E 20577 F
98. Band Heft 1
ausgegeben am 26. 2. 1996

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1996

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax (0711) 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GdbR, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 98, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

L. van den Dries: 0-Minimal Structures on the Field of Real Numbers
E. Heinz: Monge-Ampèresche Gleichungen und elliptische Systeme
P. Schneider: Gebäude in der Darstellungstheorie über lokalen Zahlkörpern
G. Schumacher: Über die Entwicklung der Komplexen Analysis in Deutschland vom Ausgang des 19. Jahrhunderts bis zum Anfang der siebziger Jahre
Sir P. Swinnerton-Dyer: Diophantine Equations: the geometric approach

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

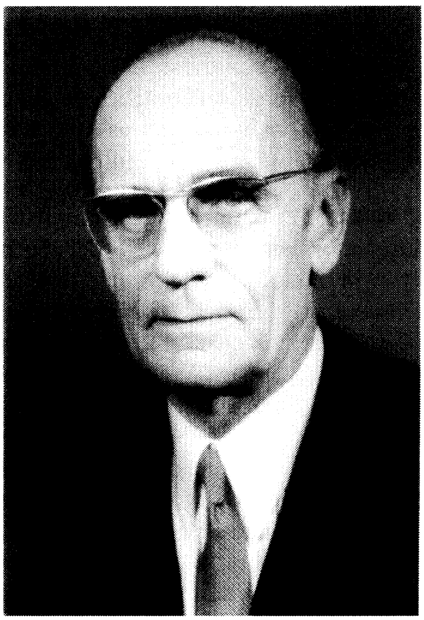
Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
98 (1996) 1–11
Mathematics Subjects Classification: 01 A70

Wolfgang Haack zum Gedächtnis

Beiträge von J. Grosche, F. R. Güntsch, G. Hellwig, E. Jessen, H.-J. Töpfer und W. Wendland, bearbeitet von G. Bruhn



1 Lebenslauf

Wolfgang Haack wurde am 24. April 1902 als Sohn des bekannten Geographen Hermann Haack und seiner Ehefrau Johanna geb. König in Gotha geboren. Er studierte von 1921 bis 1922 an der TH Hannover zunächst Maschinenbau, dann Mathematik an der Universität Jena bis zu seiner Promotion 1926 bei Robert Haußner mit einer Arbeit über die „Bestimmung von Flächen, deren geodätische Linien sich in Kreise der Ebene abbilden lassen". Anschließend ging er zwei Jahre an die Universität Hamburg zu Wilhelm Blaschke, der ihn zum Studium der Affin-Geometrie der Strahlensysteme anregte. Hier legte er das Staatsexamen für das Lehramt an höheren Schulen ab.

In den folgenden Jahren arbeitete er in Stuttgart und Danzig als Assistent bei Wilhelm Kutta, Friedrich Georg Pfeiffer und ab Herbst 1928 bei Julius Sommer. 1929 habilitierte er sich dort mit der Schrift „Affine Differentialgeometrie der parabolischen Strahlensysteme" und wurde in Danzig Privatdozent. 1935 ging er als Privatdozent und wissenschaftlicher Assistent zu Rudolf Rothe an die Technische Hochschule Berlin-Charlottenburg. Dem Druck des NS-Regimes zu weiterer politischer Aktivität, wie er damals üblicherweise auf junge Dozenten ausgeübt wurde, entzog er sich, indem er – seinen privaten Interessen am Motorsport folgend – in einer Gruppe des NS-Kraftfahrzeugkorps in Potsdam als technischer Ausbilder mitarbeitete. Weiteren Aufschluß über die zehn Jahre bis 1945 gibt [42].

Im Jahre 1936 heiratete er die Physikerin Dr. Marianne Blumentritt, eine Schülerin von Friedrich Hund, Georg Joos und Peter Debye. Sie war ihm bei allen wissenschaftlichen Projekten eine kompetente Mitarbeiterin, Anregerin und Gesprächspartnerin, ganz besonders im Bereich der Gasdynamik. Wolfgang Haack berichtet in seinen Erinnerungen [44]: „… Wir haben zu dritt an dieser Düse gearbeitet, und zwar das Trans-Sonic-Gebiet um den engsten Querschnitt bearbeitete meine Frau, indem sie eine Reihenentwicklung ansetzte. …" Zugunsten ihres Mannes verzichtete sie dabei auf ihre eigene aussichtsreiche wissenschaftliche Laufbahn.

Im Jahr 1937 zum außerplanmäßigen Professor ernannt folgte er im gleichen Jahr einem Ruf auf den Lehrstuhl für Mathematik und Geometrie der Technischen Hochschule Karlsruhe und wurde dort 1938 außerordentlicher und 1940 ordentlicher Professor. Nachdem er etwa seit 1936 gasdynamische Fragen anging, gelang ihm im Jahr 1941 die Lösung des von Theodore v. Kármán für unlösbar erklärten Problems der Bestimmung der Geschoßformen kleinsten Wellenwiderstandes. Dadurch ermutigt begann Wolfgang Haack den Aufbau eines Forschungsinstituts für Ballistik, das bis 1945 bestand. 1944 erhielt er einen Ruf als ordentlicher Professor an die Technische Hochschule Berlin-Charlottenburg, die spätere Technische Universität Berlin. Das Kriegsende erreichte ihn in Alsleben, wohin sein Ballistik-Institut ausgelagert war, und er wurde von 1945 bis 1949 in Bad Gandersheim als Berater des „British Research Branch" der britischen Militärverwaltung verpflichtet. Er nutzte diese Zeit auch, indem er als Gastprofessor Vorlesungen an der ETH Zürich und an der Universität Göttingen (Lehrstuhlvertretung Wilhelm Magnus) hielt. Daneben war er in dieser Zeit als Berater verschiedener Forschungsinstitute und als Leiter einer industriellen Entwicklungsabteilung tätig.

Im Jahre 1949 trat er die Nachfolge von Georg Hamel auf den Lehrstuhl für Mathematik und Mechanik an der TH Berlin an. Seit 1950 war er zusätzlich Honorarprofessor an der Freien Universität Berlin. Auf Wunsch von G. Hamel und Erhard Schmidt betrieb er 1950 gemeinsam mit Alexander Dinghas von der Freien Universität und Hermann Ludwig Schmid und Kurt Schröder von der Humboldt-Universität die Neu-Gründung der Berliner Mathematischen Gesellschaft und übernahm bis 1954 deren Vorsitz.

1957 richtete er an der TU Berlin das Recheninstitut ein, in dem in enger Kooperation mit Konrad Zuse der Prototyp des Zuse 22 Rechners aufgestellt wurde.

Von 1956 bis 1960 war er Mitglied der Kommission zur Errichtung des Instituts für Kernforschung Berlin, die unter dem Vorsitz von Max v. Laue arbeitete. Als das Bundesministerium für Atomforschung auch die Raumfahrtforschung übernahm, wurde er zum Vorsitzenden des Arbeitskreises Datenverarbeitung gewählt. 1959 übernahm er die Position des Direktors des Sektors Mathematik am Hahn-Meitner-Institut für Kernforschung Berlin, die er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1968 innehatte. 1963 gründete er das Institut für Funk und Mathematik der Gesellschaft zur Förderung der astrophysikalischen Forschung. Darüberhinaus wirkte er in mehreren Kommissionen der Bundesregierung und der Kultusministerkonferenz.

Von 1958 bis 1961 gehörte er einem Ausschuß zur „Vereinheitlichung des Mathematik-Studiums in Europa" an, der vom Amt für Wissenschaft in Nordrhein-Westfalen eingerichtet und von Heinrich Behnke und Henri Cartan organisiert wurde. Als Ergebnis dieser Arbeit konnte zur Eröffnung der DMV-Tagung 1961 in Frankfurt das „Europäische Studienbuch" vorgelegt werden. Die Einleitung zu diesem Studienbuch geht auf Wolfgang Haack und Friedrich Hirzebruch zurück. 1961/1962 war Wolfgang Haack Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für die er auch in mehreren Kommissionen tätig war.

Nicht unerwähnt lassen darf man Haacks Engagement für das Mathematische Forschungsinstitut in Oberwolfach, dessen Existenz nach dem Kriege auf dem Spiel stand. Zusammen mit Günter Hellwig begann er 1959 mit den Vorbereitungen der ersten internationalen Tagung in Oberwolfach über Partielle Differentialgleichungen, die schließlich 1961 stattfand. Es gelang ihm, bei dieser Gelegenheit eine Reihe bekannter ausländischer Mathematiker, darunter Richard Courant, Fritz John und Jürgen Moser aus den USA und Jean Leray aus Frankreich, nach Deutschland zu holen. Courant war nach Ablauf der Tagung von der Oberwolfach-Idee so begeistert, daß er Wolfgang Haack und die anderen an Oberwolfach interessierten deutschen Mathematiker mit dem Gewicht seiner Persönlichkeit und seinem großen Einfluß spontan unterstützte und so den Erhalt und weiteren Ausbau des Instituts sicherte. Später wirkte Wolfgang Haack bis zu seinem Tode im wissenschaftlichen Beirat des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach mit.

In Würdigung seiner wissenschaftlichen Verdienste erhielt Wolfgang Haack im Jahre 1975 die Ehrendoktorwürde der Universität Jyväskylä, Finnland, im Jahre 1982 ehrte der Fachbereich Mathematik der Freien Universität Berlin Wolfgang Haack anläßlich seines 80. Geburtstages durch die Verleihung der Ehrendoktorwürde.

Am 24. Mai 1983 erhielt Wolfgang Haack das Verdienstkreuz 1. Klasse des Verdienstordens der Bundesrepublik Deutschland aus der Hand des Bundespräsidenten Karl Carstens.

Auf der Jahrestagung 1988 der Deutschen Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt in Darmstadt wurde Wolfgang Haack durch die Verleihung der korrespondierenden Mitgliedschaft geehrt. Im Jahre 1992 ernannte ihn die Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik anläßlich seines 90. Geburtstages zum Ehrenmitglied.

Seit dem Tode seiner Frau im Jahre 1985 stand ihm seine Schwägerin, Frau Inge Blumentritt, sorgend zur Seite. Am 28. November 1994 verstarb Wolfgang Haack nach schwerer Krankheit in Berlin.

2 Sein Lebenswerk

2.1 Mathematische Forschungsaktivitäten

Wolfgang Haack war in seinem Wirken ein sehr vielseitiger Forscher, Lehrer und auch Organisator. In den Jahren 1929 bis 1936 widmete er sich ganz der Geometrie und verfaßte zehn Aufsätze über Strahlensysteme und -komplexe. Die Arbeiten [12]–[19] über affine Differential-Geometrie sind Vorläufer der modernen Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten in linearen Räumen. Sie mündeten in seine Wolfenbütteler Bände „Differentialgeometrie I–II", die in Bad Gandersheim „unter britischer Obhut" entstanden, und die „Elementare Differentialgeometrie" bei Birkhäuser. Die Verwendung Pfaffscher Formen und seine Arbeiten über Differentialgeometrie der Strahlensysteme und Strahlenkomplexe rücken ihn in die Nähe der ganz „modernen" Differentialgeometrie der Faserbündel. Mehr der Praxis zugewandt waren drei bis heute populäre Göschen-Bände über „Darstellende Geometrie".

In den Jahren nach 1936 befaßte er sich zunehmend auch mit technisch wichtigen Aufgabenstellungen. Bekannt geworden sind seine Arbeiten über Gasdynamik und Ballistik. Auf Grund einer Anregung von Richard Grammel fand er zunächst 1941 die Geschoßformen kleinsten Wellenwiderstandes, nachdem Theodore v. Kármán in einem Hauptvortrag zum Volta-Kongreß 1935 in Rom dieses Problem im Rahmen der linearisierten Gasdynamik für unlösbar erklärt hatte (s. Th. v. Kármán in Convegno di Sci. Fis. Mat. e Nat. 1936, S. 222). Die Geschoßformen kleinsten Wellenwiderstandes [27] sind heute in den USA unter dem Namen „Haack-Sears bodies" bekannt. (William L. Sears, Schüler von Th. v. Kármán, hatte die 1945 für die Veröffentlichung in den „Translations of the Brown-University" übersetzte Arbeit [27] noch etwas verallgemeinert.) Weiter leistete Wolfgang Haack wichtige Beiträge zur Theorie der Umströmung schlanker Rotationskörper und Ringflügel [36]–[38] und untersuchte Präzessionsbewegungen von Rotationsflugkörpern [28]. Auch diese Arbeiten fanden großes internationales Interesse. Seine Arbeiten über Charakteristikenverfahren zur Berechnung unsymmetrischer Überschallströmungen um ringförmige Körper [36] und – gemeinsam mit Jürgen Zierep – zur Berechnung von Laval-Düsen [37] sowie – gemeinsam mit Gerhard Bruhn – zur Berechnung dreidimensionaler instationärer Gasströmungen [38] ließen ihn tief in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen vordringen.

Bei den von ihm entworfenen numerischen Berechnungsmethoden bemühte er sich stets, die Algorithmen im Einklang mit der physikalischen Wirklichkeit zu entwerfen und benutzte z. B. bei der Berechnung von Überschallströmungen die Methode der Charakteristiken, weil letztere physikalische Bedeutung besitzen und die Invarianz gewisser Größen längs der Charakteristiken zur Kontrolle der Rechnung ausgenutzt werden kann. Außerdem schlug er bereits in den fünfziger Jahren Finite-Volumen-Methoden im Zusammenhang mit den globalen Bilanzgleichungen für unstetige Lösungen der hyperbolischen gasdynamischen Gleichungen vor.

Wolfgang Haack verstand es in einzigartiger Weise, seine Anschauungskraft und differentialgeometrische Ideen mit der oft diffizilen Analysis der partiellen Differentialgleichungen zu verbinden. Nachdem er 1949 in Göttingen über partielle Differentialgleichungen gelesen hatte, begann er neben den differentialgeometrischen Untersuchungen und der Gasdynamik eine Reihe von Arbeiten über partielle Differentialgleichungen. Zunächst wurde mit Günter Hellwig die Theorie der hyperbolischen Gleichungen und Systeme in zwei Unabhängigen zu einem gewissen Abschluß gebracht. Ab 1952 folgten Arbeiten über elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene, allein oder mit G. Hellwig [29]–[33], in denen unabhängig von den gleichzeitig bei Ilja N. Vekua entstehenden Arbeiten der Zusammenhang zwischen topologischem Index der Randbedingungen und dem Fredholm-Index der durch die Randwertprobleme definierten Abbildungen gefunden wurde. Dieser Zusammenhang ist inzwischen in der globalen Analysis zum Gegenstand intensivster Forschung geworden und hat zu vielen spektakulären Entdeckungen geführt. Es folgten Arbeiten der „Berliner Schule" von Joachim und Johannes C. C. Nitsche, Joachim Jaenicke und G. Bruhn. Eine weitere Arbeit zusammen mit G. Hellwig [34] ist hyperbolischen Differentialgleichungen mit parabolischer Anfangskurve gewidmet, die als Teilproblem bei der Beschreibung transsonischer Strömungen auftreten. Diese Überlegungen wurden von Manfred Schneider weitergeführt. Viele der Ergebnisse dieser Zeit erfuhren in seinem gemeinsam mit Wolfgang Wendland verfaßten Buch [8] eine zusammenfassende Darstellung. In seiner letzten mathematischen Originalarbeit [35] über hyperbolische Systeme mit parabolischer Anfangskurve greift Wolfgang Haack 1970 noch einmal ein durch die Gasdynamik motiviertes Thema auf.

Alle genannten Ergebnisse bildeten einen Kernpunkt für die internationalen Tagungen über Partielle Differentialgleichungen unter Leitung von Wolfgang Haack und G. Hellwig im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach vom Frühjahr 1961 im zweijährigen Abstand bis 1971. Sie wurden von G. Hellwig gemeinsam mit Erhard Heinz bis 1979 und danach bis 1985 mit Joachim Weidmann fortgesetzt.

2.2 Aktivitäten im Bereich Computeranwendungen der Mathematik

Wolfgang Haack hatte stets ein ausgesprochenes Gespür für wissenschaftlich bedeutsame und lohnende Arbeitsgebiete wie auch für technisch-wissenschaftlich notwendige und bevorstehende Entwicklungen. Dadurch fand er sich immer wieder in der Rolle des Wegbereiters und Organisators. So erkannte er frühzeitig die große Bedeutung der ersten Ansätze zur Entwicklung elektronischer Rechenanlagen für Wissenschaft und Ingenieurwesen und bildete bereits 1951 an der TU Berlin eine Arbeitsgruppe Elektronische Rechenanlagen. Seiner Einladung nach Berlin folgten noch 1951 Eduard Stiefel aus Zürich mit einer Gastvorlesung und dessen Mitarbeiter Ambros Speiser mit einem dreiwöchigen Ganztagsseminar, das einige junge

Mitarbeiter, unter ihnen Fritz-Rudolf Güntsch und Harald Lukas, motivierte und befähigte, eigene Rechnerprojekte anzupacken. F. R. Güntsch konnte so substantielle Beiträge zu der bei der Zuse KG in Entwicklung befindlichen programmgesteuerten elektronischen Rechenanlage Z22 leisten, deren erstes Exemplar von Wolfgang Haacks zur Beschaffung für die TU Berlin vorgesehen war. Die Finanzierung dieses Kaufs war eine organisatorische Meisterleistung Wolfgang Haacks. Da die DFG seinerzeit kein Interesse zeigte, sammelte Wolfgang Haack bei allen großen Firmen, bei denen er Ansehen genoß, Geld für eine zweckgebundene Stiftung und bekam auf diese Weise für die TU Berlin 120.000 DM zusammen. Die Differenz zum Kaufpreis von 180.000 DM wurde durch Mitarbeit von F. R. Güntsch und H. Lukas bei der Z22-Entwicklung abgegolten. Wolfgang Haack wurde dann folgerichtig Direktor des ersten Rechenzentrums der TU.

Als 1958 die DFG erwog, eine Siemens-Rechenanlage S 2002 nach Berlin zu geben und die Universitäten sich nicht in der Lage sahen, die Folgekosten zu tragen, erkannte er schnell die Chance, diese Rechenanlage am damals in der Planung befindlichen Institut für Kernforschung, dem heutigen Hahn-Meitner-Institut (HMI), aufstellen zu lassen. Dazu wurde mit Unterstützung von Werner Heisenberg und Max v. Laue am HMI ein Sektor Mathematik mit einem angeschlossenen Rechenzentrum gegründet, der der gesamten Wissenschaft in Berlin dienen sollte. Die Leitung dieses Sektors übernahm Wolfgang Haack neben seinen Verpflichtungen an seinem Lehrstuhl und am Rechenzentrum der TU. Die enge Verzahnung des Dienstleistungsbetriebs Rechenzentrum mit der Forschung auf dem Gebiet der Programmierungstechnik und der Numerischen Mathematik sah er als notwendige Voraussetzung für eine erfolgreiche Arbeit der neuen Einrichtung. Vieles heute Selbstverständliche gehörte zu den von ihm angeregten Pioniertaten, wie z.B. die Schaffung einer leistungsfähigen Arbeitsumgebung, sprich einer leicht handhabbaren Programmiersprache (damals ein Assembler mit symbolischer Adressierung) und die Entwicklung einer nach einheitlichen Grundsätzen erstellten und dokumentierten Programmbibliothek. Immer wieder hat Wolfgang Haack auch die Zusammenarbeit mit Anwendern als besondere Herausforderung gesehen und dadurch den Rechenbetrieb vor Einseitigkeit bewahrt.

Seit 1957 bis etwa 1962 widmete er sich neben seinen mathematischen Aktivitäten auf Anregung des Vorstandes der Deutschen Gesellschaft für Ortung und Navigation und der Bundesanstalt für Flugsicherung einem damals drängenden technischen Problem, der Automatisierung der Flugsicherung. Er schrieb dazu sieben Aufsätze (gemeinsam mit F. R. Güntsch und Werner Hildebrand), die teils der Darstellung des von ihm und seinen Mitarbeitern entwickelten Verfahrens der Flugverfolgung mit Hilfe von sogenannten Erwartungsgebieten, teils der Bewußtseinsbildung bei den zuständigen Behörden und Politikern dienen sollten ([45]–[55]). In diesen Arbeiten werden Realzeit-Methoden zur elektronischen Verarbeitung von digitalen Meßdaten und Approximationsmethoden – u. a. mit Spline-Funktionen – entwickelt. Zu dem ursprünglichen Thema kam durch Zusammenarbeit mit einer Forschergruppe des Heinrich-Hertz-Instituts Berlin unter Friedrich-Wilhelm Gundlach mit der „Digitalisierung" der Radarinformation auch das Arbeitsgebiet „Automatisierte Luftraumbeobachtung" hinzu. Wolfgang Haacks Fähigkeit zu anwendungsbezogenem, interdisziplinärem Denken führte auch auf diesem Gebiet zu Lösungen, die national und international Aufsehen erregten. So wurde es möglich, die Arbeiten auf eine breitere Basis zu stellen: Mit Unterstützung des damaligen Staatssekretärs im Wissenschaftsministerium von Nordrhein-Westfalen, Leo Brandt, konnte er die Gründung eines vom Bund finanzierten Forschungsinstituts erreichen, das im Jahre 1963 unter der Bezeichnung „Forschungsinstitut für Funk und Mathematik" seine Arbeit aufnahm. Bis 1965 war Wolfgang Haack Direktor dieses Instituts. Er übergab die Leitung seinem Schüler Horst Springer, als das Institut 1965 nach Wachtberg bei Bonn wechselte. Seinen prägenden Einfluß auf die Forschungstätigkeit des schnell auf ca. 100 Mitarbeiter anwachsenden Institus nahm er auch weiterhin als Mitglied des Wissenschaftlichen Beirats wahr.

2.3 Aktivitäten nach der Emeritierung

Bis zum 90. Geburtstag war Wolfgang Haack regelmäßiger Besucher und einer der aktivsten Diskussionsteilnehmer der Kolloquien der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Im Wissenschaftlichen Beirat des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach verfolgte er mit regem, kritischem Interesse neue Entwicklungen, insbesondere bei partiellen Differentialgleichungen. Anfang der siebziger Jahre nahm er an einschlägigen Tagungen in Dundee und Oberwolfach teil und machte eine Reise nach Finnland aus Anlaß seiner Ehrenpromotion in Jyvaskylä. Unvergessen bleibt allen Beteiligten die Konferenz „Funktionentheoretische Methoden bei partiellen Differentialgleichungen" 1976 in Darmstadt, auf der sich u.a. die drei Altmeister Stefan Bergman, Ilja N. Vekua und Wolfgang Haack trafen. Noch 1980 und 1985 nahm er an Oberwolfach-Konferenzen, 1987 an einer Randelemente-Tagung in Stuttgart und 1990 an der GAMM-Tagung in Hannover teil. Bis zu seinem letzten Tag nahm er regen Anteil am mathematischen Treiben seiner Schüler und verblüffte sie mit seinem sicheren Urteil und zurückhaltenden aber treffenden Ratschlägen.

2.4 Bei Wolfgang Haack entstandene Dissertationen

Als Lehrer konnte Wolfgang Haack durch die klare Linie seiner Gedanken und die Beschränkung auf das Wesentliche begeistern. Zu seinen Schülern gehörten die besten Studenten jener Jahre, die er aus den verschiedensten Studienrichtungen für die Mathematik gewann. Sie fanden bei ihm nicht nur während ihrer wissenschaftlichen Arbeit, sondern auch später im Beruf, sei es an der Hochschule oder in der Industrie, eine Förderung, wie sie heute kaum mehr vorstellbar ist. Diese Tatsache zeigte sich auch in der eindrucksvollen Anzahl seiner Doktoranden:

1 Paetz, Gerhard, Differentialgeometrie der Kugelkomplexe, TH Berlin-Charlottenburg 1938.
2 Bauermeister, Eduard, Strömung und Auftrieb bei einem dünnen Doppelflügel, TH Karlsruhe 1941.
3 Hellwig, Günter, Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung, TU Berlin, 1951.

4 Nitsche, Joachim, Integralrelationen für Systeme quasilinearer Differentialgleichungen 1.Ordnung vom elliptischen Typus in zwei Variablen mit einer Anwendung auf die Einbettung von Flächen bei gegebenem Linienelement positiver Krümmung, TU Berlin 1951.
5 Behlendorff, Erika, Strenge Lösungen der thermoelastischen Gleichungen, TU Berlin 1952.
6 Franke, Wolfgang, Der durch eine vertikale Verdünnungswelle in der Atmosphäre erzeugte Verdichtungsstoß, TU Berlin 1956.
7 Ladenberger, Kurt, Über Lösungen der Integralrelation einer partiellen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung vom gemischten Typus Spitzenfall mit isoliertem Berührungspunkt , TU Berlin 1957.
8 Jaenicke, Joachim, Über lineare Randwertprobleme der Systeme von zwei linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, TU Berlin 1957.
9 Tolle, Henning, Über das Verhalten der Integralrelation einer partiellen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung in einem isolierten parabolischen Punkt im Innern eines hyperbolischen Gebietes, wenn die Diskriminante der charakteristischen Gleichung unabhängig vom Einlaufwinkel gleichmäßig gegen Null geht, TU Berlin 1955.
10 (Toepffer-)Güntsch, Fritz-Rudolf, Logischer Entwurf eines digitalen Rechengerätes mit mehreren asynchron laufenden Trommeln und automatischem Schnellspeicherbetrieb, TU Berlin 1957.
11 Stephanidis, Nikolaus K., Beitrag zur Theorie der Strahlensysteme, FU Berlin 1959.
12 Bruhn, Gerhard, Querkräfte auf langsam pendelnde schlanke Rotationskörper im Überschallflug, TU Berlin 1960.
13 Springer, Horst, Flugzielverfolgung durch digitale programmgesteuerte Rechengeräte aus digitalen Radarinformationen, TU Berlin 1961.
14 Jessen, Eike, Über assoziative Speicherung, TU Berlin 1964.
15 Töpfer, Hans-Joachim, Über die Tschebyscheffsche Approximationsaufgabe bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung, TU Berlin 1965.
16 Wendland, Wolfgang, Lösung der ersten und zweiten Randwertaufgaben des Innen- und Außengebietes für die Potentialgleichung im $\mathbf{R}^3$ durch Randbelegungen, TU Berlin 1965.
17 Schneider, Manfred, Eindeutigkeit und Randwertprobleme bei einem hyperbolischen Differentialgleichungssystem in der Umgebung eines parabolischen Punktes, TU Berlin 1966.
18 Lange, Hans-Uwe, Konstruktive Lösung von Anfangsrandwertaufgaben parabolischer Differentialgleichungen in der Ebene, TU Berlin 1968.
19 Vidic, Christian, Über zusammengesetzte Systeme partieller linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, TU Berlin 1968.
20 Ellmer, Horst, Ein Verfahren zur Berechnung ebener, instationärer Strömungen eines idealen Gases unter Einbeziehung von instationären, gasundurchlässigen Wänden und instationären Verdichtungsstößen, TU Berlin 1969.

3 Schriftenverzeichnis

Bücher

[1] Differential-Geometrie I, Wolfenbüttel 1948 136 S. , 2. Aufl. 1949.
[2] Differential-Geometrie II, Wolfenbüttel 1948 131 S. .
[3] Elementare Differential-Geometrie, Basel/Stuttgart 1955 239 S. .
[4] Darstellende Geometrie I, Berlin 1954 110 S. (Göschen) 7. Aufl. 1971.
[5] Darstellende Geometrie II, Berlin 1954 129 S. (Göschen) 6. Aufl. 1971.
[6] Darstellende Geometrie III, Berlin 1957 126 S. (Göschen) 5. Aufl. 1980.
[4a–6a] Geometria Descriptiva I–III, Mexico 1962, Spanisch von José N. Cerro.
[7] Gemeinsam mit R. Haußner: Darstellende Geometrie I–IV, Berlin (Göschen) Bd. III 1931, IV 1933.

[8] Gemeinsam mit W. Wendland: Vorlesungen über Partielle und Pfaffsche Differentialgleichungen. Basel/Stuttgart 555 S. 1959. English translation edited by W. N. Everitt, translated by E. R. Dawson, Pergamon Press, Oxford 1972.
[9a] Kazimierz Bartel, Kotierte Projektionen, 1933, 80 S. .
[9b] Kazimierz Bartel, Malerische Perspektive I, 1934, 339 S. . Bearbeitung einer Übersetzung aus dem Polnischen.

Abhandlungen

[10] Eine Kennzeichnung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes. Math. Z. , Bd. 217, S. 134–137 (1927), Kapitel der Dissertation.
[11] Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahl-Abbildungen der Darstellenden Geometrie (eine Note zur gleichnamigen Arbeit von F. Rehbock). ZAMM Bd. 7, S. 239–240 (1927).
[12] Affine Differentialgeometrie der Strahlensysteme. Vortrag zur Jahrestagung 1928 in Hamburg. Jahr. Ber. DMV Bd. 38, S. 17–21 (1929).
[13] Affine Differentialgeometrie der Strahlensysteme I. Monatshefte f. Math. und Phys. Bd. 36, S. 47–76 (1929).
[14] Teil II. Monatsh. Bd. 36, S. 331–351 (1929).
[15] Affine Differentialgeometrie der parabolischen Strahlensysteme I. Math. Z. Bd. 33, S. 232–270 (1931).
[16] Teil II. Spezielle Flächen. Math. Z. Bd. 35, S. 66–79 (1932).
[17] Zylindrische Strahlensysteme. Math. Z. Bd. 35, S. 660–683 (1932).
[18] Eine geometrische Deutung der Affin-Invarianten einer Raumkurve. Math. Z. Bd. 38, S. 155–162 (1934).
[19] Die kubische Indikatrix eines Strahlensystems und ihre Entartungen. Archiv der Math. Bd. 1, S. 454–461 (1948/49).
[20] Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe I. Math. Z. Bd. 40, S. 560–581 (1935).
[21] Teil II, Kurven und Torsen des Komplexes. Math. Z. Bd. 40, S. 703–712 (1935).
[22] Teil III, Über die Regelflächen eines Komplexes. Monatsh. für Math. und Phys. Bd. 44, S. 27–40 (1935).
[23] Teil IV, Über Minimalkomplexe. Math. Z. Bd. 41, S. 252–260 (1935).
[24] Teil V, Ein Strahlenkomplex und seine Normalenkomplexe. Math. Z. Bd. 43, S. 228–274 (1937).
[25] Strahlenkomplexe mit integrablen Pfaffschen Differentialformen. Math. Z. Bd. 52, S. 322–341 (1949).
[26] Über Schraubenpotentiale und eine Klasseneinteilung der Potentialfunktionen. Jahresb. der DMV Bd. 49, S. 20–37 (1939).
[27] Geschoßformen kleinsten Wellenwiderstandes. Lilienthalbericht 139 (1941) S. 14–29 und Brown Univ. Transl. Nr. A9.T3 (1948).
[28] The Calculation of Stability and Damping of Spinstabilized Projectiles. Proc. of „Selected Topics on Ballistics", Pergamon Press (1958), ICAS-Tagung in Freiburg i. Br. .
[29] Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen I. Ordnung. I. Math. Z. Bd. 53, S. 244–266 (1950) mit G. Hellwig.
[30] Teil II. Math. Z. Bd. 53, S. 340–356 (1950) mit G. Hellwig.
[31] Die Überführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf Fredholmsche Integralgleichungen I. Math. Nachr. Bd. 4, S. 408–418 (1951) mit G. Hellwig.
[32] Teil II. Allgemeine Randwertprobleme für Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Nachr. Bd. 7, S. 1–30 (1952).
[33] Randwertprobleme höherer Charakteristik für ein System von zwei elliptischen Differentialgleichungen. Math. Nachr. Bd. 8, S. 123–132 (1952).
[34] Lineare partielle Differentialgleichungen II. Ordnung vom gemischten Typus. Archiv d. Math. Bd. 5, S. 60–76 (1954) mit G. Hellwig.
[35] Systeme linearer partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus mit

parabolischer Anfangskurve. Colloq. on Math. Analysis Jyväskylä 1970. Proc. Springer-Verlag.

Anwendungen in der Gasdynamik

[36] Charakteristikenverfahren zur näherungsweisen Berechnung der unsymmetrischen Übersschallströmung um ringförmige Körper. Z. für angew. Math. und Physik Bd. 2, S. 357–375 (1951).
[37] Berechnungsmethoden von Lavaldüsen auf Grund eines Formelsystems für die Strömung in der Düsenkehle. Z. für Flugwissenschaften 1954 S. 41–50, gemeinsam mit J. Zierep.
[38] Ein Charakteristikenverfahren für dreidimensionale Gasströmungen. Z. für angew. Math. und Physik Bd. 9, S. 173–190 (1958) mit G. Bruhn.

Gelegenheits-Vorträge und -Schriften

[39] Equipment and working system planned for the Hahn-Meitner-Institut for Nuclear Research. Berlin. Vortrag in Intern. Atomic-Energy Agency, Wien. Printed in „Codes for Reactor Computations" 1961.
[40] Bedeutung und Einsatz von DV-Anlagen in Wissenschaft und Forschung. Vortrag im Bundesministerium für Forschung 1965.
[41] Soziologische Relevanz der mathematischen Forschung. Vortrag zur Feier der Ehrenpromotion im HMI, April 1982.
[42] 1935–37 Dozent an der TH-Berlin. Bericht des Fachbereiches Mathematik der FU „750 Jahre Mathematik in Berlin". Erscheint in den Berichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft.
[43] Rückschau über 85 Jahre. Schlußworte zum Kolloquium anläßlich des 85. Geburtstages.
[44] Erinnerungen ab 1945 (unveröffentlicht).

Arbeiten zur Flugsicherung und Luftraum-Beobachtungen

[45] Die Arbeitsvorgänge einer elektronischen Rechenanlage für den Flugsicherungsdienst, im besonderen die Erkennung von Kollisionsgefahren mit W. Hildebrand. Telefunken. Z. Bd. 32, S. 3.10 (1959) in Lizenz: Wehr und Wirtschaft Bd. 4, S. 30 ff. (1960).
[46] Ergänzung der Bordnavigation durch den Flugsicherungsdienst mit F. R. Güntsch (Vortragender) Korreferat der 2. 3-Nationentagung in Paris, April 1959. Sonderbücherei der Funkortung (AFG) Bd. 2, S. 9 ff. Thema der Tagung: Bedeutung der Automation bei den Navigationsverfahren im zivilen See- und Luftverkehr.
[47] Automation des Flugsicherungsdienstes mittels digitaler Rechenautomaten. Mathematik-Technik-Wirtschaft (mtw) Bd. 8, S. 3–6 (1961) Vortrag 18. Oktober 1960 in der TH-Wien.
[48] Beitrag zur Automatisierung des Flugsicherungsdienstes. Umschau Bd. 51, S. 7–9 (1981).
[49] Collision-Warning by Electronic Computer mit F. R. Güntsch (Vortragender) III. intern. Diskussionstagung über Ortung und Navigation Düsseldorf 1961. Journal of the Inst. of Navigation Bd. 15, S. 158–162, 1962 Royal Geogr. Society.
[50] Automation des Flugsicherungsdienstes mittels digitaler Rechengeräte. Presented at the third International Congress in the in the Aeronautical Sciences August 27–31, 1962 Stockholm. Paper Nr. ICAS 21.
[51] Beobachtung des Luftraumes durch automatische Verarbeitung der Informationen von Rundsicht-Radargeräten mittels digitaler Rechengeräte. Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 127, S. 39–64 (1963).
[52] Automatische Auswertung von Radarinformationen unter Berücksichtigung lernender Systeme mit H. Springer, WGLR-Tagung Berlin, Sept. 1964.

[53] Bericht über die Arbeiten im FFM. Landesamt für Forschung Nordrhein- Westfalen, Jahrbuch 1964, S. 123–153.
[54] Bedeutung von Rechnern in der Luftverkehrs-Beobachtung und Sicherung. Ortung und Navigation Jahrgang 1966 Heft 4. (Übersichtsvortrag über den Stand der Forschung im FFM nach Rückgabe der Leitungsvollmacht 1965).
[55] 25 Jahre Forschungsinstitut für Funk und Mathematik im Jubiläumsheft des FFM „Rückschau und Ausblick" S. 3–5 (1988).

Prof. Dr. Gerhard Bruhn
Fachbereich Mathematik
der TH Darmstadt
Schloßgartenstr. 7
64289 Darmstadt

(Eingegangen 11. 5. 1995)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 98 (1996) 12–29
Mathematics Subject Classification: 30-02, 30 C 35, 28 A 78, 28 D 20

Dynamik analytischer Endomorphismen auf der Sphäre[1])

M. Denker und S. Heinemann, Göttingen

1.

Bekanntlich führt die Lösung des Nullstellenproblems

$$p(z) = 0$$

eines komplexen Polynoms $p(z) = a_0 z^n + \dots a_{n-1} z + a_n$ mittels des Newton-Verfahrens auf die Iteration der rationalen Funktion

$$f(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}.$$

Ein Wert z_0 ist nämlich genau dann eine Nullstelle von p, wenn er ein anziehender Fixpunkt von f ist. Startet man den Iterationsprozeß $z_n := f(z_{n-1})$ mit z_1 in der Nähe des Fixpunktes z_0, so konvergiert z_n gegen z_0. Man weiß jedoch, daß nicht alle Startwerte zu einer Lösung führen. Man kann sogar sehr schnell einsehen, daß das Polynom $p(z) = z^3 - 2z + 2$ vom Grad 3 zu der Newton-Abbildung $f(z) = (2z^3 - 2)/(3z^2 - 2)$ führt, die einen anziehenden periodischen Orbit der Periode 2 besitzt, der keiner Nullstelle entspricht. Solche Polynome, die für Grad $\geqslant 3$ existieren, werden nach Smale als schlecht bezeichnet; sein 6. Problem fordert, diese zu charakterisieren[2]).

Die Motivation über das Newton-Verfahren ist wohl am bekanntesten, wenn es gilt, das Studium rationaler Funktionen zu begründen. An dieser Stelle sollen jedoch die dynamischen Aspekte im Vordergrund stehen; sie sind mathematisch bedeutsamer und als klassisch anzusehen. Unter den ersten Arbeiten sind die von Schröder 1870/71 zu nennen, in denen die lokale Dynamik rationaler Funktionen in anziehenden Fixpunkten untersucht wird. Mit den Arbeiten von Poincaré Ende des letzten Jahrhunderts rückten globale Aussagen in den Vordergrund dynamischer Untersuchungen, und schon 1906 hat Fatou das globale Verhalten der rationalen Funktion $f(z) = z^2/(z^2 + 2)$ untersucht, für die er zeigte, daß die Julia-Menge fraktale Struktur besitzt. Die eigentliche Geburtsstunde der

---

[1]) Erweiterte Fassung des Vortrages anläßlich der Jahrestagung der DMV 1992 in Berlin.
[2]) Erste Resultate erzielten kürzlich T. Lei und J. Head.

Theorie der Dynamik rationaler Funktionen geht auf die Jahre 1918–20 mit den Arbeiten von Julia und Fatou zurück, die auch hier am Anfang der Darstellung stehen sollen.

Eine rationale Funktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

mit Polynomen $p(z)$ und $q(z)$ läßt sich holomorph auf die Riemannsche Fläche S^2 fortsetzen. Diese Fortsetzung sei wiederum mit $f(z)$ bezeichnet. Umgekehrt entsteht auch jeder analytische Endomorphismus auf diese Art und Weise. Sein Abbildunggrad bestimmt sich leicht zu

$$\deg(f) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}.$$

Es sei von nun an stets vorausgesetzt, daß f vom Grad $\geqslant 2$, also weder konstant noch eine Möbius-Transformation ist.

Die grundlegende Idee von Fatou und Julia baut nicht auf den Arbeiten von Poincaré auf (obwohl sich zeigen wird, daß Ähnlichkeiten vorhanden sind), sondern auf dem damals gerade entdeckten Satz von Montel. Einen Punkt $z \in S^2$ nennt man bekanntlich normal bzgl. f, falls es eine Umgebung von z gibt, auf der die Familie $\{f^n : n \geqslant 1\}$ gleichgradig stetig ist. Gemäß dieser Eigenschaft läßt sich nun die Sphäre in zwei komplementäre Mengen zerlegen: die Fatou-Menge $\mathscr{F}(f)$ besteht aus allen bzgl. f normalen, und die Julia-Menge $\mathscr{J}(f)$ aus allen bzgl. f nicht normalen Punkten. Unmittelbar aus diesen Definitionen (zusammen mit dem Montelschen Satz) erhält man folgendes[3]: $\mathscr{J}(f)$ ist nicht leer, kompakt als Teilmenge der S^2 und besitzt keine isolierten Punkte (ist also perfekt). Sie ist zudem vollständig invariant, d. h.

$$f(\mathscr{J}(f)) = f^{-1}(\mathscr{J}(f)) = \mathscr{J}(f).$$

$\mathscr{F}(f)$ ist offen und als Komplement von $\mathscr{J}(f)$ ebenfalls vollständig invariant; f operiert also sowohl auf $\mathscr{F}(f)$ als auch auf $\mathscr{J}(f)$. Diese Zerlegung weicht nur leicht von der Poincaréschen in konservativen und dissipativen Teil unter dem Lebesgue-Maß ab; $\mathscr{F}(f)$ ist gerade der dissipative Teil zusammen mit dem „Rotationsanteil". Die Aktion von f auf jedem dieser Teile wird im folgenden dargestellt.

Als weitere unmittelbare Folgerungen aus den Definitionen erhält man die topologische Mischung (für alle offenen $U, V \cap \mathscr{J}(f) \neq \emptyset \; \exists n$ so daß $\forall m \geqslant n$: $V \cap f^m(U) \neq \emptyset$) und die topologische Exaktheit (für alle offenen $U \cap \mathscr{J}(f) \neq \emptyset \; \exists n$ so daß $f^n(U) \supset \mathscr{J}(f)$).

Es gibt noch eine weitere Beschreibung der Julia-Menge, nämlich als Abschluß aller abstoßender periodischer Punkte[4]. Für einen periodischen Punkt z

---

[3]) Man findet diese Aussagen in jeder elementaren Darstellung zu diesem Thema, also z. B. Beardon, Blanchard, Brolin, Devaney, Keen, Lyubich, Milnor u. a.

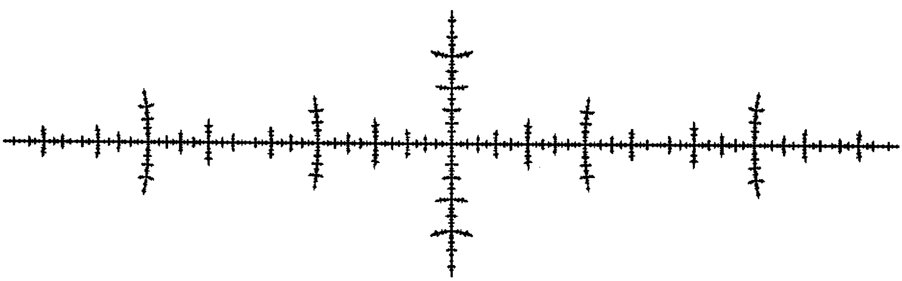
[4]) siehe Julia.

mit Primperiode $n \geqslant 1$ setzt man den Multiplikator als

$$\lambda = \lambda(z) = (f^n)'(z) = f'(z) \cdot f'(f(z)) \cdot \ldots \cdot f'(f^{n-1}(z))$$

fest[5]). Man nennt z sodann abstoßend, falls $|\lambda| > 1$ gilt. Gilt $\lambda(z) = 0$, so heißt z superanziehend (kritisch), für $0 < |\lambda(z)| < 1$ bezeichnet man z als anziehend. Schließlich, im Falle $\lambda(z) = \exp[2\pi i \alpha]$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), heißt z indifferent - falls $\alpha \in \mathbb{Q}$, rational indifferent oder auch parabolisch, sonst irrational indifferent. Zu den irrational indifferenten Punkten zählen die Cremer-Punkte, die später definiert werden. Neben den abstoßenden periodischen Punkten liegen alle rational indifferenten periodischen und sämtliche Cremer-Punkte in der Julia-Menge. Dies sind dann aber auch genau die periodischen Punkte, die in der Julia-Menge liegen. Man weiß damit insbesondere, daß nur nichtperiodische kritische Punkte in der Julia-Menge liegen können.

Aus den bis jetzt diskutierten Eigenschaften lassen sich Algorithmen zur Berechnung - und damit graphischen Darstellung - von Julia-Mengen leicht ableiten. Man sucht sich z. B. einen passenden periodischen Punkt und iteriert rückwärts. Im übrigen sei bemerkt, daß bei beliebigen (mit maximal 2 Ausnahmen) Startwerten die Rückwärtsiteration die Julia-Menge approximiert. Die folgenden Bilder (diese und nächste Seite) zeigen eine Auswahl der gängigen Graphiken.



$f(z) = z^2 - 1{,}54369\ldots$
Dendrit; kritisch

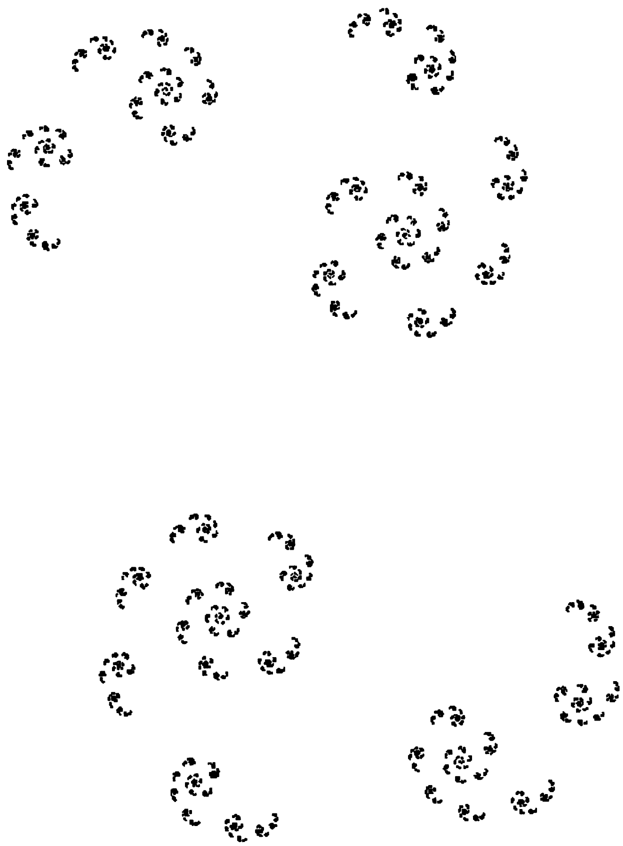
Solche Darstellungen und die Lösung des Fatou-Julia-Problems durch Sullivan 1985 haben das Interesse an diesen Abbildungen stark gefördert. Sullivan zeigte, daß jede Zusammenhangskomponente der Fatou-Menge schließlich periodisch ist, und klassifizierte die Typen der periodischen Komponenten. Im einzelnen: Sei U eine Komponente. Dann gibt es n und m, so daß $f^m(f^n(U)) \subset f^n(U)$, und einer der folgenden Fälle tritt ein:

(F1) $f^n(U)$ ist der unmittelbare Anziehungsbereich eines (super)anziehenden periodischen Punktes.

(F2) $f^n(U)$ ist der Anziehungsbereich eines Blattes für einen rational indifferenten periodischen Punkt.

---

[5]) Die Definition ist invariant gegenüber Konjugation mit beliebigen Möbius-Transformationen und kann so auf $z = \infty$ ausgedehnt werden.



$f(z) = z^2 + 0{,}495 + (0{,}495)^2 i$

Cantor-Menge; hyperbolisch

(F3) $f^n(U)$ ist eine Siegel-Kreisscheibe und $f^m|_{f^n(U)}$ ist zu einer irrationalen Rotation auf $D := \{z : |z| < 1\}$ konjugiert.

(F4) $f^n(U)$ ist ein Herman-Ring und $f^m|_{f^n(U)}$ ist zu einer irrationalen Rotation auf einem Kreisring $\{z : a < |z| < 1\}$ konjugiert.

Will man die Juliamengen klassifizieren, sollte man dies über die rationalen Funktionen tun. Zwei Fälle sind bis heute unstrittig, der hyperbolische (expandierende) und der parabolische (expansive) Fall:

(J1) Der hyperbolische Fall: Zu jedem $z \in \mathcal{J}(f)$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $|(f^n)'(z)| > 1$. Äquivalent hierzu ist, daß es eine (Lipschitz-) äquivalente Metrik gibt, unter der die Aussage gleichmäßig und für $n = 1$ gilt.

(J2) Der parabolische Fall: Es gibt einen rational indifferenten, aber keinen kritischen Punkt in $\mathcal{J}(f)$.

(J3) Der kritische Fall: Es gibt einen kritischen Punkt in $\mathcal{J}(f)$ (der dann nicht periodisch ist).

Unter (J3) lassen sich die subexpandierenden Funktionen ähnlich wie die hyperbolischen Abbildungen behandeln. Details hierzu gibt es nur wenige. Ein allgemeiner Zugang, wie die Dynamik auf der Julia-Menge im kritischen Fall beschrieben werden kann, existiert nicht.

2.

Man beginnt am besten mit einer Darstellung der Dynamik auf der Fatou-Menge. Es kann sein, daß $\mathscr{F}(f)$ leer ist. Lattès hat dies bereits 1918 für die Abbildung $f(z)=(z^2+1)^2/[4z(z^2-1)]$ gezeigt. Rees bewies sogar, daß eine Teilmenge der rationalen Funktionen vom Grad $d\geqslant 2$ existiert, die positives Lebesgue-Maß (für die Koeffizienten) besitzt, so daß jedes ihrer Elemente bzgl. des Lebesguemaßes ergodisch ist. Es ist ein offenes Problem zu zeigen, daß f ergodisch ist, sofern nur die Juliamenge ganz S^2 ist. Zumindest wird aber vermutet[6]), daß die Anzahl der ergodischen Komponenten $\leqslant 2(d-1)$ ist. Dies entspräche dem Resultat von Shishikura über die Beschränkung der Anzahl der Anziehungsbereiche. Die von Rees und Lattès konstruierten Beispiele besitzen insbesondere Julia-Mengen mit Hausdorff-Dimension 2. Shishikura zeigte 1987, daß die Hausdorff-Dimension für die Julia-Mengen vieler quadratischer Polynome $z\to z^2+c$ gerade 2 ist. In diesem Bereich gibt es eine Fülle von offenen Fragen, z. B. ist nicht bekannt, welche Fibonacci-Polynome $z\to z^d+c$ eine Hausdorff-Dimension <2 besitzen. Für hyperbolische und parabolische Funktionen ist diese Dimension stets kleiner als 2[7]). Im allgemeinen kann die Fatou-Menge sehr unterschiedlich aussehen, wie schon angedeutet wurde. Ihr Komplement kann die Struktur einer Cantor-Menge haben, eine Jordan-Kurve sein oder schlicht in $\mathbb{R}$ enthalten sein. Eine Möbius-Transformation, die S^1 invariant läßt, hat die Gestalt $\Phi(z)=e^{i\phi}(z-a)/(\bar{a}z-1)$ mit $a\in D$. Ein endliches Produkt solcher Funktionen nennt man ein Blaschke-Produkt, und falls sein Grad$\geqslant 2$ und einer der Koeffizienten $a=0$ ist, so folgt schon, daß $\mathscr{F}(f)=S^2\setminus S^1$. Es ist ebenfalls leicht zu sehen, daß die Funktion $z\to z+z^{-1}-1$ eine Julia-Menge besitzt, die eine Cantor-Menge ist und ganz in $\mathbb{R}$ enthalten ist.

Falls die Fatou-Menge nicht leer ist, zerfällt sie in höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten (kurz Komponenten genannt). Shishikura zeigte 1987, daß es höchstens $2(d-1)$ anziehende oder parabolische unmittelbare Anziehungsbereiche geben kann. Die Fatousche Vermutung, daß jede Komponente schließlich periodisch ist, wurde von Sullivan 1985 positiv bestätigt. Er gab gleichermaßen eine Beschreibung der Dynamik auf den periodischen Gebieten an. Glücklicherweise lassen sich holomorphe Selbstabbildungen Riemannscher Flächen sehr gut und vollständig beschreiben. Die folgende Darstellung dieses Sachverhaltes wird auch zeigen, daß rationale Funktionen auf S^2 gerade einen der drei interessanten Fälle bilden, will man holomorphe Selbstabbildungen Riemannscher Flächen studieren.

---

[6]) siehe Bielefeld, Lyubich (eds.)

[7]) Dies geht in Ansätzen auf Douady, Hubbard und Lyubich zurück und wurde schließlich von Aaronson, Denker und Urbánski vollständig bewiesen.

Unter einer Riemannschen Fläche soll eine zusammenhängende komplex-analytische Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension 1 verstanden werden. Nach dem Uniformisierungssatz ist eine einfach zusammenhängende Fläche holomorph isomorph zur komplexen Ebene $\mathbb{C}$, der offenen Kreisscheibe D oder der Riemannschen Sphäre $\overline{\mathbb{C}} := S^2$. Ist S eine Riemannsche Fläche, so ist ihre universelle Überlagerung $\tilde{S}$ eine Riemannsche Fläche von diesem Typ, hat also die Form

$S \sim \tilde{S}/\Gamma$ (holomorph isomorph),

wobei Γ die Decktransformationsgruppe bezeichnet (Automorphismen von $\tilde{S}$ ohne Fixpunkte). Man kann nun leicht drei Fälle unterscheiden:

I) Der sphärische Fall: $\tilde{S} \sim \overline{\mathbb{C}}$. Jeder holomorphe Automorphismus ist eine Möbius-Transformation und hat mindestens einen Fixpunkt. Also ist $S \sim \overline{\mathbb{C}}$.

II) Der euklidische Fall: $\tilde{S} \sim \mathbb{C}$. Jeder holomorphe Automorphismus ist eine affine Abbildung $z \to \lambda z + c$ mit $\lambda \neq 0$. Ist $\lambda \neq 1$, so hat diese Abbildung einen Fixpunkt, und es ist also $S \sim \mathbb{C}/\Gamma$, wobei Γ eine diskrete Translationsgruppe ist.

(a) $\Gamma = 0$ bedeutet $S \sim \mathbb{C}$.

(b) Γ besitzt ein erzeugendes Element: Dann ist $S \sim \mathbb{C}/\mathbb{Z} \sim \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) Γ besitzt zwei erzeugende Elemente: Es gibt ein (reelles) zweidimensionales Gitter Λ, so daß $S \sim \tilde{S}/\Lambda \sim T =$ Torus.

III) Der hyperbolische Fall: Hier gilt $\tilde{S} \sim D$. Dies ist z. B. der Fall bei einer nicht-abelschen Fundamentalgruppe oder Flächen höheren Geschlechtes.

Im Falle einer holomorphen Abbildung $T: S \to S$, wenn $S \sim \mathbb{C}/\Lambda$ gilt, muß T schon affin mod Λ sein. Im Falle der Hyperbolizität ist die Beschreibung der Dynamik nicht wesentlich komplizierter. Es kann nur einer der vier folgenden Fälle auftreten:

(i) Die Bahnen kovergieren kompakt gegen einen Fixpunkt.

(ii) Die Bahnen konvergieren gegen den unendlichen fernen Punkt in der Poincaré-Metrik.

(iii) T ist ein Automorphismus endlicher Ordnung.

(iv) T ist eine irrationale Rotation auf D, der punktierten Kreisscheibe oder in einem Kreisring.

Es folgt aus diesen Überlegungen, daß (aus dynamischer Sicht) nur die Fälle interessant sind, wo $S = \overline{\mathbb{C}}$, $= \mathbb{C}$ oder $= \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt. Hier soll nur der erste Fall interessieren, und speziell nur die (nicht invertierbaren) Endomorphismen, da die Automorphismen, wie schon gesagt, durch Möbius-Transformations gegeben sind.

Die Ideen, die dem Sullivanschen Beweis der Fatou-Vermutung zugrunde liegen, können in diesem Rahmen nur skizzenhaft gegeben werden[8]). Zunächst stellt man fest, daß die rationale Funktion f Komponenten der Fatou-Menge in solche überführt. Ist eine Komponente nicht schließlich periodisch, so muß sie demzufolge schon wandernd sein. Man nimmt also an, es läge ein solches wanderndes Gebiet U vor, d. h.

$$U \cap f^n(U) = \emptyset \qquad \forall n \geqslant 1.$$

[8]) Wir folgen hier den Originalarbeiten und einer Verbesserung durch Bers.

Da f nur endlich viele kritische Punkte besitzt, sind die Abbildungen

$$f: U_n \to U_{n+1} := f(U_n) \qquad (n \geqslant 1,\ U_0 = U)$$

o.E. unverzweigte Überlagerungen hyperbolischer Riemannscher Flächen. Man unterscheidet die Flächen nach ihrer Betti-Zahl, und damit nach elementar (= einfach zusammenhängend oder Kreisgebiet) und nicht-elementar. Der letzte Fall ist gleichbedeutend damit, daß die Fundamentalgruppe nicht-abelsch ist.

Ist nun ein U_n nicht-elementar, etwa o.E. U_0, so bestimmt

$$D \xrightarrow{\pi} U_0 \xrightarrow{f^n} U_n$$

die universelle Überlagerung von U_n und damit die Überlagerungsgruppe $\Gamma_n \supseteq \Gamma_{n-1} \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_0$. Die Vereinigung Γ_∞ dieser Gruppen ist damit ebenfalls nicht-elementar und besitzt keine elliptischen Elemente. Somit ist Γ_∞ diskret[9]), und setzt man $U_\infty := D/\Gamma_\infty$, so gibt es surjektive analytische Abbildungen $\pi_n: U_n \to U_\infty$, so daß $\pi_{n+1} \circ f = \pi_n$ und $\pi_n(x) = \pi_n(y) \Leftrightarrow \exists k$ so daß $f^k(x) = f^k(y)$. Ist Γ_∞ endlich erzeugt, so gilt $\Gamma_n = \Gamma_\infty$ für schließlich alle n, und die Abbildungen $f|_{U_n}$ sind Isomorphismen.

Nach diesen Vorbereitungen schließt man zunächst aus, daß U ein Ringgebiet ist. Das kann man mittels des Moduls eines zweifach zusammenhängenden Gebietes[10]) und einiger geometrisch-dynamischer Überlegungen erreichen. In allen anderen Fällen hat man auf U bzw. U_∞ (wie soeben konstruiert), unendlich viele linear unabhängige konforme Strukturen, dargestellt durch harmonische Beltrami-Koeffizienten. Unter f^n lassen sich solche Strukturen auf U (als Maße) auf den Vorwärtsorbit transportieren. Mittels der f^{-m} und π_n^{-1} erreicht man den Rücktransport von $\{U_j : j \geqslant 0\}$ bzw. U_∞ auf den gesamten Orbit von U. Durch Fortsetzung mit 0 außerhalb des Orbits erhält man unendlich viele linear unabhängige, f-invariante konforme Strukturen auf S^2. Hieraus folgt die Existenz unendlich vieler (im Koeffizientenraum) linear unabhängiger rationaler Funktionen vom Grad deg (f). Es ist wünschenswert, einen alternativen, eher dynamischen Beweis zu finden, der auf Hilfsmittel aus der Theorie diskreter Gruppen verzichtet.

Die Bahnen von Punkten aus der Fatou-Menge verlaufen schließlich ganz in periodischen Komponenten; es bleibt also noch die Dynamik innerhalb solcher Komponenten zu beschreiben. Sei U eine periodische Komponente (o.E. mit Periode 1 und somit $f: U \to U$). Gemäß der schon dargestellten Klassifikation der holomorphen Abbildungen auf hyperbolischen Riemannschen Flächen ($\mathscr{J}(f)$ hat stets Häufungspunkte!) können nur die folgende Fälle auftreten:

(F1) Es gibt einen Fixpunkt $z_0 \in U$ und $f^n(z) \to z_0$ für jedes $z \in U$.
(F2) Es gibt einen Fixpunkt z_0 im Rand von U und $f^n(z) \to z_0$ für jedes $z \in U$.
(F3) f ist zu einer irrationalen Rotation auf der Kreisscheibe D konjugiert.
(F4) f ist zu einer irrationalen Rotation auf einem Kreisring konjugiert.

Nur der Fall (F2) ist nicht ganz evident. Es gelte also, daß $f^n(z)$ gegen den unendlich fernen Punkt in der Poincaré-Metrik strebt. Wegen der relativen

---

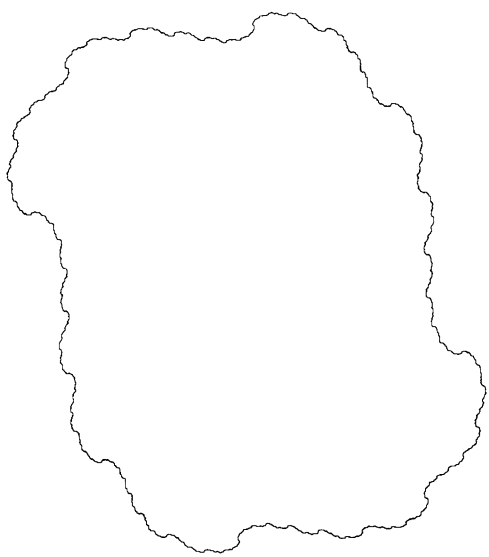
[9]) Nach dem Satz von Nielsen/Siegel können nur drei Fälle auftreten: Γ_∞ ist elementar, enthält elliptische Elemente oder ist diskret.

[10]) Siehe Ahlfors 1966, Seite 13

Kompaktheit von U kann man $n_k \to \infty$, $z \in U$ und $z_0 \in \partial U$ finden, so daß $f^{n_k}(z) \to z_0$ gilt. Nun bleibt aber der Poincaré-Abstand von $f^{n_k+1}(z)$ und $f^{n_k}(z)$ beschränkt, und wie man leicht sieht, strebt dann der sphärische Abstand gegen 0. Somit ist z_0 ein Fixpunkt[11]). Um zu sehen, daß es nur einen solchen Fixpunkt geben kann, nehme man die Existenz zweier Punkte $x \neq y \in U$ an, so daß $f^n(x) \to z_0$ und $f^{n_k}(y) \to z_1$. Sei l_0 eine rektifizierbare Kurve von z_0 nach z_1. Dann konvergieren die $l_{n_k} = f^{n_k}(l_0)$ gegen eine zusammenhängende Teilmenge C von ∂U. Da dies für jede Kurve gilt, muß C überabzählbar viele Fixpunkte besitzen. Dies nun steht im Widerspruch zu der Tatsache, daß f eine rationale Funktion ist. Es ist in diesem Fall auch einfach zu sehen, daß der Multiplikator $\lambda(z_0) = f'(z_0) = 1$ erfüllt.

Die lokale Dynamik ist nun leicht beschreibbar. Sei U eine periodische Komponente der Primperiode m, und es sei z_0 periodisch mit Primperiode m' und Multiplikator $\lambda(z_0) = \lambda = f'(z_0) \cdot f'(f(z_0)) \cdot \ldots \cdot f'(f^{m'-1}(z_0))$.

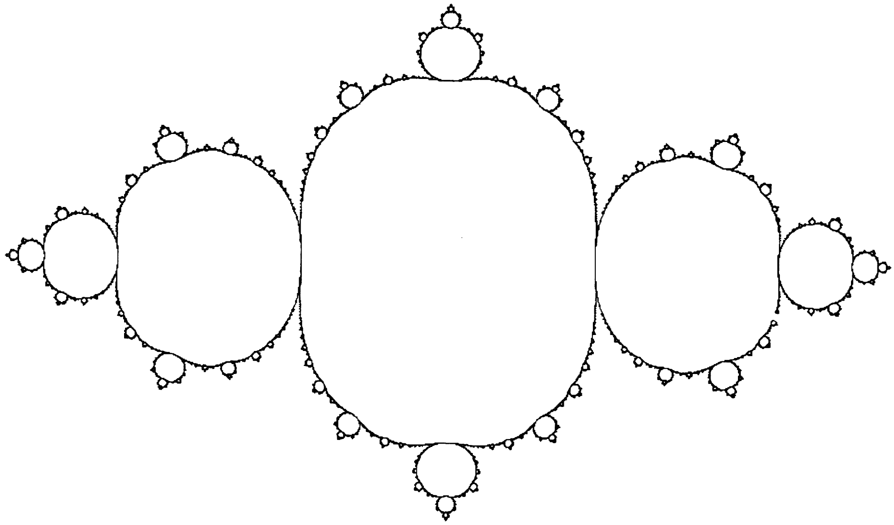
(F1) U enthält also einen anziehenden periodischen Punkt z_0. O.E. sei $z_0 = 0$ und $m = m' = 1$. Man sagt in diesem Fall, U sei der unmittelbare Anziehungsbereich eines anziehenden periodischen Punktes. Falls $0 < |\lambda| < 1$, so gibt Koenigs Satz die Konjugation der rationalen Funktion f zur Abbildung $w \to \lambda w$ in einer Umgebung von 0. Zum Beispiel ist $z \to z^2 + z/2$ von diesem Typus. Im kritischen (superanziehenden) Fall $\lambda = 0$ ergibt Bötkers Satz die Konjugation zu $w \to w^n$ für ein $n \geqslant 1$ (als Beispiel sei $z \to z^2$ erwähnt).



$$f(z) = z^2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} i$$

Jordan-Kurve; hyperbolisch (F1)

[11]) Da f ohnehin eine rationale Funktion auf ganz S^2 ist, stellt sich das Fortsetzungsproblem von f auf ∂U nicht.



$$f(z) = z^2 - \frac{3}{4}$$

parabolisch (F2) *mit* 2 *Blättern*

(F2) Man nennt in diesem Fall U ein Blatt eines parabolischen periodischen Punktes $z_0 \in \partial U$. Wie schon gezeigt, gilt $\lambda = 1$ falls $m = 1$. Durch Übergang zu $f^{m'}$ sieht man, daß stets $\lambda^{m/m'} = 1$ gelten muß, also $\lambda(z_0) = \exp[2\pi i \alpha]$ eine Einheitswurzel ist. Sei nun o.E. $z_0 = 0$ und ein Fixpunkt ($m' = 1$). Fatous Flower Theorem besagt nun, daß f in einer Umgebung von z_0 zur Abbildung $w \to \exp[2\pi i \alpha] w(1 + w^{nm})$ für ein $n \geqslant 1$ konjugiert ist. Es gibt mn abstoßende Richtungen $L_1, \ldots, L_{mn}$ und ebenso viele anziehende Richtungen, und $\mathcal{J}(f)$ ist tangential in z_0 zu den abstoßenden Richtungen L_j. Hier ist n so bestimmt, daß der analytische inverse Zweig von f^m, der $z_0 = 0$ fest läßt, die Form

$$z \to z + a z^{n-1} + \ldots$$

besitzt.

(F3) Im Falle, daß $f^m|_U$ isomorph zu einer irrationalen Rotation auf D ist, gibt es einen periodischen Punkt z_0 der Periode $m = m'$ mit Multiplikator $\lambda = \lambda(z_0) = \exp[2\pi i \alpha]$, α irrational, und f^m ist zu $w \to \lambda w$ konjugiert. Im Zuge seiner Untersuchungen zur diophantischen Approximation hat Siegel 1942 gezeigt, daß die Abbildung

$$f_\lambda(z) = z^2 + \lambda z$$

für f.a. $\lambda \in S^1$ eine Komponente dieses Typus besitzt[12]). Deshalb werden solche Zusammenhangskomponenten Siegel-Kreisscheiben genannt. Einen leichter zugänglichen Beweis als den, der ursprünglich von Siegel gegeben wurde, findet man

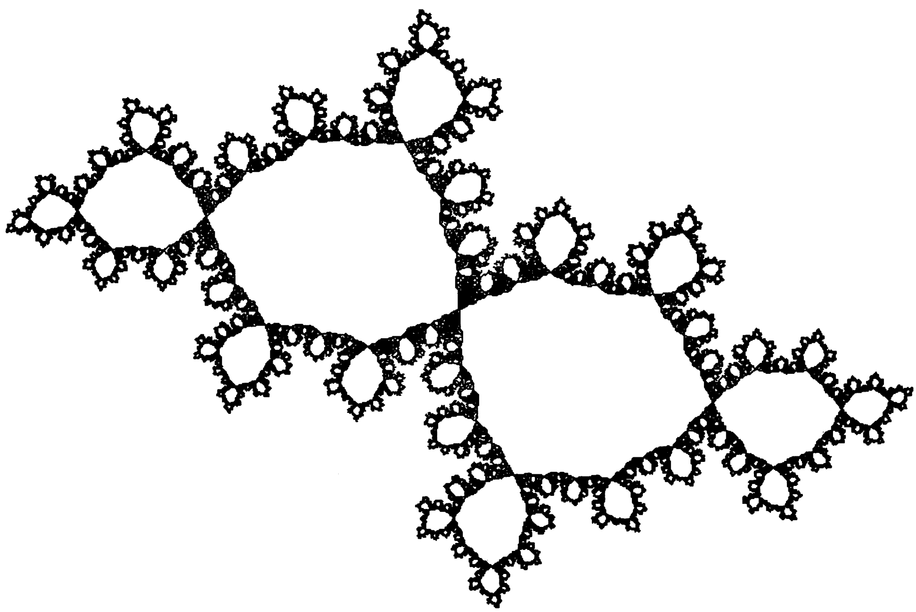
---

[12]) genauer, falls das zugehörige α diophantisch ist.

bei Zehnder. Schon vor dem Erscheinen des Siegelschen Resultates hatte Cremer bewiesen, daß die Familie f_λ generisch keine Siegel-Kreisscheibe besitzen kann[13]). Es liegt also ein irrational indifferenter periodischer Punkt vor, aber es gibt keine Siegel-Kreisscheibe, die diesen Punkt enthält. Man spricht dann von einem Cremer-Punkt, der folglich zur Julia-Menge gehören muß. Bryuno und Yoccoz haben die Siegelsche Charakterisierung verbessert[14]). Sie zeigten, daß f_λ genau dann eine Siegel-Kreisscheibe besitzt, wenn für die Kettenbruchentwicklung $\alpha = 1/|q_1 + 1/|q_2 + \ldots$ die Reihe $\sum q_n^{-1} \log q_n$ konvergiert. Die folgende Abbildung zeigt die Abbildung $z \to f_\lambda(z)$ mit $\alpha = \sqrt{2}$ [15]).

(F4) Im letzten Fall sei wieder $m = m' = 1$. Dann ist f konjugiert zu einer Abbildung $w \to \lambda w$ auf einem Kreisring. Man weiß heute nicht sehr viel über diese sog. Herman-Ringe. Beispiele, daß sie wirklich auftreten, sind bekannt[16]).

Insgesamt bleibt festzuhalten, daß zwar die Existenz der Siegel-Kreisscheiben und der Herman-Ringe gesichert ist, jedoch eine genaue Analyse für ihr Auftreten nicht gemacht worden ist. Dies erscheint noch als ein recht schwieriges Problem. Im Ganzen jedoch ist die Dynamik rationaler Funktionen auf der Fatou-Menge zufriedenstellend geklärt. Leider ist dem nicht ganz so für die Dynamik auf der Julia-Menge.



$f(z) = z^2 + z \exp[2\pi i \sqrt{2}]$

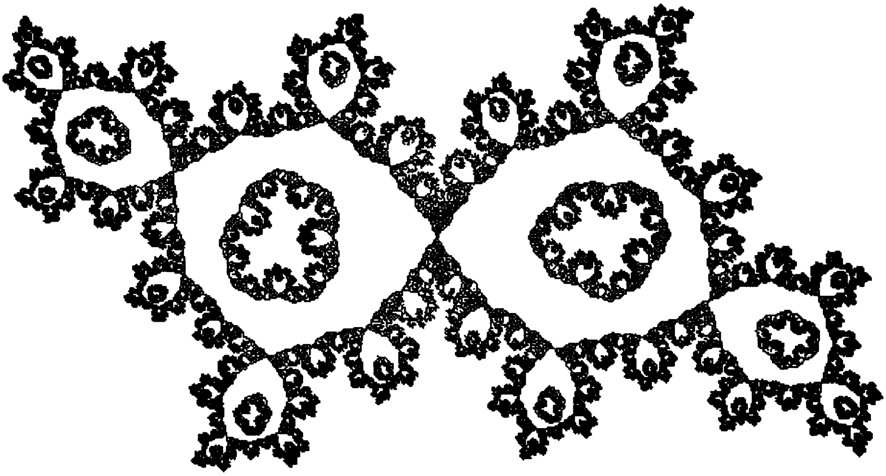
Siegel-Kreisscheibe (F3)

13) Pfeifer hat bereits 1917 ein solches Beispiel gefunden.

14) Dies wird bei Milnor behauptet.

15) Eine algebraische Zahl ist nach dem Liouvilleschen Approximationssatz diophantisch.

16) Shishikura konstruiert sie mittels surgery aus Siegel-Kreisscheiben.



$f(z) = \exp[\alpha\pi i] z^2(z-4)/(1-4z)$, $\alpha = 1{,}2303464\ldots$
Herman-Ring (F4)

3.

Die Dynamik einer rationalen Funktion auf der Julia-Menge war zu früherer Gelegenheit in drei Klassen eingeteilt worden: Hyperbolisch, parabolisch oder kritisch[17]). Da es sich bei der Julia-Menge in vielen Fällen um eine fraktale Menge handelt, wird man mit rein topologischen und komplex-analytischen Methoden nicht zum Ziel kommen. In der Tat erweist sich geometrische Maßtheorie als nützliches Hilfsmittel. Die notwendigen Konzepte aus diesem Gebiet seien deshalb vorangestellt.

Konforme Maße stellen den zentralen Begriff dar. Unter ihnen versteht man endliche Borel-Maße[18]), die ein vorgegebenes Skalierungsverhalten unter der rationalen Funktion f vorweisen: Ist ϕ eine meßbare Funktion auf $\mathscr{J}(f)$, so nennt man ein Borel-Maß m $\exp[\phi]$-konform, falls $\exp[\phi]$ „lokal" die Radon-Nikodym-Ableitung von $m \circ f$ bzgl. m ist; mit anderen Worten, wenn $m(f(A)) = \int_A \exp[\phi]\,dm$ für jede Menge A gilt, auf der f invertierbar ist. Für ein endliches, positives Hausdorff-Maß (z. B. das Lebesgue-Maß) gilt bekanntlich diese Eigenschaft mit $\phi = h \log |f'|$, wobei h die Hausdorffsche Dimension von $\mathscr{J}(f)$ bezeichnet. Es kann leicht gezeigt werden, daß ein $\exp[\phi]$-konformes Maß m bei stetigem ϕ als Fixpunkt charakterisiert ist: Es sei $\mathscr{L}_\phi$ der durch

$$\mathscr{L}_\phi h(z) = \sum_{y: f(y) = z} h(y) \exp[\phi(y)]$$

---

[17]) Der kritische Fall wird hier nur im Zuge allgemeiner Aussagen diskutiert, da für ihn noch keine Theorie vorliegt.

[18]) Ein Borel-Maß soll hier stets als ein normiertes Maß auf der Borelschen σ-Algebra verstanden werden.

auf dem Raum $C(\mathscr{J}(f))$ der stetigen (reellen) Funktionen auf der Julia-Menge erklärte Operator[19]). Sein Dual $\mathscr{L}_\phi^*$ operiert dann auf den signierten Maßen, und ein Borel-Maß m ist genau dann ein $\exp[-\phi]$-konformes Maß, wenn m ein Fixpunkt von $\mathscr{L}_\phi^*$ ist. Man weiß, daß es nicht für jedes stetige ϕ ein $\exp[-\phi]$-konformes Maß geben kann. Jedoch zeigt der Satz von Schauder-Tychonoff, daß das Punktspektrum von $\mathscr{L}_\phi^*$ einen positiven Eigenwert Λ besitzt. Damit gibt es aber ein $\Lambda\exp[-\phi]$-konformes Maß. Man kann konforme Maße auch als schwachen Limes diskreter Approximationen erhalten. Dies hat zu bedeutsamen neuen Erkenntnissen[20]) geführt, und auch im vorliegenden Fall gelingt es, Eindeutigkeitsfragen zu beantworten. Man kann den Druck der stetigen Funktion ϕ bzgl. der rationalen Funktion[21]) f durch

$$P(f,\phi) = \sup\{h_\mu(f) + \int_{\mathscr{J}(f)} \phi\, d\mu : \mu(\mathscr{J}(f)) = 1, \mu\circ f^{-1} = \mu\}$$

definieren, wobei $h_\mu(f)$ die metrische Entropie[22]) des unter f invarianten Maßes μ bezeichnet. Ist nun ϕ eine Hölder-stetige Funktion, die

$$P(f,\phi) > \sup_{z\in\mathscr{J}(f)} \phi(z)$$

erfüllt[23]), so ist $\exp[P(f,\phi)]$ der einzige positive Eigenwert von $\mathscr{L}_\phi^*$, und es gibt auch nur ein konformes Maß m_ϕ zu diesem Eigenwert. Es folgt also

$$\log \int_{\mathscr{J}(f)} \mathscr{L}_\phi 1\, dm_\phi = P(f,\phi).$$

Der Operator $\mathscr{L}_\phi$ ist fastperiodisch, wie eine detaillierte Analysis zeigt. Die Zerlegung von $C(\mathscr{J}(f))$ in die direkte Summe des mudularen Eigenraumes und des Unterraumes $\{h : \mathscr{L}_\phi^n h \to 0\}$ läßt sich als

$$C(\mathscr{J}(f)) = \mathbb{C} h_0 \oplus \{h : \int_{\mathscr{J}(f)} h\, dm_\phi = 0\}$$

schreiben, wobei h_0 positiv ist und o.E. $\int h_0 dm_\phi = 1$ erfüllt. Somit gibt es genau ein bzgl. f invariantes Borel-Maß μ_ϕ, das absolut stetig bzw. m_ϕ ist, nämlich die Dichte h_0 hat. Dieses Maß μ_ϕ ist ein Gleichgewichtsmaß für ϕ, erfüllt also

$$P(f,\phi) = h_{\mu_\phi}(f) + \int_{\mathscr{J}(f)} \phi\, d\mu_\phi.$$

Es ist auch das einzige invarante Maß mit dieser Eigenschaft.

Ist $\phi = 0$, so wird $P(f,\phi)$ auch als topologische Entropie bezeichnet. Sie läßt sich zu $\log\deg(f)$ bestimmen[24]). Lyubich zeigte darüber hinaus, daß die metrische

---

[19]) Die Urbilder der kritischen Punkte müssen entsprechend ihrer Vielfachheit gewichtet werden.

[20]) Man denke an Untersuchungen von Patterson und Sullivan über Limesmengen Kleinscher Gruppen, oder von verschiedenen Autoren zur Gleichgewichtstheorie.

[21]) Diese Definition ist auf die hier interessierende spezielle Situation beschränkt.

[22]) siehe Denker, Grillenberger, Sigmund

[23]) für hyperbolisches f ist die Bedingung nicht notwendig. Sie gilt z. B., wenn $\log\deg(f) > \sup_{z\in\mathscr{J}(f)} f(z) - \inf_{z\in\mathscr{J}(f)} f(z)$.

[24]) siehe Lyubich. Gromov (unveröffentlicht) erzielte dieses Resultat 1978.

Entropie eine oberhalbstetige Funktion auf dem Raum aller invarianter Borelmaße versehen mit der schwachen Topologie ist. Insbesondere bedeutet dies, daß zu jeder stetigen Funktion ϕ ein Gleichgewichtszustand existiert. Offen bleibt die Frage nach der Eindeutigkeit. Für die topologische Entropie gilt diese Eindeutigkeitsaussage stets[25]). Vor allem ist jedoch die Frage nach der Quasikompaktheit des Operators $\mathscr{L}_\phi$ von Bedeutung. Sie gilt für Hölderstetiges ϕ im hyperbolischen Fall und hat weitreichende Konsequenzen für die dynamische Zetafunktion von Ruelle[26]) und stochastische Eigenschaften. Fastperiodizität gerantiert lediglich die Trivialität der terminalen σ-Algebra, aber keine Bernoulli-Eigenschaft.

Die Funktion $\phi(z) = -t \log |f'|$ spielt eine besondere Rolle für das Skalierungsverhalten geometrischer Maße[27]). Nur im parabolischen und hyperbolischen Fall ist sie Hölder-stetig. Im parabolischen Fall ist zudem die Eindeutigkeitsbedingung nicht erfüllt. Existenz und Eindeutigkeitsfragen stellen sich unmittelbar im parabolischen und kritischen Fall; sie werden teilweise später diskutiert. Im kritischen Fall gibt es vielversprechende Ansätze, aber noch kein abschließendes Resultat.

Aus heutiger Sicht läßt sich die Dynamik hyperbolischer und parabolischer rationaler Funktionen am bestens mittels Markoff-Überlagerungen darstellen. Diese sind im hyperbolischen und parabolischen Fall gesichert[28]), jedoch im allgemeinen Fall nicht möglich. Also wird hierfür eine neue Theorie notwendig. Man sagt, f besitze eine Markoff-Partition, falls es eine topologische Markoff-Kette Σ_A und eine stetige, surjektive Abbildung $\pi : \Sigma_A \to \mathscr{J}(f)$ gibt, so daß die Shifts auf Σ_A und f kommutieren, und π eine Bijektion zwischen G_δ-Mengen ist. Diese wird i.a. durch Markoff-Zerlegungen von $\mathscr{J}(f)$ beschrieben. Nun ist eine hyperbolische rationale Funktion stets offen und expandierend, und deshalb besitzt sie eine Markoff-Partition. Ein etwas unständlicher Beweis findet sich bei Ruelle; es ist nicht schwer ein direktes, kurzes Argument zu geben. Im parabolischen Fall nutzt man die Tatsache aus, daß f genau dann parabolisch ist, wenn $f|_{\mathscr{J}(f)}$ expansiv ist[29]). Mittels einer Idee von Coven und Reddy, übertragen auf beliebige metrische Räume, läßt sich zeigen, daß es dann eine (topologisch) äquivalente Metrik gibt, bzgl. der f expandierend ist[30]). Also gibt es auch in diesem Fall eine Markoff-Partition. Im hyperbolischen Fall ist die Faktorabbildung π stets Hölder-stetig, insbesonders bedeutet dies im parabolischen Fall, daß π nur gleichmäßig stetig sein kann. Für beliebige rationale Funktionen ist lediglich ein Resultat von Mañé bekannt, daß diesem recht nahe kommt. Ist μ das Gleichgewichtsmaß zur topologischen Entropie, so gibt es einen vollen Bernoulli-Shift Σ und eine meßbare Abbildung $\pi : \Sigma \to \mathscr{J}(f)$, die mit dem Shift und f^m für ein

---

[25]) siehe Mañé

[26]) siehe Ruelle

[27]) Man denke beispielsweise an die Existenzaussagen über RBS-Maße auf stabilen Untermannigfaltigkeiten.

[28]) Der hyperbolische Fall ist Spezialfall eines mischenden Repellers wie bei Ruelle 1982 beschrieben. Der parabolische Fall ist in Denker, Urbański 1991 behandelt.

[29]) siehe Denker, Urbański 1991. Expansiv bedeutet, daß ein $\varepsilon > 0$ so existiert, daß die Bahnen zweier verschiedener Punkte im Laufe der Iteration um mindestens ε getrennt werden.

[30]) Diese Tatsache ist mehrmals unabhängig voneinander entdeckt worden.

$m \geq 1$ kommutiert, und die eine metrische Isomorphie zwischen μ und dem Bernoulli-Maß gleicher Entropie darstellt. Da es sich bei f um eine nicht invertierbare Abbildung handelt, ist die Ornsteinsche Theorie nicht anwendbar; metrische Isomorphiesätze stellen ein schwieriges Problem dar und sind z. B. für Gleichgewichtsmaße ansonsten nicht untersucht.

Da im hyperbolischen Fall die Faktorabbildung Hölder-stetig ist, läßt sich die Theorie der Gibbs-Maße im thermodynamischen Formalismus auf Hölder-stetige Funktionen $\phi : \mathscr{I}(f) \to \mathbb{R}$ übertragen. Das bedeutet insbesondere, daß die Ergodentheorie hyperbolischer rationaler Funktionen f festgelegt ist. Das eindeutig bestimmte Gleichgewichtsmaß zu ϕ ist Gibbssch, und somit sind stationäre Prozesse der Form $X_n = \psi \circ f^n \, (n \geq 1)$ mit Hölder-stetigem ψ besonders gut geeignet, stochastische Methoden bis hin zur Datenanalyse anzuwenden. Insbesondere existieren die Gibbs-Maße zu den Funktionen $\phi_t = -t \log |f'|$. Aus der Definition des Druckes folgt sofort, daß die stetige Funktion $t \to P(f, \phi_t)(t \geq 0)$ strikt monoton fällt und $P(f, \phi_0) = \log \deg(f) > 0$, $\lim_{t \to \infty} P(f, \phi_t) = -\infty$ gelten. Es gibt also eine eindeutig bestimmte Nullstelle p_0, und somit ein $|f'|^{p_0}$-konformes Maß[31] m mit einem eindeutig bestimmten äquivalenten f-invariantem Borel-Maß μ, dem RBS-Maß[32]. Das Skalierungsverhalten dieser Maße, die Expansionseigenschaft und die Hölder-Stetigkeit von f' garantieren nun, daß m zum p_0-dimensionalen Hausdorff-Maß H_{p_0} äquivalent ist. Insbesondere ist das Hausdorff-Maß also positiv und endlich, und es muß daher auch $p_0 = h$, der Hausdorff-Dimension von $\mathscr{I}(f)$ sein, denn ein Gibbs-Maß ist stets positiv auf offenen, nicht-leeren Mengen. Bezeichnet $s(f)$ den kleinsten Exponenten s, für den ein konformes Maß der Dimension s existiert, so gilt folglich

$$p_0 = h = s(f).$$

Im parabolischen Fall ist die Faktorabbildung π nicht Hölder-stetig. Damit ist der thermodynamische Formalismus nicht mehr anwendbar, jedoch läßt sich der Schweiger-Formalismus über Renyi-Bedingungen auf diese Systeme ausdehnen[33]. Es stellt sich heraus, daß jedes $\exp[P(f, \phi) - \phi]$-konforme Maß m_ϕ mit Hölder-stetigem ϕ als nicht-singuläres Maß angesehen werden kann, das diesen Formalismus erklärt. Unter der einschränkenden Bedingung $P(f, \phi) > \sup_{z \in \mathscr{I}(f)} \phi(z)$ existiert ein solches Maß, und es gibt einen Gleichgewichtszustand, der absolut stetig ist. Beide Maße sind eindeutig, wie schon gesehen wurde, und die Ergodentheorie liegt damit ebenfalls fest. Ist die einschränkende Bedingung nicht erfüllt, so kann man im Fall der Funktionen $\phi_t = -t \log |f'|$ sehen, welche neuartigen Phänomene auftreten. Aus der Definition folgt, daß die Druckfunktion $P(f, \phi_t)$ stetig und fallend, aus der Exsistenz parabolischer Orbits, daß sie nicht-negativ ist. Sei p_0 die kleinste Nullstelle dieser Funktion. Ein grundlegendes Ergebnis zeigt die Existenz konformer Maße der Dimension s für beliebige $s \geq p_0$. Die Ausnutzung der lokalen Struktur von f um parabolische Punkte erlaubt es, konforme Maße zu vergleichen. Es stellt sich heraus, daß es genau eines gibt, das

---

[31]) Nach Patterson und Sullivan werden solche Maße konform der Dimension p_0 genannt.

[32]) nach Bowen, Ruelle und Sinai

[33]) Dies wurde von Aaronson, Denker und Urbański grundlegend dargestellt.

nicht atomar ist. Dieses ist auch das einzige der Dimension p_0, alle anderen konformen Maße haben eine Dimension $>p_0$ und sind atomar. Nebenbei erhält man auch, daß die Hausdorff-Dimension h von $\mathscr{J}(f)$ gerade p_0 sein muß. Wir erhalten also wiederum $p_0=h=s(f)$. Nur noch im Fall der Hausdorff-Dimension $h\leqslant 1$ stimmt das Hausdorff-Maß mit dem konformen Maß der Dimension h überein (bis auf einen Normierungsfaktor), andernfalls mit dem h-dimensionalen ‚packing'-Maß. Fatous Flower Theorem und der Schweiger-Formalismus erlauben es, die Existenz absolut stetiger, σ-endlicher, invarianter Maße nachzuweisen, die selbst endlich oder unendlich sein können. Für einen parabolischen Punkt ω sei r so groß, daß f^r ω fest läßt und $(f^r)'(\omega)=1$ gilt. Bezeichnet dann $n_\omega+1$ die kleinste Potenz $\neq 1$ in der Potenzreihe des inversen Zweiges von f^r, der ω fest läßt, so gilt

$$\gamma = \max\left\{\frac{n_\omega+1}{n_\omega}h : \omega \,\text{parabolisch}\right\} \in (1/2,4).$$

Als Nebenresultat erhält man das bereits teilweise erwähnte Resultat, daß die Hausdorff-Dimension der Julia-Menge einer parabolischen Abbildung im Intervall (1/2, 2) liegen muß. Das invariante Maß ist nun genau dann endlich, wenn $\gamma>2$ ist. Insbesondere ist das Maß unendlich, wenn die Hausdorff-Dimension $\leqslant 1$ ist, z. B. für Blaschke-Produkte. Im endlichen Fall ist das invariante Maß ergodisch und klassische Aussagen der Ergodentheorie gelten. Darüber hinaus ist es möglich, für eine große Klasse von Hölder-stetigen Funktionen stochastische Aussagen zu beweisen. Im unendlichen Fall ist das invariante Maß ebenfalls ergodisch. Es gibt leider keine allgemein gültigen Gesetze der Ergodentheorie unendlicher invarianter Maße; am besten entwickelt ist sie für die Teilklasse der Abbildungen, die eine Darling-Kac-Menge zulassen und regulär variierende Rückkehrfolgen besitzen[34]. Es stellt sich heraus, daß parabolische rationale Funktionen mit unendlichem invariantem Maß gerade diese vorteilhaften Eigenschaften besitzen, also hierfür eine zufriedenstellende Ergodentheorie existiert.

4.

Es soll in einem kürzeren letzten Abschnitt gezeigt werden, wie die vorangestellten Ideen und Resultate verwendet werden können, Makarovs Satz über das harmonische Maß auf Rändern einfach zusammenhängender Gebiete in S^2 mittels dynamischer Methoden zu verschärfen. Die Idee hierzu geht auf Przytycki, Urbański und Zdunik zurück, u. a. auch auf Resultate verschiedener Autoren, Sätze der Stochastik für dynamische Systeme anwendbar zu machen. Es sei B ein einfach zusammenhängendes Gebiet der S^2, dessen Komplement mindestens drei Punkte enthält. Sei ferner $R: D\to B$ eine Riemannsche Abbildung. Dann läßt sich das Lebesgue-Maß auf ∂D auf den Rand von B transportieren und wird bekanntlich als harmonisches Maß ν bezeichnet. Um den Zusammenhang

---

[34]) Diese Theorie ist von Aaronson, Fisher und Denker in den letzten Jahren entwickelt worden.

zwischen ν und Hausdorff-Maßen zu studieren, sei

$$\phi_c(t) = t \exp\left[c\sqrt{[\log 1/t] \log\log\log 1/t}\right],$$

und H_{ϕ_c} das zugehörige Hausdorff-Maß. Makarov zeigte, daß es eine universelle Konstante C gibt, so daß das harmonische Maß absolut stetig bzgl. H_{ϕ_c} ist.[35]). Ferner ist ν singulär zu jedem s-dimensionalen Hausdorff-Maß für $s > 1$. Unter dynamischen Bedingungen läßt sich dieses Resultat erheblich verschärfen. Ist B Komponente der Fatou-Menge einer hyperbolischen rationalen Funktion[36]), so gibt es eine Konstante $c(B)$ derart, daß das harmonische Maß ν singulär (bzw. absolut stetig) bzgl. des Hausdorff-Maßes H_{ϕ_c} ist, wenn $0 < c < c(B)$ (bzw. $c > c(B)$) gilt. Insbesondere besitzt das harmonische Maß selbst die Hausdorff-Dimension 1 [37]). Ist $c(B) = 0$, so ist ν absolut stetig bzgl. des 1-dimensionalen Hausdorff-Maßes und der Rand von B ist eine reell-analytische Jordan-Kurve. Man erhält also die Dichotomie, daß entweder die Randkurve Hausdorff-Dimension 1 (gleichbedeutend mit reell rektifizierbar), oder daß das harmonische Maß obige Relationen zu den verschiedenen Hausdorff-Maßen besitzt. Im parabolischen Fall läßt sich ein solcher Satz für die Anziehungsbereiche der rational indifferenten periodischen Punkte ebenfalls erhalten[38]).

Der Beweis dieser Aussage läßt sich kurz so darstellen. Die rationale Funktion f induziert über die Riemannsche Abbildung eine Transformation T in einer Umgebung von ∂D. Auf diese kann mittels einer Markoff-Partition der thermodynamische Formalismus (im hyperbolischen Fall) bzw. der Schweiger-Formalismus (im parabolischen Fall) angewendet werden, um für die Funktion $\psi = \log|f' \circ R| - \log|T'|$ obere und untere Klassenresultate in der Theorie des funktionalen Gesetzes des iterierten Logarithmus anzuwenden[39]). Zusammen mit dem Koebeschen Verzerrungssatz ergibt sich daraus unter einigen Rechnungen das Resultat.

5. Literatur

[1] Aaronson, J.:The asymptotic distributional behaviour of transformations preserving infinite measure. J. d'Anal. Math. **39** (1981) 203–234

[2] Aaronson, J.; Denker, M.: Upper bounds for ergodic sums of infinite measure preserving transformations. Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990) 101–138

[3] Aaronson, J.; Denker, M.; Fisher, A.: Second order ergodic theorems for ergodic transformations of infinite measure spaces. Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992) 115–127

[4] Aaronson, J.; Denker, M.; Urbański, M.: Ergodic theory for Markov fibred systems and parabolic rational maps. Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993) 495–548

[5] Ahlfors, L.: Lectures on quasiconformal mappings. v. Nostrand 1966

[35]) Makarov verlangte, daß B ein Jordan-Gebiet ist. Diese Annahme wurde später von Rohde als unnötig nachgewiesen.

[36]) Die Bedingungen bei Przytycki, Urbański, Zdunik sind tatsächlich ein wenig allgemeiner.

[37]) Das ist die kleinste Hausdorff-Dimension einer Menge vollen Maßes.

[38]) siehe Denker, Urbański 1992

[39]) Im parabolischen Fall ist das nur für die im Formalismus zugehörigen Sprungtransformationen möglich.

[6] Beardon, A. F.: Iteration of rational functions. Springer Graduate Texts. Springer Verlag 1991
[7] Bers, L.: On Sullivan's proof of the finiteness theorem and the eventual periodicity theorem. Amer. J. Math. **109** (1987) 833–852
[8] Bielefeld, B.; Lyubich, M. eds.: Problems in holomorphic dynamics. SUNY StonyBrook (1992)
[9] Blanchard, P.: Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984) 85–141
[10] Brolin, H.: Invariant sets under iteration of rational functions. Ark. f. Mat. **6** (1965) 103–144
[11] Cremer, H.: Zum Zentrumproblem. Math. Ann. **98** (1928) 151–163
[12] Cremer, H.: Ueber die Häufigkeit der Nichtzentren. Math. Ann. **115** (1938) 573–580
[13] Denker, M.; Grillenberger, C.; Sigmund, K.: Ergodic theory on compact spaces. Lect. Notes in Math. **527**, Springer Verlag 1976
[14] Denker, M.; Urbański, M.: Ergodic theory of equilibrium states for rational maps. Nonlinearity **4** (1991) 103–134
[15] Denker, M.; Urbański, M.: Hausdorff and conformal measures on Julia sets with a rationally indifferent periodic point. J. London Math. Soc. **43** (1991) 107–118
[16] Denker, M.; Urbański, M.: Absolutely continuous invariant measures for expansive rational maps with rationally indifferent periodic points. Forum Math. **3** (1991) 561–579
[17] Denker, M.; Urbański, M.: Geometric measures for parabolic rational maps. Ergod. Theory and Dynam. Syst. **12** (1992) 53–66
[18] Denker, M.;Urbański, M.: Relating Hausdorff and harmonic measure on parabolic Jordan curves. J. f. d. Reine und Angewandte Math. **450** (1994) 181–201
[19] Devaney, R.: An introduction to chaotic dynamical systems. Benjamin 1985
[20] Fatou, P.: Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionelle. C.R. Acad. Paris **143** (1906) 546–548
[21] Fatou, P.: Sur les équations fonctionelles. Bull. Soc. Math. France **47** (1919) 161–271 und **48** (1920) 33–94 und 208–314
[22] Julia, G.: Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles. J. Math. Pure et Appl. Sér. **8.1** (1918) 47–245
[23] Keen, L.: Julia sets. In: Chaos and fractals, eds.: Devaney, R.; Keen, L. Proc. Symp. in Appl. Math. **39** (1989) 57–74
[24] Lattès, S.: Sur l'iteration des substitutions rationelles et les fonctions de Poincaré. C.R. Acad. Paris **16** (1918) 26–28
[25] Lyubich, M.: Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. Ergod. Theory and Dynam. Sys. **3** (1983) 351–386
[26] Lyubich, M.: Dynamics of rational transformations. The topological picture. Uspekhi Mat. Nauk **41** (1986) 35–95; Russ. Math. Surveys **41** (1986) 43–117
[27] Makarov, N. G.: On the distortion of boundary sets under conformal mappings. Proc. London Math. Soc. **51** (1985) 369–384
[28] Mañé, R.: On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps. Bol. Soc. Bras. Mat. **14** (1983) 27–83
[29] Mañé, R.: On the Bernoulli property of rational maps. Ergod. Theory and Dynam. Syst. **5** (1985) 71–88
[30] Milnor, J.: Dynamics in one complex variable: Introductory Lectures. SUNY Stony Brook (1990)
[31] Patterson, S. J..: The limit set of a Fuchsian group. Acta Math. **136** (1976) 241–273
[32] Patterson, S. J.: Lectures on measures on limit sets of Kleinian groups. In: Analytic and Geometric Aspects of Hyperbolic Space. ed. Epstein, D. B. A. LMS Lect. Notes Ser. **111** (1987), Cambridge Univ. Press
[33] Pfeifer, G. A.: On the conformal mapping of curvilinear angles; the functional equation $\phi[f(x)]=a_1(x)$. Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917) 185–198
[34] Przytycki, F.; Urbański, M.; Zdunik, A.: Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. I: Ann. Math. **130** (1989) 1–40; II: Studia Math. **97** (1991) 189–225
[35] Rees, M.: Ergodic rational maps with dense critical point forward orbit. Ergod. Theory and Dynam. Syst. **4** (1984) 311–322
[36] Ruelle, D.: Thermodynamic formalism. Encycl. Math. Appl. **5**, Addison-Wesley 1978

[37] Ruelle, D.: Repellers for real analytic maps. Ergod. Theory and Dynam. Syst. **2** (1982) 99–107
[38] Schröder, E.: Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Math. Ann. **2** (1870) 317–365
[39] Schröder, E.: Ueber iterirte Funktionen. Math. Ann. **3** (1871) 296–322
[40] Siegel, C. L.: Iteration of analytic functions. Ann. Math. **43** (1942) 607–612
[41] Shishikura, M.: On the quasiconformal surgery of rational functions. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **20** (1987) 1-29
[42] Smale, S.: On the efficiency of algorithms of analysis. Bull. Amer. Math. Soc. **13** (1985) 87–121
[43] Sullivan, D.: Conformal dynamical systems. In: Geometric Dynamics. Lect. Notes in Math. **1007** (1983) 725–752, Springer Verlag
[44] Sullivan, D.: Quasionformal homeomorphisms and dynamics. I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. Ann. of Math. **122** (1985) 401–418; II: Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups. Acta Math. **155** (1986) 243–260; III: Topological conjugacy classes of analytic endomorphisms. IHES 1983
[45] Yoccoz, J. C.: Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de ($\mathbb{C}$, 0). C.R.Acad. Paris **306** (1988) 55–58
[46] Zehnder, E.: A simple proof of a generalization of a theorem of Siegel, C. L. Lect. Notes in Math. **597** (1977) 855–866

Manfred Denker
Stefan Heinemann
Institut für Mathematische Stochastik
Lotzestr. 13
37083 Göttingen

(Eingegangen 31. 3. 1993)

Addendum: Seit die Arbeit verfaßt wurde, sind recht bedeutsame Ansätze für einige der hier angesprochenen Probleme gefunden worden.

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
98 (1996) 30–39
Mathematics Subject Classification: 11 G 40, 11 R 29, 11 G 05, 11 R 34

Euler Systems and Exact Formulas in Number Theory

K. Rubin, Columbus, OH

Introduction

In recent years there has been an explosion of activity concerning relations between arithmetic and special values of L-functions. This activity has produced both new results and new conjectures.

One of the tools that has been instrumental for some of the new results is Kolyvagin's concept of an *Euler system* [3]. This paper is meant to give a brief introduction for non-specialists to Kolyvagin's method, and to describe the kind of problem to which one can hope to apply it.

Fig. 1 gives an overview of the kind of questions we are considering, along with names of some who have contributed either theorems or conjectures (some of which will be discussed in more detail later). An Euler system is used to prove a relation of type C.

In the next two sections we will develop two parallel examples illustrating Figure 1 and the role played by Euler systems. After that we discuss possible generalizations, and in § 5 return to the example of § 1 to sketch how the Euler system of cyclotomic units is used to prove an analytic class number formula.

1 Real Quadratic Fields

Fix a prime q, $q \equiv 1 \pmod 4$. Let $F = \mathbf{Q}(\sqrt{q})$ be the real quadratic field of discriminant q and $\mathcal{O}_F$ its ring of integers:

$$\mathcal{O}_F = \mathbf{Z}[(1+\sqrt{q})/2].$$

1.1 Global units and ideal class groups. In this setting one is interested in describing as explicitly as possible

- $\mathcal{O}_F^\times$, the group of global units of F,
- $\mathscr{C}_F$, the ideal class group of F.

This paper is an expanded version of the author's lecture at the DMV meeting in Duisburg, 23 September 1994. The author thanks the DMV and the NSF for financial support.

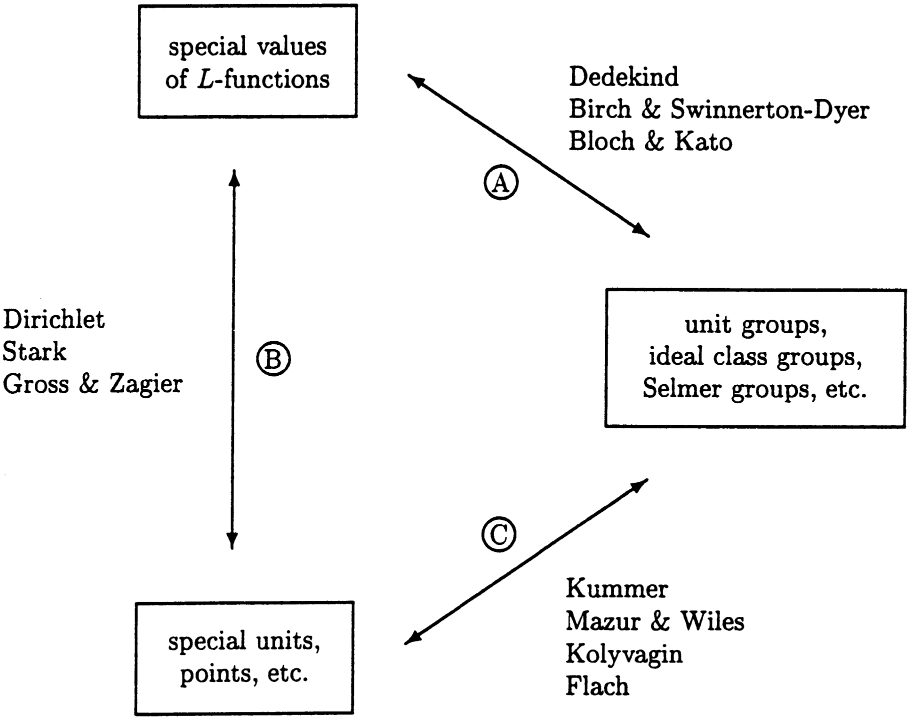


Fig. 1

Theorem 1.1 (Dirichlet). *$\mathcal{O}_F^\times \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, i.e.*

$$\mathcal{O}_F^\times = \{\pm \varepsilon_F^n : n \in \mathbf{Z}\}$$

with a (unique) unit $\varepsilon_F \in \mathcal{O}_F^\times$, $\varepsilon_F > 1$.

1.2 Special (cyclotomic) units. Define the quadratic character

$$\chi_q : (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times \to \{\pm 1\}$$

by $$\chi_q(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \text{ is a square modulo } q, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For $m \in \mathbf{Z}^+$ let $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$ and define

$$\delta_F = \prod_{a=1}^{(q-1)/2} (\zeta_q^a - \zeta_q^{-a})^{\chi_q(a)} \in \mathcal{O}_F^\times,$$

$$\mathscr{V}_F = \{\pm \delta_F^n : n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathcal{O}_F^\times.$$

One proves that $\delta_F \in \mathcal{O}_F^\times$ using the action of the automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/\mathbf{Q})$ on ζ_q.

1.3 L-functions. Define the Dirichlet L-function

$$L(s,\chi_q) = \prod_{\text{primes } l \neq q} \left(1 - \frac{\chi_q(l)}{l^s}\right)^{-1}$$

for complex numbers s with real part $\Re(s) > 1$.

Theorem 1.2 (Dirichlet). *$L(s,\chi_q)$ has an analytic continuation to all of $\mathbf{C}$, and satisfies a functional equation which shows that $L(0,\chi_q)=0$.*

1.4 Relations

Theorem 1.3 (Dirichlet). $L'(0,\chi_q)=\log|\delta_F|$.

Theorem 1.4 (Dirichlet). $L'(0,\chi_q)=\#(\mathscr{C}_F)\log|\varepsilon_F|$.

Corollary 1.5. $\#(\mathscr{C}_F)=[\mathscr{O}_F^\times : \mathscr{V}_F]$.

The corollary is immediate from Theorems 1.3 and 1.4 and the definitions.

Example. Take $q=229$. Then

- $\varepsilon_F=(15+\sqrt{229})/2$,
- $\delta_F=1710+113\sqrt{229}=\varepsilon_F^3$,
- $\mathscr{C}_F=\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

Remark. Theorem 1.3, Theorem 1.4, and Corollary 1.5 are examples of the relations B, A, and C, respectively, of Figure 1. Note the difference between Theorems 1.3 and 1.4. Theorem 1.4 expresses $L'(0,\chi_q)$ as the logarithm of a generator ε_F of the group of global units, with a 'correction term' which is the order of the ideal class group $\mathscr{C}_F$. But this formula does not tell one how to construct ε_F. On the other hand, Theorem 1.3 expresses $L'(0,\chi_q)$ as the logarithm of δ_F, where δ_F is constructed explicitly (analytically) and then proved to belong to $\mathscr{O}_F^\times$. Thus δ_F is a 'special' unit which has the 'correction term' $\#(\mathscr{C}_F)$ built into it.

In this situation, C did come historically as a corollary of A and B. In other settings, such as the ones we will see in the following sections, there is no known direct proof of A. In these situations one can try to prove A as a consequence of B and C. For this reason it was especially interesting when Kolyvagin produced a direct method to prove relations of type C.

In the case of real quadratic fields, Kolyvagin gave a new proof of the following weaker version of Corollary 1.5.

Theorem 1.6. *$\#(\mathscr{C}_F)$ divides $[\mathscr{O}_F^\times : \mathscr{V}_F]$*

The proof uses the *Euler system* of cyclotomic units

$$1-\zeta_m \in \mathbf{Q}(\zeta_m)^\times, \qquad m>1.$$

These "special" units all arise from special values of Dirichlet L-functions via the following formula of Dirichlet, which extends Theorem 1.3 to L-functions of more general characters; it is another example of a relation B of Figure 1.

Theorem 1.7 (Dirichlet). *If* $m>1$ *and* $\chi:(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$, *then*

$$L'(0,\chi)=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{m-1}\bar\chi(a)\log|1-\zeta_m^a|.$$

What makes the above cyclotomic units an Euler system is the distribution relation they satisfy: if l is a prime not dividing m, then

$$\mathrm{N}_{\mathbf{Q}(\zeta_{lm})/\mathbf{Q}(\zeta_m)}(1-\zeta_{lm})=\frac{1-\zeta_m}{1-\zeta_m^{l'}}$$

where $ll'\equiv 1 \pmod m$. This distribution relation is easy to prove by computing the norm directly, or it can be deduced from Theorem 1.7. We will sketch the proof of Theorem 1.6 in § 5.

2 Elliptic Curves

In this section we will investigate (certain) elliptic curves in a way which is very much parallel to the way we studied (certain) real quadratic fields in § 1. Fix a prime q, $q\equiv 7 \pmod 8$, and define the elliptic curve

$$E: y^2=x^3-q^2x.$$

2.1 Rational points and Tate-Shafarevich groups. In this setting one is interested in describing as explicitly as possible

- $E(\mathbf{Q})$, the set of points on E with rational coordinates (including the one point at infinity which we denote by O),
- Ш, the Tate-Shafarevich group of E (defined in § 3 below).

The points of E have a natural addition law (see for example [5]). Under this addition $E(\mathbf{Q})$ is an abelian group with identity element O.

Theorem 2.1 (Birch). $E(\mathbf{Q})\cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, *i.e.*

$$E(\mathbf{Q})=\mathbf{Z}P_E\oplus\{(0,0),O\}\oplus\{(q,0),O\}$$

with a rational point P_E *having infinite order in* $E(\mathbf{Q})$.

2.2 Special (Heegner) points. The group of matrices

$$\Gamma_0(32)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}): c\in 32\mathbf{Z}\right\}$$

acts on the complex upper half plane $\mathscr{H}$ by linear fractional transformations. One can use classical modular functions to write down an explicit embedding of complex manifolds

$$\phi:\mathscr{H}/\Gamma_0(32)\hookrightarrow E(\mathbf{C}).$$

Choose $\tau_1,\ldots,\tau_k\in\mathscr{H}\cap\mathbf{Q}(\sqrt{-q})$ such that both $\{\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau_i\}$ and $\{\mathbf{Z}+32\mathbf{Z}\tau_i\}$ are sets of representatives of the ideal class group of $\mathbf{Q}(\sqrt{-q})$. Then one can show that

$$Q_E := 2 \sum_{j=1}^{k} \phi(\tau_j) \in E(\mathbf{Q})$$

(summing in $E(\mathbf{C})$) by understanding the action of $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/\mathbf{Q})$ on the $\phi(\tau_j)$. The point Q_E is called a Heegner point. Define

$$\mathscr{W}_E = \mathbf{Z}\,Q_E + E(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}} \subseteq E(\mathbf{Q}),$$

Example. Take $q=7$. The ideal class group of $\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$ is trivial and we can take

$$\tau_1 = \frac{11+\sqrt{-7}}{64}.$$

Then $\quad Q_E = 2\phi(\tau_1) = \left(-\frac{63}{16}, \frac{735}{64}\right)$

and $E(\mathbf{Q}) = \mathscr{W}_E$.

2.3 L-functions. Define the L-function of E by

$$L(E,s) = \prod_{\text{primes } l \neq 2, q} \left(1 - \frac{a_l}{l^s} + \frac{l}{l^{2s}}\right)^{-1}$$

for $\Re(s) > 3/2$, where

$$a_l = l + 1 - \#(E(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}))$$

and $E(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$ is the group of points of E over the finite field $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$, including the point at infinity O.

Theorem 2.2 (Deuring Hecke). *$L(E,s)$ has an analytic continuation to all of $\mathbf{C}$, and satisfies a functional equation which shows that $L(E,1)=0$.*

2.4 Relations

Theorem 2.3 (Gross and Zagier). *$L'(E,1) = \Omega h(Q_E)$, where*

- $\Omega = \int_{E(\mathbf{R})} \left|\frac{dx}{2y}\right| \in \mathbf{R}^+$,
- *$h: E(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ is the "canonical height", a quadratic form roughly measuring the size of the numerator and denominator of the coordinates of a rational point.*

Conjecture 2.4 (Birch and Swinnerton-Dyer). $L'(E,1) = \Omega h(P_E)\,\#(\text{Ш})$.

Thus (since h is a quadratic form) the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for E is equivalent to

Conjecture 2.5. $\#(\text{Ш}) = [E(\mathbf{Q}) : \mathscr{W}_E]^2$.

Remark. Note the close analogy between the numbered statements of this section and those of § 1. Once again we have the "algebraically defined" point $P_E \in E(\mathbf{Q})$ and the "analytically defined" point $Q_E \in E(\mathbf{Q})$.

The major difference between this section and § 1 is that Theorem 1.4 is proved but Conjecture 2.4 is not. (These assertions are relations of type A in Figure 1.) Thus in this case it would be of great interest to prove something about Conjecture 2.5 directly, without going the long way around Figure 1 as was done for Corollary 1.5.

Kolyvagin showed how to attack Conjecture 2.5 using an *Euler system* of Heegner points. Let $\mathfrak{p}_2$ denote one of the two primes of $\mathbf{Q}(\sqrt{-q})$ above 2, fix $\tau \in \mathscr{H}$ so that

$$\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau = \mathfrak{p}_2^{-5}$$

and for $m \in \mathbf{Z}^+$ prime to $2q$ define

$$Q_m = \phi\left(\frac{\tau}{m}\right) \in E(\mathbf{C}).$$

The fields $F_m := \mathbf{Q}(\sqrt{-q}, Q_m)$ are finite Galois extensions of $\mathbf{Q}$, and the Q_m form an Euler system because they satisfy the distribution relation

$$\mathbf{N}_{F_{lm}/F_m}(Q_{lm} - \mathrm{Fr}_l^{-1} Q_m) = -\mathrm{Fr}_l^{-1}(\mathrm{Fr}_l^2 - a_l\,\mathrm{Fr}_l + l)\,Q_m$$

if l does not divide m, where $\mathrm{Fr}_l \in \mathrm{Gal}(F_m/\mathbf{Q})$ is the Frobenius automorphism attached to l. Using this family of Heegner points Kolyvagin proved

Theorem 2.6 (Kolyvagin). $\#(\text{Ш})$ *divides* $[E(\mathbf{Q}) : \mathscr{W}_E]^2$.

Note that this theorem, and in fact any result of type C in Figure 1, makes no mention of L-functions. The information that an Euler system gives about special values of L-functions is contained in the construction of the Euler system itself, and is reflected in arrow B of Figure 1 (in this case, Theorem 2.3).

3 The Tate-Shafarevich Group

Finding all rational points on a general elliptic curve is very difficult.

If E is an elliptic curve and $m \in \mathbf{Z}^+$, let $E[m]$ be the kernel of multiplication by m in $E(\bar{\mathbf{Q}})$. As a group $E[m]$ is isomorphic to $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^2$, but $E[m]$ also has a natural action of $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. If $P \in E(\mathbf{Q})$ then $\dfrac{1}{m}P$ will denote a point $Q \in E(\bar{\mathbf{Q}})$ such that $mQ = P$. Define a Kummer theory map

$$E(\mathbf{Q}) \to H^1(\mathbf{Q}, E[m])$$
$$P \mapsto \left(\sigma \mapsto \sigma\left(\frac{1}{m}P\right) - \left(\frac{1}{m}P\right)\right)$$

where $H^1(\mathbf{Q}, E[m])$ is the Galois cohomology group of classes of 1-cocycles from $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ to $E[m]$.

We study $E(\mathbf{Q})$ by studying its image in $H^1(\mathbf{Q}, E[m])$ for every m. For every prime l, let $\mathbf{Q}_l$ be the completion of $\mathbf{Q}$ in the l-adic topology. We allow $l = \infty$, in which case $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$. The natural inclusion of $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_l/\mathbf{Q}_l)$ into $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ gives rise to a restriction map and a commutative diagram

$$\begin{array}{lcc} & E(\mathbf{Q}) \to H^1(\mathbf{Q}, E[m]) \\ (1) & \downarrow \qquad\qquad \downarrow \mathrm{res}_l \\ & E(\mathbf{Q}_l) \to H^1(\mathbf{Q}_l, E[m]) \end{array}$$

Define the m-Selmer group of E

$$S_m(E) = \{c \in H^1(\mathbf{Q}, E[m]) : \mathrm{res}_l(c) \in \text{image}\,(E(\mathbf{Q}_l)) \text{ for every } l\}$$

so $S_m(E)$ is a finite subgroup of $H^1(\mathbf{Q}, E[m])$, defined by "local conditions", which contains the image of $E(\mathbf{Q})$.

Now define the Tate-Shafarevich group

$$Ш_m(E) = \text{cokernel}\,(E(\mathbf{Q}) \to S_m(E)), \qquad Ш(E) = \bigcup_m Ш_m(E).$$

Thus $Ш(E)$ is the obstruction to using local methods to study $E(\mathbf{Q})$. It is an analogue of the ideal class group of a number field; one can define the ideal class group in a similar, cohomological way.

4 More General p-adic Representations of Gal $(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$

The definition of $Ш(E)$ uses the elliptic curve E and all of the groups $E(\mathbf{Q}_l)$. But one can define it in a different way, only using the groups $E[m]$ and the action of Gal $(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ on them. The key is to describe image $(E(\mathbf{Q}_l))$ in (1) only in terms of these Galois modules, without reference to E itself. This makes it possible to define analogues of Ш in great generality.

Fix a prime p, and suppose T is a free $\mathbf{Z}_p$-module of finite rank on which $G_\mathbf{Q} := \mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ acts. For example:

- If $q \equiv 1 \pmod 4$, set $T(\chi_q) = \mathbf{Z}_p$ with $G_\mathbf{Q}$ acting via the quadratic character

$$G_\mathbf{Q} \to \mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}(\sqrt{q})/\mathbf{Q}) \simeq \{\pm 1\}$$

- $T_\mu = \varprojlim_n \mu_{p^n}$
- If E is an elliptic curve, set

$$T(E) = \varprojlim_n E[p^n] \cong \mathbf{Z}_p^2$$

- If T is such a $G_\mathbf{Q}$-module, define

$$T^* = \mathrm{Hom}\,(T, T_\mu).$$

Subject to some general assumptions on T (too complicated to describe here; see for example [1], [2]), one can define

- an L-function $L(s, T)$, defined by an Euler product,
- a Tate-Shafarevich group $Ш(T)$, a subquotient of $H^1(\mathbf{Q}, (T \otimes \mathbf{Q})/T)$ defined by "local conditions".

Bloch and Kato [1] conjecture a precise formula relating $L(s,T)$ at $s=0$ with, among other things, $\#(\text{Ш}(T))$.

The method of Kolyvagin gives a way of attacking this conjecture, using duality theorems from Galois cohomology, **if** one can produce an appropriate collection of cohomology classes in $H^1(Q, T^*/p^nT^*)$ for sufficiently large n. Kolyvagin showed how to use an Euler system to obtain such cohomology classes; we will explain his construction in a special case in § 5. However, there are only a very small number of examples in which one knows how to produce an Euler system.

Example 1. Suppose p is odd, $q \equiv 1 \pmod 4$, and $F=\mathbf{Q}(\sqrt{q})$. Then

- $L(s, T(\chi_q))=L(s, \chi_q)$,
- $\text{Ш}(T(\chi_q))$ is the p-Sylow subgroup of $\mathscr{C}_F$,
- the Bloch-Kato conjecture for $T(\chi_q)$ is the p-part of the class number formula

$$\#(\mathscr{C}_F) = [\mathcal{O}_F^\times : \mathscr{V}_F],$$

- $H^1(\mathbf{Q}, T(\chi_q)^*/p^n T(\chi_q)^*) \subset F^\times/(F^\times)^{p^n}$.

Example 2. Suppose E is an elliptic curve. Then

- $L(s, T(E)) = L(s+1, E)$,
- $\text{Ш}(T(E))$ is the p-part of $\text{Ш}(E)$,
- the Bloch-Kato conjecture for $T(E)$ is the "p-part" of the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for E,
- $H^1(\mathbf{Q}, T(E)^*/p^n T(E)^*) = H^1(\mathbf{Q}, E[p^n])$.

Example 3. Suppose that T is a 2-dimensional $\mathbf{Z}_p$-representation of $G_\mathbf{Q}$ coming from a modular form of weight 2. (For example, if we take T to be $T(E)$ where E is one of the elliptic curves we considered in § 2, then T is of this type.) Define the adjoint of T

$$\mathrm{Adj}(T) = \mathrm{Hom}(T, T).$$

Wiles [7] (together with Taylor [6]) proved that at least in many cases, $\#(\text{Ш}(\mathrm{Adj}(T)))$ is equal to the value conjectured by Bloch and Kato. This was a crucial step in Wiles' proof of Fermat's Last Theorem. However, in the end the proof does not use an Euler system, but a different, related argument.

5 Sketch of an Euler System Argument

Return to the situation of § 1: $F=\mathbf{Q}(\sqrt{q})$, $q \equiv 1 \pmod 4$. We will sketch Kolyvagin's proof of Theorem 1.6,

$$\#(\mathscr{C}_F) \textit{ divides } [\mathcal{O}_F^\times : \mathscr{V}_F].$$

For the details of the argument see § 3 of [4].

Idea. *Get an upper bound on the size of the ideal class group by explicitly constructing many principal ideals.*

One constructs these principal ideals from the Euler system of cyclotomic units. Recall that for every m, ζ_m is a primitive m-th root of unity.

Fix an integer M. We will bound $\#(\mathscr{C}_F/M\mathscr{C}_F)$, with a bound independent of M. For simplicity assume $M=p^n$ is a prime power. Recall that ε_F is a generator of $\mathcal{O}_F^\times/\pm 1$.

Step I (Thaine). $1-\zeta_{ql_1} \rightsquigarrow \varkappa_{l_1} \in F^\times$

Suppose

- l_1 is a square modulo q,
- $l_1 \equiv 1 \pmod M$,
- ε_F is not a p-th power in $(\mathbf{Z}/l_1\mathbf{Z})^\times$.

Then $\quad \mathbf{N}_{\mathbf{Q}(\zeta_{ql_1})/F}(1-\zeta_{ql_1}) = 1$

so by Hilbert's Theorem 90 we can choose an $\alpha \in F(\zeta_{l_1})^\times$ such that

$$\sigma(\alpha)/\alpha = \mathbf{N}_{\mathbf{Q}(\zeta_{ql_1})/F(\zeta_{l_1})}(1-\zeta_{ql_1})$$

where σ generates $\operatorname{Gal}(F(\zeta_{l_1})/F)$.

Let m_1 be the largest divisor of M such that $\mathbf{N}_{F(\zeta_{l_1})/F}(\alpha) \in (F^\times)^{m_1}$ and define

$$\varkappa_{l_1} = (\mathbf{N}_{F(\zeta_{l_1})/F}(\alpha))^{1/m_1} \in F^\times.$$

Let λ_1 denote the class in $\mathscr{C}_F/M\mathscr{C}_F$ of one of the primes of F above l_1. One can show that

- m_1 divides $[\mathcal{O}_F^\times : \mathscr{V}_F]$ and the class of $\varkappa_{l_1}\mathcal{O}_F$ in $\mathscr{C}_F/M\mathscr{C}_F$ is

$$(u_1[\mathcal{O}_F^\times : \mathscr{V}_F]/m_1)\lambda_1$$

for some $u_1 \in (\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times$,

- every class in $\mathscr{C}_F/M\mathscr{C}_F$ contains λ_1 for some l_1 with the above properties.

Since $\varkappa_{l_1}\mathcal{O}_F$ is principal its class is zero. Thus we conclude from Step I and the computation above the following theorem.

Theorem. $[\mathcal{O}_F^\times : \mathscr{V}_F]\mathscr{C}_F = 0$.

Step II (Kolyvagin). $1-\zeta_{ql_1l_2} \rightsquigarrow \varkappa_{l_1l_2} \in F^\times$.

Suppose

- l_2 is a square modulo q,
- $l_2 \equiv 1 \pmod M$,
- $\varkappa_{l_1}$ is not a p-th power in $(\mathbf{Z}/l_2\mathbf{Z})^\times$.

Kolyvagin found a (cohomological) way to extend Thaine's construction, to produce $\varkappa_{l_1l_2} \in F^\times$.

Write $\lambda_2 \in \mathscr{C}_F/M\mathscr{C}_F$ for the class of one of the ideals of F above l_2. Using Kolyvagin's construction one can show

- the class of $\varkappa_{l_1l_2}\mathcal{O}_F$ in $\mathscr{C}_F/(\mathbf{Z}\lambda_1 + M\mathscr{C}_F)$ is

$$(u_2 m_1/m_2)\lambda_2$$

for some $u_2 \in (\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times$ and m_2 dividing m_1,

– every class in $\mathscr{C}_F/(\mathbf{Z}\lambda_1 + M\mathscr{C}_F)$ contains λ_2 for some l_2 with the above properties.

Thus we have a filtration inside $\mathscr{C}_F/M\mathscr{C}_F$

$$0 \subset \mathbf{Z}\lambda_1 \subset \mathbf{Z}\lambda_1 + \mathbf{Z}\lambda_2$$

with bounds

$$\#(\mathbf{Z}\lambda_1) \mid ([\mathscr{O}_F^\times : \mathscr{V}_F]/m_1) \quad \text{and} \quad [\mathbf{Z}\lambda_1 + \mathbf{Z}\lambda_2 : \mathbf{Z}\lambda_1]| \ (m_1/m_2)$$

and so we conclude from Step II:

Theorem. *If* $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}' \in \mathscr{C}_F$ *then*

$\#(\mathbf{Z}\mathfrak{c} + \mathbf{Z}\mathfrak{c}')$ *divides* $[\mathscr{O}_F^\times : \mathscr{V}_F]$.

Steps III, IV, ... $1 - \zeta_{ql_1l_2\dots l_i} \rightsquigarrow \varkappa_{l_1l_2\dots l_i} \in F^\times$

Kolyvagin's construction works for any number of primes, to produce $\varkappa_{l_1l_2\dots l_i} \in F^\times$. We choose $l_1, l_2, \dots, l_i$ inductively so that at each step there is a filtration

$$0 \subset \mathbf{Z}\lambda_1 \subset \mathbf{Z}\lambda_1 + \mathbf{Z}\lambda_2 \subset \dots \subset \mathbf{Z}\lambda_1 + \dots + \mathbf{Z}\lambda_i$$

in $\mathscr{C}_F/M\mathscr{C}_F$ with successive indices dividing

$$[\mathscr{O}_F^\times : \mathscr{V}_F]/m_1,\ m_1/m_2,\ \dots,\ m_{i-1}/m_i.$$

The classes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ can be chosen to generate $\mathscr{C}_F$, so this proves

Theorem. $\#(\mathscr{C}_F)$ *divides* $[\mathscr{O}_F^\times : \mathscr{V}_F]$.

References

[1] Bloch, S.; Kato, K.: L-functions and Tamagawa numbers of motives. In: The Grothendieck Festschrift (Vol. I), P. Cartier, et al., eds., Prog. in Math **86,** Boston: Birkhäuser (1990) 333–400

[2] Fontaine, J-M.; Perrin-Riou, B.: Autour des conjectures de Bloch et Kato: cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L. In: Motives (Part I), U. Jannsen et al., eds., Prod. Symp. Pure Math. **55,** Providence: Amer. Math. Soc. (1994) 599–706

[3] Kolyvagin, V. A.: Euler systems. In: The Grothendieck Festschrift (Vol. II), P. Cartier, et al. eds., Prog. in Math. **87,** Boston: Birkhäuser (1990) 435–483

[4] Rubin, K.: The main conjecture. Appendix to: Cyclotomic fields I and II, S. Lang, Graduate Texts in Math. **121,** New York: Springer-Verlag (1990) 397–419

[5] Silverman, J.: The arithmetic of elliptic curves, Graduate Texts in Math. **106,** New York: Springer-Verlag (1986)

[6] Taylor, R.; Wiles, A.: Ring theoretic properties of certain Hecke algebras. Annals of Math. **141** (1995) 553–572

[7] Wiles, A.: Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. Annals of Math. **141** (1995) 443–551

Karl Rubin
Department of Mathematics
Ohio State University
Columbus, Ohio 43210, USA
E-mail address: rubin@math.ohio-state.edu

(*Eingegangen 26. 4. 1995*)

Buchbesprechungen

Lüneburg, H., Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers (2., überarbeitete und erweiterte Auflage), Mannheim: B. I. 1993, 352 S., DM 68,–

Fibonacci (= Leonardo von Pisa, 1170/80 – nach 1240) ist als Verfasser des Liber Abaci (1202, 1228) in die Geschichte eingegangen. Dies Werk, in dem erstmals im Abendland systematisch die indisch-arabische Zahlenschreibweise angewendet wurde, beruhte auf Studien, die Fibonacci in seiner Jugend als Sohn eines in Bougie im heutigen Algerien in einer dortigen Handelsniederlassung als „publicus scriba" angestellten Pisaners, sowie auf Handelsreisen im islamischen Kulturbereich hatte machen können, sowie auf selbständigem Weiterdenken, und weist, zusammen mit einigen kleineren Werken, Fibonacci als den einzigen wirklich bedeutenden abendländischen Mathematiker vor Regiomontanus (= Johannes Müller aus Königsberg/Ofr., 1436–1476) aus. Durch sein berühmtes Kaninchenbeispiel hat er der heutigen Populationsdynamik ihre Gründungsurkunde geschrieben und der Zahlentheorie eine rekursiv (durch $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $F_0=F_1=1$) definierte Folge natürlicher Zahlen $F_0, F_1, \ldots$ von schier unerschöpflichem Zauber geschenkt – eine ganze Zeitschrift (Fibonacci Quarterly) kann auch heute noch davon leben. Jeder Mathematiker hat somit Anlaß, sich mit Person und Werk des schon zu seiner Zeit berühmten und mit dem „intellektuellen Staufer" Friedrich II. (1194–1250) in Verbindung stehenden Kollegen zu befassen.

Das kann man nun anhand der Standard-Sekundärliteratur auf die für Laien übliche unkritische, aber in ihrem Rahmen durchaus gediegene Weise tun. Daß es aber auch noch ganz anders geht, und daß sich dabei, gerade auch für den (zunächst) Nicht-Historiker überraschende Horizonte öffnen können, demonstriert der bekannte Autor des vorliegenden Buchs, seines Zeichens vor allem Kombinatoriker, Geometer, Algebraiker und Zahlentheoretiker, auf amüsante und nach kurzer Lektüre bereits unrettbar fesselnde Weise.

Er nimmt den Leser schlicht und einfach auf seine eigene Entdeckungsreise mit, die im Laufe vieler Jahre allen möglichen Fragen nachging, die jemand, der zunächst einmal die von Boncompagni 1857 vorgelegte Textausgabe des Liber Abaci – man erfährt hierbei sogleich, daß es bei Fibonacci „Abbaci" hieß, doch werde ich hier bei „Abaci" bleiben – zur Hand nimmt, wie von selbst stellen, voll des – im Endeffekt denn auch niemals enttäuschten – Vertrauens, daß jede Antwort, die dabei herauskommt, schon in irgendeiner Weise interessant sein werde. So erfährt der Leser zunächst einmal eine Menge über die Familie des Herausgebers Boncompagni, die in Gregor XIII (1502–15–75) einen der bedeutendsten Päpste (1572–1585) gestellt hat: den, nach dem der „Gregorianische Kalender" (Dekret von 1582) und die päpstliche Universität Gregoriana benannt ist. Das Leben des Herausgebers Baldassare Boncompagni (1821–1894) ist aufs engste mit der „Accademia dei Lincei" (gegr. 1603) verbunden. Mit Vergnügen liest man den Exkurs über die wechselhafte Geschichte dieser berühmten Institution, in deren „Atti" ja manche bedeutende mathematische Abhandlung erschienen ist.

Abschweifungen? Längst hat der Leser vergessen, solche Fragen zu stellen, er fühlt sich dabei, wenn der Autor Sekundärliteratur durchstöbert, in Archive steigt und schließlich den langgesuchten Codex auf dem Pult liegen hat – einer der 13, auf die man sich heute stützen kann. Man erfährt, daß A. Allard eine neue kritische Textausgabe vorbereitet, daß im Zusammenhang mit der ca. 1228 redigierten uns heute vorliegenden Fassung immer wieder eine auf 1202 datierte Erstfassung erwähnt wird, von der aber kein Exemplar mehr vorliegt, so daß man Angaben wie „Fibonacci 1202" mit Vorsicht begegnen solle...

Die hiermit angedeutete tour d'horizon führt den Leser in lockerer Form durch die Geschichte antiker und mittelalterlicher Bildungsinstitutionen und gipfelt in einer knappen

Darstellung des Kaisers Friedrich II. Obwohl der Verfasser immer wieder zu den Quellen vorstößt, bleibt doch vieles skizzenhaft. So habe ich keine nähere Erörterung von Fibonaccis Lebensdaten gefunden, und auch die von ihm selbst erwähnte Begegnung mit dem Kaiser – vielleicht 1225 – kommt nicht vor. Solche zum Nachfragen und Weiterforschen anregenden Lücken gehören mit zu dem Reiz, den die Lektüre bietet: man steht eben nicht vor einem monumentalen Historiker, den man nichts mehr zu fragen wagt, sondern begleitet einen klugen, wachen Kollegen, mit der Vorstellung, „das könnte ich doch auch mal probieren".

Ist man so auf den ersten 40 Seiten – also in Kap. I: Angeregt durch Titelblatt und Incipit – einigermaßen vielseitig ins Bild über das Umfeld des Liber Abaci gesetzt worden, so beginnt nun, mit Kap. II: Das Rechnen mit natürlichen Zahlen und Brüchen, die kommentierte Textlektüre. Man erfährt nicht nur alles Erdenkliche über Fibonaccis eigentliche Rechentechnik, sondern gewinnt Ausblicke auf die gesamte Geschichte dieser Fertigkeiten, bis hin zu eigenen Schulerfahrungen des Verfassers. – In Kap. III: (Aufgaben des Kaufmanns) lernt man Fibonacci als Vorfahren des uns geläufigeren Rechenmeisters Adam Ries (1492–1559) kennen. Es sieht nicht so aus, als habe sich die Kaufmannswelt in den dazwischenliegenden drei Jahrhunderten grundlegend gewandelt. Beide Meister behandeln Währungs-, Mischungs-, Zinsprobleme, Fragen der Gewinnteilung etc.. In den darauffolgenden Kapiteln IV (Börsenfunde und Pferdekauf), V. (Zinsrechnung), VI (Elchataieyem = „zweifacher falscher Ansatz" auf arabisch) weit in die Details verfolgt. Kap. VII. (Irrationalitäten) und VIII (Quadratische Gleichungen) führen dann in den eigentlichen algebraisch-zahlentheoretischen Gehalt des Liber Abaci hinein.

Hier nun in die Details zu gehen, hieße den Leser mit einem schnellen Ersatz für das ihm zustehende Lesevergnügen („nur das Gründliche ist unterhaltend" (Th. Mann)) abzuspeisen. Ich möchte stattdessen den Leser lieber noch kurz auf einen Aspekt hinweisen, den das vorliegende Buch in einem allgemeineren Zusammenhange hat:
Unsere allgemeinbildenden Schulen ersticken in sich auftürmenden Stoffmassen. Zwar wissen die Zuständigen durchaus, daß Bildung nicht Stoff, sondern Kraft ist, erliegen aber der Mechanik des Kampfes der Fächer um Anteile an Wochenstunden. Auf einen kulturpolitischen Rundumschlag, der dem Mut zur Lücke im Fächerspektrum freie Bahn schaffte, kann man einstweilen noch nicht hoffen, aber man kann ihn vorbereiten, indem man Gegenargumente aushebelt. Hier kann das vorliegende Buch ein Exempel liefern: es zeigt, wie ein mutig weggelassenes Fach (hier: Geschichte) durch ein anderes mit gehörigem Stundengewicht ausgestattetes (hier: Mathematik) bei der Erfüllung des Allgemeinbildungsauftrags mitvertreten werden kann. Noch ein bißchen mehr historisches Gerüst, und das vorliegende Buch kann allgemeinbildenden Geschichtunterricht vollgewichtig mitliefern.

Auch wenn davon zunächst vor allem Mathematiker profitieren, wer unter uns Kollegen wollte sich diese Chance entgehen lassen?

Erlangen K. Jacobs

Adam Ries, Coß. (Teubner Archiv zur Mathematik, Suppl. 3) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1992. Herausgegeben von W. Kaunzner und H. Wußing. Faksimile mit 534 Seiten sowie ein Kommentarband mit 138 Seiten und 78 Bildern. 22,8 × 33,0 cm. Gebunden im Schuber DM 480,–.

Neben seinen drei Rechenbüchern, von denen das zweite über hundert Auflagen erlebte und ihn zum sprichwörtlichen Rechenmeister machte, hat Adam Ries auch Schriften zur Algebra, die damals noch Coß hieß, verfaßt, die jedoch bislang nicht gedruckt wurden. Drei dieser Schriften, eine Einleitung in die Rechenkunst und Coß, die 1524 beendet wurde, eine Überarbeitung der ersten Schrift, die ein Vermächtnis an seine Söhne enthält und nach 1544 verfaßt wurde, und eine deutsche Bearbeitung von Buch I und drei Beispielen aus Buch II von *De numeris datis* von Jordanus Nemorarius, sind über Riesens Sohn Abraham schließlich in die Hände des Dresdner Rechenmeisters Martin Kupffer gelangt, der sie im Jahre 1664 binden ließ. Diese Handschrift war lange verschollen. Sie wurde erst 1855 in der Marienberger Kirchen- und Schulbibliothek wieder aufgefunden und wird nun im Erzgebirgsmuseum in Annaberg-Buchholz aufbewahrt. Sie ist also an den Ort ihrer Entstehung zurückgekehrt. Diese Schrift nun, von Kupffer mit dem Titel „Coß“ versehen, wurde von Wolfgang Kaunzner und Hans Wußing als Faksimile herausgegeben und hervorragend kommentiert.

Im Kommentar wird zunächst Leben und Wirken Adam Riesens beschrieben, seine Tätigkeit als Rezeß- und Gegenschreiber sowie als Zehntner im Dienste von Kursachsen und seine Tätigkeit als Rechenlehrer, wobei jene naturgemäß besser dokumentiert ist, beruhte Kursachsens Macht, Einfluß und wirtschaftliche Stärke doch auf dem erzgebirgischen Bergbau.

Dann wird von der Traditionspflege berichtet. Das historische Interesse an Adam Ries beginnt im 19. Jahrhundert und nahm im 20. Jahrhundert kräftig zu. Staffelstein, Riesens Geburtsort, sowie Erfurt, wo er eine Weile lebte und Zugang zur wissenschaftlichen Welt fand, und insbesondere der Ort, mit dem er am längsten verbunden war, Annaberg, wo es in dem Haus, in dem Ries wohnte und lehrte, ein sehr intimes Museum gibt, kümmern sich um das Andenken an diesen hervorragenden Mann.

Die Lage der Mathematik zu Adam Riesens Zeit wird in großen Zügen geschildert, ein Genuß zu lesen. Es werden die Männer erwähnt, die im deutschsprachigen Raum die Coß mitgestalteten: Johannes Regiomontanus, Fridericus Gerhart, Johannes Böschenstein, Johannes Huswirth, Christoff Rudolff, Johannes Widmann, der die älteste, bislang nachgewiesene Algebravorlesung gehalten hat und zwar im SS 1486 in Leipzig, und natürlich Adam Ries.

Die Unterschiede in den Darstellungen der Rechenbücher Adam Riesens, die für den gemeinen Mann geschrieben sind, und der Coß werden herausgearbeitet. Der Inhalt der Coß wird erläutert und auf Quellen und Paralleltexte verwiesen. Auf offene Fragen wird eingegangen und Hinweise gegeben, wie man möglicherweise an die Antworten kommen könne.

Hat man dies alles gelesen, bleibt nur noch eins, sich an dem eigentlichen Text zu versuchen. Es ist eine schöne Handschrift, die recht gut zu lesen ist. Ein bißchen bedarf es natürlich der Gewöhnung. Wer Freude an jugendlicher Mathematik hat, sollte sich dieses Werk zum nächsten Fest schenken lassen oder sich selbst schenken. Er wird nicht entäuscht werden.

Die letzten Sätze klingen so, als sei diese Edition nur für den Liebhaber der Geschichte der Mathematik gemacht. Nein, ganz im Gegenteil, sie ist ein wichtiger Beitrag der Forschung, indem eine bislang schwer zugängliche Quelle einem großen Publikum erreichbar gemacht wird. Aber die Experten wissen natürlich von dieser Edition, so daß meine Rezension sich nicht so sehr an sie zu wenden braucht.

Herzlichen Dank den beiden Herausgebern für ihre mühevolle Arbeit.

Kaiserslautern H. Lüneburg

Malle, G., Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Wiesbaden: Vieweg 1993, 312 S., brosch., DM 59,50

Dieses vorzügliche Buch entstand nach langjähriger Forschung. Den ursprünglichen Antrieb zu der Arbeit gab der Wunsch, ein Gleichgewicht gegen die an Logik und Mengenlehre orientierte Gleichungslehre der „Neuen Mathematik“ darzubieten. Das Buch umfaßt ein breites Spektrum von Problemen aus der Didaktik der elementaren Algebra: Die erste Hälfte beschäftigt sich vorwiegend mit semantischen Aspekten der elementaren Algebra, insbesondere mit Aspekten des Variablenbegriffs und Fragen zum Aufstellen und Interpretieren von Termen bzw. Formeln. Die zweite Hälfte des Buches behandelt vorwiegend syntaktische Aspekte der elementaren Algebra, vor allem regelhaftes Umformen algebraischer Ausdrücke. Das Ziel des Verfassers ist, Zugänge zu algebraischen Begriffen und Behandlungsmethoden einzelner Themen im Schulunterricht kritisch zu analysieren und Unterrichtsvorschläge zu übermitteln. Die Ansichten des Verfassers sind jeweils mit empirischen Beobachtungen (Fallstudien, Schülerinterviews) bekräftigt.

Das Buch enthält wichtige Hinweise auf mögliche Gefahren im Schulunterricht. Vor allem wird dargelegt, daß im Unterricht oft eine verhängnisvolle Spaltung zwischen Form und Inhalt entsteht: Der Kalkül wird in vielen Fällen als „Kunst für sich", ohne Bezug auf jeglichen Inhalt behandelt; sachliche Interpretationen von Termen, Gleichungen und Ungleichungen werden vernachläßigt. Es wird wenig getan, um das Buchstabenrechnen mit dem Zahlenrechnen in Verbindung zu bringen. – Eine zusätzliche Schwierigkeit in der Klassenarbeit entsteht durch häufig übermäßige Anwendung grundlagenorientierter Ideen, die in den sechziger Jahren mit der Reform der „Neuen Mathematik" in den Lehrplan eingedrungen sind. Danach werden Variable als „Platzhalter" oder „Leerstellen" aufgefaßt und Gleichungen als „Aussageformen", aus denen durch Ersetzen von Buchstaben mit Zahlen „wahre" oder „falsche" Aussagen entstehen. Beim Lösen der Gleichungen wird man mit den Begriffen „Grundmenge", „Definitonsmenge" und „Lösungsmenge" konfrontiert. Diese Erscheinungen führten zu der Entwicklung einer Metasprache in der Didaktik der elementaren Algebra, die für die meisten Schüler schwierig und auch wenig nützlich ist. Der Verfasser plädiert für „eine möglichst sparsame Verwendung metasprachlicher Begriffe". – In dem Buch werden auch Tendenzen aus der Zeit vor der Reform kritisch unter die Lupe genommen: insbesondere werden Argumente gegen stures, stereotypes Üben angeführt. – Ein spezielles Kapitel ist dem heiklen Thema des Übergangs von der Arithmetik zur Algebra gewidmet: Die elementare Algebra sollte man nicht als eine unmittelbare Verallgemeinerung der Arithmetik betrachten, wo nur Buchstaben an die Stelle konkreter Zahlen gesetzt werden. In diesem Zusammenhang diskutiert der Verfasser die Frage, ob die Reihenfolge „zuerst Arithmetik und erst danach Algebra" im Unterricht stets eingehalten werden sollte. – Ein kurzer Abschnitt im Buch animiert zum Nachdenken über die möglichen Einflüsse des Computers im Algebraunterricht. Der Umgang mit Computern darf das Erlernen elementaralgebraischer Tätigkeiten nicht ersetzen, andererseits kann er bei der Bewältigung mancher langwieriger Verfahren von großem Nutzen sein. Es ist zu hoffen, daß durch eine vernünftige Anwendung des Computers mehr Zeit im Unterricht verbleibt, um weitere Lernziele zu verfolgen. – Das Buch enthält ein beachtenswertes Literaturverzeichnis.

Zusammenfassend: Malles Buch liefert einen besonders wertvollen, aktuellen Beitrag zur Didaktik des Mathematikunterrichts. Das Anliegen des Autors ist sorgfältig dokumentiert und fesselnd dargestellt. Didaktiker, Lehramtskandidaten und vor allem Mathematiklehrer in der Praxis werden bei der Lektüre eine Fülle von kostbaren Anregungen finden. Das Buch sollte in jeder Fachbibliothek vorhanden sein.

Erlangen J. Cofman

Hilbert, D., Theory of Algebraic Invariants, Cambridge: Cambridge University Press 1993, xiv + 191 S., hard £ 25, paper £ 12.95

Hilbert, der 1885 in Königsberg bei Lindemann mit einer invariantentheoretischen Arbeit promovierte, hat in zwei großen, 1890 und 1893 erschienenen, revolutionären Arbeiten die zentralen Probleme der damaligen Invariantentheorie so umfassend bearbeitet, daß bis zu Hermann Weyls 1939 erschienenem Buch über die klassischen Gruppen kein wesentlicher Fortschritt der Invariantentheorie zu verzeichnen ist. Im Sommersemester 1897 gab Hilbert in Göttingen einen einführenden Kurs in die Invariantentheorie. Hilbert's Schüler Sophus Marxsen arbeitete die 51 Vorlesungen zu einem handschriftlichen Manuskript von 527 Seiten aus, das jetzt in der Cornell University Mathematics Library liegt. Keith Dennis regte Reinhard Laubenbacher zu einer englichen Übersetzung an. Bernd Sturmfels hat eine substantielle Einleitung hinzugefügt, die den Leser sachkundig vom heutigen Standpunkt durch die Vorlesung führt und zugleich die Entwicklung der letzten 100 Jahre reflektiert. Überdies hat Sturmfels in einigen hilfreichen Fußnoten zu Hilberts Vorlesung auf modernere Darstellungen und Ergänzungen hingewiesen. Die gute Aufbereitung für den heutigen Leser können sich manche „reprints“ alter Werke zum Vorbild nehmen.

Daß Hilberts Vorlesung auch heute noch mit Genuß zu lesen ist, liegt natürlich weniger an der Aufbereitung als am Meister selbst. Von Voraussetzungen ausgehend, die jeder heutige Student mit dem Vordiplom erworben haben sollte, gelingt es Hilbert, mit einem Minimum an begrifflichem Überbau die wesentlichen Probleme, die richtigen Begriffsbildungen und die adäquaten Lösungen vor dem Neuling ausführlich und glasklar auszubreiten, stets mit einschlägigen konkreten Beispielen garniert. Wiederholungen ähnlicher Beweise und Konstruktionen werden durch kurze Bemerkungen ersetzt, bei technisch sehr schwierigen Beweisen verweist er auf seine Originalarbeiten und zieht es vor, den Wert der Resultate durch Anwendungen zu illustrieren. Wertvoll sind auch die gegen Ende zunehmenden Hinweise auf offene (heute oft, aber nicht immer gelöste) Probleme, Vermutungen u. ä. Auf diese Art entsteht vor dem Zuhörer/Leser ein ziemlich vollständiges, lebendiges Bild der klassischen Invariantentheorie Hilbertscher Prägung, viel weiter gehend und damit auch moderner als die von H. Grunsky 1968 bei Springer herausgegebenen Vorlesungen von I. Schur über denselben Gegenstand.

Für den genauen Inhalt sei auf die genannte Einleitung verwiesen. Der heutige Leser erhält bei der Lektüre nicht nur eine anregende und konkrete Einführung in die klassische Invariantentheorie, sondern zugleich eine Darstellung von Hilberts Grundlegung der Kommutativen Algebra. Alle mit dem Namen „Hilbert“ verknüpften Begriffsbildungen wie Hilberts Basissatz, Hilberts Nullstellensatz, Hilberts Syzygiensatz, Hilbert-Polynom tauchen in den Vorlesungen auf, auch der Noethersche Normalisierungssatz (der damit seine Fehlbezeichnung dokumentiert – dafür bezeichnet man mit „Hilbert Satz 90“ ein Resultat von E. Noether, das nur im Spezialfall von Hilbert stammt). Zusammenfassend ist die Herausgabe dieser Vorlesungen sehr zu begrüßen als ein hervorragendes Kontrastprogramm zu den in der Ausgabe zitierten modernen Werken, die man nicht missen kann, auf die aber diese Vorlesungen neue Lichter aus der Entstehungszeit der Begriffe werfen.

Erlangen W.-D. Geyer

Artin, M., Algebra, Basel: Birkhäuser 1993, 705 S., sfr 78.00

Dies Buch zur Algebra ist aus den Vorlesungen des Autors über das Gebiet entstanden. Es enthält den Standardstoff der Anfängervorlesung „Lineare Algebra“ und der Vorlesung „Algebra“ bis zur Galoistheorie. Die Kombination dieser Themen, die in der Bundesrepublik wohl traditionell auf zwei Vorlesungszyklen verteilt werden, in einem Band gibt dem Buch seine Einzigartigkeit. Dabei kommt keines von beiden Themen zu kurz: Die Kapitel 1–4 und 7 reichen einem Studenten zur Vorbereitung auf die Vordiplomprüfung in Linearer Algebra, während die Kapitel 6 und 10–14 in etwa den Algebra-Stoff für das bayerische Staatsexamen enthalten.

Der zweite typische Aspekt, in dem sich dieses Buch von unsren Standard-Texten zur (Linearen) Algebra unterscheidet, ist die Aufmerksamkeit, die der Autor, gestützt auf langjährige Lehrerfahrung, didaktischen Fragen widmet. Es geht ihm nicht darum, Bourbaki-haft ein Gedankengebäude möglichst unangreifbar aufzutürmen, sondern darum, seinen Studenten möglichst viel Mathematik beizubringen. Deshalb legt er das Hauptgewicht auf einen (für Studenten) natürlichen Aufbau. Beispielsweise behandelt er im ersten Kapitel Matrizen und lineare Gleichungssysteme. Vektorräume kommen erst im Kapitel 3. Er versucht, sich an folgende Grundsätze zu halten (Zitat aus dem Vorwort):

„1. Hauptbeispiele sollen vor den abstrakten Definitionen stehen.
2. Das Buch ist nicht als „Dienstleistung“ gedacht, technische Punkte sollen also nur behandelt werden, wenn sie in diesem Buch auch gebraucht werden.
3. Alle behandelten Themen sollen für jeden Mathematiker von Bedeutung sein.

Diese Grundsätze wirken vielleicht wie ein Gelöbnis, aber ich fand es sehr nützlich, sie artikuliert zu haben und daran zu denken, daß das Prinzip, so „vorgehen, sie man es gelernt hat“, nicht dazugehört“.

Der Autor selbst nennt als wesentlichste Besonderheit des Buches die starke Betonung spezieller Themen. Damit meint er zum Beispiel das Kapitel 5, Symmetrie, wo er in die Gruppentheorie einführt, die Paragraphen 8 und 9 des Kapitels 6, „Mehr über Gruppen“, wo er Erzeugende und Relationen bis zm Todd-Coxeter-Algorithmus behandelt, Kapitel 8 „Lineare Gruppen“ und 9 „Darstellungen von Gruppen“. Er orientiert sich an seiner Erfahrung, daß Studenten mehr konkrete Mathematik und weniger abstrakte Begriffe bevorzugen. Hierzu noch ein Zitat aus den einleitenden Hinweisen: „Viele unserer Studenten sind mit den Begriffen aus der Topologie nicht vertraut, ..., diese Begriffe müssen also veranschaulicht werden.“ Veranschaulicht müssen die Begriffe werden, nicht definiert!

Das Buch ist sehr liebevoll ausgestattet, mit nicht zu vielen, aber perfekten Zeichnungen, mit Zitaten, die zum Nachdenken anregen. In allen Formulierungen spürt man die Erfahrung des Autors aus seiner langjährigen Lehrtätigkeit. Der Band widerlegt auf glückliche Weise das Vorurteil, daß hervorragende mathematische Forscher zu sehr in ihrem Elfenbeinturm verharren, um der Lehre (vor allem für Studenten der Anfangssemester) die gebührende Aufmerksamkeit zu widmen. Im Gegenteil: Die Auseinandersetzung mit schwierigen Problemen eigener mathematischer Forschungen sensibilisiert für die Schwierigkeiten der Studenten. In diesem Fall hat sie zu einem Text geführt, der Studenten ausgewogen in den Stoff einführt und Dozenten Maßstäbe für ihre Vorlesungen vorgibt.

Erlangen W. Barth

The Selected Works of J. Frank Adams, Bd. I und II, herausgegeben von J. P. May and C. B. Thomas, Cambridge University Press 1992, 536 und 539 S., £ 40.00

Adams zählte zu den bedeutensten Topologen seiner Zeit. Bekannt wurde er durch die Lösung einiger berühmter Probleme. Die dafür von ihm entwickelten Methoden gehören noch immer zum Standardhandwerkszeug eines algebraischen Topologen. Seine wichtigsten Arbeiten (fünfzig der vierundachtzig Publikationen) sind in den vorliegenden zwei Bänden untergebracht. Die Artikel sind nach Sachgebieten geordnet und innerhalb dieser chronologisch aufgeführt.

Der erste Band enthält die Arbeiten über die Cobarkonstruktion, die Adams-Spektralsequenz, höhere Cohomologieoperationen, das Hopfinvarianten 1-Problem, Vektorfelder auf Sphären, Anwendungen der K-Theorie und verallgemeinerte Homologie- und Cohomologietheorien. Im zweiten Band sind die Arbeiten über charakteristische Klassen, Berechnungen in der K-Theorie, Moduln über der Steenrod-Algebra und ihre Ext-Gruppen, endliche H-Räume und kompakte Lie-Gruppen und Abbildungen zwischen klassifizierenden Räumen zusammengefaßt.

Beiden Bänden ist dasselbe Vorwort und die Biographie Adams' vorangestellt.

Zum Inhalt: Unter der Überschrift „The cobar construction, the Adams spectral sequence, higher order-cohomology operations, the Hopf invariant one problem" findet man die Arbeiten über das Adams-Hilton-Modell $A(K)$ für die Kettenalgebra des Schleifenraumes ΩK eines CW-Komplexes K mit trivialen 1-Skelett und die größere, aber dafür funktorielle Cobarkonstruktion. Da es klein genug ist, wird das Adams-Hilton-Modell noch heute zu Berechnungen herangezogen. Auch die Cobarkonstruktion ist in der homotopischen Algebra nach wie vor aktuell. Sie war Ausgangspunkt der Konstruktion von Eilenberg und Moore der nach ihnen benannten Spektralsequenz.

In den beiden anderen Arbeiten im ersten Themenkreis „The structure and applications of the Steenrod algebra" und „On the non-existence of elements of Hopf invariant one" ging es Adams um die Lösung des berühmten Hopfinvariantenproblems. In der ersten Arbeit entwickelt er dafür die Adams-Spektral-Sequenz, inzwischen ein fundamentales Werkzeug für die Untersuchung von Homotopiegruppen, und gelangt mit ihrer Hilfe zu einer Teillösung. Für die nötige Information über den E_2-Term analysiert er die Steenrod-Algebra und ihre Unteralgebren. In der zweiten Arbeit löst Adams das Problem vollständig. Die Nichtexistenz einer Abbildung

$$S^{2n-1} \to S^n$$

mit Hopfinvariante 1 ist äquivalent zu folgender Aussage: Ist $K = S^m \cup e^{n+m}$, so ist

$$Sq^n = 0 : H^m(K; \mathbb{Z}/2) \to H^{n+m}(K; \mathbb{Z}/2).$$

Adams zeigt nun, daß Sq^{2k} für $k > 3$ eine Zerlegung in Homologieoperationen erster und zweiter Ordnung besitzt, aus der er auf das Verschwinden dieser Abbildung schließen kann.

Der zweite Themenbereich ist „Applications of K-theory" überschrieben und beginnt mit einem Übersichtsvertrag über das Vektorfeldproblem auf Sphären und den Gruppen $J(X)$ der faserweisen Homotopieäquivalenzklassen von Vektorbündeln über X. Es schließt sich die berühmte Lösung des Vektorfeldproblems an: Ist $\varrho(n)$ die Radon-Hurwitz-Zahl von n, d.h. $\varrho(n) = 2^c + 8d$, falls $n = (2a+1)2^{c+4d}$ mit $0 \leqslant c < 4$, dann gibt es genau $\varrho(n) - 1$ linear unabhängige Vektorfelder auf S^{n-1}. Die Existenz von $\varrho(n) - 1$ solcher Vektorfelder war bereits bekannt. Für den Nachweis der Nichtexistenz von $\varrho(n)$ linear unabhängigen Vektorfeldern ist zu zeigen, daß

$$O(n)/O(n-\varrho(n)) \to O(n)/O(n-1) = S^{n-1}$$

keinen Schnitt besitzt. Dieses Problem kann man homotopietheoretisch umformen in: Es gibt keine Abbildung f, so daß

$$S^n = \mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{R}P^{n+\varrho(n)}/\mathbb{R}P^{n-1} \xrightarrow{f} S^n$$

den Grad 1 hat. Dieser Beweis wird mit Hilfe der gefeierten Adamsoperationen ψ^k in der reellen K-Theorie von $\mathbb{R}P^{n+\varrho(n)}/\mathbb{R}P^{n-1}$ geführt: Es gibt keine Zerspaltung der K-Gruppen, die mit den Operationen verträglich ist.

In einer weiteren Arbeit mit G. Walker löst Adams das entsprechende komplexe Schnittproblem: $U(n)/U(n-k) \to S^{2n-1}$ hat genau dann einen Schnitt, wenn n ein Vielfaches einer explizit angegebenen Zahl M_k ist. Atiyah hatte das Problem auf Aussagen über $\tilde{J}(\mathbb{C}P^{n-1})$ reduziert, das Adams und Walker mit Methoden der bahnbrechenden Arbeiten über $J(X)$ analysieren.

Die Hauptidee bei der Untersuchung von $J(X)$ ist es, zwei berechenbare Gruppen $J''(X)$ und $J'(X)$ mit Epimorphismen $J''(X) \to J(X) \to J'(X)$ zu definieren. Dies geschieht in der Arbeit $J(X)-II$: Für eine Funktion $e: \mathbb{Z}\times KO(X)\to \mathbb{N}$ sei $Y_e \subset \mathrm{KO}(X)$ die Untergruppe, die von den Elementen $k^{e(k,y)}(\psi^k-1)$ erzeugt wird. Dann ist $J''(X)=KO(X)/\bigcap_e Y_e$. Die Gruppe $J'(X)$ wird mit Hilfe kannibalistischer Klassen definiert. In $J(X)-II$ wird gezeigt, daß $J'(X)$ eine untere Schranke im oben angegeben Sinn ist. Weiter wird dort gezeigt, daß $KO(\mathbb{R}P^n)=J(\mathbb{R}P^n)$ und für $n\equiv 1$ oder 2 mod 8 $KO(S^n)=\mathrm{J}(S^n)$. Daß $J''(X)$ eine obere Schranke von $J(X)$ ist, ist Inhalt der berühmten Adams-Vermutung. Diese wird in $J(X)-I$ mit Hilfe einer Grad-k-Verallgemeinerung des Faserhomotopieäquivalenzsatzes von Dold für spezielle Fälle bewiesen. Teil III der Serie enthält den Beweis $J''(X)=J'(X)$ für endliche CW-Komplexe. Teil IV beschäftigt sich mit dem Bild des J-Homomorphismus' und ist weitgehend unabhängig von den übrigen Teilen: Die e-Invariante $e(f)\in Ext(k(Y),k(SX))$ einer Abbildung $f: X\to Y$ für einen halbexakten Homotopiefunktor k wird eingeführt und studiert. Es gibt zahlreiche Anwendungen in der Homotopietheorie. U. a. zeigt Adams, daß Bild J für $n=8k+r, r=0$, 1, 3 ein direkter Summand von π_n^S ist.

Der Beweis der Adams-Vermutung hat zahlreiche Topologen über Jahre beschäftigt. Aus dieser Tätigkeit entstanden völlig neue Methoden in Topologie und Algebra, darunter die Lokalisierungs- und Komplettierungstheorie von Räumen durch Sullivan und die höhere algebraische K-Theorie durch Quillen, Konstruktionen die heute in der Topologie und Algebra nicht wegzudenken sind.

Weiter finden wir unter dem Themenkreis die gemeinsame Arbeit mit Atiyah mit dem eleganten K-theoretischen Beweis des Hopfinvarianten 1-Problems und eine Arbeit über die geometrische Dimension von Bündeln über $\mathbb{R}P^n$.

Band 1 schließt mit den „Lectures on generalized cohomology“ und dem Überblicksartikel „Algebraic topology of the last decade“. Bei den Lectures handelt es sich im wesentlichen um einen Vorläufer der bekannten Pflichtlektüre eines jeden Studenten der Algebraischen Topologie, des in der Chicago University Press erschienenen Buchs „Stable Homotopy and Generalized Homology“, und ist als Kurzinformation und Motivation durchaus empfehlenswert. Der Übersichtsartikel über die Fortschritte in der Algebraischen Topologie in den sechziger Jahren kann auf seinen zwanzig Seiten nicht allen Ansprüchen genügen. Für Leser, deren Hauptinteresse die Entwicklung der Homotopietheorie in dieser Zeit ist, ist aber auch er sehr informativ.

Band 2 ist wesentlich heterogener. Unter dem Thema „Characteristic classes and calculations in K-theory“ werden neun Arbeiten aufgeführt. In den ersten drei beschäftigt sich Adams mit Wu-Klassen von Poincarédualität-Algebren über der Steenrod-Algebra und dem Chern-Charakter. Die anderen Arbeiten, vier davon mit Coautoren, sind Anwendungen der Grundlagen über verallgemeinerte (Co-)Homologietheorien, die zum Teil in den in Band 1 abgedruckten Lectures enthalten sind. U. A. studiert er den Hurewiczhomomorphismus der zusammenhängenden K-Theorie, die Hopfalgebra $K_*(K)$ und Operationen in der K-Theorie. Unter „Modules over the Steenrod-algebra und their Ext groups“ finden wir sieben Arbeiten, darunter vier, die sich mit $Ext_A^{s,t}(M,N)$ beschäftigen, wobei A die Steenrod-Algebra und M, NA-Moduln sind. Hauptinhalte sind Verschwindungs- und Periodizitätsaussagen und der Beweis der Adams'schen Ext-Vermutung, daß

$$Ext_A(\mathbb{Z}/2[x,x^{-1}],\mathbb{Z}/2)\cong Ext_A(\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2).$$

Zwei Arbeiten mit Margolis beschäftigen sich mit Unter-Hopfalgebren B von A, die klassifiziert werden, und B-Moduln. Auch die letzte Arbeit dieses Abschnitts, gemeinsam mit Gunawardena und Miller verfaßt, beschäftigt sich mit Ext-Gruppen, nämlich den Inputs für Carlssons Beweis der Segal-Vermutung.

Adams hat auch Beiträge zu Fragen über endliche H-Räume verfaßt, die mit Arbeiten über Liegruppen das Kapitel „Finite H-spaces and compact Lie groups“ bilden. In „The sphere considered as an H-space mod p“ macht Adams mit einem Verfahren, das wir heute Lokalisierung nennen würden, aus einer $(2n+1)$-dimensionalen Sphäre H-Räume, die kommutativ, aber nicht homotopieassoziativ bzw. kommutativ und homotopieassoziativ, aber nicht A_∞ sind, und liefert damit Beispiele zu einer von James aufgestellten Liste von H-Raum-Typen. In dieser Arbeit wurden zum erstenmal Fragen angesprochen, die zu Stasheffs Theorie der A_n-Strukturen führten, einer Theorie, die in Algebra und Topologie zur Zeit von zentralem Interesse ist. In einer zweiten Arbeit gibt er notwendige Bedingungen an n und q für die Existenz einer H-Raumstruktur auf einem S^q-Bündel über S^n an. Die Beweise beruhen auf einer Analyse von Cohomologieringen. Wegweisend für weitere Entwicklungen auf diesem Gebiet ist seine Arbeit mit Wilkerson, die notwendige und hinreichende Kriterien dafür angibt, wann eine antikommutative Algebra H^* über der Steenrod-Algebra von der Form $H^*(BT^n; \mathbb{F}_p)^W$ ist, wobei T^n der n-Torus und W eine endliche Gruppe von Automorphismen von $H^*(BT^n; \mathbb{F}_p)$ ist. In dem sich anschließenden Übersichtsartikel „Finite H-spaces and Lie groups" spricht Adams die Probleme an, auf die man bei einem Adams-Wilkerson-Ansatz mit der K-Theorie trifft. Die drei letzten Arbeiten des Abschnitts beschäftigen sich mit den Liegruppen Spin(8), F_4 und E_8.

In den letzten Jahren seines Lebens arbeitete Adams an Abbildungen zwischen klassifizierenden Räumen, das Thema des nächsten Kapitels. Die erste Arbeit (mit Mahmud) beschäftigt sich mit der Realisierung eines Homomorphismus $\theta: H^*(BG; \mathbb{Q}) \leftarrow H^*(BG'; \mathbb{Q})$ durch eine Abbildung $f: BG \to BG'$ (hier sind G und G' kompakte zusammenhängende Liegruppen) und der Realisierung von f durch einen Homomorphismus $h: G \to G'$. Ersteres ist für $\mathbb{Q}$-Algebrahomomorphismen, die mit den Steenrod-Operationen für alle genügend große Primzahlen kommutieren, stets nach Lokalisierung weg von endlich vielen Primzahlen möglich. Für das zweite Problem gibt es Gegenbeispiele von Sullivan, aber man kann einen Homomorphismus $k: T \to T'$ der maximalen Tori finden, so daß

$$\begin{array}{ccc} H^*(BG; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{f^*} & H^*(BG'; \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(BT; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{(Bk)^*} & H^*(BT'; \mathbb{Q}) \end{array}$$

kommutiert. Diese Ergebnisse sind Konsequenzen allgemeinerer Resultate des Artikels. In der vierten Arbeit, einem gemeinsamen Projekt mit Wojtkowiak, veröffentlicht nach seinem Tod, werden diese Resultate auf den p-vollständigen Fall erweitert.

Eine Folgerung des Hauptsatzes der ersten Arbeit ist, daß $f^*: K(BG') \to K(BG)$ den Darstellungsring $R(G') \subset K(BG')$ nach $R(G)$ abbildet. In der dritten Arbeit der Serie zeigt er, wieder mit Mahmud, daß die von $f: BG \to BG'$ induzierte Abbildung $f^*: R(G') \to R(G)$ reelle und symplektische Elemente erhält, d. h. $RO(G')$ und $RSp(G')$ werden nach $RO(G)$ bzw. $RSp(G)$ abgebildet.

Die zweite Arbeit der Serie behandelt den nicht-zusammenhängenden Fall: Sei $FF(X) = \{y_1 - y_2 \in K(X);\ \lambda^i y_j = 0$ für $i \geqslant 1,\ j = 1, 2\}$. Dann bildet $f^*: K(BG') \to K(BG)$ die Gruppe $FF(BG')$ nach $FF(BG)$ ab. Weiter ist Bild $(\alpha: R(G) \to K(BG))$ in $FF(BG)$ enthalten und Bild $\alpha = FF(BG)$, falls G endlich oder $\pi_0(G)$ Vereinigung seiner Sylowuntergruppen ist. I. a. gilt aber die Gleichheit nicht.

Der zweite Band schließt mit einem Kapitel „Miscellaneous papers in homotopy theory and cohomology theory" mit zehn Artikeln, auf die ich nicht eingehen möchte, und zwei nicht publizierten Übersichtartikeln über die Arbeiten von Lannes bzw. Hopkins.

Die vorliegenden Bände zeigen Adams als einen virtuosen Mathematiker, der mehr an der Lösung ausstehender Probleme interessiert ist als an der Entwicklung großer Theorien. Sein Werk hat weiten Teilen der Algebraischen Topologie und darin insbesondere der Homotopietheorie seinen Stempel aufgedrückt. Lesern, die sich für einen der größeren Themenkreise aus Adams Schaffensbereich interessieren, können die Bände empfohlen werden.

Osnabrück R. Vogt

Björner, A., Las Vergnas, M., Sturmfels, B., White, N., Ziegler, G., Oriented Matroids (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 46), Cambridge University Press 1993, 516 S., 60.00 £

Orientierte Matroide wurden Ende der 70er Jahre von Bland, Las Vergnas, Folkman und Lawrence als kombinatorische Abstraktion reeller Hyperebenenarrangements eingeführt. Da diese in vielen Bereichen der Geometrie eine wichtige Rolle spielen, ist es nicht weiter verwunderlich, daß in den darauffolgenden Jahren Forscher von unterschiedlichen Fragestellungen herkommend auf diese Struktur stießen.

Weil es in der zweiten Hälfte der 80er Jahre etwas ruhiger um die orientierten Matroide wurde, war die Zeit überfällig für ein Buch, das den derzeitigen Kenntnisstand in diesem Gebiet zusammenfaßt.

Von der Fülle des angebotenen Materials kann der Reviewer, ohne das 3-seitige Inhaltsverzeichnis direkt zu kopieren, nur ein paar Punkte anführen, die in dem Buch besprochen werden:

In Kapitel 1, das 45 Seiten umfaßt, werden die klassischen Beispiele, Anwendungen und Fragestellungen im Bereich der orientierten Matroide vorgestellt: Digraphen, Punktkonfigurationen und Hyperebenenarrangements, Pseudolinien in der Ebene, Realisierbarkeit, Konvexität, Lineare Programmierung, Anwendungen aus der Computational Geometry und der Chemie. Einige dieser Gebiete werden später im Buch ausführlicher abgehandelt. Für eine Motivation ist das Kapitel zu ausführlich, für eine exakte Behandlung zu oberflächlich. Gleiches gilt für die nächsten 55 Seiten: in einem weiteren motivierenden Kapitel werden Querverbindungen zu verschiedenen Gebieten der Mathematik aufgezeigt, in denen orientierte Matroide als reelle Punktkonfigurationen oder Hyperebenenarrangements auftreten. Ein längerer Abschnitt behandelt hierin Konzepte, in denen orientierte Matroide in der algebraischen Geometrie betrachtet werden.

Kapitel 3, das auf Seite 100 beginnt, ist der Axiomatik gewidmet. Von einem gleichbleibenden Beispiel begleitet werden verschiedene Axiomensysteme vorgestellt. Die nicht ganz einfach zu zeigende Äquivalenz dieser Axiomensysteme wird vollständig bewiesen. Abschließend werden dem Leser historische Hintergründe der Entstehungsgeschichte orientierter Matroide erläutert.

Schon in der grundlegenden Arbeit von Folkman und Lawrence wurde die Äquivalenz von orientierten Matroiden und gewissen regulären Zelldekompositionen der Sphäre nachgewiesen. Dieses Resultat ist zentral in der Theorie der orientierten Matroide. Die beiden nachfolgenden Kapitel behandeln Stoff im Umkreis der beiden Richtungen dieser Äquivalenz. Nachdem in Kapitel 4 nachgewiesen wurde, daß jedes orientierte Matroid als Zellzerlegung der Sphäre realisiert werden kann, werden in Kapitel 5 zunächst mit den Sphärensystemen diejenigen Zellzerlegungen der Sphäre klassifiziert, die orientierte Matroide definieren. Insgesamt erhält man eine 1-1-Beziehung zwischen schleifenfreien orientierten Matroiden und „wesentlichen" Sphärensystemen.

Im 6. Kapitel werden Pseudolinienarrangements studiert, die nach den Resultaten des vorherigen Kapitels in eineindeutiger Beziehung zu den orientierten Matroiden vom Rang 3 stehen. Viele Phänomene treten schon in diesem Fall auf, der den Vorteil hat, sich leicht graphisch veranschaulichen zu lassen. Es werden die im Kontext orientierter Matroide interessanten Resultate über Pseudolinienarrangements besprochen und einige neuere Entwicklungen gegenüber dem Stand des klassischen Buches von Grünbaum berichtet. Kapitel 7 ist Konstruktionsverfahren wie Punkterweiterungen, Perturbationen und Summen gewidmet.

Das 8. Kapitel behandelt als zentralen Punkt die Fragestellung, welche orientierten Matroide als lineare Hyperebenenarrangements darstellbar sind. Dafür wird der Realisationsraum eines festen orientierten Matroids eingeführt. Diese semi-algebraische Varietät ist genau dann leer, wenn das orientierte Matroid nicht realisierbar ist. Neben algorithmischen Überlegungen zur Lösung dieses Problems werden topologische Eigenschaften des Realisierbarkeitsraumes studiert. Kapitel 9 behandelt analoge Fragestellungen auf der Ebene der maximalen Zellen eines orientierten Matroides und arbeitet Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen der Seitenflächenstruktur von Matroidpolytopen und konvexen Polytopen heraus.

Das letzte Kapitel ist mit der Linearen Programmierung dem Thema gewidmet, das Anfang der 80er Jahre die stärkste Motivation zum Studium orientierter Matroide lieferte. Nachdem im ersten Unterkapitel die Thematik von ihrer geometrischen Interpretation her studiert wird, ist das zweite Pivots und Tableaux gewidmet. Nach einer Diskussion verschiedener Pivotstrategien schließt das Kapitel mit der Charakterisierung derjenigen Klasse orientierter Matroide, in denen der Simplexalgorithmus mit lokalen Pivotstrategien nicht zykelt.

Am Ende jedes Kapitels findet der Leser eine Reihe von Übungsaufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades – bis hin zu offenen Fragestellungen. Ein sehr ausführliches Literaturverzeichnis und ein ordentlicher Index runden das Buch ab.

Dem Klappentext nach wenden sich die Autoren an Leser jeder Couleur: „..graduate students who wish to learn the subject from scratch, researchers in the various fields of application who want to concentrate on certain aspects of the theory, specialists who need a thorough reference..“ Dem Anspruch, ein dermaßen breitgefächertes Publikum zu bedienen, werden die Autoren in unterschiedlichem Ausmaß gerecht. Ein Student, der sich anhand dieses Buches in das Gebiet einarbeiten möchte, muß ein gehöriges Maß an Souveränität und Selbstbewußtsein mitbringen, um nicht schon auf den ersten hundert Seiten aufzugeben. Der Forscher aus der Anwendung, der sich „mal eben“ über einen Teilaspekt genauer informieren möchte, wird durch Querverweise gezwungen, das Buch eingehender zu studieren. Der Spezialist findet das langersehnte Standardreferenzwerk, das, neben der Aufarbeitung der Literatur, auch noch einige bisher unveröffentlichte Resultate enthält.

Bis auf die etwas unglückliche Plazierung der ersten beiden Kapitel, die mit ihrer intuitiveren Behandlung des Stoffes ihren eigenen Reiz haben, ist das Buch sauber strukturiert und setzt Standards in der Notation. Besonders wegen der Übungsaufgaben am Ende jedes Kapitels eignet es sich gut als begleitende Literatur eines Kurses über das Thema.

Die fünf Autoren, die selber wichtige Beiträge zur Forschung in diesem Gebiet geleistet haben, geben eine kompetente, kompakte Übersicht über den gegenwärtigen Stand der Forschung bei den orientierten Matroiden, an der keiner vorbeikommt, der sich ernsthaft mit diesem Themenkreis beschäftigen möchte, und die in keiner gutsortierten mathematischen Bibliothek fehlen sollte.

Köln W. Hochstättler

Lusztig, G. Introduction to Quantum Groups, Basel u. a.: Birkhäuser Verlag 1993, 340 S., SFR 98,–

Die Quantengruppen, von denen dieses Buch handelt, werden oft genauer als „quantisierte Einhüllende Algebren“ bezeichnet. Man versteht darunter gewisse Hopf-Algebren $U_h\mathfrak{g}$ über $\mathbf{C}[[h]]$ mit nicht kommutativer Komultiplikation, die für $h \to 0$ gegen die universelle Einhüllende einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra (oder, allgemeiner, einer Kac-Moody-Algebra) $\mathfrak{g}$ konvergieren. Man versteht darunter allgemeiner auch gewisse Unteralgebren von $U_h\mathfrak{g}$ über $\mathbf{Z}[v, v^{-1}]$, wo wir $v = \exp h/4$ setzen müssen, sowie deren Erweiterungen zu Algebren über $\mathbf{Q}(v)$. Lusztigs Buch beschäftigt sich mit diesen Hopf-Algebren über $\mathbf{Z}[v, v^{-1}]$ und $\mathbf{Q}(v)$.

Sein Hauptanliegen ist es, die Theorie der „kanonischen" oder „kristallinen" Basen (in der Terminologie von Lusztig bzw. Kashiwara) in voller Allgemeinheit abzuhandeln. Darüber hinaus enthält das Buch eine Fülle von neuen Ergebnissen. Es wird wohl eine Standard-Referenz werden und gehört in jede Institutsbibliothek.

Als Einführung in die Theorie der Quantengruppen scheint mir das Buch dahingegen völlig ungeeignet. Der Text ist zwar in hohem Maße logisch vollständig und setzt (von Teil II abgesehen) nur elementare Algebra voraus, vom Niveau her nichts Schwierigeres, als die Definition einer Algebra durch Erzeugende und Relationen. Es fehlt aber an jeglicher Motivation.

Hier ein besonders krasses Beispiel. Die Vorrede beginnt mit den Worten: „Nach Drinfeld ist eine Quantengruppe dasselbe wie eine Hopf-Algebra." Nun findet man aber in dieser „Einführung in die Theorie der Quantengruppen" nirgends die Definition einer Hopf-Algebra, geschweige denn die Motivation einer solchen Definition, ja noch nicht einmal einen Literaturverweis. Es wird schlicht zu gewissen kombinatorischen Daten eine $\mathbf{Q}(v)$-Algebra U durch Erzeugende und Relationen konstruiert, weiter Algebrenhomomorphismen $\Delta : \mathbf{U} \to \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}$, $e : U \to \mathbf{Q}(v)$, $S, S' : \mathbf{U} \to \mathbf{U}^{opp}$ die gewisse skurrile Eigenschaften erfüllen, und ganz am Schluß steht dann: „We see that U ... is a Hopf algebra." Man wird in diesem Buch auch vergeblich die quantisierte Yang-Baxter-Gleichung suchen. In Kapitel 32 wird bewiesen, daß gewisse Darstellungskategorien von Quantengruppen „braided tensor categories" sind, ohne daß dieser Begriff eingeführt oder zumindest eine Definition zitiert würde. Teil II spielt insofern noch eine Sonderrolle, als dort die Theorie der perversen Garben vorausgesetzt wird. Und nicht nur das: Für den Beweis von 9.2.9 wird man kurzerhand auf einen Preprint von Grojnowski-Lusztig verwiesen.

Zusammenfassend scheint mir dieses Buch das Werk eines brillianten Forschers, nicht das eines Lehrers. Sein Inhalt ist noch in keinem anderen Buch zu finden. Viele Ergebnisse sind neu oder zumindest neu in dieser Allgemeinheit und werden des Buch zu einer Standard-Referenz machen. Dem nicht mit Quantengruppen vertrauten Leser dagegen wird es, so fürchte ich, als absurder Formelsalat in der Kehle stecken bleiben.

Freiburg W. Soergel

Hoffman, P. N., Humphreys, J. F., Projective Representations of the Symmetric Groups (Oxford Mathematical Monographs), Oxford: Clarendon Press 1992, 304 S., £ 40.00

When the authors commenced work on this book in the middle eighties there was no modern account available of the now classic work by I. Schur written in the early years of this century on the projective representations of symmetric and alternating groups. In his 1911 paper "Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen" which appeared in J. Reine Angew. Math. **139**, 155–250, Schur gave a remarkably complete and beautiful description of the irreducible projective characters of these groups. This paper was a superb tour-de-force, developing all of the necessary machinery to give under one roof a self-contained account of the whole theory. This paper anticipated later work by R. Brauer and H. Weyl on the spin representations of the orthogonal groups and also, in particular, introduced a new class of symmetric functions, now called Schur Q-functions, which have more recently turned out to be of great consequence in other areas of mathematics. It is very surprising that such a remarkable paper was ignored for so long in the literature. Previous to the reviewer's 1962 paper 'The spin representations of the symmetric group' Proc. London Math. Soc. (3) **12**, 55–76, which approached this work via the spin representations of orthogonal groups, there were few, if any, references to it. In fact, it was in the late eighties that there was a real new surge of interest in the representations, but also in the associated combinatorial structures. Many new approaches were suggested and also there were many new developments. The authors were both actively involved in these; in fact, the appearance of the book was delayed in that the original idea of producing a modern account of Schur's work had to be replaced with a need to incorporate as much as possible of these later developments. In the meantime two accounts were published, the one by T. Józefiak (Expositiones Mathematicae **7** (1989) 193–247) is an updated expository account of Schur's paper emphasising the graded structures involved but following faithfully Schur's description of the Q-function. However, the one by J. R. Stembridge (Advances in Mathematics, **74** (1989) 87–134) gives a new and more original account which, for example, gives a new combinatorial definition of Schur Q-functions. Here, shifted tableaux are prominent and he proves a shifted analogue of the Littlewood-Richardson rule.

The authors' approach in this book is also new emphasising Hopf algebras. Also included is much additional material which is not included in the papers by Józefiak and Stembridge and furthermore, a full and up-to-date bibliography. This suggests that there is more than one route to the final results. The authors have included all of these routes, they have included their preferred route in the main chapters of the book, Chapters 1–14. However, a good portion of the book is taken up by the six appendices which incorporate most of these independent approaches.

This book will undoubtedly be regarded as the standard reference in the future on this subject which continues to be a very active area of research. However, it does not supplant in any way the original by Schur and it is certain that many would prefer to, at least first, look at the recent excellent accounts by Stembridge and Józefiak which may be more to their taste.

Aberystwyth O. Morris

Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster, A., Wohlrab, O., Minimal Surfaces, I Boundary Value Problems, II Boundary Regularity (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 295 und 296). Berlin u. a.: Springer-Verlag 1992, 508 S. und 422 S., DM 148,– und 178,–

Nach den Worten der Autoren ist es das Ziel dieser zweibändigen Monographie, „... eine Einführung in das Gebiet der zweidimensionalen Minimalflächen im Euklidischen Raum mit besonderer Betonung der Randwertprobleme zu geben ...“. Der einführende Charakter trifft vor allem auf den ersten Band zu, während der zweite, dessen Hauptteil die analytisch tiefgründige Untersuchung der Differenzierbarkeit von Minimalflächen am Rand bildet, sich eher an einen in dem Gebiet schon fortgeschrittenen Leser richtet.

Nachdem der Leser im ersten Kapitel Gelegenheit hat, einen differentialgeometrischen Kompaktkurs zu absolvieren, wird ihm im zweiten die spezielle Differentialgeometrie der Minimalflächen vermittelt, insbesondere deren Charakterisierungen als Flächen verschwindender mittlerer Krümmung, als Extremalen des Flächeninhalts, etc., samt des zugehörigen Formelapparats. Höhepunkt des Kapitels ist der klassische Satz von Bernstein (1916), daß jede Minimalfläche, die sich als Graph einer auf der ganzen Ebene definierten Funktion darstellen läßt, notwendig eine Ebene sein muß. Beim Beweis dieses Satzes kündigt sich bereits die Verbindung zur komplexen Funktionstheorie an, welche dann im 3. Kapitel mit den klassischen Darstellungsformeln von Enneper und Weierstraß und deren Anwendung zur Konstruktion von Minimalflächen voll ausgebaut wird. Diese vom theoretischen Standpunkt relativ banal erscheinenden Formeln erlauben die Konstruktion einer Minimalfläche aus einer holomorphen Funktion und einem holomorphen Differential auf einer Riemannschen Fläche. Sie stellen nach wie vor das wichtigste Hilfsmittel zur

Konstruktion vollständiger Minimalflächen mit vorgegebenen topologischen und goemetrischen Eigenschaften dar. Die mit der prominenten Costa-Fläche vor erst gut einem Jahrzehnt begonnene Serie von insbesondere eingebetteten vollständigen Minimalflächen nichttrivialer Topologie wurde auf diese Weise gewonnen. Ein besonderer Glanzpunkt dieses funktionentheoretisch orientierten Kapitels ist die durchsichtige Darstellung des Beweises des Satzes von Fujimoto (1988), welcher eine weitreichende Verallgemeinerung des Satzes von Bernstein darstellt und besagt, daß das Normalenbild einer vollständigen in $\mathbb{R}^3$ immersierten Minimalfläche höchstens 4 Punkte (4 ist die optimale Schranke) auf der Einheitssphäre auslassen kann, es sei denn, die Fläche ist eine Ebene. Das 3. Kapitel ist besonders reich an Illustrationen, die, wie auch in allen übrigen Teilen des Werks hinsichtlich Informationsgehalt und Ästhetik höchsten Ansprüchen gerecht werden. Im 4. und 5. Kapitel werden dann durch Minimierung der Dirichletschen Energie parametrisierter Flächen die grundlegenden Existenzsätze für die wichtigsten Randwertprobleme für Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe gewonnen: für das Plateau-Problem, bei welchem der Rand der Fläche eine gegebene Jordankurve ist, für das freie Problem, bei welchem der Rand auf einer gegebenen Stützfläche frei gleiten kann, und für eine Kombination der beiden Randbedingungen. Daneben werden Fragen der Ein- und Mehrdeutigkeit von Randwertaufgaben, instabile Extremalen, Existenz eingebetteter Lösungen diskutiert. Das sechste und letzte Kapitel des ersten Bandes widmet sich bemerkenswerten geometrischen Eigenschaften berandeter Minimalflächen wie Einschließungsprinzipien (d. s. geometrische Maximiumprinzipien), isoperimetrische Ungleichungen (Abschätzungen des Flächeninhalts durch die Länge der Randkurve) und Abschätzung der Länge freier Ränder.

Den Hauptinhalt des 2. Bandes bildet, auf 3 Kapitel verteilt, die Randregularität von Minimalflächen. Hier muß natürlich der technische Apparat der partiellen Differentialgleichungen als Hilfsmittel herangezogen werden. Die Autoren haben es dabei verstanden, auch den auf diesem Gebiet noch nicht erfahrerenen Leser jeweils mit den benötigten Werkzeugen vertraut zu machen. Das anschließende 10. Kapitel ist ganz dem Fadenproblem gewidmet: hierbei soll eine Minimalfläche in einen Rand eingespannt werden, der aus einem Jordanbogen und einem dessen Endpunkte verbindenden frei beweglichen Faden fester Länge besteht. Hierbei muß man vor allem mit der Schwierigkeit fertig werden, daß die Zahl der Zusammenhangskomponenten der Lösungsfläche nicht vorgeschrieben, ja nicht einmal nach oben begrenzt werden kann. Das 11. und letzte Kapitel schließlich behandelt das Plateau-Problem für Flächen höheren topologischen Typs. Das hier neu hinzukommende Element besteht darin, daß die Dirichlet-Energie auch über alle konformen Strukturen des fest vorgegebenen topologischen Modells minimiert werden muß, wie schon Douglas in seinen bahnbrechenden Arbeiten aus den dreißiger Jahren erkannte. Die Darstellung folgt allerdings einem moderneren Zugang, der auf einer differentialgeometrischen Beschreibung des Modulraums aufbaut.

Trotz der überall erkennbaren Sorgfalt, mit der dieses Werk abgefaßt wurde, ist es dennoch von irreführenden Formulierungen und Fehlern nicht ganz frei geblieben. Dem Referenten sind deren zwei aufgefallen: der auf S. 227 Mitte zitierte Existenzsatz für eingebettete Minimalflächen wird nur sinnvoll, wenn man ihn auf Flächen vom Typ der Kreisscheibe einschränkt; aber selbst dann ist er nicht, wie im Text behauptet, das *einzige* derartige positive Ergebnis. Ferner ist der zum Enclosure Theoren I auf S. 375 gegebene Beweis nur dann schlüssig, wenn man die Voraussetzung „$|H(P)| \leqslant \Lambda(P)$“ durch die entsprechende strikte Ungleichung ersetzt.

Mit ihren Minimal Surfaces haben die Autoren eine sehr gelungene Darstellung eines traditionsreichen, aber in den letzten Jahrzehnten wieder äußerst aktiven Gebiets gegeben, in welchem Geometrie und Analysis eine fruchtbare Verbindung eingehen. Vor allem die neueren und neuesten Entwicklungen stehen im Mittelpunkt, wobei auf Grund der Stoffülle natürlich Schwerpunkte gesetzt werden mußten, und einiges daher nur in den jedem Kapitel angehängten Scholien gestreift werden konnte. Diese deutliche Aufteilung in Haupttext und z. T. recht ausgedehnte Scholien hat sicher zu der guten Übersichtlichkeit des Werks beigetragen. Sein mathematischer Stil verbindet die Forderung nach guter Lesbarkeit dank reichlicher Motivationen und Erläuterungen mit der nach mathematischer Strenge und Vollständigkeit. Auf die hervorragenden Illustrationen wurde schon hingewiesen.

Heidelberg F. Tomi

Loday, J. L., Cyclic Homology (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 301), Berlin u. a.: Springer Verlag 1992, 454 S., DM 205,–

Die zyklische Homologietheorie hat sich in den zehn Jahren seit ihrer Einführung zu einem eigenständigen und sehr aktiven Teilgebiet der homologischen Algebra entwickelt. Ihre Anwendungen erstrecken sich auf topologische, algebraische und Waldhausensche K-Theorie, nichtkommutative Algebra, globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten, Funktionalanalysis, harmonische Analysis und bis in die theoretische Physik hinein. Mit dem in der Grundlehrenreihe des Springer Verlags erschienenen Buch „Cyclic Homology" von Jean-Louis Loday liegt nun das erste Lehrbuch über dieses Gebiet vor.

Ziel der zyklischen Homologietheorie ist es, die verschiedenen Versionen der K-Theorie durch Homologietheorien zu approximieren, welche durch natürliche Kettenkomplexe definiert sind. Eine solche Theorie ist ein Funktor von einer geeigneten Kategorie von Algebren in die Kategorie der Kettenkomplexe, in deren Homologiegruppen sich die jeweiligen K-Funktoren über eine natürliche Transformation (den Chern-Charakter) abbilden. Dieser Chern-Charakter sollte einer natürlichen Äquivalenz möglichst nahe kommen. Dieses Vorgehen rechtfertigt sich dadurch, daß zyklische Homologiegruppen meist relativ einfach zu berechnen sind und damit eine approximative Bestimmung der sehr viel schwieriger zugänglichen K-Gruppen ermöglichen. Des weiteren erlaubt der Chern-Charakter, das Nichtverschwinden expliziter Elemente von K-Gruppen nachzuprüfen.

Die zyklische Homologie entwickelte sich aus zwei sehr unterschiedlichen Fragestellungen.

In seinem Werk über Indextheorie auf nicht notwendig kompakten Mannigfaltigkeiten interpretierte A. Connes den analytischen Index eines elliptischen Operators als Element der K-Theorie einer (nichtkommutativen) Algebra von Hilbertraum-Operatoren. Um die für Anwendungen wesentliche kohomologische Form des Indexsatzes zu finden, benötigte er eine Homologietheorie auf einer geeigneten Kategorie von Operatoralgebren. Diese sollte für die Algebra der glatten Funktionen auf einer kompakten Mannigfaltigkeit mit der deRham-Kohomologie der Mannigfaltigkeit übereinstimmen. Die Lösung dieses Problems gelang Connes 1981 mit der Definition des zyklischen (Bi)komplexes einer Algebra.

Zur gleichen Zeit arbeiteten Feigin und Tsygan am Problem der näherungsweisen Berechnung der höheren algebraischen K-Gruppen einer Algebra. Diese stimmen rational mit der primitiven Homologie der allgemeinen linearen Gruppe GL(A) der Algebra A überein. Als deren erste Approximation kann man die primitive Lie-Algebren-Homologie von gl(A) ansehen. Die oben genannten Mathematiker beobachteten, daß sich der Standardkomplex zur Berechnung der Lie-Algebren-Homologie in diesem Fall durch einen sehr viel kleineren Komplex ersetzen läßt, der nur noch Elemente der Algebra A, aber keine Matrizen mehr als Einträge besitzt. Überraschenderweise stimmt dieser Komplex mit Connes zyklischem Komplex überein.

In der Zwischenzeit ist eine fast unüberschaubare Zahl von Artikeln über zyklische Homologie erschienen. Darüber hinaus wurden verschiedene modifizierte Theorien entwickelt (periodische, bivariante, analytische = entire, topologische). Diese sollen entweder eine bessere Einsicht in die Grundlagen der klassischen Theorie vermitteln oder sie sind auf einen spezifischen Typ von Anwendungen zugeschnitten. Aus der Vielzahl der Anwendungen möchte ich nur die drei bekanntesten erwähnen:

1) Die Lösung des Ausschneidungsproblems in der algebraischen K-Theorie durch Suslin and Wodzicki (basierend auf Arbeiten von Goodwillie über den relativen Chern-Charakter in die relative zyklische Homologie).
2) Einen neuen Zugang zur Novikov-Vermutung über die Homotopieinvarianz höherer Signaturen. Connes and Moscovici benutzen dabei die kohomologische Version eines lokalen Indexsatzes für Überlagerungen kompakter Mannigfaltigkeiten.
3) Der Beweis der rationalen Injektivität der Assembly-Abbildung in der algebraischen K-Theorie durch Bökstedt, Hsiang und Madsen. Hier wird ein Chern-Charakter auf der Waldhausenschen K-Theorie mit Werten in einer geeigneten zyklischen Theorie konstruiert.

In seinem Buch stellt Loday die Grundlagen der Theorie detailliert dar. Darüber hinaus gibt er einen vollständigen Überblick über die Entwicklung der zyklischen Homologie bis 1992. Hierbei beschränkt er sich auf die rein algebraischen Aspekte der Theorie. Die oben genannten Anwendungen werden nur kurz skizziert. Ungeachtet dessen enthält das Buch eine enorme Fülle an Material. Um es einem breiten Spektrum an Lesern zugänglich zu machen, setzt der Autor keine Vorkenntnisse über homologische Algebra voraus, sondern definiert alle verwendeten Begriffe im Text.

Das Buch beginnt mit einer Einführung in die Hochschild-Homologie und definiert dann den zyklischen Komplex als Quotienten des Hochschildkomplexes. Leider wurde dabei zugunsten der elementaren Darstellung auf die Verwendung des Begriffs des abgeleiteten Funktors verzichtet. Danach werden die zyklischen Homologiegruppen von Tensor- und symmetrischen Algebren, regulären kommutativen Algebren und Einhüllenden von Lie-Algebren berechnet. Nach der Konstruktion des Chern-Charakters wird der Zusammenhang zwischen zyklischer und Lie-Algebren-Homologie untersucht. Im folgenden entwickelt der Autor die Grundlagen der algebraischen K-Theorie und skizziert die Argumente, die zu Goodwillies Theorem über den relativen Chern-Charakter führen. Das Buch schließt mit einem kurzen Überblick über die vorher genannten Anwendungen. Zahlreiche Übungsaufgaben sollen den Leser mit den wesentlichen Begriffen vertraut machen oder behandeln speziellere Themen, die im Text keinen Platz fanden. Das Literaturverzeichnis erfaßt in großer Ausführlichkeit die bis 1992 vorhandene Literatur.

Dem Lehrbuchcharakter entsprechend werden alle Resultate in den ersten drei Kapiteln sorgfältig und vollständig bewiesen. Von diesem Punkt an werden nur noch Beweisskizzen mit den wesentlichsten Argumenten angegeben. Dieses Vorgehen wird durch die Fülle des behandelten Materials notwendig. Jedoch wirkt der Text so eher wie ein Literaturführer zu den Originalarbeiten. Es gelingt dem Autor, sämtliche wichtigen Resultate über zyklische Homologie darzustellen. Für ihr volles Verständnis ist es aber oft nötig, auf die Originalliteratur zurückzugreifen. Leider häufen sich vorhandene Flüchtigkeitsfehler gegen Ende des Textes so sehr, daß das letzte Kapitel den Leser eher verwirren denn informieren wird. (Ich würde empfehlen, direkt die zitierte Literatur zu studieren).

Lodays „Cyclic Homology" liefert einen vollständigen, klar strukturierten Überblick über die vorhandenen Resultate und wird als Referenzbuch von großem Wert sein. Insbesondere wird es Analytikern und Physikern ohne Vorkenntnisse in homologischer Algebra, die Connes „Nichtkommutative Geometrie" studieren wollen, als willkommenes Nachschlagewerk dienen. Für Mathematiker, die sich eingehender mit zyklischer Homologie beschäftigen wollen, ist es jedoch kein Ersatz für das Studium der Originalquellen.

Heidelberg M. Puschnigg

Mathematik und Statistik bei Vandenhoeck & Ruprecht

Gerhard Heinzmann

Zwischen Objektkonstruktion und Strukturanalyse

Zur Philosophie der Mathematik bei Jules Henri Poincaré. 1995. 166 Seiten, kart. DM/SFr 52,– / öS 385,–. Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, Band 10. ISBN 3-525-40317-8

Gerhard Heinzmann liefert mit diesem Buch eine systematische Rekonstruktion der philosophischen Position Henri Poincarés bezüglich der Grundlagen von Arithmetik, Geometrie, Logik und Mengenlehre. Als methodischer Rahmen dient ein am Pragmatismus von C.S. Peirce orientierter Konstruktivismus, der die Verflechtung von mathematischer Realität und mathematischer Tätigkeit als Konstruktions- und Darstellungsaspekte begreift.

Vor diesem Hintergrund zeigt sich, daß die bei Poincaré historisch als konventionalistisch (Geometrie) oder aprioristisch (Arithmetik) verkleideten Begründungsstrategien in Wirklichkeit jeweils nur eine rhetorische Überzeichnung von Willkür und Gegebenheit sind. An einigen in der Geschichte der Grundlagen der Mathematik immer wieder auftauchenden und von Poincaré thematisierten Problemen wird freigelegt, inwiefern auftretende Aporien mit der nicht genügend berücksichtigten oder nicht zu leistenden Einheit von Objektkonstitution und -beschreibung zusammenhängen.

Oscar Sheynin

Aleksandr A. Chuprov: Life, Work, Correspondence

The making of mathematical statistics. Revised English edition. Translated from Russian by the author. 1996. Ca. 150 Seiten mit 12 Abbildungen, kart. ca. DM/SFr 54,– / öS 400,–. Angewandte Statistik und Ökonometrie, Band 38. ISBN 3-525-11403-6

Erstmals wird hier Leben und Werk Aleksandr A. Chuprovs (1874-1926) beschrieben, des zu seiner Zeit bedeutendsten russischen und kontinentalen Statistikers. Das Buch basiert auf Archivquellen aus Moskau und enthält viele Passagen aus Chuprovs Korrespondenz mit Anderson, Bortkiewicz, Markov und Slutsky.

Applied Statistics – Recent Developments

Proceedings. Pfingsttagung 1994 der Deutschen Statistischen Gesellschaft, Festkolloquium zur 20-Jahrfeier des Fachbereichs Statistik, Universität Dortmund. Eds.: Joachim Frohn, Ursula Gather, Winfried Stute, Hanspeter Thöni. 1995. 199 Seiten mit zahlreichen Abbildungen und Tabellen, kart. DM/SFr 66,– / öS 489,–. Sonderhefte zum Allgemeinen Statistischen Archiv, Heft 29. ISBN 3-525-11215-7

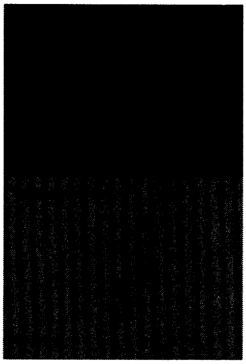
V&R
Vandenhoeck & Ruprecht

HIGHLIGHTS IN MATHEMATICS

ISNM 120 – International Series of Numerical Mathematics

W. Hackbusch, Universität Kiel, Germany

Integral Equations
Theory and Numerical Treatment



1995. 376 pages. Hardcover
DM 98.–/öS 764.40/sFr. 84.–
ISBN 3-7643-2871-1

DMV 25
DMV Seminar

W. Ballmann, University of Bonn, Germany

Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature
with an appendix
by Misha Brin
Ergodicity of Geodesic Flows

1995. 112 pages. Softcover
DM 39.80.–/öS 290.50/sFr. 34.–
ISBN 7643-5242-6

BAT – Birkhäuser Advanced Texts

P. Gabriel, Universität Zürich, Schweiz

Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra

1996. Ca. 648 Seiten. Gebunden
DM 68.–/öS 496.40/sFr. 60.–
ISBN 3-7643-5376-7

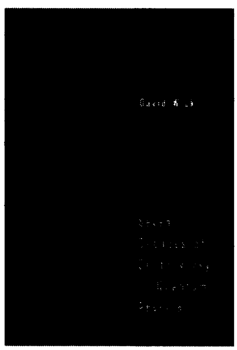
D.L. Cohn, Suffolk University, Boston, MA, USA

Measure Theory

1993. 384 pages. Hardcover.
3rd printing 1996
DM 84.–/öS 655.20/sFr. 74.–
ISBN 3-7643-3003-1

D. Wick, University of Washington, WA, USA

The Infamous Boundary
Seven Decades of Controversy in Quantum Physics



1995. 256 pages. Hardcover.
2nd printing 1996
DM 88.–/öS 642.40/sFr. 78.–
ISBN 3-7643-3785-0

LM – Lectures in Mathematics ETH Zürich

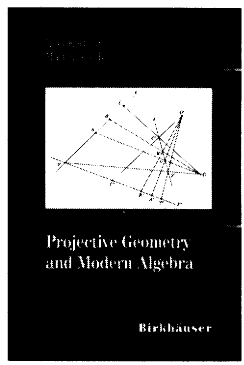
M. Freidlin, University of Maryland, College Park, MD, USA

Markov Processes and Differential Equations
Asymptotic Problems

1996. Approx. 148 pages. Softcover
tent. DM 46.–/öS 335.80/sFr. 38.–
ISBN 3-7643-5392-9

L. Kadison, University of Copenhagen, Denmark / **M. T. Kromann**, University of Pennsylvania, USA

Projective Geometry and Modern Algebra



1996. 224 pages. Hardcover
DM 78.–/öS 569.40/sFr. 68.–
ISBN 3-7643-3900-4

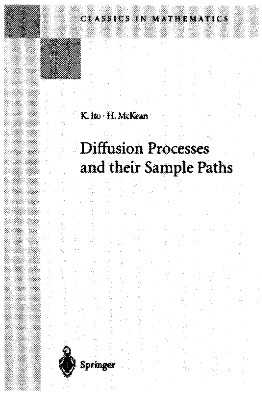
Preisänderungen und -irrtum vorbehalten. 2/96

Bitte bestellen Sie bei Ihrem Buchhändler oder direkt bei:
Birkhäuser Verlag AG
P.O. Box 133
CH-4010 Basel / Switzerland
FAX: ++41 / 61 / 271 76 66
e-mail: 100010.2310@compuserve.com

Für Bestellungen aus den USA oder Canada:
Birkhäuser
333 Meadowlands Parkway
Secaucus, NJ 07094-2491
USA

BIRKHÄUSER BASEL • BOSTON • BERLIN

Classics in Mathematics



Springer-Verlag began publishing books in higher mathematics in 1920, when the series *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften,* initially conceived as a series of advanced textbooks, was founded by Richard Courant. A few years later, a new series *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete,* survey reports of recent mathematical research, was added.

Of over 400 books published in these series, many have become recognized classics and remain standard references for their subject.

Springer is reissuing a selected few of these highly successful books in a new, inexpensive softcover edition to make them easily accessible to younger generations of students and researchers.

K. Ito, H. McKean
Diffusion Processes andtheir Sample Paths
1996. XX, 600 pages.
Softcover DM 59,–
ISBN 3-540-60629-7

With its republication in the *Classics in Mathematics* it is hoped that a new generation will be able to enjoy Ito and McKean's "classic" text.

H. Federer
Geometric Measure Theory
1996. XVIII, 676 pages.
Softcover DM 59,–
ISBN 3-540-60656-4

"... Federer's timely and beautiful book indeed fills the need for a comprehensive treatise on geometric measure theory, and his detailed exposition leads from the foundations of the theory to the most recent discoveries... This book is a major treatise in mathematics and is essen tial in the working library of the modern analyst."
Bulletin of the London Mathematical Society

J. Lindenstrauss, L. Tzafriri
Classical Banach Spaces I and II
Sequence Spaces; Function Spaces
1996. XIV, 500 pages.
Softcover DM 59,–
ISBN 3-540-60628-9

"... The geometry of Banach lattices is a rich, beautiful, ... and rewarding subject. The proof is in the reading and perusing of the masterpiece."
Zentralblatt für Mathematik

Also available:

A. Dold
Lectures on Algebraic Geometry
ISBN 3-540-58660-1

F. Hirzebruch
Topological Methods in Algebraic Geometry
ISBN 3-540-58663-6

T. Kato
Perturbation Theory for Linear Operators
ISBN 3-540-58661-X

S. Kobayashi
Transformation Groups in Differential Geometry
ISBN 3-540-58659-8

S. Mac Lane
Homology
ISBN 3-540-58662-8

D. Mumford
Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties
ISBN 3-540-58657-1

C. L. Siegel, J. K. Moser
Lectures on Celestial Mechanics
ISBN 3-540-58656-3

A. Weil
Basic Number Theory
ISBN 3-540-58655-5

K. Yosida
Functional Analysis
ISBN 3-540-58654-7

O. Zariski
Algebraic Surfaces
ISBN 3-540-58658-X

Prices subject to change without notice. In EU countries the local VAT is effective.

Please order by
Fax: (0)30/8207-301
e-mail: orders@springer.de
or through your bookseller

Springer

Springer-Verlag, P. O. Box 31 13 40, D-10643 Berlin, Germany.

IMCA.3161/MNTZ/E/1