

E 20577 F

98. Band Heft 2

ausgegeben am 25. 4. 1996

**DMV**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer  
unter Mitwirkung von  
P. L. Butzer, U. Felgner,  
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil



**B. G. Teubner Stuttgart 1996**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:

B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart  
Postfach 80 10 69, D-70510 Stuttgart, Tel. (07 11) 78901-0, Telefax (07 11) 78901-10  
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, 80336 München, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart 1996 – Verlagsnummer 2911/2

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GdB R, D-68723 Oftersheim

Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Inhalt Band 98, Heft 2

### 1. Abteilung

- G. Schumacher:** Über die Entwicklung der Komplexen Analysis in Deutschland  
vom Ausgang des 19. Jahrhunderts bis zum Anfang der siebziger Jahre . . . . 41

### **In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:**

**L. van den Dries:** O-Minimal Structures on the Field of Real Numbers

**H. Esnault:** Recent developments on characteristic classes of flat bundles on complex algebraic manifolds

**E. Heinz:** Monge-Ampèresche Gleichungen und elliptische Systeme

**P. Schneider:** Gebäude in der Darstellungstheorie über lokalen Zahlkörpern

**Sir P. Swinnerton-Dyer:** Diophantine Equations: the geometric approach

---

### **Anschriften der Herausgeber**

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen

Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2

Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

### **Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

# Über die Entwicklung der Komplexen Analysis in Deutschland vom Ausgang des 19. Jahrhunderts bis zum Anfang der siebziger Jahre

Georg Schumacher, Bochum

## Vorwort

Kurz nach der Jahrhundertwende war in der Komplexen Analysis – zu diesem Zeitpunkt „Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher“ genannt – bereits eine Fülle überraschender Phänomene bekannt, jedoch entsteht in der Rückschau der Eindruck, daß man von einer einheitlichen Theorie noch recht weit entfernt war.

Die Methoden der klassischen Funktionentheorie einer Veränderlichen waren zu diesem Zeitpunkt gesichert und ausgebaut. Bernhard Riemann hatte die „Cauchy-Riemanschen“ Differentialgleichungen an die Spitze eines Aufbaus der Funktionentheorie gestellt, und der Cauchysche Integralsatz war in seiner heutigen Form entwickelt. Daneben bestand der weitgehend integralfreie Zugang, den Karl Weierstraß geschaffen hatte, und dessen Kritik an potentialtheoretischen Methoden war schließlich von David Hilbert ausgeräumt worden.

Die Ideen von Riemann und Weierstraß zur Funktionentheorie einer Veränderlicher sah man bald im Zusammenhang: Im Jahre 1913 veröffentlichte Hermann Weyl sein richtungsweisendes Buch „Die Idee der Riemanschen Fläche“. Er widmete es Felix Klein, dem er die „freiere Auffassung Riemanscher Flächen“ zuschreibt, „welche die Verbindung mit der komplexen Ebene als eine über die Ebene sich ausbreitende Überlagerungsfläche aufhebt“ [Kl 1926/27].

Für längere Zeit sollte es ein Kernproblem der Komplexen Analysis bleiben, den Begriff der Riemanschen Fläche in adäquater Weise auf höhere Dimensionen zu übertragen.

Die systematische Betrachtung analytischer Funktionen in mehreren Veränderlichen beginnt mit Weierstraß. In seinem Sinne versteht man unter einer holomorphen Funktion in mehreren komplexen Veränderlichen eine komplexwertige Abbildung eines Gebietes  $G \subset \mathbb{C}^n$

$$f: G \rightarrow \mathbb{C},$$

welche in einer Umgebung eines jeden Punktes  $z^0 \in G$  durch die Werte einer absolut konvergenten Potenzreihe

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j_1=0, \dots, j_n=0}^{\infty} a_{(j_1, \dots, j_n)} (z_1 - z_1^0)^{j_1} \cdot \dots \cdot (z_n - z_n^0)^{j_n}$$

beschrieben wird.

Der *Vorbereitungssatz* [We], den Weierstraß, wie er selbst anmerkte, seit 1860 in seinen Vorlesungen vortrug, war ein Mittel zur Algebraisierung der Komplexen Analysis. Zunächst bedeutet dieser, daß man im Prinzip die Lösung einer analytischen Gleichung

$$f(z_1, \dots, z_n) = 0$$

auf die Berechnung der Wurzeln komplexer Polynome zurückführen konnte. Die ganze Kraft des Vorbereitungssatzes wurde jedoch erst fast hundert Jahre später deutlich.

Die neuere Entwicklung in Deutschland ist untrennbar mit der von Heinrich Behnke begründeten Münsteraner Schule der Komplexen Analysis verbunden. Von besonderer Bedeutung war die in den dreißiger Jahren begonnene Arbeit von Karl Stein. Wichtige Impulse gingen von Henri Cartan aus, der bereits im Jahre 1946 die Zusammenarbeit wieder aufnahm und wenig später die Münsteraner Kollegen besuchte – dies war nicht zuletzt das Verdienst von Heinrich Behnke. Neben Karl Stein sind die prominenten Vertreter der Münsteraner Schule Hans Grauert, Friedrich Hirzebruch und Reinhold Remmert. Zumindest als Angehörige der nächsten Generation, sind die meisten der im folgenden genannten deutschen Mathematiker dieser Gruppe zuzurechnen.

Von großem Interesse war die Frage nach den natürlichen Definitionsbereichen holomorpher Funktionen in mehreren komplexen Veränderlichen. Ihre Beantwortung gipfelte in der Charakterisierung von Holomorphiegebieten durch die Eigenschaften *holomorph konvex* bzw. *pseudokonvex* und letztlich in der Definition der *Steinschen Mannigfaltigkeiten* und *Räume*, die unmittelbar zu Gegenständen weitgehender Überlegungen wurden.

Neue Wege wurden durch die Verallgemeinerung des Begriffs der Riemannschen Fläche eröffnet. Durch die Arbeiten von Grauert und Remmert wurden die *komplexen Räume* in das Zentrum der Komplexen Analysis gerückt. Diese vereinen in sich die verschiedensten natürlichen Aspekte. Sowohl lokale als auch globale Phänomene, sowohl topologische, geometrische als auch solche der Kommutativen Algebra und Algebraischen Geometrie spiegeln sich darin wider und lassen sich angemessen formulieren; die Sprache ist diejenige der Garbentheorie bzw. Homologischen Algebra. Lokal werden komplexe Räume durch die von Remmert intensiv studierten analytischen Mengen beschrieben. Die globalen Untersuchungen begannen im Grunde mit der Einführung komplexer Mannigfaltigkeiten; ferner lassen sich die zunächst betrachteten, durch verzweigte Überlagerungen gegebenen, Räume hier einordnen. Die Untersuchung analytischer Mengen mit Hilfe des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes führte dazu, daß sich die Komplexe Analysis algebraischen Methoden erschloß. Dabei wuchsen die Garbentheorie und besonders der Begriff der kohärenten Garbe weit über die Rolle einer Sprechweise hinaus.

Anläßlich des 100jährigen Jubiläums der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erschien ein Festband, in den leider kein Artikel über die Komplexe Analysis in Deutschland aufgenommen werden konnte. Der vorliegende Aufsatz ist ein Versuch, diese Lücke zu schließen. Im Sinne dieser Vorgabe konnte an vielen Stellen nicht auf manche wichtige und interessante Entwicklung eingegangen werden. Bei der Darstellung standen mehr als die historische Abfolge inhaltliche Schwerpunkte im Vordergrund.

## Inhaltsverzeichnis

<b>I Holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher</b> .....	45
<b>1 Analytische Fortsetzung holomorpher Funktionen</b> .....	45
1.1 Fortsetzungssätze in einer Veränderlichen .....	45
1.2 Fortsetzungssätze in mehreren Veränderlichen .....	45
<b>2 Holomorphiegebiete</b> .....	49
2.1 Eigenschaften .....	49
2.2 Reinhardtsche Körper .....	49
2.3 Zur Begriffsbildung .....	50
<b>3 Pseudokonvexe und holomorphe konvexe Gebiete</b> .....	51
3.1 Pseudokonvexität .....	51
3.2 Holomorphiekonvexität – Der Satz von Cartan-Thullen .....	51
3.3 Starrheitssätze .....	52
3.4 Das Levi-Problem .....	53
<b>4 Cousin-Probleme</b> .....	55
<b>II Der Begriff des Komplexen Raums</b> .....	56
<b>5 Komplexe Mannigfaltigkeiten</b> .....	56
5.1 Anfänge .....	56
5.2 Steinsche Mannigfaltigkeiten .....	57
5.3 Invariante Metriken auf komplexen Mannigfaltigkeiten .....	58
5.4 Automorphismen komplexer Mannigfaltigkeiten – Gruppenoperationen ..	58
5.5 Werteverteilung holomorpher Abbildungen .....	61
<b>6 Der Beginn der Algebraisierung – Potenzreihenringe</b> .....	63
<b>7 Erweiterung des Mannigfaltigkeitsbegriffs – Verzweigte Überlagerungen</b> .....	65
<b>8 Analytische Mengen</b> .....	67
8.1 Der Einbettungssatz .....	67
8.2 Fortsetzung analytischer Mengen – Anwendungen: Sätze von Chow, Hurwitz-Weierstraß und Levi .....	68
8.3 Weitere Fortsetzungssätze .....	69
8.4 Fortsetzung meromorpher Funktionen in Tori und komplex-projektiven Räumen .....	70
<b>9 Garbentheorie</b> .....	71
9.1 Garbentheorie in der Komplexen Analysis – Anfänge .....	71
9.2 Garben holomorpher Funktionen auf analytischen Mengen .....	73
9.3 Geometrische Eigenschaften analytischer Mengen algebraisch gefaßt .....	73
9.4 Garbenkohomologie .....	74
9.5 Čechsche Garbenkohomologie .....	75
<b>10 Komplexe Räume</b> .....	76
10.1 Geringte Räume – lokale Modelle komplexer Räume .....	76
10.2 Äquivalenz verschiedener Zugänge .....	77
10.3 Holomorphe Bilder komplexer Räume .....	78
10.4 Stein-Faktorisierung .....	78
10.5 Meromorphe Abbildungen komplexer Räume .....	78
10.6 Quotienten komplexer Räume nach komplexen Lieschen Gruppen .....	79
10.7 Singularitäten komplexer Räume .....	80

<b>11 Kohärente Garben</b> .....	83
11.1 Definition .....	84
11.2 Kohärenzsätze .....	84
11.3 Kohärente Garben auf Steinschen Mannigfaltigkeiten .....	85
11.4 Lückengarben .....	85
11.5 Fortsetzungssätze für Kohomologieklassen .....	87
11.6 Fortsetzungssätze für lokale Kohomologiegruppen .....	88
11.7 Fortsetzungssätze für kohärente Garben .....	89
11.8 Verallgemeinerte Lefschetz-Sätze .....	90
11.9 Verschwindungssätze .....	92
11.10 Lokale Struktur Komplexer Räume und Abbildungstheorie .....	93
11.11 Hyperflächen und Funktionenkörper .....	93
11.12 Analytisches Tensorprodukt kohärenter Garben .....	94
<b>III Ergebnisse der Komplexen Analysis</b> .....	95
<b>12 Streng pseudokonvexe Räume</b> .....	95
12.1 Erste Endlichkeitssätze .....	95
12.2 Anwendungen .....	96
12.3 Kohomologie von gelochten Holomorphiegebieten .....	97
12.4 Streng $q$ -pseudokonvexe Funktionen .....	97
12.5 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen .....	98
12.6 Bergmansche Kernfunktion und Metrik .....	101
<b>13 Steinsche Räume</b> .....	103
13.1 Charakterisierung Steinscher Räume .....	103
13.2 Remmert'scher Quotient .....	105
13.3 Okasches Prinzip .....	105
13.4 Tubenumgebungen Steinscher Räume .....	106
<b>14 Kohärenz von Bildgarben</b> .....	106
14.1 Bildgarben unter endlichen holomorphen Abbildungen .....	107
14.2 Höhere Bildgarben .....	107
14.3 Anwendungen .....	108
14.4 Verschiedene Beweise .....	108
14.5 Relativ-analytische Räume .....	109
<b>15 Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen</b> .....	111
15.1 Hopfscher $\sigma$ -Prozeß und Modifikationsabbildungen .....	111
15.2 Hirzebruch-Flächen .....	111
15.3 Modifikationsabbildungen .....	111
15.4 Exzeptionelle Mengen .....	112
15.5 Auflösung der Singularitäten normaler komplexer Flächen .....	114
15.6 Rationale Singularitäten .....	114
<b>16 Der Satz von Riemann-Roch</b> .....	116
16.1 Riemannsche Flächen, Abelsche Differentiale .....	116
16.2 Der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch .....	117
16.3 Erste Anwendungen des Satzes von Hirzebruch-Riemann-Roch .....	121
<b>17 Deformationstheorie</b> .....	123
17.1 Teichmüllertheorie .....	123
17.2 Deformationen komplexer Mannigfaltigkeiten und komplexer Räume .....	125
<b>18 Literatur</b> .....	126



# I Holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher

## 1 Analytische Fortsetzung holomorpher Funktionen

### 1.1 Fortsetzungssätze in einer Veränderlichen

**Klassische Resultate.** Zu den in der Einleitung angesprochenen Phänomenen gehört das *Prinzip der analytischen Fortsetzung* holomorpher Funktionen. Den Beweis für die Existenz von Laurent-Entwicklungen (in einer Veränderlichen) hatte Karl Weierstraß, wie erst später deutlich wurde, bereits im Jahre 1841 angegeben. Seine Ableitung der Laurent-Entwicklung enthielt die Cauchyschen Koeffizientenabschätzungen und damit den Riemannschen Hebbarkeitssatz.

**Riemannscher Hebbarkeitssatz.** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge,  $p \in D$  ein Punkt auf  $f$  eine auf  $D \setminus \{p\}$  holomorphe Funktion. Dann existiert eine holomorphe Fortsetzung von  $f$ , falls die Funktion bei Annäherung an  $p$  beschränkt bleibt.

Bernhard Riemann selbst benutzte in seiner Dissertation [Ri 1851] ganz andere Methoden, und zwar ein Integrationsargument in der Sprache harmonischer Funktionen. Unter der Voraussetzung

$$\lim_{z \rightarrow p} ((z - p)^{n+1} \cdot f(z)) = 0$$

erhielt er Laurent-Entwicklungen  $\sum_{j=-n}^{\infty} a_j(z-p)^j$  mit endlichen Hauptteil und allgemeiner Reihen der Form  $\sum a_j(z-p)^{j/k}$ , die man heute als *Puiseux-Entwicklungen* bezeichnet.

### 1.2 Fortsetzungssätze in mehreren Veränderlichen

**Meromorphe Funktionen.** Natürlich auftretende Ausnahmemengen sind die *Polstellen* meromorpher Funktionen. Bereits 1879 untersuchte Weierstraß meromorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher im Sinne von Quotienten holomorpher Funktionen:

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \frac{f(z_1, \dots, z_n)}{g(z_1, \dots, z_n)}$$

Es traten hier erstmals höherdimensionale Gebilde als Ausnahmemengen auf – eine Tatsache, die sich als nicht zufällig erweisen sollte. Diese waren durch eine analytische Gleichung gegeben, das Verschwinden der Nennerfunktion  $g(z)$ . Doch nicht alle diese Punkte sind wirklich Polstellen im Sinne eines gegen unendlich strebenden Funktionswertes. Verschwinden Nenner und Zähler gleichzeitig, so wird die Funktion unbestimmt. Sie läßt sich jedoch in gewissen Fällen ausdehnen. Weierstraß zeigte in Analogie zum Riemannschen Hebbarkeitssatz: Es herrscht Holomorphie in einem Punkte der Nullstellenmenge des Nenners, wenn die Funktion auf einer Umgebung dieses Punktes, soweit sie definiert ist, beschränkt bleibt.

**Analytisch dünne Ausnahmemengen.** Welche Ausnahmemengen sollten für denkbare Fortsetzungssätze zugelassen werden? Die Nullstellengebilde holomorpher Funktionen, gegeben auf offenen Teilmengen eines komplexen Zahlenraumes  $\mathbb{C}^n$  waren bereits aufgetreten. Im Prinzip konnte man „analytische Mengen“ einschließlich möglicher Singularitäten. Später faßte man folgende präzise Definition:

**Definition.** Eine Teilmenge  $A$  eines Gebietes  $G \subset \mathbb{C}^n$  heißt analytisch, wenn es zu jedem Punkt aus  $G$  eine offene Umgebung  $U \subset G$  gibt und endlich viele auf  $U$  holomorphe Funktionen, deren gemeinsame Nullstellenmenge gerade  $A \cap U$  ist.

Unter einer dünnen Menge (präziser analytisch dünnen Menge) versteht man eine Teilmenge  $B \subset G$ , derart, daß jeder ihrer Punkte eine Umgebung  $U$  besitzt, so daß  $B \cap U$  in einer echten analytischen Teilmenge von  $U$  enthalten ist.

Mit den Mitteln der Jahrhundertwende konnte man jedoch nur „glatte“ Mengen betrachten – man sprach bereits von „Mannigfaltigkeiten“. Gemeint waren damit aber stets Untermannigfaltigkeiten eines Zahlenraumes  $\mathbb{C}^n$  bzw. eines komplex projektiven Raumes  $\mathbb{P}_n$ ; dies, obwohl Riemann spätestens in den „Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ [Ri 1854] Mannigfaltigkeiten als abstrakt angesehen hatte.

Die Aussage des Riemannschen Hebbarkeitssatzes gilt für holomorphe Funktionen auf Komplementen analytischer Mengen, die (lokal) bei Annäherung an diese Ausnahmemenge beschränkt bleiben. Er wurde, wie gesagt, nur für glatte Ausnahmemengen formuliert und mit unterschiedlichen Methoden angegangen. William F. Osgood (der von 1887 bis 1890 in Göttingen und Erlangen studierte) zeigte 1898, daß eine lokal beschränkte Funktion mehrerer Veränderlicher bereits dann analytisch ist, wenn Holomorphie in jeder einzelnen Veränderlichen, bei beliebig fest gewählten übrigen Parametern gilt [Os 1900] (vgl. [Ha 1906]). Später wurde diese Aussage von Karlheinz Spallek in [Spa 1963] auf komplexe Räume verallgemeinert. Damit war der Riemannsche Hebbarkeitssatz auf den klassischen Fall einer Veränderlichen zurückgeführt. In den Vorträgen des „Madison Kolloquiums“ [Os 1914] schrieb Osgood diesen Satz dem Mathematiker Hugo Kistler zu, der in seiner Dissertation [Ki 1905] die Cauchysche Integralformel in mehreren Veränderlichen dazu benutzt hatte, die analytische Fortsetzung explizit anzugeben.

**Ausnahmemengen höherer Kodimension.** Als für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher typisch erwiesen sich Fortsetzungssätze, die ohne Einschränkungen an die betrachteten Funktionen allein unter Voraussetzungen an die Definitionsgebiete gelten.

Ebenso unerwartet wie elementar war eine Aussage, die Adolf Hurwitz im Jahre 1897 in seinem Vortrag beim ersten internationalen Mathematikerkongreß in Zürich [Hur 1898] machte: *Holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher besitzen keine isolierten Singularitäten.*

**Fortsetzungssatz von Hurwitz.** Ist  $U$  eine offene Teilmenge eines komplexen Zahlenraumes  $\mathbb{C}^n$ ,  $n > 1$  und  $p \in U$  ein Punkt, so besitzt jede auf  $U \setminus \{p\}$  holomorphe Funktion ohne weitere Voraussetzung eine analytische Fortsetzung auf ganz  $U$ .

Hurwitz erwähnte als Beweismethode den Laurentschen Satz.

Laurentreihen in zwei Veränderlichen benutzte Fritz Hartogs in seiner Dissertation [Ha 1903] ganz systematisch. Er folgte seinem Lehrer Alfred Pringsheim, der Potenzreihen und Konvergenzprobleme studiert hatte, und stellte zunächst fest, daß holomorphe Funktionen auf kartesischen Produkten von Kreisscheiben bzw. Ringgebieten eindeutig bestimmte Reihenentwicklungen mit nicht negativen bzw. ganzzahligen Potenzen besitzen: Eine punktierte Umgebung des Nullpunktes im zweidimensionalen Zahlenraum enthält sicher die Vereinigung der Mengen  $D \times D^*$  und  $D^* \times D$  wobei  $D \subset \mathbb{C}$  eine geeignete Kreisscheibe und  $D^* = D \setminus \{0\}$  bezeichne. Die Entwicklungen einer Funktion auf  $D \times D \setminus \{(0, 0)\}$  bzgl.  $D \times D^*$  und  $D^* \times D$  besitzen keine negativen Potenzen in der ersten bzw. zweiten Variablen. Die Einschränkungen auf  $D^* \times D^*$  stimmen überein, und somit treten keinerlei negative Potenzen auf.

Dieses Ergebnis weist stark in die Richtung des zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatzes für holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher, den wir in heutiger Fassung angeben; der Begriff der Dimension einer analytischen Menge wurde erst sehr viel später geklärt.

**Zweiter Riemannscher Hebbarkeitssatz.** *Sei  $U \subset \mathbb{C}^n$  eine offene Menge und  $A \subset U$  eine analytische Teilmenge, deren (komplexe) Dimension in allen ihren Punkten höchstens  $n - 2$  beträgt. Dann besitzt jede auf  $U \setminus A$  holomorphe Funktion eine eindeutige holomorphe Fortsetzung.*

**Verallgemeinerungen.** Man sollte anmerken, daß Kistler in [Ki 1905] auch Ergebnisse über die *meromorphe* Fortsetzung meromorpher Funktionen formulierte – die dazu herangezogenen Cousinschen Sätze, über die noch im einzelnen berichtet werden soll, waren zu diesem Zeitpunkt jedoch nicht soweit gereift, als daß man sie in diesem Zusammenhang hätte anwenden können. Bewiesen wurden die Fortsetzungssätze erst später von Hartogs [Ha 1911] (zur Geschichte des Riemannschen Hebbarkeitssatzes vgl. auch den Artikel [Ul 1990] von Peter Ullrich).

Am Ende der Entwicklung steht die Aussage der beiden Riemannschen Hebbarkeitssätze für *plurisubharmonische Funktionen (in mehreren Veränderlichen)*, die von Hans Grauert und Reinhold Remmert in [Gr-Re 1956] bewiesen wurde.

**Hartogsfiguren.** Ein wichtiger Impuls ging von Fortsetzungssätzen völlig anderer Art aus, die Hartogs in einer Folge von Arbeiten [Ha 1906, Ha 1907] publizierte: Die Ausnahmemengen haben ein nicht leeres Inneres – in diesem Zusammenhang spricht man heute von „Hartogsfiguren“.

Ein Beispiel ist der „gekerbte Dizylinder“ (vgl. Abb. 1), d. h. diejenige Teilmenge des Dizylinders

$$D \times D = \{(z, w); |z|, |w| < 1\},$$

die durch die Bedingung

$$H = \{(z, w) \in D \times D; |z| > 1/2 \text{ oder } |w| < 1/2\}$$

gegeben wird.

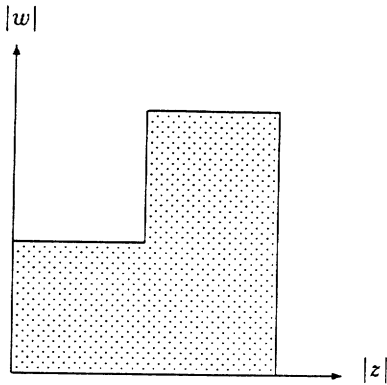
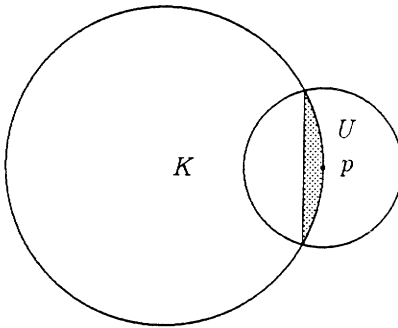


Abb. 1. Gekerbter Dicylinder

**Satz.** Jede auf  $H$  holomorphe Funktion besitzt eine eindeutige, auf  $D \times D$  holomorphe Fortsetzung.

Die Voraussetzungen bei Hartogs sind noch allgemeiner: Die „äußere Wandung“ der Hartogsfigur darf auch niederdimensional sein.

Abb. 2. Die Situation des Kugelsatzes  
Holomorphe Fortsetzung in punktiertes Gebiet hinein

Eine bekannte Anwendung ist (vgl. Abb. 2) der

**Kugelsatz (Hartogs).** Sei  $K \subset \mathbb{C}^n$ ,  $n > 1$  eine abgeschlossene Kugel und  $U$  eine Umgebung eines Randpunktes  $p$  von  $K$ . Dann läßt sich jede auf  $U \setminus K$  holomorphe Funktion auf eine Umgebung von  $p$  holomorph fortsetzen.

Insbesondere ist jede auf einer Umgebung von  $\partial K$  holomorphe Funktion auf ganz  $K$  holomorph fortsetzbar.

Die letztere Eigenschaft gilt allgemeiner für beschränkte Gebiete in  $\mathbb{C}^n$ ,  $n > 1$ .

## 2 Holomorphiegebiete

### 2.1 Eigenschaften

Immer deutlicher wurden die geometrischen Eigenschaften von „natürlichen“ Definitionsgebieten holomorpher Funktionen, den „Holomorphiegebieten“, die in der frühen Terminologie „Regularitätsbereiche“ hießen. Zumindest wußte man, wie sie *nicht* auszusehen haben: Komplemente von Mengen der komplexen Kodimension zwei oder größer, Hartogsfiguren oder Komplemente von Kugeln waren auszuschließen – ganz im Gegensatz zur Situation im Eindimensionalen:

Hier gab Leopold Kronecker die Funktion  $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$  an, die sich nirgends über den Rand des Einheitskreises hinaus fortsetzen läßt (ein weiteres Beispiel stammt von Weierstraß), und der Riemannsche Abbildungssatz lieferte, daß jedes Gebiet der Zahlenebene ein Holomorphiegebiet ist.

Das Ergebnis von Hartogs wurde übrigens von Hellmuth Kneser [Kn 1932] später in der als Kontinuitätssatz bezeichneten Fassung folgendermaßen formuliert.

**Kontinuitätssatz.** *Es sei  $D_\nu \subset \mathbb{C}^2$  eine Folge von abgeschlossenen, zu einer Koordinatenachse parallelen, Kreisscheiben, die gegen eine Kreisscheibe  $D_0 \subset \mathbb{C}^2$  konvergiere. Eine Funktion  $f$  sei holomorph in einer Umgebung des Randes von  $D_0$  und auf Umgebungen aller  $D_\nu$ . Dann läßt sich  $f$  auf eine Umgebung von ganz  $D_0$  holomorph fortsetzen.*

Der Kugelsatz sowie der Kontinuitätssatz wurden schließlich von Eugenio Elia Levi in [Le 1910] auf meromorphe Funktionen übertragen.

### 2.2 Reinhardtsche Körper

Bevor man die geometrische Gestalt von Holomorphiegebieten betrachtete, wurde zunächst das Konvergenzverhalten von Potenzreihen genauer untersucht.

Wiederum gab es Unerwartetes zu notieren. Gewisse unerwünschte Erscheinungen wie die folgende mußten vorab ausgeschlossen werden: Das Produkt einer Koordinatenfunktion mit einer Potenzreihe in einer weiteren Koordinate vom Konvergenzradius null konvergiert auf einer dünnen Menge.

Ganz einfache Beispiele, wie die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu w^\nu,$$

zeigten nun schon typisches Verhalten: Die von Karl Reinhardt begonnenen Überlegungen lieferten [Rei 1921], daß der Konvergenzbereich einer Potenzreihe in  $n$  Veränderlichen durch ein Gebiet in  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  beschrieben wird, welches als Urbild unter der Abbildung

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|)$$

aus einem *konvexen* Gebiet in  $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$  hervorgeht.

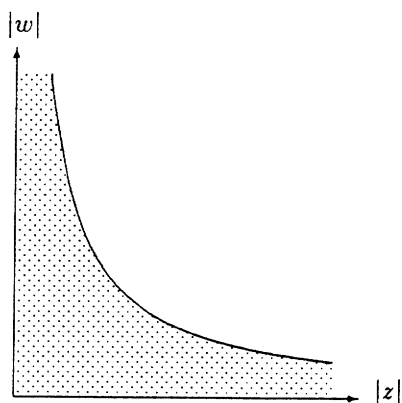


Abb. 3. Logarithmisch konvexer Reinhardtischer Körper

Solche unter allen Abbildungen  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, e^{i\varphi} z_j, \dots, z_n); j = 1, \dots, n$  invarianten Mengen sind nach wie vor als „Reinhardtische Körper“ bekannt.

### 2.3 Zur Begriffsbildung

Systematisch wurden Holomorphiegebiete zunächst von Heinrich Behnke, Henri Cartan, Peter Thullen und anderen vom Beginn der dreißiger Jahre an untersucht. Ein Holomorphiegebiet  $G \subset \mathbb{C}^n$  ist dadurch charakterisiert, daß es zu jedem Randpunkt  $p \in \partial G$  eine auf  $G$  holomorphe Funktion  $f$  gibt, die sich nicht über  $p$  hinaus holomorph ausdehnen läßt. Letzteres ist, um Mehrdeutigkeiten der Fortsetzung zu berücksichtigen, dadurch erklärt, daß es zu jeder zusammenhängenden Umgebung  $U \subset \mathbb{C}^n$  von  $p$  und zu jeder offenen Menge  $\emptyset \neq V \subset U \cap G$  eine auf  $G$  holomorphe Funktion  $f$  gibt, derart daß  $f|_V$  nicht holomorph auf  $U$  erweiterbar ist. Man zeigt später, daß die Funktion  $f$  unabhängig von  $p$  (und  $U$  bzw.  $V$ ) gewählt werden kann.

Zu den Holomorphiegebieten gehört zunächst die große Klasse der logarithmisch konvexen Reinhardtischen Körper, und damit haben auch Hyperkugeln

$$\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \sum |z_j|^2 < r^2\}, \quad r > 0$$

und Polyzylinder

$$\{(z_1, \dots, z_n); |z_j| < r_j\}, \quad r_j > 0$$

diese Eigenschaft. Ein natürlicher Weg zur Konstruktion von Holomorphiegebieten besteht nun darin, zu einem vorgegebenen Gebiet  $G \subset \mathbb{C}^n$  dessen „Holomorphiehülle“  $\mathcal{H}(G)$  zu konstruieren, den „größten Bereich“, auf den sich jede auf  $G$  holomorphe Funktion fortsetzen läßt.

Die ersten Ergebnisse von Behnke und Cartan (vgl. [Be 1930/31], [Ca 1931]) betreffen Reinhardtische Körper, deren Holomorphiehüllen von demselben Typ sind. Zunächst vermied man es, die Klasse der Gebiete in  $\mathbb{C}^n$  zu erweitern; es waren jedoch letztlich Gebiete  $G$  über  $\mathbb{C}^n$  im Sinne topologischer

Räume mit lokalen Homöomorphismen  $G \rightarrow \mathbb{C}^n$  als Holomorphiehüllen allgemeiner Gebiete einzubeziehen. So wurden viele Aussagen wie die folgende vorerst unter der Voraussetzung  $\mathcal{H}(G) \subset \mathbb{C}^n$  formuliert.

**Satz** [Th 1932, Ca-Th 1932]. *Holomorphiehüllen sind Holomorphiegebiete.*

### 3 Pseudokonvexe und holomorph konvexe Gebiete

#### 3.1 Pseudokonvexität

Der Hartogssche Kontinuitätssatz hatte nun unmittelbar Folgerungen für die Geometrie eines beliebigen Holomorphiegebietes  $G$ , und zwar für die Lage eines holomorphen Bildes  $D \subset G$  einer (abgeschlossenen) Kreisscheibe im Verhältnis zum Rand von  $G$ . Kein innerer Punkt von  $D$  liegt näher zu  $\partial G$  als der Rand von  $D$ :

$$d(\partial D, \partial G) = d(D, \partial G) \tag{1}$$

Diese für Holomorphiegebiete stets erfüllte Bedingung wird „Pseudokonvexität“ genannt und läßt sich auch in der Sprache der Hartogsfiguren ausdrücken.

#### 3.2 Holomorphiekonvexität – Der Satz von Cartan-Thullen

Den Stand der Komplexen Analysis in dieser Phase der Entwicklung findet man in der Monographie [Be-Th 1934] von Behnke und Thullen. Erst kurze Zeit vor dem Erscheinen waren die Grundlagen in Osgoods „Lehrbuch der Funktionentheorie II“ [Os 1929] gesichert worden. Neu geprägt wurde der Begriff „*holomorph konvex*“, der als „*regulär konvex*“ von Cartan und Thullen in [Ca-Th 1932] eingeführt worden war.

**Die holomorph konvexe Hülle eines Kompaktums.** Erste Aussagen über die Größe des Konvergenzbereichs von Reihenentwicklungen von holomorphen Funktionen auf einem Holomorphiegebiet  $G$  erhält man direkt aus dem Abstand des Entwicklungspunktes vom Rande des Gebietes. Cartan und Thullen führten nun zu einem Kompaktum  $K \subset G$  die „*holomorph konvexe Hülle*“  $K_G^\wedge$  ein. Schreibt man

$$\|\varphi\|_K = \sup \{|\varphi(x)|; x \in K\}$$

für eine auf  $G$  holomorpe Funktion  $\varphi$ , so ist  $K_G^\wedge$  durch

$$K_G^\wedge = \{p \in G; |\varphi(p)| \leq \|\varphi\|_K \text{ für alle holomorphen Funktionen } \varphi \text{ auf } G\}$$

erklärt.

Für Punkte aus  $K_G^\wedge$  lassen sich die Koeffizienten der Reihenentwicklungen von holomorphen Funktionen genauso abschätzen wie für die Punkte aus  $K$  selbst. Dies bedeutet nichts anderes, als daß der Abstand von  $K_G^\wedge$  zum Rande eines *Holomorphiegebietes*  $G$  derselbe ist wie von  $K$ :

*Für jedes Kompaktum  $K \subset G$  ist die Menge  $K_G^\wedge$  kompakt.*

Gebiete mit der letzteren Eigenschaft nannte man *holomorph konvex*.

Die Holomorphiekonvexität eines Gebietes garantiert andererseits zu jedem Kompaktum eine Funktion, deren Betrag dort beispielsweise den Wert eins annimmt und in einem Punkt außerhalb unter einem beliebig vorgegebenen Wert bleibt. Cartan und Thullen konstruierten aus solchen Funktionen ein unendliches Produkt, das zum Rande hin gegen Null strebt, ohne identisch zu verschwinden:

**Satz von Cartan-Thullen.** *Holomorph konvexe Gebiete sind Holomorphiegebiete.*

### 3.3 Starrheitssätze

Das Problem, auf welche Weise man den Riemannschen Abbildungssatz auf Gebiete des  $\mathbb{C}^n$  verallgemeinern könne, gab zu Untersuchungen in verschiedene Richtungen Anlaß. Im Jahre 1907 zeigte Henri Poincaré, daß der Dizylinder und die komplex zweidimensionale Kugel nicht biholomorph aufeinander abbildbar sind, indem er die Dimensionen der Automorphismengruppen, welche die Struktur reeller Liescher Gruppen tragen, als Invarianten der Gebiete auffaßte. Bedeutende Fortschritte in diesem Fragenkreis wurden nach 1970 mit den Methoden der Bergmanschen Kernfunktion und des  $\bar{\partial}$ -Problems erreicht (u. a. durch Arbeiten von Gennadii Markovic Henkin, Steven Bell und Ewa Ligocka).

Durch Herausnehmen dünner abgeschlossener Mengen aus Gebieten des  $\mathbb{C}^n$ , in die hinein holomorphe Abbildungen fortsetzbar sind, ist es einfach zu erreichen, daß die Automorphismengruppe sich auf die Identität reduziert. Solche Gebiete nennt man *biholomorph starr*. Die offene Frage nach starren Holomorphiegebieten wurde von Wolfgang Rothstein positiv beantwortet. Seine Beispiele sind Gebiete  $G_\varepsilon \subset \mathbb{C}^2$  (für hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$ ), welche durch die folgenden Ungleichungen gegeben werden:

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{Re}(z_1), \quad \operatorname{Im}(z_1) < 2 \\ 0 < \operatorname{Re}(z_2), \quad \operatorname{Im}(z_2) < 1 \\ \operatorname{Re}(z_1 + (1 - i\varepsilon/2)z_2) < (3 - \varepsilon). \end{aligned}$$

Solche Gebiete, definiert durch Ungleichungen in Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen nennt man auch *analytische Pflaster*, und man erhält auf diese Weise spezielle Beispiele holomorph konvexer Gebiete (vgl. Abschnitt 3.2).

Remmert und Stein zeigen in [Re-St 1960], daß beliebige Simplizes des  $\mathbb{R}^{2n}$ , aufgefaßt als Gebiete in  $\mathbb{C}^n$ , starr bzgl. der Operation der Automorphismengruppe sind: Am Anfang standen *analytische Polyeder*. Eine Teilmenge  $P \subset \subset U \subset \mathbb{C}^n$  wird so genannt, falls sie durch eine Zahl von Ungleichungen der folgenden Art gegeben ist:

$$|f_\alpha(z)| \leq 1, \quad \alpha = 1, \dots, k$$

für gewisse auf  $U$  holomorphe Funktionen  $f_\alpha$ . *Analytische Polyedergebiete* sind im wesentlichen die Zusammenhangskomponenten des offenen Kerns einer solchen Menge. Konvexe euklidische Polyeder, und speziell Simplizes fallen unter diese Kategorie. Natürliche Invarianten sind die sogenannten *charakteristischen Zerlegungen*, bestehend aus den Zusammenhangskomponenten der analytischen



Mengen  $\{f_x(z) = \text{const}\}$ . Die Anzahl analytisch unabhängiger Zerlegungen wird Stufe  $s$  genannt und ist von der Wahl der  $f_i$  unabhängig. Es ist  $s \leq k$ , und der Fall  $s \geq n$  ist von besonderem Interesse. Remmert und Stein untersuchten Überlagerungsabbildungen von Polyedergebieten. Die Existenz dieser zusätzlichen Struktur wird allerdings damit erkauft, daß die Ränder der betrachteten Holomorphiegebiete nicht mehr glatt sind. Eigentliche Abbildungen (insbesondere Automorphismen) respektieren die charakteristischen Zerlegungen, so daß Automorphismen allgemeiner *Simplizes* stets komplex linear sind und damit im allgemeinen nur die Identität existiert.

### 3.4 Das Levi-Problem

Konvexitätseigenschaften von Holomorphiegebieten waren schon länger bekannt. In den Jahren 1910 und 1911 veröffentlichte Levi lokale Untersuchungen über solche Holomorphiegebiete  $G \subset \mathbb{C}^2$ , die durch glatte (reelle, differenzierbare) Hyperflächen  $\{\varphi = 0\}$  berandet werden [Le 1910, Le 1911]. Es sei etwa  $\varphi|_G < 0$ . Das Hauptergebnis bestand darin, daß in den Randpunkten die Funktionaldeterminante

$$- \begin{vmatrix} 0 & \varphi_w & \varphi_z \\ \varphi_{\bar{w}} & \varphi_{w\bar{w}} & \varphi_{z\bar{w}} \\ \varphi_{\bar{z}} & \varphi_{w\bar{z}} & \varphi_{z\bar{z}} \end{vmatrix}$$

nicht negativ ist.

Für Gebiete in mehr als zweidimensionalen Zahlenräumen mußte diese Bedingung etwas anders gefaßt werden: Es sei  $G = \{p \in \mathbb{C}^n; \varphi(p) < 0\}$ , und für einen Randpunkt  $p \in \partial G$  betrachte man den Raum  $T_{\mathbb{C}}(\partial G)_p$  aller komplexen Tangentialvektoren  $\xi = \sum \xi_j (\partial/\partial z_j)$  (vom Typ  $(1,0)$ ) in einem Punkte  $p \in \partial G$ , die im komplexifizierten Tangentialraum der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\partial G$  enthalten sind, d. h. für die gilt:

$$\sum \xi_j \frac{\partial \varphi(p)}{\partial z_j} = 0. \tag{2}$$

Als *Leviform*  $L(\varphi)$  bezeichnete man die durch

$$L(\varphi)(\xi) = \sum \frac{\partial^2 \varphi(p)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \tag{3}$$

gegebene Form auf  $T_{\mathbb{C}}(\partial G)_p$ , und das Ergebnis von Levi aus dem Jahre 1911 bedeutet gerade, daß für Holomorphiegebiete mit glattem Rand stets  $L(\varphi)$  positiv semidefinit ist – eine Eigenschaft, die man später als *Levi-Pseudokonvexität* bezeichnete. Eine Verschärfung dieser Bedingung ist die *strenge Levi-Pseudokonvexität*:  $L(\varphi)$  ist positiv definit.

Die Forderung der Definitheit der Leviform (3) allein für Vektoren aus  $T_{\mathbb{C}}(\partial G)_p$  gemäß (2) hat zur Folge, daß Levi-Pseudokonvexität eine Bedingung an den Rand des Gebietes ist, und es genügt ferner, die Existenz einer solchen Funktion  $\varphi$  nur *lokal* auf Umgebungen von Randpunkten zu fordern. Im nachhinein konnte man schließlich erreichen, daß auf einem streng Levi-pseudo-

konvexen Gebiet geeignete lokal definierte Funktionen  $\varphi$  eine auf dem ganzen Tangentialraum positiv definite Levi-Form haben.

Die geometrische Interpretation besteht darin, daß ein an  $\partial G$  tangentes, (komplex) analytisches Kurvenstück stets ganz außerhalb von  $G$  verläuft. Diese Eigenschaft ist offensichtlich mit der Beziehung (1) verwandt, die den Begriff der Pseudokonvexität beschreibt.

Offen blieb zunächst das sogenannte *Levi-Problem*, nämlich zu zeigen, daß jedes streng Levi-pseudokonvexe Gebiet ein Holomorphiegebiet ist. Es wurde von Kiyoshi Oka für Gebiete in  $\mathbb{C}^2$  [Ok 1942] und danach in [Ok 1953] allgemein, sowie von Hans-Joachim Bremermann [Bre 1954] und François Norguet [No 1954] gelöst.

Okas Ansatz bestand darin, Levi-Pseudokonvexität durch einen allgemeineren Begriff zu ersetzen, der ohne die Glattheit des Randes von  $G$  auskommt. Er ersetzte die Funktion  $\varphi$  durch die auf  $G$  erklärte Randabstandsfunktion.

$$d_G(p) = d(p, \partial G),$$

und die Verallgemeinerung des Begriffs der Levi-Pseudokonvexität besteht in der Forderung

$$-\log d_G \text{ ist (streng) plurisubharmonisch.} \quad (4)$$

Als angemessene Übertragung des Begriffs der Subharmonizität auf Funktionen mehrerer Veränderlicher hatte sich folgendes erwiesen: Eine nach oben halbstetige Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *plurisubharmonisch*, falls die Einschränkung auf alle komplexen Geraden, soweit in  $G$  enthalten, subharmonisch ist, d. h. Funktionswerte nach oben durch ihr Mittel bzgl. der Integration über einen Kreisrand abgeschätzt werden können. Für differenzierbare Funktionen bedeutet dies gerade die positive Semidefinitheit der Hesseschen Matrix. Entsprechend ist strenge Plurisubharmonizität definiert.

Die Bedingung (4) impliziert mittels des Maximumsprinzips für plurisubharmonische Funktionen unmittelbar Pseudokonvexität bzw. strenge Pseudokonvexität – entscheidend war der Beweis der Umkehrung. Zusammenfassend formuliert man den folgenden

**Satz.** Für ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $G$  ist ein Holomorphiegebiet.
- (b)  $G$  ist holomorph konvex.
- (c)  $G$  ist pseudokonvex.
- (d)  $-\log d_G$  ist plurisubharmonisch.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß zunächst die von Cartan vorgeschlagene Beschreibung des Begriffs von Pseudokonvexität (unter anderem auch von Oka bei der Lösung des Levi-Problems) benutzt wurde. Diese Eigenschaft ist für ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}^n$  nach Definition genau dann erfüllt, wenn es zu jedem Randpunkt  $p \in \partial G$  eine Umgebung  $U$  gibt, so daß jede Zusammenhangskomponente von  $U \cap G$  ein Holomorphiegebiet ist. Die Äquivalenz zu der oben genannten Fassung vermittelt wiederum der Kontinuitätssatz.

Die naheliegende Frage, inwieweit für die Charakterisierung von Holomorphiegebieten die Forderung der Pseudokonvexität als eine Bedingung an den Rand sich abschwächen läßt, wurde von Grauert und Remmert in [Gr-Re 1957] beantwortet:

**Satz.** *Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}^n$ , welches außerhalb einer dünnen, nicht hebbaren Randpunktmenge überall pseudokonvex ist, ist ein Holomorphiegebiet.*

Insbesondere ist die Voraussetzung des Satzes für eine diskrete Ausnahmemenge von Randpunkten erfüllt.

Wie in Abschnitt 1.2 definiert, ist die Eigenschaft „dünn“ lokal bezüglich des umgebenden komplexen Zahlenraums zu verstehen: Lokal handelt es sich bei den zugelassenen Ausnahmemengen um Untermengen (echter) analytischer Teilmengen. Andererseits darf es sich nicht um „hebbare“ Randpunkte von  $G$  handeln, d. h. dort darf der Rand nicht selbst in einer (echten) analytischen Menge enthalten sein.

Obwohl die Definition der Pseudokonvexität sich unmittelbar auf unverzweigte oder verzweigte Überlagerungen von Gebieten des  $\mathbb{C}^n$  (vgl. Abschnitt 7) ausdehnen läßt, bleibt die obige Aussage nicht mehr gültig. Grauert und Remmert gaben dazu ein Gegenbeispiel an. Dieses lehrt ferner:

*Es gibt über dem  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 3$ , verzweigte Holomorphiegebiete (welche nur aus uniformisierbaren Punkten bestehen, d. h. komplexe Mannigfaltigkeiten sind), die weder holomorph konvex noch pseudokonvex sind.*

Auf die allgemeine Lösung des Levi-Problems auf komplexen Mannigfaltigkeiten mit Methoden der Garben- und Kohomologietheorie von Grauert in [Gr 1958b] werden wir im Zusammenhang mit dem Begriff der strengen Pseudokonvexität zurückkommen.

## 4 Cousin-Probleme

**Meromorphe Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen.** Ein Beispiel für die Beschreibung eines globalen Objektes durch lokale Eigenschaften in der Komplexen Analysis ist die Definition einer *meromorphen* Funktion auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}^n$ : Ist  $A \subset G$  eine analytisch dünne Teilmenge im Sinne von Abschnitt 1.2, so wird eine holomorphe Funktion  $f: G \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$  meromorph genannt, wenn zu jedem Punkt  $p \in A$  eine Umgebung existiert, bzgl. derer  $f$  als Quotient zweier holomorpher Funktionen dargestellt werden kann.

Der klassische Satz von Gösta Mittag-Leffler, nach dem in jedem Gebiete der komplexen Ebene meromorphe Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen angegeben werden können, wurde bereits im Jahre 1895 von Pierre Auguste Cousin auf Zylinderbereiche, d. h. kartesische Produkte von eindimensionalen Gebieten in  $\mathbb{C}^2$  verallgemeinert. Weitergehende Resultate konnte man zu diesem Zeitpunkt nicht erwarten: Die Ergebnisse von Cousin, insbesondere auch über die *globale* Quotientendarstellung meromorpher Funktionen, die in Kistlers Ansatz zu Fortsetzungssätzen für meromorphe Funktionen Anlaß zu Ungereimtheiten gegeben hatten, wurden 1917 von Thomas H. Gronwall wieder aufgenommen und nach kritischer Durchsicht aufgearbeitet.

**Hauptteilverteilungen auf Holomorphiegebieten.** Nachdem der Begriff des Holomorphiegebietes etabliert war, erschien das inzwischen als erstes Cousin-Problem bezeichnete Problem der Lösung von Hauptteilverteilungen in einem neuen Licht. Man konnte sich leicht davon überzeugen, daß dieses auf dem gekerbten Dizylinder (vgl. Abb. 1) nicht allgemein lösbar ist, und Cartan bemerkte 1934, daß tatsächlich alle Gebiete des  $\mathbb{C}^2$ , auf denen die Aussage des Satzes von Mittag-Leffler gilt, Holomorphiegebiete sind, eine Tatsache, die 1937 von Heinrich Behnke und Karl Stein bewiesen wurde. Dieses Ergebnis ist jedoch in gewisser Weise untypisch. Der Schluß von zwei auf drei und mehr Veränderliche mußte mißlingen: Zwar ist das Cousin-I-Problem auf allen Holomorphiegebieten lösbar [Oka 1937], jedoch wie Cartan in [Ca 1938] zeigte, auch auf  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ .

**Verallgemeinerung des Weierstraßschen Produktsatzes.** *Cousin-II-Problem* wird die analoge multiplikative Aufgabe – wann ist ein Divisor ein Hauptdivisor? – genannt. Dieses ist im wesentlichen die Frage, wann die Aussage des Weierstraßschen Produktsatzes in mehreren Veränderlichen gilt. Das Resultat von Cousin bezieht sich auf einfach zusammenhängende, zweidimensionale Zylinderbereiche. Dort existieren zu vorgegebenen Null- und Polstellenmengen (mit Multiplizitäten) stets meromorphe Funktionen. Behnke und Thullen zeigten 1934, daß Reinhardt'sche Körper in  $\mathbb{C}^2$ , auf denen das Cousin-II-Problem lösbar ist, im wesentlichen mit ihren Holomorphiehüllen übereinstimmen müssen.

**Globale Quotientendarstellung meromorpher Funktionen.** Die Arbeiten von Cousin waren durch ein Resultat von Poincaré angeregt worden, der bereits im Jahre 1883 gezeigt hatte, daß jede auf  $\mathbb{C}^2$  meromorphe Funktion Quotient zweier auf ganz  $\mathbb{C}^2$  holomorpher Funktionen ist. Festzuhalten ist, daß Cousin im wesentlichen bewies, daß diese Aussage für ein Gebiet in  $\mathbb{C}^n$  richtig ist, falls dort das „Cousin-II-Problem“ universell lösbar ist.

Die Übertragung vieler zentraler Ergebnisse der klassischen Funktionentheorie mußte zunächst auf Holomorphiegebiete beschränkt bleiben. Im Jahre 1941 zeigte Stein, daß ein Cousin-II-Problem auf einem Holomorphiegebiet lösbar ist, falls es eine stetige Lösung gibt („Oka-Prinzip“). Für die Existenz stetiger Lösungen gab Stein (topologische) Homologiebedingungen an. Erst durch die Einführung der Garbentheorie wurden allgemeine Ergebnisse im Rahmen eines allgemeinen Oka-Prinzips (vgl. Abschnitt 13.3) möglich.

## II Der Begriff des Komplexen Raums

### 5 Komplexe Mannigfaltigkeiten

#### 5.1 Anfänge

Die Klasse der Gebiete *in*  $\mathbb{C}^n$  hatte man bereits mit der Konstruktion von Holomorphiehüllen verlassen und zu Gebieten *über*  $\mathbb{C}^n$  erweitern müssen. Folgerichtig war der Schritt zu *abstrakten* Mannigfaltigkeiten, der, wie es im nachhinein erscheint, recht spät vollzogen wurde.

Im Jahre 1932 formulierte Constantin Carathéodory in seinem Vortrag auf dem 9. internationalen Mathematiker-Kongress in Zürich verschiedene Probleme in Zusammenhang mit „analytischen Abbildungen in mehrdimensionalen Räumen“. Er schlug vor, dem Wege Kleins zu folgen, der Riemannsche Flächen als „frei schwebend“ im Raume betrachtet habe. Wohl als erster führte er abstrakte Riemannsche Flächen in höheren Dimensionen vermöge holomorpher Koordinatenwechsel ein.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten in der Sprache von Karten und Atlanten finden sich jedoch erst 1941 bei Charles Ehresmann, und 1942 benutzte Oswald Teichmüller analytische Mannigfaltigkeiten („veränderliche Riemannsche Flächen“). Daneben sahen auch Oswald, Veblen, Hassler Whitney und andere den Begriff der Mannigfaltigkeit klar. Die Sprechweise „komplexe Mannigfaltigkeit“ wurde schließlich 1945 von Shing-Shen Chern eingeführt.

## 5.2 Steinsche Mannigfaltigkeiten

Entscheidend für die Entwicklung der komplexen Analysis war es immer wieder, die geeigneten Begriffe zu finden. Im Jahre 1951 griff Karl Stein die Cousin-Probleme erneut auf, und zwar in dem allgemeinen Rahmen der von ihm  $R$ -konvex genannten komplexen Mannigfaltigkeiten.

Das darin enthaltene Potential zur „richtigen“ Sicht vieler Fragestellungen wurde von Henri Cartan und Jean-Pierre Serre sofort erkannt, die fortan von *Steinschen Mannigfaltigkeiten* sprachen.

Steinsche Mannigfaltigkeiten stellen die sinnvolle Globalisierung holomorph konvexer Gebiete dar. Wir geben zunächst die (ursprüngliche) Definition an:

**Definition.** Eine parakompakte Mannigfaltigkeit  $X$  heißt „Steinsch“, falls die folgenden drei Axiome erfüllt sind:

**Trennungsaxiom.** Zu je zwei Punkten  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , gibt es eine auf  $X$  holomorphe Funktion  $f$ , die diese Punkte „trennt“:  $f(x) \neq f(y)$ .

**Uniformisierungsaxiom.** Ist  $x \in U$ , so gibt es auf ganz  $X$  holomorphe Funktionen  $f_1, \dots, f_n$ , die in einer Umgebung von  $x$  ein holomorphes Koordinatensystem bilden.

**Konvexitätsaxiom.** Zu jeder in  $X$  diskreten Folge  $\{x_i\}$  gibt es eine in  $X$  holomorphe Funktion  $f$ , die auf  $\{x_i\}$  unbeschränkt ist:

$$\sup |f(x_i)| = \infty$$

Zu dem Konvexitätsaxiom, welches im Falle von Gebieten eines  $\mathbb{C}^n$  Holomorphiekonvexität liefert, waren zwei weitere Axiome hinzugetreten. Trennungs- und Uniformisierungsaxiom sind für Gebiete in  $\mathbb{C}^n$  selbstverständlich; sie werden durch gewöhnliche Koordinaten des umgebenden Zahlenraumes erfüllt.

Die zusätzlichen Axiome sind für die noch anzusprechende Kohomologietheorie von Bedeutung. Andererseits stehen holomorph konvexe komplexe Mannigfaltigkeiten (bzw. Räume) in enger Beziehung zu Steinschen Mannigfaltig-

keiten: Der Remmertsche Quotient einer holomorph konvexen Mannigfaltigkeit ist Steinsch (vgl. Abschnitt 13.2).

Abgeschlossene komplexe Untermannigfaltigkeiten Steinscher Mannigfaltigkeiten, insbesondere solche des  $\mathbb{C}^n$ , sind selbst Steinsch. So stand von Anfang an eine umfangreiche Klasse von Beispielen zur Verfügung. Erst fast zehn Jahre später wußte man, daß umgekehrt Steinsche Mannigfaltigkeiten eine abgeschlossene holomorphe Einbettung in einen komplexen Zahlenraum zulassen (Reinhold Remmert, Errett Bishop, Raghavan Narasimhan).

### 5.3 Invariante Metriken auf komplexen Mannigfaltigkeiten

Ein natürlicher Ansatz für eine unter biholomorphen Selbstabbildungen invariante Metrik (bzw. Pseudometrik) auf einer komplexen Mannigfaltigkeit wurde von Carathéodory angegeben. (In Abschnitt 12.6 wird eine weitere wichtige, invariante Metrik, die Bergman-Metrik, vorgestellt).

Die Carathéodorysche Abstandsfunktion auf einer komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  hat die Eigenschaft, daß jede holomorphe Abbildung von  $X$  in die Einheitskreisscheibe  $D$ , versehen mit der hyperbolischen Metrik, kontrahierend ist. Sie ist als kleinste Abstandsfunktion mit dieser Eigenschaft für alle solche Abbildungen eindeutig charakterisiert. Die hierzu „duale“ Konstruktion wurde später von Shoshichi Kobayashi betrachtet. Eine Verallgemeinerung des Begriffs der Hyperbolizität von Riemannschen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension kann in die Forderung gefaßt werden, daß diese Pseudometriken Punkte trennen, d. h. Metriken im gewöhnlichen Sinne sind.

Die Carathéodorysche Abstandsfunktion war zunächst völlig abstrakt gegeben. Die Beschreibung als eine Finsler-Metrik geht auf Hans-Jörg Reiffen zurück: In [Reif 1965] wurden die zugehörigen Normen auf den Tangentialräumen der gegebenen Mannigfaltigkeit explizit angegeben.

### 5.4 Automorphismen komplexer Mannigfaltigkeiten – holomorphe Gruppenoperationen

Komplexe Liesche Gruppen traten beim Studium kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten als die Gruppen aller biholomorphen Abbildungen in natürlicher Weise in Erscheinung (Satz von Salomon Bochner und Deane Montgomery). Die allgemeinste Aussage gilt für kompakte komplexe Räume, die in Abschnitt 10 genauer betrachtet werden, und wurde von Hans Kerner in [Ke 1960b] gezeigt.

**Satz (Kerner).** *Sei  $X$  ein kompakter komplexer Raum. Dann trägt  $G = \text{Aut}(X)$  die Struktur einer komplexen Lieschen Gruppe, so daß die natürliche Abbildung  $G \times X \rightarrow X$  holomorph ist.*

Es gilt dann ferner, daß auch die Isotropiegruppe eines jeden Punktes eine komplexe Liesche Gruppe ist.

Die Aussage des Satzes von Kerner ist ohne Kompaktheitsvoraussetzung nicht mehr gültig; für die Einheitskreisscheibe  $D \subset \mathbb{C}$  gilt bekanntlich:

$$\text{Aut}(D) \approx \text{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

In [KaW 1971] gab Wilhelm Kaup ein Kriterium dafür an, wann die Automorphismengruppe eines nicht kompakten komplexen Raumes eine *reelle* Liesche Gruppe ist.

Eine komplexe Mannigfaltigkeit besitzt sicherlich eine in diesem Sinne reiche Struktur, wenn es „viele“ Automorphismen gibt, etwa, falls die Automorphismengruppe transitiv operiert. Solche Mannigfaltigkeiten werden „komplex homogen“ genannt. Für eine nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeit  $X$  ist Homogenität im Sinne der Existenz einer transitiv operierenden komplexen Lieschen Gruppe  $G$  zu verstehen. Eine solche Mannigfaltigkeit  $X$  kann mit dem Quotienten  $G/J$  einer komplexen Lieschen Gruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe, der Isotropiegruppe eines Punktes  $x_0$ , identifiziert werden.

Wichtige Methoden der Theorie der homogenen Mannigfaltigkeiten wurden von Reinhold Remmert und Ton Van de Ven in [Re-VV 1963] entwickelt.

**Satz (Remmert-Van de Ven).** *Es sei  $X = G/J$  eine kompakte homogene Mannigfaltigkeit und  $f: X \rightarrow Y$  eine surjektive holomorphe Abbildung auf einen komplexen Raum mit zusammenhängenden Fasern. Dann ist  $f$  in kanonischer Weise äquivalent zu einer Faserung  $G/J \rightarrow G/H$ , wobei  $H \supset J$  die Isotropiegruppe der Faser von  $x_0$  ist.*

Der Satz von Remmert und Van de Ven erlaubt es, auf Grund des Steinschen Faktorisierungssatzes, welcher gerade eine eigentliche holomorphe Abbildung als Komposition einer solchen mit zusammenhängenden Fasern und einer endlichen Abbildung darstellt (vgl. 10.4), das Studium holomorpher Abbildungen homogener Mannigfaltigkeiten mit Werten in komplexen Räumen auf verzweigte Überlagerungen zu reduzieren. (Eine Anwendung ist die Klassifikation aller natürlichen Faserungen von Fahnenmannigfaltigkeiten).

Einer der zentralen Sätze aus der Theorie der homogenen Mannigfaltigkeiten ist der folgende in [Bo-Re 1962] bewiesene Satz von Armand Borel und Reinhold Remmert, welcher eine überraschende Klassifikation kompakter, homogener, Kählerscher Mannigfaltigkeiten beinhaltet. Diese sind zusammengesetzt aus kompakten komplexen Tori, d. h. kompakten Quotienten des  $\mathbb{C}^n$  nach diskreten additiven Untergruppen, und projektiv-rationalen Mannigfaltigkeiten. Letztere sind dadurch charakterisiert, daß der Körper der meromorphen Funktionen mit einem Körper  $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_k)$  von rationalen Funktionen identifiziert werden kann, wobei die Zahl  $k$  der Unbestimmten maximal, d. h. gleich der Dimension ist.

**Satz (Borel-Remmert).** *Jede zusammenhängende, kompakte, homogene, Kählersche Mannigfaltigkeit ist das direkte Produkt aus einem komplexen Torus und einer projektiv-rationalen Mannigfaltigkeit.*

Dieses Ergebnis verallgemeinerte die 1954 von Hsieng-Chung Wang gezeigte Tatsache, daß eine *gleichdimensionale* Gruppe von biholomorphen Abbildungen auf einer kompakten Kählerschen Mannigfaltigkeit nur dann transitiv wirkt, wenn es sich um einen komplexen Torus handelt. Ferner gab es Untersuchungen von Yozo Matsushima aus dem Jahre 1957 für Operationen *kompakter* Liescher Gruppen.

Der Beweis des Satzes von Borel und Remmert ist in gewisser Weise typisch für das Vorgehen in verschiedenartigen Situationen: Betrachtet wird zunächst der Albanese-Torus, d. h. die Verallgemeinerung der Jacobischen Varietät. Die Perioden- oder Albaneseabbildung einer *homogenen* Mannigfaltigkeit  $X \rightarrow \text{Alb}(X)$  ist ein holomorphes Faserbündel, und diese Abbildung ist funktoriell: Es wird gleichzeitig ein Morphismus der zugehörigen Automorphismengruppen vermittelt. Im Kählerschen Fall nun ist die (komplexe) Dimension des Albanesetorus gleich der halben ersten Bettizahl von  $X$ . Daneben hat man eine natürliche Faserung über einer projektiv-rationalen, homogenen Mannigfaltigkeit mit zusammenhängender, komplex parallelisierbarer Faser. Mit Methoden der Lie-Theorie können beide Faserungen verglichen werden; man sieht schließlich, daß beide Faserungen trivial sind.

In demselben Jahr konstruieren Grauert und Remmert allgemein die *meromorphe Reduktion* homogener Mannigfaltigkeiten. Zunächst gilt:

**Satz** [Gr-Re 1996]. *Eine zusammenhängende, kompakte, homogene, komplexe Mannigfaltigkeit ist projektiv-algebraisch, wenn es endlich viele Hyperflächen gibt, deren Durchschnitt isolierte Hyperflächen enthält.*

Daraus folgt (als eine „relative Fassung“ dieses Satzes), daß jede zusammenhängende, kompakte, homogene, komplexe Mannigfaltigkeit in natürlicher Weise ein holomorphes Faserbündel über einer homogenen, projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit ist (mit zusammenhängender, komplex-parallelisierbarer Faser), derart daß die Projektion (meromorphe Reduktion) einen Isomorphismus der Funktionenkörper induziert.

**Fasthomogene Mannigfaltigkeiten.** In der Arbeit [Re-VV 1963] von Remmert und Van de Ven werden en passant *fasthomogene* Mannigfaltigkeiten eingeführt, deren Studium und Klassifikationstheorie bis heute aktuell ist. Diese Eigenschaft liegt nach Definition dann vor, wenn eine komplexe Liesche Gruppe mit einer *offenen Bahn* operiert. Das Komplement einer solchen offenen Bahn, die *Ausnahmemenge*, ist analytisch.

Der erste Klassifikationssatz wurde in [Oe 1970] von Eberhard Oeljeklaus bewiesen.

**Satz** (Oeljeklaus). *Es sei  $X$  eine fasthomogene Mannigfaltigkeit bezüglich der Operation einer komplexen Lieschen Gruppe derart, daß die Ausnahmemenge isolierte Punkte enthalte. Dann ist  $X$  isomorph zum komplex projektiven Raum  $\mathbb{P}_n$ .*

Läßt man nun Singularitäten zu, d. h. geht man über zu Gruppenoperationen auf komplexen Räumen, so ist wegen der Invarianz der Singularitätenmengen unter biholomorphen Abbildungen von vorn herein nur die Notation *fasthomogener* komplexer Räume (vgl. Abschnitt 10) sinnvoll. Es wurde später folgendes Ergebnis bewiesen:

**Satz** (Huckleberry-Oeljeklaus [Hu-Oe 1980]). *Es sei  $X$ ,  $\dim X > 1$ , ein fasthomogener komplexer Raum bezüglich der Operation einer komplexen Lieschen*



Gruppe  $G$ . Es enthalte die Ausnahmemenge einen isolierten Punkt  $v$ . Dann ist  $X$  lokal irreduzibel und die Normalisierung (vgl. Abschnitt 9.3)  $\tilde{X}$  von  $X$  ist entweder projektiv oder ein affiner homogener Kegel über einer projektiv-rationalen Mannigfaltigkeit  $Q$ . Im nicht kompakten Fall besteht die Ausnahmemenge nur aus  $v$ . Im kompakten Fall besteht sie aus dem Punkt  $v$  oder aus einem Punkt und  $Q$ .

Nicht notwendig kompakte, fasthomogene Mannigfaltigkeiten sind unter den Voraussetzungen des obigen Satzes entweder der  $\mathbb{P}_n$  oder der  $\mathbb{C}^n$ . Einzelheiten finden sich in dem Übersichtsartikel von Huckleberry [Hu 1990].

### 5.5 Werteverteilung holomorpher Abbildungen

**Nevanlinna-Theorie.** Ein neues, quantitatives Verständnis der klassischen Sätze von Liouville und Poincaré geht auf Rolf Nevanlinna zurück, der in [Ne 1926] Invarianten ganzer holomorpher Funktionen einführte und Resultate bewies, die als erster und zweiter Hauptsatz bekannt sind. Die Formulierung ist bis heute im wesentlichen dieselbe geblieben. Auch im Hinblick auf die unten angesprochene Theorie mehrerer Veränderlicher sollen diese explizit angegeben werden.

Es sei  $f$  eine auf  $\mathbb{C}$  gegebene meromorphe Funktion, d. h.  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$  eine holomorphe Abbildung. Sind  $\partial$  und  $\bar{\partial}$  die (äußeren) Ableitungen nach der komplexen Variablen bzw. ihrer Konjugierten, so schreibt man  $d = \bar{\partial} + \partial$  und  $d^c = \frac{i}{4\pi} (\bar{\partial} - \partial)$ . Der Faktor  $\frac{i}{4\pi}$  ist so gewählt, daß für  $\sigma = d^c \log |z|^2$  das Integral  $\int \sigma$  über den Rand des Einheitskreises gleich eins ist. Es ist

$$\Omega = dd^c \log (1 + |z|^2)$$

die Fubini-Study-Form des  $\mathbb{P}_1$ , bezüglich welcher die Fläche des Bildes der Kreisscheibe  $\{|z| < t\}$  unter  $f$  gleich

$$A_f(t) = \int_{|z| < t} f^*(\Omega)$$

ist. Die *charakteristische Funktion* nach Lars Ahlfors und Goro Shimizu ist dann für  $r > s > 0$  durch das folgende Integral gegeben:

$$T_f(r, s) = \int_s^r A_f(t) \frac{dt}{t} > 0.$$

Man hält  $s$  fest und betrachtet i. a. große  $r$ . Ferner definiert man für  $a \in \mathbb{P}_1$  und  $r > 0$

$$m_f(r; a) = \int_{|z|=r} \log \frac{1}{\chi(f(z), a)} \sigma > 0,$$

wobei  $\chi$  den chordalen Abstand auf der Riemannschen Zahlenkugel bezeichne.

Die Werteverteilungstheorie ermöglicht nun zu gegebenem  $a \in \mathbb{P}_1$  eine Berechnung bzw. Abschätzung der Zahl  $n_f(t, a)$  aller Punkte in  $\{|z| \leq t; f(z) = a\}$ ,

genauer des zugehörigen Integrals

$$N_f(r, s; a) = \int_s^r n_f(t, a) \frac{dt}{t}$$

für  $0 < s < r$ . Es gilt:

**Erster Hauptsatz.** Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$  holomorph. Dann gilt

$$T_f(r, s) = N_f(r, s; a) + m_f(r; a) - m_f(s; a)$$

für  $0 \leq s \leq r$ .

Insbesondere hat man die Beziehung

$$N_f(r, s; a) \leq T_f(r, s) + m_f(s; a),$$

welche für festgehaltene Werte von  $s$  und große  $r$  betrachtet wird.

Den ersten Hauptsatz schreibt man auch gern als eine Abschätzung für den Defekt  $\delta_f(a)$  von  $f$  an der Stelle  $a$ :

$$0 \leq \delta_f(a) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m_f(a)}{T_f(r, s)} = 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N_f(r, s; a)}{T_f(r, s)} \leq 1.$$

Falls  $f$  den Wert  $a$  nicht annimmt, ist der Defekt sicher gleich eins, aber auch, wenn  $f$  transzendent ist und diesen Wert nur endlich oft annimmt, ist diese Invariante gleich eins.

Andererseits ist für fast alle  $a \in \mathbb{P}_1$  der Defekt gleich null. Diese Tatsachen können mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes gemessen werden. Es sei für eine geeignete Hochhebung  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  von  $f$  die Wronski-Determinante von  $F = (F_0, F_1)$  mit  $\rho$  bezeichnet. Dann gilt für festes  $s > 0$  und aller  $r > s$  außerhalb einer Menge vom Maße null und eine geeignete Konstante  $c_2$ :

**Zweiter Hauptsatz.**

$$N_\rho(r, s; 0) + \sum_a m_f(r, a) \leq 2T_f(r, s) + c_2 \log(rT_f(r, s)).$$

Unmittelbare Folgerung ist die nachstehende Beziehung, die als Defektrelation oder ebenfalls als zweiter Hauptsatz bezeichnet wird.

$$\sum_a \delta_f(a) \leq 2.$$

Aus dieser Formulierung wird unmittelbar deutlich, inwieweit der zweite Hauptsatz über den Satz von Emile Picard hinausgeht.

**Mehrere Veränderliche.** Am Anfang steht die Hoffnung, für holomorphe Abbildungen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_m$  eine analoge Werteverteilungstheorie zu schaffen. Beispiele von Ludwig Bieberbach und Pierre Fatou biholomorpher Abbildungen von  $\mathbb{C}^m$  mit Werten in einem offenen, nicht dichten Gebiet in  $\mathbb{C}^m$  stehen allerdings der Gültigkeit der Aussage des Satzes von Picard entgegen. In [Kn 1938] beweist Hellmuth Kneser einen ersten Hauptsatz für meromorphe Abbildungen (vgl.

Abschnitt 10.5)  $f: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}_m$ , indem er die gegebene meromorphe Funktion auf die Geraden durch den Nullpunkt einschränkt, darüber integriert und als Parameterraum den  $\mathbb{P}_{m-1}$  erhält. Mit diesem Ansatz lautet der erste Hauptsatz formal genauso wie in einer Veränderlichen.

Im Jahre 1932 betrachtete Henri Cartan Werteverteilungstheorie im Sinne holomorpher Abbildungen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_n$ . Er zeigt einen zweiten Hauptsatz: Zu vorgegebenen  $q > n + 1$  Hyperebenen  $H_j \subset \mathbb{P}_n$  existiert eine Konstante  $c > 0$ , so daß für  $r > 0$  außerhalb einer Menge endlichen Maßes die Abschätzung

$$(q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f(r, H_j) + c \log(rT_f(r))$$

gilt.

Der entscheidende Fortschritt gelang Wilhelm Stoll in einer Reihe von Arbeiten, an deren Anfang [Sto 1953] und [Sto 1954] stehen. Zu erwähnen ist zunächst noch der wichtige Beitrag von Ahlfors [Ah 1941] in derselben Situation eines eindimensionalen Urbildraumes. Die Theorie von Kneser und Ahlfors wurde von Stoll vereinheitlicht. Hauptergebnis aus [Sto 1953] und [Sto 1954] ist eine Werteverteilungstheorie für *meromorphe* Abbildungen.

**Satz (Stoll).** *Es sei  $M$  eine nicht kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit (beliebiger Dimension) und  $f: M \rightarrow \mathbb{P}_n$  eine meromorphe Abbildung. Dann gelten die beiden Hauptsätze der Werteverteilungstheorie und die Defektrelation für Durchschnitte des Bildes von  $f$  mit Hyperebenen des projektiven Raumes.*

Die weitere von Stoll beherrschte Entwicklung umfaßt die Werteverteilungstheorie für meromorphe Abbildungen (und holomorphe Bündel) unter Einschluß von „moving targets“ sowie die Theorie und Klassifikation parabolischer Räume. Besonders in neuerer Zeit hat die Werteverteilungstheorie auch in Zusammenhang mit dem Studium hyperbolischer Mannigfaltigkeiten großes Interesse erlangt.

## 6 Der Beginn der Algebraisierung – Ringe konvergenter Potenzreihen

**Weierstraßscher Vorbereitungssatz.** Weit über den ursprünglichen Zweck hinaus, analytische Gleichungen zu lösen, wurde der Weierstraßsche Vorbereitungssatz, zusammen mit dem Weierstraßschen Divisionssatz, das entscheidende Hilfsmittel, die algebraische Struktur des Ringes  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$  der konvergenten Potenzreihen aufzuklären. Der Divisionssatz wurde allerdings in einer weniger beachteten Arbeit von Ludwig Stickelberger schon 1887 im wesentlichen auf algebraische Weise abgeleitet. Ein Beweis mittels Potenzreihenmethoden findet sich bei Hans Späth [Sp 1929]. Diese Fassung regte im Jahre 1933 Walther Rückert zu wichtigen Anwendungen an. Unter anderem gab er einen Beweis der folgenden Tatsache, die bereits von Emmanuel Lasker in [Las 1905] publiziert worden war:

**Satz.** *Der Ring  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$  der konvergenten Potenzreihen in  $n$  Veränderlichen ist noethersch und faktoriell.*

Einzelheiten zur Geschichte des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes findet man u. a. in [Gr-Re 1971, Gr-Re 1984]; im folgenden benutzen wir die dort gewählte Formulierung für den Vorbereitungssatz.

Die Koordinaten des Zahlenraumes  $\mathbb{C}^n$  seien mit  $z_1, \dots, z_{n-1}, w$  bezeichnet. Für  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$  und  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}, 0}$  werde  $\mathcal{O}_0$  bzw.  $\mathcal{O}'_0$  geschrieben, und man stellt sich alle Potenzreihen als nach  $w$  entwickelt vor. Man betrachtet nun Potenzreihen  $g = g(z, w)$  mit  $g(0, w) \neq 0$ . Diese Voraussetzung ist insofern keine Einschränkung, als sie sich für alle  $g \neq 0$  durch lineare Koordinatentransformation erreichen läßt. Es stellt sich heraus, daß für solche Reihen  $g$  (als Divisor) die Aussage des Euklidischen Algorithmus gilt. Diese verhalten sich wie Polynome von einem Grad  $b$ , genannt *Ordnung von  $g$* , der durch die Bedingung  $g(0, w) = w^b e(w)$ ,  $e(0) \neq 0$  bestimmt ist. (Ansonsten spricht man von unendlichem Grad).

**Weierstraßscher Divisionssatz.** *Es habe  $g \in \mathcal{O}_0$  die Ordnung  $b$ . Dann schreibt sich jede konvergente Potenzreihe  $f \in \mathcal{O}_0$  in der Form*

$$f = q \cdot g + r,$$

wobei  $q \in \mathcal{O}'_0$  und  $r \in \mathcal{O}'_0[w]$  mit  $\deg(r) < b$  eindeutig bestimmt sind.

Die Noethereigenschaft folgt unmittelbar mit einem Induktionsargument: Zu gegebenem Element  $g \in \mathcal{O}_0$  betrachtet man den Restklassenring  $\mathcal{O}_0/g\mathcal{O}_0$ , der als  $\mathcal{O}'_0$ -Modul zu  $\mathcal{O}'_0[w]$  isomorph ist.

**Definition.** *Ein normiertes Polynom*

$$\omega = w^b + a_1 w^{b-1} + \dots + a_b \in \mathcal{O}'_0[w]$$

wird Weierstraßpolynom genannt, wenn es (aufgefaßt als Potenzreihe  $\omega \in \mathcal{O}_0$ ) die Ordnung  $b$  hat, d. h. wenn

$$a_1(0) = \dots = a_b(0) = 0$$

gilt.

Der Weierstraßsche Divisionssatz impliziert unmittelbar den Vorbereitungssatz: Ist ein  $g \in \mathcal{O}_0$  ein Funktionskeim von endlicher Ordnung  $b$ , so ergibt die Zerlegung  $w^b = q \cdot g + r$ , daß  $w^b - r$  ein Weierstraßpolynom ist und  $q$  eine Einheit – in [Gr-Re 1971] und [Gr-Re 1984] hat man in diesem Sinne den Divisionssatz an den Anfang gestellt.

**Weierstraßscher Vorbereitungssatz.** *Es habe  $g \in \mathcal{O}_0$  die (endliche) Ordnung  $b$ . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Weierstraßpolynom  $\omega$  vom Grade  $b$  und eine eindeutig bestimmte Einheit  $e \in \mathcal{O}_0$ , so daß*

$$g = e \cdot \omega$$

ist.

**Anwendungen.** Auf Grund des Gaußschen Lemmas, nach dem der Polynomring über einem faktoriellen Ring selbst faktoriell ist, folgt aus dem Vorbereitungssatz unmittelbar (durch Induktion), daß der Ring  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$  diese Eigenschaft hat.

Eine weitere Konsequenz sei noch angegeben: In der Situation  $g = e \cdot \omega$  liefert der Divisionsatz, daß die Injektion  $\mathcal{O}'_0[w] \rightarrow \mathcal{O}_0$  auf den Restklassenringen den „Weierstraß-Isomorphismus“

$$\mathcal{O}'_0[w]/\omega \cdot \mathcal{O}'_0[w] \simeq \mathcal{O}_0/g \cdot \mathcal{O}_0 \quad (5)$$

induziert. Der Weierstraß-Isomorphismus sollte später eine Schlüsselrolle in der Theorie der Komplexen Räume einnehmen. Wir werden darauf in Abschnitt 11.2 zurückkommen.

## 7 Erweiterung des Mannigfaltigkeitsbegriffs – Verzweigte Überlagerungen

**Komplexe Räume im Sinne von Behnke und Stein.** Der Übergang von konkreten Riemannschen Flächen zu „*verzweigten Gebieten*“ über  $\mathbb{C}^n$  erforderte im Gegensatz zur klassischen Situation auch die Einbeziehung von Singularitäten.

Im wesentlichen wurden zunächst, etwa in [Be-Th 1934], nur uniformisierbare Verzweigungspunkte eingeführt, so daß nach wie vor komplexe Mannigfaltigkeiten betrachtet wurden, obwohl andere Beispiele wie das „analytische Gebilde“ der Funktion  $\sqrt{z_1 \cdot z_2}$  bekannt waren. Behnke und Stein schlugen 1951 einen Weg vor, der Singularitäten einbezog, jedoch deren explizite Beschreibung vermied.

Sie gingen von einem Hausdorffschen topologischen Raum  $X$  zusammen mit einer stetigen Abbildung  $\pi: X \rightarrow U$  auf eine offene Menge  $U$  eines komplexen Zahlenraumes  $\mathbb{C}^n$  aus, welche außerhalb einer „Ausnahmemenge“  $D$  in  $U$  eine endlichblättrige (unverzweigte) Überlagerung sein sollte. Als Ausnahmemenge wurde im wesentlichen das Nullstellengebilde einer auf  $U$  holomorphen Funktion zugelassen. Es wurde vorausgesetzt, daß die Ausnahmemenge sowie ihr Urbild unter  $\pi$  nirgends dicht und das Urbild  $\pi^{-1}(D)$  der Ausnahmemenge *nirgends zerlegend* sein sollten. Letzteres bedeutet, daß jede zusammenhängende Umgebung in  $X$  eines beliebigen Punktes aus  $\pi^{-1}(D)$  eine Umgebung  $V$  besitzt derart, daß  $V \setminus \pi^{-1}(D)$  offen und zusammenhängend ist. Behnke und Stein setzten außerdem  $\pi$  als *eigentlich* voraus.

**Definition.** *Eine stetige Abbildung lokalkompakter topologischer Räume heißt eigentlich, falls Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.*

Dieser Begriff wurde allerdings erst später benutzt; die Bedeutung dieser topologischen Voraussetzung wurde jedoch bald deutlich. Behnke und Stein prägen für diese Situation den Begriff der *analytisch verzweigten Überlagerung*.

Eine solche „*verzweigte Überlagerung*“ eines Gebietes  $U \subset \mathbb{C}^n$  durch einen topologischen Raum  $X$  wurde zum Gegenstand der Komplexen Analysis: Es sind auf sinnvolle Weise holomorphe Funktionen erklärt: Eine stetige Funktion auf  $X$  wird *holomorph* genannt, falls diese Eigenschaft außerhalb der Menge  $\pi^{-1}(D)$  bezüglich der durch Hochhebung vermöge  $\pi$  auf  $X$  erklärten komplexen Struktur erfüllt ist. Viele Tatsachen über holomorphe Funktionen, wie das Maximums-

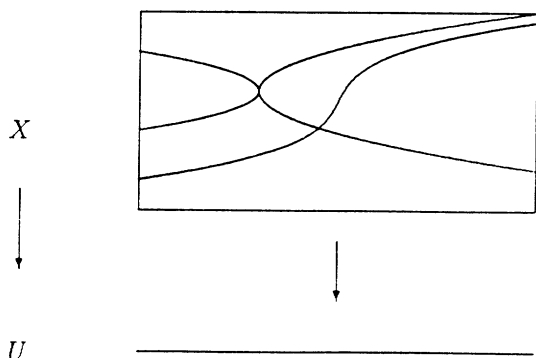


Abb. 4. Analytisch verzweigte Überlagerung

prinzip oder der erste (und schließlich der zweite) Riemannsche Hebbarkeitssatz, sind gültig. Sie gründen sich auf das folgende Argument: Gegeben sei eine holomorphe Funktion  $f$  auf dem Überlagerungsraum. Holomorphe Funktionen auf der Basis im wohlbekanntem Sinne erhält man, indem man (außerhalb des Verzweigungsortes) sämtliche elementarsymmetrischen Funktionen zu den Werten von  $f$  in allen Urbildern eines Punktes der Basis unter der Überlagerung bildet und holomorph fortsetzt. Damit gilt der folgende

**Satz.** Zu jeder auf  $X$  holomorphen Funktion  $f$  findet man ein normiertes Polynom  $P(W, z)$  mit holomorphen Koeffizienten in  $z \in U$ , dessen Grad in  $W$  die „Blätterzahl“ von  $\pi$  ist, derart daß

$$P(f(x), \pi(x)) = 0 \quad \text{für} \quad x \in X$$

gilt.

In der Sprache der Theorie Riemannscher Flächen definieren *umgekehrt* die Wurzeln eines irreduziblen normierten Polynomes  $P(W, z)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , mit Koeffizienten aus  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$  (vgl. Abschnitt 6) ein „algebroides“, beschränktes, mehrdeutiges Funktionselement in  $z = (z_1, \dots, z_n)$ . Der natürliche Definitionsbereich der zugehörigen Funktion ist vermöge der Projektion auf die  $z$ -Koordinaten eine verzweigte Überlagerung  $X$  einer offenen Teilmenge des  $U \subset \mathbb{C}^n$  im Sinne von Behnke und Stein.

Man kann  $X$  ganz konkret mit dem Nullstellengebilde von  $P$  in  $U \times \mathbb{C}$  identifizieren. Die Überlagerungsabbildung ist in dieser Beschreibung die Projektion  $U \times \mathbb{C} \rightarrow U$ , eingeschränkt auf  $X$ , und die zugehörige holomorphe Funktion auf  $X$  wird durch die Projektion  $U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vermittelt. Solche algebroiden Überlagerungen wurden in klassischer Sprechweise auch  $C$ -Überlagerungen genannt. (Inwiefern das Urbild der Ausnahmemenge unter der Projektion nach  $U$  das Nullstellengebilde von  $P$  nirgendwo zerlegt, soll im Abschnitt 9.3 noch näher angesprochen werden).

Soweit wurde durch verzweigte Überlagerungen nur ein „lokaler“ Gesichtspunkt bei der Ausdehnung des Mannigfaltigkeitsbegriffs beschrieben – ein erster

Ansatz, um Singularitäten einzubeziehen. Dazu trat dann die Verheftung mittels biholomorpher Abbildungen, die bereits den Übergang von Gebieten eines Zahlenraumes  $\mathbb{C}^n$  zu den globalen Objekten, den komplexen Mannigfaltigkeiten, geleistet hatte. Ein komplexer Raum im Sinne von Behnke und Stein war sodann durch einen *Atlas*, bestehend aus analytisch verzweigten Überlagerungsräumen, erklärt.

## 8 Analytische Mengen

### 8.1 Der Einbettungssatz

Zu Beginn der fünfziger Jahre war es offensichtlich, daß auch solche singulären Mengen betrachtet werden sollten, die durch *mehr* als *eine* analytische Gleichung gegeben sind. Verzweigte Überlagerungen im Sinne von [Be-St 1951] waren ein Mittel gewesen, diese Schwierigkeit zu umgehen: Der Verzweigungsort ist in einer analytischen *Hyperfläche* enthalten, ansonsten benutzte man nur topologische Mittel. Die Definition holomorpher Funktionen auf analytischen Überlagerungen gestattet es zwar, einige Aussagen der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher zu übertragen, aber es war offen, inwieweit das gemeinsame Nullstellengebilde

$$A = N(f_1, \dots, f_l) := \{z \in U \subset \mathbb{C}^n; f_1(z) = \dots = f_l(z) = 0\}, \quad (6)$$

endlich vieler holomorpher Funktionen  $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}^n$  (zumindest nach Verkleinerung von  $U$ ) als eine *verzweigte Überlagerung* einer offenen Teilmenge eines Raumes  $\mathbb{C}^d$  geschrieben werden könnte. (Im Vorgriff auf Abschnitt 9 benutzen wir die garbentheoretische Schreibweise  $\mathcal{O}(U)$  für die Menge aller auf  $U$  holomorphen Funktionen).

Für eine analytische Hyperfläche  $A$ , d. h. das Nullstellengebilde *einer* holomorphen Funktion, kann man nach Verkleinerung von  $U$  annehmen, daß diese nach dem Vorbereitungssatz durch ein Weierstraßpolynom gegeben wird – genauer, durch eine Funktion  $\omega \in \mathcal{O}(U')[w]$ ,  $U' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ , welche ein Weierstraßpolynom repräsentiert. Damit kann  $A$  als eine analytische Teilmenge von  $U' \times \mathbb{C}$  aufgefaßt werden, und in der Tat liefert die Projektion auf  $U'$  eine verzweigte Überlagerung von  $U'$  durch  $A$ .

Die Hoffnung bestand darin, für gemeinsame Nullstellenmengen mehrerer holomorpher Funktionen eine ähnliche Beschreibung zu finden. Allerdings konnte man nicht erwarten, daß  $n-d$  Gleichungen, d. h. soviele, wie der Dimensionsunterschied angibt, für die lokale Beschreibung einer analytischen Menge ausreichen würden. Die abschließende Antwort wurde durch den Remmert-Steinschen *Einbettungssatz* [Re-St 1953] gegeben. Zunächst werden lokal, etwa in einer Umgebung einer Singularität, Koordinaten  $(z_1, \dots, z_d, w_1, \dots, w_k) \in V \times W \subset \mathbb{C}^n$  so gewählt, daß die Projektion auf die  $z$ -Koordinaten, eingeschränkt auf die gegebene analytische Menge  $A$ , eine offene, *endliche* Abbildung induziert. Der Begriff der *Endlichkeit* schließt neben der Endlichkeit aller Fasern die *Eigentlichkeit* ein:

**Remmert-Steinscher Einbettungssatz.** *In geeigneten Koordinaten gilt:*

- 1) *Es gibt  $k$  normierte Polynome  $\omega_x \in \mathcal{O}(V)[w_x]$ , (welche Weierstraßpolynome in  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^d, 0}[w_x]$  induzieren), so daß  $A \subset \{(z, w) \in V \times W; \omega_1(z)(w_1) = \dots = \omega_k(z)(w_k) = 0\}$ .*
- 2) *Es gibt eine holomorphe Funktion  $\Delta \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d}(V)$ ,  $\Delta \neq 0$ , so daß die Nullstellenmenge  $N(\Delta)$  nirgends dicht in  $A$  ist.*
- 3) *Außerhalb von  $N(\Delta)$  spalten lokal die Polynome  $\omega_x$  in irreduzible Faktoren  $w_x - c_{xj}(z_1, \dots, z_d)$ . Die Auswahl von je einem Faktor eines solchen Polynoms beschreibt lokal alle irreduziblen Komponenten der Menge  $A \setminus N(\Delta)$ .*

Der Einbettungssatz zeigt insbesondere, daß jede analytische Menge, möglicherweise zusammen mit weiteren „parasitären“ irreduziblen Komponenten das Nullstellengebilde der minimalen Zahl von Polynomen mit holomorphen Koeffizienten ist. Zusätzliche, auf  $A$  verschwindende, holomorphe Funktionen benötigt man nur, um diese Komponenten auszuschließen.

Im Verlaufe der weiteren Entwicklung lieferte der Einbettungssatz die Methode, um die verschiedenen Ansätze auf dem Wege zum Begriff des komplexen Raumes zu vereinheitlichen.

**Dimensionstheorie.** Der intuitive Dimensionsbegriff analytischer Mengen wurde durch den Einbettungssatz präzisiert: Ist  $A \rightarrow U \subset \mathbb{C}^d$  eine offene, endliche, holomorphe Abbildung einer analytischen Menge auf einen offenen Teil eines  $d$ -dimensionalen Zahlenraumes, dann wird die (eindeutig bestimmte) Zahl  $d$  die Dimension von  $A$  genannt. Später wurde die Dimension analytischer Mengen auch algebraisch charakterisiert (vgl. [Gr-Re 1971]).

## 8.2 Fortsetzung analytischer Mengen –

### Anwendungen: Sätze von Chow, Hurwitz-Weierstraß und Levi

Der Einbettungssatz spielte eine wesentliche Rolle im Fortsetzungssatz von Remmert und Stein [Re-St 1953].

**Satz von Remmert-Stein.** *Es sei  $T \subset U \subset \mathbb{C}^n$  eine (abgeschlossene) analytische Menge einer offenen Teilmenge eines Zahlenraumes. Die Dimension von  $T$  sei kleiner als eine Zahl  $d$ . Sei  $A \subset U \setminus T$  eine analytische Menge, die in allen ihren Punkten mindestens  $d$ -dimensional ist. Dann ist der topologische Abschluß  $\bar{A}$  von  $A$  in  $U$  analytisch.*

Der allgemeine Satz enthält auch eine Aussage für den Fall, daß die Dimension von analytischer Menge und Ausnahmemenge übereinstimmen.

Anwendungen des Satzes von Remmert und Stein sind Lösungen wohlbekannter Probleme.

**Satz von Chow.** *Jede analytische Teilmenge  $A$  eines komplex projektiven Zahlenraumes  $\mathbb{P}_n$  ist algebraisch.*

Man betrachtet dazu die kanonische Abbildung  $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_n$  und stellt fest, daß die analytische Teilmenge  $\pi^{-1}(A) \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  in jedem ihrer Punkte mindestens eindimensional ist. Nach dem Fortsetzungssatz von Remmert und Stein ist  $B := \pi^{-1}(A) \cup \{0\}$  in  $\mathbb{C}^{n+1}$  analytisch. Nun hat jede auf  $U(0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$



holomorphe Funktion  $f$ , die auf  $B$  verschwindet, die Eigenschaft, daß sie für jede ihrer Nullstellen  $x \neq 0$  auf der Geraden durch  $x$  und  $0$  gleich null ist, d. h. alle homogenen Bestandteile von  $f$  verschwinden auf  $B$ , und  $B$  wird durch homogene Polynome beschrieben, was zu zeigen war.

In ähnlicher Weise können die klassischen Sätze von Levi und Hurwitz-Weierstraß abgeleitet werden [Re 1956b].

**Satz von Levi.** *Sei  $A$  eine analytische Menge und  $T \subset A$  eine analytische Teilmenge, derart daß in allen Punkten  $x$  von  $T$  gilt:  $\dim_x T \leq \dim_x A - 2$ . Dann läßt sich jede auf  $A \setminus T$  meromorphe Funktion auf  $A$  eindeutig meromorph fortsetzen.*

**Satz von Hurwitz-Weierstraß.** *Jede meromorphe Funktion auf einer algebraischen Teilmenge  $A \subset \mathbb{P}_n$  ist rational.*

In engem Zusammenhang damit steht die Frage nach dem Transzendenzgrad des Körpers der meromorphen Funktionen auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit. Weierstraß hatte bereits  $2n$ -fach periodische Funktionen in  $n$  komplexen Veränderlichen betrachtet. In seiner Dissertation bewies 1939 Walter Thimm (vgl. auch [Tm 1966]) den folgenden

**Satz (Thimm).** *In einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit sind  $n+1$  meromorphe Funktionen stets algebraisch abhängig, wenn es unter ihnen  $n$  analytisch unabhängige Funktionen gibt.*

Von Carl Ludwig Siegel und Jean-Pierre Serre stammen weitere Beweise, in denen kompakte Quotienten von Holomorphiegebieten besonders berücksichtigt werden.

Später wurde von Thimm allgemein für kompakte komplexe Räume festgestellt, daß analytisch abhängige meromorphe Funktionen stets algebraisch abhängig sind. Enthalten ist implizit auch eine 1952 ohne Beweis angegebene Aussage von Chow, daß für einen  $n$ -dimensionalen kompakten komplexen Raum der Körper der meromorphen Funktionen eine einfache Erweiterung eines Körpers von rationalen Funktionen in höchstens  $n$  Unbestimmten ist.

### 8.3 Weitere Fortsetzungssätze

In einer überraschenden, formalen Analogie zu den Hebbarkeitssätzen für holomorphe Funktionen stehen Fortsetzungssätze für analytische Mengen. Konnte man im Satz von Remmert-Stein eine Entsprechung des Riemannsches Hebbarkeitssatzes sehen, so finden sich bei Wolfgang Rothstein erste Ergebnisse, die den Hartogschen Fortsetzungssätzen entsprechen [Ro 1950].

**Satz (Rothstein).** *Es sei  $n > 2$ . Dann besitzt jede analytische Menge*

$$A \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^n; 1/2 < \sum_1^n |z_j|^2 < 1 \right\}$$

eine eindeutige Fortsetzung zu einer analytischen Teilmenge von

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n; \sum_1^n |z_j|^2 < 1 \right\}.$$

Ferner besitzt jede analytische Teilmenge einer Hartogsfigur

$$H = \left\{ z \in \mathbb{C}^n; |z_1| < \frac{1}{2}, \sum_2^n |z_j|^2 < 1 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C}^n; |z_1| < 1, \frac{1}{2} < \sum_2^n |z_j|^2 < 1 \right\}$$

eine eindeutige Fortsetzung zu einer analytischen Teilmenge der Holomorphiehülle

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n; |z_1| < 1, \sum_2^n |z_j|^2 < 1 \right\}$$

von  $H$ .

Dieser Satz wurde zunächst nur für analytische Hyperflächen, d. h. analytische Mengen der Kodimension eins, unter der Voraussetzung  $n \geq 3$  bewiesen. In [Ro 1955] wurde gezeigt, daß es genügt,  $\dim A \geq 2$  anzunehmen. In diesem Ergebnis äußert sich wiederum der Zusammenhang zwischen Pseudokonvexitätseigenschaften und der Gültigkeit von analytischen Fortsetzungssätzen. Ein weiteres Resultat aus [Ro 1950] betrifft die Algebraizität von analytischen Hyperflächen des Komplementes von Hyperkugeln im komplex projektiven Raum. In [Ro 1955] wurde dann allgemeiner gezeigt:

**Satz.** *Es sei  $A$  eine irreduzible, rein  $k$ -dimensionale analytische Teilmenge einer Umgebung  $U$  einer  $q$ -dimensionalen Ebene  $E \subset \mathbb{P}_n$ , so daß  $A \cap E \neq \emptyset$ . Es gelte  $k + q > n$ . Dann ist  $A$  der Durchschnitt einer projektiv-algebraischen Teilmenge  $B \subset \mathbb{P}_n$  mit  $U$ .*

Der in diesem Zusammenhang von Rothstein eingeführte Begriff der  $q$ -Pseudokonvexität soll in Abschnitt 12.4 noch angesprochen werden.

Der Satz von Rothstein wurde später von Yum-Tong Siu und Günther Trautmann verallgemeinert zur Fortsetzung kohärenter Untergarben über konkave Ränder unter entsprechenden Bedingungen über die Lasker-Noether-Zerlegungen bzw. Lückengarben (vgl. Abschnitt 11.4 und 11.7).

#### 8.4 Fortsetzung meromorpher Funktionen in Tori und komplex-projektiven Räumen

Ausgangspunkt der Untersuchungen von Wolf Barth über die globale Fortsetzbarkeit meromorpher Funktionen ist ein Satz von Francesco Severi: *Jede auf einer zusammenhängenden Umgebung einer Hyperfläche  $H \subset \mathbb{P}_n$ ,  $n \geq 2$ , meromorphe Funktion läßt sich zu einer auf ganz  $\mathbb{P}_n$  rationalen Funktion fortsetzen.* Erste Verallgemeinerungen wurden mit den Methoden von Rothstein gewonnen. Für das abschließende Resultat mußten allerdings zunächst Fortsetzungssätze auf komplexen Tori gezeigt werden.

Eine zusammenhängende Umgebung  $U$  einer (nicht diskreten) reindimensionalen analytischen Menge  $A$  einer komplexen Mannigfaltigkeit wird kurz *Schlauchgebiet* genannt.

Für kompakte komplexe Tori  $T = \mathbb{C}^n/G$  liefern die Vereinigungen von Bildern „kleiner“ offener Kugelumgebungen (mit festem Radius) unter der Abbildung  $\mathbb{C}^n \rightarrow T$  genommen über alle Punkte aus  $A$  spezielle Schlauchgebiete, die „Parallelmengen“ genannt werden. Der Rand einer Parallelmenge besitzt spezielle geometrische Eigenschaften.

**Definition.** *Es sei  $V \subset U$  ein Gebiet in einer komplexen Mannigfaltigkeit  $U$ . Eine lokale Stützfläche in einem Randpunkt  $p \in \partial V$  ist eine analytische Teilmenge positiver Dimension  $\tilde{A} \subset Q$  einer Umgebung  $Q \subset U$  von  $p$ , derart daß  $\tilde{A} \setminus \{p\} \subset U \setminus V$  gilt.*

Für irreduzible Tori und alle kompakten analytischen Mengen  $A$  besitzen Parallelmengen Stützflächen der Dimension  $\dim A$ . Insbesondere ist jedes solche Schlauchgebiet eines irreduziblen Torus *pseudokonvex* im Sinne von Aldo Andreotti. Andererseits sind irreduzible Tori, die positiv dimensionale analytische Teilmengen enthalten, algebraisch. Somit ist der Körper der auf einem Schlauchgebiet eines solchen Torus meromorphen Funktionen eine einfache Erweiterung eines rationalen Funktionskörpers maximalen Transzendenzgrades. Meromorphe Funktionen auf beliebig kleinen Schlauchgebieten können nun auf feste Parallelmengen ausgedehnt werden. Die Ausdehnung auf den ganzen Torus ist allgemein nur unter der Voraussetzung  $\dim A \geq \dim T/2$  möglich. Der lokale Fortsetzungssatz wird mit einer verzweigten Überlagerung  $T \rightarrow \mathbb{P}_n$  auf den komplexprojektiven Raum übertragen, für den Schritt zum Globalen wird noch einmal Pseudokonvexität ausgenutzt.

**Satz** (Barth [Ba 1967]). *Jede meromorphe Funktion auf einem Schlauchgebiet des  $\mathbb{P}_n$ ,  $n > 1$  läßt sich zu einer auf ganz  $\mathbb{P}_n$  rationalen Funktion fortsetzen.*

## 9 Garbentheorie

### 9.1 Garbentheorie in der Komplexen Analysis – Anfänge

Der Garbegriff selbst war 1946 von Jean Leray in topologischem Zusammenhang geprägt worden. Die Bedeutung dieses Konzeptes für die Komplexe Analysis wurde von Cartan und Serre bei der Betrachtung der Cousin-Probleme und des Begriffes der Steinschen Mannigfaltigkeit realisiert. Sie legten 1950/51 die Theorie in ausgefeilter Form vor.

Daneben war die Sprache der Garbentheorie bereits unabdingbare Voraussetzung, um den Begriff des Komplexen Raumes zu fassen.

Die Wurzel der Garbentheorie in der Komplexen Analysis ist ohne Zweifel der Weierstraßsche Standpunkt der Funktionentheorie, der „Funktionselemente“, d. h. Potenzreihenentwicklungen holomorpher Funktionen, in den Vordergrund stellte. Später benutzte man hierfür den Begriff des „Funktionskeims“, entliehen aus der Sprache der Garbentheorie. Die Menge aller Weierstraßschen Funktionselemente auf einem Gebiet des  $\mathbb{C}^n$  trägt bereits eine

Topologie: eine große Zahl offener Mengen von Funktionskeimen (genaugenommen eine Basis der Topologie) erhält man ganz einfach durch globale holomorphe Funktionen, denen man die Gesamtheit ihrer Potenzreihenentwicklungen (d. h. ihrer Funktionskeime) zuordnet. Eine natürliche, lokal topologische, Abbildung auf den Definitionsbereich ist dann durch die Zuordnung der jeweiligen Entwicklungspunkte gegeben. Auf elegante Weise ist die Schwierigkeit mehrdeutiger holomorpher Fortsetzungen dadurch umgangen, daß über einem Punkt des Zahlenraumes mehrere Funktionskeime liegen können. Die Riemannsche Fläche zu einer (zunächst nur im Kleinen gegebenen) holomorphen Funktion erhält man aus der Zusammenhangskomponente des zugehörigen Keims im Raum der Funktionselemente. (Windungspunkte müssen allerdings noch eingesetzt werden). Auf diese Art lassen sich schließlich auch Gebiete über dem  $\mathbb{C}^n$  verstehen.

Fortan wurden für ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}^n$  oder allgemeiner für eine komplexe Mannigfaltigkeit  $X$  mit  $\mathcal{O}_X$  bzw.  $\mathcal{O}_G$  die *Garbe der Keime von holomorphen Funktionen* bezeichnet, und es stand  $\mathcal{O}_{X,x}$  für die *Gesamtheit aller Funktionskeime in einem Punkt  $x \in X$* , den „Halm“ der Garbe  $\mathcal{O}_X$ , d. h. es gilt

$$\mathcal{O}_X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Für holomorphe Funktionen hat man nun eine rein topologische Beschreibung: jedem Punkt  $x$  wird ein Funktionskeim aus  $\mathcal{O}_{X,x}$  zugeordnet, und dies auf stetige Weise – man spricht von „Schnitten“ der Garbe. Die Notation dafür ist

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) &= \{ \sigma : U \rightarrow \mathcal{O}_X; \sigma \text{ ist stetig, } \sigma(x) \in \mathcal{O}_{X,x} \} \\ &= \{ \sigma : U \rightarrow \mathbb{C}; \sigma \text{ ist holomorph} \}, \end{aligned}$$

wobei  $U \subset X$  eine offene Menge sei. Eine andere Schreibweise dafür ist  $\mathcal{O}_X(U)$ .

Die geometrischen Begriffe *holomorphes Geraden-* bzw. *Vektorbündel* fanden in der Garbentheorie ihre Entsprechung: Deren (holomorphe) Schnitte sind gerade die Schnitte mit Werten in einer zugehörigen lokal freien  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe vom entsprechenden Rang.

Bei der allgemeinen Definition *meromorpher Funktionen* geht man entsprechend von meromorphen Funktionskeimen aus, d. h. von Quotienten holomorpher Funktionskeime. Diese schließen sich zusammen zu einer Garbe, deren Schnitte als *meromorphe Funktionen* bezeichnet werden und – diese Schwierigkeit sollte man nicht übergehen – i. a. nicht mit Quotienten globaler holomorpher Funktionen identifiziert werden können.

Der garbentheoretische Standpunkt erweist sich als zwingend bei der Lösung von Mittag-Leffler-Verteilungen in höheren Dimensionen. Anders als im klassischen Fall ist der Hauptteil einer meromorphen Funktion im allgemeinen nicht mehr durch nur endlich viele Koeffizienten zu beschreiben. Dies erfordert den Übergang zum Raum der *Keime* von Hauptteilen, d. h. additiven Äquivalenzklassen meromorpher Funktionskeime bezüglich der Untergarbe der holomorphen Funktionskeime. Man schreibt dafür  $\mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X$ , wenn  $\mathcal{M}_X$  die Garbe der Keime der meromorphen Funktionen bezeichnet. Die präzise Fassung einer Hauptteil-

verteilung auf einer komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  ist ein Schnitt

$$\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X). \quad (7)$$

Der Kalkül der Garbentheorie erwies sich als eine äußerst elegante Sprache, um Probleme der Komplexen Analysis zu beschreiben und zu lösen. Seine Väter sprechen an dieser Stelle nicht zu Unrecht vom „Yoga“ der Garbentheorie.

## 9.2 Garben holomorpher Funktionen auf analytischen Mengen

Es lag nun nahe, für eine (abgeschlossene) analytische Teilmenge  $A$  einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}^n$  eines Zahlenraumes alle Einschränkungen holomorpher Funktionen von  $U$  auf  $A$  als analytisch zu definieren und alle stetigen Funktionen, die zumindest lokal auf diese Weise zu erhalten sind, als holomorph zu bezeichnen.

Dieser Weg kann in der Sprache der Garbentheorie folgendermaßen beschrieben werden: Holomorphe Funktionen auf offenen Teilmengen  $W \subset U$ , welche eingeschränkt auf  $A$  dieselben Funktionswerte besitzen, unterscheiden sich offensichtlich nur durch eine auf  $A$  verschwindende Funktion. Von Interesse ist also die entsprechende Restklasse einer holomorphen Funktion. Im einzelnen geht man folgendermaßen vor: Man bezeichnet mit

$$\mathfrak{a}_p \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p}$$

das Ideal aller Funktionskeime in  $p$ , die jeweils durch holomorphe Funktionen auf gewissen Umgebungen  $\tilde{U}$  von  $p$  repräsentiert werden, welche eingeschränkt auf  $A \cap \tilde{U}$  verschwinden. Wegen der Noethereigenschaft von  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p}$  ist  $\mathfrak{a}_p$  endlich erzeugt. Alle Restklassenringe

$$\mathcal{O}_{A, p} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p} / \mathfrak{a}_p,$$

$p \in A$  bilden zusammengenommen eine Garbe  $\mathcal{O}_A$ , deren Schnitte holomorphe Funktionen auf  $A$  genannt werden. Diese Garbe wird Strukturgarbe von  $A$  genannt und ist eine Untergarbe der Garbe der stetigen komplexwertigen Funktionen auf  $A$ .

## 9.3 Geometrische Eigenschaften analytischer Mengen algebraisch gefaßt

Der letztlich von Weierstraß ausgegangene Impuls der Algebraisierung der Komplexen Analysis veränderte in ganz besonderem Maße das Studium analytischer Mengen. Analytisch-geometrische Eigenschaften der Mengen wurden von Grauert und Remmert in [Gr-Re 1958a] übersetzt in algebraische Eigenschaften der zugehörigen Ringe holomorpher Funktionen.

**Irreduzibilität.** Wichtig ist es zunächst, zu wissen, wann sich eine analytische Menge  $A \subset U \subset \mathbb{C}^n$  lokal, d. h. in einer Umgebung eines Punktes  $p \in A$ , als nichttriviale Vereinigung analytischer Teilmengen schreiben läßt: Genau in diesem Fall findet man holomorphe Funktionen, die auf einem Bestandteil verschwinden, jedoch auf dem anderen von null verschieden sind. Das Produkt ist sicherlich identisch null auf der ganzen analytischen Menge. Irreduzibilität bedeutet genau, daß der Ring  $\mathcal{O}_{A, p}$  der holomorphen Funktionskeime von  $A$

nullteilerfrei ist. Insbesondere kann man zeigen, daß irreduzible holomorphe Funktionskeime, d. h. Elemente des faktoriellen Ringes  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ , Anlaß zu lokal irreduziblen Nullstellenmengen geben. Die Singularitätenmenge  $S(A)$  einer lokal irreduziblen analytischen Menge  $A$  bildet schließlich eine nirgendwo zerlegende Teilmenge von  $A$ .

**Normale Analytische Mengen.** Entsprechend kann man die Gültigkeit des *zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatzes* in die Bedingung übersetzen, daß der Ring  $\mathcal{O}_{A,p}$  *normal*, d. h. ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist; umgekehrt geben algebraische Konstruktionen, wie etwa die Normalisierung eines nullteilerfreien Ringes  $\mathcal{O}_{A,p} \xrightarrow{\hat{\phantom{x}}} \hat{\mathcal{O}}_{A,p}$  holomorpher Funktionen im wesentlichen Anlaß zu einer Abbildung  $A \rightarrow \hat{A}$  analytischer Mengen derart, daß für die Halme der Strukturgarben  $\mathcal{O}_{\hat{A},p} = \hat{\mathcal{O}}_{A,p}$  gilt. Um dieses Konzept durchführen zu können, benötigten Grauert und Remmert bei der Konstruktion der Normalisierung eines komplexen Raumes in [Gr-Re 1958a] allerdings noch Methoden aus der Theorie der *kohärenten* Garben (vgl. Abschnitt 11).

#### 9.4 Garbenkohomologie

**Erste Anwendungen.** In der Komplexen Analysis traten fortan *Kohomologieklassen* regelmäßig als *Hindernisse* auf, wenn eine globale Lösung eines Problems gesucht wurde, welches im Kleinen eine Lösung besitzt oder welches durch lokale Daten gegeben wird.

Ein Beispiel liefert das erste Cousin-Problem: Zu vorgegebenen Hauptteilen meromorpher Funktionen auf einer komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  kann man zunächst eine „Cousin-Verteilung“ angeben. Gegeben sei also wie in (7) in Abschnitt 9.1 ein Schnitt  $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X)$ , den man bezüglich einer geeigneten, hinreichend feinen, offenen Überdeckung  $\{U_i; i \in I\}$  von  $X$  durch meromorphe Funktionen  $m_i$  repräsentiert, welche sich auf den jeweiligen Durchschnitten durch holomorphe Funktionen  $h_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$  unterscheiden:

$$m_i|(U_i \cap U_j) = m_j|(U_i \cap U_j) + h_{ij}$$

Diese bilden einen 1-Kozykel  $(h_{ij})$  holomorpher Funktionen d.h. es gelten die Relationen:

$$h_{jk}|U_i \cap U_j \cap U_k - h_{ik}|U_i \cap U_j \cap U_k + h_{ij}|U_i \cap U_j \cap U_k = 0$$

für alle  $i, j, k \in I$ . Die Lösung des Cousin-Problems besteht darin, diesen als 1-Korand

$$h_{ij} = h_j|U_i \cap U_j - h_i|U_i \cap U_j$$

von holomorphen Funktionen  $h_i$  auf den  $U_i$  zu schreiben, so daß die  $m_i + h_i$  sich zu einer globalen meromorphen Funktion zusammenschließen.

Üblicherweise wird die Gruppe aller 1-Kozyklen mit Werten etwa in der Garbe  $\mathcal{O}_X$  bzgl. der Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  mit

$$\mathcal{Z}^1(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{O}_X)$$

bezeichnet, und die Untergruppe aller 1-Koränder mit

$$\mathcal{B}^1(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{O}_X).$$

Die Faktorgruppe ist die erste Kohomologiegruppe und wird mit

$$H^1(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{Z}^1(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{O}_X) / \mathcal{B}^1(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{O}_X)$$

bezeichnet. Nach dem Übergang zum induktiven Limes bzgl. der Verfeinerung der betrachteten Überdeckungen erhält man die (erste) Kohomologiegruppe

$$H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

von  $X$  mit Werten in der Garbe  $\mathcal{O}_X$ .

Das Hindernis gegen die Darstellung von  $\sigma$ , d. h. des 1-Kozykels  $(h_{ij})$ , als Korand bei geeigneter Verfeinerung der Überdeckung besteht somit in seiner Restklasse, einem Element der ersten Kohomologie.

Kohomologiegruppen mit Werten in Garben sind wichtige Invarianten komplexer Mannigfaltigkeiten, und andere Invarianten kann man als ausgezeichnete Kohomologieklassen fassen, so daß das Verschwinden von Kohomologiegruppen unmittelbare Anwendungen hat.

### 9.5 Čechsche Garbenkohomologie

Die bei der Lösung der Cousin-Probleme aufgetretenen Hindernisgruppen sind wichtige Spezialfälle der Čechschen Kohomologiegruppen, die von Anfang an von Cartan und Serre benutzt werden.

Man bezeichnet Tupel von Schnitten  $h_{i_0, \dots, i_q} \in \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}, \mathcal{G})$  in einer Garbe  $\mathcal{G}$  als  $q$ -Koketten und schreibt  $C^q(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{G})$  für den Raum aller  $q$ -Koketten.

Der Raum aller  $q$ -Koränder  $B^q(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{G})$  besteht aus allen Tupeln von Schnitten  $g_{i_0, \dots, i_q} \in \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}, \mathcal{G})$ , die von der Form

$$g_{i_0, \dots, i_q} = \delta^{q-1}(f_{i_0, \dots, i_{q-1}}) := \sum_{j=0}^q (-1)^j f_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_q} | U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}$$

sind, wobei  $(f_{i_0, \dots, i_{q-1}})$  eine  $(q-1)$ -Kokette ist. Die Abbildung

$$\delta^{q-1} : C^{q-1}(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{G}) \rightarrow C^q(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{G})$$

wird Korand-Abbildung genannt.

Die Menge der  $q$ -Kozyklen  $Z^q(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{G})$  mit Werten in einer Garbe  $\mathcal{G}$  besteht nach Definition aus allen  $q$ -Koketten  $h$ , welche die Relation

$$\delta^q(h) = 0$$

erfüllen.

Wie oben wird für die Faktorgruppen

$$Z^q(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{G}) / B^q(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{G}) = H^q(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{G})$$

der Grenzübergang bzgl. aller Verfeinerungen von Überdeckungen durchgeführt. Im Limes erhält man die Kohomologiegruppen  $H^q(X, \mathcal{G})$ .

Das Verschwinden aller Kohomologiegruppen  $H^j(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $j > 0$  für Stein-sche Mannigfaltigkeiten ist ein wichtiger Spezialfall des sogenannten Theorems B

von Cartan [Ca 1951/52b]. Bei der Lösung des Cousin-II-Problems treten dann zusätzlich die vorher erkannten topologischen Hindernisse ebenfalls als (ganzzahlige) Kohomologieklassen auf.

## 10 Komplexe Räume

### 10.1 Geringte Räume – lokale Modelle komplexer Räume

Die Notation von Garben wurde zunächst dazu benutzt, die globalen Objekte allgemein zu fassen: Unter einem „geringten“ oder auch „algebrierten“ Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  versteht man einen topologischen Raum  $X$  zusammen mit einer Garbe  $\mathcal{O}_X$  von Ringen bzw.  $\mathbb{C}$ -Algebren. Diese „Strukturgarbe“ wurde zunächst als eine Untergarbe der Garbe  $\mathcal{C}_X$  von stetigen Funktionskeimen eingeführt. Zusammen mit den Objekten, den  $\mathbb{C}$ -geringten bzw. -algebrierten Räumen, sollen gleichermaßen die Morphismen, d. h. holomorphe Abbildungen, betrachtet werden. Diese sind stetige Abbildungen der unterliegenden Räume, zusammen mit Morphismen der korrespondierenden Halme, welche stetige Abbildungen der Garbenräume induzieren. Nach dieser Aufbereitung muß man nur noch angeben, welche lokalen Modelle man betrachten will.

Analytisch verzweigte Überlagerungen sind somit die lokalen Modelle für komplexe Räume im Sinne von Behnke und Stein. Im Jahre 1954 schlug Cartan eine Alternative vor. Als lokale Bausteine sollten vielmehr *normale analytische Mengen* dienen [Ca 1951/52a], und es war nur konsequent, daß Serre in [Se 1955/56] allgemeine analytische Mengen zuließ.

Die Strukturgarbe  $\mathcal{O}_A$  einer analytischen Menge  $A \subset U \subset \mathbb{C}^n$  wurde in Abschnitt 9.2 als der Quotient von  $\mathcal{O}_U$  nach dem Ideal aller auf  $A$  verschwindenden holomorphen Funktionskeime eingeführt. Die Klärung der Situation gelang Grauert und Remmert in [Gr-Re 1958a]. Im Jahre 1960 wurden schließlich von Grauert Strukturgarben mit nilpotenten Elementen eingeführt, in Analogie zu den Strukturgarben von Schemata im Sinne von Alexander Grothendieck. Solche komplexe Räume, deren holomorphe „Funktionen“ nicht mehr notwendig durch ihre Werte bestimmt sind, heißen „nicht reduziert“. Diese treten in natürlicher Weise als Fasern holomorpher Abbildungen auf und beschreiben in präziserer Weise die Multiplizität als numerische Invarianten es vermögen.

Das einfachste Beispiel eines nicht reduzierten komplexen Raumes ist der sogenannte *Doppelpunkt*  $D$ , dessen unterliegender topologischer Raum aus einem Punkt und dessen Strukturgarbe  $\mathcal{O}_D$  aus einem Halm besteht, welcher mit dem Ring konvergenter Potenzreihen in einer Veränderlichen  $z$ , faktorisiert nach dem von  $z^2$  erzeugten Ideal identifiziert werden kann. Schreibt man etwa  $\varepsilon$  für die Restklasse von  $z$ , so gilt  $\mathcal{O}_D = \mathbb{C} \oplus \varepsilon \cdot \mathbb{C}$  mit  $\varepsilon^2 = 0$ . Man kann den Doppelpunkt beispielsweise dazu benutzen, um bei einem gegebenen komplexen Raum  $X$  und  $x \in X$  die Menge aller  $\mathbb{C}$ -wertigen Derivationen von  $\mathcal{O}_{X,x}$ , d. h. aller Abbildungen  $\phi: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\phi(a \cdot b) = a \cdot \phi(b) + b \cdot \phi(a)$ , zu charakterisieren: Diese sind gerade alle holomorphen Abbildungen von  $D$  nach  $X$ , welche den unterliegenden Punkt von  $D$  auf  $x$  abbilden.

Eine weitere Anwendung ist die triviale Erweiterung  $\mathcal{O}_X[\mathcal{M}]$  der Strukturgarbe eines komplexen Raumes durch eine kohärente Garbe (vgl. Abschnitt 13.1).



Ein lokales Modell eines komplexen Raumes im Sinne von [Gr-Re 1958a] bzw. [Gr 1960] ist explizit wie folgt zu beschreiben:

Es sei  $U \subset \mathbb{C}^n$  eine offene Teilmenge und  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$  seien holomorphe Funktionen. Der zugrundeliegende topologische Raum ist das gemeinsame Nullstellengebilde  $A \subset U$  der  $f_1, \dots, f_k$ , und die Strukturgarbe ist die Einschränkung  $\mathcal{O}_A = (\mathcal{O}_U/\mathfrak{a})|_A$  der Restklassengarbe nach dem durch die Funktionen  $f_1, \dots, f_k$  erzeugten Ideal  $\mathfrak{a}$  auf die Teilmenge  $A$  von  $U$ .

Bezüglich lokaler Modelle sind holomorphe Abbildungen komplexer Räume wie folgt explizit zu fassen: Ist  $F: U \rightarrow W$  eine holomorphe Abbildung offener Teilmengen  $U \subset \mathbb{C}^n$ ,  $W \subset \mathbb{C}^m$ , gegeben durch ein  $n$ -Tupel  $(F_1, \dots, F_m)$  holomorpher Funktionen auf  $U$ , welche eine analytische Teilmenge  $A \subset U$  in eine analytische Teilmenge  $B \subset W$  abbildet, so soll sicherlich die Einschränkung  $f$  von  $F$  auf  $A$  eine holomorphe Abbildung von  $A$  nach  $B$  beschreiben. Dies ist allerdings i. a. nur sinnvoll, wenn  $A$  und  $B$  mit der reduzierten komplexen Struktur versehen sind. Falls wie oben  $\mathcal{O}_A = (\mathcal{O}_U/\mathfrak{a})|_A$  und  $\mathcal{O}_B = (\mathcal{O}_W/\mathfrak{b})|_B$  sind, fordert man zusätzlich, daß für  $x \in A$  die Komposition eines Funktionskeims aus  $\mathfrak{b}_{f(x)}$  mit  $F$  stets in  $\mathfrak{a}_x$  enthalten ist. Auf diese Weise wird ein Morphismus  $(A, \mathcal{O}_A) \rightarrow (B, \mathcal{O}_B)$  der zugehörigen geringten Räume erklärt, und umgekehrt können ohne Mühe zu Morphismen komplexer Räume  $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  jeweils lokale Modelle von  $X$  bzw.  $Y$  angegeben werden, so daß  $f$  dort die angegebene Gestalt hat.

## 10.2 Äquivalenz verschiedener Zugänge

Auf Grund der expliziten Beschreibung analytischer Mengen mit Hilfe des Einbettungssatzes war klar, daß normale analytische Mengen, die Cartan vorgeschlagen hatte, Anlaß zu verzweigten Überlagerungen im Sinne von Behnke und Stein gaben. Dies gilt auch für *lokal irreduzible* analytische Mengen, wie in Abschnitt 7 (für Hyperflächen) und in Abschnitt 8.1 dargestellt. In [Gr-Re 1958a] bewiesen Grauert und Remmert das abschließende Resultat: Komplexe Räume im Sinne von Behnke und Stein sind äquivalent zu solchen von Cartan und werden nun als *normale* komplexe Räume bezeichnet. Wichtiger Schritt beim Beweis dieses Ergebnisses war die Konstruktion einer algebroiden Struktur im Sinne von 7 auf einem komplexen Raum im Sinne von Behnke und Stein.

Da Holomorphie von Funktionen auf analytisch verzweigten Überlagerungen durch Holomorphie außerhalb der Verzweigungsmenge erklärt wird, ist allerdings die komplexe Struktur auf einem Überlagerungsraum, der durch eine lokal irreduzible analytische Menge gegeben wird, diejenige der Normalisierung.

**Hauptsatz** (Grauert-Remmert). *Jede analytisch verzweigte Überlagerung eines normalen komplexen Raumes (insbesondere jeder komplexen Mannigfaltigkeit) ist ein normaler komplexer Raum.*

Wichtige Beispiele normaler komplexer Räume sind die Quotienten  $X/G$  komplexer Mannigfaltigkeiten  $X$  nach eigentlich operierenden, diskreten Gruppen von Automorphismen  $G$  (vgl. Abschnitt 10.6).

Weitere Beispiele normaler komplexer Räume sind nach Oka solche, die lokal als analytische Mengen durch eine holomorphe Gleichung beschrieben

werden können mit einer Singularitätenmenge der Kodimension mindestens 2, etwa Hyperflächen in  $\mathbb{C}^3$  mit isolierten Singularitäten.

### 10.3 Holomorphe Bilder komplexer Räume

Eine unmittelbare Folgerung aus der Definition ist die Tatsache, daß *Urbilder analytischer Mengen* unter holomorphen Abbildungen selbst analytisch sind. Im Gegensatz dazu haben Bildmengen im allgemeinen diese Eigenschaft nicht, wie einfache Beispiele zeigen. Die erforderliche Voraussetzung ist topologischer Natur ([Re 1955, Re 1957]):

**Remmerscher Abbildungssatz.** *Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche holomorphe Abbildung komplexer Räume. Dann ist  $f(X) \subset Y$  eine Teilmenge.*

Der Remmersche Abbildungssatz gehörte von Anfang an zu den Standard-Methoden der Komplexen Analysis. Zu seinem Beweis wurde in [Re 1957] die Abbildungstheorie entwickelt, die das Studium holomorpher Abbildungen von konstanter Faserdimension (vgl. Abschnitt 11.10), insbesondere auch offener holomorpher Abbildungen einschließt. Der Nachweis der Analytizität wird letztlich auf die Aussage des Satzes von Remmert-Stein zurückgeführt.

### 10.4 Stein-Faktorisierung

Im Zusammenhang mit Überlegungen zu holomorphen Zerlegungen komplexer Räume [St 1956] entwickelte Stein eine Methode, die den Namen „Stein-Faktorisierung“ trägt.

**Stein-Faktorisierung.** *Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche holomorphe Abbildung komplexer Räume. Dann gibt es eine endliche holomorphe Abbildung  $g: \hat{Y} \rightarrow Y$  sowie eine eigentliche, holomorphe Surjektion  $f: X \rightarrow \hat{Y}$  mit zusammenhängenden Fasern, so daß  $f$  gleich der Komposition*

$$X \xrightarrow{f} \hat{Y} \xrightarrow{g} Y$$

*ist. Ferner ist  $\hat{Y}$  normal, falls  $Y$  diese Eigenschaft hat.*

### 10.5 Meromorphe Abbildungen komplexer Räume

Meromorphe Funktionen in mehreren Veränderlichen waren durch das Auftreten von Unbestimmtheitsstellen ausgezeichnet (vgl. Abschnitt 1.2). Der Übergang zu höherdimensionalen Bildräumen erforderte es, zunächst die lokale Quotientendarstellung meromorpher Funktionen durch etwas anderes zu ersetzen. Von dem naheliegenden Ansatz, Tupel meromorpher Funktionen auf komplexen Räumen als meromorphe Abbildungen zu bezeichnen, war nicht viel Neues zu erwarten.

Außerhalb der Unbestimmtheitsstellen sind *meromorphe Funktionen* nichts anderes als holomorphe Abbildungen mit Werten in der komplex projektiven Ebene  $\mathbb{P}_1$ , womit Polstellen hinreichend erklärt sind. Schränkt man andererseits eine meromorphe Funktion auf eine eindimensionale analytische Menge ein, die nicht ganz in der Unbestimmtheitsmenge enthalten ist, so werden die verbleiben-

den Unbestimmtheitsstellen zu hebbaren Singularitäten. Allerdings hängt der einzusetzende Funktionswert von der Wahl der analytischen Menge ab, so daß eine meromorphe Funktion den Charakter einer mengenwertigen Abbildung erhält.

Der Begriff der meromorphen Abbildung komplexer Räume wurde von Remmert in [Re 1957] geklärt.

**Definition.** *Es seien  $X$  und  $Y$  reduzierte komplexe Räume. Eine meromorphe Abbildung dieser Räume, geschrieben  $f: X \dashrightarrow Y$ , ist durch folgende Bedingungen gegeben:*

- a) *Jedem Punkt  $x \in X$  ist eine nicht leere Menge  $f(x)$  zugeordnet.*
- b) *Der Graph  $\Gamma_f$ , d. h. die Gesamtheit aller Punkte  $(x, y)$  mit  $y \in f(x)$ , ist ein irreduzibler, mit  $X$  gleichdimensionaler Unterraum von  $X \times Y$ .*
- c) *Es gibt eine dichte Teilmenge  $X' \subset X$ , so daß für alle  $x \in X'$  die Menge  $f(x)$  einpunktig ist.*

Es wird gezeigt, daß in dieser Situation die kanonische Projektion des Graphen  $\pi: \Gamma_f \rightarrow X$  eigentlich ist und daß für meromorphe Abbildungen normaler Räume alle diskreten Fasern von  $\pi$  einpunktig sein müssen. Damit besteht die Unbestimmtheitsmenge  $N$  von  $f$  gerade aus den Punkten  $x \in X$ , deren Faser  $\pi^{-1}(x)$  eine positive Dimension hat. Aus Dimensionsgründen (vgl. Abschnitt 11.10) gilt  $\dim(N) \leq \dim(X) - 2$  ganz in Übereinstimmung mit der bekannten Situation meromorpher Funktionen.

## 10.6 Quotienten komplexer Räume nach komplexen Lieschen Gruppen

Normale komplexe Räume waren auf natürliche Weise in den fünfziger Jahren aufgetreten: In [Ca 1953/54] zeigte Cartan, daß der Quotient  $\mathbb{C}^n/G$  eines komplexen Zahlenraumes nach einer endlichen Gruppe  $G$  linearer Automorphismen, versehen mit der Garbe  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^G$  der  $G$ -invarianten holomorphen Funktionen, diese Eigenschaft besitzt. Diese Technik wurde verallgemeinert, und zwar zunächst auf die Operationen endlicher Gruppen holomorpher Automorphismen (mit Fixpunkt) auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}^n$  mit  $0 \in U$  vermöge Linearisierung durch Koordinatentransformation. Die Operation einer endlichen Gruppe auf einer analytischen Menge wird auf eine umgebende offene Menge eines Zahlenraumes ausgedehnt und entsprechend behandelt. Ferner wurde dieses Ergebnis von Cartan globalisiert: In diesem Zusammenhang heißt die Operation einer Gruppe  $G$  von Homöomorphismen eines topologischen Raumes  $X$  *eigentlich diskontinuierlich*, wenn (a) je zwei nicht  $G$ -äquivalente Punkte Umgebungen  $U$  und  $U'$  besitzen derart, daß alle  $g(U)$ ,  $g \in G$  zu  $U'$  disjunkt sind, (b) für alle  $x \in X$  die Isotropiegruppen  $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$  endlich sind und (c) jeder Punkt  $x \in X$  eine offene,  $G_x$ -invariante Umgebung  $U''$  besitzt derart, daß der Durchschnitt  $U'' \cap g(U'')$  nur für  $g \in G_x$  nicht leer ist.

Der allgemeine Satz besagt nun, daß Quotienten komplexer Räume nach eigentlich diskontinuierlich operierenden Automorphismengruppen eine natürliche komplexe Struktur besitzen und Normalität sich auf den Quotienten überträgt. Man spricht von einer „natürlichen“ komplexen Struktur, wenn wie oben die Garbe der invarianten holomorphen Funktionen die Strukturgarbe

eines komplexen Raumes ist, dessen unterliegender topologischer Raum gerade der Quotient ist.

Quotienten komplexer Räume nach komplexen Lieschen Gruppen von Automorphismen wurden systematisch von Harald Holmann in [Hol 1960a, Hol 1960b, Hol 1963] untersucht.

Der Begriff der eigentlich diskontinuierlich operierenden Automorphismengruppe wurde ausgedehnt und dabei einfacher: Man sagt, daß eine komplexe Liesche Gruppe  $G$  auf einem komplexen Raum  $X$  *eigentlich* operiert, wenn die Abbildung  $G \times X \rightarrow X \times X, (g, x) \mapsto (g(x), x)$  eigentlich ist. Insbesondere ist die Operation kompakter Gruppen stets eigentlich. Eine komplexe Liesche Gruppe zusammen mit einer holomorphen Operation auf einem komplexen Raum wird kurz komplexe Transformationsgruppe dieses Raumes genannt. Es gilt:

**Satz (Holmann).** *Sei  $X$  ein komplexer Raum mit einer komplexen Transformationsgruppe  $G$ . Operiert diese eigentlich, so besitzt der Quotient  $X/G$  eine natürliche komplexe Struktur. Ist  $X$  normal, so auch  $X/G$ .*

Die Voraussetzung der Eigentlichkeit konnte dabei noch abgeschwächt werden.

## 10.7 Singularitäten komplexer Räume

Die Theorie der Singularitäten komplexer Räume hat sich inzwischen zu einem selbständigen, wichtigen Gebiet entwickelt. An dieser Stelle soll über die Anfänge gesprochen werden.

**Singularitäten komplexer Kurven.** In [Bra 1928] veröffentlichte Karl Brauner Resultate über die Topologie ebener Kurvensingularitäten. Hier findet sich der Ansatz, eine Sphäre maximaler Dimension, d. h.  $S_3 \subset \mathbb{C}^2$  um die Singularität, mit der gegebenen komplexen Kurve zu schneiden. Im Beispiel einer für teilerfremde Zahlen  $p$  und  $q$  durch die Gleichung

$$z^p - w^q = 0$$

in  $\mathbb{C}^2$  gegebenen Kurve  $C$  erhielt er folgendes Bild: Ist  $S_3 \subset \mathbb{C}^2$  die Einheitsosphäre, so ist der Durchschnitt  $\Sigma = C \cap S_3$  ein Kreislinie; er wird durch  $\phi \mapsto (e^{i\phi q}, e^{i\phi p})$  parametrisiert und ist in  $S_1 \times S_1 = \{(z, w), |z| = |w| = 1\}$  enthalten. Man spricht von einem *Torusknoten*. Brauner benutzte dann den Weierstraßschen Vorbereitungssatz und Puiseux-Entwicklungen, um zu sehen, daß diese Beispiele hinreichend allgemein waren, um die Topologie ebener Kurvensingularitäten zu beschreiben.

**Quotientensingularitäten.** In Abschnitt 10.6 wurde bereits angesprochen, daß insbesondere Quotienten komplexer Zahlenräume nach endlichen Gruppen linearer Automorphismen eine eindeutig bestimmte Struktur eines normalen komplexen Raumes tragen. Das Studium von Quotientensingularitäten geht allerdings mindestens auf die Ergebnisse von Felix Klein aus dem Jahre 1884 zurück.

Eine der Wurzeln der Theorie ist auch die Untersuchung hypergeometrischer Differentialgleichungen durch Carl Friedrich Gauß und Bernhard Riemann, speziell die Frage nach der Monodromie der lokalen Lösungen: Diese bilden einen

zweidimensionalen Vektorraum – das Anfangswertproblem ist für Punkte  $t_0$  aus  $\mathbb{P}_1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  erklärt. Durch Vergleich der Lösungen, fortgesetzt entlang von Wegen in  $\mathbb{P}_1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ , erhielt man eine lineare Darstellung der ersten Homotopiegruppe dieses Raumes, die durch geeignete Transformationen auf eine Darstellung mit Werten in  $SL(2, \mathbb{C})$  reduziert werden konnte.

Felix Klein betrachtete Automorphismen Platonischer Körper, und zwar solche, die von Automorphismen der komplexen Zahlenkugel induziert werden (vgl. [K1 1926/27]). Die Urbilder solcher Untergruppen von  $PGL(2, \mathbb{C})$  in  $SL(2, \mathbb{C})$  wurden die zugehörigen *binären* Gruppen genannt. Diese operieren nach Konstruktion auf  $\mathbb{C}^2$ . Die vielleicht interessanteste dieser Gruppen ist die Ikosaedergruppe  $\mathfrak{I}$ , welche zu der alternierenden Gruppe  $\mathfrak{A}_5$  isomorph ist. Es sei  $\mathfrak{H}$  die zugehörige binäre Gruppe. Klein berechnete die *Invarianten* von  $\mathfrak{H}$ , d. h. den Ring  $\mathbb{C}[z_1, z_2]^{\mathfrak{H}}$  der unter  $\mathfrak{H}$  invarianten Polynome in zwei Veränderlichen. Dieser wird erzeugt von gewissen homogenen Polynomen  $f, J, H \in \mathbb{C}[z_1, z_2]^{\mathfrak{H}}$ , die Klein geometrisch aus zugehörigen rationalen Funktionen auf  $\mathbb{P}_1$  gewann, welche einfache Nullstellen in den 12 Ecken und den 30 Kanten- bzw. 20 Seitenmittelpunkten des Ikosaeders aufweisen. Es gilt die Beziehung  $J^2 + H^3 = 1728f^5$ . Diese Tatsache impliziert den folgenden

**Satz (Felix Klein).** *Die Iksoaedersingularität  $\mathbb{C}^2/\mathfrak{H}$  ist zu der Nullstellenmenge der Gleichung  $x^2 + y^3 + z^5$  in  $\mathbb{C}^3$  isomorph.*

Die Invariante  $Z(z_1, z_2) := f^5/J^2$  ist aus Gradgründen gleich  $Z(z_1/z_2, 1)$ . Die zugehörige meromorphe Funktion  $Z(z) = Z(z, 1)$  ist über den Punkten  $0, 1, \infty$  verzweigt. Ansonsten wird von  $Z$  jeder Wert in einem Fundamentalbereich der Ikosaedergruppe  $\mathfrak{I}$  genau einmal angenommen. Klein zeigte nun durch Differenzieren, indem er die Invarianz von  $Z(z)$  unter  $\mathfrak{I}$  ausnutzte, daß die lokal erklärte Umkehrung  $z(Z)$  eine globale Differentialgleichung, nämlich gerade die hypergeometrische Differentialgleichung

$$y'' + \frac{y'}{Z} + \frac{y}{4(Z-1)^2 Z^2} \cdot \left\{ -\frac{1}{v_2^2} + Z \left( \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} - \frac{1}{v_1^2} + 1 \right) - \frac{Z^2}{v_3^2} \right\} = 0$$

für  $\{v_1, v_2, v_3\} = \{2, 3, 5\}$  erfüllt.

Auf die umfangreiche, weitere klassische Theorie der Quotientensingularitäten soll hier nicht weiter eingegangen werden. Vielmehr sollen einige moderne Entwicklungen beschrieben werden.

**Eine topologische Fragestellung.** Bereits in ihrer grundlegenden Arbeit [Gre 1958a] über komplexe Räume stellten Grauert und Remmert die Frage nach der Existenz von Singularitäten normaler komplexer Räume, welche „zellular“ wären, d. h. zu offenen Teilmengen eines  $\mathbb{C}^n$  homöomorphe Umgebungen besäßen. In der Dimension  $n = 2$ , also für komplexe Flächen wurde dies im Jahre 1961 durch ein Ergebnis von David Mumford abgeschlossen.

Nach David Prill sind *normale* Flächensingularitäten  $p \in X$  durch die *Endlichkeit* ihrer lokalen Homotopiegruppen charakterisiert: Letztere sind als

$$\pi_{X,p} = \lim_{U \in \mathcal{U}(p)} \pi_1(U \setminus p)$$

definiert und stimmen mit der ersten Homotopie eines Umgebungsrandes  $M$  überein. Dazu bemerkte Prill, daß die universelle Überlagerung einer geeigneten punktierten Umgebung endlichblättrig ist und durch einen Punkt vervollständigt werden kann. Nach dem Hauptsatz von Grauert und Remmert aus Abschnitt 10.2 trägt diese die eindeutig bestimmte komplexe Struktur eines normalen komplexen Raumes, und nach dem oben erwähnten Kriterium von Mumford ist diese glatt. Die Gruppe der Decktransformationen  $G$  ist damit eine endliche Gruppe von Automorphismen, deren Quotient  $\mathbb{C}^2/G$  gerade  $X$  ist. Insbesondere ist die erste Homologiegruppe  $H_1(M, \mathbb{Z}) = G/[G, G]$  und für die *Ikosaedersingularität* verschwindet somit die erste Homologie.

**Exotische Sphären.** Egbert Brieskorn gab in [Br 1966a] und [Br 1966b] erstmals Beispiele normaler, singulärer komplexer Räume an, die topologische Mannigfaltigkeiten sind.

**Satz (Brieskorn).** *Es sei  $X \subset \mathbb{C}^{k+1}$  der für ungerades  $k \geq 3$  durch die Gleichung*

$$z_1^2 + \dots + z_k^2 - z_0^3 = 0$$

*beschriebene  $k$ -dimensionale komplexe Raum. Dann ist der unterliegende topologische Raum eine topologische Mannigfaltigkeit.*

Die betrachteten analytischen Mengen besitzen genau eine isolierte Singularität und sind normal (vgl. auch Abschnitt 10.2). (Im übrigen handelt es sich um eine Quotientensingularität). Brieskorn betrachtete den Schnitt  $W$  von  $X$  mit einer  $(2k+1)$ -dimensionalen Sphäre  $S$  in  $\mathbb{C}^{k+1}$ , so daß  $X \setminus 0$  zu  $W \times (0, \infty)$  homöomorph ist. Entscheidend war es nun zu zeigen, daß  $W$  selbst zu einer  $(2k-1)$ -dimensionalen Sphäre homöomorph ist, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Aufgrund der Gültigkeit der Poincaré-Vermutung in der Dimension  $\geq 5$  nach Stephen Smale genügte dafür der Nachweis, daß  $W$  eine einfach zusammenhängende Homologiesphäre ist.

Brieskorn gab ferner an, für welche Zahlen  $(a_0, \dots, a_k)$  auf entsprechende Weise die Lösungsmenge der Gleichung

$$z_0^{a_0} + \dots + z_k^{a_k} = 0$$

in  $\mathbb{C}^{k+1}$ , geschnitten mit einer Sphäre um den Nullpunkt, eine topologische Sphäre ergibt. (Für diese  $(2k-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten wurde die Schreibweise  $\Sigma(a_0, \dots, a_k)$  benutzt).

Topologischen Sphären besitzen verschiedene, nicht äquivalente, differenzierbare Strukturen. Das erste Beispiel wurde 1956 von John Milnor angegeben. Friedrich Hirzebruch zeigte (vgl. [Br 1966b] und [Hi 1966/67]), daß der orientierte Diffeomorphietyp einer topologischen Sphäre  $\Sigma(a_0, \dots, a_k)$  durch die Signatur (vgl. Abschnitt 16.2) bestimmt wird. Bekanntes Beispiel sind die 28 Klassen von 7-Sphären, welche durch die Gleichungen

$$z_0^3 + z_1^{6k-1} + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0, \quad \sum_{j=0}^{2m} |z_j|^2 = 1$$

für  $k = 1, \dots, 28$  gegeben werden.

Auf die Theorie isolierter Singularitäten soll später in Abschnitt 15.6 noch weiter eingegangen werden.

**Lokale topologische Eigenschaften vollständiger Durchschnitte.** Helmut Hamm untersuchte in [Ham 1971] vollständige Durchschnitte in Zusammenhang mit den Ergebnissen von John Milnor über die Singularitäten komplexer Hyperflächen.

Es sei  $G \subset \mathbb{C}^m$  ein Gebiet und die analytische Menge  $Y \subset G$  (mit einem ausgezeichneten Punkt) ein vollständiger Durchschnitt, d. h. das Nullstellengebilde von sovielen holomorphen Funktionen wie die Kodimension angibt. Es wird der Durchschnitt  $\Sigma$  von  $Y$  mit einer Sphäre von kleinem Radius betrachtet sowie der Durchschnitt  $X$  von  $Y$  mit der zugehörigen offenen Kugel. Daneben ist eine relative Situation von Interesse: Es sei  $Y^* \subset G$  ein weiterer vollständiger Durchschnitt, der  $Y$  enthält und die Eigenschaft hat, daß  $Y^* \setminus Y$  nur aus regulären Punkten besteht (zusammen mit einer technischen Bedingung an die jeweiligen irreduziblen Komponenten). Man nennt  $Y$  vollständigen Durchschnitt bezüglich  $Y^*$ . Es seien  $\Sigma^*$  und  $X^*$  sinngemäß gebildet. Dann gilt der folgende lokale Lefschetz-Satz (vgl. auch Abschnitt 11.8).

**Satz (Hamm).** *Es sei  $Y$  vollständiger Durchschnitt der Dimension  $n$ . Dann ist  $\Sigma$   $(n-2)$ -fach zusammenhängend. Allgemeiner: für einen vollständigen Durchschnitt  $Y$  bezüglich  $Y^*$  ist das Paar  $(\Sigma^*, \Sigma)$   $(n-2)$ -fach zusammenhängend.*

Es sei  $Y$  das Nullstellengebilde der holomorphen Funktionen  $f_1, \dots, f_r$  in  $Y^*$ ; dann wird für einen hinreichend kleinen Wert  $\alpha > 0$  die differenzierbare Mannigfaltigkeit  $N = \{z \in Y^*; \|(f_1, \dots, f_r)\| \leq \alpha\}$  mit Rand betrachtet.

**Satz (Hamm).** *Die Mannigfaltigkeiten  $\Sigma^* \setminus \Sigma$  und  $\partial(N \cap X^*)$  sind diffeomorph.*

Für Hyperflächen  $Y = \{z \in Y^*; f(z) = 0\}$  in einem vollständigen Durchschnitt konstruierte Hamm eine verallgemeinerte Milnor-Faserung. Er zeigte, daß die obigen Mannigfaltigkeiten Faserbündel über der Kreislinie  $S^1$  vermöge der Abbildungen  $f/|f|$  bzw.  $f/\alpha$  bilden, welche zueinander diffeomorph sind.

## 11 Kohärente Garben

Neben der Garbe  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$  der Keime holomorpher Funktionen in mehreren Veränderlichen treten auf natürliche Weise weitere Garben durch algebraische Operationen auf, etwa als direkte Summen oder Kerne, Kokerne etc. von Homomorphismen, die ihrerseits durch holomorphe Funktionen beschrieben werden. Gemeinsame Eigenschaft dieser Garben ist die sogenannte *Kohärenz*. Der eigentliche Grund, weshalb *kohärente analytische Garben* unmittelbar bei ihrer Einführung zu den entscheidenden Hilfsmitteln der Komplexen Analysis wurden und damit selbst zum Gegenstand des Interesses, ist sicherlich nicht formaler Natur. Kohärenz bedeutet letztlich, daß man mit dem Halm einer Garbe auch die Struktur in einer gewissen Umgebung kennt. Entscheidend ist der geometrische Aspekt, die Tatsache, daß sich in kohärenten Garben komplexe analytische Struktur manifestiert.

### 11.1 Definition

Die Noethereigenschaft der Ringe von Keimen holomorpher Funktionen war seit den dreißiger Jahren bekannt. Man benötigte jedoch eine „garbisierte“ Fassung. Die ersten Untersuchungen unternahm Cartan und Oka. Ersterer prägte den Begriff der Kohärenz. Neben den Strukturgarben  $\mathcal{O}_X$  von  $\mathbb{C}$ -Algebren auf komplexen Räumen betrachtete man Garben  $\mathcal{G}$  von Moduln. Die Einschränkungen auf offene Teilmengen  $U \subset X$  werden im folgenden mit  $\mathcal{G}_U$  bezeichnet.

**Definition.** *Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{G}$  eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe. Es heißt  $\mathcal{G}$  kohärent, falls folgende Bedingungen gelten:*

1) *Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine Umgebung  $U$  und einen surjektiven Garbendomorphismus*

$$\sigma : \mathcal{O}_U^p \rightarrow \mathcal{G}_U,$$

*d. h.  $\mathcal{G}$  wird über  $U$  von endlich vielen Schnitten als  $\mathcal{O}_U$ -Modulgarbe erzeugt.*

2) *Zu jedem Morphismus*

$$\varphi : \mathcal{O}_V^q \rightarrow \mathcal{G}_V,$$

*wobei  $V \subset X$  eine offene Teilmenge und  $q \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl bezeichnen, hat die Garbe  $\text{Ker } \varphi$  die Eigenschaft 1).*

### 11.2 Kohärenzsätze

Am Anfang, ehe man sich analytischen Mengen zuwandte, stand eine Aussage, die als „Kohärenz der Strukturgarbe“ bekannt ist und 1950 (in einer etwas anderen Sprache) von Oka gezeigt wurde: *Die Garbe  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$  ist kohärent.* Dieser Satz kann inzwischen auf sehr knappe Weise durch ein Induktionsargument gezeigt werden, in dem, wie bereits erwähnt, der Weierstraß-Isomorphismus (5) aus Abschnitt 6 die entscheidende Rolle spielt.

Ein eher formaler Schluß sichert dann, daß die Strukturgarbe eines komplexen Raumes ebenfalls kohärent ist, soweit diese lokal als eine Restklassengarbe der Strukturgarbe einer offenen Teilmenge  $U$  eines  $\mathbb{C}^n$  nach einem von endlich vielen Funktionen erzeugten Ideal geschrieben werden kann: d. h. falls ein lokales Modell  $(A, \mathcal{O}_A)$  im Sinne von Abschnitt 10 betrachtet wird, wobei  $A$  ein Nullstellengebilde  $N(f_1, \dots, f_k) \subset U$  holomorpher Funktionen auf  $U$  ist und  $\mathcal{O}_A$  die Restklassengarbe

$$\mathcal{O}_U / (f_1, \dots, f_k) \cdot \mathcal{O}_U,$$

eingeschränkt auf  $A$ , bezeichnet.

Die natürliche komplexe Struktur einer solchen analytischen Menge  $A = N(f_1, \dots, f_k) \subset U \subset \mathbb{C}^n$  erhält man allerdings durch Restklassenbildung nach dem Ideal  $\mathfrak{i}(A) \subset \mathcal{O}_U$  aller auf  $A$  verschwindenden holomorpher Funktionen.

Die „Kohärenz der Idealgarbe“ war der zweite zentrale Satz der Theorie analytischer Garben: *Die Idealgarbe  $\mathfrak{i}(A)$  einer analytischen Menge ist kohärent.*

Dieses Resultat setzte eine genauere geometrische Kenntnis analytischer Mengen voraus. Die Zerlegung in lokale irreduzible Komponenten wird zuweilen



Weierstraß zugeschrieben (vgl. [Os 1929] p. 132). Ein Beweis wird jedoch i. a. auf die Lasker-Noether-Zerlegung von Idealen bzw. Idealgarben gegründet.

Die Berechnung der Idealgarbe  $\mathfrak{i}(A) \subset \mathcal{O}_U$  einer analytischen Menge  $A = N(f_1, \dots, f_k)$  mit Hilfe der definierenden Funktionen  $f_j$  wird durch den Rückertschen Nullstellensatz, das Analogon zum Hilbertschen Nullstellensatz der Algebraischen Geometrie geleistet. Die Idealgarbe  $\mathfrak{i}(A) \subset \mathcal{O}_U$  umfaßt das von den  $f_j$  erzeugte Ideal  $\mathfrak{a} := (f_1, \dots, f_k) \cdot \mathcal{O}_U$ . Man stellt zunächst fest, daß  $\mathfrak{i}(A)$  sicherlich *reduziert* ist, d. h. mit einer Potenz  $f^k$  eines holomorphen Funktionskeims ist  $f$  dieser selbst in  $\mathfrak{i}(A)_x$  enthalten. Dies gilt insbesondere für Funktionen aus dem *Radikal*  $\text{rad}(\mathfrak{a})$ , dem Ideal aller Funktionskeime, für die eine Potenz in einem Halm von  $\mathfrak{a}$  enthalten ist. In der Tat gilt auch die umgekehrte Inklusion. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes [Rü 1933].

**Rückertscher Nullstellensatz.** *Es sei  $A \subset U \subset \mathbb{C}^n$  die Nullstellenmenge der auf  $U$  holomorphen Funktionen  $f_1, \dots, f_k$ . Dann gilt*

$$\mathfrak{i}(A) = \text{rad}((f_1, \dots, f_k) \cdot \mathcal{O}_U).$$

Aus dem Remmertschen Einbettungssatz zusammen mit dem Rückertschen Nullstellensatz folgt nun ein direkter Beweis der Kohärenz der Idealgarbe.

### 11.3 Kohärente Garben auf Steinschen Mannigfaltigkeiten

Die Tragweite des Begriffs der Kohärenz wird unmittelbar durch die Theoreme A und B deutlich, die erstmals in [Ca 1951/52b] aufgestellt wurden:

*Es sei  $X$  eine Steinsche Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{G}$  eine kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe. Dann gilt*

**Theorem A.** *Der  $\mathcal{O}_X(X)$ -Modul  $\mathcal{G}(X)$  erzeugt jeden Halm  $\mathcal{G}_x$ ,  $x \in X$  (vermöge der Einschränkungabbildung  $\mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{G}_x$ ) als  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul.*

**Theorem B.**  $H^q(X, \mathcal{G}) = 0$  für  $q \geq 1$ .

Theorem A impliziert die Darstellung einer kohärenten Garbe auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit als Quotient einer endlichen freien Modulgarbe nach einer kohärenten Untergarbe, und Theorem B erlaubt in vielen Fällen die explizite Berechnung weiterer Kohomologiegruppen.

Diese Theoreme enthalten die klassischen Ergebnisse über die Cousinschen Probleme und vieles andere mehr.

### 11.4 Lückengarben

Ausgangspunkt der Überlegungen von Thimm war die Tatsache, daß analytische Mengen verschiedene komplexe Strukturen tragen können: Eine verzweigte Überlagerung einer offenen Teilmenge eines Zahlenraumes durch eine (lokal) irreduzible analytische Menge  $A$  hatte Anlaß gegeben zu einem komplexen Raum im Sinne von Behnke und Stein, dessen Struktur mit der Normalisierung von  $A$  im Sinne von Grauert und Remmert übereinstimmte.

Man wußte, daß die Gültigkeit der Riemannschen Hebbarkeitssätze auf *normale* komplexe Räume beschränkt ist. Mit Hilfe der lokalen Darstellung eines

beliebigen reduzierten komplexen Raumes als eine verzweigte Überlagerung eines Polyzyinders hatte man für holomorphe Funktionen auf den Komplementen analytischer Mengen in reindimensionalen komplexen Räumen *meromorphe* Fortsetzungen konstruiert und für diese Ganzheitsgleichungen angegeben. Ohne nun die Normalität der lokalen Algebren von holomorphen Funktionen vorauszusetzen, erhielt man somit spezielle meromorphe Funktionen, die man als *schwach holomorph* bezeichnete. Durch diese Fortsetzungseigenschaft war die Einbettung

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}_X$$

der Strukturgarbe eines lokal irreduziblen, reduzierten komplexen Raumes  $X$  in ihre Normalisierung zu interpretieren.

Die allgemeinen Erzeugung von Garben durch analytische Fortsetzung liegt der Definition von *Lückengarben* zugrunde.

**Definition.** *Es sei  $G \subset \mathbb{C}^n$  ein Gebiet und  $A \subset G$  eine echte analytische Teilmenge. Dann ist zu einer kohärenten Garbe  $\mathcal{M} \subset (\mathcal{O}_G)^p$  die Lückengarbe  $\mathcal{M}[A]$  erklärt durch*

$$\mathcal{M}[A](U) = \{\varphi \in \mathcal{O}(U)^p; \varphi|_{(U \setminus A)} \in \mathcal{M}(U \setminus A)\}$$

für offene Teilmengen  $U \subset G$ .

Für analytische Teilmengen  $A \subset B \subset G$  hat man den natürlichen Morphismus

$$\mathcal{M}[A] \rightarrow \mathcal{M}[B],$$

und die Gültigkeit von Fortsetzungssätzen läßt sich als die Surjektivität von

$$\mathcal{M}[A](U) \rightarrow \mathcal{M}[B](U)$$

ausdrücken.

Ein erstes Hauptergebnis ist die Kohärenz von Lückengarben. Diese beruht ebenso wie die Lösung des Fortsetzungsproblems auf der expliziten Beschreibung von Lückengarben durch Lasker-Zerlegungen. Die Kohärenz einer Garbe  $\mathcal{M} \subset (\mathcal{O}_G)^p$  bewirkt, daß eine Lasker-Zerlegung eines Halmes sich auf eine Umgebung  $V$  des entsprechenden Punktes fortsetzen läßt. Man kann also eine minimale Darstellung

$$\mathcal{M}|_V = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$$

betrachten, wobei die Garben  $\mathfrak{q}_j \subset (\mathcal{O}_G)^p$  primär sind: Jeder Nullteiler eines Halmes  $\mathcal{O}_{V,x}^p/\mathfrak{q}_{j,x}$  liegt im Radikal des Annullatorideals von  $\mathcal{O}_{V,x}^p/\mathfrak{q}_{j,x}$ . Die zugehörige Idealgarbe  $\mathfrak{p}_j \subset \mathcal{O}_G$  ist prim.

**Satz (Thimm).** *Es sei  $A \subset G$  eine echte analytische Teilmenge. Dann gilt (nach Verkleinerung von  $V$ )*

$$\mathcal{M}[A]|_V = \mathfrak{q}_{\lambda_1} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_{\lambda_s},$$

wobei die Primärmoduln  $\mathfrak{q}_{\lambda_j}$  genau durch die Bedingung  $V(\mathfrak{p}_{\lambda_j}) \not\subset A$  bestimmt sind.

Das Fortsetzungsproblem war damit auch auf algebraische Weise beantwortet.

**Korollar.** *Genau dann ist die auf den Halmen induzierte Abbildung  $\mathcal{M}[A]_x \rightarrow \mathcal{M}[B]_x$  ein Isomorphismus, wenn jeder in  $B$  enthaltene analytische Mengenkeim  $V(\mathfrak{p}_j)_x$  bereits  $A$  enthalten ist.*

Um 1970 konnte Thimm mit Hilfe der Lückengarben seinen Fortsetzungssatz für kohärente Untergarben formulieren und beweisen (vgl. Abschnitt 11.7). Allgemeine absolute Lückengarben  $\mathcal{R}_A^i \mathcal{F}$  einer beliebigen kohärenten Garbe  $\mathcal{F}$ , definiert durch die Prägarbe  $U \mapsto H^i(U \setminus A, \mathcal{F})$ , deren induktive Limiten  $\mathcal{R}_d^i \mathcal{F}$  für  $\dim A \leq d$ , sowie deren Kohärenz in Abhängigkeit von der homologischen Kodimension wurden später von Trautmann in [Tr 1969a] untersucht. Eine zusammenfassende, systematische Darstellung der Theorie der Lückengarben findet sich in [S-T 1971].

### 11.5 Fortsetzungssätze für Kohomologieklassen

Fortsetzungssätze ziehen sich wie ein roter Faden durch die Entwicklung der Komplexen Analysis. Die Garben- und Kohomologietheorie ist ein wirksames Instrument, um die verschiedensten Phänomene zu beschreiben und zu beherrschen. Die Riemannschen Hebbarkeitssätze ließen sich unmittelbar als Hebbarkeitssätze für Schnitte der Strukturgarbe eines komplexen Raumes verstehen. Andererseits hatte Cartan bereits im Jahre 1938 festgestellt, daß sich Cousin-I-Verteilungen des Gebietes  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  auf ganz  $\mathbb{C}^3$  eindeutig fortsetzen lassen, und zwar mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel und Laurent-Entwicklungen. Garbentheoretische Methoden ermöglichten hier die allgemeine Antwort. In [Sche 1961] zeigt Günter Scheja:

**Satz** (Scheja). *Es sei  $G \subset \mathbb{C}^n$  ein Gebiet und  $A \subset G$  eine analytische Menge der Kodimension  $k$ . Dann ist die natürliche Einschränkungabbildung*

$$H^p(G, \mathcal{O}_G) \rightarrow H^p(G \setminus A, \mathcal{O}_G)$$

*für  $p \leq \text{codim}_x A - 2$  (in allen  $x \in G$ ) ein Isomorphismus und für  $p \leq \text{codim}_x A - 1$  (in allen  $x \in G$ ) injektiv.*

Um das entsprechende Resultat für beliebige kohärente Garben auf komplexen Räumen zu formulieren, benötigte man den Begriff der *homologischen Dimension*  $\text{hd}_R M$  eines  $R$ -Moduls  $M$ , welche für  $M=0$  durch  $\text{hd}_R M = -1$  und ansonsten durch die minimale Länge  $d$  einer exakten Sequenz

$$0 \rightarrow R^{qd} \rightarrow R^{q(d-1)} \rightarrow \dots \rightarrow R^{q_0} \rightarrow M \rightarrow 0$$

definiert ist.

Die Existenz einer solchen *endlichen* Auflösung eines endlich erzeugten Moduls über einen *Polynomring* war 1890 von David Hilbert bewiesen worden. Diese Tatsache ist unter dem Namen *Szyziensatz* bekannt. Für *reguläre analytische  $\mathbb{C}$ -Algebren*, d. h. Ringe  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$  konvergenter Potenzreihen gilt dieselbe Aussage. Die homologische Dimension ist nach oben durch die Zahl der Unbestimmten des Polynom- bzw. Potenzreihenringes beschränkt.

**Satz** (Scheja [Sche 1964]). *Es sei  $X$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{G}$  eine kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe. Es sei  $A \subset X$  eine analytische Menge derart, daß in jedem ihrer Punkte  $x \in A$  gelte:  $\mathcal{G}_x = 0$  oder  $p \leq (\text{codim}_x A - 2) - \text{hd}_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$ . Dann ist die Einschränkungabbildung*

$$H^p(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^p(X \setminus A, \mathcal{G})$$

*ein Isomorphismus und*

$$H^{p-1}(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^{p-1}(X \setminus A, \mathcal{G})$$

*ist injektiv.*

Die Notwendigkeit der Bedingungen über die homologische Kodimension im Satz von Scheja konnte 1968 von Trautmann gezeigt werden [Tr 1968b].

In Verallgemeinerung dieser Sätze konnte die Kohärenz für die Garben  $\mathcal{H}_A^i \mathcal{G}$  der lokalen Kohomologie gezeigt werden [Tr 1969a].

Auf Grund des Serreschen Dualitätssatzes vermutete Reiffen, daß „duale“ Aussagen auch für Kohomologieklassen mit kompaktem Träger existierten. In [Reif 1966] zeigte er, daß viele allgemeine Aussagen der Kohomologietheorie, insbesondere das Verschwinden der Kohomologiegruppen  $H_\Phi^q(X, \mathcal{G})$  für  $q > \dim(X)$  mit Werten in kohärenten Garben, auf beliebige Trägerfamilien  $\Phi$  übertragbar sind. Die Einschränkung von  $\Phi$  auf das Komplement einer analytischen Teilmenge  $A \subset X$  sei mit  $\Phi|_{X \setminus A}$  bezeichnet.

**Satz** (Reiffen). *Es sei  $X$  ein komplexer Raum versehen mit einer kohärenten Garbe  $\mathcal{G}$  und  $\Phi$  eine (parakompaktifizierende) Trägerfamilie auf  $X$ . Es sei  $A$  eine analytische Teilmenge in  $X$  der Dimension  $k$ . Dann ist die kanonische Fortsetzungsabbildung*

$$H_{\Phi|_{X \setminus A}}^q(X \setminus A, \mathcal{G}) \rightarrow H_\Phi^q(X, \mathcal{G})$$

*surjektiv für  $q \geq k + 1$  und bijektiv für  $q \geq k + 2$ . Insbesondere gilt diese Aussage für Kohomologie mit kompaktem Träger.*

### 11.6 Fortsetzungssätze für lokale Kohomologiegruppen

*Lokale Kohomologiegruppen* von Garben  $\mathcal{F}$  auf einem Raum  $G$  bzgl. lokal abgeschlossener Teilmengen  $A \subset G$  wurden abstrakt von Grothendieck eingeführt.

Ist etwa  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge einer offenen Menge  $U \subset G$ , so ist zunächst

$$\Gamma_A(G, \mathcal{F})$$

als die Untergruppe aller Schnitte  $\sigma$  von  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  erklärt, deren Träger in  $A$  enthalten sind, d. h. deren Werte  $\sigma_x \in \mathcal{F}_x$  für Punkte  $x$  aus  $U \setminus A$  verschwinden. Man stellt fest, daß Morphismen  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  von Garben (abelscher Gruppen) natürliche Morphismen  $\Gamma_A(G, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_A(G, \mathcal{G})$  induzieren. Die allgemeine Theorie liefert die Existenz des „abgeleiteten Funktors“, d. h. zugehörige Kohomologiegruppen

$$H_A^q(G, \mathcal{F}),$$

die als *lokale Kohomologiegruppen* bezeichnet werden.

Falls  $A = U \subset G$  eine offene Teilmenge ist, gilt  $H_A^q(G, \mathcal{F}) = H^q(U, \mathcal{F})$ . Für abgeschlossene Teilmengen  $A$  von  $G$  lassen sich die lokalen Kohomologiegruppen vermöge einer langen exakten Sequenz mit gewöhnlichen Kohomologiegruppen in Verbindung setzen: Man hat

$$\dots \rightarrow H_A^q(G, \mathcal{O}_G) \rightarrow H^q(G, \mathcal{O}_G) \rightarrow H^q(G \setminus A, \mathcal{O}_G) \rightarrow H_A^{q+1}(G, \mathcal{O}_G) \rightarrow \dots$$

Für analytische Teilmengen von Gebieten  $G \subset \mathbb{C}^n$  sind somit die in 11.5 genannten Ergebnisse und der entsprechende Satz aus 11.7 leicht im Sinne des Verschwindens gewisser lokaler Kohomologiegruppen auszudrücken. In [Ba 1968] bewies Wolf Barth Verschwindungssätze für analytische Teilmengen von  $A$  von Hyperkugeln  $B \subset \mathbb{C}^n$  mit isolierter Singularität im Ursprung. Bis dahin waren nur Sätze für vollständige Durchschnitte bekannt. Das Verschwinden der  $H_A^{n+j}(B, \mathcal{O}_B)$  für alle  $j=0, \dots, s, s \leq \dim(A) - 2$  (unter einer weiteren Voraussetzung für  $j=s+1$ ) ist äquivalent zu der folgenden topologischen Bedingung an den Umgebungsrand  $\partial A$  von  $A$ :

$$H^0(\partial A, \mathbb{C}) = \mathbb{C}; \quad H^1(\partial A, \mathbb{C}) = \dots = H^s(\partial A, \mathbb{C}) = 0.$$

Barth berechnete die Kohomologiegruppen des Umgebungsrandes mit analytischen Methoden. Sei

$$H^q(\partial A, \mathcal{O}_B|_A) := \lim_{\substack{\rightarrow \\ 0 \in B}} H^q(A \cap B \setminus \{0\}, \mathcal{O}|_A).$$

Dann gilt der folgende

**Satz (Barth).** *Der von der Einbettung  $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$  induzierte Morphismus*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \otimes H^q(\partial A, \mathbb{C}) \rightarrow H^q(\partial A, \mathcal{O}|_A)$$

*ist bijektiv für  $q \leq \dim(A) - 2$  und injektiv für  $q = \dim(A) - 1$ .*

Für  $q=0$  und  $\dim(A) \geq 2$  liefert der Isomorphie-Satz von Barth die Fortsetzbarkeit von auf  $A \setminus \{0\}$  holomorphen Funktionen auf eine Umgebung von  $A$ , welche 1969 von Hugo Rossi gezeigt worden war. Ferner impliziert für  $\dim(A) \geq (n+1)/2$  der Isomorphie-Satz einen Verschwindungssatz für die Kohomologie von Umgebungsrandern analytischer Mengen, der ein Resultat von John Milnor für analytische Hyperflächen verallgemeinert.

### 11.7 Fortsetzungssätze für kohärente Garben

Ein erstes Resultat von Günther Trautmann über die Fortsetzbarkeit einer kohärenten Garbe  $\mathcal{F}$  in eine analytische Menge hinein betraf *isolierte Ausnahmepunkte*. Es gilt unter einer Voraussetzung an die homologische Kodimension:  $\text{codh } \mathcal{F} \geq 3$ . Hierbei war die homologische Kodimension eines Moduls  $M$  ursprünglich als die maximale Länge sogenannter „ $M$ -Sequenzen“ eingeführt worden (vgl. [Gr-Re 1971] III, 1). Sie steht in Beziehung zur homologischen Dimension (vgl. 11.5) gemäß der Beziehung  $\text{codh}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} \mathcal{F} = n - \text{hd}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} \mathcal{F}$ .

Der Beweis des Trautmannschen Fortsetzungssatzes benutzt die Fréchet-Topologie auf Räumen von Koketten bzgl. offener Steinscher Überdeckungen von

Ringgebieten um einen Ausnahmepunkt, auf die im nächsten Abschnitt noch näher eingegangen wird: Der Korandmodul  $B^1(\{U_j\}, \mathcal{F}) \subset C^1(\{U_j\}, \mathcal{F})$  ist unter den gegebenen Voraussetzungen abgeschlossen.

Allgemein ist nur der Raum der Zyklen als Kern der (stetigen) Korandabbildung abgeschlossen, jedoch nicht der Raum der Koränder, so daß Kohomologiegruppen mit Werten in kohärenten Garben i. a. keine natürliche Fréchet-Topologie tragen. Diese Tatsache hängt, wie sich herausstellte, ganz eng mit der Existenz nicht fortsetzbarer kohärenter Garben zusammen. In [Tr 1968a] wird das nachstehende Ergebnis bewiesen (zur Definition Steinscher komplexer Räume vgl. Abschnitt 13):

**Satz (Trautmann).** *Es sei  $X$  ein normaler komplexer Raum und  $A \subset X$  eine analytische Menge, deren Kodimension in allen Punkten mindestens zwei beträgt. Es sei  $\mathcal{F}$  eine auf  $X \setminus A$  kohärente Garbe ohne Torsion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- 1)  $\mathcal{F}$  ist auf  $X$  fortsetzbar.
- 2) Für jeden Steinschen Teilbereich  $U \subset X$  ist  $B^1(U \setminus A, \mathcal{F})$  abgeschlossen.

Es gilt, wie Trautmann zeigte, auch die Abgeschlossenheit der höheren Korandmoduln  $B^{q+1}(U \setminus A, \mathcal{F})$ , falls  $\mathcal{F}$  in  $A$  hinein fortsetzbar ist:

Da man die analytische Ausnahmemenge  $A$  in Bezug zur Garbe  $\mathcal{F}$  zu sehen hat, muß ihre Dimension mit der Dimension des Trägers von  $\mathcal{F}$  und Untergarben dieser Garbe verglichen werden. Deshalb ist von vornherein vorauszusetzen, daß  $\mathcal{F}$  torsionsfrei ist.

In [Tm 1970] konnte Thimm die Fortsetzbarkeit von kohärenten Untergarben über analytische Mengen der Dimension  $\leq d$  zeigen, falls die  $(d+1)$ ste Lückengarbe mit der gegebenen außerhalb der Ausnahmemenge übereinstimmt. Die analoge Aussage für die Fortsetzbarkeit über konkave Ränder konnte etwa zur gleichen Zeit von Siu und Trautmann gezeigt werden [S-T 1971] in Verallgemeinerung der Sätze von Rothstein.

Die Fortsetzbarkeit über analytische Mengen und konkave Ränder für beliebige (absolute) kohärente Garben konnte in weiteren Arbeiten von Trautmann, Siu und Frisch-Guenot geklärt werden.

### 11.8 Verallgemeinerte Lefschetz-Sätze

Im Zusammenhang mit Verschwindungssätzen für Kohomologiegruppen auf Komplementen abgeschlossener Untermannigfaltigkeiten  $A$  eines projektiven Raumes  $\mathbb{P}_n$  stehen Ergebnisse, die unter dem Namen *Barth-Lefschetz-Sätze* bekannt sind. Das klassische Ergebnis von Solomon Lefschetz über die Kohomologie von Hyperebenenschnitten projektiver Mannigfaltigkeiten wird verallgemeinert [Ba 1970]:

**Satz (Barth).** *Es seien  $A, B \subset \mathbb{P}_n$  projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten der Dimension  $a$  bzw.  $b$ . Es gelte*

$$2a \geq n + s, \quad a + b \geq n + r.$$

Dann ist die Einschränkungabbildung

$$H^q(B, \mathbb{C}) \rightarrow H^q(A \cap B, \mathbb{C})$$

für  $q=0, \dots, \min(r-1, s)$  bijektiv.

Der Satz von Lefschetz ist darin enthalten: Falls  $A$  eine Hyperebene ist, gilt Isomorphie der Kohomologiegruppen für  $q=0, \dots, b-2$ .

Im einzelnen bewies Barth Verschwindungssätze für Gruppen der Form  $H^q(\mathbb{P}_n \setminus A, \mathcal{F})$ , wobei  $\mathcal{F}$  gewisse lokal freie, negative  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$ -Moduln bezeichnen (zum Begriff der Negativität vgl. auch Abschnitt 15). Die Verschwindungsaussagen entsprechen der Surjektivität der Einschränkungabbildungen  $\rho^q: H^q(\mathbb{P}_n, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(A, \mathcal{F}|_A)$  und stehen in Verbindung mit der Surjektivität von  $H^q(\mathbb{P}_n, \mathbb{C}) \rightarrow H^q(A, \mathbb{C})$ . Neben den üblichen Methoden der homologischen Algebra verwandte Barth die Methoden von Andreotti-Grauert (vgl. Abschnitt 12.4). Hilfsmittel ist die Operation der Gruppe  $PGL(n+1, \mathbb{C})$ , um Kohomologieklassen von Untermannigfaltigkeiten auf den umgebenden projektiven Raum zu übertragen.

In [Schn 1975] zeigte Michael Schneider, daß die verallgemeinerten Lefschetzsätze mit einem Verschwindungssatz von Hans Grauert und Oswald Riemenschneider aus [Gr-Ri 1970b] zusammenhängen.

**Satz** (Grauert-Riemenschneider). *Es sei  $G \subset X$  ein hyper- $q$ -konvexes Gebiet und  $E$  ein semi-positives Vektorbündel auf  $X$ . Dann gilt*

$$H^i(G, E \otimes K_X) = 0 \quad \text{für} \quad i \geq q.$$

Als Hyper- $q$ -Konvexität bezeichnet man die Forderung nach der Existenz einer lokalen Ausschöpfungsfunktion, deren Leviform eine spezielle Form hat. In Normalkoordinaten in einem Punkte bezüglich der Kählermetrik soll die Leviform auf der komplexen Tangentialebene an den Rand diagonal und eine Summe bestehend aus  $q$  beliebig gewählten Eigenwerten stets positiv sein. Semi-Positivität von Vektorbündeln ist im Sinne von Nakano zu verstehen als Semi-Definitheitsbedingung an die Krümmungsform einer geeigneten Hermiteschen Metrik des Bündels. Diese wurde auf kohärente Garben verallgemeinert.

Der Lefschetz-Satz von Schneider lautet nun:

**Satz** (Schneider). *Es sei  $X$  eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit und  $Y \subset X$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit, so daß  $X \setminus Y$  hyper- $q$ -konvex und das holomorphe Tangentialbündel  $T_X$  semi-positiv ist. Dann gilt*

$$H^i(X, Y; \mathbb{C}) = 0 \quad \text{für} \quad i \leq \dim(X) - q.$$

Das Verschwinden relativer Kohomologie ist wie gerade beschrieben interpretierbar als eine Fortsetzungseigenschaft von auf  $Y$  gegebenen Kohomologiegruppen nach  $X$ .

Die Verifizierung der Voraussetzungen des Satzes von Schneider gelang für die Klasse der kompakten, irreduziblen, symmetrischen Mannigfaltigkeiten:

**Satz** (Schneider). *Es sei  $X$  eine kompakte irreduzible hermitesch symmetrische Mannigfaltigkeit und  $Y \subset X$  eine  $k$ -kodimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Dann ist  $X \setminus Y$  hyper- $(\dim X - \varphi(k, n))$ -konvex.*

Die Zahlen  $\varphi(k, n)$  wurden für die nichtexzeptionellen symmetrischen Mannigfaltigkeiten explizit angegeben. Für den Typ  $I_{n, n'}$  ist  $\varphi(k, n) = n + n' - 2k$ . Dazu kam noch [Schn 1975]:

**Satz (Schneider).** *Das holomorphe Tangentialbündel des projektiven Raumes ist semi-positiv.*

Der Lefschetz-Satz von Barth folgt unmittelbar aus diesen beiden Sätzen zusammen mit dem Satz von Grauert-Riemenschneider.

### 11.9 Verschwindungssätze

Die Wichtigkeit von Verschwindungssätzen von Kohomologiegruppen gewisser kohärenter Garben ist schon in vorhergehenden Abschnitten deutlich geworden. Daneben sind sie von größter Bedeutung für die Realisierung kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten als Untermannigfaltigkeiten eines  $\mathbb{P}_N$  d. h. für den Kodairaschen Satz, daß Hodge-Mannigfaltigkeiten projektiv algebraisch sind, und das analoge Grauert'sche Theorem für komplexe Räume (vgl. Abschnitt 15.4).

Im Jahre 1954 bewiesen Akizuki und Nakano, daß für ein positives Geradenbündel  $E$  auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  alle Kohomologiegruppen  $H^q(X, \Omega^p(E))$  mit Werten in der Garbe der holomorphen  $E$ -wertigen holomorphen  $p$ -Formen für  $p + q > n = \dim X$  verschwinden. Dieses Ergebnis enthält (mit  $p = n$ ) den Kodairaschen Verschwindungssatz. Von Joseph le Poitier stammt eine Verallgemeinerung auf Vektorbündel, welche im Sinne von Phillip Griffiths positiv sind. Schwach positive Vektorbündel im Sinne von Grauert (vgl. Abschnitt 15.4). sind stets positiv im ersteren Sinne.

Ein einfacher Beweis des Satzes von Le Poitier wurde von Schneider in [Schn 1974] angegeben. Dieser benutzte an Stelle der Bottschen Spektralsequenz den Satz von Leray und ist wegen seiner Auswirkungen auf die nachfolgende Theorie von besonderem Interesse.

**Satz.** *Es sei  $X$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und  $E$  ein holomorphes Vektorbündel vom Rang  $r$  und  $X$ .*

i) *Ist  $E$  schwach positiv, so gilt*

$$H^q(X, \Omega^p(E)) = 0 \quad \text{für} \quad p + q \geq n + r$$

ii) *Ist  $E$  schwach negativ, so gilt*

$$H^q(X, \Omega^p(E)) = 0 \quad \text{für} \quad p + q \leq n - r.$$

Der Beweis geht aus von der Isomorphie

$$H^q(X, \Omega^p(E)) \simeq H^q(\mathbb{P}(E), \Omega^p(L)),$$

wobei  $\pi: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$  das projektivierte Bündel mit Fasern  $\mathbb{P}_{r-1}$  bezeichnet und das kanonische Geradenbündel  $L$  dadurch charakterisiert ist, daß seine Einschränkung auf eine Faser von  $\pi$  gerade zum Hyperebenenbündel des zugehörigen  $\mathbb{P}_{r-1}$  isomorph ist. Da die Komplemente der Nullschnittflächen in den dualen Bündeln



$E^*$  und  $L^*$  zu einander isomorph sind, ist  $E$  genau dann schwach positiv, wenn das Geradenbündel  $L$  auf  $\mathbb{P}(E)$  positiv ist (vgl. 15.4), und der Satz folgt unmittelbar aus dem Ergebnis von Akizuki und Nakano.

### 11.10 Lokale Struktur Komplexer Räume und Abbildungstheorie

**Dimensionsformel.** Die Methoden der lokalen Abbildungstheorie wurden von Remmert im wesentlichen für den Beweis des Abbildungssatzes, d. h. die Analytizität der Bilder holomorpher Abbildungen komplexer Räume unter eigentlichen Abbildungen, entwickelt. Dazu gehörte auch die Charakterisierung der *Offenheit* holomorpher Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  komplexer Räume, die man für diese topologischen Überlegungen als reduziert voraussetzen durfte. Ferner war es keine Einschränkung der Allgemeinheit,  $Y$  als lokal irreduzibel anzunehmen. Üblicherweise bezeichnet man die Faser  $f^{-1}(y)$  eines Punktes  $y \in Y$  mit  $X_y$ . Unter dieser Voraussetzung gilt der folgende Satz von Remmert [Re 1957]:

**Satz.** Eine holomorphe Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann offen, wenn in allen Punkten  $x \in X$  die Dimensionsformel

$$\dim_x X = \dim_x X_{f(x)} + \dim_{f(x)} Y$$

*gilt.*

Für offene Abbildungen (von Mannigfaltigkeiten) ist der Rang der Funktionalmatrix von  $f$  außerhalb einer dünnen Menge maximal. I. a. gelten nur Halbstetigkeitssätze für die Faserdimension. In derselben Arbeit wird die „topologische Entartungsmenge“ studiert, d. h. die Menge aller Punkte, deren Faser eine größere als die zu erwartende Dimension hat, und gezeigt, daß diese ihrerseits analytisch ist. Später wurden diese Resultate angewandt auf die Charakterisierung einfacher holomorpher Abbildungen.

### 11.11 Hyperflächen auf komplexen Räumen und Funktionenkörper

Auf einer projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit sind sämtliche Hyperflächen als irreduzible Komponenten von Polstellenmengen meromorpher, d. h. rationaler Funktionen zu realisieren. Für beliebige kompakte, komplexe Flächen, d. h. komplex zweidimensionale Mannigfaltigkeiten ist dies i. a. nicht mehr der Fall. Falls es auf einer kompakten Mannigfaltigkeit nur konstante meromorphe Funktionen gibt, existieren allerdings nur endlich viele abgeschlossene Hyperflächen (Kunihiko Kodaira für Flächen und V. A. Krasnov für beliebige Dimension).

Meromorphe Funktionen auf *homogenen*, kompakten, komplexen Mannigfaltigkeiten wurden durch den Struktursatz von Grauert und Remmert (vgl. 5.4) beschrieben. Alle Hyperflächen sind Urbilder von Hyperflächen in der Basis der meromorphen Reduktion und als solche, da die Basis projektiv-algebraisch ist, *polar*, d. h. Komponenten von Polstellenflächen meromorpher Funktionen.

Gerd Fischer und Otto Forster bewiesen in [Fi-Fo 1979] den folgenden

**Satz.** In einem kompakten komplexen Raum gibt es nur endlich viele nicht polare, irreduzible Hyperflächen.

Mit Hilfe einer Desingularisierung wurde das Theorem auf die Situation komplexer Mannigfaltigkeiten reduziert. Fischer und Forster betrachteten die logarithmischen Ableitungen  $d\varphi/\varphi$  von holomorphen Funktionen  $\varphi$ , welche auf den Elementen einer Steinschen Überdeckung einer Mannigfaltigkeit  $X$  eine Hyperfläche definieren. Auf Durchschnitten zweier solcher offenen Mengen liefern die Differenzen der logarithmischen Ableitung einen 1-Kozykel mit Werten in der Garbe  $\Omega_X^1$  der Keime holomorpher Differentialformen. Ist eine gewisse Zahl von Hyperflächen gegeben, so induzieren Relationen zwischen den zugehörigen Kohomologieklassen verschiedene meromorphe 1-Formen auf  $X$ . Hinreichend viele von diesen sind dann stets linear abhängig. Mit diesen Überlegungen zeigten Fischer und Forster das folgende quantitative Ergebnis:

**Satz.** *Sei  $X$  eine zusammenhängende,  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit; es gelte*

$$r := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \Omega_X^1) < \infty.$$

*Dann gibt es höchstens  $n + r$  nicht polare, irreduzible Hyperflächen.*

Mit Hilfe dieses Satzes und der algebraischen Reduktion wurde schließlich die algebraische Dimension, d. h. der Transzendenzgrad des Funktionenkörpers durch Hyperflächen beschreibbar.

### 11.12 Analytisches Tensorprodukt kohärenter Garben

Bereits in den Jahren 1923/24 hatte Hermann Künneth die Bettischen Zahlen und Torsionszahlen von topologischen Produktmannigfaltigkeiten berechnet. Es war letztlich auf den Einfluß Emmy Noethers zurückzuführen, daß man später (Homologie-)Gruppen zusammen mit Homomorphismen in den Vordergrund stellte, und nach heutigem Verständnis besteht eine Künneth-Formel darin, einen gegebenen Funktor auf ein Produktobjekt anzuwenden und nach Möglichkeit zu den Werten auf den einzelnen Faktoren in Beziehung zu setzen.

Die komplexe Struktur auf dem Produkt zweier komplexer Räume wird, anders als in der algebraischen Geometrie, halmweise nicht durch Tensorieren, der einzelnen Strukturgarben, sondern durch eine Konstruktion erzeugt, die *analytisches Tensorprodukt* genannt wird. Den Unterschied erkennt man bereits daran, daß dieses Tensorprodukt  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0}$  sinnvollerweise mit  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}, 0}$  zu identifizieren ist. Die explizite Darstellung eines Ringes von Keimen holomorpher Funktionen auf einem komplexen Raum in der Form  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}/\mathfrak{a}$  führt auf die allgemeine Konstruktion (vgl. [Gr-Re 1984]).

Es seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  komplexe Räume, sowie  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  kohärente Garben auf  $X$  bzw.  $Y$ . Das analytische Tensorprodukt der Strukturgarben liefert die Garbe  $\mathcal{O}_{X \times Y}$ , die ausreicht, um eine kohärente Garbe  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}$  auf  $X \times Y$  zu konstruieren: Mit Hilfe der kanonischen Projektionen  $p: X \times Y \rightarrow X$  und  $q: X \times Y \rightarrow Y$  schreibt sich dieses als

$$\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} = p^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} q^* \mathcal{G}.$$

Für die Kohomologie auf algebraischen Varietäten zeigten Sampson und Washnitzer, daß  $H^r(X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) = \bigoplus_{j+k=r} H^j(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} H^k(Y, \mathcal{G})$  gilt.

Für nicht kompakte Räume führte der Weg über Tensorprodukte von Fréchet-Algebren. Schon 1952 hatte Alexander Grothendieck auf solchen Produkten verschiedene Topologien betrachtet, die sogenannten  $\pi$ - und  $\varepsilon$ -Topologien. Zu gegebenen Fréchet-Algebren  $F$  und  $G$  soll das erstere Symbol an die natürliche Abbildung  $F \times G \rightarrow F \otimes_{\mathbb{C}} G$  erinnern und das zweite den Ansatz mittels absolut konvergenter Reihen von Tensoren bezeichnen. Die Komplettierungen seien mit  $F \hat{\otimes}_{\pi} G$  und  $F \hat{\otimes}_{\varepsilon} G$  bezeichnet. Grothendieck prägte den Begriff *nuklear* für Algebren, bei denen beide Konstruktionen für beliebige zweite Faktoren zu demselben Ergebnis führen. Die Nuklearität von Schnittringen kohärenter Garben über geeigneten Polyzylindern (bzw. komplexen Unterräumen solcher Polyzylinder) hatte wichtige Anwendungen. Zu nennen ist ein Beweis des Grauert'schen Bildgarbensatzes von Reinhardt Kiehl und Jean-Louis Verdier in [Ki-Ve 1971] und die von Adrien Douady benutzten Methoden der Deformationstheorie. Vermöge der Fréchet-Struktur auf den Schnittmoduln bzgl. einer geeigneten Basis der Topologie der zugrundeliegenden Räume erklärt man das „komplettierte Tensorprodukt“  $\mathcal{F} \hat{\otimes}_{\varepsilon} \mathcal{G}$  von Fréchet-Garben auf  $X$  bzw.  $Y$ . Für kohärente Garben auf komplexen Räumen ist die Fréchet-Topologie auf den Schnitt-Moduln induziert durch die Topologie der kompakten Konvergenz auf den Schnittringen der Strukturgarbe, und diese Konstruktion liefert genau die Garbe  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}$ . Die Kohomologie von Fréchet-Garben trägt nun genau dann eine natürliche Fréchet-Topologie, wenn sie, versehen mit der Quotiententopologie, Hausdorffsch ist.

Ludger Kaup untersuchte in [KaL 1967, KaL 1968] die Kohomologie von topologischen Tensorprodukten: Sind  $X$  und  $Y$  topologische Räume,  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  Fréchet-Garben auf  $X$  bzw.  $Y$ , ist eine dieser Garben nuklear und sind die Kohomologiegruppen Hausdorffsch, so existiert ein natürlicher Isomorphismus topologischer Vektorräume.

**Satz (L. Kaup).**

$$H^r(X \times Y, \mathcal{F} \hat{\otimes}_{\varepsilon} \mathcal{G}) \approx \bigoplus_{j+k=r} H^j(X, \mathcal{F}) \hat{\otimes}_{\varepsilon} H^k(Y, \mathcal{G}).$$

Aus der Nuklearität kohärenter Garben folgte Kaup die Anwendbarkeit auf die komplex analytische Situation.

### III Ergebnisse der Komplexen Analysis

## 12 Streng pseudokonvexe Räume

### 12.1 Erste Endlichkeitssätze

Für viele Anwendungen ist das folgende Ergebnis von Grauert [Gr 1958b] von Bedeutung.

**Satz.** *Es sei  $B$  ein streng Levi-pseudokonvexes Gebiet auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  und  $\mathcal{G}$  eine kohärente Garbe auf  $M$ . Dann sind alle*

$$H^j(B, \mathcal{G}), \quad j > 0$$

endlich-dimensionale  $\mathbb{C}$ -Vektorräume.

Das zugrundeliegende Prinzip wurde später noch mit Erfolg angewandt. Es bestand zunächst darin, Ausdehnungssätze für Kohomologieklassen zu beweisen. Die Methode ist wegen der lokalen Vorgehensweise als „Ausbeultechnik“ bekannt: Schritt für Schritt wurde das gegebene Gebiet um offene, Steinsche Mengen erweitert, Theorem B angewandt und gezeigt, daß für eine geeignete Umgebung  $U$  von  $B$  die Restriktionsabbildungen

$$H^j(U, \mathcal{G}) \rightarrow H^j(B, \mathcal{G}), \quad j > 0$$

surjektiv sind. Dies bedeutet, daß man eine passende offene Überdeckung  $\{U_j\}$  von  $U$  aus Steinschen Mengen und eine Verfeinerung  $\{V_k\}$  von  $\{U_j \cap B\}$  finden kann, so daß die Abbildung

$$\tau + \delta^{q-1} : Z^q(\{U_j\}, \mathcal{G}) \oplus C^{q-1}(\{V_k\}, \mathcal{G}) \rightarrow Z^q(\{V_k\}, \mathcal{G})$$

surjektiv ist, wobei  $\tau$  die Einschränkungabbildung ist und  $\delta^{q-1}$  die Korandabbildung bezeichnet.

Damit war der Beweis auf ein funktionalanalytisches Argument zurückgeführt: Der Raum aller holomorphen Funktionen auf einer komplexen Mannigfaltigkeit war bereits mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen; diese ließ sich zu einer Fréchet-Topologie auf Schnittmoduln kohärenter Garben auf komplexen Räumen verallgemeinern. Auf diese Weise waren auch Räume von Koketten mit der natürlichen (Produkt-)Fréchet-Topologie versehen und damit ebenfalls die Räume von Kozyklen als abgeschlossene Unterräume. Bezüglich dieser Topologien ist die Einschränkungabbildung  $\tau$  kompakt. (Dies ist für den Fall, daß  $\mathcal{G}$  die Strukturgarbe einer komplexen Mannigfaltigkeit ist, gerade der Satz von Montel, und die allgemeine Aussage wird darauf zurückgeführt). Nach einem Satz von Laurent Schwartz hat  $\delta^{q-1}$  ein abgeschlossenes Bild von endlicher Kodimension, was gezeigt werden sollte.

## 12.2 Anwendungen

Es war bereits bekannt, daß Levi-Pseudokonvexität eines Gebietes  $G$  die Existenz von analytischen Hyperflächen  $V(f)$  in der Umgebung eines jeden Randpunktes impliziert, die  $G$  nur in diesem Punkte schneiden. Nun ist die Holomorphiekonvexität von  $G$  bereits dann gesichert, wenn es zu jedem Randpunkt eine holomorphe Funktion  $\varphi$  auf  $G$  gibt, so daß bei Annäherung an diesen der Betrag  $|\varphi|$  gegen  $\infty$  strebt. Es genügt also, eine solche Funktion  $f$  ohne weitere Nullstellen auf  $G$  fortzusetzen und  $\varphi = 1/f$  zu setzen. Dieser letzte Schritt wurde in [Gr 1958b] auf den obigen Endlichkeitssatz zurückgeführt: Eine gewisse absteigende Folge von Kohomologiegruppen wird stationär.

Grauert löste mit diesen Methoden ferner das von Whitney bereits 1936 gestellte Problem der rell-analytischen Einbettbarkeit reell-analytischer Mannigfaltigkeiten in einen Euklidischen Zahlenraum  $\mathbb{R}^n$ , indem er streng pseudokonvexe, komplexe Tubenumgebungen im zugehörigen  $\mathbb{C}^n$  konstruiert. Diese sind

Steinsche Mannigfaltigkeiten und lassen sich nach dem Satz von Remmert [Re 1956a] als abgeschlossene komplexe Untermannigfaltigkeiten eines  $\mathbb{C}^N$  realisieren.

**Satz** (Grauert). *Jede reell-analytische Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie ist reell-analytisch in einen Raum  $\mathbb{R}^N$  einbettbar.*

### 12.3 Kohomologie von gelochten Holomorphiegebieten

Mit klassischen Methoden, d. h. ohne den Begriff der  $q$ -Pseudokonvexität, zeigte Jean Frenkel in [Fr 1957] spezielle Verschwindungssätze für Kohomologiegruppen. Es wurden Gebiete der folgenden Form betrachtet:

$$\Delta_\alpha = \{z = (z_1, \dots, z_{n+p}) \in \mathbb{C}^{n+p}; |z_\beta| < 1 \text{ für alle } \beta, 1/2 < |z_\beta| \text{ für alle } \beta \neq \alpha\},$$

ferner

$$\Delta_0 = \{z = (z_1, \dots, z_{n+p}) \in \mathbb{C}^{n+p}; |z_\mu| < 1 \text{ für alle } 1 \leq \mu \leq n, \\ |z_{n+v}| < 1/2 \text{ für alle } 1 \leq v \leq p\}$$

und schließlich

$$Y' = \bigcup_{\alpha=0}^n \Delta_\alpha.$$

**Satz** (Frenkel). *Es gilt  $H^r(Y', \mathcal{O}) = 0$  für alle  $r \neq 0, n$ .*

### 12.4 Streng $q$ -pseudokonvexe Funktionen

Im Jahre 1955 wurde von Rothstein der Begriff der  $q$ -Pseudokonvexität eingeführt. In der heute üblichen Notation schreibt man:

**Definition:**

- 1) *Eine zweimal stetig differenzierbare, reellwertige Funktion  $\varphi$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}^n$  heißt streng  $q$ -pseudokonvex, falls ihre Leviform in jedem Punkte  $L(\varphi)$  mindestens  $n - q + 1$  positive Eigenwerte hat. Stetige Funktionen auf komplexen Räumen nennt man streng  $q$ -pseudokonvex, falls sie sich lokal (bzgl. einer Einbettung in eine offene Menge eines Zahlenraumes) als Einschränkung von streng  $q$ -pseudokonvexen Funktionen schreiben lassen.*
- 2) *Ein komplexer Raum  $X$  heißt streng  $q$ -pseudokonvex, falls eine kompakte Menge  $K \subset X$  existiert und eine stetige Funktion  $\varphi$  auf  $X$ , die außerhalb von  $K$  streng  $q$ -pseudokonvex ist, derart daß für alle reellen Zahlen  $c$  die Mengen*

$$B_c = \{x \in X; \varphi(x) < c\}$$

*relativ kompakt sind.*

Der Begriff der Pseudokonkavität kommt später noch hinzu:

- 3) *Ein komplexer Raum  $X$  heißt streng  $q$ -pseudokonkav, falls eine kompakte Menge  $K \subset X$  existiert und eine stetige Funktion  $\varphi > 0$  auf  $X$ , die außerhalb von  $K$  streng*

$q$ -pseudokonvex ist derart, daß für alle  $c > 0$  die Mengen

$$B_c = \{x \in X; \varphi(x) > c\}$$

relativ kompakt sind.

**Satz (Rothstein).** *Es sei  $G$  ein beschränktes,  $q$ -konvexes Gebiet in  $\mathbb{C}^n$  und  $G_0 \subset\subset G$  ein Teilgebiet. Die rein  $k$ -dimensionale analytische Menge  $A \subset G \setminus G_0$  komme dem Rand von  $G$  beliebig nahe. Es gelte  $k \geq q - 1$ . Dann ist  $A$  eindeutig zu einer analytischen Teilmenge von  $G$  fortsetzbar.*

Der Weg zum Beweis der Endlichkeitssätze von Andreotti und Grauert ist durch [Gr 19958b] vorgezeichnet. Es wurden zunächst im Kleinen Verschwindungssätze für Kohomologiegruppen gezeigt und Fortsetzungssätze für Kohomologieklassen wie bei der Lösung des Levi-Problems bewiesen. Wichtig war der Begriff des *Rungeschen Paares* von Gebieten, für das ein entsprechender Approximationssatz holomorpher Funktionen nachgewiesen wird. Die hier entwickelten Methoden spielen seitdem eine zentrale Rolle.

**Satz (Andreotti-Grauert [An-Gr 1962]).** *Es sei  $X$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $X$ . Dann ist*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^r(X, \mathcal{F}) < \infty,$$

falls

- a)  $X$  streng  $q$ -pseudokonvex ist und  $r \geq q$ ,  
oder
- b)  $X$  streng  $q$ -pseudokonkav ist und in allen Punkten  $r < \text{hd}(\mathcal{F}_x) - q$  gilt.

## 12.5 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Zahlreiche Existenz- und Fortsetzungssätze der Komplexen Analysis etwa für ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}^n$  lassen sich auf die Frage zurückführen, ob die Kohomologiegruppen  $H^q(G, \mathcal{O})$  mit Koeffizienten in der Strukturgarbe verschwinden oder wenigstens endlich-dimensionale Vektorräume sind. Eine Alternative zur Čechschen Berechnung beruht auf einem Lemma von Grothendieck, welches die Lösung der klassischen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung  $(\partial/\partial\bar{z})g = f$  (mit Parametern) beinhaltet.

**Lemma von Grothendieck.** Für ein beschränktes Gebiet  $B \subset \mathbb{C}$  und eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^k$  betrachtet man den Raum aller stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen  $f: B \times U \rightarrow \mathbb{C}$  derart, daß für alle Kompakta  $K \subset U$  alle partiellen Ableitungen der Funktion  $f|_{B \times K}$  beschränkt sind. Der Operator  $Tf$ ,

$$(Tf)(z, u) = \frac{1}{2\pi i} \iint_B \frac{f(\zeta, u)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad (z, u) \in B \times U \quad (8)$$

ist stetig differenzierbar. Darüber hinaus gilt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (Tf) = f$$

und 
$$\frac{\partial}{\partial u_\mu} (Tf) = T \left( \frac{\partial f}{\partial u_\mu} \right).$$

Ferner ist  $T$  stetig bezüglich der Supremumsnorm. Der Beweis beruht auf der *allgemeinen Cauchyschen Integralformel* für stetig differenzierbare Funktionen  $f$  auf dem Abschluß eines Gebietes  $G$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_G \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} (\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta, \quad z \in G \quad (9)$$

**Dolbeault-Kohomologie.** Es sei  $\mathcal{A}^{p,q}$  die Garbe der unendlich oft differenzierbaren Differentialformen vom Typ  $(p, q)$  auf einem Gebiet des  $\mathbb{C}^n$  (oder allgemeiner einer komplexen Mannigfaltigkeit). Schnitte dieser Garbe, d. h. Differentialformen werden geschrieben als

$$\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n; \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} \alpha_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Man definiert zunächst für Funktionen

$$\bar{\partial} f := \sum_{v=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_v} d\bar{z}_v$$

und für Differentialformen

$$\bar{\partial} \alpha := \sum \bar{\partial} \alpha_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_q} \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Es gilt

$$\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0.$$

Eine Differentialform  $\alpha$  heißt  $\bar{\partial}$ -geschlossen, falls  $\bar{\partial} \alpha = 0$ , und  $\bar{\partial}$ -integral oder -exakt, falls sie von der Form  $\bar{\partial} \beta$  ist.

Eine unmittelbare Anwendung des Lemmas von Grothendieck ist die Lösung des  $\bar{\partial}$ -Problems für kompakte Produktmengen, auch Satz von Dolbeault-Grothendieck genannt: Über einem kartesischen Produkt  $K = K_1 \times \dots \times K_n \subset \mathbb{C}^n$  kompakter Mengen in  $\mathbb{C}$  ist jede  $\bar{\partial}$ -geschlossene Differentialform  $\bar{\partial}$ -exakt. In der Sprache von Garben bedeutet dies die Existenz einer exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega^p \rightarrow \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,n} \rightarrow 0,$$

wobei  $\Omega^p$  die Garbe der holomorphen  $p$ -Formen bezeichnet und  $\Omega^0 = \mathcal{O}$  die Strukturgarbe ist.

Allgemeine Garben- und Kohomologie-Theorie liefert nun, daß die Kohomologiegruppen  $H^q(G, \Omega^p)$  nach Dolbeault als Kohomologie der

Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega^p \rightarrow \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,1}(G) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,n}(G) \rightarrow 0.$$

zu berechnen sind.

Insbesondere ist  $H^{q+1}(G, \mathcal{O})$  genau dann null, wenn das System der verallgemeinerten inhomogenen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\bar{\partial}\alpha = \beta$$

für jede  $(0, q+1)$ -Form  $\beta$  auf  $G$  mit  $\bar{\partial}\beta = 0$  eine  $(0, q)$ -Form  $\alpha$  als Lösung besitzt.

**Beschränkte und stetige Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.** Ein zentrales Ergebnis von Ingo Lieb aus dem Jahre 1970 betrifft die Lösbarkeit der Cauchy-Riemann-Gleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten mit hinreichend glatten (d. h. mindestens fünfmal differenzierbarem) Rand  $\partial G$ .

**Satz** (Lieb [Li 1070]). *Es existiert zu  $G$  eine Konstante  $K > 0$ , so daß folgendes gilt: Ist  $\beta$  eine unendlich oft differenzierbare,  $\bar{\partial}$ -geschlossene  $(0, q+1)$ -Form auf  $G$ , so gibt es eine unendlich oft differenzierbare,  $(0, q)$ -Form  $\alpha$  auf  $G$  mit*

$$\bar{\partial}\alpha = \beta$$

und der Abschätzung

$$|\alpha| \leq K|\beta|$$

für die Supremumsnormen.

Ferner wurde in [Li 1970] und [Li 1972] gezeigt, daß auch die Hölder-Normen von Lösungen  $\alpha$  der Cauchy-Riemann-Gleichungen zu vorgegebener Stufe  $\varepsilon < 1/2$  in entsprechender Weise durch die Supremums-Norm bzw. Hölder-Norm zur Stufe  $\varepsilon$  von  $\beta$  beschränkt sind.

Für  $q=0$  war dieses Resultat auf Grund der Arbeiten von Hans Grauert und Ingo Lieb, Gennadii Markovic Henkin, sowie von Norberto Kerzman bekannt. Die Methode besteht darin, im Anschluß an Walter Koppelman eine verallgemeinerte Bochner-Martinelli-Integralformel zu beweisen, die an die Stelle von (9) tritt. Um den Integralausdruck (8) zu verallgemeinern, benötigt man den sogenannten Cauchy-Fantappie-Kern.

Der Cauchy-Fantappie-Kern für  $q$ -Formen wird folgendermaßen konstruiert: Es sei  $W$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$  und

$$f^* : W \rightarrow (\mathbb{C}^n)^n$$

ein  $n$ -Tupel differenzierbarer Abbildungen  $f^*$ ,  $v=1, \dots, n$ . Es ist also

$$f_v^*(z, \zeta) = (f_v^1(z, \zeta), \dots, f_v^n(z, \zeta)).$$

Man schreibt

$$f_v(z, \zeta) = \sum_{\mu=1}^n f_v^\mu(z, \zeta)(z_\mu - \zeta_\mu).$$



Falls die  $f_\nu$  keine Nullstellen haben, sind die Quotienten

$$\frac{f_\nu^*(z, \zeta)}{f_\nu}$$

wohldefiniert.

Die *Cauchy-Fantappie-Formen* der Ordnung  $q - 1$  sind explizit gegeben durch

$$D_{q-1}(f^*) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \varepsilon_q(\sigma) \frac{f_1^{\sigma_1}}{f_1} \wedge \bar{\partial}_z \left( \frac{f_2^{\sigma_2}}{f_2} \right) \wedge \dots \wedge \bar{\partial}_z \left( \frac{f_q^{\sigma_q}}{f_q} \right) \wedge \bar{\partial}_\zeta \left( \frac{f_{q+1}^{\sigma_{q+1}}}{f_{q+1}} \right) \wedge \dots \wedge \bar{\partial}_\zeta \left( \frac{f_n^{\sigma_n}}{f_n} \right),$$

wobei  $\varepsilon_q(\sigma)$  das Signum einer Permutation  $\sigma$  sei.

Man betrachtet auf dem Komplement der Diagonalen in  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$  den Cauchy-Fantappie-Kern für  $f^* = \bar{z} - \bar{\zeta}$ . Man nennt diesen auch *Bochner-Martinelli-Kern* und schreibt

$$B_{nq}(z, \zeta) = (-1)^q \binom{n-1}{q} D_q(\bar{z} - \bar{\zeta}).$$

Für den Beweis des Satzes ersetzt Lieb die Cauchy-Formel (9) durch die folgende verallgemeinerte Bochner-Martinellische Integralformel von Koppelman für unendlich oft differenzierbare  $(0, q)$ -Formen  $\gamma(\zeta)$  auf der abgeschlossenen Hülle eines Gebietes  $G$ :

$$\gamma(\zeta) = c_n \left[ \int_{\partial G} \gamma(\zeta) \wedge B_{nq}(z, \zeta) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dz_\lambda - \int_G \bar{\partial}_z \gamma(z) \wedge B_{nq}(z, \zeta) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dz_\lambda - \bar{\partial}_\zeta \int_G \gamma(z) \wedge B_{n, q-1}(z, \zeta) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dz_\lambda \right],$$

wobei  $c_n = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2\pi i)^n}$

sei.

Eine Lösung  $\alpha$  der Gleichung  $\bar{\partial} \alpha = \beta$  wird explizit in der Form  $\alpha = \gamma + \xi$  angegeben,

mit

$$\gamma(\zeta) = c_n \int_G \beta(\zeta) \wedge B_{nq}(z, \zeta) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dz_\lambda$$

und (im wesentlichen)

$$\xi(\zeta) = (-1)^{q+1} c_n \int_{\partial G} \beta(\zeta) \wedge A_{nq}(z, \zeta) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dz_\lambda.$$

Die Konstruktion der Doppelform  $A_{nq}$  nutzt die strenge Pseudokonvexität des Randes aus: hier liegt die Schwierigkeit des Beweises.

Die Sätze und Methoden sind, ebenso wie die Theorie des Bergmanschen Kerns, in den folgenden beiden Jahrzehnten verschärft und ausgebaut worden.

### 12.6 Bergmansche Kernfunktion und Metrik

Bereits im Jahre 1922 führte Stefan Bergman eine neue Methode für das Studium beschränkter Gebiete  $G$  des  $\mathbb{C}^2$  ein.

Man betrachtet (allgemein für ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{C}^n$ ) den Hilbert-Raum  $H(G)$  der quadratintegrierbaren, holomorphen Funktionen:

$$H(G) = \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(G); \int_G |f|^2 dv < \infty\}$$

Dieser Raum enthält offensichtlich alle Polynome und hat abzählbare Dimension. Das zugehörige Skalarprodukt ist

$$(f, g)_G = \int_G f \cdot \bar{g} dv. \quad (10)$$

Die zugehörige Norm wird etwa mit  $\| \cdot \|_G$  bezeichnet. Man sieht, daß die Beträge holomorpher Funktionen auf einem festen, relativ-kompakten Teilgebiet bis auf eine numerische Konstante durch die  $L^2$ -Normen der Funktionen beschränkt sind. Somit sind  $L^2$ -beschränkte Familien normal, d. h. lokal gleichmäßig beschränkt. Die *Bergmansche Kernfunktion*  $K_G(z, \bar{\zeta})$  auf  $G \times G$  ist vermöge eines vollständigen Orthonormalsystems  $\{\varphi_\nu; \nu = 1, 2, \dots\}$  von  $H(G)$  erklärt durch die Beziehung

$$K_G(z, \bar{\zeta}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(\bar{\zeta})}.$$

Identifiziert man in natürlicher Weise den Raum der holomorphen Funktionen auf dem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}^n$  mit dem Raum der holomorphen  $n$ -Formen (das explizite Volumenelement  $dv$  in (10) fällt dann fort), so erhält man für die Kernfunktion die Transformationsregeln von Volumenformen bezüglich biholomorpher Abbildungen  $\Phi: G \rightarrow G'$ .

In manchen Fällen wie dem der Hyperkugel oder auf Polyzyklindern kann man die Kernfunktion explizit angeben. Auf der Einheitskugel in  $\mathbb{C}^n$  gilt

$$K_G(z, \bar{\zeta}) = \frac{n!}{\pi^n} \left( 1 - \sum_{\nu=1}^n z_\nu \bar{\zeta}_\nu \right)^{-(n+1)}.$$

Mit obiger Bemerkung über die Identifizierung von holomorphen Funktionen und holomorphen  $n$ -Formen ist die Einschränkung der Kernfunktion auf die Diagonale als eine Volumenform auf dem gegebenen Gebiet aufzufassen. Die zugehörige Ricci-Form  $\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log K_G(z, \bar{z})$  definiert eine positiv definite Hermitesche Metrik auf  $G$ , die *Bergmansche Metrik*. Man schreibt explizit

$$ds^2 = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \log K_G}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} dz_\nu d\bar{z}_\mu.$$

Auf Grund der Definition ist die Bergman-Metrik stets Kählersch. Für beschränkte symmetrische Gebiete (wie im Falle der Hyperkugel) hat diese wegen der Invarianz unter der transitiv operierenden Automorphismengruppe konstante Ricci-Krümmung, d. h. es handelt sich um eine Kähler-Einstein-Metrik.

Gegenstand des Interesses war seit Bergman das Randverhalten dieser Metrik insbesondere in Punkten, in welchen der Rand glatt und streng (Levi-)pseudokonvex ist. Die Bergmanschen Ergebnisse wurden auf Gebiete in  $\mathbb{C}^n$  von Klas Diederich in [Di 1970] verallgemeinert. Diese Resultate sind später für Untersuchungen des Randverhaltens von Automorphismen wichtig geworden.

Die Bergmansche Konstruktion der sogenannten „Vergleichskörper“ wurde in [Di 1970] durch einen Approximationssatz für quadrat-integrierbare holomorphe Funktionen auf  $G$  ersetzt. Dieser erlaubt es, für die Abschätzungen der Kernfunktion holomorphe Funktionen, die lokal erklärt sind, heranzuziehen. Als

Modelle für „kleine“ Gebiete mit streng pseudokonvexen Randpunkten dienten Ellipsoide, für die explizite Rechnungen möglich sind.

Es sei  $G \subset \mathbb{C}^n$  ein streng pseudokonvexes Gebiet und  $z^0$  ein Randpunkt. Auf einer Umgebung  $U$  von  $\partial G$  sei eine globale streng plurisubharmonische Randfunktion  $\varphi$  gegeben. Es gelte  $d\varphi(z^0) \neq 0$ . In dieser ganz allgemeinen Situation werden zunächst lokale holomorphe Koordinaten  $z_1, \dots, z_n$  eingeführt, derart daß  $z^0$  dem Nullpunkt entspricht und alle  $\partial\varphi/\partial z_j$  an der Stelle  $z^0$  für  $j > 1$  verschwinden und daß für  $j=1$  der Wert  $-1$  angenommen wird. Auf diese Weise wird eine Normalenrichtung des Randes in  $z^0$  beschrieben, und bezüglich der gerade beschriebenen Koordinaten gilt:

**Satz (Diederich).** *Die Bergmansche Kernfunktion hat in Normalenrichtung des Randes von  $G$  das folgende asymptotische Verhalten bzgl. einer streng plurisubharmonischen Randfunktion:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t_1 + \bar{t}_1)^{n+1} K_G(t; \bar{t}) = \frac{n! \det(\varphi_{i\bar{j}}(0))_{i,j=2}^n}{\pi^n}$$

ferner ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t_1 + \bar{t}_1)^{n+2} \frac{\partial K_G}{\partial z_1}(t; \bar{t}) = - \frac{(n+1)! \det(\varphi_{i\bar{j}}(0))_{i,j=2}^n}{\pi^n}$$

## 13 Steinsche Räume

### 13.1 Charakterisierung Steinscher Räume

Um die Theoreme A und B für komplexe Räume zu fassen, mußten allerdings zunächst unterschiedliche Definitionen für Steinsche Räume benutzt werden. Zunächst wurde das Uniformisierungsaxiom so gelesen, daß zu jedem Punkt des gegebenen komplexen Raumes  $X$  globale Funktionen vorausgesetzt werden, die den Tangentialraum in diesem Punkte erzeugen. Eine Abschwächung nach Grauert [Gr 1955] bestand dann darin, das Trennungs- und Uniformisierungsaxiom durch die Forderung der *holomorphen Ausbreitbarkeit* zu ersetzen:

*Zu jedem Punkt  $x_0 \in X$  gibt es endlich viele holomorphe Funktionen  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_X(X)$ , so daß  $x_0$  isoliert in der Menge  $N(f_1 - f_1(x_0), \dots, f_k - f_k(x_0))$  liegt.*

Inzwischen wußte man, daß man einen komplexen Raum allein durch die Gültigkeit von Theorem B als Steinsch charakterisieren kann; die Aussage von Theorem A folgt daraus (vgl. [Gr-Re 1977]).

Eine weitere Charakterisierung war mit funktionalanalytischen Methoden möglich. Dazu betrachte man zu einem (reduzierten) komplexen Raum  $X$  das Spektrum der  $\mathbb{C}$ -Algebra  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ , d.h. die Menge aller stetigen, linearen multiplikativen Funktionale  $x: \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $x(1)=1$ . (Die Topologie auf  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  ist im reduzierten Fall diejenige der kompakten Konvergenz). Jede holomorphe Funktion  $f$  auf  $X$  gibt nun Anlaß zu einer komplexwertigen Funktion  $\hat{f}$  auf dem Spektrum  $S = S(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ : Es sei für  $x \in S$  der Wert  $\hat{f}(x)$  durch  $x(f)$  gegeben. Man versieht das Spektrum der Algebra  $\Gamma(K, \mathcal{O}_X)$  mit der größten

Topologie, in welcher alle derartigen Funktionen  $\hat{f}$  stetig sind. Damit ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} X &\rightarrow S(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \\ x &\mapsto (f \mapsto f(x)) \end{aligned} \quad (11)$$

stetig.

Nach Yun-Ichi Igusa und Reinhold Remmert ist ein komplexer Raum  $X$  genau dann Steinsch, wenn (11) ein Homöomorphismus ist. Hans Kerner zeigte in [Ke 1960a]:

**Satz.** *Es seien  $X$  und  $Y$  komplexe Räume,  $Y$  Steinsch. Dann gibt es zu jedem stetigen Algebra-Homomorphismus  $\sigma: \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  genau eine holomorphe Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ , so daß die von  $f$  induzierte Abbildung der Algebren globaler holomorpher Funktionen mit  $\sigma$  übereinstimmt.*

Topologische  $\mathbf{C}$ -Algebren, die zu Funktionenalgebren Steinscher Räume isomorph sind, d. h. *Steinsche Algebren* wurden von Otto Forster in [Fo 1967] untersucht. Er zeigte allgemeiner, daß die Kategorien der nicht notwendig reduzierten Steinschen Räume und der Steinschen Algebren „antiäquivalent“ sind. Steinsche Algebren besitzen in der Tat ähnliche Eigenschaften wie die Funktionenringe affiner Varietäten in der Algebraischen Geometrie.

Aus einer Steinschen Algebra wird der komplexe Raum als Menge der *abgeschlossenen* maximalen Ideale zurückgewonnen. Die Topologie wird auf naheliegende Weise definiert, und die Strukturgarbe wird halmweise mit Potenzreihenmethoden aus dem Ring von konvergenten Potenzreihen in endlich vielen Elementen des maximalen Ideals konstruiert. Wichtig sind ferner die folgenden Tatsachen:

*Jeder Algebra-Isomorphismus einer Steinschen Algebra auf eine andere ist ein Homöomorphismus.*

*Jeder Algebra-Homomorphismus einer endlich-dimensionalen Steinschen Algebra in eine weitere Steinsche Algebra ist stetig.*

In [Fo 1967] wurde außerdem die Theorie der Steinschen Moduln entwickelt. In diesem Zusammenhang ergab sich eine Anwendung nicht reduzierter Strukturen auf komplexen Räumen: Ist  $X$  ein beliebiger komplexer Raum und  $\mathcal{M} \neq 0$  eine kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe, so wird durch  $\mathcal{M}^2 = 0$  eine kohärente Garbe  $\mathcal{O}_X[\mathcal{M}] := \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{M}$  von *Algebren* erklärt („triviale Erweiterung“ von  $\mathcal{O}_X$  durch  $\mathcal{M}$ ). Aussagen über Modulgarben lassen sich so auf die analogen Tatsachen für Strukturgarben (nicht reduzierter) komplexer Räume zurückführen. Ebenso wurden Probleme der Deformationstheorie kohärenter Moduln mit diesem Kunstgriff auf Aussagen über Deformationen komplexer Räume zurückgeführt.

Ist auf einem komplexen Raum  $Y$  eine Garbe  $\mathcal{S}$  von  $\mathbf{C}$ -Algebren gegeben, welche gleichzeitig kohärent als Garbe von  $\mathcal{O}_Y$ -Moduln ist, so bilden die Schnitte über einer Steinschen offenen Menge eine Steinsche Algebra. Man erhält als weitere Anwendung die Konstruktion des analytischen Spektrums von  $\mathcal{S}$ , welches mit einer natürlichen Abbildung nach  $Y$  versehen ist. (Daneben ist auch eine Konstruktion rein mit Methoden der lokalen analytischen Geometrie möglich).

### 13.2 Remmert'scher Quotient

Eine natürliche Frage ist die Charakterisierung *holomorph konvexer* komplexer Räume. Diese enthalten im allgemeinen noch kompakte, nicht diskrete, analytische Mengen. Globale holomorphe Funktionen auf diesen Teilmengen sind sicherlich konstant, so daß jede holomorphe Abbildung eines solchen Raumes in einen Steinschen Raum diese Mengen auf diskrete Mengen abbilden muß. Gesucht war eine universelle Abbildung dieser Art. Eine Lösung dieses Problems [Re 1956a] umfaßte den Nachweis der Existenz maximaler, zusammenhängender, kompakter, analytischer Teilmengen und einer natürlichen holomorphen Struktur auf dem topologischen Raum, der durch Identifikation aller Punkte solcher Mengen gegeben wird. Die zugehörige holomorphe Abbildung ist dann eine eigentliche Modifikation (vgl. Abschnitt 15).

**Existenz des Remmert'schen Quotienten.** *Es sei  $X$  ein holomorph konvexer komplexer Raum. Dann gibt es einen Steinschen komplexen Raum  $Y$  mit einer surjektiven, holomorphen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ , deren Fasern zusammenhängend sind. Diese hat die Eigenschaft, daß für alle offenen Teilmengen  $U \subset Y$  vermöge  $f$  sich  $\mathcal{O}_Y(U)$  und  $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$  einander entsprechen. Es sind  $Y$  und  $f$  hierdurch eindeutig bestimmt.*

Dieses Resultat wurde von Cartan aufgegriffen und in Zusammenhang mit Quotienten komplexer Räume bezüglich eigentlicher, holomorpher Äquivalenzrelationen betrachtet [Ca 1960]. Mit Hilfe des Begriffs des *komplexen Spektrums* einer Steinschen Algebra wurde diese Aussage von Lieb in [Li 1966] vertieft.

### 13.3 Okasches Prinzip

Ausgangspunkt der Arbeiten von Grauert zum „Okaschen Prinzip“ waren die Arbeiten von Stein über das Cousin-II-Problem: Die Hindernisse waren dort nicht analytischer, sondern topologischer Natur. In [Gr 1958a] wurden holomorphe Faserbündel untersucht, deren Strukturgruppe eine komplexe Liesche Gruppe  $G$  ist, d. h. „ $G$ -Prinzipalbündel“. Sind  $\mathcal{E}^a$  und  $\mathcal{E}^c$  die Garben der holomorphen bzw. stetigen Schnitte von  $G$ , so sind die Isomorphieklassen von topologischen bzw. analytischen  $G$ -Prinzipalbündeln gerade die Elemente der Kohomologiegruppen  $H^1(X, \mathcal{E}^c)$  bzw.  $H^1(X, \mathcal{E}^a)$ . (Obwohl  $G$  nicht abelsch zu sein braucht, ist die erste Kohomologie noch definiert). Die kanonische Injektion  $\mathcal{E}^a \hookrightarrow \mathcal{E}^c$  induziert nach Grauert nun eine Isomorphie der genannten ersten Kohomologiegruppen. Es gilt:

**Oka-Grauert-Prinzip.** *Auf einem Steinschen Raum trägt jedes topologische  $G$ -Prinzipalbündel eine komplexe Struktur. Es entspricht bis auf Isomorphie jedem topologischen Faserbündel genau ein holomorphes Faserbündel.*

Der Beweis enthält unter anderem das folgende

**Lemma.** *In einem holomorphen Prinzipalbündel über einem Steinschen Raum ist jeder stetige Schnitt homotop zu einem holomorphen Schnitt.*

### 13.4 Tubenumgebungen Steinscher Räume

Im Zusammenhang mit der Lösung des Leviproblems und der Frage nach der Einbettbarkeit reell analytischer Mannigfaltigkeiten in reelle Zahlenräume (vgl. Abschnitt 12.2) wurden von Grauert pseudokonvexe Tubenumgebungen in komplexen Zahlenräumen  $\mathbb{C}^n$  konstruiert. Allgemein sei  $X$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $Y \subset X$  eine abgeschlossene Steinsche Untermannigfaltigkeit. In [Ke 1966] zeigte Kerner, daß jeder relativ kompakte Teil in  $Y$  eine Steinsche Umgebung in  $X$  besitzt, falls  $Y$  Nullstellengebilde endlich vieler holomorpher Funktionen ist. In [Schn 1976] wurde allgemein bewiesen:

**Satz (Schneider):** *Es sei  $X$  ein komplexer Raum und  $Y \subset X$  ein abgeschlossener Steinscher Unterraum. Zu jeder kompakten Menge  $K \subset Y$  gibt es ein Fundamentalsystem von offenen Steinschen Umgebungen von  $K$  in  $X$ .*

Schneider benutzt zwei verschiedene Methoden. Einerseits einen von Grauert eingeführten *linearen Raum*, der eine Fortsetzung des Normalenraumes  $N(i(Y)/i(Y)^2)$  von  $Y$  auf eine Umgebung dargestellt. (Lineare Räume verallgemeinern den Begriff des holomorphen Vektorbündels – die Fasern sind Vektorräume von nicht notwendig konstanter Dimension). Zum anderen wird  $Y$  zu einer Hyperfläche in einem komplexen Raum aufgeblasen, so daß das Normalenbündel die Einschränkung eines holomorphen Geradenbündels ist. Die betrachteten Bündel besitzen Schnitte, welche genau auf  $Y$  verschwinden und die Konstruktion plurisubharmonischer Ausschöpfungsfunktionen erlauben.

Später wurde von Yum-Tong Siu gezeigt, daß allgemein Steinsche Unterräume komplexer Räume Steinsche Umgebungsbasen besitzen.

## 14 Kohärenz von Bildgarben

Eine naheliegende Fragestellung der abstrakten Garbentheorie war es, für stetige Abbildungen  $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  geringter Räume einer Garbe  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln auf natürliche Weise eine Garbe auf  $Y$  zuzuordnen, sowie umgekehrt zu einer Garbe  $\mathcal{G}$  auf  $Y$  eine Garbe auf  $X$  zu konstruieren.

Letzteres Problem hatte eine naheliegende Lösung: Man erhielt eine Garbe  $f^{-1}\mathcal{G}$  durch die Bedingung  $(f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}$ ; diese war eine  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe und konnte durch Tensorieren mit der Strukturgarbe von  $X$  in eine Garbe von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln  $f^*\mathcal{G}$  überführt werden, das (*analytische*) Urbild von  $\mathcal{G}$  unter  $f$ .

Von größtem Interesse in der Komplexen Analysis ist die „Bildgarbe“  $f_*\mathcal{F}$  unter  $f$ : für offene Mengen  $U \subset Y$  erfüllen die Moduln  $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$  die Axiome für die Schnitte einer Garbe, und man definiert

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

Bildgarben waren in topologischem Zusammenhang bereits 1946 von Leray definiert worden. In der Algebraischen Geometrie untersuchte diese Grothendieck seit 1959.

Ein wichtiges Beispiel einer Bildgarbe ist die Strukturgarbe auf dem Remmertischen Quotienten (vgl. Abschnitt 13.2): Der Remmertische Quotient

$f: X \rightarrow Y$  eines holomorph konvexen komplexen Raumes wurde gerade so konstruiert, daß die Strukturgarbe  $\mathcal{O}_Y$  gleich der Bildgarbe  $f_*\mathcal{O}_X$  ist.

### 14.1 Bildgarben unter endlichen holomorphen Abbildungen

Endliche, holomorphe Abbildungen, d. h. verzweigte, endliche, „unbegrenzte“ Überlagerungen, waren bereits entscheidende Hilfsmittel beim Studium analytischer Mengen und beim Beweis der genannten Kohärenzsätze gewesen. Bei der Charakterisierung komplexer Räume in [Gr-Re 1958a] benutzten Grauert und Remmert endliche Abbildungen systematisch.

Mit Techniken, die Einbettungssatz und Weierstraß-Isomorphismus verwenden, bewiesen Grauert und Remmert den folgenden

**Satz über endliche Abbildungen.** *Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine endliche, holomorphe Abbildung und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $(X, \mathcal{O}_X)$ . Dann ist die Bildgarbe  $f_*\mathcal{F}$  kohärent.*

### 14.2 Höhere Bildgarben

Die höheren Bildgarben  $R^q f_*\mathcal{F}$ ,  $q \geq 0$  bei allgemeinen Abbildungen erhält man aus den Systemen  $H^q(f^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$ . (Diese stellen für  $q > 0$  allerdings i. a. nicht mehr die Schnitte von Garben dar – man muß zum Limes über alle Umgebungen eines Punktes im Sinne von 9.4 übergehen, um die Halme von Garben zu erhalten).

Die höheren Bildgarben treten oft in Zusammenhang von Kohomologiesequenzen auf: Ist etwa  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  eine kurze Sequenz von Garben auf  $X$ , so hat man für offene Teilmengen  $V \subset X$  die lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{F}'') \rightarrow H^1(V, \mathcal{F}') \rightarrow H^1(V, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(V, \mathcal{F}'') \rightarrow H^2(V, \mathcal{F}') \rightarrow \dots$$

Diese liefert für  $V = f^{-1}(U)$ , wobei die  $U \subset Y$  offene Teilmengen sind, im Übergang zum Limes über alle offenen Umgebungen eines Punktes  $y \in Y$  die lange exakte Bildgarbensequenz

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{F}' \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{F}'' \rightarrow R^1 f_*\mathcal{F}' \rightarrow R^1 f_*\mathcal{F} \rightarrow R^1 f_*\mathcal{F}'' \rightarrow R^2 f_*\mathcal{F}' \rightarrow \dots$$

Wegen der Existenz von Steinschen Umgebungsbasen in Komplexen Räumen ergibt sich aus Theorem B, daß die  $R^q f_*\mathcal{F}$  für  $q > 0$  bei endlichen holomorphen Abbildungen verschwinden. Stets von Interesse ist allerdings auch die Situation, in der man auf die Diskretheit der Fasern verzichtet und  $f$  als *eigentlich* voraussetzt.

Unter dem im Jahre 1960 von Grauert bewiesenen *Bildgarbensatz* erscheinen viele Resultate in einem neuen Licht.

**Grauert'scher Bildgarbensatz.** *Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche holomorphe Abbildung und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $(X, \mathcal{O}_X)$ . Dann sind alle Bildgarben  $R^q f_*\mathcal{F}$  kohärent.*

### 14.3 Anwendungen

Die Kohärenz der Bildgarbe  $f_*\mathcal{O}_X$  der Strukturgarbe unter einer eigentlichen holomorphen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  komplexer Räume ergab, zusammen mit der Tatsache, daß der Träger einer kohärenten Garbe  $\mathcal{F}$ , d. h. die Menge aller Punkte, in denen der Halm von  $\mathcal{F}$  vom Null-Modul verschieden ist, analytisch ist, einen neuen Beweis für den Remmert'schen Abbildungssatz. Außerdem ist in dieser Situation das analytische Spektrum  $\tilde{Y}$  der Garbe  $f_*\mathcal{O}_X$  (vgl. Abschnitt 13.1) ein komplexer Raum, versehen mit einer natürlichen Abbildung nach  $Y$ , welche eine Faktorisierung von  $f$  gestattet. Man gewinnt auf neue Weise die Stein-Faktorisierung.

In derselben Arbeit [Gr 1960] beweist Grauert den *Vergleichssatz*. Der Bildgarbensatz wird hier zu einem Mittel, die Fasern einer eigentlichen holomorphen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  komplexer Räume zu untersuchen. Die auf den Fasern  $X_y = f^{-1}(y), y \in Y$  von  $f$  induzierte komplexe Struktur ist  $\mathcal{O}_{X_y} = (\mathcal{O}_X/f^{-1}(\mathfrak{m}_y) \cdot \mathcal{O}_X)|_{X_y}$ , wobei  $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{O}_Y$  die zum Punkte  $y$  gehörige maximale Idealgarbe bezeichne. Man schiebt auch kurz  $\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_y \cdot \mathcal{O}_X$ .

Die Gesamtheit der Fasern von  $f: X \rightarrow Y$ , versehen mit der induzierten komplexen Struktur, wird auch eine *eigentliche, holomorphe Familie* kompakter komplexer Räume, parametrisiert durch die Basis  $Y$ , genannt.

Es sei ferner  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln. Der Vergleichssatz erlaubt es nun, die Kompletzierung

$$R^q f_* \mathcal{F}_y^\wedge := \varprojlim (R^q f_* \mathcal{F}_y / \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,y}}^{k-1} R^q f_* \mathcal{F}_y)$$

eine Bildgarbe (bzgl.  $\mathfrak{m}_y$ ) zu berechnen: Es werden dazu natürliche Isomorphismen

$$R^q f_* \mathcal{F}_y^\wedge \simeq \varprojlim H^q f^{-1}(y), \mathcal{F} / \mathfrak{m}_y^k \mathcal{F}$$

angegeben.

Die analytische Einschränkung  $(\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y \cdot \mathcal{F})|_{X_y}$  von  $\mathcal{F}$  auf die Faser  $X_y$  wird kurz mit  $\mathcal{F}(y)$  bezeichnet (oder  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_y} k(y)$  mit dem Restklassenkörper  $k(y) = \mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y$ ). Die Dimension der Kohomologie  $H^q(X_y, \mathcal{F}(y))$  hängt nun halbstetig vom Referenzpunkt  $y$  ab.

Der Vergleichssatz wird ferner angewandt, um Bildgarben bei Basiswechsel zu berechnen.

### 14.4 Verschiedene Beweise

Im ersten, von Grauert in [Gr 1960] geführten Beweis wurden sogenannte *Meßüberdeckungen* eingeführt, um Fréchet-Methoden zu benutzen.

Im Jahre 1971 veröffentlichten Otto Forster und Knut Knorr einen Beweis, der als entscheidende Technik *verbundene Garbensysteme* benutzt. Diese dienen als Ersatz für die fehlende Auflösung einer Garbe durch einen Komplex endlicher freier Moduln.

Zunächst wird die gegebene holomorphe Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  aufbereitet. Da die Aussage des Satzes lokaler Natur bezüglich  $Y$  ist, kann man annehmen, daß es eine offene Überdeckung  $\{U_\alpha\}$  von  $X$  gibt, derart daß jede offene Menge  $U_\alpha$  in eine Menge der Form



$V_\alpha \times Y$  abgeschlossen eingebettet werden kann derart, daß die Abbildung  $f|U_\alpha$  durch die Projektion  $V_\alpha \times Y \rightarrow Y$  beschrieben wird. Diese Daten werden nun miteinander verbunden, indem man bemerkt, daß Durchschnitte von  $U_{\alpha_j}$  auf natürliche Weise in Mengen der Form  $\prod V_{\alpha_j} \times Y$  abgeschlossen eingebettet sind, wobei die  $V_{\alpha_j}$  geeignet Polyzylinder bezeichnen mögen. Ist eine Menge von Indizes  $\alpha = \{\alpha_0, \dots, \alpha_p\}$  enthalten in  $\beta = \{\beta_0, \dots, \beta_0\}$ , so ist die Inklusion der zugehörigen Durchschnitte  $\bigcap U_{\beta_j} \hookrightarrow \bigcap U_{\alpha_k}$  mit der Projektion der Produkte  $\prod V_{\beta_j} \times Y \rightarrow \prod V_{\alpha_k} \times Y$  verträglich. Ein *verbundenes Garbensystem* ( $\mathcal{G}_\alpha$ ) besteht nun aus kohärenten Garben auf den Produkten  $V_\alpha \times Y$  zusammen mit Garbenmorphismen bzgl. der Projektionsabbildungen. Die Einschränkungen einer gegebenen Garbe  $\mathcal{F}$  auf die  $U_\alpha$ , trivial fortgesetzt nach  $V_\alpha \times Y$ , definieren ein verbundenes Garbensystem ( $\mathcal{F}_\alpha$ ). Man erklärt nun den Čech-Komplex eines verbundenen Garbensystems ( $\mathcal{G}_\alpha$ ) durch

$$C^n(Y, \mathcal{G}) = \prod_{|\alpha| = n} \Gamma(V_\alpha \times Y, \mathcal{G}_\alpha),$$

versehen mit natürlichen Korandabbildungen. Man stellt fest, daß die Kohomologie des zu ( $\mathcal{F}_\alpha$ ) gehörigen Komplexes nichts anderes als die gewöhnliche Garbenkohomologie ist. Wesentlicher Punkt des Beweises von Forster und Knorr ist nun die Konstruktion einer freien Auflösung ( $\mathcal{G}_\alpha$ ) $^\bullet$  von ( $\mathcal{F}_\alpha$ ) im Sinne von verbundenen Garbensystemen (unter geeigneten Annahmen, wie z. B.  $Y$  Steinsch). Es genügt nun, den Čech-Komplex zu einer solchen Auflösung zu betrachten und zum Einfachkomplex des Doppelkomplexes  $C^\bullet(Y, (\mathcal{G}_\alpha)^\bullet)$  überzugehen. Es sei  $\mathcal{C}^\bullet((\mathcal{G}_\alpha)^\bullet)$  die zugehörige Garbensequenz auf  $Y$ . Ziel des Beweises ist die Konstruktion eines Morphismus  $\mathcal{L}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}^\bullet((\mathcal{G}_\alpha)^\bullet)$  von beschränkten Komplexen, welcher eine Isomorphie in der Kohomologie induziert, wobei die einzelnen  $\mathcal{L}^j$  endliche freie  $\mathcal{O}_Y$ -Moduln sind. Hierzu wird zunächst bemerkt, daß eine geringe Variation des Durchmessers der einzelnen Polyzylinder  $V_j$  wegen der Eigentlichkeit von  $f$  einen Quasi-Isomorphismus der zugehörigen Čech-Komplexe induziert. Dann werden Potenzreihenmethoden benutzt, um letztlich den Banachschen Offenheitssatz in der induktiven Konstruktion von  $\mathcal{L}^\bullet$  anwenden zu können.

## 14.5 Relativ-analytische Räume

Es trat im Laufe der Entwicklung, z. B. bei Fragen der Deformationstheorie (vgl. Abschnitt 17), die technische Notwendigkeit auf, auch allgemeinere Basen für eigentliche Familien komplexer Räume zuzulassen. Dies führte auf den Begriff des relativ-analytischen Raumes. Als Basen betrachtet man „Fréchetgeringte“ Räume (etwa Mannigfaltigkeiten endlichen Differenzierbarkeitsgrades) mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß für die Strukturgarbe die Aussage des Theorems B bzgl. einer geeigneten Basis der Topologie gilt. Diese Fragestellung, vorgeschlagen von Grothendieck, wurde von Forster und Knorr in [Fo-Kn 1972] untersucht. Da im allgemeinen Fall die Strukturgarbe nicht mehr kohärent ist, betrachtet man *pseudokohärente* Komplexe. Dies sind solche Komplexe von Garben, die lokal quasiisomorph zu nach links beschränkten Komplexen endlicher freier Modulgarben sind. (Quasiisomorphie liegt nach Definition dann vor, wenn es einen Morphismus von Komplexen gibt, welcher einen Isomorphismus der zugehörigen Kohomologie liefert). Eine Garbe  $\mathcal{F}$  hat nach Definition diese Eigenschaft, wenn der zugehörige triviale Komplex  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  pseudokohärent ist. Auf komplexen Räumen sind die Kohomologiegarben eines pseudokohärenten Komplexes im gewöhnlichen Sinne kohärent, und umgekehrt besitzt eine kohärente Garbe lokal eine Auflösung der genann-

ten Art, so daß der folgende Satz eine Verallgemeinerung des Grauert'schen Bildgarbensatzes darstellt.

**Satz (Forster-Knorr).** *Es sei  $\pi: X \rightarrow Y$  ein relativ-analytischer Raum, der eigentlich über  $Y$  liegt. Dann ist für jeden relativ  $Y$  pseudokohärenten, nach rechts beschränkten Komplex  $\mathcal{F}^\bullet$  von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln der Bildgarbenkomplex  $R\pi_*(\mathcal{F}^\bullet)$  pseudokohärent.*

Dabei ist relative Pseudokohärenz die Übertragung des Begriffs der Pseudokohärenz auf den relativ-analytischen Fall; die sinngemäße Verallgemeinerung der Flachheit von  $\mathcal{F}$  wird *Transplattheit* genannt.

Wie in Abschnitt 14.3 sei die analytische Einschränkung einer Garbe  $\mathcal{F}$  auf eine Faser  $X_y, y \in Y$ , einer Abbildung  $X \rightarrow Y$  mit  $\mathcal{F}(y)$  bezeichnet. Halbstetigkeitsätze im relativ-analytischen Fall wurden von Schneider in [Schn 1972a] bewiesen. Es sei wieder  $\pi: X \rightarrow Y$  gegeben und  $\mathcal{F}$  eine relativ  $Y$  pseudokohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.

Es gilt unter diesen Voraussetzungen der folgende Satz, welcher die entsprechenden Aussagen von Kunihiko Kodaira und Donald C. Spencer für Familien komplexer Mannigfaltigkeiten bzw. Hans Grauert und Oswald Riemenschneider für Familien komplexer Räume enthält.

**Satz (Schneider).** i) *Die Funktionen*

$$y \mapsto \dim H^i(X_y, \mathcal{F}(y))$$

*sind für alle  $i \geq 0$  halbstetig nach oben.*

ii) *Ist  $Y$  reduziert (als geringter Raum) und für ein  $i$  die Funktion*

$$y \mapsto \dim H^i(X_y, \mathcal{F}(y))$$

*lokal konstant, so ist die Bildgarbe  $R^i\pi_*\mathcal{F}$  lokal frei.*

iii) *Für perfekte Garben (bzw. Komplexe), d. h. im Falle der Existenz nach oben beschränkter freier Auflösungen, ist die Eulercharakteristik, d. h. die Wechselsumme über die Dimensionen der Kohomologie, stets auf  $Y$  lokal konstant.*

Man betrachte nun die kanonischen Morphismen

$$\lambda_i(y): (R^i\pi_*\mathcal{F})_y / \mathfrak{m}_y(R^i\pi_*\mathcal{F})_y \rightarrow H^i(X_y, \mathcal{F}(y))$$

vgl. auch Abschnitt 14.3).

Es gilt darüber hinaus:

**Satz (Schneider [Schn 1972b]).** i) *Ist  $Y$  reduziert und für eine Zahl  $i$  die Dimension von  $H^i(X_y, \mathcal{F}(y))$  (lokal) konstant, so sind die Abbildungen  $\lambda_i(y)$  und  $\lambda_{i-1}(y)$  für alle  $y \in Y$  bijektiv. Insbesondere liefert das Verschwinden von  $H^i(X_y, \mathcal{F}(y))$  für ein  $y_0 \in Y$  das Verschwinden des zugehörigen Halmes der Bildgarbe und die Bijektivität aller  $\lambda_{i-1}(y)$  in einer Umgebung.*

*Umgekehrt gilt:*

ii) *Hat  $\mathcal{O}_y$  noethersche Halme und sind die Abbildungen  $\lambda_i(y)$  und  $\lambda_{i-1}(y)$  für alle  $y \in Y$  bijektiv, so ist  $R^i\pi_*\mathcal{F}$  lokal frei und die Dimension von  $H^i(X_y, \mathcal{F}(y))$  ist lokal konstant auf  $Y$ .*

## 15 Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen

### 15.1 Hopfscher $\sigma$ -Prozeß und Modifikationsabbildungen

Behnke und Stein führten Modifikationen als Abänderungen komplexer Räume in [Be-St 1951] ein derart, daß eine niederdimensionale analytische Teilmenge  $N \subset X$  durch eine andere Menge  $N'$  ersetzt wird, so daß die komplexe Struktur von  $X \setminus N$  auf  $(X \setminus N) \cup N'$  fortgesetzt werden kann. (Der auf diese Weise erhaltene komplexe Raum sei mit  $X'$  bezeichnet). Der ursprüngliche Begriff war zunächst noch recht allgemein und umfaßt auch pathologische Situationen. Modell für eine Modifikationsabbildung war der in [Ho 1951] von Heinz Hopf eingeführte  $\sigma$ -Prozeß: In einer komplexen Fläche, d. h. in einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}^2$  wird ein Punkt durch eine Riemannsche Sphäre ersetzt, und allgemein in eine offene Teilmenge eines  $\mathbb{C}^n$  ein komplex projektiver Raum der Dimension  $n - 1$  eingefügt – man spricht kurz vom „Aufblasen“ eines Punktes.

Sind  $z_1, \dots, z_n$  Koordinaten von  $U \subset \mathbb{C}^n$  und  $w_1, \dots, w_n$  homogene Koordinaten des  $\mathbb{P}_{n-1}$  so wird die im Nullpunkt aufgeblasene Menge  $U'$  als Teilmenge von  $U \times \mathbb{P}_{n-1}$  durch die Gleichungen  $z_i \cdot w_j = z_j \cdot w_i, i, j = 1, \dots, n$  beschrieben.

### 15.2 Hirzebruch-Flächen

Im ersten Teil seiner Dissertation aus dem Jahre 1950 untersuchte Hirzebruch Aufblasungen des  $\mathbb{P}_2$  und deren Verallgemeinerungen (vgl. [Hi 1951]). Ist der zweidimensionale, komplex projektive Raum  $\mathbb{P}_2$  durch homogene Koordinaten  $(x_0, x_1, x_2)$  gegeben und  $\mathbb{P}_1 = \{(y_1, y_2)\}$ , so wird durch die Gleichung  $x_1 y_1^m - x_2 y_2^m = 0$  für  $m \geq 0$  eine algebraische Fläche  $\Sigma_m \subset \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_1$  erklärt. Für  $m = 0$  handelt es sich um den Raum  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ , und für  $m = 1$  ist dies gerade der im Punkte  $(1, 0, 0)$  aufgeblasene  $\mathbb{P}_2$ . Hirzebruch-Flächen sind Faserbündel über  $\mathbb{P}_1$  mit projektiven Geraden als Fasern. Es gilt

**Satz.** 1) *Je zwei Flächen  $\Sigma_m$  und  $\Sigma_n$  sind genau dann homöomorph, wenn  $m \equiv n \pmod{2}$  gilt.*

2) *Je zwei Flächen  $\Sigma_m$  und  $\Sigma_n$  mit  $m \neq n$  sind als komplexe Mannigfaltigkeiten nicht isomorph.*

3) *Zu jeder Mannigfaltigkeit  $\Sigma_m$  gibt es eine bimerorphe (d. h. birationale) Abbildung auf  $\mathbb{P}_2$ .*

Hirzebruch-Flächen sind rationale Regelflächen im Sinne der Algebraischen Geometrie. Holomorphe Familien solcher Flächen liefern u. a. wichtige Beispiele in der Deformationstheorie und beim Studium von Modulräumen.

### 15.3 Modifikationsabbildungen

Durch zwei  $\sigma$ -Prozesse lassen sich, wie in Abschnitt 15.2 angesprochen, etwa der zweidimensionale komplex projektive Raum  $\mathbb{P}_2$  und der „Osgoodsche Raum der Funktionentheorie“  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$  in einander überführen. Der topologische Standpunkt stand zunächst jedoch im Vordergrund: In [Gr-Re 1955] gingen Grauert und Remmert vom Begriff der *stetigen* Modifikation aus: Die Definition von Behnke

und Stein wurde durch die Forderung ergänzt, daß die Identifizierungsabbildung zwischen  $X' \setminus N'$  und  $X \setminus N$  zu einer stetigen Abbildung  $X' \rightarrow X$  fortsetzbar sei, und es wurde stärker noch verlangt, daß die „Modifikationsabbildung“  $\pi: X' \rightarrow X$  eine *eigentliche holomorphe* Abbildung sei. Wenn in diesem Falle  $N$  und  $N'$  minimal gewählt werden, so daß  $\pi: X' \setminus N' \rightarrow X \setminus N$  biholomorph ist, gilt  $\dim(N) \leq \dim(X) - 2$ , und die Körper der meromorphen Funktionen auf  $X$  bzw.  $X'$  sind isomorph.

#### 15.4 Exzeptionelle Mengen

Ein wichtiges Problem war die Charakterisierung kompakter analytischer Mengen, die unter eigentlichen Modifikationen auf Punkte abgebildet, d. h. „niedergeblasen“ werden können. Man spricht von *exzeptionellen* analytischen Mengen. In [Gr 1962] wurde eine Antwort gegeben:

**Satz** (Grauert). *Eine nirgends diskrete, analytische Menge  $A$  eines komplexen Raumes  $X$  ist genau dann exzeptionell, wenn  $A$  kompakt ist und es eine streng pseudokonvexe Umgebung  $U(A) \subset X$  gibt, so daß  $A$  alle kompakten analytischen Teilmengen von  $U(A)$  enthält.*

Diese Methoden wurden auf holomorphe Vektorbündel angewandt: Ein holomorphes Vektorbündel heißt *schwach negativ*, wenn die Nullschnittfläche im Bündelraum exzeptionell ist. Für Geradenbündel auf komplexen Mannigfaltigkeiten stimmt diese Definition mit der früher definierten Negativität, d. h. der Existenz einer Hermiteschen Metrik mit negativer Krümmung überein. Das duale eines (schwach) negativen Bündels wird positiv bzw. schwach positiv genannt. Es gilt nach Grauert:

**Satz.** *Ein reduzierter, kompakter, komplexer Raum  $X$  ist genau dann projektiv-algebraisch, wenn es ein schwach negatives Vektorbündel auf  $X$  gibt.*

Dieses Kriterium ist zu einer Standardmethode der analytischen Geometrie geworden. In derselben Arbeit interpretierte Grauert den klassischen Begriff der Hodge-Eigenschaft einer komplexen Mannigfaltigkeit als die Existenz eines positiven Geradenbündels und verallgemeinerte diese Eigenschaft auf komplexe Räume.

**Satz.** *Jeder normale Hodge-Raum ist projektiv-algebraisch.*

Dies ist der Abschluß einer von Riemann in [Ri 1857] begonnenen Entwicklung, nämlich der Charakterisierung kompakter komplexer Tori  $\mathbb{C}^n/\Gamma_{2n}$  als projektiv-algebraisch, falls die Riemannschen *Periodenrelationen* für das Gitter  $\Gamma_{2n}$  gelten. Kodaira hatte 1954 die Projektivität von Hodge-Mannigfaltigkeiten gezeigt. Man verstand nun in größter Allgemeinheit die Riemannschen Bedingungen im Sinne der Existenz eines positiven Geradenbündels.

**Relativ analytische Räume.** Die Ergebnisse von Grauert über exzeptionelle Mengen wurden von Knut Knorr und Michael Schneider in [Kn-Schn 1971] auf relativ analytische Räume verallgemeinert. Die Begriffe der holomorph konvexen und  $q$ -konvexen Abbildung und des Remmert'schen Quotienten wurden erklärt und es

wurde gezeigt, daß letzterer für holomorph konvexe Abbildungen existiert. Wichtig ist ferner der Satz über die Kohärenz von Bildgarben kohärenter Garben  $\mathbf{R}^n f_* \mathcal{F}$  bei 1-konvexen Abbildungen. Relativ exzeptionelle analytische Mengen und die relative Version des Kriteriums von Grauert sind enthalten, sowie die entsprechende Fassung des Projektivitätskriteriums.

**Moishezon-Räume.** In Abschnitt 8.2 wurde bereits auf das Ergebnis von Thimm-Siegel über den Transzendenzgrad einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit hingewiesen: Dieser ist nie größer als die Dimension, und Gleichheit gilt für projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten. Umgekehrt zeigten Chow und Kodaira bereits 1952, daß jede kompakte komplex zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit zwei algebraisch unabhängigen meromorphen Funktionen projektiv ist. In höheren Dimensionen ist die entsprechende Aussage nicht mehr gültig – Beispiele dazu wurden von Heisuke Hironaka und Boris Moishezon angegeben. Moishezon zeigte 1967, daß eine Kählersche Mannigfaltigkeit mit maximaler Anzahl algebraisch unabhängiger meromorpher Funktionen bereits projektiv-algebraisch ist. Man spricht von einer *Moishezon-Mannigfaltigkeit*, wenn Dimension und Transzendenzgrad des Körpers der meromorphen Funktionen einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit übereinstimmen. Eine solche Mannigfaltigkeit ist allerdings beinahe projektiv in dem Sinne, daß diese nach endlich vielen Aufblasungen von Untermannigfaltigkeiten in eine projektive Mannigfaltigkeit übergeht.

Semi-Positivität von Vektorbündeln, insbesondere auch Geradenbündeln, wurde in 11.8 auch in Zusammenhang mit Verschwindungssätzen angesprochen. Dieser Begriff wurde auf kohärente Garben auf komplexen Räumen verallgemeinert. Eine etwas stärkere Eigenschaft ist Quasi-Positivität (von Garben): Hier wird Positivität der Krümmungsform einer Hermiteschen Metrik des zugehörigen linearen Raumes auf einer offenen dichten Teilmenge gefordert. In [Gr-Ri 1970] bewiesen Grauert und Riemenschneider einen Verschwindungssatz auf Moishezon-Räumen. Ausgehend von einem Ergebnis von Hugo Rossi wurden zunächst eigentliche Modifikationen kompakter komplexer Räume betrachtet. Zu gegebener torsionsfreier Garbe  $\mathcal{S}$  auf einem solchen Raum  $X$  existiert eine eigentliche Modifikation  $\hat{X} \rightarrow X$  durch eine komplexe Mannigfaltigkeit, derart, daß das analytische Urbild von  $\mathcal{S}$  modulo Torsion lokal frei ist. Quasi-Positivität bleibt erhalten. Für Moishezon-Räume  $X$  kann  $\hat{X}$  als projektiv-algebraisch gewählt werden. In dieser Situation führten Grauert und Riemenschneider die kanonische Garbe  $\underline{K}(X)$  von  $X$  als Bildgarbe des kanonischen Geradenbündels von  $\hat{X}$  ein – eine Definition, die von der speziellen Desingularisierung unabhängig ist.

**Satz** (Grauert-Riemenschneider). *Es sei  $X$  ein Moishezon-Raum und  $\mathcal{S}$  eine quasi-positive torsionsfreie kohärente Garbe auf  $X$ . Dann gilt*

$$H^v(X, \mathcal{S} \cdot \underline{K}(X)) = 0$$

für alle  $v \geq 1$ .

Da ein Moishezon-Raum eine projektiv-algebraische Desingularisierung besitzt, existiert stets auch eine quasi-positive torsionsfreie kohärente Garbe vom Range eins. Umgekehrt zeigte Riemenschneider [Rie 1971], daß ein kompakter

normaler komplexer Raum bereits dann die Moishezon-Eigenschaft besitzt, wenn eine fast-positive, kohärente, torsionsfreie Garbe vom Rang eins existiert, die außerhalb einer diskreten Menge positiv ist.

Für Kählersche Mannigfaltigkeiten wird in [Rie 1973] diese Bedingung unter schwächeren Voraussetzungen bewiesen – das Resultat beinhaltet eine Verallgemeinerung des Kodairaschen Einbettungssatzes.

**Satz** (Riemenschneider). *Eine Kählersche Mannigfaltigkeit besitzt bereits dann die Moishezon-Eigenschaft (und ist damit projektiv algebraisch nach Moishezon), wenn es ein semi-positives Geradenbündel gibt, welches in einem Punkte positiv ist.*

### 15.5 Auflösung der Singularitäten normaler komplexer Flächen

Im zweiten Teil der Dissertation [Hi 1953a] von Friedrich Hirzebruch wurden *algebroid Funktionselemente* im Sinne von Abschnitt 7 in zwei Veränderlichen  $(z_1, z_2)$  untersucht. Das Augenmerk konzentrierte sich auf die isolierte Menge der nicht-uniformisierbaren Punkte. Für Verzweigungsmengen der Form  $\{z | z_1 \cdot z_2 = 0\}$  ist das zugehörige algebroid Funktionselement im wesentlichen durch die Gleichung  $w^n = z_1 z_2^{n-q}$ ,  $n$  und  $q$  teilerfremd, gegeben. Der neue Ansatz bestand darin, eine *Auflösung der Singularitäten* zu konstruieren, d. h. eine eigentliche Modifikation des Überlagerungsraumes  $X$  zu betrachten, welche eine komplexe Mannigfaltigkeit  $\tilde{X}$  ist. Die isolierten Singularitäten werden hierbei durch rationale Kurven ersetzt. Diese schneiden sich transversal (der zugehörige Graph ist ein Baum) – die Selbstschnittzahlen errechnen sich nach einem Verfahren, das unter dem Namen Hirzebruch-Jungscher Algorithmus bekannt ist, aus der Kettenbruchentwicklung der Zahl  $n/q$ . Allgemein wurde gezeigt, daß es zu jeder algebroiden Funktion  $f$  eine komplexe Mannigfaltigkeit ergibt, d. h. durch Einsetzen von Sphärenbäumen eine Auflösung der zugehörigen Singularität gewonnen wird. Noch in den 60er Jahren wurde das Problem der Auflösung von Singularitäten in beliebiger Dimension von Heisuke Hironaka gelöst.

### 15.6 Rationale Singularitäten

Mit Hilfe von Auflösungen von Singularitäten konnten wichtige Fragen über isolierte Flächensingularitäten geklärt werden.

Es sei allgemein  $E = \pi^{-1}(p)$  der exzeptionelle Divisor einer Auflösung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  mit irreduziblen Komponenten  $E_j$ , die als eingebettete singularitätenfreie Kurven mit transversalen Schnitten angenommen werden können. Es wurde  $X$  *rational* genannt, wenn die erste Bildgarbe  $R^1 \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$  verschwindet. 1966 charakterisierte Michael Artin rationale Flächensingularitäten durch das arithmetische Geschlecht von Zyklen  $Z = \sum_j r_j \cdot E_j$ , wobei die  $r_j$  nicht negative ganze Zahlen bezeichnen, die nicht sämtlich verschwinden. Wie für gewöhnliche komplexe Kurven auf komplexen Flächen (mit kanonischem Divisor  $K_X$ ) ist das *virtuelle* arithmetische Geschlecht eines Zyklus durch

$$p(Z) = \frac{1}{2}(Z \cdot Z + Z \cdot K_X) + 1$$

erklärt. Artin zeigte, daß die Rationalität einer Singularität zu der Bedingung  $p(Z) \leq 0$  für alle solchen  $Z$  äquivalent ist und der Wert null angenommen wird. Daraus schloß er, daß die Komponenten  $E_j$  des exceptionellen Divisors rationale Kurven sein müssen, keine drei von diesen durch einen Punkt gehen und das System  $\{E_j\}$  zykliefrei ist, d. h. einen bewerteten Baum im Sinne der Graphentheorie definiert: Als Punkte nimmt man die  $E_j$ , die mit ihren Selbstschnittzahlen bewertet werden. Eine Kante zwischen  $E_j$  und  $E_k$  soll dann vorliegen, wenn diese sich in  $\tilde{X}$  schneiden. Die *Schnittmatrix*  $S = (E_i \cdot E_j)_{i,j}$  ist nach Mumford negativ definit.

**Satz** (Brieskorn [Br 1968]). *Eine zweidimensionale normale Flächensingularität  $p \in X$  ist genau dann rational, wenn  $\mathcal{O}_{X,p}$  fast-faktoriell ist (d. h. jedes von null verschiedene Element eine Potenz besitzt, die ein Produkt von Primärelementen ist).*

Zum Beweis wurde die Divisorenklassengruppe  $C(\mathcal{O}_{X,p})$ , die Gruppe der gebrochenen Ideale modulo linearer Äquivalenz, d. h. modulo Hauptidealen, betrachtet. Ihr Verschwinden bedeutet gerade die ZPE-Eigenschaft. Die Divisorenklassengruppe  $C(\mathcal{O}_{X,p})$  ist nun nach Mumford in die folgende exakte Sequenz eingepaßt:

$$0 \rightarrow H_1(M, \mathbf{Z})_{\text{frei}} \rightarrow (R^1\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_p \rightarrow C(\mathcal{O}_{X,p}) \rightarrow H_1(M, \mathbf{Z})_{\text{torsion}} \rightarrow 0,$$

wobei  $M$  einen „guten“ Umgebungsrand bezeichnet. Aus dieser ist unmittelbar abzuleiten, daß die Divisorenklassengruppe genau dann zur Torsionsgruppe der ersten ganzzahligen Homologie von  $M$  isomorph ist, wenn die Singularität rational ist. Ferner benutzte Egbert Brieskorn die von Uwe Storch bewiesene Tatsache, daß ein Ring genau dann fastfaktoriell ist, wenn die Divisorenklassengruppe eine Torsionsgruppe ist. Es gilt:

*Der Ring der holomorphen Funktionskeime einer normalen Flächensingularität ist genau dann faktoriell, wenn diese rational ist und  $H_1(M, \mathbf{Z})$  verschwindet.*

**Klassifikation der faktoriellen Flächensingularitäten.** Im Abschnitt 10.7 wurde bereits angesprochen, daß für die Ikosaedersingularität die erste ganzzahlige Homologiegruppe eines Umgebungsrandes als Faktor-Kommutatorgruppe der binären Ikosaedergruppe verschwindet. Die ZPE-Eigenschaft war Mumford bereits bekannt und läßt sich auch direkt aus der expliziten Beschreibung der Singularität durch eine Gleichung nach Felix Klein folgern.

**Satz** (Brieskorn [Br 1968]). *Die Ikosaedersingularität  $x^2 + y^3 + z^5 = 0$  ist die einzige faktorielle Flächensingularität.*

Brieskorn benutzte dazu die Klassifikation rationaler Flächensingularitäten durch bewertete Räume. Nach Hirzebruch konnte nun die Gruppe  $H_1(M, \mathbf{Z})$  als Kokern der durch die Schnittmatrix  $S$  vermittelten Abbildung  $\mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}^n$  beschrieben werden. Diese Tatsache zusammen mit den Ergebnissen von Artin benutzte Brieskorn, um zunächst festzustellen, daß für faktorielle Singularitäten die Selbstschnittzahlen der Komponenten des exceptionellen Divisors gerade gleich  $-2$  sind. Sodann wurden die mit  $-2$  bewerteten Graphen zu Schnittmatrizen  $S$  mit  $\det S = \pm 1$  untersucht, und die Klassifizierung solcher Dynkinschemata ließ nur noch den Graphen  $E_8$  zu, der zur Ikosaedersingularität gehört.

## 16 Der Satz von Riemann-Roch

### 16.1 Riemannsche Flächen, Abelsche Differentiale

In Riemanns berühmter Arbeit „Theorie der Abelschen Functionen“ aus dem Jahre 1857, in welcher er das Jacobische Umkehrproblem löst, findet sich die Konstruktion von meromorphen Funktionen zu vorgegebenen Polstellen. Auf einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$  vom Geschlecht  $p$  sei ein Divisor vorgegeben, in heutiger Notation

$$D = \sum_{j=1}^k m_j \cdot p_j,$$

wobei die  $m_j$  ganze Zahlen und die  $p_j$  Punkte der Riemannschen Fläche bezeichnen. Man schreibt

$$\mathcal{O}_X(D)$$

für die Untergarbe der meromorphen Funktionen  $\varphi$ , welche höchstens in den Punkten  $p_j$  des Divisors  $D$  Polstellen haben und für welche die Ordnungen  $o_\varphi(p_j) \geq -m_j$  sind. Anstelle solcher meromorphen Funktionen  $\varphi$  betrachtete man die zugehörigen meromorphen Differentiale  $d\varphi$ , deren sämtliche Perioden verschwinden. Der zugehörige Vektorraum hat eine um eins geringere Dimension. Es sei  $D$  als effektiv angenommen, d. h.  $m_j \geq 1$ . In diesem Falle werden solche Funktionen aus *Elementardifferentiale*n konstruiert. Diese hatte Riemann mit potentialtheoretischen Methoden gewonnen: Sie besitzen genau in einem vorgegebenen Punkt eine Polstelle (gegebener Ordnung). Man benötigt nicht mehr als  $m = \text{grad}(D) = \sum_j m_j$  dieser Elementardifferentiale dazu. Für den Schritt zurück von einer Differentialform zu einer meromorphen Funktion liefert das Verschwinden aller Perioden ein lineares Gleichungssystem aus  $p$  Gleichungen (über die restlichen  $p$  Perioden kann man frei verfügen und diese zu null normieren). Dies bedeutet, daß die Dimension des Vektorraumes  $\mathcal{O}_X(D)$  mindestens

$$m + 1 - p$$

beträgt.

Im Jahre 1865 berechnet Gustav Roch die genaue Dimension: Das angesprochene Gleichungssystem ist nicht minimal. Die genaue Dimension ist um soviel größer, wie es die Dimension des Raumes aller holomorphen Differentiale angibt, die in den Punkten des Divisors  $D$  mindestens von der durch  $D$  angegebenen Ordnung verschwinden. Dieser Raum wird mit  $\Omega_X(-D)$  bezeichnet. Somit lautet der

#### Satz von Riemann-Roch

$$\dim(\mathcal{O}_X(D)) = \text{grad}(D) + 1 - p + \dim(\Omega_X(-D)).$$



## 16.2 Der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch

Die überraschende Aussage des klassischen Satzes von Riemann-Roch ist die Verknüpfung einer analytischen Invarianten, nämlich der Differenz

$$\dim(\mathcal{O}_X(D)) - \dim(\Omega_X(-D))$$

mit einer topologischen, dem Geschlecht der Riemannschen Fläche und dem Grad des gegebenen Divisors. Im Sinne der Garbenkohomologie und einer Dualitätsformel von Serre ist diese komplex analytische Invariante die *Euler-Poincaré-Charakteristik*  $\chi(\mathcal{O}_X(D))$  der Garbe  $\mathcal{O}_X(D)$ , welche ganz allgemein für kohärente Garben  $\mathcal{F}$  auf kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten  $X$  der (komplexen) Dimension  $n$  als alternierende Summe der (endlichen) Dimensionen von Kohomologiegruppen

$$\chi(X, \mathcal{F}) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H^k(X, \mathcal{F})$$

erklärt ist.

Diese Definition hat ihren Ursprung in der klassischen Verallgemeinerung des Geschlechtes einer Riemannschen Fläche auf projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten. Als *arithmetisches Geschlecht*  $p_a$  hatte man (in klassischer Sprechweise) die Wechselsumme  $p_n - p_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} p_1$  über die Anzahlen  $p_j$  von linear unabhängigen holomorphen  $j$ -Formen betrachtet. Der Term höchsten Grades  $p_n$  wurde *geometrisches Geschlecht*  $p_g$  genannt, und  $p_1$  hieß *Irregularität*  $q$ . Es erweist sich als zweckmäßig, die Zahl  $p_0$  als Anzahl der Komponenten der Mannigfaltigkeit zu berücksichtigen (und einen Faktor  $(-1)^n$  einzuführen). In neuer Terminologie ist das arithmetische Geschlecht einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  definiert als die Euler-Poincaré-Charakteristik  $\chi(X, \mathcal{O}_X)$  der Strukturgarbe. (Für zusammenhängende Kählersche Mannigfaltigkeiten ist  $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1 + (-1)^n p_a$ ). So ergibt sich für Riemannsche Flächen der Ausdruck  $1 - p$  und für (komplex 2-dimensionale) algebraische Flächen der Wert  $1 - q + p_g$ .

Im Dezember 1953 formulierte und bewies Hirzebruch eine Verallgemeinerung des Satzes von Riemann-Roch für (projektiv) algebraische Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. Zu Beginn der fünfziger Jahre kannte man als topologische Invarianten von komplexen Vektorbündeln  $W$  die Chern-Klassen  $c_j(W) \in H^{2j}(X, \mathbb{Z})$ . Diese verallgemeinern den Grad eines holomorphen Geradenbündels bzw. des zugehörigen Divisors. Unter den Chern-Klassen einer komplexen Mannigfaltigkeit werden die Chern-Klassen des holomorphen Tangentialbündels verstanden. Die Chernschen Klassen algebraischer Varietäten entsprechen bis auf das Vorzeichen den früher von Eger und Todd eingeführten Klassen algebraischer Zyklen. Im einfachsten Fall ist die Kohomologiekategorie der kanonischen Divisoren gleich der ersten Chernschen Klasse der Mannigfaltigkeit multipliziert mit  $-1$ .

Als gewichtete homogene Polynome  $T_j = T_j(c_1, \dots, c_j)$  vom Gewicht  $j$  mit rationalen Koeffizienten in den Chern-Klassen  $c_j$  (eines beliebigen komplexen Vektorbündels) werden die Todd-Polynome betrachtet, wobei die liegende multiplikative Struktur diejenige des Kohomologie-Ringes  $H^*(X, \mathbb{Q})$  ist. Todd hatte diese Schritt für Schritt bis  $j=6$  mit der Eigenschaft konstruiert, daß diese auf

Produkten von projektiven Räumen den Wert eins annehmen (vgl. auch die in [Hi 1956a] angegebene Literatur). Die Charakterisierung durch multiplikative Eigenschaften und Einbindung in einen allgemeinen Kalkül erfolgte durch Hirzebruch und erschien zuerst in [Hi 1953b].

Das Todd-Polynom  $T_n$  vom höchsten auftretenden Gewicht  $n = \dim(X)$ , angewandt auf das komplexe Tangentialbündel von  $X$ , liefert bezüglich des Fundamentalzyklus  $[X] \in H_{2n}(X, \mathbb{Z})$  eine Zahl, welche *Toddsches Geschlecht* genannt und mit  $T(X)$  bezeichnet wird.

Um das arithmetische mit dem Toddschen Geschlecht vergleichen zu können, mußte Hirzebruch die Polynome  $T_j(c_1, \dots, c_j) \in \mathbb{Q}[c_1, \dots, c_j]$  unabhängig von der Wahl der komplexen Mannigfaltigkeit definieren, allein bestimmt durch universelle Eigenschaften.

Auf kartesischen Produkten von Mannigfaltigkeiten verhält sich die Euler-Poincaré-Charakteristik der Strukturgarbe multiplikativ auf Grund der Künneth-Formel für die Kohomologie kohärenter Garben (vgl. 11.12). Eine analoge Eigenschaft gilt für die totalen Chern-Klassen  $c = \sum c_j$  als Elemente des Kohomologie-Ringes. Damit ist es erforderlich, daß die Todd-Polynome eine „multiplikative Folge“  $K_j(c_1, \dots, c_j)$  in den Chern-Klassen zu bilden haben. Letzteres bedeutet, daß die Gültigkeit einer formalen Beziehung

$$1 + c_1''z + c_2''z^2 + \dots = (1 + c_1'z + c_2'z^2 + \dots) \cdot (1 + c_1z + c_2z^2 + \dots)$$

im Ring der formalen Potenzreihen in  $z$  eine analoge Gleichung

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j(c_1'', c_2'', \dots, c_j'')z^j = \left( \sum_{k=0}^{\infty} K_k(c_1', c_2', \dots, c_k')z^k \right) \cdot \left( \sum_{l=0}^{\infty} K_l(c_1, c_2, \dots, c_l)z^l \right)$$

mit  $K_0 = 1$  nach sich zieht. Allen solchen multiplikativen Folgen von Polynomen  $K_j$  werden formale Potenzreihen  $Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j, b_0 = 1$  gemäß

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(1, 0, \dots, 0)z^j$$

zugeordnet. (Wegen der Multiplikativitätsforderung ist die multiplikative Folge  $K_j$  durch die zugehörige Potenzreihe  $Q(z)$  eindeutig bestimmt).

Die Toddschen Polynome sind nun durch eine weitere formale Forderung festgelegt. Für den  $n$ -dimensionalen komplex-projektiven Raum  $\mathbb{P}_n$  sind die Chern-Klassen  $c_j(\mathbb{P}_n) \in H^{2j}(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z})$  gerade die  $\binom{n+1}{j}$ -fachen der Klassen von  $[H]^j$ , wobei  $[H]$  die Klasse der Hyperebene bezeichne. Damit gilt im Kohomologiering des  $\mathbb{P}_n$  die formale Beziehung  $1 + c_1 + c_2 + \dots + c_n \equiv (1 + z)^{n+1} \pmod{z^{n+1}}$ , wobei  $z = [H]$  gesetzt wird. Die Forderung lautet nun, daß  $T_n$ , evaluiert auf dem Grundzykel des  $\mathbb{P}_n$ , gleich eins wird und dies schließlich für sämtliche  $n$ . Diese Bedingung übersetzt sich unmittelbar in die Eigenschaft, daß für die erzeugende Potenzreihe  $Q(z)$  jeweils der  $n$ -te Koeffizient von  $Q(z)^{n+1}$  gleich eins ist, welche  $Q(z)$  als

$$Q(z) = \frac{z}{1 - e^{-z}}$$

eindeutig bestimmt. Die Koeffizienten dieser Potenzreihe dienen i. a. zur Definition der Bernoullischen Zahlen. Mit Hilfe der Multiplikativitätseigenschaft kann man die Toddschen Polynome explizit aus den Koeffizienten von  $Q(z)$  berechnen: Die ersten dieser

Polynome sind

$$T_1 = \frac{1}{2}c_1$$

$$T_2 = \frac{1}{12}(c_2 + c_1^2)$$

$$T_3 = \frac{1}{24}c_2c_1$$

$$T_4 = \frac{4}{720}(-c_4 + c_3c_1 + 3c_2^2 + 4c_2c_1^2 - c_1^4).$$

**Satz von Hirzebruch über das arithmetische Geschlecht.** *Sei  $X$  eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit. Dann ist*

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = T(X).$$

Der Satz enthält insbesondere die auf Grund der expliziten Formeln für die  $T_j$  nicht zu erwartende Tatsache, daß  $T(X)$  ganzzahlig ist.

Der Beweis erfordert vorab den Übergang zu verallgemeinerten Geschlechtern. Es wird eine Unbestimmte  $y$  eingeführt, und das  $\chi_y$ -Geschlecht für eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $X$  wird als

$$\chi_y(X) = \sum_{p=0}^n y^p \chi^p(X)$$

definiert, wobei  $\chi^p(X) = \sum_{q=0}^n (-1)^q h^{p,q}(X)$  gesetzt wird, und

$$h^{p,q}(X) = \dim H^q(V_n, \Omega^p)$$

die Hodge-Zahlen (d. h. die Dimensionen der  $q$ -ten Kohomologiegruppen mit Werten in der Garbe der holomorphen  $p$ -Formen) bezeichnen. Das verallgemeinerte  $T_y$ -Geschlecht wird zu der erzeugenden Funktion

$$Q(y, z) = \frac{z(y+1)}{1 - e^{-z(y+1)}} - zy$$

gebildet.

Für  $y=0$  erhält man  $T(X)$  bzw.  $\chi(X)$ . Die allgemeinere Aussage besteht nun in der Übereinstimmung dieser beiden neuen Invarianten.

Für  $y=-1$  bedeutet die Gleichheit des  $T_y$ -Geschlechts und des  $\chi_y$ -Geschlechts gerade, daß die topologische Eulerzahl mit der höchsten Chernklasse, ausgewertet auf  $X$ , übereinstimmt, d. h. man erhält den Satz von Gauß-Bonnet. Auf Grund der universellen Eigenschaften gelingt Hirzebruch die Reduktion auf den Fall sogenannter *Spalt-Mannigfaltigkeiten*. Dies sind Mannigfaltigkeiten, deren Tangentialbündel eine aufsteigende Folge von Unterbündeln zuläßt, so daß die jeweiligen Quotientenbündel („diagonale Geradenbündel“) den Rang eins besitzen. Die Reduktion geschieht, indem man vom Tangentialbündel faserweise zum zugehörigen Bündel der Fahnenmannigfaltigkeiten übergeht.

Für Spaltmannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  können schließlich  $(y+1)^n T(X)$  und  $(y+1)^n \chi(X)$  gleichermaßen durch *virtuelle  $T_y$ -Geschlechter* bzw. *virtuelle  $\chi_y$ -Geschlechter* der diagonalen Geradenbündel ausgedrückt werden (so daß Gleichheit für einen Wert  $y_0 \neq -1$  genügt, um ein Induktionsverfahren in Gang zu setzen): Eine nicht geordnete Menge

von holomorphen Geradenbündeln  $L_1, \dots, L_r$  heißt eine *virtuelle Untermannigfaltigkeit* der Dimension  $n - r$ . Falls ein Geradenbündel zu einem singularitätenfreien Divisor gehört, ist das virtuelle  $T_y$ - bzw.  $\chi_y$ -Geschlecht dieses Bündels gerade das entsprechende Geschlecht der zum Divisor gehörigen Untermannigfaltigkeit. Sodann benutzte Hirzebruch Hodge-Theorie, um zu zeigen, daß  $\chi_{y_0}(X)$  für  $y_0 = 1$  mit der *Signatur*  $\tau(X)$ , d. h. mit der Signatur des Schnittproduktes auf  $H^{2k}(X, \mathbb{R})$  für Mannigfaltigkeiten gerader komplexer Dimension  $2k$  bzw. der der Zahl null sonst übereinstimmt. Mit den topologischen Methoden der Thom'schen Kobordismustheorie hatte Hirzebruch vorher schon gezeigt, daß die Signatur aus den Pontrjaginschen Zahlen (und damit aus den Chern-Klassen) durch Polynome  $L_j$  berechnet werden kann, die als multiplikative Folge zu der erzeugenden Funktion  $z / \tanh(z)$  gehören, in Übereinstimmung mit  $Q(1, z)$ .

Um nun allgemein einen Zugang zur Euler-Poincaré-Charakteristik holomorpher Vektorbündel zu gewinnen, war die Kenntnis sämtlicher Klassen  $T_j(c_1, \dots, c_j)$  des Tangentialbündels erforderlich. Die totale Todd-Klasse  $td(X)$  als Summe dieser  $T_j$  ist ein Element des Kohomologie-Ringes  $H^*(X, \mathbb{Q})$ . Daneben benötigt man den „Chern-Charakter“  $ch(W) \in H^*(X, \mathbb{Q})$  eines Vektorbündels, der ebenso ein Polynom in den einzelnen Chern-Klassen ist. Dieser ist durch Additivität bezüglich der direkten Summe von Bündeln und Multiplikativität bzgl. Tensorproduktbildung gekennzeichnet. Für ein Geradenbündel  $L$  gilt  $ch(L) = \exp(c_1(L)) \in H^*(X, \mathbb{Q})$ . (Die Terme in Graden höher als  $2n$  verschwinden).

Als Toddsche Zahl eines Vektorbündels  $W$  definiert Hirzebruch den Bestandteil

$$T(X, W) := \kappa_n(ch(W) \cdot td(X))$$

des höchsten Grades  $2n$ , der in dem entsprechenden Produkt in  $H^*(X, \mathbb{Q})$  auftritt und genau wie  $T(X)$  als eine Zahl interpretiert werden kann.

Für ein Geradenbündel  $F$  auf  $X$  ist dann

$$T(X, F) = \kappa_n(e^{c_1(F)} \cdot td(X)).$$

Hirzebruch stellte den verallgemeinerten Riemann-Rochschen Satz auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress in Amsterdam 1954 vor [Hi 1956b] und kündigte diesen in [Hi 1954a] an. Die umfassende Darstellung erschien in seinem Buch „Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie“ [Hi 1956a].

**Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch für Vektorbündel** [Hi 1956b], [Hi 1956a]. *Sei  $X$  eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit und  $W$  ein holomorphes Vektorbündel. Dann ist*

$$\chi(X, W) = T(X, W).$$

Wir geben noch unmittelbare Folgerungen an: Es sei  $V_n$  eine  $n$ -dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit und  $F$  ein holomorphes Geradenbündel. Es seien  $c_j$  bzw.  $f$  die Chernklassen von  $V_n$  bzw.  $F$ . Dann gilt

$$\chi(V_1, F) = \left( f + \frac{1}{2} c_1 \right) [V_1] \quad (\text{klassischer Satz von Riemann Roch})$$

$$\chi(V_2, F) = \left( \frac{1}{2} (f^2 + fc_1) + \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) \right) [V_2]$$

(enthält die M. Noethersche Formel für  $f = 0$ )

$$\chi(V_3, F) = \left( \frac{1}{6} f^3 + \frac{1}{4} f^2 c_1 + \frac{1}{12} f(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24} c_1 c_2 \right) [V_3]$$

...

### 16.3 Erste Anwendungen des Satzes von Hirzebruch-Riemann-Roch

Der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch ist eine ganz zentrale Methode der Komplexen Analysis, die bei globalen Fragestellungen stets zuerst herangezogen wird und zahllose Anwendungen gefunden hat.

**Vollständige Durchschnitte.** Einige wichtige Implikationen waren von Anfang an bekannt [Hi 1956b], wie zunächst die Berechnung der *Hodge-Zahlen* von vollständigen Durchschnitten  $V_n$ .

Für diese Mannigfaltigkeiten hatte Hirzebruch allerdings die Übereinstimmung des verallgemeinerten Toddschen und arithmetischen Geschlechtes vorab induktiv bewiesen. In dieser Situation sind die Chern-Klassen auf Grund von Lefschetz-Sätzen bekannt. Ist etwa  $V_n = V_n^{(a_1, \dots, a_r)} \subset \mathbb{P}_{n-r}$  vollständiger Durchschnitt von  $r$  Hyperflächen der Grade  $a_j$  und  $h \in H^2(V_n, \mathbb{Z})$  die Klasse des allgemeinen Hyperebenenschnittes (d. h. in anderer Notation die Chern-Klasse von  $\mathcal{O}_{V_n}(1)$ ), so gilt für die (totale) Chern-Klasse von  $V_n$

$$c(V_n) = (1 + h)^{n+r+1} (1 + a_1 h)^{-1} \cdot \dots \cdot (1 + a_r h)^{-1},$$

wobei auf naheliegende Weise mit formalen Potenzreihen im Kohomologiering von  $V_n$  gerechnet werden soll. Der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch liefert nun die Berechnung der holomorphen Eulerzahlen der Geradenbündel  $\mathcal{O}_{V_n}(k)$ : Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi(V_n, \mathcal{O}_{V_n}(k)) z^{n+r} = (1 - z)^{-(k+1)} \prod_{i=1}^r (1 - (1 - z)^{a_i}).$$

Eine entsprechende Formel gilt für die  $\chi_y(V_n, \mathcal{O}_{V_n}(k))$ , welche analog zu den  $\chi_y(V_n)$  durch den Übergang von  $\Omega^p$  zu  $\Omega^p(\mathcal{O}_{V_n}(k))$  erklärt sind:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_y(V_n, \mathcal{O}_{V_n}(k)) z^{n+r} = \frac{(1 + zy)^{k-1}}{(1 - z)^{k+1}} \prod_{i=1}^r \frac{(1 + zy)^{a_i} - (1 - z)^{a_i}}{(1 + zy)^{a_i} + y(1 - z)^{a_i}}.$$

Als Korollar gewinnt man die Berechnung der Hodge-Zahlen, denn abgesehen von der „mittleren Kohomologie“, d. h. für  $p + q \neq n$ , stimmen die Hodge-Zahlen mit denen des projektiven Raumes überein, es gilt  $h^{p,q} = 1$  für  $p = q \leq n$ , und  $h^{p,q} = 0$  sonst. Die übrigen lassen sich nun aus den  $\chi^p(V_n)$  berechnen als

$$\chi^p(V_n) = (-1)^{n-p} h^{p, n-p} + (-1)^p \quad \text{für } 2p \neq n$$

$$\chi^m(V_n) = (-1)^m h^{m, m} \quad \text{für } 2m = n.$$

**Homogene Räume.** Die im Jahre 1953 begonnenen Arbeiten von Armand Borel und Friedrich Hirzebruch wurden in [B-Hi 1958/1959/60] veröffentlicht. Sie gaben dort eine umfassende Darstellung von Techniken der Kohomologietheorie von Faserbündeln. Die Ergebnisse entsprangen dem Problem, die charakteristischen Klassen homogener Mannigfaltigkeiten zu berechnen. Allgemeiner betrachteten sie ein differenzierbares Prinzipal-Faserbündel  $E \rightarrow B$  mit Strukturgruppe  $G$ . Zu einer abgeschlossenen Untergruppe  $U$  sei  $E/U \rightarrow B$  das zugehörige  $G/U$ -Bündel. Untersucht wurden die charakteristischen Klassen von  $E/U$ ,  $B$  und  $G/U$  sowie Beziehungen zwischen diesen.

Ein typisches Resultat ist das folgende: Es sei  $G$  eine kompakte Liesche Gruppe mit maximalem Torus  $T$  und  $W$  die Weyl-Gruppe von  $G$  auf  $T$ , d. h. die Gruppe, die durch innere Automorphismen von  $G$  induziert wird. Diese operiert auf der zu  $H^1(T, \mathbb{Q})$  gehörigen symmetrischen Algebra  $A$ . Es wird der gradierte Ring  $H^*(G/T, \mathbb{Q}) \simeq A/\mathcal{I}$  betrachtet, wobei  $\mathcal{I}$  das von den Invarianten der Operation von  $W$  auf  $A$  in positiver Dimension erzeugte Ideal bezeichne. Die Isotropiedarstellung von  $T$  auf dem zugehörigen Quotienten von Lie-Algebren  $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$  spaltet diesen auf in zweidimensionale Ebenen  $e_1 + \dots + e_m$  (diese werden mit einer Orientierung  $w$  versehen), auf denen  $T$  in nicht trivialer Weise operiert. Die fastkomplexe Struktur, welche durch diese Operation von  $T$  auf dem Tangentialbündel von  $G/T$  definiert wird, sei mit  $\mathcal{T}_w$  bezeichnet. Für alle  $j = 1, \dots, m$  erklärt  $w$  eine Darstellung von  $T$  auf  $S^1$ . Die Orientierung  $w$  definiert auf diese Weise  $m$  verschiedene Charaktere, die Wurzeln  $\alpha_j \in \text{Hom}(T, S^1)$ . Vermöge  $\text{Hom}(T, S^1) \simeq H^1(T, \mathbb{Z})$  werden diese als Elemente von  $A$  aufgefaßt. Es wurde gezeigt, daß die totale Chernsche Klasse von  $\mathcal{T}_w$  mit dem Produkt  $\prod_{j=1}^m (1 + \alpha_j)$  übereinstimmt. Es konnte nun der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch angewandt werden für den Fall, daß die fastkomplexe Struktur integrierbar ist. (Dann ist  $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$  projektiv algebraisch).

Es ergaben sich enge Beziehungen zu einer Formel von Hermann Weyl für den Grad einer irreduziblen Darstellung: Die Dimension der Vektorräume aller holomorphen Schnitte gewisser Geradenbündel über  $G/T$  stimmen mit solchen Graden irreduzibler Darstellungen überein. Motiviert hiervon ergab sich der Satz von Borel und Weil (siehe [Hi 1958] und Kommentar auf Seite 791 in [Hi 1987]).

Der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch hat sich auf vielerlei Weise weiterentwickelt. Erwähnt werden mögen das Ergebnis von Grothendieck und der Satz von Atiyah und Singer über den Index elliptischer Operatoren. In der dritten Auflage des Buches [Hi 1956a] befindet sich ein von R. L. E. Schwarzenberger verfaßter Anhang, der auf diese Entwicklung eingeht.

**Kompakte Quotienten beschränkter symmetrischer Gebiete** wurden von Hirzebruch in [Hi 1958] untersucht:

Es werden projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten  $Y$  und  $Z$  derselben Dimension  $n$  *proportional* mit Proportionalitätsfaktor  $a \in \mathbb{Q}^*$  genannt, (geschrieben „ $Y \approx a \cdot Z$ “), falls für alle  $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_k \leq n$  mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$  die Produkte der Chernklassen, gebildet in  $H^{2n}(Y, \mathbb{Z})$  bzw.  $H^{2n}(Z, \mathbb{Z})$  bis auf den Faktor  $a$  übereinstimmen:

$$c_{\lambda_1}(Y) \cdot \dots \cdot c_{\lambda_k}(Y) = a \cdot c_{\lambda_1}(Z) \cdot \dots \cdot c_{\lambda_k}(Z)$$

(„Proportionalität der Chernschen Zahlen“).

Für solche Mannigfaltigkeiten gilt insbesondere:

$$\chi^p(Y) = a \cdot \chi^p(Z)$$

$$\chi(Y, r) = a \cdot \chi(Z, r)$$

$$E(Y) = a \cdot E(Z)$$

$$\tau(Y) = a \cdot \tau(Z).$$

Hierbei bezeichnet  $\chi(,r)$  die holomorphe Euler-Poincaré-Charakteristik der  $r$ -ten Potenz des kanonischen Bündels der jeweiligen Mannigfaltigkeit und  $E$  die gewöhnliche Euler-Poincaré-Charakteristik. Es steht  $\tau$  für die Signatur der betreffenden Mannigfaltigkeit.

Gemäß der Klassifikation der beschränkten, homogenen, symmetrischen Gebiete durch Elie Cartan ist ein solches Gebiet  $X$  auf natürliche Weise offen in eine homogene, projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit  $X'$  eingebettet derart, daß alle biholomorphen Abbildungen des Gebietes  $X$  auf sich selbst zu biholomorphen Abbildungen der Mannigfaltigkeit  $X'$  fortgesetzt werden können. Es sei nun  $\Delta$  eine eigentlich diskontinuierliche, fixpunktfrei operierende Gruppe von Automorphismen von  $X$  mit kompaktem Quotienten. Dann gilt:

**Proportionalitätssatz** (Hirzebruch [Hi 1958]). *Die projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeiten  $X/\Delta$  und  $X'$  sind proportional.*

Mit Hilfe dieses Satzes können Aussagen über  $\chi(X/\Delta, r)$  und damit über die Zahl linear unabhängiger automorpher Formen von Gewicht  $2r$  gewonnen werden.

## 17 Deformationstheorie

### 17.1 Teichmüllertheorie

Die von Oswald Teichmüller begründeten Methoden zur Klassifikation kompakter Riemannscher Flächen stehen am Anfang der modernen Deformationstheorie komplexer Räume. Die Teichmüllertheorie ist zunächst von ihrer Vorgehensweise her der Funktionentheorie einer Veränderlichen zuzuordnen, obwohl in Teichmüllers letzter Arbeit über dieses Gebiet ein allgemeinerer Standpunkt eingenommen wird. Über die Geschichte der Teichmüllertheorie soll an dieser Stelle nicht berichtet werden (vgl. etwa [Schu 1990]).

Oswald Teichmüllers Ansatz bestand darin, quasikonforme Abbildungen im Sinne von Herbert Grötzsch zwischen zwei gegebenen Riemannschen Flächen zu betrachten, sodann extremale Abbildungen auszuzeichnen und schließlich diese in Verbindung zu quadratischen holomorphen Differentialen zu setzen. Hier soll im Hinblick auf die höherdimensionale Verallgemeinerung der Aspekt der Beltramischen Differentialgleichung angesprochen werden.

Es sei  $X$  eine feste, kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ , die als Referenz diene. Zu einem quadratischen holomorphen Differential  $\phi$  auf  $X$ , geschrieben in lokalen Koordinaten als  $\phi = \phi(z)dz^2$ , und einer Zahl  $0 < k < 1$

gehört das ausgezeichnete Beltrami-Differential

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} d\bar{z} = k \frac{\bar{\phi}}{|\phi|} \frac{\partial}{\partial z} \bar{d}z.$$

Die zugehörige komplexe Struktur berechnet sich als Lösung der Beltramigleichung

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \Big/ \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \mu(z),$$

d. h.  $w = f(z)$  ist eine holomorphe Koordinate bzgl. der neuen komplexen Struktur. Die offene Einheitskugel im Raum der quadratischen holomorphen Differentiale auf  $X$  parametrisiert dann alle komplexen Strukturen auf  $X$  in einem Sinne, der präzisiert werden soll. Diese Menge trägt nun selbst eine natürliche komplexe Struktur. Die resultierende komplexe Mannigfaltigkeit (die darüber hinaus ein Holomorphiegebiet ist) heißt *Teichmüllerraum*  $\mathcal{T}_g$  aller kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$ . Die zu Punkten  $p \in \mathcal{T}_g$  gehörigen komplexen Strukturen auf  $X$  lassen sich nun zu einer holomorphen Familie kompakter Riemannscher Flächen zusammenfassen, d. h. man erhält eine eigentliche, glatte holomorphe Abbildung  $f: \mathcal{X}_g \rightarrow \mathcal{T}_g$  komplexer Mannigfaltigkeiten derart, daß die Fasern  $f^{-1}(p)$  die zur betreffenden komplexen Struktur auf  $X$  gehörigen kompakten Riemannschen Flächen sind. Auf Grund der Konstruktion ist  $\mathcal{X}_g \rightarrow \mathcal{T}_g$  mit einem Diffeomorphismus zur trivialen Familie  $X \times \mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{T}_g$  versehen. Eine kompakte Riemannsche Fläche  $Y$  zusammen mit der Homotopieklasse eines Diffeomorphismus  $Y \rightarrow X$  heißt *markierte Riemannsche Fläche*, und allgemeine Familien markierter Riemannscher Flächen  $\mathcal{Z} \rightarrow S$  sind nach Definition mit einem Diffeomorphismus  $\mathcal{Z} \rightarrow X \times S$  versehen.

Die Teichmüllersche Familie  $\mathcal{X}_g \rightarrow \mathcal{T}_g$  ist nun *universell* im folgenden Sinne: Eine beliebige Familie  $\mathcal{Z} \rightarrow S$  markierter Riemannscher Flächen geht aus der Teichmüllerschen Familie durch „Basiswechsel“ hervor: Es gibt eine eindeutige bestimmte holomorphe Abbildung  $S \rightarrow \mathcal{T}_g$ , vermöge welcher die Familie  $\mathcal{Z} \rightarrow S$  markierter Riemannscher Flächen zu  $\mathcal{X}_g \times_{\mathcal{T}_g} S \rightarrow S$  biholomorph äquivalent ist.

Insbesondere durchlaufen die Fasern der universellen Familie alle Isomorphieklassen kompakter Riemannscher Flächen. Sieht man nun von Markierungen ab, so sind solche Basiswechsel nur eindeutig bestimmt bis auf die Elemente der diskreten Gruppe aller Homotopieklassen von Diffeomorphismen von  $X$ , welche als Gruppe (holomorpher) Automorphismen auf  $\mathcal{T}_g$  operiert. Diese wird Teichmüllersche Modulgruppe  $\Gamma_g$  genannt. Damit steht die Menge aller Isomorphieklassen kompakter Riemannscher Flächen vom Geschlecht  $g$  in eineindeutiger Beziehung zu der Menge der Punkte des Quotientenraumes  $\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g / \Gamma_g$ . Dieser normale komplexe Raum wird als Modulraum der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$  bezeichnet. Die Isotropiegruppe eines Punktes  $p \in \mathcal{T}_g$  der Teichmüllerschen Modulgruppe  $\Gamma_g$  ist in diesem Sinne mit der Automorphismengruppe der zugehörigen Riemannschen Fläche zu identifizieren.

Bei der Konstruktion des Teichmüllerraumes wird  $X$  als Referenzfläche stets festgehalten. Hierfür ist es unerheblich, welche Riemannsche Fläche man



dazu wählt. Für den Referenzpunkt liefert der Grenzübergang  $k \rightarrow 0$ , daß der Kotangententialraum des Teichmüllerraumes der Raum der quadratischen holomorphen Differentiale ist. Die Frage nach dem Tangentialraum wird durch die Serre-Dualität beantwortet: Es handelt sich um die erste Kohomologiegruppe

$$H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

von  $X$  mit Werten in der Garbe der holomorphen Vektorfelder. Die harmonischen Repräsentanten im Sinne der Hodge-Theorie sind gerade von der Form

$$\frac{\phi}{g} \frac{\partial}{\partial z} \overline{dz},$$

wobei  $\phi dz^2$  ein quadratisches holomorphes Differential und  $g dz \overline{dz}$  die hyperbolische Metrik von  $X$  ist.

### 17.2 Deformationen komplexer Mannigfaltigkeiten und komplexer Räume

Sieht man etwa vom Studium kompakter komplexer Tori ab, so sind zu den Begründern der Deformationstheorie zunächst Max Noether (mit Untersuchungen über algebraische Flächen) sowie in neuerer Zeit Alfred Fröhlicher und Albert Nijenhuis, Masatake Kuranishi, sowie Kunihiko Kodaira und Donald C. Spencer zu rechnen. Ohne weitere Voraussetzungen ist dieses Klassifikationsproblem jedoch nur im lokalen Sinne lösbar:

Es sei  $X$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit oder ein kompakter komplexer Raum. Unter einer *Deformation* von  $X$  über einem komplexen Raum  $S$  mit ausgezeichnetem Punkte  $s_0$  versteht man eine holomorphe, eigentliche und flache Abbildung  $f: \mathcal{X} \rightarrow S$  zusammen mit einem Isomorphismus zwischen  $X$  und der Faser  $\mathcal{X}_{s_0} = f^{-1}(s_0)$ . Man nennt nun zwei Deformationen über  $S$  bereits dann isomorph, wenn sie über einer Umgebung des ausgezeichneten Punktes biholomorph äquivalent sind. Es erweist sich als zweckmäßig, als Basen von Deformationen *Raumkeime* vorzusehen. Ähnlich wie im Falle der Teichmüllertheorie gehen durch Basiswechsel aus gegebenen Deformationen weitere hervor: Ist  $g: R \rightarrow S$ ,  $g(r_0) = s_0$  eine holomorphe Abbildung komplexer Räume mit ausgezeichneten Punkten, so induziert das Faserprodukt  $\mathcal{X} \times_S R \rightarrow R$  eine Deformation von  $X$ . Eine Deformation, die durch Basiswechsel alle Deformationen einer gegebenen Mannigfaltigkeit oder eines komplexen Raumes induziert, nennt man *vollständig*.

*Infinitesimale Deformationen* von  $X$  lassen sich wie bei Riemannschen Flächen durch die Elemente des endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraums

$$H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

eindeutig beschreiben. Eine Deformation, die eine infinitesimale Deformation stets nur auf eindeutige Weise durch Basiswechsel (d. h. in diesem Falle durch Einschränkung auf Tangentialvektoren) erzeugt, heißt *effektiv*. Vollständige und effektive Deformationen heißen *semi-universell* oder kurz *versell*. (Daneben wird auch noch eine andere Sprechweise benutzt).

Allerdings läßt sich nicht wie für Riemannsche Flächen jede infinitesimale Deformation zu einer Deformation über einer Basis positiver Dimension fortset-

zen. Dies bedeutet nichts anderes, als daß die Basis einer versellen Deformation im allgemeinen singularär ist.

Eine grundlegende Frage der Deformationstheorie betrifft die Charakterisierung lokal trivialer Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. Eine Familie von kompakten Mannigfaltigkeiten  $\{\mathcal{X}_t\}_{t \in M}$ , parametrisiert durch eine komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  ist gegeben durch eine eigentliche holomorphe Abbildung  $f: \mathcal{X} \rightarrow M$  von maximalem Rang derart, daß für alle  $t \in M$  gilt  $\mathcal{X}_t = f^{-1}(t)$ . Eine solche Familie heißt *lokal trivial*, wenn es zu jedem Punkt  $t \in M$  eine Umgebung  $U \subset M$  zusammen mit einer biholomorphen Abbildung  $\Phi: f^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{X}_t \times U$ , welche gefolgt von der Projektion  $\mathcal{X}_t \times U \rightarrow U$  die Einschränkung von  $f$  auf  $f^{-1}(U)$  ergibt. Insbesondere sind die Fasern lokal trivialer Familien über (zusammenhängenden) komplexen Mannigfaltigkeiten sämtlich isomorph. Die Aussage des Satzes von Wolfgang Fischer und Hans Grauert besteht in der Umkehrung.

**Satz** [Fi-Gr 1965]. *Sind alle Fasern  $\mathcal{X}_t$ ,  $t \in M$  der holomorphen Familie  $f: \mathcal{X} \rightarrow M$  komplex-analytisch isomorph, so ist die Familie  $f: \mathcal{X} \rightarrow M$  lokal-trivial.*

In den Anfängen der Deformationstheorie wurden verschiedene Fragen betrachtet, die später unter der Annahme der Existenz einer versellen Deformation leicht zu beantworten waren, so daß das Hauptproblem der Deformationstheorie für lange Zeit in der Konstruktion eines solchen Objektes bestand.

**Satz** (Douady, Forster-Knorr, Grauert, Palamodov). *Jeder kompakte komplexer Raum besitzt eine verselle Deformation.*

Otto Forster und Knut Knorr benutzten in [Fo-Kn 1977] Potenzreihenmethoden, während Hans Grauert in [Gr 1974] sogenannte Astral-Räume konstruierte. Der Ansatz von Adrien Douady beruht auf funktionalanalytischen Methoden, der Theorie der „privilegierten Polyzylinder“, und Victor Palamodov betrachtet Auflösungen der Strukturgarbe eines komplexen Raumes mittels verbundener Garbensysteme antikommutativer, graduierter, freier Algebren.

Daneben wurden andere wichtige Deformationsprobleme untersucht, wie etwa Deformationen isolierter Singularitäten (vgl. z. B. [Gr-Ke 1964]) oder holomorpher Vektorbündel (vgl. [Fo-Kn 1977]).

## 18 Literatur

- [Ah 1941] Ahlfors, L.: The theory of meromorphic curves. Acta. Soc. Fenn. Nova Ser. A 3, 171-183
- [An-Gr 1962] Andreotti, A.; Grauert, H.: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bulletin de la Société Mathématique de France 90, 193-259
- [At-Hi 1961] Atiyah, M. F.; Hirzebruch, F.: Vector bundles and homogeneous spaces. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 3, 7-38. American Mathematical Society 1961
- [Ba 1967] Barth, W.: Einige Eigenschaften analytischer Mengen in kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten, Göttingen. Gött. Math. Nat. Diss.
- [Ba 1968] Barth, W.: Fortsetzung meromorpher Funktionen in Tori und komplex projektiven Räumen. Inventiones mathematicae 5, 42-62

- [Ba 1968] Barth, W.: Lokale Cohomologie bei isolierten Singularitäten analytischer Mengen. Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster. 2. Serie, Heft 5
- [Ba 1970] Barth, W.: Transplanting cohomology classes in complex projective space. *American Journal of Mathematics* **92**, 951–967
- [Be 1930/31] Behnke, H.: Vorlesungen über Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher, ausgearbeitet von P. Thullen. Mathematisches Seminar Münster
- [Be-St 1937] Behnke, H.; Stein, K.: Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **47**, 177–192
- [Be-St 1951] Behnke, H.; Stein, K.: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete. *Math. Ann.* **124**, 1–16
- [Be-Th 1933] Behnke, H.; Thullen, P.: Das Konvergenzproblem der Regularitätshüllen. *Mathematische Annalen* **108**, 91–104
- [Be-Th 1934] Behnke, H.; Thullen, P.: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 3. Berlin: Springer-Verlag. Zweite, erweiterte Auflage, herausgegeben von R. Remmert. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1970
- [Ber 1922] Bergmann, St.: Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. *Mathematische Annalen* **86**, 238–271
- [B-Hi 1958/1959/60] Borel, A.; Hirzebruch, F.: Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III. *American Journal of Mathematics* **80**, 458–535, **81**, 315–382, **82**, 491–504
- [Bo-Re 1962] Borel, A.; Remmert, R.: Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen* **145**, 429–439
- [Bra 1928] Brauner, K.: Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher, II. Das Verhalten der Funktionen in der Umgebung ihrer Verzweigungsstellen. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Hamburg **6**, 1–55
- [Bre 1954] Bremermann, H.L.: Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und Holomorphiegebiete im Raum von  $n$  komplexen Veränderlichen. *Mathematische Annalen* **128**, 63–91
- [Br 1966a] Brieskorn, E.: Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds. *Proceedings of the National Academy of Science* **55**, 1395–1397
- [Br 1966b] Brieskorn, E.: Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. *Inventiones mathematicae* **2**, 1–14
- [Br 1968] Brieskorn, E.: Rationale Singularitäten komplexer Flächen. *Inventiones mathematicae* **4**, 336–358
- [Car 1932] Carathéodory, C.: Über die analytischen Abbildungen von mehrdimensionalen Räumen. In: Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich. Band 1, 93–101
- [Ca 1931] Cartan, H.: Les fonctions de deux variables complexes. *Journal de Mathématiques Pures et appliquées*, 9me série, **10**, 1–114
- [Ca 1933] Cartan, H.: Sur les zéros des combinaisons linéaires de  $p$  fonctions holomorphes données. *Mathematica (Cluj)* **7**, 80–103
- [Ca 1938] Cartan, H.: Sur le premier problème de Cousin. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* **207**, 558–560
- [Ca 1951/52a] Cartan, H.: Séminaire ENS 1951/52, Exposé 13. La notion d'espace analytique général et de fonction holomorphe sur un tel espace
- [Ca 1951/52b] Cartan, H.: Séminaire ENS 1951/52, Exposés 18, 19. Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein
- [Ca 1953/54] Cartan, H.: Quotient d'une variété analytique par un groupe discret d'automorphismes. Séminaire ENS, Exposé XII
- [Ca 1960] Cartan, H.: Quotients of complex analytic spaces. *International Colloquium on Function Theory*, Tata Institute, Bombay, 1–15
- [Ca-Th 1932] Cartan, H.; Thullen, P.: Regularitäts- und Konvergenzbereiche. *Mathematische Annalen* **106**, 617–647
- [C-S 1953] Cartan, H.; Serre, J. P.: Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* **237**, 128–130

- [Ch 1945] Chern, S.-S.: Characteristic classes of hermitian manifolds, *Annals of Mathematics* **47**, 86–121 (1946)
- [Co 1895] Cousin, P. A.: Sur les fonctions de  $n$  variables complexes. *Acta mathematica* **19**, 1–62
- [Di 1970] Diederich, K.: Das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metrik in streng pseudokonvexen Gebieten. *Mathematische Annalen* **187**, 9–36
- [Eh 1941] Ehresmann, Ch.: Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* **216**, 319–321
- [Fi 1975] Fischer, G.: Ein relativer Satz von Chow und die Elimination von Unbestimmtheitsmengen meromorpher Funktionen. *Mathematische Annalen* **217**, 145–152
- [Fi-Fo 1979] Fischer, G.; Forster, O.: Ein Endlichkeitssatz für Hyperflächen auf kompakten komplexen Räumen. *Journal für reine die und angewandte Mathematik* **306**, 88–93
- [Fi-Gr 1965] Fischer, W.; Grauert, H.: Lokal triviale Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen*, 89–94
- [Fo 1967] Forster, O.: Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln. *Mathematische Zeitschrift* **97**, 376–405
- [Fo-Kn 1971] Forster, O.; Knorr, K.: Ein Beweis des Grauert'schen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange. *Manuscripta Mathematica* **5**, 19–44
- [Fo-Kn 1972] Forster, O.; Knorr, K.: Relativ-analytische Räume und die Kohärenz von Bildgarben. *Inventiones mathematicae* **16**, 113–160
- [Fo-Kn 1977] Forster, O.; Knorr, K.: Über die Deformationen von Vektorraumbündeln auf kompakten komplexen Räumen. *Mathematische Annalen* **209**, 291–346
- [Fo-Kn 1977] Forster, O.; Knorr, K.: Konstruktion verseller Deformationen kompakter komplexer Räume. *Lecture Notes in Mathematics* **703**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag
- [Fr 1957] Frenkel, J.: Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **85**, 135–230
- [Gr 1955] Grauert, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. *Mathematische Annalen* **129**, 232–259
- [Gr 1958a] Grauert, H.: Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Mathematische Annalen* **135**, 263–273
- [Gr 1958b] Grauert, H.: On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds. *Annals of Mathematics* **68**, 460–472
- [Gr 1960] Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. *Publ. Inst. Hautes Etudes Sci. No. 5*, 233–292
- [Gr 1962] Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Mathematische Annalen* **146**, 331–368
- [Gr 1974] Grauert, H.: Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Räume. *Inventiones mathematicae* **25**, 107–142
- [Gr-Ke 1964] Grauert, H.; Kerner, H.: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. *Mathematische Annalen* **153**, 236–260
- [Gr-Re 1955] Grauert, H.; Remmert, R.: Zur Theorie der Modifikationen I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. *Mathematische Annalen* **129**, 274–296
- [Gr-Re 1956] Grauert, H.; Remmert, R.: Plurisubharmonische Funktionen in Komplexen Räumen. *Mathematische Zeitschrift* **65**, 175–194
- [Gr-Re 1957] Grauert, H.; Remmert, R.: Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie. *Commentarii Mathematici Helvetici* **31**, 152–183
- [Gr-Re 1958a] Grauert, H.; Remmert, R.: Komplexe Räume. *Mathematische Annalen* **135**, 245–318
- [Gr-Re 1958b] Grauert, H.; Remmert, R.: Bilder und Urbilder analytischer Garben. *Annals of Mathematics* **68**, 393–443
- [Gr-Re 1962] Grauert, H.; Remmert, R.: Über kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeiten. *Archiv der Mathematik* **13**, 498–507
- [Gr-Re 1971] Grauert, H.; Remmert, R.: Analytische Stellenalgebren. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band **167**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag

- [Gr-Re 1977] Grauert, H.; Remmert, R.: Theorie der Steinschen Räume. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 227. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag
- [Gr-Re 1984] Grauert, H.; Remmert, R.: Coherent analytic sheaves. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 265. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag
- [Gr-Ri 1970] Grauert, H.; Riemenschneider, O.: Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen. *Inventiones mathematicae*, **11**, 263–292
- [Gr-Ri 1970b] Grauert, H.; Riemenschneider, O.: Kählersche Mannigfaltigkeiten mit hyper  $q$ -konvexem Rand. In: *Problems in analysis, a symposium in honor of Salomon Bochner*, 61–79. Princeton University Press
- [Gro 1917] Gronwall, Th: On the expressibility of a uniform function of several variables as the quotient of two functions of entire character. *Transactions of the American Mathematical Society* **18**, 50–64
- [Ham 1971] Hamm, H.: Lokale Eigenschaften komplexer Räume. *Mathematische Annalen* **191**, 235–252
- [Ha 1903] Hartogs, F.: Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlicher. Dissertation München. Leipzig: Teubner (erschienen 1904)
- [Ha 1906] Hartogs, F.: Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen. *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München*. Leipzig: Teubner
- [Ha 1907] Hartogs, F.: Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variablen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **16**, 223–240
- [Ha 1909] Hartogs, F.: Über die aus den singulären Stellen einer analytischen Funktion mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebilde. *Acta mathematica* **32**, 57–79
- [Ha 1911] Hartogs, F.: Über die Bedingungen, unter welchen eine analytische Funktion mehrerer Veränderlichen sich wie eine rationale verhält. *Mathematische Annalen* **70**, 207–222
- [Hi 1951] Hirzebruch, F.: Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen* **124**, 77–86
- [Hi 1953a] Hirzebruch, F.: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. *Mathematische Annalen* **126**, 1–22
- [Hi 1953b] Hirzebruch, F.: Todd arithmetic genus for almost complex manifolds. *Vervielfältigtes Manuskript*, Princeton University
- [Hi 1954a] Hirzebruch, F.: Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic varieties. *Proceedings of the National Academy of Science, USA*, **40**, 110–114
- [Hi 1954b] Hirzebruch, F.: The theorem of Riemann-Roch. Applications to special classes of algebraic manifolds. In: *Colloque Henri Poincaré, Textes des conférences*, Paris: Institut Henri Poincaré
- [Hi 1956a] Hirzebruch, F.: *Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag
- [Hi 1956b] Hirzebruch, F.: Der Satz von Riemann-Roch in faisceau-theoretischer Formulierung. Einige Anwendungen und offene Fragen. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954*, vol III. Amsterdam: North Holland, 457–473
- [Hi 1958] Hirzebruch, F.: Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch. In: *Symposium Internacional de Topologia Algebraica (Mexico 1956)*. México: La Universidad Nacional Autónoma de México, 129–144
- [Hi 1966/67] Hirzebruch, F.: Singularities and exotic spheres. *Séminaire Bourbaki*, exp. **314**, Textes des conférences, o.S. Paris: Institut Henri Poincaré
- [Hi 1987] Hirzebruch, F.: *Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers Bd. I*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag

- [Ho 1951] Hopf, H.: Über komplex analytische Mannigfaltigkeiten. *Rend. Mat. appl. Serie V*, **10**, 169–182
- [Hol 1960a] Holmann, H.: Quotientenräume komplexer Mannigfaltigkeiten nach komplexen Lieschen Automorphismengruppen. *Mathematische Annalen* **139**, 383–402
- [Hol 1960b] Holmann, H.: Quotienten komplexer Räume. *Mathematische Annalen*, **142**, 407–440
- [Hol 1963] Holmann, H.: Komplexe Räume mit komplexen Transformationsgruppen. *Mathematische Annalen* **150**, 327–360
- [Hu 1990] Huckleberry, A.: Actions of groups of holomorphic transformations. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 69, Several Complex Variables VI*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 143–196
- [Hu-Oe 1980] Huckleberry, A.; Oeljeklaus, E.: A characterization of complex homogeneous cones. *Mathematische Zeitschrift* **170**, 181–194
- [Hur 1898] Hurwitz, A.: Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit. In: *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897*. F. Rudio, Ed. Leipzig: Teubner, 91–112
- [KaL 1967] Kaup, L.: Eine Künnethformel für Fréchetgarben. *Mathematische Zeitschrift* **97**, 158–168
- [KaL 1968] Kaup, L.: Das topologische Tensorprodukt kohärenter analytischer Garben. *Mathematische Zeitschrift* **106**, 273–292
- [KaW 1960] Kaup, W.: Infinitesimale Transformationsgruppen komplexer Räume. *Mathematische Annalen* **160**, 72–92
- [KaW 1971] Kaup, W.: Some remarks on the automorphism groups of complex spaces. *Rice University Studies* **56**, 181–186
- [Ke 1960a] Kerner, H.: Über die Fortsetzung holomorpher Abbildungen. *Archiv der Mathematik* **11**, 44–49
- [Ke 1960b] Kerner, H.: Über die Automorphismengruppe kompakter komplexer Räume. *Archiv der Mathematik* **11**, 282–288
- [Ke 1966] Kerner, H.: Familien kompakter und holomorph vollständiger komplexer Räume. *Mathematische Zeitschrift* **92**, 225–233
- [Ki 1905] Kistler, H.: Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen. *Inauguraldissertation Göttingen*
- [Ki-Ve 1971] Kiehl, R.; Verdier, J.-L.: Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert. *Mathematische Annalen* **195**, 24–50
- [Kl 1926/27] Klein, F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil I/II*. Berlin: Springer-Verlag
- [Kn 1932] Kneser, H.: Der Satz von dem Fortbestehen der wesentlichen Singularitäten einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **41**, 164–168
- [Kn 1938] Kneser, H.: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlichen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **48**, 1–28
- [Kn-Schn 1971] Knorr, K.; Schneider, M.: Relativexzeptionelle analytische Mengen. *Mathematische Annalen* **146**, 331–368
- [Las 1905] Lasker, E.: Zur Theorie der Moduln und Ideale. *Mathematische Annalen* **60**, 20–115
- [Lr 1946] Leray, J.: L'anneau d'homologie d'une représentation. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* **222**, 1366–1368
- [Le 1910] Levi, E. E.: Studi sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse. *Annali di Matematica pura ed applicata, 3. ser* **17**, 61–87
- [Le 1911] Levi, E. E.: Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse. *Annali di Matematica pura ed applicata, 3. ser* **18**, 69–79
- [Li 1966] Lieb, I.: Über komplexe Räume und komplexe Spektren. *Inventiones mathematicae* **1**, 45–58
- [Li 1970] Lieb, I.: Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten. *Mathematische Annalen* **190**, 6–44

- [Li 1972] Lieb, I.: Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten: Stetige Randwerte. *Mathematische Annalen* **199**, 241-256
- [Ne 1926] Nevanlinna, R.: Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen. *Acta Mathematica* **48**, 367-391
- [No 1954] Norguet, F.: Sur les domaines d'holomorphie des fonctions univalentes de plusieurs variables complexes. *Bulletin de la société mathématique de France* **82**, 137-159
- [Oe 1970] Oeljeklaus, E.: Ein Hebbarkeitssatz für Automorphismengruppen kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen* **190**, 154-166
- [Ok 1937] Oka, K.: Domaines d'holomorphie. *Journal of Science of the Hiroshima University*, ser. **A 9**, 7-19
- [Ok 1942] Oka, K.: Domaines pseudoconvexes. *Tôhoku Mathematical Journal* **49**, 15-52
- [Ok 1953] Oka, K.: Domaines finis sans point critique intérieur. *Japanese Journal of Mathematics* **23**, 97-155
- [Os 1900] Osgood, W. F.: Zweite Note über analytische Functionen mehrerer Veränderlichen. *Mathematische Annalen* **53**, 461-464
- [Os 1914] Osgood, W. F.: Topics in the theory of functions of several complex variables. The Madison Colloquium. New York: American Mathematical Society
- [Os 1929] Osgood, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II. Leipzig und Berlin: Teubner
- [Po 1883] Poincaré, H.: Sur les fonctions de deux variables. *Acta Mathematica* **2**, 97-113
- [Po 1907] Poincaré, H.: Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. *Rend. Circ. mat. Palermo* **23**, 185-220
- [Reif 1965] Reiffen, H. J.: Die Carathéodorysche Distanz und ihre zugehörige Differentialmetrik. *Mathematische Annalen* **61**, 315-324
- [Reif 1966] Reiffen, H. J.: Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompaktem Träger. *Mathematische Annalen* **164**, 272-279
- [Rei 1921] Reinhardt, K.: Über Abbildungen durch analytischer Funktionen zweier Veränderlicher. *Mathematische Annalen* **83**, 211-255
- [Re 1955] Remmert, R.: Projektionen analytischer Mengen. *Mathematische Annalen* **130**, 410-441
- [Re 1956a] Remmert, R.: Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparable et holomorphiquement convexe. *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **243**, 118-121
- [Re 1956b] Remmert, R.: Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen. *Mathematische Annalen* **132**, 277-288
- [Re 1957] Remmert, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. *Mathematische Annalen* **133**, 328-370
- [Re-St 1953] Remmert, R.; Stein, K.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. *Mathematische Annalen* **126**, 259-281
- [Re-St 1960] Remmert, R. Stein, K.: Eigentliche holomorphe Abbildungen. *Mathematische Zeitschrift* **73**, 159-189
- [Re-VV 1963] Remmert, R.; Van de Ven, T.: Zur Funktionentheorie homogener komplexer Mannigfaltigkeiten. *Topology* **2**, 137-157
- [Ri 1851] Riemann, B.: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Inauguraldissertation, Göttingen. *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. Herausgeber: H. Weber. Leipzig: Teubner 1876
- [Ri 1854] Riemann, B.: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Bei der Habilitation vorgetragene Schrift, Göttingen. In: *B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. Herausgeber: H. Weber. Leipzig: Teubner 1876
- [Ri 1857] Riemann, B.: Theorie der Abelschen Functionen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **54**, 115-155. In: *B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. Leipzig: Teubner 1876
- [Rie 1971] Riemenschneider, O.: Characterizing Moishezon spaces by almost positive coherent analytic sheaves. *Mathematische Zeitschrift* **123**, 263-284

- [Rie 1973] Riemenschneider, O.: A generalization of Kodaira's embedding theorem. *Mathematische Annalen* **200**, 99–102
- [Rie 1976] Riemenschneider, O.: Familien komplexer Räume mit streng pseudokonvexer spezieller Faser, *Commentarii Mathematici Helvetici* **51**, 547–565
- [Ro 1865] Roch, G.: Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **64**, 372–376
- [Ro 1950] Rothstein, W.: Die Fortsetzung vier- und höherdimensionaler Flächen des  $R_{2,n}(n \geq 3)$ . *Mathematische Annalen* **121**, 340–355
- [Ro 1955] Rothstein, W.: Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von  $n$  komplexen Veränderlichen. *Mathematische Annalen* **129**, 96–138
- [Rü 1933] Rückert, W.: Zur Elimination der Potenzreihenideale. *Mathematische Annalen* **107**, 259–281
- [Sche 1961] Scheja, G.: Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen. *Mathematische Annalen* **144**, 345–360
- [Sche 1964] Scheja, G.: Fortsetzungssätze der komplex-analytischen Cohomologie und ihre algebraische Charakterisierung. *Mathematische Annalen* **157**, 75–94
- [Schn 1972a] Schneider, M.: Halbstetigkeitssätze für relativ analytische Räume. *Inventiones mathematicae* **16**, 161–176
- [Schn 1972b] Schneider, M.: Bildgarben und Fasercohomologie für relativ analytische Räume. *Manuscripta Mathematica* **7**, 67–82
- [Schn 1974] Schneider, M.: Ein einfacher Beweis des Verschwindungssatzes für positive holomorphe Vektorraumbündel. *Manuscripta mathematica* **11**, 95–101
- [Schn 1975] Schneider, M.: Lefschetzsätze und Hyperkonvexität. *Inventiones mathematicae* **31**, 183–192
- [Schn 1976] Schneider, M.: Tubenumgebungen Steinscher Räume. *Manuscripta mathematica* **18**, 391–397
- [Schu 1990] Schumacher, G.: The theory of Teichmüller spaces, a view towards moduli spaces of Kähler manifolds. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Vol. **69**, Several Complex Variables IV. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 251–310
- [Se 1952] Serre, J.-P.: Les petits cousins. Briefe an H. Cartan. P. Hilton, F. Hirzebruch, R. Remmert (Herausgeber): *Miscellanea mathematica*. Springer-Verlag: Berlin 1991, 277–291
- [Se 1955/56] Serre, J.-P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Annales de l'Institut Fourier* **6**, 1–42
- [Si 1955] Siegel, C. L.: Meromorphe Funktionen auf kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten. *Ges. Abh.* **III**, 216–222
- [Siu 1969a] Siu, Y. T.: Extending coherent analytic sheaves. *Annals of Mathematics* **90**, 108–143
- [Siu 1969b] Siu, Y. T.: Noether-Lasker decomposition of coherent analytic subsheaves. *Transactions of the AMS* **135**, 375–385
- [Siu 1971] Siu, Y. T.: A Hartogs type extension theorem for coherent analytic sheaves. *Annals of Mathematics* **93**, 166–188
- [Siu 1974] Siu, Y. T.: Analyticity of set of associated Lelong numbers and the extension of positive currents. *Inventiones mathematicae* **38**, 53–156
- [Siu 1976] Siu, Y. T.: Every Stein subvariety possesses a Stein neighborhood. *Inventiones mathematicae* **38**, 80–100
- [S-T 1971] Siu, Y.-T.; Trautmann, G.: Gap sheaves and extension of coherent analytic subsheaves. *Lecture Notes in Mathematics* **172**, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag
- [Spa 1963] Spallek, K.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Osgood und Hartogs auf komplexe Räume. *Mathematische Annalen* **151**, 200–218
- [Sp 1929] Späth, H.: Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **161**, 95–100
- [St 1941] Stein, K.: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen. *Mathematische Annalen* **117**, 727–757



- [St 1951] Stein, K.: Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. *Mathematische Annalen* **123**, 210–222
- [St 1956] Stein, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. *Mathematische Annalen* **132**, 68–93
- [Sb 1887] Stickelberger, L.: Über einen Satz des Herrn Noether. *Mathematische Annalen* **30**, 401–409
- [Sto 1953] Stoll, W.: Die beiden Hauptsätze der Werteverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen I. *Acta Mathematica* **90**, 1–115
- [Sto 1954] Stoll, W.: Die beiden Hauptsätze der Werteverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen II. *Acta Mathematica* **92**, 55–169
- [St 1967] Storch, U.: Fastfaktorische Ringe. Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster
- [Te 1942] Teichmüller, O.: Veränderliche Riemannsche Flächen. Manuskript. Erschienen in: *Deutsche Mathematik* **7**, 341–359 (1944)
- [Tm 1953] Thimm, W.: Über meromorphe Abbildungen von komplexen Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen* **128**, 1–48
- [Tm 1962] Thimm, W.: Lückengarben von kohärenten analytischen Modulgarben. *Mathematische Annalen* **148**, 372–394
- [Tm 1966] Thimm, W.: Der Weierstraßsche Satz der algebraischen Abhängigkeit von Abelschen Funktionen und seine Verallgemeinerungen, Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß, herausgegeben von Heinrich Behnke und Klaus Kopfermann, Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag
- [Tm 1970] Thimm, W.: Fortsetzung von kohärenten analytischen Modulgarben. *Mathematische Annalen* **184**, 329–353
- [Th 1932] Thullen, P.: Die Regularitätshüllen. *Mathematische Annalen* **106**, 64–76
- [Tr 1968a] Trautmann, G.: Abgeschlossenheit von Corandmoduln und Fortsetzbarkeit kohärenter analytischer Garben. *Inventiones mathematicae* **5**, 216–230
- [Tr 1968b] Trautmann, G.: Eine Bemerkung zur Struktur der kohärenten analytischen Garben. *Archiv der Mathematik* **19**, 300–304
- [Tr 1969a] Trautmann, G.: Ein Endlichkeitssatz in der analytischen Geometrie. *Inventiones mathematicae* **8**, 143–174
- [Tr 1969b] Trautmann, G.: Fortsetzung lokal-freier Garben über 1-dimensionale Singularitätenmengen. *Scuola Normale Superiore Pisa* **23**, 155–184
- [Ul 1990] Ullrich, P.: The Riemann Removable Singularity Theorem from 1841 Onwards. Göttingen: Workshop on the History of Modern Mathematics, 1990. In: *The History of Modern Mathematics*, Vol. III, hrsg. v. E. Knobloch und D. E. Rowe, 155–178; Boston, San Diego: Academic Press 1994
- [Ul 1994] Ullrich, P.: The Riemann mapping problem. Erscheint in *Rend. Circ. Mat. Palermo*, II. Ser., Suppl., 22 Manuskriptseiten
- [We] Weierstraß, K.: *Mathematische Werke*, 7 Bände. Berlin: Mayer & Müller 1894–1927; Nachdruck Hildesheim: Georg Olms
- [Wey 1913] Weyl, H.: *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Leipzig und Berlin: Teubner, 2. Aufl. 1923

Zusatz bei der Korrektur: Der Autor dankt Herrn Peter Ullrich für den folgenden Hinweis: Die vielfach Henri Poincaré zugeschriebene Aussage, daß Dizylinder und zweidimensionale Kugel nicht biholomorph aufeinander abbildbar sind (Abschnitt 3.3), wurde erst von Reinhardt im Jahre 1921 bewiesen. Poincaré selbst zeigte eine schwächere Aussage (vgl. [Ul 1994]).

Georg Schumacher  
Fakultät und Institut für Mathematik  
Ruhr-Universität Bochum  
44780 Bochum  
e-mail: georg.schumacher@rz.ruhr-uni-bochum.de

(Eingegangen 3. 1. 1995)



# Walter de Gruyter Berlin • New York

## Algebra

Proceedings of the IIIrd International  
Conference on Algebra held in  
Krasnoyarsk, Russia, August 23 - 28, 1993

*Editors:*

Yu. L. Ershov • E. I. Khukhro •  
V. M. Levchuk • N. D. Podufalov  
1996. 17 x 24 cm. XII, 306 pages.  
Cloth DM 268,- / öS 2.091,- / sFr 255,-  
ISBN 3-11-014413-1

Includes 30 research articles on group theory,  
associative rings, field theory, recursion theory,  
and universal algebra.

## Algebra and Analysis

Proceedings of the International Centennial  
Chebotarev Conference held in Kazan,  
Russia, June 5 - 11, 1994

*Editors:*

M. M. Arslanov • A. N. Parshin •  
I. R. Shafarevich  
1996. 17 x 24 cm. VIII, 163 pages.  
Cloth DM 218,- / öS 1.701,- / sFr 208,-  
ISBN 3-11-014803-X

Includes 12 original research contributions by  
invited speakers of the conference. Particular  
attention is given to Lie algebras, repre-  
sentation theory, and the Kleene-Post theory  
of degrees of unsolvability.

## Arithmetic, Geometry, and Coding Theory

Proceedings of the International  
Conference held at Centre International de  
Rencontres Mathématiques (CIRM),  
Luminy, France, June 28 - July 2, 1993

*Editors:*

R. Pellikaan • M. Perret • S. G. Vlăduț  
1996. 17 x 24 cm. XII, 288 pages.  
With 3 figures.  
Cloth DM 228,- / öS 1.779,- / sFr 218,-  
ISBN 3-11-014616-9

Main subject is the interaction between num-  
ber theory and algebraic geometry on the one  
hand, and coding theory on the other hand.

## Higher Dimensional Complex Varieties

Proceedings of the International Conference  
held in Trento, Italy,  
June 15 - 24, 1994

*Editors:* M. Andreatta • Th. Peternell

1996. 17 x 24 cm. VIII, 381 pages.  
With 4 figures and 6 tables.  
Cloth DM 268,- / öS 2.091,- / sFr 255,-  
ISBN 3-11-014503-0

Contains 17 research papers by invited speakers  
and selected participants of the conference.  
The contributions vary from complex analysis  
to parts of algebraic geometry with connec-  
tions to theoretical physics. Particular empha-  
sis is on Calabi-Yau manifolds and the topo-  
logy of compact Kähler manifolds.

H. Salzmann / D. Betten /  
T. Grundhöfer / H. Hähl / R. Löwen /  
M. Stroppel

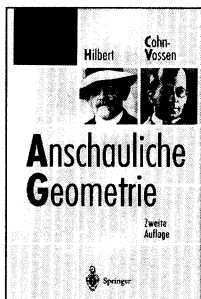
## Compact Projective Planes

With an introduction to  
Octonion Geometry

1996. 17 x 24 cm. XIII, 688 pages.  
With 31 figures.  
Cloth DM 258,- / öS 2.013,- / sFr 246,-  
ISBN 3-11-011480-1

*de Gruyter Expositions in Mathematics,  
Volume 21*

The first book providing a comprehensive and  
systematic exposition on topological projective  
planes, giving complete proofs of most of the  
highlights of the theory while keeping prerequi-  
sites at a minimum. With more than 40 years  
of research incorporated and a bibliography  
comprising nearly 700 items, the book will be  
a basic reference for the experts in the field.  
At the same time, the text is designed as an  
introduction for those who want to enter this  
rich and exciting part of mathematics. Necess-  
ary background results from geometry and  
Lie theory are included in an appendix, histo-  
rical notes complement the text.



D. Hilbert, S. Cohn-Vossen

## Anschauliche Geometrie

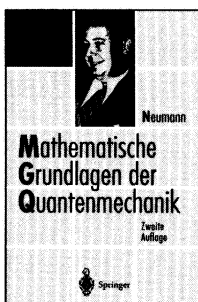
Geleitwort von M. Berger  
Appendix von P. Alexandroff

2. Aufl. 1996. XX, 358 S. 354 Abb.  
Geb. DM 68,-; öS 496,40;  
sFr 65,50 ISBN 3-540-59069-2

**Anschauliche Geometrie** - wohl selten ist ein Mathematikbuch seinem Titel so gerecht geworden wie dieses außergewöhnliche Werk von Hilbert und Cohn-Vossen. Zuerst 1932 erschienen, hat das Buch nichts von seiner Frische und Kraft verloren. Hilbert hat sein erklärtes Ziel, die Faszination der Geometrie zu vermitteln, bei Generationen von Mathematikern erreicht.

*Aus Hilberts Vorwort:* „Das Buch soll dazu dienen, die Freude an der Mathematik zu mehren, indem es dem Leser erleichtert, in das Wesen der Mathematik einzudringen, ohne sich einem beschwerlichen Studium zu unterziehen“.

Preisänderungen vorbehalten.



J.v. Neumann

## Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

Geleitwort von R. Haag

2. Aufl. 1996. Etwa 280 S. 4 Abb.  
Geb. DM 68,-; öS 496,40;  
sFr 65,50 ISBN 3-540-59207-5

Aus dem Geleitwort von R. Haag:

„Es bleibt die Faszination eines großen Wurfs und großen Ideenreichtums.“

Es gibt einige Bücher, die die naturwissenschaftliche Welt verändert haben: John von Neumanns Buch über die Quantenmechanik gehört dazu! Mit dieser richtungweisenden Studie legte er den Grundstein für seine späteren, weltberühmten Arbeiten in den USA.

Das Buch ist nicht nur von historischem Interesse, sondern kann immer noch als elementare Einführung in die Grundbegriffe der Quantenmechanik mit Gewinn studiert werden. Seine besondere Stärke ist die Verbindung zwischen physikalischer Idee und mathematischer Exaktheit. Ein Gewinn für jeden Leser aus den Bereichen Mathematik und Physik - schon ab dem vierten Semester.



K. Knopp

## Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen

Vorwort von W. Walter

6. Aufl. 1996. XX, 580 S. 14 Abb.  
Geb. DM 68,-; öS 496,40;  
sFr 65,50 ISBN 3-540-59111-7

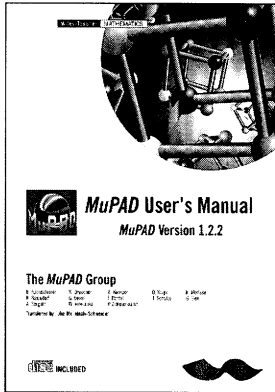
Als dieses Buch zum ersten Mal erschien (als Band 2 der neugegründeten *Grundlehren*), lobte man einhellig die Anlage und den Stil des Bandes. Selten nur blieb ein Buch über sechs Jahrzehnte hinweg wegen seiner hervorragenden Didaktik und seiner anregenden Formulierungen so gefragt. In dieser neuen Auflage beschreibt Wolfgang Walter, der Knopp noch persönlich kannte, die Wirkungsgeschichte und Bedeutung von Knopps klassischer Einführung in die Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.



Springer

# MuPAD User's Manual + CD ROMs

## Multi-Processing Algebra Data Tool – MuPAD Version 1.2.2



*The MuPAD Group –*

B. Fuchssteiner,  
K. Drescher, A. Kemper,  
O. Kluge, K. Morisse,  
H. Naundorf, G. Oevel,  
F. Postel, T. Schulze,  
G. Siek, A. Sorgatz,  
W. Wiwianka, and  
P. Zimmermann,  
Universität – GH Paderborn,  
Germany

Translated by  
Julia McIntosh-Schneider

1996, XIV, 572 Seiten, 16,8 x 24,4 cm.  
Geb. DM 98,- / öS 725,- / sFr 98,-  
ISBN 3-519-02114-5

Developments in computer algebra systems will help shape the way mathematical models and techniques will be used in future applications of mathematics in science and engineering. At the forefront of these developments, MuPAD is a powerful computer algebra system designed to handle mathematical problems and computations of a new order of magnitude. The MuPAD User's Manual provides a detailed survey of the system's capabilities and contains:

- A complete description of the MuPAD programming language.
- Guidelines on how to produce graphics with MuPAD.
- A survey of the functions of the MuPAD standard library.

Designed as a parallel system it will also run on sequential computers, from small size machines to more powerful workstations. The advantages over other computer algebra systems are that

- MuPAD is a system that offers a window-based user-interface (hypertext on-line help, graphics and a source code debugger) on all platforms.
- MuPAD is the first system that provides native parallel instructions to the user.
- MuPAD offers tools for the dynamical linking of binary code objects.

Students, researchers and professionals in all quantitative disciplines will find MuPAD to be a user-friendly and invaluable aid to their work. The accompanying CDs include a hypertext version of the manual and the full MuPAD system for the following platforms:

- PC (Linux)
- Sun 4
- Apple Macintosh
- Silicon Graphics
- Hewlett-Packard
- DECstation



A Publishing Partnership  
between John Wiley & Sons and B. G. Teubner

**Wiley – Teubner**  
Industriestraße 15 · 70565 Stuttgart