E 20577 F
97. Band Heft 1
ausgegeben am 19. 6. 1995

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1995

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 97, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Aigner, J. J. Seidel: Knoten, Spin Modelle und Graphen
A. Böttcher: Toeplitz operators with piecewise continuous symbols – a neverending story?
L. Bröcker: Semialgebraische Geometrie
W. Dahmen: Multiskalen Methoden und Wavelets – Konzepte und Anwendungen
B. Green, F. Pop, P. Roquette: On Rumely's Local-Global Principle
H. Neunzert: Vom Nutzen der Mathematik
G. Schumacher: Über die Entwicklung der Komplexen Analysis in Deutschland vom Ausgang des 19. Jahrhunderts bis zum Anfang der siebziger Jahre

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jb. d. Dt. Math.-Verein.
97 (1995) 1–18
AMS subject classification: 32 N 10, 10 D 40, 10 D 20

On Automorphic Forms for the Jacobi Group

R. Berndt, Hamburg

1 Some Motivation and Background

The aim of this compendium[1] is to give an overview of (parts of) the theory of Jacobi forms. Special emphasis is put on comparing the general theory of automorphic forms for reductive groups with the results obtained up to now for the Jacobi forms for which the corresponding group is nonreductive. The question arises, and will be discussed briefly, whether there is some reasonable canonical way to establish a theory of L-functions for this case too, for instance using Whittaker models. As even the notion of a "Jacobi group" varies with different authors, and things are developing in many different directions, this paper does not pretend to give comprehensive coverage of the subject.

The Jacobi group is in general a semidirect product of a symplectic group with a Heisenberg group. Most work has been done up to now for the simplest case "of degree one" where the symplectic group is simply $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ and the Heisenberg group means

$$H(\mathbb{R}) = \{(Y, \zeta),\ Y = (p, q) \in \mathbb{R}^2,\ \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| = 1\}$$

with multiplication law

$$(Y, \zeta)(Y', \zeta') = (Y + Y', \zeta\zeta' e(pq' - qp')), \qquad e(u) = e^{2\pi i u}.$$

Then the Jacobi group will be written as

$$G^J = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ltimes H(\mathbb{R})$$

with elements

$$g = (M, Y, \zeta),$$

[1] This is the extended version of a colloquium talk given at the Purdue University on September 24, 1991 during a one month's stay. I am grateful to Purdue University for its hospitality. Special thanks are due to Freydoon Shahidi for all his assistance during my stay in Lafayette and to Walter Baily from the University of Chicago for stimulating discussions and help on my way.

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= n(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}}_{= t(y)} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}}_{= r(\vartheta)} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

$$Y = (p, q) \in \mathbb{R}^2, \qquad \zeta \in S^1$$

and multiplication

$$gg' = \left(MM', Y + Y'M^{-1}, \zeta\zeta' e(\det \begin{pmatrix} Y \\ Y'M^{-1} \end{pmatrix}) \right).$$

Now, automorphic forms for the Jacobi group are smooth functions Φ on G^J with

$$\Phi(\gamma g) = \Phi(g) \quad \text{for all} \quad g \in G^J \quad \text{and} \quad \gamma \in \Gamma^J$$

for $\quad \Gamma^J = \Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2 \quad$ for $\quad \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

or some subgroup of finite index and some other properties to be specified later on.

These forms arise in several ways:

- The Fourier Jacobi expansion of a Siegel modular form.
- The analysis of the transformation property of Jacobi's theta functions or of Weierstraß' $\wp$-function.
- The embedding problem for the universal elliptic curve or universal abelian varieties.

This last way will be briefly sketched here:

1) It is a standard fact that for

$$\Gamma(N) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); M \equiv 1_2 \bmod N\}$$

the space of double cosets

$$\Gamma(N) \backslash \underbrace{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)}_{= \mathfrak{H} = \{\tau = x + iy \in \mathbb{C};\, y > 0\}} = X(N)$$

may be compactified by adding "the cusps" to get $X^*(N)$, the modular curve of level N. And one can use the classical elliptic modular forms for $\Gamma(N)$ to get projective embeddings of $X(N)^*$.

2) Similarly an elliptic curve $E = E_\tau$ for $\tau \in \mathfrak{H}$ may be thought of as isomorphic to the space of double classes

$$\mathbb{Z}^2 \backslash \underbrace{H(\mathbb{R})/S^1}_{= \mathbb{R}^2} \simeq (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \backslash \mathbb{C} = E_\tau.$$

And this space may be realized as a curve in $\mathbb{P}^2$ by using the Weierstraß $\wp$-function.

3) In a very natural way too, one has as a solution to the moduli problem for elliptic curves with fixed N-division points a fiberspace over $X(N)$ consisting of the following double cosets (with $K^J := \mathrm{SO}(2) \times S^1$)

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(N)^J \backslash \underbrace{G^J/K^J}_{\mathfrak{H}\times\mathbb{C}} = Y(N) & \to & Y(N)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(N) & \to & X(N)^* \end{array}$$

the fiber over $(\tau)_\sim \in X(N)$ being the elliptic curve E_τ. Compactifying by adding Néron N-gons over the cusps of $X^*(N)$, one gets the universal elliptic curve with level N structure $Y^*(N)$, also called the Shioda surface of level N. If one looks for automorphic forms to get projective models of these objects, one arrives at the notion of Jacobi forms as functions on $\mathscr{X} = \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ which

- have a certain fixed $\Gamma(N)^J$-covariance
- are holomorphic (or meromorphic)
- have a certain growth condition as $\operatorname{Im} \tau \to \infty$.

More information about this is to be found in Mumford's book [M] and in [Be7] or the thesis of Bartsch [Ba]. Before going on, I want to stop here for the following observation:

In all three situations one has

$$\Gamma \backslash \mathscr{X},$$

a quotient of a homogenous space $\mathscr{X} = G/K$ by an arithmetic group Γ, where in

case 1 G is semisimple
case 2 G is nilpotent
case 3 G is a semidirect product of both.

That is, in the first case $\mathscr{X}$ is a *symmetric space,* the standard involution given by the operation

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fixing exactly $i \in \mathfrak{H}$. In the second case $\mathscr{X}$ is a *nilmanifold.* In the third case, where the theory of the symmetric spaces mixes with the theory of nil- or solvmanifolds, the result is not too complicated, namely a *"generalized symmetric space",* where $(i, 0) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ is the fixed point of the element

$$\tilde{w}_0 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (0,0), 1 \right) \in \Gamma^J$$

which has the order 4. All this is reflected to a certain extent in the following statement.

If

$$\mathbb{D}(\mathscr{X})^G$$

denotes the algebra of G-invariant differential operators on $\mathscr{X}$, then $\mathbb{D}(\mathscr{X})^G$ is commutative in the first two cases with

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\mathscr{X})^G &= \langle \Delta_{\mathfrak{H}} \rangle, \quad \Delta_{\mathfrak{H}} = y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2) && \text{in case 1} \\ &= \langle \partial_p, \partial_q \rangle && \text{in case 2} \end{aligned}$$

but *not* commutative in case 3 [Be5]. However, for each $c>0$, there is a distinguished G-invariant operator [Be3], [Be8]

$$\Delta_{\mathscr{X}} = \Delta_{\mathfrak{H}} + c\Delta_0, \quad \text{with} \quad \Delta_0 = (1/y)(\partial_p^2 - 2x\partial_p\partial_q + (x^2+y^2)\partial_q^2),$$

the Laplace-Beltrami operator, belonging to the G^J-invariant metric

$$ds^2 = y^{-2}(dx^2+dy^2) + (cy)^{-1}((x^2+y^2)dp^2 + 2xdpdq + dq^2).$$

Here immediately, the following two problems arise:

Problem I. Study the spectrum of $\Delta_{\mathscr{X}}$ (with and without automorphic conditions).

Problem II. Interprete the structure of $\mathbb{D}(\mathscr{X})^G$ and of the space of spherical functions $\mathscr{C}(G^J//K^J)$ and compare them with Gritsenko's Hecke ring $L_p^{n,1}$ ([Gr1]).

Before discussing further problems, some historical remarks should be made.

In 1985, the names Jacobi group and Jacobi forms were introduced in the "classic" book [EZ] by Eichler and Zagier, recalling Jacobi's "Fundamenta nova theoriae functionum ellipticorum", wich appeared in 1829 ([Ja]). Earlier, these objects had appeared more or less explicitely, under various names, in the work of many authors. The following chronology compiled using a.o. Skoruppa [Sk3], certainly is not complete but may help to give an impression of the development.

In 1969 Pyatetski-Shapiro [PS] discussed the Fourier Jacobi expansion of Siegel modular forms and the field of "modular abelian functions". He gave the dimension of this field in the higher degree case.

About the same time Satake [Sa1]–[Sa3] began discussing the group behind theta functions and studied its discrete series representation. He introduced the notion of "groups of Harish-Chandra type" ([Sa3] p.118ff.) which are non reductive but still behave well enough so that he could determine their canonical automorphy factors and kernel functions.

Shimura, too, certainly was aware of the mechanism leading to the introduction of the Jacobi group. In 1976 and 1978 ([Sh1], [Sh2]), he gave a new foundation of the theory of complex multiplication of abelian functions using Jacobi theta functions.

Kuznetsov [Ku] in 1975 constructed functions which were almost Jacobi forms from ordinary elliptic modular forms.

Beginning in 1981, some papers by Berndt [Be1]–[Be4] appeared, studying the field of what now would be called arithmetic Jacobi functions, ending with a proof of a Shimura reciprocity law for the field of such functions with arbitrary level.

In 1982 Tai [Ta] gave asymptotic dimension formulae for certain spaces of Jacobi forms in several variables and used these to show that the moduli space A_g of principally polarized abelian varieties is of general type for $g \geqslant 9$.

Also worth mentioning is a 1983 paper by Feingold and Frenzel [FF], where Jacobi forms appear in the context of Kac-Moody algebras and Gritsenko's 1982 paper (resp. 1984 in the english translation [Gr1]), where he studied Fourier

Jacobi expansions and a non commutative Hecke ring in connection with the Jacobi group.

Since 1985, nearly everybody in this field refers to the monograph by Eichler and Zagier [EZ]. Here the notions of Jacobi group and Jacobi forms are fixed and their theory is systematically developed along the lines of the classical theory of elliptic modular forms. The authors

- determine the structure of the algebra of Jacobi forms
- introduce holomorphic Eisenstein series
- give dimension formulae for the space of Jacobi forms
- define and study Hecke operators
- establish correspondences with several other types of modular forms (leading in particular to a proof of the Saito-Kurakawa conjecture).

Subsequent to the appearance of that book, the amount of work on the Jacobi group seems to be growing considerably. There are several papers ([KS], [Kr1], [Sk1]–[Sk6], [SZ1], [Za2]) by Kohnen, Kramer, Skoruppa and Zagier exploiting further the relationship between elliptic modular forms of half integral weight and of integral weight, Siegel modular forms of degree two and Jacobi forms. There are also trace formulae for the Jacobi group (of degree one) by Eichler [E1] and Skoruppa-Zagier [SZ1]. Arakawa [Ar1] established analytic continuation and the functional equation for certain standard real analytic Eisenstein series and in [Ar2] for certain associated Selberg zeta functions.

Then there are papers characterizing Jacobi forms in different ways

i) as sections of a certain line bundle on the Shioda surface by Kramer [Kr2], and
ii) (by representation theoretic methods) as functions on the Jacobi group by Berndt and Böcherer [Be6], [BeBoe]. This will be described in more detail in the next section.

There are also approaches which extend the definition of Jacobi forms, by Eichler [E2], [E3], introducing "erweiterte Modulformen" containing three variables, and by Skoruppa [Sk3] introducing "skew holomorphic Jacobiforms" to fill a gap in a correspondence between a certain space of distinguished elliptic modular forms and objects belonging to the theory of the Jacobi group.

The spectral theory for $L^2(\Gamma^J \backslash G^J)$ has been pursued further by [BeBoe] and, using more general Eisenstein series, by [Be9]. This will be discussed in a later section.

All this deals only with the lowest degree Jacobi group G^J as presented above. One can as well look at a semidirect product

$$G^J_{n,r} = \mathrm{Sp}_n \ltimes H_{n,r}$$

of the symplectic group in degree n with a generalized Heisenberg group $H_{n,r}$ for which as a set one has

$$H_{n,r}(\mathbb{R}) = (M_{r,n}(\mathbb{R})^2) \times \mathrm{Sym}_r(\mathbb{R}).$$

A large part of the theory for degree 1, especially including the relation with the symplectic group has been generalized to this general group by Yamazaki [Ya], Ziegler [Zi], Yang [Yan], Yang-Son [YaSo] and, in particular discussing Poincaré series, by Klingen [Kl1], [Kl2] and Kohnen [Ko].

There are several attempts to establish L-functions in the context of Jacobi groups by Murase [Mu1], [Mu2], Sugano [Su], Murase and Sugano [Mu3], [MS] using so called Whittaker-Shintani functions (this will be discussed in some more detail in a later section).

A very interesting approach to this theory uses spherical functions. This goes back in some sense to Godement [Go1], has been introduced in the world of Jacobi forms by Takase [T1], [T2] and should be pursued further.

To finish this (certainly not complete) overview, it should be mentioned that some work has been done on the Eisenstein series associated to the action of the Jacobi group on more general spaces. Nagaoka [Na] determines the Fourier coefficients for Eisenstein series on $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}^2$ and Eie [Ei] for those on $\mathfrak{H} \times \mathbb{H}$, where $\mathbb{H}$ denotes the Cayley numbers over $\mathbb{C}$.

Besides the already mentioned applications of Jacobi forms in algebraic geometry and in clarifying the correspondences between spaces of modular forms of different types (for this see in particular [Sk3]), Jacobi forms have found applications in proving non vanishing theorems for L-functions of modular forms (Bump-Friedberg-Hoffstein [BFH]), in the theory of Heegner points (Gross-Kohnen-Zagier [GKS]), in the theory of elliptic genera (Zagier [Za1]) and in string theory (Cardy [Ca]).

Finally, it has to be remarked that the theory of Jacobi forms finds its place too in recent developments of mixed Shimura varieties, where the theme of moduli varieties mentioned above is pursued further. Here a good introduction with more references will be found in Ch. VI of Milne's report [Mi].

Now, as announced, some aspects of the theory will be treated more in detail.

2 Jacobi Forms and Automorphic Forms on G^J

The Jacobi group G^J acts on $(\tau, z) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ by

$$g(\tau, z) = \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z + \lambda\tau + \mu}{c\tau + d} \right),$$

where $g = [M, X, \zeta]$, with $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = (\lambda, \mu) = YM$ (see **1**),

and for $k, m \in \mathbb{N}_0$ on a function f on $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ by

$$f|_{k,m}[g](\tau, z) = j_{k,m}(g; (\tau, z)) f(g(\tau, z))$$

where the canonical automorphy factor is given by

$$j_{k,m}(g; (\tau, z)) = \zeta^m (c\tau + d)^{-k} e^m \left(\frac{c(z + \lambda\tau + \mu)^2}{c\tau + d} + \lambda^2\tau + 2\lambda z + \lambda\mu \right).$$

Then the classic definition of a Jacobi form f of weight k and index m for a subgroup $\Gamma \subset \Gamma_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ of finite index is as in [EZ] p.9: f is a complex function on $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ satisfying

i) $f|_{k,m}[\gamma] = f$ for all $\gamma \in \Gamma^J = \Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2$,
ii) f is holomorphic,
iii) for each $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ $f|_{k,m}[M, (0, 0), 1]$ has a Fourier expansion of the form

$$\sum c(n, r) e(n\tau + rz) \quad \text{with} \quad c(n, r) = 0 \text{ unless } 4mn \geqslant r^2.$$

The numbers n, r in iii) are in general in $\mathbb{Q}$ not in $\mathbb{Z}$, but with bounded denominator, depending on Γ and M.

f is called a *cusp form,* if it satisfies a condition iii′) which is condition iii) with

$$c(n, r) = 0 \quad \text{unless} \quad 4mn > r^2.$$

The vector spaces of all such functions f are denoted by $J_{k,m}(\Gamma)$ resp. $J_{k,m}^{\text{cusp}}(\Gamma)$. They are finite dimensional by Theorem 1.1 of [EZ].

As a consequence of the transformation law i), one has for the coefficients the following result ([EZ] Th.2.2)

$$c(n, r) \text{ depends only on } 4mn - r^2 \text{ and on } r \bmod 2m.$$

Since $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ is the homogeneous space G^J/K^J, each function f on $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ may be lifted to a function Φ on G^J by

$$f \underset{\phi_{k,m}}{\mapsto} \Phi_f \quad \text{with} \quad \begin{aligned} \Phi_f(g) &= f(g(i, 0)) j_{k,m}(g; (i, 0)) \\ &= \tilde{f}(x, y, p, q) \zeta^m e^{ik\vartheta} y^{k/2} e^m(pz), \end{aligned}$$

where $g = (M, (p, q), \zeta)$ as in section **1**. This lifting may be used in the usual way to give an equivalent description of the spaces $J_{k,m}$ resp. $J_{k,m}^{\text{cusp}}$ as spaces of functions on G^J. Here one needs the complexified Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G^J

$$\mathfrak{g} = \langle \underbrace{Z, X_\pm}_{\mathfrak{sl}_2}, \underbrace{Y_\pm, Z_0}_{\mathfrak{h}} \rangle$$

with the multiplication table

$$\begin{aligned} &[Z_0, \mathfrak{g}] = 0, \\ &[Z, X_\pm] = \pm 2X_\pm, \quad [Z, Y_\pm] = \pm Y_\pm \\ &[X_\pm, Y_\mp] = -Y_\pm, \quad [X_\pm, Y_\pm] = [Y_+, Y_-] = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad [X_+, X_-] = Z. \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ is realized by the following left-invariant differential operators acting on functions on G^J

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_\pm} &= \pm(i/2) e^{\pm 2i\vartheta}(2y(\partial_x \mp \partial_y) - \partial_\vartheta), \\ \mathcal{L}_{Y_\pm} &= (1/2) y^{-1/2} e^{\pm i\vartheta}(\partial_p - (x \mp iy)\partial_q - (p(u \mp iy) + q) 2\pi i \zeta \partial_\zeta), \\ \mathcal{L}_Z &= -i\partial_\vartheta, \\ \mathcal{L}_{Z_0} &= 2\pi\zeta\partial_\zeta. \end{aligned}$$

Now these operators may be used to give a kind of "semiclassical" definition of Jacobi forms, as in [BeBoe] section 5

Proposition. *The lifting $\phi_{k,m}$ is an isomorphism between $J_{k,m}(\Gamma)$ and the space $A_{k,m}(\Gamma^J)$ of functions $\Phi \in \mathscr{C}^\infty(G^J)$ with*

1) $\Phi(\gamma g r(\vartheta, \zeta)) = \zeta^m e^{ik\vartheta}\Phi(g)$ *for all* $\gamma \in \Gamma^J$, $r(\vartheta, \zeta) = r(\vartheta)\zeta \in K^J$,
2) $\mathscr{L}_{X_-}\Phi = \mathscr{L}_{Y_-}\Phi = 0$,
3) *for all* $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *the function*

$$g \mapsto \Phi(\tilde{M}g)y^{-k/2}, \qquad \tilde{M} = (M, (0, 0), 1)$$

is bounded in domains of type $y > y_0$.

Similarly there is an isomorphism between $J_{k,m}^{\mathrm{cusp}}$ and the subspace $A_{k,m}^0(\Gamma^J)$, where the condition 3) *is replaced by*

3′) *The function*

$$g \mapsto \Phi(g)$$

is bounded.

Here, some comments should be made.

Remark. The general theory of automorphic forms for reductive groups, as for instance in Borel [Bo] p.200, would replace the condition 2) by another one using the center $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ of the universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ of $\mathfrak{g}$. If one wants to do something like that here, one has to go over for instance to

$$U(\mathfrak{g})' = U(\mathfrak{g})/\langle Z_0 - 2\pi m\rangle \quad \text{for} \quad m \neq 0,$$

where Z_0 can be inverted to get something with a center big enough to single out automorphic forms.

Remark. One has the following "Iwasawa decomposition"

$$G^J = N^J A^J K^J$$

with coordinates

$$g = \underbrace{(n(x), (0, q^*), 1)}_{=:\, n(x,\, q^*)} \underbrace{(t(y), (p, 0), 1)}_{=:\, t(y,\, p)} \underbrace{(r(\vartheta), (0, 0), \zeta^*)}_{=:\, r(\vartheta,\, \zeta^*)}.$$

Using this, the cusp condition 3′) may be reformulated in several equivalent forms, for instance as in [BeBoe] p.33 for $\Gamma = \Gamma_1$

$$\int_{N^g \cap \Gamma^J \setminus N^g} \Phi(ng_0)\,dn = 0 \tag{*}$$

for almost all $g_0 \in G^J$ and all "cuspidal" N^g. A conjugate $N^g = g^{-1}N^J g$ is called here cuspidal if

$$g = g_\lambda = (1_2, (\lambda, 0), 1), \qquad \lambda \in \Lambda_m,$$

where for $m \neq 0$

$$\Lambda_m = \left\{ \lambda = \frac{r_0}{2m},\ r_0 \bmod 2m \quad \text{with} \quad \lambda^2 m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

This condition is not exactly as the general theory would suggest. It may be interpreted as saying that the single cusp of $\Gamma^1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ degenerates, for fixed m, into finitely many cusps under the influence of the Heisenberg group.

One can avoid this discrepancy, too, by replacing the differential condition by an integral one, requiring that Φ is an eigenfunction for a certain integral operator with Satake's kernel function

$$K((\tau, z), (\tau', z')) = e^{-m}\left(\frac{(z' - \bar{z})^2}{\tau' - \bar{\tau}}\right)(\tau' - \bar{\tau})^{-k}.$$

This is part of Takase's approach [T1].

3 Automorphic Forms and Representation Theory of G^J

Again in analogy with the general theory, Jacobi forms may be understood as lowest weight vectors for a discrete series representation $\pi_{m,k}$ of G^J. To explain this a bit more, one has to look into the representation theory for G^J. The Jacobi group being a semidirect product of groups with well known representations, its irreducible unitary representations are in principle also known by Mackey's method (as explained for instance in [Be5]). Here the outcome is simply this.

One looks at representations π which, when restricted to the center $Z(G^J) = S^1$, operate by multiplication with ζ^m, $m \neq 0$.

i) Let $\pi_m^{1/2}$ be the usual Shale-Weil representation from the SL_2-theory, extended to a (projective) representation of G^J via a Schrödinger representation of the Heisenberg group $H(\mathbb{R})$. This representation may be realized as G^J acting by right translations on a space $V_m^{1/2}$ spanned by the functions ([Be9] p.229)

$$\Phi_{m,j}(g) = \zeta^m y^{1/4} e^{i(j+1/2)\vartheta} e^m(pz)\psi_j(py^{1/2}), \qquad j \in \mathbb{N}_0$$

with polynomials $\psi_j(u)$ related to the Hermite polynomials. It is a nice exercise playing with the infinitesimal operators, to prove that this representation is distinguished using the heat equation [Be6]. Its subspaces with fixed K^J-type have dimension $\leqslant 1$.

ii) Then to get (ordinary) representations π of G^J, $\pi_m^{1/2}$ has to be tensored by projective representations of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (with a complementary factor system). Thus, one gets *the discrete series representation* $\pi_{m,k} = \pi_m^{1/2} \otimes \pi_k$ realized on the space $V_{m,k}$ spanned by the functions

$$\Phi_{m,k,j,\ell} = \Phi_{m,j} \cdot \Psi_{k,\ell}, \qquad j \in \mathbb{N}_0,\ \ell \in 2\mathbb{N}_0,$$

where for $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$$\Psi_{k,\ell}(M) = y^{(k-1/2)/2} e^{i(k+\ell-1/2)\vartheta}$$

span a space for the representation π_k of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

In the same way one has a "principal series" representation $\pi_{m,s} = \pi_m^{1/2} \otimes \pi_s$ realized on the space $V_{m,s}$ spanned by functions

$$\Phi_{m,s,j,\ell} = \Phi_{m,j} \cdot \Psi_{s,\ell}, \qquad j \in \mathbb{N}_0,\ \ell \in 2\mathbb{Z}$$

with $\quad \Psi_{s,\ell}(M) = y^{(s+1)/2} e^{i(\ell-1/2)\vartheta}$.

This representation may be understood too ([Be9] p.231) as the induced representation

$$\pi_{m,s} = \mathrm{ind}_{B^J}^{G^J} \chi_{m,s}$$

with the character $\chi_{m,s}$ on

$$B^J = N^J A S^1 = \{b = n(x, q)(t(y), (0, 0), \zeta)\}$$

defined by

$$\chi_{m,s}(b) = \zeta^m (y^{1/2})^s \quad \text{for} \quad s \in i\mathbb{R}.$$

It is easy in this way to get a complete list of all irreducible unitary representations of G^J with $m \neq 0$ (see [T2]). It is perhaps of interest to remark that in both cases above, one can distinguish elements in the representation spaces: for $\pi_{m,k}$ there are the lowest weight vectors $\Phi = \Phi_{m,k,0,0}$ distinguished by

$$\mathcal{L}_{X_-}\Phi = \mathcal{L}_{Y_-}\Phi = 0, \qquad \mathcal{L}_{Z_0}\Phi = 2\pi m \Phi,$$

and for $\pi_{m,s}$ there is $\Phi = \Phi_{m,s,0,0}$ distinguished by

$$\mathcal{L}_{Y_-}\Phi = 0, \qquad \mathcal{L}_{Z_0}\Phi = 2\pi m \Phi, \qquad \mathcal{L}_Z \Phi = 0.$$

Using this information about the representations of G^J one can discuss the spectral decomposition of the right regular representation ϱ of G^J on the space

$$\mathcal{H} = \{\Phi \in L^2(\Gamma^J \backslash G^J),\ \Phi(\zeta g) = \zeta^m \Phi(g)\}.$$

Calling Φ *cuspidal* if it satisfies the cusp condition (*) from remark 2 in the last section, and

$$\mathcal{H}_0 = \{\Phi \in \mathcal{H},\ \Phi \text{ cuspidal}\},$$

one has a discrete decomposition:

Theorem ([BeBoe] p.34). ϱ on $\mathcal{H}_0$ is completely reducible and each irreducible component occurs only a finite number of times in it.

Further, one has in analogy with the usual SL_2-theory the

Duality Theorem ([BeBoe] p.41)

$$\mathrm{mult}\,(\pi_{m,k}, \varrho) = \dim J_{k,m}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma).$$

For the *continuous part of the spectrum* one can follow the lines of the SL_2-theory as in Godement's fundamental paper [Go2] or in Lang's book [La] p.239–262. One gets too a *Plancherel theorem* [Be9]. The main tool is here the discussion of the following *Jacobi Eisenstein series* $\mathbb{E}_m(g, \phi, s)$:

Let ϕ be an element of a space $\mathscr{L}(N^J \backslash G^J)_m$ of suitably nice functions on $N^J \backslash G^J$ with $\phi(\zeta g) = \zeta^m \phi(g)$ and such that the following integrals converge. Then by the "Mellin transform" or Zeta transform

$$Z(g, \phi, s) := \int_0^\infty \phi((\widetilde{t(y_0)}, 0, 0, 1)g) y_0^{-s-1} dy_0$$

one gets into the space $V_{m,s}$ introduced above. For each $\lambda \in \Lambda_m$ (see section **3**) one can define a Γ^J-invariant element by the theta transform ϑ_λ

$$\vartheta_\lambda \phi(g) = \sum_{\gamma \in \Gamma_N^J \backslash \Gamma^J} \phi(g_\lambda \gamma g).$$

Putting these together in the usual way, one can define

$$\mathbb{E}_m(g, \phi, s) = (\vartheta_\lambda Z(\phi, g, s))_{\lambda \in \Lambda_m}.$$

This Eisenstein series may be analytically continued to the whole s-plane and one has a functional equation

$$s \mapsto 3/2 - s.$$

The proof is reduced to the corresponding result for Arakawa's "standard" Eisenstein series [Ar1]

$$E_{k,m}((\tau, z), s_A) = \sum_{\gamma \in \Gamma_N^J \backslash \Gamma^J} (f_{s_A}|_{k,m}[g_\lambda g])(\tau, z) \quad \text{with} \quad f_{s_A} = y^{s_A + 1/4 - k/2}.$$

This is done by using the structure of the space $V_{m,s}$ and the differential operators

$$\mathscr{D}_- = \mathscr{L}_{X_-} - \frac{1}{2\pi m} \mathscr{L}_{Y_-}^2 \quad \text{and} \quad \mathscr{L}_{Y_-}$$

to go down from the generating functions $\Phi_{m,s,j,\ell}$ of $V_{m,s}$ to $\Phi_{m,s,0,0}(g) = \zeta^m e^m(pz) y^s$.

4 Whittaker Models and L-functions

The part of the general theory of automorphic forms for reductive groups looked at up to now could be carried over – sometimes with slight modifications – to the Jacobi group. This stimulates some hope that one can also associate L-functions to Jacobi forms and to automorphic representations of G^J resp. its adelization $G^J(\mathbb{A})$. As mentioned in section **1** there is already some work in this direction by Gritsenko, Murase and Sugano.

i) Starting off by some work of Andrianov, Gritsenko studies in [Gr1] for certain pairs (K, G) the Hecke ring H of double cosets $[KgK]$, $g \in G$. In particular he imbeds the Hecke ring $\mathsf{H}_p(n+1)$ for the pair

$$K_{n+1} := \mathrm{Sp}_{n+1}(\mathbb{Z}_p) \subset G_{n+1} = \mathrm{Sp}_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$$

into the Hecke ring $\mathsf{H}_p(n, 1)$ for the pair $(K_{n,1}, G_{n,1})$, where for a ring R

$$G_{n,1}(R) := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & B & * \\ * & * & * & * \\ C & 0 & D & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{n+1}(R) \right\}$$

and $\quad K_{n,1} := G_{n,1}(\mathbb{Z}_p) \subset G_{n,1} = G_{n,1}(\mathbb{Q}_p)$.

$\mathsf{H}_p(n+1)$ is not commutative and Gritsenko studies commutative subrings of $\mathsf{H}_p(n, 1)$, shows that the Hecke polynomial of $\mathsf{H}_p(n+1)$ splits over $\mathsf{H}_p(n, 1)$ and discusses a map

$$\mathsf{H}_p(n, 1) \xrightarrow{\Phi_{n,1}} \mathbb{Q}[x_1^{\pm}, \ldots, x_{n+1}^{\pm}]$$

which by restriction to the image of $\mathsf{H}_p(n+1)$ in $\mathsf{H}_p(n, 1)$ gives the Satake isomorphism into $\mathbb{Q}[x_0^{\pm}, \ldots, x_{n+1}^{\pm}]^{W_{n+1}}$.
In the (in my version certainly not final) preprint [Gr2] Gritsenko generalizes this considerably and factorizes non commutative Hecke rings to get commutative ones and discusses in a purely algebraic way connections between local zeta functions for different groups. Here also the notion of a standard local zeta function for the Jacobi group appears (as the image of a factor of the factorization of a standard Hecke polynomial in a Hecke-Jacobi ring which is a commutative residue class ring of the Hecke ring).

ii) Murase defines in [Mu1] Jacobi cusp forms on $G^J(\mathbb{A}) = G^J_{n,r}(\mathbb{A})$ by lifting certain holomorphic forms from $\mathfrak{H}_n \times M_{n,r}(\mathbb{R})$ with weigth k and index $S \in \mathrm{Sym}_r$, where S is even integral and positive definite. Here the main point is that the local Hecke algebra

$$\mathsf{H}^J_S = \{\phi\colon G^J_{n,r}(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{C};\ \phi(\varkappa k g k') = \psi_S(\varkappa)\phi(g)$$
$$\text{for all } \varkappa \in Z(G^J) \text{ and } k, k' \in K^J = G^J_{n,r}(\mathbb{Z}_p)\},$$

with ψ a character of $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ that satisfies $\psi(x_\infty) = e(x_\infty)$, $x_\infty \in \mathbb{R}$, and ψ_S a character of $\mathrm{Sym}_r(\mathbb{A})/\mathrm{Sym}_r(\mathbb{Q})$ defined by

$$\psi_S(\varkappa) = \psi(\mathrm{tr}(S\varkappa))$$

is commutative if S satisfies Murase's condition (M_p^+). This condition means
1) $L_1 = \mathbb{Z}_p^r$ is a maximal $\mathbb{Z}_p$-lattice of $\mathbb{Q}_p^r$ with respect to $2S$ (i.e. if $M \subset \mathbb{Q}_p^r$ is a lattice containing L_1 with $S[x] \subset \mathbb{Z}_p$ for all $x \in M$, then one has $M = L_1$).
2) $L_1' = \{x \in (2S)^{-1}L_1;\ pS[x] \in \mathbb{Z}_p\} = L_1$.
This condition is fulfilled when $r = 1$ and $S = (1)$ (this is in particular true for index $m = 1$ if G^J is the group looked at in the sections **3** and **4**).
Then Murase establishes a Satake isomorphism

$$\mathsf{H}^J_S \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]^{W_n}$$
$$\phi \mapsto F_\phi$$

and every $\mathbb{C}$-algebra homomorphism of H_S^J to $\mathbb{C}$ is given by

$$\phi \mapsto \hat{\omega}_\chi(\phi)$$

for some $\chi \in X_0(T)$, T the maximal forms of Sp_n. Now a common eigenfunction Φ for the Hecke algebra H_S^J with

$$\Phi * \phi = \lambda_\Phi(\phi)\Phi$$

defines such a homomorphism and thus Satake parameters $\chi_{\Phi,p}^{(i)}(p)$ which can be used to define *"Shintani's Zeta function"*

$$D(s, \Phi) = \prod_{p<\infty} D_p(s, \Phi)$$

where for instance for odd r

$$D_p(s, \Phi) = \prod_{i=1}^{n} \{(1 - \chi_{\Phi,p}^{(i)}(p)p^{-s})(1 - \chi_{\Phi,p}^{(i)}(p^{-1})p^{-s})\}^{-1}.$$

This function, multiplied by a factor for the archimedian prime, gives then Murase's L-function attached to Φ and Murase establishes in [Mu1], [Mu2] analytic continuation and a functional equation (by a modified Rankin-Selberg method defining a homomorphism of $G^J \times G^J$ into Sp_{n+r} and using results for Eisenstein series for this group).

iii) Sugano in [Su] treats a generalization of the degree one Jacobi group in the adelic setting. His main point is to single out two functions which define a commuting subalgebra of the Hecke algebra. For Jacobi forms Φ being simultaneous eigenfunctions for this commutative subalgebra he defines local factors in the usual way and comes up with an L-function $L(\Phi, s)$ which to some extend is compared with standard L-functions of the SL_2- and GL_2-theory.

iv) In [MS] and [Mu2] Murase and Sugano mix the theory of Jacobi and symplectic groups, following again an idea in Shintani's unpublished notes and proving three of his conjectures.

Notations as above, let

$$G_{n,1}^J \hookrightarrow G_{n,1} = \mathrm{Sp}_{n+1}$$

be the ususal embedding,

$$G^* = G_{n+1}(E), \quad G^J = G_{n,1}^J(E),$$
$$K^* = G_{n+1}(\mathfrak{o}), \quad K^J = G_{n,1}^J(\mathfrak{o}),$$

and ψ a character of E with conductor $\mathfrak{o}$. Then one looks at the two Hecke algebras

$$\mathsf{H}^* = \{\Phi\colon G^* \to \mathbb{C};\ \Phi(kgk') = \Phi(g)$$
$$\text{for all } k, k' \in K^* \text{ and supp } \Phi \text{ compact}\}$$
$$\mathsf{H}^J = \{\phi\colon G^J \to \mathbb{C};\ \phi((0, 0, \varkappa)kgk') = \psi(\varkappa)\phi(g)$$
$$\text{for all } k, k' \in K^J \text{ and supp } \phi \text{ compact mod } Z^J\}.$$

These algebras act on the space $C_\psi(K^J\backslash G^*/K^*)$ of functions F on G^* satisfying

$$F((0,0,\varkappa)kg^*k^*) = \psi(\varkappa)F(g^*)$$

for $\varkappa \in E$, $k \in K^J$, $k^* \in K^*$ and $g^* \in G^*$ as follows

$$(\phi * F * \Phi)(g^*) = \int_{Z^J\backslash G^J} dx \int_{G^*} dx^* \overline{\phi(x)} F(xg^*x^{*-1})\Phi(x^*),\ \phi \in \mathrm{H}^J,\ \Phi \in \mathrm{H}^*.$$

For $\quad (\chi, \xi) \in X_0((E^*)^{n+1}) \times X_0((E^*)^n)$

the space of *"Whittaker-Shintani functions"* is introduced by

$$WS_\psi(\chi,\xi) = \{W \in C_\psi(K^J\backslash G^*/K^*);\ \phi * W * \Phi = \overline{\xi^\wedge(\psi)}\chi^\wedge(\Phi)W$$
$$\text{for every } \psi \in \mathrm{H}^J \text{ and } \Psi \in \mathrm{H}^*\},$$

where for the maximal tori T^* resp. T of Sp_{n+1} resp. Sp_n

$$\chi^\wedge(\Psi) = \int_{T^*} \chi^{-1}(t^*)\Psi^\sim(t^*)dt^*$$

$$\xi^\wedge(\Psi) = \int_T \xi^{-1}(t)\phi^\sim(t)dt$$

with $\quad \Phi^\sim(t^*) = \delta_{N^*}(t^*)^{-1/2} \int_{N^*} \Phi(n^*t^*)dn^*,\ \delta_{N^*}(t^*) = d(t^*n^*t^{*-1})/dn^*,$

$$\phi^\sim(t) = \delta_{N^J}(t)^{-1/2} \int_N \phi(nt)dn,\ \delta_{N^J}(t) = d(tnt^{-1})/dn.$$

One of the main results of [MS] is the local *Uniqueness Theorem:*

$$\dim_{\mathbb{C}} WS_\psi(\chi,\xi) \leqslant 1.$$

They get global results too. Let F be a Siegel cusp form of weight k and degree $n+1$, and f a Jacobi cusp form of weight k and index 1, both Hecke eigenforms, and define for $g^* \in G^*(\mathbb{A})$

$$W_{F,f}(g^*) = \int_{G^J(\mathbb{Q})\backslash G^J(\mathbb{A})} F(xg^*)\overline{f(x)}dx.$$

Then one has (Th.6.2 in [MS])

$$\int_{\mathbb{A}^*} W_{F,f}\left(\begin{bmatrix} t &&& \\ & 1_n && \\ && t^{-1} & \\ &&& 1_n \end{bmatrix}\right) |t|_{\mathbb{A}}^{s-n-1} d^*t$$

$$= (2\pi)^{-(s+k-n-1)/2}\Gamma\left(\frac{s+k-n-1}{2}\right)\zeta(2s)^{-1}\overline{D(\bar{s}+\frac{1}{2},f)}^{-1}D(s,F)W_{F,f}(e),$$

where $D(s,f)$ resp. $D(s,F)$ denote Shintani's standard Zeta functions as introduced above.

In [Mu3] Murase presents an explicit formula for the values of local Whittaker-Shintani functions on Sp_2.

Now the question arises whether and if yes how these approaches can be tied to the general theory of L-functions formulated up to now only for reductive groups G (for an introduction and overview see the book [GS] of Gelbart and Shahidi). To parallel this theory one would need something to replace the L-group of G and the conjugation class t_π attached to an automorphic representation π of G to be able to define something like Langland's local L-factors

$$L_p(s, \pi_p, r_p).$$

On the other hand, one of the main ingredients of (one approach to) this theory is the Whittaker model for an automorphic representation. Concerning this, there appear already some Whittaker functions for the Jacobi group in the non archimedian case in [Su] formula (2.14). For the archimedian case I can prove the existence and uniqueness theorem for Whittaker models belonging to the representations $\pi_{m,k}$ and $\pi_{m,s}$ discussed in section **3** by the usual method using the unicity of solutions of differential equations with certain properties ([Be10]).

Some Update Added in Proof

Since the formulation of the preceding text three years ago, there have been further developments. Beside those covered by Kohnen's overview [Ko1], at least the following have to be mentioned, even if briefly:

i) Kramer [Kr3] concluded his approach to *characterize the Jacobi forms in a geometric way* using Falting's arithmetical compactification of the moduli space $\mathscr{A}g/\mathbb{Z}$ classifying principally polarized abelian schemes of relative dimension g over $\mathbb{Z}$, the universal abelian scheme $\mathscr{B}g$ over $\mathscr{A}g$ and the Poincaré bundle. In this context should be hinted at the work of Runge [Ru] discussing the structure of the rings of Siegel and Jacobi forms by algebraic methods.

ii) *Whittaker models for representations of* G^J in the local cases are discussed in [Be12] by relating them to the Whittaker models of the metaplectic group enumerated by Waldspurger. In [Be11] an approach is proposed to associate to a Jacobi form $f \in J_{k,m}$ an *L-function* by an extension of the Mellin transform. Generalizing this slightly, this means for $\mu \in (1/(2m))\mathbb{Z}$ the definition

$$L_\mu(f, s) := \int_0^\infty \int_0^1 f(yi, pyi + \mu) e^{2\pi i m p^2 y} y^{s-1} dp dy.$$

Via the Shimura isomorphism between certain spaces of Jacobi forms and of elliptic modular forms this relates to L-functions of elliptic modular forms. Further, work on an adelization of the integral above is in progress [Be14] which leads to the notion of distinguished Jacobi forms and distinguished automorphic representations very similar to the theory of Gelbart and Piatetski-Shapiro for the metaplectic group. An extensive discussion of the local representation theory of G^J in the nonarchimedian case, a definition of a local factor for a representation starting from the Whittaker model, and some global theory will be found in the forthcoming thesis of Homrighausen in Hamburg.

iii) More work about the *Shimura isomorphism* in the classical language has been done be Freitag [Fr], Ch.III, and in the adelic setting by Piatetski-Shapiro [PS1]. Progress in the discussion of the structure of the spaces of Jacobi forms in the cases of higher degree (or genus) and the corresponding *Hecke algebras* has been made by Gritsenko [Gr3], Dulinski [Du1], [Du2], Yang [Yan1], and concerning Siegel's formula and the *basis problem* by Arakawa [Ar3], [Ar4].

Skoruppa's *skew holomorphic Jacobi forms* are treated in the framework of representation theory in [Be13].

References

[Ar1] Arakawa, T.: Real Analytic Eisenstein Series for the Jacobi Group. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **60** (1990) 131–148

[Ar2] Arakawa, T.: Selberg Zeta Functions Associated with Theta Multiplier Systems of $SL_2(\mathbb{Z})$. Preprint 1991

[Ar3] Arakawa, T.: Siegel's Formula for Jacobi Forms. Intern. J. Math. **4** (1993) 689–719

[Ar4] Arakawa, T.: Jacobi Eisenstein series and a basis problem for Jacobi forms. Preprint 1994

[Ba] Bartsch, R.: Meromorphe Funktionen auf der universellen elliptischen Kurve mit Niveau N-Struktur. Dissertation Hamburg 1985

[Be1] Berndt, R.: Zur Arithmetik der elliptischen Funktionenkörper höherer Stufe. J. reine angew. Math. **326** (1989) 79–94

[Be2] Berndt, R.: Meromorphe Funktionen auf Mumfords Kompaktifizierung der universellen elliptischen Kurve N-ter Stufe. J. reine angew. Math. **326** (1989) 95–103

[Be3] Berndt, R.: Sur l'arithmétique du corps des fonctions elliptiques de niveau N. Séminaire de Thérie des Nombres de Paris 1982–83. Birkhäuser Boston 1984

[Be4] Berndt, R.: Shimuras Reziprozitätsgesetz für den Körper der arithmetischen elliptischen Funktionen beliebiger Stufe. J. reine angew. Math. **343** (1983) 123–145

[Be5] Berndt, R.: Some Differential Operators in the Theory of Jacobi Forms. IHES/M/84/10

[Be6] Berndt, R.: Die Jacobigruppe und die Wärmeleitungsgleichung. Math. Z. **191** (1986) 351–361

[Be7] Berndt, R.: Formes de Jacobi et quelques éléments de la théorie des représentations du group de Jacobi. Astérisque **147–148** (1987) 265–269

[Be8] Berndt, R.: Some Remarks on Automorphic Forms for the Jacobi Group. IHES/M/89/14

[Be9] Berndt, R.: The Continuous Part of $L^2(\Gamma^J \backslash G^J)$ for the Jacobi Group G^J. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **60** (1990) 225–248

[Be10] Berndt, R.: Whittaker Models for the Discrete and Continuous Series Representation of the Jacobi Group over $\mathbb{R}$. Preprint 1991

[Be11] Berndt, R.: L-functions for Jacobi forms á la Hecke. Manuscripta math. **84** (1994) 101–112

[Be12] Berndt, R.: On local Whittaker models for the onedimensional Jacobi Group. Manuscripta math. **84** (1994) 177–191

[Be13] Berndt, R.: On the Characterization of Skew-holomorphic Jacobi Forms. Preprint 1994

[Be14] Berndt, R.: An L-function for distinguished automorphic representations of the Jacobi group of degree one. Preprint 1994

[BeBoe] Berndt, R.; Böcherer, S.: Jacobi Forms and Discrete Series Representations of the Jacobi Group. Math. Z. **204** (1990) 13–44

[Bo] Borel, A.: Introduction to Automorphic Forms. p. 199–211 in: Proc. Symp. Pure Math. Vol. IX. AMS Providence 1966

[BFH] Bump, D.; Friedberg, S.; Hoffstein, J.: Nonvanishing Theorems for L-functions of Modular Forms and their Derivatives

[Ca] Cardy, J. L.: Operator Content of Two-dimensional Conformally Invariant Theories. Nuclear Physics B **270** (1986) 186–204

[Du1] Dulinski, J.: A Decomposition Theorem for Jacobi Forms. To appear in Math. Ann.

[Du2] Dulinski, J.: Zur Hecke Theorie von Jacobiformen. Preprint 1994

[E1] Eichler, M.: Die Spur der Hecke Operatoren in gewissen Räumen von Jacobischen Modulformen. Abh. Math Sem. Univ. Hamburg **54** (1984) 35–48

[E2] Eichler, M.: Eine neue Klasse von Modulformen und Modulfunktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **55** (1985) 53–68

[E3] Eichler, M.: Eine neue Klasse von Modulformen und Modulfunktionen II. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **57** (1987) 57–68

[EZ] Eichler, M.: Zagier, D.: The Theory of Jacobi Forms. Birkhäuser Boston 1985

[Ei] Eie, M.: Fourier Coefficients of Jacobi Forms over Cayley Numbers. Preprint 1991

[FF] Feingold, A. J.; Frenkel, I. B.: A Hyperbolic Kac-Moody Algebra and the Theory of Siegel Modular Forms of Genus 2. Math. Ann. **263** (1983) 87–144

[Fr] Freitag, E.: Singular Modular Forms and Theta Relations. Springer LN 1487 Berlin 1991

[GS] Gelbart, S.; Shahidi, F.: Analytic Properties of Automorphic L-functions. Academic Press Boston 1988

[Go1] Godement, R.: The Decomposition of $L^2(G/\Gamma)$ for $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. In: Proc. Symp. Pure Math. Vol. **IX**. AMS Providence 1966

[Gr1] Gritsenko, V. A.: The Action of Modular Operators on the Fourier-Jacobi Coefficients of Modular Forms. Math. USSR Sbornik **74** (1984) 237–268

[Gr2] Gritsenko, V. A.: Induction in the Theory of Zeta-functions. Preprint 1991

[Gr3] Gritsenko, V. A.: Andrianovsche (Spin) Γ-Funktion und Rankin-Selberg Konvolution. Forschungsschwerpunkt Arithmetik Heft Nr. 9 Heidelberg-Mannheim 1993

[GKS] Gross, B.; Kohnen, W.; Zagier, D.: Heegner Points and the Derivative of L-series II. Math. Ann. **278** (1987) 497–562

[Ja] Jacobi, C. G. J.: Fundamenta nova theoriae functionum ellipticum. Königsberg 1829

[Kl1] Klingen, H.: Metrisierungstheorie und Jacobiformen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **57** (1987) 165–178

[Kl2] Klingen, H.: Über Kernfunktionen für Jacobiformen und Siegelsche Modulformen. Math. Ann. **285** (1989) 405–416

[Ko] Kohnen, W.: Non Holomorphic Poincaré Type Series on Jacobi Groups. J. reine angew. Math. to appear

[KS] Kohnen, W.; Skoruppa, N.-P.: A Certain Dirichlet Series Attached to Siegel Modular Forms of Degree Two. Invent. Math. **95** (1989) 541–558

[Ko1] Kohnen, W.: Jacobi Forms and Siegel Modular Forms: Recent Results and Problems. L'Enseignement Math. **39** (1993) 121–136

[Kr1] Kramer, J.: Jacobiformen und Thetareihen. Manuscripta Math. **54** (1986) 279–322

[Kr2] Kramer, J.: A Geometrical Approach to the Theory of Jacobi Forms. Compositio Math. **79** (1991) 1–19

[Kr3] Kramer, J.: An Arithmetic theory of Jacobi Forms in Higher Dimensions. J. reine angew. Math. **458** (1995) 157–182

[Ku] Kuznetsov, N. V.: A New Class of Identities for the Fourier Coefficients of Modular Forms (in Russian). Acta Arith. **27** (1975) 505–519

[La] Lang, S.: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Addison-Wesley Reading 1976

[Mi] Milne, J. S.: Canonical Models of (Mixed) Shimura Varieties and Automorphic Vector Bundles. In: Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions. Vol. I ed. by Clozel, L.; Milne, J. S.: Academic Press Boston 1990

[M] Mumford, D.: Tata Lectures on Theta I. Birkhäuser Boston 1983

[Mu1] Murase, A.: L-functions Attached to Jacobi Forms of Degree n. Part I: The Basic Identity. J. reine angew. Math. **401** (1989) 122–156

[Mu2] Murase, A.: L-functions Attached to Jacobi Forms of Degree n. Part II. Functional Equation. Math. Ann. **290** (1991) 247–276

[Mu3] Murase, A.: On an Explicit Formula for the Whittaker-Shintani Functions on Sp_2. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **61** (1991) 153–162

[MS] Murase, A.; Sugano, T.: Whittaker-Shintani Functions on the Symplectic Group of Fourier Jacobi Type. Compositio Math. **79** (1991) 321–349

[Na] Nagaoka, S.: On Eisenstein Series for the Hermitian Modular Group and the Jacobi Groups. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **62** (1992) 117–146

[PS] Pyatetski-Shapiro, I.: Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains. Gordon Breach New York 1969

[PS1] Pyatetski-Shapiro, I.: On the Saito-Kurokawa Lifting. Invent. math. **71** (1983) 309–338

[Ru] Runge, B.: Thetafunctions and Siegel-Jacobi Forms. To appear in J. reine angew. Math.

[Sa1] Satake, I.: A Group Extension and its Unitary Representations (in Japanese). Sugako **21** (1969) 241-253

[Sa2] Satake, I.: Fock Representations and Theta Functions. Ann. Math. Studies **66** (1971) 393–405

[Sa3] Satake, I.: Algebraic Structures of Symmetric Domains. Iwanami Shoten Publ. and Princeton Univ. Press 1980

[Sh1] Shimura, G.: Theta Functions with Complex Multiplication. Duke Math. J. **43** (1976) 673–696

[Sh2] Shimura, G.: On Certain Reciprocity Laws for Theta Functions and Modular Forms. Acta Math. **141** (1978) 35–71

[Sk1] Skoruppa, N.-P.: Über den Zusammenhang zwischen Jacobiformen und Modulformen halbganzen Gewichts. Bonner Math. Schriften (1985)

[Sk2] Skoruppa, N.-P.: Explicit Formulas for the Fourier Coefficients of Jacobi and Elliptic Modular Forms. Invent. Math. **102** (1990) 501-520

[Sk3] Skoruppa, N.-P.: Developments in the Theory of Jacobi Forms. Bonner Math. Schriften (1989) or p. 165–185 in: Conference on Automorphic Functions and their Applications. Khabarousk 1988, ed. by Kuznetsov (1990)

[Sk4] Skoruppa, N.P.: Binary Quadratic Forms and the Fourier Coefficients of Elliptic and Jacobi Modular Forms. J. reine angew. Math. **441** (1990) 66–95

[Sk5] Skoruppa, N.-P.: Heegner Cycles, Modular Forms and Jacobi Forms. Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux **3** (1991) 93–116

[Sk6] Skoruppa, N.-P.: Explicit formulas for the Fourier Coefficients of Jacobi and elliptic modular forms. Invent. math. **102** (1990) 501-520

[SZ1] Skoruppa, N.-P.; Zagier, D.: Jacobi Forms and a certain Space of Modular Forms. Invent. Math. **94** (1988) 113–146

[SZ2] Skoruppa, N.-P.; Zagier, D.: A Trace Formula for Jacobi Forms. J. reine angew. Math. **393** (1989) 168–198

[Su] Sugano, T: Jacobi Forms and Theta Lifting. Preprint 1991

[Ta] Tai, Y.-S.: On the Kodaira Dimension of the Moduli Space of Abelian Varieties. Invent. Math. **68** (1982) 425–439

[T1] Takase, K.: A Note on Automorphic Forms. J. reine angew. Math. **409** (1990) 138–171

[T2] Takase, K.: On Unitary Representations of the Jacobi Group. J. reine angew. Math. to appear

[Yan] Yang, J.-H.: The Differential Operators and Singular Jacobi Forms. Preprint Inha Univ. Korea 1991

[Yan1] Yang, J.-H.: Remarks on Jacobi Forms of Higher Degree. p. 33–58 in: Automorphic Forms and Related Topics. The Pyungsan Institute for Math. Sciences, Seoul 1993

[YaSo] Yang, J.-H.; Son, J. W.: A Note on Jacobi Forms of Higher Degree. Jour. of the Korean Math. Soc. **28** (1991) 341–358

[Ya] Yamazaki, T.: Jacobi Forms and a Mass Relation for Eisenstein Series. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **33** (1986) 295–310

[Za1] Zagier, D.: Note on the Landweber-Stong Elliptic Genus. p. 216–224 in: L. N. in Math. **1326**. Springer Verlag Berlin

[Za2] Zagier, D.: Periods of Modular Forms and Jacobi Theta Functions. Invent. Math. **104** (1991) 449–465

[Zi] Ziegler, C.: Jacobi Forms of Higher Degree. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **59** (1988) 191–224

Rolf Berndt
Mathematisches Seminar
der Universität Hamburg
Bundesstr. 55
20146 Hamburg

(*Eingegangen 28. 2. 1992,*
ergänzt 3. 3. 1995)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
97 (1995) 19–42
AMS subject classification: 05 C 70

Regular graphs, regular factors, and the impact of Petersen's Theorems

Dedicated to Professor Dr. Horst Sachs on his 65th Birthday

L. Volkmann, Aachen

Abstract. In an 1891 paper, Julius Petersen considered an algebraic factorization problem due to Hilbert and reformulated it as a factorization problem for graphs. In my lecture from March 27, 1992 in Ilmenau, the day of the 65th birthday of Professor Dr. Horst Sachs, I discussed and analysed the famous ideas and results of Petersen, and I gave a survey of their impacts on the development of the factor theory in the last hundred years. For more information on Petersen's other mathematical work and on his life see the special volumes 100 and 101 of Discrete Mathematics entitled: To Mark the Centennial of Julius Petersen's „Die Theorie der regulären graphs" from 1992, especially Lützen, Sabidussi, and Toft [70], Mulder [74], and Sabidussi [92].

1 Address

Verehrter Jubilar, meine sehr geehrten Damen und Herren, zunächst bedanke ich mich recht herzlich bei den Organisatoren H. Walther und M. Stiebitz für die Einladung zu diesem Ehrenkolloquium über Diskrete Mathematik an der Technischen Hochschule Ilmenau. Es ist mir eine große Ehre und zugleich eine außerordentliche Freude anläßlich des 65. Geburtstages von Professor Dr. Horst Sachs, vor diesem Auditorium sprechen zu dürfen.

Herr Sachs und ich, wir sind uns zwar erst vor knapp zwei Jahren, nämlich im Mai 1990 in Oberwolfach, das erstemal begegnet, aber verschiedene Gemeinsamkeiten haben gleich eine herzliche und freundschaftliche Atmosphäre zwischen uns aufkommen lassen, die wir dann letztes Jahr zunächst in Enschede und später in Braunschweig weiter pflegen konnten. Daß wir uns nur so kurze Zeit kennen, liegt an der einfachen Tatsache, daß ich erst sehr spät zur Graphentheorie gefunden habe.

Es war im Jahre 1985, ich hatte gerade, gemeinsam mit meinem Kollegen G. Jank, die Monographie über „Ganze und meromorphe Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen" [51] fertiggestellt, als die Mathematiker und Informatiker der RWTH Aachen händeringend einen Dozenten für die Vorlesung Graphentheorie suchten. Da ich zu diesem Zeitpunkt mit dem Gedanken spielte, mich mit weiteren mathematischen Disziplinen zu befassen, habe ich dann völlig freiwillig und völlig ahnungslos diese Veranstaltung übernommen. Ich muß allerdings gestehen, daß ich als gestandener Analytiker den diskreten Strukturen zunächst etwas skeptisch gegenüber stand.

Zur Vorbereitung meiner ersten Vorlesung über Graphentheorie im Sommersemester 1985 sammelte und studierte ich eifrig die in Aachen vorhandene Literatur und stieß dabei auch auf das äußerst liebevoll und exakt geschriebene Lehrbuch von Horst Sachs: „Einführung in die Theorie der endlichen Graphen" [93]. Ich erinnere mich noch ganz genau, daß mir damals in dem Titel Ihres Buches das Wort „endlich" ungeheuer mißfallen hatte. Nun, sieben Jahre später, nachdem ich selbst über 20 graphentheoretische Artikel und ein Lehrbuch mit dem Titel „Graphen und Digraphen: Eine Einführung in die Graphentheorie" [106] geschrieben habe, kann ich Ihnen versichern, lieber Herr Sachs, daß ich mich in allen meinen Arbeiten ausschließlich mit der faszinierenden Theorie der endlichen Graphen befaßt habe.

Auch in meinem heutigen Vortrag "Regular graphs, regular factors, and the impact of Petersen's Theorems" werden alle auftretenden Graphen endlich sein.

2 Laudatio on Professor Dr. Horst Sachs[1]

Herr Professor Dr. Horst Sachs wurde am 27. März 1927 in Magdeburg geboren. H. Sachs studierte an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg in Halle von 1948 bis 1953 Mathematik und diplomierte im Jahre 1953 auf dem Gebiet der Algebraischen Zahlentheorie. In den folgenden Jahren von 1953 bis 1963 setzte H. Sachs als wissenschaftlicher Assistent und Oberassistent seine intensiven Studien an der Martin-Luther-Universität zu verschiedenen Disziplinen innerhalb der Mathematik fort.

Unter wissenschaftlicher Anleitung von Herrn Prof. Dr. H. C. Grötzsch erwarb H. Sachs im Jahre 1958 mit einer Dissertationsschrift zum Thema

„Beiträge zur Theorie gewisser isoperimetrischer Probleme"

den akademischen Grad Dr. rer. nat.

Das beispielhafte Wirken von H. C. Grötzsch sowie die Begegnungen mit namhaften ungarischen Mathematikern wie P. Erdös, L. Fejes Tóth, T. Gallai, L. Rédei, A. Rényi und P. Turán anläßlich eines zweimonatigen Studienaufenthaltes von H. Sachs in Ungarn, wirkten sich stimulierend und richtungsweisend auf sein gesamtes weiteres Schaffen aus. H. Sachs' vordergründiges Interesse galt jetzt den verschiedenartigen Fragestellungen der Diskreten Mathematik und insbesondere den aktuellen Problemen der Graphentheorie. Im Jahre 1963 habilitierte sich H. Sachs mit einer Arbeit zum Thema

„Über die Anzahlen von Bäumen, Wäldern und Kreisen gegebenen Typs in gegebenen Graphen".

[1] Diese Laudatio wurde von Prof. Dr. H. Walther von der Technischen Universität Ilmenau verfaßt.

Er wurde im September desselben Jahres zum Professor an die Technische Hochschule Ilmenau berufen.

Aus seiner wissenschaftlichen Arbeit gingen bisher etwa 90 Publikationen hervor, die in renommierten wissenschaftlichen Zeitschriften erschienen und sich durch Kreativität und Schärfe in der Beweisführung auszeichnen. Mit den erzielten Ergebnissen leistete H. Sachs einen beachtlichen Beitrag zur Entwicklung der Graphentheorie und gelangte damit als Wissenschaftler zu hoher internationaler Anerkennung.

Neben seinen Originalarbeiten verfaßte H. Sachs ein zweibändiges Lehrbuch „Einführung in die Theorie der endlichen Graphen“ (1970 [93] und 1972 [94]), das für zwei Jahrzehnte Maßstab nicht nur im deutschsprachigen Raum war, sowie eine Monographie "Spectra of Graphs" [29] zusammen mit M. Doob und D. M. Cvetkovic (1980).

Als unermüdlicher Forscher war H. Sachs ständig bestrebt, junge Mathematiker durch Einbeziehung in seine wissenschaftliche Arbeit zu selbständiger Forschungstätigkeit anzuregen. Unter seiner wissenschaftlichen Betreuung entstanden etwa 25 Promotionen und 6 Habilitationen. Einige der Schüler von H. Sachs sind inzwischen selbst als Hochschullehrer tätig.

H. Sachs ist Mitherausgeber von 8 internationalen wissenschaftlichen Zeitschriften. Er verfaßte darüber hinaus unzählige Referate zu wissenschaftlichen Arbeiten für diverse Referateorgane, vor allem für "Mathematical Reviews", sowie eine Vielzahl von Gutachten für Dissertations- und Habilitationsschriften im In- und Ausland.

Als Hochschullehrer an der Technischen Hochschule erwarb sich H. Sachs durch Vielseitigkeit, Aktualität und Praxisnähe in seinen Vorlesungen die Achtung und Wertschätzung vieler Studentengenerationen. Als Dekan der „Fakultät für naturwissenschaftliche Grundlagen“ (1964 bis 1969) engagierte sich H. Sachs erfolgreich für die Aufnahme der Ausbildung von Mathematikstudenten an der TH Ilmenau ab 1968.

Eine umfangreiche mathematische Korrespondenz und eine rege wissenschaftliche Reisetätigkeit – vor allem als "Invited Speaker" bei Internationalen Fachtagungen und als Gastprofessor an verschiedenen Lehr- und Forschungsstätten – runden das Bild eines überaus erfolgreichen Forschers und Lehrers der Mathematik ab.

Ein Zeichen besonderer Wertschätzung von H. Sachs war seine Wahl zum Vorsitzenden der „Mathematischen Gesellschaft der DDR“ (1970 bis 1974).

H. Sachs genießt nicht nur als Mathematiker hohe internationale Anerkennung, sondern zählt auch zu den profiliertesten und geachtesten Hochschullehrern der Technischen Universität Ilmenau.

3 The Idea of Petersen and Sylvester

In 1891, Julius Petersen published an article in Acta Mathematica [85] entitled „Die Theorie der regulären graphs“. This, in its depth and scope, remarkable contribution contains the first general discussion of the problem of factorizing graphs. Petersen's paper is really a landmark in graph theory.

Following up Gordan and Hilbert, Petersen considered the following problem in invariant theory, an important topic at that time.

Let P be a homogeneous polynomial of n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ of the form

$$P = (x_1 - x_2)^{m_{1,2}}(x_1 - x_3)^{m_{1,3}} \ldots (x_{n-1} - x_n)^{m_{n-1,n}},$$

with non-negative integers $m_{i,j}$ such that P is of the same degree $\alpha > 0$ in each x_i. The problem is to decompose P into a product of polynomials of the same form with the variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, but of lower degree.

For example let us consider the two products

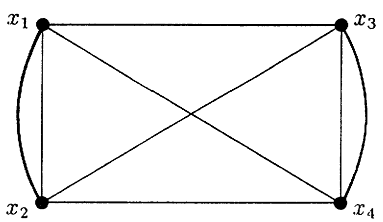
$$\begin{aligned} &(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)^2 \\ &= [(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)][(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)][(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)][(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)] \end{aligned}$$

and $\quad (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$

The first one is of degree four, and we have found an admissible decomposition into two factors of degree two or into four factors of degree one. For the second one of degree two, there exists no admissible decomposition.

For solving this problem, Petersen and Sylvester have developed the following geometric idea (see Petersen [85, p. 194–195]):

> „Man kann der Aufgabe eine geometrische Form geben, indem man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch beliebige Punkte der Ebene repräsentiert, während der Factor $x_m - x_p$ durch eine beliebige Verbindungslinie zwischen x_m *und* x_p dargestellt wird. Man erhält so für das Product eine Figur, welche aus n Punkten besteht, die so verbunden sind, dass in jedem Punkte gleich viele Linien zusammenlaufen. Dieselben zwei Punkte können durch mehrere Linien verbunden sein. Als Beispiel betrachte man die Figur I, die das Product
>
> $$(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$$
>
> dargestellt.



Figur I

> Englische Verfasser haben für ähnliche Figuren den Namen *graph* eingeführt; ich werde diesen Namen beibehalten und nenne den *graph* regulär, weil in jedem Punkte gleich viele Linien zusammenlaufen. Für Halbinvarianten würden irreguläre *graphs* in Betracht kommen, was doch hier nicht näher besprochen werden soll.

Durch die *Ordnung* eines *graphs* werde ich die Anzahl der Punkte (die Ordnung der binären Grundform) verstehen, durch den *Grad* die Anzahl der in jedem Punkt zusammenlaufenden Linien (den Grad der entsprechenden Invariante). Durch G_α^n oder einfach G_α werde ich einen *graph* von der Ordnung n und vom Grade α verstehen. Ein solcher lässt sich zerlegen oder in Factoren auflösen, wenn man andere *graphs* von derselben Ordnung aber niedrigerem Grade finden kann, die durch Überlagerung den gegebenen *graph* herstellen. Ein *graph*, der sich nicht in solcher Weise auflösen lässt, heisst *primitiv.* Unsere Aufgabe geht auf die Bestimmung aller primitiven *graphs* aus."

We observe that all the names as graph, factor, regular graph, order of a graph, and degree are still up-to-date. Furthermore, it was natural for Petersen to consider multiple edges, but there was no reason to think of loops. Let us turn now to the theory that Petersen developed for the factorization of regular graphs.

4 The Theorems of Petersen

In this article, graphs are finite, undirected, and they may have multiple edges and loops. A graph without loops is called a multigraph, and a multigraph without multiple edges is called simple. A k-factor of the graph G is a regular spanning subgraph of degree k. If the edge set $E(G)$ can be decomposed into edge-disjoint k-factors, then the graph G is k-factorizable. An r-regular graph with no k-factor for all $1 \leqslant k \leqslant r-1$ is called primitive.

At the beginning of his paper, Petersen pointed out that the theory of factorization is much more difficult for regular graphs of odd degree than for regular graphs of even degree. In the even case he gave the following solution of the above mentioned problem.

The First Theorem of Petersen [85] (1891). A graph G is 2-factorizable if and only if G is $2p$-regular.

Nowadays it is well-known that the First Theorem of Petersen is an easy consequence of the next two results.

Theorem of Euler [37] (1736); **Hierholzer** [48] (1873). A graph G has an eulerian tour if and only if G is connected and every vertex of G has even degree.

Theorem of König [64] (1916). A regular bipartite graph is 1-factorizable.

In his original proof, Petersen has also shown that a regular connected graph of even degree possesses an eulerian tour, and he remarked that it is easily seen that the same argument proves this fact for the case that all vertices have even degree. This means that Petersen rediscovered Euler's theorem which was fully proved in 1873 by Hierholzer.

The next examples will show that the First Theorem of Petersen is best possible in the following sense. First, every $2p$-regular graph of odd order has no regular factor of odd degree. Next, for each $p \geqslant 2$ there exists a simple connected $2p$-regular graph of even order without a 1-factor. If p is even, then these examples have no odd regular factor at all.

Let K_{2p+1} be the complete graph on $2p+1$ vertices ($p \geqslant 2$) and $H = K_{2p+1} - e$, where e is an arbitrary edge. Now, let $H_1, \ldots, H_{2p}$ be $2p$ copies of H, $a_i, b_i \in V(H_i)$ the vertices of degree $2p-1$ for $i = 1, \ldots, 2p$, and u and v two further vertices. We define the $2p$-regular graph G as the union of $H_1, \ldots, H_{2p}$ and the vertices u and v together with the new edges ua_i and vb_i for $i = 1, \ldots, 2p$. If F is a $(2k+1)$-regular factor of G, then $d(u,F) = d(v,F) = 2k+1$, where $d(x,F)$ denotes the degree of a vertex x of the graph F. Furthermore, for every i with $1 \leqslant i \leqslant 2p$ there exists on the one hand at least one edge ua_i or vb_i which belongs to $E(F)$ and on the other hand at most one edge ua_i or vb_i which belongs to $E(F)$. This implies $p = 2k+1$. Since $p \geqslant 2$, we deduce that G contains no 1-factor, and in addition G has no odd regular factor if p is even.

The only primitive regular graphs of even degree are those of degree two, containing an odd cycle. If the degree is odd, then the situation is completely different. Petersen constructed for every p the following primitive graph of degree $2p+1$. Let the vertex u be adjacent to $2p+1$ distinct vertices $x_1, \ldots, x_{2p+1}$. Furthermore, each x_i is joined by p parallel edges with the vertices y_i and z_i. Finally, y_i and z_i are joined by $p+1$ edges for $i = 1, \ldots, 2p+1$. The resulting graph is $(2p+1)$-regular and primitive. Petersen attributed the case $p = 1$ to Sylvester. In the second part of his paper, Petersen started the study of regular graphs of odd degree by proving an important and deep result about 3-regular graphs. A bridge of a graph is an edge whose removal increases the number of components.

The Second Theorem of Petersen [85] (1891). Every connected and 3-regular graph with at most two bridges has a 1-factor.

The Sylvester graph shows that the Second Theorem of Petersen is not valid in general, if there exist more than two bridges. Petersen's proof is long and complicated. It was subsequently simplified by Brahana [13], Errera [36], Frink [44], Schönberger [95], and König [66]. However, with the famous 1-factor Theorem of Tutte at hand, the following elegant and short proof is possible.

The 1-factor Theorem of Tutte [100] (1947). A graph G has a 1-factor if and only if $o(G-S) \leqslant |S|$ for all $S \subseteq V(G)$, where $o(G-S)$ denotes the number of components of $G-S$ having odd order.

Proof of the Second Theorem of Petersen. Clearly, G is of even order. Hence $|S| \equiv o(G-S) \pmod 2$ for each $S \subseteq V(G)$. Suppose that G has no 1-factor. Then according to the 1-factor Theorem of Tutte there exists a set $S \neq \phi$ with $|S| \leqslant o(G-S) - 2$. Since G is 3-regular, each odd component of $G-S$ is joined to S by some odd number of edges. If this odd numbers is one, the corresponding edge must be a bridge. By hypothesis there are at most two such in G. Hence the odd components of $G-S$ send at least

$$3(o(G-S)-2) + 2 \geqslant 3|S| + 2$$

edges to S. But S sends at mot $3|S|$ edges to the odd components of $G-S$. This contradiction proves the Second Theorem of Petersen.

The same proof yields the existence of a 1-factor under the somewhat weaker condition that there exists a path containing all bridges of the graph.

We call the following corollary the weak form of the Second Theorem of Petersen.

Corollary 1, Petersen [85] (1891). Every 3-regular graph without bridges has a 1-factor.

It is not very difficult to show that the Second Theorem of Petersen follows directly from Corollary 1 (see for example the wonderful book of König [66, p. 208]).

In 1934, Schönberger [95] proved the more general result that a 3-regular multigraph G without bridges has a 1-factor that contains no two given edges of G. Consequently, every 2-edge-connected 3-regular multigraph has a 1-factor that contains a given edge. As far as I know, this is the first result in the theory of the so-called n-extendable graphs which was introduced by Plummer [88] in 1980. A graph is n-extendable if it has a 1-factor (or perfect matching) and every matching of size n is a subset of a perfect matching. Fore more information on n-extendable graphs, the reader is referred to Plummers survey article [89], Yu [109], [110], and Maschlanka and Volkmann [72].

In connection with Petersen's Acta paper König [66] wrote in his book from 1936, the first full-length book on graph theory:

> „Diese Abhandlung von Petersen, an der auch *Sylvester* beteiligt ist, ist sicherlich eine der bedeutendsten Arbeiten über Graphentheorie, scheint aber mehr als 25 Jahre lang fast gänzlich unbeachtet geblieben zu sein.
>
> Es ist nichts darüber bekannt, wie sich der Petersensche Satz auf reguläre Graphen vom Grad 5, 7, 9, ... ausdehnen läßt. Petersen hat die Vermutung ausgesprochen, daß auch diese Graphen nur dann primitiv sein können, wenn sie Brücken enthalten. Er hat aber „die Schwierigkeiten zu groß gefunden und die Untersuchungen auf Graphen dritten Grades beschränkt." Am Ende seiner Abhandlung schreibt dann Petersen: „Es scheint doch, daß der hier befolgte Weg auch dort zum Ziel führen kann."
>
> Trotz der mehr als 40 Jahre, die seitdem vergangen sind und trotz der (besonders von Frink gefundenen) Vereinfachungen, die den Petersenschen Weg sicherlich gangbarer gemacht haben, konnte dieses Ziel bis heute nicht erreicht werden."

Stimulated by these remarks, Baebler [7] proved two years later the following nice result using the methods of Petersen.

Theorem, Baebler [7] (1938). Let G be a $(2p+1)$-regular and $\lambda(G)$-edge-connected multigraph. Then G contains a $2k$-factor if $2k \leqslant \lambda(G)$.

The case $\lambda(G)=2$ yields a solution of the conjecture of Petersen.

Corollary 2, Baebler [7] (1938). A connected and $(2p+1)$-regular multigraph without bridges contains a 2-factor.

The case $\lambda(G)=2p$ yields the desired extension of the weak form of the Second Theorem of Petersen.

Corollary 3, Baebler [7] (1938). A $(2k+1)$-regular and $2p$-edge-connected multigraph contains a 1-factor.

Corollary 3 can also be derived from the following result, which can be proved similar like the Second Theorem of Petersen above.

Theorem. Let G be a connected r-regular graph of even order. If for all pairwise disjoint edge cut sets $E_1, \ldots, E_t$ with $|E_i| \leqslant r-2$ for $i=1, \ldots, t$ the condition $|E_1|+\ldots+|E_t| \geqslant (r-1)(t-1)$ is fulfilled, then G contains a 1-factor.

This theorem has some more consequences, for instance:

Corollary 4, Chartrand and Nebeský [18] (1979). If G is an $(r-2)$-edge-connected r-regular graph $(r \geqslant 3)$ of even order containing less then r distinct edge cut sets of cardinality $r-2$, then G contains a 1-factor.

Another consequence of Tutte's 1-factor Theorem is the following generalization of Schönberger's result [95] and Corollary 3.

Theorem, Plesnik [86] (1972). Every r-regular and $(r-1)$-edge-connected multigraph of even order has a 1-factor avoiding $r-1$ given edges.

Consequently, every r-regular and $(r-1)$-edge-connected multigraph of even order has a 1-factor containing a given edge (Berge [10], Chapter 18). Recently, Katerinis [61] obtained the following stronger result.

Theorem, Katerinis [61] (1993). Let G be an r-regular, $(r-1)$-edge-connected multigraph of even order, and let m be an integer with $1 \leqslant m \leqslant r-1$. Then the multigraph obtained by removing any $r-m$ edges of G, has an m-factor.

In connection with the theorem of Baebler it is interesting to determine those triples (r, k, λ) for which every r-regular graph G with $\lambda(G)=\lambda$ has a k-factor. Following up Gallai [45] and Plesnik [87], Bollobás, Saito, and Wormald [12] solved this problem completely.

Theorem, Bollobás, Saito, and Wormald [12] (1985). Let G an r-regular multigraph of edge-connectivity $\lambda(G)=\lambda \geqslant 1$. Then G has a k-factor for the following values of k:

(i) if r is even, all even numbers at least 2 and at most $r-2$, together with, if the order of G is also even, all odd numbers at least r/λ and at most $r-r/\lambda$;
(ii) if r is odd, $\lambda \geqslant 2$, and $\lambda^* = 2\lfloor \lambda/2 \rfloor + 1$, all positive even integers not more than $r(\lambda^*-1)/\lambda^*$ and all odd integers at least r/λ^* and at most $r-2$.

For each other value k with $1 \leqslant k \leqslant r-1$, there ist an r-regular simple graph with $\lambda=\lambda(G)$ which does not have a k-factor.

Very recently, Niessen [80] proved an extension of this theorem for simple graphs, by determining those quadruples (r, k, λ, n) for which every r-regular simple graph G of order $n=n(G)$ with $\lambda(G) \geqslant \lambda$ has a k-factor. The proofs of the last two results are based on the powerfull k-factor Theorem of Belck [9] and Tutte [101] giving a necessary and sufficient condition for the existence of a k-factor. We denote by $e_G(A,B)=e(A,B)$ the number of edges from A to B, if A and B are disjoint subsets of $V(G)$.

The k-factor Theorem of Belck [9] (1950) **and Tutte** [101] (1952). A graph G has a k-factor if and only if

$$\Theta(X, Y, k) = k|X| - k|Y| + \sum_{y \in Y} d(y, G - X) - q(X, Y, k) \geqslant 0$$

for all disjoint subsets X and Y of $V(G)$, where $q(X, Y, k)$ denotes the number of components C of $G-(X \cup Y)$ with $k|V(C)| + e_G(V(C), Y) \equiv 1 \pmod 2$.

Using the k-factor Theorem of Belck and Tutte, we shall prove Corollary 2 of Baebler as a special case of the Theorem of Bollobás, Saito and Wormald.

Proof of Corollary 2. Let $r \geqslant 3$ be an odd number and G be a connected r-regular multigraph without bridges. If $r=3$, then it is clear from the Second Theorem of Petersen that G contains a 2-factor. Hence we may assume $r \geqslant 5$. According to the k-factor Theorem of Belck and Tutte G has a 2-factor, if

$$q = q(X, Y, 2) \leqslant 2|X| + (r-2)|Y| - e(X, Y) \tag{1}$$

for all disjoint subsets X and Y of $V(G)$. If $|X| = |Y| = 0$, then (1) holds, since $2|V(G)|$ is even. So we assume henceforth that $|X| + |Y| \geqslant 1$. Since G has no bridges, there are at least $2q$ edges joining $V(G)-(X \cup Y)$ to $X \cup Y$. This implies

$$2q \leqslant r|X| + r|Y| - 2e(X, Y). \tag{2}$$

If C is a component of $G-(X \cup Y)$ with $2|V(C)| + e(V(C), Y) \equiv 1 \pmod 2$, then $e(V(C), Y) \geqslant 1$. Therefore we see that

$$q \leqslant r|Y| - e(X, Y). \tag{3}$$

Multiplying (2) by $2/r$ and (3) by $1-4/r>0$ and adding the new inequalities, we obtain (1).

The k-factor Theorem is a special case of the famous f-factor Theorem of Tutte [101], characterizing those graphs G having an f-factor for a given function f: $V(G) \to \mathbf{N}_0$ where $\mathbf{N}_0$ is the set of all non-negative integers.

The f-factor Theorem of Tutte [101] (1952). Let G be a graph and f: $V(G) \to \mathbf{N}_0$ a function. Then G has an f-factor if and only if

$$\sum_{x \in X} f(x) + \sum_{y \in Y} (d(y, G-X) - f(y)) - q(X, Y, f) \geqslant 0$$

for all disjoint subsets X and Y of $V(G)$, where $q(X, Y, f)$ denotes the number of components C of $G-(X \cup Y)$ such that $\Sigma_{x \in V(C)} f(x) + e_G(V(C), Y) \equiv 1 \pmod 2$.

Two years later, Tutte [103] himself gave a considerably simpler prove of the f-factor Theorem by using his 1-factor Theorem.

If we assume that a $(2p+1)$-regular graph G has a 1-factor, then it is clear from the First Theorem of Petersen that G contains a k-factor for each k with $1 \leqslant k \leqslant 2p+1$. This statement is also valid for regular graphs of even degree as can be shown easily by the k-factor Theorem.

Theorem, Katerinis [57] (1985). Let $r<k<s$ be odd integers. If a graph G has an r-factor and an s-factor, then it has a k-factor.

Proof. Suppose that G does not have a k-factor. By the k-factor Theorem of Belck and Tutte there exists a pair of disjoint subsets X and Y of $V(G)$ such that

$$q(X, Y, k) - \sum_{y \in Y} d(y, G-X) > k(|X| - |Y|). \tag{4}$$

Since G has an r-factor and an s-factor, it follows by the same theorem for these sets X and Y

$$q(X, Y, r) - \sum_{y \in Y} d(y, G-X) \leqslant r(|X| - |Y|), \tag{5}$$

$$q(X, Y, s) - \sum_{y \in Y} d(y, G-X) \leqslant s(|X| - |Y|). \tag{6}$$

Since k, r and s are odd, we deduce that $q(X, Y, k) = q(X, Y, r) = q(X, Y, s)$. So from (4) and (5) we have $|X| < |Y|$, and from (4) and (6) the contradiction $|X| > |Y|$.

Combining this result with the First Theorem of Petersen we can immediately deduce the following corollary.

Corollary 5, Katerinis [57] (1985). If an r-regular graph G has a 1-factor, then G contains a k-factor for each k fulfilling $1 \leqslant k \leqslant r$.

5 Regular factors in simple graphs

Since regular graphs have many interesting properties, it is important to know which regular factors an arbitrary graph has. A relatively new direction in factor theory yields sufficient conditions for the existence of regular factors depending on parameters of simple graphs. Most of these conditions seem to be motivated by similar results from hamiltonian graph theory. Recall that a graph is hamiltonian, if it contains a Hamilton cycle and that a Hamilton cycle of a graph is a connected 2-factor. The first conditions for Hamilton cycles depending on parameters are so-called degree conditions. For that we denote by δ the minimum degree and by σ_2 the minimum of $d(x)+d(y)$ taken over all pairs of independent vertices x and y.

Theorem, Dirac [30] (1952). Let G be a simple graph of order $n \geqslant 3$. If $\delta \geqslant n/2$, then G is hamiltonian.

Theorem, Ore [84] (1960). Let G be a simple graph of order $n \geqslant 3$. If $\sigma_2 \geqslant n$, then G is hamiltonian.

Note that Ore's result is a generalization of Dirac's result. Both degree conditions are best possible in the sense that they cannot be lowered in view of the complete bipartite graphs $K_{p-1,p}$ or $K_{p-2,p}$, respectively. These graphs do not have a Hamilton cycle, and, more generally, they do not have any non-trivial regular factor. Thus, the degree conditions from above are also best possible, if we are concerned with regular factors. By the following two results it is shown that these degree conditions ensure the existence of many regular factors.

Theorem, Katerinis [58] (1985); **Egawa, Enomoto** [31] (1989). Let $k \geqslant 1$ be an integer and G a simple graph of order n with kn even and $n \geqslant 4k-5$. If $\delta \geqslant n/2$, then G has a k-factor.

Theorem, Iida, Nishimura [49] (1991). Let $k \geqslant 1$ be an integer and G be a simple graph or order n with nk even, $n \geqslant 4k-5$ and $\delta \geqslant k$. If $\sigma_2 \geqslant n$, then G has a k-factor.

Whereas the conditions nk even and $\delta \geqslant k$ are obviously necessary for the existence of a k-factor, the restriction $n \geqslant 4k-5$ is not clear at first sight. This bound is for $k \geqslant 2$ best possible in view of the graphs $K_{2k-4}+(k-1)K_2$, since they have order $n=4k-6$ and no k-factor by the k-factor Theorem, since $\Theta(V(K_{2k-4}), V((k-1)K_2), k)=-2$.

Further degreee conditions have been established by Nishimura [83] and Niessen [79].

An interesting concept was discovered in the late eighties by Faudree, Gould, Jacobson and Schelp [38], [39]. They considered neighborhood conditions instead of degree conditions. The neighborhood $N(v, G)=N(v)$ of a vertex v is the set of vertices adjacent to v and for a vertex set $X \subseteq V(G)$ we define $N(X, G)=N(X)=\bigcup_{x \in X} N(x)$. For an integer $t \geqslant 1$ define furthermore $N_t(G)=N_t=\min |N(X)|$, where the minimum is taken over all independent sets $X \subseteq V(G)$ with $|X|=t$. Note that $N_1=\delta$ and $N_2 \geqslant \sigma_2/2 \geqslant \delta$.

In [39] it was shown that every 2-connected simple graph of order n with $N_2 \geqslant (2n-1)/3$ is hamiltonian. In 1991 Jackson [50] proved that the bound $(2n-1)/3$ can be lowered to $(n+3)/2$, unless G belongs to one of three families of exceptional graphs of connectivity 2. Furthermore, he conjectured the following result.

Theorem, Broersma, van den Heuvel, Veldman [14] (1993). Let G be a 2-connected simple graph of order n. If $N_2 \geqslant n/2$, then either G is hamiltonian, or G is the Petersen graph, or G belongs to one of three families of exceptional graphs of connectivity 2.

This theorem generalizes the degree conditions from above. An analogous result for the existence of k-factors is given by the following

Theorem, Niessen [76] (1994), [77] (1995). a) Let G be connected simple graph of even order n. If $N_2 \geqslant n/2$, then G has a 1-factor or G belongs to a family of exceptional graphs of connectivity 1.
b) Let G be a connected simple graph of order n and let $k \geqslant 2$ be an integer with nk even, $n \geqslant 8k-7$ and $\delta \geqslant k$. If $N_2 \geqslant n/2$, then G has a k-factor or $k \geqslant 3$ and G belongs to one of two families of exceptional graphs with $\delta = k$.

For $k \geqslant 2$, this result is only a partial generalization of the degree conditions from above, since $n \geqslant 8k-7$ instead of $n \geqslant 4k-5$ is required. The necessity of this condition can be seen by the graphs $K_{4k-6}+(2k-1)K_2$.

Another interesting direction using neighborhoods was motivated by the well-known Theorem of König-Hall.

Theorem of König-Hall, König [65] (1931); **Hall** [46] (1935). Let G be a bipartite graph with bipartition X, Y. Then there exists a matching in G covering all vertices of X if and only if $|N(S, G)| \geqslant |S|$ for all $S \subseteq X$.

Woodall [107] introduced the binding number of a graph, denoted by bind(G) = bind, as the minimum ratio $|N(S, G)|/|S|$ taken over all non-empty sets $S \subseteq V(G)$ with $N(S, G) \neq V(G)$. With this notation, it follows from the Theorem of König-Hall:

Corollary 6. Let G be a bipartite graph with bipartition X, Y. Then G has a 1-factor if and only if bind = 1.

For arbitrary simple graphs the following statements hold.

Theorem, Anderson [5] (1971). Let G be a simple graph of even order. If bind $(G) \geqslant 4/3$, then G has a 1-factor.

Theorem, Katerinis, Woodall [62] (1987); **Egawa, Enomoto** [31] (1989). Let $k \geqslant 2$ be an integer and let G be a simple graph of order n with kn even. The graph G has a k-factor, if

$$\operatorname{bind}(G) > \frac{(2k-1)(n-1)}{kn-2k+3}.$$

Later it was observed that these results do not use the full force of their hypothesis if $n \geqslant 4k-6$. This is shown by the following theorems, which are common generalizations of the minimum degree condition and the binding number conditions above.

Theorem, Woodall [108] (1990). Let G be connected simple graph of even order n such that for every vertex $v \in V(G)$ the graph $G-v$ has at most two components. If $\delta \geqslant (n+3)/4$ and

$$|N(X, G)| \geqslant \frac{1}{4}(2|X| + n - 5)$$

for every non-empty independent set $X \subseteq V(G)$, then G has a 1-factor.

Theorem, Woodall [108] (1990); **Tokushige** [98] (1989). Let $k \geqslant 2$ be an integer and G be a simple graph of order n with $n \geqslant 4k-6$ such that n is even and G is connected, if k is odd. If

$$\delta \geqslant \frac{k-1}{2k-1}(n+2)$$

and $$|N(X)| \geqslant \frac{1}{2k-1}(|X| + (k-1)n - 1)$$

for every non-empty independent set $X \subseteq V(G)$, then G has a k-factor.

The latter result was recently generalized in the same way as Ore's result generalizes that of Dirac and Iida's and Nishimura's result that of Katerinis and Egawa and Enomoto.

Theorem, Lenkewitz, Volkmann [67]. Let $k \geqslant 2$ be an integer and G be a simple graph of order n with $n \geqslant 4k-6$ such that n is even and G is connected, if k is odd. If

$$\sigma_2 \geqslant \frac{2k-2}{2k-1} n + \frac{4k-5}{2k-1}$$

and $$|N(X)| \geqslant \frac{1}{2k-1}(|X| + (k-1)n - 1)$$

for every independent set $X \subset V(G)$ with $|X| \geqslant 2k$, then G has a k-factor.

These results are examples for mixed conditions, since they include a degree condition as well as a neighborhood condition. Further examples of mixed conditions can be found in Lenkewitz and Volkmann [67] and Niessen [75]. There are also many results which depend on the relation of some parameters of the graphs. As an example we present such a condition depending on the independence number $\alpha(G) = \alpha$ and the connectivity $\varkappa(G) = \varkappa$.

Theorem, Katerinis [59] (1985). Let $k \geqslant 1$ be an integer and G be a simple graph of order n with nk even and $n \geqslant k+1$. If

$$\varkappa > \frac{(k+1)^2}{4k} \alpha + \frac{5k-4}{8} - \frac{2}{k},$$

then G has a k-factor.

This theorem was motivated by a well-known result of Chvátal and Erdös [28] stating that every graph with at least three vertices and $\varkappa \geqslant \alpha$ is hamiltonian. A partial improvement of Katerinis result for graphs with large connectivity is due to Nishimura [82].

A simple graph G is t-tough if $|S| \geqslant t\omega(G-S)$ for every set $S \subset V(G)$ with $\omega(G-S) > 1$, where $\omega(G-S)$ denotes the number of components of $G-S$. The toughness of G, denoted by tough (G) = tough, is the maximum value of t for which G is t-tough (taking tough$(G) = +\infty$, if G is complete). The toughness was introduced by Chvátal [27] in 1973. Being 1-tough is a necessary condition for a graph to be hamiltonian. Chvátal conjectured that there exists a constant t_0 such that every t_0-tough graph is hamiltonian. This conjecture is still open. He also conjectured the following result.

Theorem, Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito [34] (1985). Let $k \geqslant 1$ be an integer and G be a graph of order n with nk even and $n \geqslant k+1$. If tough$(G) \geqslant k$, then G has a k-factor.

Several extensions of this result can be found in Enomoto [33], Katerinis [60] and Bauer and Schmeichel [8].

Next we give an example of a condition for which no analogous result in Hamiltonian Graph Theory holds.

Theorem, Niessen [76] (1994), [78]. Every simple graph G with $\delta > \alpha$ has a 2-factor.

It is easy to see that no relation of the minimum degree and the independence number implies that a graph is 2-connected or even 1-tough, and so there is no corresponding result for hamiltonicity possible.

Dealing with the question which relations of the minimum degree and the independence number imply the existence of other regular factors it was observed that k-factors can be guaranteed in this way only for even k.

Theorem, Niessen [76] (1994), [78]. Let G be a simple graph of order $n \geqslant k+1$, where $k \geqslant 4$ is an even integer. If

$$\delta > \frac{k+2}{4}\alpha + \frac{5k-3}{8} - \frac{2}{k},$$

then G has a k-factor.

A corresponding result for odd k cannot hold. To see this consider the graphs $K_a + bK_c$, where a, b and c are positive integers with c odd. These graphs have independence number equal to c, minimum degree equal to $a+c-1$, and for any odd integer $k \geqslant 1$ they do not contain a k-factor if $b > ka$, since in such a factor every K_c has to be joined by at least one edge to K_a. But in [76], [78] it is proved:

Theorem, Niessen [76] (1994), [78]. Let $k \geqslant 3$ be an odd integer and let G be a simple graph of order $n \geqslant k+1$ having an l-factor for some odd l with $1 \leqslant l \leqslant k$. If G satisfies

$$\delta > \frac{(k+1)^2}{4k}\alpha + \frac{5k-4}{8} - \frac{2}{k},$$

then G has a k-factor.

Since $\delta \geqslant \kappa$ holds for every graph, it is not difficult to verify that the last three results together generalize the theorem of Katerinis [59] above.

Although many results for regular factors in this section correspond to theorems on Hamilton cycles, the way they are obtained is completely different. The existence of 1-factors can be proved usually by a more or less straightforward application of Tutte's 1-factor Theorem. For k-factors with $k \geqslant 2$ the situation is more involved and the proofs are accomplished by proving and using some refinements of the k-factor Theorem of Belck and Tutte.

Further contributions can be found in Kano and Tokushige [56] and Niessen [76].

6 Almost regular factors

In section four we have seen that there exist regular graphs without any non-trivial regular factor, the so-called primitive graphs. The next step was to require further conditions, for example edge-connectivity conditions, for regular graphs of odd degree such that they contain regular factors. Another possibility is to admit "almost" regular factors, what is our aim now.

Let G be a graph and g and f be integer-valued function defined on $V(G)$ such that $g(x) \leqslant f(x)$ for all $x \in V(G)$. A spanning subgraph F of G is called a (g,f)-factor, if $g(x) \leqslant d(x,F) \leqslant f(x)$ for all $x \in V(G)$. A (g,f)-factor satisfying $g(x) \equiv f(x)$ is an f-factor. A graph G with $a \leqslant d(x, G) \leqslant b$ for all $x \in V(G)$ is called briefly an $[a, b]$-graph. If each component of an $[a, a+1]$-factor is regular, then we speak of a perfect $[a, a+1]$-factor. A graph G is r-almost regular, if $|d(x\, G) - d(y, G)| \leqslant r$ for all $x, y \in V(G)$, and G is locally r-almost regular, if this condition holds only for each pair of adjacent vertices x and y.

The first contribution on almost regular factors of regular graphs was conjectured by Erdös and proved by Tutte with the help of his f-factor Theorem.

Theorem, Tutte [104] (1978). Let G be a δ-regular graph and k be an integer such that $0 \leqslant k \leqslant \delta$. Then G has a $[k, k+1]$-factor.

Let us note that this property of regular graphs is only new and interesting if δ is odd, because otherwise the First Theorem of Petersen is even stronger. In 1981, Thomassen [97] pointed out that this theorem of Tutte is equivalent to the following result of Lovász.

Theorem, Lovász [68] (1970). If G is a graph with $\Delta(G) \leqslant s+t-1$, where s and t are positive integers, then G is the union of two graphs of maximum degree at most s and t.

Lovász used for the proof his (g,f)-factor Theorem, and so both proofs are neither easy nor short.

The (g,f)-factor Theorem of Lovász [68] (1970). Let G be a graph and g, $f\colon V(G) \to \mathbf{N}_0$ two functions satisfying $g(x) \leqslant f(x)$ for all $x \in V(G)$. Then G has a (g,f)-factor if and only if

$$\sum_{x \in X} f(x) + \sum_{y \in Y} (d(y, G-X) - g(y)) - q(X, Y, g, f) \geqslant 0$$

for all disjoint subsets X and Y of $V(G)$, where $q(X,Y,g,f)$ denotes the number of components C of $G-(X \cup Y)$ such that $g(x)=f(x)$ for all $x \in V(C)$ and $\sum_{x \in V(C)} f(x) + e_G(V(C), Y) \equiv 1 \pmod 2$.

Clearly, the (g,f)-factor Theorem is a generalization of the f-factor Theorem. But ten years later, Tutte [105] gave an elegant proof of the (g,f)-factor Theorem by using his f-factor Theorem. In 1990, Heinrich, Hell, Kirkpatrick, and Liu [47] published a much simpler direkt proof of the (g,f)-factor Theorem, if $g < f$ or if the graph is bipartite, from which one can also extract an efficient algorithm.

Thomassen [97] and also Bollobás [11] have shown that the theorems of Lovász and Tutte are easy consequences of the Theorem of König-Hall. Furthermore, they observed that if one is interested only in almost regular factors, the regularity of the graph is not necessary.

Theorem, Thomassen [97] (1981). Let G be a 1-almost regular graph and k be an integer such that $0 \leqslant k \leqslant \delta(G)$. Then G has a $[k, k+1]$-factor.

Theorem, Bollobás [11] (1979). Let G be an r-almost regular graph ($r > 0$) and k be an integer such that $0 \leqslant k \leqslant \delta(G)$. Then G has a $[k, k+r]$-factor.

A few years later, Kano and Saito [55] used again the (g, f)-factor Theorem to prove the following stronger result.

Theorem, Kano and Saito [55] (1983). Let G be an r-almost regular graph with $r \geqslant 0$. If k and l are integers such that $l > 0$, $0 \leqslant k \leqslant \delta(G) = \delta$ and $rk \leqslant \delta l$, then G has a $[k, k+l]$-factor.

The next theorem, which I have proved together with my student Arno Joentgen, shows that the conclusion of all these and other similar statements are still true, if it is assumed only that the graphs are locally r-almost regular.

Theorem, Joentgen and Volkmann [52] (1991). Every locally r-almost regular graph G with $r \geqslant 1$ has an r-almost regular factor H for which $\delta(H) = \delta(G)$.

The most general contribution in this direction can be found in a manuscript of Egawa and Kano [32] (see also the book of Volkmann [106, p. 121]).

Since for a regular multigraph G the condition $|S| \leqslant |N(S, G)|$ is fulfilled for all subsets S of $V(G)$, it follows from a theorem of Tutte [102] that G contains even a perfect $[1, 2]$-factor (for a proof see also Volkmann [106, p. 105]). Enomoto and Saito conjectured that every δ-regular multigraph has a perfect $[k, k+1]$-factor for $0 \leqslant k \leqslant \delta$. According to the First Theorem of Petersen, this conjecture is valid for even δ. By a clever application of the (g, f)-factor Theorem and the f-factor Theorem, Kano [54] has given a partial solution of this conjecture.

Theorem, Kano [54] (1986). Let G be a δ-regular multigraph and k be an integer such that $0 \leqslant k \leqslant \frac{2}{3}\delta - 1$. Then G has a perfect $[k, k+1]$-factor.

Furthermore, Kano [54] constructed simple δ-regular graphs which have no perfect $[k, k+1]$-factor for $\delta - \sqrt{\delta+1} < k \leqslant \delta - 2$. The case $\frac{2}{3}\delta \leqslant k \leqslant \delta - \sqrt{\delta+1}$ with $\delta \geqslant 12$ is still open. The complete bipartite graph $K_{\delta, \delta+1}$ shows that it is not possible to generalize the conjecture of Enomoto and Saito for locally almost regular or almost regular graphs.

7 Almost regular factorizations

If the edge set of a graph G can be decomposed into $[a, b]$-factors, then G is called $[a, b]$-factorizable. The concept of $[a, b]$-factorization with $a < b$ was introduced in 1982 by Akiyama [1].

Theorem, Akiyama [1] (1982). Everey δ-regular multigraph with $\delta \geqslant 2$ is $[2,3]$-factorizable.

If G is $2p$-regular, G is 2-factorizable by the First Theorem of Petersen, and so the graph is also $[2,3]$-factorizable. Hence the essential part of the proof of the theorem of Akiyama consists of showing that every regular multigraph of odd degree is $[2,3]$-factorizable. The next result was conjectured by Akiyama [1] and it was proved by Era [35] two years later.

Theorem, Era [35] (1984). Every simple δ-regular graph with $\delta \geqslant 2k^2$ is $[k, k+1]$-factorizable.

In 1985, Kano [53] found a sufficient condition for graphs to be $[1,2]$-factorizable.

Theorem, Kano [53] (1985). Let $m \geqslant 1$ and $k \geqslant 0$. Then every $[8m+2k, 10m+2k]$-multigraph is $[1,2]$-factorizable.

As a consequence of this theorem Kano obtained the next corollary.

Corollary 7, Kano [53] (1985). Every connected $[\delta, \delta+1]$-multigraph is $[1,2]$-factorizable, if $\delta \geqslant 1$.

If is clear that the union of an odd cycle and a 3-regular multigraph, which is a $[2,3]$-multigraph with two components, is not $[1,2]$-factorizable. Therefore, the connectivity condition in Corrollary 7 is necessary. The most complete results on $[a,b]$-factorizations, including those of Era [35] and Kano [53] just mentioned, and also that of Akiyama and Kano [3], were recently given by Mao-cheng [71].

Theorem, Mao-cheng [71] (1991). Let a, b, m and n be non negative integers with $1 \leqslant a \leqslant b$ and $m+n \geqslant 1$.

(i) If $b \leqslant 2a$, then every $[(12a+2)m+2an, (12b+4)m+2bn]$-multigraph is $[2a, 2b+1]$-factorizable.
(ii) If $b \leqslant 2a-1$, then every $[(12a-4)m+2an, (12b-2)m+2bn]$-multigraph is $[2a-1, 2b]$-factorizable.
(iii) If $b \leqslant 2a-1$, then every $[(6a-2)m+2an, (6b+2)m+2bn]$-multigraph is $[2a-1, 2b+1]$-factorizable.

At the end of this section we present a very nice extension of the First Theorem of Petersen which was found by Kano [53].

Theorem, Kano [53] (1985). Let $0 \leqslant a \leqslant b$. Then a multigraph G is $[2a, 2b]$-factorizable if and only if G is a $[2am, 2bm]$-multigraph for some positive integer m.

The special case $a=b=1$ yields immediately the First Theorem of Petersen. For further informations on factors and factorizations of graphs, the reader is referred to the survey article of Akiyama and Kano [2] from 1985, and the book of Lovász and Plummer [69] from 1986.

8 Odd and even factors

For a set I of integers, we call a graph G an I-graph, if $d(x, G) \in I$ for all $x \in V(G)$. Especially, in the case $I = \{a, a+2, \ldots, b\}$ with $a \equiv b \pmod 2$, the I-graph is also called an $[a, b]$-odd (even) graph if a is odd (even). In particular, the graph is regular when $a = b$. Analogously, we define an I-factor, an $[a, b]$-odd or $[a, b]$-even factor. A graph is $[a, b]$-odd (even) factorizable, if the edge set can be decomposed into disjoint $[a, b]$-odd (even) factors. If f is a function from $V(G)$ to the set $\{1, 3, \ldots\}$ of positive odd integers, then a $[1, f]$-odd factor of G is a spanning subgraph F of G such that $d(x, F) \in \{1, 3, \ldots, f(x)\}$ for every vertex x of G.

It is easy to check that a tree T has a 1-factor if and only if $o(T - x) = 1$ for all $x \in V(T)$ (see Chungphaisan [26]). This proposition follows directly from the next theorem.

Theorem, Amahashi [4] (1985). Let T be a tree of even order. Then T has a $[1, 2p-1]$-odd factor if and only if $o(T - x) \leqslant 2p - 1$ for every $x \in V(T)$.

In the same paper, Amahashi generalized the 1-factor Theorem of Tutte. The proof is similar to the proof of the 1-factor Theorem due to Anderson [5], by using the Theorem of König-Hall. This result implies easily a further extension of the Second Theorem of Petersen.

Theorem, Amahashi [4] (1985). A graph G has a $[1, 2p-1]$-odd factor if and only if $o(G - S) \leqslant (2p-1)|S|$ for all $S \subseteq V(G)$.

Theorem, Amahashi [4] (1985). Every connected and $(2p+1)$-regular graph with no more than $2p$ bridges has a $[1, 2p-1]$-odd factor.

With similar methods, Yuting and Kano [111] proved in 1988 the following generalizations of the first two theorems of Amahashi.

Theorem, Yuting and Kano [111] (1988). Let T be a tree of even order and $f: V(T) \to \{1, 3, \ldots\}$ a function. Then T has a $[1, f]$-odd factor if and only if $o(T - x) \leqslant f(x)$ for every $x \in V(T)$.

Theorem, Yuting and Kano [111] (1988). Let G be a graph and $f: V(G) \to \{1, 3, \ldots\}$ a function. Then G has a $[1, f]$-odd factor if and only if $o(G - S) \leqslant \sum_{x \in S} f(x)$ for all $S \subseteq V(G)$.

Some applications of the theorems of Yuting and Kano can be found in a paper of Topp and Vestergaard [99]. Further extensions of the Second Theorem of Petersen, Corollary 3 of Baebler, and the theorem of Schönberger [95] and Berge [10] were recently found by Chen [21], and Chen and Kano [22].

Theorem, Chen [21]. Let G be a graph such that all vertices have odd degree and p be an integer with $\Delta(G) \leqslant 3(2p-1)$. Then G has a $[1, 2p-1]$-odd factor, if G contains at most $\frac{1}{2}(3(2p-1) - \Delta(G)) + 2$ bridges.

Theorem, Chen and Kano [22] (1992). Let G be a connected r-regular multigraph of even order, $k \in \{\lambda(G), \lambda(G)+1\}$, and $k \equiv r \pmod 2$. If $k(2p-1) \geqslant r$, then G has a $[1, 2p-1]$-odd factor that contains a given edge.

The next results of Chen extend the First Theorem of Petersen.

Theorem, Chen [20]. Every $[2a, 2a+2t]$-even graph $(t \geqslant 0)$ has a $[2k, 2k+2t]$-even factor for $0 \leqslant k \leqslant a$.

Theorem, Chen [20]. Let a and b be integers with $0 \leqslant a \leqslant b$. Then a graph G is $[2a, 2b]$-even factorizable if and only if G is a $[2am, 2bm]$-even graph for some positive integer m.

For further contributions on odd and even factors of graphs we refer to the survey paper of Chen [19].

By applying the so called Splitting Lemma, Fleischner [43] extended the weak form of the Second Theorem of Petersen (see Corollary 1).

Theorem, Fleischner [43] (1992). Every bridgeless graph without isolated vertices and without vertices of degree two has a spanning (not necessarily connected) eulerian subgraph without isolated vertices.

It is obvious that even factors are spanning (not necessarily connected) eulerian subgraphs. A detailed discussion of such subgraphs can be found for example in Fleischner [40], [41], [42], Catlin [15], [16], [17] and Z.-H. Chen [23].

9 The 1-factorization conjecture

In our final section we return to regular factors of regular graphs. The extreme case of factorization occurs when an r-regular graph is decomposed into r disjoint 1-factors; in this case we may assign r different colours to its edges in such a way that two edges have the same colour if and only if they belong to the same 1-factor. The first explicit occurence of the 1-factorization of the complete graph is in the papers of Kirkman [63] from 1847 and Reiß [90] from 1859.

Theorem, Kirkman [63] (1847); **Reiß** [90] (1859). The complete graph K_{2n} is 1-factorizable.

An easy geometric proof can be found in the book of Sachs [93, p. 57]. If we consider the elements of K_{2n} as teams (or players) among whom a round-robin tournament is to be played (i.e., each team is to play every other team exactly once), then a 1-factorization of the complete graph K_{2n} gives us a schedule for round robin in a minimum possible number of rounds, namely, $2n-1$. Because of the relationship of 1-factorizations to round-robin tournaments, it is almost certainly true that 1-factorizations have been considered much earlier, and we cannot exclude a possibility of earlier written sources. For more informations on 1-factorizations of the complete graph see Mendelsohn and Rosa [73]. From the theorem of Kirkman and Reiß we deduce immediately the next corollary.

Corollary 8. Every simple $(2n-2)$-regular graph of order $2n$ is 1-factorizable.

In connection with these results the following conjecture has been made already in the 1950's.

1-factorization conjecture. Every simple r-regular graph of order $2n$ with $r \geqslant n$ is 1-factorizable.

Rosa and Wallis [91] solved the 1-factorization conjecture in the case $r = 2n-4$ under the additional assumption that the complement is 1-factorizable. In 1985 Chetwynd and Hilton [24] proved the cases $r = 2n-3$, $r = 2n-4$, and $r = 2n-5$ without any restriction. In the same paper Chetwynd and Hilton [24] gave the following general bound.

Theorem, Chetwynd and Hilton [24] (1985). Every simple r-regular graph of order $2n$ with $r \geqslant \frac{12}{7} n \approx 1{,}714n$ is 1-factorizable.

This bound was improved independently by Chetwynd and Hilton [25], and Niessen and Volkmann [81].

Theorem, Chetwynd and Hilton [25] (1989); **Niessen and Volkmann** [81] (1990). Every simple r-regular graph of order $2n$ with $r \geqslant (\sqrt{7}-1)n \approx 1{,}647n$ is 1-factorizable.

Actually, the methods which will be needed for proving these results belong to the theory of edge-colouring, and they are completely different from those of the previous sections. While Chetwynd and Hilton gave a direct proof of this theorem, Niessen and Volkmann deduced it from a general result. In relation with this problem the following result is of interest.

Theorem, Zhang and Zhu [112] (1992). Every simple r-regular graph of order $2n$ with $r \geqslant n$ contains at least $r - \lceil n/2 \rceil$ edge-disjoint 1-factors.

We shall finish this article with the famous relation of the 1-factorization of regular graphs and the Four-Colour-Conjecture.

Theorem of Tait [96] (1880). The Four-Colour Conjecture is valid if and only if every 3-regular 2-edge-connected planar graph is 1-factorizable.

For a solution of the Four-Colour Conjecture see the book of Appel and Haken [6].

Acknowledgements. I would like to thank my students Dr. P. Dankelmann and Dr. T. Niessen for very useful discussions and for many detailed comments and hints. Also, I am grateful to Prof. Dr. H. Walther who has written the laudatio on Prof. Dr. H. Sachs. Finally, I am indebted to Prof. Dr. Dr. h. c. P. L. Butzer for valuable suggestions and for his kind encouragement to publish this paper in Jber. Dt. Math.-Verein.

References

[1] Akiyama, J.: Factorization and linear arboricity of graphs. Doctoral thesis, Science University of Tokyo (1982)

[2] Akiyama, J.; Kano, M.: Factors and factorizations of graphs – a survey. J. Graph Theory **9** (1985) 1–42

[3] Akiyama, J.; Kano, M.: Almost regular factorization of graphs. J. Graph Theory **9** (1985) 123–128

[4] Amahashi, A.: On factors with all degrees odd. Graphs Combin. **1** (1985) 111–114

[5] Anderson, I.: Perfect matchings of a graph, J. Combin. Theory Ser. B **10** (1971) 183–186

[6] Appel, K.; Haken, W.: Every Planar Map is Four Colorable (Contemporary Mathematics 98, 1989)

[7] Baebler, F.: Über die Zerlegung regulärer Streckenkomplexe ungerader Ordnung. Comment. Math. Helv. **10** (1938) 275–287

[8] Bauer, D.; Schmeichel, E.: Toughness, minimum degree, and the existence of 2-factors. J. Graph Theory **18** (1994) 241–256

[9] Belck, H.-B.: Reguläre Faktoren von Graphen. J. Reine Angew. Math. **188** (1950) 228–252

[10] Berge, C.: Théorie des Graphes et ses Applications (Dunod, Paris, 1958)

[11] Bollobás, B.: Graph Theory, An Introductory Course (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1979)

[12] Bollobás, B.; Saito, A.; Wormald, N. C.: Regular factors of regular graphs. J. Graph Theory 9 (1985) 97–103

[13] Brahana, H. R.: A proof of Petersen's theorem. Ann. Math. **19** (1917) 59–63

[14] Broersma, H. J.; van den Heuvel, J.; Veldman, H. J.: A generalization of Ore's theorem involving neighborhood unions. Discrete Math. **122** (1993) 37–49

[15] Catlin, P. A.: A reduction method to find spanning eulerian subgraphs. J. Graph Theory **12** (1988) 29–44

[16] Catlin, P. A.: Spanning eulerian subgraphs and matchings. Discrete Math. **76** (1989) 95–116

[17] Catlin, P. A.: Supereulerian graphs: A survey. J. Graph Theory **16** (1992) 177–196

[18] Chartrand, G.; Nebeský, L.: A note on 1-factors in graphs. Period. Math. Hungar. **10** (1979) 41–46

[19] Chen, C.: A survey of parity factors. Graph theory, combinatorics, algorithms, and applications. Alavi, Y.; Chung, F. R. K.; Graham, R. L.; Hsu, D. F.: Ed., Philadelphia (1991) 106–118

[20] Chen, C.: Parity factors and even factorizations of graphs, submitted

[21] Chen, C.: Extensions of some theorems on 1-factors. Acta Math. Sci., to appear

[22] Chen, C.; Kano, M.: Odd and even factors of graphs with given properties. Chinese Quart. J. Math. **7** (1992) 65–71

[23] Chen, Z.-H.: Spanning closed trails in graphs. Discrete Math. **117** (1993) 57–71

[24] Chetwynd, A. G.; Hilton, A. J. W.: Regular graphs of high degree are 1-factorizable. Proc. London Math. Soc. **50** (1985) 193–206

[25] Chetwynd, A. G.; Hilton, A. J. W.: 1-factorizing regular graphs of high degree – an improved bound. Discrete Math. **75** (1989) 103–112

[26] Chungphaisan, V.: Factors of graphs and degree sequences. Nanta Math. **9** (1976) 41–49

[27] Chvátal, V.: Tough graphs and hamiltonian circuits. Discrete Math. **5** (1973) 215–228

[28] Chvátal, V.; Erdös, P.: A note on hamiltonian circuits. Discrete Math. **2** (1972) 111–113

[29] Cvetković, D. M.; Doob, M.; Sachs, H.: Spectra of Graphs – Theory and Applications (Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, New York: Academic Press 1980/82)

[30] Dirac, G. A.: Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. Soc. (3) **2** (1952) 69–81

[31] Egawa, Y.; Enomoto, H.: Sufficient conditions for the existence of k-factors. Recent Studies in Graph Theory. Kulli, V. R.: Ed., Vishwa International Publication, India (1989) 96–105

[32] Egawa, Y.; Kano, M.: Sufficient conditions for graphs to have (g, f)-factors, manuscript (1990)

[33] Enomoto, H.: Toughness and the existence of k-factors. II, Graphs Combin. **2** (1986) 37–42

[34] Enomoto, H.; Jackson, B.; Katerinis, P.; Saito, A.: Toughness and the existence of k-factors. J. Graph Theory **9** (1985) 87–95

[35] Era, H.: Semi-regular factorization of regular graphs. Graphs and Applications, Proc. of the first Colorado Symp. on Graph Theory, Harary and Maybee, Ed., Wiley, 1984

[36] Errera, A.: Une démonstration du théorème de Petersen. Mathesis **36** (1922) 56–61

[37] Euler, L.: Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Petopolitanae **8** (1736) 128–140

[38] Faudree, R. J.; Gould, R. J.; Jacobson, M. S.; Schelp, R. H.: Extremal problems involving neighborhood unions. J. Graph Theory **11** (1987) 555–564

[39] Faudree, R. J.; Gould, R. J.; Jacobson, M. S.; Schelp, R. H.: Neighborhood unions and hamiltonian properties in graphs. J. Combin. Theory Ser. B **47** (1989) 1–9

[40] Fleischner, H.: Some blood, sweat, but no tears in eulerian graph theory. Congr. Numer. **63** (1988) 8–48

[41] Fleischner, H.: Eulerian Graphs and Related Topics. Part 1, Vol. 1 (Ann. Discrete Math. 45, North-Holland, Amsterdam, 1990)

[42] Fleischner, H.: Eulerian Graphs and Related Topics. Part 1, Vol. 2 (Ann. Discrete Math. 50, North-Holland, Amsterdam, 1991)

[43] Fleischner, H.: Spanning eulerian subgraphs, the Splitting Lemma, and Petersen's Theorem. Discrete Math. **101** (1992) 33–37

[44] Frink, O.: A proof of Petersen's theorem. Ann. Math. **27** (1926) 491–493

[45] Gallai, T.: On the factorisation of graphs. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **1** (1950) 133–153

[46] Hall, P.: On representatives of subsets. J. London Math. Soc. **10** (1935) 26–30

[47] Heinrich, K.; Hell, P.; Kirkpatrick, D. G.; Liu, G.: A simple existence criterion for $(g<f)$-factors. Discrete Math. **85** (1990) 313–317

[48] Hierholzer, C.: Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. Math. Ann. **6** (1873) 30–32

[49] Iida, T.; Nishimura, T.: An Ore-type condition for the existence of k-factors in graphs. Graphs Combin. **7** (1991) 353–361

[50] Jackson, B.: Neighborhood unions and Hamilton cycles. J. Graph Theory **15** (1991) 443–451

[51] Jank, G.; Volkmann, L.: Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen (UTB Große Reihe, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1985)

[52] Joentgen, A.; Volkmann, L.: Factors of locally almost regular graphs. Bull. London Math. Soc. **23** (1991) 121–122

[53] Kano, M.: $[a, b]$-factorization of a graph. J. Graph Theory **9** (1985) 129–146

[54] Kano, M.: Factors of regular graphs. J. Combin. Theory Ser. B **41** (1986) 27–36

[55] Kano, M.; Saito, A.: $[a, b]$-factors of graphs. Discrete Math. **47** (1983) 113–116

[56] Kano, M.; Tokushige, N.: Binding numbers and f-factors of graphs. J. Combin. Theory Ser. B **54** (1992) 213–221

[57] Katerinis, P.: Some conditions for the existence of f-factors. J. Graph Theory **9** (1985) 513–521

[58] Katerinis, P.: Minimum degree of a graph and the existence of k-factors. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **94** (1985) 123–127

[59] Katerinis, P.: A Chvátal-Erdös condition for an r-factor in a graph. Ars Combin. **20**-B (1985) 185–191

[60] Katerinis, P.: Toughness of graphs and the existence of factors. Discrete Math. **80** (1990) 81–92

[61] Katerinis, P.: Regular factors in regular graphs. Discrete Math. **113** (1993) 269–274

[62] Katerinis, P.; Woodall, D. R.: Binding number of graphs and the existence of k-factors. Quart. J. Math. Oxford **38** (1987) 221–228

[63] Kirkman, T. P.: On a problem in combinations. Cambridge Dublin Math. J. **2** (1847) 191–204

[64] König, D.: Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, Math. Ann. **77** (1916) 453–465

[65] König, D.: Graphen und Matrizen. Mat. Fiz. Lapok **38** (1931) 116–119

[66] König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936)

[67] Lenkewitz, U.; Volkmann, L.: Neighbourhood and degree conditions for the existence of regular factors. Ars Combin., to appear

[68] Lovász, L.: Subgraphs with prescribed valencies, J. Combin. Theory **8** (1970) 391–416

[69] Lovász, L.; Plummer, M. D.: Matching Theory (Ann. Discrete Math. 29, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1986)

[70] Lützen, J.; Sabidussi, G.; Toft, B.: Julius Petersen 1839–1910: A Biography, Discrete Math. **100** (1992) 9–82

[71] Mao-cheng, C.: [*a, b*]-factorizations of graphs. J. Graph Theory **15** (1991) 283–301

[72] Maschlanka, P.; Volkmann, L.: Independence number in n-extendable graphs. Discrete Math., to appear

[73] Mendelsohn, E.; Rosa, A.: One-factorizations of the complete graph – a survey, J. Graph Theory **9** (1985) 43–65

[74] Mulder, H. M.: Julius Petersen's theory of regular graphs. Discrete Math. **100** (1992) 157–175

[75] Niessen, T.: Nash-Williams conditions and the existence of k-factors. Ars. Combin. **34** (1992) 251–256

[76] Niessen, T.: Sufficient conditions for the existence of regular factors in graphs [in German], Dissertation RWTH Aachen (1994), 84 p

[77] Niessen, T.: Neighborhood unions and regular factors. J. Graph Theory **19** (1995) 45–64

[78] Niessen, T.: Minimum degree, independence number and regular factors. Graphs Combin., to appear

[79] Niessen, T.: A Fan-type result for regular factors. Ars Combin., to appear

[80] Niessen, T.: Regular factors of regular graphs, and k-spectra, in preparation

[81] Niessen, T.; Volkmann, L.: Class 1 conditions depending on the minimum degree and the number of vertices of maximum degree. J. Graph Theory **14** (1990) 225–246

[82] Nishimura, T.: Independence number, connectivity, and r-factors. J. Graph Theory **13** (1989) 63–69

[83] Nishimura, T.: A degree condition for the existence of k-factors. J. Graph Theory **16** (1992) 141–151

[84] Ore, O.: Note on Hamilton circuits. Amer. Math. Monthly **67** (1960) 55

[85] Petersen, J.: Die Theorie der regulären graphs. Acta Math. **15** (1891) 193–220

[86] Plesnik, J.: Connectivity of regular graphs and the existence of 1-factors. Math. Časopis Sloven. Akad. Vied. **22** (1972) 310–318

[87] Plesnik, J.: Remarks on regular factors of regular graphs. Czechoslovak Math. J. **24** (1974) 292–300

[88] Plummer, M. D.: On n-extendable graphs. Discrete Math. **31** (1980) 201–210

[89] Plummer, M. D.: Extending matchings in graphs: A survey, Discrete Math. **127** (1994) 277–292

[90] Reiß, M.: Über eine Steinersche combinatorische Aufgabe, welche im 45sten Bande dieses Journals, Seite 181, gestellt worden ist, J. Reine Angew. Math. **56** (1859) 326–344

[91] Rosa, A.; Wallis, W. D.: Premature sets of 1-factors or how not to schedule round robin tournaments. Discrete Appl. Math. **4** (1982) 291–297

[92] Sabidussi, G.: Correspondence between Sylvester, Petersen, Hilbert and Klein on invariants and the factorisation of graphs 1889–1891. Discrete Math. **100** (1992) 99–155

[93] Sachs, H.: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen (Carl Hanser Verlag, München, 1971)

[94] Sachs, H.; Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil II (Teubner-Verlag, Leipzig, 1972)

[95] Schönberger, T.: Ein Beweis des Petersenschen Graphensatzes, Acta Litt. Acad. Sci. Szeged **7** (1934) 51–57

[96] Tait, P. G.: Note on a theorem in the geometry of position. Trans. Roy. Soc. Edinb. **29** (1880) 657–660

[97] Thomassen, C.: A remark on the factor theorems of Lovász and Tutte. J. Graph Theory **5** (1981) 441–442

[98] Tokushige, N.: Binding number and minimum degree for k-factors. J. Graph Theory **13** (1989) 607–617

[99] Topp, J.; Vestergaard, P. D.: Odd factors of a graph. Graphs Combin. **9** (1993) 371–381

[100] Tutte, W. T.: The factorization of linear graphs. J. London Math. Soc. **22** (1947) 107–111

[101] Tutte, W. T.: The factors of graphs. Canad. J. Math. **4** (1952) 314–328

[102] Tutte, W. T.: The 1-factors of oriented graphs. Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953) 922–931

[103] Tutte, W. T.: A short proof of the factor theorem for finite graphs. Canad. J. Math. **6** (1954) 347–352
[104] Tutte, W. T.: The subgraph problem. Ann. Discrete Math. **3** (1978) 289–295
[105] Tutte, W. T.: Graph factors. Combinatorica **1** (1981) 79–97
[106] Volkmann, L.: Graphen und Digraphen: Eine Einführung in die Graphentheorie (Springer-Verlag, Wien, New York, 1991)
[107] Woodall, D. R.: The binding number of a graph and its Anderson number. J. Combin. Theory Ser. B **15** (1973) 225–255
[108] Woodall, D. R.: k-factors and neighbourhoods of independent sets in graphs. J. London Math. Soc. **41** (1990) 385–392
[109] Yu, Q.: A note on n-extendable graphs. J. Graph Theory **16** (1992) 349–353
[110] Yu, Q.: Characterizations of various matching extensions graphs. Australas. J. Combin. **7** (1993) 55–64
[111] Yuting, C.; Kano, M.: Some results on odd factors of graphs. J. Graph Theory **12** (1988) 327–333
[112] Zhang, C.-Q.; Zhu, Y.-J.: Factorizations of regular graphs. J. Combin. Theory Ser. B **56** (1992) 74–89

Lutz Volkmann
Lehrstuhl II für Mathematik, RWTH Aachen
52056 Aachen,
e-mail: volkm@math2. rwth-aachen.de

(*Eingegangen 25. 4. 1994; revidierte Fassung 27. 1. 1995*)

Buchbesprechungen

Knight, F., Foundations of the prediction process, Oxford u. a.: Clarendon Press 1992, 260 S., £ 40,-

Der Autor erzählt uns die Geschichte vom Dinosaurier. Dieser wuchs und wuchs, vergaß jedoch sein Spatzenhirn entsprechend zu vergrößern. Einige Dinosaurier entwickelten deshalb lokale Kontrollzentren für die vom Gehirn entfernteren Glieder. Ähnlich haben Teile der Theorie stochastischer Prozesse eine hohe Entwicklungsstufe erreicht, jedoch den Anschluß an die allgemeine Theorie weitgehend verloren. Für die Praxis mag dies von nachgeordneter Bedeutung sein, vom ästhetischen Standpunkt her ist es jedoch bedauerlich. Knight verspricht uns ein Instrument zum Verständnis allgemeiner stochastischer Prozesse. Die grundlegende Idee ist einfach. Regularitätseigenschaften eines Prozesses können durch Erweiterung des Zustandsraumes erzwungen werden. Fügt man z. B. dem gegenwärtigen Zustand die Information über die gesamte Vergangenheit hinzu, so wird der Prozeß markovsch, d. h. seine zukünftige Entwicklung hängt nicht mehr von der Vergangenheit ab. Alles, was wir über die Vergangenheit wissen können, ist in der Verteilung des zukünftigen Prozeßverlaufs bei gegebener Gegenwart enthalten. Somit ist es natürlich, als zentrales Objekt den (maßwertigen) Prozeß dieser bedingten Verteilungen zu studieren, d. h. den Vorhersageprozeß. Er wurde 1975 vom Autor eingeführt und in den folgenden Jahren von Meyer, Yor, Getoor und Knight behandelt. In den letzten zehn Jahren scheint wenig darüber erschienen zu sein. Im vorliegenden Text präsentiert der Autor einen umfassenden – notwendigerweise nicht erschöpfenden – Überblick.

Einem beliebigen (lediglich als meßbar vorausgesetzten) Prozeß $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ und mit Werten in einem meßbaren Lusinraum $(E, \mathscr{E})$ wird ein kanonischer Prozeß $\tilde{X}$ zugeordnet: Der Grundraum Ω' von Pfaden, d. h. meßbaren Abbildungen $w: \mathbb{R}_+ \to E$, wird mit der Filtration

$$\mathscr{F}'_t = \sigma\left\{\int_0^s f(w(u))\,du : s < t, f \in b(\mathscr{E})\right\}$$

der Beobachtungen versehen (wobei $b(\mathscr{E})$ den Raum der reellwertigen, $\mathscr{E}$-meßbaren, beschränkten Funktionen bezeichnet), und der σ-Algebra

$$\mathscr{F}' = \mathscr{F}'_\infty = \sigma\{\mathscr{F}'_t : t \geqslant 0\}.$$

Die Atome von $\mathscr{F}'$ sind die Äquivalenzklassen der Relation $w \sim v \leftrightarrow w = v$ Lebesgue fast überall. Die Festsetzung

$$\mathbb{P}'(S) = \mathbb{P}(X \in S), \qquad S \in \mathscr{F}',$$

liefert ein normiertes Maß auf $(\Omega', \mathscr{F}')$. Für $E=[0,1]$ ist der kanonische Prozeß gegeben durch

$$\tilde{X}_t(w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} w(u)du,$$

$$\tilde{X}_t^-(w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t} w(u)du,\ w(u) = 0 \qquad \text{für } u < 0$$

Es gilt $\mathscr{F}'_t = \sigma(\tilde{X}_s : s < t)$. $\tilde{X}$ ist progressiv meßbar bzgl. $(\mathscr{F}'_{t+})$ und man hat die Äquivalenz

$$\int_0^t \tilde{X}_s ds = \int_0^t w(s)ds, \qquad t \geqslant 0.$$

Das zentrale Objekt ist der Vorhersageprozeß Z, d. h. eine Familie (Z^z), $z \in M'$, von Prozessen mit Werten im Raum M' der normierten Maße über $\mathscr{F}'$, versehen mit der Auswertungs-σ-Algebra $M' = \sigma(z \mapsto z(S) : S \in \mathscr{F}')$. Er entsteht durch geeignete Regularisierung der regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten der Zukunft gegeben die Vergangenheit. Insbesondere gilt

$$z(\Theta^{-1} S \mid \mathscr{F}'_{t+}) = Z_t^z(S), \qquad S \in \mathscr{F}', t \geqslant 0,$$

$$z(\Theta^{-1} S \mid \mathscr{F}'_t) = Z_{t-}^z(S), \qquad S \in \mathscr{F}', t > 0,$$

wobei $\Theta w(s) = w(s+t)$. Ferner ist jeder Prozeß Z^z bezüglich $(\mathscr{F}'_t)$-adaptiert und hat in einer mit $\mathscr{M}'$ verträglichen *Vorhersagetopologie* rechtsstetige Pfade mit linksseitigen Limiten. Alle Prozesse Z^z sind Realisierungen eines einzigen Markov-Prozesses mit der Übergangfunktion

$$q(t, z, A) = z\{Z_t^z \in A\}, \qquad A \in \mathscr{M}'.$$

Dieser hat starke Markov-Eigenschaften: Für $z \in M'$ und $A \in \mathscr{M}'$ gelten etwa:

(a) für jede $(\mathscr{F}'_{t+})$-Stoppzeit $T < \infty$ ist

$$z(Z_{T+t}^z \in A \mid \mathscr{F}'_{T+}) = q(t, Z_T^z, A), \qquad t \geqslant 0,$$

(b) für jede $(\mathscr{F}'_t)$-Stoppzeit $T > 0$ ist

$$z(Z_{T+t}^z \in A \mid \mathscr{F}'_T) = q(t, Z_{T-}^z, A), \qquad t > 0.$$

Die Beziehung zum ursprünglichen Prozeß wird durch die Relation

$$Z(\mathbb{E}^{Z_T^z} \tilde{X}_0 = \tilde{X}_T \text{ für Lebesgue fast alle } t) = 1$$

für jede $(\mathscr{F}'_{t+})$-optionale Stoppzeit $T < \infty$ hergestellt.

Vermöge des Satzes von Kuratowski kann die Konstruktion unter Beibehaltung aller Meßbarkeitseigenschaften auf beliebige meßbare Lusinräume $(E, \mathscr{E})$ übertragen werden. Allerdings hängt sie dann von der den Borel-Isomorphismus zwischen E und $[0, 1]$ vermittelnden Kuratowski-Abbildung ab. Von dieser Abhängigkeit kann man sich durch eine wenig aufwendigere Konstruktion befreien und erhält so *den* Vorhersageprozeß, *die* Vorhersagetopologie usw.

In einer ersten Anwendung wird der Vorhersageprozeß zur Konstruktion regulärer Versionen von Markov-Prozessen benutzt. Die Beziehung zu Borel-Rechts- und Ray-Prozessen wird hergestellt.

Umgekehrt kann die Theorie der Markov-Prozesse zum Studium des Vorhersageprozesses und somit nur wenig regulärer Prozesse eingesetzt werden. Ausführlich diskutiert werden gaußsche Prozesse. Von fundamentaler Bedeutung sind dabei die Martingale

$$M_\lambda(t) = R_\lambda^Z \hat{\varrho}(Z(t)) - R_\lambda^Z \hat{\varrho}(Z(0)) + \int_0^t \hat{\varrho}(Z(s)) - \lambda R_\lambda^Z \hat{\varrho}(Z(s)) ds, \qquad \lambda > 0.$$

Dabei ist $z \in M_2 = \left\{ z : \mathbb{E}^z \int_0^\infty e^{-\lambda t} |w(t)|^2 dt < \infty \right\}$, $\hat{\varrho}(z) = \mathbb{E}^{Z_T^z} \tilde{X}_0$ und Z ein geeigneter Markov-Prozeß mit Übergangsfunktion q; R_λ^Z ist die Resolvente

$$R_\lambda^Z h(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_M q(t, z, dm) dt.$$

M_λ ist ein quadratintegrierbares Martingal mit rechtsstetigen Pfaden und linksseitigen Limiten und außerdem ein additives Funktional von Z. Für gaußsche z hat M_λ unabhängige gaußsche Zuwächse. Die Familie (M_λ) wird zur Herleitung einer kanonischen

Repräsentationen gaußscher Prozesse im Sinne von P. Lévy, H. Cramer und T. Hida benutzt.

Die Klassifikation meßbarer Prozesse nach der Art der Sprünge des Vorhersageprozesses dient schließlich der Ausweitung auf den nichtgaußschen Fall.

Das Buch endet mit einer Sammlung spezieller Resultate, darunter der Herleitung einer expliziten Doob-Meyer-Zerlegung spezieller Semimartingale mit Anwendungen auf die Wold-Zerlegung.

Knight's Text besticht durch spröden Charme. Der Zugang ist eigenwillig und folgt keinen ausgetretenen Pfaden. Er will hart erarbeitet werden. Im Gegensatz zur Aussage des Umschlagtextes sind erhebliche Vorkenntnisse zum tieferen Verständnis gefordert. Das absolute Minimum wird etwa durch den Inhalt von Williams (1979) umschrieben. Fortgeschrittene Standardtexte über stochastische Analysis sollten jedoch bei der Lektüre ebenso in Griffweite liegen wie Blumenthal, Getoor (1968) und Getoor (1975). Verkürzt gesagt, richtet sich das Buch an den Fachmann, zumal der Fluß der Erzählung häufig durch Fachdiskussionen von Details und Abschweifungen unterbrochen wird. Diesem wird sich auch die Bedeutung der zahlreichen Beispiele erschließen. Zu bedauern ist die spärliche oder nur verschlüsselt gegebene Motivation einzelner Konzepte oder Resultate, insbesondere, da viele nicht zum Standardwissen gezählt werden können.

Die zukünftige Akzeptanz für diese Theorie ist schwer abzuschätzen. Sollte sie gering ausfallen, muß dies Knights Zugang nicht abwerten. Die Dinosaurier sind schließlich ausgestorben.

Literatur

Blumenthal, R. M.; Getoor, R. K. (1968): Markov processes and potential theory. Pure and Applied Mathematics 29. Academic Press

Getoor, R. K. (1975): Markov processes: Ray processes and right processes. Lecture Notes in Mathematics 440, Springer-Verlag

Williams, D. (1979): Diffusions, Markov processes, and martingales. Volume 1: Foundations. John Wiley & Sons

München G. Winkler

Lang, S., Number Theory III, Diophantine Geometry (Encyclopaedia of Math. Science, Vol. 60), Berlin u. a.: Springer Verlag 1991, 300 S., DM 128,–

Das hier besprochene Buch von S. Lang hat zum Ziel, den aktuellen Stand der Dinge in einem Gebiet festzuhalten, das sich sehr stark und kreativ in die verschiedensten Richtungen entwickelt hat. Das Unterfangen, einen Band für eine Enzyklopädie über diophantische Geometrie zu schreiben, stellt eine sehr anspruchsvolle Aufgabe dar und ist eine interessante Herausforderung an einen Autor: gilt es doch nicht nur, eine Vielfalt von Teilgebieten zu erfassen, sondern auch die richtige Auswahl zu treffen.

Die Monographie ist in 10 Kapitel aufgeteilt, die jedoch nicht isoliert über einen bestimmten Aspekt berichten, sondern stark untereinander vernetzt sind.

Im ersten Kapitel wird der Zusammenhang zwischen geometrischen und diophantischen Eigenschaften von algebraischen Varietäten dargestellt und eine Reihe von Vermutungen ausgearbeitet. Im zweiten Kapitel wird die Theorie der Höhen behandelt und eine weitere Reihe von tiefliegenden Vermutungen in der diophantischen Geometrie diskutiert, wie zum Beispiel die *abc*-Vermutung. Das dritte Kapitel handelt von speziellen arithmetischen Fragen im Zusammenhang mit abelschen Varietäten. Stichworte hier sind l-adische Darstellungen und die Vermutung von Birch-Swinnerton-Dyer. Einer der Höhepunkte ist das Kapitel 4 über die Mordell-Vermutung. Dann werden im Kapitel 5 Modulkurven behandelt und ihre Verbindungen mit diophantischen Problemen beschrieben. Das Kapitel 6 greift noch einmal die Mordell-Vermutung vom geometrischen Standpunkt aus auf. Ein wichtiges Kapitel ist auch Kapitel 7, wo über den neuesten Stand der Arakelov-Theorie berichtet wird. Im nächsten Kapitel wird Nevanlinna-Theorie behandelt. Es wird vermutet, daß eine analoge Theorie auch im arithmetischen Fall existiert. Im Kapitel 9 geht es dann noch einmal um Höhen und ihre enge Verbindung mit diophantischen Ungleichungen, wie zum Beispiel die Sätze von Roth und Schmidt. Hieraus resultierende neue Entdeckungen von Vojta und Faltings werden umrissen. Dann, im letzten Kapitel, geht es um das Problem der Existenz von rationalen Punkten, wo die Brauer-Gruppen einer Varität eine maßgebliche Rolle spielt.

Das vorliegende Buch gibt einen hervorragenden und geschmackvollen Überblick über die diophantische Geometrie. Es kann sowohl als Leitfaden für das Erlernen dieses Gebiets dienen, als auch dem tätigen Forscher eine Vielzahl von Referenzen wie auch Anregungen geben. Es sollte im Bücherregal eines jeden stehen, der Freude und Interesse an diesem tiefverwurzelten Teilgebiet der Mathematik besitzt.

Zürich G. Wüstholz

Mumford, D., Tata Lectures on Theta I and II (Progress in Math. Vol. 28 und 43), Basel u. a.: Birkhäuser 1983 und 1984, 235 S. und 272 S., DM 72,– und DM 84,–

Mumford, D., Nori, M., Normann, P., Tata Lectures on Theta III (Progress in Math. Vol. 97), Basel u. a.: Birkhäuser 1991, 202 S. DM 84,–

Im Winter 1978/79 hielt David Mumford am Tata Institute of Fundamental Research in Bombay eine Vorlesungsreihe über Theta-Funktionen. Diese bildete die Grundlage für sein 3bändiges Werk *Tata Lectures on Theta.* 1991 erschien endlich der dritte Band.

Die Theta-Funktion ist eine analytische Funktion einer oder mehrerer Variabler. Der Student lernt sie in der Funktionentherorie als die allgemeinste holomorphe, 2-fach fast-periodische Funktion und in der Physik als die fundamentale Lösung der Wärmeleitungsgleichung kennen. Darüber hinaus hat die Theta-Funktion aber durch zahlreiche Anwendungen in den verschiedensten Bereichen der Mathematik und Physik Bedeutung erlangt. Zu erwähnen wären da z. B. die komplexe Analysis, die algebraische Geometrie, die Zahlentheorie, die partiellen Differentialgleichungen und die Darstellungstheorie.

Die vorliegende Reihe *Tata Lectures of Theta* gibt einen Einblick, welche Rolle die Theta-Funktion in diesen Gebieten spielt. Dabei wird jedes Thema sorgfältig und ausführlich behandelt. (Bis auf wenige Ausnahmen, findet man zu allen Theoremen und Propositionen vollständige Beweise). Die Kapitel sind umfangreich konzipiert (auch neueste Ergebnisse werden vorgestellt), und bieten einen Überblick über den derzeitigen Stand der Forschung. Dieses schlägt sich aber durch einen recht knappen Stil nieder. Jedes Kapitel endet mit einer Diskussion einiger ungelöster Probleme.

Der erste Band enthält die Kapitel I, über Theta-Funktionen in einer Variablen, und II, eine Einführung in die Theorie der Theta-Funktionen in mehreren Variablen. Hier wird die klassische Theorie der Theta-Funktion dargestellt. Nach der Definition der Theta-Funktion und der Diskussion ihrer Funktionalgleichung werden in Kapitel I projektive Einbettungen von 1-dimensionalen komplexen Tori durch Theta-Funktionen, Theta-Funktionen als Modulformen und die Jacobische Derivations-Formel der Theta-Funktion behandelt. Man findet aber auch einige zahlentheoretische Themen wie z. B. die Produktdarstellung der Theta-Funktion, den Satz von Jacobi über die Zahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als die Summe von Quadraten und den Zusammenhang zwischen der

Theta- und der Zeta-Funktion. Vom Leser des ersten Kapitels werden nur einige Kenntnisse aus der Funktionentheorie erwartet.

Die ausführliche Behandlung der Theta-Funktion einer Variablen im ersten Kapitel erlaubt es im zweiten Kapitel die Theta-Funktionen mehrerer Veränderlicher etwas zügiger zu diskutieren. So kann Mumford innerhalb weniger Seiten von der Definition der Theta-Funktion über den Zusammenhang zwischen Theta-Funktionen und komplexen Tori bis zum Satz von Lefschetz über die Einbettung komplexer Tori mittels Theta-Funktionen überleiten. Darauf wendet er sich Jacobischen Varietäten zu, man findet vollständige Beweise der Sätze von Abel und Riemann. Außerdem enthält das Kapitel Beweise für die klassische Theta-Transformationsformel und die Riemannsche Theta-Formel. Mit Hilfe von quadratischen Formen und pluri-harmonischen Polynomen werden aus der Theta-Funktion weitere Modulformen konstruiert. Zum Verständnis des zweiten Kapitels sind einige Kenntnisse aus der algebraischen Geometrie von Nöten.

Der zweite Band umfaßt das Kapitel III. Das Hauptanliegen ist hier, diejenigen Theta-Funktionen zu charakterisieren, welche von einer Riemannschen Fläche bzw. einer Jacobischen Varietät abgeleitet werden können. Es stellt sich heraus, daß diese Theta-Funktionen Lösungen wichtiger nicht-linearer partieller Differentialgleichungen aus der angewandten Mathematik, wie zum Beispiel der Korteweg-de-Vries-Gleichung, liefern. Als Anwendungen findet man z. B. die Theta-Formel von Frobenius für hyperelliptische Theta-Funktionen sowie eine Charakterisierung hyperelliptischer Periodenmatrizen durch das Verschwindungsverhalten der dazugehörigen Theta-Funktion. Im zweiten Teil von Kapitel III wird die Trisekantenidentität von Fay diskutiert. Davon werden Lösungen für die Kadomstev-Petriashvili-, die Korteweg-de-Vries- und die Sine-Gorden-Gleichungen abgeleitet.

Teil 3 von Kapitel III wurde von H. Umemura geschrieben. Er berichtet von seinen Ergebnissen über Lösungen beliebiger algebraischer Gleichungen durch hyperelliptische Theta-Funktionen und hyperelliptische Integrale. Mumford ist in diesem Kapitel eine exzellente Verknüpfung von Analysis und Geometrie gelungen. Schließlich möchte ich nicht vergessen an dieser Stelle auch die Mitarbeit von E. Previato und M. Stillman an Kapitel III zu erwähnen.

Im vierten Kapitel, welches den Band 3 bildet, geht es um die algebraische Definition der Theta-Funktion. Im Unterschied zu den vorangegangenen Kapiteln wird über einem beliebigen Körper gearbeitet. Hier lernt man die Theta-Funktionen als Schnitte von Geradenbündeln auf abelschen Varietäten bzw. Modulräumen abelscher Varietäten kennen. In Analogie zum analytischen Fall im ersten und zweiten Kapitel werden auch für die algebraische Theta-Funktion die Theta-Transformationsformel und die Riemannsche Theta-Formel bewiesen sowie mit Hilfe von quadratischen Formen und gewissen harmonischen Polynomen Modulformen konstruiert. Darüber hinaus findet man Kempfs Beweis von seinem Satz über die Erzeuger des homogenen Ideals einer abelschen Varietät in $\mathbb{P}_N$. Ein weiteres wesentliches Thema sind Heisenberggruppen und ihre Darstellungen. Die analytischen Theta-Funktionen sind Matrix-Koeffizienten von Darstellungen der reellen Heisenbergruppen, also zentraler Erweiterungen von $\mathbb{R}^{2n}$ mit $\mathbb{C}_1^* = \{|z| = 1\}$. Ein algebraisches Analogon dazu sind die algebraischen Theta-Funktionen und die adelischen Heisenberggruppen, deren Theorie in den Abschnitten § 4 und § 5 entwickelt wird.

Die *Tata Lectures on Theta* stellen ein gut lesbares Werk dar. Es wird zwar zum Teil recht knapp aber doch lückenlos zu den zentralen Punkten des jeweiligen Themas hingeführt. Während der erste Band noch auf einem elementaren Level gehalten wird, werden im zweiten und dritten Band verstärkt Kenntnisse aus der algebraischen Geometrie, der Darstellungstheorie sowie der Zahlentheorie vorausgesetzt. Insbesondere der dritte Band scheint mir ohne Vorkenntnisse über abelsche Varietäten und Heisenberggruppen schwer verständlich zu sein.

Die einzelnen Kapitel können ohne Schwierigkeiten separat gelesen werden. Die vereinzelten Querverweise betreffen höchstens Definitionen der Theta-Funktion oder weisen auf interessante Parallelen hin.

Die *Tata Lectures on Theta* sind jedem an Theta-Funktionen interessierten Leser wärmstens zu empfehlen. Ebenso hilfreich dürften sie als ergänzendes Werk beim Studium integrabler Systeme (Band II) oder abelscher Varietäten sein.

Erlangen Ch. Birkenhake

van Lint, J. H., Introduction to Coding Theory. 2nd edition (Graduate Texts 86), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1992, 183 S., DM 86,-

Bei der Übermittlung von Nachrichten tritt häufig die folgende Situation auf: ein Sender schickt eine Information über einen Nachrichtenkanal (Funk, Telefon, Magnetband etc.) an einen Empfänger. Dabei können technisch bedingte Störungen auftreten, welche die gesendete Nachricht (i. a. geringfügig) verfälschen. Die vom Empfänger erhaltene Information stimmt also möglicherweise nicht genau mit der tatsächlich gesendeten Nachricht überein. Ist es für den Empfänger möglich zu erkennen, ob die empfangene Information korrekt ist? Mehr noch: Kann er eventuell aufgetretene Übermittlungsfehler sogar korrigieren?

Die Sprache liefert ein schönes Beispiel, wie so etwas funktioniert. Eine Information besteht aus einzelnen Wörtern, die ihrerseits aus den 26 Buchstaben des Alphabets gebildet werden. Aber nicht jede Folge von Buchstaben ergibt ein Wort der Sprache. So ist etwa die Folge „mathemaxik" kein zulässiges Wort. Trotzdem weiß jeder, der dies liest, daß damit nur das Wort „mathematik" gemeint sein kann. Der Grund ist einfach: Es gibt kein anderes Wort der deutschen Sprache, welches sich von „mathemaxik" ebenfalls nur in einem Buchstaben unterscheidet.

Im Prinzip ist ein Code nichts anderes als ein Wörterbuch, d. h. eine Liste von zulässigen Wörtern. Genauer: Gegeben ist eine endliche Menge Q, genannt *Alphabet* (in den meisten Anwendungen ist Q zweielementig, etwa $Q = \{0, 1\}$). Für $a, b \in Q^n$ ist der *Hamming-Abstand* $d(a, b)$ definiert als die Anzahl der Komponenten, an denen sich a und b unterscheiden. Ein *Code der Länge n* ist eine nicht-leere Teilmenge $C \subseteq Q^n$, die Elemente von C heißen *Codewörter*. Die Zahl $d(C) := \min \{d(c, c') | c, c' \in C$ und $c \neq c')$ heißt der *Minimalabstand* von C.

In der Praxis werden Codes folgendermaßen verwendet: Eine vom Sender abgeschickte zulässige Information ist ein Codewort $c \in C$. Der Empfänger empfängt ein eventuell gestörtes n-Tupel $a \in Q^n$. Die Anzahl der Übertragungsfehler ist gerade der Hamming-Abstand $d(a, c)$. Ist nun $d(a, c) \leqslant t := (d(C) - 1)/2$, so ist offenbar $d(a, c) < d(a, c')$ für alle $c' \in C$ mit $c' \neq c$. Der Empfänger kann also aus dem erhaltenen Signal a mit gewisser Wahrscheinlichkeit auf die tatsächlich gesendete Nachricht c schließen; man nennt C daher einen *t-fehlerkorrigierenden* Code. Ein Verfahren, welches zu a das zugehörige $c \in C$ bestimmt, heißt ein *Decodieralgorithmus* für C.

Die Grundaufgabe der Codierungstheorie besteht in der Konstruktion *guter* Codes. Was ein guter Code ist, hängt vom Verwendungszweck ab. Man kann aber einige allgemeine Kriterien formulieren:

1. C sollte viele Fehler korrigieren können, d. h. der Minimalabstand $d(C)$ sollte groß sein.
2. C sollte viele Codewörter enthalten, damit hinreichend viele verschiedene Informationen übermittelt werden können.

3. C sollte leicht zu beschreiben sein.
4. Es sollte einen einfachen und schnellen Decodieralgorithmus für C geben.

In den späten vierziger Jahren begannen Ingenieure, ausgehend von Erfordernissen der Praxis, solche Codes zu entwickeln. Dabei wurden zunächst nur einfache mathematische Hilfsmittel verwendet. Es erwies sich jedoch schon bald als zweckmäßig, auch weitergehende Methoden aus Kombinatorik, Geometrie und insbesondere aus der Algebra heranzuziehen. Der erste Gedanke dabei war es, als Alphabet einen endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ (insbesondere den Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$) zu wählen und nicht beliebige Teilmengen $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$, sondern lediglich lineare Unterräume des n-dimensionalen Standardvektorraums $\mathbb{F}_q^n$ zu betrachten – solche heißen *lineare* Codes. Sie lassen sich mit den Methoden der Linearen Algebra gut beschreiben. In der weiteren Entwicklung zeigte sich, daß Polynome und die algebraische Theorie der endlichen Körper nützliche Hilfsmittel für die Codierungstheorie sind. Darüber hinaus ergaben sich teilweise überraschende Beziehungen u. a. zur Zahlentheorie, Gruppentheorie und neuerdings zur Algebraischen Geometrie. Es sind diese Querverbindungen, welche die Codierungstheorie für Mathematiker aus verschiedenen Forschungsbereichen so attraktiv machen, und man kann sicherlich erwarten, daß in der Zukunft noch weitere solche Querverbindungen gefunden werden.

Es gibt eine Reihe von Einführungen in die Codierungstheorie. Einige davon sind sehr elementar, andere betonen stark die technischen Aspekte. J. H. van Lints „Introduction to Coding Theory“, welche jetzt in der 2. Auflage in der Reihe „Graduate Texts in Mathematics“ im Springer-Verlag erschienen ist, ist vor allem für den Mathematiker besonders geeignet. Das Buch gibt eine mathematisch durchaus anspruchsvolle Einführung in die Theorie. Es ist erstaunlich, in welcher Kürze und Prägnanz van Lint so viele Aspekte der Codierungstheorie behandelt, ohne nur an der Oberfläche zu bleiben. Durch den lebhaften Stil des Autors ist das Buch sehr gut lesbar; dazu tragen auch die jedem Kapitel angefügten Kommentare bei.

„Introduction to Coding Theory“ enthält die folgenden 11 Kapitel (die teilweise völlig unabhängig voneinander sind): 1. Mathematischer Hintergrund. 2. Shannon's Satz. 3. Lineare Codes. 4. Einige gute Codes. 5. Schranken für Codes. 6. Zyklische Codes. 7. Perfekte Codes. 8. Goppa Codes. 9. Asymptotisch gute algebraische Codes. 10. Arithmetische Codes. 11. Faltungscodes. Zu jedem Kapitel gehören Kommentare und Übungsaufgaben. Gegenüber der ersten Auflage von 1982 hat es einige geringfügige Veränderungen gegeben. Es kamen kurze Abschnitte über folgende Themenkreise hinzu: der binäre Golay Code; Kerdock Codes; die van Lint-Wilson Schranke für zyklische Codes; binäre zyklische Codes der Länge $2n$ (n ungerade); algebraisch-geometrische Codes.

Zu Recht hat sich van Lints Buch neben „The Theory of Error-Correcting Codes“ von F. J. MacWilliams und N. J. A. Sloane (welches etwa den 4fachen Umfang hat) als Standardwerk in der mathematisch orientierten Codierungstheorie etabliert. Ich wünsche mir, daß auch die 2. Auflage des Buches in Zukunft viele Mathematiker zur Beschäftigung mit dieser reizvollen Theorie anregen wird, so wie es mir selbst vor gut 6 Jahren ergangen ist.

Essen H. Stichtenoth

Doerk, K., Hawkes, T., Finite soluble groups (de Gruyter Expositions in Mathematics 4), Berlin u. a.: de Gruyter 1992, 900 S., Leinen, DM 268,–

In the last 30 years or so, two major strands have emerged in the theory of finite soluble groups. One involves characteristic conjugacy classes of subgroups (projectors, injectors, generalizations of system normalizers and others) and the classes of groups that give rise to them (saturated formations, Schunk classes, Fitting classes). The other deals with results of Hall-Higman type, bounding the Fitting length or p-length of finite soluble groups admitting groups of automorphisms with restrictions on their fixed point groups. On the whole they have remained rather separate, though they have the common feature that many of their deeper results eventually rest on representation theory, which enters the picture via the actions of groups on their chief factors.

This book deals entirely with the first of these strands. A good impression of its scope can be obtained from the second author's survey article [1]. Historically, the area has its beginnings in Hall's work on Hall subgroups and system normalizers, through which it traces back to Sylow's Theorem, and in Carter's discovery of his subgroups, but the fundamental concepts and results that gave the subject its present form are largely due to Gaschütz and his co-workers. As the 880 pages of this book make clear, the subject has since received very considerable development. This unified account of it is certainly very welcome. Some of the developments that have taken place have reached outside finite soluble groups to encompass finite groups in general, and the authors do not allow the title to inhibit them from discussing some of these. There have also been extensions of parts of the theory of Hall subgroups, Carter subgroups, formation theory, Fitting class theory and the like to various classes of locally finite groups and infinite soluble groups. The theory here is much less well developed, as is to be expected, and has not yet received a unified exposition in book form. Parts of it and relevant references can be found in [2, 3].

The authors have aimed to produce a book that will serve as a text for postgraduate teaching, and also as a basic and up to date reference for research workers. In terms of the content and style, they have succeeded admirably, but the price will restrict its use as a text. The first aim requires that the book start from modest beginnings and be reasonably self contained. The authors have achieved this by providing two long introductory chapters (Chapters A und B) giving the background results from group theory and representation theory needed in the rest of the book. In these chapters they give all necessary definitions (even that of a group) and statements of results, with references to proofs when these are conveniently available, or detailed proofs otherwise. These first 203 pages provide a very good introduction to finite groups and their representations from the standpoint of finite soluble group theory. Since many of the modules met will be chief factors, the representation theory chapter emphasises the finite field case. Another important feature of a textbook is that it should contain plenty of exercises. An abundant supply of these is provided throughout the book.

Interestingly, the first main chapter begins with a purely group theoretical proof of Burnside's $p^a q^b$-Theorem, done in complete detail in 11 pages. The rest of this chapter covers the basic theory of Hall subgroups, system normalizers, pronormal subgroups, and so on. Some of Fischer's unpublished work appears here. In their preface, the authors remark that they have given particular emphasis to the construction and analysis of examples. This is visible already in this first chapter. This emphasis is very valuable, and should be particularly so for postgraduate students.

They go on to introduce Hall's notation of groups classes and closure operations, which is used heavily in the rest of the book. This notation has the advantage of being very succinct, but makes it difficult to dip into the book unless one is prepared to take the time to familiarize oneself with it. For example, on page 283, we are told that a class $\mathfrak{B}$ is a Q-boundary, if $(Q-1)\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B} = \emptyset$. This means that if $G \in \mathfrak{B}$, then no proper quotient of G is in $\mathfrak{B}$. Occasional verbal clarification of this kind might have helped, though given that many diverse operations on group classes are used in this area, it is crucial to have a concise notation for them.

Roughly speaking, Chapters III–VII (255 pages) are devoted to projectors, Schunk classes and formations, and Chapters VIII–XI (297 pages) to Fitting sets, injectors, and

Fitting classes. There are two appendices. The first contains an unpublished proof, due to R. M. Bryant, of a technical theorem of Oates and Powell. This theorem is needed in the proof that the formation generated by a finite soluble group has only finitely many subformations, given in Chapter VII. The appendix obviates the need to refer to the theory of varieties during the proof. It is still not known whether the result is true for an arbitrary finite group. The second appendix gives an up to date account of the theory of Frattini extensions and their connections with block theory.

It is rather difficult to gives an impression of the coverage of the main chapters III–XI. They will appeal mostly to potential or established workers in the field, for whom the book will be an indispensable source. The authors have taken pains to pull together and integrate the contributions of numerous authors, as well as including important unpublished material. This is valuable in an area which, to the outsider, may appear rather technical and diffuse. Some tantalizing questions remain, such as finding the Fitting class generated by the symmetric group of degree 3, or the subformations of the formation generated by a finite group. Although a number of open questions are stated, it does not seem easy to discern the main directions that the subject might take in the future. The following samples may give some idea of the scope of the book.

- The authors have worked with general finite groups wherever that can be done without introducing too much technicality. In particular, they give accounts of work of Baer (unpublished) and Förster on local formations of general finite groups, and much of the basic theory of projectors and Schunk classes is developed in general.
- Brief historical accounts are given of the development of covering subgroups, projectors, and the like, and of the "dual" theory of injectors and Fitting classes.
- Many of the results from Fischer's 1966 Habilitationsschrift, which were instrumental in the early development of Fitting classes, now appear in fully published form (for the first time as far as the reviewer is aware) and in the context of subsequent developments.
- Topics on Schunk classes and formations include the theorems of Lubeseder and Baer on local formations, strong containment, the lattice of Schunk classes, conditions on chief factor rank, extreme classes.
- Topics on Fitting classes include Fischer classes and subgroups, an extensive treatment of Dark's construction and its variations, and the matters surrounding normal Fitting classes, such as the Lockett section and the Lausch group. There is also an extensive discussion of the main ideas and methods used in the theorem of Bryce and Cossey that a subgroup closed Fitting class of finite soluble groups is a saturated formation, though the full result is not proved.
- An extensive bibliography is provided.

The authors have succeeded in producing a book that can serve as an admirable introduction for postgraduates, and as an up to date source for research workers, but as often seems to be the case nowadays, the price is likely to mean that few other than libraries will be able to buy it.

List of contents. Chapter A. Prerequisites – general group theory. *Chapter B.* Prerequisites – representation theory. *Chapter I.* Introduction to soluble groups. *Chapter II.* Classes of groups and closure operations. *Chapter III.* Projectors and Schunk classes. *Chapter IV.* The theory of formations. *Chapter V.* Normalizers. *Chapter VI.* Further theory of Schunk classes. *Chapter VII.* Further theory of formations. *Chapter VIII.* Injectors and Fitting sets. *Chapter IX.* Fitting classes – examples and properties related to injectors. *Chapter X.* Fitting classes – the Lockett section. *Chapter XI.* Fitting classes – their behaviour as classes of groups. *Appendix α.* A theorem of Oates and Powell. *Appendix β.* Frattini extensions.

References
[1] Hawkes, T. O.: Finite soluble groups, In: Group Theory, Essays for Philip Hall (ed. K. W. Gruenberg and J. E. Roseblade). London: Academic Press 1984, pp 13–60
[2] Tomkinson, M. J.: FC-groups (Pitman Research Notes in Mathematics No. 96). London: Pitman 1984
[3] Tomkinson, M. J.: Fitting classes of infinite groups (Publ. del Seminario Matematico Garcia de Galdeano). Universidad de Zaragoza, Spain, 1990

Manchester B. Hartley

Korte, B., Lovász, L., Schrader, R., Greedoids (Algorithms and Combinatorics Vol. 4), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1991, 211 S., DM 128,–

The book under review is the first monograph on greedoids, a common generalization of both matroids and antimatroids. Recall that matroids constitute a combinatorial abstraction of linear independence, whereas antimatroids (or, to be precise, rather the equivalent "convex geometries") give an abstraction of convexity. The authors first give a treatment of both these concepts; while Chapter II on matroids (for which there are several good text books available) is in the nature of a short report, the less known antimatroids are dealt with in considerable detail in Chapter III. Following this, greedoids are introduced in Chapter IV; they can be viewed as a weakening of matroids, where the axiom that every subset of an independent set is itself independent is replaced by an accessibility condition: Each non-empty independent subset X has to contain an element x such that $X \setminus \{x\}$ is independent. (That antimatroids also satisfy these axioms is less obvious.) The authors then give many examples; greedoids arise in a surprising variety of situations, e.g. for Gaussian elimination and for many graph-theoretic notions (e.g., retracts, dismantling, series-parallel reduction, branching, ear decompositions and matching all lead to greedoids). In Chapter V, several standard concepts from matroid theory (e.g., rank, closure, minors) are considered, and the important subclass of interval greedoids is introduced (which includes both matroids and anti-matroids). Chapter VI studies lattices associated with greedoids and connectivity properties. In Chapter VII to X, various special classes of greedoids are studied in detail. Chapter XI is concerned with optimization on greedoids. Just as matroids can also be defined as those independence systems for which the greedy algorithm finds an independent subset of maximal weight for linear weight functions, one can also give an algorithmic characterization of greedoids. Unfortunately, here one has to use generalized bottleneck functions as weight funtions, whereas the behaviour for linear weight functions is, in general, not clear. The greedoids for which the greedy algorithm gives an optimal solution for linear weight functions are characterized. The authors also consider polyhedral results and the analogue of matroid intersection. The final Chapter XII deals with the application of topological methods to greedoid theory.

Given the fact that much of the theory of greedoids is due to Korte and Lovász, it is not surprising that this book gives an excellent treatment (which is always clear though concise). The extensive bibliography is very useful. There are no exercises, but then the book is on research level anyway.

I recommend a detailed study of this excellent text for anybody who is interested in one of the following topics:

- abstract versions of common notions like linear independence and convexity
- the theoretical foundations of combinatorial optimization
- the interaction between algorithmic and structural mathematics.

Moreover, everybody working in discrete mathematics should have at least some idea about the basic results treated in this book.

Augsburg D. Jungnickel

Berenstein, C., Gay, R., Complex Variables, An Introduction (Graduate Texts in Mathematics 125), Berlin u. a.: Springer Verlag 1991, 650 S., DM 128,–

Die Funktionentheorie hat im Laufe ihrer Entwicklung zahlreiche Gebiete der Mathematik beeinflußt: Topologie, algebraische Geometrie, Algebra, Zahlentheorie, reelle Analysis und Funktionalanalysis standen oder stehen mit der komplexen Analysis in Wechselwirkung. Die meisten Lehrbücher berücksichtigen eine oder mehrere dieser Verbindungen bereits in der Darstellung der Grundlagen, wobei allerdings der Zusammenhang mit der reellen Analysis und Funktionalanalysis nur gelegentlich sichtbar wird. Das vorliegende Werk betont gerade diese Verbindung und nimmt insofern eine Sonderstellung in der funktionentheoretischen Literatur ein; am ehesten ist es mit Kapitel 1 von Hörmander [H] oder mit Rudins Buch [R] zu vergleichen.

Holomorphe Funktionen werden als C^1-Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen definiert (und bald durch komplexe Differenzierbarkeit allein charakterisiert) (Kap. I. § 11 und II. § 1). Das zweite Kapitel enthält die Standardsätze der Theorie holomorpher Funktionen und Abbildungen. Der Akzentsetzung des Buches entsprechend nimmt der Residuenkalkül einigen Raum ein, und die Gleichung $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ wird in L^1_{lok} diskutiert.

Das dritte Kapitel entwickelt Funktionentheorie auf beliebigen Bereichen $\Omega \subset \mathbb{C}$ konsequent über die Lösungstheorie von $\partial u/\partial \bar{z} = f$ und die Cauchy-Transformation von Maßen. Hauptergebnisse: Rungescher Approximationssatz (ein nicht-konstruktiver Beweis mittels orthogonaler Maße), Sätze von Mittag-Leffler und Weierstraß, Interpolationssätze und Idealtheorie von $\mathcal{O}(\Omega)$. Neu in einem Lehrbuch sind die Abschnitte über meromorphe Funktionen als Distributionen, edge-of-the-wedge Theorem als Verallgemeinerung des Schwarzschen Spiegelungsprinzips, innere Regularitätstheorie von $\partial/\partial \bar{z}$, Interpretation von Residuen mittels meromorpher distributionswertiger Funktionen $T(\lambda) = |f|^{2\lambda} \bar{f}'$ und Anwendungen auf Integralformeln mit Gewichten, wie sie neuerdings in der komplexen Analysis mehrerer Variabler auftreten. Das Kapitel endet mit einem Beweis der Sätze von Mergelyan und Arakelian über gleichmäßige Approximation durch Polynome bzw. ganze Funktionen.

Das folgende Kapitel wendet die Theorie harmonischer Funktionen auf die Funktionentheorie an. Im einzelnen: Sätze über kanonische Faktorisierung und Wachstum ganzer Funktionen werden im Rahmen der Theorie subharmonischer Funktionen dargestellt; die Darstellung führt bis zu den Anfängen der Nevanlinna-Theorie und gibt auch eine Einführung in die Theorie der Kapazität. Mittels des Transformationsverhaltens der Bergman-Projektion wird der Satz von Painlevé über Randregularität biholomorpher Abbildungen bewiesen und damit, in Umkehrung von Painlevés ursprünglichem Beweis, die Randregularität des Dirichlet-Problems bei glatten Rändern gezeigt. Dieses neue Verfahren ist der Funktionentheorie mehrerer Variabler entlehnt und erscheint hier erst zum zweiten Mal in einem Lehrbuch der klassischen Funktionentheorie.

Im letzten Kapitel werden die Riemannschen Flächen holomorpher Funktionskeime eingeführt und auf das Studium linearer Differentialgleichungen angewandt. Das Kapitel endet mit einem Indexsatz für derartige Operatoren. Zu Beginn finden sich Ergebnisse über Dirichlet-Reihen und die ζ-Funktion.

Die Autoren haben sich – man vergleiche die Einleitung! – durchweg um Modernität in Stoffauswahl und Akzentsetzung bemüht. Das kommt in vielerlei Hinsicht zum Ausdruck: der Begriffsapparat ist (notwendigerweise?) aufwendiger als in andern Lehrbüchern; allgemeinen Sätzen wird der Vorzug vor der Untersuchung spezieller Funktionsklassen gegeben; an vielen Stellen – sicher an mehr, als dem Referenten aufgefallen – werden neue elegante und einfache Beweise wichtiger Resultate gegeben. Hinweise auf die Entwicklung der Fragestellungen und Methoden fehlen vollständig; das Literaturverzeichnis (ca. 150 Titel) enthält 9 Titel aus der Zeit vor 1950 gegenüber allein 50, die nach 1980 erschienen sind. In dieser Modernität mag man je nach Geschmack einen Vorzug oder einen Nachteil erblicken. Auf jeden Fall erfreulich sind die klare und sorgfältige Darstellung und die Aufnahme zahlreicher interessanter Übungsaufgaben.

Das Buch soll durch einen zweiten Band fortgesetzt werden.

[H] Hörmander, L.: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables (2 ed.). Amsterdam: North Holland 1973

[R] Rudin, W.: Real and Complex Analysis. New York etc.: McGraw Hill 1966

Bonn I. Lieb

Meyer-Nieberg, P., Banach Lattices (Universitext), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1991, 395 S., softcover, DM 78,–

Es ist gar keine Frage: Die vorliegende Monographie über Banachverbände und ihre Operatoren ist ein neuer Markstein in der Entwicklung dieses mit konkreter und abstrakter Analysis so eng verknüpften Gebietes. Vielleicht waren das Buch des Referenten (Banach Lattices and Positive Operators, Grundlehren Bd. 215, 1974) und das zweibändige Werk von Lindenstrauss-Tzafriri (Classical Banach Spaces I und II, Erg. d. Math. 92(1977) bzw. 97(1979)) die ersten umfassenden Buchveröffentlichungen, die die enge Beziehung der Banachverbände zur klassischen und neueren Theorie der Banachräume – und darüber hinaus zu weiten Teilen der allgemeinen Funktionalanalysis – in überzeugende Evidenz setzten. Hier liegt nun ein weiteres umfassendes Werk vor, das einen gewaltigen Teil der Entwicklung seit den siebziger Jahren einschließt und einem großen Leserkreis zugänglich macht. Dabei hat sich der Verfasser erfolgreich darum bemüht, die Überlappung mit den vorgenannten Monographien (und anderen, in den achtziger Jahren erschienenen Werken, etwa Zaanens Riesz Spaces II) gering zu halten. So werden etwa die Ideal- und Ergodentheorie positiver Operatoren und weite Teile der Geometrie der Banachverbände wenig oder gar nicht angesprochen – schon im Hinblick auf den enormen Umfang der Literatur eine schlichte Notwendigkeit.

Dennoch verbleibt ein weiter Bereich, der nahezu vollständig vorgestellt wird. Zum anderen ist ein wichtiges Anliegen dieses Werkes, die Zugänge zu vielen inzwischen klassischen Resultaten durchsichtiger und vor allem elementarer zu gestalten. Wie ich meine, ist dies dem Verfasser vorzüglich gelungen und hier, im Finden neuartiger, oft einfacherer Beweise und Herleitungen, liegt meines Erachtens seine bedeutendste und umfänglichste Leistung; inbesondere fördert dies auch die unabhängige Lesbarkeit. Der Inhalt des Buches gliedert sich in folgende fünf Kapitel:

1. Rieszsche Räume (Grundeigenschaften, Ideale und Bänder, Freudenthals Spektralsatz, reguläre und ordnungsbeschränkte Operatoren, Dualität, Nakanotheorie, Fortsetzungssätze) – 2. Klassische Banachverbände (*M*-Räume, Sätze von Weierstraß-Stone und Kakutani-Krein, disjunkte Folgen, ordnungsstetige Norm, schwache Kompaktheit, Banachsche Funktionenräume, L^p-Räume – 3. Operatoren auf Rieszschen Räumen und Banachverbänden (Disjunktheitserhaltende Operatoren, Orthomorphismen, *L*- und *M*-

Räume, Kernoperatoren, kompakte und verschiedene Klassen schwachkompakter Operatoren, Tensorprodukte und vektorielle Integration) – 4. Spektraltheorie positiver Operatoren (Spektraleigenschaften, irreduzible Operatoren, Maße der Nichtkompaktheit, lokale Spektraltheorie, Ordnungsspektrum, Null-Zwei-Gesetz) – 5. Strukturtheorie von Banachverbänden (Banachraumeigenschaften von Banachverbänden, der Raum c_0 als Teilraum, der James-Raum J, komplementierte Teilräume, Banachverbände mit komplementierten Teilräumen vom Typ $C(\Delta)$, $C(0, 1)$, $L^1(0, 1)$, Grothendieck-Räume, die Radon-Nikodym-Eigenschaft von Banachverbänden).

Indessen kann das vorstehende Inhaltsverzeichnis mit Auflistung der bearbeiteten Themen dem Fernerstehenden nur eine schwache Vorstellung von der Vielfalt und Tragweite der erzielten Ergebnisse vermitteln. So wird z. B. im zweiten Kapitel die Methodik disjunkter Folgen, die zum großen Teil auf den Verfasser zurückgeht, bis hin zum Rosenthalschen Lemma erarbeitet sowie die schwache Kompaktheit in ihren vielen Varianten (aber eben auch deren Zusammenhang) diskutiert, was dem umfangreichen 3. Kapitel sehr zugute kommt. Ins 4. Kapitel werden neben den nun schon klassischen Ergebnissen der Spektraltheorie auch die lokale Spektraltheorie (an der der Autor wiederum erheblichen Anteil hat) sowie das Ordnungsspektrum und das Null-Zwei-Gesetz einbezogen. Im letzten Kapitel vermittelt der Autor, wohl nach intensiver Auseinandersetzung mit seinem Gegenstand, dem Leser einen weitreichenden Einblick in die schwierige Strukturtheorie der Banachverbände – ein Teilgebiet dessen, was man heute unter „Geometrie der Banachräume" versteht.

Was erwartet man nun von einem wissenschaftlichen Buch, einer guten Monographie? Wohl die Aktualisierung eines Forschungsgebietes aus der Sicht eines aktiv beteiligten Verfassers, durchsichtige und möglichst elegante Beweise, einen klaren und flüssigen Stil, eine gewisse Vollständigkeit, ein gutes Literaturverzeichnis, auch Motivation des Lesers. All dies kann das vorliegende Werk bieten; so ist es ein vorzügliches Buch, das aus der Flut des heute Angebotenen herausragt. Gelegentliche sprachliche Unebenheiten sowie eine Tendenz, mit dem Begriff „trivial" großzügig umzugehen, sind daneben ohne Bedeutung.

Tübingen H. H. Schaefer

Meise, R., Vogt, D., Einführung in die Funktionalanalysis (Vieweg Studium 62 Aufbaukurs Mathematik), Braunschweig u. a.: Vieweg 1992, 416 S., DM 54,–

Die Funktionalanalysis stellt unentbehrliches Handwerkszeug für zahlreiche mathematische Disziplinen bereit. So sind etwa die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, die Numerik, die mathematische Physik und Teile der komplexen Analysis heute ohne funktionalanalytische Methoden kaum denkbar. Gleichzeitig liefert die Funktionalanalysis ein gutes Beispiel für eine in ihrem klassischen Bestand elegante und für sich genommen interessante mathematische Theorie.

Das vorliegende Buch betont durch Aufbau und Stoffauswahl den zweiten Aspekt.

Kapitel 0 stellt die grundlegenden Begriffe und Ergebnisse über Vektorräume sowie metrische und topologische Räume bereit. Hier finden sich unter anderem Beweise des Satzes von Tychonoff, des Satzes von Arzelà-Ascoli, des Approximationssatzes von Stone-Weierstraß, des Kategoriesatzes von Baire und der Existenz der Vervollständigung von metrischen Räumen.

Kapitel I behandelt die klassischen Grundlagen der Funktionalanalysis. Nach Einführung der normierten Räume wird der Satz von Hahn-Banach bewiesen und zusammen mit dem Bipolarensatz beim Studium von Dual- und Bidualräumen angewendet. Als Konsequenzen aus dem Satz von Baire werden in der gewohnten Art die Sätze von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen sowie das Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit und der Satz von Banach-Steinhaus hergeleitet. Es folgen die wichtigsten Begriffe und Ergebnisse über duale Abbildungen, Projektionen und Hilberträume. Weiter werden die Grundtatsachen über L_p-Räume, der Darstellungssatz von Riesz für stetige lineare Funktionale auf $\mathscr{C}(X)$ und der Satz von Radon-Nikodym bereitgestellt. Das Kapitel endet mit einer Einführung in die Fouriertransformation (einschließlich des Satzes von Plancherel) und die Theorie der Sobolevräume (einschließlich des Sobolevschen Einbettungssatzes).

Kapitel II beschäftigt sich mit der Spektraltheorie linearer Operatoren. Zunächst wird die Riesz-Schaudersche Theorie kompakter Operatoren in Banach- und Hilberträumen beschrieben. Die Einführung der Schatten-Klassen kompakter Operatoren und insbesondere das Studium der Hilbert-Schmidt- und nuklearen Operatoren schließt sich an. Insbesondere wird gezeigt, daß der Dualraum des Raumes der kompakten Operatoren der Raum der nuklearen Operatoren ist und daß dieser wiederum den Raum aller stetigen Operatoren zum Dualraum hat. Nach einem Abriß der Theorie der Banachalgebren (einschließlich Gelfand-Darstellung und Satz von Gelfand-Neumark) wird diese Theorie zum Beweis des Spektralsatzes für beschränkte normale Operatoren herangezogen und der Funktionalkalkül für solche Operatoren entwickelt. Im Rahmen der Theorie unbeschränkter symmetrischer und selbstadjungierter Operatoren werden die Operatoren mit selbstadjungierter Erweiterung charakterisiert und mit Hilfe der Cayley-Transformation der Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren bewiesen.

Kapitel III widmet sich der Theorie der Frécheträume und leitet dann zu einem aktuellen Forschungsgebiet der Autoren über. An eine Darstellung der grundlegenden Tatsachen über lokal-konvexe Räume schließt sich die Herleitung des Bipolorensatzes für lokal-konvexe Räume, des Satzes von Krein-Milman und des Satzes von Alaoglou-Bourbaki an. In der Dualitätstheorie lokal-konvexer Räume werden unter anderem der Satz von Mackey-Arens über für duale Paare zulässige lokal-konvexe Topologien und der Satz von Mackey über beschränkte Mengen bewiesen. Es folgt eine Untersuchung der Reflexivität lokal-konvexer Räume, die mit einer Charakterisierung der reflexiven Banach- und Fréchеträume abgeschlossen wird. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit projektiven und induktiven Topologien. Hier werden der Satz von der offenen Abbildung und der Satz vom abgeschlossenen Graphen auf lokal-konvexe Räume, die ein Gewebe besitzen, verallgemeinert und der Faktorisierungssatz von Grothendieck bewiesen. Es folgt eine Übersicht über die wesentlichen Eigenschaften von Fréchеträumen und ihrer Dualräume. Dabei wird insbesondere die von Grothendieck eingeführte Klasse der DF-Räume studiert, die die Dualräume der Fréchеträume umfaßt. Es schließen sich Ergebnisse jüngeren Datums über kurze exakte Sequenzen von Fréchеträumen und eine umfassende Darstellung der Kötheschen Folgenräume an. Nach einer kurzen Einführung in die Theorie der nuklearen Räume folgt eine systematische Untersuchung von Potenzreihenräumen. Schließlich wird ein im wesentlichen von Vogt stammender Splittingsatz für kurze exakte Sequenzen von Fréchet-Hilberträumen bewiesen und zur Charakterisierung des Raumes s der schnell fallenden Folgen verwendet.

Ein Anhang liefert eine knappe Darstellung der Integrationstheorie mit Hilfe des Daniell-Integrals.

Die Autoren halten, was sie im Titel versprechen, und liefern eine gut lesbare, klar gegliederte Einführung in die Funktionalanalysis, die Vorkenntnisse nicht zwingend voraussetzt. Sie berücksichtigen bei der Themenwahl den klassischen Bestand der Funktionalanalysis weitestgehend. Die Darstellung des Stoffes zeichnet sich durch Übersichtlichkeit und klare Beweisführungen aus. Die sich an jeden Paragraphen anschließenden Aufgaben beinhalten in der Mehrzahl zusätzliche Ergebnisse und dienen nicht nur zur Einübung des Gelesenen. Die letzten Paragraphen über exakte Sequenzen sind eher für Studenten interessant, die sich in Richtung auf die Theorie lokal-konvexer Räume spezialisieren wollen.

Ein Nachteil des Textes – der aber ohne eine erhebliche Vergrößerung des Umfangs wohl kaum zu vermeiden war – sind die fehlenden genaueren Beschreibungen konkreter Anwendungsmöglichkeiten, die ein abstraktes Gebiet wie die Funktionalanalysis erst richtig lebendig machen.

Das Buch ist allen Studenten als Lektüre zu empfehlen, die Funktionalanalysis lernen wollen, und bietet im letzten Kapitel auch für Fachleute interessante Aspekte.

Passau S. Graf

Triebel, H., Theory of Function Spaces II (Monographs in Mathematics Vol. 84), Basel u. a.: Birkhäuser-Verlag 1992, viii + 370 S., DM 188,–

Zu berichten ist über einen meisterhaften Übersichtsartikel und eine wichtige Forschungsmonographie. Der Autor, der die Entwicklung in der Theorie der Funktionenräume entscheidend mitgestaltet hat, hat seine gleichnamige Monographie aus dem Jahre 1983 fortgeschrieben, der vorliegende Band ist aber „self-contained". Dies wird vor allem durch einen brillianten Übersichtsartikel erreicht, der als Kapitel 1 mit dem Titel „How to measure smoothness" das Werk eröffnet. (Dieser Artikel sollte eigentlich einem viel größeren Leserkreis zugänglich gemacht werden.) Man lernt aus Kapitel 1 u. a. wie bedeutend die Raumskalen $B^s_{p,q}$ (Besov-Räume) und $F^s_{p,q}$ (Lizorkin-Triebel-Räume) sind, um Fragen über die Glattheit von Funktionen zu beantworten. Das zweite Kapitel gibt sodann eine sorgfältige Einführung dieser Räume und kann benutzt werden, um sich in dieses Gebiet einzuarbeiten. Mehr technische, aber genauso wichtige Probleme werden dann im Kapitel 3 „Atoms, Oscillations and Distinguished Representations" behandelt. Mit diesem Rüstzeug ausgestattet können nun die zentralen Fragestellungen wie Klassifikation von Multiplikatoren, Verhalten unter Diffeomorphismen, Existenz von Spuren oder Fortsetzungseigenschaften behandelt werden. Die Überschrift „Key Theorems" des 4. Kapitels deutet den Stellenwert dieser Resultate an. Bisher waren alle Funktionenräume über $\mathbb{R}^n$ erklärt. Das 5. Kapitel behandelt nun den Fall eines Gebietes in $\mathbb{R}^n$, und das 7. Kapitel beschäftigt sich mit Funktionenräumen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen. Damit ist dieses letzte Kapitel besonders aktuell und stellt einige Resultate erstmals in Buchform vor.

Die Theorie der Funktionenräume lebt von ihren Anwendungen. Es gilt aber mehr. Viele Probleme der Analysis lassen sich nur in konkreten Funktionenräumen formulieren und lösen. Obwohl das vorliegende Buch die Theorie der Funktionenräume in den Vordergrund stellt, ist ein Kapitel, Kapitel 6, einigen Anwendungen gewidmet, nämlich dem Abbildungsverhalten gewisser Klassen von Pseudodifferentialoperatoren.

Das Buch ist überaus sorgfältig geschrieben und diskutiert sehr detailliert die Literatur. Das Literaturverzeichnis umfaßt 20 Seiten und ist sehr fair, d. h. es berücksichtigt die Beiträge aller „Schulen". Ingesamt liegt eine lesenswerte, für den Analytiker, der mit Funktionenräumen arbeitet (sei es in der Theorie oder in den Anwendungen), wertvolle Monographie vor.

Erlangen N. Jacob

Brudnyi, A. Yu., Krugljak, N. Ya., Interpolation Functors and Interpolation Spaces, Amsterdam u. a.: North Holland 1991, 718 S., Dfl 275.00

Gegenstand dieses ersten Bandes ist die sogenannte reelle Interpolation. Zwei weitere Bände sind von den Autoren geplant und sollen sich mit der komplexen Interpolation bzw. mit Anwendungen der Interpolationstheorie auf verschiedenen Gebieten beschäftigen. Im Unterschied zu früheren Abhandlungen zur Interpolationstheorie (vgl. etwa: H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Berlin, VEB Dt. Verl. Wissenschaften, 1978, Amsterdam, North-Holland, 1978 oder J. Bergh, J. Löfström, Interpolation Spaces, an Introduction. Berlin, Springer, 1976), die sich mit konkreten Interpolationsmethoden, insbesondere deren Anwendung auf Funktionenräume, befassen, wird hier ein wesentlich abstrakterer Zugang gewählt und verfolgt. Die Autoren knüpfen hierbei an Untersuchungen von N. Aronszajn und E. Gagliardo aus den Jahren 1959 bis 1965 an. Ausgangspunkt bilden die Begriffe des (abstrakten) Interpolationsraumes zweier Banachräume und des (abstrakten) Interpolationsfunktors bzw. der Interpolationsmethode. Ziel ist die Beschreibung der allgemeinen Struktur von Interpolationsräumen und deren Erzeugung. Während in den Jahren bis etwa 1975 beim Studium der reellen (J.-L. Lions, J. Peetre) und komplexen (A.P. Calderon) Methode ein gewisser Abschluß erreicht wurde, kann die Mitte der 70er Jahre als Beginn einer neuen Ära der Theorie bezeichnet werden. Hierzu haben insbesondere die Autoren des Buches, nach eigenen Angaben aufbauend auf Vorlesungen von S.G. Krein (1976), einen maßgeblichen Beitrag geleistet. Die Ergebnisse dieser Entwicklung hinsichtlich der reellen Interpolation werden in dem vorliegenden Band umfassend dargestellt. Dabei werden ein neues Niveau der Abstraktion erreicht und eine Vielzahl möglicher neuer Entwicklungsrichtungen aufgezeigt. In diesem Sinne kann man sich der Meinung von J. Peetre, einem der Begründer der modernen Interpolationstheorie, durchaus anschließen, der im Vorwort zur englichen Übersetzung schreibt: „In short, I am convinced that the Brudnyi und Krugljak treatise will be the beginning of yet another era in the theory of interpolation spaces and that it will set the mark for all serious work in this area of mathematics for the coming decade if not longer“.

Das Buch enthält vier Kapitel: I. Klassische Interpolationssätze, II. Interpolationsräume und Interpolationsfunktoren, III. Die reelle Interpolationsmethode, IV. Ausgewählte Fragen der Theorie der reellen Interpolationsmethode.

Am Ende eines jeden Kapitels findet man Kommentare und Bemerkungen u. a. zur Literatur, zur historischen Entwicklung und zu bisher noch nicht gelösten Problemen.

In Kapitel I werden sehr detailliert aus heutiger Sicht die klassischen Interpolationssätze von Riesz-Thorin und Marcinkiewicz sowie mögliche Verallgemeinerungen und Anwendungen (nicht-lineare Operatoren) dargestellt. Spätere abstrakte Begriffsbildungen werden motiviert und vorbereitet.

In Kapitel II findet der Leser eine Beschreibung des Konzeptes und der wesentlichen allgemeinen Begriffsbildungen (Interpolationsraum, Interpolationsfunktor, relative Vervollständigung, Regularisierung). Neben der Sprache, in der der Gegenstand behandelt wird, enthält dieser Teil Resultate zur abstrakten Theorie im Sinne von Aronszajn und Gagliardo. Insbesondere werden Extremaleigenschaften von Interpolationsfunktoren untersucht und eine Dualitätstheorie aufgebaut.

Anschließend wird auf der Basis des K- und des J-Funktionals im dritten Kapitel die reelle Interpolationsmethode behandelt, wobei die Autoren sich um möglichst große Allgemeinheit bemühen. Die Grundlage hierfür bildet die Lösung eines der herausragenden Probleme der Interpolationstheorie, der „K-Divisibility“ des K-Funktionals, durch die Autoren (1981). Die klassische reelle Interpolationsmethode $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ erscheint in der gegebenen Darstellung als ein Spezialfall. In einem Anhang wird durch Berechnung der entsprechenden K-Funktionale auf die Interpolation verschiedener Funktionenräume eingegangen.

Das vierte und letzte Kapitel enthält neuere, vorwiegend nach 1975 erzielte, Ergebnisse zu ausgewählten Aspekten der Interpolationstheorie. Insbesondere werden behandelt: die Interpolation nichtlinearer Operatoren (4.1), verschiedene Typen reeller Interpolationsfunktoren und deren Beziehungen zueinander (4.2), die Stabilität reeller Methoden (4.3), Aussagen zur Beschreibung aller Interpolationsräume eines gegebenen Paares (4.4), das inverse Problem der reellen Interpolation (4.5) und die Geometrie reeller Interpolationsräume (4.6). Die Grundlage der dargestellten Resultate bilden Arbeiten der Autoren sowie von B. Beauzamy, M. Cwikel, V.I. Dmitriev, S. Janson, P. Nilsson, V.I. Ovchinnikov, J. Peetre and Y. Sagher.

Auch wegen der systematischen Beschreibung dieser neueren Entwicklungen handelt es sich bei diesem Buch um einen wertvollen Beitrag zur Interpolationstheorie von Banachräumen als eigenständigem Teilgebiet der Funktionalanalysis.

Jena H.-J. Schmeißer

Grindrod, P., Patterns and Waves, The theory and applications of reaction-diffusion equations, Oxford: Clarendon Press 1991, 239 S., £ 17.00

Bei der mathematischen Modellierung von Prozessen der Diffusion, Reaktion und Konvektion in Biologie, Chemie und anderswo stößt man vor allem auf parabolische und elliptische Differentialgleichungen, je nachdem, ob man sich für einen zeitabhängigen Prozeß oder einen stationären (End-)Zustand interessiert. Auch gewöhnliche Differentialgleichungen und Integrodifferentialgleichungen treten auf. Infolge von Rückkopplungen und Interaktionen sind diese Gleichungen, außer in den einfachsten Fällen, nichtlinear, und es treten Fragestellungen auf, die aus rein mathematischer Sicht unkonventionell sind. So ist in den letzten Jahrzehnten eine äußerst fruchtbare Wechselwirkung zwischen Biologie und Chemie einerseits, „angewandter" und auch „reiner" Mathematik andererseits, entstanden. Die konkreten Probleme bieten wertvolle Anregungen für die mathematische Forschung, aber die Mathematik (sogar die „reine") hat in ihrem Arsenal gar manches, das sich nutzbringend zur Analyse konkreter Probleme verwenden läßt.

Dem Verfasser des zu besprechenden Werkes ist eine hervorragende und flüssig lesbare Einführung in Theorie und Anwendungen von Diffusions-Reaktions-Gleichungen gelungen. Ausgehend von semilinearen parabolischen Differentialgleichungen (und zugehörigen Anfangs-Randwertaufgaben) und Systemen solcher führt er im ersten Kapitel vor, wie verschiedenartige typische Verhaltensweisen des jeweils dargestellten Modellprozesses sich entwickeln können. Als Stichworte seien beispielhaft genannt: Gleichgewichte, Stabilität und Instabilität, blow-up (man verzeihe dem Rezensenten gelegentlichen Übergang ins Englische, leider fehlen im Deutschen manche Worte), wandernde Wellen, invariante Gebiete, Verzweigungen.

Im zweiten Kapitel behandelt er die Entstehung von Mustern („pattern formation"), behandelt u. a. die Turing-Instabilität, matched asymptotic expansions und oszillierende Muster. Das dritte Kapitel ist den ebenen Wellen gewidmet, es werden hier auch erregbare Systeme und Schockwellen diskutiert. Im vierten Kapitel werden wichtige Typen exotischer Wellenstrukturen vorgestellt: Spiralen und Rollen („scrolls"), auch toroidal scroll waves, bei denen, obwohl sie räumlich nur dreidimensional sind, das Anschauungsvermögen stark strapaziert wird. Das fünfte (und letzte) Kapitel diskutiert nichtlineare Dispersions-Mechanismen, u. a. Chemotaxis und Aggregation in der Populationsbiologie.

Der Verfasser will mit dem Buch zwei Gruppen ansprechen:

1) Mathematiker, die an Anwendungen interessiert sind (oder über solche informiert werden wollen),

2) Nichtmathematiker (vor allem Biologen und Chemiker), die erfahren wollen, was man mit Mathematik machen kann.

Dementsprechend hat er sich für einen lockeren Stil entschieden. Mancher Mathematiker mag sich daran stören, daß oft über mathematische Feinheiten hinweggegangen wird, manchen Chemiker oder Biologen wird die verwendete Mathematik gelegentlich zu hoch sein.

Aber: Dem Mathematiker sollte es nicht schwerfallen, solche Lücken auszufüllen. Der Nichtmathematiker kann sehen, wieviele verschiedenartige Phänomene seiner Wissenschaft wenigstens qualitativ mathematisch behandelbar sind, und kann sich so angeregt fühlen, Kontakt mit Mathematikern zu suchen. Lehrreich sind die vom Verfasser ausgewählten und ausführlich dargestellten Beispiele. Es ist bemerkenswert, wieviel qualitative Information über die beschriebenen Prozesse oft mit elementaren analytischen Methoden und auch mit elementaren Funktionen gewonnen werden kann. So ist das Buch auch gut verwendbar in Seminaren über Anwendungen der Mathematik. Hierfür sind besonders nützlich die vielen Hinweise auf Bücher und Originalarbeiten anderer Autoren, in denen manche Probleme eingehender untersucht oder mathematisch strenger dargestellt werden.

Schriftbild und Layout erfreuen des Lesers Auge. Urteil des Rezensenten: Empfehlungswert!

Berlin R. Gorenflo

Kosmol, P., Optimierung und Approximation, Berlin u. a.: Walter de Gruyter 1991, 394 S., broschiert DM 58,–

Dieses Buch behandelt Grundlagen der konvexen Optimierung in unendlichdimensionalen Vektorräumen, insbesondere notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen, Stabilitäts- und Dualitätssätze. Insofern werden naturgemäß überwiegend bekannte Sachverhalte vermittelt. In folgender Hinsicht beschreibt das Buch allerdings in der Darstellung bzw. im Inhalt neue Wege.

Der durchgehende Versuch, die funktionalanalytische Basis der Funktionenraumoptimierung mit zu entwickeln, ist für den Leser sehr hilfreich. Die meisten dieser Hilfsmittel besitzen auch sehr schöne geometrische Interpretationen, derer sich der Autor systematisch bedient. Grundlegende Prinzipien der konvexen Optimierung – wie z. B. Anwendung von Trennungssätzen bzw. Fortsetzungssätzen zum Beweis notwendiger Optimalitätskriterien, Lagrangesches Prinzip, Verwendung des Satzes über die gleichmäßige Beschränktheit für Stabilitätsbeweise, Dualität – werden dadurch sehr durchsichtig. Das Anliegen des Autors, möglichst viele Anwendungsbereiche der Funktionenraumoptimierung, wie z. B. in der L_2-Approximation, in der klassichen Variationsrechnung, in der Theorie der optimalen Steuerungen, in der Tschebyscheff-Approximation und in der Testtheorie, einheitlich zu erfassen und auch zahlreiche Modellprobleme vollständig analytisch zu lösen, ist sehr anzuerkennen. Die Stabilitätsuntersuchungen für konvexe Optimierungsaufgaben, soweit sie mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit durchgeführt werden können, und die Diskussion zweistufiger Optimierungsaufgaben gehen über die Darstellungen in der bisherigen Lehrbuchliteratur hinaus.

Das Buch beschäftigt sich erklärtermaßen nicht mit Algorithmen der konvexen Optimierung. Die an der Manipulation von Tableaus orientierte Beschreibung des Simplex-Verfahrens im 1. Kapitel paßt daher nicht recht zum Gesamtkonzept. Hier gibt es schönere Zugänge, die den geometrischen oder den algebraischen oder den dualitätstheoretischen Aspekt stärker in den Vordergrund stellen. Das Buch beschäftigt sich auch nicht mit der nichtkonvexen Optimierung. Varianten des Satzes über implizite Funktionen im Banachraum werden dementsprechend nicht behandelt. Die optimierungstheoretisch grundlegenden Folgerungen hieraus, wie Multiplikatorenregel, Maximumprinzipien und Stabilitätssätze für nichtkonvexe Probleme, können daher auch nicht dargestellt werden. Der Bemerkung im Vorwort, daß „die meisten auf natürliche Weise entstehenden Optimierungsprobleme zu konvexen Funktionen führen", möchte sich der Referent nicht anschließen.

Das vorliegende Buch kann wegen der durchgängigen Betonung des funktionalanalytischen Aspekts und der zahlreich aufgezeigten Querverbindungen zu mathematischen Anwendungsgebieten als Grundlage für eine Einführung in die Theorie der konvexen Optimierung empfohlen werden.

Bayreuth F. Lempio

Kruse, R., Schwecke, E., Heinsohn, J., Uncertainty and Vagueness in Knowledge Based Systems, Berlin u. a.: Springer Verlag 1991, 491 S., DM 98,-

Das in der Reihe „Artificial Intelligence" des Springer-Verlages erschienene Buch „Uncertainty and Vagueness in Knowledge Based Systems" macht zum ersten Male den Versuch, Unschärfe, Unbestimmtheit und Vagheit von Daten in wissensbasierte Systeme zu integrieren. Es ist das ausdrückliche Verdienst der Autoren, sich hier nicht nur auf Unbestimmtheiten rein statistischen Ursprungs zu beschränken, sondern auch solche zu behandeln, die durch eine intrinsische Unschärfe in nicht unabhängig wiederholbaren Experimenten hervorgerufen werden.

Die Einsicht in die Existenz von Unbestimmtheiten, die grundsätzlich nicht statistischer Natur sind, entstand in der Systemtheorie und geht auf L. A. Zadeh 1962 zurück ([8]). Damit war gleichzeitig die Frage verbunden, wie nicht statistische, unscharfe Größen mathematisch formuliert und manipuliert werden können. Da zu Beginn der 60iger Jahre keine mathematisch befriedigende Theorie bereit stand, antwortete L. A. Zadeh 1965 auf diese Situation mit seiner Theorie unscharfer Mengen (fuzzy set theory) ([9]).

Das vorliegende Buch macht nun den Versuch, Wahrscheinlichkeitstheorie bzw. Statistik mit der Theorie unscharfer Mengen zu verknüpfen und die hierbei gewonnenen wechselseitigen Verbindungen in wissensbasierte Systeme einzuführen. Dabei wird der Anspruch erhoben, in rigoroser Weise den mathematischen Hintergrund dieser Zusammenhänge offen zu legen (vgl. S. 6). Diese Absicht führt dazu, daß neben der ausführlichen Darstellung der wichtigsten Modelle und Expertensysteme (stellvertretend sei hier auf MYCIN, MUNIN und HUGIN verwiesen) auch der Behandlung mathematischer Grundlagen ein breiter Raum eingeräumt wird. Ob die hierbei ins Auge gefaßte, mathematische Rigorosität auch eingelöst wird, soll nun im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen stehen.

Die elementare Wahrscheinlichkeitstheorie für diskrete (sogar endliche) Stichprobenräume wird in üblicher Weise entwickelt. Anschließend wird die etwas komplexere Struktur von Zufallsmengen behandelt. Dabei zeigt sich, daß die Beschränkung auf endliche Grundmengen X den Unterschied zwischen Baireschen und Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaßen verwischt und nicht zu einem befriedigenden Verständnis von Zufallsmengen beiträgt. In der Tat, wenn Potenzmengen $P(X)$ von X mit $\{0, 1\}^X$ identifiziert werden, dann sind (diskrete) Zufallsmengen von X (oder „space laws" in der Terminologie von G. Matheron [5]) gerade reguläre, Borelsche Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem total unzusammenhängenden, kompakten, topologischen Raum $\{0, 1\}^X$. Ein tiefer liegendes Resultat in diesem Zusammenhang ist die Tatsache, daß (diskrete) Zufallsmengen und monotone, alternierende Choquet-Kapazitäten von unendlicher Ordnung dieselben Dinge sind – eine

Erkenntnis, auf deren fundamentale Bedeutung kein Hinweis zu finden ist, wenn man von dem bloßen Zitat der Choquetschen Arbeit auf Seite 82 absieht. Die vollständige Formulierung dieses Resultates lautet: „Es sei $J(X)$ das System aller endlichen Teilmengen von X und $\Gamma: J(X) \to [0,1]$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften: (i) $\Gamma(\emptyset)=1$, (ii) Für $H, K \in J(X)$ mit $H \subseteq K$ und $m = \mathrm{Card}(K \cap \complement H)$ gilt

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \left(\sum_{\substack{H \subseteq L \subseteq K \\ \mathrm{Card}(L \cap \complement H) = i}} \Gamma(L) \right) \geqslant 0.$$

Dann existiert genau eine (diskrete) Zufallsmenge μ auf X mit $\mu(\{A \in P(X) \mid H \subseteq A\}) = \Gamma(H)$, $H \in J(X)$". Daraus erhält man als unmittelbare Folgerung, daß das auf G. Shafer zurückgehende Konzept von „belief functions" $v: P(X) \to [0,1]$ nichts anderes ist als das von Zufallsfiltern auf X, wobei $\Gamma: J(P(X)) \to [0,1]$ in folgender Weise festgelegt ist: $\Gamma(L) = v(\cap\{A \mid A \in L\})$. Damit sind „belief functions" nichts anderes als Einschränkungen von Wahrscheinlichkeitsmaßen – eine Einsicht, zu der sich nicht nur die Autoren dieses Buches, sondern auch G. Shafer selbst in seiner viel beachteten Monographie „A Mathematical Theory of Evidence" [7] nicht durchringen kann.

Die Darstellung der Theorie unscharfer Mengen wird auf mehrere Paragraphen verteilt und tritt dem Leser in Form der Begriffe „L-set", „flou set" und „membership function" einer unscharfen Menge entgegen. Gerade wegen der Novität dieses Konzeptes nicht statistischer Größen, wäre es für den Leser hilfreich gewesen, wenn schon am Anfang von Paragraph 3 und nicht erst in Paragraph 10 der Versuch unternommen worden wäre, das Beziehungsgeflecht dieser Begriffe zu analysieren. Um es kurz zu machen, heißen im Falle vollständiger Verbände L verbandswertige Abbildungen $f: X \to L$ auch L-unscharfe Teilmengen von X. Dabei wird f als verallgemeinerte, charakteristische Funktion und $f(x)$ als Zugehörigkeitsgrad von $x (\in X)$ aufgefaßt. Die Interpretation von 1-stelligen Prädikaten durch verbandswertige Funktionen ist nicht neu und geht im Falle von vollständigen, Brouwerschen Verbänden auf A. Mostowski 1948 zurück ([6]). Im Falle vollständiger Verbände folgt unmittelbar aus dem Adjoint-Functor-Theorem (vgl. [4]), daß L-flou sets $\mathscr{F}: L \to P(X)$ und L-unscharfe Teilmengen $f: X (\hookrightarrow P(X)) \to L$ äquivalente Konzepte sind. Insbesondere sind damit „[0, 1]-flou sets", „[0, 1]-sets" und „membership function" dieselben Dinge. Darüber hinaus erhält man im Falle des reellen Einheitsintervalles, daß [0, 1]-flou sets $\mathscr{F}: [0,1] \to P(X)$ Bairesch meßbare Abbildungen sind und damit die Möglichkeit eröffnen, das Bildmaß $\mathscr{F}(\lambda)$ des Lebesgueschen Maßes λ unter $\mathscr{F}$ auf $P(X)$ zu betrachten. In diesem Sinne kann jede [0, 1]-unscharfe Teilmenge mit einer (diskreten) Zufallsmenge auf X identifiziert werden – ein Aspekt, der uns zu der probabilistischen Behandlung von Unbestimmtheiten zurückführt.

Auf diesem Hintergrund entsteht nun doch der Verdacht, daß im Falle von endlichen Ketten „vage Data", die in Form von L-sets festgelegt sind (vgl. S. 30), rein probabilistischer Natur sind. Insbesondere gehen weder Possibilitätstheorie noch Shafers Konzept von „belief functions" über die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie hinaus, sondern besitzen, wie schon oben ausgeführt wurde, klare maßtheoretische Fundamente. Um der mathematischen Rigorosität willen, wäre es wünschenswert gewesen, wenn diese Zusammenhänge gründlich entwickelt worden wären, gerade weil die Autoren auch sonst einen großen Wert auf maßtheoretische Grundlagen legen.

Auf der anderen Seite bietet die Theorie von elementaren Topoi ([2]), die 1969 von F. W. Lawvere und M. Tierney begonnen wurde, einen mathematischen Kontext, in dem in der Tat unscharfe Mengen als nicht statistische Größen aufgefaßt werden können – zum Beispiel ist Higgs' Topos ([3], vgl. auch [1]) ein Modell, in dem verbandswertige Abbildungen mit charakteristischen Morphismen identifiziert werden können, die dann in üblicher Weise mittels eines Pullback-Diagramms Subobjekte klassifizieren. Leider fehlt darauf jeder Hinweis in diesem Buch.

Damit wird klar, daß eine ausführliche Darstellung mathematischer Kontexte, in denen verbandswertige Abbildungen auftreten, und die sowohl wahrscheinlichkeitstheoretischer als auch topos-theoretischer Natur sein können, einen erheblichen Beitrag zur Transparenz semantischer Inhalte hätte leisten können. Dort, wo der Kontext klar ist – z. B. in Paragraph 12 – ist das Buch durchaus fesselnd und regt den interessierten Leser dazu an, auch Arbeiten aus der Literatur, wie z. B. die von D. J. Spiegelhalter und anderen, heranzuziehen.

Literatur

[1] Fourman, M.; Scott, D.: Sheaves and logic (Applications of Sheaves, Lecture Notes in Mathematics No. 753), Berlin, New York: Springer-Verlag 1979, 302–401
[2] Goldblatt, R.: Topoi: The Categorial Analysis of Logic, Amsterdam, North-Holland, New York: 1979
[3] Higgs, D.: A category approach to Boolean-valued set theory (Unveröffentlichtes Manuskript, Waterloo, Kanada 1973)
[4] Johnstone, P. T.: Stone Spaces, Cambridge, New York: Cambridge University Press 1982
[5] Matheron, G.: Random Sets and Integral Geometry, New York: Wiley 1975
[6] Mostowski, A.: Proofs of Non-Deducibility in Intuitionistic Functional Calculus, J. Symbolic Logic **13** (1948) 204–207
[7] Shafer, G.: A Mathematical Theory of Evidence, Princeton: Princeton University Press 1976
[8] Zadeh, L. A.: From Circuit Theory to System Theory, Proc. Inst. Radio Engineers **50** (1962) 856–865
[9] Zadeh, L. A.: Fuzzy Sets, Information and Control **8** (1965) 338–353

Wuppertal U. Höhle

Neukirch, J., Algebraische Zahlentheorie, Berlin u. a.: Springer 1992, 596 S., DM 98,–

Ein gutes, ein schönes Buch. Verfaßt ist es mit bewußtem Blick auf „die revolutionäre Entwicklung, die die Zahlentheorie in den letzten Jahrzehnten mit der ‚arithmetischen algebraischen Geometrie' genommen hat". Dabei beginnt es einigermaßen traditionell, nämlich mit dem Dedekindschen Standpunkt. Mittels der Minkowskischen Betrachtungsweise („Geometrie der Zahlen") werden dann die klassischen Grundlagen der Theorie der algebraischen Zahlkörper gelegt (Endichkeit der Klassenzahl und Dirichletscher Einheitensatz). Die Minkowski-Theorie wird dabei allerdings schon in eine Form gekleidet, die der weiteren Intention des Verfassers entgegenkommt. Dieser Intention entspricht es auch, wenn das erste Kapitel, das dem Leser bereits eine gute Übersicht über die klassischen Grundlagen der algebraischen Zahlentheorie verschafft, auch eine Theorie beliebiger Ordnungen eines algebraischen Zahlkörpers in den Blick nimmt. Das Kapitel schließt mit instruktiven Andeutungen auf die Theorie der globalen Funktionenkörper (die im Buch sonst aber von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben). Obwohl man es in diesem ersten Kapitel mit sehr klassischem Material zu tun hat, so findet man dieses durch den Verfasser doch meisterhaft gestaltet. Das zweite Kapitel bringt nun auch die Grundzüge der lokalen Theorie der algebraischen Zahlkörper. Auf knappem Raum gelingt dem Verfasser die Vermittlung eines reichhaltigen Stoffes. Auf äußerliche Systematik wird dabei weniger Wert gelegt als auf erläuternde Erklärung. Am Schluß des zweiten Kapitels findet sich auch eine kurze Behandlung der höheren Verzweigungsgruppen.

Das dritte Kapitel trägt den Titel „Riemann-Roch-Theorie". Zunächst wird hier der Begriff einer Primstelle nachgeholt und die Produktformel ausgesprochen. Im zweiten

Paragraphen findet sich die Behandlung von Differente und Diskriminante, und es werden die Endlichkeitssätze von Hermite-Minkowski-Hensel hergeleitet. Erst am Schluß kommt der Satz von Minkowski ($|d_K| > 1$ für $K \neq \mathbb{Q}$). Zu dem ersten Abschluß der Theorie, den der Verfasser bei Verwendung seines Buches als Vorlage einer Kursvorlesung ins Auge faßt (wobei an eine zweisemestrige Vorlesung gedacht ist), sollte nach seinem Plan aber auch noch der dritte Paragraph des Kapitels gehören, wo vom Satz von Riemann-Roch die Rede ist. „Eine geometrisch sich gebärdende Zahlentheorie", so schreibt er selbst, „muß darauf gerichtet sein, auch diesen Satz in adäquater Form einzubeziehen". Modernen Entwicklungen „mit vorwärts gerichtetem Blick" Rechnung tragend, bietet der Verfasser in den weiteren vier Paragraphen des Kapitels dem Leser eine weitere Vertiefung der Theorie an („Grothendieck-Riemann-Roch").

Den zweiten Teil des Buches (Kap. IV–VI) nimmt nun eine Darstellung der Klassenkörpertheorie ein, und zwar nach dem Muster, das der Verfasser bereits mit seinem 1986 erschienenen Buch Class-Field-Theory vorgelegt hatte. Dieser bedeutsame Zugang zur Klassenkörpertheorie hat inzwischen schon weite Beachtung, Verbreitung und Auswirkung gefunden, so daß der Versuch einer nochmaligen kritischen Würdigung hier unterlassen werden kann. Völlig nahtlos indessen scheint sich mir die frühere Darstellung der Klassenkörpertheorie in ihrer gedrängt-konzentrierten Form in das Buch nicht einzufügen.

Der dritte und letzte Teil des Buches ist der Dedekindschen Zetafunktion (und den Heckeschen L-Reihen) gewidmet, wobei deren Wechselwirkung mit der Klassenkörpertheorie den krönenden Abschluß des Buches bildet. Obwohl der Tatesche Zugang zu den Zetafunktionen dem Anliegen des Buches am ehesten entsprochen hätte, stützt sich der Verfasser statt dessen (und mit Bedacht) auf die Heckesche Vorgehensweise. Diese hat nämlich durchaus ihre Vorteile, und man schuldet dem Verfasser großen Dank für die nicht zu unterschätzende Mühe, den Heckeschen Beweisführungen durch konzeptionelle Durchdringung eine zeitgemäße Faßbarkeit gegeben zu haben.

Damit wären wir am Ende. Was lokale Kritik betrifft, so sei nur ein Punkt genannt: Das Korollar 13.7 in Kapitel VII ist nur die Wiederholung von 3.8 in Kapitel VI; der Satz von Cebotarev hätte ein besseres Korollar verdient, nämlich, daß L/K schon dann trivial ist, wenn fast alle Primideale von K in L einen Primteiler vom Grade 1 über K besitzen. – Was globale Kritik angeht, so habe ich nichts weiter hinzuzufügen. Das Buch wird ohnedies seinen Weg machen, ja es hat ihn sichtlich schon angetreten. Und ich erinnere an die klugen Worte: „Eigentlich lernen wir nur von Büchern, die wir nicht beurteilen können. Der Autor eines Buches, das wir beurteilen könnten, müßte von uns lernen." Nur eines noch: Selten genug ist dem Leser eines Buches der Enthusiasmus des Autors für seinen Gegenstand so fühlbar wie bei diesem. Ein gutes, ein schönes Buch.

Münster F. Lorenz

Classics in Mathematics

Springer-Verlag began publishing books in higher mathematics in 1920 when the series *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, initially conceived as a series of advanced textbooks, was founded by Richard Courant. A few years later, a new series *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, survey reports of recent mathematical research, was added.

Of over 400 books published in these series, many have become recognized classics and remain standard references for their subject. Springer is reissueing a selected few of these highly successful books in a new, inexpensive softcover edition to make them easily accessible to younger generations of students and researchers.

A. Dold

Lectures on Algebraic Topology

1995. XIV, 378 pp. 10 figs. Softcover **DM 59,-**; öS 460,20; sFr 59,- ISBN 3-540-58660-1

D. Mumford

Algebraic Geometry I

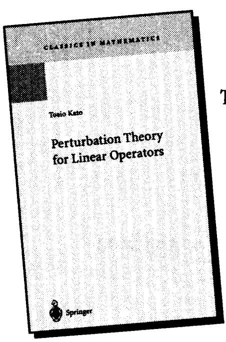
Complex Projective Varieties

1995. XII, 188 pp. Softcover **DM 59,-**; öS 460,20; sFr 59,- ISBN 3-540-58657-1

F. Hirzebruch

Topological Methods in Algebraic Geometry

1995. XIV, 234 pp. Softcover **DM 59,-**; öS 460,20; sFr 59,- ISBN 3-540-58663-6



T. Kato

Perturbation Theory for Linear Operators

1995. XXIV, 624 pp. Softcover **DM 59,-**; öS 460,20; sFr 59,- ISBN 3-540-58661-X

O. Zariski

Algebraic Surfaces

1995. XIV, 274 pp. Softcover **DM 59,-**; öS 460,20; sFr 59,- ISBN 3-540-58658-X

S. Kobayashi

Transformation Groups in Differential Geometry

1995. X, 182 pp. Softcover **DM 59,-**; öS 460,20; sFr 59,- ISBN 3-540-58659-8

S. MacLane

Homology

1995. XII, 424 pp. 7 figs. Softcover **DM 59,-**; öS 460,20; sFr 59,- ISBN 3-540-58662-8

A. Weil

Basic Number Theory

1995. XX, 316 pp. Softcover **DM 59,-**; öS 460,20; sFr 59,- ISBN 3-540-58655-5

K. Yosida

Functional Analysis

1995. XIV, 506 pp. Softcover **DM 59,-**; öS 460,20; sFr 59,- ISBN 3-540-58654-7

C.-L. Siegel, J.K. Moser

Lectures on Celestial Mechanics

1995. XIV, 290 pp. Softcover **DM 59,-**; öS 460,20; sFr 59,- ISBN 3-540-58656-3

Prices are subject to change without notice. In EC countries the local VAT is effective. Customers in EC countries, please state your VAT Identification Number if applicable. For information on prices in Austrian schillings and Swiss francs please consult the German book directory "VLB – Verzeichnis lieferbarer Bücher" or our general catalogue.

Springer

Tm.2431/MNT/E/1

Springer-Verlag □ Heidelberger Platz 3, D-14197 Berlin