E 20577 F
97. Band Heft 2
ausgegeben am 4. 7. 1995

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1995

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 97, Heft 2

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Aigner, J. J. Seidel: Knoten, Spin Modelle und Graphen
A. Böttcher: Toeplitz operators with piecewise continuous symbols – a neverending story?
L. Bröcker: Semialgebraische Geometrie
W. Dahmen: Multiskalen Methoden und Wavelets – Konzepte und Anwendungen
M. Denker, S. Heinemann: Dynamik analytischer Endomorphismen auf der Sphäre
H. Neunzert: Vom Nutzen der Mathematik
G. Schumacher: Über die Entwicklung der Komplexen Analysis in Deutschland vom Ausgang des 19. Jahrhunderts bis zum Anfang der siebziger Jahre

---

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
97 (1995) 43–74
AMS subject classification: 11 G 35, 11 R 58, 14 G 25

On Rumely's Local-Global Principle

B. Green, F. Pop, P. Roquette, Heidelberg

Contents

1 Introduction: Statement of Results

1.1 Algebraic Diophantine Equations

One of the remarkable discoveries in Number Theory in the past decade is *Rumely's Local-Global Principle for algebraic diophantine equations.* The aim of the present paper is to provide a direct and short access to this important theorem, at the same time generalizing it in two ways: first by admitting *archimedean primes,* and secondly including *rationality conditions* at a finite set of primes.[1])

Let K be an algebraic number field of finite degree. Consider finitely many polynomial equations

$$(1) \qquad f_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant r)$$

with coefficients in K. We are looking for a solution $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ whose coordinates a_i are *algebraic integers*, not necessarily contained in K. We speak of *"algebraic diophantine equations"*. A necessary condition for solvability is the *local solvability:* For each prime divisor $\mathfrak{p}$ of K there should be a solution of (1) whose coordinates are *$\mathfrak{p}$-adic algebraic integers* over the completion $K_\mathfrak{p}$.

The Local-Global Principles states this condition is also sufficient, *provided* the ideal generated by the polynomials f_j in the polynomial ring $\tilde{K}[X_1, \ldots, X_n]$ over

---

[1]) This subject was presented at the Oberwolfach Model Theory meeting, 20. 1.–27. 1. 1990, as part of an organized programme devoted to the elementary theory of the ring of algebraic integers. At that meeting interest was expressed in a published account of the lectures. The present paper is a worked out version of the material we presented there and also contains some unpublished results on the field of totally $\mathfrak{S}$-adic numbers from the manuscript [P].

the algebraic closure $\tilde{K}$, the field of all algebraic numbers, is prime. Equivalently this condition asserts that the affine variety defined by the equations (1) is geometrically integral. We would like to mention that this condition is of *elementary nature,* i.e., it can be expressed as a formula in the elementary language of fields, with the coefficients of the polynomials f_j as parameters.

The Local-Global Principle for Algebraic Diophantine Equations. *Suppose that the affine variety defined by the equations* (1) *is geometrically integral. Then the above necessary condition is also sufficient in the following sense: If for each prime divisor* $\mathfrak{p}$ *of* K *there exists a solution* $\boldsymbol{a}_\mathfrak{p}$ *in* $\mathfrak{p}$*-adic algebraic integers over* $K_\mathfrak{p}$ *then there exists a solution* $\boldsymbol{a}$ *in algebraic integers.*

This result derives its importance from the fact that the *solvability of diophantine algebraic equations over each* $K_\mathfrak{p}$ *is decidable.* This follows from the work of Abraham Robinson [Rob] who has proved that the theory of an algebraically closed valued field is decidable. Applying this to the algebraic closure $\tilde{K}_\mathfrak{p}$ of $K_\mathfrak{p}$ and its canonical valuation, we see that there exists an effective algorithm which enables one to decide whether (1) has solutions in algebraic integers over $K_\mathfrak{p}$. This holds for each prime divisor $\mathfrak{p}$. In fact it is only necessary to check this for finitely many primes $\mathfrak{p}$; these finitely many "critical" primes are effectively computable from the coefficients of the equations (1). The testing of these finitely many critical primes then leads to an *effective algorithm* to decide whether (1) has solutions in algebraic integers – provided the variety defined by (1) is geometrically integral. The solvability of general algebraic diophantine equations, whose variety is not necessarily geometrically integral, can be effectively reduced to the geometrically integral case (over a suitable finite extension of K). This yields:

The solvability of arbitrary algebraic diophantine equations is decidable. So the 10^{th} *problem of Hilbert over the ring* $\tilde{\mathbb{Z}}$ *of algebraic integers has a positive answer.*

This is in contrast to the situation over $\mathbb{Z}$ where it is known that the 10^{th} problem has a negative answer.

A detailed exposition of the above line of arguments, together with historical remarks and precise references, can be found in Rumely's paper [Ru1]. We have mentioned this here only in order to emphasize the importance of the Local-Global Principle within the framework of diophantine geometry. We would also like to draw the reader's attention to the papers by van den Dries [vdD] and by Prestel-Schmidt [Pr-S]. There, the Local-Global Principle is the main ingredient in generalizing the above decidability theorem of Rumely. Namely, it is shown that the whole theory of $\tilde{\mathbb{Z}}$, in the language of rings, is decidable. This is a genuine and non-trivial extension of Rumely's result; there are many statements in the language of rings which cannot be reduced to solving diophantine equations.

We shall now give a reformulation of the Local-Global Principle in terms of "Skolem Problems", at the same time generalizing it in two ways by admitting *archimedean primes*, and including *rationality conditions* at finitely many primes. In this connection we also wish to draw the reader's attention to the papers by Moret-Bailly, [M-B], where Skolem Problems are treated from a more geometric point of view. There, a proof of the Local-Global Principle admitting archimedean primes and including rationality conditions is also given.

1.2 The General Setting

Let K be a global field. A "prime" of K is understood to be an equivalence class of non-trivial absolute values, archimedean or non-archimedean.

Let $\mathfrak{B}$ be a given set of primes $\mathfrak{p}$ of K, with the sole condition that $\mathfrak{B}$ *does not contain all primes of* K. This hypothesis guarantees the validity of the *Strong Approximation Theorem* with respect to $\mathfrak{B}$, i.e., every approximation problem of the form

$$|z - a_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} \leqslant \varepsilon_\mathfrak{p} \qquad (\mathfrak{p} \in \mathfrak{B})$$

can be solved by an element $z \in K$. Here the $a_\mathfrak{p}$ are arbitrarily given elements in the respective completion $K_\mathfrak{p}$, with the only provision that $|a_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} \leqslant 1$ for almost all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$ and the approximation bounds $\varepsilon_\mathfrak{p}$ are positive real numbers with $\varepsilon_\mathfrak{p} = 1$ for almost all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$.

As a matter of notation, we use $|\cdot|_\mathfrak{p}$ to denote a multiplicative absolute value belonging to the prime $\mathfrak{p}$. Sometimes we shall also use the additive notation $v_\mathfrak{p}(\cdot) = -\log|\cdot|_\mathfrak{p}$. If $\mathfrak{p}$ is non-archimedean then it is customary to normalize $v_\mathfrak{p}$ such that the value group $v_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p}^\times) = \mathbb{Z}$. In most of what we shall say, however, it does not matter how $|\cdot|_\mathfrak{p}$ or $v_\mathfrak{p}$ are normalized among the equivalent valuations.

For a prime $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$ we denote by $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ the "unit ball" in $K_\mathfrak{p}$, consisting of those $z \in K_\mathfrak{p}$ which satisfy $|z|_\mathfrak{p} \leqslant 1$. Thus if $\mathfrak{p}$ is non-archimedean then $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ is the canonical valuation ring of $K_\mathfrak{p}$. The algebraic closure of $K_\mathfrak{p}$ will be denoted by $\tilde{K}_\mathfrak{p}$, and $\tilde{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ is the unit ball in $\tilde{K}_\mathfrak{p}$. In the non-archimedean case $\tilde{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ is the integral closure of $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ in $\tilde{K}_\mathfrak{p}$.

Globally in K, we denote by $\mathcal{O}_\mathfrak{B}$ the set of those elements $a \in K$ which are contained in $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ for all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$.[2] Denoting the set of non-archimedean primes in $\mathfrak{B}$ by $\mathfrak{B}_0$, it follows that the ring of integers $\mathcal{O}_{\mathfrak{B}_0}$ at $\mathfrak{B}_0$ is a *Dedekind ring*, with K as its field of quotients. If L is an algebraic extension of K then let $\mathfrak{W}$ denote the set of all extensions of primes $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$ to L. We define $\mathcal{O}_\mathfrak{W} \subset L$ with respect to $\mathfrak{W}$ in exactly the same way as we have defined $\mathcal{O}_\mathfrak{B} \subset K$ with respect to $\mathfrak{B}$. If $\mathfrak{B}$ consists of non-archimedean primes only then $\mathcal{O}_\mathfrak{W}$ is the integral closure of $\mathcal{O}_\mathfrak{B}$ in L.

To simplify the language we shall generally speak of $\mathcal{O}_\mathfrak{W}$ as the integral closure of $\mathcal{O}_\mathfrak{B}$ in L, even in the presence of archimedean primes.

The algebraic closure of K is denoted by $\tilde{K}$. The integral closure of $\mathcal{O}_\mathfrak{B}$ in $\tilde{K}$ is denoted by $\tilde{\mathcal{O}}_\mathfrak{B}$.

1.3 Skolem Problems

Let V be a geometrically integral variety defined over K. For any overfield L of K we denote by $V(L)$ the set of L-rational points of V. Let $A \subset L$ be a subset of L and $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a finite family of rational functions on V defined over K. We say that a point $P \in V(L)$ is A-rational with respect to $\boldsymbol{x}$ if $x_k(P) \in A$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. (Here the condition that each $x_k(P)$ is defined is implicitly assumed). We denote the set of all

---

[2]) Thus in our notation, if $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{p}\}$ consists of one prime only, then $\mathcal{O}_{\{\mathfrak{p}\}}$ does *not* coincide with $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ in general. $\mathcal{O}_{\{\mathfrak{p}\}}$ is the unit ball (valuation ring) of $\mathfrak{p}$ in the field K, whereas $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ is the completion of $\mathcal{O}_{\{\mathfrak{p}\}}$ in $K_\mathfrak{p}$. This is, we admit, not a very good notation but for our present purpose we believe it cannot lead to confusion. We shall have no occasion to explicitly study the situation $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{p}\}$.

such A-rational points by $V_x(A,L)$. If L is generated by A (as will be the case in our setting below) then we shall simplify the notation and write $V_x(A)$.

The problem of whether $V_x(A) \neq \emptyset$ is called the *Skolem problem* for V over A, with data x. Any point $P \in V_x(A)$ is called a *solution* of that Skolem problem.

Our aim is to investigate Skolem problems over $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{V}} \subset \tilde{K}$.

The relationship between this geometric context of Skolem problems and the solvability of algebraic diophantine equations is transparent: If V is a geometrically integral affine variety defined over an algebraic number field K by equations as in (1), and $x = (x_1, \ldots, x_n)$ is a generic point of V over K, i.e., x can be regarded as a generating system of the function field $K(V) = K(x)$, then the set of all solutions of (1) in $\tilde{\mathbb{Z}}$ coincides with $V_x(\tilde{\mathbb{Z}})$. Thus the problem of solvability of algebraic diophantine equations can be regarded as a Skolem problem.

In the following we prefer to talk about Skolem problems rather than about solvability of algebraic diophantine equations. The above discussion shows that both viewpoints are essentially equivalent.

By what we have said the following theorem is a generalization of the Local-Global Principle for algebraic diophantine equations.

The Local-Global Principle for Skolem Problems. *Let K be a global field, equipped with a set $\mathfrak{V}$ of primes not containing all primes of K. Let V be a geometrically integral variety defined over K, and $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a finite family of rational functions on V, defined over K.*

Suppose that locally, for each prime $\mathfrak{p} \in \mathfrak{V}$, the $\mathfrak{p}$-adic Skolem problem for V over $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$ with data x has a solution, i.e., that $V_x(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$. The globally, the problem for V over $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{V}}$ with data x has a solution, i.e., $V_x(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{V}}) \neq \emptyset$.

This theorem is not yet in the final form which we will prove in this paper. Namely, we can extend its statement by adding "rationality conditions" at finitely many primes. The situation is as follows.

1.4 Totally $\mathfrak{S}$-adic Field Extensions

Given $\mathfrak{p} \in \mathfrak{V}$, an element $a \in \tilde{K}$ is called *totally $\mathfrak{p}$-adic* over K, if for all K-embeddings $\iota : \tilde{K} \to \tilde{K}_{\mathfrak{p}}$, the image $\iota(a)$ lies in $K_{\mathfrak{p}}$. This is equivalent to saying that the prime $\mathfrak{p}$ splits completely in $K(a)$.

Let $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{V}$ be a finite subset of $\mathfrak{V}$. We say that $a \in \tilde{K}$ is *totally $\mathfrak{S}$-adic* over K if a is totally $\mathfrak{p}$-adic for all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$. The set of all totally $\mathfrak{S}$-adic elements is a Galois extension K' of K; it can be characterized as the maximal extension in which all primes $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$ split completely. If $\mathfrak{S}$ is empty then by definition K' is the separable closure, K^s, of K.

If we wish to indicate the defining set $\mathfrak{S}$ then we write $K^{\mathfrak{S}}$ instead of K'. However in most cases it will be clear from the context which set $\mathfrak{S}$ we are referring to; thus we prefer to write K' in order to simplify the notation.

The integral closure of $\mathcal{O}_{\mathfrak{V}}$ in K' will be denoted by $\mathcal{O}'$. If we wish to indicate the defining set $\mathfrak{V}$, we write $\mathcal{O}'_{\mathfrak{V}}$ instead of $\mathcal{O}'$.

We are now able to state the Main Theorem as proved in this paper.

Main Theorem: The Local-Global Principle for Skolem Problems with Rationality Conditions. *Let K be a global field, equipped with a set $\mathfrak{V}$ of primes not containing all primes of K. In addition, let a finite subset $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{V}$ be given. Let V be a geometrically integral variety defined over K, and $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ a finite family of rational functions on V, defined over K.*

Suppose that locally, $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ contains a non-singular point for each prime $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$, and that $V_{\boldsymbol{x}}(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}})$ is non-empty for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{V} \setminus \mathfrak{S}$. Then globally, $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}')$ is non-empty and moreover contains non-singular points of V.

Remarks. 1) For Skolem problems with rationality conditions the requirement that $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ contains points *which are non-singular* cannot be dropped. For the proof we need the fact that for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$, $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ is Zariski dense. In particular this means it contains non-singular points. On the other hand if $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ contains a non-singular point then the density follows by Hensel's Lemma. By Hensel's Lemma it follows that $P_{\mathfrak{p}}$ is not isolated in $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$; in fact, in any $\mathfrak{p}$-adically open neighborhood of $P_{\mathfrak{p}}$ there exist infinitely many non-singular points which are rational in $K_{\mathfrak{p}}$ (Appendix, 9.2). As we shall see this will be crucial in our proof. However no non-singularity condition appears at the places $\mathfrak{p} \in \mathfrak{V} \setminus \mathfrak{S}$. This can be explained by the fact that $V_{\boldsymbol{x}}(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}})$ is Zariski dense by the result of Robinson mentioned earlier.

2) The proof of the Main Theorem we give holds under slightly more general hypotheses which could be used to give an axiomatisation of fields endowed with families of places having the Local-Global Principle.

To prove the Local-Global Principle with rationality conditions we first consider the case where V is a normal projective curve over K. This is the part of the proof that requires the most work. After that, a *Bertini* type induction procedure with respect to the dimension of V and considerations of birational nature, lead to the general case. The proof we give for curves rests essentially on the following results:

1) *The Local Existence Theorem* for functions on curves whose zeros are situated near prescribed points on the curve. Using this result we show that if $\mathfrak{S}$ is a finite set of places of K, and for every $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$ the set $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ contains non-singular points, then for every positive divisor D of the function field of V over K there exist (many) functions $f \in K(V)$ whose pole divisor is a multiple of D and all zeros are distinct and lie in $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}'_{\mathfrak{S}})$.

2) *The Unit Approximation Lemma for Polynomials over K* from Cantor-Roquette [C–R]. For a given polynomial $p(x)$ this lemma guarantees the existence of an element $c \in K'$ which approximates given $a_{\mathfrak{p}} \in K$ arbitrarily closely for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$ and satisfies the condition that $p(c)$ is a unit at each $\mathfrak{p} \in \mathfrak{V} \setminus \mathfrak{S}$. Using this result together with certain facts from the reduction theory of curves we are able to replace f by another function whose zeros are not only integral points of V with data $\boldsymbol{x}$ semi-locally as in 1), but also globally over $\mathfrak{V}$.

Concerning the structure of the paper we have divided it into two parts. The first part consists of the main body of the paper where the proofs of 1) and the Main Theorem are given. In the course of these proofs certain results from the theory of algebraic varieties and constant reductions are used. For some of these results we were unable to find suitable adequate references in the literature, and so we have included these in a short appendix in the form we need and with notation that is consistent with the main part of the paper.

2 The Local Existence Theorem

The Existence Theorem refers to a local field $K_\mathfrak{p}$ for a fixed prime $\mathfrak{p}$. In order to simplify our notation we write K instead of $K_\mathfrak{p}$. *Hence in this section, K will denote a locally compact base field and $\mathfrak{p}$ its canonical prime.*

We consider a separably generated function field $F|K$ of one variable with K as its field of constants. The projective normal model, say V, of $F|K$ is a geometrically integral curve over K. There is a natural bijection of $V(K)$ with the set of K-rational places of $F|K$. We shall identify both sets, i.e., we shall not distinguish between K-rational places of $F|K$ and K-rational points on V. *We assume that $V(K)$ is not empty.* $V(K)$ carries naturally a topology, induced by the $\mathfrak{p}$-adic topology of the base field K (see the Appendix, section 6). We speak of the $\mathfrak{p}$-adic topology of $V(K)$.

In this situation we have the following

Theorem 2.1 (Local Existence Theorem.) *Given a $\mathfrak{p}$-adically open set $\mathcal{U} \subset V(K)$ which is non-empty, there exists a function $f \in F$ all of whose zeros are distinct*[3]*, K-rational and contained in $\mathcal{U}$. Moreover, f can be constructed such that its pole divisor is a multiple mD of any prescribed positive divisor D of $F|K$, with m arbitrarily large.*

Over the complex field, this is one of the classical theorems of analytic function theory, due to Jacobi. For the algebraic closure of a non-archimedean local-field this result was first stated and proved by Rumely. Here we shall show that the theorem indeed remains valid rationally over the field K itself; it is not necessary to extend the field of constants. The following proof includes the archimedean case in which $K = \mathbb{R}$ or $K = \mathbb{C}$.

If the function field has genus zero then the theorem is trivial: Choose arbitrary distinct points $Q_1, \ldots, Q_r \in \mathcal{U}$ $(r = m \deg D)$; then the divisor $\sum Q_i$ has the same degree as mD and hence there is a function $f \in F$ with zero divisor $\sum Q_i$ and pole divisor mD.

In the following proof we shall assume that $F|K$ is of genus $g > 0$.

If the characteristic of K is 0 then the curve V, being geometrically integral and normal over K, is known to be *smooth*. In characteristic $p > 0$ this is not always the case; the function field $F|K$ is not necessarily conservative. Thus we have to face the situation that V may have singularities. In any case, however, every K-rational point of V is non-singular. In particular the given subset $\mathcal{U} \subset V(K)$ consists of non-singular points only; this will be used in the proof of Theorem 2.1.

Since V is not necessarily smooth, we cannot work with the ordinary jacobian variety but we have to use the *generalized jacobian variety* $\mathcal{J}_V$ in the sense

[3]) As usual, this means that f has no multiple zeros.

of Rosenlicht, which is defined for curves V with singularities. $\mathscr{J}_V$ is a group variety defined over K whose dimension equals the genus g of $F|K$. Let us briefly state its relevant properties which we are going to use.[4])

(J1) For any extension field L of K, the group of L-rational points $\mathscr{J}_V(L)$ is naturally isomorphic to the "generalized divisor class group of degree 0 of V over L". In the present context, it will not be necessary to explain in detail the notion of generalized divisor classes with respect to a possibly singular curve. It will be sufficient to note that for $L=K$, as V is normal over K, *the generalized divisor class group is naturally isomorphic with the ordinary divisor class group $\mathscr{C}\ell(F|K)$ of the function field $F|K$.*[5]) Thus we have a natural isomorphism

(2) $\qquad \mathscr{J}_V(K) = \mathscr{C}\ell_0(F|K)$

where the index 0 means divisor classes of degree 0. We shall identify both groups whenever convenient and possible.

(J2) Consider the g-fold product $V^g = V\times\cdots\times V$ and the corresponding symmetric product $V^{(g)} = V^g/S_g$, where S_g is the symmetric group of degree g acting naturally on V^g. The variety $V^{(g)}$ parametrizes the positive divisors of degree g on V. Namely, if $A = P_1 + \cdots + P_g$ is such a divisor then its corresponding point in $V^{(g)}$ is the image of $(P_1, \ldots, P_g)$ under the projection $\pi: V^g \to V^{(g)}$. In this way, the positive divisors A of degree g of $F|K$ correspond to the K-rational points in $V^{(g)}(K)$. Whenever possible and convenient, we identify such a divisor A with its corresponding point on $V^{(g)}(K)$.

The generalized jacobian $\mathscr{J}_V$ is birationally equivalent to $V^{(g)}$ over K. More precisely, the situation is as follows. Let P_0 be a fixed K-rational point of V. There exists an affine Zariski-open X of $V^{(g)}$ and a smooth morphism $\varphi: X \to \mathscr{J}_V$ defined over K, which establishes a birational equivalence between $V^{(g)}$ and $\mathscr{J}_V$, and which has the following property:

If A is a positive divisor of degree g of $F|K$ which, when considered as a point of $V^{(g)}(K)$, is contained in $X(K)$ then φA is the divisor class of $A - gP_0$, considered as a point of $\mathscr{J}_V(K)$.

We may express this by the formula

$$\varphi A \sim A - gP_0 \quad \text{if} \quad A \in X(K),$$

where $\sim$ means divisor equivalence (modulo principal divisors).

By construction, X and φ depend on the choice of P_0. In the following we assume that P_0 is chosen once for all, if nothing is said to the contrary.

Any non-empty Zariski open subset of X enjoys the same properties as we have announced above for X itself. For technical reasons, it will be convenient to replace X by a suitable Zariski-open subset, as follows. The projection $\pi: V^g \to V^{(g)}$

---

[4]) As a general reference for generalized jacobian varieties we suggest chapter 9 of [B-L-R]. Alternatively, the reader may refer to the treatment in Serre's book [S] but he should be aware that rationality questions, over a fixed field K, are not treated there in the generality which we need here.

[5]) Using the now standard terminology from algebraic geometry the divisors of the function field $F|K$ correspond to the Weil divisors of V.

is of finite degree and separable. Hence there exists a Zariski-open $Y \subset V^{(g)}$ such that π is smooth over Y, which is to say that if $Y' \subset V^g$ denotes the foreimage of Y then π induces a smooth map $Y' \to Y$. Now we replace X by $X \cap Y$ and, hence, we may assume that the projection is smooth over X.

Let X' denote the foreimage of X under π and $\varphi' : X' \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{\varphi} \mathscr{J}_V$ the composite map. By construction, $\varphi' : X' \to \mathscr{J}_V$ is smooth.

(J3) The $\mathfrak{p}$-adic topology of K induces, for every variety over K, a topology in the space of K-rational points of that variety (called the $\mathfrak{p}$-adic topology). In particular $\mathscr{J}_V(K)$ is a topological group, and $\varphi : X(K) \to \mathscr{J}_V(K)$ is a topological homeomorphism of $X(K)$ onto its image, which is a dense subspace of $\mathscr{J}_V(K)$. The map $\varphi' : X'(K) \to \mathscr{J}_V(K)$, being smooth as a geometric map, is a *local homeomorphism.* (This is a consequence of Hensel's Lemma; see the Appendix 9.2.)

In the proof of the Local Existence Theorem we shall need the following

Lemma 2.2 *Let $z \in \mathscr{J}_V(K)$. There exists a sequence of multiples $n_1 z$, $n_2 z$, $n_3 z, \ldots$ of z which converges to 0 in the $\mathfrak{p}$-adic topology of $\mathscr{J}_V(K)$. In other words: Given any neighborhood $\mathscr{W}$ of 0 in $\mathscr{J}_V(K)$ there exist infinitely many $n \in \mathbb{N}$ such that $nz \in \mathscr{W}$.*

If V is smooth then $\mathscr{J}_V$ is the ordinary jacobian variety, hence an abelian variety; this implies that $\mathscr{J}_V(K)$ is *compact* in the $\mathfrak{p}$-adic topology as K is locally compact. In this case the lemma is evident: Because of compactness, the sequence of points z, $2z$, $3z, \ldots$ has an accumulation point in $\mathscr{J}_V(K)$, say a. Consider a subsequence $m_1 z$, $m_2 z$, $m_3 z, \ldots$ which converges to a. Putting $n_k = m_{2k} - m_k$ we conclude that $n_k z$ converges to 0.

If V is not smooth (hence K of positive characteristic) then the above argument has to be modified. To this end we need the following additional properties of the generalized jacobian, concerning base field extensions.

(J4) Let $L|K$ be a finite field extension. We denote by $V_L = V \times_K L$ the corresponding base change. V_L is not necessarily normal over L. Let W be its normalization. The normalization morphism $W \to V_L$ gives rise to a morphism of algebraic groups $\mathscr{J}_{V_L} \to \mathscr{J}_W$ which is defined over L. Hence we have a canonical homomorphism

$$(4) \qquad \mathscr{J}_V(L) = \mathscr{J}_{V_L}(L) \to \mathscr{J}_W(L).$$

Combined with the ordinary inclusion $\mathscr{J}_V(K) \hookrightarrow \mathscr{J}_V(L)$ we get a homomorphism

$$(5) \qquad \psi_L : \mathscr{J}_V(K) \to \mathscr{J}_W(L).$$

By means of (2) this may be interpreted as a homomorphism of the respective divisor class groups of degree 0:

$$(6) \qquad \psi_L : \mathscr{C}\ell_0(F|K) \to \mathscr{C}\ell_0(FL|L).$$

We have: *This homomorphism coincides with the ordinary divisor class map belonging to $FL|L$ as a constant field extension of $F|K$.* In other words: The homomorphism (6) is obtained by regarding each divisor D of $F|K$ as a divisor of $FL|L$ and then factoring by principal divisors.

As a consequence we can state: *The kernel of ψ_L is annihilated by a power p^e of the characteristic exponent p of K.*

This is trivially so if $L|K$ is separable since then $V_L = W$ is normal over L and ψ_L coincides with the inclusion $\mathscr{J}_V(K) \hookrightarrow \mathscr{J}_V(L)$, hence its kernel vanishes. Thus we may assume that $L|K$ is purely inseparable, of degree $[L:K]=p^e$ where $p>1$ is the characteristic. We interpret the map (5) as the divisor class map (6). Let D be some degree 0 divisor of $F|K$ whose class is in the kernel, in other words: D becomes principal in FL. Let $f_L \in FL$ be a function such that $D=(f_L)$ in $FL|L$. The p^e-th power $f=f_L^{p^e}$ *lies in* F and, hence, $p^e D=(f)$ is a principal divisor in $F|K$. Thus the class of D in $\mathscr{C}\ell_0(F|K)$ is annihilated by p^e.

(J5) Referring to the $\mathfrak{p}$-adic topology, the canonical projection map (4) is a homomorphism of topological groups, and it is an open and closed map. The inclusion map $\mathscr{J}_V(K) \hookrightarrow \mathscr{J}_V(L)$ is a topological immersion. Consequently, the combined map (5) is open and closed onto its image.

Now we can give the proof of Lemma 2.2 *in the case when V is not smooth:*

There exists a purely inseparable finite extension $L|K$ such that the normalization W of V_L is a smooth curve. Then $\mathscr{J}_W$ is the usual jacobian variety of W, hence $\mathscr{J}_W(L)$ is compact. By the argument given above in the compact case, there is a sequence of multiples of $\psi_L(z)$ which converges to 0 in $\mathscr{J}_W(L)$. Hence, given any neighborhood $\mathscr{W}$ of 0 in $\mathscr{J}_V(K)$ we conclude that there are infinitely many $n \in \mathbb{N}$ such that $\psi_L(nz) \in \psi_L(\mathscr{W})$. (Here we have used that ψ_L is open onto its image.) This implies that

$$nz \in \mathscr{W} + \ker(\psi_L).$$

As the kernel is annihilated by some power p^e of the characteristic, we conclude

$$p^e nz \in p^e \mathscr{W}.$$

Here, $p^e\mathscr{W}$ becomes small if $\mathscr{W}$ does. Lemma (2.2) follows.

After these preliminaries we are now able to give the

Proof of the Local Existence Theorem. Consider the given subset $\mathscr{U} \subset V(K)$ which by hypothesis is $\mathfrak{p}$-adically open and non-empty. After shrinking $\mathscr{U}$ if necessary we may suppose that $\mathscr{U}$ does not contain the point P_0 which has been chosen in (J2) above, in the course of a description of the generalized jacobian $\mathscr{J}_V$. Moreover, given the positive divisor D as announced in the theorem, we may suppose that $\mathscr{U}$ does not contain any point in the support of D.

Our aim is to find an integer $m>0$ and distinct points $Q_1, \ldots, Q_r$ in $\mathscr{U}$ such that

$$(7) \qquad mD \sim Q_1 + \cdots + Q_r,$$

where, as above, $\sim$ means divisor equivalence in $F|K$. This relation expresses the fact that there is a function $f \in F$ with mD as its pole divisor and $Q_1 + \cdots + Q_r$ as its zero divisor, as required in the theorem.

Let $d>0$ be the degree of D. The number r of the points Q_i to be found is necessarily equal to md. Fo technical reasons we let $m=ng$ be a multiple of the genus g; then $r=ngd$ is a multiple of g too. Accordingly we use another numbering, collecting successively g points of the Q's to form positive divisor of degree g:

$$A_\nu = Q_{\nu 1} + \cdots + Q_{\nu g},$$

and we write (7) in the form

$$(8) \qquad ngD \sim \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant nd} A_\nu,$$

Equivalently,

$$(9) \qquad n(gD - gdP_0) \sim \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant nd} (A_\nu - gP_0).$$

This is a relation in $\mathscr{C}\ell_0(F|K) = \mathscr{J}_V(K)$.

Let us put

$$\boldsymbol{Q}_\nu = (Q_{\nu 1}, \ldots, Q_{\nu g}) \in V^g(K),$$

so that $A_\nu = \pi(\boldsymbol{Q}_\nu)$ is the image of $\boldsymbol{Q}_\nu$ under the projection $\pi: V^g \to V^{(g)}$. One of the requirements is that all the $Q_{\nu i}$ should be contained in $\mathscr{U}$, i.e., $\boldsymbol{Q}_\nu \in \mathscr{U}^g$. Furthermore we now require that each $\boldsymbol{Q}_\nu$ should be in $X'(K)$, the space which has been defined in (J2) above in the course of a description of the generalized jacobian. If $\boldsymbol{Q}_\nu \in X'(K)$ then $\varphi'(\boldsymbol{Q}_\nu)$ is defined and

$$\varphi'(\boldsymbol{Q}_\nu) \sim A_\nu - gP_0.$$

Hence the relation (9) may be expressed in the form

$$(10) \qquad nz = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant nd} \varphi'(\boldsymbol{Q}_\nu),$$

where for brevity we have written z for the class of the divisor $gD - gdP_0$.

Now the situation is as follows: z is a given point in $\mathscr{J}_V(K)$, and $d > 0$ a positive number. Our aim is to find a natural number $n > 0$ and nd points $\boldsymbol{Q}_\nu \in \mathscr{U}^g \cap X'(K)$ such that (10) holds. In addition, it is required that all the points $Q_{\nu i} \in \mathscr{U}$ which appear as components of the $\boldsymbol{Q}_\nu$ are mutually distinct.

We observe first that $\mathscr{U}^g \cap X'(K)$ is not empty: namely, since $\mathscr{U}$ is $\mathfrak{p}$-adically open in $V(K)$ and consists of non-singular points only, the same holds for $\mathscr{U}^g$ in $V^g(K)$. It follows from Hensel's Lemma that $\mathscr{U}^g$ is Zariski dense in $V^g(K)$, hence indeed $\mathscr{U}^g \cap X'(K)$ is open and non-empty.

As explained in (J3) the map $\varphi': X'(K) \to \mathscr{J}_V(K)$ is a local homeomorphism. We now choose a non-empty $\mathfrak{p}$-adically open subset

$$\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}^g \cap X'(K)$$

such that φ', restricted to $\mathscr{U}'$, is a homeomorphism. We put

$$\mathscr{W} = \varphi'(\mathscr{U}').$$

We shall proceed in two steps. In Step 1 we shall show that for suitable n we can find points x_ν such that

$$(11) \qquad nz = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant nd} x_\nu \quad \text{with} \quad x_\nu \in \mathscr{W}.$$

Writing $x_\nu = \varphi'(\mathbf{Q}_\nu)$ with $\mathbf{Q}_\nu \in \mathscr{U}'$ we see that this satisfies (10). Thereafter in Step 2 we shall show that by modifying the x_ν slightly within $\mathscr{W}$, we can also satisfy the additional requirement that all the points $Q_{\nu i}$ which appear as components of the $\mathbf{Q}_\nu$ are distinct.

Step 1: We choose any point $x \in \mathscr{W}$. Then $\mathscr{W} - x$ is a neighborhood of 0 in $\mathscr{J}_V(K)$. Now we apply Lemma 2.2 to the point $z - dx \in \mathscr{J}_V(K)$. We find a natural number n such that $n(z - dx) \in \mathscr{W} - x$, which is to say that there exists $x_1 \in \mathscr{W}$ such that $nz - ndx = x_1 - x$, or,

$$nz = x_1 + (nd - 1)x.$$

Putting $x_\nu = x$ for $\nu = 2, \ldots, nd$ we see that the relation (11) is satisfied. We also note that according to Lemma 2.2 we can choose n to be arbitrarily large. In particular, we can and will assume that $nd \geqslant 3$; this means that on the right hand side of (11) there appear at least three summands. This will be essential in the argument for the second step.

Step 2: Write $x_\nu = \varphi'(\mathbf{Q}_\nu)$ with $\mathbf{Q}_\nu = (Q_{\nu 1}, \ldots, Q_{\nu g}) \in \mathscr{U}'$. The additional condition requires that for every pair $\mu \neq \nu$, all the components of

$$(\mathbf{Q}_\mu, \mathbf{Q}_\nu) = (Q_{\mu 1}, \ldots, Q_{\mu g}, Q_{\nu 1}, \ldots, Q_{\nu g}) \in V^{2g}(K)$$

are mutually distinct.

In $V^{2g} = V^g \times V^g = V \times \cdots \times V$ we consider the subvariety Δ consisting of those points $(P_1, \ldots, P_{2g})$ for which at least two components coincide: $P_i = P_j$ for some $i \neq j$ (the "full generalized diagonal"). Δ is of dimension less than $2g$, hence its complement $V^{2g} \setminus \Delta$ is non-empty and Zariski open. Our additional requirement can now be expressed in the form

$$(\mathbf{Q}_\mu, \mathbf{Q}_\nu) \notin \Delta(K) \quad \text{if} \quad \mu \neq \nu.$$

Now, $\mathscr{U}' \times \mathscr{U}'$ is $\mathfrak{p}$-adically open and non-empty, and it consists of non-singular points only, hence it is Zariski-dense (by Hensel's Lemma again). It follows that the intersection of $\mathscr{U}' \times \mathscr{U}'$ with $V^{2g}(K) \setminus \Delta(K)$ is $\mathfrak{p}$-adically open and dense in $\mathscr{U}' \times \mathscr{U}'$. In other words: if we put

$$\Delta_{\mathscr{U}'} = \Delta(K) \cap (\mathscr{U}' \times \mathscr{U}')$$

then its complement is $\mathfrak{p}$-adically open and dense in $\mathscr{U}' \times \mathscr{U}'$.

Applying the homeomorphism $\varphi' \times \varphi' : \mathscr{U}' \times \mathscr{U}' \to \mathscr{W} \times \mathscr{W}$, we obtain a subset $\Delta_{\mathscr{W}}$ of $\mathscr{W} \times \mathscr{W}$ whose complement is $\mathfrak{p}$-adically open and dense. Now our additional requirement can be expressed as follows:

$$(x_\mu, x_\nu) \notin \Delta_{\mathscr{W}} \quad \text{if} \quad \mu \neq \nu.$$

This condition can be satisfied, as a consequence of the following group theoretical lemma which we prefer to state separately.

Lemma 2.3 *Let G be a topological group whose group operation is written additively, and let $x_1, \dots, x_k$ be elements in G. For each ν, Let $\mathscr{W}_\nu$ be a neighborhood of x_ν and, for each $\mu \neq \nu$, let $\Delta_{\mu\nu}$ be a subset of $\mathscr{W}_\mu \times \mathscr{W}_\nu$ whose complement is open and dense in $\mathscr{W}_\mu \times \mathscr{W}_\nu$. Then if $k \geqslant 3$, there are elements $y_\nu \in \mathscr{W}_\nu$ such that*

(12) $\quad x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_k,$

and moreover

(13) $\quad (y_\mu, y_\nu) \notin \Delta_{\mu\nu} \quad \text{if} \quad \mu \neq \nu$

In other words: By a small perturbation $x_\nu \mapsto y_\nu$ the $y_1, \dots, y_k$ can be made to satisfy the additional condition (13) *without changing the sum* (12).

Proof. If $(x_\mu, x_\nu) \in \Delta_{\mu,\nu}$ then (x_μ, x_ν) is called a "failure", namely a failure to satisfy condition (13). We assume that $x_1, \dots, x_k$ has at least one failure; we are going construct $y_1, \dots, y_k$ with less failures, but with the same sum (12).

If (x_μ, x_ν) is not a failure then we choose neighborhoods $\mathscr{U}_\mu \subset \mathscr{W}_\mu$ of x_μ, and $\mathscr{U}_\nu \subset \mathscr{W}_\nu$ of x_ν such that

$$(\mathscr{U}_\mu \times \mathscr{U}_\nu) \cap \Delta_{\mu\nu} = \emptyset$$

(this is possible since the complement of $\Delta_{\mu\nu}$ is open). After replacing $\mathscr{W}_\mu$ by $\mathscr{U}_\mu$ and $\mathscr{W}_\nu$ by $\mathscr{U}_\nu$ we then may suppose that $\Delta_{\mu\nu} = \emptyset$. This guarantees that for arbitrary choices of $y_1 \in \mathscr{W}_1, \dots, y_k \in \mathscr{W}_k$ no new failures will appear: if (x_ν, x_μ) is not a failure then (y_μ, y_ν) is not a failure either.

Let, say, (x_2, x_3) be a failure and recall that $k \geqslant 3$. We put $y_i = x_i$ for $i > 3$. Now the equation (12) reads

(14) $\quad x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3,$

While the x_i are to be regarded as fixed, this defines y_1 as a continuous function of $(y_2, y_3) \in G \times G$, say $y_1 = h(y_2, y_3)$. After shrinking $\mathscr{W}_2$ and $\mathscr{W}_3$ again if necessary, we may assume that $h(\mathscr{W}_2 \times \mathscr{W}_3) \subset \mathscr{W}_1$. Now, since the complement of $\Delta_{2,3}$ is dense there exists

(15) $\quad (y_2, y_3) \in \mathscr{W}_2 \times \mathscr{W}_3, \qquad (y_2, y_3) \notin \Delta_{2,3}.$

Putting $y_1 = h(y_2, y_3)$ we see that (14) and hence (12) holds. As said above, among the y_ν there appear no new failures. However, from (15) we see that (y_2, y_3) is not a failure although (x_2, x_3) was one. □

The Local Existence Theorem is proved.

For a non-discrete group G the complement of the diagonal in $G \times G$ is open and dense. Hence the above lemma yields the following corollary which we shall use in the next section. In view of the intended application we shall write the group operation multiplicatively here.

Corollary 2.4 *Let G be a non-discrete topological group, written multiplicatively, and let $x_1, \ldots, x_k \in G$. If $k \geqslant 3$ then there are $y_\nu \in G$, arbitrary close to the x_ν, such that $y_1 y_2 \cdots y_k = x_1 x_2 \cdots x_k$ and, moreover, $y_\mu \neq y_\nu$ if $\mu \neq \nu$.*[6]

Remark 2.5 Concerning the pole divisors mD of the functions f of the Existence Theorem: In the above proof we have seen that m can be chosen of the form $m = ng \geqslant 3$, where n is some number such that (11) can be satisfied. Now it is clear that any multiple kn of n also has this property: We have to repeat the sum on the right hand side of (11) k times in order to obtain a similar relation for kn. This yields:

With a suitable choice of $m \in \mathbb{N}$ the following holds: For every multiple km of m ($k \geqslant 1$) there exists a function in F with pole divisor kmD, having the properties as announced in the Existence Theorem above: the zeros of this function are distinct and contained in $\mathcal{U}$.

Remark 2.6 Suppose that $f \in F$ satisfies the conditions of the theorem, and f has pole divisor mD. Then

$$f \in \mathscr{L}(mD)$$

where $\mathscr{L}(mD)$ denotes the linear space of mD in the sense of Riemann-Roch, consisting of all functions in F whose pole divisor is $\leqslant mD$. $\mathscr{L}(mD)$ is a finite dimensional vector space over K and is thus endowed with the natural $\mathfrak{p}$-adic vector space topology. The theorem on the continuity of the roots (Appendix 7.1) now implies:

Any function $h \in \mathscr{L}(mD)$ which is sufficiently close to f also enjoys the same properties as announced for f in the Existence Theorem, namely: All the zeros of h are rational in K and distinct, and are contained in $\mathcal{U}$; moreover, the pole divisor of h is precisely mD.

More precisely, if $z_1, \ldots, z_n$ is a K-basis of $\mathscr{L}(mD)$ and if $f = \sum c_i z_i$ with $c_i \in K$, then there exists $\varepsilon > 0$ such that the announced properties hold for any function h of the form $h = \sum d_i z_i$ with $d_i \in K$ and $\max |d_i - c_i|_\mathfrak{p} \leqslant \varepsilon$.

We remark that for this conclusion it is necessary that the zeros of f are *distinct*. Otherwise, if there would be multiple zeros, we would still have a statement about continuity of roots, but in general the zeros of h will no longer be rational for the given base field K.

In the sequel we shall use this continuity argument many times.

3 Semi-local Approximation

In this section K denotes a field which is equipped with a finite set $\mathfrak{S}$ of primes $\mathfrak{p}$ of local type. We say that $\mathfrak{p}$ is of local type if the completion $K_\mathfrak{p}$ is locally compact and $K_\mathfrak{p}|K$ is separable. Instead of local compactness it is sufficient to require that the Local Existence Theorem 2.1 holds for $K_\mathfrak{p}$.[7]

---

[6] For most groups G this statement holds also for $k = 2$; the exceptions are those which contain arbitrary small open subgroups of exponent two.

[7] In [G-M-P] it is shown that for the Local Existence Theorem to hold, it suffices to suppose that with respect to $\mathfrak{p}$, the value group of K has rational rank 1 and the residue field is algebraic over a finite field.

As in the introduction $K' = K^{\mathfrak{S}}$, the field of totally $\mathfrak{S}$-adic elements over K; the prolongation of $\mathfrak{S}$ to K' is denoted by $\mathfrak{S}'$ and $\mathcal{O}'_{\mathfrak{S}} \subset K'$ is the integral closure of $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$ in K'.

We consider the following situation:

$F\|K$	a separably generated function field of 1 variable with K as its field of constants,
V	the normal projective model of $F\|K$, defined over K,
x	$= (x_1, \ldots, x_n)$ a finite family of functions in F,
$V_x(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$	the set of those points $P \in V(K_\mathfrak{p})$ for which $x_\nu(P) \in \mathcal{O}_\mathfrak{p} (1 \leqslant \nu \leqslant n)$,
$V_x(\mathcal{O}'_{\mathfrak{S}})$	the set of those points $P \in V(K')$ for which $x_\nu(P) \in \mathcal{O}'_{\mathfrak{S}} (1 \leqslant \nu \leqslant n)$. We remark that as $K'\|K$ is separable these points are all non-singular.

The following theorem states a *"semi-local"* Local-Global Principle, with respect to the *finite* set $\mathfrak{S}$.

Theorem 3.1 *Suppose that $V_x(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ is non-empty for each prime $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$. Then $V_x(\mathcal{O}'_{\mathfrak{S}})$ is non-empty.*

In fact, there exists a non-constant function $f \in F$ all of whose zeros are distinct, and contained in $V_x(\mathcal{O}'_{\mathfrak{S}})$. Moreover, f can be constructed such that its pole divisor is a multiple mD of any prescribed K-rational divisor $D > 0$ of $F|K$, and m can be taken arbitrarily large.

Proof. Let $D > 0$ be a K-rational divisor of $F|K$.

For each $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$ we consider the constant field extension $FK_\mathfrak{p}|K_\mathfrak{p}$. Note that $V_x(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ is *open* in $V(K_\mathfrak{p})$ with respect to the $\mathfrak{p}$-adic topology. Hence we can apply the Local Existence Theorem 2.1 to obtain a function $f_\mathfrak{p} \in FK_\mathfrak{p}$ with pole divisor a multiple of D, such that all zeros of $f_\mathfrak{p}$ are distinct, non-singular and contained in $V_x(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$.

Using Remark 2.5 we can assume that all these finitely many functions $f_\mathfrak{p}$ have the same pole divisor mD, with m arbitrarily large. Then

$$f_\mathfrak{p} \in \mathscr{L}_{K_\mathfrak{p}}(mD),$$

where $\mathscr{L}_{K_\mathfrak{p}}(mD)$ denotes the $K_\mathfrak{p}$-vector space of mD in $FK_\mathfrak{p}$, in the sense of Riemann-Roch. Since $K_\mathfrak{p}|K$ is separable we have

$$\mathscr{L}_{K_\mathfrak{p}}(mD) = \mathscr{L}_K(mD) \otimes K_\mathfrak{p}$$

where $\mathscr{L}_K(mD)$ is the K-vector space for mD within F. Consider the diagonal embedding

$$\mathscr{L}_K(mD) \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}} \mathscr{L}_{K_\mathfrak{p}}(mD).$$

For every $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$ we endow $\mathscr{L}_{K_\mathfrak{p}}(mD)$ with the $\mathfrak{p}$-adic vector space topology. Since the places $\mathfrak{p}$ are independent it follows that $\mathscr{L}_K(mD)$ is dense in the product on the right hand side.

Now we use the theorem of the continuity of the roots (see Remark 2.6). If $f \in \mathscr{L}_K(mD)$ approximates $f_\mathfrak{p}$ sufficiently and simultaneously for all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$, then firstly, the pole divisor of f is mD, secondly the zeros of f are distinct, $K_{\mathfrak{p}}$-rational, non-singular and lie in $V_x(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ (since these properties are known for $f_{\mathfrak{p}}$).

Let P be any zero of f. Then $P \in V(\tilde{K})$. We show that $P \in V(K')$. Consider a K-embedding $\sigma : \tilde{K} \to \tilde{K}_{\mathfrak{p}}$, and let P^σ be the image of P. Then $f(P^\sigma) = 0$ (since f is defined over K), thus P^σ also is a zero of f. It follows that P^σ is $K_{\mathfrak{p}}$-rational. This holds for *every* K-embedding $\sigma : \tilde{K} \to \tilde{K}_{\mathfrak{p}}$; thus P is totally $\mathfrak{p}$-adic. Since $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$ is arbitrary, it follows that P is totally $\mathfrak{S}$-adic, i.e., $P \in V(K')$.

We now prove that P lies in $V_x(\mathcal{O}'_{\mathfrak{S}})$. For any x_k and every prime $\mathfrak{p}'$ of K' which is a prolongation of some $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$ we have to show that $|x_k(P)|_{\mathfrak{p}'} \leqslant 1$. Now, $\mathfrak{p}'$ induces naturally a K-embedding of valued fields:

$$K' \hookrightarrow K_{\mathfrak{p}}.$$

Accordingly let us identify $K' \subset K_{\mathfrak{p}}$; then $|x_k(P)|_{\mathfrak{p}'} = |x_k(P)|_{\mathfrak{p}}$. Since $P \in V_x(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ we have $|x_k(P)|_{\mathfrak{p}} \leqslant 1$, as contended. □

Definition. *A non-constant function $f \in F$ is called "$\mathfrak{S}$-admissible" if all of its zeros are K'-rational, distinct and contained in $V_x(\mathcal{O}'_{\mathfrak{S}})$.*

Thus Theorem 3.1 can be expressed by saying that $\mathfrak{S}$-admissible functions exist, and with an arbitrary high multiple mD as pole divisor – provided the hypothesis of the theorem is satisfied, i.e., $V_x(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ is non-empty for all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$.

Remark 3.2 Note that using the theorem on the continuity of the roots (see Remark 2.6) it follows that if f is $\mathfrak{S}$-admissible and $g \in \mathcal{L}_K(mD)$ approximates f sufficiently and simultaneously for all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$, then g is also an $\mathfrak{S}$-admissible function.

Now let us discuss what happens when the finite set $\mathfrak{S}$ of primes is enlarged. So let $\mathfrak{T}$ be a finite set of primes containing $\mathfrak{S}$. We need the following lemma.

Lemma 3.3 *For each $\mathfrak{p} \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{S}$ let $L_{\mathfrak{p}}|K_{\mathfrak{p}}$ be a finite Galois extension. Then there exists a finite subextension $L|K$ of $K'|K$ such that, for each $\mathfrak{p} \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{S}$, $L_{\mathfrak{p}}$ is contained in the completion of L with respect to any prolongation $\mathfrak{p}_L$ of $\mathfrak{p}$.*

Proof. Let $d_{\mathfrak{p}}$ denote the degree of $L_{\mathfrak{p}}|K_{\mathfrak{p}}$. Let d be a common multiple of these finitely many numbers $d_{\mathfrak{p}}$. We choose $d/d_{\mathfrak{p}}$ non-conjugate primitive-elements $\vartheta_{\mathfrak{p}}^{(j)}$ of $L_{\mathfrak{p}}|K_{\mathfrak{p}}$ and let

$$f_{\mathfrak{p}}(X) = \prod_j f_{\mathfrak{p}}^{(j)}(X) \qquad (\mathfrak{p} \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{S})$$

be the product of their monic irreducible polynomials. Thus $f_{\mathfrak{p}}(X)$ is monic of degree d and all its irreducible factors $f_{\mathfrak{p}}^{(j)}(X)$ generate the same field extension over K, namely $L_{\mathfrak{p}}$.

Now consider the primes $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$. We choose d distinct elements $a_1, \ldots, a_d \in K$ and put

$$f_{\mathfrak{p}}(X) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} (X - a_i) \qquad (\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}).$$

Let $f(X) \in K[X]$ be a monic polynomial of degree d which is a close approximation to $f_{\mathfrak{p}}(X)$ for each prime $\mathfrak{p}$, those in $\mathfrak{S}$ and those in $\mathfrak{T} \setminus \mathfrak{S}$. Let $\vartheta \in \tilde{K}$ be a root of $f(X)$ and put $L = K(\vartheta)$.

If the approximation is close enough then by Hensel's (or Krasner's) Lemma $f(X)$ has locally the same factorization behavior as the approximated polynomials. Thus $f(X)$ splits completely over $K_{\mathfrak{p}}$ for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$; this implies that $\mathfrak{p}$ splits completely in L and so $L \subset K'$. On the other hand, if $\mathfrak{p} \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{S}$ then $f(X)$ factors over $K_{\mathfrak{p}}$ into $d/d_{\mathfrak{p}}$ irreducible polynomials all of which generate the same field $L_{\mathfrak{p}}$. Hence for every prolongation $\mathfrak{p}_L$ of $\mathfrak{p}$ to L it follows that the completion concides with the given field $L_{\mathfrak{p}}$. □

Corollary 3.4 *In the same situation as in Theorem 3.1, consider a finite set $\mathfrak{T}$ of primes of K, containing $\mathfrak{S}$. Suppose that $V_x(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$, and $V_x(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}})$ for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{S}$ are non-empty. Then $V_x(\mathcal{O}'_{\mathfrak{T}})$ is non-empty.*

In fact, there exists a finite extension $L|K$ of K within K' and a non-constant function $f \in FL$ all of whose zeros are distinct, and contained in $V_x(\mathcal{O}'_{\mathfrak{T}})$. Moreover, f can be constructed such that its pole divisor is a multiple mD of any prescribed K-rational divisor $D > 0$ of $F|K$, and m can be taken arbitrarily large.

Proof. Since $V(K^s_{\mathfrak{p}})$ is dense in $V(\tilde{K}_{\mathfrak{p}})$ for every $\mathfrak{p} \in \mathfrak{T}$, and $V_x(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}})$ is nonempty for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{S}$, we can choose a point $P_{\mathfrak{p}} \in V_x(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}})$ which is K^s-rational. Hence there exists a finite Galois extension $L_{\mathfrak{p}}$ of $K_{\mathfrak{p}}$, such that $P_{\mathfrak{p}}$ is rational in $L_{\mathfrak{p}}$. Let L be a finite extension of K within K' as in Lemma 3.3. If $\mathfrak{p}_L$ is a prolongation of $\mathfrak{p}$ to L then, by construction, $P_{\mathfrak{p}}$ is rational in the completion $L_{\mathfrak{p}_L}$.

We see that over L, the hypothesis of Theorem 3.1 holds for the set $\mathfrak{T}_L$. We use Theorem 3.1 for L, $\mathfrak{T}_L$ instead of K, $\mathfrak{S}$ and obtain a function $f \in FL$ which has the required properties. □

Remark 3.5 In the proof of Theorem 3.1 we have only dealt with the case $\mathfrak{S} \neq \emptyset$. For $\mathfrak{S} = \emptyset$, Theorem 3.1 asserts that $V_x(K^s) \neq \emptyset$ and that for a given positive K-rational divisor D, there is a function $f \in FK^s$ with distinct zeros all belonging to $V_x(K^s)$, and pole divisor some multiple of D. This can either be proved directly or deduced using arguments as in 3.4 above.

For normal projective curves, Corollary 3.4 *is identical with our Main Theorem in the case when $\mathfrak{B}$ is finite.* (Take $\mathfrak{T} = \mathfrak{B}$.)

The following sections deal with a refinement of the above approximation procedures in order to be able to deal with the case of an infinite set $\mathfrak{B}$.

4 The Main Theorem for Normal Projective Curves

In this section we are going to prove the Main Theorem for the case of normal projective curves. We begin by recalling those facts from the theory of constant reductions which we are going to need.

Let $F|K$ be a separably generated function field of one variable with exact constant field K. Suppose $\mathfrak{p}$ is a non-archimedean prime of K and $\mathfrak{P}$ an extension to

F. We say that $\mathfrak{P}$ is a constant reduction of $F|K$ (at $\mathfrak{p}$) if the residue fields $F\mathfrak{P}|K\mathfrak{p}$ again form a function field of one variable. A function $f \in F$ is called residually transcendental at $\mathfrak{P}$ if $f\mathfrak{P}$ is not a constant of $F\mathfrak{P}$. We remark that f is residually transcendental if and only if $\mathfrak{P}$ is an extension of the Gauß valuation $|\cdot|_{\mathfrak{p},f}$ on $K(f)$ associated to $\mathfrak{p}$ and f to F. We say that f is regular at $\mathfrak{P}$ if it is residually transcendental and $\deg f = \deg f\mathfrak{P}$. Here the degree is always the degree of the function over the exact constant field. Observe that if f is regular at $\mathfrak{P}$ then $K\mathfrak{p}$ is the exact constant field of $F\mathfrak{P}$ and the valuation $|\cdot|_{\mathfrak{P}}$ associated to $\mathfrak{P}$ is the unique extension of $|\cdot|_{\mathfrak{p},f}$ to F.

(R1) *Let $\mathfrak{P}$ be a constant reduction of $F|K$. Let $f, y \in F$, and assume that f is regular at $\mathfrak{P}$, and that $|y|_{\mathfrak{P}} \leqslant 1$. If $\operatorname{supp}(y)_\infty \subset \operatorname{supp}(f)_\infty$ then we have:*

i) $\operatorname{supp}(y\mathfrak{P})_\infty \subset \operatorname{supp}(f\mathfrak{P})_\infty$.
ii) *$y(Q)$ is integral at $\mathfrak{p}$ for every zero Q of f.*

Remark: We do not assume that Q is of degree one over K, hence $y(Q)$ is an algebraic number contained in the algebraic closure $\tilde{K}$ of K. To say that $y(Q)$ is integral at $\mathfrak{p}$ means that for every extension $\tilde{\mathfrak{p}}$ of $\mathfrak{p}$ to $\tilde{K}$ we have $|y(Q)|_{\tilde{\mathfrak{p}}} \leqslant 1$.

Proof: Consider the irreducible equation for y over $K(f)$, of the form

$$\Phi(y,f) = y^s + \sum_i a_i(f) y^i = 0$$

with $a_i(f) \in K(f)$. Since $\operatorname{supp}(y)_\infty \subset \operatorname{supp}(f)_\infty$, the $a_i(f)$ are polynomials in $K[f]$. As $|\cdot|_{\mathfrak{p},f}$ has a unique extension to F (which is $|\cdot|_{\mathfrak{P}}$) and $|y|_{\mathfrak{P}} \leqslant 1$, it follows that y is integral over the valuation ring $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},f} \subset K(f)$; hence $|a_i(f)|_{\mathfrak{P}} \leqslant 1$ for each i. This means that the coefficients of the polynomials $a_i(f)$ are integral at $\mathfrak{p}$.

Hence, reducing the above equation modulo $\mathfrak{P}$ we see that $y\mathfrak{P}$ is integral over $K\mathfrak{p}[f\mathfrak{P}]$, and from this that $\operatorname{supp}(y\mathfrak{P})_\infty \subset \operatorname{supp}(f\mathfrak{P})_\infty$.

For assertion ii): Q is not a pole of y, hence $y(Q) \in FQ$ satisfies the $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-integral equation $\Phi(y(Q), 0) = 0$, and so is integral at $\mathfrak{p}$.

(R2) *In the situation of* (R1), *if in addition y is $\mathfrak{P}$-regular too, and $\operatorname{supp}(y)_\infty = \operatorname{supp}(f)_\infty$, then the leading coefficient of $a_0(f)$ in the irreducible polynomial of y over $K(f)$ is a unit at $\mathfrak{p}$.*

Proof: The hypothesis is now symmetric in f and y. Hence, considering the irreducible polynomial equation for f over $K(y)$:

$$\Psi(f, y) = f^r + \sum_j b_j(y) f^j = 0,$$

we conclude similarly as above that the $b_j(y) \in K[y]$ are polynomials in y whose coefficients are integral at $\mathfrak{p}$. Now, both polynomials Φ and Ψ differ by a constant factor $\alpha \in K$ only, so $\Phi = \alpha \cdot \Psi$. In fact, α is the coefficient of f^r in Φ and α^{-1} is the coefficient of y^s in Ψ. Thus both α and α^{-1} are integral at $\mathfrak{p}$, hence α is a unit at $\mathfrak{p}$. As α is the leading coefficient of $a_0(f)$ the results follows.[8])

(R3) *Let $f, y \in F$ be $\mathfrak{P}$-regular functions such that $(f)_\infty = mD$ and $(y)_\infty = nD$ with $(m, n) = 1$. Then there exists a divisor $\bar{D}$ of $F\mathfrak{P} | K\mathfrak{p}$ such that $(f\mathfrak{P})_\infty = m\bar{D}$ and $(y\mathfrak{P})_\infty = n\bar{D}$. In particular, D and $\bar{D}$ have the same degree.*[9])

Proof: We first prove the assertion when $m = n = 1$. Let $\bar{p}(f\mathfrak{P})$ be a monic polynomial over $K\mathfrak{p}$ such that $\bar{p}(f\mathfrak{P})$ and $y\mathfrak{P}$ have no common zeros in $F\mathfrak{P}$. Let $p(f)$ be some monic representative of $\bar{p}(f\mathfrak{P})$ in $K[f]$ and suppose r is its polynomial degree, hence also that of $\bar{p}(f\mathfrak{P})$. Set $u = \dfrac{p(f)}{y^r}$ and observe that

$$\deg u \leqslant r \deg f = r \deg f\mathfrak{P} \leqslant \deg \frac{\bar{p}(f\mathfrak{P})}{y\mathfrak{P}^r} = \deg u\mathfrak{P}.$$

It follows that u is regular at $\mathfrak{P}$ and $(f\mathfrak{P})_\infty = (y\mathfrak{P})_\infty$.

Now suppose that $(f)_\infty = mD$ and $(y)_\infty = nD$ with $(m, n) = 1$. Then $(f^n)_\infty = (y^m)_\infty = mnD$. Hence $n(f\mathfrak{P})_\infty = (f^n\mathfrak{P})_\infty = (y^m\mathfrak{P})_\infty = m(y\mathfrak{P})_\infty$. As $(m, n) = 1$, it follows that $(f\mathfrak{P})_\infty = m\bar{D}$ and $(y\mathfrak{P})_\infty = n\bar{D}$ for some positive divisor $\bar{D}$ of $F\mathfrak{P} | K\mathfrak{p}$. This completes the proof.

(R4) *Given finitely many non-constant functions $f_1, \dots f_m \in F$ one has: For almost all non-archimedean primes $\mathfrak{p}$ of K there exists a constant reduction $\mathfrak{P}$ of $F|K$ (at $\mathfrak{p}$) such that all f_i are regular at $\mathfrak{P}$.*[10])

Proof: Let $x, y \in F$ be non-constant generators for $F|K$ and $\Phi(X, Y)$ the irreducible polynomial for x, y over K (uniquely determined up to a constant factor). Then for almost all non-achimedean primes $\mathfrak{p}$, reducing coefficientwise yields an irreducible polynomial $\Phi\mathfrak{p}(X, Y)$ of the same degrees in X and Y as Φ. Let $\mathfrak{P}$ denote the associated constant reduction of F. It follows that $\Phi\mathfrak{p}$ is the irreducible polynomial for $x\mathfrak{P}, y\mathfrak{P}$ over K. As the degree is preserved it follows that x, y are $\mathfrak{P}$-regular.

---

[8]) The identity $a_0(0) = \alpha b_0(0)$, obtained from the proof of (R2), can be used to show that there is a unit η at $\mathfrak{p}$ such that

$$\prod_\nu y(Q_\nu) = \eta \prod_\mu f(P_\mu),$$

where the Q_ν range over the zeros of f, each counted with its multiplicity and similarly P_μ ranges over the zeros of y. In particular one deduces, $y(Q_\nu)$ is a unit at $\mathfrak{p}$ for all Q_ν, if and only if $f(P_\mu)$ is a unit at $\mathfrak{p}$ for all P_μ. In [R3] this was called the "Reciprocity Lemma", and the reciprocity factor η was interpreted as a product of local symbols for the poles of f and g. There however, the hypothesis of good reduction is made.

[9]) If $F|K$ admits good reduction at $\mathfrak{p}$ (or, more generally, potentially good reduction) then this is immediate from Deuring's theory of divisor reduction. Our aim here is to prove this without assuming potentially good reduction.

[10]) In the case we are concerned with, where K is a global field, *"almost all"* means *"all but finitely many"*. For arbitrary fields *"almost all"* has to be interpreted as *"all primes of a non-empty Zariski open subset of the space of primes of K"*.

Now consider the $f_i \in F \setminus K$ and let $\Phi_i(X, Y)$ be the irreducible polynomial of x, f_i over K. Again, for almost all primes $\mathfrak{p}$, $\Phi_i(X, Y)$ remains irreducible with the same degrees in X and Y when reduced coefficientwise. We conclude that $\Phi_i\mathfrak{p}(X, Y)$ is the irreducible polynomial for $x\mathfrak{P}, f_i\mathfrak{P}$ over $K\mathfrak{p}$. As the degrees are preserved, we conclude that the f_i are regular at $\mathfrak{p}$.

Following the above preparation we can now prove the Main Theorem for curves.

Theorem 4.1 *Let K be a global field, equipped with a set $\mathfrak{V}$ of primes not containing all primes of K. In addition, let a finite subset $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{V}$ be given. Let V be a normal, projective, geometrically integral curve over K with function field $F|K$, and $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a finite family of functions from F.*

Suppose that $V_x(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$, and $V_x(\tilde{\mathcal{O}}_\mathfrak{p})$ for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{V} \setminus \mathfrak{S}$ are non-empty. Then $V_x(\mathcal{O}'_\mathfrak{V})$ is non-empty.

In fact, there exists a finite extension $L|K$ of K within K' and a non-constant function $f \in FL$ all of whose zeros are distinct, and are contained in $V_x(\mathcal{O}'_\mathfrak{V})$.

Proof. We begin with the following preliminary remarks:

The First Enlargement Principle: Let $L|K$ be a finite subextension of $K'|K$ and consider the extensions of $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{S}$ to L. Then the hypotheses of Theorem 4.1 also hold for L, $\mathfrak{V}_L$, $\mathfrak{S}_L$ instead of K, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{S}$, with the function field $F|K$, replaced by its constant extension $FL|L$. Moreover, the field L' of totally $\mathfrak{S}_L$-adic elements over L coincides with K'. Consequently, if Theorem 4.1 is known to hold for L, $\mathfrak{V}_L$, $\mathfrak{S}_L$ then it also holds for K, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{S}$. *Therefore, in order to prove Theorem* 4.1 *we may replace K by any finite extension L within K' and accordingly $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{S}$ by $\mathfrak{V}_L$, $\mathfrak{S}_L$. We call this the first enlargement principle and in order to simplify the notation when applying it we will again write K, $\mathfrak{S}$ instead of L, $\mathfrak{S}_L$.*

The Second Enlargement Principle: There is another enlargement principle which allows us to enlarge the set $\mathfrak{S}$. Let $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{V}$ be a finite set containing $\mathfrak{S}$. The hypothesis of Theorem 4.1 concerning $\mathfrak{S}$, namely that $V_x(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) \neq \emptyset$ for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$, may not be satisfied for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{T}$. However, Corollary 3.4 shows that there exist points $P \in V_x(\mathcal{O}'_\mathfrak{T})$. Choose any such point P and let L be a finite extension of K within K' such that P is rational over L. Then the values $x_i(P) (1 \leqslant i \leqslant n)$ are L-rational and, at the same time, they are $\mathfrak{p}_L$-integral for every $\mathfrak{p}_L \in \mathfrak{T}_L$. We conclude that the hypothesis of Theorem 4.1 holds for L and $\mathfrak{T}_L$. Now observe that the field of totally $\mathfrak{T}_L$-adic elements over L is contained (by its very definition) in the field K' of totally $\mathfrak{S}$-adic elements over K. Consequently, if Theorem 4.1 is known to hold for L, $\mathfrak{V}_L$, $\mathfrak{T}_L$ then it also holds for K, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{S}$. *Therefore, in order to prove Theorem* 4.1 *we may replace $\mathfrak{S}$ by any finite set $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{V}$ containing $\mathfrak{S}$, if at the same time K is enlarged suitably within K'. We call this the second enlargement principle.*

The reader should note that if K, $\mathfrak{S}$ is replaced by L, $\mathfrak{T}_L$ then the field $K' = K^\mathfrak{S}$ of totally $\mathfrak{S}$-adic elements over K has to be replaced by the corresponding field $L^{\mathfrak{T}_L}$ of totally $\mathfrak{T}_L$-adic elements. When changing notation and writing again K, $\mathfrak{S}$ instead of L, $\mathfrak{T}_L$ then, consequently, the abbreviated notation K' also changes its meaning, referring now to the new field K (which was formerly L) and the new set $\mathfrak{S}$ (which was formerly $\mathfrak{T}_L$).

The idea of the proof is to enlarge K and $\mathfrak{S}$, as allowed by the enlargement principles, so that the new set $\mathfrak{S}$ will contain all the primes $\mathfrak{p}$ which cause disturbance when going from the semi-local to the global situation.

Applying these principles we observe that from the start we can assume there exists at least one K-rational point on V. Indeed, by Theorem 3.1 it follows that V contains a K'-rational point. Any such K'-rational point of V is already L-rational in a finite subextension field L of K'. By the first enlargement principle we may replace K by L and prove the theorem over L. Changing notation, we again write K instead of L, and so there exists a K-rational point, say P, on V.

For the point P it follows from the Riemann-Roch Theorem that the ring of functions in F having poles only at P is a Dedekind domain with quotient field F. Therefore we can choose a positive integer n_0 sufficiently large such that:

1) there exist non-constant functions $y, y_k \in \mathscr{L}(n_0 P)$ with

$$x_k = \frac{y_k}{y} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$ [11]

2) by the Riemann-Roch Theorem there exists $u, t \in F$ with $(u)_\infty = n_0 P$ and $(t)_\infty = (n_0 + 1)P$.

Applying the second enlargement principle we suppose, firstly that $\mathfrak{S}$ contains all archimedean primes of $\mathfrak{B}$. Secondly, in view of (R4) we may assume that for each $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$ there is a constant reduction $\mathfrak{P}$ of F prolonging $\mathfrak{p}$ such that all the functions u, t, y, y_k selected in 1) and 2) $(1 \leqslant k \leqslant n)$ are regular at $\mathfrak{P}$. Note that this constant reduction is *uniquely determined* by $\mathfrak{p}$ and these regularity conditions. In the following proof, given any $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$, the corresponding symbol $\mathfrak{P}$ will always denote this uniquely determined constant reduction, distinguished by the above conditions.

We remark that by 2) above and (R3) it follows that for each $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$ we have $(u\mathfrak{P})_\infty = n_0 \bar{P}$, where $\bar{P}$ is a $K\mathfrak{p}$-rational divisor of $F\mathfrak{P}$ of degree 1.

Now Theorem 3.1 guarantees the existence of a non-constant function $f \in F$ which is $\mathfrak{S}$-admissible, i.e., the zeros of f are distinct, K'-rational and contained in $V_x(\mathcal{O}'_{\mathfrak{S}})$. Moreover, f can be chosen such that

$$(f)_\infty = m n_0 P,$$

a multiple of $n_0 P$. Since f has the same pole divisor as u^m there is a non-zero constant $a \in K$ such that $f = au^m + h$ with $(h)_\infty \leqslant (mn_0 - 1)P$. After multiplying with a^{-1} (which does not change the roots of f and hence does not affect $\mathfrak{S}$-admissibility) we may assume $a = 1$.

We are now going to replace f by a function which is very close to f in the $\mathfrak{S}$-adic topology on $\mathscr{L}(mn_0 P)$, such that all its zeros satisfy the requirements of the theorem. Recall that the property of being $\mathfrak{S}$-admissible is preserved under small perturbations with respect to the $\mathfrak{S}$-topology; see Remark 3.2.

---

[11]) Without loss of generality we may assume from the start that the x_k are non zero. Then indeed, the x_k can be represented as quotients of non-constant functions as required here, provided n_0 is sufficiently large. The condition that the y, y_k are non-constant will save us some trivial case distinctions later.

We multiply h with a suitable factor $b \in K$, i.e., we replace $f = u^m + h$ by the function $f' = u^m + bh$. The factor b is chosen very near to 1 in the $\mathfrak{S}$-adic topology, so that f' is close to f. For $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$ we require that

$$|b|_{\mathfrak{p}} \leqslant |h^{-1}|_{\mathfrak{P}};$$

this choice of b is possible in view of the Strong Approximation Theorem in K. (Note that $|h|_{\mathfrak{P}} = 1$ for almost all $\mathfrak{p}$, in view of (R4).) Thus we have $|bh|_{\mathfrak{P}} \leqslant 1$ for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$. After writing again h instead of bh and f instead of f' we now have

$$f = u^m + h \quad \text{with} \quad (h)_\infty \leqslant (mn_0 - 1)P,$$

and $\quad |h|_{\mathfrak{P}} \leqslant 1 \quad$ if $\quad \mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$

This then implies: *f is $\mathfrak{P}$-regular for* $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$.
Indeed, examining

$$f\mathfrak{P} = u^m\mathfrak{P} + h\mathfrak{P},$$

it follows by (R1) i) that $\operatorname{supp}(h\mathfrak{P})_\infty \subset \operatorname{supp}(u^m\mathfrak{P})_\infty = \bar{P}$. As $\deg h\mathfrak{P} \leqslant \deg h < mn_0$ and $\deg u^m\mathfrak{P} = mn_0$ (since u is regular), we conclude that

$$\deg f\mathfrak{P} = mn_0 = \deg f$$

and so f is regular at $\mathfrak{P}$.

We have constructed an $\mathfrak{S}$-admissible function f with P as its only pole, such that f is $\mathfrak{P}$-regular for all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$.

For the proof of the theorem we are now going to check whether each zero Q of f is constained in $V_x(\mathcal{O}'_{\mathfrak{B}})$. This means that Q should be K'-rational and the algebraic numbers $x_k(Q)$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$ integral at every $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$. Now, for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$ this is true since f is $\mathfrak{S}$-admissible. Thus we have to check whether the $x_k(Q)$ are $\mathfrak{S}$-integral.[12] If not, then we shall try to modify f further such as to achieve this aim.

We begin by reinterpreting our expression for the x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, so as to simplify the argumentation. Recall that as both y and f are regular at each of the $\mathfrak{P}$, by (R1) and (R2) the coefficients of the polynomials $a_i(f)$ in the irreducible equation

$$\Phi(y,f) = y^s + a_{s-1}(f)y^{s-1} + \cdots + a_0(f) = 0$$

are $\mathfrak{S}$-integral and the leading coefficient of $a_0(f)$ is an $\mathfrak{S}$-unit. Setting $z = y^{s-1} + a_{s-1}(f)y^{s-2} + \cdots + a_1(f)$ and substituting in the expressions for the x_k we obtain

$$x_k = \frac{y_k}{y} = \frac{y_k z}{a_0(f)} =: \frac{z_k}{a_0(f)}, \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Now $x_k(Q) = \dfrac{z_k(Q)}{a_0(0)}$, and by (R1) ii) the algebraic numbers $z_k(Q)$, $a_0(0)$ are $\mathfrak{S}$-integral. Therefore it suffices to check whether $a_0(0)$ is an $\mathfrak{S}$-unit, for each

[12]) Recall that an algebraic number is said to be $\mathfrak{S}$-integral, respectively an $\mathfrak{S}$-unit, if it is integral, respectively a unit, at each prime $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$.

zero Q of f. If this is the case then the proof is finished. If not, then we replace f by the function $f_c = f - c$ for a suitable constant c. First, c has to be chosen close to 0 in the $\mathfrak{S}$-topology, so that f_c remains $\mathfrak{S}$-admissible. Secondly, c should be an $\mathfrak{S}$-integer, so that $f_c = f - c$ remains $\mathfrak{P}$-regular for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$. Finally, c should be chosen in such a way that for each zero Q of f_c, the algebraic number $a_0(f(Q)) = a_0(c)$ is an $\mathfrak{S}$-unit.

In general it is not possible to find such an *algebraic integer c* within the field K. However using the Approximation Lemma 5.2 from [C-R], we know there exists $c \in \tilde{K}$,

- which is arbitrarily close to 0 in the $\mathfrak{S}$-topology,
- such that $a_0(c)$ is an $\mathfrak{S}$-unit,
- such that every prime $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$ splits completely in the extension field $L = K(c)$; hence $L \subset K'$.

Now $a_0(c)$ is a polynomial in c with $\mathfrak{S}$-integral coefficients, the leading one an $\mathfrak{S}$-unit. As $a_0(c)$ is an $\mathfrak{S}$-unit, it follows that c is $\mathfrak{S}$-integral. After applying the first enlargement principle, identifying K with L, it follows by 3.2 that $f_c = f - c$ is an $\mathfrak{S}$-admissible function, regular at each of the constant reductions $\mathfrak{P}$ for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{S}$. We conclude that if Q is a zero of f_c then $a_0(f(Q)) = a_0(c)$ is an $\mathfrak{S}$-unit and $z_k(Q)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, are $\mathfrak{S}$-integral; hence $x_k(Q)$ is $\mathfrak{S}$-integral. As f_c is $\mathfrak{S}$-admissible the algebraic numbers $x_k(Q)$ are also integral for each $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$.

We have shown that there is a finite extension L of K within K', and an element $c \in L$ such that the function $f_c = f - c$ satisfies all the requirements of the theorem. That is, the zeros of f_c are distinct and contained in $V_x(\mathcal{O}'_{\mathfrak{B}})$. □

5 The General Case: Reduction to Curves

Our proof of the general case has two steps. First we observe that in the statement of the Main Theorem we can suppose that the variety V is affine, smooth, and also that $\boldsymbol{x}$ consists of a system of holomorphic functions on V. The second step involves a Bertini type induction argument on the dimension of the variety which is assumed to satisfy the hypothesis above.

Step 1: *In the context of the Main Theorem let $U \subset V$ be an affine open of V. Then the assertion of the theorem holds for V if and only if it holds for U.*

Proof: Let $F = K(V) = K(U)$ denote the function field of V and U.

Assume the assertion holds for V. Let $\boldsymbol{x}$ be a tuple of K-rational functions on U and suppose that the Skolem problem for U with data $\boldsymbol{x}$ and $\mathfrak{S}$ rationality conditions is locally solvable. We show that it is globally solvable. To do this we first show that there exists a non-zero function $y \in F$ such that its holomorphy domain D_y is contained in U and moreover, setting $\boldsymbol{y} = (y, x_1, \dots, x_n)$, the Skolem problem for V with data $\boldsymbol{y}$ and $\mathfrak{S}$ rationality conditions is locally solvable. Indeed, let y' be any non-zero function whose holomorphy domain $D_{y'}$ is contained in U. As $V_x(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ is Zariski dense for all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$ (Appendix 9.5), it follows that for every such $\mathfrak{p}$ there exist some non-singular $P_\mathfrak{p} \in V_x(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ which also lies in $D_{y'}$, i.e., $y'(P_\mathfrak{p}) \neq \infty$. In particular, for the finite set $\mathfrak{S}$ of places $\mathfrak{p}$ there exists a non-zero constant $c_0 \in \mathcal{O}_\mathfrak{B}$

such that $|c_0 y'(P_\mathfrak{p})|_\mathfrak{p} \leqslant 1$ for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$. Next let $P_0 \in V(\tilde{K})$ be arbitrary such that $y'(P_0) \neq 0$. Then $y'(P_0)$ is a $\mathfrak{p}$-unit for almost all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$, hence there exists a non-zero constant $c_1 \in \mathcal{O}_\mathfrak{B}$ such that $|c_1 y'(P_0)|_\mathfrak{p} \leqslant 1$ for all $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$. Now setting $y = c_0 c_1 y'$ it follows that the Skolem problem for V with data $\boldsymbol{y}$ and $\mathfrak{S}$-rationality conditions is locally solvable. Then by hypothesis it is solvable globally. Let P be a non-singular global solution. Then in particular, P belongs to D_y and so to $U(K')$. Hence the Skolem problem for U with data $\boldsymbol{x}$ and $\mathfrak{S}$ rationality conditions has the global solution P.

Conversely, assume the assertion holds for U. Let $\boldsymbol{x}$ be the data for a Skolem problem with $\mathfrak{S}$ rationality conditions for V which locally has solutions. Then $\boldsymbol{x}$ defines the data for a Skolem problem with $\mathfrak{S}$ rationality conditions for U. The latter Skolem problem also has local solutions, as the $V_x(\tilde{\mathcal{O}}_\mathfrak{p})$ are Zariski dense (Appendix 9.5), hence they meet U. We are now finished, as every global solution of the latter Skolem problem also is a global solution of the former one.

Step 2: *Reduction to Curves.* Suppose that V is affine, smooth, and that $\boldsymbol{x}$ consists of a system of holomorphic functions on V.

By the Noether Normalisation Theorem there exists a system $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ of algebraically independent elements in $K[V]$ such that $K[V]$ is integral over $K[\boldsymbol{t}]$. We set $K[V] = K[\boldsymbol{T}, Z]/\mathfrak{P}$, where $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_d)$, $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_m)$ and $\mathfrak{P}$ is the relation ideal which is absolutely irreducible. Before going into the details of the proof we remark that using model theory it follows that except for finitely many $a_1 \in K$ one has:

(*) The ideal $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{P}, T_1 - a_1)$ generated by $\mathfrak{P}$ and $T_1 - a_1$ in $K[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{Z}]$ is an absolutely irreducible ideal.

Let W be the affine variety over K defined by $K[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{Z}]/\mathfrak{Q}$. Then W is geometrically integral and setting $\boldsymbol{u} = (T_2, \ldots T_d) \bmod \mathfrak{Q}$ it follows that $K[W] = K[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{Z}]/\mathfrak{Q}$ is integral over $K[\boldsymbol{u}]$ and the canonical projection

$$K[V] = K[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{Z}]/\mathfrak{P} \to K[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{Z}]/\mathfrak{Q} = K[W]$$

gives rise to the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} K[V] & \to & K[W] \\ | & & | \\ K[\boldsymbol{t}] & \to & K[\boldsymbol{u}] \end{array}$$

where the bottom row is defined by $\boldsymbol{t} \mapsto (a_1, \boldsymbol{u})$.

Correspondingly one has the following diagram of morphisms of affine varieties defined over K:

$$\begin{array}{ccc} V & \hookleftarrow & W \\ \downarrow{\scriptstyle pr} & & \downarrow \\ \mathbb{A}^d & \hookleftarrow & \mathbb{A}^{d-1} \end{array}$$

where the top row is a K-embedding of W in V and the bottom row, a K-embedding of $\mathbb{A}^{d-1}$ into $\mathbb{A}^d$ with the constant a_1 on the first coordinate.

We now show that for a proper choice of a_1 the subvariety W satisfies the hypothesis of the Main Theorem with respect to the restriction $\boldsymbol{y}$ of $\boldsymbol{x}$ to W. As $\dim W = d-1$ we can conclude the proof of the Main Theorem by induction.

Let $P_k = P(x_k, \boldsymbol{t})$ be the irreducible polynomial of x_k over $K[\boldsymbol{t}]$. Then P_k is monic in x_k and as $\mathcal{O}_{\mathfrak{B}_0}$ is Dedekind there exists a finite subset $\mathfrak{S}_1$ of $\mathfrak{B}$ containing $\mathfrak{S}$ such that all coefficients of all polynomials P_k are $\mathfrak{S}_1$-integral. As in the case $\dim V = 1$ there exists a finite subextension $L|K$ of K' such that for the prolongation $\mathfrak{T}_1$ of $\mathfrak{S}_1$ to L one has: the set $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{q}_1})$ contains non-singular points ($\mathfrak{q}_1 \in \mathfrak{T}_1$). Mutatis mutandis, we can suppose that $L = K$ and hence, $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}_1$.

By the jacobian criterion it follows that the morphism pr in the diagram above is smooth on an open subset $U_{\boldsymbol{t}}$ of V which is defined over K. Equivalently, $\boldsymbol{t}_b = \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}(b)$ is a system of local parameters of $b \in U_{\boldsymbol{t}}$. As $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ is Zariski dense in $V(K)$ it follows that $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \cap U_{\boldsymbol{t}}(K_{\mathfrak{p}})$ is a ($\mathfrak{p}$-adic open) non empty set. It follows that each $a_{\mathfrak{p}}$ in this set has a $\mathfrak{p}$-adic neighborhood which is mapped homeomorphically by pr onto a $\mathfrak{p}$-adic neighborhood $\mathscr{U}_{\mathfrak{p}}$ of $pr(a_{\mathfrak{p}})$ in $\mathbb{A}^d(K_{\mathfrak{p}})$. We shall denote by $\mathscr{V}_{\mathfrak{p}}$ such a neighborhood which is contained in $V_{\boldsymbol{x}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$.

For every $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_1$ we consider some $a_{\mathfrak{p}}$, $\mathscr{V}_{\mathfrak{p}}$ and $\mathscr{U}_{\mathfrak{p}}$ as above. By the Strong Approximation Theorem for (K, $\mathfrak{B}$) it follows that the set of all points $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}^d(K)$ which lie in all $\mathscr{U}_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_1$) and have $\mathfrak{S}_1$-integral coordinates is a Zariski dense subset in $\mathbb{A}^d(K)$. In particular we can choose a point $\boldsymbol{a}$ in this set whose first coordinate a_1 has the property (*) we asked for above. Let $\boldsymbol{y}$ be the restriction of $\boldsymbol{x}$ to W (clearly, $\boldsymbol{y}$ is a system of regular functions on W). For such a point $\boldsymbol{a}$ we note that for every $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_1$ there exists $b_{\mathfrak{p}} \in \mathscr{V}_{\mathfrak{p}}$ such that $pr(b_{\mathfrak{p}}) = \boldsymbol{a}$. Moreover by the choice of $\boldsymbol{a}$ it follows that $b_{\mathfrak{p}}$ is a zero of $\mathfrak{Q}$, hence it is a non singular point of W. In particular, $W_{\boldsymbol{y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$ ($\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_1$).

For $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{S}_1$ let b be any point of V with $pr(b) = \boldsymbol{a}$. Then $P(x_k(b), \boldsymbol{a}) = 0$ ($1 \leqslant k \leqslant n$). Since P_k is monic in x_k and has $\mathfrak{S}_1$-integral coefficients and $\boldsymbol{a}$ has $\mathfrak{S}_1$-integral coordinates it follows that $x_k(b)$ is $\mathfrak{S}_1$-integral. Hence $W_{\boldsymbol{y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}'}) \neq \emptyset$ for all $\mathfrak{p}'$ not prolonging some $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_1$.

Therefore, W satisfies the hypothesis of the Main Theorem with respect to the restriction $\boldsymbol{y}$ of $\boldsymbol{x}$ to W. This completes the proof. □

Appendix

In the appendix we have included certain basic facts which were used at several places in the paper. For many of these results we were unable to find suitable adequate references in the literature and so we decided to include this short appendix where they are presented in the form we need and with notation that is consistent with the main part of the paper.

6. Prerequisites concerning Algebraic Varieties

Let V be an absolutely irreducible quasi-projective variety defined over a field K and $\imath : V \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ an embedding in some projective space over K. In the text we shall use the word "variety" to mean *"quasi-projective variety"*. A homogeneous function f_d of degree d on V defined over K is the restriction to V via $\imath$ of some homogeneous function of degree d on $\mathbb{P}^r$ which is defined over K. A rational function on V defined over K is by definition the quotient of two homogeneous functions of the same degree on V defined over K. The set of all rational functions on V defined over K is a finitely generated field $K(V)$ over K called the function field of V. Its transcendence degree over K equals dim V.

If $\Omega|K$ is a field extension, then an Ω-rational point of V is defined to be a point P of V such that $\imath(P)$ lies in $\mathbb{P}^r(\Omega)$. One shows that for $P \in V$ to be Ω-rational does not depend on the concrete projective embedding $\imath$ used. We shall denote the set of all Ω-rational points by $V(\Omega)$.

Using the language of schemes over K, an absolutely irreducible variety over K is a geometrically integral, separated quasi-projective scheme over K of finite type. For the field extension $\Omega|K$, an Ω-rational point of V corresponds to a homomorphism Spec $\Omega \to V$ of K-schemes, and the function field $K(V)$ is the local ring of the generic point of V.

With the notations from above let f be a rational function on V defined over K and P a point of V. We say that f is defined at P if there exists a projective embedding $\imath$ and a representation $f = f_d/g_d$ of f relative to $\imath$ such that g_d does not vanish at P.

The ring of all rational functions on V defined over K which are defined at $P \in V(K)$ is a local subring of $K(V)$ which we denote by $\mathcal{O}_{V,P}$ and call the local ring of P. Its maximal ideal will be denoted by $\mathfrak{m}_{V,P}$.

Let $\mathcal{D}_f$ denote the set of all points at which f is defined. Then f defines a map (which we also denote by f)

$$f : \mathcal{D}_f \to K$$

in a natural way. We endow the set $V(K)$ with the Zariski topology, which has a subbasis the sets $\mathcal{D}_f$ for all rational functions f on V defined over K.

In the scheme language this means that $f \in K(V)$ lies in the image of the canonical ring homomorphism

$$\mathcal{O}_{V,P} \hookrightarrow \mathcal{O}_{V,\eta} = K(V)$$

where η is the generic point of V.

Now suppose that Ω is an algebraically closed overfield of K. We endow $V(\Omega)$ with the Zariski topology as above. Then $V(K)$ embedded canonically in $V(\Omega)$ and equipped with the subspace topology is homeomorphic to $V(K)$ with the Zariski topology.

A subset X of $V(K)$ is called *Zariski dense* if there isn't any non-zero rational function of V vanishing on it. This is equivalent to X being dense in $V(\Omega)$ in the Zariski topology.

Now suppose that K is endowed with a (non-trivial) valuation v. This valuation defines a topology on K, the v-topology in a canonical way.

Further, any finite dimensional K-vector space M can be endowed with a (K, v)-vector space topology in a canonical way. Namely, this is the weakest topology on M such that all K-linear forms $\varphi : M \to (K, v)$ are continuous. This is called the v-topology on M and it has good properties, for example: Any K-multilinear mapping between spaces endowed with the v-topology is continuous.

This topology induces a topology on $\mathbb{P}^r(K)$ (r arbitrary) in a canonical way which we call the v-adic topology on $\mathbb{P}^r(K)$.

More generally, let V be an absolutely irreducible variety over K. Let $\iota: V \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ be a projective embedding over K. Then ι induces a canonical bijection of $V(K)$ onto $(\iota(V))(K) = \iota(V) \cap \mathbb{P}^r(K)$. In this way we can endow $V(K)$ with the sub-space topology by ι. One shows that this topology does not depend on the projective embedding ι and we call it the v-adic topology on $V(K)$.

It is clear that a rational function f on V defined over K is continuous in the v-adic topology at all points where it is defined. In fact, the v-adic topology is the weakest topology on $V(K)$ such that all rational functions $f \in K(V)$ are continuous at the points where they are defined. A basis of the v-adic topology is given by all subsets of $V(K)$ of the form

$$\mathscr{U}_x = \{P \in V(K) | x_k(P) \in \mathcal{O}_v, 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

where $x = (x_1, \ldots, x_n)$ runs over all finite systems of rational functions on V. The v-adic opens of the form $\mathscr{U}_x$ are called basic v-adic open subsets of $V(K)$.

From this it follows that the v-adic topology on $V(K)$ is finer then the induced Zariski topology on $V(K)$.

7. Continuity of the Roots of Algebraic Functions

Let (K, v) be an arbitrary valued field and $F|K$ a separably generated function field in 1 variable with constant field K. Let V denote the unique normal projective model of $F|K$. Then the set of all K-rational points $V(K)$ of V is identified in a natural way with the set of all K-rational places of $F|K$. Directly be the defintion of the v-adic topology on $V(K)$ it follows that it is actually the weakest topology on $V(K)$ such that all $f \in F$ define continuous functions

$$f: V(K) \to \mathbb{P}^1(K), \quad P \mapsto f(P).$$

We consider any finite dimensional K-vector subspace M of F as being endowed with the v-topology. Then F itself can be endowed with the strongest topology for which all the inclusions $M \hookrightarrow F$ are continuous. We call this the v-topology of F and we remark the following:

- All inclusions $M \hookrightarrow F$ are immersions in the v-topology.
- F endowed with the v-topology is a topological ring.

Now the main result of this section is:

Theorem 7.1 (Continuity of the Roots) *Let $f \in F$ be a non-zero function. Then we have:*

1) *There exists a v-neighborhood U of f in F such that $(f)_\infty \leqslant (g)_\infty$ for all $g \in U$. In particular, if $g \in U$ and* $\deg f = \deg g$ *then $(f)_\infty = (g)_\infty$.*
2) *Suppose that K is algebraically closed and let $P_1, \ldots, P_m$ be the distinct zeros of f and $n_k = v_{P_k}(f)$ their multiplicities. Let $\mathscr{U}_k$ be disjoint v-adic neighborhoods of P_k, $(k = 1, \ldots, m)$ in $V(K)$. Then there exists a v-neighborhood U of f in F such that any $g \in U$ has at least n_k zeros in every $\mathscr{U}_k$, if counted with their multiplicities.*

In particular, if $g \in U$ and $\deg f = \deg g$ *then* $(f)_\infty = (g)_\infty$ *and g has exactly n_k zeros in each $\mathscr{U}_k$ if counted with their multiplicities, and these are all the zeros of g.*

Proof. By the definition of the v-topology if suffices to find a v-neighborhood $U = U_M$ of f in every finite dimensional K-vector space $M \subseteq F$ containing f, such that every $g \in U$ has the desired properties. Moreover, since any such M is contained in the linear space of a positive divisor of $F|K$ it suffices to prove the assertion for such spaces. Precisely:

Let A be a positive divisor of $F|K$ and $\mathscr{L}_K(A)$ be its linear space over K. Then there exists a v-neighborhood $U = U_A$ of f in $\mathscr{L}_K(A)$ such that any $g \in U$ has the properties 1) *and* 2) *of the theorem.*

We first remark that our assertions are elementary assertions in the language of valued fields with parameters from K. These parameters come from the definition of V, A, $\mathscr{L}_K(A)$, f and the neighborhoods $\mathscr{U}_k$ (which we can suppose are basic open sets).

Therefore, to show that our assertions are true, it is sufficient to prove that they are true in a $\varkappa$-saturated extension (K^*, v^*) of (K, v) for some cardinality $\varkappa$. Now suppose that $\varkappa$ is big enough. Then there exist coarsenings v_1 of v^* which are trivial on K. Any such v_1 can be prolonged to a good reduction of $FK^*|K^*$ which is trivial on F. We shall also denote this prolongation by v_1 and let us set $K^* v_1 = K_1$. Now, any non-constant function $h \in F$ is a regular function for v_1 and in particular so is f. Furthermore, since FK^* has good reduction at v_1 it follows that v_1 defines the product topology on $\mathscr{L}_{K^*}(A)$. Therefore,

$$U = f + \{g \in \mathscr{L}_{K^*}(A) | v_1(g) > 0\}$$

is a v-neighborhood of f in $\mathscr{L}_{K^*}(A)$ and obviously, $gv_1 = fv_1 = f$ for all $g \in U$.

Next we observe that $(FK^*)v_1$ actually coincides with the constant extension FK_1 of $F|K$. Let

$$\mathrm{Div}\,(FK^*|K^*) \xrightarrow{v_1} \mathrm{Div}\,(FK_1|K_1)$$

be the canonical divisor reduction map, a degree preserving group homomorphism. For the definitions and basic properties of this map, see Deuring [D1] and Roquette [R3]. Taking into account that for any linear space $\mathscr{L}_K(D)$ of any positive divisor D of $F|K$ we have

$$\mathscr{L}_K(D) = (\mathscr{L}_K(D))v_1 \subseteq (\mathscr{L}_{K^*}(A))v_1 = \mathscr{L}_{K_1}(Dv_1)$$

and comparing dimensions we get $\mathscr{L}_{K_1}(Dv_1) = \mathscr{L}_{K_1}(D)$. Therefore, we have a commutative diagram of the form

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Div}\,(F|K) & \xrightarrow{\text{incl}} & \mathrm{Div}\,(FK^*|K^*) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle v_1} \\ \mathrm{Div}\,(F|K) & \xrightarrow{\text{incl}} & \mathrm{Div}\,(FK_1|K_1) \end{array}$$

Claim: *Let $\mathscr{U} = \mathscr{U}_{f_1,\dots,f_s}$ be a basic open subset of $V(K)$. Then the preimage of $\mathscr{U} \subseteq V(K) \subseteq V(K_1)$ by the canonical divisor reduction map*

$$\mathrm{Div}\,(FK^*|K^*) \xrightarrow{v_1} \mathrm{Div}\,(FK_1|K_1)$$

is contained in the basic open subset $\mathscr{U}^*$ defined by $(f_k)_k$ *in $V(K^*)$.*

The proof follows from the following general fact about good reduction: If w is a good reduction of a function field $E|L$ then for every regular function h and any place $Q \in \mathrm{Div}(E|L)$ it holds: $h(Q)w = hw(Qw)$.
In our situation we have for any $h \in F$ and some P^* which by reduction goes to some $P \in \mathrm{Div}(F|K)$:

$$(h(P^*) - h(P))v_1 = hv_1(P^* v_1) - hv_1(Pv_1) = h(P) - h(P) = 0,$$

ie $h(P^*) - h(P)$ lies in the valuation ideal of v_1 and in particular, also that of v^*. Hence, $v^*(h(P^*)) = v^*(h(P))$ and from this remark our claim follows easily.

We can now complete the proof of the theorem:
With U as above take any $g \in U$. Then, by general constant reduction theory and using $gv_1 = fv_1 = f$ we get:

i) $(g)_\infty v_1 \geqslant (gv_1)_\infty = (f)_\infty$.
ii) $(g)_0 v_1 \geqslant (gv_1)_0 = (f)_0$.

On the other hand, since g lies in $\mathscr{L}_{K^*}(A)$ and A is K-rational it follows that $(g)_\infty$ is K-rational. Hence, by the commutative diagram above we get $(g)_\infty v_1 = (g)_\infty$. Now taking into account i) above the assertion 1) follows. To prove the assertion 2) we remark that by ii) above and the divisor reduction map, the preimage of any $\mathscr{U}_k$ contains at least as many zeros of g as the number of zeros of $gv_1 = f$ in $\mathscr{U}_k$ (counted with their multiplicities, respectively). On the other hand, all these zeros lie in $\mathscr{U}_k^*$, by the claim above. The proof is finished. □

Corollary 7.2 *Let K be a henselian field, $F|K$ a function field and A a positive divisor of $F|K$. Suppose that there exists a function $0 \neq f \in F$ such that $(f)_\infty = A$ and all the zeros P_k of f are K-rational and distinct. Let $\mathscr{U}_k$ be given v-adic open disjoint neighborhood of P_k. Then there exists a neighborhood U of f in $\mathscr{L}_K(A)$ such that all $g \in \mathscr{L}_K(A)$ have the properties:*

1) $(g)_\infty = A$
2) *g has exactly one zeros in each $\mathscr{U}_k$ and these are all the zeros of g.*

Proof. We can suppose that all $\mathscr{U}_k$ are basic open subsets. Let $\tilde{K}$ be the algebraic closure of K and $\tilde{v}$ the unique prolongation of v to $\tilde{K}$. We denote by $\tilde{\mathscr{U}}_k$ the open basic subset of $V(\tilde{K})$ which is defined by the same functions as $\mathscr{U}_k$. Obviously we can suppose that $\tilde{\mathscr{U}}_k$ are pairwise disjoint. By the theorem above we have: If $g \in \mathscr{L}_K(A)$ is sufficiently close to f then $(g)_\infty \geqslant (f)_\infty = A$ and g has at least one $\tilde{K}$-rational zero in every $\tilde{\mathscr{U}}_k$. On the other hand, since g lies in $\mathscr{L}_K(A)$ it follows that $(g)_\infty = A = (f)_\infty$ and therefore, g has exactly one zero in every $\tilde{\mathscr{U}}_k$. Further, we remark that the v-adic basic open sets $\tilde{\mathscr{U}}_k$ are defined over K, hence they are G_K-invariant where G_K denotes the absolute Galois group of K. Since g is defined over K it follows that the zeros of g are G_K-invariant. Since they are also distinct it follows that they are K-rational. □

8. The Higher Dimensional Hensel Lemma

In this section we give the sketch of the proof of the higher dimensional Hensel Lemma we shall use later. Let (K, v) be a valued field. For $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_\varrho)$ in $K^\varrho = K \times \ldots \times K$ we set $v(\boldsymbol{a}) = \min v(a_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant \varrho)$ as usual. Now we have the following:

Theorem 8.1 *Let (K, v) be a henselian field. Let $\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_\varrho)$ be a system of ϱ polynomials in $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_\varrho)$ variables with v-integral coefficients. Let $J(\boldsymbol{a})$ denote the determinant of the Jacobian matrix $(\partial f_k/\partial X_l(\boldsymbol{a}))$ for an arbitrary $\boldsymbol{a}\in K^\varrho$. Suppose that for some $\boldsymbol{a}$ with v-integral coordinates the following holds:*

$$2v(J(\boldsymbol{a})) < v(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})).$$

Then there exists a unique $\boldsymbol{b}\in K^\varrho$ with the following properties

1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})=0$
2) $v(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) > v(J(a))$.

Proof. We first remark that the assertion of our theorem is true for (K, v) a local field, see Greenberg [Grb]. Therefore, it is true for the algebraic closure of each local field. By the model completeness of the theory of the algebraically closed valued fields, Robinson [Rob], it follows that 8.1 is true for the algebraic closure $(\tilde{K}, \tilde{v})$ of any henselian field (K, v). Now let $\tilde{\boldsymbol{b}}$ be the unique element of $\tilde{K}^\varrho$ satisfying 1) and 2) above. We remark that by property 2) it follows that $v(J(\tilde{\boldsymbol{b}}))=v(J(\boldsymbol{a}))$ and in particular $J(\tilde{\boldsymbol{b}})\neq 0$. Hence $\tilde{\boldsymbol{b}}$ is separable over K, see for instance Lang's Algebra book. Obviously every conjugate of $\tilde{\boldsymbol{b}}$ over K also satisfies 1) and 2). By the uniqueness of $\tilde{\boldsymbol{b}}$ it follows that it is invariant under conjugation. Hence $\tilde{\boldsymbol{b}}$ lies in K^ϱ. □

9. The Algebraic Implicit Function Theorem

Let V be an absolutely irreducible variety defined over K and $a\in V(K)$ a non-singular point. We denote the local ring of a by $\mathcal{O}_{V,a}$ and by $\mathfrak{m}_{V,a}$ the maximal ideal. Note that for *K-rational points* $a\in V(K)$ being non-singular is equivalent to the assertion that $\mathcal{O}_{V,a}$ is a regular local ring. The notion of being non-singular is of Zariski local nature and the following assertions on a point $a\in V(K)$ are equivalent, see for instance [M], pp. 233–236:

1) a is a non-singular point of V.
2) Each minimal system of generators of $\mathfrak{m}_a$ consists of exactly $d=\dim V$ elements.
3) Let $U\subset V$ be an affine neighborhood of a defined by $K[U]=K[X_1,\ldots,X_r]/\mathfrak{P}$ with $\mathfrak{P}=(f_1,\ldots,f_s)$ an absolutely irreducible ideal of $K[X_1,\ldots,X_r]$. Then the *Jacobian criterion* holds, i.e., the rank of the matrix $(\partial f_k/\partial X_l(a))$ equals $\varrho=r-\dim V$.

The following fact is well known, see for example [M], p. 240:

9.1 *Let $a\in V(K)$ be a non-singular point of V and $\boldsymbol{t}=(t_1,\ldots,t_d)$ a system of local parameters of $\mathcal{O}_{V,a}$. Then there exists an affine neighborhood U of a which is a complete intersection with respect to $\boldsymbol{t}$, i.e., U is of the form*

$$K[U]=K[T_1,\ldots,T_d,Y_1,\ldots,Y_\varrho]/\mathfrak{P}, \qquad t_k=T_k \bmod \mathfrak{P}\ (1\leqslant k\leqslant d).$$

with $\mathfrak{P}$ generated by exactly ϱ polynomials $\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_\varrho)$.

We now prove the following:

Theorem 9.2 (Implicit Function Theorem). *Let (K, v) be a henselian field and V an absolutely irreducible variety defined over K. Let $a\in V(K)$ be a non-singular*

point and $\boldsymbol{t}=(t_1,\dots,t_d)$ *a system of local parameters at a. Viewing* $\boldsymbol{t}=(t_1,\dots,t_d)$ *as system of rational functions on V the following assertion holds:*
There exists a v-adic neighborhood of a in $V(K)$ *which is mapped by* $\boldsymbol{t}$ *homeomorphically onto a v-adic neighborhood of the origin in* $\mathbb{A}^d(K)$.
In particular, $V(K)$ *is Zariski dense.*

Proof. We use 9.1 and the notations from there. Over K we identify the affine neighborhood U of a defined at 9.1 with the affine subvariety of $\mathbb{A}^{d+\varrho}$ defined by $\boldsymbol{f}=0$. We write $(\boldsymbol{a}_d, \boldsymbol{a}_\varrho)$ for the current point of $\mathbb{A}^{d+\varrho}$ (with respect to the coordinate functions $(T_1,\dots,T_d, Y_1,\dots, Y_\varrho)$ chosen in advance). Making an affine transformation over K (which obviously defines a v-adic homeomorphism of $\mathbb{A}^{d+\varrho}(K)$ onto itself) we can suppose that by this identification a corresponds to the origin of $\mathbb{A}^{d+\varrho}$. Further, after multiplying with properly chosen constants we can suppose that the defining equations $\boldsymbol{f}$ have v-integral coefficients.

Let $J(\boldsymbol{t})$ denote the determinant of the Jacobian matrix $(\partial f_k/\partial Y_l(\boldsymbol{t}))$. Now as $a=(\mathbf{0}_d, \mathbf{0}_\varrho)$ is a non-singular point of U one has $J(\mathbf{0}_d)\neq 0$. Further, as $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}_d, \mathbf{0}_\varrho)=0$ it follows by the v-adic continuity of the polynomials that for $\boldsymbol{a}_d$ in a small v-adic neighborhood $\mathscr{U}_0$ of $\mathbf{0}_d$ one has:

$$2v(J(\boldsymbol{a}_d)) = 2v(J(\mathbf{0}_d)) < v(f_k(\boldsymbol{a}_d, \mathbf{0}_\varrho)) \quad (1 \leqslant k \leqslant \varrho).$$

By the higher dimensional Hensel Lemma we then have: There exists a unique $\boldsymbol{a}_\varrho$ with the following properties:

$$v(\boldsymbol{a}_\varrho) > v(J(\mathbf{0}_d)) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_d, \boldsymbol{a}_\varrho)=0.$$

Hence we get: The neighborhood of $a=(\mathbf{0}_d, \mathbf{0}_\varrho)$ in U defined by the conditions $\boldsymbol{a}_d\in\mathscr{U}_0$ and $v(\boldsymbol{a}_\varrho)>v(J(\mathbf{0}_d))$ is mapped homeomorphically by $\boldsymbol{t}$ onto $\mathscr{U}_0$.
Now taking into account that the open immersion $U\subseteq V$ induces a v-adic open immersion $U(K)\subseteq V(K)$ the proof of 9.2 is finished. □

As an application we want to describe the v-adic behaviour of a K-morphism of absolutely irreducible varieties at non-singular points.

First we recall some general facts about smoothness of morphisms. Let V and W be absolutely irreducible varieties over K and $\varphi: V\to W$ a morphism defined over K. Suppose that $\varphi(V)$ is dense in W, i.e., that φ is generically surjective. Let $a\in V(K)$ and $b=\varphi(a)\in W(K)$ be non-singular points. One says that φ is smooth at a if the induced ring homomorphism $\varphi^{\#}: \mathcal{O}_{W,b}\to\mathcal{O}_{V,a}$ is smooth.

9.3 The following assertions concerning the non-singular points $a\in V(K)$ and $b=\varphi(a)\in W(K)$ are equivalent, see [H], p. 271:

1) φ is smooth at a.
2) The induced canonical mapping $\mathfrak{m}_{W,b}/\mathfrak{m}_{W,b}^2\to\mathfrak{m}_{V,a}/\mathfrak{m}_{V,a}^2$ is injective.

The second condition can be interpreted as follows:
With the above notations φ *is smooth at a if and only if the image* $\varphi^{\#}\boldsymbol{u}$ *of any system of local parameters* $\boldsymbol{u}$ *at b by* $\varphi^{\#}$ *can be completed to a system of local parameters of a.*
Further, it is clear from the defintion that any generically surjective morphism $\varphi: V\to W$ is smooth on a Zariski open subset of V.

We now come to the promised description of the K-morphisms at smooth points.

Theorem 9.4 *Let (K,v) be a henselian field, V and W absolutely irreducible varieties defined over K and $\varphi: V \to W$ be a generically surjective morphism defined over K. Suppose that φ is smooth at a K-rational point a of V. Then the following holds:*
1) *There exists a v-adic open neighborhood $\mathcal{U}_a$ of a in $V(K)$ on which φ is an open map in the v-adic topology.*
2) *If $\dim V = \dim W$ then there exists a v-adic open neighborhood $\mathcal{U}_a$ of a in $V(K)$ which is mapped homeomorphically onto a v-adic neighborhood $\mathcal{U}_b$ of $b = \varphi(a)$ in $W(K)$.*

Proof. Let $\varphi^{\#}: \mathcal{O}_{W,b} \to \mathcal{O}_{V,a}$ be the canonical ring homomorphism. Take $\boldsymbol{u}$ an arbitrary system of local parameters of b. By 9.3 the image $\varphi^{\#}(\boldsymbol{u})$ of $\boldsymbol{u}$ by $\varphi^{\#}$ can be completed to a system of local parameters

$$\boldsymbol{t} = (\varphi^{\#}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{t}_1)$$

of a. Let U_a and U_b be affine neighborhoods of a, respectively $b = \varphi(a)$, as at 9.1 such that $\varphi(U_a) \subseteq U_b$ and $\boldsymbol{t}$ is defined on U_a, respectively $\boldsymbol{u}$ is defined on U_b. Now we have a commutative diagram of the form:

$$\begin{array}{ccc} U_a & \xrightarrow{\varphi} & U_b \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_t} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_u} \\ \mathbb{A}^{\dim V} & \xrightarrow{pr} & \mathbb{A}^{\dim W} \end{array}$$

where ϕ_t is the projection defined by the ring homomorphism $K[\boldsymbol{t}] \hookrightarrow K[U_a]$, ϕ_u is correspondingly defined and pr is the projection obtained from $K[\boldsymbol{u}] \to K[\boldsymbol{t}]$ defined by $\boldsymbol{u} \mapsto \varphi^{\#}(\boldsymbol{u})$. Finally, we remark that by 9.2 ϕ_t and ϕ_u are locally homeomorphisms.

To 1) This is clear, because pr is v-adic open and $\dim V \geqslant \dim W$.

To 2) This is clear, because pr is a v-adic homeomorphism as $\dim V = \dim W$.

The proof of 9.4 is finished. □

Corollary 9.5 *Let K be a henselian field.*
1) *Let $V|K$ be an absolutely irreducible variety and a be a non-singular K-rational point of V. Then any v-adic neighborhood $\mathcal{U}_a$ of a is Zariski dense in V.*
2) *Let $V|K$ and $W|K$ be absolutely irreducible varieties and $\varphi: V \to W$ a rational morphism defined over K which is generically surjective. Suppose that V has a non-singular K-rational point and $\dim V = \dim W$. Then $V(K)$ and $W(K)$ are Zariski dense in V, respectively W, and on a Zariski open subset of $V(K)$ the map φ is a v-adic local homeomorphism.*

Proof. To 1) Let a be a non-singular point of V and $\boldsymbol{t}$ a system of local parameters of a. Replacing V by an open affine containing a, without loss of generality we can suppose that V is affine and that the projection

$$pr_a : V \to \mathbb{A}^d \quad b \mapsto \boldsymbol{t}(b)$$

is regular at a. Further apply the above theorem.

To 2) By 1) it follows that $V(K)$ and $W(K)$ are Zariski dense. Further the map φ is smooth on a Zariski open subset of V. Therefore, φ is smooth on a Zariski open subset of $V(K)$. On the other hand, by the theorem above φ is a v-adic local homeomorphism at every smooth point. □

References

[B-L-R] Bosch, S.; Lütkebohmert, W.; Raynaud, M.: Néron Models. Mathematische Ergebnisse **21**, Springer Verlag (1990)

[C-R] Cantor, D.; Roquette, P.: On diophantine equations over the ring of all algebraic integers. J. Number Theory **18** (1984) 1-26

[C-K] Chang, C. C.; Keisler, H. J.: Model Theory. Amsterdam-London 1973

[C-S] Cornell, G.; Silverman, J.: Arithmetic Geometry. Springer Verlag 1986

[VdD] Van Den Dries, L.: Elimination theory for the ring of algebraic integers. J. Reine angew. Math. **388** (1988) 189–205

[VdD-McT] Van Den Dries, L.; Macintyre, A.: The logic of Rumely's local-global principle. J. reine angew. Math. **407** (1990) 33–56

[D1] Deuring, M.: Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers. Math. Z **47** (1942) 643–654

[D2] Deuring, M.: Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlecht 1. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys.-Chem. Kl. (1955) 13–42

[E] Eichler, M.: Introduction to algebraic numbers and functions. Academic press, New York and London (1966)

[G-J] Geyer, W.-D.; Jarden, M.: On stable fields in positive characteristic. Geom. Dedic. **29** (1989) 335–376

[G-M-P] Green, B. W.; Matignon, M.; Pop, F.: On the Local Skolem Property. J. reine angew. Math. **458** (1995) 183–199

[G-M-P2] Green, B. W.; Matignon, M.; Pop, F.: On valued function fields II, Regular functions and elements with the uniqueness property. J. reine angew. Math. **412** (1990) 128–149

[Grb] Greenberg, M. J.: Lectures on forms in many variables. Benjamin, New York, 1969

[H] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. Springer, GTM **52**, 1977

[M-B] Moret-Bailly, L.: Groupes de Picard et problèmes de Skolem I, II. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. **22** (1989) 161–179, 181–194

[M] Mumford, D.: The Red Book of Varieties and Schemes. Springer Verlag LNM **1358** 1988

[P] Pop, F.: Fields of totally Σ-adic numbers. manuscript 1990

[P2] Pop, F.: On the Galois Theory of function fields of one variable over number fields. J. reine angew. Math. **406** (1990) 200–218

[Pr-S] Prestel, A.; Schmidt, J.: Existentially closed domains with radical relations: An axiomatization of the ring of algebraic integers. J. reine angew. Math. **407** (1990) 178–201

[Rob] Robinson, A.: Complete theories. North Holland (1956)

[R1] Roquette, P.: Zur Theorie der Konstantenreduktion algebraischer Mannigfaltigkeiten. J. reine angew. Math. **200** (1958) 1–44

[R2] Roquette, P.: Solving diophantine equations over the ring of all algebraic integers. Atas de 8ᵉ Escola de Algebra. Vol 2, IMPA 84

[R3] Roquette, P.: Reciprocity in valued function fields. J. reine angew. Math. **375/376** (1987) 238–258

[Ru1] Rumely, R.: Arithmetic over the ring of all angebraic integers. J. reine angew. Math. **368** (1986) 127–133

[Ru2] Rumely, R.: Capacity theory on algebraic curves. Springer L. N. M. **1378** Berlin Heidelberg New-York 1989

[S] Serre, J. P.: Groupes Algébriques et Corps de Classes. Hermann, Paris 1959

Barry Green, Florian Pop, Peter Roquette
Mathematisches Institut, Universität Heidelberg,
D-69120 Heidelberg

(Eingegangen 10. 10. 1994)

Buchbesprechungen

Cantor, G., Briefe. Hrsg von H. Meschkowski und W. Nilson, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1991, 535 S., DM 158,–

Der vorliegende Band stellt sich das Ziel, dem Leser Werk und Persönlichkeit Georg Cantors anhand einer Auswahl seiner Briefe nahezubringen. Es sind insgesamt 185 Briefe Cantors an 54 Adressaten abgedruckt. Sie umspannen den Zeitraum 1869 bis 1916, d. h. vom Beginn seiner Tätigkeit als Privatdozent in Halle bis kurz vor seinem Tode. Unter den Adressaten finden sich zahlreiche Mathematiker, darunter so bedeutende Gelehrte wie Dedekind, Hermite, Hilbert, Klein, Kronecker, Mittag-Leffler, Poincaré, Schwarz und Weierstrass, ferner Philosophen, Theologen, Literaten, Mediziner und Persönlichkeiten des öffentlichen Lebens. Diese Breite der Briefauswahl ermöglicht es in der Tat, sich von der Entwicklung von Cantors ureigenster Schöpfung, der Mengenlehre, aber auch von seinen weit über die Mathematik hinausgehenden Interessen und Aktivitäten ein umfassendes Bild zu machen. Die Briefe sind von den Herausgebern mit Anmerkungen versehen, die teils dazu dienen, einzelne Briefstellen zu erläutern, teils aber auch den jeweiligen Brief in einen allgemeineren Zusammenhang einordnen und so das Verständnis wesentlich erleichtern. Das Buch enthält neben den Briefen Cantors auch einige Gegenbriefe seiner Korrespondenten oder Auszüge daraus, ein umfangreiches Literaturverzeichnis, Faksimiles einer Reihe von Briefentwürfen sowie Fotos von Cantor, seiner Familie und einigen bekannten Mathematikern.

In einem einleitenden Essay „Georg Cantor als Briefschreiber“ werden wichtige Themenkreise der Briefe, wie z. B. Cantors Verhältnis zu Kollegen, Probleme der Forschung, die Antinomien und anderes in kurzen Überblicken dargestellt. Möglicherweise ist es der Kürze der Darstellung geschuldet, wenn hier manches einseitig und undifferenziert abgehandelt ist. So heißt es, daß Cantor sich in einer „ihm gegenüber ablehnend oder gar feindlich gesinnten Welt zu behaupten“ hatte (S. 4). Wenn Cantor von der mathematischen Welt tatsächlich so strikt und durchgehend abgelehnt worden wäre, wie wäre es dann zu erklären, daß seine Arbeiten über trigonometrische Reihen und seine Ansätze zur Punktmengentopologie sofort Resonanz fanden? Wie wäre es möglich gewesen, daß F. Klein als Redakteur der Mathematischen Annalen gerade ihm eine solch Aufsehen erregende Arbeit wie Lindemanns Beweis der Transzendenz von π zur Prüfung übergeben hat; wie hätte gerade Cantor ganz wesentlich die Gründung der DMV bewerkstelligen können? Auch das Verhältnis zu Kronecker ist aus der Sicht der Briefe Cantors an Mittag-Leffler einseitig überzeichnet. Für Kronecker war die Mengenlehre eine Marginalie. Sein Mißtrauen richtete sich gegen alle mathematischen Theorien, die nicht konstruktiv begründet waren. Und da tangierten ihn Dedekinds Zahlentheorie und die Weierstraßsche Funktionentheorie weitaus mehr als etwa die Mengenlehre, was z. B. schon daraus ersichtlich wird, daß Kronecker sich in Publikationen nie gegen Cantor, wohl aber – wenn auch sehr vorsichtig und maßvoll – mehrmals gegen Dedekind und auch gegen die neuere Analysis geäußert hat. Auch wird S. 4/5 der falsche Eindruck erweckt, als habe Kronecker im Hinblick auf konstruktive Begründung mathematischer Theorien nichts geleistet. Auf S. 5 wird der „Geburtstag“ der Mengenlehre auf den 7.12.1873 verlegt, auf jenen Tag, an dem Cantor Dedekind mitteilte, daß das Kontinuum nicht abzählbar ist. Man weiß heute, daß der Ursprung der Mengenlehre nicht in dieser Erkenntnis liegt, sondern in der Idee der transfiniten Ordinalzahlen, die Cantor schon um 1870 anläßlich seiner Arbeiten über trigonometrische Reihen entwickelte, wenn auch noch in der konkreten Gestalt der Ableitungsordnungen von Punktmengen. Was Cantors Polemik in einem Brief an Pater Jeiler von Pfingsten 1888 (nicht 1988) gegen die Mehrheit der „modernen Mathematiker“, die „durch den glänzenden Erfolg ihres stets sich vervollkommnenden Formelwesens, das immer mehr Anwendungen auf die mechanische Seite der Natur zuläßt, in einen Siegesrausch hineingeraten ...", mit dem Formalismus und Hilberts „Grundlagen der Geometrie" zu tun hat (S. 9), ist unerfindlich. Es gäbe zahlreiche weitere Stellen in der Einführung, die zur Kritik herausfordern; es ist hier nicht der Ort, dies weiter auszuführen.

Sieht man von den Schwächen der Einführung ab, so ist der vorliegende Band ein äußerst wertvoller und willkommener Beitrag zur Geschichte der Mathematik und darüberhinaus zur Geistesgeschichte in der zweiten Hälte des 19. und im beginnenden 20. Jahrhundert.

Leipzig W. Purkert

Kay, R., Models of Peano Arithmetic (Oxford Logic Guides 15), Oxford: Clarendon Press 1991, 292 S., £ 36.00

1891 gab Guiseppe Peano eine Charakterisierung des Systems der natürlichen Zahlen N, indem er eine Liste von Axiomen aufschrieb, die insgesamt nur in diesem System gelten. Darunter kommt ein Axiom vor, das Induktionsaxiom, in dem über Mengenvariable quantifiziert wird. Peanos Axiomensystem gehört deshalb der Logik der zweiten Stufe an und ist wie gewünscht kategorisch.

Wenn man das Induktionsaxiom in der Logik der ersten Stufe formuliert und zu den übrigen Axiomen Peanos hinzufügt, dann entsteht ein Axiomensystem, PA genannt, das neben dem System N noch viele weitere Modelle hat. Das sind die nichtstandard Modelle von PA und von diesen Modellen handelt das vorliegende Buch.

Es stellt sich jetzt die etwas provozierende Frage, ob denn den vielen nichtstandard Modellen von PA auch nur annähernd die Bedeutung zukommt, die dem Standardsystem N zukommt? Der Autor sagt nichts dazu, warum es sich lohnen könnte, die vielen Modelle von PA zu studieren. Wenn man aber das Buch zu lesen beginnt, stößt man bald auf zahlreiche hochinteressante und überraschende Sätze. Am Ende möchte man sagen, daß zwar kein einziges Nichtstandard-Modell von PA für sich allein genommen besonders wichtig ist, daß aber die gesamte Theorie dieser Modelle eine große Bedeutung hat.

Gleich zu Anfang des Buches findet sich der Satz, daß es $2^{\aleph_0}$ paarweise nichtisomorphe abzählbare PA-Modelle gibt, und später wird dann der berühmte (aber bisher unpublizierte) Satz von Tennenbaum bewiesen, daß unter all diesen Modellen das Standardsystem N das einzige rekursive Modell ist. Von Gaifman stammt der schöne Satz, daß eine beliebige Erweiterung eines PA-Modelles A zu einem PA-Modell B stets über einen Zwischenschritt erreichbar ist: zuerst wird A so zu einem PA-Modell M erweitert, daß A als geordnete Menge konfinal in M liegt, und sodann wird M zu B erweitert so, daß M Anfangsabschnit von B ist. Die Modellerweiterung wird hier in zwei *reine* Etappen zerlegt, zuerst eine konfinale Erweiterung und sodann eine Enderweiterung. Ähnliche Zerlegungssätze kennt man ja auch aus der Algebra, wo etwa eine Körpererweiterung in eine rein-transzendente Erweiterung, auf die eine rein-algebraische Erweiterung folgt, zerlegt wird. Mit zu den Höhepunkten des Buches gehört der Satz von H. Friedman, demzufolge jedes abzählbare Nichtstandard-Modell von PA mit einem echten Anfangsabschnitt von sich selbst isomorph ist (der Anfangsabschnitt kann sogar als Σ_n-Substruktur gewählt werden). Unter allen abzählbaren PA-Modellen ist also das Standard Modell das einzige, das *co-hopfsch* ist (Die Begriffe „hopfsch" und „co-hopfsch" (R. Baer 1944, 1969) sind der Gruppentheorie entlehnt).

Das Buch ist sehr systematisch aufgebaut. Zuerst wird alles Nötige aus der Logik, der Rekursiontheorie, der Modelltheorie und der Algebra (diskret geordnete Ringe, elementare Zahlentheorie) dargestellt. Erste Höhepunkte sind dann die Sätze von MacDowell-Specker und Gaifman. Die Technik der „Gödelisierung“ (Arithmetisierung der Syntax) wird knapp, aber deutlich, dargestellt und damit auch der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz bewiesen. Der zweite Unvollständigkeitssatz wird nur als Übungsaufgabe (!) behandelt. Die Arithmetisierung der Semantik führt dann zu den „satisfaction classes“, womit dann die Sätze über rekursiv-saturierte Modelle abgehandelt werden. Schließlich wird mit der Theorie der Indikatoren ein Zugang zum Satz von Paris-Harrington gegeben. Hier zeigt sich, wie die Theorie der PA-Modelle zur Entdeckung eines wahren kombinatorischen Satzes (vom Ramsey-Typ) geführt hat, der in PA nicht beweisbar ist.

Das Buch ist weitgehend in sich selbst abgeschlossen und wendet sich an Leser, die bereits in die Logik eingeführt sind. Der größte Teil des dargestellten Materials wurde erst in den letzten zehn oder zwanzig Jahren entwickelt. Das Buch ist klar und präzise geschrieben und übersichtlich gestaltet. Auch die Ausstattung des Buches ist vorzüglich: guter Druck, ein solider Ganzleinen-Einband und Fadenheftung! Es ist ein Buch, das in jeder Hinsicht empfehlenswert ist.

Tübingen U. Felgner

Chapman, J., Rowbottom, F., Relative Category Theory and Geometric Morphisms (Oxford Logic Guides 16), Oxford: Clarendon Press 1991, 263 S., £ 35.00

This monograph uses intuitionistic languages to study certain "Geometric morphisms" between toposes. Recall that a continous map $f: X \to Y$ between spaces X and Y can be used to send sheaves on X into those on Y and vice-versa. This pair of adjoint functors

$$f_* : \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y), \qquad f^* : \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X),$$

between categories of sheaves (actually topoi) is the basic example of a "geometric" morphism between categories of "Grothendieck" topoi. In developing algebraic geometry, Grothendieck introduced more general "topologies" J, describing suitable "coverings" (as by open sets) on an arbitrary category C, this in order to construct the category $\mathrm{Sh}_J(C)$ of all sheaves for such topologies. These sheaf categories are the "Grothendieck Topoi"; the more general elementary topoi S are (large) categories with all finite limits, a power set object $P(D)$ for every object D and a subobject classifier, called Ω, which serves as a recipient for suitable characteristic functions of subobjects (for details, one may consult the recent book, Mac Lane/Moerdijk [5], p. 161). The famous Giraud theorem presents conditions sufficient to show that a given category $\mathscr{E}$ is such a Grothendieck topos.

The category of sets is a topos, and an arbitrary topos S may serve as a generalized category of sets, so that one may do mathematics within S, and in particular consider a topos $\mathscr{E}$ "in" S, often called relative or "internal" to S. The main result of this book is a logistic proof of a suitable "relative" Giraud theorem (12.5.2) for such $\mathscr{E}$.

The development involves an interplay between the given S and the topos (script) $\mathscr{S}$ of all internal sets of S (defined as all power-set objects $P(D)$ for objects D of S). In S one needs not only the usual "small" internal categories C, which are essentially objects of S, with a category structure, but also potentially "large" categories $\mathscr{C}$ "in" S (my quotes). They are given by a metaclass of indices A, together with internal sets C_A of A-objects and such sets C_{AB} of morphisms $A \to B$ with the expected categorical axioms. (The authors motivate this by a reference to the "indexed" categories of Paré-Schumaker [7]; the latter indices came from a category and these indexed categories, equivalent to the well-known fibered categories of Grothendieck, do not resemble the large categories $\mathscr{C}$ considered here; this makes this reference seems out of place; I also found the explanation of "metaclass" confusing). But the proffered definition does provide (p. 208) the desired relative Giraud theorem, which gives the expected conditions that a topos $\mathscr{E}$ "in" S have its global elements $\mathrm{Gl}(\mathscr{E})$ the topos of sheaves for a suitable Grothendieck topology. Here "Global" means the usual "global cross-sections", as for an ordinary sheaf, so that the global objects of A are morphisms $1 \to C_A$.

But note that the classical Giraud theorem explicates when any category (not necessarily a topos) in Sets is a Grothendieck topos, and implies the different theorem stating when a topos $\mathscr{E}$ in sets is Grothendieck (explained in the appendix of [5], a reference which was not available to the authors of this monograph.)

This relative Giraud theorem is closely related to a similar theorem of Diaconescu, a simplification of its original proof is presented in the standard reference book on topos theory, Johnstone [4]. It may be connected to a recent result of Jibladze [3], relating geometric morphisms to fibered toposes; the latter reference is not mentioned in this monograph.

Another main result is a representation theorem for an arbitrary geometric morphism $\gamma: S' \to S$. (ie., a functor with a left exact left adjoint. This theorem constructs from γ a topos $\mathscr{E}$ "in" S, a geometric morphism $\mathscr{E} \to \mathscr{S}$ and an equivalence of γ to the geometric morphism

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(1, -) : \mathrm{Gl}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{S})$$

recall that $\mathscr{S}$ is the topos of "sets" of S.

Now this and other results (for instance, those about the parametrized categories introduced in an appendix) deal with "large" objects internal to S; moreover, the "internal" logic of a topos S is well known to be intuitionistic. This calls for careful proofs. The authors accomplish this by a massive use of languages and formalism, as for example in the systematic use of a meticulous Gentzen-style axiomatics for a "local set theory"; a version of intuitionistic set theory. This follows the usage of an earlier text by Bell [1]. This reviewer guesses that this local set theory reflects the well-known fact that a well-pointed topos corresponds to a weak form of Zermelo set – theory in which the comprehension axiom applies only to formulas with "bounded" (= "local"?) quantifiers. It could also be described as writing mathematics as in the formalism of *Principia Mathematica,* improved and made intuitionalistically valid. This reviewer must admit that he found this formalism perhaps needless and certainly confusing, on his view that mathematics deals with substance and not with elaborate languages.

In this book, the motivation is almost entirely absent; sheaves for a Grothendieck topology are defined, but there is no explanation whatever of their use in topology or in algebraic geometry; for example "global" elements are not motivated as cross-section. This style may result from the observation that the authors have rarely talked with the many students of topos theory, and so tend to quote various papers now generally considered to be obsolete. The bibliography is incomplete; for example the text mentions (at least twice) work [6] of W. Mitchell – who does not appear in the bibliography; however, there are numerous references to unpublished work of Chapman and Zangwill on languages. References to forcing are totally inadequate; for instance, there is no reference to decisive papers of Tierney. The whole presentation is full of symbols, new and old, but there is no index of symbols. There is a heavy use of partial functions, although active experts on topos theory now know how to avoid their clumsy use. Much notation, as that for exponentials, is non-standard.

Despite all the formalism, the presentation is often unclear or non-rigorous. For example, page 83 reads "A topos $\mathscr{E}$ in S is a finitely complete category with subobject classifier ...." This neglects to state that it is a category "in" S, a vital point. On the same page, "meta" topoi are mentioned, with no explanation of the prefix "meta" and little discussion of the wide world of meta things.

Readers familiar with formal logic might well find this carefully prepared book attractive. But this reviewer finds it uninformed, poorly motivated, and overly formalized. He regrets that the philosophically inclined authors and the publishers did not choose to consult enough, before publication, with some of the many mathematicians active in topos theory.

References

[1] Bell, J. L.: Toposes and Local set theories. An Introduction. Oxford: Oxford University Press 1988

[2] Diaconescu, R.: Change of base for toposes with generators. J. Pure and Applied Algebra **6** (1975) 191–218

[3] Jibladze, M.: Geometric morphisms and indexed toposes, pp. 10–18. In: Category theory and its relations to Analysis ..., edited by J. Adamek and S. Mac Lane, 478 pages. World-Scientific 1989

[4] Johnstone, P.: Topos Theory. New York: Academic Press 1992

[5] MacLane, S.; Moerdijk, I.: Sheaves in geometry and logic, A first introduction to topos theory. New York: Springer 1992

[6] Mitchell, W.: Boolean Topoi and the theory of sets. J. Pure and Applied Algebra **2** (1972) 261–274

[7] Paré, R.; Schumaker, D.: Abstract families and the adjoint functor theorems. In: Indexed categories and their applications. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 661. Berlin, New York: Springer 1978

Chicago S. Mac Lane

Cohn, P.M., Algebra, 2. Auflage, Bd. I–III Chichester: John Wiley, Bd I: 1982, 410 S., £ 14.59 (pb), Bd. II: 1989, 428 S., £ 14.95 (pb), Bd. III: 1991, 474 S., £ 55.00

Es handelt sich um die revidierte Ausgabe von des Verfassers früheren Lehrbuchs über Algebra, das zwei Bände umfaßte (die 1974 bzw. 1977 erschienen waren). Nachdem vom ersten Band schon 1982 eine zweite Auflage herauskam, hat nun der zweite Band bei der vorliegenden Ausgabe eine Teilung in zwei Bände erfahren. Diese Teilung ist sowohl durch Verbreiterung und Ausgestaltung von vorher schon angesprochenen Bereichen als auch durch die Aufnahme neuer Themen nötig geworden.

Einige der weiter vorgerückten Teile des alten zweiten Bandes bleiben nun dem dritten Band vorbehalten. Dafür enthält der neue zweite Band jetzt einführende Darstellungen von vormals nicht behandelten Gegenständen (Kap. 10: Coding theory, Kap. 11: Languages and automata). Daneben findet auch die Darstellungstheorie endlicher Gruppen eine wesentlich breitere Berücksichtigung als vorher, und das Kapitel über Bewertungstheorie erhält einige erforderliche Ergänzungen. Hervorgehoben zu werden, verdienen aber auch zahlreiche Änderungen en détail: Vereinfachungen von Beweisen, breitere Beweisausführungen, Aufnahme weiteren Beispielmaterials.

Was das neu aufgenommene Material des dritten Bandes betrifft, so sei hier schlagwortartig nur folgende Auswahl genannt: Universelle Algebra, Schiefkörper, Hall-Gruppen, Morita-Äquivalenz, verallgemeinerte Polynomidentitäten, Satz von Krull-Schmidt, symplektische und orthogonale Gruppen.

Insgesamt enthält das Lehrbuch eine Fülle von Stoff (und gar manches, was in anderen Lehrbüchern der Algebra nicht angesprochen wird). Sein Leser erhält die Möglichkeit, sich über vieles zu informieren und zu erfahren, was es alles so gibt. An einen roten Faden wird er sich freilich weniger halten können, und eine gewisse Dramaturgie wird mancher vermissen. Als Begleittext zu einer Vorlesung ist das Buch demnach weniger geeignet. Als reiche Fundgrube aber werden Dozenten wie Studenten es zu schätzen wissen.

Großen Dank verdient der Verfasser auch für die zahlreichen Aufgaben, die den gesamten Text durchziehen. Schließlich verdient auch die hervorragende äußere Aufmachung aller drei Bände ein ungeteiltes Lob.

Münster F. Lorenz

Assmus, E. F., Key, J. D., Designs and their Codes, Cambridge University Press 1992, 352 S., £ 40.00

Im vorliegenden Buch „Designs and their Codes" untersuchen E. F. Assmus und J. D. Key mehrere interessante Probleme, die sich beim Studium von den zu Designs gehörenden Codes ergeben. Zunächst einiges zu den Begriffen „Codes" und „Designs": Ein Code C der Länge n über dem endlichen Körper $GF(q)$ ist eine (beliebige) Teilmenge von $GF(q)^n$. Das Gewicht eines Codewortes $(x_1, \ldots, x_n)$ ist die Anzahl der von 0 verschiedenen x_i. In dem vorliegenden Buch werden nicht beliebige, sondern ausschließlich lineare Codes betrachtet, also lineare Unterräume von $GF(q)^n$. Wichtige Parameter linearer Codes sind ihre Dimension sowie ihr Minimalgewicht, d. h. das Minimum der von 0 verschiedenen Gewichte, die in dem Code auftreten. Ein „Design" ist eine Inzidenzstruktur bestehend aus Punkten und Blöcken sowie einer Inzidenzrelation. Diese Inzidenzrelation gibt an, ob ein Punkt auf einem Block liegt. Zu jedem endlichen Design (d. h. die Anzahl der Punkte und Blöcke ist endlich) gehört eine Inzidenzmatrix: Die Zeilen und Spalten werden mit den Punkten und Blöcken des Designs indiziert und der Eintrag in der Matrix ist 1 falls der entsprechende Punkt auf dem entsprechenden Block liegt, anderfalls ist der Eintrag 0. Der $GF(q)$-Vektorraum, der von den Zeilen einer solchen Inzidenzmatrix aufgespannt wird, heißt der Code des Designs. Nicht für alle Potenzen q sind diese Codes interessant: In der Regel ist die Charakteristik von $GF(q)$ eine Zahl, die von den Parametern des Designs abhängt (Teiler der Ordnung).

Im Schnitt von Codierungs- und Designtheorie sind folgende Fragestellungen interessant:

1. Liefern bestimmte Designs „gute" Codes?
2. Was sagen die Eigenschaften des Codes eines Designs über das Design?

Das vorliegende Buch beschäftigt sich im wesentlichen mit der zweiten Frage. Es ist gut, hier ein Buch zur Verfügung zu haben, in dem die Autoren fast ausschließlich die Bedeutung der Codierungstheorie für die Designtheorie untersuchen, denn in den meisten klassischen Büchern über Codierungstheorie wird dieser Zusammenhang nur am Rande erwähnt. Umgekehrt spielt die Codierungstheorie in den meisten Büchern über „Designs" nur eine untergeordnete Rolle. Eine Ausnahme ist sicherlich „Designs, Graphs, Codes and their Links" von P. J. Cameron und J. H. van Lint (London Mathematical Society, Student Texts 22), das eine ganz ähnliche Absicht verfolgt wie das Buch von Assmus und Key. Eine kurze Einführung in die Codierungstheorie und die Designtheorie findet sich in beiden Büchern, im vorliegenden Fall sind das die Kapitel 1–4. Der Rest des Buches unterscheidet sich jedoch stark von Cameron/van Lint, deshalb kann man eher sagen, daß sich beide Bücher ergänzen, als daß sie miteinander konkurrieren.

In Kapitel 5 untersuchen Assmus und Key die klassischen geometrischen Codes, das sind die Codes der affinen und projektiven Geometrien. Diese Darstellung ist sehr verdienstvoll, da die Originalarbeiten zum Teil extrem knapp geschrieben worden sind.

Kapitel 6 beschreibt Codes projektiver und affiner Ebenen. Hier ist insbesondere die Vermutung von Hamada-Sacher zu erwähnen, daß die Dimension des Codes einer desarguesschen projektiven Ebene eine untere Schranke für die Dimension beliebiger

Ebenen ist und daß diese Schranke nur für desarguessche Ebenen angenommen wird. Ein weiterer Aspekt in diesem Kapitel ist die Frage, welche Codewörter eine geometrische Interpretation haben, also beispielsweise welche Codewörter Geraden in einer affinen Ebene beschreiben.

Das Kapitel 7 ist Hadamardmatrizen und Hadamard-Designs gewidmet. Die Designs, die aus Hadamardmatrizen konstruiert werden können, sowie deren Codes werden untersucht. Die Autoren fassen einige interessante Eigenschaften „kleiner" Hadamardmatrizen zusammen (Größe 12, 16, und 24). Es werden interessante Zusammenhänge zwischen Hadamard-Designs und ihren Codes auf der einen und Reed-Muller-Codes auf der anderen Seite untersucht.

Im letzten Kapitel schließlich geht es um Steinersysteme und ihre Codes. In jeweils einem Abschnitt werden „Steiner triple and quadruple systems", Unitale sowie Designs, die aus Ovalen projektiver Ebenen konstruiert werden, untersucht. Es werden Moebiusebenen sowie die Witt-Designs und in dem Zusammenhang die Golay-Codes angesprochen. Weil die Golay-Codes in der Literatur bereits vielfach beschrieben wurden, haben die Autoren hier auf eine weitere ausführliche Darstellung verzichtet, auch wenn die Golay-Codes ein Klassiker in dem Gebiet „Codes and Designs" sind.

Das Buch ist sehr sorgfältig geschrieben, mir sind nur vergleichsweise kleine Ungenauigkeiten aufgefallen. Das Buch ist, wie schon erwähnt, eine willkommene Ergänzung zum Cameron/van Lint. Es sind nicht alle (aber viele) Beweise in allen Einzelheiten durchgeführt worden, das Buch ist also weniger als Lehrbuch, allerdings gut als Seminargrundlage geeignet. Es enthält einige Übungsaufgaben, allerdings ohne Lösungsvorschläge, sowie eine umfangreiche Bibliographie. Mehrere als „Questions" formulierte „research problems" führen den Leser an interessante Probleme der aktuellen Forschung heran.

Augsburg A. Pott

Becker, T., Weispfenning, V., Gröbner Bases, A Computational Approach to Commutative Algebra, Berlin u. a.: Springer Verlag 1993, 595 S., DM 88,–

Gröbner-Basen wurden vor nunmehr beinahe drei Jahrzehnten von B. Buchberger entwickelt, um gewisse konkrete Berechnungsprobleme in der Theorie der Polynomideale (kommutative Algebra) zu lösen. Inzwischen ist dieses äußerst vielseitig anwendbare Werkzeug aus der kommutativen Algebra, der konstruktiven algebraischen Geometrie und der Computer-Algebra nicht mehr wegzudenken. Gröbner-Basen gewinnen auch laufend Bedeutung in weiteren Gebieten der Mathematik, wie z. B. in der Kodierungstheorie. Dadurch entstand natürlich auch das immer dringlichere Bedürfnis nach einer gut leserlichen, allgemein mathematisch verständlichen, gediegenen und umfassenden Einführung in die Theorie und Anwendung von Gröbner-Basen. Diese Lücke konnte nun durch das vorliegende Buch von Becker und Weispfenning in hervorragender Weise geschlossen werden. Im folgenden soll auf die einzelnen Kapitel des Buches näher eingegangen werden.

Die ersten drei Kapitel geben eine Einführung in Teilgebiete der abstrakten Algebra, soweit sie später im Buch von Bedeutung sein werden. Euklidsche Bereiche und Polynomringe stehen im Zentrum. Auch werden Vektorräume und Moduln behandelt, um den in der Theorie der Gröbner-Basen wichtigen Begriff der Syzygie einführen zu können. Faktorisierung und quadratfreie Faktorisierung von Polynomen werden nur auf der Ebene der abstrakten Algebra behandelt.

Im vierten Kapitel werden Ordnungen auf freien Monoiden, die Dickson-Eigenschaft solcher Ordnungen und einige Grundbegriffe von Reduktionsrelationen als Grundlagen zur späteren Verwendung vorbereitet.

Das eigentliche Zentrum des Buches bilden die Kapitel fünf und sechs. Hier werden Gröbner-Basen als spezielle Basen von Polynomidealen definiert, ihre Existenz nachgewiesen und der Buchberger-Algorithmus zu ihrer Berechnung entwickelt. Verschiedene Optimierungen (Kriterien) und Erweiterungen (analog zum erweiterten Euklidschen Algorithmus) werden vorgestellt. Die unmittelbaren Anwendungen in der Theorie der Polynomideale, nämlich auf die Arithmetik von Polynomidealen, auf die Entscheidung der Zugehörigkeit eines Polynoms zu einem Ideal oder seinem Radikal, auf die Lösung linearer Gleichungen über Polynomringen (Syzygien), sowie auf die Entscheidung der Nulldimensionalität eines Ideals werden dargelegt. Dem Leser werden zum Verständnis äußerst hilfreiche Intuitionen geboten.

In den Kapiteln sieben bis neun werden einige weitere Anwendungen behandelt, wie etwa eine konstruktive Version des Hilbertschen Nullstellensatzes, allgemeine Dimensionsbestimmung, Berechnung von Radikalen, Primärdekomposition und Berechnung der Hilbertfunktion eines Ideals.

Schließlich wird im zehnten Kapitel auf einige Variationen des Begriffs der Gröbner-Basen hinsichtlich des zugrundeliegenden Koeffizientenbereichs oder der Struktur der Basispolynome eingegangen. Ausblicke auf aktuelle Forschungsthemen sowie eine umfangreiche Bibliographie beschließen das Buch.

Natürlich kann eine Monographie nicht alle Aspekte einer so weitverzweigten Theorie wie der der Gröbner-Basen beleuchten. Dennoch würde man sich wohl eine Erwähnung des Begriffs der universellen Gröbner-Basen, des „Gröbner fan's“ oder der Klassifizierung zulässiger Termordnungen erwarten. Zumal gerade einer der Autoren maßgeblich an deren theoretischer Ausformung beteiligt war. Auch auf die Lösung algebraischer Gleichungssysteme mittels Gröbner-Basen und die Komplexität der zentralen Algorithmen könnte etwas näher eingegangen werden. Dazu möge der interessierte Leser etwa die Artikelsammlung „Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra“ von D. Eisenbud und L. Robbiano zur Hand nehmen.

Alles in allem ist das Buch aber mit größter Sorgfalt aufgebaut und redigiert. Ein Fehler hat sich dennoch eingeschlichen. In Theorem 2.105 auf Seite 115 ist zwar mR ein Ideal, nicht aber $a+mR$. Zusammenfassend sei festgestellt, daß das vorliegende Buch hervorragend geeignet ist als Einführung in die Theorie der Gröbner-Basen, daß aber auch der fortgeschrittene Leser durchaus neue interessante Aspekte darin entdecken kann. Es darf in keiner Literatursammlung zur konstruktiven Algebra fehlen.

Linz F. Winkler

(Siehe auch Buchbesprechung auf S. *37*)

Simon, K., Effiziente Algorithmen für perfekte Graphen, Stuttgart: Teubner 1992, 286 S., DM 42,–

Das Gebiet der perfekten Graphen ist algorithmisch wie kombinatorisch gleichermaßen reizvoll. Daher besticht die Idee, Informatik- und Mathematikstudenten mittleren Semesters über perfekte Graphen in die algorithmische Graphentheorie und Diskrete Mathematik einzuführen.

Das vorliegende Buch orientiert sich in starkem Maße an der Standardreferenz auf diesem Gebiet: Golumbic, M. C., Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Academic Press, New York, 1980. So wird zunächst Handwerkszeug wie Algorithmen zur

Graphentraversierung und zur topologischen Sortierung eines azyklischen Graphen bereitgestellt. Darüber hinaus findet man ein Verfahren zur Berechnung der transitiven Hülle eines Digraphen. In einem kurzen theoretischen Kapitel wird sodann der Perfekte-Graphen-Satz über die Lovász-Charakterisierung bewiesen. (Der elegante und direkte Beweis aus der Arbeit Lovász, Perfekt Graphs, in: Selected Topics in Graph Theory 2, Hrsg Beineke und Wilson, Academic Press, London, 1983, wäre in dem gesteckten Rahmen jedoch erhellender gewesen.) Im Anschluß daran fügt der Autor ein Kapitel über bipartite Graphen ein, um einen $\mathcal{O}(\sqrt{n}m)$-Algorithmus für bipartites Matching zur Hand zu haben. Ferner werden hier die später benötigten, von Booth und Lueker eingeführten $\mathcal{PQ}$-Bäume ausführlich und bisher wohl erstmals in Lehrbuchform behandelt. Im Hauptteil des Buches werden dann bekannte Klassen von perfekten Graphen, wie triangulierte und transitiv orientierbare, Permutations- und Intervallgraphen jeweils charakterisiert und effiziente Algorithmen zu ihrer Erkennung sowie zur Berechnung der chromatischen Zahl χ, der Cliquenzahl ω, der Unabhängigkeitszahl α und der Cliquenüberdeckungszahl $\varkappa$ entwickelt. Hier stellt der Autor neben den $\mathcal{O}(\Delta m+n)$-Algorithmus aus Golumbic (1980) zum Finden einer transitiven Orientierung eines Vergleichbarkeitsgraphen einen $\mathcal{O}(n^2)$-Algorithmus und führt das Problem, in Vergleichbarkeitsgraphen eine kardinalitätsmaximale stabile Menge und eine Cliquenüberdeckung zu finden, auf das bipartite Matchingproblem zurück – ohne allerdings anzudeuten, wie man aus einem kardinalitätsmaximalen Matching die benötigte Knotenüberdeckung gleicher Kardinalität erhält.

Der Perfekte-Graphen-Satz spezialisiert für Teilklassen wie bipartite oder transitiv orientierbare Graphen zu klassischen Resultaten der Graphentheorie wie den Sätzen von König und Hall bzw. Dilworth. Um ihre Bedeutung zu unterstreichen, beweist Simon sie trotzdem auch unabhängig vom Perfekte-Graphen-Satz und leitet sie gegenseitig voneinander ab. Eindrucksvoller wäre es da sicher gewesen, das Buch mit dem Beweis des Perfekte-Graphen-Satzes als Verallgemeinerung der entsprechenden bisherigen Ergebnisse abzuschließen. Dies entspräche auch dem historischen Hergang.

Neben der Perfekte-Graphen-Vermutung sind perfekte Graphen vor allem von algorithmischem Interesse. Die Berechnung der Grapheninvarianten χ, ω, α und $\varkappa$ ist für allgemeine Graphen nicht nur ein NP-schweres Problem – auch eine sehr grobe Approximation dieser Größen zu bestimmen, ist nach neuesten Ergebnissen schon NP-schwer. Für perfekte Graphen sind diese Probleme hingegen in polynomieller Zeit (exakt) lösbar, wie Grötschel, Lovász und Schrijver 1981 mit Hilfe der Ellipsoidmethode zeigen konnte. Diese wichtigen Ergebnisse auf dem Gebiet der perfekten Graphen, die nach dem Erscheinen des Buches von Golumbic erzielt worden sind, finden in der vorliegenden Darstellung leider keine Erwähnung, obgleich sie doch die Beschäftigung mit effizienten Algorithmen für perfekte Graphen motivieren und in einen übergeordneten Zusammenhang stellen.

Die Komplexitätstheorie als Grundlage der Theorie der Algorithmen kommt insgesamt in diesem Band, der sich doch als Einführung in die algorithmische Graphentheorie versteht, deutlich zu kurz. Der Autor bemüht zwar das RAM-Modell und die Turing-Maschine (Konzepte, die später nirgendwo wieder benötigt werden), hält dann jedoch wohl selbst noch einige erklärende Worte für nötig und beschreibt NP informell als die Klasse von Problemen, für die man bisher nur exponentielle Algorithmen kennt. Daß es für allgemeine Graphen NP-schwer ist, χ, ω, α und $\varkappa$ zu berechnen, erwähnt Simon nur beiläufig. Gerade für einen Anfänger sind klare Definitionen und erläuternde Beispiele wichtig – in der hier gewählten Form wird der Leser ohne Vorbildung die Klassifikation „NP-vollständig" und damit die Bedeutung der Algorithmen, die er in der Folge kennenlernt, wohl kaum erfassen können. Die Definition von NP über polynomielle, Zertifikat-verifizierende Algorithmen wäre einem unmittelbaren Verständnis des Unterschieds zwischen P und NP zuträglicher gewesen und hätte zudem noch Raum für die entsprechenden NP-Vollständigkeitsbeweise gelassen.

Daß perfekte Graphen, trotz der obigen Ergebnisse, nicht zu speziell sind, um in zahlreichen Anwendungen aufzutreten, davon kann man sich in Golumbic (1980) überzeugen. Bei Simon wird die Relevanz spezieller Klassen perfekter Graphen leider nur spärlich durch Anwendungsbeispiele illustriert.

Schließlich sei noch eine kritische Anmerkung über die Lektoratsarbeit erlaubt. Den Lesefluß stören nicht nur unklare Formulierungen und etliche Kommafehler, auch sind die Seitenangaben im Stichwortverzeichnis ab etwa der Hälfte des Buches um ein bis zwei Seiten verschoben und fast alle Referenzen des Literaturverzeichnisses gleichfalls in Fußnoten aufgeführt.

Insgesamt ein Buch, das noch zu viele Wünsche offen läßt, um sich als Einführung in die algorithmische Graphentheorie entlang der perfekten Graphen zu empfehlen. Interessiert man sich hingegen lediglich für die Algorithmen, ist es sicherlich eine preiswerte (und deutschsprachige) Alternative zu dem Buch von Golombic.

Bonn H. J. Prömel

Voss, H.-J., Cycles and Bridges in Graphs, Dordrecht u. a.: Kluver 1991, 288 S., Dfl 190.00

Den Hauptgegenstand der vorliegenden Monographie bilden Gespinste von Kreisen in endlichen ungerichteten Graphen. Der Schwerpunkt der Darstellung liegt dabei auf der Untersuchung von strukturellen und extremalen Eigenschaften. Fragen der topologischen Graphentheorie werden, mit Ausnahme des Satzes von Kuratowski, nicht berührt.

Das erste Kapitel ist zwei klassischen Sätzen der Graphentheorie gewidmet: dem Kuratowskischen Planaritätskriterium und jenem berühmten Satz von Tutte, welcher besagt, daß jeder vierfachzusammenhängende planare Graph einen Hamiltonkreis besitzt.

Die Kapitel 2 und 3 handeln von nicht zerlegenden Kreisen bzw. von Gespinsten bezüglich längster Kreise und deren Eigenschaften.

In den folgenden drei Kapiteln wird ein Isomorphiebegriff für Gespinste eingeführt, mit dessen Hilfe dann einige interessante Resultate über die Rekonstruierbarkeit von Graphen und über kritische Graphen gewonnen werden.

In den Kapiteln 7, 8 und 9 werden Kreise und Gespinste in Graphen mit vorgeschriebenem Minimalgrad und vorgeschriebener Taillenweite untersucht.

Gegenstand des zehnten Kapitels sind „lange“ Kreise mit „vielen“ Diagonalen. Im letzten Kapitel werden längste Kreise in Graphen gegebenen Maximalgrades untersucht.

Das Buch ist die erste in sich geschlossene Darstellung dieses Teilgebietes der Graphentheorie und dürfte dessen Entwicklungsstand bis zum Ende der 80er Jahre im wesentlichen vollständig darstellen. Leider werden einige wichtige Sätze nur ohne Beweis wiedergegeben. Die Dastellung ist „self contained“, aber nicht immer leicht lesbar und setzt daher zum vollen Verständnis des Stoffes einige Vorkenntnisse aus der Graphentheorie beim Leser voraus.

Ilmenau H. Walther

Bachem, A., Kern, W., Linear Programming Duality, An Introduction to Oriented Matroids (Universitext), Berlin u. a.: Springer Verlag 1992, 216 S., Softcover, DM 68,–

Im Jahre 1935 ist von H. Whitney erstmals der Begriff des Matroids eingeführt worden, der viele Konstellationen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik – vor allem aus den Gebieten der Algebra, der Geometrie, der Kombinatorik und der Optimierungstheorie - vereinheitlicht. Dementsprechend gibt es mittlerweile auch etliche verschiedene, aber äquivalente Zugänge sowohl zu der allgemeinen Matroidtheorie als auch zu der Theorie der orientierten Matroide. Letztere zeichnen sich zum Beispiel dadurch aus, daß sie als eine Abstraktion endlicher geometrischer Konfigurationen in einem Vektorraum über einem angeordneten Körper aufgefaßt werden können. Während somit viele Zugänge zu der Theorie der orientierten Matroide auf der klassischen Matroidtheorie beruhen, wird in dem vorliegenden Buch ein Zugang gewählt, der auf dem bekannten Hauptsatz der linearen Optimierungstheorie basiert und ein gegebenes lineares Programm mit seinem dualen Programm in Beziehung bringt. Das Buch ist für Nicht-Experten geschrieben und als Einführung in die Theorie der orientierten Matroide gedacht. Vorausgesetzt wird lediglich Lineare Algebra und Analysis; Hilfsmittel aus anderen Gebieten werden bereitgestellt.

Das Buch ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel I werden elementare Begriffe aus der Theorie der geordneten Mengen, der Topologie, der Polyedertheorie und der Theorie der linearen Gleichungen und Ungleichungen über einem Teilkörper der reellen Zahlen aufgeführt. Dabei werden die Zusammenhänge zwischen linearen Ungleichungen und den dadurch geometrisch definierten Polyedern besonders eingehend beschrieben, weil auf diese - wie im Buch erwähnt - in der Linearen Algebra oft nicht eingegangen wird.

Die Kapitel II und III dienen hauptsächlich dazu, durch Beispiele aus der Graphentheorie und der Optimierungstheorie die Definition der orientierten Matroide zu motivieren. Diese Beispiele zeigen, daß verschiedene kombinatorische Optimierungsprobleme und insbesondere die Fragen nach der Existenz und der Optimalität von Lösungen auf das bekannte Farkas-Lemma führen, das die theoretische Grundlage für den Dualitätssatz aus der linearen Optimierungstheorie bildet. Das Farkas-Lemma verknüpft die Lösbarkeit eines Systems von linearen Ungleichungen mit der Nicht-Lösbarkeit eines verwandten Systems. Der praktische Nutzen dieser Beziehung liegt darin, daß ein einfaches Abbruchkriterium für jedes lineare Programm gewonnen wird.

In Kapitel IV werden viele Variationen des Farkas-Lemmas studiert, und es wird gezeigt, daß alle äquivalent sind. Dabei ist es deswegen sehr hilfreich, verschiedene Versionen zur Verfügung zu haben, weil manche leichter den Zusammenhang zu den Optimierungsproblemen aufzeigen, andere sind dagegen theoretisch besser handhabbar.

In Kapitel V werden orientierte Matroide definiert; sie sind in gewissem Sinne die allgemeinsten Strukturen, auf die sich das Farkas-Lemma übertragen läßt. Es werden erste Konsequenzen gezogen, und insbesondere werden mehrere äquivalente Definitionen orientierter Matroide studiert sowie deren Minoren und Duale.

Anschließend wird in Kapitel VI der Zusammenhang der linearen Optimierungstheorie zu den orientierten Matroiden studiert. Insbesondere wird aufgezeigt, daß die Lineare Programmierung als ein Problem aus der Theorie der orientierten Matroide aufgefaßt werden kann. Durch diese Einordnung wird dabei der Linearen Programmierung ein theoretischer Rahmen gegeben, der es erlaubt, den Dualitätssatz der linearen Optimierungstheorie besser zu verstehen.

In Kapitel VII wird für einen Polyeder in einem Vektorraum über einem Teilkörper der reellen Zahlen die Korrespondenz zwischen dem Verband seiner „mehrdimensionalen Seiten" und dem vollständigen System der Vorzeichenvektoren des - in kanonischer Weise - induzierten orientierten Matroids studiert. Dabei werden alle notwendigen Hilfsmittel aus der Theorie der Polyeder bereitgestellt.

Die beiden letzten Kapitel dienen dazu, zu zeigen, daß sich orientierte Matroide topologisch realisieren lassen. Motiviert wird die Frage nach der topologischen Realisierbarkeit dadurch, daß an Hand des Beispiels der Nicht-Desarguesschen Konfiguration aufgezeigt wird, daß sich nicht jedes orientierbare Matroid in einen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen einbetten läßt. In Kapitel VIII wird das vollständige System der Vorzeichenvektoren eines orientierten Matroids induktiv durch „Schälung" rekonstruiert -

ein Prozeß, der sich bei der Konstruktion der topologischen Realisierung in Kapitel IX als sehr nützlich erweist.

Das Buch ist klar und ausführlich geschrieben - wie es für Nicht-Experten erwünscht sein sollte. In den ersten acht Kapiteln werden alle aufgestellten Sätze auch bewiesen; lediglich im letzten Kapitel werden einige - anschaulich plausible - topologische Hilfsmittel ohne Beweis, aber mit Referenzangabe bereitgestellt. Besonders hervorzuheben ist, daß nicht nur ein langes Literaturverzeichnis am Ende des Buches aufgeführt ist, sondern daß obendrein auch am Ende jedes Kapitels - abgesehen von dem vorbereitenden Kapitel I - weiterführende Literatur mit kurzen Kommentaren empfohlen wird. Zur Veranschaulichung enthält das Buch außerdem zahlreiche Figuren. Leider liegt jedoch ein kleiner Mangel darin, daß die im Stichwortverzeichnis angegebenen Seitenzahlen nicht genau passen; in der Regel erscheinen die entsprechenden Definitionen im Text erst auf der übernächsten Seite.

Es sollte noch erwähnt werden, daß fast gleichzeitig mit diesem Buch auch das Buch „Oriented Matroids" von A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White und G. Ziegler erscheint. Hier werden noch wesentlich tiefer liegende Fragen aus der Theorie der Orientierten Matroide erörtert; dafür sind die Darstellungen aber auch knapper. Insgesamt halte ich das zu besprechende Buch von A. Bachem und W. Kern als dasjenige, das für Anfänger besser geeignet ist, während das andere Buch eine gute Lektüre für diejenigen Leser ist, die schon mit orientierten Matroiden vertraut sind und weitergehende Kenntnisse erwerben möchten.

Augsburg W. Wenzel

Stolfi, J., Oriented Projective Geometry (A Framework for Geometric Computations), San Diego: Academic Press 1991, 237 S., $ 39.95

Orientierung in projektiven Räumen? wird sich mancher Leser fragen. Das kann doch nicht gehen! Der $2n$-dimensionale projektive Raum läßt sich doch nicht orientieren.

Es gibt jedoch eine Reihe von neuen Anwendungen, die ein solches Konzept nahelegen.

Der Wert von homogenen Koordinaten von Punkten für die Computer-Graphik ist allgemein anerkannt und weist zwangsläufig auf die projektive Geometrie. Dadurch werden viele Spezialfälle und Formeln der affinen oder euklidischen Geometrie vereinheitlicht, ein unschätzbarer Vorteil für das Schreiben von Programmen. Perspektive und Parallelprojektion, Translation und Rotation lassen sich alle als Multiplikation mit geeigneten Matrizen auf homogenen Koordinatenvektoren schreiben.

Nachteile der Verwendung der projektiven Geometrie sind jedoch im Fehlen von Orientierbarkeit, von Strecken, von konvexen Mengen zu sehen. Richtungen lassen sich nicht eindeutig festlegen und Hyperebenen (Geraden in der projektiven Ebene) haben nur eine statt zweier Seiten.

Um diesem abzuhelfen, stellt der Autor in seinem Buch die Grundlagen einer „orientierten projektiven Geometrie" dar. Als Grundkörper wird immer der Körper der reellen Zahlen angenommen.

Der Autor verwendet verschiedene Modelle zur Definition eines n-dimensionalen *orientierten projektiven Raumes* T_n, bevorzugt jedoch für die Einführung der Begriffe das sphärische Modell. Die zugrundeliegende Menge für den n-dimensionalen projektiven Raum T_n ist

im sphärischen Modell - die n-Sphäre als Menge (hierdurch ist auch eine Topologie auf T_n gegeben), im ebenen Modell - zwei Kopien des Raumes $\mathbb{R}^n$ plus ein unendlich ferner Punkt für jede Richtung im $\mathbb{R}^n$,

im analytischen Modell - die Menge der von Null verschiedenen Vektoren des $\mathbb{R}^{n+1}$ modulo positiver Vielfachen.

Wir betrachten also eine zweifache Überlagerung des gewöhnlichen projektiven Raumes.

Die eigentliche geometrische Struktur liegt in den Flächen (flats) eines orientierten projektiven Raumes verborgen. Flächen $a = (|a|, \sigma)$ sind Paare, bestehend aus einer Teilmenge $|a|$ des T_n, der Menge der Fläche, und einer von zwei möglichen Orientierungen σ. Die Menge einer Fläche ist im sphärischen Modell als Schnitt der n-Sphäre mit einem Untervektorraum definiert $|a| = S_n \cap U$, also als Großsphäre oder Großkreis. Die Orientierung ist eine Orientierung des Unterraumes U.

Insbesondere ist die leere Menge eine Fläche. Sie kommt ebenfalls mit zwei Orientierungen vor. Weiter bestehen 0-dimensionale Flächen (also „Punkte") aus einer zweielementigen Menge mit einer Orientierung. Sie können mit den Elementen des Raumes T_n indentifiziert werden. Die Menge aller Flächen von T_n werde mit $\mathscr{F}_n$ bezeichnet.

Es entsteht unmittelbar eine Reihe von Operationen auf einem solchen orientierten projektiven Raum. Zunächst ist die Umkehrung der Orientierung auf allen Flächen möglich $\neg : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n$. Sodann ist partiell die Bildung von Hüllen $(a \vee b)$ und Durchschnitten $(a \wedge b)$ von Flächen möglich. Um eine wohldefinierte Orientierung der Hüllen bzw. Durchschnitte zu erhalten, müssen die Menge der beteiligten Flächen im Falle der Bildung einer Hülle disjunkt sein, im Falle des Durchschnitts müssen sie den gesamten Raum T_n aufspannen. Man kann dann eine Reihe von Rechengesetzen, Assoziativität, Schief-Kommutativität u. ä. beweisen. Die partiell definierten Operationen werden, wie häufig bei der Programmierung von algebraischen Datenstrukturen, durch Hinzufügen von Null-Objekten zu vollständig definierten Operationen gemacht.

Damit ist dann die geometrische Struktur eines orientierten projektiven Raumes schon fast vollständig beschrieben als $(T_n, \mathscr{F}_n, \neg, \vee, \wedge)$. Es fehlt noch die Angabe der Gruppe $\mathscr{M}_n$ der projektiven Automorphismen, die im sphärischen Modell durch lineare bijektive Abbildungen modulo positiver Vielfachen definiert werden. Diese Gruppe operiert außer auf T_n auch auf der Menge der Flächen $\mathscr{F}_n$.

Da die Menge T_n selbst auch in zwei Exemplaren (mit zwei verschiedenen Orientierungen) als Fläche auftritt, läßt sie der Autor als eigenes Datum einer orientierten projektiven Struktur fort and verwendet letztlich das Quadrupel $(\mathscr{F}_n, \mathscr{M}_n, \vee, \wedge)$ zur Definition eines orientierten projektiven Raumes.

Diese Strukturen können durch bijektive Abbildungen von der Menge der Flächen $\mathscr{F}_n$ auf beliebige andere Mengen $\mathscr{F}_s$ übertragen werden. Somit kann auch ein allgemeiner orientierter projektiver Raum definiert werden. So wird zum Beispiel die Menge der Flächen, die (mengentheoretisch) zwischen zwei vorgegebenen Flächen im Raum $(\mathscr{F}_n, \mathscr{M}_n, \vee, \wedge)$ liegen, wieder ein orientierter projektiver Raum.

Die Orientierung aller Elemente von $\mathscr{F}_n$ führt zu weiteren interessanten Funktionen, zum Beispiel zu der Funktion, die testet, ob sich bei der Hülle von zwei komplementären Flächen $a \vee b$ (sie spannen den gesamten Raum auf und haben leeren Durchschnitt) die positive Orientierung des gesamten Raums ergibt, also das „rechts liegen" von b bezüglich a.

Es zeigt sich, daß sich nunmehr viele projektive, affine und auch euklidische Begriffe in dieser neuen Geometrie behandeln lassen, so die Dualität auf einem projektiven Raum, ausgeartete projektive Abbildungen, projektive Rahmen und das Doppelverhältnis, oder aber die Konvexität, die Behandlung affiner Abbildungen, der Begriff von Strecken und Halbebenen und der einem affinen Raum zugeordnete Vektorraum und schließlich Begriffe der euklidischen Geometrie, Orthogonalität, starre Abbildungen, Längen, Abstände und Winkel.

Es wird sogar kurz gezeigt, wie die hyperbolische und die elliptische Geometrie in einem solchen orientierten projektiven Raum Modelle finden können. Die letzten Kapitel wenden sich dann der Darstellung der Flächen durch Koordinaten, einerseits durch Simplices, andererseits durch Plückerkoordinaten zu. Dabei wird besonders die Effektivität für Computerrechnungen ausführlich diskutiert.

Der Autor hat einen gelungenen Anlauf gemacht, die zunächst unvereinbaren Begriffe projektive Geometrie und Orientierbarkeit für die Anwendungen in Computer-Programmen zu vereinen. An zahlreichen Beispielen und graphischen Darstellungen zeigt er die Bedeutung der neuen Begriffe in verschiedenen Dimensionen und Spezialfällen. Im bekannten US-amerikanischen Lehrbuchstil wird der Leser lange von Beweisen und mathemtisch subtilen Definitionen ferngehalten und anhand von Beispielen in die Materie eingeführt. Erst im Kapitel 9 wird die „formal definition" des allgemeinen orientierten projektiven Raumes erreicht. So werden viele Begriffe, wie z. B. Orientierung erst spät definiert, aber von Beginn des Buches an verwendet. Leider führt das auch dazu, daß so mancher Begriff nicht präzise genug definiert wird. Projektive Abbildungen werden z. B. durch eine $m \times n$-Matrix dargestellt, haben aber positive Determinante, oder auf $\mathcal{F}_n$ werden stetige Abbildungen betrachtet, aber die Topologie wird nicht angegeben. Der zweite Teil des Buches, nach Einführung des zentralen Begriffes des orientierten projektiven Raumes, stellt dann den Stoff wesentlich gedrängter dar. Wer Programme für die Computergraphik schreiben muß, dem kann die Lektüre dieses Buches anempfohlen werden, denn sowohl die eingeführten orientierten Strukturen als auch die Diskussion einfacher Komplexitätsfragen wird sich für ein solches Programm als hilfreich herausstellen.

München B. Pareigis

Schröder, E. M., Vorlesungen über Geometrie (3 Bände), Mannheim u. a.: BI-Wissenschaftsverlag. Teil I 1991, 170 S., kartoniert, DM 24,80, Teil II, 1991, 125 S., kartoniert, DM 24,80, Teil III, 1992, 178 S., kartoniert, DM 24,80

Bei der im Titel angesprochenen Geometrie handelt es sich primär um affine, projektive und metrische Geometrie, konstruiert über einem Vektorraum, der bei der Betrachtung metrischer Geometrien zusätzlich mit einer quadratischen Form ausgestattet ist. Im Band I mit dem Untertitel „Möbiussche, elliptische und hyperbolische Ebenen" wird zunächst die reelle Möbiusebene und ihre Darstellung auf der Riemannschen Zahlenkugel in Erinnerung gerufen, um dann auf eine beliebige quadratische Körpererweiterung L/K verallgemeinert zu werden. Für die so erhaltene Möbiusebene über L/K werden Winkelsätze und der Miquelsche Schließungssatz hergeleitet, es werden die Automorphismengruppen und ihre Involutionen bestimmt und geometrisch interpretiert. Hier hätte man sich einen Hinweis oder – noch besser – einen Nachweis gewünscht, wie die Möbiusebene über L/K als Geometrie der ebenen Schnitte einer Quadrik im 3-dimensionalen projektiven Raum $PG(3, K)$ dargestellt werden kann. (Erst mit den Resultaten des 3. Bands erhält man diese Beziehung, obwohl auch dort nicht sehr markant darauf eingegangen wird.) Von der reellen Möbiusebene gelangt der Verfasser zur elliptischen bzw. zur hyperbolischen Ebene durch Auszeichnung einer fixpunktfreien Involution bzw. einer Inversion an einem Kreis. Aus diesen Daten können dann die elliptische Ebene, sowie das Kleinsche und das Poincarésche Modell der hyperbolischen Ebene kosntruiert und eine Längen- und eine Winkelmessung eingeführt werden.

Der 2. Band mit dem Untertitel „Affine und projektive Geometrie" enthält die klassische Theorie der desarguesschen affinen und projektiven Geometrie. Es wird die algebraische Darstellung ihrer Kollineationen und Projektivitäten hergeleitet, sowie – im endlichdimensionalen Fall – die Erzeugung der letzteren durch Zentralkollineationen nachgewiesen. Die algebraische Beschreibung der Polaritäten wird ausgespart, obwohl in § 6, J die dazu nötigen Hilfsmittel bereitgestellt sind und ein solches Resultat einen natürlichen Übergang zum Thema „Metrische Geometrie" des 3. Bands vorbereitet hätte.

Dieser 3. Band ist sicherlich der interessanteste Teil des vorliegenden Buchs. Es werden Quadriken, auch solche mit einem Radikal, systematisch untersucht und teils durch geometrische, teils durch Symmetrieeigenschaften gekennzeichnet. Neben Resultaten von F. Buekenhout über pascalsche Ovale und quadratische Mengen vom Index mindestens 1, dem Satz von B. Segre über Ovale in endlichen desarguesschen projektiven Ebenen ungerader Ordnung werden auch des Verfassers eigene Ergebnisse zu affin- und projektiv-metrischen Geometrie aufgeführt. Hier findet man u. a. einen neuen einfachen Beweis eines Satzes von Alexandroff-Lester und eine damit in Zusammenhang stehende geometrische Kennzeichnung der Ähnlichkeitsabbildungen eines regulären, endlichdimensionalen affin-metrischen Raums. Schließlich wird am Ende dieses Bands ein Ausblick auf die allgemeine Kreisgeometrie auf Quadriken gegeben und im Fundamentalsatz die algebraische Beschreibung ihrer Isomorphismen bestimmt. Es ist das besondere Anliegen des Autors in den Abschnitten 9 und 10 über affin- und projektiv-metrische Geometrien, die diesen Strukturen zugrunde liegenden quadratischen Formen mittels einfacher Symmetrieeigenschaften zu rekonstruieren. Hierzu benutzt er in beiden Abschnitten Versionen der Dreispiegelungsbedingung und beweist hieraus in einer systematischen Theorie seine Charakterisierungssätze. Der Nachteil der Dreispiegelungsbedingung besteht aber darin, daß sie bei einer hermiteschen Metrik verletzt ist. Dennoch bleiben Modifikationen der bewiesenen Fundamentalsätze auch bei Zugrundelegung einer hermiteschen, statt einer quadratischen Form gültig. Insofern scheint mir Schröders Definition eines affin- oder projektiv-metrischen Raums zu eng gefaßt.

Insgesamt gesehen wird einem in der Geometrie bewanderten Leser das vorliegende Buch von Nutzen sein. Weniger jedoch einem Studenten, der kaum Geometriekenntnisse mitbringt und eine Einführung in die Geometrie erwartet. Er wird nur schwer mit diesem Buch zurechtkommen, was nach Meinung des Rezensenten vor allem an dem extrem formalen Stil dieses Werks liegt. Der Leser ist zu oft gezwungen im Symbolregister zu suchen, auf welcher Seite Zeichenkombinationen wie $\underline{\hat{A}}_2^-$ oder $((m, \underline{K}_m), \sigma)$ erstmals erklärt werden, um dort wiederholt mit neuer unbekannter Symbolik konfrontiert zu werden. Hinzu kommt, daß der Autor auch Standardnotationen abändert, z.. B. wird die 2-Sphäre im $\mathbb{R}^3$ mit s_1 und das kanonische Skalarprodukt von $a, b \in \mathbb{R}^3$ mit $a \circ b$ bezeichnet. Schließlich sollte man m.E. in einem Lehrbuch über Geometrie nicht Begriffe des Grundstudiums, wie euklidischer Vektorraum, quadratische Körpererweiterung, die Gruppen $GL(2, \mathbb{C})$ oder $PGL(2, \mathbb{C})$ ausführlich wiederholen, sondern – ausgestattet mit diesem Basiswissen – möglichst rasch die eigentlichen Hauptthemen ansteuern.

Darmstadt H. Mäurer

Computional Algebraic Geömetry and Commutative Algebra herausgegeben von D. Eisenbud und L. Robbiano, Cortona 1991, Cambridge University Press 1993, 298 S., £ 29.95

Das vorliegende Buch von Eisenbud und Robbiano ist eine Sammlung von Artikeln, welche aus einer Konferenz zu diesem Thema im Jahre 1991 in Cortona hervorgegangen ist. Die Konferenz in Cortona wurde von D. Eisenbud, A. Galligo, L. Robbiano und C. Traverso organisiert. Einige der Vorträge wurden nun in überarbeiteter Form in dieser Sammlung veröffentlicht.

Part I: Open problems and exposition of Gröbner bases: Im Artikel von Bayer und Mumford werden Gröbner-Basen von zwei verschiedenen Blickwinkeln aus eingeführt, nämlich vom geometrischen Blickwinkel aus als Limes von Deformationen von Syzygien des initialen Ideals in(F) entlang einer Familie linearer Koordinatenwechsel, welche in(F) in F transformieren, und vom algebraischen Blickwinkel aus als Basis F, deren initiale Terme das initiale in(F) erzeugen. Die Regularität eines Ideals wird als wesentlicher Gradmesser der Komplexität der Berechnung von Gröbner-Basen herangezogen. Im Artikel von Eisenbud wird eine Liste von Desiderata für ein Programmsystem für Berechnungen in der algebraischen Geometrie aufgestellt, etwa ein effektives Verfahren zur Parametrisierung rationaler Flächen.

Part II: Surveys: Dana-Picard und Schaps berichten über ein computer-unterstütztes Projekt zur Klassifizierung aller Algebren einer vorgegebenen Dimension n. Dazu wurden Programme in Turbo Pascal entwickelt. Im Artikel von Lazard werden Aspekte des Lösens algebraischer Gleichungssysteme beschrieben, nämlich der Basiswechsel bezüglich verschiedener Termordnungen für nulldimensionale Ideale, die Darstellung der Lösungsmenge als Durchschnitt der Lösungsmengen triangulärer Systeme, sowie die Komplexität von Algorithmen zur Lösung algebraischer Gleichungssysteme. Im Artikel von Mora und Robbiano werden Darstellungen rationaler und nicht-rationaler Punkte in affinen und projektiven Räumen behandelt. Dazu werden das „shape lemma" von Gröbner-Basen, ein Interpolationsverfahren und Hilbert-Poincaré Reihen endlicher Mengen von Punkten herangezogen. Vasconcelos schließlich diskutiert verschiedene Konstruktionen in der kommutativen Algebra, etwa die Radikalberechnung, die Berechnung des integralen Abschlusses, Primtests und Idealtransformationen („symbolic blowups" und „factorial closures").

Part III: Research papers: Bayer, Galligo und Stillman untersuchen den Einfluß einer Erweiterung des Grundbereiches auf Gröbner-Basen ($A[x_1, \ldots, x_n] \to B[x_1, \ldots, x_n]$). Giusti und Heintz zeigen, daß die Dimension einer algebraischen Varietät berechnet werden kann in parallelen arithmetischen Netzwerken in nicht-uniformer polynomialer sequentieller Zeit in der Größe des Inputs. Katz behandelt die Frage, ob für eine glatte arithmetische Cohen-Macaulay-Kurve im r-dimensionalen Raum über dem komplexen Zahlkörper, welche mengentheoretisch durch Quadriken heausgeschnitten wird, das zugehörige homogene Ideal notwendigerweise durch Quadriken herausgeschnitten wird. Die Antwort fällt positiv aus für $r \leqslant 5$, aber negativ im allgemeinen. Im Artikel von Sturmfels wird ein Verfahren entwickelt, welches bei der Entscheidung der Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems dessen Dünnheit (sparseness) erhält. Sogenannte $\mathscr{A}$-Resultanten werden eingeführt. Diese können für geeignetes $\mathscr{A}$ spezialisiert werden zu den bekannten Sylvester-Resultanten, Bezout-Resultanten, multivariaten Resultanten, Dixon-Resultanten und Hyperdeterminanten.

Die Theorie und Anwendung von Gröbner-Basen spielt eine zentrale Rolle in den meisten Artikeln dieser Sammlung. Als Einführung in die Theorie der Gröbner-Basen ist das Buch aber nicht gedacht und auch nicht geeignet. Dazu sollte etwa „Gröbner Bases – A Computational Approach to Commutative Algebra" von Becker und Weispfenning herangezogen werden. Zusammenfassend sei festgestellt, daß die vorliegende Sammlung von Artikeln dem bereits in der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie fortgeschrittenen Leser wertvolle Anregungen für neue Forschungsrichtungen geben kann.

Linz F. Winkler

Karatsuba, A. A., Voronin., S. M., The Riemann Zeta-Function (aus dem Russischen übersetzt von N. Koblitz), Berlin u.a.: de Gruyter 1992, 396 S., gebunden DM 198,–

Seit der Arbeit Riemanns zur Primzahlverteilung steht die Riemannsche Zetafunktion im Mittelpunkt des Interesses der multiplikativen Zahlentheorie. Sowohl die analytischen Eigenschaften dieser Funktion als auch ihr Nutzen für zahlentheoretische Fragen sind in einigen älteren und neueren Büchern gut dokumentiert. Namentlich genannt seien hier nur die Klassiker Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta function,* Davenport, *Multiplicative number theory,* Prachar, *Primzahlverteilung* und die neueren Bücher von Ivic, *The Riemann Zeta-Function,* und Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann zeta function.*

The Riemann Zeta-Function von A. A. Karatsuba und S. M. Voronin bemüht sich um einer Ergänzung der bereits existierenden Monographien (so laut Vorwort die Intention der Verfasser) und wendet sich dabei vor allem an den mit der Materie bereits vertrauten Leser. Die Darstellung hebt an mit den grundlegenden analytischen Eigenschaften der Zetafunktion und einiger naher Verwandter (Dirichletsche L-Funktionen, Hurwitzsche Zetafunktion), insbesondere werden Euler-Produkt, Funktionalgleichung, Weierstraß-Produkt und das de la Vallée-Poussin-Argument für ein nullstellenfreies Gebiet links von Re $s = 1$ behandelt. Diese Dinge findet man auch in Davenport, wo die Zahlentheorie direkt mit der Analysis verzahnt ist. Hier muß der Leser auf die Zahlentheorie bis Kapitel 2 warten, dort werden die expliziten Formeln und die Primzahlsätze hergeleitet. Die für die feinere Untersuchung von $\zeta(s)$ so wichtige *approximate functional equation* wird in Kapitel 3 ausführlich besprochen. Leider wird man die Analoga für L-Funktionen weiter aus Orginalarbeiten zitieren müssen, diese finden nur kurz Erwähnung. Kapitel 4 bringt den Vinogradovschen Mittelwertsatz mit Anwendungen auf das nullstellenfreie Gebiet der Zetafunktion und hochdimensionale Teilerprobleme. Die Beweisführung erfolgt nach einer jüngeren Methode von Arkhipov-Karatsuba und ist recht durchsichtig; der interessierte Leser sei allerdings auf die elegante und leistungsfähige Technik von T. D. Wooley (On Vinogradov's mean value theorem II, Michigan Math. J. 40 (1993) 175–180) hingewiesen. Kapitel 5 bespricht in erster Linie die Bedeutung der „Dichtehypothese“ für die Primzahlverteilung. Der Dichtesatz von Huxley wird recht elementar nach Karatsuba hergeleitet. Weniger bekannt dürfte Karatsubas Beitrag zu einer Vermutung von Selberg über Nullstellen in der Nähe von Re $s = 1/2$ sein.

Die letzten drei Kapitel, die etwa die Hälfte des Buches ausmachen, stellen nun die Analysis der Zetafunktion in den Vordergrund. Ausführlich werden Nullstellen auf Re $s = 1/2$ diskutiert, hier fallen der Satz von Selberg über diese Nullstellen in einer Version für „kurze Intervalle“ (Satz VI.3.1) und die Anmerkungen zur Riemannschen Vermutung (§ VI.5) auf. Wertverteilungsfragen und Ω-Sätze runden diesen anspruchsvollen Teil ab.

In einem Anhang sind allerlei Präliminarien in kompakter Form zusammengestellt. Für die knappe Bibliographie wäre eine ausführlichere Dokumentation zumindest jüngerer Titel wünschenswert gewesen (der Verfasser von [33] muß richtig *Gonek* heißen).

Die Autoren haben ihr selbstgestecktes Ziel durchaus erreicht. Zwar findet sich auf den ersten 150 Seiten wenig Neues, die letzten Kapitel werden dabei jedoch gut vorbereitet, und diese bringen eine ganze Reihe von Resultaten erstmals in Buchform. Der Band sollte deshalb in einer mathematischen Bibliothek nicht fehlen. Dem Einsteiger in dieses alte Gebiet müssen allerdings nach wie vor die oben erwähnten Bücher zur Lektüre empfohlen werden, allen voran Davenport und Titchmarsh. Auch Experten werden in der Regel weiter auf diese Standardwerke Bezug nehmen.

Göttingen J. Brüdern

Friedman, R., Morgan, J., Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces (Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Band 22) Berlin u.a.: Springer Verlag, 1994, ×, 520 S., 17 Fig., DM 168,–

Die Untersuchung algebraischer Flächen begann mit den Arbeiten der italienischen Schule um Castelnuovo, Severi und Enriques. Die Ergebnisse dieser Mathematiker wurden später von Kodaira ausgebaut und zu einer Klassifikationstheorie für nicht notwendig algebraische komplexe Flächen erweitert. Dazu unterteilt man die Flächen zunächst in 4 Klassen anhand der sogenannten Kodaira-Dimension. Das ist eine – im wesentlichen – funktionentheoretische Invariante, die ein Maß für die Größe gewisser kanonischer Funktionsbereiche ist, sie kann die Werte $-\infty$, 0, 1 und 2 annehmen.

In einem zweiten Schritt versucht man dann, die Struktur der Flächen in jeder der 4 Klassen genauer zu beschreiben, wobei man eine Klassifikation „bis auf Deformationsäquivalenz" als Idealfall anstrebt. Diesen algebraisch orientierten Klassifikationsansatz bezeichnet man als Enriques-Kodaira-Klassifikation.

Für komplexe Flächen gibt es aber einen weiteren, sehr natürlichen Gesichtspunkt: Da jede komplexe Fläche ja insbesondere eine reell 4 dimensionale Mannigfaltigkeit ist, kann man auch nach einer topologischen oder differentialtopologischen Klassifizierung fragen.

Nun sind natürlich deformationsäquivalente Flächen als 4-Mannigfaltigkeiten diffeomorph, so daß man eine natürliche Vergiß-Abbildung hat von der Menge der Deformationstypen komplexer Flächen in die Menge der Diffeomorphietypen 4 dimensionaler Mannigfaltigkeiten. Man interessiert sich jetzt für die Struktur dieser Abbildung und ihre Beziehung zur Enriques-Kodaira-Klassifikation. Das ist zwar eine sehr interessante Frage, allerdings gab es bis etwa 1980 so gut wie keine Techniken um sie zu behandeln.

Dies wurde durch die Arbeiten von M. Freedman und S. Donaldson grundlegend anders. Man kann 4-Mannigfaltigkeiten mit genügend guten Fundamentalgruppen heutzutage topologisch – zumindest prinzipiell – vollständig durch algebraisch-topologische Invarianten klassifizieren.

Für differenzierbare 4-Mannigfaltigkeiten ist die Situation wesentlich komplizierter: Die von Donaldson eingeführten Invarianten werden mit eichtheoretischen, also im wesentlichen analytischen Methoden konstruiert, und es ist nicht bekannt, ob sie ein vollständiges Invarientensystem bilden.

Eine der wenigen Situationen, in denen man die Donaldsoninvarianten direkt berechnen kann, oder zumindest ihre Nicht-Trivialität zeigen kann, ist für 4-Mannigfaltigkeiten, die algebraischen Flächen zugrunde liegen. In diesem Fall haben die eichtheoretischen Konstruktionen algebraisch-geometrische Äquivalente, so daß sich die Donaldsoninvarianten mit den Methoden der Algebraischen Geometrie behandeln lassen. Dieser Weg wurde 1985 von Donaldson aufgezeigt, und benutzt, um ein Gegenbeispiel zur h-Cobordismen-Vermutung für differenzierbare 4-Mannigfaltigkeiten anzugeben. Sein Beispiel bestand aus zwei algebraischen Flächen, die aufgrund der von Freedman entwickelten Theorie homöomorph waren, die aber durch Donaldsoninvarianten als differenzierbare 4-Mannigfaltigkeiten unterschieden wurden.

Dieser Ansatz wurde von vielen Mathematikern weiter ausgebaut. Man fand sogar unendlich viele paarweise nicht diffeomorphe algebraische Flächen, die alle zueinander homöomorph sind. Dabei zeigte sich auch, daß algebraische Flächen mit verschiedenen Kodaira-Dimensionen nie diffeomorph waren. Die entsprechende Vermutung: „Die Kodaira-Dimension algebraischer Flächen ist eine differentialtopologische Invariante" wurde von A. Van de Ven formuliert, und war in den letzten 10 Jahren eine der Leitfragen in diesem Gebiet.

Das vorliegende Buch von R. Friedman und J. Morgan ist eine der angesprochenen Weiterentwicklungen der Donaldsontheorie und ihrer Anwendung auf die differentialtopologische Klassifizierung algebraischer Flächen. Das Hauptergebnis läßt sich folgendermaßen zusamenfassen:

Satz 1: Die Anzahl der Deformationstypen algebraischer Flächen, die diffeomorph zu einer festen 4-Mannigfaligkeit sind, ist endlich.

Mit anderen Worten, die oben erwähnte Vergiß-Abbildung hat endliche Fasern für algebraische Flächen.

Satz 2: Zwei komplexe Flächen, die diffeomorph sind, haben die gleiche Kodaira-Dimension, es sei denn, eine von ihnen ist rational und die andere von Kodaira-Dimension 2.

Die Hauptschwierigkeit im Beweis dieser Aussagen machen die elliptischen Flächen, das sind Flächen S, die eine holomorphe Abbildung $\pi : S \rightarrow C$ auf eine Kurve besitzen, so daß die allgemeine Faser elliptisch ist.

Im Fall einer zyklischen Fundamentalgruppe existieren nämlich unendlich viele verschiedene Deformationstypen zueinander homöomorpher elliptischer Flächen, und man muß versuchen, sie mit Hilfe von Donaldsoninvarianten differentialtopologisch zu unterscheiden. Dies geschieht durch eine teilweise Berechnung der Invarianten mit algebraisch-geometrischen Techniken, genauer, durch ihre Berechnung mit Hilfe von Modulräumen stabiler algebraischer Vektorbündel.

Das Buch von Friedman und Morgan ist in 7 Kapitel mit folgenden Inhalten unterteilt: *Kapitel I: Enriques-Kodaira Klassifikation.* – *Kapitel II:* Topologie elliptischer Flächen. – *Kapitel III:* Eichtheoretische Konstruktion der Donaldsoninvarianten. – *Kapitel IV:* Untersuchung der Struktur von Modulräumen stabiler Vektorbündel. – *Kapitel V:* Methoden zur Berechnung von Donaldsoninvarianten für algebraische Flächen. – *Kapitel VI:* Einschränkende Bedingungen für die Donaldsoninvarianten von 4-Mannigfaltigkeiten mit vielen Automorphismen. – *Kapitel VII:* Explizite Berechnungen von Donaldsoninvarianten elliptischer Flächen und differentialtopologische Anwendungen.

Insgesamt ist es ein sehr interessantes und hochaktuelles Buch, an dem es nicht viel zu kritisieren gibt, allenfalls den gelegentlich etwas sparsamen Umgang mit Hinweisen auf Resultate anderer Mathematiker.

Etwas habe ich allerdings doch vermißt, nämlich einen ausführlicheren Überblick über neuere Entwicklungen in der Donaldsontheorie: Relative Polynominvarianten für 4-Mannigfaltigkeiten mit Rand werden beispielsweise nur in einem Nebensatz erwähnt.

Leider erschien das Buch zu einem etwas unglücklichen Zeitpunkt, nämlich gerade in dem Moment, in dem es R. Friedman und Z. Qin gelang, die Van-de-Ven-Vermutung über die C^∞-Invarianz der Kodaira-Dimension komplexer Flächen vollständig zu beweisen. Dieses Ergebnis bringt die Untersuchungen zur Differentialtopologie komplexer Flächen zu einem ersten, vorläufigen Abschluß, und es wäre natürlich schön gewesen, wenn die Autoren es noch hätten berücksichtigen können.

Abgesehen von diesen Kritikpunkten, handelt es sich bei der vorliegenden Monographie um einen gut geschriebenen, außerordentlich wichtigen und lang erwarteten Forschungsbericht, der die wesentlichen Ergebnisse der beiden Autoren sehr gut darstellt. Ich habe selten ein Buch gesehen, das bereits vor seinem Erscheinen so häufig zitiert worden ist; es wird sicher eines der Standardwerke über Donaldsontheorie und komplexe Flächen werden.

Zürich Ch. Okonek

Ranicki, A. A., Algebraic L-Theory and Topological Manifolds (Cambridge Tracts in Mathematics 102), Cambridge University Press 1992, 358 S., £ 40.00

Zunächst beschreiben wir kurz den Zweck von Surgery-Theory. Das typische Problem der Surgery-Theorie besteht darin, für einen Raum X zu entscheiden, ob er homotopieäquivalent zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit ist (Existenz einer Mannigfaltigkeitsstruktur). Es gibt einige offensichtliche Bedingungen an solch einen Raum X, beispielsweise muß er den Homotopietyp eines endlichen CW-Komplexes haben und die Poincaré-Dualität erfüllen. Falls diese notwendigen Bedingungen erfüllt sind, liefert die Surgery-Theorie berechenbare Hindernisse, um zu entscheiden, ob X homotopieäquivalent zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit ist. Entsprechendes gilt für das Problem, ob eine Homotopieäquivalenz $f: M \to N$ von geschlossenen Mannigfaltigkeiten homotop zu einem Homöomorphismus oder Diffeomorphismus ist (Eindeutigkeit der Mannigfaltigkeitstruktur). Begründet wurde die Surgery-Theorie von Browder, Novikov, Sullivan und Wall.

Ein sogenanntes Surgery-Problem ist eine Abbildung $f: M \to X$ einer geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M in einen endlichen Poincaré-Komplex X (mit zusätzlichen Bündeldaten). Es soll entschieden werden, ob f zu einer Homotopieäquivalenz bordant ist, was insbesondere bedeuten würde, daß X zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit homotopieäquivalent ist. In der Surgery-Theorie wird nun zu f eine quadratische Form über dem ganzzahligen Gruppenring $\mathbb{Z}\pi_1(X)$ definiert. Falls $n \geqslant 5$ gilt, ist das Surgery-Problem genau dann lösbar, falls ihre Klasse in der sogenannten L-Gruppe verschwindet, d. h. falls sie stabil isomorph zu einer hyperbolischen quadratischen Form ist. Damit hat man das ursprüngliche geometrische Problem in ein leichter zu behandelndes algebraisches Problem überführt. Diese quadratische Form ist aber erst nach einigen geometrischen Manipulationen an f definiert und wird nicht direkt algebraisch aus f bestimmt. Eine der grundlegenden Konstruktionen in dem Buch ist die Entwicklung einer Kettenkomplexversion dieser quadratischen Form sowie der L-Gruppe, die es ermöglicht, das Hindernis direkt hinzuschreiben.

Obiges Beispiel soll das Ziel des Buches erläutern, nämlich, eine algebraische Kettenkomplexversion der geometrischen Surgery-Theorie zu geben. Es stellt sich heraus, daß der Zugang durch Kettenkomplexe flexibler als ein geometrischer oder auf Moduln und Formen reduzierter Zugang ist. Auf diese Weise lassen sich beispielsweise Rothenberg-Sequenzen oder Lokalisierungssequenzen leicht erstellen und die von Faserbündeln induzierten Transferabbildungen auf den L-Gruppen algebraisch fassen und berechnen. Zudem werden verschiedene Punkte systematisiert und uniformisiert. Beispielsweise hängt der klassische Zugang über Formen von Anfang an davon ab, ob die Mannigfaltigkeiten ungerade oder gerade Dimensionen haben, was in den Konstruktionen durch Kettenkomplexe keine Rolle spielt.

Die sogenannte Surgery-Sequenz ist das entscheidende Mittel zur Klassifikation von Mannigfaltigkeiten. Als das wichtigste algebraische Resultat bezeichnet der Autor die Konstruktion der algebraischen Surgery-Sequenz, die mit der bekannten geometrischen Surgery-Sequenz identifiziert wird

$$\ldots \to H_n(K, \mathbb{L}.) \xrightarrow{A} L_n(\mathbb{Z}[\pi_1(K)]) \xrightarrow{\partial} \mathbb{S}_n(K) \to H_{n-1}(K; \mathbb{L}.) \to \ldots$$

Es ist $H_n(K, \mathbb{L}.)$ die Homologie des simplizialen Komplexes K mit Koeffizienten in einem L-Theorie-Spektrum, für dessen Homotopiegruppen $\pi_n(\mathbb{L}.) = \pi_n(G/TOP) = L_n(\mathbb{Z})$ gilt. Es ist $L_n(\mathbb{Z}[\pi_1(K)])$ die L-Gruppe des ganzzahligen Gruppenringes von $\pi_1(K)$ und $\mathbb{S}_n(K)$ ist die quadratische Strukturgruppe. Alle diese Gruppen haben Beschreibungen als Kobordismengruppen von Poincaré-Kettenkomplexen. In der Konstruktion von $H_n(K, \mathbb{L}.)$ treten lokale Poincaré-Komplexe auf, die über den einzelnen Simplizes leben, während für $L_n(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ globale Poincaré-Komplexes benutzt werden. Man kann lokale Poincaré-Komplexe zu globalen Poincaré-Komplexen zusammensetzen, und diese Konstruktion liefert die sogenannte Assembly-Abbildung A. Die Untersuchung dieser lokalen Poincaré-Dualität im Vergleich zur globalen ist eines der wichtigsten Aspekte des Buches. Die sogenannte Novikov-Vermutung besagt, daß die höheren Signaturen eines geschlossenen Mannigfaltigkeit Homotopieinvarianten sind. Die Borel-Vermutung beinhaltet, daß jeder endliche asphärische Poincaré-Komplex zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit homotopieäquivalent ist und jede Homotopieäquivalenz von asphärischen geschlossenen Mannigfaltigkeiten homotop zu einem Homöomorphismus ist. Beide Vermutungen sind Objekte intensiver Forschung und lassen sich in Aussagen über die Assembly-Abbildung umformulieren.

In dem Buch wird das sogenannte totale Surgery-Hindernis $s(X) \in \mathbb{S}_n(X)$ eines n-dimensionalen Poincaré-Komplexes definiert. Unter der Voraussetzung $n \geqslant 5$ verschwindet es genau dann, wenn X zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit homotopieäquivalent ist. Der Autor bezeichnet als das wichtigste geometrische Resultat, daß für das totale Surgery-Hindernis

$$s(X) = \partial\sigma^*(X)$$

gilt, wobei $\sigma^*(X) \in VL^n(X)$ die „1/2-connective visible symmetric signature“ und ∂ ein Homomorphismus von $VL^n(X)$ nach $\mathbb{S}_n(X)$ ist.

Die wichtigsten der in dem Buch behandelten Begriffe lassen sich in folgender Liste zusammenfassen: algebraische Poincaré-Komplexe und ihre Bordismenkategorien, symmetrische, quadratische und visible L-Theorie, Dualität, lokale Poincaré-Dualität und Assembly, verallgemeinerte Homologietheorien und L-Spektren, Strukturmenge, algebraische und geometrische Surgery-Sequenz, Novikov-Vermutung, L-theoretische Orientierung, totales Surgery-Hindernis, höhere Signaturen, Multisignaturen, Berechnungen für endliche Fundamentalgruppen, Transferabbildungen.

Das Buch ist sorgfältig und genau aufgeschrieben und kann ohne größere Vorkenntnisse gelesen werden. Es wendet sich von seiner Konzeption her eher an erfahrene Mathematiker. Da es die technischen Resultate betont und sich nicht an Problemen orientiert, wird es einem unerfahrenen Studenten nicht leicht fallen, die Bedeutung und den Nutzen der entwickelten Begriffe zu erkennen und einzusehen, daß man einigen Aufwand betreiben muß, bevor man zu den am besten geeigneten Definitionen kommen und aus ihnen Vorteile ziehen kann. Das Buch ist leicht linear zu lesen, aber es ist nicht so einfach, ohne Vorkenntnisse mitten in dem Buch zu beginnen.

Auf alle Fälle ist das Buch sehr wichtig für Experten, die auf dem Gebiet der Surgery-Theorie und der damit verbundenen Novikov-Vermutung arbeiten. Es präsentiert einen umfangreichen und ausgereiften technischen Apparat, der insbesondere durch seine Vereinheitlichung und Algebraisierung besticht und interessante neue Konzepte enthält. Das Buch wird ein fester und wichtiger Bestandteil in der Literatur über Surgery-Theorie werden.

Mainz W. Lück

Lawson, H. B., Michelsohn, M.-L., Spin Geometry (Princeton Math. Ser. 38), Princeton: Princeton University Press 1989, 427 S., DM 113,–

Zentrale Themen dieses Buches sind der Indexsatz von Atiyah und Singer, Verallgemeinerungen desselben, und geometrische Anwendungen dieses Satzes. Der Indexsatz besagt, daß der Index eines eliptischen Differentialoperators auf einer Mannigfaltigkeit M sich durch rein topologische Invarianten, sogenannte „charakteristische Zahlen“ ausdrücken läßt. In der Indextheorie elliptischer Operatoren spielt der „Dirac-Operator“ eine zentrale Rolle. Dieser Operator ist eine weitreichende Verallgemeinerung eines

Operators, der in den zwanziger Jahren von dem Physiker P. A. M. Dirac zwecks Quantisierung des elektromagnetischen Feldes eingeführt wurde. Er ist definiert für Riemannsche Mannigfaltigkeiten M, die eine „spin-Struktur" besitzen, d. h. die Strukturgruppe des Tangentialbündels von M läßt sich auf die Gruppe $Spin(n)$, eine zweifache Überlagerung von $SO(n)$, reduzieren. Die zentrale Rolle des Diracoperators in der Indextheorie erklärt sich aus der Tatsache, daß *jeder* elliptische Operator auf einer spin Mannigfaltigkeit M in einen „getwisteten" Diracoperator deformiert werden kann, ohne seinen Index zu ändern.

Der Indexsatz erlaubt es, den Index des Diracoperators auf einer spin Mannigfaltigkeit M mit einer charakteristischen Zahl $\hat{A}(M)$, dem sogenannten $\hat{A}$-Geschlecht von M, zu identifizieren. Das $\hat{A}$-Geschlecht ist für jede orientierte Mannigfaltigkeit definiert, ist aber im allgemeinen nur eine *rationale Zahl* (z. B. ist das $\hat{A}$-Geschlecht der komplexen projektiven Ebene gleich 1/8). Als Korollar des Indexsatzes sieht man also, daß für spin Mannigfaltigkeiten das $\hat{A}$-Geschlecht ganzzahlig ist. (historisch gesehen wurde die Ganzzahligkeit *vor* dem Indexsatz bewiesen mit Methoden, die dann wiederum eine wesentliche Rolle im Beweis des Indexsatzes spielten). Es sei angemerkt, daß die Ganzahligkeit von $\hat{A}(M)$ von Milnor zur Konstruktion von exotischen Sphären genutzt wurde.

Eine andere Anwendung des Indexsatzes geht auf Lichnerowicz zurück. Er entdeckte, daß auf einer spin Mannigfaltigkeit M mit positiver Skalarkrümmung der Diracoperator invertierbar ist; insbesondere ist also das $\hat{A}$-Geschlecht von M null. Dies wurde später von Hitchin verallgemeinert, der auf einer n-dimensionalen spin Mannigfaltigkeit M einen „verallgemeinerten" Diracoperator konstruierte, dessen „Clifford-Index" nicht eine ganze Zahl, sondern ein Element $\hat{\mathscr{A}}(M)$ von $KO(S^n)$ ist, der reellen K-Theorie der n-dimensionalen Sphäre. Hitchin zeigt weiterhin, daß dieser Index ebenfalls verschwindet, wenn M positive Skalarkrümmung hat. Interessanterweise ist $\hat{\mathscr{A}}(M)$ nichttrivial für einige exotische Sphären der Dimension $n \equiv 1, 2 \bmod 8$, $n \geqslant 9$. Insbesondere kann man auf diesen exotischen Sphären also keine Riemannsche Metrik mit positiver Skalarkrümmung finden.

Es sei angemerkt, daß Stolz gezeigt hat, daß für einfach zusammenhängende spin Mannigfaltigkeiten M der Dimension $n \geqslant 5$ das Verschwinden von $\hat{\mathscr{A}}(M)$ nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Riemannschen Metrik positiver Skalarkrümmung ist. Ohne die „spin"-Bedingung ist die Situation ganz anders: Gromov und Lawson haben gezeigt, daß jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geqslant 5$, die nicht spin ist, eine Metrik positiver Skalarkrümmung besitzt.

Im Unterschied zu anderen Büchern über Indextheorie (z. B. von Gilkey oder Berline-Getzeler-Vergne), wird beim vorliegenden Buch der Indexsatz nicht mittels der sogenannten „Wärmeleitungsmethode" bewiesen, sondern mit eher topologischen Argumenten, weil aus prinzipiellen Gründen der für die oben skizzierte Anwendungen wichtige „Clifford-Index" mit Wärmeleitungsmethoden nicht behandelt werden kann. Ebenfalls hervorgehoben sollte werden, daß ein gutes Viertel des Buches den Anwendungen des Indexsatzes in Geometrie und Topologie gewidmet ist.

Das Buch gliedert sich in vier Kapitel. Im ersten Kapitel werden Cliffordalgebren eingeführt, und zur Konstruktion der Gruppen $Spin(n)$ und der Beschreibung der Bottperiodizität benutzt. Im zweiten Kapitel wird der Diracoperator und die Hitchinsche Verallgemeinerung konstruiert. Der Indexsatz und seine Verallgemeinerungen (der äquivariante Indexsatz, der Indexsatz für Familien von elliptischen Operatoren, und der „Clifford-Index"-Satz) sind Gegenstand des dritten Kapitels, während der vierte Kapitel den Anwendungen gewidmet ist. Wie ein roter Faden zieht sich durch das Buch die systematische Benutzung der Cliffordalgebren: zur Konstruktion der Spinorgruppen, zur Formulierung der Bottperiodizität, zur Konstruktion des Diracoperators, zur Definition des „Clifford-Index", und zur Formulierung eines entsprechenden Indexsatzes.

Dieses Buch enthält sehr viel interessante Mathematik. Zum Beweis mancher Resultate, insbesondere im letzten Kapitel, wird auf die Literatur verwiesen, aber alle Begriffe werden sorgfältig erklärt und motiviert. Mithilfe der Anhänge, in denen Prinzipalbündel, klassifizierende Räume, charakteristische Klassen, Thomisomorphismus in K-Theorie, und $Spin^c$-Mannigfaltigkeiten behandelt werden, sollte dieses Buch gut motivierten Diplomanden mit Grundkenntnissen in Topologie, Analysis, und Differentialgeometrie zugänglich sein.

Notre Dame S. Stolz

Tromba, A. J., Teichmüller Theory in Riemannian Geometry (Lectures in Math. ETH Zürich), Basel u. a.: Birkhäuser 1992, 220 S., p.e., DM 39,-

Teichmüllertheorie entstand aus dem Bestreben heraus, einen Zugang zum Riemannschen Modulproblem zu finden, d. h. zur Klassifikation der Isomorphieklassen kompakter Riemannscher Flächen eines festen Geschlechts $g \geqslant 2$: man möchte die Menge dieser Isomorphieklassen in natürlicher Weise mit einer topologischen, differenzierbaren, komplex-analytischen und schließlich quasi-projektiv algebraischen Struktur versehen. Teichmüllers bahnbrechende Idee war es, zunächst *markierte Riemannsche Flächen* zu klassifizieren, d. h. Riemannsche Flächen zusammen mit einer Homotopieklasse von Homöomorphismen auf eine feste Fläche M. Diese markierten Riemannschen Flächen bilden die Punkte des *Teichmüllerraums* $\mathscr{T}(M)$; die Abbildung zum Modulraum (d. h. das Weglassen der Markierung) wird durch die Aktion der *Teichmüllermodulgruppe* Γ_g gegeben. Teichmüller konnte zeigen, daß es zwischen je zwei markierten Riemannschen Flächen desselben Geschlechts eine eindeutig bestimmte extremale quasikonforme Abbildung gibt; deren Dilatation definiert eine Metrik auf $\mathscr{T}(M)$. Teichmüller fand eine eindeutige Beziehung zwischen extremalen quasikonformen Abbildungen und holomorphen quadratischen Differentialen und bewies so den grundlegenden Satz, daß $\mathscr{T}(M)$ homöomorph zu $\mathbb{R}^{6g-6}$ ist. Weitere zentrale Sätze der Theorie sind:

- $\mathscr{T}(M)$ trägt eine kanonische komplexe Struktur, und Γ_g operiert holomorph und diskontinuierlich bezüglich dieser Struktur (Ahlfors-Bers)
- $\mathscr{T}(M)$ ist Steinsche Mannigfaltigkeit (Bers-Ehrenpreis)
- $\mathscr{T}(M)$ trägt eine Γ_g-invariante Riemannsche Metrik von negativer Schnittkrümmung (die Weil-Petersson-Metrik; Ahlfors u. a.)

All dies wird in dem vorliegenden Buch natürlich nicht vorausgesetzt; aber der Leser, an den der Autor sich in erster Linie wendet, sollte es im Hinterkopf haben. Zum Beispiel wird der Zusammenhang mit dem Modulraum nur in dem vorbereitenden Abschnitt „Preliminaries" kurz erwähnt. So ist Trombas Buch nicht wirklich eine Einführung in die Teichmüllertheorie (obwohl der Autor im Vorwort anstrebt „to make Teichmüller theory easy to learn"), sondern für denjenigen, dem die Kernaussagen der Theorie bereits bekannt sind, eine gelungene und detaillierte Darstellung eines neuen Zugangs zur Teichmüllertheorie, nämlich des in den letzten 10 Jahren entstandenen differentialgeometrischen Ansatzes von Fischer, Tromba, Wolf, Jost u. a.

Der Kernpunkt dieses Zugangs ist es, die extremalen quasikonformen Abbildungen in Teichmüllers Theorie zu ersetzen durch harmonische Abbildungen. Die entscheidenden Methoden zum Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis kommen dabei aus der Variationsrechnung: man muß eine gewisse Dirichlet-Energie minimieren.

Ausgangspunkt des Buches sind die unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$ und $\mathscr{M}_{-1}$: $\mathscr{A}$ sind die glatten fastkomplexen Strukturen auf M; $\mathscr{A}$ wird als Durchschnitt der Banach-Mannigfaltigkeiten $\mathscr{A}^s$ der fastkomplexen Strukturen von

Sobolevklasse s angesehen. $\mathscr{C}$ sind die komplexen Strukturen auf M und steht damit in Bijektion zu $\mathscr{A}$. $\mathscr{M}$ sind die glatten Riemannschen Metriken auf M, wiederum als Durchschnitt der Mannigfaltigkeiten $\mathscr{M}^s$ topologisiert. $\mathscr{M}_{-1}$ ist der glatte Unterraum der Metriken von konstanter Schnittkrümmung -1. Die Einführung dieser Räume sowie ihre Diffeomorphie bilden den Inhalt des ersten Kapitels, außerdem ein Beweis des Satzes von Poincaré, daß es zu jeder Riemannschen Metrik g auf M eine positive Funktion λ gibt, so daß λg konstante Krümmung -1 hat.

Auf $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$ und $\mathscr{M}_{-1}$ operiert die Gruppe $\mathscr{D}$ der Diffeomorphismen von M und die Untergruppe $\mathscr{D}_0$ der zur Identität homotopen Elemente von $\mathscr{D}$. Die Aktion von $\mathscr{D}_0$ ist frei und eigentlich, man kann also den Quotienten $\mathscr{T}(M):=\mathscr{M}_{-1}/\mathscr{D}_0$ bilden. Durch einen Zerlegungssatz für Tangentialvektoren an $\mathscr{M}_{-1}$ sieht man recht natürlich, daß $\mathscr{T}(M)$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit wird, deren Tangentialraum sich mit den holomorphen quadratischen Differentialen identifizieren läßt. Schließlich kann man die Weil-Petersson-Metrik auf $\mathscr{T}(M)$· wiederfinden als die ($\mathscr{D}$-invariante!) L^2-Metrik auf $\mathscr{A}$ bzw. (nach geeigneter Modifikation) auf $\mathscr{M}_{-1}$. Damit ist am Ende des zweiten Kapitels der Teichmüllerraum $\mathscr{T}(M)$ als C^∞-Mannigfaltigkeit konstruiert, und es können die eingangs erwähnten zentralen Sätze in Angriff genommen werden:

Im dritten Kapitel wird bewiesen, daß $\mathscr{T}(M)$ zu $\mathbb{R}^{6g-6}$ homöomorph ist. Hierzu werden (in einem längeren Anhang) die Sätze von Eells-Sampson und Schoen-Yau bewiesen, daß es in jeder Homotopieklasse von Abbildungen $(M,g)\to(M,g_0)$ (mit Riemannschen Metriken g, g_0 von negativer Krümmung auf M) genau eine (die Dirichlet-Energie minimierende) harmonische Abbildung gibt, die überdies ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ist. Sodann zeigt man, daß die Energie-Abbildung, die jedem $g\in\mathscr{M}_{-1}$ die Energie dieser Abbildung zuordnet, $\mathscr{D}_0$-invariant, glatt und eigentlich ist (für letzteres benötigt man das sogenannte Kragenlemma sowie Mumfords Kompaktheitssatz; beides wird in Anhängen bewiesen). Daß $\mathscr{T}(M)$ zu $\mathbb{R}^{6g-6}$ homöomorph ist, folgt dann schnell mit einem morsetheoretischen Argument.

Kapitel 4 ist der komplexen Struktur auf $\mathscr{T}(M)$ gewidmet: Auf $\mathscr{A}$ hat man eine natürliche fastkomplexe Struktur; diese erweist sich durch explizite Rechnung als $\mathscr{D}_0$-invariant und integrierbar. Daß Γ_g holomorph operiert, folgt leicht. Es wird nicht gezeigt, daß diese komplexe Struktur mit der üblichen übereinstimmt, also insbesondere auf dem Modulraum die „richtige" Struktur induziert.

Im fünften Kapitel werden Eigenschaften der Weil-Petersson-Metrik hergeleitet: sie ist Kählersch, hat negative Schnittkrümmung ($\leqslant -1/8\pi(g-1)$; eine explizite Formel wird ebenfalls bewiesen) und ist nicht vollständig. Der technische Trick für die Berechnung besteht darin, den Levi-Cività-Zusammenhang für die L^2-Metrik auf $\mathscr{A}$ zu „approximieren" durch einen leichter zu handhabenden Zusammenhang.

Im letzten Kapitel wird schließlich gezeigt, daß $\mathscr{T}(M)$ Steinsch ist; dazu wird nachgewiesen (durch Rechnung) daß die Dirichlet-Energieabbildung aus Kap. 4 plurisubharmonisch ist. Schließlich wird M. Wolfs Form der Dirichlet-Energie betrachtet (man vertauscht dazu die Rollen von g und g_0); sie hat den Vorteil, konvex bezüglich der Weil-Petersson-Metrik zu sein. Daraus erhält man als krönenden Abschluß eine Lösung des Nielsenschen Realisierungsproblems: jede endliche Untergruppe von Γ_g läßt sich „realisieren" als Untergruppe von $\mathscr{D}$ (zuerst bewiesen von Kerckhoff).

Für jeden, der über einen soliden Hintergrund in Riemannscher Geometrie verfügt, sollte das Buch sehr gut lesbar sein. Die of recht langen und komplizierten Beweise sind gut gegliedert und motiviert. Insgesamt ist der Aufbau des Buches sehr ansprechend. Eine zu große Zahl von Schreibfehlern steht allerdings im Widerspruch zu der Sorgfalt, mit der das Konzept erstellt wurde.

Es ist sehr erfreulich, daß der differentialgeometrische Zugang zur Teichmüllertheorie jetzt in Lehrbuchform vorliegt und so einem breiteren Publikum zugänglich geworden ist. Um daraus eine Einführung in die Theorie selbst zu machen, wäre noch eine Anbindung an die „klassische“ Theorie wünschenswert gewesen. Der Autor begnügt sich hier damit, an die 20 Quellen ins Literaturverzeichnis aufzunehmen, auf die im Text gar nicht verwiesen wird.

Karlsruhe F. Herrlich

Wallach, N. R., Real Reductive Groups II, San Diego: Academic Press, Inc. 1992, 454 S., $ 105.00

Unter den in den letzten Jahren relativ zahlreich erschienenen Büchern zur Darstellungstheorie reeller reduktiver Gruppen (von Vogan, Knapp, Collingwood, Varadajan u. a.) nahm schon Wallachs „Real Reductive Groups I“ (Academic Press 1988) eine Ausnahmestellung ein, denn es enthält auf relativ knappem Raum eine Darlegung weitreichender Teile dieser Theorie einschließlich aktueller Ergebnisse mit vollständigen Beweisen, ohne bei wesentlichen Sätzen auf Originalarbeiten verweisen zu müssen. In Anbetracht des Umfangs des Materials und der technischen Schwierigkeit mancher Beweise ist das keineswegs selbstverständlich. So können wir uns glücklich schätzen, bereits jetzt den angekündigten zweiten Band in den Händen zu halten.

Seinen Höhepunkt bildet der Beweis des Harish-Chandra-Plancherel-Theorems für reell-reduktive Gruppen G, d. h. die explizite Zerlegung der regulären Darstellung von G in $L^2(G)$ in irreduzible Komponenten bzw. (äquivalent dazu) die Darstellung der δ-Distribution auf G als Integral über die Charaktere der irreduziblen temperierten Darstellungen von G. Erstmals wird dabei im Rahmen einer Monographie der Beweis auf der Grundlage der Asymptotik der Eisenstein-Integrale, d. h. K-endlicher Matrixkoeffizienten verallgemeinerter Hauptreihendarstellungen gegeben, wie ihn Harish-Chandra in seiner großen dreiteiligen Arbeit aus den siebziger Jahren „Harmonic Analysis on Real Reductive Groups“ entwickelt hatte. (Man vergleiche hierzu den alternativen Beweis, der zum Beispiel in Knapp „Representation Theory of Semisimple Lie Groups. An Overview Based on Examples,“ diskutiert wird und die δ-Distribution durch Anwendung von gewissen Differentialoperatoren auf reguläre Bahnen-Integrale gewinnt.) Dabei ergeben sich Unterschiede zu Harish-Chandras Darlegung dadurch, daß der Autor konsequent auf seiner im ersten Band darstellungstheoretisch gewonnenen asymptotischen Entwicklung der Matrixkoeffizienten von Darstellungen endlicher Länge aufbaut.

Doch nun zu den Kapiteln im Einzelnen. Nach den 9 Kapiteln des ersten Bandes setzt das Buch mit Kapitel 10 ein. Es ist der meromorphen Fortsetzung der Knapp-Steinschen-Vertauschungsoperatoren zwischen verallgemeinerten Hauptreihendarstellungen zu unter der Weyl-Gruppe konjugierten Parametern gewidmet, die zunächst für ausreichend positive Werte dieser Parameter durch konvergente Integrale gegeben sind. Der Beweis wird mit Hilfe einer Differenzgleichung analog der der Gamma-Funktion geführt, die mit einer vom Autor gemeinsam mit D. Vogan entwickelten Methode gezeigt wird, und nicht, wie meistens, der Theorie singulärer Integraloperatoren. Diese Methode beruht auf der Untersuchung, inwieweit das Tensorieren mit endlich-dimensionalen sphärischen Darstellungen, gefolgt vom Lokalisieren bezüglich eines infinitesimalen Charakters, mit der Anwendung des Vertauschungsoperators kommutiert. Diese Differenzformel, kombiniert mit Grenzwertformeln für die Vertauschungsoperatoren gestattet es nun, die Matrixkoeffizienten dieser Operatoren (die sogenannten c-Funktionen) durch die Gamma-Funktion auszudrücken. Möchte man explizite Formeln für die c-Funktionen haben, wie in der Harmonischen Analysis wünschenswert, bleiben noch einige Konstanten zu bestimmen, die man kennen würde, kennte man die in die Differenzgleichung eingehenden Polynome. Ein

Vorteil des Zugangs des Autors ist, daß der Beweis ihrer Existenz konstruktiv ist, das heißt, daß sie zumindest prinzipiell berechenbar sind. Ein weiterer Vorzug, die Implementierung der meromorphen Fortsetzung der Anwendung der Vertauschungsoperatoren auf glatte, statt nur auf K-endliche Vektoren, kommt in Kapitel 11 zum Tragen.

Hier wird der Aufstieg zum Plancherel-Theorem zunächst unterbrochen, um die vom Autor gemeinsam mit W. Casselman entwickelte Theorie der C^∞-Globalisierungen von Harish-Chandra-Moduln darzulegen. Ist (π, V) eine zulässige endlich erzeugte, sagen wir, Banach-Darstellung einer reellen reduktiven Gruppe G mit einer maximal kompakten Untergruppe K und der Lie-Algebra g, so werden ihre wesentlicen Eigenschaften mittels des unterliegenden (g, K)-Moduls V_K der K-endlichen Vektoren in V (Harish-Chandra-Modul) studiert. Diese Methode hat nun den Nachteil, daß G auf V_K nicht mehr wirkt, und damit viele Konstruktionen, die gerade auf der G-Wirkung beruhen, nicht mehr ohne weiteres durchführbar sind. Andererseits weiß man, daß jeder Harish-Chandra-Modul eine Globalisierung besitzt. Das ist eine Banach-Darstellung von G derart, daß der Raum ihrer K-endlichen Vektoren zum Ausgangsmodul isomorph ist. Diese Globalisierung ist aber keineswegs eindeutig. Hier wird nun gezeigt, daß jedoch die Fréchet-Darstellung der glatten Vektoren einer beliebigen Globalisierung nicht von der Wahl der Globalisierung abhängt. Diese Zuordnung gibt schließlich die Äquivalenz der Kategorie der Harish-Chandra-Moduln einerseits und einer gewissen Kategorie glatter Fréchet-Darstellungen andererseits. Wesentlich zum recht verwickelten Beweis dieser Sachverhalte ist neben Eigenschaften der Knapp-Steinschen Vertauschungsoperatoren wiederum die in Kapitel 4 des ersten Bandes entwickelte Theorie der asymptotischen Entwicklung der Matrixelemente. Als eine Anwendung dieses schönen Ergebnisses wird eine Darstellung von Eigenschnitten invarianter Differentialoperatoren in einem zu einem „kleinen" K-Typ assoziierten Vektorbündel über dem symmetrischen Raum G/K, die einer Wachstumsbedingung genügen, wie sie gerade automorphen Formen eigen ist, als Poisson-Transformation von Distributionen-Vektoren bestimmter Hauptreihen-Darstellungen gegeben.

Die Kapitel 12 und 13 enthalten den Beweis des Harish-Chandra-Plancherel-Theorems und bilden damit, wie eingangs schon erwähnt, den Höhepunkt des Buches, sind allerdings auch, leider unvermeidlich, die technischsten. Stichworte sind: Eisenstein-Integrale, ihr konstanter (höchster) Term, Wellenpakete von Eisenstein-Integralen, Harish-Chandra-Transformation. Leider wird die im Gegensatz zu den c-Funktionen explizit bekannte Plancherel-Dichte (siehe die Originalarbeiten von Harish-Chandra oder auch Knapps bereits erwähntes Buch) hier nur im Spezialfall der fundamentalen Reihe ausgerechnet.

Kapitel 14 nimmt sich etwas fremd in diesem Buch aus. Es behandelt die klassische abstrakte Darstellungstheorie lokal kompakter Gruppen via C^*- und von Neumann-Algebren, direkter Integrale etc. und ordnet das Harish-Chandra-Plancherel-Theorem, was ja vollkommen unabhängig von dieser Theorie formuliert und bewiesen wurde, hier ein. Durchaus angesprochen fühlte ich mich von des Autors Bemerkung in der Einleitung, daß sich die junge Generation von Forschern auf dem Gebiet reeller reduktiver Gruppen bisher ignorant gegenüber dieser Theorie verhält. So bin zumindest ich dankbar dafür, nun über eine sehr lesbare Einführung in dieses schöne Gebiet mit einem Umfang von nur 90 Seiten zu verfügen. Angesichts der Aktualität, die die (insbesondere K-) Theorie der Gruppen-C^*-Algebren in den letzten 20 Jahren wieder gewonnen hat, um so mehr.

Im letzten, dem 15. Kapitel „The Whittaker-Plancherel-Theorem" wird es nun wieder sehr speziell. Hier geht es um die Zerlegung der von einem Charakter der maximal unipotenten Gruppe N von G induzierten Darstellung von G. Dabei kommt fast das gesamte Material der vorangegangenen 14 Kapitel zur Anwendung.

Leider muß angemerkt werden, daß es auch in diesem Buch viele Druckfehler gibt, was mitunter den Nachvollzug der Beweise erheblich erschwert, da es bei diesem (angenehm) knappen Stil auf jedes Detail ankommt. Wenigstens wütet der Druckfehler-Teufel nicht ganz so exzessiv wie im ersten Band.

Eine weitere Warnung: Jemandem, der sich erst einmal einen Überblick über die Grundzüge und Hauptergebnisse der Darstellungstheorie reeller reduktiver Gruppen verschaffen möchte, sei zunächst von diesem Buch abgeraten und z. B. das schon erwähnte von Knapp oder auch Varadarajans „An Introduction to Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups" empfohlen, denn der Autor geizt durchaus mit motivierenden Worten. Wer aber bereits motiviert ist und es genau wissen will, findet hier einen effektiven Weg. Ihm sei mit den Worten des Autors aus der Einleitung des ersten Bandes zugerufen: „Be patient and it will be yours."

Hoffen wir, daß die Klassifikation des unitären Duals reeller reduktiver Gruppen nicht mehr lange auf sich warten läßt, denn für diesen Fall hat uns der Autor im Vorwort definitiv einen dritten Band versprochen.

Berlin M. Olbrich

Woodhouse N. M. J., Geometric Quantization (2. Ausgabe), Oxford u. a.: Clarendon Press 1992, 307 S., £ 37,50

1 Symplectic geometry – 2 Lagrangian and Hamiltonian mechanics – 3 Symmetry – 4 Hamilton-Jacobi theory – 5 Complex polarizations – 6 Elementary relativistic systems – 7 Classical fields – 8 Prequantization – 9 Quantization – 10 The metaplectic correction

Quantisierung ist der Versuch, die quantenmechanische Beschreibung eines physikalischen Systems aus der Beschreibung eines klassischen Analogons abzuleiten. Es gibt eine große Anzahl verschiedener Quantisierungsstrategien, die sehr oft auf eine spezielle Klasse von zu quantisierenden Systemen zugeschnitten sind. Unter dem Begriff geometrische Quantisierung faßt man Konstruktionsvorschriften zusammen, die, ausgehend von einer symplektischen Mannigfaltigkeit M und Funktionen auf M, einen Hilbertraum $\mathscr{H}$ und symmetrische Operatoren auf $\mathscr{H}$ liefern. Dabei ist die symplektische Mannigfaltigkeit das mathematische Modell des klassischen Systems (der Phasenraum) und der Hilbertraum das mathematische Modell des quantenmechanischen Systems. Die klassischen Observablen sind Funktionen auf M für das klassische System und symmetrische Operatoren auf $\mathscr{H}$ für das quantenmechanische System. Die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ von den Funktionen auf M in die Operatoren auf $\mathscr{H}$ soll diverse physikalisch motivierte Bedingungen erfüllen, allen voran die folgenden von Dirac im Jahr 1925 postulierten:

(i) $f \mapsto \hat{f}$ ist linear.
(ii) Wenn f konstant ist, dann ist $\hat{f}$ der Multiplikationsoperator mit dieser Konstante.
(iii) Wenn die Poisson-Klammer $\{f_1, f_2\}$ der Funktionen f_1 und f_2 gleich f_3 ist, dann ist der Kommutator $[\hat{f}_1, \hat{f}_2] = \hat{f}_1 \hat{f}_2 - \hat{f}_2 \hat{f}_1 = -i \dfrac{h}{2\pi} \hat{f}_3$, wobei h die Plancksche Konstante ist.

Jede symplektische Mannigfaltigkeit hat eine kanonische Volumenform (eine äußere Potenz der symplektischen Form). Daher ist es natürlich, den Hilbertraum der bezüglich dieser Volumenform quadratisch integrierbaren Funktionen zu betrachten. Jeder glatten Funktion f auf M ordnet man ihr Hamiltonsches Vektorfeld zu (das „Gradientenfeld" bezüglich der symplektischen Form). Ein natürlicher Kandidat für einen f zugeordneten Operator ist dann die Richtungsableitung bezüglich dieses Vektorfelds. Es stellt sich jedoch heraus, daß diese Vorschrift modifiziert werden muß, damit die Diracschen

Bedingungen erfüllt sind. Lokal macht man das mit Hilfe eines symplektischen Potentials, d. h. einer Pfaffschen Form, deren äußere Ableitung die symplektische Form ist. Will man diese Abänderung global formulieren, so muß man eine Ganzzahligkeitsbedingung an die de Rham Kohomologieklasse der symplektischen Form stellen und die Funktionen auf M durch Schnitte eines mit Hilfe der symplektischen Form konstruierten Geradenbündels ersetzen. Diese Art von physikalisch motivierten Modifikationen natürlicher mathematischer Objekte ist typisch für die gesamte Theorie. Man verlangt zum Beispiel, daß eine Gruppe der kanonischen (d. h., die symplektische Form erhaltenden) Transformationen auf dem Hilbertraum eine Darstellung hat, die irreduzibel wird, wenn die Gruppe transitiv wirkt. Mit dieser Forderung wird der oben beschriebene Hilbertraum zu groß und man muß sich auf gewisse Unterräume einschränken, typischerweise auf solche von Funktionen, deren Richtungsableitungen in der Hälfte aller Richtungen verschwinden. Die Auswahl der Richtungen beeinflußt das Spektrum der Operatoren und unterliegt daher wieder physikalischen Restriktionen. Außerdem führt die Auswahl von Richtungen in vielen Fällen dazu, daß man nur ganz wenige Funktionen quantisieren kann, und daher zu neuen Modifikationen ...

Das Buch von Woodhouse beschreibt die hier angedeutete Abfolge von Modifikationen der mathematischen Modelle sowie die physikalischen Motivationen. Jede Entwicklung ist durch Beispiele illustriert. Der Stil der Präsentation ist informell. Dadurch liest sich das Buch sehr angenehm, solange man nicht jede Formel nachvollziehen oder die für eine bestimmte Aussage gemachten Annahmen ausformuliert haben will. Andererseits gibt sich der Autor große Mühe, die notwendigen mathematischen Konzepte aus der symplektischen Geometrie einzuführen. Die Kapitel (siehe oben) 1 und 3–5 dienen ausschließlich diesem Zweck. Außerdem stellt er in den Kapiteln 2, 6 und 7 Hintergrundmaterial über klassische physikalische Systeme zusammen. Zur leichteren Orientierung gibt es auch einen Anhang mit verschiedenen im Text verwendeten Definitionen und Resultaten sowie Hinweisen, wo diese in der Literatur zu finden sind. Das Herzstück des Buches sind die letzten Kapitel, in denen der eigentliche Quantisierungsprozeß beschrieben wird.

Einem Leser ohne solide Kenntnisse in Differentialgeometrie wird es trotz der oben beschriebenen Hilfen schwerfallen, dem Text im Detail zu folgen. Ich halte das Buch dennoch für eine gute Einstiegslektüre, gerade wegen der informellen Darstellung und der Vielzahl von Beispielen. Die zweite, vollständig überarbeitete, Ausgabe enthält zusätzliche Beispiele und liest sich ganz allgemein besser als die erste. Etwas schade finde ich es, daß auf die Anwendungen der geometrischen Quantisierung in der Darstellungstheorie praktisch nicht eingegangen wird.

Weiterführende Literatur

[1] Brylinski, J. L.: Loop spaces, characteristic classes, and geometric quantization, Basel: Birkhäuser 1993
[2] Hurt, N.: Geometric Quantization in Action, Dordrecht: Reidel 1983
[3] Kostant, B.: Quantization and unitary representations (Lecture Notes in Math. **170** (1970))
[4] Robinson, P. L.; Rawnsley, J. H.: The metaplectic representation, MP^c structures, and geometric quantization, Memoirs AMS **81** (1989)
[5] Śniatycki, J.: Geometric quantization and quantum mechanics, New York: Springer 1980
[6] Wallach, N.: Symplectic Geometry and Fourier Analysis, Brookline: Math. Sci. Press 1977

Madison J. Hilgert

Akivis, M. A., Shelekhov, A. M., Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs (Mathematics and Its Applications, Soviet Series 82) Dordrecht u. a.: Kluwer Academic Publishers 1992, 376 S., Dfl. 290.–

The research program of web geometry was initiated by Wilhelm Blaschke in 1927. He and his co-workers published a series of papers under the title "Topologische Fragen der Differentialgeometrie" about invariant properties of smooth systems of curves or surfaces in a plane or space domain with respect to local diffeomorphisms. The results of this research were explained in the monograph "Geometrie der Gewebe" (Web Geometry) in 1938, written jointly by W. Blaschke and G. Bol. This subject was connected with the basic questions of local differential geometry and of the foundation of geometry, namely: the closure properties of systems of curves or surfaces (i.e. webs) how can be characterized with help of differential invariants (curvatures) of the web structure or with help of algebraic axiomes (weak associativity conditions) of the coordinatizing algebras.

After finishing the activity of Blaschke's school this subject developed in two new directions: abstract incidence geometry (nets and projective planes) and the algebraic theory of binary systems (loops).

The new methods of differential geometry (fibre bundles, G-structures) made possible to elaborate the multidimensional web geometry. The first results of this theory were contained in the thesis of S.-S. Chern written by W. Blaschke in 1936, but the systematic research in this subject was performed by the first author of this book and by his co-workers. The present book is a full explantion of the results of Akivis' school on web geometry.

The first two chapters contain the fundamental differential geometric and algebraic constructions of the theory of 3-webs: structure equations, Chern connection, local coordinate loops and their tangent algebras, canonical coordinates and the algebraic interpretation of the torsion and curvature tensors. Chapter 3 gives an introduction to the theory of Grassmann and algebraisable webs. There is given a description of the local geometry of these classes of 3-webs and their characterization with help of torsion and curvature tensors. Chapter 4 contains the local differential geometric theory of Bol and Moufang 3-webs. These classes of 3-webs are associated to Bol and Moufang loops having relatively good associativity properties. 3-webs with the hexagonality closure condition are studied in Chapter 5. Chapter 6 is devoted to the study of local groups of local automorphisms of a 3-web. There is given an investigation of the Killing equations satisfied by infinitesimal automorphism. Chapter 7 contains a study of tangent algebras of 4th order of the coordinate loops of 3-webs. Chapter 8 can be considered as a short introduction to the theory of d-webs ($d > 3$). The book is completed by an appendix about the application of web geometry to mathematical physics, written by E.V. Ferapontov.

The explanation of the extensive material is well-organised. The authors use Cartan's method of moving frames and a consequent notation which is characteristic of their school. The treatment is formulated strictly locally, the global meaning of the introduced notions and statements is never discussed. Usually the differential geometric structures are assumed to be real analytic without further discussion.

The book contains a very interesting explanation of a deep and rich theory connected with differential and classical algebraic geometry, the foundation of geometry and with non-associative algebra. No doubt, this monograph will inspire new researches from the view-point of axiomatic methods, global geometry, topological algebra and function theory by the discussion of the connection of this very matterful theory with other branches of mathematics.

The book is warmly recommended to everyone doing research in the related fields.

Szeged P. T. Nagy

Fomenko, A., Visual Geometry and Topology (mit 50 ganzseitigen Bildern und 287 Zeichnungen), Berlin u. a.: Springer Verlag 1994, 324 S., DM 128,–

Anschauung als Methode und als Ziel der Mathematik, das ist ein großes Thema, historisch und philosophisch, es ist ein unerschöpfliches Thema, das zu Diskussionen bis tief in die Nacht und in die Morgenstunden führen kann. Wie gerne würden wir davon etwas anklingen lassen, denn was uns in diesem Buch an Anschaulichem und an Visionen entgegentritt, ist reich und vielgestalt – aber wir müssen es uns versagen. Vorläufig jedenfalls, bis der Verlag sich entschließt, eine verbesserte und auch von manchem gereinigte Neuausgabe herauszubringen. So nämlich, wie es ist, ist das Buch nicht akzeptabel. Gerade die, an die es sich richtet, die Nicht-Fachleute, und auch Studenten, muß ich warnen: Das Buch wimmelt von Fehlern.

Viel Unsinniges und Verworrenes ist wohl durch die Übersetzung entstanden. Wir wollen das der Übersetzerin nicht anlasten: Es ist nicht leicht, aus dem Russischen zu übersetzen. Bei jedem Artikel, zum Beispiel, muß man entscheiden, ob es hier *a manifold* oder *the manifold* heißen muß. Die Entscheidung ist in der vorliegenden Übersetzung mehr oder weniger statistisch getroffen, ebenso wie die Wahl bei den Paaren: *it appears – it turns out, easy – simple, one – unity, various – different, connected – related*... Aber das sind eher Kleinigkeiten. Auch das Original selbst muß schon voller Unsinnigkeiten und Fehler stecken. Ich habe, nur als Test, mal auf Seite 90 nachgezählt und bin auf die Zahl von etwa 25 notwendigen Korrekturen gekommen. Das sind Mängel der beschriebenen Art, Druckfehler wie *there* statt *where,* oder *surface* statt *submanifold,* aber auch so unsinnige Behauptungen wie *Since grad* $f(x) = 0$, *this critical point is well defined, i. e. independent of the choice of local coordinates,* wo er vielmehr sagen sollte, daß aus dem genannten Grunde die Hesseform als quadratische Form nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. Besonders tückisch ist, daß schon die grundlegenden Definitionen mit Vorliebe fehlerhaft sind. Das geht schon Seite 1 los mit der Erklärung, eine eineindeutige stetige Abbildung sei ein Homöomorphismus (und das wird sogleich auf nichtkompakte Räume angewendet). Seite 2 findet sich die Behauptung: *In a three-dimensional space we cannot continuously and disjointly deform a nontrivial knot into a flat circle.* – was man doch sehr wohl kann: man muß nur tüchtig ziehen. Seite 3 entspricht die Definition eines Graphen nicht den als Beispiele danebenstehenden Figuren. Seite 4 steht, der Kantengraph eines Tetraeders lasse sich nicht in die Ebene einbetten. Ich muß doch sehr bitten: Schauen Sie doch mal auf die Spitze! So geht es fort und fort. Ich merke nur als Markierungspunkte an: Falsch und unsinning ist die Formel Seite 24 unten zur Definition des Randoperators für ein Simplex – und wer hilft dem armen unvorgebildeten Leser dann weiter, wenn nun auch S. 31 die Pfeile der Randoperatoren falschrum gehen und auf S. 51 in der Zweizeilenrechnung für $\partial\partial = 0$ zwei Fehler stecken? Unhaltbar ist der „Beweis" für $H_1(S^2) = 0$ Seite 40. Man sieht gar nicht, wo überhaupt benutzt wird, daß es sich um die Sphäre handelt, und nicht etwa um den Torus. Nach Definition 9 Seite 84 wäre $\mathbb{R}$ eine berandete Mannigfaltigkeit mit Rand $\{0\}$.

Ich überspringe viele Seiten und tausend Verworrenheiten und Fehler und merke als besonders sinnstörend noch an: Wo es mit Differentialgleichungen losgeht, fehlen alsbald die Punkte der Ableitung nach der Zeit, so daß ein Anfänger nie herausfinden kann, wo denn die versprochene Differentialgleichung ist. Auf Seite 126 ist die Legende zur Figur 2.3.43 falsch, was den ganzen Henkelaufbau der Flächen ziemlich unverständlich macht. Auch die Definition der *„spines"* Seite 165 enthält einen Fehler, $M \times (0, 1)$ statt $M \times [0, 1)$, und der wird zur Verunsicherung des Lesers auf der nächsten Seite wiederholt. Die Schnittkrümmungen sind nach Definition Seite 256 Beträge, was den Hinweis auf die Bedeutung ihrer Vorzeichen Seite 258 ziemlich mysteriös macht ... .

Kurzum, so geht es nicht. Wenn ein wichtiger mathematischer Artikel oder ein wichtiges Buch auf Russisch erscheint, so ist uns mit einer schnell erscheinenden Rohübersetzung am besten gedient, und verbessern kann sie ohnehin nur ein Mathematiker, der die Sache versteht. Hier aber handelt es sich um ein Buch, nicht für Experten, sondern für mathematisch gebildete und interessierte Laien. Dieses Manuskript muß am besten ein englischer oder amerikanischer Mathematiker mit guten Topologiekenntnissen Seite für Seite durchgehen und berichtigen. Nicht auf jeder Seite werden so viele Korrekturen nötig sein, wie auf Seite 90, mal mehr mal weniger. Aber auf mehr als ein halbes Dutzend wird man doch meistens kommen. Bei einem so aufwendig gemachten und übrigens so vorzüglich gedruckten und beneidenswert gut gebundenen Buch darf man doch einen anständigen Text erwarten, auf Englisch für Engländer.

Wir suchen, unsere Enttäuschung zu überwinden, und nähern uns wieder dem Buch. Hier ist nun von einer Besonderheit zu berichten: Der Autor ist auch als Künstler tätig und hat sein Werk mit einer Serie von Graphiken verziert. Sie haben etwas Beängstigendes, gleichsam immer wiederkehrend zeigen sie die Einsamkeit im unendlich Vervielfachten und den schwindelerregenden Sog des Abgrunds. Soweit überhaupt Spuren von Lebendigem darin vorkommen, sind es meist Kadaver und Mumien, eher unbeholfen dargestellt. Nun hat der Künstler, wie es heute üblich und notwendig scheint, seinen Werken auch Kommentare beigegeben, aber daneben hat auch der Mathematiker Fomenko diese Graphiken als mathematische Illustrationen gedeutet. Diese mathematischen Erläuterungen aber sind nicht brauchbar. Mag immerhin beim Entstehen der Graphiken die Bemühung, ja, warum soll man es nicht gestehen, die Qual mit dem Mathematischen eingewirkt haben, aber daß man nun die armen um Einsicht bemühten Studenten belehrt, sie hätten in diesen Gestalten und Ungestalten Triangulierungen und Homöomorphismen von Sphären zu suchen, das müssen wir zurückweisen: Wir wünschen uns, daß die Mathematiker ihre Sache bescheiden und ohne Tintenwolken des Tiefsinns vorführen. So ist es schließlich wohltuend, in einem solchen Kommentar auf Seite 95 die Behauptung zu finden, für eine Funktion auf der Scheibe mit isolierten kritischen Punkten sei die Zahl der Maxima minus Zahl der Minima plus Zahl der Sattelpunkte stets gleich eins. Das nämlich verstehen wir, und es ist falsch. Was die künstlerischen Kommentare angeht, so verweisen wir die Sache zuständigkeitshalber an das Feuilleton der Frankfurther Allgemeinen.

Wovon nun wird das Buch handeln, das wir nach diesem Entwurf erwarten dürfen?

Im ersten Kapitel wird die Homologie eines Simplizialen Komplexes wortreich, aber etwas konfus und ohne Beweis für die Homotopieinvarianz beschrieben. Die Darstellung würde sehr an Klarheit gewinnen, wenn am Anfang genaue Definitionen stünden und am Ende die Manipulationen der Inzidenzmatrizen durch Betrachtung der Abbildungen zwischen den Gruppen von Ketten, Zykeln und Rändern ersetzt würden. Später will der Autor den topologischen Typ einer kompakten orientierten Fläche anhand einer Zerlegung in kleine Dreiecke bestimmen und empfiehlt, diese Aufgabe zu lösen, indem man *using the computer* die erste Homologie berechnet, denn nicht einmal die Eulercharakteristik steht am Ende zur Verfügung.

Das zweite Kapitel besteht aus zwei Teilen. Der erste, nach ziemlich oberflächlichen Reden über Mannigfaltigkeiten im allgemeinen, enthält als handfestes Resultat die Klassifikation der kompakten Flächen und die Berechnung ihrer ersten de Rham-Kohomologie. Interessanter ist der zweite Teil, der die Komplexitätstheorie für Dreimannigfaltigkeiten nach Mateev beschreibt und eine Liste aller Mannigfaltigkeiten der Komplexität $\leqslant 5$ gibt. Dieses zweite Kapitel scheint ursprünglich ein vom ersten unabhängiges Manuskript gewesen zu sein. Es wird darin gelegentlich die Eulercharakteristik aufgerufen, von der vorher nie die Rede war, dafür aber anderes von neuem besprochen, was wir schon hatten.

Das dritte Kapitel ist eine Art Übersichtsartikel zu Arbeiten des Autors über vollständig integrable Hamiltonsysteme auf kompakten symplektischen Viermannigfaltigkeiten. Das sind in der Tat sehr attraktive Untersuchungen, die den Wunsch erregen, über dieses schöne Gebiet Genaueres nach Art eines mathematischen Lehrbuches von dem Autor zu erfahren.

Schließlich wird im vierten Kapitel und zwei Anhängen eine Sammlung vertrauter und bewährter Themen für Dia-Vorträge vor einem Laienpublikum kurz angesprochen: Minimalflächen (Seifenblasen), Fraktale und Chaos durften nicht fehlen, Stabilität von Homöomorphismen, das Thema der Geometrischen Zahlentheorie wird verfehlt und mißrät zur Computer-Reklame in Vertretermanier. Einige angeheftete Seiten enthalten flüchtige Bemerkungen über ein nichtholonomes System (auch das sieht sehr interessant aus) und über Spiegelungsgruppen. Ein Register fehlt.

Regensburg Th. Bröcker

Neimark, Yu. I., Landa, P. S., Stochastic and Chaotic Oscillations, Dordrecht: Kluwer 1992, 512 S., Dfl 320.–

Dieses dickleibige Buch ist ein weiterer Beitrag zur Flut der „Chaos"-Literatur, und man fragt sich, welche Funktion es erfüllen kann. Für eine kurze Inhaltsangabe zitieren wir zunächst aus dem Klappentext:

"This volume is devoted to stochastic and chaotic oscillations in dissipative systems. Chapter 1 deals with mathematical models of deterministic, discrete and distributed dynamical systems. In Chapter 2, the two basic trends of order and chaos are considered. The next three chapters describe stochasticity transformers, amplifiers and generators, turbulence, and phase portraits of steady-state motions and their bifurcations. Chapter 6 treats the topics of stochastic and chaotic attractors, and this is followed by two chapters dealing with routes to chaos and the quantitative characteristics of stochastic and chaotic motions. Finally, Chapter 9, which comprises more than one-third of the book, presents examples of systems having chaotic and stochastic motions drawn from mechanical, physical, chemical und biological systems. The book concludes with a comprehensive bibliography".

Das Buch, eine Übersetzung des 1987 erschienene russischen Originals, ist im „physicist's style" verfaßt: Es gibt praktisch keinen ausformulierten mathematischen Satz, weshalb das Buch auch auf keinen Fall als Text- oder Referenzbuch für Mathematiker dienen kann. Dagegen wird man in erzählender, qualitativer und an die Intuition appelierende Weise durch die diversen Phänomene und Modelle geführt. Dies wird unterstützt von Hunderten von Abbildungen, die von symbolischen Diagrammen über Computer-Simulationen bis zu Photographien reichen.

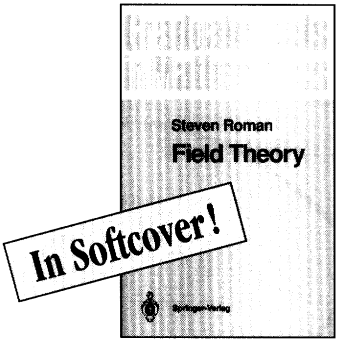
In den gut ausformulierten Anwendungsbeispielen, vor allem im Kapitel 9, liegt m. E. die Stärke des Buches, was es auch informativ und unterhaltend für Mathematiker macht. Von Stochastik im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie ist allerdings in dem Buch – trotz des Titels – praktisch nichts enthalten.

Das Buch hat einen sehr dürftigen Index, der aus drei Spalten besteht. Von den 703 Eintragungen in der Bibliographie sind die 375 ersten nach dem russischen Alphabet geordnet (also „Haken" nach „Stratonovich" etc.), und stellen vermutlich die ursprüngliche Bibliographie des russischen Originals dar. Dazu sind weitere 328 Einträge hauptsächlich westlicher Literatur addiert, die teilweise im Text verarbeitet sind. Das Englisch der Übersetzung ist akzeptabel.

Ich kann das Buch Mathematikern mit Kenntnissen auf dem Gebiet der dynamischen Systeme als Material-, Modell-, Phänomen- und Beispielsammlung empfehlen.

Bremen L. Arnold

Graduate Texts in Mathematics



Vol. 158

S. Roman

Field Theory

1995. XII, 272 pp. 8 figs. **DM 48,-**; öS 374,40;
sFr 48,-ISBN 0-387-94408-7

The book presents the basic theory of fields. The first part begins with a discussion of polynomials over a ring, the division algorithm, irreducibility, field extensions, and embeddings. The second part is devoted to Galois theory. The third part treats the theory of binomials. The book concludes with a chapter on families of binomials - the Kummer theory.

Vol. 151

J.H. Silverman

Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves

1994. XIII, 525 pp. 17 figs. **DM 69,-**; öS 538,20; sFr 66,50
ISBN 3-540-94328-5

The author presents six important topics: I. Elliptic and modular functions for the full modular group. II. Elliptic curves with complex multiplication. III. Elliptic surfaces and specialization theorems. IV. Néron models, Kodaira-Néron classification of special fibres, Tate's algorithm, and Ogg's conductor-discriminant formula. V. Tate's theory of q-curves over p-adic fields. VI. Néron's theory of canonical local height functions.

Also available by J.H. Silverman:
The Arithmetic of Elliptic Curves
1986. **DM 89,-**; öS 694,20; sFr 85,50 ISBN 3-540-96203-4

Vol. 152

G.M. Ziegler

Lectures on Polytopes

1995. IX, 370 pp. **DM 48,-**; öS 374,40; sFr 48,-
ISBN 3-540-94365-X

These lectures introduce the basic facts about polytopes, with an emphasis on the methods that yield the results. They discuss important examples and elegant constructions and show the excitement of current work in the field. The material requires only linear algebra as a prerequisite, but takes the reader quickly from the basics to topics of recent research, including a number of unanswered questions.

For more information see the author's home page:
http://winnie.math.tu-berlin.de/ßziegler/

Vol. 153

W. Fulton

Algebraic Topology

1994. Approx. 435 pp. **DM 48,-**; öS 374,40; sFr 65,50
ISBN 3-540-94327-7

This book introduces the important ideas of algebraic topology by emphasizing the relation of these ideas with other areas of mathematics. The authour concentrates on concrete problems in spaces with a few dimensions, introducing only as much algebraic machinery as necessary. This makes it possible to see a wider variety of important features in the subject than is common in introductory texts.

Visit Springer on the Internet at http: //www.springer.de

Springer

Springer-Verlag, Postfach 31 13 40, D-10643 Berlin, Fax 0 30 / 82 07 - 3 01 / 4 48 e-mail: orders@springer.de pro.2731.MNT/E/1