eine biographische Skizze.

Sozusagen als Einleitung drucken die Herausgeber im Band I einen Festaufsatz von Whitney zum hundertjährigen Bestehen der AMS ab – unter dem ursprünglichen, irreführenden Titel „Moscow 1935: Topology Moving Toward America“: und zwar so

lieblos, daß sogar das Photo von den Teilnehmern der Moskauer Konferenz fehlt, obwohl die „who is who“-Liste des Photos als Fußnote der Titelseite stehen bleibt. Das ist um so bedauerlicher, als sich Whitney ausdrücklich auf das Photo bezieht! Auch fehlt die Jahresangabe (publiziert 1988): die auch deshalb interessant ist, weil sie Jahre nach Whitneys letzter mathematischer Veröffentlichung liegt.

Überhaupt läßt die Bibliographie von Whitneys Werken – die doch das Rückgrat einer Werk-Ausgabe sein müßte – einiges zu wünschen übrig. Sie findet sich im Vorspann beider Bände in derselben verwahrlosten Version: vom Druckfehlerteufel verfolgt, mit fehlenden Angaben (bei Konferenzbänden interessiert z. B. der Herausgeber), mit verstümmelten Zeitschriftennamen, und unvollständig. Schon Whitneys Dissertation [3] fehlt. Das Vorwort erwähnt, ohne einen Titel zu nennen, ein Buch-Manuskript über Sphären-Bündel und die Produktformel für Stiefel-Whitney-Klassen, das sich in der Bibliographie aber nicht findet (im Gegensatz zu einem anderen unpublizierten Manuskript). Ein weiteres Buchmanuskript, das anscheinend in Harvard 1964 abgeschlossen wurde [6, p. 578], ist überhaupt nicht erwähnt.

Besorgt man sich zum Beispiel die Liste der Aufsätze von Whitney, die der Zentralblatt-Computer in Karlsruhe ab 1972 führt (*das ist in weniger als drei Minuten vom Bildschirm aus geschehen – dafür führt das ZIB-Berlin das DMV-Projekt „Fachinformation“ durch!*) so findet man außer den Gesammelten Aufsätzen, die hier zur Diskussion stehen, fünf zusätzliche Einträge, von denen zwei in der Bibliographie fehlen. Der eine ist [4] – den hätte man nicht vergessen sollen, wenn man weiß, wie wichtig Whitney sein Engagement in Bezug auf Mathematik-Erziehung war. Der andere Eintrag ist [5] – ein gesetzter, korrigierter Nachdruck eines Aufsatzes von Whitney und W.T. Tutte, von dem die Herausgeber hier die getippte Originalversion von 1972 nachdrucken, welche mit einer Vermutung endet, die auf dem Kreis mit fünf Ecken scheitert – so darf man Whitneys Beiträge zur Graphentheorie nicht beenden!

- [1] Dieudonné, J.: A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960, Basel: Birkhäuser 1989
- [2] Habegger, N., in Borel, A. ed.: Intersection Cohomology, Progress in Mathematics 50, Boston: Birkhäuser 1984
- [3] Whitney, H.: The Coloring of Graphs, Ph.D. Thesis directed by George David Birkhoff, Harvard University 1932
- [4] Whitney, H.: Letting research come naturally, Math. Chronicle 14 (1985) 1–19
- [5] Tutte, W. T.; Whitney, H.: Kempe chains and the four colour problem, in: (D.R. Fulkerson, ed.) Studies in Graph Theory, Part II, MAA Studies in Math., Vol. 12 (1975), pp. 378–413
- [6] The Steele Prizes, Notices Amer. Math. Soc. 32 (1985) 577–579
- [7] Hassler Whitney 1907–1989, Notices Amer. Math. Soc. 36 (1989) 684–685

Berlin

G. M. Ziegler

Eklof, O., Mekler, A., Almost free modules, set-theoretic methods, Amsterdam u. a.: North-Holland 1990, 482 S., Dfl 225.00

Bisher haben zwei Monographien die mathematische Sekte der Abelianer langfristig gestärkt, wenn nicht gar erst begründet, vielen Nichtfachleuten einen Zugang zu dem Teilgebiet Abelsche Gruppen der Algebra geöffnet und neue Anhänger erobert. Ich meine zum einen Irving Kaplansky's inzwischen rotes Büchlein „Infinite Abelian Groups“ aus dem Jahre 1952, wo viele Höhepunkte der Theorie – wie Ulmscher Satz, Klassifikation der Rang-1-Gruppen – fast ausnahmslos (modulo dem Gaußschen Satz) aus der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts, in einer noch heute genüßlich zu lesenden Form, stets wechselnd zwischen

dem speziellen Thema und dem allgemeinen mathematischen Aspekt, zusammengetragen sind. Zum anderen meine ich Laszlo Fuchs' zweibändiges grünes Werk bei Academic Press mit dem gleichen Titel sowie seinen Vorgänger, das mit viel Sorgfalt, mit Blick auf Vollständigkeit und einem guten Gefühl für das Unwesentliche, weit verstreute Ergebnisse, was eine große Hilfe für die vielen Analphabeten des Russischen unter den Westmathematikern ist, zusammenfaßt. Beide Monographien, obwohl heuer schon 40 bzw. 20 Jahre alt, gehören nach wie vor zum unerläßlichen Grundstock, dem „alten Testament“ dieser Forschungsrichtung, nur wenig ergänzbar durch das weniger bekannte jetzt vergriffene Buch von Griffith „Infinite Abelian Group Theory“ aus University of Chicago Press (1970).

Und nun ist ein neues hellblaues Buch „Almost free modules, set-theoretic methods“ in der North Holland Mathematical Library, Amsterdam, New York 1990 von Paul Eklof (UC, Irvin, California) und seinem leider kürzlich verstorbenen, brillanten Schüler Alan Mekler (Simon Fraser University, Burnaby) auf dem Markt. Das Wort „modules“ in dem Titel ist wohl ein wenig Etikettenschwindel, denn richtig spannend ist die hier beschriebene Entwicklung speziell für Abelsche Gruppen, und Eklof-Mekler halten sich weitgehend an diese Einschränkung. Natürlich haben „abelsche Sätze“ häufig einen modultheoretischen Großvater, wenn der Grundring nicht zu abartig ist. Allzu oft finden wir jedoch Publikationen mit schönen, tiefen gruppentheoretischen Ideen, die aus zu großem Respekt vor klassisch-orthodoxen mathematischen Religionen zu Ergebnissen der Modultheorie „aufgemöbelt“ werden. Das ist bei Eklof-Mekler jedoch nicht der Fall!

Es hat sich ja unter den meisten Mathematikern herumgesprochen, daß die Sparte „Abelsche Gruppen“ wegen ihrer anfänglich einfachen algebraischen Struktur, – wir kennen seit Gauß *alle* endlichen Gruppen!, – zum Testgebiet der modernen Modelltheorie, Mengenlehre und Kombinatorik geworden ist. Eklof-Mekler datieren diesen dramatischen Wandel auf den 11. Juli 1973, als Saharon Shelah oben genannte Fuchsche Monographie aus der Bücherei der Hebrew University in Jerusalem ausgeliehen hat.

In der vorgehenden Dekade waren namhafte Mathematiker, man kann dies an den Publikationen von Chase, Hill und Nunke unmittelbar nachvollziehen, nur ein ε von der Lösung des Whitehead-Problems entfernt. Dieses entscheidende ε bestand im Einbringen axiomatischer Mengenlehre und im Troß kombinatorischer Prinzipien und schließlich der „Erwartungshaltung“, daß ein anständiges mathematisches Problem – und nicht nur die Existenz von krausen topologischen Räumen – unentscheidbar sein kann – ein beeindruckender Beitrag von Shelah. Dieses ε hat das Ende der sechziger Jahre unter ausgereizten Methoden der homologischen Algebra, abzählbaren Abzähltechniken und topologischen Tricks etwas dahindämmernde Arbeitsgebiet Abelsche Gruppen revolutioniert. Erinnern wir uns daran, daß kein anderer als Irving Kaplansky noch 1970 meinte, daß Abelsche Gruppen etwas Ruhe brauchen, eine Aussage, die er mit der stürmischen Entwicklung der letzten 15 bis 20 Jahre bald schriftlich (!) widerrufen konnte:

“On pages 108–109 I made some remarks about infinite abelian groups and offered the suggestion that the subject might be allowed to take a rest for a while. I was not serious. In fact, seven years later, I prepared a second edition of my *Infinite Abelian Groups*. Moreover, my advice was fortunately not taken. Of the many fine achievements in abelian group theory, I have in this article picked five theorems I particularly admire which were proved since my 1961 indiscretion.”

S. 44 aus I. Kaplansky, “Five theorems in abelian groups”, 44–51 in Proceedings of the 18th Summer Research Institute of the Austral. Math. Soc., Canberra 1978).

Wer von dieser neuen Entwicklung Abelscher Gruppen, dem entscheidenden Funken etwas spüren möchte, dem sei das keineswegs trockene Buch von Eklof-Mekler empfohlen. Wie schon gesagt, ist es für den Nichtfachmann hilfreich, die anfangs genannten Monographien griffbereit zu haben. Die homologischen Sequenzen, verschiedenen Definitionen von Ext und Standardhilfsmittel werden nicht noch einmal hergeleitet oder motiviert,

das ist ja a.a.O. ausführlich getan. Allerdings werden die mengentheoretischen Methoden, die Shelahsche Kombinatorik, die Gewinnspiele der Modelltheoretiker befriedigend ausgewalzt, gleichwohl ein Logiker „schlampige Stellen“ finden kann, die ein Algebraiker weniger ernst überliest. Kapitel II (Mengenlehre: cups, games, trees) und Kapitel VI (Prediction principles, diamond, box axiom, Martin's axiom u. ä.) geben das nötige Rüstzeug für einen „klassischen“ Mathematiker.

Die Themenauswahl dieses fast 500 Seiten starken Bandes ist absichtlich so gewählt, daß der Leser möglichst oft den Einflüssen der letzten 15 Jahre, insbesondere Anwendungen der Modelltheorie und Mengenlehre, ausgesetzt ist: Es fängt harmlos an mit schlanken Gruppen, auf die uns Baer, Specker und Łos gebracht haben (Kapitel II), dann merkt man auf einmal, daß Ultrafilter dafür relevant werden, und es folgt Edas Satz, der besagt, wie Duale $\text{Hom}(G, \mathbb{Z}) = G^*$ von kartesischen Produkten $G = \mathbb{Z}^I$ allgemein aussehen, ohne, wie Łos, meßbare Kardinalzahlen zu verbieten. Der nächste große Schritt ist ein Satz über Spiele, der ursprünglich von Shelah bewiesen und kürzlich von ihm nochmals verallgemeinert werden mußte, der später von Hodges in recht allgemeiner Form vielen Interessenten zugänglich gemacht wurde, der sogenannte „singuläre Kompaktheitssatz“. Er besagt, daß sich viele Eigenschaften auf Objekte singulärer Mächtigkeit (z. B. \aleph_ω) vererben, sofern nur die kleineren Teilstrukturen die Eigenschaft haben. Eine wichtige Anwendung dieses Satzes findet man beim Whitehead-Problem für beliebige Kardinalzahlen. Allgemeiner ist das Hauptanwendungsgebiet des singulären Kompaktheitssatzes die Klasse fastfreier Abelscher Gruppen (Kap. VII, VIII). Das zentrale Thema des Buches ist vorbereitet. Natürlich ist es das Whitehead-Problem, das schon die Untersuchung von kartesischen Produkten \mathbb{Z}^I von \mathbb{Z} beeinflußt (Kap. IX) und in (XII) vollständig gelöst wird. Da $\text{Ext}(A, B)$ für torsionsfreie Gruppen A, B stets teilbar ist, ist so eine Ext-Gruppe durch Kardinalzahlen (= Ränge) bestimmt. Diese werden (im Aufwasch mit Whitehead) in (XII) bestimmt und hängen bekanntlich von den zugrundeliegenden Modellen der Mengenlehre ab. Um Gruppen mit vorgeschriebenen Endomorphismenringen zu bestimmen – eine Idee, die auf Corner (Oxford) zurückgeht und die Zerlegungsverhalten dieser Gruppen klärt – wurde aus Shelahscher Kombinatorik ein cleverer „Abzählreim“ herausdestilliert, den wir „Shelahsche Black Box“ genannt haben, den man auch in „allgemeiner“ Gruppentheorie, Körper- und Ringtheorie, wenn es um sogenannte starre Objekte geht, anwenden kann. Diese Black Box wird in XIII verschärft und verallgemeinert und zur Konstruktion von vielen unzerlegbaren Abelschen Gruppen und fast unzerlegbaren, separablen Gruppen genutzt. Das abschließende Kapitel XIV ist dem Verhalten und der Existenz von Dualgruppen $G = X^*$ gewidmet, einem sehr fruchtbaren Forschungsgebiet der beiden Autoren. G. Schlitt, ein Schüler des verstorbenen Alan Mekler, konnte kürzlich mit garbentheoretischen Methoden die Probleme 1 und 3 (Seite 454) sowie 4 und 11 (Seite 454, 455) des Bandes positiv bzw. negativ beantworten. Die auf den letzten Seiten genannten Fragen haben weitere Forschung stimuliert, sie werden inzwischen weltweit untersucht und einige Antworten konnten gefunden werden. Dem interessierten Leser gebe ich gern auf Anfrage die hier vorenthaltenen Informationen weiter.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß der vorliegende Band ein sehr schöner, vor allem zeitgemäßer Beitrag zu einem meines Erachtens faszinierenden auf jeden Fall aktiven Arbeitsgebiet ist, das sich Gott sei Dank auf den Kreuzungspunkt verschiedenster Theorien und Methoden verschoben hat. Die Anhänger der Sekte „Abelianer“ haben das Buch sicherlich längst in ihrem Bücherregal, besser noch aufgeschlagen zwischen Manuskripten. Ich möchte es aber gerade denjenigen Mathematikern empfehlen, die aktuelle Zeugnisse über fruchtbare Wechselwirkungen zwischen Modelltheorie, Mengenlehre und klassischer Mathematik kennenlernen wollen.

Carl, B., Stephani, I., Entropy, Compactness and the Approximation of Operators,
Cambridge University Press 1990, 277 S., \$ 69.50

Das Buch behandelt einige Fragen an der Grenze zwischen Approximationstheorie, Operatortheorie und Geometrie der Banachräume. Zunächst werden Entropiezahlen diskutiert, die ein Maß für Überdeckungen bilden und damit den Grad der Kompaktheit von Operatoren quantitativ beschreiben. Dann wird der Zusammenhang dieser Zahlen mit verschiedenen n -ten Weiten bzw. s -Zahlen studiert und gewisse Ungleichungen vom Berstein- bzw. Jackson-Typ werden bewiesen. Sodann werden Aussagen über die Verteilung der Eigenwerte mit Hilfe der s -Zahlen und Entropiezahlen getroffen. Anwendungen ergeben sich insbesondere für Integraloperatoren. Im letzten Kapitel werden einige Fragen der lokalen Theorie der Banachräume studiert.

Das Buch ist sehr gut geschrieben und setzt nur grundlegende Kenntnisse aus der Funktionalanalysis voraus.

Erlangen

E. Novak



Walter de Gruyter
Berlin • New York

Peter Deuflhard / Folkmar Bornemann

Numerische Mathematik II

- Integration gewöhnlicher
Differentialgleichungen -

1994. 15,5 x 23 cm. XVI, 383 Seiten.
Mit 16 Abbildungen und 16 Tabellen.
Gebunden DM 98,- ISBN 311-013936-7
Broschur DM 48,- ISBN 311-013937-5
de Gruyter Lehrbuch

Inhalt:

Mathematische Modelle zeitabhängiger Prozesse • Existenz und Eindeutigkeit • Kondition und Stabilität • Einschrittverfahren für nichtsteife Probleme • Schrittweitensteuerung bei Einschrittverfahren • Einschrittverfahren für steife und differentiell-algebraische Probleme • Mehrschrittverfahren

de Gruyter
Lehrbuch



Deuflhard/Bornemann

Numerische
Mathematik II

Integration gewöhnlicher
Differentialgleichungen

de Gruyter
Lehrbuch



Deuflhard/Hohmann

Numerische
Mathematik I

Eine algorithmisch orientierte
Einführung
2. Auflage

Peter Deuflhard / Andreas Hohmann

Numerische Mathematik I

- Eine algorithmisch
orientierte Einführung -

2., überarbeitete Auflage

1993. 15,5 x 23 cm. XV, 371 Seiten.
Mit 62 Abbildungen, 14 Tabellen.
Gebunden DM 98,- ISBN 3-11-013975-8
Broschur DM 46,- ISBN 3-11-013974-X
de Gruyter Lehrbuch

Inhalt:

Lineare Gleichungssysteme • Fehleranalyse • Lineare Ausgleichsprobleme • Nichtlineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme • Symmetrische Eigenwertprobleme • Drei-Term-Rekursionen • Interpolation und Approximation • Große symmetrische Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme • Bestimmte Integrale

Walter de Gruyter & Co., P. O. Box 30 34 21, D - 10728 Berlin Tel.: (030) 2 60 05 - 0, Fax: (030) 2 60 05 - 2 51
Walter de Gruyter Inc., 200 Saw Mill River Road, Hawthorne, N. Y. 10532 Phone: (914) 747-0110, Fax: (914) 747-1326



Walter de Gruyter
Berlin • New York

F. Altomare / M. Campiti

**Korovkin-type
Approximation Theory
and its Applications**

With two appendices

by F. Beckhoff and M. Pannenberg

1994. 17 x 24 cm. XI, 627 pages.

Cloth DM 248,- / öS 1.935,- / sFr 237,-

ISBN 3-11-014178-7

de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 17

de Gruyter
Studies in Mathematics
17

Francesco Altomare • Michele Campiti

**Korovkin-type
Approximation Theory
and its Applications**

de Gruyter
Studies in Mathematics
18

V. G. Turaev
**Quantum Invariants
of Knots and 3-Manifolds**

V. G. Turaev

**Quantum Invariants of
Knots and 3-Manifolds**

1994. 17 x 24 cm. X, 588 pages. With 206 figures

Cloth DM 228,- / öS 1.779,- / sFr 218,-

ISBN 3-11-013704-6

de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 18

M. Fukushima / Y. Oshima / M. Takeda

**Dirichlet Forms and
Symmetric Markov Processes**

1994. 17 x 24 cm. IX, 392 pages.

Cloth DM 168,- / öS 1.311,- / sFr 161,-

ISBN 3-11-011626-X

de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 19

de Gruyter
Studies in Mathematics
19

Masatoshi Fukushima • Yachi Oshima •
Masayoshi Takeda

**Dirichlet Forms
and Symmetric Markov
Processes**



Walter de Gruyter Berlin • New York

de Gruyter Expositions in Mathematics

Volume 13

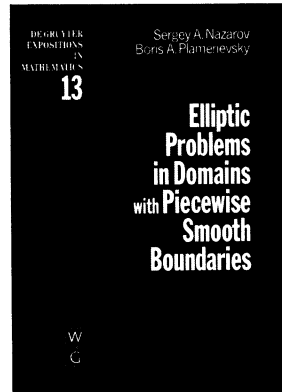
S. A. Nazarov / B. A. Plamenevsky

Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries

1994. 17 x 24 cm. VII, 525 pages.
Cloth: DM 278,- / öS 2.169,- / sFr 265,-
ISBN 3-11-013522-1

Contents:

Elliptic boundary value problems in domains with smooth boundary • Dirichlet and Neumann problems for the Laplace operator in plane domains with corner points at the boundary • General elliptic boundary value problems in a cylinder and in a cone • General elliptic problems in domains with conical points • Self-adjoint problems in domains with outlets to infinity • Self-adjoint problems in domains with conical points. Applications • Applications to crack theory • Elliptic problems in domains with smooth edges • Elliptic problems on manifolds with intersecting edges • Asymptotics of solutions of the Dirichlet problem for the Laplace operator in a three-dimensional domain having edges on the boundary • The asymptotics of solutions of general problems near edges • Self-adjoint problems with radiation conditions on the edges



Volume 14

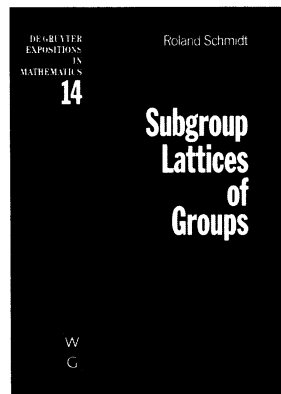
Roland Schmidt

Subgroup Lattices of Groups

1994. 17 x 24 cm. XVI, 576 pages. With 26 figures.
Cloth DM 248,- / öS 1.935,- / sFr 237,-
ISBN 3-11-011213-2

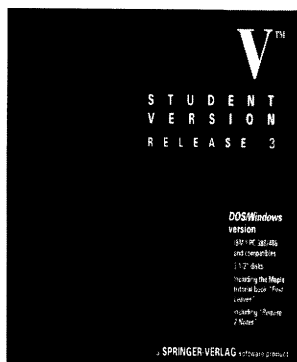
Contents:

Fundamental concepts • Modular lattices and abelian groups • Complements and special elements in the subgroup lattice of a group • Projectivities and arithmetic structure of finite groups • Projectivities and normal structure of finite groups • Projectivities and normal structure of infinite groups • Classes of groups and their projectivities • Dualities of subgroup lattices • Further lattices



Walter de Gruyter & Co., P. O. Box 30 34 21, D - 10728 Berlin Tel.: (030) 2 60 05 - 0, Fax: (030) 2 60 05 - 2 51
Walter de Gruyter Inc., 200 Saw Mill River Road, Hawthorne, N. Y. 10532 Phone: (914) 747-0110, Fax: (914) 747-1326

Now available – Student Version Release 3!



Waterloo Maple Software, Waterloo, Ontario, Canada

Maple V™ Student Version

Release 3, DOS/Windows

1994. 6 3 1/2 diskettes, handbook with approx. 70 pp., 60 notes + Char et al., **First Leaves**. DM 172,- *
ISBN 3-540-14216-9

Release 3, Macintosh

1994. Diskette, manual with 136 pp., 270 figs. + Char et al., **First Leaves**. DM 172,-* ISBN 3-540-14209-6

The two **Maple V Student Versions: Release 3, DOS/Windows** and **Macintosh** provide the science student or enthusiast with the powerful symbolic and numeric computational capabilities of the **Maple V** computer algebra system. An easy-to-implement programming language and comprehensive library of built-in mathematical functions makes solving problems from algebra to differential equations fast and reliable. Maple's open architecture gives you the freedom to develop a personalized library of functions or to customize the system for almost any application. And most of all, Maple's two and three dimensional graphics put the power of scientific visualization on your desktop.

All this functionality is presented in an easy-to-use Windows or Macintosh interface. The DOS/Windows version utilizes standard Windows tools such as WinHelp and automatic dithering. An intuitive command-line interface with helpful menus and an interactive help browser is included for DOS. The Macintosh version offers standard Macintosh menus and dialog boxes.

Documentation includes **First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V** that leads you through the basics of the Maple V language and provides dozens of helpful examples.

D. Redfern, Stratford, Ont., Canada

The Maple Handbook: Maple V™ Release 3

1994. Approx. 500 pp. Softcover DM 48,- ISBN 3-540-94331-5

The Maple Handbook is an essential reference tool for all users of the Maple system. It provides a complete listing of every command in the Maple language, categorized into logical categories. **The Handbook** is well referenced, with an alphabetical index of commands, and pointers to appropriate sections of the official Maple documentation.

*All prices are suggested retail prices plus 15% VAT in Germany. In other EU countries plus local VAT.

Prices are subject to change without notice. In EU countries the local VAT is effective. Customers in EU Countries, please state your VAT-Identification-Number if applicable. For information on prices in Austrian schillings and Swiss francs please consult the German book directory "VLB - Verzeichnis lieferbarer Bücher" or our general catalogue.



Springer

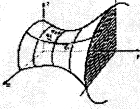
d&p.2288.MNT/E/1

Springer-Verlag Heidelberger Platz 3, D-14197 Berlin, F.R. Germany 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA Sweetapple House, Catteshall Road, Godalming, Surrey GU7 3DJ, England
 26, rue des Carmes, F-75005 Paris, France 3-13, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan Room 701, Mirror Tower, 61 Mody Road, Tsimshatsui, Kowloon, Hong Kong
 Avinguda Diagonal, 468-4° C, E-08006 Barcelona, Spain Wesselényi u. 28, H-1075 Budapest, Hungary

The easy and attractive access to differential forms

Manfredo P. do Carmo

Differential Forms
and Applications



 Springer-Verlag

*Authored by the winner of the 1992
Mathematics Prize of the
Third World Academy of Sciences*

M.P. do Carmo

Differential Forms and Applications

1994. IX, 118 pp. 18 figs. (Universitext) Softcover
DM 48,- ISBN 3-540-57618-5

This book treats differential forms and uses them to study some local and global aspects of the differential geometry of surfaces. Differential forms are introduced in a simple way that will make them attractive to "users" of mathematics. A brief and elementary introduction to differentiable manifolds is given so that the main theorem, namely the Stokes' theorem, can be presented in its natural setting.

The applications consist of developing the method of moving frames of E. Cartan to study the local differential geometry of immersed surfaces in \mathbb{R}^3 as well as the intrinsic geometry of surfaces.

Everything is then put together in the last chapter to present Chern's proof of the Gauss-Bonnet theorem for compact surfaces.

Prices are subject to change without notice. In EC countries the local VAT is effective. Customers in EC countries, please state your VAT-identification-Number if applicable. For information on prices in Austrian schillings and Swiss francs please consult the German book directory "VLB - Verzeichnis lieferbarer Bücher" or our general catalogue.

Springer-Verlag Heidelberger Platz 3, D-14197 Berlin, F.R. Germany 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA Sweetapple House, Catteshall Road, Godalming, Surrey GU7 3DJ, England 26, rue des Carmes, F-75005 Paris, France 3-13, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan Room 701, Mirror Tower, 61 Mody Road, Tsimshatsui, Kowloon, Hong Kong Avinguda Diagonal, 468-4° C, E-08006 Barcelona, Spain Wesselényi u. 28, H-1075 Budapest, Hungary

F.W. Warner

Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups

1983. (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 94)
Hardcover DM 93,- ISBN 3-540-90894-3

V.I. Arnold

Mathematical Methods of Classical Mechanics

Corr. 3rd printing 1994. 2nd ed. 1989. XVI,
508 pp. 269 figs. (Graduate Texts in Mathematics,
Vol. 60) Hardcover DM 88,- ISBN 3-540-96890-3



Springer

rb.2156.MNT/E/1

CompactMath CD-ROM



NEW now available for DOS, WINDOWS and UNIX on one CD-ROM

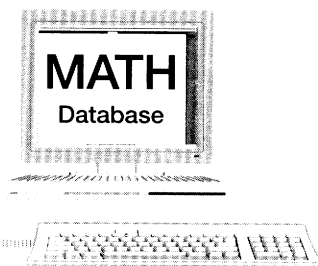
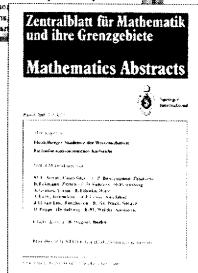
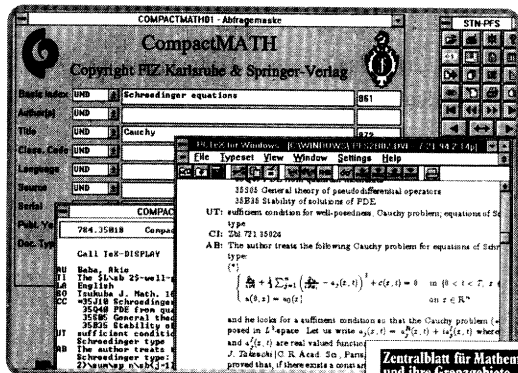
NEW with STN-PFS, the powerful retrieval system

NEW output in ASCII or T_EX

NEW coverage of *Zentralblatt* issues back to 1931

CompactMATH is the latest, fastest and most comfortable-to-use component of the "family":

- *Zentralblatt für Mathematik / Mathematics Abstracts* (print version)
- *MATH Database* (online on STN International)
- *CompactMATH* CD-ROM



Heidelberger Akademie
der Wissenschaften



Springer electronic media

2174.NM/E/1

Strehmel/Weiner

Numerik gewöhnlicher Differential- gleichungen

Die numerische Behandlung von Differentialgleichungen ist eine der am häufigsten in praktischen Anwendungen auftretende Aufgabe der numerischen Mathematik. In den letzten 20 Jahren vollzog sich, wesentlich beeinflusst durch immer leistungsfähigere Computer, eine stürmische Entwicklung in der theoretischen Untersuchung und Implementierung numerischer Integrationsverfahren.

Dieses Lehrbuch will Studenten naturwissenschaftlicher Fachrichtungen aber auch Ingenieuren eine umfassende Darstellung moderner Verfahren für Anfangswertprobleme nichtsteifer und steifer Differentialgleichungen, Algebra- und retardierter Differentialgleichungen geben. Zahlreiche Beispiele illustrieren Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren, theoretische Untersuchungen geben Hinweise für die Auswahl geeigneter Methoden für konkrete Probleme. Übungsaufgaben fördern das Verständnis des dargebotenen Stoffes.

Aus dem Inhalt

Theoretische Grundlagen – Einschritt-, Mehrschritt- und Extrapolationsverfahren für nichtsteife und steife Systeme – Fragen der Implementierung – Einschätzung der Verfahren – Methoden für Algebra-Differentialgleichungen – Numerische Behandlung retardierter Differentialgleichungen mit konstanter Nacheilung



Von Prof. Dr.
Karl Strehmel
und Prof. Dr.
Rüdiger Weiner
Universität Halle-Wittenberg

1995. 462 Seiten mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen und Übungsaufgaben.

13,7 x 20,5 cm.

Kart. DM 49,80

ÖS 389,- / SFr 49,80

ISBN 3-519-02097-1

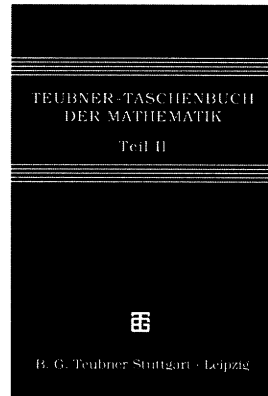
(Teubner Studienbücher)



B. G. Teubner Stuttgart

Postfach 80 10 69 70510 Stuttgart

TEUBNER- TASCHENBUCH der Mathematik Teil II



Mit dem „TEUBNER-TASCHENBUCH der Mathematik, Teil II“ liegt eine vollständig überarbeitete und wesentlich erweiterte Neufassung der bisherigen „Ergänzenden Kapitel zum Taschenbuch der Mathematik von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew“ vor, die 1990 in 6. Auflage im Verlag B. G. Teubner in Leipzig erschienen sind. Dieses Buch vermittelt dem Leser ein lebendiges, modernes Bild von den vielfältigen Anwendungen der Mathematik in Informatik, Operations Research und mathematischer Physik.

Aus dem Inhalt

Mathematik und Informatik – Operations Research – Höhere Analysis – Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen – Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen – Dynamische Systeme, Mathematik der Zeit – Nichtlineare partielle Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften – Mannigfaltigkeiten – Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie – Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen, Mathematik der Symmetrie – Topologie – Krümmung, Topologie und Analysis

Herausgegeben von
Doz. Dr.
Günter Grosche
Leipzig
Dr. **Viktor Ziegler**
Leipzig
Dorothea Ziegler
Frauwalde
und Prof. Dr.
Eberhard Zeidler
Leipzig

7. Auflage. 1995.
Vollständig überarbeitete
und wesentlich erweiterte
Neufassung der 6. Auflage
der „Ergänzenden Kapitel
zum Taschenbuch der
Mathematik von
I. N. Bronstein und
K. A. Semendjajew“.
XVI, 830 Seiten mit
259 Bildern.
14,5 x 20 cm.
Geb. DM 48,-
/ ÖS 375,- / SFr 48,-
ISBN 3-8154-2100-4

Teubner Leipzig



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig

Postfach 80 10 69 · 70510 Stuttgart